

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

На правах рукописи



САВИХИН АНДРЕЙ ОЛЕГОВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ГИДРОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ТРУБОПРОВОДА С ЖИДКОСТЬЮ
ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ**

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Кочетков Анатолий Васильевич

Нижний Новгород – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Глава 1. Состояние вопроса.....	9
1.1. Обзор работ по теме диссертации.....	9
1.2. Обзор численных методов	14
1.3. Выводы из обзора	18
Глава 2. Задача ударного нагружения трубопровода с жидкостью в плоской постановке.....	20
2.1. Математическая постановка задачи	20
2.1.1. Определяющая система уравнений	21
2.1.2. Вариационно-разностный метод численного решения и алгоритм расчета.....	24
2.1.3. Алгоритм определения сил контактного взаимодействия	30
2.2 Результаты численного исследования взаимодействия ударника с трубопроводом.....	32
2.2.1. Трубопровод без внутренней жидкости	32
2.2.2. Трубопровод, заполненный жидкостью	41
2.2.3. Подводный трубопровод, заполненный жидкостью	53
2.3 Выводы по главе	59
Глава 3. Задача ударного нагружения трубопровода с жидкостью в трехмерной постановке	60
3.1. Постановка задачи	60
3.2. Результаты численного исследования	61
3.2.1. Сравнение результатов численного моделирования с результатами решения задачи в плоской постановке	62
3.2.2. Решение задачи ударного взаимодействия участка пространственного трубопровода с длинным грузом.....	64
3.2.3. Решение задачи ударного взаимодействия участка пространственного трубопровода с коротким грузом	68
3.3. Выводы по главе	72
Глава 4. Задача гидроупругого деформирования протяженной трубопроводной системы при локальном ударе	73
4.1. Математическая постановка задачи	73
4.1.1. Математическая модель гидродинамических процессов в трубопроводе.....	74
4.1.2. Численное решение задачи гидравлического удара методом характеристик	76
4.1.3. Гидроупругая модель пространственного движения трубопровода с жидкостью	78
4.1.4. Решение задачи динамики пространственного трубопровода методом разложения по формам собственных колебаний.....	80
4.2. Результаты численного исследования	82
4.2.1. Расчет гидроударных процессов в жидкости, заполняющей трубопровод	83
4.2.2. Расчет удара массы по трубопроводу без жидкости.....	87
4.2.3. Расчет удара массы по трубопроводу, заполненному жидкостью	91
4.3. Выводы по главе	103

Заключение.....	104
Список литературы.....	106

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Трубопроводные системы являются неотъемлемым элементом сложных технических объектов, таких как ядерные энергетические установки, комплексы по добыче и транспортировке жидких углеводородов, нефтеперерабатывающие предприятия и др. Последствия возможных аварий на этих объектах могут привести к выбросам радиоактивных и токсичных веществ, а так же обширным территориям загрязнения окружающей среды. Аварии могут возникнуть в связи с внешним ударным воздействием на участки конструкций. Эти воздействия, как правило, характеризуются высокой интенсивностью. Внешние воздействия обычно делят на воздействия природного и техногенного характера. К природным воздействиям можно отнести землетрясения, ураганы, цунами и так далее. К техногенным воздействиям относятся аварии на АЭС, падение самолетов, взрывы, а также воздействия, вызванные ошибочными или умышленными (теракты, диверсии) действиями человека. В результате таких воздействий возникает опасность разрушения и прорыва трубопроводов, под воздействием импульсных нагрузок. Такими нагрузками могут служить падения на трубопровод обломков и частей ограждающих конструкций в результате их разрушения. В связи с этим возникает необходимость в проведении исследований, связанных с изучением проблемы прочности труб под воздействием импульсных и ударных нагрузок. Трубопроводные системы являются, как правило, протяженными конструкциями. Локальное ударное воздействие на одном участке трубопровода вызывает сложную динамическую деформационную картину во всей системе. Можно выделить две фазы: короткая фаза удара, завершающаяся отскоком ударяемого груза от трубопровода, и относительно длинная фаза движения самого трубопровода. Характерное время фазы удара – миллисекунды, а фазы движения трубопровода – секунды. Во время первой фазы интенсивное ударное воздействие вызывает нелинейную волновую картину деформации трубной оболочки на участке её контакта с грузом и жидкостью. В результате взаимодействия возникают большие перемещения, необратимые деформации в трубопроводе, а также вынужденное движение заполняющей трубопровод сжимаемой жидкости с формированием гидроударного импульса. Во второй фазе развиваются близкие к линейным волновые процессы во всей протяженной трубопроводной системе под действием сил ударного воздействия на трубопровод со стороны груза и гидроудара в заполняющей жидкости. Одним из эффективных научных методов изучения ударного нагружения трубопроводов является математическое моделирование. Для решения этой проблемы требуется моделирование различных

физических процессов, взаимосвязанных между собой. Полное решение задачи можно получить на основе комплекса уже известных и апробированных моделей и методов.

Степень разработанности темы

Во всем многообразии решенных задач по динамике пространственных трубопроводов лишь небольшая их часть посвящена исследованиям деформирования при ударных воздействиях. В основном рассматриваются задачи по исследованию гидроударных явлений и колебаний. В научной литературе практически отсутствуют работы, посвященные поперечным ударам по пространственному трубопроводу, заполненному жидкостью. Предлагаемый в работе подход для численного моделирования нелинейных процессов динамики трубопроводных систем при локальном ударе основывается на известных методиках численного решения задач нестационарной гидроупругости и гидроупругопластичности, но является новым и рассматривается впервые.

Целью диссертационной работы является разработка подхода для численного моделирования гидроупругопластического деформирования пространственных трубопроводов с жидкостью при локальном ударном воздействии. В процессе достижения поставленной цели были рассмотрены следующие **задачи**:

- исследование возможности сведения трехмерной динамической контактной задачи к решению более простой задачи динамики квазиодномерных пространственных криволинейных стержней при заданных начальных и краевых условиях;
- выявление факторов, определяющих взаимодействие трубопровода с ударяемым грузом и внутренней жидкостью;
- выявление факторов, определяющих формирование гидроударных волновых явлений в трубопроводной системе.

Научная новизна

Разработан новый подход для численного моделирования гидроупругопластического деформирования пространственного трубопровода при локальном ударном воздействии. Подход основан на применении двумерных и трехмерных моделей контактного взаимодействия трубопровода, ударника и заполняющей жидкости, с учетом сопутствующих нелинейных факторов в окрестности зоны удара, а также квазиодномерных гидроупругих моделей описания динамики протяженной трубопроводной системы в целом. Решены новые нелинейные контактные задачи поперечного удара по трубопроводу, содержащему жидкость, в плоской и пространственной постановках. Решения получены с учетом больших перемещений, необратимых деформаций, эффектов отрыва сред и кавитации в жидкости.

Выявлены основные закономерности и особенности гидроупругопластического деформирования пространственных трубопроводов при локальном ударе.

Теоретическая значимость работы

Разработан новый подход, который позволяет проводить численные исследования динамического деформирования трубопроводных систем при ударном нагружении. Выявлены основные закономерности формирования гидроударных импульсов при поперечном ударе по трубопроводу.

Практическая значимость работы

Проведенные в диссертационной работе исследования, полученные результаты, а также разработанный подход к решению задач динамики протяженных трубопроводов при локальном ударе, могут быть использованы при проектировании конструкций, содержащих трубопроводные системы, с целью оценки их работоспособности и безопасности в аварийных ситуациях.

Методология и методы диссертационного исследования

Основной методологией диссертационного исследования является численное моделирование взаимосвязанных деформационных и гидродинамических волновых процессов в протяженных пространственных трубопроводах, содержащих жидкость, при ударном нагружении с использованием развитых методов вычислительной математики и механики: вариационно-разностного метода, метода конечных элементов, метода характеристик, метода разложения решения по формам собственных колебаний. Исследования проводились с использованием программных комплексов «Динамика-2», RANT и LS-DYNA.

На защиту выносятся:

- подход для численного моделирования гидроупругопластического деформирования протяженных пространственных трубопроводов с жидкостью при локальном ударном нагружении;
- развитие численных методик и программного обеспечения для решения нелинейных задач динамического деформирования трубопроводов с жидкостью;
- результаты численных исследований связанных деформационных и гидродинамических волновых процессов при ударном воздействии на трубопроводы с жидкостью, полученные в результате решения следующих задач:
 - деформирование трубопровода в плоской постановке с учетом сопутствующих нелинейных факторов и с оценками влияния различных факторов;

- динамическое деформирование трубопровода в трехмерной постановке с оценками параметров формирующихся волн гидроудара;
- динамика протяженного трубопровода при локальном ударе с оценками влияния воздействий гидроудара и непосредственно удара груза на поведение трубопровода.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением известных апробированных математических моделей и обоснованных методик численного решения задач нестационарной гидроупругости, применением сертифицированных программных комплексов для численного моделирования, а также соответствием результатов полученных при решении задач в различных постановках.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях: X всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011), IX всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 2012), XIX международном симпозиуме "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова (Ярополец, 2013), XI всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015). Работа в целом докладывалась на III научно-технической конференции "Динамика и прочность конструкций аэрогидроупругих систем. Численные методы" (Москва, 2015) и научном семинаре НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, 2015).

Диссертационная работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009-2013 годы» (ГК № 16.740.11.0087), грантов РФФИ (№11-08-97040-р_поволжье_а, №14-08-00197, №14-08-31149-мол_а), Программы поддержки ведущих научных школ России (грант №НШ-4807.2010.8). Диссертационная работа содержит теоретические, методологические и прикладные результаты полученные автором при выполнении НИР № 8.2668.2014/К в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности в 2014-2015 годах.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 10 работ, в том числе 6 из них в изданиях, рекомендованных ВАК [1-6].

Личный вклад автора:

- разработка подхода для численного моделирования гидроупругопластического деформирования пространственных трубопроводов с жидкостью при ударном нагружении [3,4];
- модификации ряда программных модулей пакетов прикладных программ «Динамика-2» и RANT [1,3,6];
- численное решение контактной задачи взаимодействия ударника и трубопровода, содержащего жидкость, в трехмерной постановке [4];
- проведение анализа полученных численных результатов в плоской и пространственной постановках [1-5];
- выявление характерных особенностей, происходящих в протяженных трубопроводных системах, под действием локального ударного воздействия [3,4].

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы; содержит 97 рисунков, 3 таблицы, библиографический список из 171 наименований – всего 119 страниц.

Благодарности

Автор выражает благодарность Зефинову С.В., Овчинникову В.Ф., Смирнову Л.В., Яскеляину А.В., Повереннову Е.Ю. за консультации и предоставленное программное обеспечение.

ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

1.1. ОБЗОР РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Задача ударного нагружения трубопровода с протекающей в нем жидкостью является сложной для изучения. Для задач такого класса характерны значительные формоизменения поперечного сечения трубопровода, а так же взаимосвязанность деформационных процессов в трубопроводе и гидродинамических процессов в жидкости. На сегодняшний день разработано множество подходов для решения подобных задач, но ни один из них не дает качественно полного решения задачи гидроупругости в трубопроводной системе в целом. В основном эти подходы описывают отдельные стадии процессов, происходящих в трубопроводе при ударных воздействиях. Среди них можно выделить подходы по изучению контактных задач по соударению тел и жидкости, распространению гидроударных явлений в трубопроводах с внутренней жидкостью, а так же подходы по изучению движения протяженных пространственных трубопроводов при заданных нагрузках.

Большая часть исследований динамики трубопроводов с заполняющей жидкостью посвящена изучению возникающих в них гидроударных явлений. Гидравлические удары в трубопроводах, как известно, происходят при быстром закрытии и открытии задвижек, клапанов, кранов, при пуске и остановке насосов, а так же при импульсных торцевых воздействиях на трубопровод. Исследованием динамических процессов в трубопроводах с жидкостью занимались многие ученые. Среди них можно выделить известные труды Жуковского Н.Е., Батлина А., Кармана Т., Болотина В.В., Ильгамова М.А., Филиппова А.П., Вольмира А.С., Светлицкого В.А., Кондрашева Н.С., Белостоцкого А.М., Трояновского И.Е., Пашкова И.А., Духовного И.А., Овчинникова В.Ф., Самарина А.А., Смирнова Л.В., Куликова Ю.А., Богомолова С.И., Доценко П.Д., Босняцкого Г.П., Торли, Wiggert D.S., Hatfield F.J., Stukenbruck S., Wilkinson D.H., Walker J.S., Phillips J.W., N. Chiba, Wang Bin, и других авторов. Вопросами гидродинамики занимались Л. Эйлер, Д. Бернулли [7] и другие известные ученые. Исторический обзор исследований по этой тематике сделан Г.Т. Алдошиным [8], в нем изложено развитие постановок задач и их решений от Эйлера до наших дней. Исторической вехой в теории гидравлического удара является работа Н.Е. Жуковского [9]. В основу теории положены уравнения движения идеальной жидкости, а деформация стенок трубы рассмотрена как квазистационарная деформация упругого кольца. Для теории и приложений большое значение имеет статья Г. Т. Алдошина [10], в которой решена задача о распространении гидравлического удара в системе двух соосных цилиндров.

Необходимо упомянуть о значительном вкладе в развитие теории гидравлического удара и внутренних течений жидкости в трубах научной школы И.П. Гинзбурга (БГТУ "Военмех"). И.П. Гинзбург получил аналитическое решение задачи о неустановившемся течении жидкости в длинном трубопроводе переменного диаметра, в рамках классической теории гидравлического удара [11-13]. Примерами актуальных и практически важных работ его школы являются статьи [14-15]. Развитие классической теории гидравлического удара Н.Е. Жуковского представлено в трудах Tijsseling A.S., Lavooij C.S.W. [16-17]. Гидроудары в трубопроводах рассматривали в своих работах Г.В. Аронович [18], Величко [19], Хатфилд, Уиггерт [20] и другие. Исследования торцевых импульсных нагружений трубопровода с жидкостью подробно рассмотрены в работах [21-23]. В них торцевой удар моделировался при помощи поршневых систем. В [24] проводится исследование динамического отклика цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью, при распространении в ней импульса давления от взрыва. Эта задача представляет интерес с точки зрения обоснования разработанных методов математического моделирования и процессов ударного взаимодействия конструкций с жидкостью, поскольку для нее известны результаты тщательно выполненных экспериментальных исследований, опубликованных в [25]. Численное моделирование взрыва в цилиндрической оболочке, заполненной и окруженной жидкостью, рассматривается в работе [26]. В работе А.В. Яскеляина [27] проведено моделирование и даны оценки гидравлического удара возникающего в жидкости при вынужденных колебаниях трубопровода.

При решении задач интенсивного ударного нагружения внешней поверхности трубопроводов с внутренней жидкостью необходимо учитывать нелинейные и взаимосвязанные между собой процессы, происходящие в ударнике и трубопроводе, а именно большие перемещения и формоизменения, необратимые пластические деформации в трубе, формирование волн гидроудара, эффекты отрыва и кавитации в жидкости. Основной подход для исследования упругопластического деформирования пространственных трубопроводов с внутренней жидкостью, основывается на динамических уравнениях механики сплошных сред или теории оболочек. Такой подход оправдан для относительно коротких трубопроводов или для протяженных трубопроводов в местах приложения интенсивных локальных нагрузок. В этом случае можно учесть контактное взаимодействие трубопровода с окружающими и заполняющими средами, значительные локальные формоизменения поперечного сечения трубопровода, необратимые деформации, возникающие в трубопроводе, и другие нелинейности геометрического и физического характера. При проектировании трубопроводных систем часто используют тонкостенные

трубы. В связи с этим большое количество работ выполнено с использованием уравнений теории оболочек. Действие интенсивных нагрузок может приводить к большим перемещениям тонкостенных элементов конструкций, не описываемым линейной теорией. Большой вклад в развитие геометрически нелинейной теории оболочек внесли работы В.З. Власова, А.С. Вольмира, К.З. Галимова, Х.М. Муштари, И.Г. Терегулова, В.Г. Баженова, В.И. Дресвянникова и др. [28-34]. Фундаментальная задача взаимодействия цилиндрической оболочки и заполняющей ее жидкости изучалась в труде А.С. Вольмира [35]. Основное внимание уделено вопросам анализа их колебаний. Рассматривались оболочки правильной цилиндрической или конической формы, жидкость считалась несжимаемой. Приведена обширная библиография по задачам гидроупругости. Обзор методов сведения трехмерной задачи к двумерной, решение которой приближенно восстанавливает трехмерные поля смещений, деформаций и напряжений в оболочечных элементах конструкций, приведен в работах В.З. Власова [28], А.С. Вольмира [29], В.В. Болотина, Ю.Н. Новичкова [36], С. А. Амбарцумяна [37], А.В. Кармишина, А.И. Жукова и др. [38], К.З. Галимова, В.Н. Паймушина [39], Л.Ю. Коссовича [40] и других авторов. В работах Ткаченко О.П. разработан подход к математическому моделированию трубопровода, при котором нелинейные уравнения движения трубы выведены на основе обобщения теории оболочек В.З. Власова, а описание движения жидкости основано на уравнениях Эйлера с учетом трения в шероховатых трубах. Построенная им математическая модель позволяет исследовать как медленные движения трубопровода во внешней среде, так и распространение гидроупругих колебаний и гидравлического удара. Результаты его работ опубликованы в [41-44]. В [45] определяются перемещения и напряжения в бесконечной цилиндрической оболочке, находящейся в упругой среде, под действием осесимметричной волны давления, движущейся вдоль оболочки с постоянной скоростью.

Вопросы динамического деформирования магистральных газопроводов высокого давления при интенсивных ударных нагрузках рассматриваются в работах А.В. Кочеткова и др. [46-48]. Влияние заполняющей среды ограничивалось учетом внутреннего давления. Моделирование задач импульсного нагружения конструкций содержащих трубопроводы, а так же методы расчета сейсмического воздействия на эти конструкции приведены в работах [49-51]. Деформации магистральных трубопроводов под действием сейсмических нагрузок рассмотрены Н.А. Махутовым и др. в работе [52]. Авторами предложен алгоритм инженерных оценок деформаций, возникающих в пустом трубопроводе при сейсмическом сдвиге. Эти оценки сопоставлены с результатами численного моделирования процесса деформации методом конечных элементов. Исследованиям нелинейной динамики

пространственных трубопроводов и моделированию их поперечных разрывов посвящены работы Егунова Ю.В., Кочеткова А.В. и др. [53-54].

Для задач динамики протяженных пространственных трубопроводов часто применяют методы на основе квазиодномерных уравнений движения пространственных стержней с внутренней жидкостью. Линейные задачи о взаимодействии прямой трубы и жидкости рассматриваются в работах Р.Г. Якупова. В [55] анализируются волновые процессы в полубесконечном стержне, находящемся в упругой среде, при ударной внешней нагрузке. В работах Богомолова С.И., Велитченко В.И., Вереземского В.Г., Самарина А.А и ряда других авторов влияние внутреннего потока жидкости внутри криволинейных стержней учитывалось в качестве дополнительной массы. С учетом этого подхода выполнен ряд расчетов динамических свойств трубопроводов, а так же исследований вопросов сейсмостойкости [56-63]. Уравнение колебаний криволинейного трубопровода постоянной кривизны с учетом нестационарного внутреннего давления и скорости движения жидкости впервые приведено в работе Ушакова В.С. [64]. Это уравнение малых линейных колебаний трубопровода относительно его свободного состояния. Развитием этого подхода занимались многие ученые. Среди них можно выделить работы Доценко П.Д, Ковревского А.П., Кондрашова Н.С, и других [65-74]. В этих работах влияние жидкости заменяется действием некоторой распределенной нагрузки. Теория криволинейных стержней подробно описывается в работах Светлицкого В. А. В его трудах [75-80] рассмотрены задачи взаимодействия стержней с потоком воздуха или жидкости, изложены численные методы определения собственных значений и собственных векторов при колебаниях консервативных и неконсервативных систем. В частности показано, что воздействие потока жидкости на поведение криволинейных трубопроводов является существенно нелинейным. В его работах рассмотрены так же задачи динамики абсолютно гибких стержней. Изложены приближенные численные методы исследования параметрических и вынужденных колебаний для моделей тонких криволинейных стержней с одномерным потоком жидкости. Наиболее часто для решения задач динамики пространственных трубопроводов используют методы характеристик и метод разложения решения по формам собственных колебаний. Применение обоих методов ограничивается в основном одномерными задачами. Метод характеристик [81-84] позволяет максимально сблизить область зависимости аппроксимирующей и исходной систем дифференциальных уравнений. Метод разложения решения по формам собственных колебаний [85-88] применяется в основном при решении широкого класса задач, не связанных с локальными эффектами деформирования конструкций. В математическом плане этот метод сводится к анализу систем обыкновенных

дифференциальных уравнений относительно невысокого порядка. Большой вклад в исследование динамики пространственных трубопроводов с заполняющей жидкостью внесли работы В.Ф. Овчинникова и Л.В. Смирнова [89-95]. В [94] авторами были разработаны уравнения малых колебаний, при выводе которых учтено исходное напряженно-деформированное состояние, связанное с наличием движущейся жидкости. В работах [90-92] построена одномерная модель динамики криволинейных трубопроводов с учетом оболочечных эффектов и влияния внутреннего потока жидкости. В [96] разработана математическая модель для анализа гидравлических переходных процессов в трубопроводах в предположении линейно-упругого поведения материала трубы. С помощью метода характеристик построен математический аппарат для расчета динамических явлений в жидкости и напряженно-деформированного состояния в стенках трубопровода. Задачами колебаний трубопроводов с жидкостью занимался П. Д. Доценко [97-99]. Среди его работ так же можно выделить исследования по получению аналитических результатов расчета напряженно деформированного состояния трубопроводов [100-101]. Анализу малых нелинейных колебаний посвящены работы [102-104]. В них показано, что особую роль в колебательных процессах криволинейных трубопроводов играет начальное статическое напряженное состояние, возникающее за счет движущейся под давлением жидкости.

Проведение экспериментов по ударному нагружению реальных трубопроводов затруднены в виду их протяженности и большой стоимости. Поэтому работ, посвященных экспериментальным исследованиям относительно невелико. Кроме того в результате выполнения эксперимента можно получить лишь часть динамических и кинематических зависимостей, которых будет недостаточно для полного описания гидроупругих взаимодействий трубопровода и внутренней жидкости. В этих условиях, математическое моделирование динамики трубопроводных систем с жидкостью становится особенно актуальным. Сложность математического моделирования динамического поведения трубопроводов в аварийных ситуациях обусловлена следующими факторами:

- 1) взаимным влиянием параметров деформирования трубопровода и протекающей по нему жидкости
- 2) нестационарными, нелинейными волновыми процессами в жидкости
- 3) большими перемещениями осевой линии и необратимыми деформациями трубы.

Решение таких задач стало возможным только благодаря применению численных методов и современной вычислительной техники.

1.2. ОБЗОР ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

В настоящее время разработано множество методов численного моделирования, применяемых для решения задач деформирования и прочности упругопластических конструкций, однако не существует единого метода или численной схемы, достаточно эффективно решающей любую поставленную задачу из более – менее широкого класса. Обзор основных подходов к численному решению задач механики сплошных сред можно найти в работах Баженова В.Г., Чекмарева Д.Т., Бахвалова Н.С., Годунова С.К. и других авторов [105-111]. Среди всего многообразия численных методик можно выделить: метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ), вариационно-разностный метод (ВРМ).

Метод конечных разностей основан на замене исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных ее дискретным аналогом, который получается в результате аппроксимации производных по пространственным координатам некоторыми разностными соотношениями. Расчетная область разбивается на ячейки, вершины которых образуют разностную сетку области. Искомые функции заменяются совокупностью их узловых значений, вычисляемых из дискретного аналога определяющей системы уравнений. Для регулярных, не искажающихся в процессе деформирования сеток, при этом часто используют простые разности первого или второго порядка. Развитию МКР посвящены работы Годунова С.К., Забродина А.В., Самарского А.А. и других ученых [112-115]. Наибольшее распространение среди схем МКР получила схема "крест" [114-116]. Данная схема отличается простотой и высокой алгоритмичностью по сравнению с другими схемами сквозного счета. Неудобства простейших аппроксимаций производных проявляются при построении разностных соотношений для неоднородных участков сетки либо вблизи границ расчетной области. Устранение этих неудобств возможно с помощью формул естественной аппроксимации частных производных по пространственным переменным [117]. Среди многочисленных работ, использующих "естественную" аппроксимацию, можно выделить работу Уилкинса М.Л. [118]. К недостаткам конечно-разностного метода следует отнести проблему граничных условий, содержащих условия на производные. Чтобы обойти данную проблему, при построении конечно-разностных схем все чаще прибегают к интегральным формулировкам задач.

В *методе конечных элементов* расчетная область также разбивается на ряд ячеек - конечных элементов (КЭ). В каждом КЭ задается стандартная система базисных функций (функций форм), аппроксимирующая перемещения, деформации и напряжения. Численное решение находится из минимизации вариационной задачи на введенном множестве базисных

функций. Развитием МКЭ занимались такие ученые, как Капустин С.А., Зенкевич О., Беличко, и другие [119-126]. Основным достоинством МКЭ является то, что здесь осуществляется непосредственный переход к дискретной модели, минуя стадию формулировки краевой задачи для системы дифференциальных уравнений. Благодаря целому ряду положительных качеств (универсальность, независимость вычислений в отдельных элементах, возможность уточнения решения путем повышения порядка аппроксимации и т.д.) МКЭ получил широкое распространение. Следует заметить, что последовательное применение идей МКЭ к решению упругопластических задач приводит к созданию алгоритмичных, но все же трудоемких методов.

Промежуточное положение между МКР и МКЭ занимают ВРМ. ВРМ сочетают в себе простоту в реализации, присущую МКР, и алгоритмичность МКЭ, и являются, по существу, простейшим вариантом реализации МКЭ.

Вариационно-разностный метод основан на сеточной аппроксимации вариационного уравнения или вариационной задачи для некоторого функционала. Построение разрешающих соотношений схемы сводится к конечноразностной аппроксимации вариационного уравнения и приравнивания нулю коэффициентов при вариациях узловых перемещений. Развитию ВРМ способствовали работы Самарского А.А., Баженова В.Г., Дресвянникова В.И. и других авторов [115,127-130]. Отметим основные достоинства вариационно-разностных методов. 1) Возможность использования неравномерных и нерегулярных сеток. При этом необходимо определить лишь инцидентность узлов и ячеек. 2) Единообразный расчет внутренних и граничных узлов. 3) Меньшие по сравнению с конечноразностным методом требования к гладкости функций. Указанные свойства делают ВРМ очень удобными для программной реализации. Их можно применять для областей сложной формы. Полученные в результате разностные схемы по форме аналогичны разностной схеме Уилкинса, но более алгоритмичны и универсальны.

Область определения задач кроме пространственных переменных включает время. Поэтому важным моментом построения численной схемы является дискретизация определяющей системы уравнений по времени. В зависимости от особенностей рассматриваемого класса задач применяют явные [118,131], неявные [113,132] и смешанные [133-134] схемы интегрирования. При решении геометрически и физически нелинейных задач в динамической постановке в большинстве случаев используют явные схемы второго порядка точности относительно шага интегрирования по времени. Явные схемы интегрирования выгодно отличаются от неявных схем простотой и экономичностью. Однако явные схемы условно устойчивы и шаг интегрирования по времени определяется

минимальным по области размером конечного элемента. Неявные схемы интегрирования по времени имеют преимущество при анализе низкочастотных процессов. Если доказана безусловная устойчивость схемы, шаг интегрирования по времени определяется из соображений точности решения. А условия точности на гладких решениях менее жесткие, чем условия устойчивости, что может компенсировать затраты на решение сложных систем уравнений. Однако, при решении динамических физически нелинейных задач, использование итерационных процедур накладывает ограничения на временной шаг близкие к условию Куранта, что с учетом более высокой трудоемкости на шаге неявных схем делает их применение нерациональным [105]. Совместное использование явных и неявных методов интегрирования уравнений движения по времени может быть целесообразным при решении задач, имеющих концентраторы, сосредоточенные внешние воздействия или локальные смятия сетки, возникающие в результате высокоскоростного соударения. В общем же случае при объединении этих методов теряется алгоритмичность, возникают проблемы стыковки отдельных подобластей, в которых применяются разные способы интегрирования.

При описании движения исследуемого тела в механике сплошных сред исходят из двух методов [135], отличающихся выбором независимых переменных. Согласно методу Лагранжа параметры, характеризующие деформируемое тело (напряжения, деформации, температура и т.д.) могут быть выражены как функции материальных координат. В случае эйлерова описания сетка фиксируется в принимаемой системе отсчета. В приложениях с успехом использовались как представление Лагранжа [118,136-137], так и представление Эйлера [114,138-139]. Каждому из них присущи определенные преимущества и недостатки, своя область эффективной применимости. В литературе [136,138,140-141], посвященной обсуждению этого вопроса, в частности отмечается следующее.

Достоинство лагранжевых переменных связано с движением расчетной сетки вместе со средой. Это дает возможность автоматически определять границы области и линии раздела сред. При использовании лагранжевого метода не возникает особых проблем с учетом информации, характеризующей историю нагружения, необходимую при анализе упругопластического деформирования. При использовании эйлеровых переменных для учета истории нагружения требуется формирование соответствующих процедур.

Наиболее серьезным недостатком метода Лагранжа является то, что ячейка, будучи деформируемой, не может искажаться беспредельно, поскольку это, как правило, сопровождается уменьшением шага интегрирования по времени и потерей точности решения. Эйлеровы переменные обладают тем преимуществом, что позволяют проводить расчеты без каких-либо затруднений и при сильных деформациях и больших относительных

перемещениях. Однако эффективность метода Эйлера значительно снижается рядом недостатков:

- в нем трудно определять малые изменения параметров при исследовании движения в большой области;

- возникают проблемы с определением границ;

- число узлов разностной сетки расчетной области меняется в процессе счета, что приводит к понижению точности решения задачи.

Для многих задач не подходит ни чисто лагранжев, ни чисто эйлеров метод. Развитию методов, сочетающих преимущества лагранжевого и эйлерового способа описания движения среды, посвящены работы [117,141-144]. Так, например, в [142] используются три варианта перемещения узловых точек:

- узлы перемещаются со средой как в переменных Лагранжа;

- остаются фиксированными как в переменных Эйлера;

- перемещаются произвольным образом, что позволяет осуществлять перестройку сетки в процессе счета.

Эти методы, обладая большой общностью и универсальностью, имеют сложную логическую структуру, что делает их более трудоемкими. Таким образом, исходя из результатов исследований других авторов [136,138,141], можно сказать, что при деформировании упругопластических элементов конструкций, рассматриваемых в настоящей работе, целесообразно использовать лагранжевые переменные.

До последнего времени для решения одномерных задач распространения волн в гидрогазодинамике применялся метод характеристик. *Метод характеристик* – это метод численно-аналитического интегрирования систем дифференциальных уравнения в частных производных гиперболического типа. Метод заключается в отыскании кривых (именуемых характеристиками), вдоль которых исходное уравнение в частных производных превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение. Как только найдены обыкновенные дифференциальные уравнения, их можно решить вдоль характеристик и найденное решение превратить в решение исходного уравнения в частных производных. Впервые для ряда частных случаев он был рассмотрен в работах Даламбера.

1.3. ВЫВОДЫ ИЗ ОБЗОРА

На основании выполненного анализа литературы, посвященной исследованию динамики пространственных трубопроводов, сделаны следующие **выводы**:

1. Трубопроводные системы являются неотъемлемым элементом сложных технических объектов, таких как ядерные энергетические установки, комплексы по добыче и транспортировке жидких углеводородов, нефтеперерабатывающие предприятия и др. Задачи динамики пространственных трубопроводов с внутренней жидкостью при ударном нагружении являются актуальными в связи с необходимостью оценки их работоспособности и безопасности в аварийных ситуациях.
2. Задачи динамики пространственных протяженных трубопроводов в большинстве случаев рассматриваются в линейных постановках на основе моделей пространственных стержней с протекающей жидкостью.
3. Исследования колебаний протяженных трубопроводов проводятся в основном при заранее известных и заданных нагрузках.
4. Достаточно полный учет взаимосвязанности деформационных процессов в трубопроводе и гидродинамических процессов в жидкости при ударных воздействиях проведен лишь для прямолинейных трубопроводов небольшой протяженности.
5. Во всем многообразии решенных задач по динамике пространственных трубопроводов лишь небольшая их часть посвящена исследованиям деформирования при ударных воздействиях. В основном рассматриваются задачи по исследованию гидроударных явлений и колебаний. В литературе практически отсутствуют работы, посвященные поперечным ударам по пространственному трубопроводу, заполненному жидкостью.

Для достоверной оценки прочности трубопроводов требуется учет геометрически и физически нелинейных эффектов деформирования и в ряде случаев трехмерная постановка задачи, так как одномерные и квазиодномерные модели не позволяют получить адекватное описание процессов деформирования при интенсивных локальных воздействиях. На сегодняшний день уровень развития вычислительной техники не позволяет полностью решить задачу трехмерного моделирования деформации протяженных трубопроводов при локальных ударных воздействиях.

Исследование напряженно-деформированного состояния трубопроводов в целом как гидроупругих систем, с учетом локальных эффектов изменения сечений труб практически невозможен без разработки гибридных моделей, применение которых позволит оптимизировать трудоемкий вычислительный процесс и получить решение. Для решения подобных задач требуется разработка математических методов, позволяющих свести исследование деформирования пространственного трубопровода к решению задачи динамики пространственных стержней. Одной из главных трудностей рассматриваемых задач является отсутствие ясного алгоритма непосредственного перехода от трехмерной контактной пространственной задачи к более простой задаче, где ударные силы, действуют на протяженный трубопровод как на квазиодномерную систему. Таким образом, необходимо произвести трехмерное моделирование процесса деформации трубопровода на некотором участке вблизи ударного воздействия. На этом участке необходимо выявить характерные особенности, связанные с взаимодействием трубопровода и внутренней жидкости, определить зависимости от времени средних кинематических и динамических параметров в трубной оболочке и жидкости. Эти параметры далее можно использовать в качестве начальных и граничных условий для расчета динамики трубопроводной системы в целом как пространственного гидроупругого стержня.

ГЛАВА 2. ЗАДАЧА УДАРНОГО НАГРУЖЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ЖИДКОСТЬЮ В ПЛОСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

2.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нелинейную задачу соударения тела, имеющего форму вытянутого прямоугольного параллелепипеда с оболочкой трубопровода, в плоской постановке. Схематично задача представлена на рис. 2.1. Первый вариант расчетов (рис.2.1а) предполагает ударное воздействие на свободный участок трубопровода. Во втором варианте (рис.2.1б) предполагается, что трубопровод опирается на неподвижную жесткую плоскую поверхность. Тело-ударник имеет начальную скорость V_0 . Жидкость заполняет все пространство трубопровода. В начальный момент времени жидкость и трубопровод находятся в состоянии покоя и не напряжены. Требуется описать динамическое напряженно-деформированное состояние груза, трубной оболочки и жидкости, включая контактные параметры.

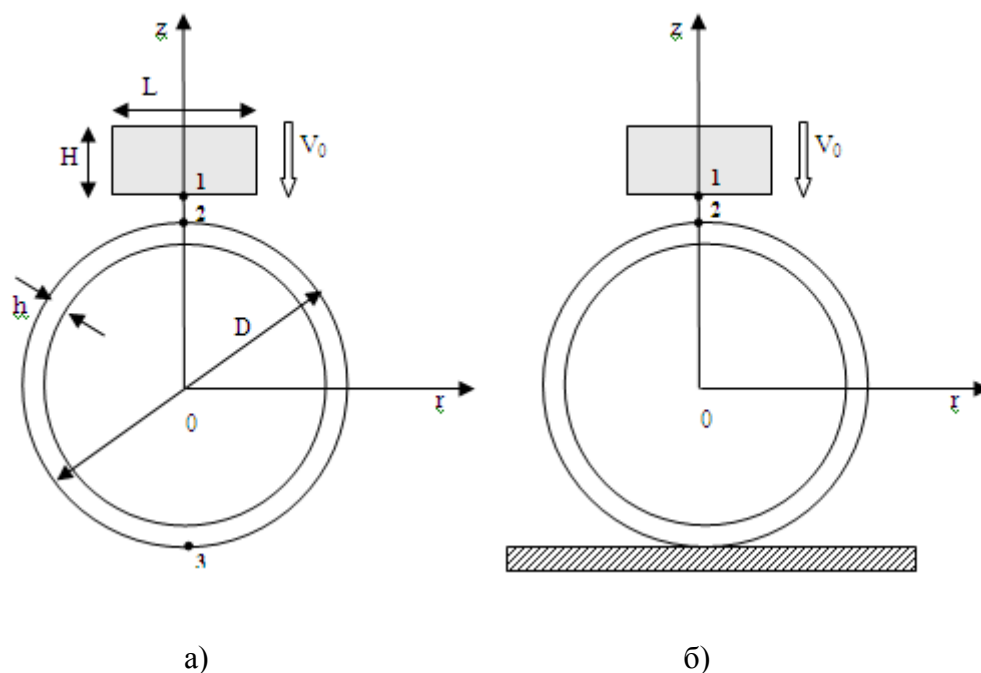


Рис. 2.1. Постановка задачи

2.1.1. ОПРЕДЕЛЯЮЩАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

Деформирование груза, трубной оболочки и жидкости описываются на основе уравнений динамики сплошной среды с использованием вариационного уравнения движения и подхода Лагранжа.

Полагается, что в меридиональном сечении сплошная среда занимает область Ω , ограниченную контуром G , которую всегда можно разбить на односвязные подобласти:

$$\Omega = \bigcup_j \Omega_j, \quad G = \bigcup_j G_j, \quad j = \overline{1, D} \quad (2.1)$$

Движение среды описывается в переменных Лагранжа уравнениями, следующими из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа в форме Журдена, в неподвижной цилиндрической r, β, z (Oz – ось вращения) системе координат:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (\sigma_{rr} \delta \ddot{e}_{rr} + \sigma_{\beta\beta} \delta \ddot{e}_{\beta\beta} + \sigma_{zz} \delta \ddot{e}_{zz} + 2\sigma_{rz} \delta \ddot{e}_{rz}) r d\Omega + \\ & + \iint_{\Omega} \rho (\ddot{u}_r \delta \dot{u}_r + \ddot{u}_z \delta \dot{u}_z) r d\Omega - \int_G (p_r \delta \dot{u}_r + p_z \delta \dot{u}_z) r dS - \\ & - \int_G (q_r \delta \dot{u}_r + q_z \delta \dot{u}_z) r dS = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь σ_{ij} , $\dot{e}_{ij}$ – компоненты тензора напряжений Коши и скоростей деформаций, $\dot{u}_\alpha$ – скорости перемещений; p_α , q_α – компоненты поверхностной нагрузки и контактного давления ($\alpha = r, z$).

Учет геометрической нелинейности осуществляется поэтапной перестройкой конфигурации элементов сеточной аппроксимации конструкции во времени. Связь тензора скоростей деформаций со скоростями перемещений определяется в метрике текущего состояния:

$$\begin{aligned} \dot{e}_{rr} &= \dot{u}_{r,r}, \quad \dot{e}_{\beta\beta} = \dot{u}_r r^{-1}, \quad \dot{e}_{zz} = \dot{u}_{z,z}, \\ \dot{e}_{rz} &= \frac{1}{2} (\dot{u}_{z,r} + \dot{u}_{r,z}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $\dot{u}_r$, $\dot{u}_z$ – компоненты вектора скорости перемещения в общем базисе roz .

Используя (2.3), запишем (2.2) через вариации скоростей перемещений

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (\sigma_{rr} \delta \dot{u}_{rr} + \sigma_{\beta\beta} r^{-1} \delta \dot{u}_r + \sigma_{zz} \delta \dot{u}_{z,z} + \sigma_{rz} (\delta \dot{u}_{r,z} + \delta \dot{u}_{z,r})) + \rho (\ddot{u}_r \delta \dot{u}_r + \ddot{u}_z \delta \dot{u}_z) r d\Omega - \\ & - \int_G (p_r \delta \dot{u}_r + p_z \delta \dot{u}_z) r dS - \int_G (q_r \delta \dot{u}_r + q_z \delta \dot{u}_z) r dS = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Принимая во внимание (2.1), совершенно аналогично можно записать уравнения движения сплошной среды, занимающей многосвязную область Ω с границей G :

$$\sum_{d=1}^D \left(\iint_{\Omega_d} (\sigma_{rr} \delta \dot{u}_{rr} + \sigma_{\beta\beta} r^{-1} \delta \dot{u}_r + \sigma_{zz} \delta \dot{u}_{z,z} + \sigma_{rz} (\delta \dot{u}_{r,z} + \delta \dot{u}_{z,r}) + \rho (\ddot{u}_r \delta \dot{u}_r + \ddot{u}_z \delta \dot{u}_z)) r d\Omega - \right. \\ \left. - \int_{G_d} (p_r \delta \dot{u}_r + p_z \delta \dot{u}_z) r dS - \int_{G_d} (q_r \delta \dot{u}_r + q_z \delta \dot{u}_z) r dS \right)^{(d)} = 0 \quad (2.5)$$

С целью повышения точности при численном интегрировании уравнений (2.4-2.5) переходят к новым переменным [145]:

$$\dot{v}_r = r \dot{u}_r, \quad \dot{v}_z = r \dot{u}_z$$

тогда выражения для скоростей деформаций (2.3) примут вид:

$$\dot{e}_{rr} = r^{-1} \dot{v}_{r,r} - r^{-2} \dot{v}_r, \quad \dot{e}_{\beta\beta} = r^{-1} \dot{v}_r, \quad \dot{e}_{zz} = r^{-1} \dot{v}_{z,z}, \\ \dot{e}_{rz} = \frac{1}{2} (r^{-1} \dot{v}_{r,z} + r^{-1} \dot{v}_{z,r} - r^{-2} \dot{v}_z), \quad (2.6)$$

уравнение (2.4) записывается в форме:

$$\iint_{\Omega} [\sigma_{rr} \delta \dot{v}_{r,r} + \sigma_{zz} \delta \dot{v}_{z,z} + \sigma_{rz} (\delta \dot{v}_{r,z} + \delta \dot{v}_{z,r}) - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{r} \delta \dot{v}_r - \frac{\sigma_{rz}}{r} \delta \dot{v}_z + \rho (\ddot{u}_r \delta \dot{v}_r + \ddot{u}_z \delta \dot{v}_z)] d\Omega - \\ - \int_G (p_r \delta \dot{v}_r + p_z \delta \dot{v}_z) ds - \int_G (q_r \delta \dot{v}_r + q_z \delta \dot{v}_z) ds = 0 \quad (2.7)$$

уравнение (2.5) записывается в форме:

$$\sum_{d=1}^D \left(\iint_{\Omega_d} [\sigma_{rr} \delta \dot{v}_{r,r} + \sigma_{zz} \delta \dot{v}_{z,z} + \sigma_{rz} (\delta \dot{v}_{r,z} + \delta \dot{v}_{z,r}) - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{r} \delta \dot{v}_r - \frac{\sigma_{rz}}{r} \delta \dot{v}_z + \rho (\ddot{u}_r \delta \dot{v}_r + \ddot{u}_z \delta \dot{v}_z)] d\Omega - \right. \\ \left. - \int_{G_d} (p_r \delta \dot{v}_r + p_z \delta \dot{v}_z) dS - \int_{G_d} (q_r \delta \dot{v}_r + q_z \delta \dot{v}_z) dS \right)^{(d)} = 0 \quad (2.8)$$

На линии сопряжения G^* подобластей Ω_j должны выполняться условия кинематической совместности. Полагаем, что все подобласти жестко соединены между собой. В этом случае условия кинематической совместности имеют следующий вид:

$$\delta \dot{v}_\alpha(s, t) \Big|_{s \in G^*} = \delta \dot{v}_\alpha''(s, t) \Big|_{s \in G^*}, \\ \ddot{u}_\alpha(s, t) \Big|_{s \in G^*} = \ddot{u}_\alpha''(s, t) \Big|_{s \in G^*}, \quad \alpha = r, z. \quad (2.9)$$

В качестве уравнений состояния для описания упругопластических свойств материалов применялась теория течения с нелинейным изотропным и кинематическим упрочнением. Тензор деформаций и тензор напряжений для осесимметричного случая определяются следующим образом:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{rr} & e_{rz} & 0 \\ e_{zr} & e_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & e_{\beta\beta} \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{rz} & 0 \\ \sigma_{zr} & \sigma_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\beta\beta} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Полагается, что скорость деформации $\dot{e}_{ij}$ можно представить в виде суммы скорости упругих $\dot{e}_{ij}^y$ и пластических $\dot{e}_{ij}^p$ составляющих.

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^y + \dot{e}_{ij}^p \quad (2.11)$$

Связь между скоростью девиатора напряжений $\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij}\dot{\sigma}$ и скоростью упругих составляющих девиатора деформаций $\dot{e}'_{ij} = \dot{e}_{ij} - \delta_{ij}\dot{e} - \dot{e}_{ij}^p$ определяется в виде:

$$D_J \sigma'_{ij} = 2G\dot{e}'_{ij}, \quad D_J \sigma'_{ij} = \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\omega}_{ik}\sigma'_{kj} - \dot{\omega}_{jk}\sigma'_{ik}, \quad \dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}) \quad (2.12)$$

где D_J - производная Яуманна, G – модуль сдвига, δ_{ij} - символ Кронеккера.

Связь между скоростью шаровых составляющих напряжений $\dot{\sigma}$ и деформаций $\dot{e}$ полагается линейной:

$$\dot{\sigma} = 3K\dot{e}, \quad \dot{\sigma} = \frac{1}{3}\dot{\sigma}_{ii}, \quad \dot{e} = \frac{1}{3}\dot{e}_{ii}, \quad \dot{e}_{ii}^p = 0 \quad (2.13)$$

где K – модуль объемного сжатия.

Уравнение поверхности текучести, ограничивающей в пространстве девиаторов напряжений область упругих состояний, принимается в форме Мизеса. Скорости пластических составляющих деформации определяются ассоциированным законом течения:

$$\dot{e}_{ij}^p = \dot{\lambda}s_{ij}, \quad s_{ij}s_{ij} = \frac{2}{3}C(\alpha)^2, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma - \rho_{ij}, \quad \sigma = \frac{1}{3}\sigma_{ii}, \quad \dot{\rho}_{ij} = 2g\dot{e}_{ij}^p$$

$$g = g(J_{2\rho}), \quad \rho_{ij} = \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt, \quad J_{2\rho} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\rho_{ij}\rho_{ij}} \quad (2.14)$$

Здесь $C = C(\alpha)$ ($\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\int_0^t \sqrt{\dot{e}_{ij}^p\dot{e}_{ij}^p} dt$ - параметр Одквиста) - радиус поверхности текучести, ρ_{ij} - тензор микронапряжений, определяющий координаты центра поверхности текучести, g - модуль анизотропного упрочнения, который в первом приближении можно принять в виде [145-148]:

$$g = g_0 - (g_0 - g)\text{sign}(\rho_{ij}s_{ij}), \quad g = g(J_{2\rho}), \quad g_0 = g(J_{2\rho} = 0) \quad (2.15)$$

Параметр $\dot{\lambda}$ тождественно равный нулю при упругом деформировании и определяемый при пластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки. В уравнениях параметр $\dot{\lambda}$ можно выразить через необратимую часть элементарной работы $\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}\dot{e}_{ij}^p}{C^2}$.

Для задания свойств материала в рассматриваемой модели необходимо задать

скалярные функции $C(\mathfrak{x})$, $g(J_{2\rho})$, которые определяются из экспериментов на растяжение-сжатие [145-148].

Для процессов активного нагружения близких к пропорциональным достаточно учитывать лишь нелинейным изотропное упрочнение, для которого не требуются данные по эффекту Баушингера. Т.е. не учитывается смещение поверхности текучести (в уравнениях (2.14) нужно положить $\rho_{ij} = 0$) и достаточно задать истинную диаграмму деформирования материала определяемую экспериментально (в уравнениях (2.14) радиус поверхности текучести $C = \sigma_i(\mathfrak{x})$).

Представленная выше система уравнений описывает деформирование сплошной среды. В качестве начальных условий для этой системы необходимо задать скорости перемещений, компоненты тензора напряжений и микронапряжений, значение параметра Одквиста. В качестве граничных условий необходимо задать скорости перемещения и/или поверхностную нагрузку от времени на соответствующих участках границы.

2.1.2. ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА

Для решения системы уравнений, описывающей деформирование сплошной среды при соответствующих граничных и начальных условиях, применяется явная конечно-разностная схема интегрирования по времени типа «крест» [149-150]. Пространственные производные аппроксимируются, исходя из дивергентной схемы аппроксимации производных, в предположении линейного изменения вдоль каждой из сторон четырехугольной элементарной ячейки. Перемещения и скорости перемещений определяются в узлах разностной сетки, а тензоры напряжений и скоростей деформаций – в центрах ячеек.

Расчетная область Ω на плоскости roz , занимаемая сплошной средой, представляется в виде совокупности произвольных топологических четырехугольников Ω_j ($j = \overline{1, D}$), которые в дальнейшем будем называть блоками. Каждый блок автоматически по заданному алгоритму покрывается регулярной сеткой четырехугольных ячеек таким образом, чтобы на линии сопряжения G^* узлы сопрягаемых блоков совпадали. Пространственные производные некоторой функции $f=f(r,z)$ аппроксимируем в следующем виде:

$$\frac{\partial f}{\partial l} \approx \sum_{p=1}^N a_p^l f_p, \quad l = r, z,$$

$$a_p^r = -\frac{z_{p+1} - z_{p-1}}{2\Delta\Omega}, \quad a_p^z = \frac{r_{p+1} - r_{p-1}}{2\Delta\Omega}, \quad (2.15)$$

$$\Delta\Omega = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^N r_p (z_{p+1} - z_{p-1}),$$

$$\beta_{N+1} = \beta_1, \quad \beta_0 = \beta_N, \quad \beta = r, z, f,$$

где N – число вершин элементарной ячейки сетки ($N=4$), $\Delta\Omega$ – площадь ячейки.

Выражение (2.15) следует из дивергентной схемы аппроксимации производных в предположении линейного изменения функции f вдоль каждой из сторон элементарной ячейки [117]. Значение функции f в центре ячейки определим как среднее арифметическое ее значений в вершинах:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N f_p \quad (2.16)$$

Отметим, что перемещения и скорости перемещений аппроксимируются в узлах разностной сетки, а тензоры напряжений и скоростей деформаций – в центрах ячеек.

Процесс деформирования сплошной среды во времени разобьем на временные слои $t^0, t^1, \dots, t^k, \dots$ с шагами $\Delta t^{k+1} = t^{k+1} - t^k$.

Запишем разностный аналог вариационного уравнения (2.8) на k -ый момент времени. Интегрирование по области Ω , занимаемой сплошной средой, заменим суммированием величин виртуальных работ по всем ячейкам сетки, покрывающей область Ω .

$$\begin{aligned} & \sum_{d=1}^D \left(\sum_{l=1}^{N_\Omega^d} \left\{ \left[\sigma_{rr} \sum_{p=1}^4 a_p^r (\delta \dot{v}_r)_p + \sigma_{zz} \sum_{p=1}^4 a_p^z (\delta \dot{v}_z)_p + \sigma_{rz} \left(\sum_{p=1}^4 a_p^z (\delta \dot{v}_r)_p + \sum_{p=1}^4 a_p^r (\delta \dot{v}_z)_p \right) \right. \right. \right. \\ & - (4 \langle r \rangle)^{-1} (\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}) \sum_{p=1}^4 (\delta \dot{v}_r)_p - (4 \langle r \rangle)^{-1} \sigma_{rz} \sum_{p=1}^4 (\delta \dot{v}_z)_p + \\ & \left. \left. + 4^{-1} \rho \left(\sum_{p=1}^4 (\ddot{u}_r \delta \dot{v}_r)_p + \sum_{p=1}^4 (\ddot{u}_z \delta \dot{v}_z)_p \right) \right] \Delta\Omega \right\}^{(l)} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{N_r^d} \{ (p_r)_{p+1/2} [(\delta \dot{v}_r)_{p+1} + (\delta \dot{v}_r)_p] + (p_z)_{p+1/2} [(\delta \dot{v}_z)_{p+1} + (\delta \dot{v}_z)_p] + \\ & + (q_r)_{p+1/2} [(\delta \dot{v}_r)_{p+1} + (\delta \dot{v}_r)_p] + (q_z)_{p+1/2} [(\delta \dot{v}_z)_{p+1} + (\delta \dot{v}_z)_p] \} \Delta S_{p+1/2}^{(d)} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь N_Ω^d – число ячеек сетки, покрывающий блок с номером d , N_r^d – число сторон граничных ячеек, принадлежащих контуру G^d .

Собирая коэффициенты при вариациях $(\delta \dot{v}_r)_j, (\delta \dot{v}_z)_j$, получим:

$$\sum_{j=1}^{N_i} [(M \ddot{u}_r - F_r)_j (\delta \dot{v}_r)_j + (M \ddot{u}_z - F_z)_j (\delta \dot{v}_z)_j] = 0 \quad (2.18)$$

Здесь N_1 - суммарное количество узлов, покрывающих расчетную область.

В (2.18) вариации скоростей перемещений и ускорения на линии сопряжения блоков G^* связаны условиями кинематической совместности (2.9). Подставляя (2.9) в (2.18), в силу независимости вариаций $(\delta\dot{v}_r)_j, (\delta\dot{v}_z)_j$ приходим к системе вариационных уравнений:

$$\begin{cases} (M\ddot{u}_r - F_r)_j (\delta\dot{v}_r)_j = 0 \\ (M\ddot{u}_z - F_z)_j (\delta\dot{v}_z)_j = 0 \\ j = \overline{1, N_1 - m/2} \end{cases} \quad (2.19)$$

где m -количество узлов, принадлежащих линии сопряжения G^* .

Поскольку вариации скоростей перемещений произвольны, то прямым следствием системы (2.19) будет система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая движение дискретной модели сплошной среды:

$$\begin{cases} (M\ddot{u}_r)_j = (F_r)_j \\ (M\ddot{u}_z)_j = (F_z)_j \\ j = \overline{1, N_1 - m/2} \end{cases} \quad (2.20)$$

Здесь F_r, F_z - обобщенные силы, действующие на расчетный узел j , M - узловая масса.

Обозначим вклады ячеек сплошной среды в расчетный узел j :

$$\begin{aligned} (B_r^l)_j &= -[(\sigma_{rr}a_j^r + \sigma_{rz}a_j^z - (4\langle r \rangle)^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}))\Delta\Omega]^l, \\ (B_z^l)_j &= -[(\sigma_{zz}a_j^z + \sigma_{rz}a_j^r - (4\langle r \rangle)^{-1}\sigma_{rz})\Delta\Omega]^l, \\ (M^l)_j &= (4^{-1}\rho\Delta\Omega)^l, \\ (C_r^l)_j &= \frac{1}{2}((p_r + q_r)\Delta S)_{j\pm 1/2}^l, \\ (C_z^l)_j &= \frac{1}{2}((p_z + q_z)\Delta S)_{j\pm 1/2}^l \end{aligned} \quad (2.21)$$

где l -номер ячейки, одной из вершин которой является узел j .

Выражения, определяющие коэффициенты уравнения дискретной модели сплошной среды (2.20), запишем в виде:

для внутренних узлов сплошной среды

$$(F_\alpha)_j = \sum_{l=1}^w (B_\alpha^l)_j, \quad \alpha = r, z \quad (2.22)$$

$$(M)_j = \sum_{l=1}^w (M^l)_j$$

для узлов на границе G сплошной среды

$$(F_{\alpha})_j = \sum_{l=1}^w [(B_{\alpha}^l) + (C_{\alpha}^l)], \quad \alpha = r, z \quad (2.23)$$

$$(M)_j = \sum_{l=1}^w (M^l)_j$$

для узлов на линии сопряжения блоков G^* сплошной среды

$$(F_{\alpha})_j = (F'_{\alpha})_j + (F''_{\alpha})_j, \quad \alpha = r, z \quad (2.24)$$

$$(M)_j = (M')_j + (M'')_j$$

где w -число ячеек, в которых узел j является одной из вершин.

Схема интегрирования уравнений (2.20) по времени представляется в виде:

$$\begin{aligned} (\dot{u}_{\alpha})_j^{k+1/2} &= (\dot{u}_{\alpha})_j^{k-1/2} + (F_{\alpha})_j^k \frac{\Delta t^{k+1/2}}{(M)_j^k}, \\ (u_{\alpha})_j^{k+1} &= (u_{\alpha})_j^k + (\dot{u}_{\alpha})_j^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \\ \Delta t^{k+1/2} &= \frac{1}{2} (\Delta t^{k+1} + \Delta t^k); \quad \alpha = r, z; \quad j = \overline{1, N_1 - m/2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Отметим, что используемый вариационно-разностный метод решения позволяет свести процесс интегрирования уравнений движения сплошной среды к рекуррентному счету по единым формулам. Таким образом, вариационно-разностный метод обладает определенными преимуществами по сравнению с обычной конечно-разностной схемой решения дифференциальных уравнений движения сплошной среды, так как позволяет стандартным образом строить вычислительный процесс не только внутри, но и на границе области Ω , а также и на линии сопряжения G^* блоков среды. Применяемая явная разностная схема является условно устойчивой.

Для выбора временного шага Δt в схеме (2.25) используется условие:

$$\begin{aligned} \Delta t_l &\leq \frac{1}{c} \min(h_i), \quad \Delta t_j = \min_l \Delta t_l, \\ \Delta t &= \min_j \Delta t_j, \quad l = \overline{1, N_{\Omega}}, \quad j = \overline{1, D}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где h_i -высота элементарной ячейки, $c = [(K + \frac{4}{3}G)/\rho]^{1/2}$ -скорость звука.

Перед началом расчета НДС сплошной среды на каждом временном слое необходимо выполнить ряд подготовительных операций, суть которых заключается в следующем.

Выбирается расчетная схема, т.е. область Ω , занимаемая сплошной средой, разбивается на совокупность топологических четырехугольников – блоков, исходя из соображений автоматизированного построения качественных сеток. Каждый блок Ω_j

($j = \overline{1, D}$) автоматически покрывается сеткой из 4-угольных ячеек. Задаются поверхностные нагрузки на границе G области Ω и начальные условия для перемещений и скоростей. Поля полных напряжений в начальный момент времени полностью определяют исходное НДС сплошной среды.

На основе исходной информации по формулам (2.21-2.24) формируются коэффициенты уравнений движений дискретной модели сплошной среды (F_α^0) $_j$, M_j ($j = \overline{1, N_1}$). Согласно критерию устойчивости разностной схемы (2.26) выбирается допустимый временной шаг Δt^1 .

Этим заканчивается подготовительная работа для расчета деформирования сплошной среды на каждом временном слое.

По известному на k -ый момент времени распределению параметров НДС сплошной среды по рекуррентным соотношениям (2.25) вычисляются компоненты скоростей перемещений $(\dot{u}_r, \dot{u}_z)_j^{k+1/2}$ и перемещений $(u_r, u_z)_j^{k+1/2}$ ($j = \overline{1, N_1 - m/2}$) узлов разностной сетки. Исходя из условий кинематической совместности (2.9) находятся скорости перемещений и перемещения узлов на линии сопряжения G^* блоков сплошной среды.

Геометрические параметры расчетной сетки, отвечающие моменту времени $t = t^{k+1}$, пересчитываются по формулам:

$$\alpha_j^{k+1} = \alpha_j^0 + \sum_{p=1}^{k+1} (\dot{u}_\alpha)_j^{p-1/2} \Delta t^p, \quad (2.27)$$

$$\alpha = r, z; j = \overline{1, N_1}$$

Далее вычисляются компоненты тензора скоростей деформаций и приращений деформаций согласно (2.3) и разностным соотношениям (2.15-2.16):

$$\begin{aligned} (\dot{e}_{rr})_l^{k+1/2} &= \sum_{p=1}^N [(a_p^r)(\dot{u}_r)_p]_l^{k+1/2}, \\ (\dot{e}_{zz})_l^{k+1/2} &= \sum_{p=1}^N [(a_p^z)(\dot{u}_z)_p]_l^{k+1/2}, \\ (\dot{e}_{\beta\beta})_l^{k+1/2} &= (4 < r >^{k+1/2})^{-1} \sum_{p=1}^N [(\dot{u}_r)_p]_l^{k+1/2}, \\ (\dot{e}_{rz})_l^{k+1/2} &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N [(a_p^r)(\dot{u}_z)_p]_l^{k+1/2} + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N [(a_p^z)(\dot{u}_r)_p]_l^{k+1/2}, \\ (\dot{\omega}_{rz})_l^{k+1/2} &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N [(a_p^r)(\dot{u}_z)_p]_l^{k+1/2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N [(a_p^z)(\dot{u}_r)_p]_l^{k+1/2}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где l - номер ячейки.

Приращения деформаций вычисляются:

$$\begin{aligned}(\Delta e_{ij})_l^{k+1} &= (\dot{e}_{ij})_l^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \\(\Delta \omega)_l^{k+1} &= (\dot{\omega}_{rz})_l^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \\(e_{ij})_l^{k+1} &= (e_{ij})_l^k + (\Delta e_{ij})_l^{k+1}\end{aligned}\tag{2.29}$$

Для нахождения приращения пластических деформаций в ячейке l используются соотношения теории течения с изотропным и кинематическим упрочнением (2.14-2.15). По тензору приращений деформаций (2.29) вычисляются компоненты тензора напряжений, исходя из (2.12-2.13) и предыдущего напряженного состояния:

$$\begin{aligned}(\Delta \sigma)_l^{k+1} &= 3K(\Delta e)_l^{k+1}, \quad (\Delta \sigma'_{ij})^{k+1} = 2G(\Delta e'_{ij})^{k+1}, \\s_{ij}^{k+1} &= (\sigma'_{ij})^k + (\Delta \sigma'_{ij})^{k+1} - (\rho_{ij})^k.\end{aligned}\tag{2.30}$$

Проверяется условие текучести (2.14). Если $\sqrt{(s_{ij}s_{ij})^{k+1}} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}C(\mathfrak{x}^k)$, то поведение материала на данном этапе нагружения упруго (2.12-2.13) $((\Delta e_{ij}^p)^{k+1} = 0)$. Если $\sqrt{(s_{ij}s_{ij})^{k+1}} > \sqrt{\frac{2}{3}}C(\mathfrak{x}^k)$, то приращения пластических деформаций находятся исходя из закона течения (2.14-2.15):

$$(\Delta e_{ij}^p)^{k+1} = \Delta \lambda^* s_{ij}^{k+1}, \quad \Delta \lambda^* = \frac{1}{2(G + g + \frac{1}{3}q)} \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}C(\mathfrak{x}^k)}{\sqrt{(s_{ij}s_{ij})^{k+1}}} \right],\tag{2.31}$$

$$(\Delta \mathfrak{x})^{k+1} = \Delta \lambda^* \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(s_{ij}s_{ij})^{k+1}}, \quad \mathfrak{x}^{k+1} = \mathfrak{x}^k + (\Delta \mathfrak{x})^{k+1}, \quad (\rho_{ij})^{k+1} = \rho_{ij}^k + 2g(\Delta e_{ij}^p)^{k+1}$$

где $q = [C(\mathfrak{x}^k + (\Delta \mathfrak{x})^{k+1}) - C(\mathfrak{x}^k)]/(\Delta \mathfrak{x})^{k+1}$, $g = g^0 - (g^0 - g^k) \cdot \text{sign}(\rho_{ij}^k s_{ij}^0)$, $g^k = g(J_{2\rho}^k)$

Параметры упрочнения g и q являются функциями Δe_{ij}^p , поэтому для определения Δe_{ij}^p строится итерационная процедура «посадки» девиатора напряжений на поверхность текучести. Итерации заканчиваются при выполнении условия

$$\left| \frac{\sqrt{(s_{ij}s_{ij})^{k+1}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}C(\mathfrak{x}^{k+1})} - 1 \right| < e \approx 0.01 \div 0.001. \text{ Итерационный процесс обладает квадратичной скоростью}$$

сходимости [145-148].

Далее определяются компоненты тензора напряжений (2.12-2.13):

$$\begin{aligned}
(\Delta e_{ij}^y)^{k+1} &= (\Delta e_{ij})^{k+1} - (\Delta e_{ij}^p)^{k+1}, \quad (\Delta e_{ij}'^y)^{k+1} = (\Delta e_{ij}^y)^{k+1} - \delta_{ij}(\Delta e)^{k+1}, \\
(\Delta \sigma_{ij}')^{k+1} &= 2G(\Delta e_{ij}'^y)^{k+1} + t_{ij}^k, \quad (\Delta \sigma)^{k+1} = 3K(\Delta e)^{k+1} \\
\sigma_{ij}^{k+1} &= \sigma_{ij}^k + (\Delta \sigma_{ij}')^{k+1} + \delta_{ij}(\Delta \sigma)^{k+1}
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Величины t_{ij}^k введены в (2.32) с целью учета вращения ячейки как твердого целого.

Их можно представить в виде [118]:

$$\begin{aligned}
t_{rr}^k &= -(\sigma_{rr}^k - \sigma_{zz}^k) \sin^2(-\Delta \omega^{k+1}) + 2\sigma_{rz}^k \sin(-\Delta \omega^{k+1}) \\
t_{zz}^k &= -t_{rr}^k, \quad t_{\beta\beta}^k = 0 \\
t_{rz}^k &= -2\sigma_{rz}^k \sin^2(-\Delta \omega^{k+1}) - (\sigma_{rr}^k - \sigma_{zz}^k) \sin(-\Delta \omega^{k+1})
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Так как на шаге интегрирования угол поворота элементарной ячейки как твердого целого достаточно мал, то для упрощения вычислений можно принять:

$$\sin(\Delta \omega^{k+1}) \approx \Delta \omega^{k+1} \tag{2.34}$$

Исходя из найденного напряженно-деформируемого состояния сплошной среды на $k+1$ -ый момент времени осуществляется переход к следующему временному слою, где процесс вычислений повторяется.

2.1.3. АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СИЛ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В вариационном уравнении движения (2.2) компоненты контактного усилия q_α ($\alpha = r, z$), заранее неизвестны и определяются в процессе решения задачи [151-152]. Для простоты полагается, что контактное взаимодействие возможно только между отдельными конструктивными элементами, которые занимают в меридиональном сечении или на плоскости roz односвязные подобласти Ω_j , ограниченные контурами G_j .

На контактных границах (G_j) вводится местный координатный базис s, ξ , связанный с деформированной поверхностью. Здесь s - направление касательной, ξ - нормали к поверхности. При решении задач использовались алгоритмы контакта с трением или без трения, обеспечивающие непроникание по нормали и свободное проскальзывание вдоль касательной или проскальзывание с учетом трения [152].

Для модели контакта без трения усилие по нормали определяется из условия непроникания:

$$\begin{cases} \dot{u}'_\xi = \ddot{u}_\xi'' \\ q'_\xi = -q''_\xi \end{cases}, \quad q_\xi = q'_\xi = \begin{cases} 0, & q_\xi \geq 0 \\ q_\xi, & q_\xi < 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

а касательные усилия полагаются равными нулю $q'_s = q''_s = 0$.

Для модели контакта с трением усилие по нормали определяется из условия непроникания:

$$\begin{cases} \dot{u}'_\xi = \ddot{u}_\xi'' \\ q'_\xi = -q''_\xi \end{cases}, \quad q_\xi = q'_\xi = \begin{cases} 0, & q_\xi \geq 0 \\ q_\xi, & q_\xi < 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

касательное усилие – на первом этапе из условия жесткой склейки, а в случае превышения силы трения покоя – в соответствии с законом Кулона:

$$\begin{cases} \dot{u}'_s = \ddot{u}_s'' \\ q'_s = -q''_s \end{cases}, \quad q_s = q'_s = \begin{cases} q_s, & |q_s| \leq k_\xi |q_\xi| \\ k_\xi |q_\xi| \text{sign}(q_s), & |q_s| > k_\xi |q_\xi| \end{cases} \quad (2.37)$$

Связь контактирующих подобластей полагается односторонней (рис.2.2), т.е. возможен отрыв поверхностей друг от друга и повторное вступление в контакт. Поэтому условия (2.35-2.37) применяются только для сжимающих усилий.

Контактные усилия определяются с использованием симметричного алгоритма на несогласованных разностных сетках [149]. По (2.25) вычисляются перемещения противоположных границ без учета вектора узловых сил Q . Одна из границ принимается за базовую, на другой по перехлесту сеток определяются узлы, находящиеся в контакте. На базовой границе в местах контакта ее с узлами противоположной вводятся "фиктивные" узлы, необходимые функции для которых определяются линейной интерполяцией вдоль координаты s местного базиса. Для узлов второй границы и соответствующих им фиктивных узлов базовой границы вычисляются контактные усилия. Аналогичным образом, принимая вторую границу за базовую, на поверхности контакта определяются усилия, соответствующие узлам первой границы. В итоге на поверхности контакта получается совмещенная эпюра контактных усилий $(q_s(s), q_\xi(s))$, соответствующая узлам сетки 1-ой и 2-ой границ. Для каждой границы совмещенная эпюра усилий приводится (интегрируется) к вектору узловых контактных сил Q , т.е. часть эпюры усилий, находящаяся в пределах грузовой площади ячейки сетки, интегрируется и приводится к узловым силам.

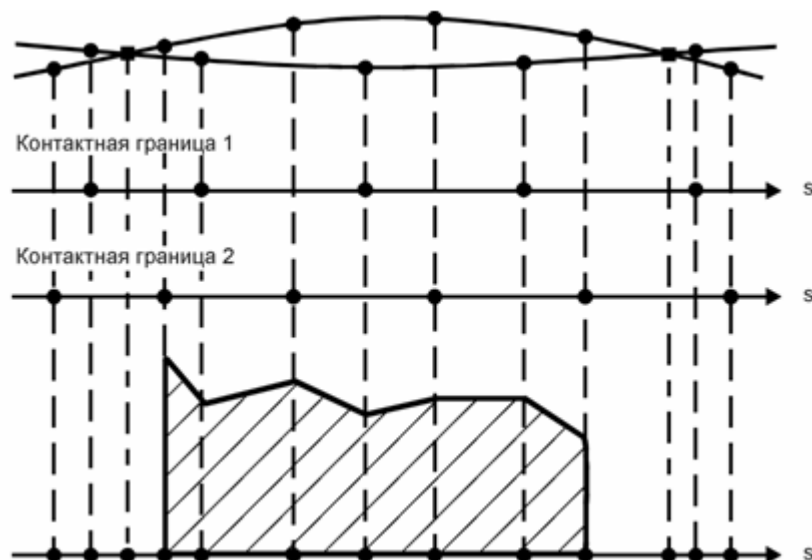


Рис. 2.2. Совмещенная эпюра контактных давлений

2.2 РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНИКА С ТРУБОПРОВОДОМ

2.2.1. ТРУБОПРОВОД БЕЗ ВНУТРЕННЕЙ ЖИДКОСТИ

Изложенный выше вариант вариационно-разностного метода для двумерных задач реализован в пакете прикладных программ (ППП) «Динамика-2» [153-154], который использовался при решении задач в плоской постановке.

Параметры трубы соответствуют параметрам, принятым в проекте трубопроводной циркуляционной системы для реакторов на быстрых нейтронах «Феникс». В этом разделе трубопровод рассматривается без внутренней жидкости. Тело-ударник имеет начальную скорость $V_0 = 10$ м/с. Геометрические размеры ударника и трубопровода: $L = 0.24$ м, $H = 0.06$ м, $D = 0.457$ м, $h = 0.007$ м. Оболочка трубопровода и ударник выполнены из стали с параметрами $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, предел текучести $\sigma_T = 200$ МПа, модуль упругости $G = 140$ МПа, $\rho = 7800$ кг/м³. Погонная масса ударника 112.32 кг/м, трубы – 78.35 кг/м. Расчеты проводились на сетке $300 \times 3 = 900$ ячеек по сечению трубы и $48 \times 24 = 1152$ ячеек по ударнику.

На рис. 2.3 показаны деформированные формы оболочки трубопровода в различные моменты времени для первого варианта расчета – свободного (безопорного) трубопровода. В силу симметрии задачи приведена половина сечения трубы. Отсчет по времени ведется в миллисекундах.

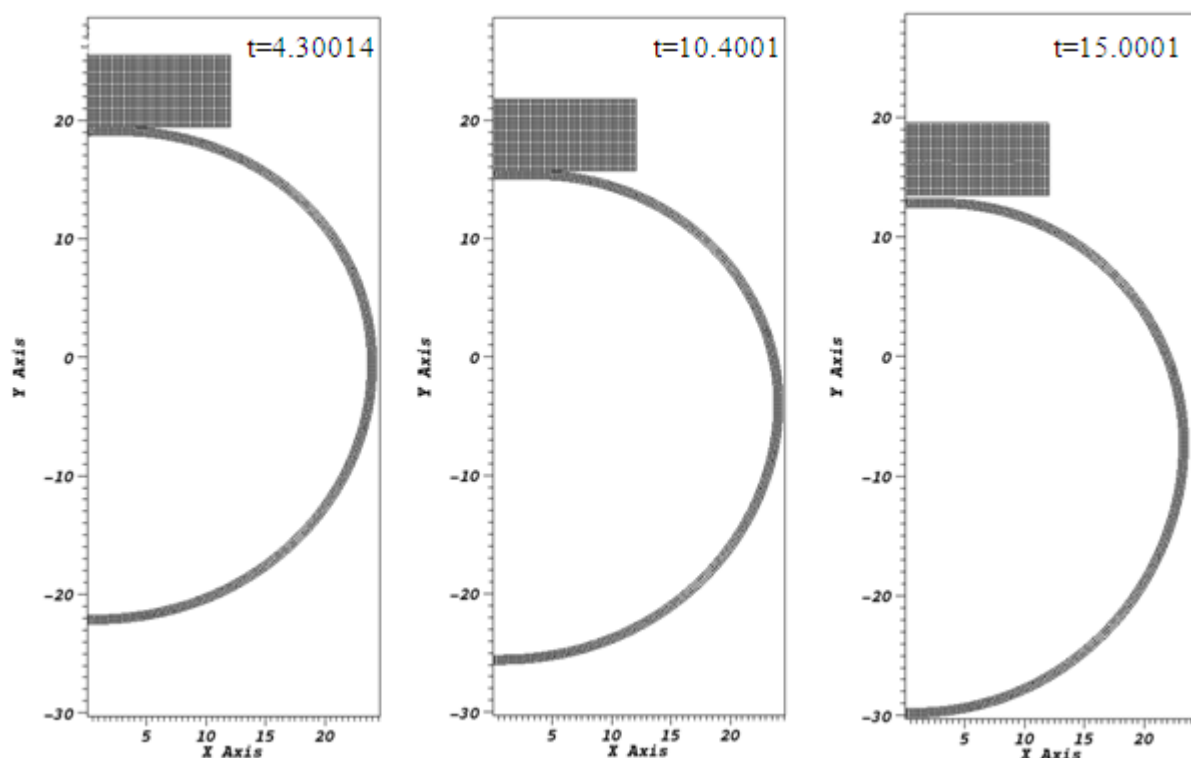


Рис. 2.3. Деформирование безопорного трубопровода

На рис. 2.4 показана контактная сила воздействия ударника на трубопровод в зависимости от времени. Поведение силы имеет осциллирующий характер, связанный с пробегами упругих волн, как по ударнику, так и по трубной оболочке и связанный с формоизменением контактных поверхностей. На протяжении рассматриваемого временного интервала ударник несколько раз отскакивает от оболочки, затем снова ударяет, снова отскакивает и т.д. К моменту времени $t=10$ мс процесс взаимодействия ударника с трубой фактически заканчивается и они движутся отдельно друг от друга. В процессе деформирования в зоне контакта ударника с трубопроводом и на противоположной стороне трубы возникают пластические деформации.

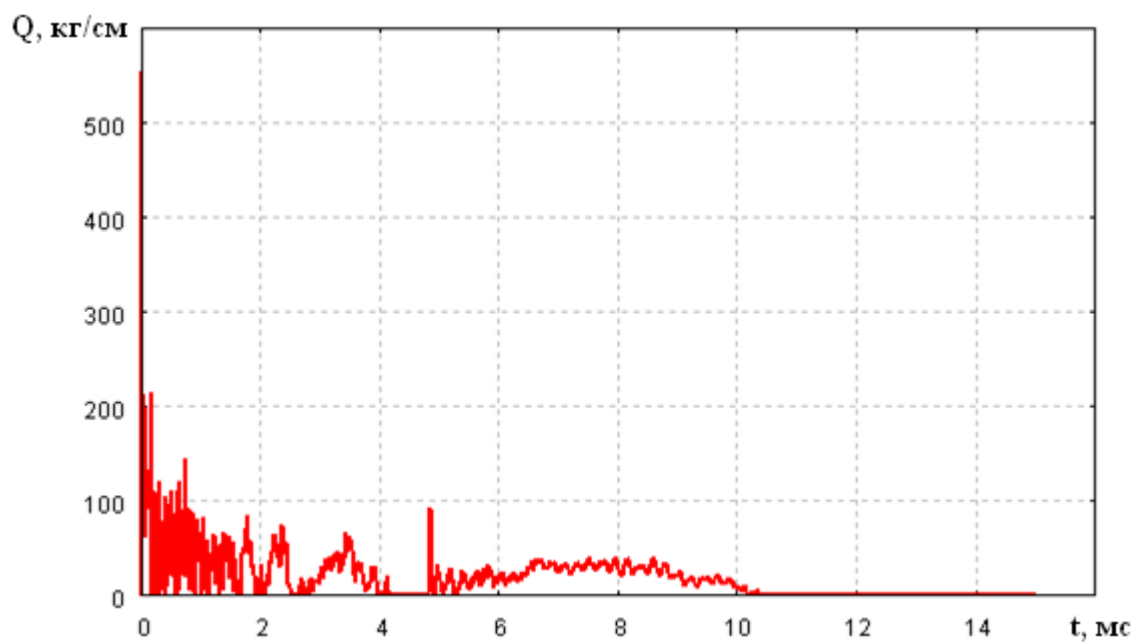


Рис. 2.4. Сила воздействия ударника на трубную оболочку

Как показывают кинематические характеристики процесса (рис.2.5, 2.6), после серии интенсивных упругих колебаний наблюдается фактически поступательное инерционное движение оболочки. Номера кривых 1-3 на этих рисунках соответствуют номерам точек на рис. 2.1а, цифрой 4 отмечено среднее значение скорости и перемещения оболочки. Среднее значение скорости есть скорость центра масс $V_{cp} = \int V(m)dm/m$, где m масса оболочки.

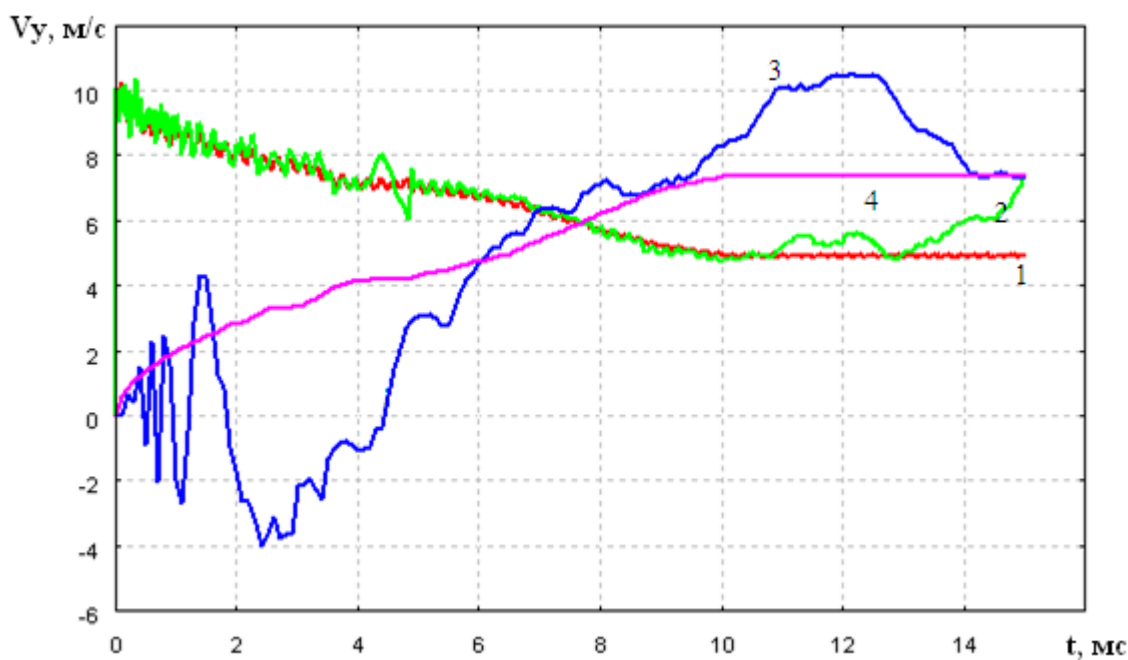


Рис. 2.5. Скорость перемещения точек груза и трубной оболочки

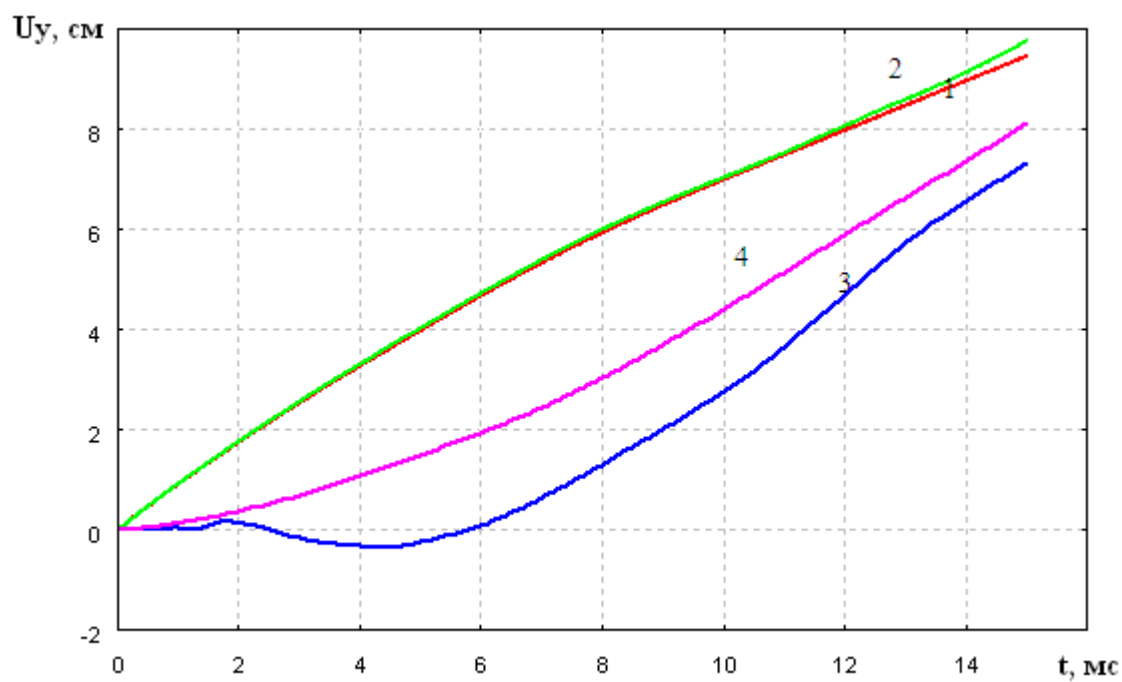


Рис. 2.6. Перемещение точек груза и трубной оболочки.

На рис. 2.7 - 2.9 приведены значения средних величин скорости, перемещения и окружного напряжения в трубной оболочке в зависимости от времени.

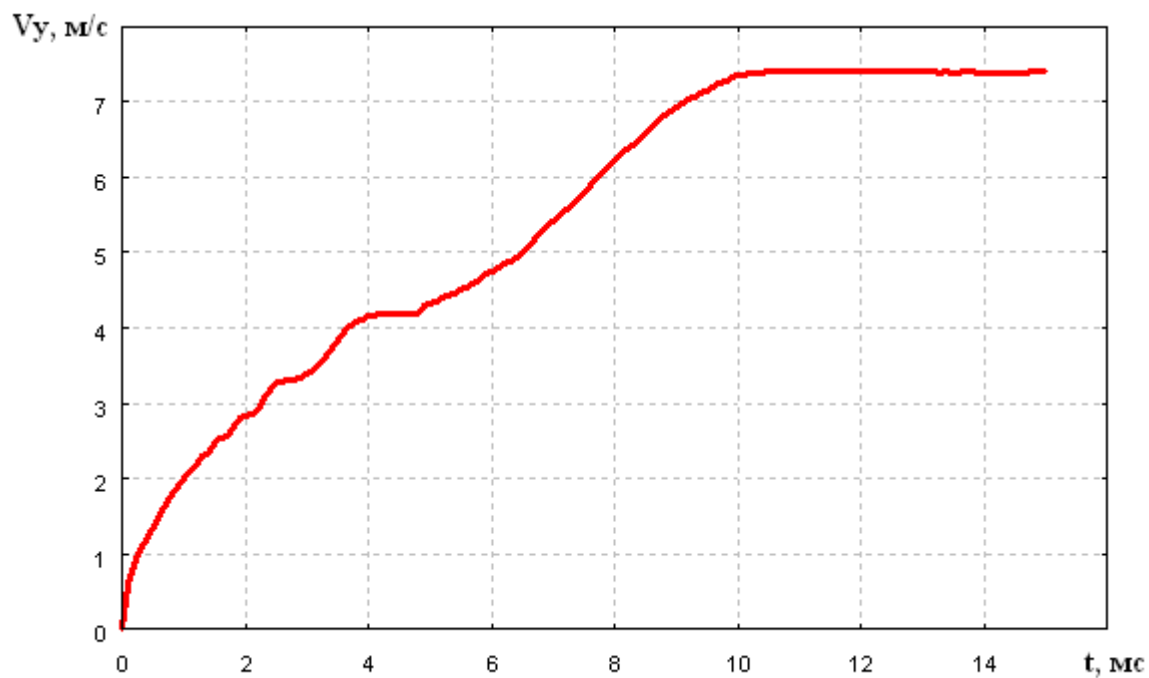


Рис. 2.7. Среднее значение скорости перемещения трубной оболочки

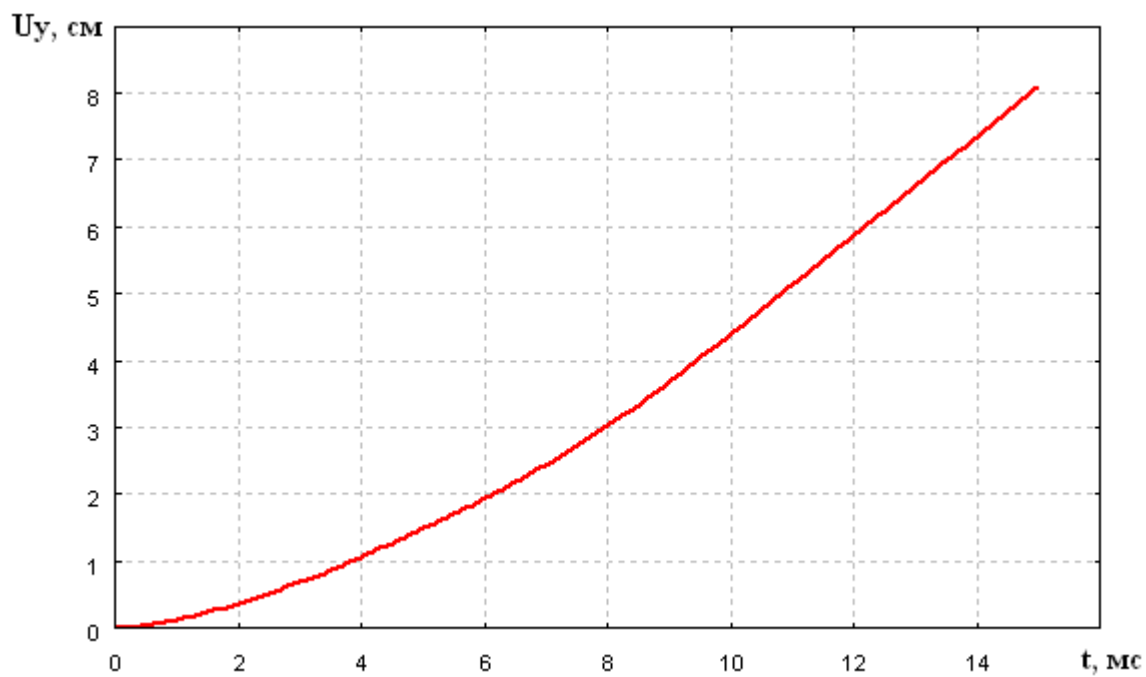


Рис. 2.8. Среднее значение перемещения трубной оболочки

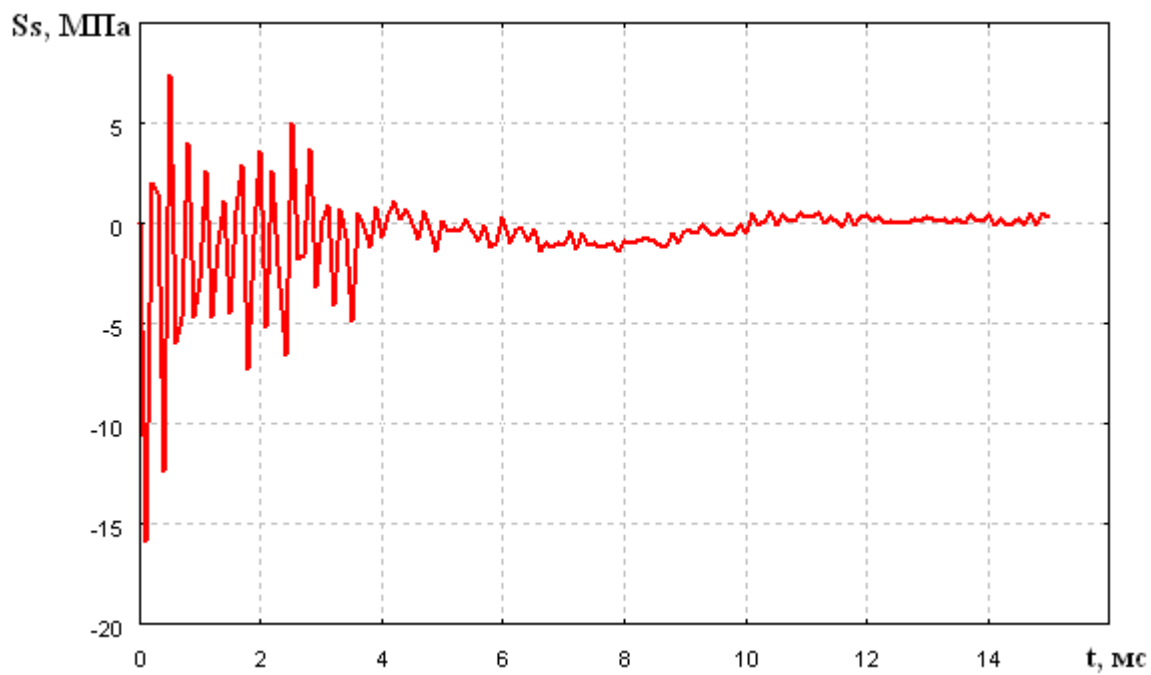


Рис. 2.9. Среднее значение окружного напряжения в трубной оболочке

Аналогичные характеристики процесса для второго варианта расчетов – трубопровода, опирающегося на плоскую неподвижную жесткую поверхность - опору, изображены на рис. 2.10-2.18. На рис. 2.12-2.13 дополнительно показаны контактные силы, действующие на опору со стороны трубной оболочки, и результирующая сила от ударника и опоры на трубную оболочку. В этом варианте наблюдается более интенсивное деформирование трубной оболочки. На контактных поверхностях и в боковой области оболочки изгибные напряжения вызывают пластическое течение. Как и в первом варианте имеет место многократное соударение ударника с преградой. Наблюдается также отскок трубной оболочки от опоры. Достаточно сложный нестационарный процесс деформирования трубопровода характеризуется выходом на квазистационарные значения среднего перемещения и среднего окружного напряжения.

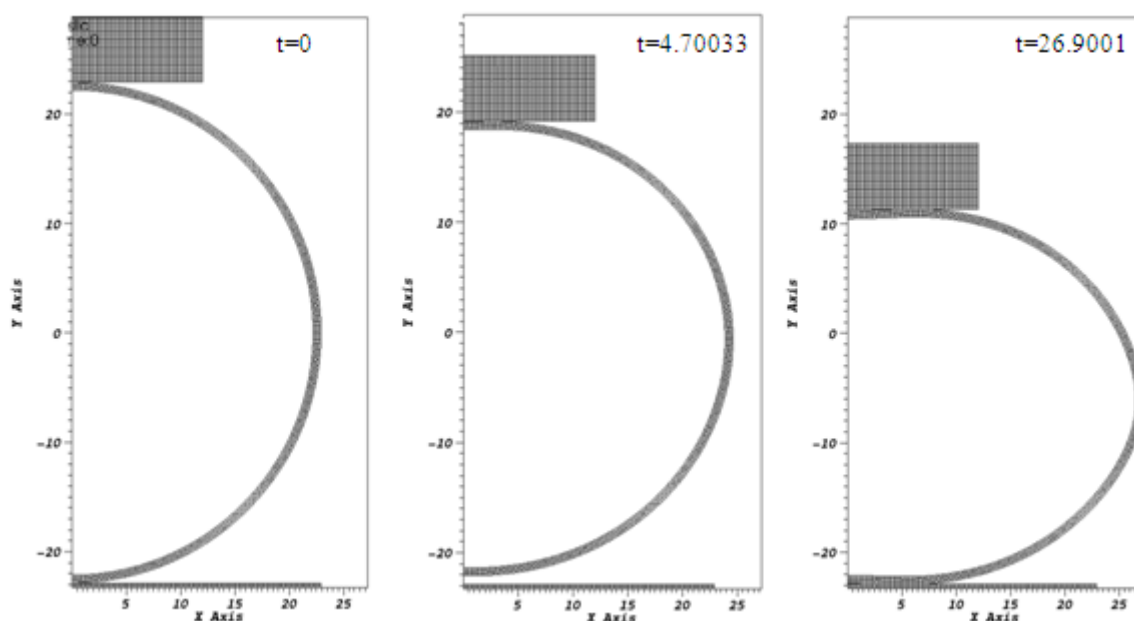


Рис. 2.10. Деформирование трубопровода, опирающегося на неподвижную поверхность

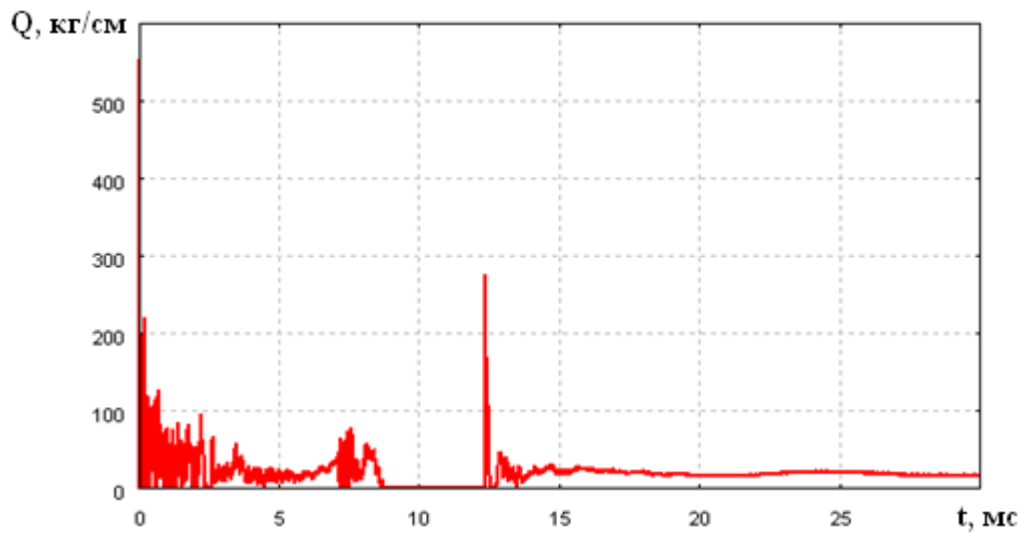


Рис. 2.11. Сила воздействия ударника на трубную оболочку

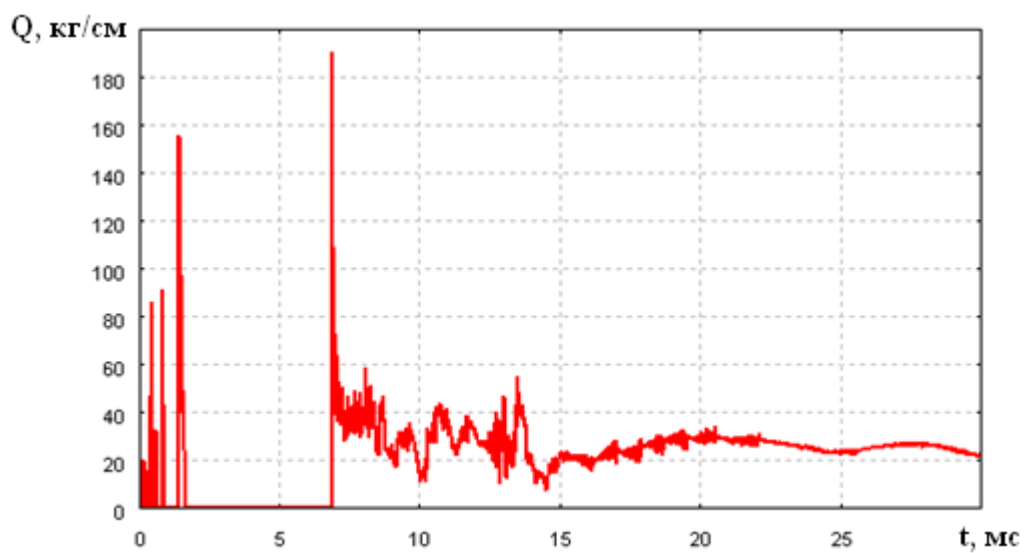


Рис. 2.12. Сила воздействия трубной оболочки на опору

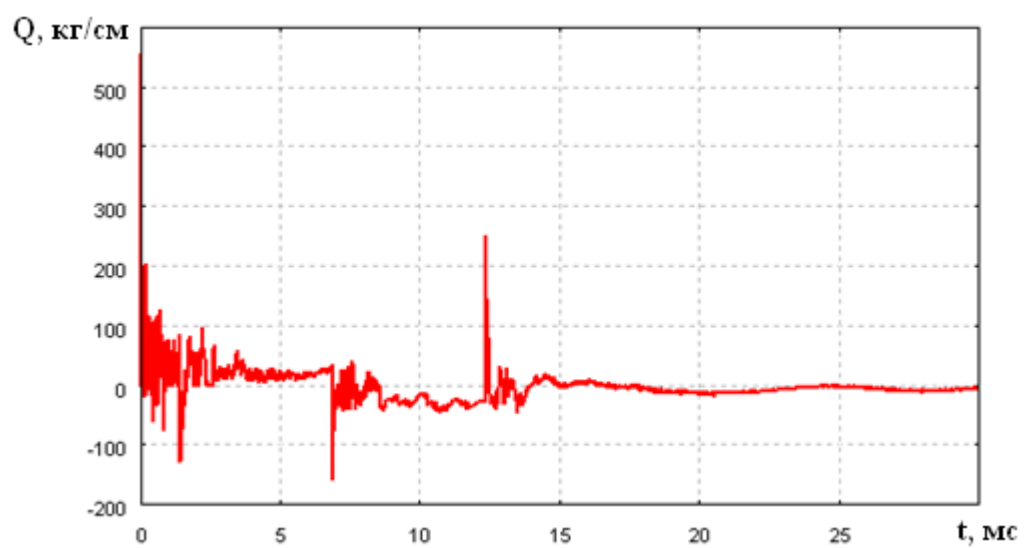


Рис. 2.13. Внешняя сила, действующая на трубную оболочку

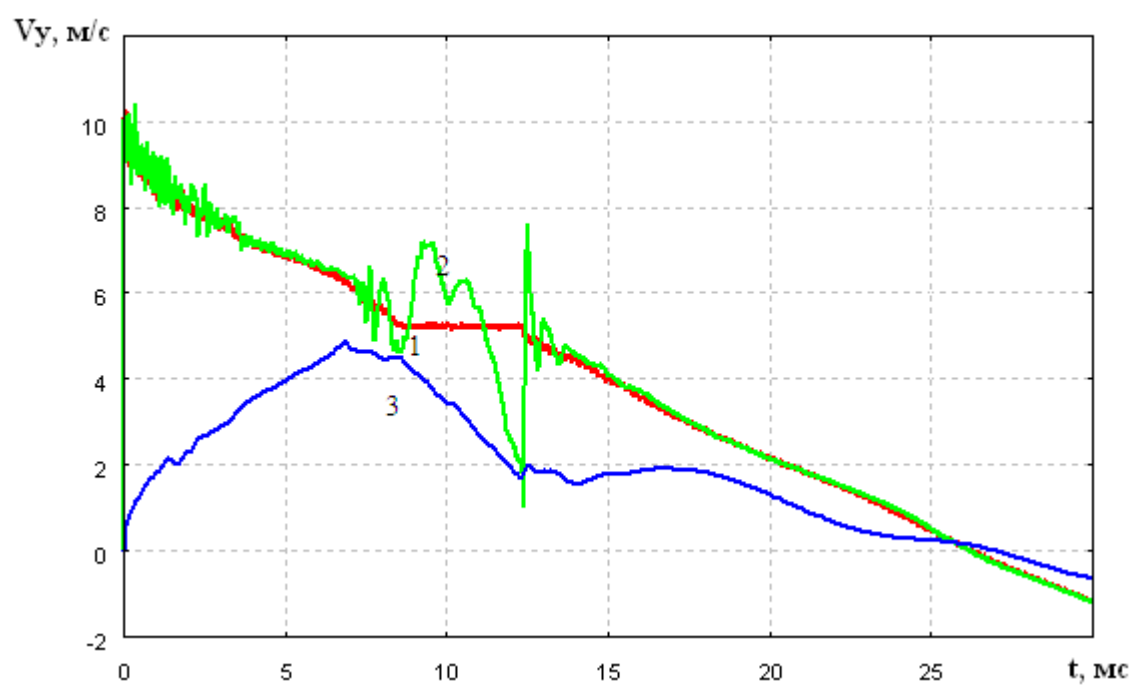


Рис. 2.14. Скорость перемещения точек груза и трубной оболочки

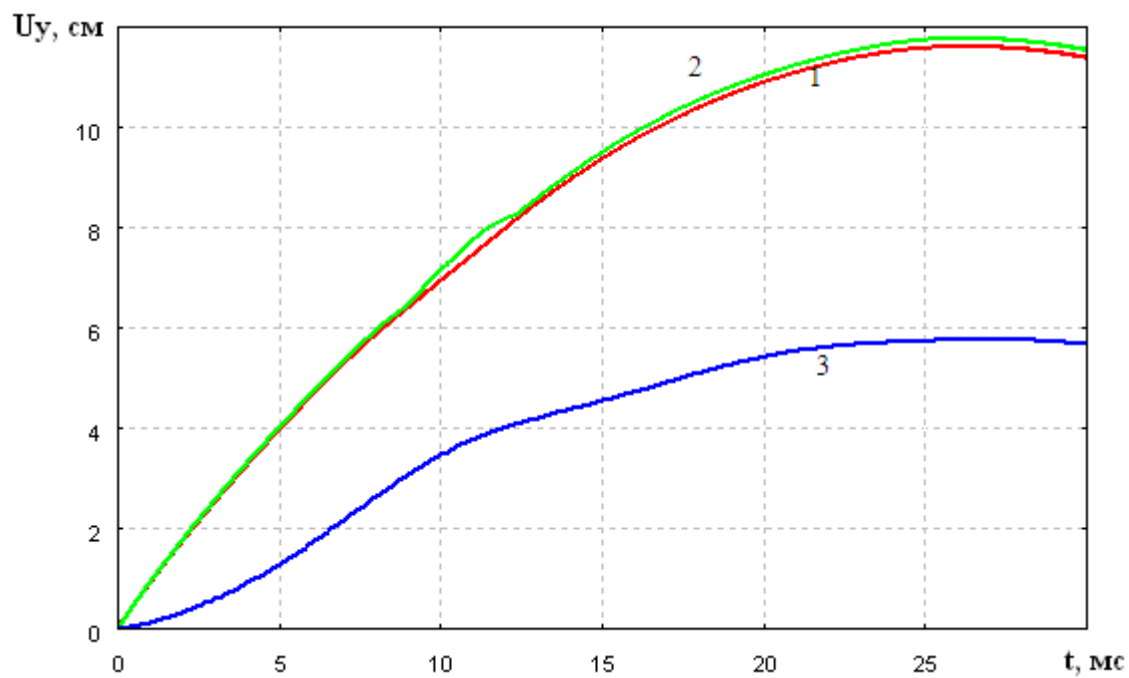


Рис. 2.15. Перемещение точек груза и трубной оболочки



Рис. 2.16. Среднее значение скорости перемещения трубной оболочки

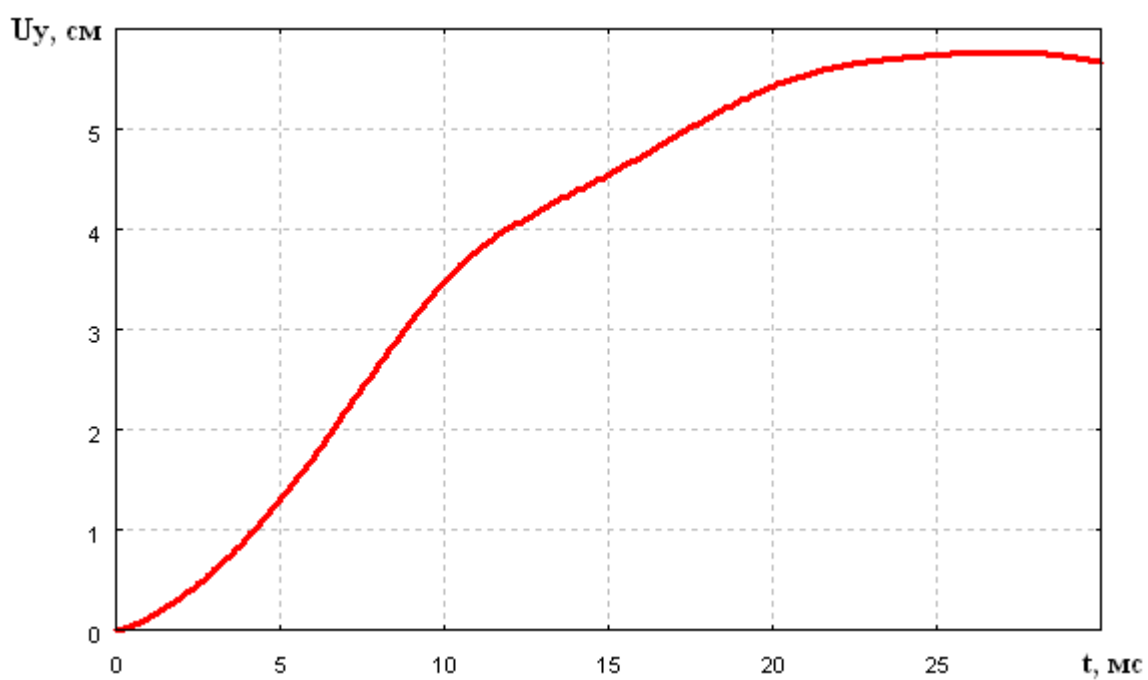


Рис. 2.17. Среднее значение перемещения трубной оболочки

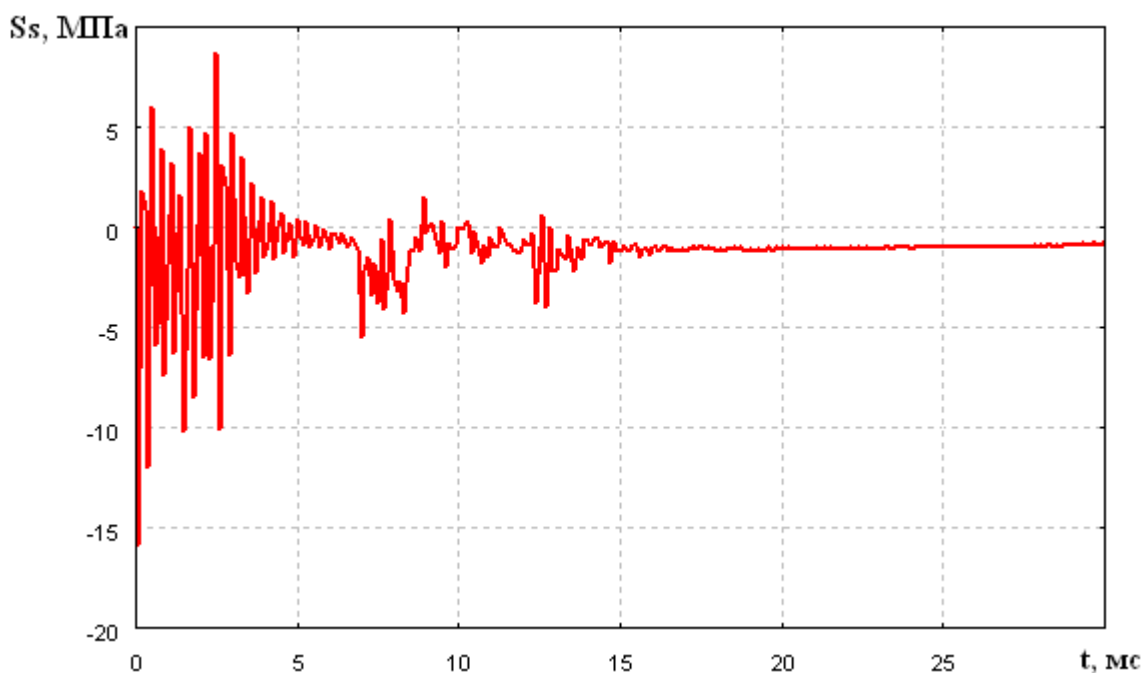


Рис. 2.18. Среднее значение окружного напряжения в трубной оболочке

2.2.2. ТРУБОПРОВОД, ЗАПОЛНЕННЫЙ ЖИДКОСТЬЮ

Ниже приводятся результаты численного моделирования ударного взаимодействия тела с трубопроводом, заполненным жидкостью (водой). Постановка задачи соответствует рис. 2.1а, только полость трубопровода содержит сжимаемую среду, описываемую по тем же уравнениям, что и упругая среда с объемным модулем на сжатие $K=2250$ МПа и малым сдвиговым модулем $G \approx 0.1$ МПа, $\rho=1000$ кг/м³, погонная масса жидкости – 154.05 кг/м. Для учета кавитации в жидкости был модифицирован программный модуль в ППП «Динамика-2» определяющий давление в жидкости. Благодаря этим поправкам растяжение жидкости происходит без сопротивления. Внутренняя полость трубы покрывалась сеткой из $75 \times 75 \times 6 = 33750$ четырехугольных ячеек. Параметры по ударнику и оболочке те же, что и в предыдущем разделе.

На рис. 2.19 показаны начальное положение расчетной области и положение на момент $t = 8$ мс. Наличие жидкости внутри трубопровода увеличивает как его массу, так и его жесткость. Поэтому наблюдаются более высокие значения контактной силы со стороны ударника, но меньшие значения скоростей и перемещений характерных точек трубной оболочки (рис. 2.20-2.24). Обозначения кривых на рисунках соответствуют рис. 2.1а. Цифрой 4 отмечено среднее значение скорости и перемещения оболочки. На рис. 2.21-2.22 показаны

контактные силы, действующие на оболочку со стороны жидкости, и результирующая сила от ударника и жидкости на трубную оболочку.

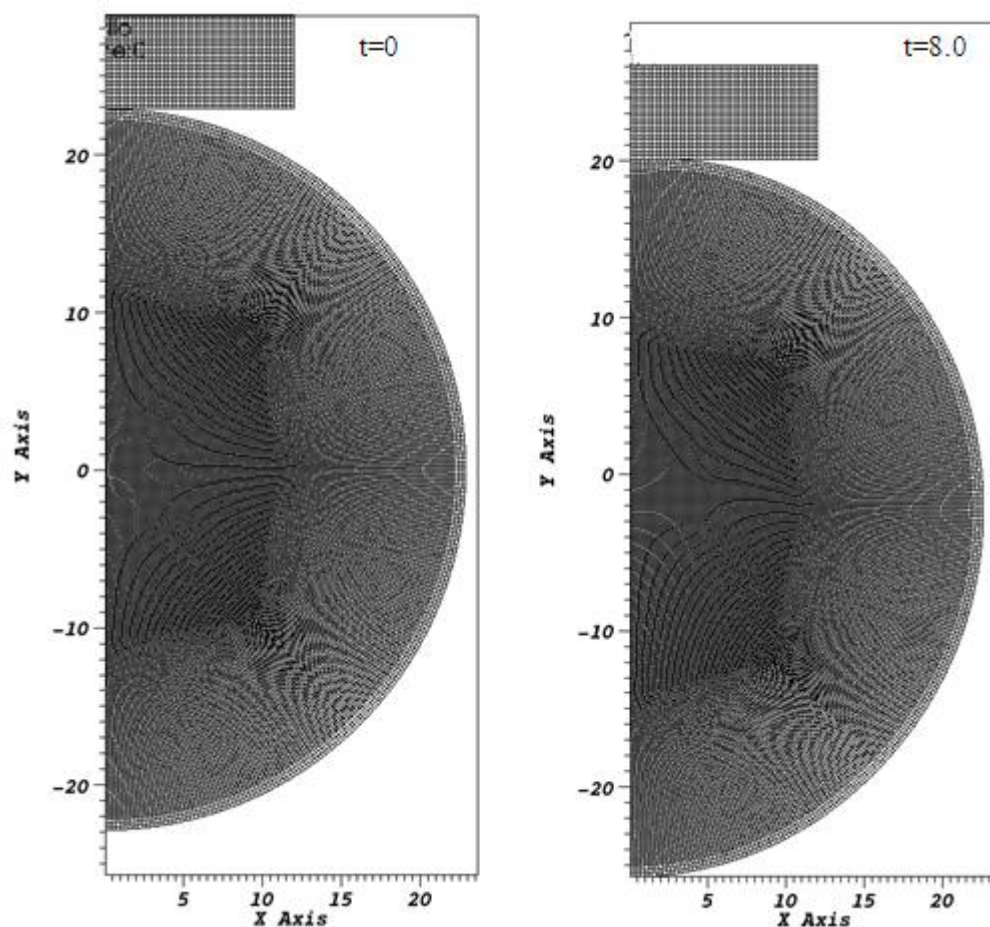


Рис. 2.19. Деформирование безопорного трубопровода с жидкостью

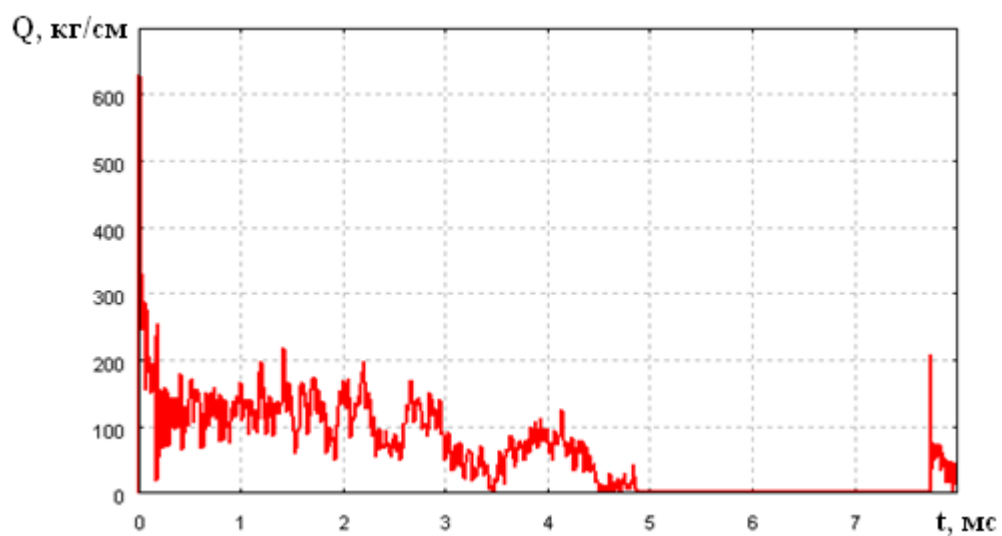


Рис. 2.20. Сила воздействия ударника на трубную оболочку

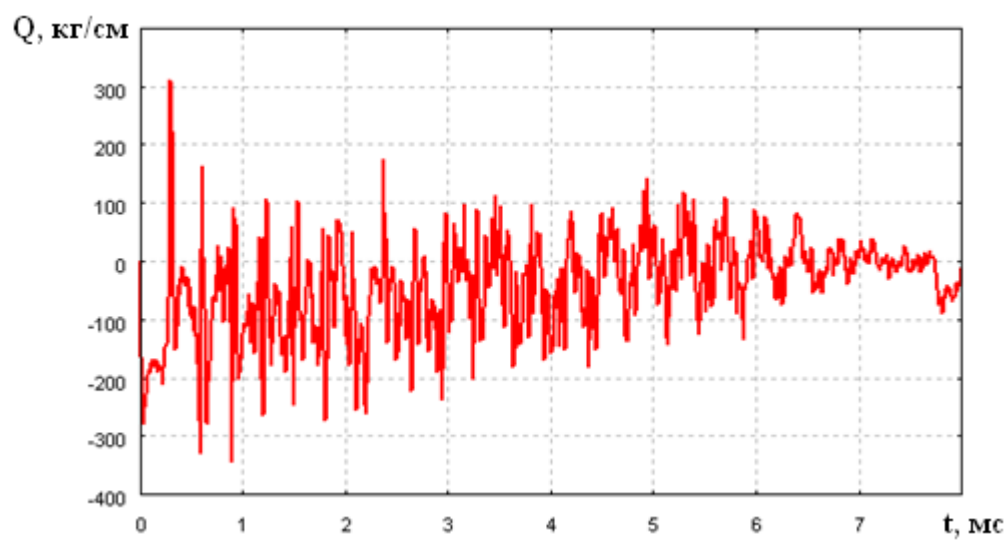


Рис. 2.21. Сила воздействия жидкости на трубную оболочку

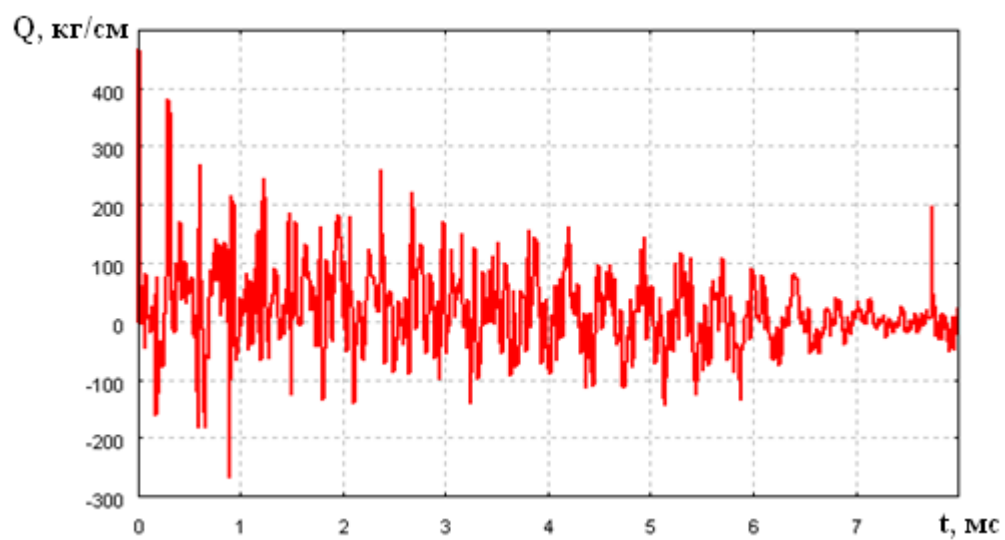


Рис. 2.22. Внешняя сила, действующая на трубную оболочку

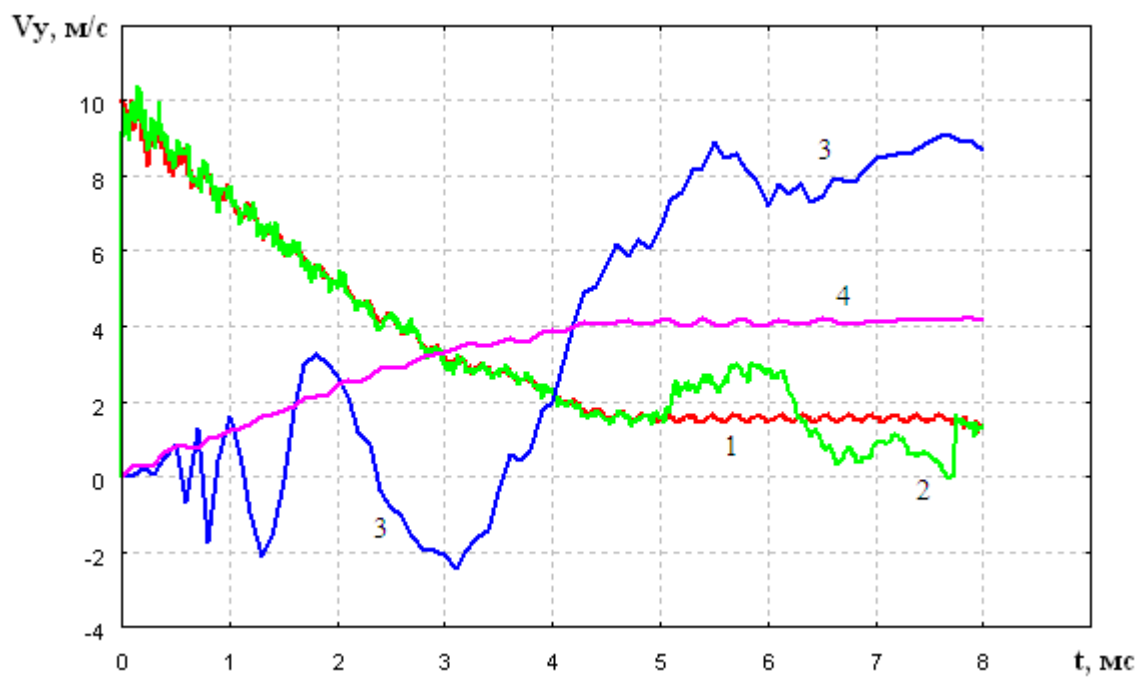


Рис. 2.23. Скорость перемещения точек груза и трубной оболочки

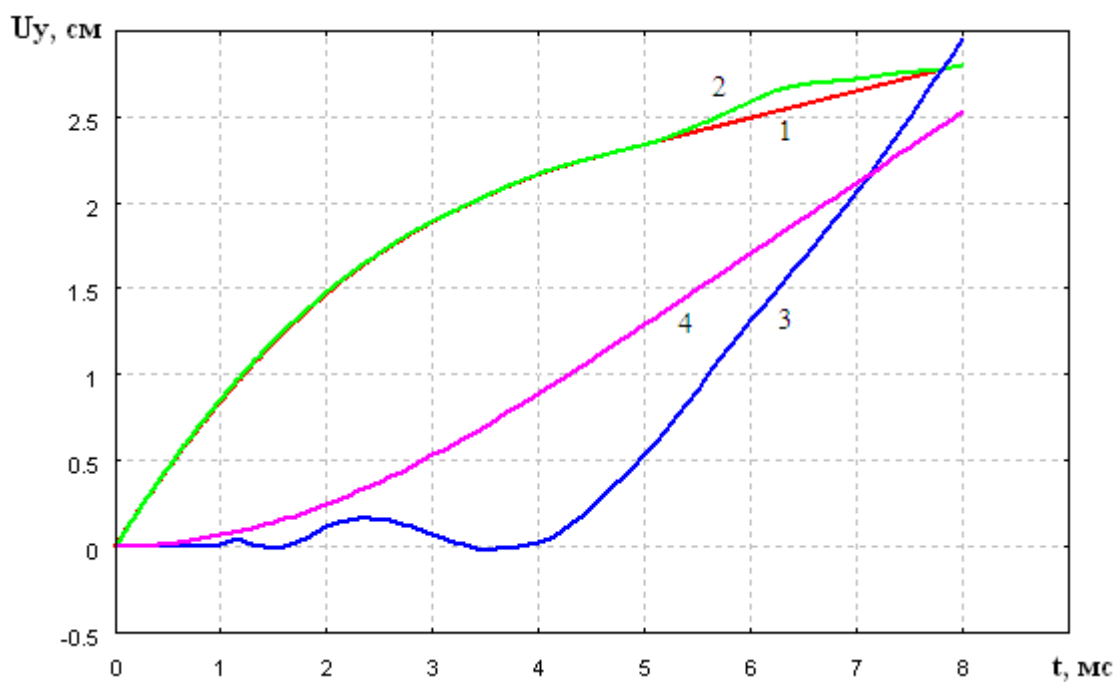


Рис. 2.24. Перемещение точек груза и трубной оболочки

На рис. 2.25 - 2.28 приведены средние значения скорости и перемещения оболочки, давления в жидкости, окружного напряжения в оболочке в зависимости от времени. Также

как и в случае трубопровода без жидкости после отскока ударника наблюдается выход движения трубы на квазистационарный режим, но с меньшей скоростью.

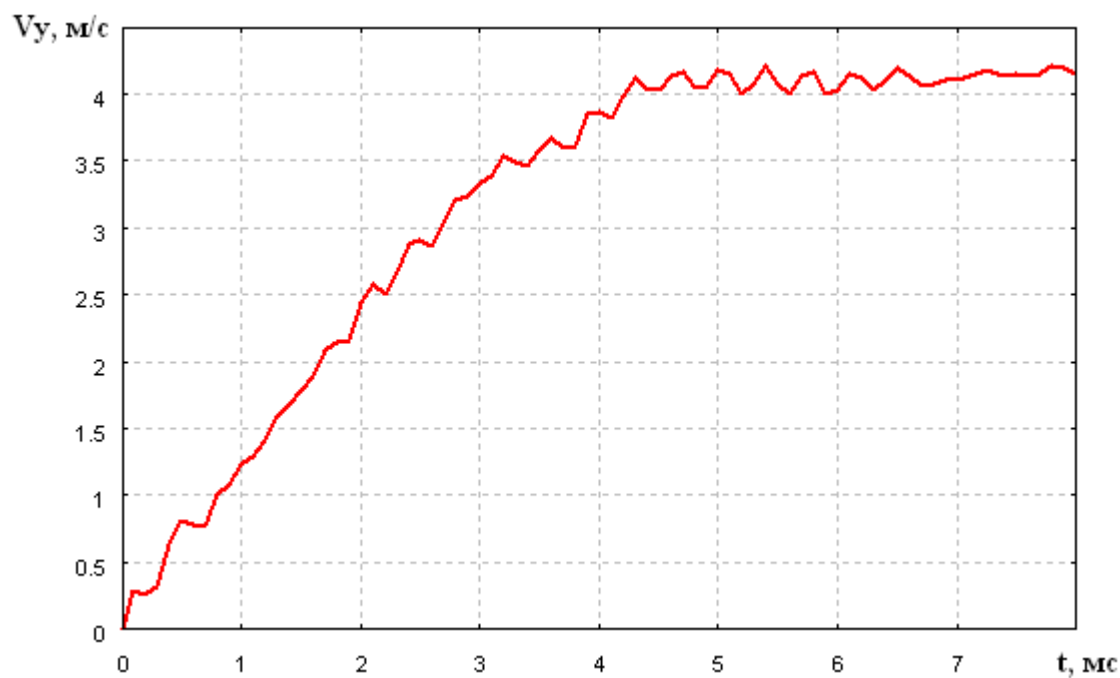


Рис. 2.25. Среднее значение скорости перемещения трубной оболочки

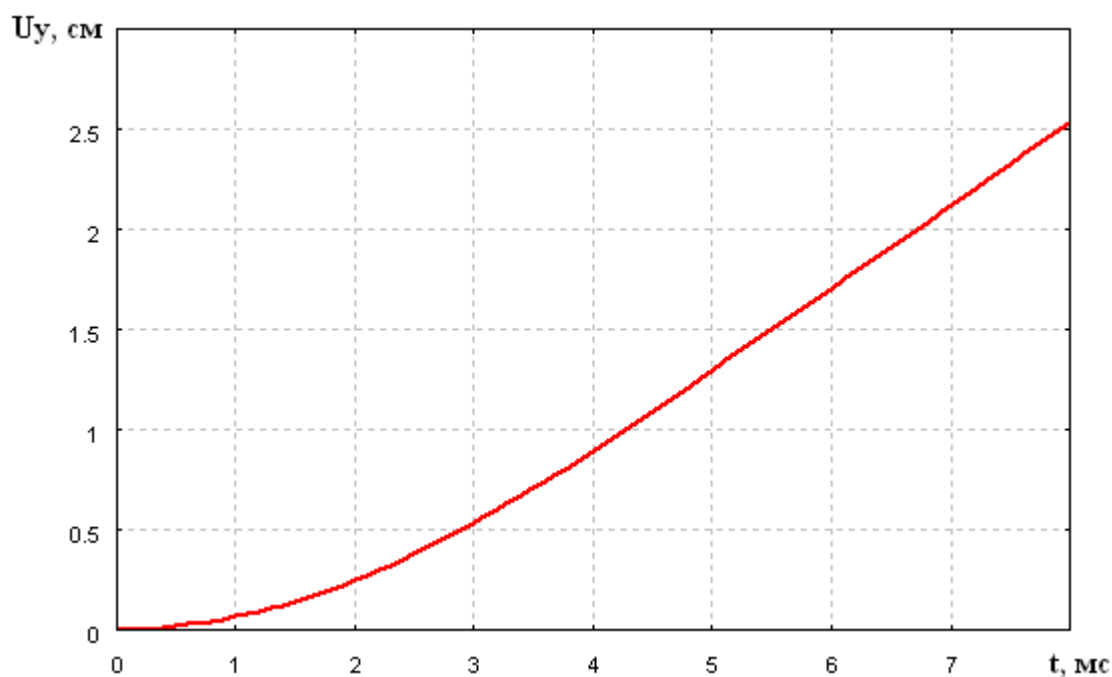


Рис. 2.26. Среднее значение перемещения трубной оболочки

Среднее давление в жидкости повышается до 3 МПа с незначительными колебаниями, связанными с пробегами волн по объему жидкости и радиальными упругими колебаниями оболочки. При заданных параметрах оболочка ведет себя упруго. Среднее напряжение в

оболочке (на уровне срединной поверхности) ведет себя аналогично среднему давлению в жидкости – зависимость от времени имеет колоколообразную форму.



Рис. 2.27. Среднее значение давления в жидкости

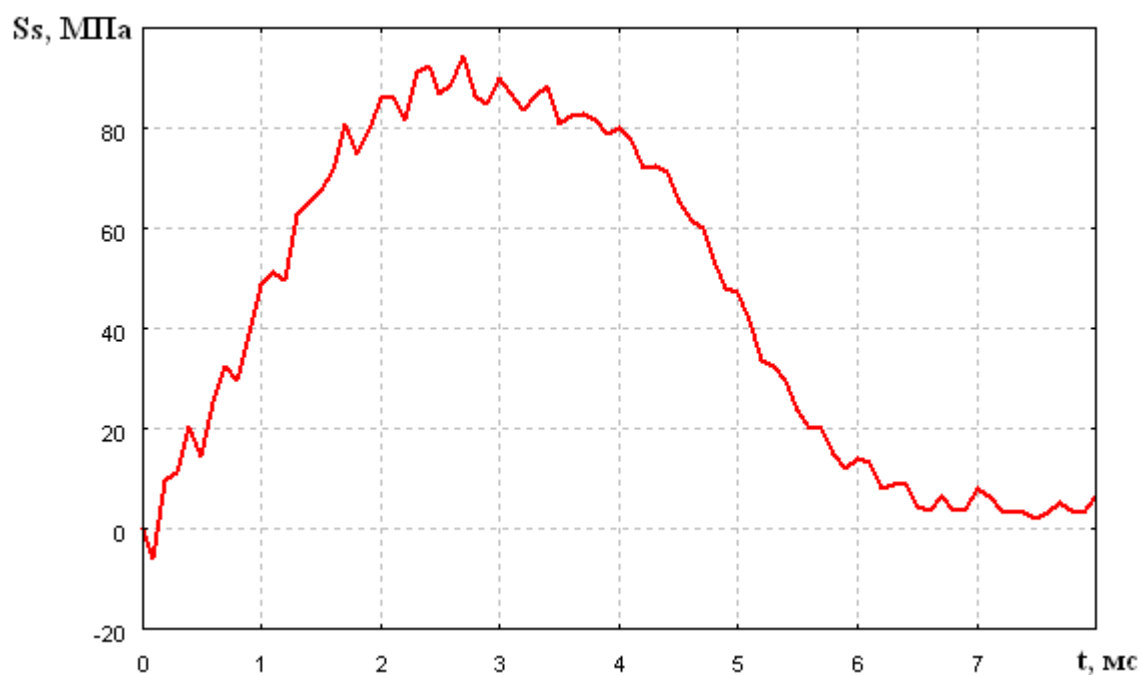


Рис. 2.28. Среднее значение окружного напряжения в трубной оболочке

На рис. 2.29 - 2.39 приведены аналогичные характеристики движения и деформирования трубопровода с жидкостью при его опирании на неподвижную жесткую

плоскую поверхность. Номера кривых 1-2 на этих рисунках соответствуют номерам точек на рис. 2.16, цифрой 3 отмечено среднее значение скорости и перемещения оболочки.

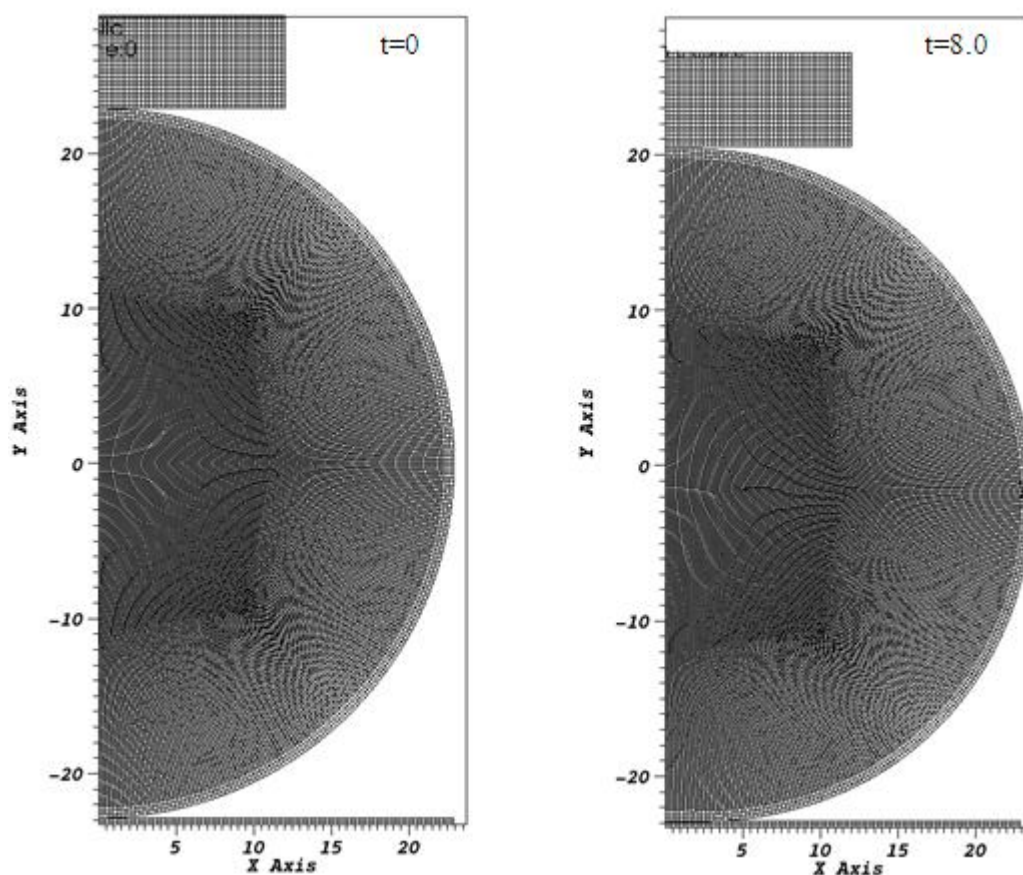


Рис. 2.29. Деформирование трубопровода с жидкостью, опирающегося на неподвижную поверхность

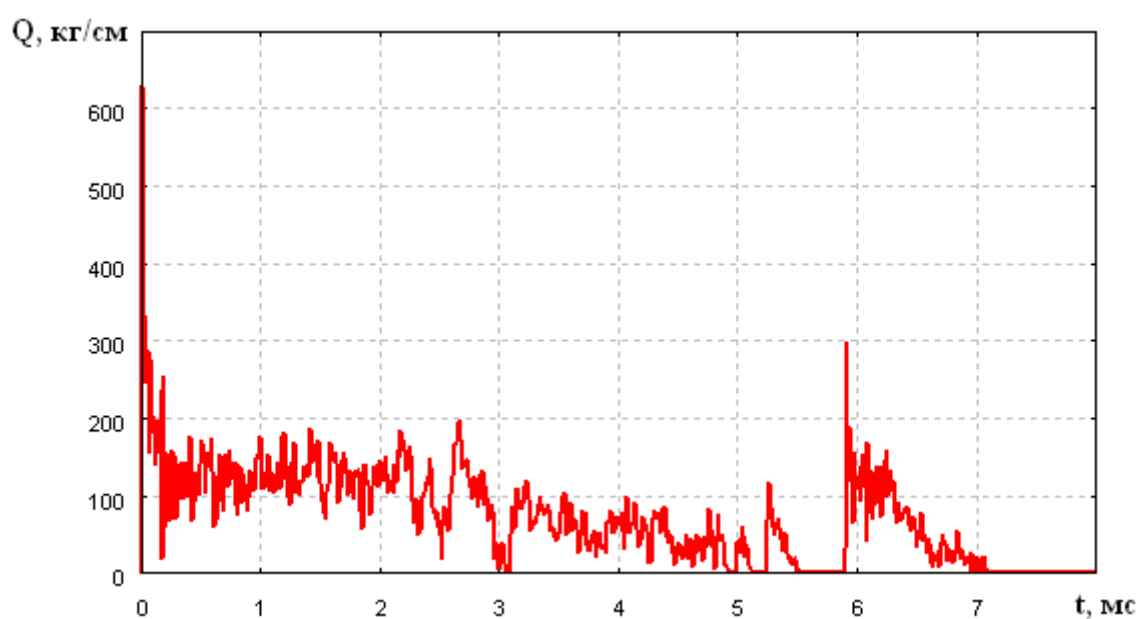


Рис. 2.30. Сила воздействия ударника на трубную оболочку

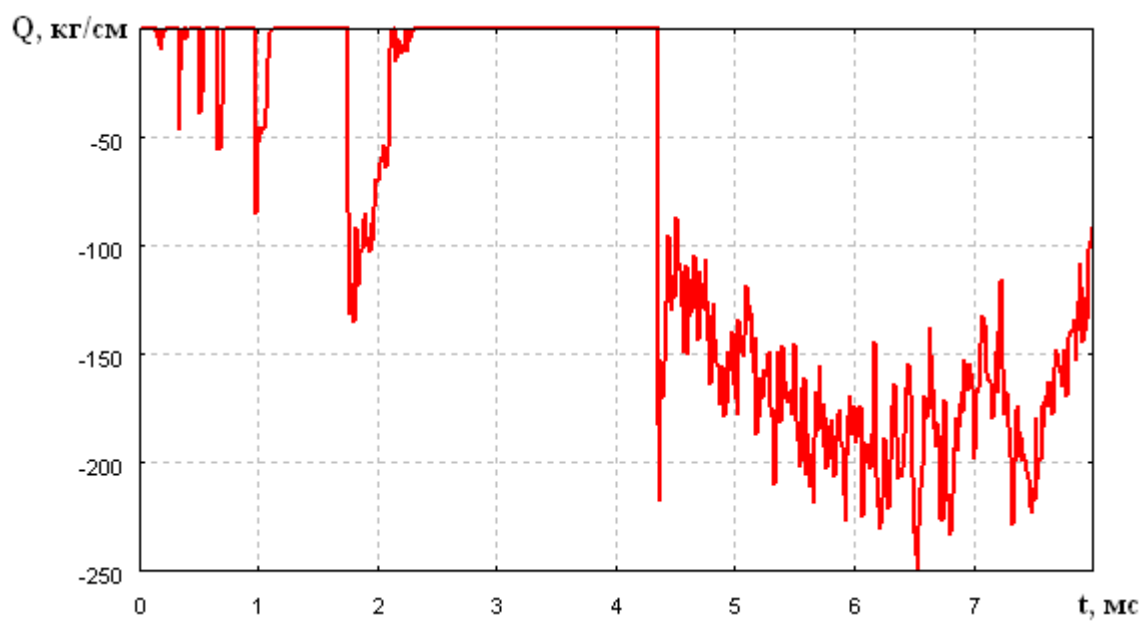


Рис. 2.31. Сила воздействия опоры на трубную оболочку

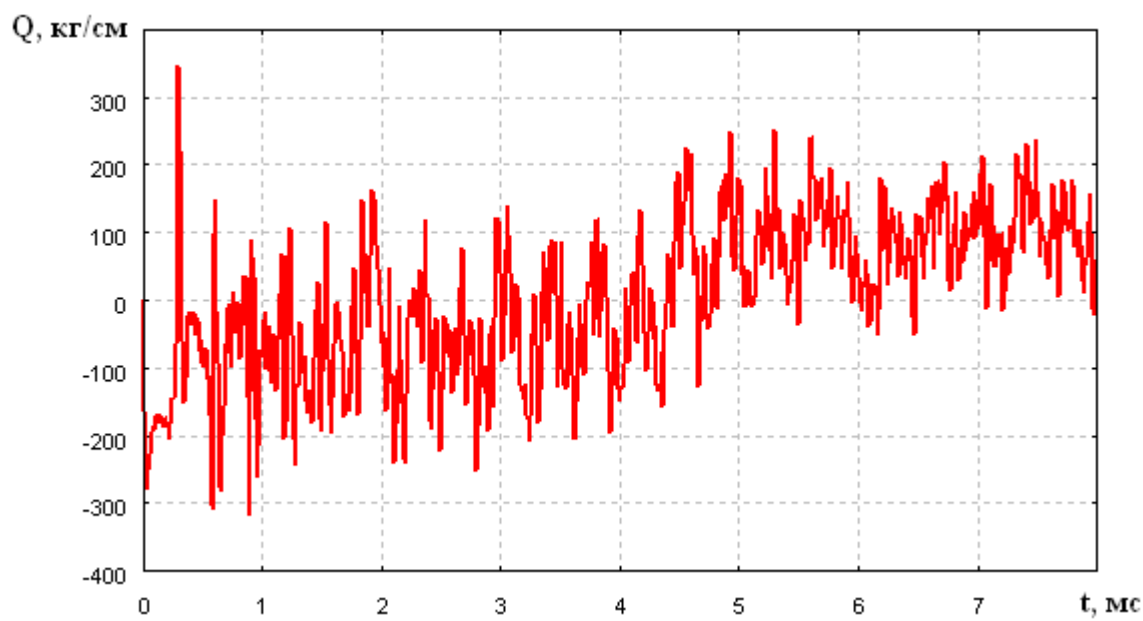


Рис. 2.32. Сила воздействия жидкости на трубную оболочку

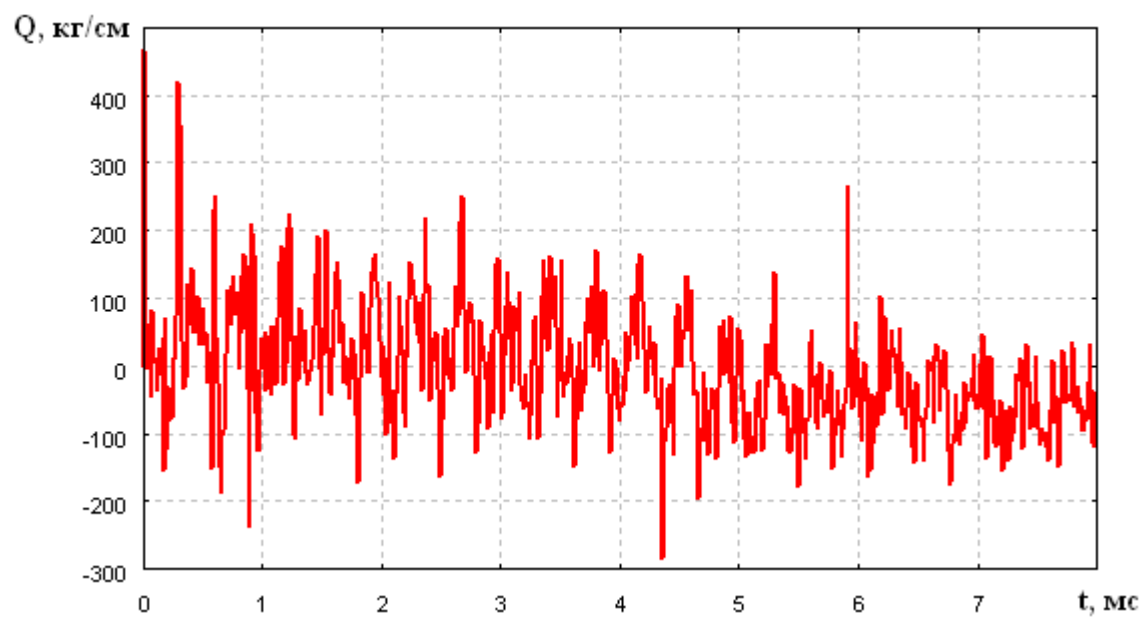


Рис. 2.33. Внешняя сила, действующая на трубную оболочку

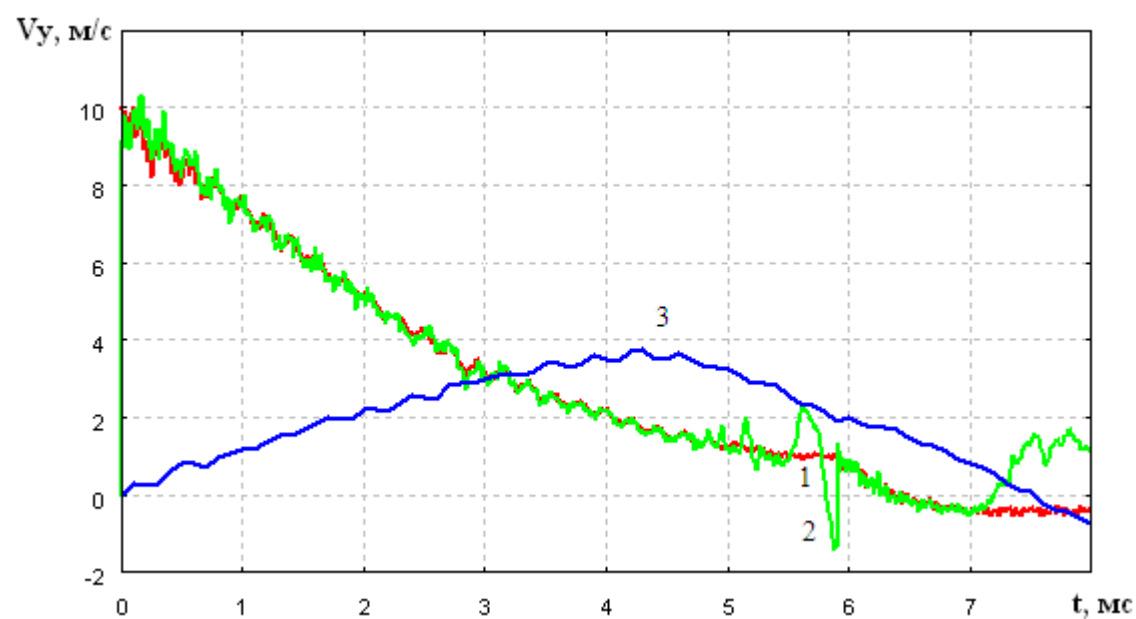


Рис. 2.34. Скорость перемещения точек груза и трубной оболочки

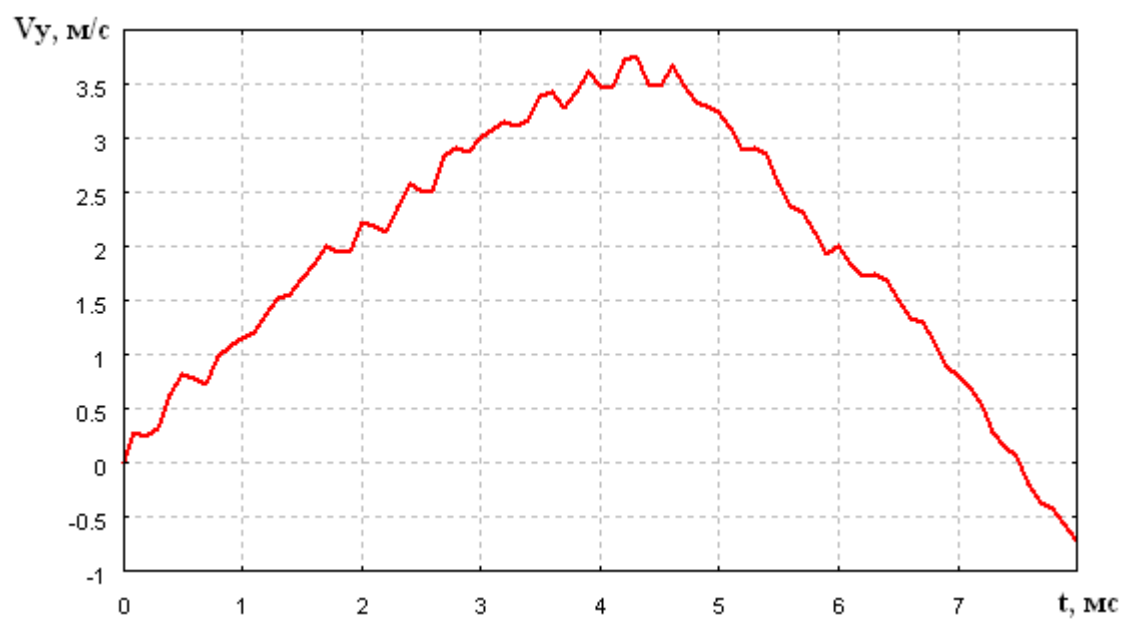


Рис. 2.35. Среднее значение скорости перемещения трубной оболочки

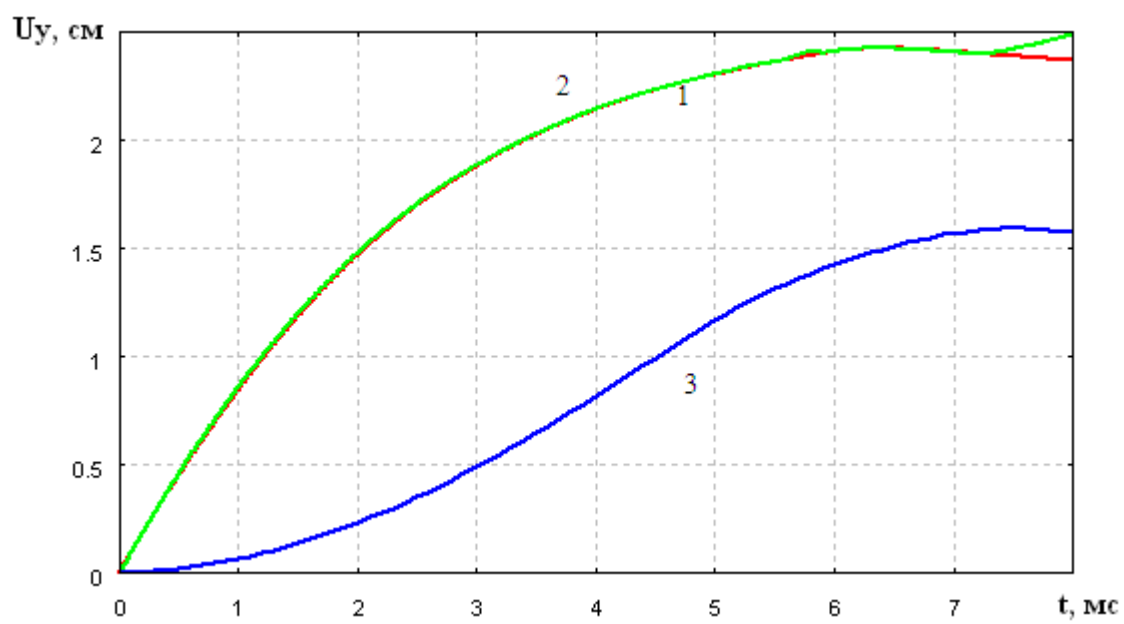


Рис. 2.36. Перемещение точек груза и трубной оболочки

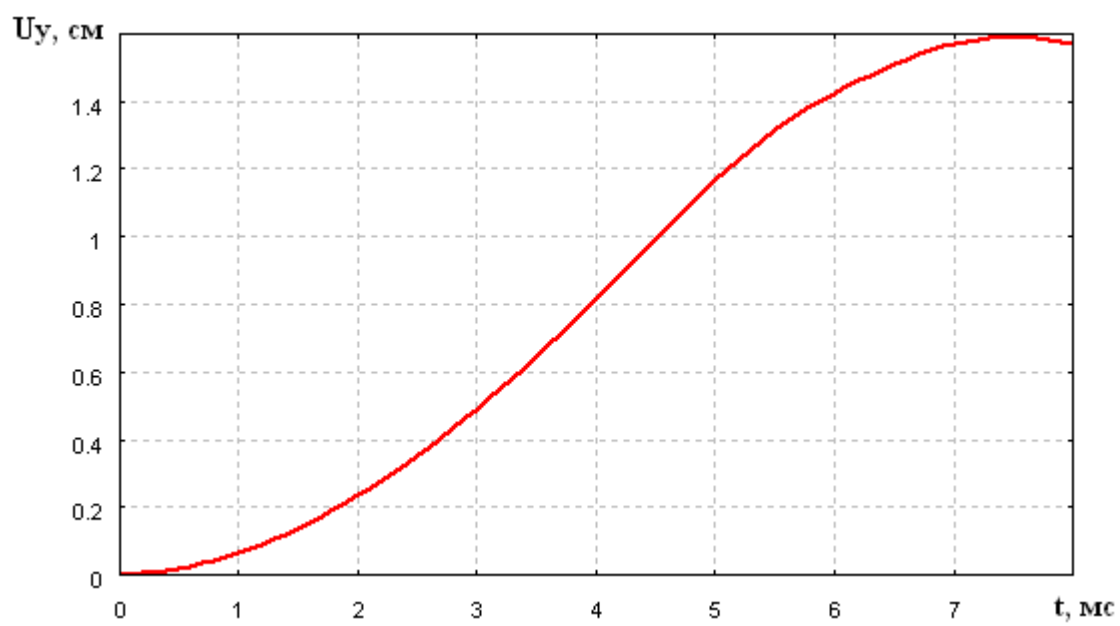


Рис. 2.37. Среднее значение перемещения трубной оболочки



Рис. 2.38. Среднее значение давления в жидкости

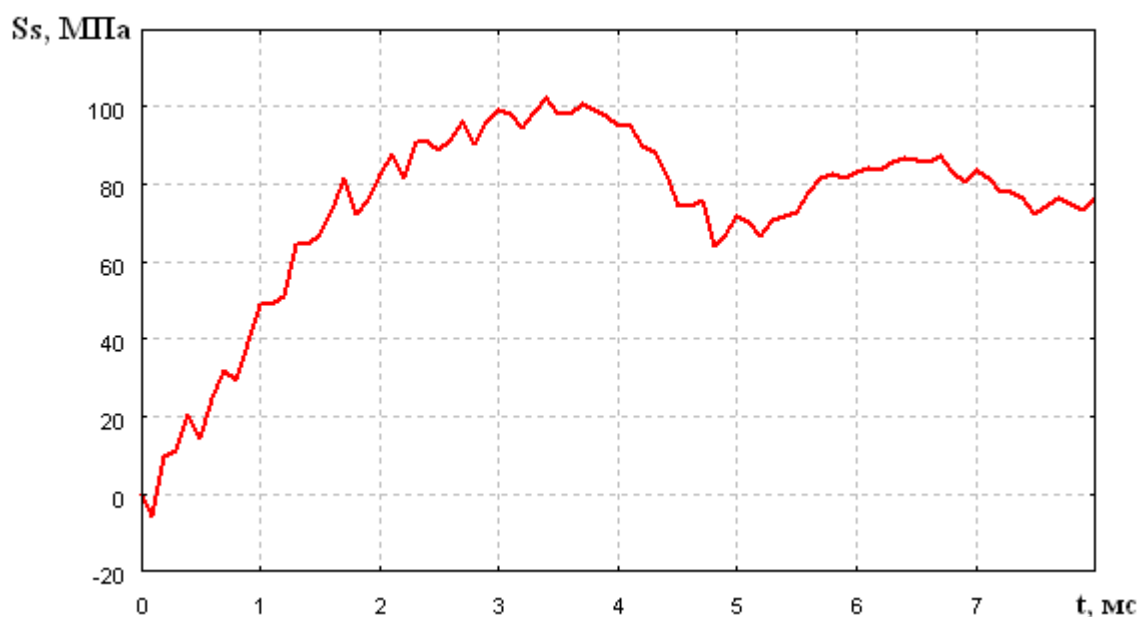


Рис. 2.39. Среднее значение окружного напряжения в трубной оболочке

Как и в случае с незаполненным трубопроводом процесс деформирования несколько интенсифицируется, по сравнению с безопорным трубопроводом, появляются пластические деформации. Но в целом жидкость несколько сглаживает различие в динамических процессах. Трубопровод с жидкостью в рассматриваемый интервал времени неоднократно отскакивает от опоры. Волновые процессы в жидкости носят сложный характер – в некоторые моменты времени формируются зоны отрыва жидкости от внутренней поверхности оболочки. Однако среднее давление в жидкости не падает так же сильно, как для свободного (безопорного) трубопровода, а совершает колебания около уровня $\approx 2,7$ МПа.

Таким образом, как наличие опоры, так и внутренняя жидкость в трубе существенным образом изменяют все характеристики движения и деформирования трубопровода при его взаимодействии с ударником, что необходимо учитывать при прогнозировании его динамического поведения.

2.2.3. ПОДВОДНЫЙ ТРУБОПРОВОД, ЗАПОЛНЕННЫЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим более сложную задачу. Предположим, что трубопровод с внутренней жидкостью подвергается ударному воздействию, находясь во внешней упругой среде. Будем рассматривать внешнюю среду как жидкость с теми же свойствами, что и внутренняя жидкость в трубопроводе. Постановка задачи представлена на рис. 2.40.

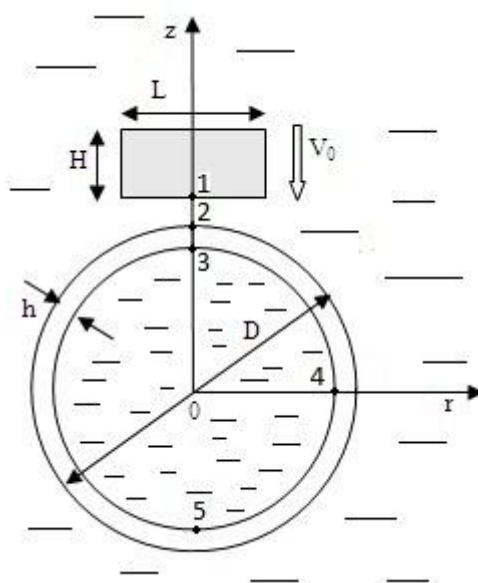


Рис. 2.40. Постановка задачи

Предполагается, что происходит ударное воздействие на участок трубопровода, полностью погруженный в жидкость. Груз ударяет по трубопроводу с той же скоростью, что и в рассмотренных выше задачах. Математическая формулировка данной задачи включает уравнения деформирования оболочки трубопровода, уравнения движения ударника, окружающей и заполняющей жидкости. Фрагмент расчетной области контактного взаимодействия ударника с трубопроводом и жидкостью приведен на рис. 2.41.

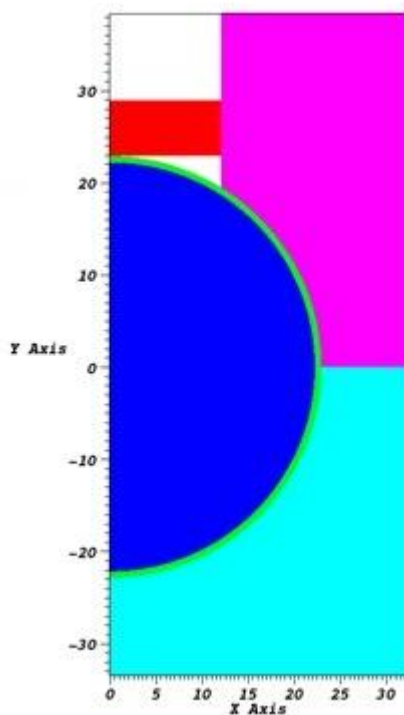


Рис. 2.41. Расчетная область

Положение контактных поверхностей заранее неизвестно и должно определяться в ходе решения задачи. Размеры внешней области задаются порядка десяти радиусов трубопровода. Они выбраны из соображений того, чтобы возмущения в окружающей жидкости не исказили решение в окрестности трубопровода. В силу симметрии задачи приведена половина сечения трубы. Расчетная область была поделена на пять частей: ударник, трубная оболочка, заполняющая жидкость и две области окружающей жидкости. Окружающая жидкость рассматривалась в виде двух областей из соображений построения более удобной расчетной сетки и аппроксимации условий контакта областей. В рассмотрение не бралась область окружающей жидкости над ударником, а также небольшая область внешней жидкости между ударником и трубной оболочкой. Такое упрощение модели объясняется сложностью расчетов в данных областях вследствие вытеснения жидкости из под ударника и тем, что в интегральном смысле на процесс установления квазистатического напряженного состояния это не повлияет. Тело-ударник имеет начальную скорость $V_0 = 10 \text{ м/с}$. Оболочка трубопровода и ударник выполнены из стали с параметрами $K = 1.7 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $G = 0.77 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, предел текучести $\sigma_T = 200 \text{ МПа}$, модуль упругости $E = 200 \text{ ГПа}$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$. Погонная масса ударника 112.32 кг/м , трубы – 78.35 кг/м . Параметры груза: $L = 0.24 \text{ м}$, $H = 0.06 \text{ м}$. Параметры трубы: $D = 0.457 \text{ м}$, $h = 0.007 \text{ м}$. Параметры

расчетной сетки: груз $48 \times 24 = 1152$ ячеек, труба $300 \times 3 = 900$ ячеек, заполняющая жидкость $75 \times 75 \times 6 = 33750$ ячеек, окружающая жидкость $75 \times 253 \times 2 + 75 \times 253 + 22 \times 253 = 62491$ ячеек.

Предполагалось, что жидкость как внутри, так и снаружи трубопровода описывается по тем же уравнениям, что и упругая среда с объемным модулем на сжатие $K = 2250 \text{ МПа}$ и малым сдвиговым модулем $G \approx 0.1 \text{ МПа}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, погонная масса жидкости – 154.05 кг/м. Растяжение жидкости происходит без сопротивления.

Результаты расчетов, такие как значения величин скорости V_y , перемещения U_y , давления внутренней жидкости P и окружного напряжения S в зависимости от времени, для трубопровода с учетом окружающей жидкости и без нее, приведены на рис. 2.42-2.47. Результаты численного решения для трубопровода, окруженного жидкостью, на рисунках показаны графиками с буквой «а», без внешней жидкости графиками с буквой «б» соответственно. Цифры в обозначениях графиков соответствуют номерам точек трубной оболочки и груза приведенные на рис. 2.40.

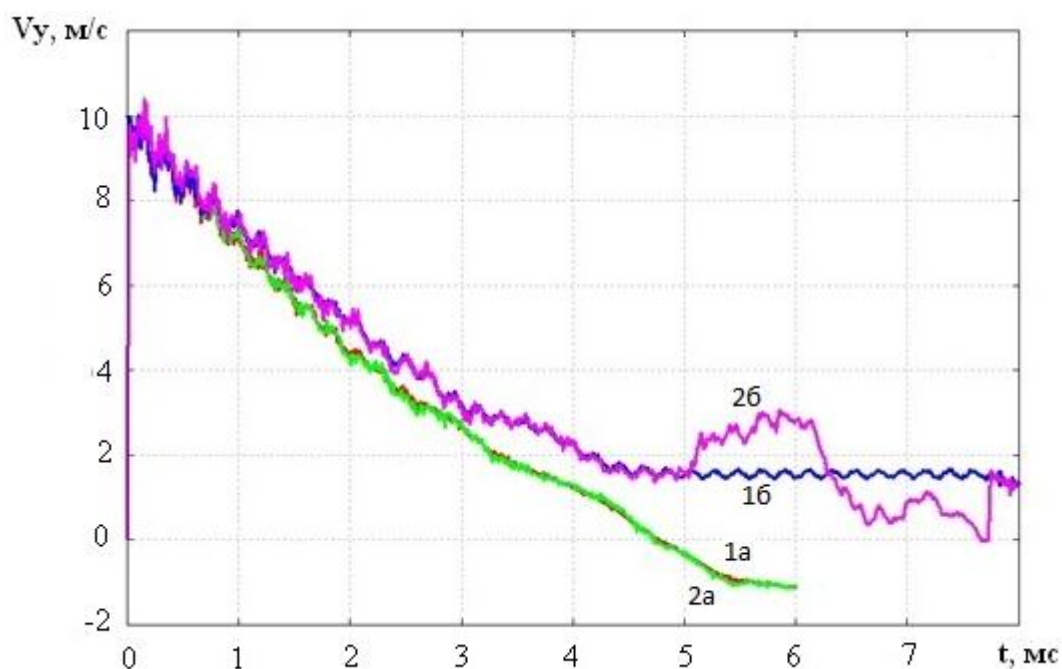


Рис. 2.42. Скорость перемещения точек груза и трубной оболочки

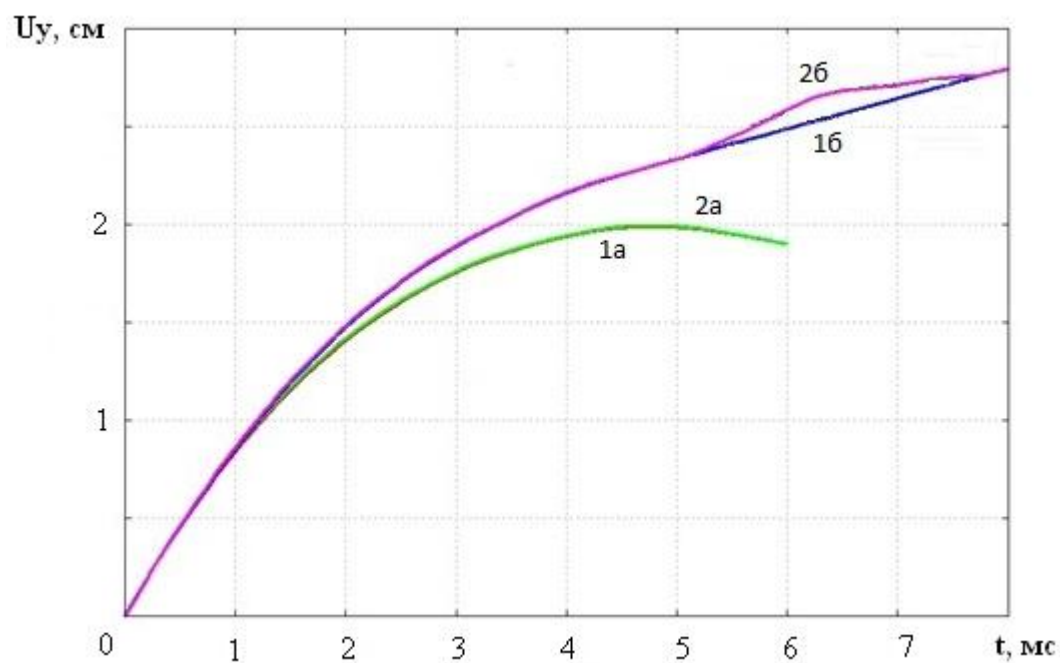


Рис. 2.43. Перемещение точек груза и трубной оболочки

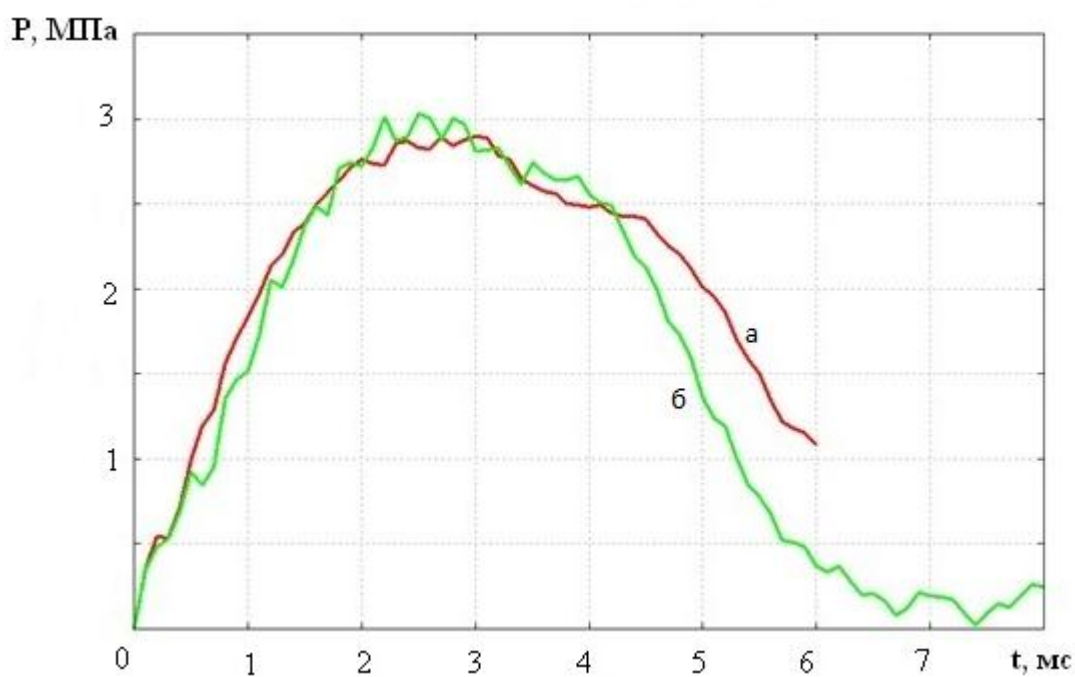


Рис. 2.44. Среднее значение давления в жидкости

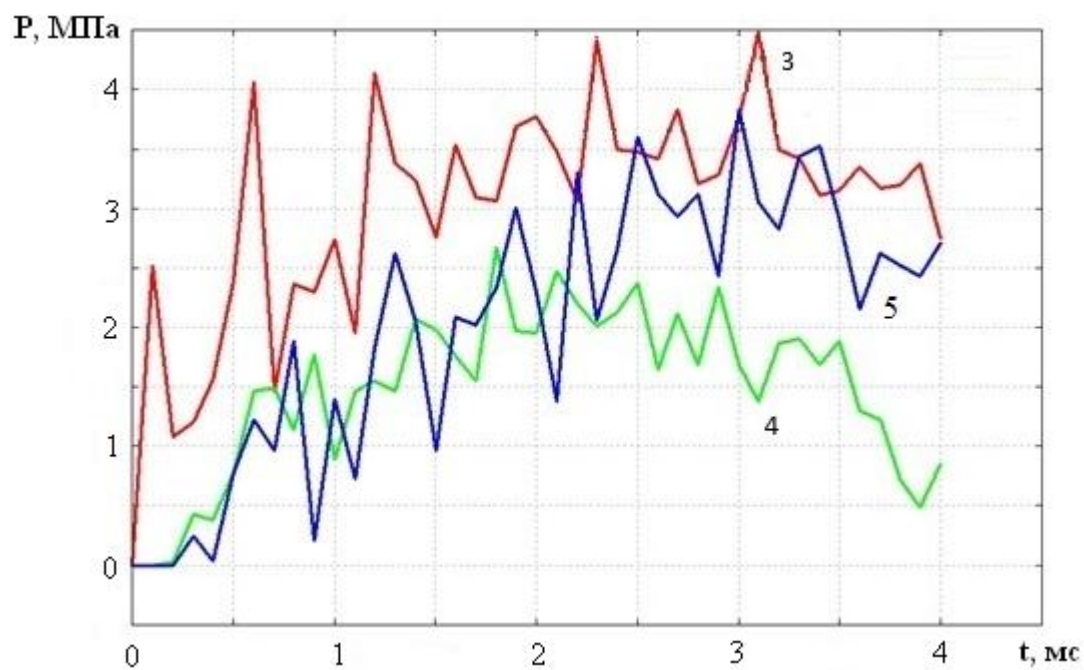


Рис. 2.45. Давление в точках жидкости

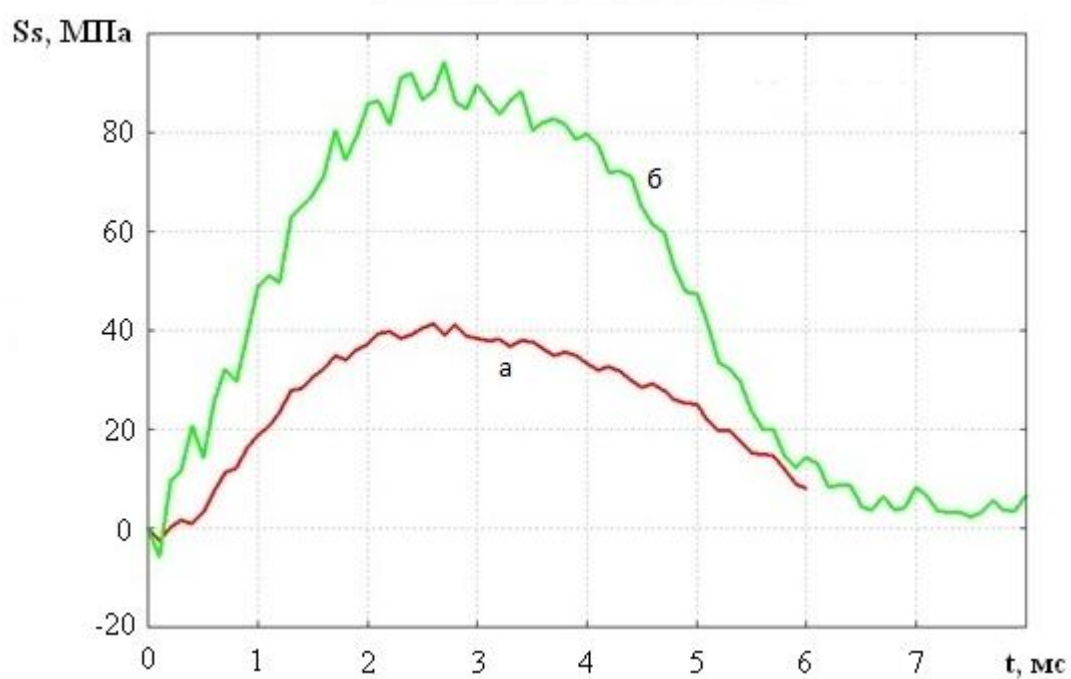


Рис. 2.46. Среднее значение окружного напряжения в трубной оболочке

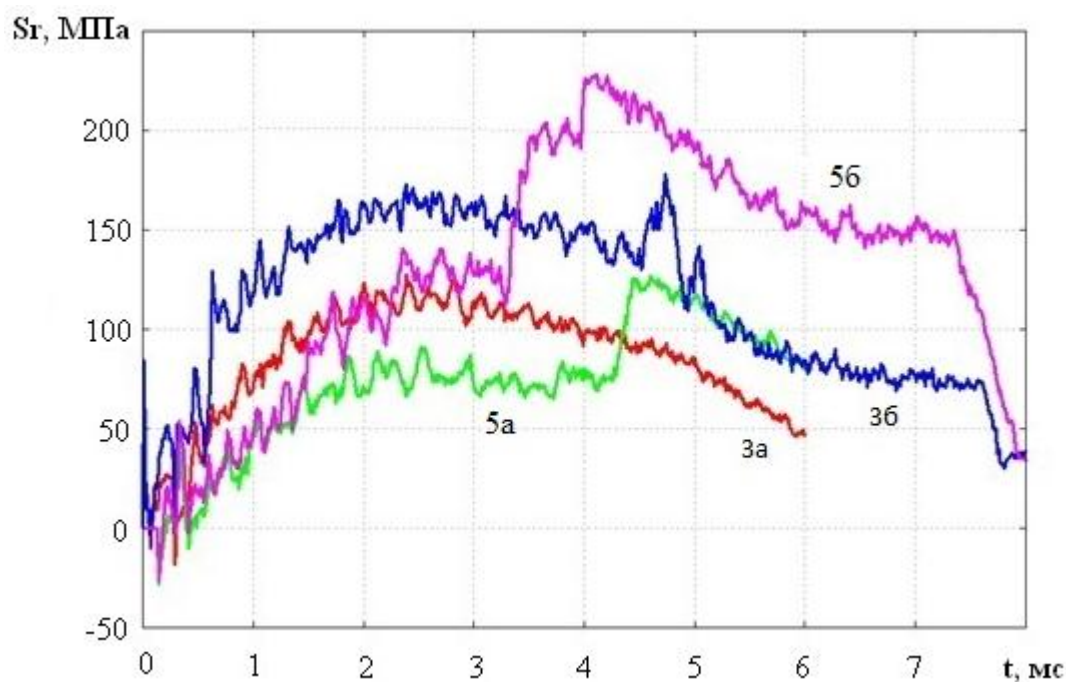


Рис. 2.47. Окружное напряжение в точках трубной оболочки

На рис. 2.42, 2.43 приведены графики скорости и перемещения груза и верхней точки трубы, как с учетом окружающей жидкости, так и без нее. Видно как происходят отрыв груза от оболочки за счет упругих сил. Вследствие демпфирующего влияния окружающей жидкости снижается скорость и уменьшается величина перемещения груза и трубопровода в отличие от варианта без внешней среды. Среднее значение давления внутренней жидкости (рис. 2.44) для трубопровода окруженного жидкостью по величине практически такое же, как давление без учета внешней среды. Давление в точках жидкости (рис. 2.45), как локальная характеристика, носит колебательный характер. Наличие окружающей жидкости существенно снижает значение окружного напряжения в трубной оболочке. Осредненные значения окружного напряжения и значения окружного напряжения в точках трубной оболочки приведены на рис. 2.42, 2.43 соответственно. Таким образом, наличие внешней среды существенным образом изменяет все характеристики движения и деформирования трубопровода при его взаимодействии с ударником, что необходимо учитывать при прогнозировании его динамического поведения.

2.3 ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

В результате проведенных численных исследований получены зависимости от времени средних кинематических и динамических параметров в трубной оболочке и жидкости. Было установлено, что наличие заполняющей жидкости существенно изменяет контактные нагрузки на трубопровод, в результате чего снижается среднее значение его скорости движения и уровень окружного напряжения в нем. Волновые процессы в трубной оболочке и внутренней жидкости носят сложный характер, возникают пластические деформации изгиба в трубе, эффекты отрыва и кавитации в жидкости, которые носят локальный характер и не оказывают существенного влияния на поведение системы. Моделирование ударного воздействия на трубопровод, опирающийся на неподвижную плоскую поверхность, показало большое изменение всех кинематических и динамических характеристик процессов ударного нагружения в отличие от неопертого (свободного) трубопровода. Так же установлено, что наличие окружающей жидкости существенно снижает результирующие контактные нагрузки на трубопровод.

ГЛАВА 3. ЗАДАЧА УДАРНОГО НАГРУЖЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ЖИДКОСТЬЮ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пространственную задачу соударения ударника конечного размера, имеющего форму протяженного прямоугольного параллелепипеда с цилиндрической оболочкой трубопровода, заполненной внутренней жидкостью. Схематично задача представлена на рис. 3.1. Предполагается, что ударное воздействие оказывается на свободный (безопорный) участок трубопровода.

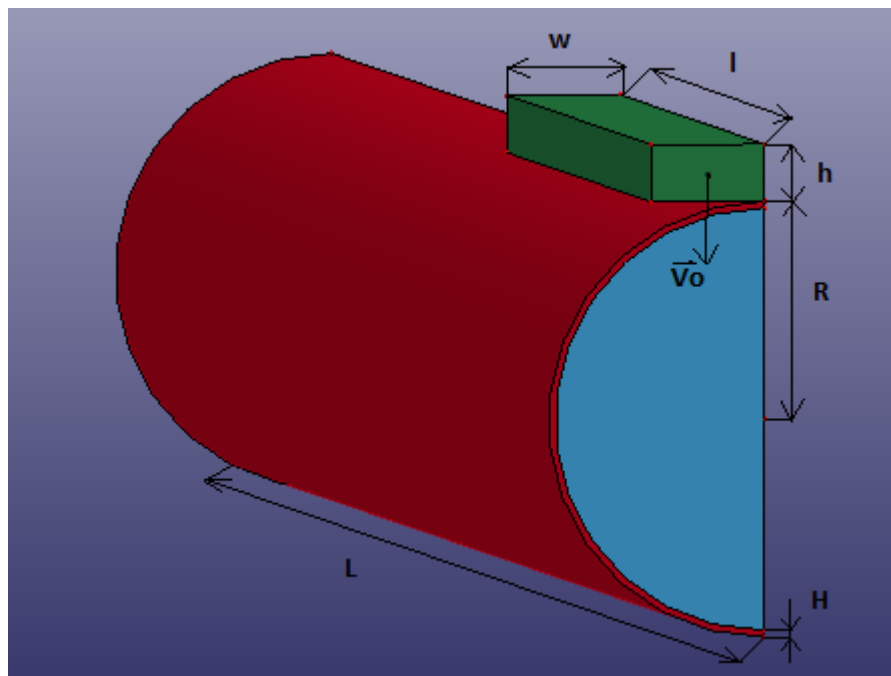


Рис. 3.1. Постановка задачи

Основной целью решения данной задачи, является изучение процесса формирования квазиодномерных продольных волн в жидкости и оболочке трубопровода при локальном ударном воздействии.

3.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Численное решение задачи осуществляется в трехмерной постановке на основе метода конечных элементов с использованием подхода Лагранжа для описания движения сплошной среды. Данный метод реализован в пакете LS-DYNA [155-157] (лицензия пользователя №244793), входящего в состав программного комплекса ANSYS. Дискретные свойства этого метода аналогичны используемым ранее вариационно-разностным методам при решении задач в плоской постановке.

Начало декартовой системы координат располагается на оси симметрии трубопровода. Будем полагать, что задача имеет две плоскости симметрии $x=0$, $z=0$. В расчетах берется четверть области определения задачи. Ось Oz направлена вдоль оси трубопровода. Задача моделируется для двух вариантов продольного (вдоль оси Oz) размера ударника - короткого и длинного. Рассматривается трубопровод конечной длины $L=10$ м, внешнего диаметра $D=2R=0.457$ м, с толщиной стенки $H=0.007$ м. Геометрические размеры ударника: $h=0.06$ м, $w=0.12$ м, длина принимается либо $l=1$ м (короткий груз), либо $l=5$ м (длинный груз). Оболочка трубопровода и тело-ударник выполнены из стали с параметрами: модуль Юнга $E=2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$, предел текучести $\sigma_T=200$ МПа, модуль упругости $g=140$ МПа, плотность $\rho=7800$ кг/м³. Параметры жидкости (вода): объемный модуль на сжатие $K=2250$ МПа, плотность $\rho=1000$ кг/м³. Оболочка трубопровода и ударник рассматривается как упругопластическая среда, жидкость - упругая среда без сопротивления сдвигу. Тело-ударник имеет начальную скорость $V_{0y} = -10$ м/с. Предполагается, что в начальный момент времени внутреннее давление в трубе отсутствует. Скорость потока жидкости равна нулю. Все элементы, в том числе и груз, находятся в ненапряженном состоянии. На одном торце граничные условия принимаются из условий симметрии. Второй остается свободным, то есть вектор напряжения на втором торце равен нулю.

Скорость звука в жидкости с учётом упругости стенок протяженного трубопровода определяется формулой Жуковского [158]

$$C = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{K} + \frac{2\rho r}{HE}}} \quad (3.1)$$

где ρ – плотность жидкости, K – объемный модуль упругости жидкости, r – внутренний радиус трубы, H – толщина стенки трубы, E – модуль Юнга для материала трубы. По формуле (3.1) получим, что волны гидроудара во внутренней жидкости трубы распространяются со скоростью 1146 м/с.

3.2.1. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ С РЕЗУЛЬТАТАМИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В ПЛОСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

В главе 2 были получены результаты решения задачи ударного нагружения трубопровода в плоской постановке при тех же параметрах. Расчеты проводились на сетке $300 \times 3 = 900$ ячеек по сечению трубы и $48 \times 24 = 1152$ ячеек по ударнику. Внутренняя полость трубы покрывалась сеткой из $75 \times 75 \times 6 = 33750$ четырехугольных ячеек. На рис. 2.24 приведены графики перемещения характерных точек трубной оболочки, соответствующие обозначениям на рис. 2.1а. На рис. 2.27 приведена зависимость от времени среднего давления в жидкости.

При рассмотрении трехмерной задачи результаты решения должны соответствовать решению задачи в плоской постановке, если длина груза совпадает с длиной трубы и на обоих торцах ставится условие симметрии. Решение трехмерной задачи проводилось для двух вариантов сеток, покрывающих расчетную область:

а) $128 \times 3 \times 50 = 19200$ ячеек по трубе, $12 \times 3 \times 50 = 1800$ ячеек по ударнику и $168 \times 4 \times 50 = 33600$ ячеек по жидкости

б) $300 \times 7 \times 200 = 420000$ ячеек по трубе, $48 \times 12 \times 100 = 57600$ ячеек по ударнику и $12 \times 324 \times 100 = 388800$ ячеек по жидкости.

Полученные в результате решения характеристики представлены ниже. На рис. 3.2 приведены перемещения точек трубной оболочки, соответствующих обозначениям на рис. 2.1а. Подписи к графикам содержат вариант расчетной сетки (а – грубая сетка, б – более мелкая сетка).

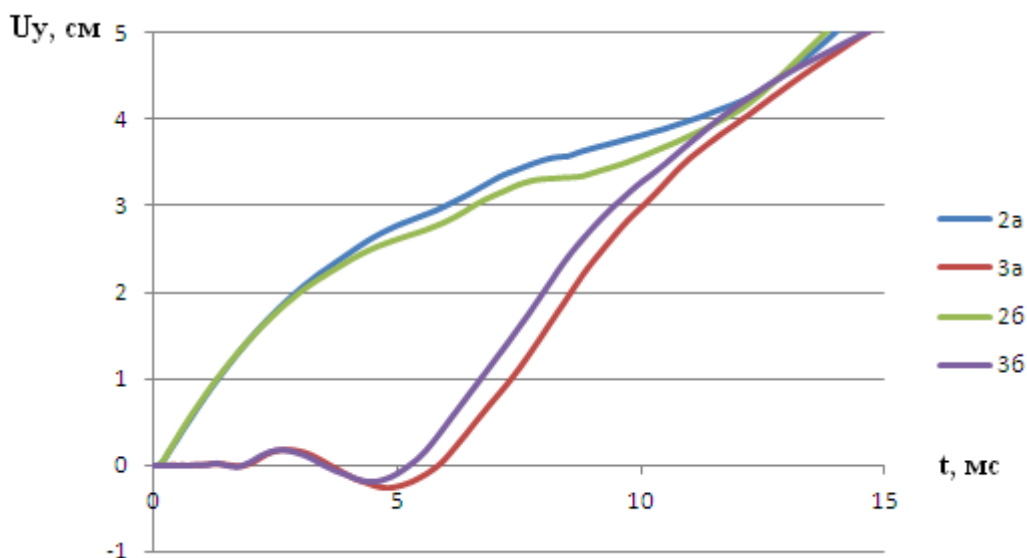


Рис. 3.2 Перемещение точек трубной оболочки

На рис. 3.3 приведено среднее значение давления в жидкости для двух вариантов расчета. Окружное напряжение в трубной оболочке инициируется давлением во внутренней жидкости и ведет себя аналогично рис 2.28.

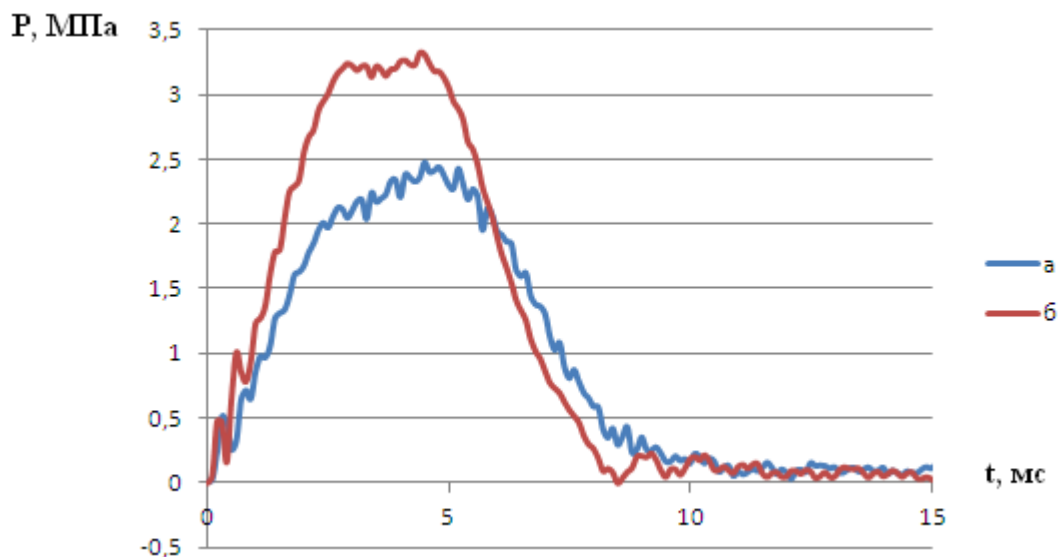


Рис. 3.3 Среднее значение давления в жидкости

Как видно из приведенных графиков перемещение трубной оболочки и среднее давление в жидкости качественно соответствуют решению плоской задачи, но несколько отличаются количественно по амплитуде волн. Длительность импульса по времени также близка к значениям, полученным в плоской постановке. Различия в амплитудах можно объяснить тем, что при расчетах использовались разные методы решения. Для плоской задачи использовался вариационно-разностный метод второго порядка точности, а для пространственной — метод конечных элементов, где каждая ячейка представляет собой восьмиузловой элемент первого порядка точности. Так же на точность решения влияет различия в дискретизации расчетной области. Более мелкие сетки дают более точный результат, соответствующий решению задачи в плоской постановке. Увеличение числа ячеек приводит к сближению решений, но увеличивает трудоемкость и время, необходимое на решение поставленной задачи.

3.2.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТРУБОПРОВОДА С ДЛИННЫМ ГРУЗОМ

Рассмотрим подробнее пространственную задачу для длинного ударника ($l = 5$ м). При решении пространственной задачи для участка трубопровода длиной $L = 10$ м будем использовать довольно грубую сетку. А именно - $128 \times 3 \times 500 = 192000$ ячеек по трубе, $12 \times 3 \times 250 = 9000$ ячеек по ударнику и $168 \times 4 \times 500 = 336000$ ячеек по жидкости. Это связано с необходимостью получить результат численного решения в обозримое время. В частности на 32-х разрядной системе с процессором Intel Celeron M550 2.00GHz, и 2GB ОЗУ данная задача считается около 20 часов, не считая постпроцессорной обработки результатов. С уменьшением сетки резко возрастает время расчета, а так же количество физической памяти, необходимое для хранения полученного решения.

В результате ударного воздействия груза трубопровод с жидкостью испытывает большие перемещения в районе зоны контакта с ударником (рис. 3.4-3.5). На рис. 3.4 показаны вертикальные средние перемещения U_y в нескольких сечениях трубы. К моменту времени $t = 15$ мс груз полностью отрывается от трубы и труба в этой области далее движется с постоянной скоростью. На рис. 3.5 показано распределение вертикального перемещения по длине груза в момент времени $t = 20$ мс.

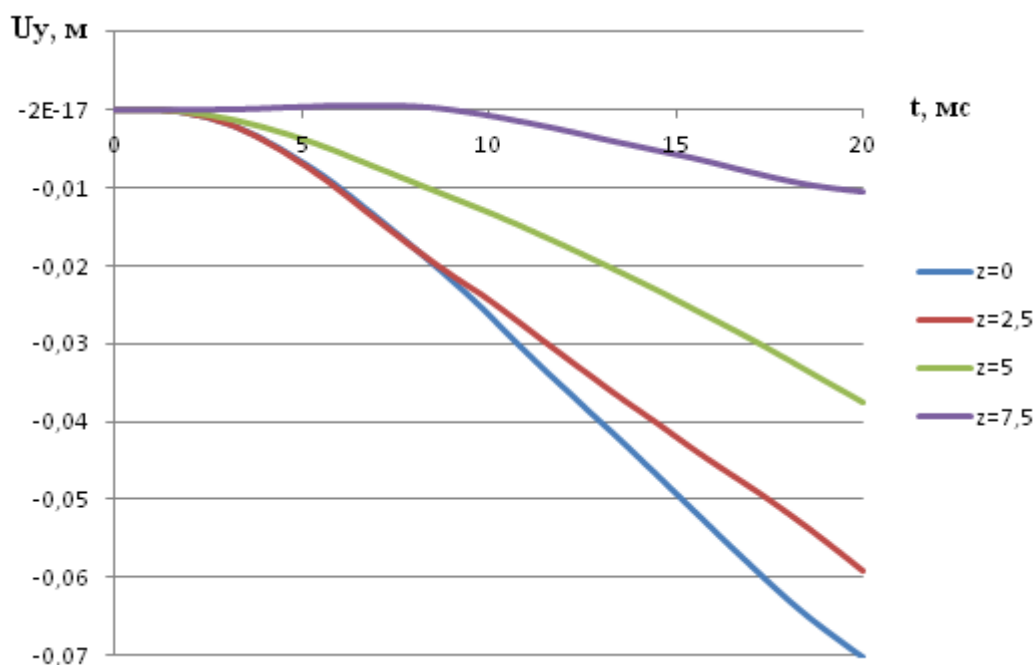


Рис.3.4 Средние значения перемещений в трубной оболочке

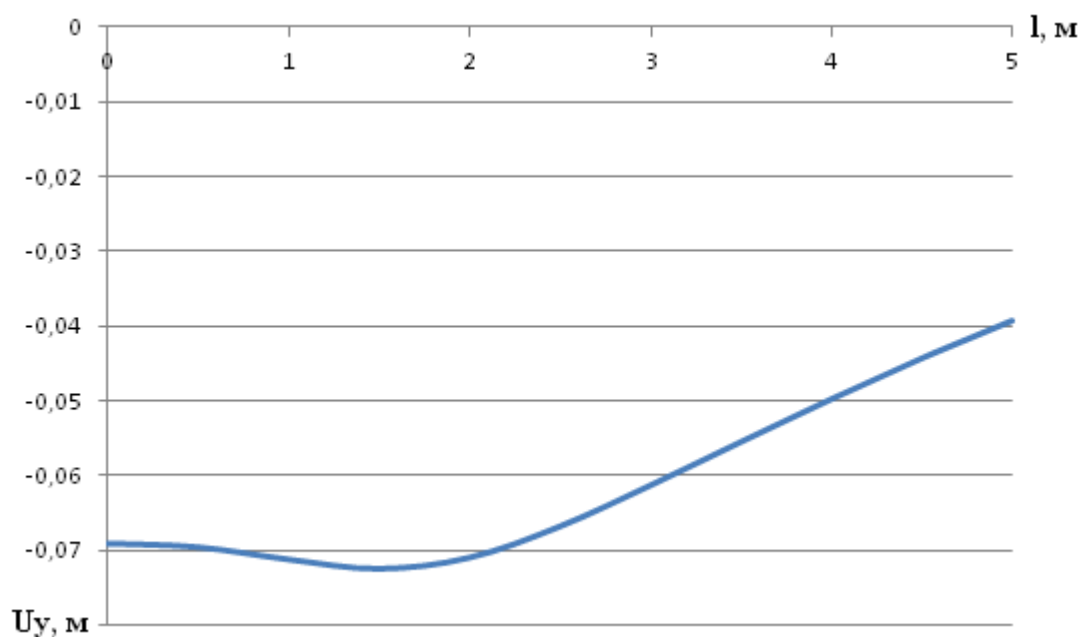


Рис.3.5 Вертикальное перемещение по длине груза

Несмотря на значительное изменение формы (рис. 3.6) в процессе соударения груз ведет себя упруго, однако в трубной оболочке, помимо упругих деформаций, наблюдаются и пластические деформации в зоне контакта (рис. 3.7). Максимум пластических деформаций (второй инвариант тензора) наблюдается на границе пятна контакта (торца груза) и составляет 0.03.

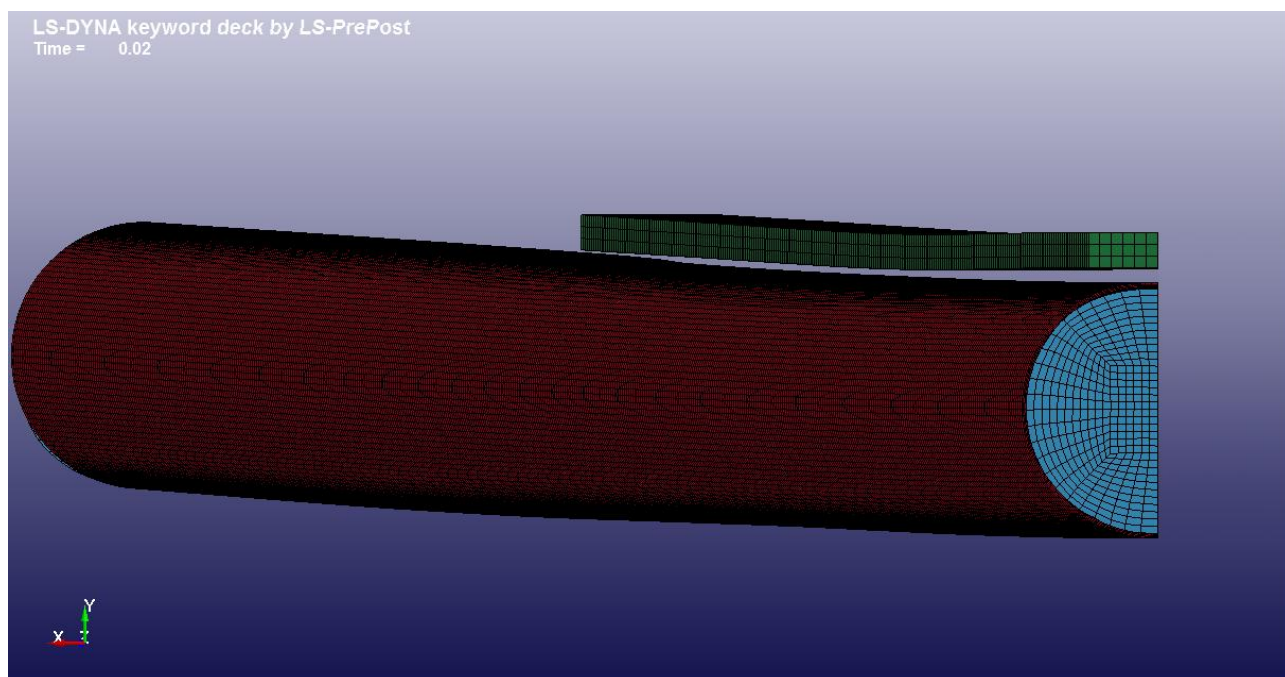


Рис.3.6. Деформация трубопровода и груза

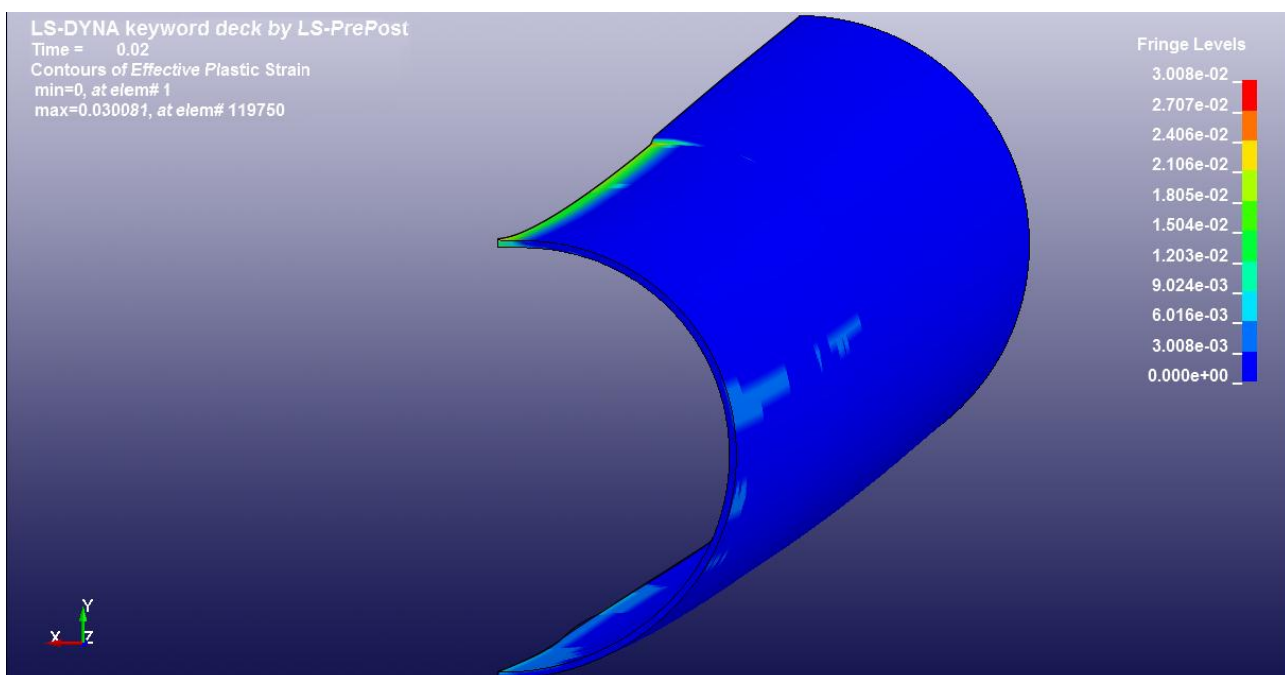


Рис.3.7. Пластические деформации в трубной оболочке

Рассмотрим процесс формирования гидроударной волны в продольном направлении (вдоль оси Oz). На рис. 3.8 представлены зависимости изменения от времени среднего давления в жидкости для разных сечений трубы. Формируется гидроударный продольный импульс в жидкости, слабо меняющийся в сечениях за пределами зоны контакта ($z > 5$ м). Амплитуда давления вблизи плоскости симметрии задачи $z=0$ почти в 1.5 раза превышает амплитуду формирующегося продольного импульса.

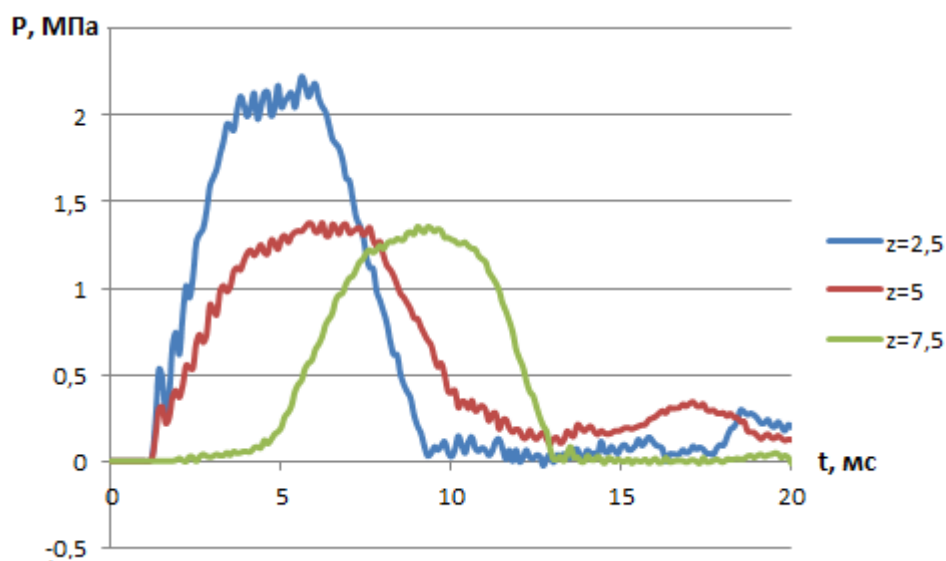


Рис. 3.8. Среднее значение давления в жидкости

Определим количественно импульс давления, возникающий при движении жидкости в трубе в продольном направлении. Его можно получить из соотношения

$$I = S \int_0^t P dt \quad (3.2)$$

Здесь S – площадь сечения внутренней поверхности трубы, P – среднее давление в жидкости. На расстоянии 1 м за грузом по (3.2) получим значение 1504 н·м, что составляет ~27% от начального импульса движения ударника. Окружные напряжения в оболочке трубопровода σ_θ определяются гидроударным импульсом в жидкости. На рис. 3.9 приведены зависимости окружного напряжения в трубе от времени в различных сечениях по z в точках $x=R, y=0$.

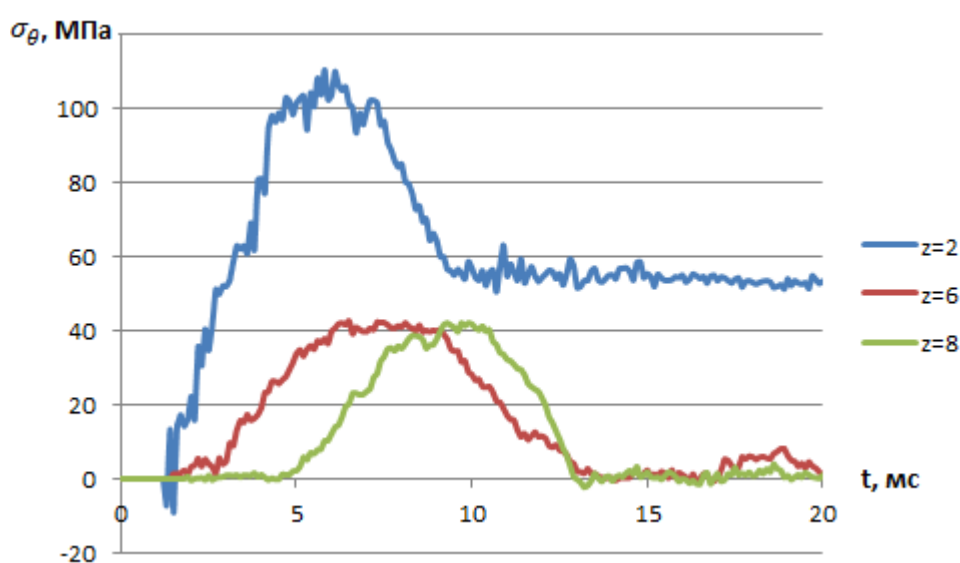


Рис. 3.9. Окружное напряжение в трубной оболочке

Как видно из графиков, окружные напряжения на участке трубы под грузом остаются на уровне 55 МПа после удара. Этот факт можно объяснить тем, что в процессе ударного нагружения трубопровод изменяет свою форму, в нем появляются пластические деформации в зоне контакта и в рассматриваемых точках возникают растягивающие напряжения. Продольные напряжения в трубной оболочке σ_z усиливаются по мере прогиба трубы, то есть осевой ее деформации. На продольные напряжения оказывают большое влияние граничные условия задачи. Давать оценки возникающих продольных напряжений можно только до того момента, пока отраженная от торцевой части трубы волна напряжений не исказит результаты. Исходя из длины трубы и плотности ее материала, получим, что отраженная волна придет обратно через 4 мс после удара. На рис. 3.10 показаны зависимости средних значений продольных напряжений в нескольких сечениях. По величине они намного меньше окружных напряжений в трубной оболочке.

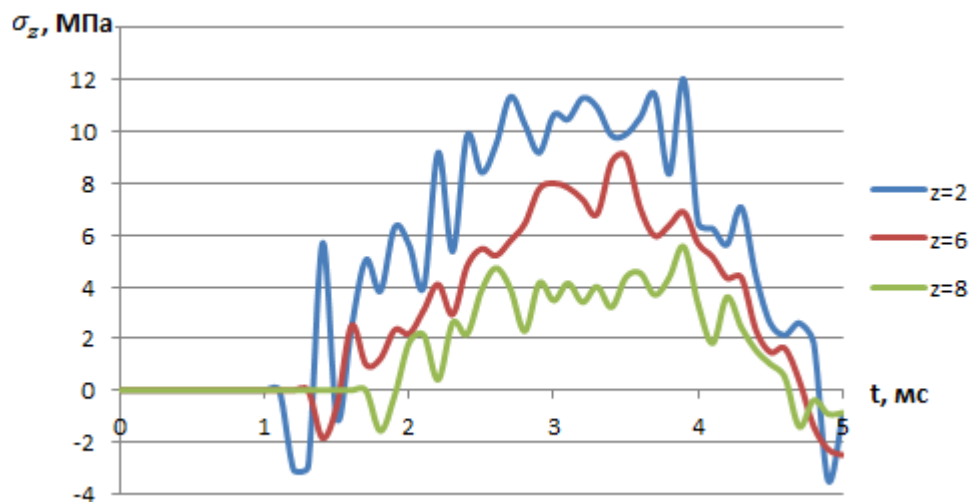


Рис. 3.10. Средние значения продольных напряжений в трубной оболочке

Груз передает часть своего начального импульса как продольному гидроударному движению, так и поперечному движению трубы с жидкостью под грузом.

3.2.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТРУБОПРОВОДА С КОРОТКИМ ГРУЗОМ

Рассмотрим задачу с коротким грузом ($l=1$ м). Для моделирования данной задачи берется следующая сетка: $128 \times 3 \times 500 = 192000$ ячеек по трубе, $12 \times 3 \times 50 = 1800$ ячеек по ударнику и $168 \times 4 \times 500 = 336000$ ячейки по жидкости. В случае с коротким грузом масса ударника недостаточно велика для того чтобы придать трубопроводу большое смещение относительно начального положения. На рис. 3.11 показаны вертикальные средние перемещения U_y в нескольких сечениях трубы. На рис 3.12 показано распределение вертикального перемещения по длине груза в момент времени $t=20$ мс.

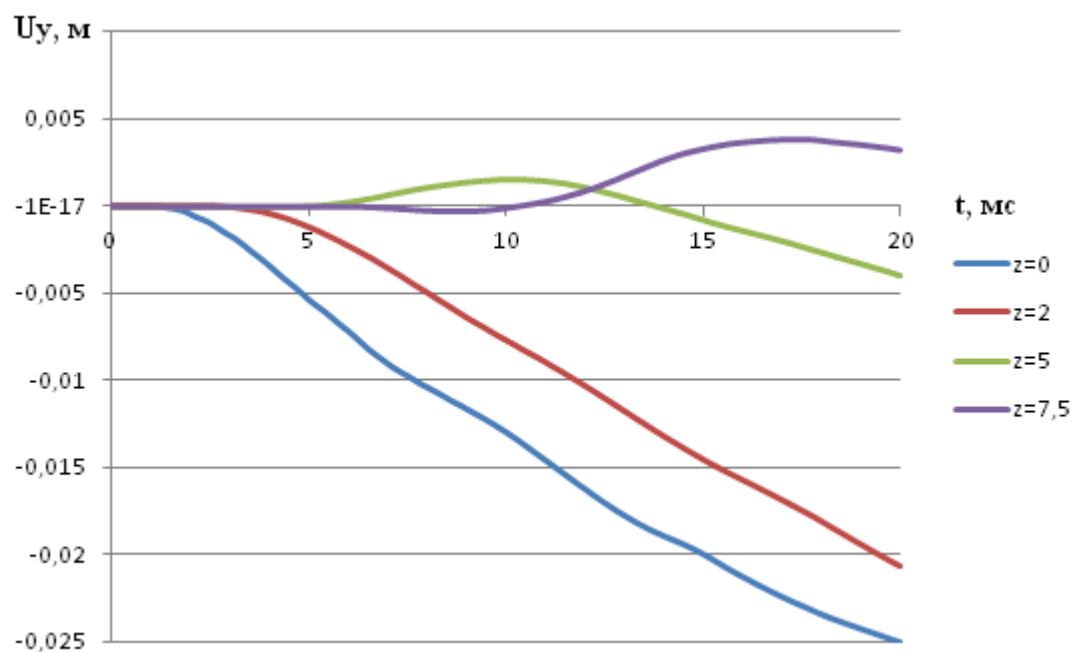


Рис. 3.11. Средние значения перемещений в трубной оболочке

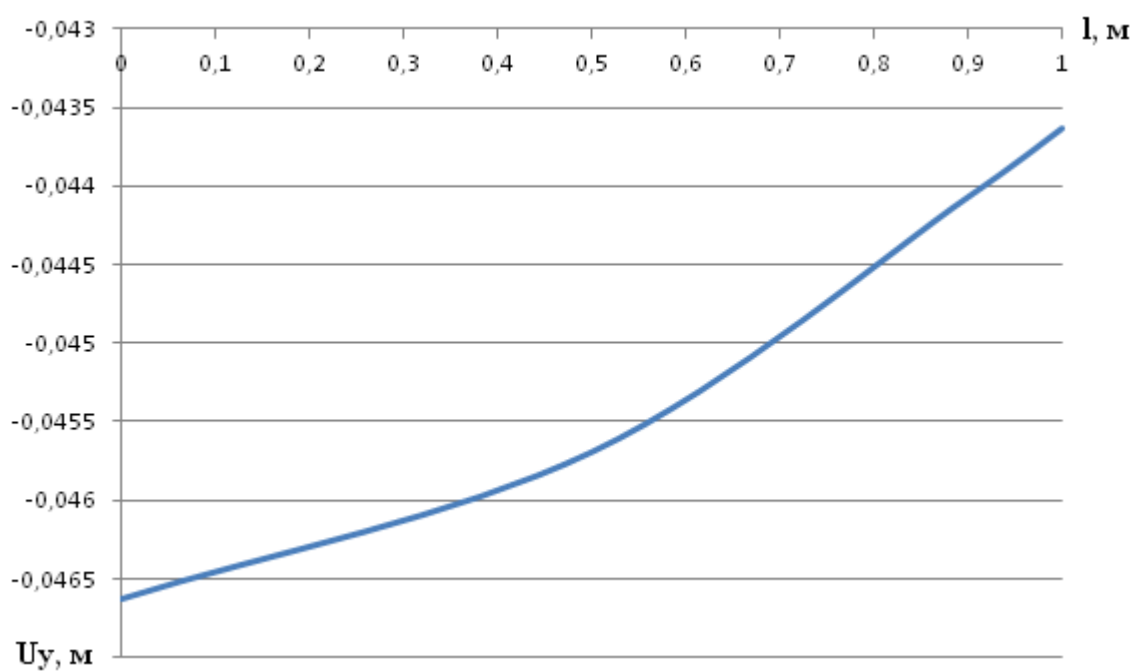


Рис. 3.12 Вертикальное перемещение по длине груза

Как и в рассмотренном выше случае в процессе удара груз ведет себя упруго (рис. 3.13), а в трубной оболочке будут наблюдаться пластические деформации главным образом в зоне контакта (рис. 3.14).

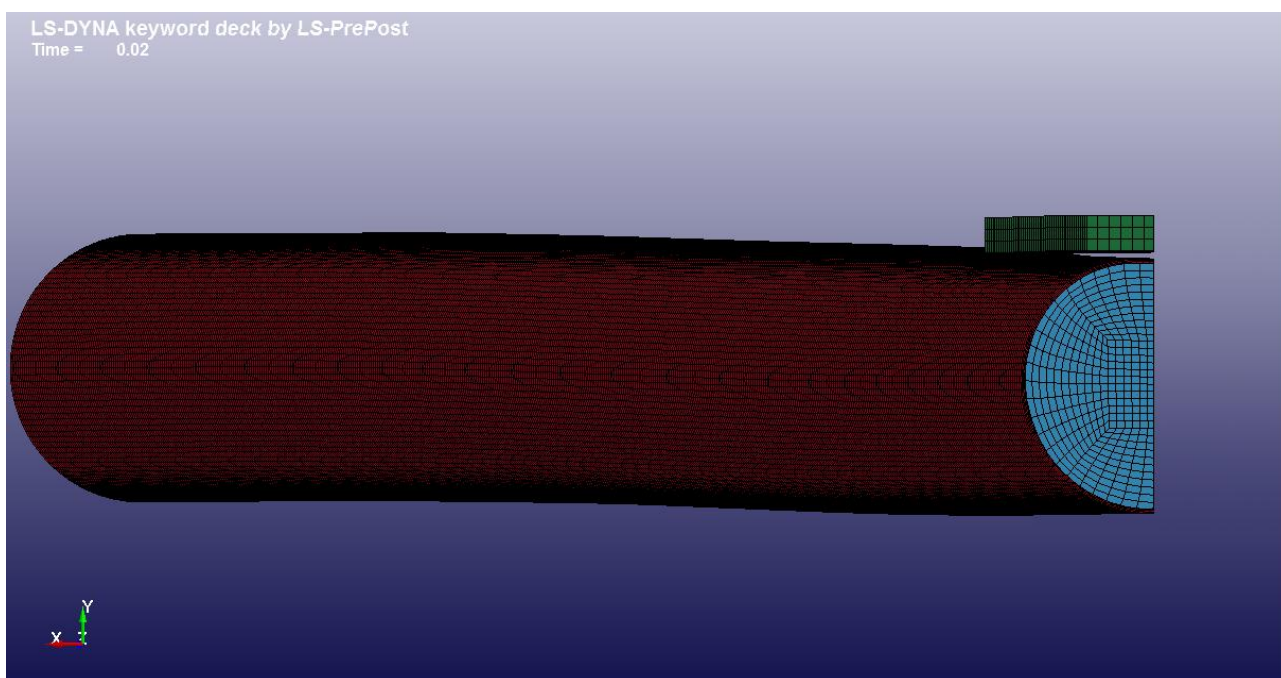


Рис. 3.13. Деформация трубопровода и груза

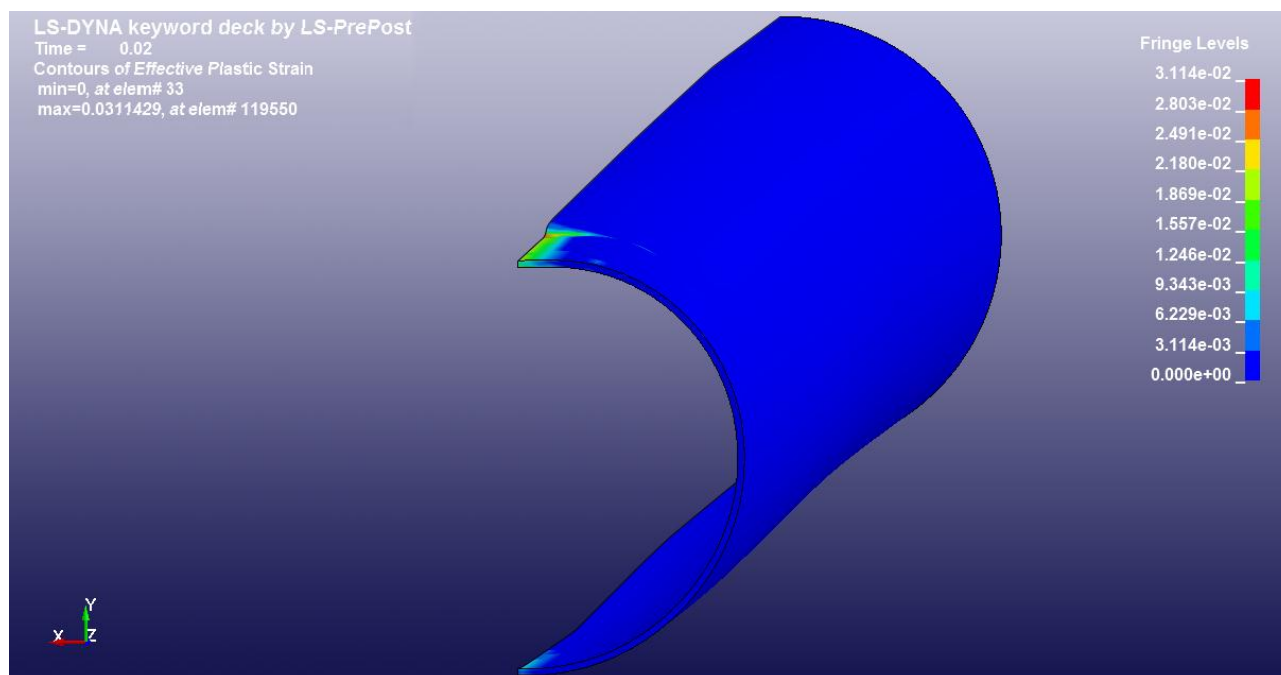


Рис. 3.14. Пластические деформации в трубной оболочке

На рис. 3.15 представлены зависимости изменения от времени среднего давления в жидкости для разных сечений трубы. Так же как и в рассмотренной выше задаче с длинным грузом, в жидкости формируется гидроударный продольный импульс, слабо меняющийся в сечениях за пределами зоны контакта ($z > 1$ м).

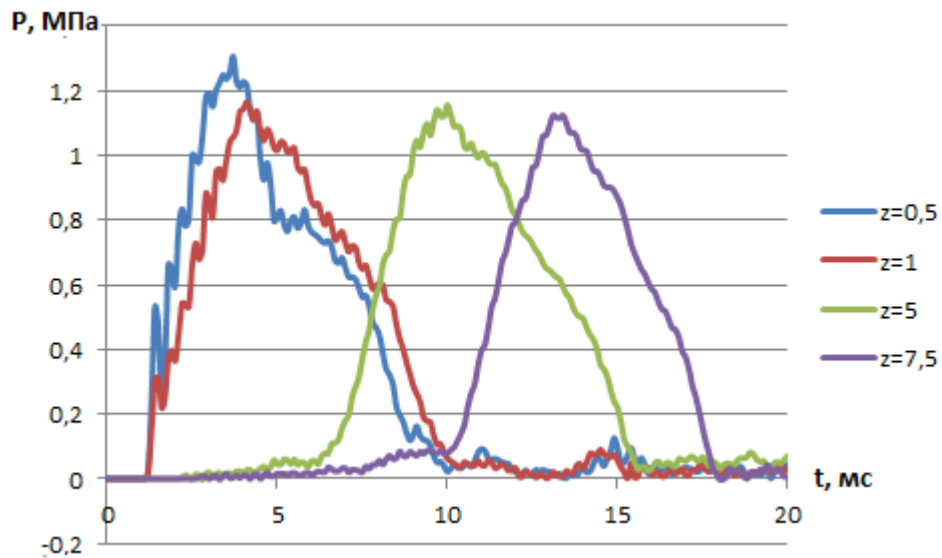


Рис. 3.15. Среднее значение давления в жидкости

Как видно из приведенных графиков длина волны сформировавшегося гидроударного импульса близка к приведенным ранее результатам для длинного груза. Амплитуда импульса для короткого груза меньше аналогичной для длинного на 0,2 МПа. Дадим оценку возникающего продольного импульса на расстоянии 1 м за грузом. Из формулы (3.2) получим, что он составляет ~88% от начального импульса движения ударника то есть значительно больше, чем для длинного груза. Окружное напряжение, возникающее в трубной оболочке, приведено на рис. 3.16. Как и в случае с длинным ударником на участке трубы под грузом будут формироваться остаточные напряжения после удара. Окружные напряжения в трубной оболочке инициируются внутренним давлением в жидкости и деформацией трубной оболочки в месте удара. В трубе, за пределами зоны контакта, также будет формироваться импульс по окружным напряжениям с амплитудой 35 МПа.

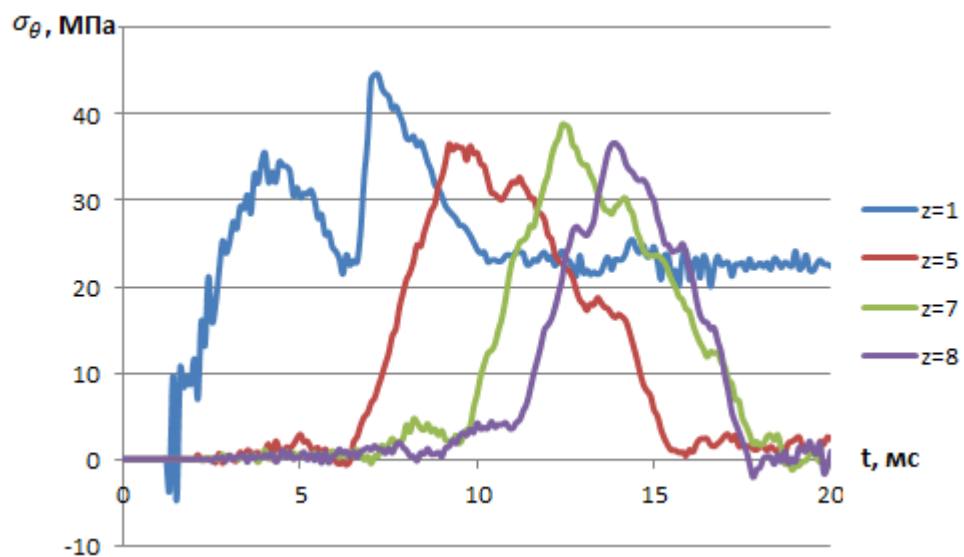


Рис. 3.16. Окружное напряжение в трубной оболочке

Среднее продольное напряжение в трубной оболочке для разных сечений приведено на рис. 3.17.

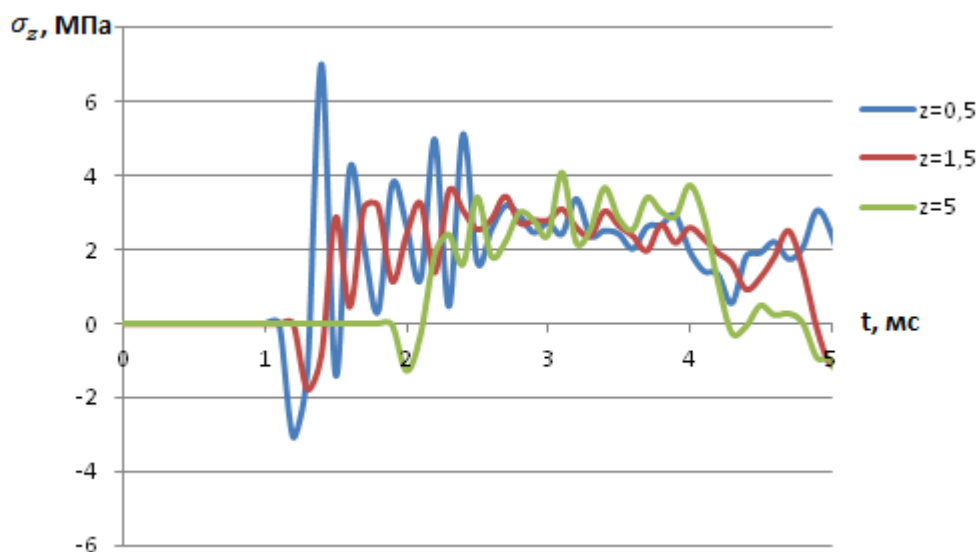


Рис. 3.17. Средние значения продольных напряжений в трубной оболочке

3.3. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

В результате проведенных численных исследований получены новые численные решения пространственной задачи взаимодействия ударника с упругопластическим трубопроводом, заполненным жидкостью. Показано, что при локальном ударном воздействии в трубопроводе формируется квазиодномерное продольное течение жидкости. Волновые процессы в трубной оболочке и внутренней жидкости носят сложный взаимосвязанный характер и зависят от граничных условий. Проанализированы особенности протекающих волновых процессов и даны оценки формирующегося продольного импульса в жидкости. Интенсивность движения трубопровода под действием ударника определяется в основном массой груза и изгибной жесткостью самого трубопровода. Решение задач для различных вариантов продольного размера ударника показало, что картина формирующегося продольного импульса качественно соответствует результатам, полученным при решении плоской задачи.

ГЛАВА 4. ЗАДАЧА ГИДРОУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОТЯЖЕННОЙ ТРУБОПРОВОДНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ЛОКАЛЬНОМ УДАРЕ

4.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу динамики пространственного протяженного трубопровода, как гидроупругой системы, при локальном ударном воздействии. Постановка задачи представлена на рис. 4.1.

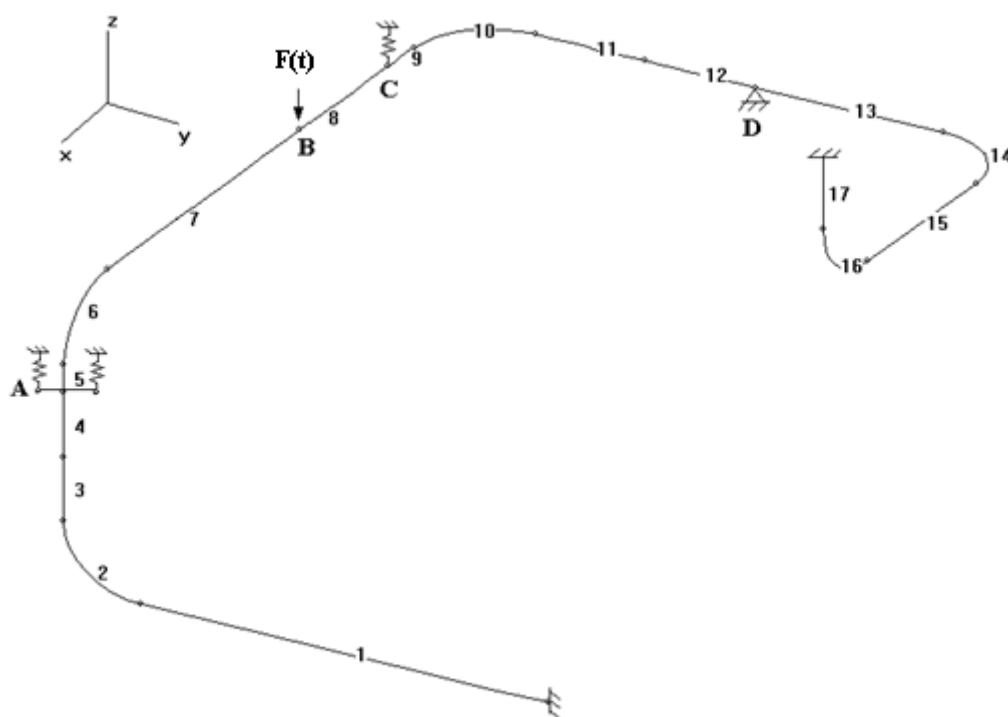


Рис. 4.1. Постановка задачи

Трубопровод разбит на прямолинейные и криволинейные участки. Торцы трубы жестко заделаны. Конструкция предполагает наличие опоры скольжения (точка D), а так же упругих подвесок (точки A,C). Будем считать, что ударное воздействие приходится в окрестности точки B.

4.1.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТРУБОПРОВОДЕ

Исследования возникающих в трубопроводе в результате внешнего воздействия гидроударных явлений проводились с использованием модели напорного течения вязкой сжимаемой жидкости в упругом трубопроводе. Математическая модель содержит одномерное уравнение движения среды, уравнение неразрывности, начальные и граничные условия. Граничные условия соответствуют значениям давления на концах трубопровода и импульсу давления во внутреннем сечении трубопровода в точке ударного воздействия.

Рассматривается задача моделирования гидродинамических процессов в жидкости, обусловленных ударом по оболочке трубопровода (рис. 4.2). Процессы в жидкости, обусловленные ударом по оболочке, носят характер гидравлического удара, так как $T/T_L \ll 1$, где T – длительность удара, T_L – время распространения ударной волны в трубопроводе.

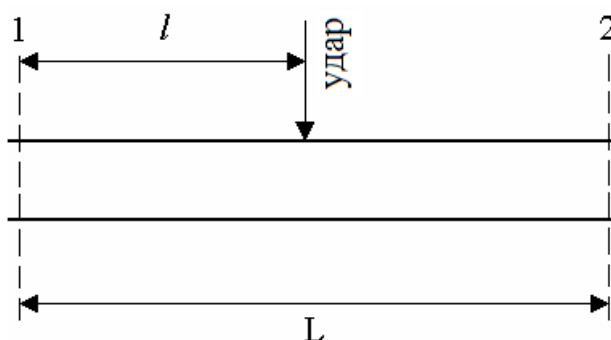


Рис. 4.2. Удар по оболочке трубопровода

Исследование гидродинамических процессов в протяженном трубопроводе целесообразно проводить в одномерной постановке, поскольку геометрический параметр трубопровода $L/d \gg 1$ (L – длина трубопровода, d – диаметр).

Для описания движения среды в трубопроводе введём следующие переменные: $Y = Y(s,t)$ – пьезометрический напор, м, ($y = P/\rho/g + Z$); $Q = Q(s,t)$ – объёмный расход, $\text{м}^3/\text{с}$; s – координата, отсчитываемая вдоль оси трубопровода; t – время; g – ускорение свободного падения; ρ – плотность жидкости; P – давление; Z – пьезометрическая высота.

Математическая модель течения сжимаемой жидкости по протяженному трубопроводу представляет собой систему двух уравнений: уравнение количества движения и уравнения неразрывности, являющегося наложенной связью. Первое из этих уравнений

получается как уравнение Ньютона для бесконечно малого участка трубопровода с учетом всех действующих сил [159-160] и после обычных для теории гидравлического удара упрощений принимает вид

$$\frac{\partial Y}{\partial s} + \frac{1}{gS} \frac{\partial Q}{\partial t} + J = 0 \quad (4.1)$$

где S – площадь сечения трубопровода; $J = - dY/ds$ – гидравлический уклон, определяется потерями напора на единицу длины трубопровода, для стационарных и квазистационарных течений [160]

$$J = \lambda \frac{Q|Q|}{2gdS^2},$$

λ – коэффициент распределённых гидравлических потерь, для круглых стальных труб, например, вычисляется по формуле Альтшуля [161]:

$$\lambda = \begin{cases} 64/Re & Re < 2300 \\ 0,11(\Delta/d + 68/Re)^{0,25} & Re \geq 2300 \end{cases} \quad (4.2)$$

где $Re = \frac{Qd}{\nu S}$ – число Рейнольдса, ν – кинематическая вязкость, Δ – абсолютная шероховатость стенок трубопровода.

Уравнение неразрывности представляет собой закон сохранения массы и при его получении важным является учет явления гидроупругости. В случае трубопровода это выражается в необходимости учета радиальной податливости стенок трубопровода, обусловленной изменением давления жидкости. В теории гидравлического удара [161] учет этого эффекта проводится в предположении, что инерция стенок трубопровода при его радиальной деформации не учитывается, а деформация малого элемента трубы между двумя нормальными сечениями не зависит от деформации соседних частей трубы. Если также предположить, что деформации подчиняются закону Гука, то скорость распространения возмущений вдоль потока C отличается от скорости распространения звука в сжимаемой жидкости $C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, и определяется по формуле Жуковского (3.1).

В конечном итоге уравнение неразрывности однофазной жидкости приобретает вид [159-160]:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \frac{C^2}{gS^2} \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \quad (4.3)$$

Граничные условия задаются следующим образом:

На концах трубопровода заданы напоры:

$$Y(0,t) = Y_0 = \text{const}, Y(L,t) = Y_L = \text{const}. \quad (4.4)$$

В сечении, где производится удар по оболочке $s = l$ (рис. 4.2):

$$Y(l,t) = Y_1(t), \quad t \leq T, \quad (4.5)$$

Где $Y_1(t)$ – заданная функция времени, получаемая в результате расчета процесса взаимодействия ударника с оболочкой трубопровода.

Начальные условия соответствуют установившемуся напорному течению среды в трубопроводе:

$$Q(s,0) = Q_0, Y(s,0) = Y_0(s), \quad 0 \leq s \leq L \quad (4.6)$$

$Q_0, Y_0(s)$ – заданные функции, определяются из решения статической задачи.

В итоге задача исследования гидравлического удара в трубопроводе сведена к решению смешанной задачи (4.1), (4.3) – (4.6).

Система уравнений (4.1), (4.3) является основой для расчета гидроударных волновых процессов в трубопроводной системе. Наличие в системе элементов конструкции, таких как запорно-регулирующая арматура и насосы, может быть учтено в виде сосредоточенных гидравлических сопротивлений по формулам Дарси-Вейсбаха [162] или в виде характеристик насосов.

4.1.2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

Для решения смешанной задачи (4.1), (4.3) – (4.6) используется метод характеристик [163]. Введём вектор переменных $X = (Y, Q)^T$, используя который систему уравнений (4.1), (4.3) можно записать в матричном виде:

$$X_t + \hat{E} X_x = F, \quad (4.7)$$

где $\hat{E}$ – матрица коэффициентов, F – вектор столбец правых частей данной системы уравнений

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{C^2}{gS^2} \\ \frac{1}{gS^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ -J_i \end{pmatrix}.$$

Согласно методу характеристик систему уравнений (4.7) можно преобразовать к характеристической форме [164]

$$\Omega_m(dX/dt)_m = \Omega_m F_m, \quad m = 1, 2, \quad (4.8)$$

где m – номер характеристического направления в плоскости (x, t) , Ω_m – собственные векторы матрицы $\hat{E}^T$. Наклон характеристических кривых определяется собственными числами λ_m матрицы $\hat{E}^T$:

$$(dx/dt)_m = \lambda_m, \quad m = 1, 2. \quad (4.9)$$

Для уравнения (4.8) $\lambda_1 = C$, $\lambda_2 = -C$, $\Omega_1 = (1, C/(gS))$, $\Omega_2 = (1, -C/(gS))$.

Система уравнений (4.8) может быть проинтегрирована численно с использованием различных разностных схем, которые позволяют по известным значениям вектора переменных X на слое $t = t_0$ находить решение на слое $t = t_0 + \tau$, (τ – шаг интегрирования). Простейшей разностной схемой является схема Эйлера первого порядка, позволяющая находить решение в явном виде для любой внутренней точки трубопровода:

$$\Omega_m(X_M - X_m) = \tau \Omega_m F_m, \quad m = 1, 2, \quad (4.10)$$

где X_M – значение вектора переменных на слое $t_0 + \tau$ в точке M (рис. 4.3), X_m , F_m – значение векторов переменных и правых частей в точках пересечения характеристических направлений со слоем t_0 – т. N , K . Из (4.10) можно найти решение в явном виде:

$$X_M = \tau \hat{\Omega}^{-1} P, \quad (4.11)$$

где $\hat{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2)^T$, $P = (\Omega_1(X_N - F_N), \Omega_2(X_K - F_K))^T$.

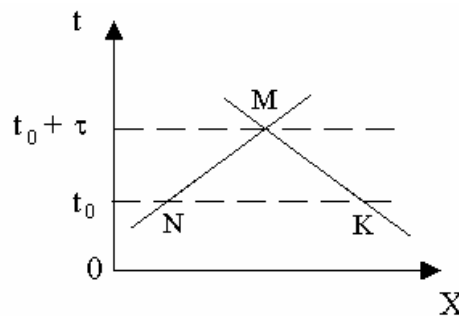


Рис. 4.3. Построение решения методом характеристик

Уравнение (4.10) позволяет найти решение в любой точке $0 < x < L$, которой соответствует внутреннее сечение трубопровода. В граничных точках $x = 0$ и $x = L$ одно из уравнений системы (4.11), соответствующее характеристическому направлению выходящему за границы трубопровода, заменяется одним из граничных условий (4.4)–(4.5).

Например, в точке $x = 0$ задано граничное условие: $Y(0, t) = Y_0(t)$. Для нахождения вектора переменных $X_0 = X_0(0, t_0 + \tau)$ имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} Y(0, t + \tau) = Y_0(t + \tau) \\ \Omega_2(X_0 - X_k) = \tau \Omega_2 F_2 \end{cases},$$

откуда находим решение в виде:

$$Q(0, t + \tau) = \frac{gS}{C} [Y_0(t + \tau) - Y(x_k, t)] + Q(x_k, t) + \tau J_k.$$

При численной реализации метода характеристик на плоскости (x, t) строится прямоугольная сетка с шагом по времени τ и по координате $\Delta x = C\tau$. В начальный момент времени значения расхода и напора в узлах сетки на слое $t = t_0$ находятся из начальных условий. Далее решение ищется в тех же узлах сетки на слое $t = t_0 + \tau$, исходя из уже найденного распределения, с использованием характеристических соотношений и граничных условий и т.д. с шагом τ .

4.1.3. ГИДРОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТРУБОПРОВОДА С ЖИДКОСТЬЮ

При моделировании пространственного движения трубопровода использована одномерная модель динамики трубопровода с жидкостью [90]. Геометрия трубопроводной системы характеризуется его осевой линией. Осевая линия может иметь сложную разветвленную пространственную структуру. Вся трубопроводная система разбивается на два типа участков: прямолинейные участки и плоские гибы. В пределах участка геометрические, физические характеристики, а также внешние нагрузки считаются неизменными. Трубопроводные участки концевыми сечениями при помощи узлов объединяются в единую трубопроводную систему.

Трубопроводный участок представляет собой часть трубы с неизменными характеристиками. Нормальное сечение трубы является круговым кольцом с наружным радиусом r_1 и внутренним r_2 , для материала трубы справедлива модель линейно-упругого изотропного тела.

Напряженно-деформированное состояние трубопроводного участка в деформированном положении характеризуется вектором линейных перемещений точек оси $U(s,t)$, вектором угловых перемещений нормального сечения $\Theta(s,t)$ и векторами внутренних сил и моментов $Q(s,t)$, $M(s,t)$. Здесь s - пространственная координата, длина дуги кривой, t - время.

При малых углах поворота сечений трубы ($|\Theta| \ll 1$) для связи векторов Q , M , Θ , U , характеризующих ее НДС в процессе динамических деформаций, в качестве базовых использованы уравнения малых колебаний пространственных криволинейных стержней [165-166].

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial s} &= m \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} + \mathbf{q}, \\ \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial s} &= [\mathbf{Q} \times \boldsymbol{\tau}_0] + \rho I \left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{\Theta}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\tau}_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\Theta}}{\partial t^2}) \right], \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Theta}}{\partial s} &= \frac{1}{EI} [\mathbf{M} + \nu \boldsymbol{\tau}_0 (\boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{M})], \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial s} &= [\boldsymbol{\Theta} \times \boldsymbol{\tau}_0] + \frac{1}{EA} \boldsymbol{\tau}_0 (\mathbf{Q} \boldsymbol{\tau}_0) + \frac{1}{k' GA} [\mathbf{Q} - \boldsymbol{\tau}_0 (\mathbf{Q} \boldsymbol{\tau}_0)].\end{aligned}\tag{4.12}$$

Здесь ρ , m - эквивалентная плотность материала, которая учитывает и внутреннюю жидкость и теплоизоляцию, и погонная масса трубы ($m = \rho A$); A , I - площадь и момент инерции нормального сечения трубы; $\boldsymbol{\tau}_0$ - единичный вектор касательной к оси трубы; $\rho = \rho^* + (m_{\text{ж}} + m_{\text{т}})/A$; ρ^* , E , G , ν - плотность, модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала трубы; $m_{\text{ж}}$, $m_{\text{т}}$ - погонная масса внутренней жидкости и теплоизоляции трубы; k' - коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении трубы при сдвиговых деформациях, q - внешняя распределенная сила. Площадь, момент инерции нормального сечения трубы и коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений в сечении трубы при сдвиговых деформациях, определяются выражениями [167]

$$\begin{aligned}A &= \pi(r_1^2 - r_2^2), \quad I = \pi(r_1^4 - r_2^4)/4, \\ k' &= 6(1+\nu)(1+h)^2 / [(7+6\nu)(1+h)^2 + (20+12\nu)h], \quad h = r_2 / r_1.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Эти уравнения учитывают деформации изгиба, кручения, сдвига и растяжения-сжатия трубы, распределенные инерционные силы, в том числе и инерцию поворота нормальных сечений трубы. В общем случае используемая система четырех векторных дифференциальных уравнений эквивалентна двенадцати скалярным уравнениям. Для

прямолинейного участка трубы эти уравнения разбиваются на четыре независимые группы уравнений, описывающие крутильные (два уравнения), изгибные в двух ортогональных плоскостях (по четыре уравнения) и продольные (два уравнения) деформации трубы. Для плоскогогиба используемые уравнения деформации тонких криволинейных трубопроводов (стержней) разбиваются на две независимые группы уравнений (по шесть уравнений), описывающие деформации в плоскостигиба и из плоскости. В этих уравнениях учитывается снижение изгибной жесткости трубопровода, обусловленное «сплющиванием» нормального сечения (эффект Кармана). Соответствующий коэффициент податливости вычисляется в соответствии с [168-170], учитывает центральный уголгиба, краевые эффекты, внутреннее давление.

Для распределенной силы, действующей на трубную оболочку со стороны внутреннего потока жидкости, в том числе и при наличии в потоке жидкости гидроударных явлений, справедливо выражение:

$$q_{жс} = 2m_{жс} V \frac{\partial^2 U}{\partial s \partial t} + \frac{\partial}{\partial s} [(P \cdot A_* + m_{жс} V^2)(\tau_0 + \frac{\partial U}{\partial s})]. \quad (4.14)$$

В этом выражении A_* - площадь внутреннего сечения трубы; P , V – давление и скорость движения внутреннего потока жидкости. Для учета данного воздействия был разработан программный модуль в составе ППП RANT. Следует отметить, что при гидроударных явлениях, воздействие внутреннего потока характеризуется в основном слагаемым

$$q_{жс} = \frac{\partial}{\partial s} [P \cdot A_* \tau_0]. \quad (4.15)$$

4.1.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТРУБОПРОВОДА МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ФОРМАМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Решение задачи динамики трубопровода ищется в виде разложения по формам собственных колебаний

$$U(s, t) = \sum_{(n)} a_n(t) U_n(s). \quad (4.16)$$

Формы собственных колебаний удовлетворяют однородным уравнениям (4.12) и соответствующим линейным однородным граничным условиям. Используется ортонормированная система векторных функций $\{U_n\}$

$$\int_L m(s)(U_n \cdot U_k) ds = M \cdot \delta_{nk}. \quad (4.17)$$

В этом выражении интегрирование ведется по всем участкам трубопровода, M – масса трубопровода, δ_{nk} – индекс Кронекера.

В силу выбора U_n выражение (4.16) удовлетворяет второму, третьему и четвертому уравнениям системы (4.12), кинематическим и динамическим условиям в узловых и граничных сечениях, сечениях расположения промежуточных опор. В итоге динамика системы полностью определяется набором коэффициентов разложения $\{a_n(t)\}$. Для их определения воспользуемся уравнениями Лагранжа второго рода. При этом роль обобщенных координат играют искомые функции $\{a_n(t)\}$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_n} - \frac{\partial T}{\partial a_n} = - \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} + R_a^n, \quad n = \overline{1, N}, \quad (4.18)$$

Здесь T , Π – кинетическая и потенциальная энергия системы, R_g^i – обобщенная непотенциальная сила, соответствующая обобщенной координате g_i .

При определении обобщенной силы системе задается виртуальное перемещение δa_n по одной из обобщенных координат и определяется работа всех внешних сил δA , не учтенных в выражении потенциальной энергии (4.18). В рассматриваемой ситуации – это распределенная сила q . Отношение $\frac{\delta A}{\delta a_n}$ даст искомые обобщенные силы

$$R^n = \sum_{(k)} \int_{(l_k)} (U_n q) d\eta = f_n(t). \quad (4.19)$$

Итоговая базовая система уравнений для определения искомого вектора обобщенных координат $a(t)$ имеет вид

$$M \frac{d^2 a}{dt^2} + M \Omega a = f, \quad (4.20)$$

Здесь Ω – диагональная матрица, элементами которой являются квадраты собственных частот, f – вектор-столбец, компонентами которого являются функции $f_n(t)$. При действии на трубопровод в сечении s_k переменной во времени сосредоточенной силы $R = e_R \cdot R(t)$ вектор-столбец обобщенных сил f определяется выражением

$$f = S_0 \cdot R(t), \quad S_0 = \{S_0^{(n)}\}, \quad S_0^{(n)} = (U_n(s_k) \cdot e_R). \quad (4.21)$$

Размерность вектора S_0 равна количеству форм собственных колебаний в разложении решения (4.17).

Таким образом, исходная задача динамики трубопроводной системы при рассматриваемых динамических воздействиях сведена к интегрированию системы

обыкновенных дифференциальных уравнений (4.20) с учетом выражений (4.19) и (4.21) для векторов обобщенных сил.

4.2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

С помощью разработанных математических и численных моделей, алгоритмов и программ проведено численное исследование динамики трубопровода ЯЭУ при ударном воздействии. Рассмотрен протяженный пространственный трубопровод, представленный на рис. 4.1. Геометрия и параметры трубопровода соответствуют международному проекту реактора на быстрых нейтронах «Феникс». Наружный диаметр трубы составляет $D=0.457$ м, толщина стенки $H=0.007$ м, материал – сталь с модулем упругости $E = 200$ ГПа, плотностью $\rho = 7800$ кг/м³. Внутри труба заполнена водой плотности $\rho_{жс} = 1000$ кг/м³. Концевые сечения трубы жестко заделаны, в сечениях А, С расположены упругие подвески жесткости 100 Н/мм, действующие в вертикальном направлении, в сечении D расположена опора скольжения, допускающая перемещения трубы в горизонтальной плоскости. Длины прямых участков представлены в таблице 4.1. Радиусы гибов трубопровода равны 0.7 м.

№	1	3	4	5	7	8	9	11	12	13	15	17
Длина, м	3.7	0.7	0.7	0.3	3	1.4	0.4	1	1	1.7	1.7	0.8

Табл. 4.1

Массивное прямоугольное тело массой 38.6 кг, движущееся со скоростью 10 м/с вертикально вниз, ударяется в окрестности точки В в неподвижный трубопровод, заполненный жидкостью. В результате такого воздействия тело тормозится, а трубопровод начинает движение. В рассматриваемом процессе выделяются две фазы: короткая фаза удара и относительно длинная фаза движения трубопровода. Характерное время фазы удара – миллисекунды, а фазы движения трубопровода – секунды. Такая большая разница в характерных временах дает возможность разделить исходную задачу на две несвязанные. Первая задача – моделирование фазы удара массы по трубопроводу, заполненному жидкостью. Эта задача в плоской постановке была рассмотрена ранее в главе 2, а так же в трехмерной постановке в главе 3. Вторая задача – моделирование динамики трубопроводной системы в целом с учетом начальных данных, полученных при решении первой задачи. Для решения задачи динамики трубопровода с использованием метода пространственных стержней необходимо знать зависимость силы от времени, с которой ударник действует на

оболочку трубопровода, и начальный импульс давления, формирующийся в жидкости в результате ударного воздействия.

В результате решения задачи удара массы по трубе получена временная зависимость силы, действующей на трубопровод в процессе удара, и характеристики пульсаций среднего по сечению давления в трубопроводе в окрестности места удара (рис. 2.20, 2.27). Фаза удара быстротечна и предполагается, что на характеристики удара пространственное движение трубопровода и гидроударные явления в трубопроводе практически не оказывают влияния.

Пространственное движение трубопровода обусловлено двумя причинами. Во-первых – это непосредственное кратковременное силовое воздействие на трубопровод со стороны массы. И, во-вторых, действие на трубопровод нестационарного внутреннего давления, возникающего в трубопроводе при импульсном сжатии жидкости. Источником этих процессов является возникающий при ударе по трубопроводу импульс давления в жидкости. Этот импульс распространяется по жидкости внутри трубопровода, отражается от граничных сечений и создает нестационарное пространственно-временное поле давления.

Методика численного исследования динамики разветвленных трубопроводных систем реализована в рамках программного комплекса RANT [171]. На его основе проведено численное исследование динамики пространственного трубопровода при локальном соударении с массивным телом. Движение массы реализуется сверху вниз. Выполнена серия численных расчетов, анализ результатов которых дает возможность выявить некоторые особенности протекающих процессов, и их взаимное влияние.

4.2.1. РАСЧЕТ ГИДРОУДАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЖИДКОСТИ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ТРУБОПРОВОД

Аппроксимация зависимости среднего давления от времени, изображенной на рисунке 2.27, приведена в таблице 4.2. Расчёт гидроудара в трубопроводе в методических целях выполнен также для более короткого импульса той же амплитуды, приведённого в таблице 4.3.

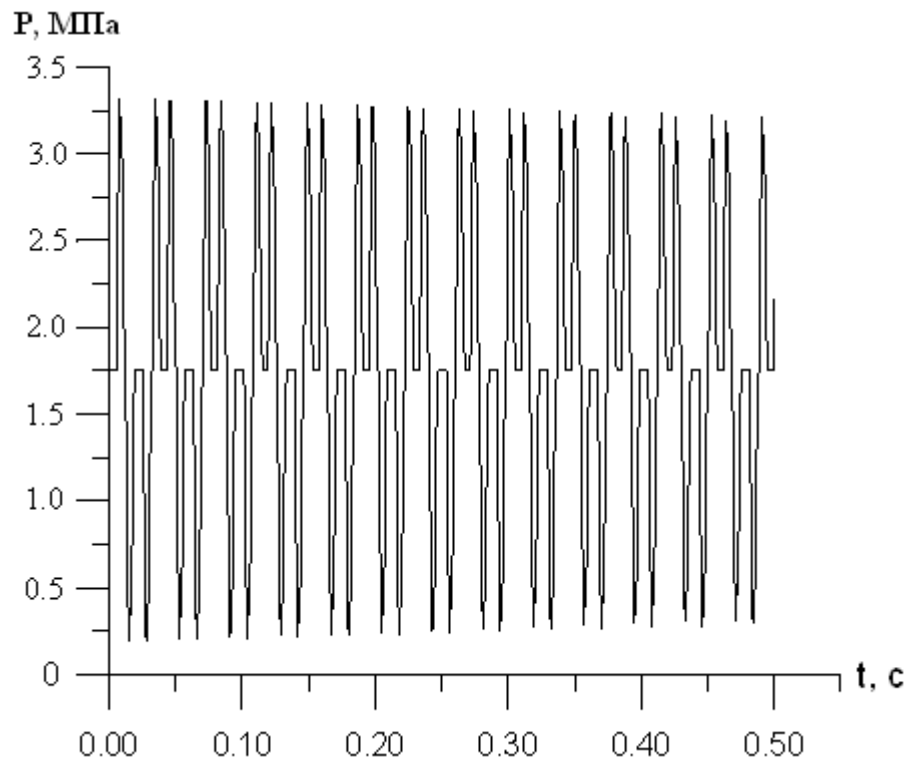
t, с	0.0005	0.0010	0.0015	0.0020	0.0025	0.0030	0.0035
P(t), МПа	0.875	1.54	2.37	2.83	3.14	2.88	2.83
t, с	0.0040	0.0045	0.0050	0.0055	0.0060	0.0065	0.0070
P(t), МПа	2.68	2.37	1.86	0.772	0.36	0.257	0.206

Табл. 4.2

t, с	0.0005	0.0010	0.0015	0.0020	0.0025
P(t), МПа	0.23	3.14	2.68	0.772	0.206

Табл. 4.3

В результате расчёта получены осциллограммы давления в сечениях, которые находятся в середине гибов трубопровода (рис. 4.1). Характер процессов во всех сечениях одинаков. В качестве примера на рисунках 4.4 - 4.6 приведены три графика для первого варианта импульса давления $P(t)$ (табл. 4.2), на рисунках 4.7 - 4.9 – второго варианта импульса $P(t)$ (табл. 4.3).

Рис. 4.4. Давление в жидкости в сечении $s = 4,25$ м

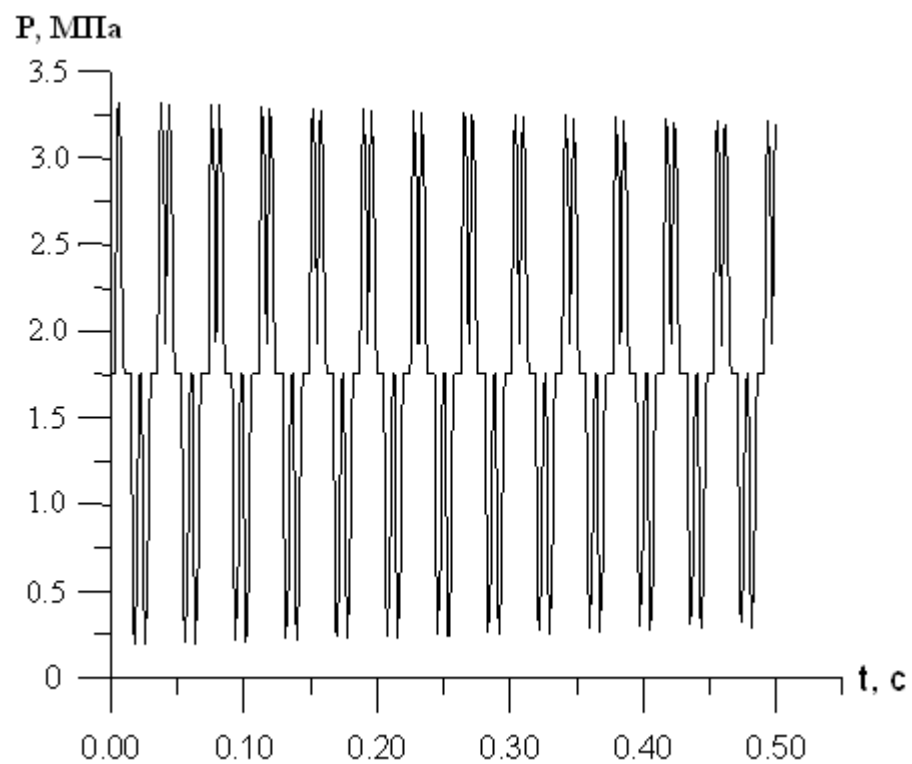


Рис. 4.5. Давление в жидкости в сечении $s = 7,05$ м

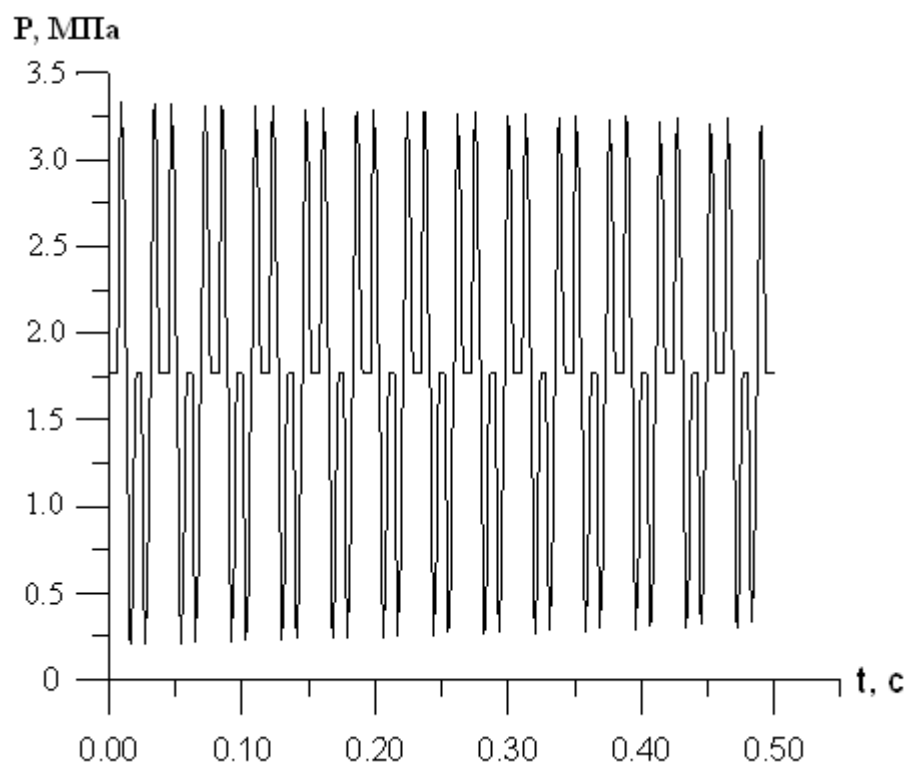


Рис. 4.6. Давление в жидкости в сечении $s = 12,95$ м

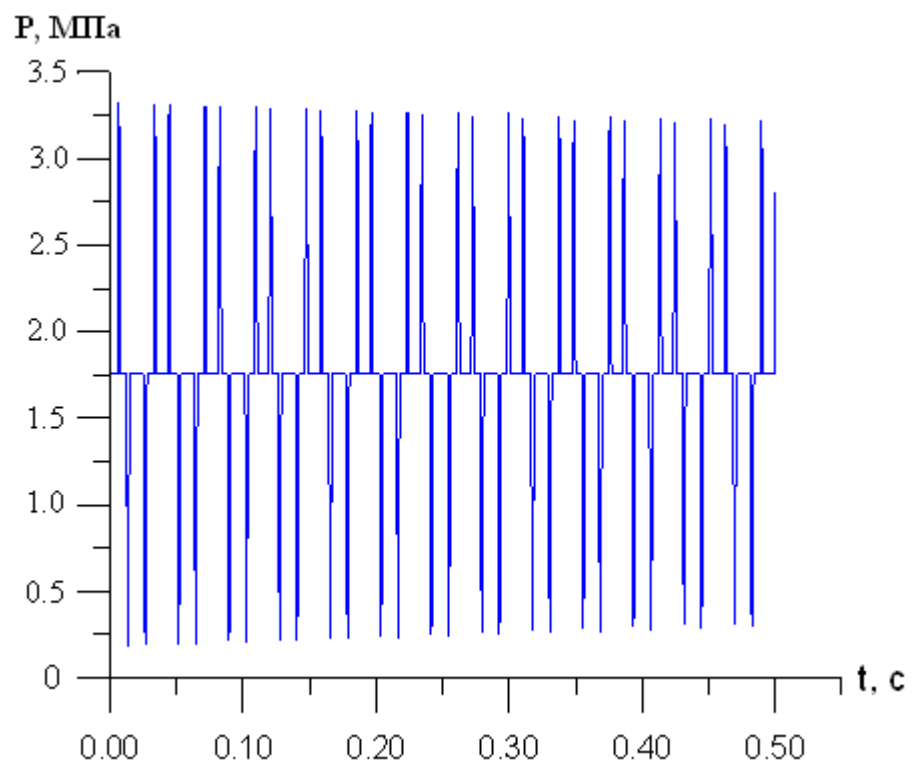


Рис. 4.7. Давление в жидкости в сечении $s = 4,25$ м

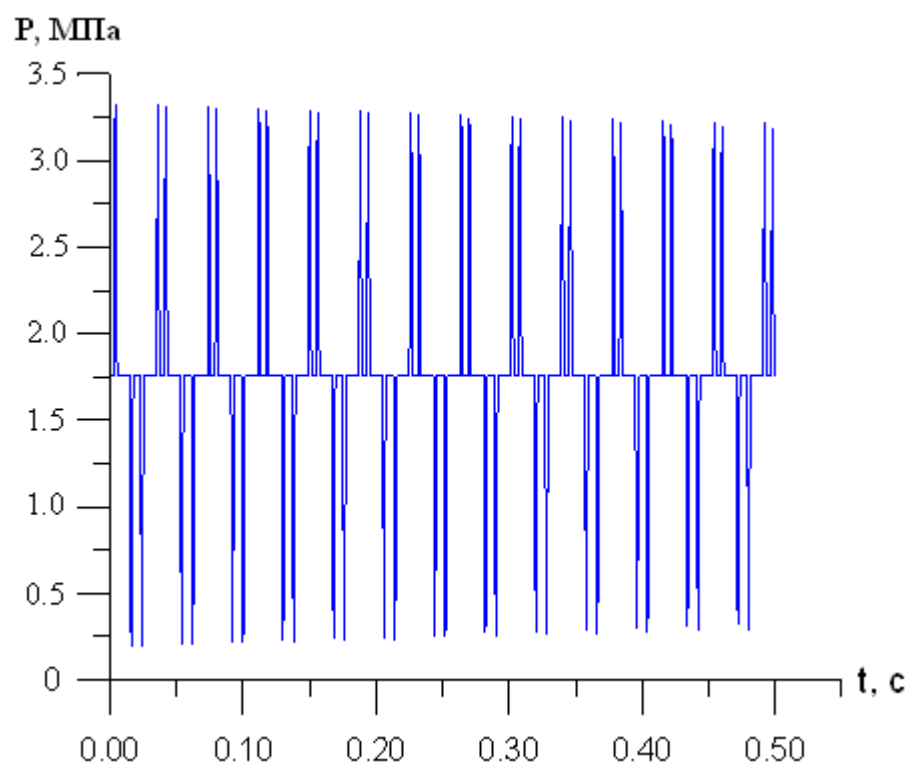


Рис. 4.8. Давление в жидкости в сечении $s = 7,05$ м

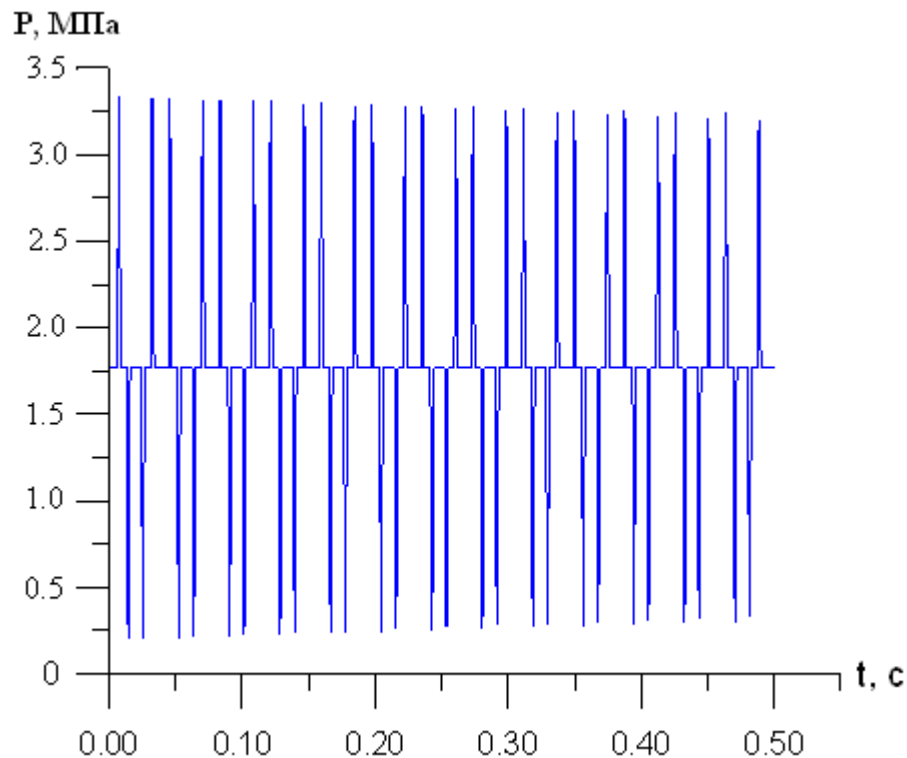


Рис. 4.9. Давление в жидкости в сечении $s = 12,95$ м

Наблюдаются многократные отражения импульсов от концов трубопровода и постепенное затухание амплитуд вследствие диссипативных сил.

4.2.2. РАСЧЕТ УДАРА МАССЫ ПО ТРУБОПРОВОДУ БЕЗ ЖИДКОСТИ

В расчетах учтено внутреннее демпфирование в конструкции трубопровода, которое составляет 5% от критического. Решение задачи удара массы по трубопроводу без жидкости совместно с решением аналогичной задачи для заполненного жидкостью трубопровода дает возможность оценить характер влияния на рассматриваемые процессы массы жидкости. Движение трубопровода обусловлено силой, возникающей при ударе массы. Зависимость силы, с которой ударник действует на оболочку трубопровода, от времени задавалась следующим образом:

$$F(t) = \begin{cases} mV/t, & 0 \leq t < t_0, \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases},$$

где m , V – масса и скорость груза, t_0 – время действия удара. Время действия ударного импульса бралось равным 7 мс, что соответствует длительности импульса давления в

жидкости, представленного на рисунке 2.23. Для данного варианта конструкции частоты собственных колебаний определяются значениями: $f_1 = 5.32$ Гц, $f_2 = 7.37$ Гц, $f_3 = 10.48$ Гц, $f_4 = 14.33$ Гц, $f_5 = 16.64$ Гц, $f_6 = 26.66$ Гц, $f_7 = 40.74$ Гц, $f_8 = 49.13$ Гц, $f_9 = 58.55$ Гц, $f_{10} = 67.79$ Гц, $f_{11} = 83.87$ Гц, $f_{12} = 95.75$ Гц, $f_{13} = 100.77$ Гц, $f_{14} = 103.94$ Гц, $f_{15} = 119.92$ Гц, $f_{16} = 135.12$ Гц, $f_{17} = 140.53$ Гц, $f_{18} = 160.39$ Гц, $f_{19} = 174.92$ Гц. При ударе, длительность которого порядка 7 мс (характерная частота порядка 70 Гц), в большей или меньшей степени возбуждаются все эти частоты. Процесс движения трубопровода является многочастотным и затухающим. На рисунках 4.10 – 4.12 показан характер движения трубопровода в сечении ударного воздействия (точка В на рисунке 4.1) и в середине участков (гибов) №6 и №10, которые примыкают к прямому участку трубопровода, где реализуется ударное воздействие.

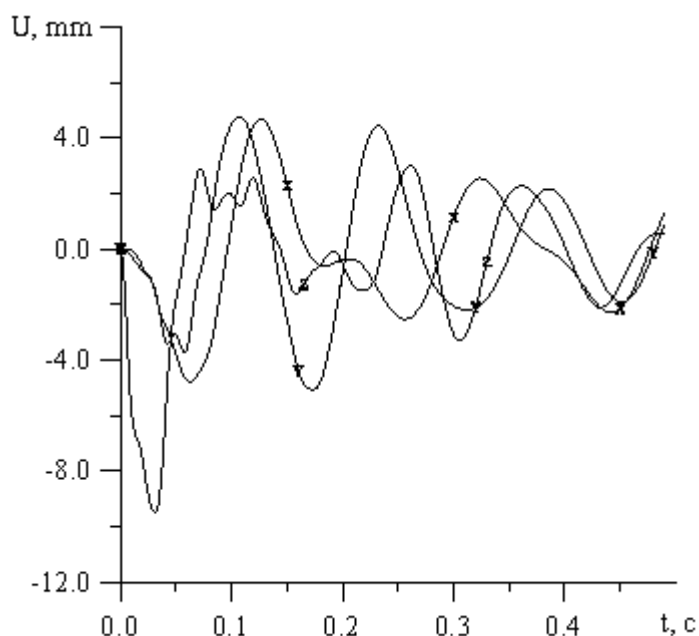


Рис. 4.10. Перемещения трубопровода в сечении В

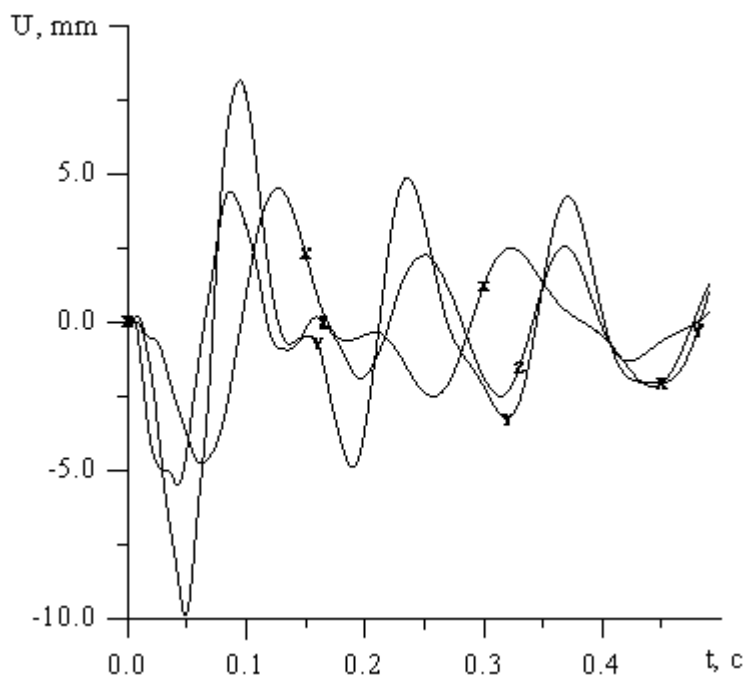


Рис. 4.11. Перемещения трубопровода в середине участка №6

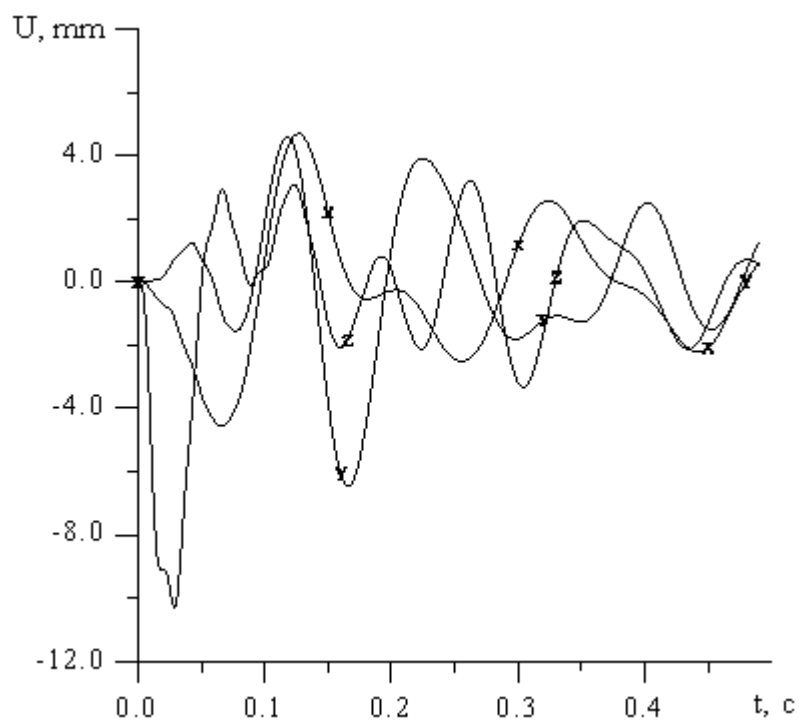


Рис. 4.12. Перемещения трубопровода в середине участка №10

На рисунках 4.10 – 4.12 кривые “X” соответствуют перемещениям трубопровода в направлении оси OX (рисунок 4.1), кривые “Y” – в направлении оси OY а кривые “Z” - в направлении оси OZ (в вертикальном направлении).

При рассматриваемом ударном воздействии максимальный размах перемещений реализуется в середине участка №6 трубопровода в направлении оси OY .

На рисунках 4.13 - 4.15 показан характер изменения продольных напряжений в трех характерных сечениях трубопровода.

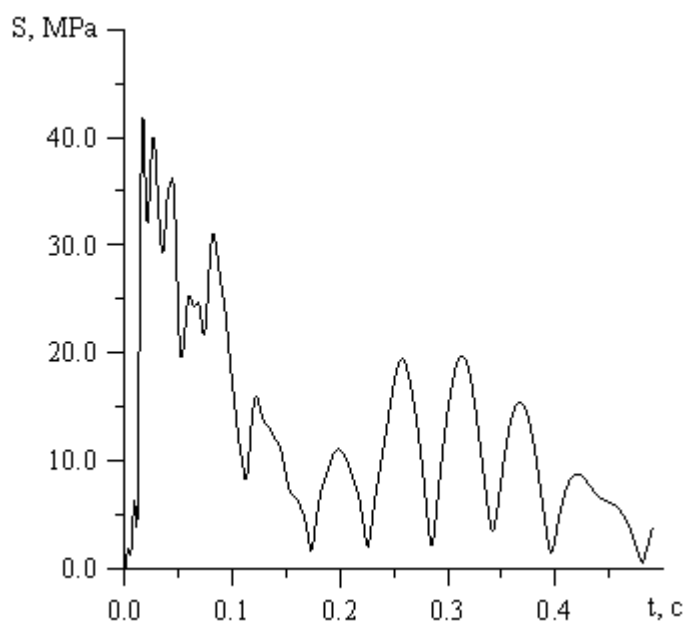


Рис. 4.13. Продольные напряжения в трубной оболочке в начале участка №1 (заделка)

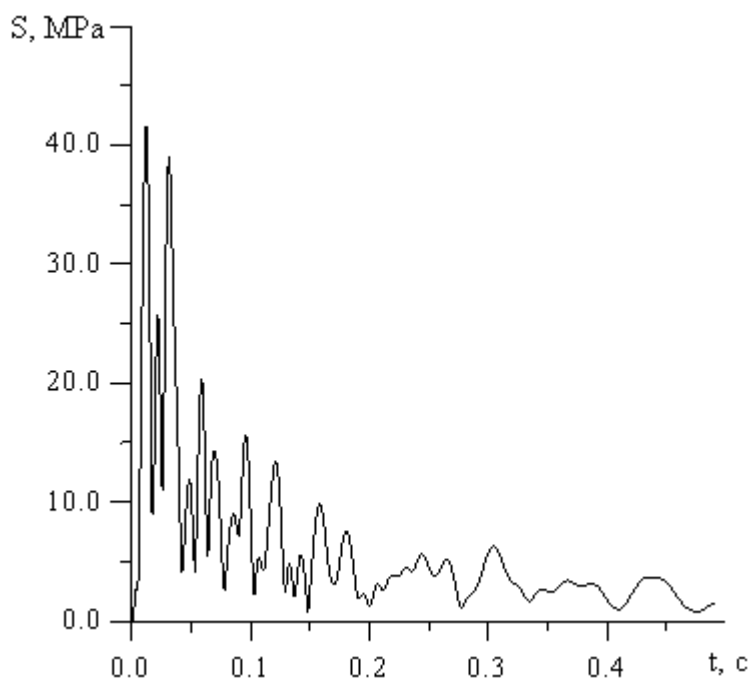


Рис. 4.14. Продольные напряжения в трубной оболочке в сечении D (опора скольжения)

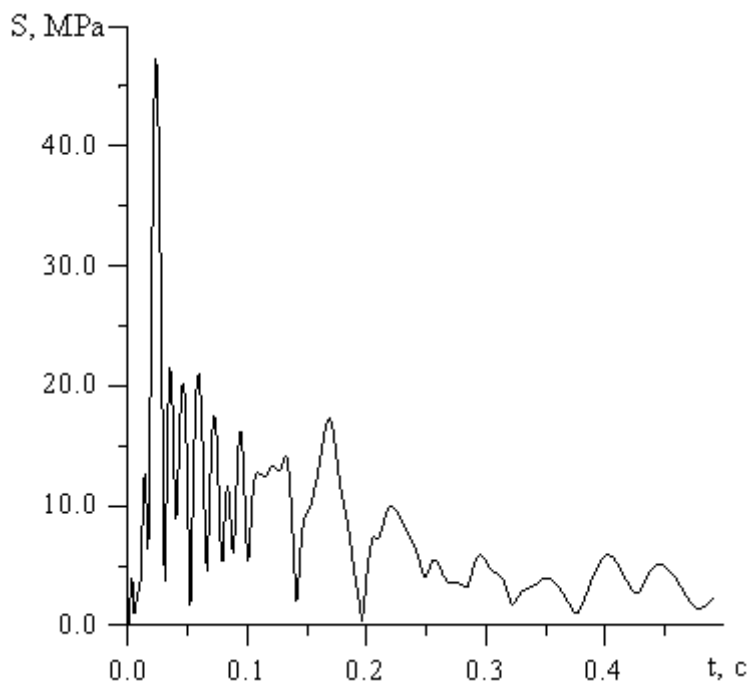


Рис. 4.15. Продольные напряжения в трубной оболочке в конце участка №17 (заделка)

Из анализа рисунков 4.13 - 4.15 следует, что максимальные продольные напряжения в материале трубопровода реализуются в конце участка №17 (сечение заделки) и достигают уровня 47 МПа.

4.2.3. РАСЧЕТ УДАРА МАССЫ ПО ТРУБОПРОВОДУ, ЗАПОЛНЕННОМУ ЖИДКОСТЬЮ

Для данного варианта конструкции частоты собственных колебаний определяются значениями: $f_1 = 2.95$ Гц, $f_2 = 4.08$ Гц, $f_3 = 5.78$ Гц, $f_4 = 7.77$ Гц, $f_5 = 9.01$ Гц, $f_6 = 14.31$ Гц, $f_7 = 22.31$ Гц, $f_8 = 27.43$ Гц, $f_9 = 32.45$ Гц, $f_{10} = 37.02$ Гц, $f_{11} = 45.57$ Гц, $f_{12} = 52.43$ Гц, $f_{13} = 56.71$ Гц, $f_{14} = 58.65$ Гц, $f_{15} = 68.38$ Гц, $f_{16} = 75.79$ Гц, $f_{17} = 79.69$ Гц, $f_{18} = 90.00$ Гц, $f_{19} = 96.38$ Гц, $f_{20} = 100.15$ Гц, $f_{21} = 109.35$ Гц, $f_{22} = 116.81$ Гц, $f_{23} = 124.56$ Гц, $f_{24} = 135.96$ Гц, $f_{25} = 147.30$ Гц, $f_{26} = 149.70$ Гц, $f_{27} = 155.17$ Гц, $f_{28} = 164.38$ Гц, $f_{29} = 166.15$ Гц.

Для случая удара массы по трубопроводу, заполненному жидкостью, рассмотрены три расчетных варианта:

- динамика трубопровода, обусловленная силовым воздействием со стороны массы;

- динамика трубопровода, обусловленная воздействием пульсаций давления жидкости, возникающих при ударе массы по трубе;
- динамика трубопровода, обусловленная суммарным воздействием указанных двух факторов.

Сравнительный анализ результатов решения указанных трех задач дает возможность оценить качественное и количественное влияние на динамику трубопровода непосредственного удара массы и возникающих при этом пульсаций давления в заполняющей трубопровод жидкости.

Динамика трубопровода, обусловленная силовым воздействием со стороны массы

При ударе массы по трубопроводу с жидкостью процесс движения трубопровода является многочастотным и затухающим. На рисунках 4.16 – 4.18 показан характер движения трубопровода в сечении ударного воздействия (точка В на рис. 4.1) и в середине участков (гибов) №6 и №10, которые примыкают к прямому участку трубопровода, где реализуется ударное воздействие.

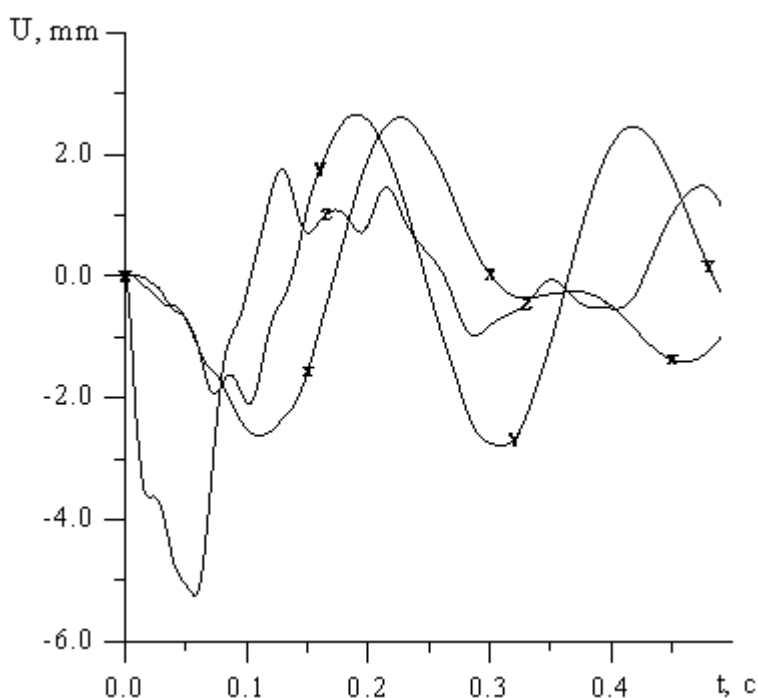


Рис. 4.16. Перемещения трубопровода в сечении В

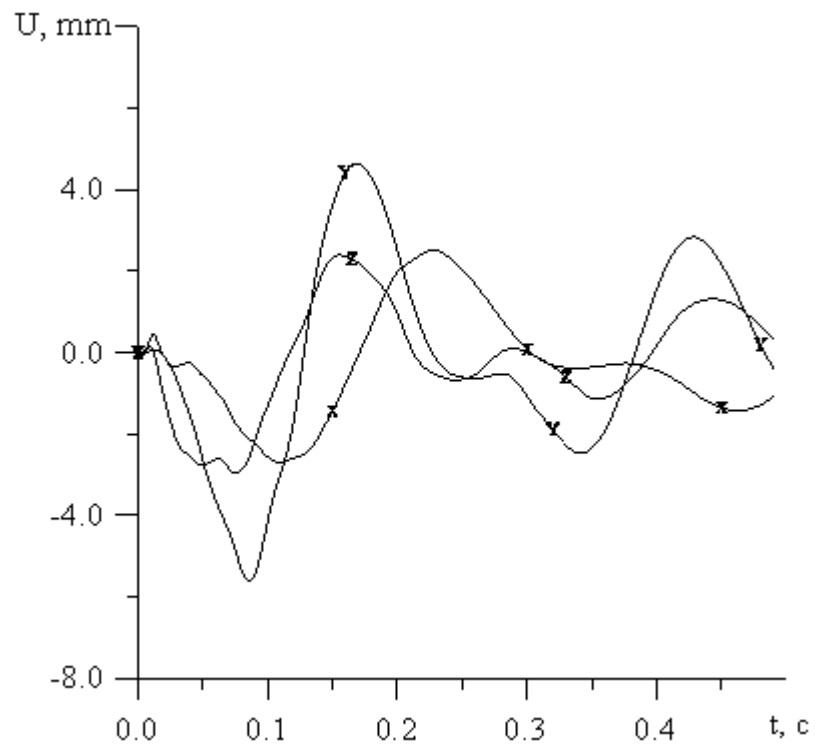


Рис. 4.17. Перемещения трубопровода в середине участка №6

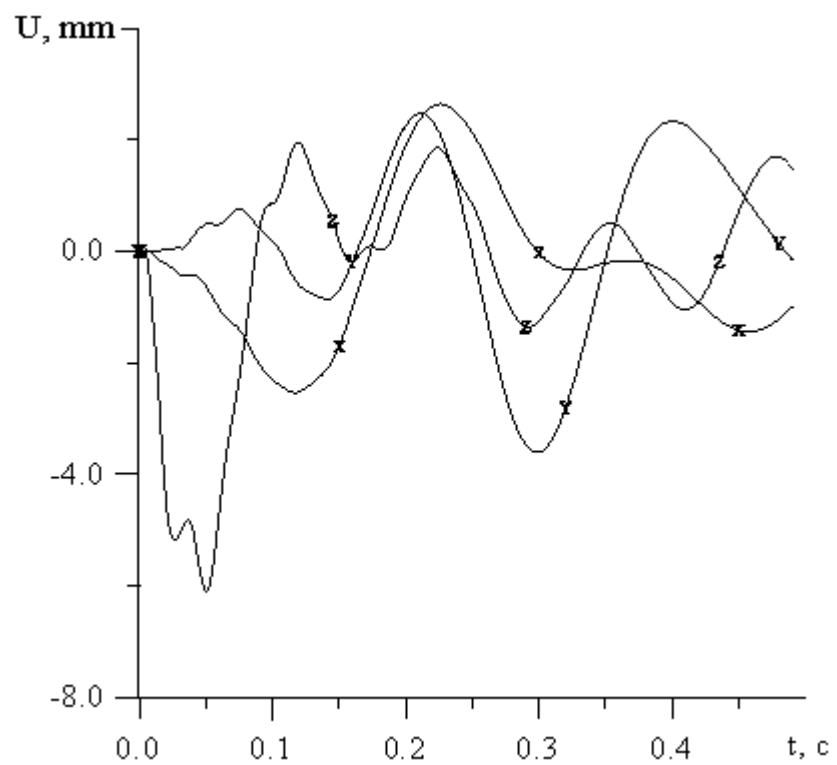


Рис. 4.18. Перемещения трубопровода в середине участка №10

При ударном воздействии массы максимальный размах перемещений реализуется в середине участка №6 трубопровода в направлении оси OY . По сравнению с вариантом трубы

без воды (рис. 4.10 - 4.12) процесс движения для трубы с водой становится более плавным, уровень отклонений трубы снизился в два раза. Это является следствием увеличения массы конструкции при сохранении неизменной ее жесткости.

На рисунке 4.19 - 4.21 показан характер изменения продольных напряжений в трех ранее выбранных характерных сечениях трубопровода.

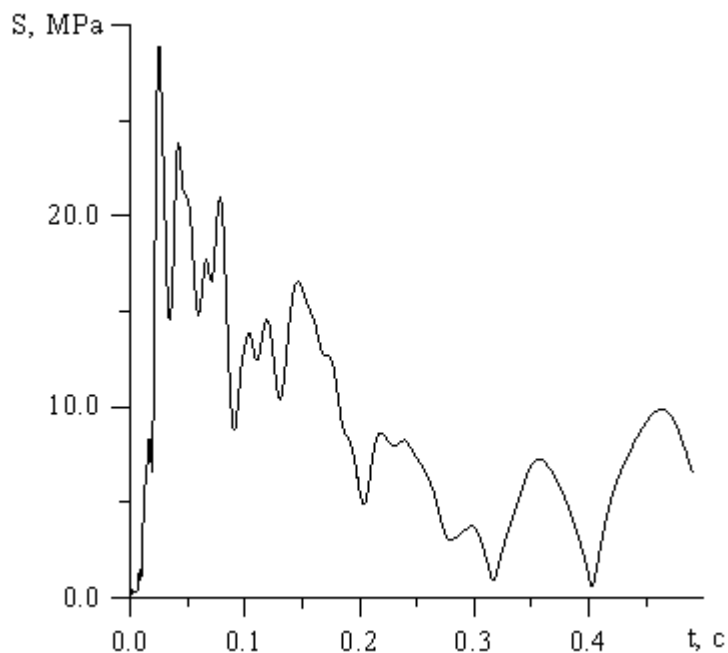


Рис. 4.19. Продольные напряжения в трубной оболочке в начале участка №1 (заделка)

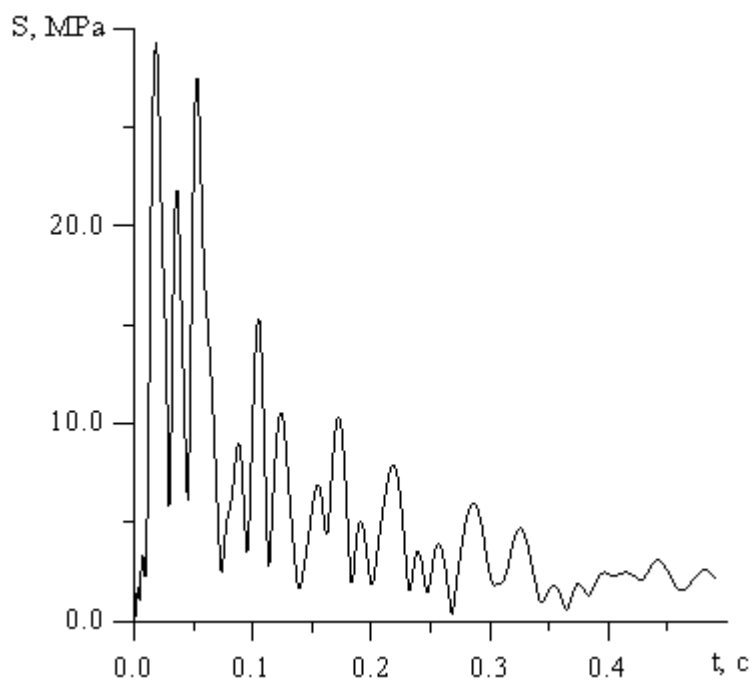


Рис. 4.20. Продольные напряжения в трубной оболочке в сечении D (опора скольжения)

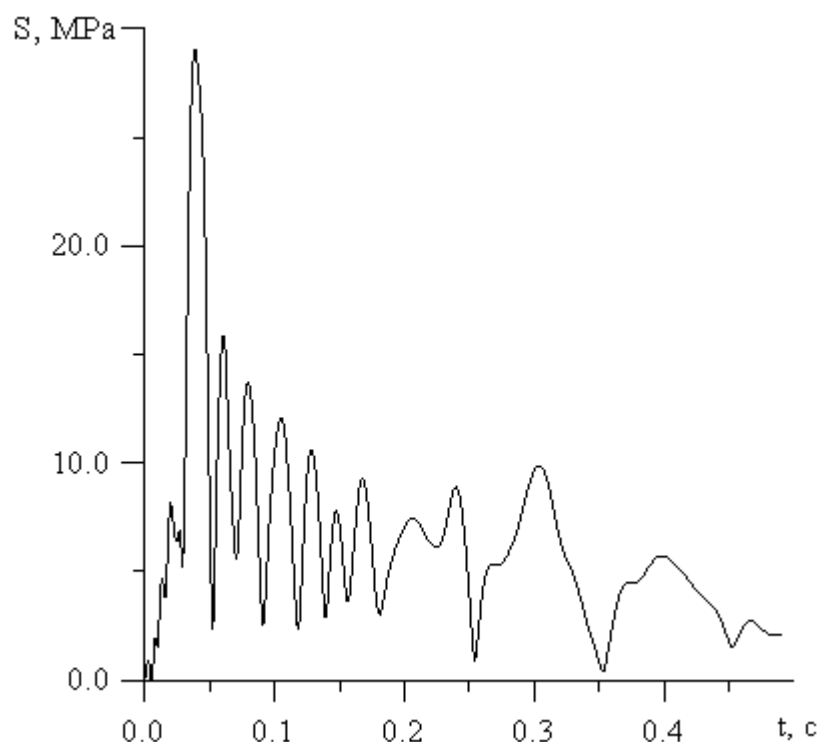


Рис. 4.21. Продольные напряжения в трубной оболочке в конце участка №17 (заделка)

Во всех трех контрольных сечениях уровень продольных напряжений приблизительно одинаков, достигает значения порядка 29 МПа, что в 1.6 раза меньше, чем для случая трубопровода без воды. Максимальные напряжения реализуются в течение 0.05 с после удара.

Динамика трубопровода, обусловленная гидроударными явлениями

Рассматриваемый вариант нагружения дает возможность оценить вклад пульсаций давления в трубопроводе в общем процессе динамики трубопровода. На рисунках 4.22 – 4.24 показан характер движения трубопровода в сечении ударного воздействия (точка В на рисунке 4.1) и в середине участков (гибов) №6 и №10, которые примыкают к прямому участку трубопровода, где реализуется ударное воздействие.

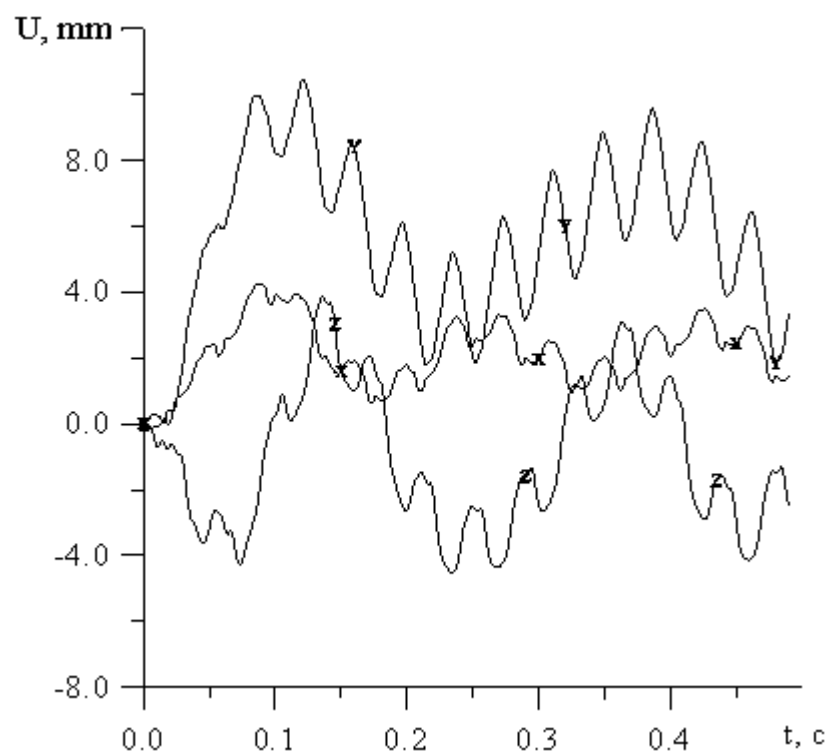


Рис. 4.22. Перемещения трубопровода в сечении В

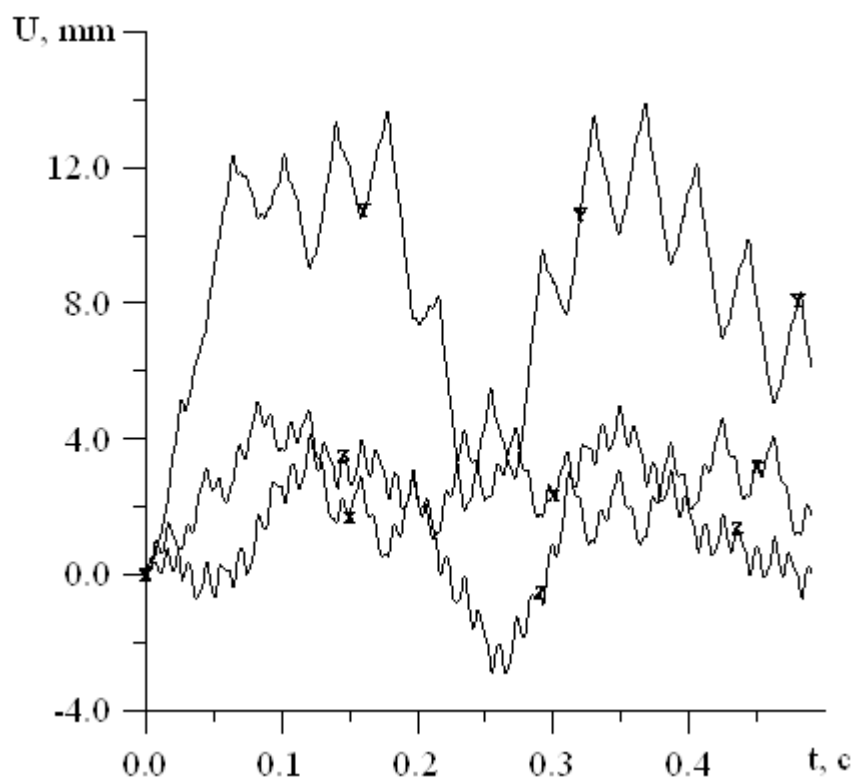


Рис. 4.23. Перемещения трубопровода в середине участка №6

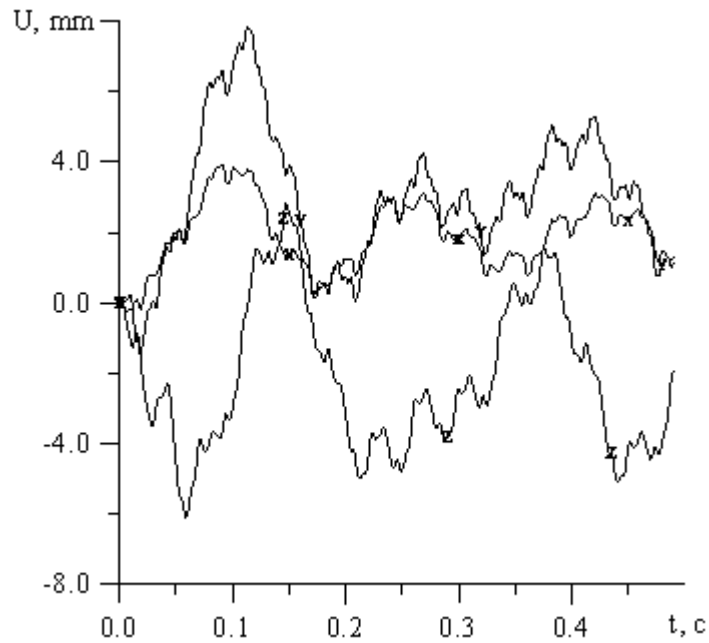


Рис. 4.24. Перемещения трубопровода в середине участка №10

При гидроударном воздействии общий уровень динамических перемещений находится на том же уровне, что и при ударном воздействии массы. Однако в процесс движения заметный вклад вносят высокочастотные колебания с частотой пульсаций давления.

На рисунке 4.25 - 4.27 показан характер изменения продольных напряжений в трех характерных сечениях трубопровода.

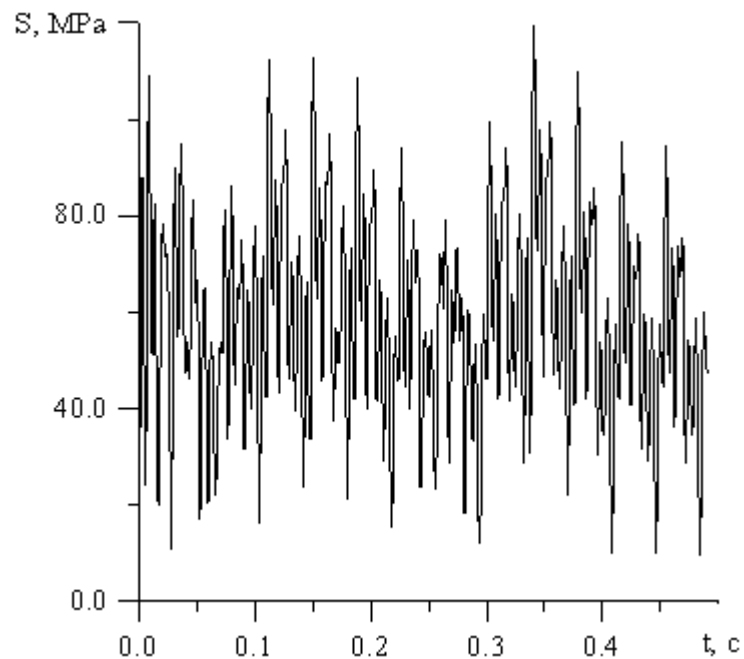


Рис. 4.25. Продольные напряжения в трубной оболочке в начале участка №1 (заделка)

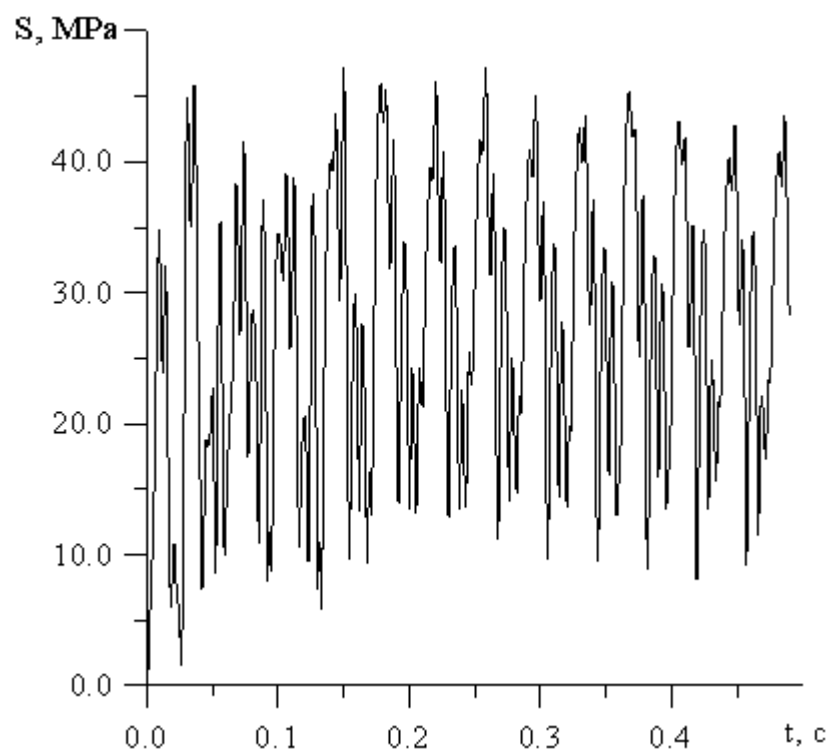


Рис. 4.26. Продольные напряжения в трубной оболочке в сечении D (опора скольжения)

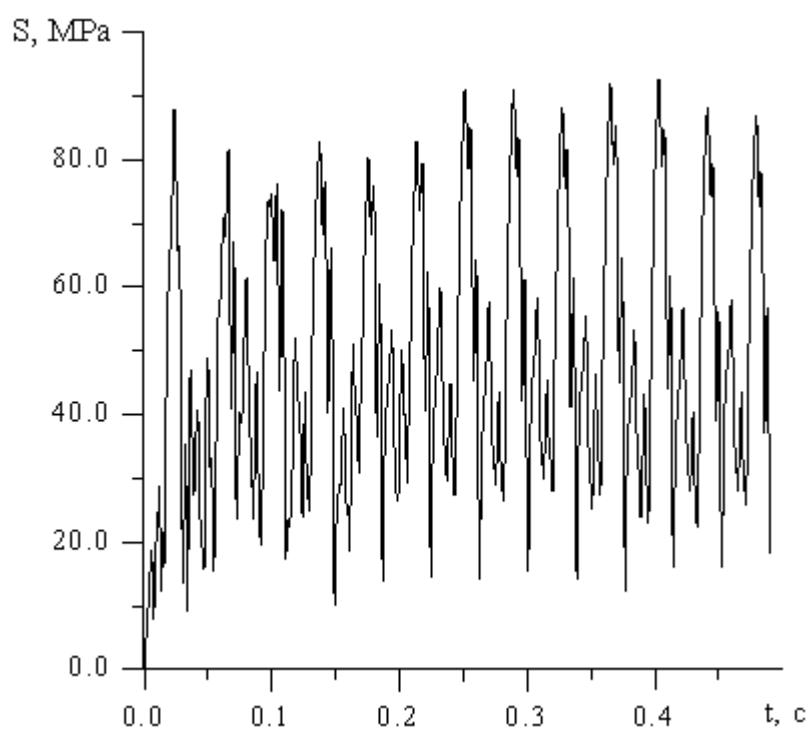


Рис. 4.27. Продольные напряжения в трубной оболочке в конце участка №17 (заделка)

Максимальный уровень продольных напряжений реализуется в начале участка №1 (заделка) и достигает значения порядка 120 МПа, что в 4 раза больше, чем для случая

ударного воздействия на трубопровод массы. При этом и характер изменения напряжений существенно отличается от случая ударного воздействия на трубопровод массы – высокий уровень динамических напряжений практически на всем контрольном интервале времени (0.5 с) сохраняется приблизительно одинаковым. Это является следствием относительно слабого затухания гидроударных явлений в трубопроводе.

Динамика трубопровода при совместном воздействии массы и гидроудара

При комплексном воздействии рассматривается динамика трубопровода, обусловленная ударным воздействием массы и пульсациями давления при гидроударных явлениях в трубопроводе. На рисунках 4.28 - 4.30 показан характер движения трубопровода в сечении ударного воздействия (точка В на рисунке 4.1) и в середине участков (гибов) №6 и №10, которые примыкают к прямому участку трубопровода, где реализуется ударное воздействие массы.

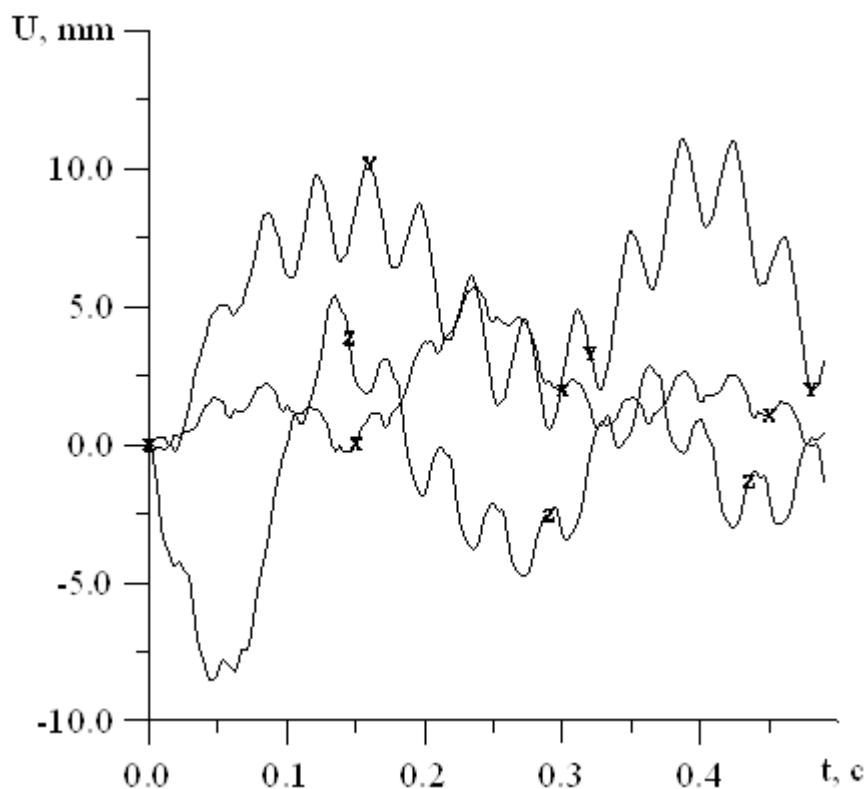


Рис. 4.28. Перемещения трубопровода в сечении В

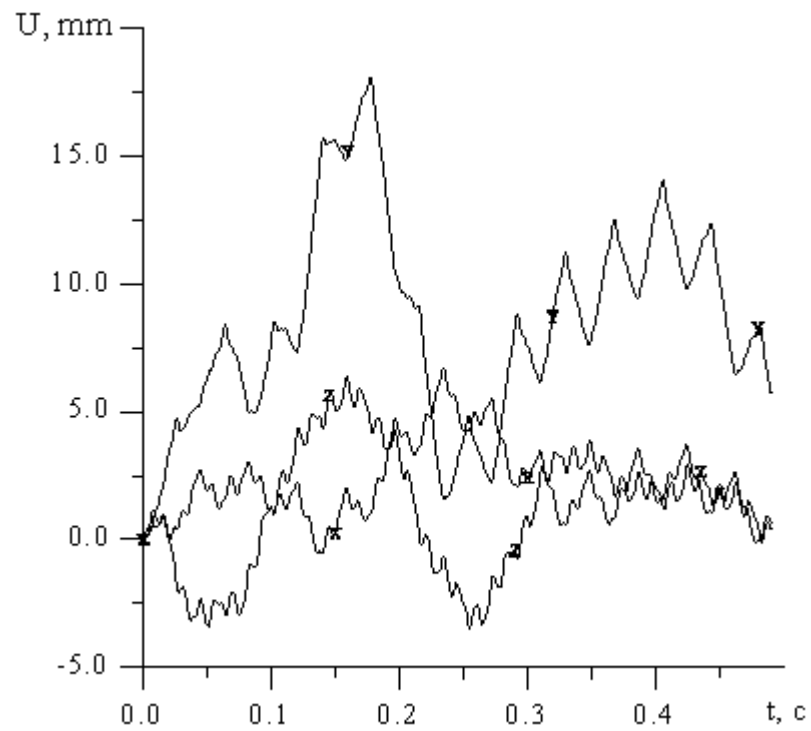


Рис. 4.29. Перемещения трубопровода в середине участка №6

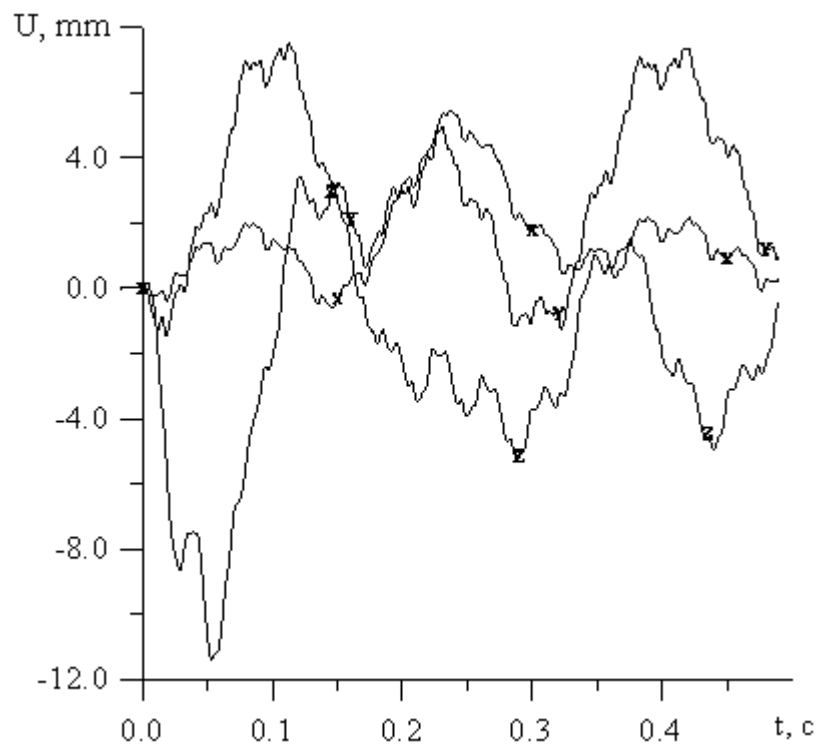


Рис. 4.30. Перемещения трубопровода в середине участка №10

При комплексном динамическом воздействии реализуется вариант движения, в котором представлены и низкочастотные и высокочастотные процессы.

На рисунке 4.31 – 4.33 показан характер изменения продольных напряжений в трех характерных сечениях трубопровода.

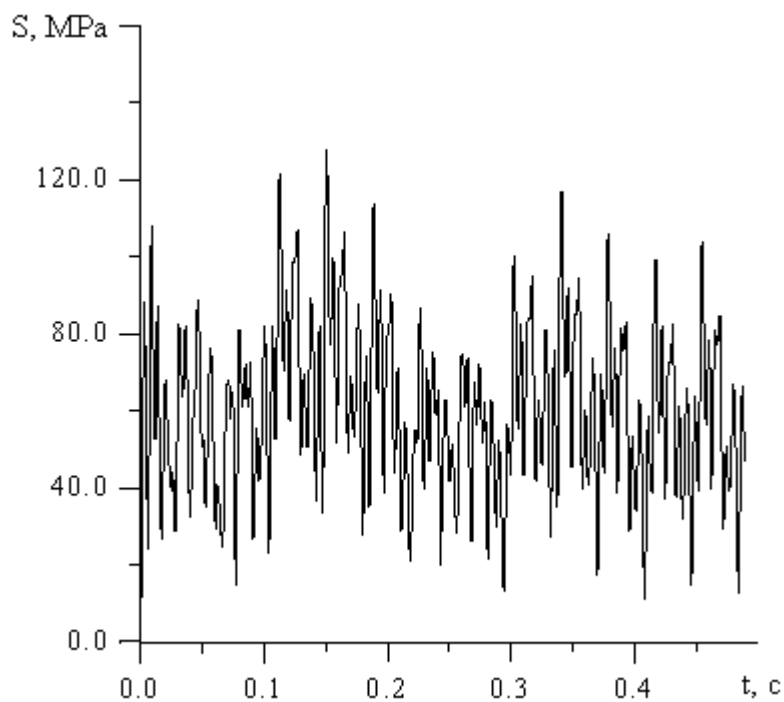


Рис. 4.31. Продольные напряжения в трубной оболочке в начале участка №1 (заделка)

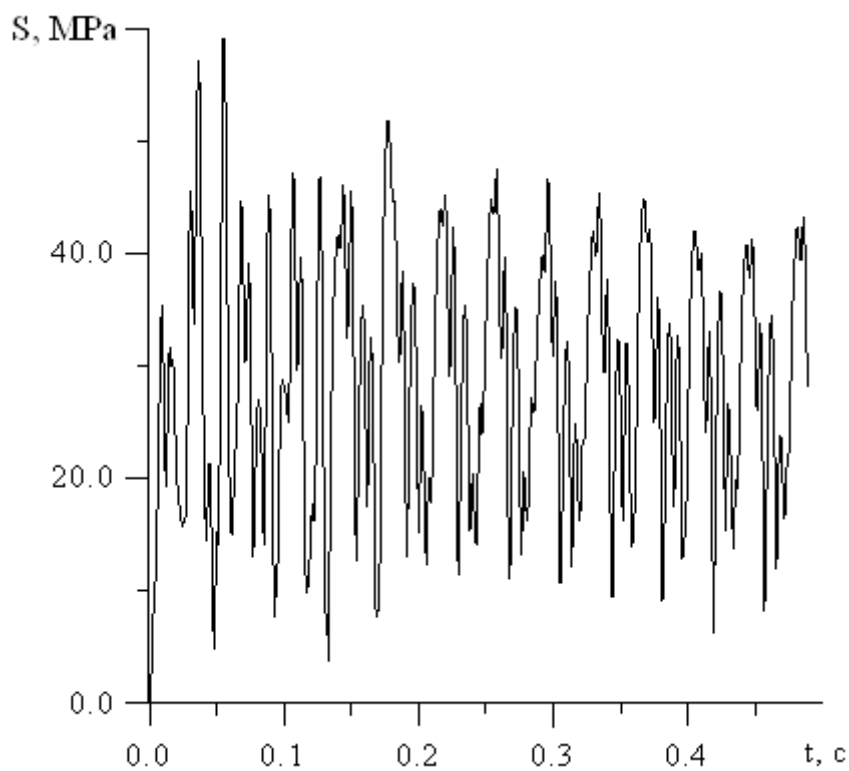


Рис. 4.32. Продольные напряжения в трубной оболочке в сечении D (опора скольжения)

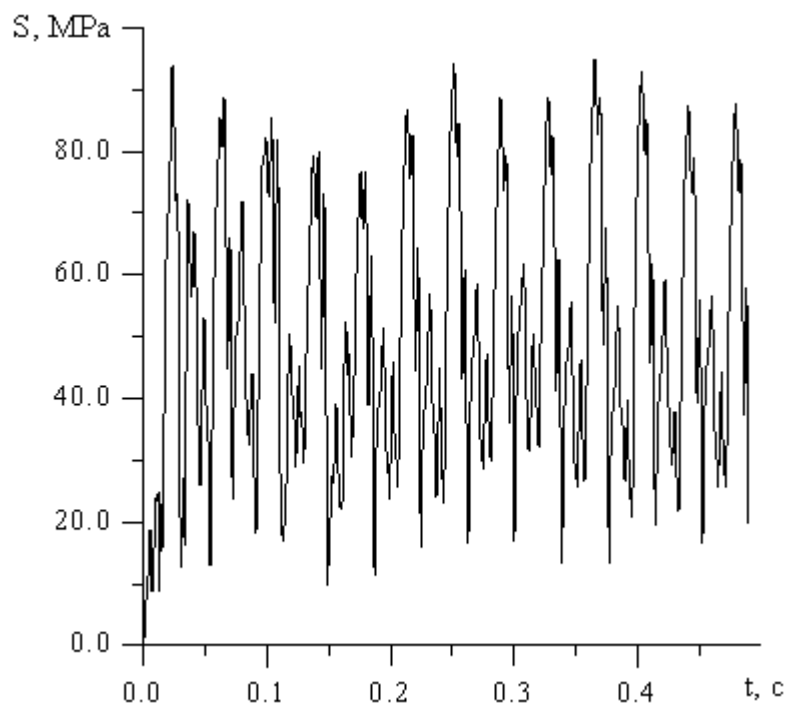


Рис. 4.33. Продольные напряжения в трубной оболочке в конце участка №17 (заделка)

Максимальный уровень продольных напряжений реализуется в начале участка №1 (заделка) в момент времени $t = 0.15$ с и достигает значения порядка 128 МПа.

По результатам проведенных исследований предлагается подход к численному моделированию динамического деформирования протяженных трубопроводов с жидкостью при ударном нагружении как гидроупругопластических систем с использованием:

- вариационно-разностного метода и метода конечных элементов, для решения нелинейных контактных задач ударного воздействия на трубопровод в плоской и пространственной постановках, с целью получения параметров ударного импульса и волны гидроудара в жидкости;

- метода характеристик для решения задачи распространения гидроудара (квазиодномерного потока жидкости) в трубопроводной системе;

- квазиодномерных уравнений динамики криволинейных пространственных стержней с применением метода разложения решения по формам собственных колебаний, для описания динамики трубопроводной системы в целом;

- краевых условий для квазиодномерных уравнений динамики трубопровода в точке удара в виде зависимостей от времени силы воздействия груза на трубопровод и давления в жидкости, полученных в результате численного моделирования ударного воздействия на трубопровод.

4.3. ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ

На примере пространственного трубопровода проведено исследование динамических процессов, возникающих при ударном воздействии на него массы. Удар массы приводит к формированию импульса давления в трубопроводе, заполненном жидкостью. Образовавшийся импульс давления распространяется по трубопроводу, отражается от его концов и создает в каждом сечении трубопровода периодические пульсации давления. Под воздействием удара массы и возникших в результате этого удара пульсаций давления реализуется процесс движения трубопровода. Проведенное исследование показало, что вклад удара массы на уровень отклонений трубопровода соизмерим с вкладом гидроударных явлений в трубопроводе. При этом уровень напряжений в трубопроводе определяется в основном гидроударными явлениями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Предложен подход к численному моделированию динамического деформирования протяженных трубопроводов с жидкостью при ударном нагружении как гидроупругопластических систем.
2. Развито методическое и программное обеспечение для учета кавитационных явлений в жидкости и определения гидродинамических нагрузок при решении задач динамического деформирования трубопроводов с жидкостью.
3. Получены результаты численного моделирования ударного воздействия на трубопровод, как нелинейную гидроупругопластическую систему, в плоской постановке при учете совокупности нелинейных и взаимосвязанных между собой процессов: больших перемещений; необратимых деформации трубопровода; контактного взаимодействия трубной оболочки с деформируемым ударником, со сжимаемой внутренней и внешней жидкостью и опорной поверхностью с эффектами отрыва сред друг от друга и повторными соударениями. Установлено, что:
 - заполняющая жидкость увеличивает массу и жесткость трубопровода, в результате чего снижается среднее значение его скорости движения и уровень окружного напряжения в нем;
 - наличие опорной поверхности приводит к более интенсивному деформированию трубной оболочки; увеличивается амплитуда и длительность формирующегося гидроударного импульса давления в жидкости.
 - окружающая жидкость для подводного трубопровода существенно снижает результирующие контактные нагрузки на трубопровод и, следовательно, заметно снижается значение окружного напряжения в трубной оболочке;
 - эффекты отрыва сред и кавитации в жидкости носят локальный характер и не оказывают существенного влияния на поведение системы;
4. Установлено, что при локальном ударном воздействии в пространственном трубопроводе формируется продольный гидроударный импульс, слабо меняющийся за пределами зоны контакта ударника с трубной оболочкой. Длительность импульса давления в жидкости соответствует полученным значениям в плоской постановке, амплитуда зависит от длины груза.

5. Численное моделирование динамического поведения протяженной трубопроводной системы при локальном ударном нагружении, в том числе с оценками вклада удара груза и вклада гидроударных явлений, показало их соизмеримое влияние на уровень перемещений трубопровода; напряжения в трубопроводе определяются в основном гидроударными явлениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зефиров С.В., Мясумов И.А., Кочетков А.В., Савихин А.О. Численное моделирование деформирования трубопровода с жидкостью при ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности, Н.Новгород. Изд-во ННГУ. Вып.73. 2011. С.113-119.
2. Зефиров С.В., Кочетков А.В., Савихин А.О. Численное моделирование деформирования подводного трубопровода с заполняющей жидкостью при ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности, Н.Новгород. Изд-во ННГУ. Вып.74. 2012. С.160-166.
3. Зефиров С.В., Кочетков А.В., Овчинников В.Ф., Савихин А.О., Смирнов Л.В., Яскеляин А.В. Численное моделирование динамического деформирования пространственного трубопровода с жидкостью при локальном ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности, Н.Новгород. Изд-во ННГУ. Вып.75 ч.2. 2013. С. 152-159.
4. Кочетков А.В., Повереннов Е.Ю., Савихин А.О. Численное моделирование гидроупругопластического деформирования трубопровода с жидкостью при ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности, Н.Новгород. Изд-во ННГУ. Вып.77 ч.3. 2015. С. 244-253.
5. Зефиров С.В., Кочетков А.В., Молев И.В., Савихин А.О. Численное моделирование деформирования трубопровода с жидкостью при ударном нагружении // Приволжский научный журнал, ННГАСУ, 2012. №1(21), С.22-30.
6. Линник С.В., Савихин А.О., Савихин О.Г. Аппроксимация производных термодинамических функций для воды, пара и пароводяной смеси // Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского, Н.Новгород. Изд-во ННГУ. Вып. 4(3) 2011г. С. 1090–1091.
7. Бернулли Д. Гидродинамика или записки о силах и движении жидкости. М.: Изд-во АН СССР, 1959. - 552 с.
8. Алдошин Г.Т. К истории гидроупругости от Эйлера до наших дней // Механика твердого тела. 2007. - Вып. 27. - С. 184-191.
9. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. -М.-Л.: Гос. изд. техн.-теорет. лит., 1949 104 с.
10. Алдошин Г.Т. Гидравлический удар в деформированном трубопроводе // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. механики, математики и астрономии. -1961. В.Ч. - С. 93-102.

11. Гинзбург И.П., Гриб А.А., Качанов Л.М., Поляхов Н.Н. Основные этапы развития механики на кафедрах Ленинградского университета за 1917/1967 годы // Вестн. Ленигр. ун-та. Сер. матем., мех., астрон. 1967. -Вып. 3. - С. 5-20.
12. Акимов Г.А. Развитие теоретической и прикладной газодинамики школой профессора И.П.Гинзбурга / Балтийский гос.техн.ун-т "Военмех" им. Д.Ф.Устинова. СПб.:Изд-во БГТУ, 2002. - 195 с.
13. Акимов Г.А., Максимов В.В. 100 лет со дня рождения И.П. Гинзбурга // Фундаментальная и прикладная гидрофизика. 2010. - № 2(8). - С.96-101.
14. Емельянов В.Н. Внутренние течения сложной структуры // Внутри-камерные процессы, горение и газовая динамика дисперсных систем. -СПб: Изд-во БГТУ, 1998. С. 80-91.
15. Волков К.Н., Денисихин С.В., Емельянов В.Н. Турбулентное течение в цилиндрическом канале с кольцевой выточкой // Инженерно-физический журнал. 2007. - Т.80, № 6. - С. 116-121.
16. Tijsseling A.S., Lavooij C.S.W. Waterhammer with fluid-structure interaction // Applied Scientific Research. 1990. - Vol. 47. - P.273-285.
17. Lavooij C.S.W., Tijsseling A.S. Fluid-structure interaction in liquid-filled piping systems // Journal of Fluids and Structures. 1991. - Vol. 5. - № 5. - P.573-595.
18. Аронович Г.В., Картвелишвили Н.А., Любимцев Я.К. Гидравлический удар и уравнивательные резервуары. -М.: Наука. 1968
19. Величко, Карабин, Лин. Гидроупругое взаимодействие при гидравлическом ударе в системе гибких трубопроводов // Теоретические основы инженерных расчетов. 1986. N3.C.84-111.
20. Хатфилд, Уиггерт. Волны давления в трубопроводах с жидкостью, возникающие в результате сейсмических воздействий // Современное машиностроение. Сер.В.1991.N1.C.24-29.
21. Inada K., Shepherd J.E., (2010) Shock Loading and Failure of Fluid-Filled Tubular Structures. Chapter 6, pp. 153-190, Dynamic Failure of Materials and Structures.
22. Ando K., Sandada T., (2011) Shock propagation through a bubbly liquid in a deformable tube, J Fluid Mech 671:339-363
23. Inada K., Shepherd J.E., (2010) Flexural waves in fluid-filled tubes subject to axial impact, J Press Vessel Technol 132:021302
24. Динамика конструкций гидроаэроупругих систем / [Фролов К.В., Махутов Н.А., Каплунов С.М. и др.]. М.: Наука, 2002. С. 186-187.

25. Динамика удара / Перев. с англ. Под ред. С.С. Григоряна. М.: Мир. 1985. 332 с.
26. Фельдгун В.Р. Цветков А.Ф. Численное моделирование взрыва в цилиндрической оболочке, заполненной и окруженной жидкостью// Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Всесоюз. межвуз. сб./Нижегородский ун-т. 1991. С.76-85.
27. Яскеляин А.В. Моделирование гидравлического удара в жидкости при колебаниях трубопровода //Теплофиз. аспекты безоп. ВВЭР: Тр. Меж-дунар. конф., Обнинск, 21-24 нояб., 1995. Т.2. Обнинск, 1995. - С.222-231.
28. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.- Л.: 1949. 785 с.
29. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.:Наука. 1972. 432 с.
30. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань;: Изд-во КГУ. 1975.
31. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек./Казань. Таткнигоиздат, 1957.
32. Муштари Х.М., Терегулов И.Г. К теории оболочек средней толщины//Докл. АН СССР, 1959. Т.123, № 6. С. 1144-1147.
33. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Вариационно-разностные схемы в нестационарных волновых задачах динамики пластин и оболочек/ Н.Новгород: Изд во Нижегород. ун - та. 1992.
34. Дресвянников В.И. О численной реализации нелинейных уравнений динамики упруго пластических оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. Горький, 1976. Вып. 3. С. 82-90.
35. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979. - 320 с.
36. Новичков Ю.Н., Култанов Б.К. Расчет подземных трубопроводов на поперечное нестационарное воздействие//Расчет сооружений взаимодействующих с окружающей средой: Сб. научн. тр./Моск.. гидромелиорат. ин-т. 1984. С.3-14.
37. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974.
38. Кармишин А.В., Жуков А.И. и др. Методы динамических расчетов и испытаний тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1990.
39. Галимов К.З., Паймушин В.Н. Теория оболочек сложной геометрии. (Геометрические вопросы теории оболочек). Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. 164 с.

40. Коссович Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986.
41. Рукавишников В.А., Ткаченко О.П. Приближенное решение нелинейной задачи о деформировании подземного трубопровода // Сибирский журнал индустриальной математики. 2010. - Т. 13, № 4(44). - С. 97-108.
42. Рукавишников В.А., Ткаченко О.П. Численный анализ математической модели гидроупругих колебаний в изогнутом трубопроводе // Математическое моделирование. 2011. - Т.23, Я2 1. - С. 51-64.
43. Ткаченко О.П. Математическая модель распространения волны давления в потоке жидкости внутри изогнутого подземного трубопровода // Вычислительные технологии. 1996. - Т. 1, № 3. - С. 78-86.
44. Ткаченко О.П. О математическом моделировании гидравлического удара в изогнутом трубопроводе // Труды X Всероссийской конференции «Прикладные технологии гидроакустики и гидрофизики». СПб.: Наука, 2010. - С. 281-284.
45. Якупов Р.Г. Действие подвижной нагрузки на цилиндрическую оболочку в упругой среде // Известия АН СССР. Сер. Механика твердого тела. -1979. № 3. - С. 152-157.
46. Баженов В.Г., Кибец А.И., Кочетков А.В., Численное моделирование деформирования газопровода высокого давления при соударении с фрагментами разрушенных труб // проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. №1. С. 106-110.
47. Котов В.А., Корюхин Д.Г., Кочетков А.В., Моделирование соударения подземного трубопровода с пластиной в плоской постановке // Вестник ННГУ, Сер. Механика. 2000. Вып.2. с.67-73.
48. Баженов В.Г., Егунов В.В., Кибец А.И., Кишьян А.А., Кочетков А.В., Слепов Ю.А., Хариновский В.В., Курганова И.Н. О математическом моделировании поражения многониточного газопровода осколками от взрыва одной из ниток // Тр. Научно-практ. Конф. “Итоги и перспективы десятилетнего сотрудничества Минатома РФ и ОАО «Газпром»”. ч. I. Москва. 2000, с.148-153.
49. Махутов Н.А., Драгунов Ю.Г., Фролов К.В. и др. Динамика и прочность водородных энергетических реакторов / М.: Наука, 2004. – 440с.
50. Велитченко В.И., Шульман С.Г. Расчет трубопроводов АЭС на сейсмическое воздействие. // Изв. ВНИИГ им Веденеева, т. 118. Сейсмостойкость ГЭС, ТЭС, АЭС. Изд. Энергия, 1977.
51. Ильюшин А.А., Рашидов Т.Р. О действии сейсмической волны на подземный трубопровод// Изв. АН УзССР.Сер. техн. наук. 1971. №1. С.3-11.,.

52. Махутов Н.А., Надеин В.А., Щеглов Б.А., Семьянистов А.И. Деформация магистрального трубопровода под действием сейсмического сдвига // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2007. №5. С. 123-130.
53. Баженов В.Г., Егунов Ю.В., Кочетков А.В., Фельдгун В.Р. Моделирование нелинейной динамики трубопровода высокого давления при поперечном разрыве // Проблемы машиностроения и надежности машин. Машиноведение. 1997, №3. С.58-65.
54. Егунов Ю.В., Кочетков А.В. Численное исследование нелинейной динамики гидроупругосвязанных плоских криволинейных стержней. // ПМТФ. 1999. Т.40 №1, с.212-219
55. Якупов Р.Г. Волны в стержне при действии импульсной нагрузки // Прикладная механика и техническая физика. 2008. - Т. 49, № 2. -С. 178-184.
56. Богомолов С.И., Куравлева А.М., Ингульцов С.В. Расчет вынужденных колебаний пространственных трубопроводных систем // Динамика и прочность машин. Республиканский межведомственный тематический научно-технический сборник, 1979, вып.30, с.113-118.
57. Велитченко В.И., Шульман С.Г. Расчет трубопроводов АЭС на сейсмическое воздействие. // Изв. ВНИИГ им Веденеева, т. 118. Сейсмостойкость ГЭС, ТЭС, АЭС. Л., Энергия, 1977, с. 102-109.
58. Вреземский В.Г., Грудев И.Д., Корнеева С.И. Свободные колебания теплообменной петли первого контура ВВЭР-1000 // В кн.: Динамические деформации в энергетическом оборудовании. М., Наука, 1978, с.28-36.
59. Самарин А.А. Вибрации трубопроводов энергетических установок и методы их устранения. М., Энергия, 1979. 288 с.
60. Фудзикава Т., Курокуцу Д., Игами Е. Анализ вибрации систем трубопроводов с использованием модального анализа // Нихон кикай гаккай рамбусю, 1975, т. 41, №343, с.813-822.
61. Хирамоду Цутому. Вибрация изогнутых распределительных труб // Хайкай, 1972, т.7, №8, с.44-50
62. Эдзири Ф., Утияма Ю. Асейсмическое проектирование трубопроводов для атомных электростанций // Хайкан, 1971, т.6, №10, с.13-19.
63. Chen M.M. A simplified dynamic analysis for reactor piping systems under blowdown conditions // 3 rd. Int. Conf. Struct. Mech. React. Technol. London, 1975, vol. 2, Part F, F5/1.

64. Ушаков В.С. Колебания и динамическая устойчивость трубопроводов самолетных гидросистем. Дис. На соиск. учен. степени канд. техн. наук. Рига, 1956.
65. Доценко П.Д. Об уравнениях малых колебаний криволинейного трубопровода // Изв.АН СССР. Механика твердого тела, 1974, №5, с.104-112.
66. Доценко П.Д. Уравнения колебаний криволинейного трубопровода в неподвижной системе // Самолетостроение. Техника воздушного флота. Республиканский межведомственный научно-технический сборник. Харьк. ун-т, 1977, вып.41, с.85-92.
67. Доценко П.Д. Геометрические и кинематические соотношения при конечных деформациях криволинейных стержней // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. Тематический сборник научных трудов. Харьк. авиац. ин-т, 1978, вып.1, с.71-81.
68. Доценко П.Д. Нелинейные уравнения движения систем, несущих подвижную распределенную нагрузку // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. Тематический сборник научных трудов. Харьк. авиац. ин-т, 1978, вып.1, с.11-21.
69. Доценко П.Д. О постановке задач устойчивости и колебаний трубопроводов с жидкостью // Динамика систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. Тематический сборник научных трудов. Харьк. авиац. ин-т, 1978, вып.1, с.21-31.
70. Ковревский А.П. Динамика трубопроводов, содержащих нестационарный поток жидкости // Прикладная механика, 1970, т. VI, вып.8, с.97-102.
71. Кондрашев Н.С., Лашкова Л.А. О взаимодействии трубопровода с протекающим по нему потоком // В кн.: Проектирование и доводка авиационных газотурбинных двигателей. Межвуз. сб. Куйбышев. авиац. ин-т, 1979, с.48-74.
72. Лурье А.И. О малых деформациях криволинейных стержней // Тр. ЛПИ. Раздел физико-математических наук. 1941, №3, с.148-157.
73. Массуд. Обобщенные векторные уравнения движения непризматических тонких пространственных стержней // Труды Американского общества инженеров-механиков. Серия Е. Прикладная механика, 1971, т.37, №4, с.239-245.
74. Chen S.S. Vibration and stability of a uniformly curved tube conveying fluid // J. Acoust. Soc. America, 1972, vol.51, №1(Part 2), p.223-232.
75. Светлицкий В. А. Механика абсолютно гибких стержней – М.: Изд-во МАИ, 2001. -432 с.
76. Светлицкий В.А. Малые колебания пространственно-криволинейных трубопроводов. // Прикладная механика, 1978, т. XIV, №8.

77. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей. // Машиностроение. 1978.
78. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов. М. 1982г.
79. Светлицкий В.А. Нелинейные уравнения движения и малые колебания стержней, заполненных движущейся жидкостью. Изд. АН СССР, МТТ, 1977, №1.
80. Светлицкий В.А. Статика, устойчивость и малые колебания гибких стержней, заполненных идеальной несжимаемой жидкостью. // Расчеты на прочность, 1969. вып.№14.
81. Жуков А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики. – Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1960, 58.- 150 с.
82. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. – М. : Изд-во иностр. Лит., 1950. – 427 с.
83. Чушкин П.И. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений. – М. : Изд-во АН СССР, 1968. – 122 с.
84. Уиггерт, Хатфилд, Штукенбрук. Анализ гидравлических и упругих переходных процессов в трубопроводах методом характеристик // Теоретические основы инженерных расчетов. 1988.№1. С.260-267.
85. Кривошея С.А. О колебаниях стержня, находящегося под воздействием продольной и поперечной квазигармонических сил // Математическая физика. Республиканский межведомственный сборник. Киев: Наукова думка. 1976, вып. 20, с. 82-90
86. Лесмез, Уиггерт, Хатфилд. Анализ колебаний системы трубопроводов с жидкостью путем разложения по собственным формам колебаний // Современное машиностроение. Сер.А. 1991, №2, с. 82-89
87. Муницин А.И. Собственные колебания балки с нелинейными опорами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1998, №3, с. 36-39.
88. Qui Ji-Bao, Ying-Zu-Guong, Yam L.H. New modal synthesis technique using mixed modes // AIAA Journal. 1997, №12, p. 1869-1875.
89. Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Колебания трубопроводов с нестационарным потоком жидкости. // Вопросы атомной науки и техники. Серия физика и техника ядерных реакторов, 1985, в. 2.
90. Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Одномерная модель колебаний тонкостенной криволинейной трубы с жидкостью. // Колебания упругих конструкций с жидкостью. Сборник докладов., Новосибирск, 1990.
91. Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Одномерные уравнения деформации тонкостенной трубы, изогнутой в пространстве. -М.: Машиноведение, 1988, №3. С. 31-36.

92. Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Одномерные уравнения колебаний тонкостенной пространственной трубы с внутренним потоком жидкости. // Проблемы машиностроения и надежности машин., №4, 1991.
93. Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Особенности влияния параметров внутреннего потока жидкости на свободные колебания пространственных трубопроводов. // Прикладные проблемы прочности и пластичности., Всесоюз. Межвуз. Сб., 1978, вып.8.
94. Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Уравнения малых колебаний пространственного трубопровода с текущей жидкостью // Прикладные проблемы прочности и пластичности: всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т. 1977. Вып. 7. С. 77-84.
95. Яскеляин А.В., Смирнов Л.В., Хайретдинов В.У., Исследование акустических колебаний теплоносителя в главном циркуляционном контуре ВВЭР-440. Вопросы атомной науки и техники. Серия «Обеспечение безопасности АЭС». Научно-технический сборник, вып. 27. Реакторные установки с ВВЭР. Вопросы прочности. ОАО ОКБ «ГИДРОПРЕСС», 2010 г. С. 100 – 111.
96. Уиггерт Д.С., Хатфилд Ф.Дж., Штукенбрук С. Анализ гидравлических и упругих переходных процессов в трубопроводах методом характеристик //Теоретические основы инженерных расчетов. 1988. №1. С. 260-267.
97. Доценко П. Д. О постановке задач устойчивости и колебаний трубопроводов с жидкостью. // Динамика систем, несущих подвижную, распределенную нагрузку. Тем. сб. научных трудов, ХАИ, 1978, вып. 1.
98. Доценко П.Д. Об уравнениях движения одномерных систем, несущих подвижную распределенную нагрузку. Машиноведение, 1979. №3
99. Доценко П.Д. Об уравнениях малых колебаний криволинейного трубопровода. Изд. АН СССР, МТТ, 1974. №5.
100. Доценко П.Д. Геометрические и кинематические соотношения при конечных деформациях криволинейных стержней. // Динамика систем, несущих подвижную, распределенную нагрузку. Тем. сб. научных трудов, ХАИ, 1978., вып.1
101. Доценко П.Д. Некоторые аналитические результаты расчета напряженно деформированного состояния трубопроводов. // Динамика систем, несущих подвижную, распределенную нагрузку. Тем. сб. научных трудов, ХАИ, 1978, вып. 1.
102. Численное решение многомерных задач газовой динамики // Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976.
103. N.Chiba, N.Sueyoshi, J.Kaneko. Pipe-whip experiment and numerical analysis. // Struct. Mech., React. Technol. Trans. 9th Int. Conf., Lausanne ,Aug.1987.P.17-21.

104. Wang Bin. The Deformation of Freely Whipping Pipes. //Proc. 3rd Int. Offshore and Polar Eng. Conf., Singapore. 1993. V.2 P. 62-68
105. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций //Изв. РАН МТТ, 2001, №5, с.156-173
106. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987, 600с.
107. Годунов С.К., Забродин А.В. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976.
108. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики – М.: Наука, 1980.
109. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1981.
110. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред. //Успехи механики, т.8. №4, 1985, с.21-65.
111. Угодчиков А.Г., Баженов В.Г., Рузанов А.И. О численных методах и результатах решения нестационарных задач теории упругости и пластичности //Численные методы механики сплошной среды, СО АН СССР, т.16, №4, Новосибирск, 1985, с.129-149.
112. Годунов С.К., Забродин А.В. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976.
113. Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численное решение неодномерных задач динамики твердого тела. //Пробл. динамики упругопластических сред. – М.: Мир, 1975, с.39-84.
114. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. – М.: Мир, 1972, 418с.
115. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.
116. Курант Р., Фридрихс, Леви Г. О разностных уравнениях математической физики //Успехи математических наук, 1940, вып.8, с.112-125.
117. Нох В.Ф. СЭЛ - совместный эйлера-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. //Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967, с.128-184.
118. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений //Вычислительные методы в гидродинамике / М.: Мир, 1967. с.212-263.

119. Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. Монография. – Н.Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 1999. 226с.
120. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. – М.: Наука, 1973.
121. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. /Пер. с англ. под ред Н.С. Бахвалова. – М.: Мир, 1986, 318с.
122. Метод конечных элементов в механике твердых тел. //Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. Киев: Вища школа, Головное изд-во, 1982.
123. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976, 464с.
124. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977.
125. Belytschko, T., Liu, W. K. and Moran, B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures /J. Wiley & Sons, New York, 2000, 600pp.
126. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Volumes 1, 2, 5th Edition London, 2000, 712pp.
127. Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики тонкостенных конструкций при импульсных воздействиях //Прикл. пробл. прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб., Горьк. ун-т., 1981, вып.18, с.57-66.
128. Баженов В.Г. Численное исследование нестационарных процессов деформации упругопластических оболочек //Проблемы прочности, 1984, №11, с.51-54.
129. Дресвянников В.И. О численной реализации нелинейных уравнений динамики упругопластических оболочек //Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб., Горьк. ун-т. Горький, 1976, вып.3, с.82-90.
130. Сегал В.М. Пластическое течение при растяжении осесимметричных образцов с шейкой //ПМТФ, 1969, №2, с.141-144.
131. Баженов В.Г., Кибец А.И. Численное моделирование трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечного элемента //Изв. РАН МТТ, 1994, №1, с.52-59.
132. Капустин С.А., Латухин А.Ю. О применении неявных схем для исследования нестационарного поведения криволинейных стержней с учетом геометрической нелинейности. //Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. /Горьк. ун-т, 1980, с.68-75.

133. Belytchko T., Mullen R. Stability explicit-implicit mesh partitions in time integrations //Int. J. Num. Meth. in Eng., 1979, v.12, p.1575-1586.
134. Huges T.J.R., Pister K.S., Taylor R.L. Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis. //Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1979, v.17-18, №1, p.159-182.
135. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990, 310с.
136. Шульц У.Д. Двумерные конечно-разностные уравнения в переменных Лагранжа. //Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. с.9-54.
137. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полноты консервативные разностные схемы. - Журн. Вычисл. Математики и мат. Физики, 1969, 9, №4, с 953-958.
138. Баженов В.Г., Белевич С.М., Коротких Ю.Г., Санков Е.И., Угодчиков А.Г. / Методы численного анализа волновых процессов в сплошных средах и тонкостенных конструкциях с учетом сопутствующих явлений//Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах: Тр. симпозиума. Горький - Таллин, 1973. Ч. 1. с.135-165.
139. Колган В.П. Конечно – разностная схема для расчета двумерных разрывных решений нестационарной газовой динамики. – учен. Зап. ЦАГИ, 1975, 6, №1, с 5-14.
140. Баженов В.Г., Рузанов А.И., Угодчиков А.Г. О численных методах и результатах решения нестационарных задач теории упругости и пластичности //Численные методы механики сплошной среды, 1985, т.16, №4, с.129-149.
141. Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики //Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967, с.316-342.
142. Корнеев А.И., Шуталев В.Б. Численное исследование трехмерного напряженного состояния стержня при ударе торцом и боковой поверхностью //Аналитические и численные методы решения краевых задач пластичности и вязкоупругости, Свердловск, 1986, С. 77-82.
143. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов. –Журн. Вычисл. Математики и мат. Физики, 1971, 11, №1, с 182-207.
144. Дьяченко В.Ф. Об одном новом методе численного решения нестационарных задач газовой динамики с двумя пространственными переменными. –Журн. Вычисл. Математики и мат. Физики, 1965, 5, №4, с 680-688.
145. Коротких Ю.Г. О базовом эксперименте для модели термовязкопластичности //Прикладные проблема прочности и пластичности, 1977, №6, с.3-20.
146. Коротких Ю.Г. Математическая модель упругопластической среды, основанная на концепции кинематического и изотропного упрочнения и ее реализация в статических и

кинематических задачах. //Тр. II Всесоюз. Конф. по числ. методам решения задач теории упругости и пластичности. – Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1971, с.156-169.

147. Коротких Ю.Г. О некоторых проблемах численного исследования упругопластических волн в твердых телах. //Методы решения задач упругости и пластичности: Учен. зап. /Горьк. ун-т, 1971, вып.134(4), сер. механика, с.69-90.

148. Коротких Ю.Г., Маковкин Г.А. О моделировании процессов непропорционального упругопластического деформирования на базе уравнений пластичности с комбинированным упрочнением //Прикладные проблемы прочности и пластичности. – М.: Товарищество научных изданий КМК, 1997, с.5-10.

149. Зефилов С.В. Импульсное деформирование и контактное взаимодействие упругопластических элементов осесимметричных конструкций. //Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. межвуз. сб./Горьк. ун-т, 1984, с.152-153.

150. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Оценки устойчивости явной конечно-разностной схемы «крест» решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Горьков. ун-т. – 1984. – Вып. 28. – С. 15-22.

151. Баженов В.Г., Зефилов С.В., Корюкин Д.Б., Крылов С.В. Деформирование и разрушение конструкций кирпичной кладки при взрывном нагружении //Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. Всесоюз. межвуз. сб. /М.: ТНИ КМК, 1999, вып. 60, с.19-25.

152. Баженов В.Г., Зефилов С.В., Цветкова И.Н. Численное моделирование задач нестационарного контактного взаимодействия деформируемых конструкций. //Межвуз. сб. Прикл. пробл. прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. – М.: Товарищество научных изданий КМК, 1995, вып.52, с.154-160.

153. Баженов В.Г., Зефилов С.В., Кибец А.И. О численной реализации вариационно-разностной моментной схемы решения нелинейных задач динамики нетонких оболочек при импульсном воздействии //Прикл. пробл. прочности и пластичности. Методы решения: Всесоюз. межвуз. сб., Горьк. ун-т, 1988, с.66-73.

154. Баженов В.Г., Зефилов С.В., Кочетков А.В., и др. Пакет прикладных программ “Динамика-2” //Прикл. пробл. прочности и пластичности. Исследование и оптимизация конструкций. Всесоюз. межвуз. сб., Горьк. ун-т, 1987, с.4-13.

155. LS-DYNA keyword user's manual. Version 960, 2001.

156. LS-DYNA theoretical manual, 1998.

157. J.O. Hallquist, "LS-DYNA Theory Manual", 2006.
158. Лурье М.В., "Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа", М.: Издательство «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2003. 335 с.
159. Г.В., Картвелишвили Н.А., Любимцев Я.К. Гидравлический удар и уравнивательные резервуары. -М.: Наука. 1968
160. Смирнов Л.В., Данилова Н.В. Основы прикладной аналитической гидромеханики напорного течения несжимаемой жидкости: Учебное пособие, Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет. 2009. – 65 с.
161. Жуковский Н.Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. Труды IV Русского водопроводного съезда, 1899.
162. Чугаев Р.Р. Гидравлика. –Л.: Энергоиздат. 1982
163. Яскеляин А.В. Исследование гидравлического удара в жидкости при колебаниях трубопровода //Проблемы прочности и пластичности. Межвузовский сб. Н.Новгород. Изд-во Нижегород.ун-та. 2008. Вып.70. С.62-70.
164. Магомедов К.М., Холодов А.С. О построении разностных схем уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений// ЖВМиМФ.1969.Т.9, №2, с.373-386
165. Massoud M.F. On the coefficient matrix of a cross section of a vibrating curved and twisted nonprismatic space thin beam.- Int . J. of Mechanical Sciences, 1970, vol.12, N4, p.327-340.
166. Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Уравнения малых колебаний пространственного трубопровода с текущей жидкостью. - В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности, вып.7: Всесоюзн. межвуз. сборник. / Горьк. ун-т. Горький, 1977, с.77-84.
167. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. - М.: Машиностроение, 1970.- 734 с.
168. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок./ Госатомэнергонадзор СССР. -М.: Энергоатомиздат, 1989.- 525 с.
169. Руководящий технический материал. Расчет атомных электростанций на прочность. РТМ 108.020.01 - 75.
170. Нормы расчета на прочность трубопроводов пара и горячей воды. РД 10-249-98.

171. Программный комплекс RANT. Программа расчета трубопроводов на статическую прочность, вибропрочность и сейсмические воздействия. Регистр. номер ПС в ЦОЭП при РНЦ КИ №496 от 10.11.2002 г. Регистр. номер паспорта аттестации ПС №155 от 28.03.2003 г.