

На правах рукописи

Куликов Анатолий Николаевич

**НЕКОТОРЫЕ БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ**

Специальность 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ярославль – 2017

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений математического факультета ФГБОУ ВО "Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова".

Официальные оппоненты :

Васильев Владимир Борисович

доктор физ.-мат. наук, доцент,

ФГАОУ ВО "Белгородский государственный национальный исследовательский университет" ,

профессор кафедры дифференциальных уравнений института инженерных технологий и естественных наук

Вельмисов Петр Александрович

доктор физ.-мат. наук, профессор,

ФГБОУ ВО "Ульяновский государственный технический университет" ,

заведующий кафедрой "Высшая математика"

Соболев Владимир Андреевич

доктор физ.-мат. наук, профессор,

ФГАОУ ВО "Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева" ,

заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории управления

Ведущая организация: ФГБОУ ВО "Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова"

Защита состоится " " 2017 г. в ч. на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского" по адресу 603950, г. Нижний-Новгород, пр. Гагарина, д. 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО "Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского" по адресу: 603950, г. Нижний-Новгород, пр. Гагарина, д. 23

и на официальном сайте организации: <https://diss.unn.ru/files/2017/683/diss-Kulikov-683.pdf>

Автореферат разослан " " 2017 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.166.20

канд. физ.-мат. наук, доцент

Кротов Н.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В диссертации рассмотрен ряд бифуркационных задач для динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (пространством начальных условий): нелинейных абстрактных эволюционных уравнений в гильбертовом пространстве, эволюционных уравнений с частными производными.

Изученные в диссертации задачи имеют актуальные приложения. Например, бифуркационные задачи из первой главы диссертации для достаточно широкого класса нелинейных абстрактных дифференциальных уравнений имеют, в первую очередь, приложения в теории упругой устойчивости. Этот класс дифференциальных уравнений, разрешимость задачи Коши которых была изучена в работах И. Сегала, С.Я. Якубова и др., включает в себя широкий ряд нелинейных эволюционных краевых задач для дифференциальных уравнений, описывающих колебания пластин в сверхзвуковом потоке газа.

Анализ явления флаттера крыла в потоке газа или жидкости был предложен М.В. Келдышем и М.А. Лаврентьевым, Т. Теодорсеном и во многом послужил толчком к развитию теории несамосопряженных дифференциальных операторов. Во второй половине 20 века возник интерес к изучению колебаний пластин в сверхзвуковом потоке газа (панельный флаттер). Постановку многих таких задач можно найти в монографии В.В. Болотина¹. В ней отмечены причины, по которым анализ таких задач актуален в нелинейной постановке. При их анализе следует различать два случая. В первом из них предполагается, что коэффициент демпфирования - это величина порядка единицы. Во втором случае его считают малой величиной, интерпретируют как малый параметр.

С математической точки зрения первый вариант задачи приводит к необходимости распространения бифуркационной теоремы Андронова-Хопфа на соответствующий класс нелинейных эволюционных уравнений (см. работы Ю.С. Колесова, А.Н. Куликова, Дж. Марсдена, Ф. Холмса).

К иным бифуркационным задачам приводит второй вариант задачи о нелинейном флаттере. Случай малого демпфирования не является исключительным и достаточно типичен. Его актуальность отмечалась в ряде работ В.В. Болотина. Второй вариант постановки задачи приводит к необходимости анализа краевых задач для нелинейных эволюционных уравнений с частными производными в ситуации, когда их линеаризованный вариант при равном нулю коэффициенте демпфирования имеет счетный набор собственных частот колебаний, среди которых могут быть резонансные. Три из возможных и естественных бифуркационных задач рассмотрены в диссертации.

¹Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматлит. 1961. 340 с.

К математическому анализу флаттерных систем обращались многие математики и механики. В большинстве работ изучались конечномерные аналоги соответствующих краевых задач (см. работы В.В. Болотина, В.В. Веденеева, И.А. Кийко, А.Ю. Колесова, А.Н. Куликова, А.Д. Морозова, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розова и др.). Иные, отличные от диссертационной работы, математические аспекты флаттерной тематики изучались в работах П.А. Вельмисова, Б.В. Логинова, Л. де Монвеля, И.Д. Чуешова.

В рамках темы диссертационной работы были затронуты и другие актуальные вопросы теории колебаний нелинейных систем с распределенными параметрами. Были предложены краевые задачи для нелинейных эволюционных уравнений с частными производными, в которых может быть реализован известный сценарий Ландау-Хопфа-Селла перехода к турбулентности. Один из таких примеров относится к теории упругой устойчивости. Актуальность построения такого сорта примеров обсуждалась во многих работах (см., например, обзорную статью ²).

К числу наиболее более известных уравнений математической физики можно отнести такие уравнения как уравнение Гинзбурга-Ландау (УГЛ), уравнение Курамото-Сивашинского (УКС), а также их различные модификации и обобщения. Так, например, некоторые из вариантов УКС используют при математическом моделировании процесса формирования неоднородного (волнового) рельефа на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием ионной бомбардировки, т.е. для изучения технологического процесса, который используется в современной наноэлектронике. Рассмотренные в диссертации версии УГЛ имеют приложения во многих разделах физики (нелинейной оптике, гидродинамике и др.). В диссертации рассмотрены версии этих уравнений, которые во многих случаях более естественны для приложений. Например, когда неизвестная функция зависит от времени и более чем одной пространственной переменной. Естественно, что такие версии УГЛ и УКС часто приводят к новым бифуркационным задачам теории бесконечномерных динамических систем, для которых характерны ситуации с высокой коразмерностью, вырожденностью, кратностью собственных решений.

Их анализ предполагает развитие методов анализа динамических систем, алгоритмической их части. Во многих случаях удачно выбранный алгоритм – это существенная часть при бифуркационном анализе бесконечномерных динамических систем. Актуальность развития алгоритмической части особенно выпукло проявляет себя в приложениях.

Подчеркнем, что изучению динамики решений УГЛ и УКС уделялось и продолжалось уделять большое внимание. Достаточно вспомнить работы А.В. Гапонова-Грехова,

²Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А. Математические аспекты развития турбулентности по Ландау // УМН. 2008. Т. 63. В.2. С. 21-81.

Т.С. Ахромеевой, С.П. Курдюмова, Г.Г. Малинецкого, А.А. Самарского и др., в которых исследовались конечномерные приближения УГЛ, работы Р. Темама с соавторами, где был изучен вопрос о существовании глобальных аттракторов в двух краевых задачах для традиционной версии УКС. Бифуркационные задачи для УГЛ изучались в работах Ю.С. Колесова, А.Ю. Колесова, С.Д. Глызина, А.Н. Куликова, Н.Х. Розова. Актуальность изучения УГЛ проявляет себя и в том, что анализ нелинейных параболических уравнений с малой диффузией может быть сведен к изучению УГЛ (см., например, работы А.Б. Васильевой, С.А. Кащенко, Ю.С. Колесова, А.Ю. Колесова, Н.Х. Розова).

Цель исследования. Цель работы состояла в развитии методов анализа локальных бифуркаций в динамических системах с бесконечномерным пространством начальных условий, теории нелинейных колебаний систем с распределенными параметрами, которые, в частности, позволили бы изучить новые содержательные задачи из теории упругой устойчивости (аэроупругости), математической физики. Такие методы предполагают единый подход при анализе локальной динамики, который позволяет исследовать одновременно следующий комплекс вопросов: о существовании бифурцирующих инвариантных (интегральных) многообразий, устойчивость в смысле нормы фазового пространства им принадлежащих решений, получать асимптотические формулы для таких решений.

Научная новизна. Основные результаты. Все результаты, представленные в диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно. Эти результаты в тексте диссертационной работы приведены в виде теорем и состоят в следующем.

1. Для широкого класса нелинейных эволюционных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве получены три теоремы о существовании, устойчивости и асимптотическом представлении малых по амплитуде периодических решений в ситуации характерной для бесконечномерных динамических систем, ряда задач теории упругой устойчивости. Основные особенности условий теории состоят в том, что спектр устойчивости линеаризованного в нуле дифференциального уравнения состоит из счетного набора собственных значений. При равном нулю коэффициенте демпфирования весь их счетный набор находится на мнимой оси ("бесконечномерное вырождение") и среди них есть две пары, находящиеся в резонансе. В основной теореме из §1.1 реализуется резонанс 1:1, в §1.2 – резонанс 1:2 и, наконец, в §1.3 – резонанс 1:3.

Приведены примеры, анализ которых иллюстрирует содержательность выводов из результатов трех основных теорем для задач о нелинейном панельном флаттере.

2. Предложены три краевые задачи, в которых реализуется сценарий Ландау-Хопфа-Селла перехода к турбулентности, т.е. доказано наличие каскада бифуркаций инвариантных торов, размерность которых растет при возрастании (убывании) управляющего

параметра. При этом притягивающим является тор наибольшей размерности.

3. Рассмотрена периодическая краевая задача для слабодиссипативной версии УГЛ, для которой характерно наличие счетного набора решений типа плоских бегущих волн. Изучен вопрос об их устойчивости, а также вопрос о локальных бифуркациях при смене ими устойчивости. Данная задача рассмотрена в случае произвольного числа пространственных переменных. Полученные результаты позволяют выявить зависимость характера бифуркаций от числа пространственных переменных. В частности, показано, что докритические бифуркации инвариантных торов могут реализоваться, если число пространственных переменных больше двух.

Получен ряд результатов, относящихся к задачам о локальных бифуркациях бегущих волн для естественных с точки зрения физических приложений модификаций УГЛ.

4. Рассмотрены три краевые задачи для обобщенного УКС. В том числе рассмотрен вариант такого уравнения, когда неизвестная функция зависит от двух пространственных переменных. Доказаны теоремы о бифуркациях инвариантных многообразий при смене устойчивости пространственно однородным состоянием равновесия. Дан ответ об устойчивости пространственно неоднородных решений, принадлежащих инвариантным многообразиям. Получены асимптотические формулы для таких решений.

Методы исследований. В диссертационной работе были использованы такие методы качественной теории дифференциальных уравнений как

- метод интегральных (инвариантных) многообразий;
- аппарат теории нормальных форм;
- одна из версий метода Крылова-Боголюбова.

В диссертации эти методы развиты и применены к динамическим системам с бесконечномерным фазовым пространством.

Анализ бифуркационных задач опирался также на

- асимптотические методы анализа;
- некоторые разделы функционального анализа (например, аналитическую теорию полугрупп, теорию возмущений линейных операторов);
- некоторые разделы теории дифференциальных операторов.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. В ней решены новые задачи для динамических систем с распределенными параметрами. Их анализ предполагал развитие метода качественной теории таких систем и, в частности, его алгоритмической части. Предложенные алгоритмы исследований рассмотренных бифуркационных задач позволяют получать ответы о характере бифуркаций в удобной для использования форме. Развита методика анализа бесконечномерных ди-

намических систем может и уже использовалась для иных классов дифференциальных уравнений, отличных от рассмотренных в диссертации. На базе применения подходов диссертационной работы были рассмотрены задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными, которые имеют приложения в нанoeлектронике, физике пограничных явлений (см. работы А.Н. Куликова, Д.А. Куликова, А.М. Ковалевой, А.В. Метлицкой, А.С. Рудого). Результаты анализа четвертой главы нашли свое применение в работах по моделированию некоторых технологических процессов. Часть таких результатов нашла свое отражение в коллективной монографии Ярославского филиала физико-технологического института РАН ³.

Результаты первой главы с математической точки зрения подтверждают гипотезу В.В. Болотина о том, что задача о нелинейном панельном флаттере принципиально нелинейная и явление флаттера может возникнуть при скоростях меньших "скорости флаттера", определяемой из линейного анализа соответствующих краевых задач.

Положения, выносимые на защиту.

1. Метод и результаты анализа бифуркационных задач для абстрактных нелинейных гиперболических уравнений и их приложений. Теоремы первой главы о существовании, устойчивости периодических решений. Алгоритм построения асимптотических формул для этих решений.

2. Метод и результаты анализа нелинейных эволюционных краевых задач, в которых возможна реализация сценария Ландау-Хопфа-Селла перехода к турбулентности. Теоремы второй главы о реализации каскада бифуркаций инвариантных торов, возрастающей размерности. Алгоритм построения асимптотических формул для решений, формирующих инвариантные торы.

3. Методы, результаты анализа окрестности бегущих волн у ряда версий УГЛ (обобщенного УГЛ). В частности, для слабодиссипативной версии УГЛ с произвольным числом пространственных переменных. Алгоритм сведения задачи к конечномерной, построения асимптотических формул для решений, принадлежащих инвариантным многообразиям.

4. Метод и результаты исследований окрестности однородных состояний равновесия в краевых задачах для УКС. Теоремы о бифуркациях интегральных (инвариантных) многообразий, включающие алгоритмы построения асимптотических формул для решений, формирующих интегральные многообразия.

Апробация работы. В разные годы основные результаты диссертации были доложены на международных конференциях: "Дифференциальные уравнения и тополо-

³Кремниевые наноструктуры. Физика. Технология. Моделирование. Ярославль. Изд-во "Индиго". 2014. 559 с.

гия"(Москва, 2008); "Современные проблемы вычислительной математики и математической физики"(Москва, 2009); "Современные проблемы математики и механики"(Москва, 2009); "Differential equations and related topics"(Москва, 2011); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2016); "Нелинейная динамика и ее приложения"(Ярославль, 2013); "Нелинейные методы в физике и механике"(Ярославль, 2015); "Третьи Курдюмовские чтения: синергетика в естественных науках"(Тверь, 2007); "Дифференциальные уравнения и оптимальное управление"(Москва, 2012); "Dynamical system modeling and stability investigation"(Киев, 2011); "Моделирование, управление и устойчивость MCS-2012"(Севастополь, 2012); "Метод функций Ляпунова и ее приложения MFL-2014"(Севастополь, 2014); "Bogolubov readings DIFF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications"(Севастополь, 2013); "Теория оболочек и мембран в механике и биологии: от микро- до наноразмерных структур"(Беларусь, 2013); "XII Белорусская математическая конференция"(Минск, 2016); "Second international conference new trends in the applications of differential equations in sciences"(София, 2015); "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и аналитических функций"(Казань, 2014); "Теория управления и математическое моделирование"(Ижевск, 2015); Sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (Санкт-Петербург, 2008); "Mathematical modelling and analysis"(Тарту, 2016); "Проблемы математической физики и математическое моделирование"(Москва, 2016,2017); "Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения VII"(Ростов-на-Дону, 2017).

На международных и российских математических школах и семинарах: "Хаотические автоколебания и образование структур"(Саратов, 2007); Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна (Воронеж, 2010, 2012); "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (X семинар им. Е.С. Пятницкого)"(Москва, 2008); "Колмогоровские чтения"(Ярославль, 2010,2012,2013); Крымская осенняя математическая школа (Ласпи-Балтиманн, 2012); Workshop in Nonlinear PDEs (Брюссель, 2015).

На Всероссийских конференциях и съездах: Научная сессия "НИЯУ МИФИ"(Москва,2014,2015); Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Нижний–Новгород, 2006,2011; Казань, 2015); "Нелинейные колебания механических систем"(Нижний – Новгород, 2005, 2008, 2016); На конференциях по качественной теории дифференциальных уравнений (Рязань, 2001,2006,2016); "Математическое моделирование и краевые задачи"(Самара, 2011).

Результаты докладывались на научном семинаре "Нелинейная динамика и синергетика" (руководители семинара: профессор С.А. Каценко, профессор С.Д. Глызин), на

научном семинаре в МГУ им. М.В. Ломоносова "Нелинейные динамические системы и процессы управления" (руководители семинара: академик РАН С.В. Емельянов, академик РАН С.К. Коровин), на нижегородском научном семинаре "Математическое моделирование динамики систем процессов управления" (руководители семинара: профессор Д.В. Баландин, профессор Н.В. Дерендяев, профессор Г.В. Осипов).

Публикации. Результаты диссертации полностью опубликованы. Список основных публикаций приведен в конце автореферата и насчитывает 51 работу (без учета публикаций в материалах конференций и тезисов докладов). Из них 37 работ опубликованы в рецензируемых изданиях, входящих в список ВАК, базы Web of Sciences, Scopus.

Ни один из результатов совместных работ с Ю.С. Колесовым, А.Ю. Колесовым, Н.Х. Розовым не вошел в текст диссертации. Эти работы внесены в список работ по той причине, что часть результатов из них была использована при доказательстве утверждений из диссертационной работы. Остальные совместные публикации были, как правило, выполнены с аспирантами и студентами кафедры дифференциальных уравнений ЯрГУ.

Объем и структура работы. Работа содержит 299 страниц печатного текста. Стоит из введения, пяти глав с результатами работы, заключения и списка литературы. Он содержит 178 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первых трех параграфах главы 1 рассмотрен достаточно широкий класс нелинейных автономных дифференциальных уравнений второго порядка в действительном сепарабельном гильбертовом пространстве H . В этом пространстве будут изучаться некоторые бифуркационные задачи для уравнения

$$\ddot{u} + g_0 \dot{u} + (A^2 + cB)u = f(u, \dot{u}, c), \quad (1)$$

зависящего от параметра $c \in [0, \infty)$, $g_0 \in R$. Операторы, входящие в правую и левую части уравнения (1), удовлетворяют ряду ограничений, которые индуцированы видом уравнений теории упругой устойчивости. Эти ограничения сведены в серию предположений.

Предположение 1. Будем считать, что A – замкнутый линейный оператор, область определения которого H_A плотна в H , а линейный оператор B подчинен A . Дополнительно, будем предполагать, что линейный оператор A имеет своим обратным вполне непрерывный (компактный) оператор A^{-1} .

Предположение 2. Линейный оператор iA – производящий оператор группы класса (C_0) в комплексном расширении $H(H_k)$.

Через H_A обозначено подпространство H , состоящее из тех $u \in H$, для которых определена норма $\|u\|_A = \|Au\|$. Аналогичным образом определено подпространство H_{A^2} .

Предположение 3. Нелинейный оператор $f(u, v, c)$ действует из шара $S(r)$ пространства $H_A \times H_A \times R$ в H и имеет сильно непрерывную производную Фреше $f'_u(u, v, c)$, сильно непрерывную H – расширенную производную Фреше $f'_v(u, v, c)$. Эти производные удовлетворяют условию Липшица в шаре $S(r)$. Считаем, что нелинейный оператор $f(u, v, c)$ гладко зависит от параметра c в метрике пространства H .

Предположение 4. Нелинейный оператор $f(u, v, c)$ имеет по совокупности переменных u, v в нуле порядок малости выше первого. В частности, при всех рассматриваемых c справедливы равенства $f(u, v, c)|_{u=0, v=0} = f_u(u, v, c)|_{u=0, v=0} = f_v(u, v, c)|_{u=0, v=0} = 0$.

Первые три предположения гарантируют локальную разрешимость задачи Коши, если для уравнения

$$u(0) = u_0 \in H_{A^2}, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0 \in H_A. \quad (2)$$

Четвертое предположение дополняет первые три. Пусть $\|u_0\|_{A^2} \leq \sigma$, $\|\dot{u}_0\|_A \leq \sigma$, то задача Коши (1), (2) имеет единственное решение

$$u(t) \in C^2((-T_\sigma, T_\sigma), H) \cap C^1((-T_\sigma, T_\sigma), H_A) \cap C((-T_\sigma, T_\sigma), H_{A^2}),$$

где $T_\sigma \rightarrow \infty$, если $\sigma \rightarrow 0$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений. Метод последовательных приближений применялся к интегральному уравнению, заменяющему задачу Коши (разрешимость задачи Коши для данного класса дифференциальных уравнений была изучена в работах И. Сегала ⁴ и С.Я. Якубова ⁵).

Предположение 5. Будем считать, что $f(u, v, c) = f_2(u, v, c) + f_3(u, v, c)$, где $f_2(u, v, c)$, $f_3(u, v, c)$ – билинейный и трилинейный операторы по совокупности переменных u, v при всех рассматриваемых c . Будем предполагать, что они зависят от c аналитически в метрике пространства H .

В большинстве приложений $f_j(u, v, c) = \sum_{m=0}^{m_0} f_{jm}(u, v) c^m$, $j = 1, 2$. Очень часто $f_{jm} \equiv 0$, $m = 1, 2, \dots$, то есть они от c не зависят. Наконец, $0 < g_0 < 1$.

Выше приведены общие предположения для всех трех первых параграфов данной главы. В каждом из них приведены дополнительные предположения, характерные для данного параграфа и индуцированные рассматриваемой там бифуркационной задачей.

В §1.1 будем предполагать, что линейный оператор $A^2 + cB$ при $c = c_1$ ($A_0 = A^2 + c_1 B$) имеет положительные простые собственные числа $\sigma_2^2 < \sigma_3^2 < \sigma_4^2 < \dots$. Им соответствуют собственные элементы e_2, e_3 . Собственное число σ_1^2 двукратно и $0 < \sigma_1^2 < \sigma_2^2$. Ему соответствует собственный элемент e_1 и присоединенный e_0 : $A_0 e_1 = \sigma_1^2 e_1$, $A_0 e_0 = \sigma_1^2 e_0 + e_1$. Через

⁴Segal I. Nonlinear semigroups // Ann.of Mathematics. 1963. V.78. №2. P.339-364.

⁵Якубов С.Я. Разрешимость задачи Коши для абстрактных квазилинейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения // Тр. ММО. 1970. Т. 23. С. 37-60.

A_0^* обозначим сопряженный к A_0 линейный оператор, а через h_j его собственные элементы, отвечающие $\sigma_j^2 (j = 2, 3, \dots)$. При $j = 1$ выполнены равенства $A_0^* h_0 = \sigma_1^2 h_0$, $A_0^* h_1 = \sigma_1^2 h_1 + h_0$. Будем также предполагать, что системы элементов $\{e_0, e_1, e_2, \dots\}$, $\{h_0, h_1, h_2, \dots\}$ формируют биортогональные базисы (базисы Рисса-Бари). В частности, $(e_j, h_k) = \delta_{kj}$, где δ_{kj} – символ Кронекера. Дополнительно считаем, что $\sigma_k \neq 2\sigma_1$, $\sigma_m \neq 3\sigma_1$, $|\sigma_k - \sigma_m \pm \sigma_1| > \sigma_0$, где $k, m = 2, 3, \dots$, а σ_0 – положительная постоянная.

В §1.1 будем считать, что $c = c_1 + a\varepsilon^2$, $g_0 = 2\varepsilon g$, $a, g \in R$, $g > 0$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Приведенные выше предположения и нормировки параметров c и g_0 позволили переписать уравнение (1) в удобном виде для анализа

$$\ddot{u} + 2g\varepsilon\dot{u} + A_0 u + \varepsilon^2 a B u = F_2(u, \dot{u}) + F_3(u, \dot{u}) + \varepsilon^2 (B_2(u, \dot{u}, \varepsilon^2) + B_3(u, \dot{u}, \varepsilon^2)). \quad (3)$$

Линейный оператор B подчинен линейному оператору A и, следовательно, A_0 . Наконец,

$$\begin{aligned} F_2(u, \dot{u}) &= f_2(u, \dot{u}, c_1), \quad F_3(u, \dot{u}) = f_3(u, \dot{u}, c_1), \\ f_2(u, \dot{u}, c) &= F_2(u, \dot{u}) + \varepsilon^2 B_2(u, \dot{u}, \varepsilon^2), \quad f_3(u, \dot{u}, c) = F_3(u, \dot{u}) + \varepsilon^2 B_3(u, \dot{u}, \varepsilon^2). \end{aligned}$$

Через $B_2(u, \dot{u}, \varepsilon^2)$, $B_3(u, \dot{u}, \varepsilon^2)$ обозначены билинейный и трилинейный операторы, которые гладко зависят от ε^2 . Фазовым пространством решений уравнения (3) будем называть пространство начальных условий (2), при которых задача Коши локально разрешима.

Приведем в сокращенной форме основной результат §1.1. В §1.1 приведен алгоритм, который позволяет вопрос о "приближенных" периодических решениях уравнения (3) свести к укороченной нормальной форме

$$z_1'' + 2gz_1' + (g^2 + a_1)z_1 - (\gamma_5 + i\gamma_6)z_1|z_1|^2 = 0. \quad (4)$$

Здесь $z_1 = z_1(s)$ – комплекснозначная функция, $s = \varepsilon t$ – "медленное" время, коэффициенты $a_1, \gamma_5, \gamma_6 \in R$ и определяются в процессе реализации алгоритма построения уравнения (4) в п.1.2 из §1.1. Уравнение (4) имеет периодические решения вида $z_1(s) = \eta \exp(i\omega s)$, $\eta > 0$, $\omega \in R$, где его параметры удовлетворяют системе алгебраических уравнений $-\omega^2 + b - \gamma_5\eta^2 = 0$, $2g\omega - \gamma_6\eta^2 = 0$, $b = g^2 + a_1$. Если $\gamma_5 \neq 0, \gamma_6 \neq 0$, тогда для определения положительных η получаем биквадратное уравнение $P_1(\eta^2) = 0$, $P_1(\xi) = \gamma_7\xi^2 + \gamma_5\xi - b$, $\omega = \eta^2\gamma_6/(2g)$, где $\gamma_7 = (\gamma_6/(2g))^2$, $\xi = \eta^2$. Пусть квадратное уравнение $P_1(\xi) = 0$ имеет простой положительный корень $\xi = \xi_*$. Соответствующее ему периодическое решение обозначим $z_{1*}(s)$. Положим $\beta = P_1'(\xi_*)$. Ясно, что $\beta \neq 0$.

Теорема 1.1. Пусть $\beta < 0$. Тогда периодическое решение $z_{1*}(s)$ устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво). Если $\beta > 0$, то оно неустойчиво.

Если $\gamma_6 = 0$, то $\omega = 0$ и η находим как решение уравнения $P_2(\eta^2) \equiv \gamma_5\eta^2 - b = 0$.

Теорема 1.2. Пусть $b\gamma_5 > 0$ ($\gamma_6 = 0$). Тогда у уравнения (4) существует одномерное инвариантное многообразие (окружность), состоящее из состояний равновесия

$$z_{1*} = \eta_* \exp(ih), \quad \eta_* = b/\gamma_5, \quad h \in R.$$

Это многообразие устойчиво, если $b < 0$ и неустойчиво при $b > 0$.

Основной результат §1.1 сформулирован ниже.

Теорема 1.3. Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ периодическому решению $z_{1*}(s)$ уравнения (4), отвечающему простому положительному корню η_* уравнения $P_1(\eta^2) = 0$, соответствует периодическое решение уравнения (3) с наследованием устойчивости. Для него справедливо асимптотическое представление

$$\begin{aligned} u(t, \varepsilon) = & \varepsilon \eta_* [\exp(i(\sigma_1 + \varepsilon \omega_*)t) + \exp(-i(\sigma_1 + \varepsilon \omega_*)t)] e_1 + \\ & + \varepsilon^2 [-2i\eta_* \sigma_1 (g + i\omega_*) \exp(i(\sigma_1 + \varepsilon \omega_*)t) + 2i\eta_* \sigma_1 (g - i\omega_*) \exp(-i(\sigma_1 + \varepsilon \omega_*)t)] e_0 + \\ & + \varepsilon^2 \eta_*^2 [p_2 \exp(2i(\sigma_1 + \omega_* \varepsilon)t) + p_0 + \bar{p}_2 \exp(-2i(\sigma_1 + \omega_* \varepsilon)t)] + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Элементы $p_2, \bar{p}_2, p_0$ были определены в процессе реализации алгоритма построения нормальной формы ($\omega_* = \eta_*^2 \gamma_6 / 2g$).

Эта теорема сформулирована для общего случая $\gamma_6 \neq 0$. Если $\gamma_6 = 0$, то фразу "периодическому решению" заменить на "состоянию равновесия" ($\omega_* = 0$). Уравнение $P_1(\eta^2) = 0$ следует заменить на уравнение $P_2(\eta^2) = 0$. Уравнение $P_2(\eta^2) = 0$ может иметь только простой положительный корень, если, конечно, таковой существует.

Отметим, что в ситуации общего положения ($\gamma_5 \gamma_6 \neq 0$), если уравнение $P_1(\eta^2)$ имеет только один положительный корень, то соответствующее ему периодическое решение неустойчиво. Если уравнение $P_1(\eta^2)$ имеет два положительных корня, то им, конечно, соответствуют два периодических решения основного уравнения. Одно из которых устойчиво, а второе неустойчиво. Ситуация, когда в окрестности нулевого решения уравнения (3) существует неустойчивое периодическое решение достаточно типична. Прикладные аспекты этого обстоятельства достаточно подробно обсуждены во введении к первой главе, а также в §1.4. В частности, наличие неустойчивого периодического решения в достаточно малой окрестности нулевого решения может привести к возникновению незатухающих колебаний при скоростях близких к c_1 , то есть скоростях потока, при которых нулевое решение остается еще устойчивым. Возможна ситуация, когда кроме неустойчивого периодического решения существует и устойчивое. Тогда возможны незатухающие колебания, близкие к гармоническим с частотой близкой к σ_1 . В таком случае разрушение пластинки носит "усталостный" характер. Более подробно об этом речь будет идти в §1.4. При этом скорость $c = c_1$ ($c \approx c_1$) меньше скорости флаттера c_0 , которая определяется из анализа соответствующих линейных краевых задач.

В §1.2 рассматривается дифференциальное уравнение (1) при иных предположениях, которые относятся к линейному оператору $A^2 + cB$ и приведены ниже.

Предположение 2.1. *Линейный оператор $A^2 + cB$ при $c = c_2$ имеет положительные и простые собственные значения $\sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2 < \dots$. При этом, $\sigma_2 = 2\sigma_1$, $\sigma_k \pm \sigma_1 \neq \sigma_j$, $\sigma_k \pm \sigma_2 \neq \sigma_j$, $k, j = 3, 4, 5, \dots$ и отсутствуют иные младшие резонансы порядка 2.*

Положим $g_0 = 2\varepsilon g$ ($g > 0$), $c = c_2 + a\varepsilon$, $a \in R$ и рассмотрим линейный оператор

$$A_2(\varepsilon) = A^2 + (c_2 + a\varepsilon)B, a, \varepsilon \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Пусть $A_2 = A_2(0)$, а через A_2^* обозначим сопряженный ему линейный оператор. Через e_k будем обозначать собственные элементы линейного оператора A_2 , а через h_k — собственные элементы A_2^* . Будем считать, что $(e_k, h_j) = \delta_{kj}$ — символ Кронекера.

Предположение 2.3. *Наконец будем считать, что система собственных элементов $\{e_j\}$, как и система $\{h_j\}$, образует базис Рисса-Бари.*

Здесь приведены те предположения, которые отличаются от предположений §1.1.

В рамках §1.2 будем изучать уравнение (1), записанное следующим образом

$$\ddot{u} + 2\varepsilon g \dot{u} + A_2 u + a\varepsilon B u = F_2(u, \dot{u}) + F_3(u, \dot{u}) + \varepsilon G_2(u, \dot{u}, \varepsilon) + \varepsilon G_3(u, \dot{u}, \varepsilon). \quad (5)$$

Здесь $F_2(u, \dot{u}) = f_2(u, \dot{u}, c_2)$, $F_3(u, \dot{u}) = f_3(u, \dot{u}, c_2)$, а G_2, G_3 билинейный и трилинейный операторы из §1.1, которые гладко зависят от ε .

В первой части §1.2 предложен алгоритм, который позволяет свести вопрос о существовании и устойчивости периодических решений с периодом близким к $2\pi/\sigma_1$ к анализу системы из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для комплекснозначных функций $y_1(t), y_2(t)$ (нормальной форме)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= i\sigma_1 y_1 + \varepsilon[(-g + ia_1)y_1 + (d_1 + ic_1)y_2 \bar{y}_1], \\ \dot{y}_2 &= 2i\sigma_1 y_2 + \varepsilon[(-g + ia_2)y_2 + (d_2 + ic_2)y_1^2]. \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты $a_1, d_1, c_1, a_2, d_2, c_2$ определяются в процессе реализации алгоритма. В свою очередь, систему дифференциальных уравнений (6) можно и целесообразно переписать в тригонометрической форме. Замены $y_1 = \gamma_1 \rho_1 \exp(i\psi_1 + i\delta_1)$, $y_2 = \gamma_2 \rho_2 \exp(i\psi_2 + i\delta_2)$, $\Theta(t) = \varphi_2(t) - 2\varphi_1(t)$ позволили свести вопрос о существовании периодических решений у системы (6) к вопросу о существовании и устойчивости нетривиальных состояний равновесия $\rho(t) \geq 0, \rho_2(t) \geq 0, \Theta(t) \in R$ для следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \varepsilon[-g\rho_1 + \rho_1\rho_2 \cos(\Theta + \Delta)], \quad \dot{\rho}_2 = \varepsilon[-g\rho_2 + \rho_1^2 \cos(\Theta - \Delta)], \\ \dot{\Theta} &= \varepsilon[a_0 - \frac{\rho_1^2}{\rho_2} \sin(\Theta - \Delta) - 2\rho_2 \sin(\Theta + \Delta)], \end{aligned} \quad (7)$$

где $a_0 = a_2 - 2a_1, \Delta \in R$. Величина Δ зависит от аргументов комплексных чисел $d_1 + ic_1$ и $d_2 + ic_2$. Основные результаты §1.2 сформулированы в лемме 2.1 и теореме 2.1.

Лемма 2.1. Пусть $\Delta \neq \pi/2$. Система дифференциальных уравнений (7) имеет одно седловое состояние равновесия S . Ему соответствует цикл системы дифференциальных уравнений (6). При $\Delta = \pi/2$ состояния равновесия отсутствуют.

Теорема 2.1. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нелинейное дифференциальное уравнение (5) имеет неустойчивое (седловое) периодическое решение. Для него справедлива асимптотическая формула $u(t, \varepsilon) = \varepsilon(y_1 + \bar{y}_1)e_1 + \varepsilon(y_2 + \bar{y}_2)e_2 + o(\varepsilon)$.

В основном тексте работы асимптотическая формула уточнена. Здесь $y_1(t), y_2(t)$ периодическое решение системы дифференциальных уравнений (6).

В приложениях к задачам о нелинейном флаттере величина $c_2 < c_1 < c_0$, где c_0 – скорость флаттера. Как и в §1.1 это означает, что жесткое возбуждение колебаний возможно при докритических значениях скорости потока газа.

Перейдем к изложению основного результата §1.3. Будем считать, что при $c = c_3$ линейный оператор $A_3 = A + c_3B$ имеет простые собственные числа $0 < \sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2 < \dots < \sigma_n^2 < \dots$, а также, что $\sigma_2 = 3\sigma_1$, но $\sigma_k : \sigma_m \neq 1:3$. Кроме этого, $\sigma_k \neq \sigma_m \pm 2\sigma_1, \sigma_k \neq \sigma_m \pm 2\sigma_2$. Наконец, $f(u, c) = F_3(u, u, u, c)$, где $F_3(u_1, u_2, u_3, c)$ – однородный трилинейный функционал (линейный по аргументам u_1, u_2, u_3), который действует при любом c из H_A в H (см. §§1.1, 1.2), а также гладко зависит от параметра c . Положим $f_3(u) = F_3(u, u, u, c_3)$. Пусть e_j собственные элементы линейного оператора A_3 , отвечающие собственным числам $\sigma_j^2, j = 1, 2, 3, \dots$. Через h_j обозначим собственные элементы сопряженного оператора A_3^* , соответствующие тем же собственным числам $\sigma_j^2, j = 1, 2, 3, \dots$. Будем предполагать, что $\{e_j\}$, как и $\{h_j\}$, образуют базис Рисса-Бари и $(e_j, h_k) = \delta_{kj}$.

Далее будем изучать уравнение (1) при $g_0 = 2\varepsilon g$, и $c = c_3 + a\varepsilon$, где $g, a \in R, g > 0, \varepsilon$ – малый неотрицательный параметр. Итак, далее рассмотрим уравнение вида

$$\ddot{u} + 2g\varepsilon\dot{u} + (A_3 + a\varepsilon B)u = f_3(u) + \varepsilon g_3(u, \varepsilon), \quad (8)$$

где $g_3(u, \varepsilon) = G_3(u, u, u, \varepsilon)$ – также однородный трилинейный оператор, который гладко зависит от ε .

В §1.3 использована аналогичная схема исследований как и в предыдущих параграфах (§§1.1-1.2). Вопрос о существовании периодических решений уравнения (8) с периодом близким к $2\pi/\sigma_1$ приводит сначала к анализу вспомогательной системы обыкновенных уравнений, которую здесь приведем в окончательной форме и только для медленных пе-

ременных (амплитуд и разности фаз)

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= \varepsilon g \{-\rho_1 + \gamma_0 \rho_1^2 \rho_2 \sin \Theta\}, \quad \dot{\rho}_2 = \varepsilon g \{-\rho_2 + \rho_1^3 \sin \Theta\}, \\ \dot{\Theta} &= \varepsilon g \left\{ b_0 + b_1 \rho_1^2 + b_2 \rho_2^2 + \left(\frac{\rho_1^3}{\rho_2} + 3\gamma_0 \rho_1 \rho_2 \right) \cos \Theta \right\}.\end{aligned}\quad (9)$$

Коэффициенты системы дифференциальных уравнений (9) определяются при реализации алгоритма построения нормальной формы.

В §1.3 приведены 3 леммы, в которых изучен вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия $S = (\rho_{10}, \rho_{20}, \omega)$ ($\Theta = \omega$) и показано, что, если система дифференциальных уравнений (9) имеет 2 состояния равновесия, то одно из них устойчиво, а второе неустойчиво. Если же такое состояние равновесия одно, то оно неустойчиво.

Основной результат §1.3 состоит в доказательстве теоремы, которая здесь приведена в несколько сокращенном виде.

Теорема 3.1. *Существует такая положительная постоянная ε_0 , что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ дифференциальное уравнение (8) имеет цикл C_j , соответствующий состоянию равновесия S_j вспомогательной системы дифференциальных уравнений (9). Цикл C_j орбитально асимптотически устойчив, если состояние равновесия S_j асимптотически устойчиво и C_j неустойчив, если S_j неустойчиво (седловое) состояние равновесия.*

В более детальной формулировке этой теоремы в §1.3 указана асимптотическая формула для соответствующего периодического решения. При этом главная ее часть имеет порядок $\varepsilon^{1/2}$. При обосновании результатов из §§1.1-1.3 использован метод инвариантных многообразий, аппарат теории нормальных (квазинормальных) форм для динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

В §§1.4-1.6 рассмотрены краевые задачи, которые описывают колебания пластины в сверхзвуковом потоке газа в случае цилиндрического изгиба, то есть когда функция, описывающая нормальное трансверсальное перемещение зависит только от t и x , но не зависит от y . Примеры таких краевых задач взяты из известных монографий В.В. Болотина и Дж. Гукенхаймера и Ф. Холмса ⁶. Соответствующие краевые задачи имеют в нормированном виде следующий вид

$$w_{tt} + g_0 w_t + w_{xxxx} + c w_x = F(w_t, w_x, w_{tx}, w_{xx}), \quad (10)$$

$$w(t, 0) = w_{xx}(t, 0) = w(t, 1) = w_{xx}(t, 1) = 0. \quad (11)$$

Здесь $t \geq 0, x \in [0, 1], w = w(t, x)$ - нормированное трансверсальное перемещение срединной поверхности, $c \geq 0$ - основной параметр задачи, который пропорционален скорости набегающего потока. Конкретный вид нелинейности указан в каждом из параграфов.

⁶Гукенхаймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: институт компьютерных исследований, 2002. 560с.

Как и ранее, считаем, что $0 < g_0 \ll 1$ и положим $g_0 = 2\varepsilon g$, где $g > 0, 0 < \varepsilon \ll 1$. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор $L(c)v = v^{(IV)} + cv'$, $v(0) = v''(0) = v(1) = v''(1) = 0$. Отметим, что при $c = 0$ получаем линейный дифференциальный оператор $L(0)v = v^{(IV)}$, где $v = v(x)$ – функция, удовлетворяющая краевым условиям (11). Нетрудно заметить, что такой линейный дифференциальный оператор $L(0)$ можно записать в виде $L(0)v = A^2v$, где линейный дифференциальный оператор $Av = -v''$ определен на достаточно гладких функциях $v(x)$, удовлетворяющих краевым условиям $v(0) = v(1) = 0$. Естественно, если в качестве гильбертова пространства H выбрать пространство функций $L_2(0,1)$, то линейный оператор A будет симметричным и положительно определенным. Добавим, что линейный дифференциальный оператор B ($Bv = v'$) подчинен A . Напомним, что $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^2[0,1]$, если эта функция $f(x) = W_2^2[0,1]$ и удовлетворяет краевым условиям $f(0) = f(1) = 0$. Наконец, $f(x) \in \overset{\circ}{W}_2^4[0,1]$, если $f(x) \in W_2^4[0,1]$ и $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$. При $c = 0$ все собственные значения линейного оператора $L(c)$ простые и положительные ($\lambda_n(0) = (\pi n)^4, n \in N$). В §§1.4-1.6 указан способ определения величин $c = c_1, c = c_2, c = c_3$, при которых реализуются ситуации из §§1.1-1.3. При этом данные величины определяются без использования метода Галеркина, который чаще всего применяется при анализе задач упругой устойчивости в линейной постановке. Соответствующие спектральные задачи $L(c)v = \lambda v$, $v = v(x)$, $v(0) = v(1) = v''(0) = v''(1) = 0$ сведены к анализу систем уравнений для определения соответствующих c и λ .

В §1.7 методика, основанная на использовании метода инвариантных (интегральных) многообразий, использована для анализа модельной задачи из монографии В.В. Болотина

$$w_{tt} + gw_t + aw_{xxxx} - bw_{xx} + dw + cw_x - \frac{q}{2\pi}w_{xx} \int_0^{2\pi} (w_x)^2 dx = 0, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} w(t, 0) &= w(t, 2\pi), w_x(t, 0) = w_x(t, 2\pi), \\ w_{xx}(t, 0) &= w_{xx}(t, 2\pi), w_{xxx}(t, 0) = w_{xxx}(t, 2\pi). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $w = w(t, x)$, a, g, d, q – положительные постоянные, b, c – неотрицательные постоянные. Краевая задача (12),(13) уже переписана в перенормированном виде, коэффициенты уравнения (12) пропорциональны коэффициентам, имеющим вполне конкретный физический смысл. Так, например, $w(t, x)$ – нормированный прогиб пластины, но при "цилиндрических" деформациях, $c \geq 0$ – основной параметр задачи, который пропорционален скорости потока. Без нарушения общности можно считать $a = 1$.

Рассмотрим линейную краевую задачу

$$\begin{aligned} L(c)v &= v^{(IV)} - bv'' + dv + cv' = \lambda v, v = v(x), \\ v(0) &= v(2\pi), v'(0) = v'(2\pi), v''(0) = v''(2\pi), v'''(0) = v'''(2\pi). \end{aligned} \quad (14)$$

Отметим, что краевая задача (14) имеет нетривиальные решения вида $v_n = \exp(inx)$ при $\lambda = \lambda_n(c) = \omega_n^2 + icn$, $\omega_n^2 = n^4 + bn^2 + d$. При этом очевидно, что $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \dots, \omega_n^2 = \omega_{-n}^2$. Анализ устойчивости нулевого решения краевой задачи (12),(13) в линейном приближении, естественно, сводится к изучению характеристического уравнения $\mu^2 + g\mu + \lambda(c) = 0$. При $c = 0$ имеем $\operatorname{Re} \mu < 0$. При возрастании c возможна потеря устойчивости нулевого решения линеаризованной в нуле краевой задачи (12),(13). Напомним, что минимальное $c > 0$, при котором такая ситуация может быть реализована называют критической скоростью флаттера. Понятно, что это такое минимальное c , при котором может быть реализовано равенство $\operatorname{Re} \mu = 0$. Случай $\mu = 0$ ни при каком c реализован быть не может. Последнее означает, что при некотором $c = c_{min} > 0$ имеют место равенства $\mu = \pm i\sigma$ ($\sigma > 0$). Соответствующее значение $\sigma = \sigma_n$ находится среди $\sigma_n = -cn/g$, а соответствующее значение $c > 0$ определяется из условия минимальности $c > 0$, при котором $h_n = 0$. Здесь $h_n = n^2 + d/n^2 + b - \nu^2$, $\nu^2 = c^2/g^2$, $n \in N$. Отметим сразу, что условие $h_n > 0$ при всех $n \in N$ влечет за собой неравенство $\operatorname{Re} \mu_n \leq -\gamma < 0$ при всех $n \in I$. Если же при некотором $n = p$ имеем $h_p < 0$, то существует $\mu = \mu_p$ такое, что $\operatorname{Re} \mu_p > 0$.

При анализе задачи в нелинейной постановке доказаны две теоремы. Положим $w(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_n(t) \exp(inx)$. В силу специфики нелинейности рассматриваемой краевой задачи ее анализ сводится к анализу бесконечномерной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{w}_n + g\dot{w}_n + (n^4 + bn^2 + d + icn)w_n + n^2 q\psi(w)w_n &= 0, \\ \psi(w) &= \sum_{k \neq 0} k^2 w_k w_{-k}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Теорема 7.1. Пусть при некотором $k \in N$ справедливо неравенство $h_k < 0$ ($h_{-k} = h_k$), а также $h_n \neq h_k$ при всех $n \neq k, -k$. Тогда система (15) имеет периодические решения вида $w_k(t) = \zeta_k \exp(i\sigma_k t)$, $w_{-k}(t) = \zeta_k \exp(-i\sigma_k t)$, $w_n(t) \equiv 0$ ($n \neq k, -k$), $\zeta_k = (-h_k/(2qk^2))^{1/2}$, $\sigma_k = -ck/g$. Это периодическое решение устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво), если $h_n > h_k$ при всех $n \neq k, -k$. Если же существует такое $n = p$, что $h_p < h_k$, то указанное решение будет неустойчивым.

Теорема 7.2. Пусть при некоторых $k, m \in N$ выполнены условия

$$h_k = h_m = -h < 0 \quad (h_{-k} = h_{-m} = -h).$$

Тогда система дифференциальных уравнений (15) имеет периодические решения периода $2\pi g/(pc)$, где p наибольший общий делитель k и m ($p = 1$, если они взаимно просты), вида

$$\begin{aligned} w_k(t) &= \zeta_k \exp(i\sigma_k t), \quad w_{-k}(t) = \zeta_k \exp(-i\sigma_k t), \quad w_m(t) = \zeta_m \exp(i\sigma_m t), \\ w_{-m}(t) &= \zeta_m \exp(-i\sigma_m t), \quad \sigma_k = -ck/g, \quad \sigma_m = -cm/g, \quad w_n(t) \equiv 0, \quad n \neq \pm k, \pm m. \end{aligned}$$

Здесь $\zeta_k, \zeta_m \in C$ и для них выполнено условие $k^2|\zeta_k|^2 + m^2|\zeta_m|^2 = h$.

При этом трехмерное интегральное многообразие, состоящее из указанных периодических решений, асимптотически устойчиво, если при всех $n \neq \pm k, \pm m$ выполнено неравенство $h_n > -h$ и оно неустойчиво, если существует такое $s \in N$, что $h_s < -h$.

В §1.8 рассмотрена задача о крутильных колебаниях крыла в сверхзвуковом потоке газа. Это привело к анализу нелинейной краевой задачи

$$\ddot{v} + g\dot{v} = v'' + av + bv^3, \quad v|_{x=\pi} = v'|_{x=0} = 0, \quad v = v(t, x).$$

При $a \in [0, 1/4]$ нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво. При $a > 1/4$ оно теряет устойчивость. Наконец, при $a = (1/4) - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < 1$) у данной краевой задачи существуют бифурцирующие из нулевого решения неоднородные неустойчивые состояния равновесия. Детальная формулировка соответствующего утверждения приведена в §1.8. В этом же разделе указаны иные неустойчивые состояния равновесия. Соответствующие решения выражены через эллиптические функции.

Во второй главе рассмотрены краевые задачи, в которых реализуется известный сценарий Ландау перехода к турбулентности. В статье Э. Хопфа был приведен пример краевой задачи, где реализуется данный сценарий. Согласно Л.Д. Ландау возникновение турбулентности связано с каскадом бифуркаций устойчивых инвариантных торов, размерность которых возрастает. При этом бифурцирующие торы имеют квазипериодическую обмотку. Дж. Селл отказался от требования обязательной квазипериодичности на каждом из них. Поэтому, по-видимому, допустимо называть модифицированный сценарий: "сценарий Ландау - Селла" или "сценарий Ландау - Хопфа - Селла".

Отметим, что первые две краевые задачи, которые будут рассмотрены в главе 2 представляют собой некоторые модификации известной модели макроэкономики "мультипликатор - акселератор". Третий пример демонстрирует возможность реализации сценария Ландау в эволюционной краевой задаче из теории упругой устойчивости. Будет рассмотрена краевая задача, описывающая колебания трубы под воздействием потока жидкости (газа). Она имеет точки соприкосновения с некоторыми задачами из первой главы.

В п.1.1 из §2.1 рассмотрена краевая задача, к которой сводится один из вариантов задачи из макроэкономики с учетом пространственных эффектов. Она приведена сразу в нормированном виде

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - \varepsilon \nu u_{txx} - \sigma^2 u_{xx} = -2\varepsilon u \int_0^\pi u_t u dx, \quad (16)$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, \quad (17)$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Показано, что изучение ее динамики предполагает анализ

укороченной нормальной формы

$$z'_n = (1 - \nu n^2)z_n/2 - z_n|z_n|^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z_n = z_n(\tau), \quad \tau = \varepsilon t. \quad (18)$$

Положим $z_k(\tau) = \sqrt{\rho_k(\tau)/2} \exp(i\varphi_k(\tau))$, $\rho_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$. Для $\rho_k(\tau), \varphi_k(\tau)$ получим систему, состоящую из двух дифференциальных уравнений

$$\rho'_k = \nu_k \rho_k - \rho_k^2, \quad \varphi'_k = 0, \quad (19)$$

где $\nu_k = 1 - \nu k^2$. Откуда $\varphi_k(\tau) = \gamma_k \in R$. Первое уравнение системы (19) имеет ненулевое состояние равновесия $\rho_k(\tau) = \nu_k$, если $\nu_k > 0$. Если же оказалось, что $\nu_k \leq 0$, то $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho_k(\tau) = 0$. Элементарный анализ показывает, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.2. Пусть $\nu_k > 0$, тогда первое уравнение системы (19) с номером k имеет единственное положительное асимптотически устойчивое состояние равновесия.

Каждое из уравнений (18) имеет одномерное инвариантное многообразие, составленное из устойчивых по Ляпунову состояний равновесия $z_k = \sqrt{\nu_k/2} \exp(i\gamma_k)$, $\gamma_k \in R$.

Возвратимся к рассмотрению системы (19). Пусть $\nu \in [\beta_{m+1}, \beta_m)$, $\beta_m = 1/m^2$. При таком выборе ν справедливы неравенства $\nu_j = 1 - \nu j^2 > 0$, $j = 1, \dots, m$, $\nu_p \leq 0$, $p = m+1, m+2, \dots$. Следовательно, у системы дифференциальных уравнений (19) существуют инвариантные торы $T_k : z_{j_k} = \sqrt{\nu_{j_k}/2} \exp(i\gamma_{j_k})$, $k \leq m$, $z_p = 0$, где $j_1, j_2, \dots, j_k$ набор из k натуральных чисел, принимающих значения $1, 2, \dots, m$, а p — любое натуральное число, отличное от выбранных чисел $j_1, j_2, \dots, j_k$. Размерность каждого из этих торов равна k . Максимальную размерность имеет тор T_m . Из леммы 1.2 вытекает, что тор T_m асимптотически устойчив, а торы T_k ($k < m$), то есть торы меньшей размерности, будут седловыми (неустойчивыми). Уместно отметить, что тор T_1 , размерность которого равна 1, следует назвать циклом. Наконец, если $\nu > 1$, то все $\nu_j < 0$ и единственным аттрактором системы (19) будет нулевое состояние равновесия.

Теорема 1.1. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\nu \in [\beta_{m+1}, \beta_m)$ каждому тору T_k системы дифференциальных уравнений (19) соответствует тор краевой задачи (16), (17) $T_k(\varepsilon)$ размерности k . Решения на каждом из них задаются формулой

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{2} \left\{ \sum_{l=1}^k \sqrt{\nu_{j_l}} \cos(\omega_{j_l} t + \gamma_{j_l}) e_{j_l}(x) \right\} + O(\varepsilon),$$

где $\nu_l = 1 - \nu j_l^2$, $\omega_{j_l}^2 = 1 + \sigma^2 j_l^2$ при тех j_l , когда $\nu_{j_l} > 0$. Наконец, $e_p(x) = (\sqrt{2}/\pi) \sin(px)$. Тор $T_m(\varepsilon)$ максимальной возможной размерности m асимптотически устойчив. Торы $T_k(\varepsilon)$ ($k = 1, \dots, m-1$) неустойчивы.

При уменьшении ν до таких значений, что $\nu \in [\beta_{m+2}, \beta_{m+1})$ тор $T_m(\varepsilon)$ теряет устойчивость, но в тоже время рождается тор $T_{m+1}(\varepsilon)$ размерности $m+1$, который наследует

устойчивость тора $T_m(\varepsilon)$. Дальнейшее уменьшение ν приводит к потере устойчивости тора $T_{m+1}(\varepsilon)$ и рождению асимптотически устойчивого тора $T_{m+2}(\varepsilon)$ и так далее. Можно рассмотреть и краевую задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} - \varepsilon u_t + u - \varepsilon \nu u_{txx} - \sigma^2 u_{xx} &= -2\varepsilon u \int_0^\pi u_t u dx, \\ u_x(t, 0) &= u_x(t, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Анализ краевой задачи (20), как и в предыдущем варианте краевой задачи для уравнения (16), может быть сведен к рассмотрению нормальной формы

$$z'_n = (1 - \nu n^2) z_n / 2 - z_n |z_n|^2, \quad (21)$$

отличие которой от системы (18) состоит в том, что нумерация начинается с $n = 0$.

Теорема 1.2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\nu \in [\beta_{m+1}, \beta_m)$ каждому тору T_k системы дифференциальных уравнений (21) соответствует тор краевой задачи (20) $T_k(\varepsilon)$, $\dim T_k(\varepsilon) = k + 1$, решения на котором задаются формулой*

$$u(t, x, \varepsilon) = \sqrt{2} \left\{ \sum_{l=0}^m \sqrt{\nu_{j_l}} \cos(\omega_{j_l} t + \gamma_{j_l}) h_{j_l}(x) \right\} + O(\varepsilon),$$

где $\nu_{j_l} = 1 - \nu j_l^2$ для тех j_l , когда $\nu_{j_l} > 0$ и $\nu_j = 0$ для остальных j . Наконец, $h_p(x) = (\sqrt{2}/\pi) \cos px$, $h_0(x) = 1/\sqrt{\pi}$, $j_0 = 0$, $p \in N$. Тор $T_m(\varepsilon)$ максимально возможной размерности асимптотически устойчив, а торы меньшей размерности неустойчивы.

Отличие этого варианта краевой задачи от первой практически нет. Отметим только, что краевая задача (20) всегда имеет тор $T_0(\varepsilon)$ размерности 1 (цикл).

В §2.2 рассматривается задача о колебаниях трубы под воздействием потока жидкости. К аналогичной краевой задаче приводит анализ математической модели колебаний тонкого цилиндра в осесимметрическом потоке жидкости. Ниже приводится краевая задача в перенормированном виде, которая заимствована из работ Холмса, Паудоусиса

$$\begin{aligned} \ddot{w} + 2\varepsilon^2(\kappa_1 \dot{w} + \kappa_2 \dot{w}^{(IV)}) + \varepsilon^2 \gamma_d((x-1)w')' + w^{(IV)} + \\ + \varepsilon c^2 w'' + \varepsilon \beta c \dot{w}' + \varepsilon \alpha c^2 w' = \varepsilon^2 \left[a_1 \int_0^1 (w')^2 dx + 2a_2 \int_0^1 (w' \dot{w}') dx \right] w'', \end{aligned} \quad (22)$$

$$w(t, 0) = w(t, 1) = w''(t, 0) = w''(t, 1) = 0, \quad (23)$$

в которой $\alpha, \beta, \gamma_d, \kappa_1, \kappa_2 \in R_+$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, где $0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Наконец, $c > 0$ и играет роль основного бифуркационного параметра, который пропорционален скорости потока жидкости. В качестве фазового пространства целесообразно выбрать $\overset{\circ}{W}_2^4[0, 1] \times \overset{\circ}{W}_2^2[0, 1]$.

В данном разделе рассматривается задача аналогичная краевым задачам из §2.1, технически реализация некоторых моментов более громоздка. Тем не менее, принципиальную роль здесь играет вспомогательная система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_n = [-i\varepsilon c^2/2 + \varepsilon^2\{\tau_n + i\sigma_n + \theta_n(z) + i\chi_n(z)\}]z_n, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \tau_n &= -(\kappa_1 + (\pi n)^4 \kappa_2) + \alpha c^3 \beta (\pi n - R_n) / (8(\pi n)^3), \\ \sigma_n &= \gamma/4 - c^4/(8(\pi n)^2) + (\beta^2 c^2 (\pi n)^4 - c^4 \alpha^2)(\pi n - 4R_n)/(16(\pi n)^5), \\ \theta_n(z) &= -a_2(\pi n)^4 |z_n|^2/2, \quad R_n = (\operatorname{ch} \pi n - \cos \pi n)/\operatorname{sh} \pi n, \\ \chi_n(z) &= a_1\{(\pi n)^2 |z_n|^2 + 2 \sum_{k=1, k \neq n}^{n_0} (\pi k)^2 |z_k|^2\}/4, \quad n = 1, \dots, n_0. \end{aligned}$$

Пусть $c_m = 2\pi m [\frac{\kappa_1 + (\pi m)^4 \kappa_2}{\alpha \beta (\pi m - 4R_m)}]$, $m = 2, 3, \dots$. Преобразуем систему дифференциальных уравнений (24), положив $z_n = \rho_n \exp(i\psi_n)$ ($\rho_n = |z_n|$). Для функций $\rho_n(t), \psi_n(t)$ получаем систему уравнений

$$\dot{\rho}_n = \varepsilon^2(\tau_n \rho_n - b_n \rho_n^3) \quad (b_n = (\pi n)^4 a_2/2 > 0), \quad (25)$$

$$\dot{\psi}_n = -\varepsilon c^2/2 + (\varepsilon^2 \sigma_n + \varepsilon^2 a_1((\pi n)^2 \rho_n^2 + 2 \sum_{k=1}^{n_0} (\pi k)^2 \rho_k^2))/4. \quad (26)$$

Подсистема (25) анализируется просто, так как все ее уравнения независимы. Пусть $c \in (c_m, c_{m+1}]$. Удобно при таком выборе c уравнения подсистемы (25) разделить на две группы

$$\dot{\rho}_k = \varepsilon^2(\tau_k \rho_k - b_k \rho_k^3), \quad k = 2, 3, \dots, m, \quad (27)$$

$$\dot{\rho}_n = \varepsilon^2(\tau_n \rho_n - b_n \rho_n^3), \quad n = 1, m+1, m+2, \dots, n_0. \quad (28)$$

Для системы (28) выполнены неравенства $\tau_n \leq 0$ и поэтому справедливо предельное равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_n(t) = 0$. Для каждого из уравнений группы (27) нулевое решение неустойчиво ($\tau_k > 0$) и уравнение с номером k имеет состояние равновесия $\rho_k(t) = \nu_k$, где $\nu_k = \sqrt{\tau_k/b_k}$.

Система дифференциальных уравнений (27), (28) имеет нулевое состояние равновесия, которое неустойчиво, если $c > c_2$ и асимптотически устойчиво при $c \in [0, c_2]$. Пусть $c \in (c_m, c_{m+1}]$. При этом варианте выбора c существует $2^{m-1} - 1$ ненулевых состояний равновесия, где хотя бы одна из компонент ρ_k равна ненулевой постоянной ν_k . Пусть S_l одно из них. Так S_1 - состояния равновесия с одной ненулевой компонентой. Особую роль играет S_{m-1} , у которого максимально возможное число ненулевых компонент: $\rho_k = \nu_k$ ($k = 2, \dots, m$), а $\rho_n = 0$ для $n \neq k$. Через S_0 обозначим нулевое состояние равновесия.

Лемма 2.3. Пусть $c \in (c_m, c_{m+1}]$ ($m = 2, 3, \dots$). Тогда система (27), (28) имеет 2^{m-1} состояний равновесия, включая нулевое. Все они неустойчивы за исключением состояния равновесия $S_{m-1} = \{0, \nu_2, \nu_3, \dots, \nu_m, 0, 0, \dots\}$. Последнее - асимптотически устойчиво.

Каждому ненулевому состоянию равновесия S_l ($l = 1, \dots, m-1$) соответствует инвариантный тор T'_l размерности l системы дифференциальных уравнений (27) $z_k = z_k(t) = \beta_k \exp(i\psi_k(t))$, $z_n = 0$, где $n = 1, m+1, m+2, \dots, n_0$, $k = 2, 3, \dots, m$, а β_k - координаты одного из состояний равновесия S_l : $\beta_k = \nu_k$ либо $\beta_k = 0$. Решения на этом торе восстанавливаются после интегрирования второго уравнения системы (25), (26).

Теорема 2.1. Пусть $c \in (c_m, c_{m+1}]$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ каждому тору T'_l соответствует инвариантный тор T_l той же размерности l краевой задачи (22), (23) с сохранением свойств устойчивости. Для решений на каждом из них справедлива асимптотическая формула

$$w(t, x, \varepsilon) = \sum_{k=2}^{n_0} \{ \beta_k (\exp(i\varphi_k(t)) + \text{к.с.}) \sin \pi k x \} + O(\varepsilon),$$

где $\varphi_k(t) = \psi_k(0) + ((\pi k)^2 - \varepsilon c^2/2)t$, β_k - координаты одного из состояний равновесия S_l .

В основном тексте работы последняя формула написана с большей точностью.

Теорема 2.2. Пусть параметр c переходит из интервала $(c_m, c_{m+1}]$ в интервал $(c_{m+1}, c_{m+2}]$. Тогда можно утверждать, что:

- 1) все существующие ранее торы сохраняются;
- 2) из каждого тора T_l ($l \leq m-1$) бифурцирует новый тор T_{l+1} размерность которого выше на 1;
- 3) при $l < m-1$ из неустойчивого тора T_l рождается также неустойчивый;
- 4) устойчив лишь один тор T_m , размерность которого наибольшая из возможных при $c \in (c_{m+1}, c_{m+2}]$.

В п.2.4 рассмотрена краевая задача, которую обычно используют при моделировании колебаний трубы

$$\ddot{v} + g_1 \dot{v} + g_2 \dot{v}^{(IV)} + v^{(IV)} + 2\beta_0 \rho \dot{v}' + \rho^2 v'' = (a_1 \int_0^1 (v')^2 dx + 2a_2 \int_0^1 v' \dot{v}' dx) v'', \quad (29)$$

$$v(t, 0) = v(t, 1) = v''(t, 0) = v''(t, 1) = 0, \quad (30)$$

где в уравнение (29) отсутствует слагаемое $\alpha \rho^2 v'$ (пропорциональное v').

Теорема 2.3. Пусть $\rho \leq \pi$. Тогда нулевое решение краевой задачи (29), (30) асимптотически устойчиво в норме пространства $W_2^2(0, 1) \times L_2(0, 1)$.

В этом пункте также показано, что в традиционном варианте краевой задачи, которая призвана описывать колебания трубы под воздействием потока жидкости, нулевое состояние равновесия может терять устойчивость только дивергентным образом. При $\rho = \pi$ у линеаризованной краевой задачи в спектре устойчивости появляется нулевое собственное значение. При увеличении ρ оно переходит в правую полуплоскость. Краевая задача (29), (30) может иметь ненулевые состояния равновесия, из которых устойчиво только одно.

В п. 2.5 изучена краевая задача, которую следует рассматривать как еще одну модификацию краевой задачи из п. 2.3.

Глава 3 посвящена изучению некоторых версий широко известного УГЛ, которое в первоначальной форме было получено в работах В.Л. Гинзбурга, Л.Д. Ландау, как одна из моделей сверхпроводимости. Его обобщения и различные модификации нашли свое применение при описании различных процессов и явлений. Например, при изучении плазмы, гидродинамики, нелинейной оптики и т.д. Уравнение, которое будет рассмотрено ниже, следует скорее назвать комплексным УГЛ или обобщенным УГЛ.

Напомним, что УГЛ, обычно, называют, уравнение вида

$$u_t = (\alpha + i\beta)u - (a_1 + ia_2)u|u|^2 + (d_1 + id_2)\Delta u \quad (31)$$

или его частные варианты. Здесь $u = u(t, x_1, \dots, x_n), n \in \mathbb{Z}, \Delta u = u_{x_1 x_1} + \dots + u_{x_n x_n}$ — оператор Лапласа по пространственным переменным, $\alpha, \beta, a_1, a_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, d_1 \geq 0$. Обычный вариант предусматривает, что рассматривается уравнение (31) при $x = x_1 (n = 1)$. Если $d_1 = 0$, то уравнение (31) можно называть обобщенным кубическим уравнением Шредингера или слабодиссипативным вариантом УГЛ.

В §3.1 изучена периодическая краевая задача для слабодиссипативной версии УГЛ

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - id\Delta u, \quad (32)$$

$$u(t, x + 2\pi e_j) = u(t, x). \quad (33)$$

Здесь $u = u(t, x), x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, d, c \in \mathbb{R}, \Delta$ — оператор Лапласа. Обычно $d > 0$, а знак c произволен. Наконец, $e_j = (e_{j1}, \dots, e_{jn}), e_{js}$ — символ Кронекера. Краевая задача (32), (33) имеет счетное семейство периодических решений — бегущих "плоских" волн

$$u_k(t, x) = \exp(i\sigma_k t + i(k, x)), \quad (34)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sigma_k = -c + d(k, k)$, а через $(*, *)$ обозначается скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. В п.1.2 была изучена устойчивость в смысле определения Ляпунова плоских волн (34). Оказалось, что при $d > 2c$ все бегущие волны устойчивы и они неустойчивы при $d < 2c$. При $d = 2c$ в задаче об устойчивости бегущих волн реализуется критический случай, когда спектру устойчивости принадлежит нулевое собственное число кратности $2n + 1$, а остальные точки этого спектра лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством $\operatorname{Re} \lambda_j \leq -\gamma < 0$.

В оставшейся части §3.1 рассматривалась краевая задача (32), (33) при $d = 2c - \varepsilon (|\varepsilon| < \varepsilon_0)$, для которой была рассмотрена задача о бифуркациях от плоских волн (34).

В п.1.4 (из §3.1) анализ краевой задачи был сведен к изучению нормальной формы

$$\varphi' = \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^n \rho_j, \quad (35)$$

$$\rho_j' = \rho_j[\gamma - b\rho_j - a \sum_{s=1, s \neq j}^n \rho_s], \quad (36)$$

где $\varphi = \varphi(\tau)$, $\rho_j = \rho_j(\tau) \geq 0$, $\tau = 2c|\varepsilon|t$, $\gamma = \text{sign}(\varepsilon)$, $a = 4c^2(1 - c^2)$, $b = (30c^4 - 9c^2 + 1)/6$. Рассмотрим отдельно подсистему (36) и через S_m обозначим состояния ее равновесия $(\nu_1, \dots, \nu_n)$, которые имеют m положительных координат. Например, $S_1 = (0, \nu_2, 0, \dots)$, $\nu_2 > 0$, $S_n = (\nu_1, \dots, \nu_n)$, где все $\nu_j > 0$. В силу симметрии достаточно обратить внимание на те S_m , у которых первые m компонент положительны, а остальные нулевые: $S_m = (\nu_1, \dots, \nu_m, 0, \dots, 0)$, $\nu_1, \dots, \nu_m > 0$. Для определения $\nu_j > 0$ – координат состояния равновесия получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$b\nu_1 + a \sum_{j=2}^m \nu_j = \gamma, \quad a\nu_1 + b\nu_2 + a \sum_{j=3}^m \nu_j = \gamma, \dots, a \sum_{j=1}^{m-1} \nu_j + b\nu_m = \gamma,$$

при анализе которой будем предполагать, что $a \neq b$. Иначе, $c \neq c_1, c \neq c_2$, где c_1, c_2 положительные корни уравнения $54c^4 - 33c^2 + 1 = 0$. Оказалось, что $c_1^2 \approx 0.032$, $c_2^2 \approx 0.579$. В таком случае $\nu_1 = \nu_2 = \dots \nu_m = \Theta_m$, где Θ_m корень уравнения

$$Q_m \Theta_m = \gamma, \quad Q_m = b + (m-1)a = \frac{(54 - 24m)c^4 + (24m - 33)c^2 + 1}{6},$$

где $m = 1, \dots, n$. При всех рассматриваемых c справедливы неравенства $Q_1 > 0, Q_2 > 0$, а начиная с $m = 3$ величина Q_m может менять знак. Оказывается, что при $c \in (0, c_m)$ имеем $Q_m > 0$, а при $c \in (c_m, \infty)$ справедливо неравенство $Q_m < 0$. Здесь

$$c_m^2 = \frac{1}{2}(q_m + \sqrt{q_m^2 + p_m}), \quad q_m = 1 + \frac{21}{24m - 54}, \quad p_m = \frac{4}{24m - 54}, \quad m = 3, 4, \dots$$

Лемма 1.4. Пусть $c \in (0, c_m)$, $m \geq 3$ состояние равновесия $S_m = (\Theta_m, \dots, \Theta_m, 0, \dots, 0)$ существует при $\gamma > 0$, а при $c \in (c_m, \infty)$ оно существует, если $\gamma < 0$. Если $m = 1, 2$ то состояния равновесия S_1, S_2 существуют при $\gamma > 0$.

Лемма 1.5. Пусть $a \neq b$ ($c \neq c_1, c_2$). Состояние равновесия S_1 асимптотически устойчиво, если $b < a$ ($c \in (c_1, c_2)$) и неустойчиво, если $b > a$ ($c \in (0, c_1) \cup (c_2, \infty)$).

Лемма 1.6. Пусть $\gamma > 0, a \neq b$. Состояние равновесия S_n асимптотически устойчиво, если $b > a$ и неустойчиво, если $b < a$. Пусть $\gamma < 0$. Тогда S_n неустойчиво при любом выборе c .

Лемма 1.7. Пусть $m = 2, 3, \dots, n-1$. Состояния равновесия S_m всегда седловые.

Система (36) имеет C_n^m состояний равновесия S_m с m положительными компонентами. Пусть $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ какой-либо набор порожденный координатами состояния равновесия S_m ,

то есть $\xi_j = \pm\sqrt{c\nu_j}$ ($\xi_j = 0$, если $\nu_j \leq 0$). При этом можно считать, что выбран знак плюс. Основной результат §3.1 сформулирован в виде теоремы 1.1 и теоремы 1.2. Он сформулирован ниже в виде одной теоремы, которая объединяет теоремы 1.1 и 1.2.

Теорема. *Каждому грубому состоянию равновесия S_m системы обыкновенных дифференциальных уравнений (36) соответствует счетное семейство инвариантных торов размерности $m+1$ краевой задачи (32), (33). Двумерные торы T_2 асимптотически устойчивы, если $b < a$ и неустойчивы, если $b > a$. Торы T_m ($m = 3, \dots, n$) седловые. Торы T_{n+1} асимптотически устойчивы, если $b > a$ и неустойчивы, если $b < a$.*

Для решений на торе T_m справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} u(t, x, \varepsilon) = & \exp\{i[-c + |\varepsilon|\beta \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + (2c - \varepsilon)(k, k)]t + i(k, x) + i\varphi_0\} \times \\ & \times \left\{ 1 + |\varepsilon|^{\frac{1}{2}}(-c + i) \sum_{j=1}^n \xi_j \cos(x_j + 4ck_j t + \varphi_j) + \right. \\ & + |\varepsilon| \left[-\frac{(1 + 5c^2)(1 + ic)}{4} \sum_{j=1}^n \xi_j^2 + \left(\frac{3c^2 - 1}{12} - i\frac{9c^2 + 1}{24c} \right) \times \right. \\ & \times \sum_{j=1}^n \xi_j^2 \cos(2x_j + 8ck_j t + 2\varphi_j) + (3c^2 - 1 - 4ci) \times \\ & \times \left. \sum_{j=1, m=1, m \neq j}^n \xi_j \xi_m \times \cos(x_j + 4ck_j t + \varphi_j) \times \cos(x_m + 4ck_m t + \varphi_m) \right] \Big\} + o(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ один из наборов, порожденный координатами состояния равновесия S_m , $\varphi_j \in R$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in Z^n$.

В последнем пункте §3.1 рассмотрены простейшие возможные обобщения рассматриваемой задачи, когда период $u(t, x_1, \dots, x_n)$ по каждой переменной x_j не обязательно точно равен 2π , но может отличаться от 2π на достаточно малую величину. Доказана теорема аналогичная теоремам 1.1 и 1.2. В §3.1 приведены графики функций, иллюстрирующие структуру решений принадлежащих инвариантным торам.

В §3.2 рассмотрена менее известная модификация слабодиссипативного варианта УГЛ. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t &= u - (1 + ic)u^2\bar{u} + idu_{xxx}, \\ u(t, x + 2\pi) &= u(t, x), \end{aligned} \tag{37}$$

где $c, d, x \in R, d > 0$. Краевая задача (37) имеет решения вида

$$u_n(t, x) = \exp(i\sigma_n t + inx), \quad \sigma_n = dn^2 - c, \quad n \in Z.$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнено неравенство $d(1 + 6n^2) > 2c$, тогда бегущая волна $u_n(t, x)$ устойчива. Она неустойчива, если $d(1 + 6n^2) < 2c$. Критический случай в задаче об устойчивости решения $u_n(t, x)$ выделяется равенством $d = d_n = 2c/(1 + 6n^2)$.*

Положим $d = d_n(1 - \varepsilon)$, где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < 1$. В §3.2 показано, что при достаточно малых ε_0 от цикла, порожденного решением, бифурцируют двумерные инвариантные торы. При этом двумерные торы, ответвляющиеся от решения $u_n(t, x)$ с номерами $n \neq \pm 1$ всегда притягивающие, а при $n = \pm 1$ ситуация иная и ответ уже зависит от c . Если $c \in (0, c_1) \cup (c_2, \infty)$, то при потере устойчивости циклом $u_n(t, x)$ из него рождаются притягивающие двумерные торы, а при $c \in (c_1, c_2)$ имеют место докритические бифуркации неустойчивых (седловых) инвариантных торов.

В §3.3 рассмотрена еще одна версия УГЛ, предложенная в работах ряда американских физиков. В §3.3 изучению подлежала краевая задача

$$\begin{aligned} u_t &= u - \alpha_1(1 + ic_1)u|u|^2 - \alpha_2(1 + ic_2)u|u|^4 - ibu_{xx}, \\ u(t, x + 2\pi) &= u(t, x), \end{aligned} \quad (38)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2 \in R, b > 0$. При этом $\alpha_2 \geq 0$ и, если $\alpha_2 = 0$, то $\alpha_1 > 0$.

Как и в §§3.1-3.2, в данном разделе рассмотрены вопросы об устойчивости и локальных бифуркациях бегущих волн

$$u_n(t, x) = \eta_* \exp(i\sigma_n + inx), \quad n \in Z. \quad (39)$$

Здесь η_* — ненулевой корень уравнения $P_0(\eta) = \eta - \alpha_1\eta^3 - \alpha_2\eta^5 = 0$, а $\sigma_n = -\alpha_1c_1\eta_*^2 - \alpha_2c_2\eta_*^4$.

Лемма 3.1. Пусть $b_* = 2\alpha_1c_1\eta_*^2 + 4\alpha_2c_2\eta_*^4 > 0$. Тогда бегущая волна (39) краевой задачи (38) устойчива, если $b \in (b_*, \infty)$. При $b_* \leq 0$ решения $u_n(t, x)$ устойчивы при любом выборе параметров задачи.

В п. 3.2 разобрана бифуркационная задача при малом отклонении от критической величины b_* : $b = b_* - \varepsilon$, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$. Как и в двух предыдущих разделах главы 3, вопрос о наличии и характере бифуркаций сводится к анализу вспомогательного обыкновенного уравнения ("укороченной" нормальной формы). В данном разделе определяющую роль играют уравнения $\rho' = \rho + a\rho^2$ ($\varepsilon > 0$), $\rho = \rho(s)$, $s = \varepsilon t$ или $\rho' = -\rho + a\rho^2$ ($\varepsilon < 0$). При этом в §3.3 величина a вычислена в явном виде. Отметим, что величина a может быть как отрицательной, так и положительной. Чаще она отрицательна, но существуют области параметров, где она положительна. Сразу отметим, что $a = -(30c_1^4 - 9c_1^2 + 1)/6 < 0$ при $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$ и $a = -(64c_2^4 - 7c_2^2 + 1)/3 < 0$ при $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$. Следовательно, a может менять знак при $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$.

В п. 3.3 сформулирован основной результат, который основывается на теореме 3.1 из п. 3.2. В рамках §3.3 показано, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $a < 0$ от решений $u_n(t, x)$ бифурцируют двумерные притягивающие торы $T_2(\varepsilon)$, а при $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0)$, $a > 0$ от решений $u_n(t, x)$ бифурцируют седловые торы. Здесь $0 < \varepsilon_0 < 1$.

В §3.4 рассмотрен особый случай для краевой задачи

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 - idu_{xx}, \quad u(t, x + 2\pi) = u(t, x),$$

которую в ситуации общего положения можно рассматривать как вариант краевой задачи из §3.1 с $n = 1$. Предположим дополнительно, что $(1/d) \ll 1$ ($d > 0$). Пусть $\varepsilon = (1/d)$, то есть ε можно рассматривать в качестве малого параметра. После ряда замен (см. введение к §3.4) рассматривается как самостоятельный объект краевая задача

$$u_t = -iu_{xx} + \varepsilon(u - (1 + ic)u|u|^2), \quad (40)$$

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x). \quad (41)$$

Естественно, что краевая задача (40), (41) имеет счетный набор периодических решений $u_n(t, x, \varepsilon) = \exp(i\sigma_n t + inx)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\sigma_n = n^2 - c\varepsilon$. Все эти решения устойчивы (см. §3.1). В этом разделе (§3.4) дан дополнительный анализ окрестности нулевого состояния равновесия $u(t, x) = 0$. В §3.4 вопрос о наличии некоторых аттракторов сведен к анализу системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_n = \varepsilon z_n \left(1 + (1 + ic) \left[|z_n|^2 - 2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |z_m|^2 \right] \right). \quad (42)$$

Сформулируем основную теорему данного раздела.

Теорема 4.1. *Существует такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m_0)$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ тору T_m размерности m ($m \leq m_0$) системы дифференциальных уравнений (42) соответствует тор $T_m(\varepsilon)$ той же размерности краевой задачи (40), (41). При этом, устойчивость сохраняется, то есть устойчивому (притягивающему) тору T_m соответствует устойчивый тор $T_m(\varepsilon)$, а седловому T_m – седловой тор $T_m(\varepsilon)$. Для решений, принадлежащих тору $T_k(\varepsilon)$ (циклу при $k = 1$), справедлива асимптотическая формула*

$$u_k(t, x, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \sum_{s=1}^k \exp(i(j_s^2 - \varepsilon c)t + ij_s x + i\gamma_{j_s}) + O(\varepsilon), \quad \gamma_{j_s} \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что для одномодовых решений получим периодическое решение с периодом близким к $2\pi/k^2$: $u_k(t, x, \varepsilon) = \exp(i(k^2 - \varepsilon c)t + ikx + \varphi) + O(\varepsilon)$, $k \in \mathbb{Z}$.

В §3.5 рассмотрен еще один вариант УГЛ

$$u_t = u - u|u|^2 + du_{xx}, \quad (43)$$

где $u = u(t, x)$, $d > 0$. Это уравнение можно считать частным случаем уравнения

$$u_t = u - (1 + ic)u|u|^2 + (d_1 + id_2)u_{xx},$$

где $c = 0, d_2 = 0, d_1 = d$. Уравнение (43) иногда называют вариационным УГЛ. Ниже его будем рассматривать с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (44)$$

Последняя краевая задача выглядит как наиболее простой вариант из возможных краевых задач для комплексного УГЛ. Тем не менее, динамика ее решений не совсем простая. Краевая задача (43), (44) может иметь решения вида

$$u_n(x) = \eta_n \exp(inx), n = 0, \pm 1, \dots, \pm n_0, \quad (45)$$

где натуральное число n_0 будет указано ниже. Наряду с решениями (45) существуют решения $u_n(x + h) = \eta_n \exp(inh) \exp(inx)$, $h \in R$. Поэтому, при рассмотрении решений (45) можно считать, что $\eta_n \in R_+$ ($\eta_n > 0$), а положительную постоянную η_n следует искать как соответствующий корень уравнения $\eta - \eta^3 - dn^2\eta = 0$. Кроме нулевого корня последнее уравнение имеет корень $\eta_n = (1 - dn^2)^{\frac{1}{2}}$, который существует, если $1 - dn^2 > 0$. Поэтому данные состояния равновесия S_n существуют, если $|n| \leq n_0$, где $n_0 = \text{entier}(\sqrt{1/d})$ или $n_0 = \text{entier}(\sqrt{1/d}) - 1$. Последний вариант выбора n_0 реализуется, если $\sqrt{1/d} \in N$.

Решение с номером $n = 0$ устойчиво. При $n \neq 0$ ситуация иная.

Теорема 5.1. *Краевая задача (43), (44) имеет $2n_0 + 1$ одномерных инвариантных многообразий $S_n(\alpha)$, сформированных решениями вида $u_n(x + \alpha)$, $\alpha \in R$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm n_0$.*

Пусть $n \neq 0$. Тогда одномерное инвариантное многообразие $S_n(\alpha)$ является притягивающим (локальным аттрактором), если $d \in (0, d_n)$, неустойчивым (седловым), если $d \in (d_n, \infty)$. Здесь $d_n = 2/(6n^2 - 1)$. При $n = 0$ многообразие $S_n(\alpha)$ - локальный аттрактор, который устойчив при всех $d > 0$. Данная краевая задача (43), (44) имеет состояния равновесия иной структуры $u_m(x, h_1, h_2) = \exp(ih_2)v_m(x + h_1)$, где $h_1, h_2 \in R$, а $v_m(x)$ - нетривиальные решения краевой задачи

$$dv'' + v - v^3 = 0, \quad (46)$$

$$v(x + 2\pi) = v(x). \quad (47)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (46) имеет решения, которые могут быть выражены через эллиптические функции

$$v(x) = p \operatorname{sn}(\delta x, k). \quad (48)$$

При этом функция (48) удовлетворяет краевым условиям (47) при соответствующем выборе δ и k . В §3.5 показано, что краевая задача (46), (47) имеет решения, если $m \in N$ и

$m \leq m_0$, $m_0 = \text{entier}(1/\sqrt{d})$. При каждом подходящем m инвариантные многообразия размерности 1, порожденные решениями семейства $u_n(x, h_1, h_2)$, неустойчивы. В §3.5 также изучены локальные бифуркации решений (45) при смене ими устойчивости. От решений (45) бифурцируют неустойчивые состояния равновесия более сложной структуры.

В главе 4 рассмотрено уравнение, которое принято называть УКС или обобщенным УКС. В настоящее время под термином УКС, обобщенное УКС часто понимают класс достаточно похожих уравнений. В данном разделе, как правило, рассматриваются те варианты обобщенного УКС, которые появились в связи с моделированием процесса формирования неоднородного рельефа на поверхности твердых тел под воздействием потока ионов (ионной бомбардировки). При этом в соответствующих опытах поверхность может оставаться плоской или может появиться неоднородный рельеф разной конфигурации. Очень часто такой рельеф классифицируют как волновой. Если длина волны достаточно мала, то принято говорить о нанорельефе. Причины появления нанорельефа продолжает вызывать дискуссии, но все большее число физиков склоняются к детерминистскому подходу в определении причины, как к процессу самоорганизации.

В §4.1 рассмотрена задача для одного из вариантов УКС, который получен после перенормировок и возникает при описании формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & a \frac{\partial u}{\partial x} - b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \\ & - d_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \\ & + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + c_3 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + c_4 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (49)$$

$$u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y + 2\pi) = u(t, x, y). \quad (50)$$

Здесь $a, b_1, b_2, d_1, d_2, d_3, a_1, a_2, c_1, c_2, c_3, c_4 \in R, d_1, d_2, d_3 > 0$ и зависят обычно от свободного параметра γ_0 (см. §4.1) и поэтому можно считать, что $d_1 = 1$ (или $d_2 = 1$). Краевая задача (49), (50) имеет семейство однородных состояний равновесия $u(t, x) = \text{const}$, а также инвариантна относительно замен $u \rightarrow u + \alpha$. Поэтому достаточно проанализировать устойчивость состояния равновесия $u = 0$. Для анализа устойчивости нулевого решения в линейном приближении следует рассмотреть линейную краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad u(t, x + 2\pi, y) = u(t, x, y + 2\pi) = u(t, x, y),$$

где линейный дифференциальный оператор

$$Av = -b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} + a_1 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2}$$

определен на гладких функциях $v(x, y)$, имеющих по обоим переменным x, y период 2π .

Лемма 1.1. *Линейный дифференциальный оператор A имеет собственные значения*

$$\lambda = \lambda(n, k) = (b_1 n^2 + b_2 k^2) - (n^4 + d_2 k^4 + d_3 n^2 k^2) + i a n - i a_1 n^3 - i a_2 n k^2,$$

каждому из которых отвечает собственная функция $e_{n,k}(x, y) = \exp(inx +iky)$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что $\lambda(0, 0) = 0$. Если $\operatorname{Re} \lambda(n, k) < 0$ при всех $k^2 + n^2 \neq 0$, то любое из состояний равновесия краевой задачи (49), (50) устойчиво, но не может быть асимптотически устойчиво, так как в любой окрестности произвольного состояния равновесия есть иные, отличные от него. Пусть существует хотя бы одна пара целых чисел (n_0, k_0) , $n_0^2 + k_0^2 \neq 0$, для которых $\operatorname{Re} \lambda(n_0, k_0) > 0$. Тогда состояния равновесия $u(x, y) = \text{const}$ неустойчивы.

Критические случаи выделяются условиями:

- 1) при всех n, k справедливы равенства $\operatorname{Re} \lambda(n, k) \leq 0$;
- 2) существуют такие $n = n_0, k = k_0$, что $\operatorname{Re} \lambda(n_0, k_0) = 0$, $n_0^2 + k_0^2 \neq 0$.

Подчеркнем, что в нашем случае $\operatorname{Re} \lambda(n, k) = b_1 n^2 + b_2 k^2 - n^4 - d_2 k^4 - d_3 k^2 n^2$. Поэтому условия устойчивости приобретают вид двух неравенств: $b_1 < 1$, $b_2 < d_2$. Следовательно, можно выделить три критических случая: 1) $b_1 = 1$, $b_2 < d_2$; 2) $b_1 < 1$, $b_2 = d_2$; 3) $b_1 = 1$, $b_2 = d_2$. В первом случае линейный дифференциальный оператор A имеет три собственных значения, у которых $\operatorname{Re} \lambda(n, k) = 0$: $\lambda(0, 0) = 0$, $\lambda(\pm 1, 0) = \pm i\omega$, $\omega = a - a_1$ ($a \neq a_1$). Им отвечают собственные функции $e_{0,0}(x, y) = 1$, $e_{\pm 1,0}(x, y) = \exp(\pm ix)$. Во втором случае имеет место трехкратное нулевое собственное значение. Этому собственному значению отвечают три собственные функции $e_{0,0}(x, y) = 1$, $e_{0,\pm 1}(x, y) = \exp(\pm iy)$. Наконец, в третьем случае имеем пять вариантов, при которых $\operatorname{Re} \lambda = 0$, справедливы равенства $\lambda(0, 0) = 0$, $\lambda(\pm 1, 0) = \pm i\omega$, $\lambda(0, \pm 1) = 0$. Основные результаты относятся к анализу локальных бифуркаций в случаях близких к критическим:

- 1) $b_1 = 1 + \varepsilon$, $b_2 < b_3$; 2) $b_2 = d_2 + \varepsilon$, $b_1 < 1$;
- 3) $b_1 = 1 + \alpha_1 \varepsilon$, $b_2 = d_2 + \alpha_2 \varepsilon$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Здесь ε – малый параметр.

В первом случае центральную роль играет система обыкновенных дифференциальных уравнений, анализ которой позволил доказать справедливость утверждения (здесь теорема 1.1 приведены в сокращенной форме).

Теорема 1.1. *Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (49), (50) имеет двупараметрическое семейство решений*

$$\begin{aligned} u(t, x, y, \varepsilon) = u_1(t, x, \varepsilon) = & K_1 + (2 \frac{\alpha}{l_1} l_0 \varepsilon + o(\varepsilon)) t + \\ & + (\frac{\alpha}{l_1} \varepsilon)^{1/2} [\exp(ix + i\omega(\varepsilon)t + i\nu_1) + \exp(-ix - i\omega(\varepsilon)t - i\nu_1)] + \\ & + \frac{\alpha}{l_1} \varepsilon [q_2 \exp(2ix + 2i\omega(\varepsilon)t + 2i\nu_1) + \bar{q}_2 \exp(-2ix - 2i\omega(\varepsilon)t - 2i\nu_1)] + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь $K_1, \nu_1 \in \mathbb{R}$, $\omega(\varepsilon) = \omega - \frac{\varepsilon l_2 \alpha}{l_1}$. Эти решения существуют, если $\alpha l_1 > 0$. Они устой-

чивы при $\alpha > 0$ ($\varepsilon > 0$) и неустойчивы при $\alpha < 0$ ($\varepsilon < 0$), $\alpha = \text{sign}(\varepsilon)$.

Величина l_1 вычисляется в процессе построения нормальной формы и в данном случае $l_1 = (4c_1^2 - 2c_3^2 + 3a_1c_1c_3)/(3(4 + a_1^2))$. При доказательстве теоремы использовалась система обыкновенных уравнений $\psi' = l_0|z|^2$, $z' = \alpha z - (l_1 + il_2)z|z|^2$, где $\psi = \psi(s) \in R$, $z = z(s) \in C$, $s = \varepsilon t$. При $b = d_2 + \varepsilon$, $b_1 < 1$ доказана аналогичная теорема.

Теорема 1.2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (49), (50) имеет семейство устойчивых решений, для которых имеет место асимптотическая формула*

$$u(t, y, \varepsilon) = K_2 + (6\varepsilon \frac{d_2}{c_2} + o(\varepsilon))t + \frac{\sqrt{3}\sqrt{d_2}}{|c_2|} \varepsilon^{1/2} (\exp(i(y + \nu_2)) + \exp(-i(y + \nu_2))) - \frac{\varepsilon}{4c_2} (\exp(i(2y + 2\nu_2)) + \exp(-i(2y + 2\nu_2))) + O(\varepsilon^{3/2}), \quad K_2, \nu_2 \in R.$$

В самом сложном случае, когда b_1 близко к 1, b_2 близко к d_2 задача сведена к анализу нормальной формы

$$\psi' = L_1|z_1|^2 + L_2|z_2|^2, \quad (51)$$

$$z_1' = \alpha_1 z_1 + (L_{11}|z_1|^2 + L_{12}|z_2|^2)z_1, \quad z_2' = \alpha_2 z_2 + (L_{21}|z_1|^2 + L_{22}|z_2|^2)z_2. \quad (52)$$

Коэффициенты этой системы определяются в процессе реализации алгоритма построения системы (51), (52). Центральную роль играют уравнения системы (52).

Положим $z_1 = \rho_1 \exp(i\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2 \exp(i\varphi_2)$. Соответствующая система для ρ_1, ρ_2 может быть записана в виде $\rho_1' = \alpha_1 \rho_1 - \rho_1(b_{11}\rho_1^2 + b_{12}\rho_2^2)$, $\rho_2' = \alpha_2 \rho_2 - \rho_2(b_{21}\rho_1^2 + b_{22}\rho_2^2)$, где $b_{11} = -\text{Re } L_{11}$, $b_{12} = -\text{Re } L_{12}$, $b_{21} = -\text{Re } L_{21}$, $b_{22} = -\text{Re } L_{22}$.

В теореме 1.3 (см. §4.1) показано, что при достаточно малых ε каждому грубому ненулевому состоянию равновесия последней системы для $\rho_1(s), \rho_2(s)$ соответствуют семейства решений основной краевой задачи. В рамках этой теоремы выписаны асимптотические формулы для этих семейств решений. Дан ответ об их устойчивости.

В п. 1.3 изучен класс решений вида $u(t, x, y, \varepsilon) = u(t, z, \varepsilon)$, где $z = kx + ny$, $k, n \in Z$ и $k^2 + n^2 \neq 0$, т.е. решений в виде плоских волн. Исследован вопрос о существовании и устойчивости таких решений в предположении, что $b_p = d_p + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$, где $b_p = b_1 k^2 + b_2 n^2$, $d_p = d_k^2 + d_2 n^2 + d_3 k^2 n^2$.

Результаты сформулированы в виде теоремы 1.4 сначала для вспомогательной краевой задачи, а для основной краевой задачи мы получаем утверждение, которое является его следствием. Именно это утверждение приведем ниже.

Теорема 1.4. *Пусть $b_p = d_p + \varepsilon$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, 0) \cup (0, \varepsilon_0)$ вспомогательная краевая задача имеет решение, для которого справед-*

лива асимптотическая формула

$$u(t, z, \varepsilon) = K_p + (2 \frac{\alpha_p}{l_{p1}} l_{p0} \varepsilon + o(\varepsilon))t + \\ + \sqrt{\frac{\varepsilon \alpha_p}{l_{p1}}} [\exp(iz + i\omega_p(\varepsilon)t + i\nu_p) + \exp(-iz - i\omega_p(\varepsilon)t - i\nu_p)] + \\ + \frac{\varepsilon \alpha_p}{l_{p1}} (q_2 \exp(2iz + 2i\omega_p(\varepsilon) + 2i\nu_p) + \overline{q_2} \exp(-2iz - 2i\omega_p(\varepsilon) - 2i\nu_p)) + o(\varepsilon).$$

Здесь $\alpha_p = \text{sign}(\varepsilon)$, $K_p, \nu_p \in R$ и произвольны. Остальные коэффициенты формулы определяются в процессе реализации алгоритма построения асимптотической формулы из теоремы 1.4. При $n^2 + k^2 > 1$ они всегда неустойчивы (седловые). При $k = 1, n = 0$ или $k = 0, n = 1$ мы находим решения, которые были отмечены в рамках теорем 1.1, 1.2. Условия их устойчивости можно найти в формулировках соответствующих теорем.

В последнем пункте данного параграфа рассмотрен частный случай краевой задачи (49), (50), если мишень (пластина) имеет длину, которая значительно превосходит ширину ($H_y/H_x \ll 1$ и $a_1 = a_2 = 0$). В таком случае в рамках теоремы 1.5 сформулированы некоторые из возможных уточнений теорем 1.1-1.3. Как и ранее, при анализе задачи использован метод инвариантных многообразий и теории нормальных форм. Построения этого пункта имеют ряд точек соприкосновения с результатами главы 3.

В §4.2 рассмотрено обобщенное УКС вместе с краевыми условиями отличными от периодических и рассмотрена краевая задача

$$h_t = -v_0 - (h_{xxxx} + bh_{xx}) + a_2(h_x)^2 + b_2h_xh_{xx} + a_3(h_x)^3 + b_3(h_x)^2h_{xx},$$

$$h_{xx}(t, 0) = h_{xxx}(t, 0) = h_{xx}(t, 1) = h_{xxx}(t, 1) = 0.$$

У нее есть решения вида $h_0(x) = -v_0t + v_1$, где $v_1 \in R$. Замена $h(t, x) = h_0(t, x) + u(t, x)$ приводит основную краевую задачу к вспомогательной

$$u_t = -A(b)u + a_2(u_x)^2 + b_2u_xu_{xx} + a_3(u_x)^3 + b_3(u_x)^2u_{xx}, \quad (53)$$

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, 1) = 0, \quad (54)$$

где $A(b) = u_{xxxx} + bu_{xx}$, $u = u(t, x)$, $a_2, b_2, a_3, b_3 \in R$. Отметим, что при $b_2 = a_3 = b_3 = 0$ получаем традиционное УКС. Краевые условия (54), возможно, более естественны с физической точки зрения, так как описывают вариант, когда на концах мишени отсутствуют механические нагрузки.

Для краевой задачи (53), (54) рассмотрены следующие вопросы:

- 1) об устойчивости однородных состояний равновесия: $u(t, x) = c$;
- 2) о бифуркациях этих состояний равновесия при смене ими устойчивости;
- 3) об устойчивости решений вида $u = u_T(t, x) = \beta t + \alpha_1 x + \alpha_0$, где $\alpha_0, \alpha_1 \in R, \beta = a_2\alpha^2 + b_2\alpha^3$ при малых α .

Для исследования вопроса об устойчивости состояний равновесия $u(t, x) = c$ была рассмотрена линеаризованная задача

$$u_t = -A(b)u, \quad (55)$$

$$u_{xx}(t, 0) = u_{xx}(t, 1) = u_{xxx}(t, 0) = u_{xxx}(t, 1) = 0. \quad (56)$$

Здесь ЛДО $A(b)v = v^{(IV)} + bv''$ ($b > 0$), область определения которого состоит из достаточно гладких функций $v(x)$, удовлетворяющих краевым условиям (56). Анализ линейной краевой задачи (55), (56) позволил найти такую $b = b_* > 0$, что

- 1) при $b < b_* = 4\pi^2$ все решения краевой задачи устойчивы;
- 2) при $b \geq b_*$ они неустойчивы.

Спектру оператора $A(b_*)$ принадлежит трехкратное нулевое собственное число, которому отвечают две собственные функции $e_1(x) = 1$, $e_2(x) = x$, а также присоединенная функция $e_3(x) = \frac{1}{\sigma^2}(\frac{\cos \sigma x}{\sigma^2} + \frac{x^2}{2})$, $\sigma = \sqrt{b_*}$.

В основной части §4.2 рассмотрен вопрос о бифуркациях пространственно неоднородных решений изучаемой краевой задачи. Приведены дополнительные условия их возникновения, а также условия их устойчивости. Приведем формулировку одной теоремы.

Теорема (сокращенный вариант). *Основная краевая задача (53), (54) при $b = b_* + \varepsilon$ имеет семейство решений вида*

$$h(t, x, \varepsilon) = \xi_1 + (q(\varepsilon) - v_0 t) + \varepsilon[\xi_2 x + \xi_3 [\frac{\cos \sigma x}{\sigma^4} + \frac{x^2}{2\sigma^2}]] + o(\varepsilon),$$

где $\xi_1 \in R$. Остальные коэффициенты определяются в ходе доказательства теоремы. Решения данного семейства устойчивы, если $\varepsilon > 0$ и неустойчивы при $\varepsilon < 0$.

В §4.3 рассмотрено обобщенное УКС. При конкретизации его коэффициентов можно получать уравнения, которые имеют собственные названия и встречаются во многих разделах механики и математической физики. Итак, рассмотрим уравнение

$$u_t + \gamma u_{xxxx} + \beta u_{xx} + \alpha u + \gamma_1 u_x + \gamma_2 u_{xxx} + \gamma_3 u_{xxxxx} + a_2(u^2)_x + b_2(u^2)_{xx} + a_3(u^3)_x + b_3(u^3)_{xx} = 0, \quad (57)$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, a_2, b_2, a_3, b_3 \in R$, а $\gamma, \beta, \alpha \geq 0$, $u = u(t, x)$. Во многих прикладных работах уравнение (57) рассматривают вместе с периодическими краевыми условиями

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \quad (58)$$

В §4.3 рассмотрен вариант с $\gamma > 0$ ($\gamma = 1$). Следует различать два случая: 1) $\alpha > 0$; 2) $\alpha = 0$. Второй – имеет некоторые особенности, которые характерны для традиционного варианта УКС.

При $\alpha > 0$ рассмотрены бифуркационные задачи, возникающие при смене устойчивости у нулевого состояния равновесия. Здесь возможно два типа критических случаев в задаче об устойчивости нулевого решения:

- 1) когда при некоторых $\alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1$ реализуется критический случай одной пары чисто мнимых корней;
- 2) когда при $\alpha = \alpha_2 = m^2(m+1)^2, \beta = \beta_2 = m^2 + (m+1)^2$ в спектре устойчивости нулевого решения появляются две пары чисто мнимых собственных значений.

В первом случае, как показано в §4.3, при отклонении от чисто критического случая могут бифурцировать периодические решения и в том числе устойчивые.

Во втором критическом случае, при отклонении от чисто критического случая показана возможность бифуркаций как циклов, так и двумерных торков.

Особый интерес представляет случай $\alpha = 0$. В §4.3 рассмотрено уравнение (57) с $a_3 = b_3 = b_2 = 0$, которое называют уравнением Кавахары. Изучены бифуркации при $b = 1 + \varepsilon$. В частности, показано существование двухпараметрического семейства решений

$$u(t, x, c, \varepsilon) = c + 2\rho\varepsilon^{1/2} \cos(\psi_c) + O(\varepsilon), \quad \psi_c = x + \sigma(c)t + c_0,$$

где $\rho = \sqrt{-\frac{1}{l}}, l = -\frac{4a_2^2}{3(4+d)^2}, d = 5\gamma_3 - \gamma_2, \sigma(c) = \gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_3 - 2a_2c, c, c_0 \in R, a_2 \neq 0$.

Решения $u(t, x, c, \varepsilon)$ формируют локальный аттрактор, размерность которого равна двум. Все решения на нем периодические функции t и неустойчивы в смысле определения Ляпунова в норме фазового пространства решений данной краевой задачи.

Последняя глава имеет вспомогательный характер. Ее результаты были использованы в некоторых фрагментах предыдущих глав. В вещественном гильбертовом пространстве H рассмотрим полугруппу нелинейных операторов

$$Z(t, u) = T(t)u + R(t, u). \quad (59)$$

Будем предполагать, что $T(t)$ полугруппа линейных ограниченных операторов класса (C_0) . Производящий оператор полугруппы $T(t)$ обозначим через A , область определения которого H_A плотна в H .

Пусть $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) собственные числа линейного оператора A . Через $e_j = h_j + ig_j$ обозначим соответствующие им собственные и присоединенные элементы. При рассмотрении вопроса о собственных значениях и собственных элементах линейного оператора A в ситуации общего положения следует рассматривать этот оператор в комплексном расширении пространства H . Через $\varphi_j = \psi_j + i\Theta_j$ обозначим собственные и присоединенные элементы сопряженного оператора A , отвечающие тому же собственному значению λ_j . Будем считать, что они образуют биортогональные системы и обе они являются базисом Рисса (Рисса-Бари). Собственные числа линейного оператора A считаем

пронумерованными таким образом, что $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots \geq \alpha_j \geq \dots$. Пусть также, при некотором натуральном N : 1) $\alpha_N - \alpha_{N+1} = \alpha > 0$; 2) $\alpha_{N+1} < 0$. Будем использовать обозначение $\|u\|_A = \|u\| + \|Au\|$, если $u \in H_A$, а $\|\cdot\|$ – норма в H .

Перейдем к описанию нелинейного оператора $R(t, u)$. Считаем, что 1) $R(t, 0) = 0$ при всех t ; 2) нелинейный оператор $R(t, u)$ непрерывен по совокупности переменных в норме H_A , как оператор из $R_+^1 \times H_A$ в H_A ($R_+^1 = \{t \geq 0\}$); 3) $\|R(t, u)\|_A \leq a_0(t)$; 4) $\|R(t, u) - R(t, v)\|_A \leq a_1(t)\|u - v\|_A$. Здесь $a_0(t), a_1(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции. При этом $a_0(t), a_1(t) \rightarrow 0$, если $t \rightarrow 0$. Пусть, кроме того, $\dot{a}_1(0) = K$, где положительная постоянная K достаточно мала. Степень малости укажем ниже, то есть K считаем "регулируемым параметром".

Пусть H_1 подпространство H , натянутое на элементы $h_1, h_2, \dots, h_N, g_1, g_2, \dots, g_N$, $H_{1A} = H_1 \cap H_A$. Ясно, что $H_{1A} = H_1$ ($\dim H_1 = n$) и H_1 изоморфно R^n , где $n \leq 2N$. Обозначим через P_1 проектор на H_1 и положим $P_2 = I - P_1$, где I_1 единичный оператор. Положим $H_2 = P_1 H$, $H_{2A} = P_2 H_A$. Тогда, используя введенные проекторы и подпространства, нелинейную полугруппу (59) можно переписать в следующем виде

$$v_t = T_1(t)v + R_1(t, v, w), \quad w_t = T_2(t)v + R_2(t, v, w). \quad (60)$$

$$v_t = P_1 u(t), \quad w_t = P_2 u(t), \quad v = P_1 u, \quad w = P_2 w,$$

$$R_1 = P_1 R, \quad R_2 = P_2 R, \quad T_1(t) = P_1 T(t), \quad T_2(t) = P_2 T(t).$$

Семейство операторов $\{T_1(t)\}$ состоит из линейных операторов, действующих в конечномерном пространстве $H_1(R^n)$. Они образуют группу линейных ограниченных операторов. При этом $T_1(-t) = T_1^{-1}(t)$. Добавим, что группа $T_1(t)$ порождена решениями системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{v} = A_1 v$, $A_1 = P_1 v$, $v \in H_1 = R^n$.

Определение 1.1. Множество (многообразие) M называется инвариантным для нелинейной полугруппы (1.1), если включение $u \in M$ влечет за собой включение $Z(t, u) \in M$ при всех $t \geq 0$.

Определение 1.2. Множество (многообразие) M_l называется локально инвариантным, если оно инвариантно для семейства отображений (59) при всех $t \geq 0$ пока $Z(t, u) \in S_A(r)$ при некотором $r > 0$. Здесь $S_A(r)$ шар радиуса r в пространстве H_A , то есть $u \in S_A(r)$, если $\|u\|_A \leq r$.

Определение 1.3. Инвариантное многообразие (множество) M_{in} будем называть инерциальным многообразием, если 1) M – конечномерно; 2) M – экспоненциальный аттрактор для нелинейной полугруппы (59), то есть справедливо предельное равенство $\lim_{t \rightarrow \infty} d(Z(t, u), M_{in}) = 0$. При этом для функции $d(t) = d(Z(t, u), M_{in})$ справедлива экспоненциальная оценка $d(t) \leq C \exp(-\nu t)$, $C, \nu > 0$, $C = const$.

Определение 1.4. Инвариантное многообразие $M \subset C_Z$, если оно задается уравнением $w_t = V(v_t)$, где нелинейный оператор $V(v)$ действует из H_1 в $H_{2A} = H_A \cap H_2$. При этом: 1) $V(0) = 0$; 2) $\|V(v_1) - V(v_2)\|_A \leq \|v_1 - v_2\|_A$; 3) нелинейный оператор $V(v)$ определен при всех $v \in H_A$ и для него определена норма $\|V(v)\| = \sup_{v \in H_A} \|V(v)\|_A$.

Далее через $d(V_1, V_2)$ будем обозначать расстояние в пространстве C_Z .

Теорема 1.1. Пусть выполнены неравенства $-\alpha + 6K < 0$, $\alpha_{N+1} + 3K < 0$, то есть $K \leq \min(\alpha/6, -\alpha_{N+1})$. Тогда нелинейная полугруппа (59) имеет единственное инерциальное многообразие $M_{in} \subset C_Z$.

Отметим, что неравенство $K < \min(\alpha/6, -\alpha_{N+1})$ выполнено в силу предположения о том, что K достаточно малая постоянная.

Теорема 1.2. При $t \geq 0$ справедливо неравенство $d(Z(t, u), M_{in}) \leq K_0 \exp(-\gamma_0 t) d(u, M_{in})$, где K_0, γ_0 – положительные постоянные, а через $d(u, M_{in})$ обозначено расстояние от элемента u до M_{in} в смысле метрики пространства H_A .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассмотрены новые для бесконечномерных динамических систем бифуркационные задачи, выбор которых был связан с их актуальностью для приложений. Развиваемые в диссертации методы могут быть использованы при анализе других динамических систем с распределенными параметрами. Часть полученных результатов были уже использованы при анализе функционально-дифференциальных уравнений с частными производными, некоторых краевых задач из макроэкономики.

Подход, который развивается в диссертации может быть использован для анализа новых задач динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Эффективность алгоритмической части этих исследований позволяет рассматривать задачи, где возможны многомодовые бифуркации. Такая ситуация не является исключительной для дифференциальных уравнений с частными производными, у которых число пространственных переменных больше 1. При этом именно такие уравнения часто представляют большой интерес с точки зрения приложений.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в журналах, включенных в перечень международных баз данных (Web of Sciences, Scopus), список ВАК:

1. Куликов А.Н. Нелинейный панельный флаттер: опасность жесткого возбуждения колебаний // Дифференциальные уравнения. 1992. Т.28. №6. С.1080-1082.

2. Куликов А.Н. Об одном аналоге бифуркационной теоремы Хопфа в задаче о математическом исследовании нелинейного панельного флаттера при малом коэффициенте затухания // Дифференциальные уравнения. 1993. Т.29. №5. С.780-785.
3. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний при малом коэффициенте демпфирования в сверхзвуковом потоке газа // Прикладная математика и механика. 2009. Т.73. В.2. С.271-281.
4. Куликов А.Н. Резонанс 1:3 - одна из возможных причин нелинейного панельного флаттера // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т.57. В 7. С.1266-1279.
5. Куликов А.Н. Нелинейный панельный флаттер. Резонанс собственных частот - одна из возможных причин жесткого возбуждения колебаний // Вестник Нижегородского университета. 2011. Т.4. №2. С.193-194.
6. Куликов А.Н. Альтернативный вариант объяснения причины жесткого возбуждения колебаний в задаче о нелинейном панельном флаттере // Механика машин, механизмов и материалов (изд-во Акад. наук Беларуси). 2013. №4(25). С.51-56.
7. Куликов А.Н. Аттракторы нелинейной краевой задачи, встречающийся в теории аэроупругости // Дифференциальные уравнения. 2001. Т.37. №22. С. 1-5.
8. Куликов А.Н., Пилипенко Г.В. Резонанс собственных частот в задаче о флаттере пластины в сверхзвуковом потоке газа // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т.18. №1. С.56-67.
9. Куликов А.Н. Резонансная динамика, как причина жесткого возбуждения колебаний в некоторых задачах упругой устойчивости // Динамические системы. 2013. Т.3(31). №1-2. С.49-68.
10. Куликов А.Н. Бифуркации малых периодических решений в случае близком к резонансу 1:2 для одного класса нелинейных эволюционных уравнений // Динамические системы. 2012. Т.2(30). №3-4. С.241-258.
11. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Дифференциальные уравнения. 2003. Т.39. №5. С. 584-601.
12. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Инвариантные торы одного класса отображений: сохранение тора при возмущениях // Дифференциальные уравнения. 2003. Т.39. №6. С.738-753.
13. Коршунова Е.В., Куликов А.Н. Пространственные неоднородные инвариантные торы в модели мультипликатор - акселератор // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т.15. №15. С.45-51.

14. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Развитие турбулентности по Ландау в модели мультипликатор - акселератор // ДАН. 2008. Т.42. №6. С.739-743.
15. Куликов А.Н. Аттракторы двух краевых задач для модифицированного телеграфного уравнения // Нелинейная динамика. 2008. Т.4. №1. С.56-67.
16. Кокуйкин Е.С., Куликов А.Н. Циклы и торы деловой активности в одной математической модели макроэкономики // Моделирование и анализ информационных систем. 2009. Т. 16. №4. С. 86-95.
17. Куликов А.Н. О возможности реализации сценария Ландау-Хопфа перехода к турбулентности в двух задачах теории упругой устойчивости // Дифференциальные уравнения (Хроника семинара по проблемам нелинейной динамики и управлению при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова). 2011. Т.47. №2. С.296-298.
18. Куликов А.Н. О реализации сценария Ландау-Хопфа перехода к турбулентности в некоторых задачах теории упругой устойчивости // Дифференциальные уравнения. 2012. Т.48. №9. С.1278-1291.
19. Колесов В.С., Колесов Ю.С., Куликов А.Н., Федик И.И. Об одной математической задаче теории упругой устойчивости // Прикладная математика и механика. 1978. Т.42. №3. С.458-465.
20. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Local bifurcations of running waves of weakly dissipative versions of Ginzburg-Landau equation and its generalization // Journal of Mathematical Sciences. 2013. V. 188. №3. P. 273-283.
21. Kulikov A.N., Rudy A.S. States of equilibrium of considered matter within Ginzburg - Landau ψ^4 – model // Chaos, Solitons and Fractals. 2003. V. 15. P. 75-85.
22. Kulikov A. Bifurcation d' Andronov-Hopf et Systems d'Equation aux derivees partielles singulieres de type parabolique // Caher Mathematiques. 1988. Fasc. 1. P. 57-60.
23. Колесов А.Ю., Куликов А.Н., Розов Н.Х. Цилиндрические бегущие волны обобщенного кубического уравнения Шредингера // ДАН. 2006. В.73. №1. С.125-129.
24. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Бифуркация автоволн обобщенного уравнения Шредингера в случае трех независимых переменных // Вестник Удмуртского ун-та. 2008. Вып.3. С.23-34.
25. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Локальные бифуркации плоских бегущих волн обобщенного кубического уравнения Шредингера // Дифференциальные уравнения. 2010. Т.46. №9. С.1290-1299.
26. Котиков А.Э., Куликов А.Н. Бифуркация бегущих волн видоизмененного уравнения Гинзбурга-Ландау // Моделирование и анализ информационных систем. 2008. Т.15. №1. С.10-15.

27. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Послекритические и докритические бифуркации бегущих волн модифицированного уравнения Гинзбурга-Ландау // Вестник Удмуртского ун-та. 2009. В.4. С.71-78.
28. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т.52. №5. С.930-945.
29. Куликов А.Н., Куликов Д.А., Рудый А.С. Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки // Вестник Удмуртского ун-та. 2011. Вып.4. С.86-99.
30. Метлицкая А.В., Куликов А.Н., Рудый А.С. Механизм формирования волнового нано-рельефа при эрозии поверхности ионной бомбардировки в рамках модели Бредли-Харпера // Микроэлектроника. 2013. Т.42. №4. С.298-305.
31. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Bifurcation in a boundary-value problem of nanoelectronics // Journal of Mathematical Sciences. 2015. V. 208. №2. P.211-221.
32. Kulikov A., Kulikov D. Bifurcation in Kuramoto-Sivashinsky equation // Pliska Studia Mathematica. 2015. V. 25. P. 101-110.
33. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского. // Вестник национального исследовательского ядерного ун-та "МИФИ". 2014. Т.3. №4. С. 408-415.
34. Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В. Моделирование процессов формирования наноструктур при распылении ионной бомбардировкой // Микроэлектроника. 2011. Т.40. №2. С.109-118.
35. Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В., Куликов Д.А. Высокомодовые волновые рельефы в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии // Микроэлектроника. 2014. Т.43. №4. С.282-288.
36. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Нелокальная модель формирования рельефа под воздействием потока ионов. Неоднородные наноструктуры // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. №3. С. 33-50.
37. Kulikov A.N., Kulikov D.A. Spatially Inhomogeneous Solutions for a Modified Kuramoto – Sivashinsky Equation // Journal of Mathematical Sciences. 2016. V. 219. №2. P.173-183.

Другие публикации:

1. Куликов А.Н. Ненулевые состояния равновесия одной краевой задачи, моделируемой явления дивергенции крыла в сверхзвуковом потоке газа // Моделирование и анализ информационных систем. 1997. Вып.4. С.69-72.
2. Куликов А.Н. О состояниях равновесия одной нелинейной краевой задачи с неклассическими краевыми условиями // Моделирование и анализ информационных систем.

1998. Вып. 5. С.41-46.

3. Куликов А.Н. Жесткое возбуждение колебаний характерное для флаттера при малом коэффициенте демпфирования // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2006. Т.29. №11. С. 131-134.

4. Бекбулатова (Толбей) А.О., Куликов А.Н. Резонанс 1:2 как источник жесткого возбуждения колебаний // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль. 2002. №5. С.22-27.

5. Куликов А.Н. Нелинейный панельный флаттер. Резонанс 1:3 как одна из причин жесткого возбуждения колебаний // Труды Воронежской зимней математической школы С.Г.Крейна. 2010. С.111-119.

6. Kulikov A.N. Resonance of proper frequencies 1:2 as a reason for hard excitation of oscillations for the plate in ultrasonic gas // Труды международного конгресса ENOC-2008. Russia. Saint-Petersburg. 2008. P.1638-1643.

7. Колесов А.Ю., Куликов А.Н. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений. Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2003. 107с.

8. Куликов А.Н. О бифуркациях инвариантных торов // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Межвузовский математический сборник. Ярославль: ЯрГУ. 1983. С.112-117.

9. Куликов А.Н. Интегральные многообразия гиперболических уравнений в случае, близком к критическому одной пары чистых мнимых корней // Вестник Ярославского ун-та. 1975. В.13. С.94-117.

10. Куликов А.Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ. 1976. С. 114-129.

11. Куликов А.Н. Инерционные многообразия нелинейных автономных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Препринт №85 за 1991 г. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР. 22с.

12. Куликов А.Н. Применение амплитудного метода Колесова к задаче о диффузионной неустойчивости // Тр. ин-та математики и кибернетики А.Н. Литовской ССР. 1981. В. 29. С. 51-67.

13. Куликов А.Н. Возможность реализации сценария Ландау перехода к турбулентности в задаче о нелинейных колебаниях трубы, транспортирующей жидкость // Нелинейные колебания механических систем. Труды VIII Всероссийской конференции. Н.-Новгород. 2008. Т.2. С.378-380.

14. Косарева Е.С., Куликов А.Н. Об одной нелинейной краевой задаче, моделирующей

экономические циклы // Моделирование и анализ информационных систем. 2003. Т.10. №2. С.18-21.

15. Куликов А.Н. Бифуркация автоколебаний в двух сингулярно возмущенных нелинейных краевых задачах гиперболического типа // Математика в Ярославском ун-те. Сборник обзорных статей к 25-летию математического фак-та. Ярославль. 2001. С.183-194.

16. Куликов А.Н. К вопросу о бифуркации автоколебаний для сингулярно возмущенной краевой задачи гиперболического типа // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2001. №5. С.74-76.

17. Куликов А.Н., Либерман Б.Д. О новом подходе к исследованию задач нелинейного панельного флаттера // Вестник ЯрГУ. 1975. Вып. 13. С.118-139.

18. Куликов А.Н. Анализ условий устойчивости бегущих волн // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль. 1985. С.103-107.

19. Рудый А.С., Куликов А.Н., Метлицкая А.В. Самоорганизация наноструктур в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии поверхности кремния ионной бомбардировкой. Глава 1 в монографии "Кремниевые наноструктуры". Физика. Технология. Моделирование. Ярославль: Индиго, 2014. 560 с.

20. Рудый А., Метлицкая А., Куликов А., Куликов Д. Самоорганизация наноструктур при ионном распылении полупроводников полупроводников. Saarbrücken: Lap Lambert Academic Publ. 2015, 87 с.

21. Куликов А.Н. Применение метода инвариантных многообразий в локальных задачах устойчивости и теории колебаний // Учебное пособие. Ярославль: ЯрГУ. 1983. 75 с.

22. Куликов А.Н., Куликов Д.А. Об одной краевой задаче для уравнения Курамото-Сивашинского // Труды XI Международных Колмогоровских чтений. Ярославль. 2013. С.89-93.

23. Куликов А.Н. Одно замечание о свойствах двумерных инвариантных многообразий // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: ЯрГУ. 1978. С.78-80.

24. Куликов А.Н. К вопросу о единственности инвариантного многообразия в критическом случае // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль : ЯрГУ. 1979. С.81-85.