

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО»



На правах рукописи
УДК 519.175

Мокеев Дмитрий Борисович

УПАКОВКИ И ВЕРШИННЫЕ ПОКРЫТИЯ ПУТЕЙ В ГРАФАХ И КЁНИГОВЫ ГРАФЫ

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Алексеев Владимир Евгеньевич

Нижний Новгород — 2018

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Терминология, обозначения и общие факты о кёниговых графах	14
1.1 Терминология и обозначения	14
1.1.1 Множества, графы и подграфы	14
1.1.2 Наследственные классы графов	16
1.2 Упаковки и покрытия в графах	18
1.2.1 Упаковки и покрытия как пара двойственных задач	18
1.2.2 Некоторые частные случаи	19
1.2.3 Упаковки подграфов и их вершинные покрытия	20
1.2.4 Разрыв двойственности в задачах об упаковке и покрытии	21
1.3 Кёниговы графы	22
1.3.1 Общие свойства классов кёниговых графов	23
1.3.2 Особенности структурного описания кёниговых графов относительно путей	25
Глава 2. Структурное описание и запрещённые графы для класса кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$	27
2.1 Кёниговы деревья	27
2.2 Запрещённые подграфы	28
2.3 Структурное описание класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$	30
2.4 Основной результат	31
Глава 3. Структурное описание и запрещённые графы для класса кёниговых графов относительно P_3	33
3.1 R - Q -расширение графов	33
3.1.1 Особенности однородных клик и секций R - Q -расширений графов	33
3.1.2 R - Q -расширения лесов	34
3.2 Запрещённые графы	35

	Стр.
3.2.1	Три пятивершинных графа 36
3.2.2	Бесконечные семейства графов 36
3.3	Структурное описание класса $\mathcal{K}(P_3)$ 39
3.3.1	R - Q -расширения графов, не являющихся простыми циклами 39
3.3.2	R - Q -расширения циклов из 6 и 9 вершин 42
3.3.3	R - Q -расширения циклов 12 и более вершин 46
3.4	Полное описание класса $\mathcal{K}(P_3)$ 49
3.5	Алгоритмические особенности кёниговых графов относительно P_3 50
3.5.1	Вспомогательный взвешенный граф 50
3.5.2	Распознавание кёниговых графов относительно P_3 51
3.5.3	Задачи P_3 -MATCHING и P_3 -COVER в кёниговых графах относительно P_3 54

Глава 4. Структурное описание и запрещённые графы для класса кёниговых графов относительно P_4 56

4.1	Особенности класса и дополнительная терминология 56
4.1.1	P_4 -связность 56
4.1.2	Самодополнительность класса $\mathcal{K}(P_4)$ 57
4.2	R - F_4 -расширение и RT -расширение графов 58
4.2.1	Особенности однородных кографов и секций R - F_4 -расширений 58
4.2.2	RT -расширение 59
4.2.3	RT -расширения лесов 62
4.3	Запрещённые графы 65
4.3.1	Бесконечные семейства графов 66
4.3.2	Другие запрещённые графы 72
4.4	Структурное описание одного из подклассов класса $\mathcal{K}(P_4)$ 73
4.4.1	S - RT -расширения графов, не являющихся простыми циклами 73
4.4.2	RT -расширения циклов из 8 вершин 82
4.4.3	RT -расширения циклов из 12 и более вершин 84
4.5	Основной результат 89

	Стр.
Заключение	91
Список сокращений и условных обозначений	93
Словарь терминов	96
Список литературы	99
Список рисунков	107

Введение

Задачи об *упаковке* представляют собой класс задач дискретной оптимизации, целью которых является укладка как можно большего числа объектов заданного типа в «контейнер».

Математическая модель может быть представлена семейством подмножеств некоторого множества, т.е. гиперграфом, а задача состоит в нахождении наибольшего числа непересекающихся ребер этого гиперграфа. Она может быть сформулирована как задача целочисленного линейного программирования:

$$\max_{Ax \leq \mathbb{1}, x \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m} \sum_{i=1}^m x_i, \quad (1)$$

где $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ – матрица инцидентности гиперграфа, $\mathbb{1}$ – вектор, все компоненты которого равны 1.

Каждой такой задаче можно поставить в соответствие двойственную в смысле линейного программирования задачу. Она имеет следующий вид

$$\min_{yA \geq \mathbb{1}, y \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n} \sum_{j=1}^n y_j \quad (2)$$

и является задачей о вершинном покрытии гиперграфа: требуется найти наименьшее множество вершин, покрывающее все ребра.

Задачи об упаковке и покрытии имеют огромное количество интерпретаций в различных разделах геометрии и дискретной математики. Некоторые из них считаются классическими задачами и изучены достаточно подробно, другие изучены в меньшей степени, но также представляют интерес. Большое количество публикаций посвящено сложностным особенностям таких задач (см. например, [16; 17; 21; 22; 33; 35; 56]).

Многие задачи теории графов можно интерпретировать как задачи об упаковке и покрытии. 9 из них входят в список 21 NP-полных задач Карпа [42]. Все эти задачи можно считать классическими NP-полными задачами. Следовательно, в предположении $P \neq NP$, для них не существует эффективных алгоритмов решения. То же можно сказать и про многие другие задачи об упаковке и покрытии в графах. Этот факт побуждает исследователей к рассмотрению различных частных случаев задач, допускающих полиномиальные алгоритмы решения.

Говорят, что гиперграф с матрицей инцидентности A *упакован*, если обе задачи

$$\max_{Ax \leq \mathbb{1}, x \geq 0} \sum_{i=1}^m x_i \quad \min_{yA \geq \mathbb{1}, y \geq 0} \sum_{j=1}^n y_j$$

имеют целочисленные оптимальные вектора [70]. Иными словами, гиперграф *упакован* если в задачах 1 и 2 разрыв двойственности равен 0 [21]. То есть минимум в задаче о покрытии и максимум в задаче об упаковке на упакованном гиперграфе совпадают.

Поскольку задача линейного программирования без условия целочисленности векторов принадлежит классу P, на упакованном гиперграфе обе задачи 1 и 2 решаются эффективно (точнее, имеются в виду задачи распознавания, ассоциированные с задачами 1 и 2: требуется выяснить, существует ли целочисленный вектор, на котором значение целевой функции не больше или не меньше заданной величины).

Ряд известных теорем теории графов можно перефразировать в терминологии упакованных гиперграфов. Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть вершины и гиперрёбра гиперграфа соответствуют вершинам и рёбрам некоторого графа G . Тогда упаковкой будет являться паросочетание графа G , а покрытием – его вершинное покрытие. Согласно теореме Кёнига-Эгервари [48], такой гиперграф упакован, если граф G двудольный.
2. Пусть G – произвольный граф. Пусть вершины гиперграфа соответствуют независимым множествам графа G , а его каждое его гиперребро соответствует вершине графа и содержит все независимые множества, содержащие эту вершину. Тогда упаковкой является клика графа G , а покрытие соответствует правильной раскраске этого графа. Такой гиперграф упакован, если граф G совершенный – это следует из определения совершенных графов (см. например [5]).
3. Пусть вершины и гиперрёбра гиперграфа соответствуют вершинам и порождённым циклам некоторого графа G . Тогда упаковкой является упаковка циклов, а покрытием – множество вершин графа G , разрезающих циклы. Класс графов, соответствующих упакованным гиперграфам такого типа, описан в [24].

Отметим, что число гиперрёбер в гиперграфе может экспоненциально зависеть от числа его вершин. Поэтому в общем случае упакованность гиперграфа

не всегда означает, что соответствующие задачи упаковки и покрытия решаются за полиномиальное время. Тем не менее, достижение нулевого разрыва двойственности может способствовать нахождению эффективных алгоритмов решения этих задач. Это происходит, например, в двудольных графах для задачи о вершинном покрытии или в совершенных графах для задач о независимом множестве и о раскраске графа [32; 67].

Представляется перспективным выделение новых случаев эффективной разрешимости задач об упаковке и покрытии в классах графов, на которых достигается нулевой разрыв двойственности для соответствующей пары задач.

Рассмотрим следующий тип задач упаковки и покрытия на графах. Пусть вершины гиперграфа соответствуют вершинам некоторого графа G , а его рёбра – подграфам, изоморфным графам из некоторого множества \mathcal{X} . Тогда упаковкой является множество попарно не пересекающихся \mathcal{X} -подграфов или так называемая \mathcal{X} -упаковка графа G , а покрытием – множество вершин, удаление которых порождает граф, не содержащий подграфов из множества \mathcal{X} , то есть так называемое вершинное покрытие \mathcal{X} -подграфов или просто \mathcal{X} -покрытие.

Стоит заметить, что в литературе понятия \mathcal{X} -упаковки и \mathcal{X} -покрытия трактуются по-разному. Ряд авторов учитывают при подсчёте любые подграфы, изоморфные графам из \mathcal{X} (будем называть такие \mathcal{X} -упаковки и \mathcal{X} -покрытия слабыми), другие – только порождённые подграфы такого типа (соответственно, сильные \mathcal{X} -упаковки и \mathcal{X} -покрытия).

Заметим, что от слабых \mathcal{X} -упаковок и \mathcal{X} -покрытий можно перейти к сильным, добавив в \mathcal{X} для каждого графа $H \in \mathcal{X}$ все графы, полученные из H добавлением рёбер. Поэтому говоря об \mathcal{X} -упаковках и \mathcal{X} -покрытиях мы будем иметь в виду сильные \mathcal{X} -упаковки и \mathcal{X} -покрытия, поскольку данная трактовка охватывает больший объём задач.

Для различных \mathcal{X} задачи об \mathcal{X} -упаковке и \mathcal{X} -покрытии имеют различный сложностной статус. Известно, например, что уже при $\mathcal{X} = \{P_2\}$ задача об \mathcal{X} -покрытии NP-полна в общем случае [42], а при $\mathcal{X} = \{P_3, C_3\}$ – NP-полна в 3-регулярных графах [13] (здесь и далее P_k означает путь из k вершин, C_k – цикл из k вершин). Также известно, что задача о P_2 -упаковке принадлежит классу P [25], а если \mathcal{X} содержит граф, имеющий компоненту связности с тремя или более вершинами, задача об \mathcal{X} -упаковке, напротив, NP-полна [46].

Немало работ посвящено задачам о сильных и слабых \mathcal{X} -упаковке и \mathcal{X} -покрытии, где \mathcal{X} состоит из одного графа P_k , для различных k .

Задачи о покрытии путей возникают, например, при планировании дорожных маршрутов и в задачах маршрутизации в компьютерных сетях [31]. Кроме того, покрытия путей различной длины могут применяться в задачах разбиения графа на компоненты связности малого размера [53]. Также P_4 -упаковки и P_4 -покрытия изучались при исследовании совершенных графов и графов Бержа (см., например, работу Ч. Хоан, В. Ли [37]).

Исследованиям задачи о покрытиях путей посвящён ряд работ Я. Катренича, Ф. Кардоча, М. Яковаца, А. Келманса, Ц. Ту, М. Сяо, М. Чан, М. Капелле и др. Показано, что задача о P_k -покрытии полиномиально разрешима в деревьях и NP-трудна в общем случае при $k \geq 2$ [13; 81].

Имеется ряд точных алгоритмов решения задач о P_k -покрытии для $k = 3$ [28; 41; 43; 82], $k = 4$ [14; 78] и произвольного k [13; 65; 66]. Также имеется ряд приближённых алгоритмов поиска минимального P_k -покрытия, имеющих полиномиальную сложность в графах общего вида и в некоторых отдельных классах графов для $k = 3$ [11; 28; 41; 43; 64; 76; 79–81], $k = 4$ [14; 54] и произвольного k [13; 65; 77].

Кроме того, установлены верхние и нижние оценки минимальной мощности P_k -покрытий для $k = 3$ и для произвольного k в графах общего вида [12; 13; 38; 39; 65] и в некоторых классах графов [40; 44; 45; 84].

Задачам об упаковке путей также посвящён ряд работ. В отличие от задачи о P_k -покрытии, задача о P_k -упаковке эффективно решается при $k = 2$ [25]. Однако при $k \geq 3$ данная задача также является NP-полной в общем случае и в 3-регулярных графах [46; 59]. Более того, в работе С. Мишра и др. показано, что при $k = 4$ данная задача является APX-полной, то есть, в предположении $P \neq NP$, для неё не существует приближённого алгоритма с произвольным коэффициентом аппроксимации [23].

Ш. Масуямой и Т. Ибараки, напротив, было показано, что задача о P_k -упаковке решается за линейное время в классе лесов при любом k [59]. В работе А. Косовски, М. Малафейски, П. Зилински дано описание класса графов, в котором задача о P_3 -упаковке также решается за линейное время [52]. В работах В. Алексеева и Д. Мокеева дано описание классов графов, в которых задачи о сильной и слабой P_3 -упаковке, а также о P_4 -упаковке решаются за время $O(n^2)$. Стоит заметить, что соответствующие задачи о покрытии также решаются в этих классах за время $O(n^2)$ (в обоих случаях предполагается, что граф задан матрицей смежности). Этим классам посвящена настоящая диссертация.

Алгоритм нахождения наибольшей P_3 -упаковки и наименьшего P_3 -покрытия в одном из таких классов также представлен в диссертации.

Другим исследованиям задач об упаковке путей различной длины посвящены работы А. Келманса, А. Косовски, Х. Фернау, Р. Хассина, Ч. Хоан и др. Получены оценки мощности максимальной P_k -упаковки для $k = 3$ и произвольного k в различных классах графов [40; 45; 50–52].

Имеются точные алгоритмы решения задачи о P_k -упаковке для $k = 3$ [27], а также приближённые полиномиальные алгоритмы решения этих задач для $k = 3$ [72], $k = 4$ [34] и произвольного k [68].

Несмотря на двойственность задач об P_k -упаковке и P_k -покрытии, эти задачи достаточно редко рассматриваются вместе. Тем не менее, исследование классов графов, в которых достигается нулевой разрыв двойственности для этих задач (то есть гиперграф для соответствующих задач упакован) представляется актуальным, так как позволяет найти алгоритмы решения обеих задач, имеющие полиномиальную сложность в данных классах.

Автору известно несколько результатов описания классов графов, имеющих упакованный гиперграф для задач об \mathcal{X} -упаковке и \mathcal{X} -покрытии.

Из теоремы Кёнига [49] следует, что в двудольных графах достигается нулевой разрыв двойственности в задачах о паросочетании (P_2 -упаковка) и о вершинном покрытии (P_2 -покрытие). С. Мишрой и др. [74] описан критерий для графов, имеющих упакованный гиперграф для задач о паросочетании и вершинном покрытии.

Г. Дин, Ч. Сюй, В. Цзан описали наследственный класс графов, имеющих упакованный гиперграф для задач о \mathcal{C} -упаковке и \mathcal{C} -покрытии, где $\mathcal{C} = \{C_n | n \geq 3\}$ [24].

В статье В. Алексева и Д. Мокиева [4] введено понятие *кёнигова графа относительно \mathcal{X}* – это граф, любой порождённый подграф которого имеет упакованный гиперграф для задач об \mathcal{X} -упаковке и \mathcal{X} -покрытии. Было получено описание классов кёниговых графов относительно P_3 и $\{P_3, C_3\}$ [10]. Также в работах Д. Мокиева описано несколько классов графов, имеющих упакованный гиперграф для задач о P_4 -упаковке и P_4 -покрытии [8; 61; 62] и для задач о P_k -упаковке и P_k -покрытии, где $k \geq 5$ [63].

Целью данной работы является исследование классов кёниговых графов относительно P_3 , $\{P_3, C_3\}$ и P_4 , а также разработка эффективных алгоритмов

для решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на кёниговых графах относительно P_3 .

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Дать описание классов кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$, P_3 и P_4 .
2. Разработать алгоритм распознавания кёниговых графов относительно P_3 .
3. Разработать алгоритмы решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на кёниговых графах относительно P_3 .

Научная новизна: В диссертации вводится новое понятие кёнигова графа относительно данного множества графов. Получены полные описания классов кёниговых графов относительно множеств $\{P_3\}$ и $\{P_3, C_3\}$ и частичное описание класса кёниговых графов относительно множества $\{P_4\}$. Предложены полиномиальные алгоритмы решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии для класса кёниговых графов относительно $\{P_3\}$. Все эти результаты являются новыми.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при решении задач об упаковке и покрытии относительно различных множеств графов и близких к ним задач. Они могут найти применения в исследованиях, проводимых в профильных российских и международных научных группах. Они могут также применяться при разработке и чтении спецкурсов по теории графов.

Методология и методы исследования. В диссертации использованы методы теории графов, в частности, методы исследования наследственных классов графов, а также методы линейной алгебры и теории множеств.

Основные положения, выносимые на защиту: Наиболее важными из полученных результатов являются следующие.

1. Дано полное описание класса кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$. Показано, что граф принадлежит данному классу тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов определённого вида. Также показано, что любой граф данного класса можно построить из мультиграфа с петлями с использованием операции подразделения рёбер.
2. Дано полное описание класса кёниговых графов относительно P_3 . Показано, что граф принадлежит данному классу тогда и только тогда,

- когда не содержит порождённых подграфов определённого вида. Также описана процедура, с помощью которой можно построить любой граф данного класса из мультиграфа.
3. Предложен алгоритм распознавания кёниговых графов относительно P_3 . Показано, что алгоритм имеет сложность $O(n^2)$, где n – число вершин графа.
 4. Предложен алгоритм решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на кёниговых графах относительно P_3 . Показано, что алгоритм имеет сложность $O(n^2)$, где n – число вершин графа.
 5. Дано частичное описание класса кёниговых графов относительно P_4 . Показано, что если граф принадлежит данному классу, то не содержит порождённых подграфов определённого вида. Также описана процедура, с помощью которой можно построить некоторые графы данного класса из двудольных графов.

Достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК РФ.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. 2nd-6th International Conferences on Network Analysis (Нижний Новгород, 2012–2016);
2. XVI и XVII Международные конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Ниж. обл., 2011 и Казань, 2014);
3. VIII Молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 2011);
4. XI Международный семинар «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 2012)
5. Международная научная конференция «Дискретная математика, теория графов и их приложения» (Минск, 2013);
6. XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Респ. Крым, 2014);
7. IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Моск. обл., 2015);
8. Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 2015);

9. Одесский семинар по дискретной математике (Одесса, 2013)
10. Общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике (Нижний Новгород);
11. Семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ НН (Нижний Новгород)

Личный вклад. Все основные результаты настоящей диссертации получены автором лично.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных изданиях, 8 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 8 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 107 страниц, включая 12 рисунков. Список литературы содержит 84 наименования.

Материал диссертации организован следующим образом.

В **первой главе** приводятся обозначения и формулировки основных определений и фактов. В данной главе приводится определение класса кёниговых графов относительно \mathcal{X} и доказываются основные свойства, присущие всем классам при произвольных \mathcal{X} , а так же описываются основные инструменты для описания процедур построения кёниговых графов относительно путей.

Во **второй главе** приводится полное описание класса кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$ в терминах запрещённых графов и с использованием операции подразбиения рёбер. Некоторые из результатов данной главы используются также при описании класса кёниговых графов относительно P_3 . Результаты данной главы опубликованы в работах [2; 10].

В **третьей главе** приводится полное описание класса кёниговых графов относительно P_3 в терминах запрещённых графов. Приводится также описание процедуры R - Q -расширения графов, с помощью которой приводится альтернативное описание данного класса.

Кроме того, в третьей главе приводится описание полиномиального алгоритма распознавания кёниговых графов относительно P_3 и полиномиального алгоритма решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на графах данного класса. Результаты данной главы опубликованы в работах [1; 2; 4; 10].

В **четвёртой главе** приводится частичное описание класса кёниговых графов относительно P_4 . Описан подкласс данного класса графов и найдено множество минимальных запрещённых порождённых подграфов данного клас-

са, состоящее из 4 бесконечных семейств и 64 отдельных графов. Результаты данной главы опубликованы в работах [3; 8; 61; 62].

Глава 1. Терминология, обозначения и общие факты о кёниговых графах

1.1 Терминология и обозначения

В данном разделе вводится ряд понятий и обозначений, которые будут использоваться на протяжении этой работы. Все основные понятия теории графов, которые в этой и последующих главах не приводятся, можно найти, например, в [5; 9].

1.1.1 Множества, графы и подграфы

Все рассматриваемые в диссертации графы являются конечными неориентированными графами без петель и кратных ребер. Множество вершин и множество ребер графа G будем обозначать через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно.

В работе приняты следующие обозначения: $|G|$ – число вершин графа G ; $N(v)$ – окрестность вершины v (множество смежных с ней вершин); $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ – замкнутая окрестность вершины v .

Объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин обозначается через $G_1 + G_2$. Граф $G_1 \circ G_2$ получается из графа $G_1 + G_2$ добавлением всех рёбер, соединяющих вершину графа G_1 с вершиной графа G_2 .

Для некоторых специальных графов используются следующие обозначения. Здесь n – число вершин:

- P_n – простой путь;
- C_n – простой цикл;
- K_n – полный граф; в частности, K_1 – граф, состоящий из одной вершины;
- $K_{p,q}$ – полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле;
- O_n – пустой (не содержащий рёбер) граф;

- $W_k = C_k \circ K_1$ – колесо;
- K_4-e – граф, получаемый из K_4 удалением одного (произвольного) ребра.

Через \overline{G} обозначается граф, дополнительный к G .

Назовём n - k -*лассо*, где $n \geq 3$ граф, полученный из графа $C_n + P_k$ добавлением ребра, соединяющего вершину степени 1 пути (или единственную его вершину в случае $k = 1$) с вершиной цикла. Получившуюся вершину степени 3 в этом графе назовём *узлом*.

Рассмотрим граф, получающийся из цикла C_n добавлением двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла. Этот граф обозначим через $A(n, k)$, где k – расстояние между вершинами цикла, смежными с добавленными вершинами (если добавленные вершины смежны с одной и той же вершиной цикла, то $k = 0$).

Бриллиантом (*gem*) называется граф $P_4 \circ K_1$. *Дротиком* (*dart*) называется граф, полученный из графа K_4-e добавлением вершины, соединённой ребром с одной из его вершин степени 3.

Другие графы будут определены в соответствующих главах, так как их описание требует введения дополнительной терминологии.

Граф G' является *подграфом* графа G , если выполнены включения $V(G') \subseteq V(G)$ и $E(G') \subseteq E(G)$. Подграф некоторого графа называется *порожденным*, если любые две вершины подграфа смежны тогда и только тогда, когда эти вершины являются смежными в исходном графе. Таким образом, любой подграф получается из графа удалением вершин и ребер, а порожденный подграф – удалением только вершин (имея в виду, что операция удаления вершины подразумевает удаление также ребер, инцидентных ей). Подграф графа G , порожденный множеством вершин $A \subseteq V(G)$, будем обозначать через $G[A]$. Подграф графа G , полученный удалением множества вершин $A \subseteq V(G)$ будем обозначать через $G \setminus A$. Подграф графа G , полученный удалением вершины $v \in V(G)$ будем обозначать через $G \setminus v$.

Термины «наибольшее множество», «наименьшее множество» применительно к множествам с каким-либо свойством всюду означают множество наибольшей и наименьшей мощности соответственно с этим свойством.

Перешейком в графе называется ребро, удаление которого увеличивает число компонент связности. Ребро является перешейком в том и только в том случае, если оно не содержится ни в одном цикле.

Назовём *висячим путём* подграф, являющийся путём, одна из вершин которого имеет в данном графе степень 1, а остальные – не более 2. Отметим, что в графе может существовать не более одной вершины, смежной с вершинами висячего пути, но не принадлежащей ему. Такую вершину назовём *контактной*.

Рассматривая цикл C_n , предполагаем, что его вершины пронумерованы вдоль цикла числами $0, 1, \dots, n - 1$. При этом арифметические операции с номерами вершин выполняются по модулю n .

Если $n = k \cdot q$, где $k \in \mathbb{N}$, $q \geq 3$, то класс вычетов номеров вершин по модулю q будем называть *q-классом*.

1.1.2 Наследственные классы графов

Класс графов \mathcal{X} называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс \mathcal{X} может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов \mathbf{S} . При этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{F})$. Для наследственного класса \mathcal{X} через $\text{Forb}(\mathcal{X})$ обозначается минимальное множество запрещенных порожденных подграфов. Для любого наследственного класса это множество определяется единственным образом. Если $\text{Forb}(\mathcal{X})$ конечно, то класс \mathcal{X} называется *конечно определенным*.

Рассмотрим несколько классических примеров наследственных классов графов, некоторые из которых играют заметную роль в дальнейшем изложении:

- **Forests** – класс лесов. Из определения следует, что $\text{Forb}(\mathbf{Forests})$ составляют все простые циклы.
- **Bipartite** – класс двудольных графов. Теорема Кёнига полностью описывает множество $\text{Forb}(\mathbf{Bipartite})$, как множество всех простых циклов нечетной длины.
- **Perfect** – класс *совершенных* графов. Граф называется *совершенным*, если в любом его порождённом подграфе размер наибольшей клики (полного подграфа) совпадает с его хроматическим числом (наименьшим числом цветов в правильной раскраске графа) [5]. Это пример

наследственного класса графов, для которого задача нахождения минимального множества запрещённых порожденных подграфов оказалась трудной. Данная задача была решена в 2003 году и было показано, что $Forb(\mathbf{Perfect})$ совпадает с множеством $\{C_{2k+1}, \overline{C_{2k+1}} | k > 1\}$ [75].

- **Cographs** – класс кографов. Граф называется *кографом*, если может быть получен из множества графов K_1 с помощью операций объединения и дополнения. Понятие кографа введено в работе [20] и в ней же доказано, что $Forb(\mathbf{Cographs}) = \{P_4\}$.
- **Split** – класс расщепляемых графов. Граф называется *расщепляемым*, если существует разбиение множества его вершин на клику и независимое множество. Минимальное множество запрещенных порожденных подграфов для этого класса известно – оно состоит в точности из трёх графов. Это графы C_4 , $K_2 + K_2$ и C_5 [29].
- **Threshold** – класс пороговых графов. Граф называется *пороговым*, если может быть построен из графа K_1 последовательным выполнением следующих двух операций:
 - добавление в граф одной изолированной вершины;
 - добавление в граф вершины, связанной со всеми остальными вершинами.

Минимальное множество запрещенных порожденных подграфов для этого класса известно – оно состоит в точности из трёх графов. Это графы C_4 , $K_2 + K_2$ и P_4 [19].

Из приведенных примеров наследственных классов три последних являются конечно определенными классами. Причём, как видно из множеств запрещённых графов, $\mathbf{Threshold} = \mathbf{Cographs} \cap \mathbf{Split}$.

Будем обозначать $co(\mathcal{X})$ – множество графов, являющихся дополнительными к графам из \mathcal{X} . Класс графов \mathcal{X} назовём *самодополнительным*, если $\mathcal{X} = co(\mathcal{X})$.

1.2 Упаковки и покрытия в графах

1.2.1 Упаковки и покрытия как пара двойственных задач

Задачи об упаковке и покрытии множеств являются классическими NP-полными задачами и входят в список 21 NP-полных задач Карпа [42].

Пусть \mathcal{U} – множество, а $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{U}}$ – семейство подмножеств множества \mathcal{U} . *Упаковка* – это подсемейство $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{S}$ множеств, такое, что все множества из \mathcal{M} попарно не пересекаются, то есть если $X \in \mathcal{M}$ и $Y \in \mathcal{M}$, то $X \cap Y = \emptyset$. *Покрытие* – это подсемейство $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{S}$ множеств, объединение которых равно \mathcal{U} , то есть $\bigcup_{Z \in \mathcal{C}} Z = \mathcal{U}$.

Задача об упаковке множеств для пары $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$ состоит в том, чтобы найти наибольшую упаковку, задача о покрытии состоит в том, чтобы найти наименьшее покрытие.

Если \mathcal{U} и \mathcal{S} конечны, то можно сформулировать задачу об упаковке множеств как задачу целочисленного линейного программирования. Пусть $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, $A \in \{0,1\}^{m \times n}$, причём $a_{i,j} = 1$, если $u_i \in S_j$ и $a_{i,j} = 0$ в противном случае. Тогда задача об упаковке множеств эквивалентна следующей задаче целочисленного линейного программирования.

$$\max_{Ax \leq \mathbb{1}, x \in \mathbb{N}^m} \sum_{i=1}^m x_i, \quad (1.1)$$

где x – характеристический вектор подмножества \mathcal{U} , а $\mathbb{1}$ – вектор, все компоненты которого равны 1. Оптимальный вектор x^* соответствует наибольшей упаковке.

Возьмём теперь в качестве исходного множества множество \mathcal{S} , а в качестве семейства подмножеств – $\mathcal{U}' = \{U'_1, U'_2, \dots, U'_n\}$, где $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} U'_i = \{S_j : u_i \in S_j\}$. То есть каждое подмножество U'_i соответствует элементу u_i множества \mathcal{U} . Для такой пары множеств задача о покрытии эквивалентна следующей задаче целочисленного линейного программирования.

$$\min_{yA \geq \mathbb{1}, y \in \mathbb{N}^n} \sum_{j=1}^n y_j, \quad (1.2)$$

где y – характеристический вектор подмножества \mathcal{S} , а $\mathbb{1}$ – вектор, все компоненты которого равны 1. Оптимальный вектор y^* соответствует наименьшему покрытию.

Нетрудно видеть, что (1.1) и (1.2) составляют пару двойственных задач целочисленного линейного программирования. В дальнейшем такие упаковки и покрытия также будем называть двойственными друг другу. Из теоремы двойственности следует, что мощность максимальной упаковки всегда не больше мощности минимального двойственного покрытия.

1.2.2 Некоторые частные случаи

Задачи об упаковке и покрытии множеств имеют огромное количество интерпретаций в том числе в теории графов. Рассмотрим некоторые примеры известных задач.

1. Пусть G – произвольный граф, s и t – его различные вершины. Пусть теперь $\mathcal{U} = E(G)$, а \mathcal{S} – пути из s в t . Тогда упаковкой является множество s - t -путей, не имеющих общих рёбер, а двойственным покрытием – s - t -разрез, то есть множество рёбер, после удаления которых вершины s и t оказываются в разных компонентах связности.
2. Пусть G – произвольный граф. Пусть $\mathcal{U} = V(G)$, $\mathcal{S} = E(G)$. Тогда упаковкой является паросочетание графа G , а двойственным покрытием – его вершинное покрытие. Интересно, что в данном случае (в предположении, что $P \neq NP$) задачи об упаковке и покрытии имеют разный сложностной статус. Так задача о паросочетании полиномиально разрешима [25; 60], а задача о вершинном покрытии, напротив NP-полна [42].
3. Пусть G – произвольный граф. Пусть \mathcal{U} – множество всех независимых множеств графа G , а \mathcal{S} соответствует множеству $V(G)$, причём каждое множество набора \mathcal{S} соответствует вершине графа и содержит все независимые множества, содержащие эту вершину. Тогда упаковкой является клика графа G , а покрытие соответствует правильной раскраске этого графа.

4. Пусть G – произвольный граф. Пусть \mathcal{U} – множество всех клик графа G , а \mathcal{S} соответствует множеству $V(G)$, причём каждое множество набора \mathcal{S} соответствует вершине графа и содержит все клики, содержащие эту вершину. Тогда упаковкой является независимое множество графа G , а покрытием – кликовое покрытие данного графа.
5. Пусть G – произвольный граф, $\mathcal{U} = V(G)$, \mathcal{S} – все порождённые циклы графа. Тогда упаковкой является упаковка циклов, а покрытием – множество вершин графа, разрезающих циклы, то есть такое множество X , что $G \setminus X$ – лес.

1.2.3 Упаковки подграфов и их вершинные покрытия

Пусть \mathcal{X} – множество графов, G – произвольный граф, $\mathcal{U} = V(G)$, \mathcal{S} – все порождённые подграфы графа G , изоморфные графам из \mathcal{X} . Рассмотрим пару двойственных задач упаковки и покрытия, формируемых относительно данной пары $(\mathcal{U}, \mathcal{S})$.

Множество попарно непересекающихся порождённых подграфов графа G , изоморфных графам из \mathcal{X} , называется *упаковкой графа G относительно \mathcal{X}* или просто его *\mathcal{X} -упаковкой*. Задача об \mathcal{X} -упаковке (\mathcal{X} -MATCHING) состоит в том, чтобы найти \mathcal{X} -упаковку графа наибольшего размера. Будем обозначать $\mu_{\mathcal{X}}(G)$ размер наибольшей \mathcal{X} -упаковки в графе G .

Множество C вершин графа G такое, что любой порождённый подграф G , изоморфный графу из \mathcal{X} содержит хотя бы одну вершину из C , называется *вершинным покрытием G относительно \mathcal{X}* или просто его *\mathcal{X} -покрытием*. Иными словами, \mathcal{X} -покрытие графа G – это такое множество вершин C , что $G \setminus C \in \text{Free}(\mathcal{X})$. Задача об \mathcal{X} -покрытии (\mathcal{X} -COVER) состоит в том, чтобы найти \mathcal{X} -покрытие графа наименьшего размера. Будем обозначать $\beta_{\mathcal{X}}(G)$ размер наименьшего \mathcal{X} -покрытия в графе G .

Если множество \mathcal{X} состоит из единственного графа H , то будем говорить об H -упаковках, H -покрытиях и о соответствующих задачах H -MATCHING и H -COVER.

Задачам \mathcal{X} -MATCHING и \mathcal{X} -COVER посвящено немало работ, особенно их алгоритмическим аспектам (см., например, [7; 21; 35; 58; 83]). В частности,

известно, что задача о паросочетании (P_2 -MATCHING) полиномиально разрешима [25; 60], а для любого графа H , имеющего компоненту связности с тремя или более вершинами, задача H -MATCHING, напротив, NP-полна [36; 46; 47].

1.2.4 Разрыв двойственности в задачах об упаковке и покрытии

Ряд публикаций посвящены исследованию разрыва двойственности в задачах (1.1) и (1.2). Например, П. Эрдёш и Л. Поша доказали, что мощность наименьшего возвратного множества любого графа (см. пример 5 из подраздела 1.2.2) ограничено сверху функцией, имеющей асимптотику $O(k \log k)$, от мощности его наибольшей упаковки циклов [26], а Ф. В. Фомин, С. Саураб и Д. М. Тиликос доказали это же «свойство Эрдёша-Поша» для всех упаковок и покрытий относительно множеств, состоящих из планарных графов в минорно-замкнутых классах графов [30].

Другие значимые результаты основаны на рассмотрении случаев нулевого разрыва двойственности в задачах упаковки и покрытия, то есть случаев, когда имеет место равенство целевых функций $\sum_{i=1}^m x_i^*$ и $\sum_{j=1}^n y_j^*$ в задачах (1.1) и (1.2). Рассмотрим ряд известных примеров.

1. В совершенных графах (см. раздел 1.1.2), как следует из определения, достигается нулевой разрыв двойственности в задачах поиска наибольшей клики и правильной раскраски в минимальное число цветов, составляющих пару двойственных задач упаковки и покрытия. В этом же классе достигается нулевой разрыв двойственности для другой пары двойственных задач упаковки и покрытия – задач поиска наибольшего независимого множества и наименьшего кликового покрытия. Это следует из того, что класс совершенных графов является самодополнительным. [55]
2. Согласно теореме Кёнига-Эгервари [48], в любом двудольном графе мощности наибольшего паросочетания (P_2 -упаковки) и наименьшего вершинного покрытия (P_2 -покрытия) совпадают. Верно также следующее утверждение: если это равенство выполняется для графа G и любого его порожденного подграфа, то этот граф – двудольный. Таким образом, двудольные графы составляют наследственный класс графов,

в которых мощности наибольшего паросочетания и наименьшего вершинного покрытия равны.

Более широкому классу графов, в котором достигается указанное равенство, также посвящён ряд публикаций. Такие графы называют «графами Кёнига-Эгервари» [22], «графами со свойством Кёнига» [56] или просто «графами Кёнига» [74]. Известно, например, что если из графа данного класса удалить все рёбра, не принадлежащие ни одному наибольшему паросочетанию, полученный граф будет двудольным [22; 71].

3. Наследственный класс графов, в которых достигается нулевой разрыв двойственности в задачах поиска наибольшей упаковки циклов и наименьшего возвратного множества (\mathcal{C} -MATCHING и \mathcal{C} -COVER соответственно, где $\mathcal{C} = \{C_i : i \geq 3\}$) был описан в 2002 году в работе [24]. Запрещёнными порождёнными подграфами для данного класса являются графы, полученные подразбиением рёбер из графов $K_{2,3}$, колёс и графов, полученных из нечётных циклов заменой каждого ребра uv циклом из 3 вершин uva или двумя циклами uab, vcd с добавлением двух рёбер ac, bd .

Стоит заметить, что для всех перечисленных классов соответствующие задачи упаковки и покрытия решаются за полиномиальное время [16; 17; 32; 33; 67; 71; 74]. Представляется перспективным выделение новых случаев эффективной разрешимости задач об \mathcal{X} -упаковке и \mathcal{X} -покрытии в классах графов, на которых достигается нулевой разрыв двойственности для соответствующей пары задач.

1.3 Кёниговы графы

Граф G называется *кёниговым* относительно \mathcal{X} , если в любом его порождённом подграфе H достигается равенство $\mu_{\mathcal{X}}(H) = \beta_{\mathcal{X}}(H)$ [4]. Класс всех кёниговых графов относительно множества \mathcal{X} обозначаем через $\mathcal{K}(\mathcal{X})$. Если множество \mathcal{X} состоит из единственного графа H , то будем говорить о кёниговых графах относительно H и обозначать соответственно $\mathcal{K}(H)$.

Класс $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ при любом \mathcal{X} является наследственным и, следовательно, может быть описан множеством минимальных запрещенных порожденных подграфов. Например, для $\mathcal{K}(P_2)$ такую характеристику даёт теорема Кёнига-Эггера [48] вместе с известным критерием двудольности. Другой результат такого рода – характеристика класса $\mathcal{K}(\mathcal{C})$, где $\mathcal{C} = \{C_i : i \geq 3\}$, приведён в подразделе 1.2.3.

Диссертация посвящена исследованию ещё трёх классов кёниговых графов. В качестве множества \mathcal{X} взяты множество связных трёхвершинных графов и отдельные графы P_3 и P_4 . Первые два класса описаны полностью в терминах запрещённых графов, а также дано их структурное описание. Кроме того, доказано, что соответствующие задачи упаковки и покрытия в данных классах имеют полиномиальную сложность решения. Для $\mathcal{K}(P_4)$ дано лишь частичное описание в терминах запрещённых графов и структурное описание одного из подклассов данного класса.

1.3.1 Общие свойства классов кёниговых графов

Из теоремы двойственности следует, что для любого \mathcal{X} в любом графе мощность любой \mathcal{X} -упаковки меньше либо равна мощности любого \mathcal{X} -покрытия. Если в графе G найдутся \mathcal{X} -упаковка и \mathcal{X} -покрытие одинаковой мощности, то эта \mathcal{X} -упаковка является наибольшей, а \mathcal{X} -покрытие – наименьшим для данного графа. То есть $\mu_{\mathcal{X}}(G) = \beta_{\mathcal{X}}(G)$. Таким образом, для доказательства равенства $\mu_{\mathcal{X}}(G)$ и $\beta_{\mathcal{X}}(G)$ достаточно найти в данном графе \mathcal{X} -упаковку и \mathcal{X} -покрытие одинаковой мощности. Это свойство далее используется без пояснения для доказательства большинства утверждений и теорем.

Докажем далее несколько утверждений, касающихся различных классов кёниговых графов.

Утверждение 1.3.1. Пусть H – граф, H_1 – его порождённый подграф, \mathcal{X} – множество графов, причём $\{H, H_1\} \subseteq \mathcal{X}$, тогда $\mathcal{K}(\mathcal{X} \setminus \{H\}) = \mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Доказательство. Пусть G – граф. Любой порождённый подграф графа G , изоморфный H содержит по крайней мере один порождённый подграф, изоморф-

ный H_1 , то есть если \mathcal{X} -упаковка графа G содержит подграф, изоморфный H , то существует \mathcal{X} -упаковка той же мощности, в которой данный подграф заменён подграфом, изоморфным H_1 . Но такая \mathcal{X} -упаковка является также и $(\mathcal{X} \setminus \{H\})$ -упаковкой графа G . Тогда $\mu_{\mathcal{X}}(G) = \mu_{\mathcal{X} \setminus \{H\}}(G)$.

Рассмотрим теперь \mathcal{X} -покрытие C графа G . Любой подграф графа G , изоморфный H_1 содержит вершину из множества C . Но тогда любой подграф графа G , изоморфный H также содержит вершину из этого множества. Таким образом, C является также $(\mathcal{X} \setminus \{H\})$ -покрытием графа G . Тогда $\beta_{\mathcal{X}}(G) = \beta_{\mathcal{X} \setminus \{H\}}(G)$.

Следовательно, $\mu_{\mathcal{X} \setminus \{H\}}(G) = \beta_{\mathcal{X} \setminus \{H\}}(G)$ тогда и только тогда, когда $\mu_{\mathcal{X}}(G) = \beta_{\mathcal{X}}(G)$. То есть $\mathcal{K}(\mathcal{X} \setminus \{H\}) = \mathcal{K}(\mathcal{X})$. \square

Утверждение 1.3.2. Пусть \mathcal{X} – множество графов. Тогда $\mathcal{K}(co(\mathcal{X})) = co(\mathcal{K}(\mathcal{X}))$

Доказательство. Пусть G – граф, $H \in \mathcal{X}$. Если порождённый подграф графа G изоморфен H , то подграф графа \overline{G} , порождённый теми же вершинами изоморфен \overline{H} . Но тогда любое \mathcal{X} -покрытие графа G является в свою очередь и $co(\mathcal{X})$ -покрытием графа \overline{G} . То есть $\beta_{\mathcal{X}}(G) = \beta_{co(\mathcal{X})}(\overline{G})$. В свою очередь, для каждой \mathcal{X} -упаковки графа G существует $co(\mathcal{X})$ -упаковка графа \overline{G} того же размера. То есть $\mu_{\mathcal{X}}(G) = \mu_{co(\mathcal{X})}(\overline{G})$.

Следовательно, $\mu_{\mathcal{X}}(G) = \beta_{\mathcal{X}}(G)$ тогда и только тогда, когда $\mu_{co(\mathcal{X})}(\overline{G}) = \beta_{co(\mathcal{X})}(\overline{G})$. Это же свойство выполняется для любой пары подграфов графов G и \overline{G} , порождённых одинаковым набором вершин. То есть $\mathcal{K}(co(\mathcal{X})) = co(\mathcal{K}(\mathcal{X}))$. \square

Утверждение 1.3.3. Пусть \mathcal{X} – множество графов. Тогда $Forb(\mathcal{K}(co(\mathcal{X}))) = co(Forb(\mathcal{K}(\mathcal{X})))$

Доказательство. Пусть $G \in Forb(\mathcal{K}(\mathcal{X}))$. Это значит $G \notin \mathcal{K}(\mathcal{X})$, а для любого его порождённого подграфа H справедливо $H \in \mathcal{K}(\mathcal{X})$. Тогда $\overline{G} \notin co(\mathcal{K}(\mathcal{X}))$, $\overline{H} \in co(\mathcal{K}(\mathcal{X}))$. Из утверждения 1.3.2, $\mathcal{K}(co(\mathcal{X})) = co(\mathcal{K}(\mathcal{X}))$. То есть $\overline{G} \notin \mathcal{K}(co(\mathcal{X}))$, $\overline{H} \in \mathcal{K}(co(\mathcal{X}))$. И тогда $G \in Forb(\mathcal{K}(co(\mathcal{X})))$. \square

Если \mathcal{X} – самодополнительный класс графов, то $\mathcal{X} = co(\mathcal{X})$. Тогда справедливы также следующие утверждения.

Утверждение 1.3.4. Если \mathcal{X} – самодополнительный класс графов. Тогда $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ также является самодополнительным классом графов.

Утверждение 1.3.5. Если \mathcal{X} – самодополнительный класс графов. Тогда $\text{Forb}(\mathcal{K}(\mathcal{X}))$ также является самодополнительным классом графов.

1.3.2 Особенности структурного описания кёниговых графов относительно путей

Одним из основных инструментов структурной части описания классов кёниговых графов относительно путей является операция замены вершины графом.

Операция замены графом H вершины x графа G состоит в следующем:

1. Эта вершина удаляется из графа G .
2. К графу G добавляется несколько новых вершин, соединённых между собой так, что они порождают подграф, изоморфный H .
3. Каждая новая вершина соединена ребром со всеми вершинами множества $N(x)$ в исходном графе.

Общим аспектом описания классов кёниговых графов относительно путей является построение (конструирование) произвольных графов соответствующего класса с помощью замены некоторых вершин графов графами определённого вида. Такой способ описания можно назвать конструктивным.

Множество вершин A называется *однородным* (также в литературе называют модулем), если любая вершина множества $V(G) \setminus A$ либо смежна со всеми вершинами A , либо несмежна со всеми вершинами A (см., например, [15]). Очевидно, множество, состоящее из одной вершины и множество всех вершин графа всегда однородны. Такие однородные множества будем называть *тривиальными*, а все остальные – *нетривиальными*.

Пусть \mathcal{F} – класс графов. Будем называть \mathcal{F} -расширением графа G граф, полученный из G заменой некоторых вершин графами из множества \mathcal{F} .

Пусть граф G является \mathcal{F} -расширением некоторого графа H . Будем называть *секциями* подграфы графа G , на которые были заменены вершины исходного графа. Каждая вершина графа H , не подвергшаяся замене, считается в G отдельной секцией. Будем называть секцию *тривиальной*, если она содер-

жит одну вершину, и *нетривиальной* – в противном случае. Будем обозначать $S(v)$ секцию графа G , полученную из вершины v графа H . Если вершина не подверглась замене, то $S(v) = \{v\}$.

Отметим, что вершины любой секции составляют однородное множество.

Пусть \mathcal{F} – класс графов. Будем называть граф G R - \mathcal{F} -расширением графа H , если он является \mathcal{F} -расширением графа H , но замене подверглись только вершины степени 1 и 2.

Глава 2. Структурное описание и запрещённые графы для класса кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$

Глава посвящена исследованию класса кёниговых графов относительно множества $\{P_3, C_3\}$. Найдено множество минимальных запрещённых порождённых подграфов для данного класса (раздел 2.2), а так же дано его структурное описание (раздел 2.3).

Результаты данной главы опубликованы в работах [2; 10].

Итак, $\{P_3, C_3\}$ -упаковка – это множество попарно не пересекающихся троек вершин, порождающих связные подграфы. $\{P_3, C_3\}$ -упаковка – это такое множество вершин, что каждая их связная тройка содержит хотя бы одну из вершин данного множества.

Отметим, что $\{P_3, C_3\}$ -упаковка может быть интерпретирована как множество любых (не обязательно порождённых) попарно не пересекающихся подграфов P_3 , то есть является слабой P_3 -упаковкой. То же верно и для покрытий. Таким образом, класс $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$ – суть наследственный класс графов, в которых достигается нулевой разрыв двойственности в задачах о слабых P_3 -упаковке и P_3 -покрытии.

2.1 Кёниговы деревья

Докажем следующую лемму:

Лемма 2.1.1. *Для любого дерева T справедливо $\mu_{P_3}(T) = \beta_{P_3}(T)$.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по числу вершин в дереве T . Если дерево T состоит из одной или двух вершин, тогда $\mu_{P_3}(T) = \beta_{P_3}(T)$. Если дерево T состоит из трех вершин, тогда оно изоморфно P_3 и $\mu_{P_3}(T) = \beta_{P_3}(T) = 1$.

Подграф, изоморфный P_3 , порождённый вершинами x, y, z будем обозначать (x, y, z) , где y – центральная вершина данного пути.

Пусть для всех деревьев с числом вершин меньшим, чем k выполняется равенство чисел упаковки и покрытия относительно P_3 . Рассмотрим дерево T с числом вершин k . Возможны следующие случаи.

1. В дереве T имеются листья x_1 и x_2 , смежные с одной и той же вершиной y , степень которой больше 2. Рассмотрим граф T' , полученный из графа T удалением вершин x_1, x_2, y . Пусть M – наибольшая P_3 -упаковка, C – наименьшее P_3 -покрытие графа T' . Если граф T' не связан, то M и C являются объединениями P_3 -упаковок и P_3 -покрытий всех компонент связности соответственно. Число вершин в каждой компоненте связности графа T' меньше, чем k . Следовательно, по предположению индукции, $|M| = |C|$. Тогда $M \cup \{(x_1, y, x_2)\}$ – P_3 -упаковка, а $C \cup \{y\}$ – P_3 -покрытие дерева T той же мощности.
2. В дереве T нет двух листьев, смежных с одной вершиной. Тогда в нём имеется путь (x, y, z) такой, что $\deg(x) = 1$, $\deg(y) = 2$, $\deg(z) \geq 2$. Рассмотрим граф G' , полученный из графа G удалением вершин x, y, z . Пусть M – наибольшая P_3 -упаковка, C – наименьшее P_3 -покрытие графа G' . Аналогично предыдущему случаю, по предположению индукции, $|M| = |C|$. Тогда $M \cup \{(x, y, z)\}$ – P_3 -упаковка, а $C \cup \{z\}$ – P_3 -покрытие дерева T той же мощности.

□

Поскольку никакое дерево не содержит подграфов C_3 , любые его P_3 -упаковка и P_3 -покрытие являются одновременно $\{P_3, C_3\}$ -упаковкой и $\{P_3, C_3\}$ -покрытием соответственно. То есть справедливо также следующее утверждение:

Следствие 1. Для любого дерева T справедливо $\mu_{\{P_3, C_3\}}(T) = \beta_{\{P_3, C_3\}}(T)$.

2.2 Запрещённые подграфы

Непосредственной проверкой легко установить, что графы K_4 и K_4-e (рис. 2.1) не принадлежат классу $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$. Для каждого из них $\mu_{\{P_3, C_3\}}(G) = 1$, $\beta_{\{P_3, C_3\}}(G) = 2$. При этом каждый порожденный подграф каждого из них

является кёниговым относительно $\{P_3, C_3\}$. Таким образом, справедлива следующая лемма:



Рисунок 2.1 — Два запрещённых порождённых подграфа для класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$

Лемма 2.2.1. *Графы K_4 и K_4-e являются минимальными запрещёнными графами для $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.*

Другие запрещённые графы класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$ составляют бесконечные серии.

Очевидно, $\mu_{\{P_3, C_3\}}(C_{3k}) = \mu_{\{P_3, C_3\}}(C_{3k+1}) = \mu_{\{P_3, C_3\}}(C_{3k+2}) = k$, $\beta_{\{P_3, C_3\}}(C_{3k}) = \beta_{\{P_3, C_3\}}(C_{3k-1}) = \beta_{\{P_3, C_3\}}(C_{3k-2}) = k$. Кроме того, любой собственный подграф простого цикла является лесом, а значит, по следствию 1 из леммы 2.1.1, является кёниговым графом относительно $\{P_3, C_3\}$. То есть справедлива следующая лемма:

Лемма 2.2.2. *Граф C_n принадлежит классу $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$, если n кратно 3 и является минимальным запрещённым графом для $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$ в противном случае.*

Обозначим \mathcal{C}_3 множество всех простых циклов с числом вершин не кратным 3.

Лемма 2.2.3. *Если n кратно 3, а k не кратно 3, то $A(n, k)$ является минимальным запрещённым графом для класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.*

Доказательство. Пусть $n = 3t$. Очевидно, $\mu_{\{P_3, C_3\}}(A(n, k)) = t$. Пусть L - наименьшее покрытие цикла C_n . Тогда L является 3-классом. Так как k не кратно 3, то хотя бы одна из вершин, смежных с вершинами степени 1 в $A(n, k)$, не принадлежит L . Но тогда эта вершина, смежная с ней вершина степени 1 и одна из смежных с ней вершин цикла порождают подграф P_3 , не покрытый множеством L . Следовательно, $\beta_{\{P_3, C_3\}}(A(n, k)) > t$ и $A(n, k) \notin \mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.

Граф $A(n,k)$ содержит порождённый подграф, являющийся n -1-лассо. Для этого графа, очевидно, $\mu_{\{P_3, C_3\}}(G) = \beta_{\{P_3, C_3\}}(G) = t$, так что он кёнигов относительно $\{P_3, C_3\}$. Остальные собственные порождённые подграфы графа $A(n,k)$ являются лесами, а значит, по следствию 1 из леммы 2.1.1, являются кёниговыми графами относительно $\{P_3, C_3\}$. Лемма доказана. \square

Обозначим \mathcal{A}_3 множество таких графов $A(n,k)$, что n кратно 3, а k не кратно 3.

2.3 Структурное описание класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$

Пусть F – псевдограф (граф с кратными рёбрами и петлями). S -2-преобразование псевдографа F – это граф, полученный из F подразбиением двумя вершинами каждого циклового ребра, в том числе из двух и одной вершины (кратные рёбра и петли соответственно).

Лемма 2.3.1. S -2-преобразование любого псевдографа принадлежит классу $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.

Доказательство. Пусть граф G является S -2-преобразованием псевдографа F . Пусть A – множество всех цикловых вершин F . Для любой вершины из A рассмотрим тройку вершин, состоящую из данной вершины и двух вершин её окрестности в графе G , полученных при подразбиении рёбер. Все эти тройки не пересекаются и порождают связные трёхвершинные подграфы графа G . Обозначим B множество таких подграфов. Нетрудно видеть, что $|A| = |B|$.

Рассмотрим граф G' , полученный из графа G удалением всех вершин подграфов множества B . Он является лесом, значит, по следствию 1 из леммы 2.1.1, $\mu_{\{P_3, C_3\}}(G') = \beta_{\{P_3, C_3\}}(G')$. Пусть M – наибольшая $\{P_3, C_3\}$ -упаковка, C – наименьшее $\{P_3, C_3\}$ -покрытие графа G' . Очевидно, $M \cup B$ – $\{P_3, C_3\}$ -упаковка графа G .

Заметим, что если $v \in V(G')$ и $(v,w) \in E(G)$, то $w \in V(G') \cup A$. То есть никакая вершина множества $V(G) \setminus \{V(G') \cup A\}$ не смежна ни с какой вершиной множества $V(G')$. Следовательно, $C \cup A$ – $\{P_3, C_3\}$ -покрытие графа G . Поскольку $|M| = \mu_{\{P_3, C_3\}}(G') = \beta_{\{P_3, C_3\}}(G') = |C|$, $|M \cup B| = |M| + |B| =$

$|C| + |A| = |C \cup A|$. То есть граф G кёнигов относительно $\{P_3, C_3\}$. Лемма доказана. \square

2.4 Основной результат

Основным результатом данной главы является следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Следующие утверждения эквивалентны для графа G :*

- (1) G – кёнигов граф относительно $\{P_3, C_3\}$;
- (2) G не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{A}_3 \cup \{K_4, K_4-e\}$;
- (3) G S -2-преобразование некоторого псевдографа.

Доказательство. Из лемм 2.2.1, 2.2.3, 2.2.2 следует, что никакой граф класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$ не содержит графов из множества, указанного в (2), не являются кёниговыми относительно $\{P_3, C_3\}$. Поэтому из (1) следует (2).

По лемме 2.3.1, из (3) следует (1).

Докажем теперь, что из (2) следует (3). Пусть G – связный граф, не содержащий порождённых подграфов из множества $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{A}_3 \cup \{K_4, K_4-e\}$. Если G – дерево, то он является S -2-преобразованием самого себя. Если G – простой цикл, то, поскольку он не входит в \mathcal{C}_3 , его длина кратна 3 и, следовательно, он является S -2-преобразованием некоторого простого цикла.

Рассмотрим теперь случай, когда G содержит циклы, но не является простым циклом. Тогда в G существуют вершины со степенью 3 и более.

Будем называть путь, соединяющий вершины степени больше 2, *магистралью*, если все остальные вершины имеют степень 2, а все рёбра являются цикловыми (в том числе магистралью является порождённый цикл, содержащий ровно одну вершину степени больше 2). Для каждой магистрали графа G существует порождённый цикл, содержащий все её рёбра. Пусть k – длина магистрали, соединяющей вершины v_1 и v_2 . Тогда в случае $N(v_1) \cap N(v_2) = \emptyset$ G содержит порождённый подграф $A(n, k)$, где n – длина цикла, содержащего магистраль. В противном случае, если $v_1 = v_2$, то G содержит порождённый подграф C_k , а если $v_1 \neq v_2$, то один из порождённых подграфов $A(k+2, 2)$, $A(3, 1)$, K_4 , K_4-e . Нетрудно видеть, что в случае $v_1 \neq v_2$ и $N(v_1) \cap N(v_2) \neq \emptyset$

граф G обязательно содержит запрещённый порождённый подграф. В остальных случаях G содержит запрещённый порождённый подграф, если k не кратно 3.

Таким образом, если две различных вершины соединены магистралью, то их окрестности не пересекаются. Кроме того, длина каждой магистрали кратна 3. То есть если между двумя вершинами степени больше 2 существует путь, проходящий только через цикловые рёбра, то его длина кратна 3.

Разобьём каждую магистраль на сегменты длины 3 и заменим каждый из них на одно ребро. Полученная структура является псевдографом, а граф G является S -2-преобразованием этого псевдографа.

Теорема доказана.

□

Глава 3. Структурное описание и запрещённые графы для класса кёниговых графов относительно P_3

Глава посвящена исследованию класса кёниговых графов относительно P_3 . Для данного класса найдено множество минимальных запрещённых порождённых подграфов (раздел 3.2), а так же структурное описание данного класса (раздел 3.3).

Результаты данной главы опубликованы в работах [1; 2; 4; 10]

Будем называть *тройкой* порождённый подграф, изоморфный P_3 . Будем обозначать (v_1, v_2, v_3) тройку, состоящую из вершин v_1, v_2, v_3 , где v_1 и v_3 не смежны.

3.1 R - \mathcal{Q} -расширение графов

Пусть \mathcal{Q} – класс, состоящий из полных графов. То есть $\mathcal{Q} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для описания класса кёниговых графов относительно P_3 будем использовать операцию R - \mathcal{Q} -расширения графа.

Будем называть *однородной кликой* максимальное по включению однородное множество вершин, порождающее клику.

3.1.1 Особенности однородных клик и секций R - \mathcal{Q} -расширений графов

Лемма 3.1.1. *Любая однородная клика либо целиком содержится в наименьшем P_3 -покрытии, либо не пересекается с ним.*

Доказательство. Предположим, что некоторая однородная клика Q содержит вершину a , принадлежащую некоторому наименьшему P_3 -покрытию C , и вершину b , ему не принадлежащую. Так как P_3 -покрытие C наименьшее, то в графе существует тройка, из которой только вершина a принадлежит P_3 -покрытию, иначе $C \setminus \{a\}$ также является P_3 -покрытием G и P_3 -покрытие C не наимень-

шее. Но тогда две другие вершины этой тройки вместе с вершиной b образуют непокрытую тройку. Лемма доказана. \square

Легко видеть, что любая секция R - \mathcal{Q} -расширения любого графа является однородной кликой или её частью. Таким образом, справедлива

Лемма 3.1.2. *Каждое наименьшее P_3 -покрытие любого R - \mathcal{Q} -расширения любого графа состоит из целых секций.*

3.1.2 R - \mathcal{Q} -расширения лесов

Согласно лемме 2.1.1, любое дерево принадлежит классу $\mathcal{K}(P_3)$. Расширим эту лемму для R - \mathcal{Q} -расширений лесов.

Лемма 3.1.3. *Любое R - \mathcal{Q} -расширение любого леса принадлежит классу $\mathcal{K}(P_3)$.*

Доказательство. Пусть G – R - \mathcal{Q} -расширение леса F . Поскольку любой порождённый подграф G также является расширением леса, то достаточно доказать равенство чисел P_3 -упаковки и P_3 -покрытия в графе G .

Доказательство проведем индукцией по числу троек в наибольшей компоненте связности графа G . Если все компоненты связности F изоморфны K_1 или K_2 , то, очевидно, $\mu_{P_3}(G) = \beta_{P_3}(G) = 0$. Пусть теперь числа P_3 -упаковки и P_3 -покрытия всех R - \mathcal{Q} -расширений лесов с числом троек в наибольшей компоненте связности меньшим k равны. Пусть в G существует компонента связности H , в которой k троек. Обозначим T дерево, R - \mathcal{Q} -расширением которого является H .

Возможны следующие случаи.

1. Дерево T состоит из трех вершин. Тогда, очевидно,

$$\mu_{P_3}(H) = \beta_{P_3}(H) = \min \{|S(x_1)|, |S(x_2)|, |S(x_3)|\}.$$

По предположению индукции, $\mu_{P_3}(G \setminus H) = \beta_{P_3}(G \setminus H)$. Следовательно, $\mu_{P_3}(G) = \beta_{P_3}(G) = \mu_{P_3}(G \setminus H) + \mu_{P_3}(H) = \beta_{P_3}(G \setminus H) + \beta_{P_3}(H)$.

2. В дереве T имеются вершины x_1 и x_2 степени 1, смежные с одной и той же вершиной y , степень которой больше 2. Выберем вершины

$a_1 \in S(x_1)$, $a_2 \in S(x_2)$ и рассмотрим граф G' , полученный из графа G удалением вершин a_1, a_2, y . Пусть M – наибольшая P_3 -упаковка, C – наименьшее P_3 -покрытие графа G' . По предположению индукции, $|M| = |C|$. Но тогда $M \cup \{(a_1, a_2, y)\}$ – P_3 -упаковка, а $C \cup \{y\}$ – P_3 -покрытие графа G той же мощности.

3. В дереве T имеется тройка (x_1, x_2, x_3) такая, что $\deg(x_1) = 1$, $\deg(x_2) = 2$, $\deg(x_3) \geq 2$. Выберем вершины $a_1 \in S(x_1)$, $a_2 \in S(x_2)$, $a_3 \in S(x_3)$. Рассмотрим граф G' , полученный из графа G удалением этих трех вершин. Пусть M – наибольшая P_3 -упаковка, C – наименьшее P_3 -покрытие графа G' . По предположению индукции, $|M| = |C|$. Если к M добавить тройку (a_1, a_2, y) , то получится P_3 -упаковка графа G мощности $|M| + 1$. Покажем, что имеется P_3 -покрытие той же мощности.

Непустые множества $S(x_i) \setminus \{a_i\}$, где $i \in \{1, 2, 3\}$, являются секциями в графе G' . Заметим, что любая тройка, проходящая через секцию $S(x_1)$, проходит через $S(x_2)$, а любая тройка, проходящая через $S(x_2)$, проходит через $S(x_3)$. Поэтому, если одно из множеств $S(x_i) \setminus \{a_i\}$, где $i \in \{1, 2, 3\}$ входит в C , то остальные два в него не входят (иначе C не наибольшее P_3 -покрытие), то $C \cup \{a_i\}$ – P_3 -покрытие графа G . Если же ни одно из этих множеств не включено в C , то среди них есть пустые. Пусть i^* – наибольшее среди $i \in \{1, 2, 3\}$, при котором $|S(x_i)| = 1$. Тогда $C \cup \{a_{i^*}\}$ – P_3 -покрытие графа G . В обоих случаях мощность полученного P_3 -покрытия равна $|C| + 1 = |M| + 1$.

Лемма доказана. □

3.2 Запрещённые графы

В этом разделе описаны все минимальные запрещённые порождённые подграфы. Полнота этого множества доказывается в разделе 3.3.

3.2.1 Три пятивершинных графа

Непосредственной проверкой легко установить, что графы gem , $dart$ и $K_2 \circ O_3$ (рис. 3.1), не принадлежат классу $\mathcal{K}(P_3)$. Для каждого из них $\mu_{P_3}(G) = 1$, $\beta_{P_3}(G) = 2$. При этом каждый порожденный подграф каждого из них является кёниговым относительно P_3 . Таким образом, справедлива следующая лемма.

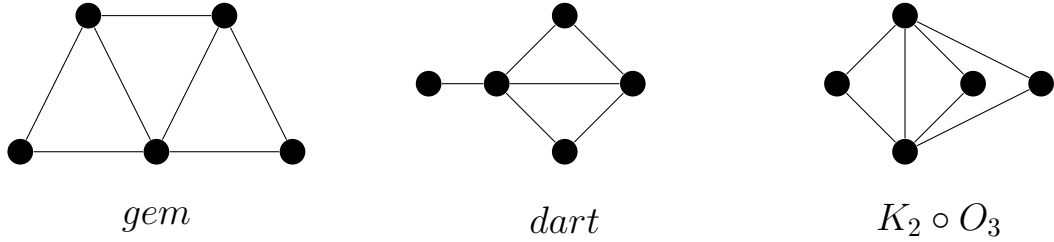


Рисунок 3.1 — Три запрещённых порождённых подграфа для класса $\mathcal{K}(P_3)$

Лемма 3.2.1. *Графы gem , $dart$, $K_2 \circ O_3$ являются минимальными запрещёнными графами для $\mathcal{K}(P_3)$.*

3.2.2 Бесконечные семейства графов

Поскольку простые циклы и графы $A(n, k)$ не содержат треугольников, то любые $\{P_3, C_3\}$ -упаковка и $\{P_3, C_3\}$ -покрытие являются также и P_3 -упаковкой и P_3 -покрытием соответственно. Таким образом, для любого из этих графов $\mu_{P_3}(G) = \mu_{\{P_3, C_3\}}(G)$ и $\beta_{P_3}(G) = \beta_{\{P_3, C_3\}}(G)$. Поэтому из лемм 2.2.2 и 2.2.3 следуют следующие леммы.

Лемма 3.2.2. *Граф C_n принадлежит классу $\mathcal{K}(P_3)$, если n кратно 3 и является минимальным запрещённым графом для $\mathcal{K}(P_3)$ в противном случае.*

Лемма 3.2.3. *Если n кратно 3, а k не кратно 3, то $A(n, k)$ является минимальным запрещённым графом для класса $\mathcal{K}(P_3)$.*

Рассмотрим теперь другие бесконечные серии минимальных запрещённых подграфов для класса $\mathcal{K}(P_3)$.

Рассмотрим граф, получающийся из n -1-лассо заменой одной из вершин цикла графом K_2 . Этот граф обозначим через $B(n,k)$, где k – расстояние от узла до вершины, подвергшейся замене. На рисунке 3.2 показаны графы $B(6,0)$ и $B(6,3)$. Отметим, что первый из них содержит запрещенный подграф *dart*.

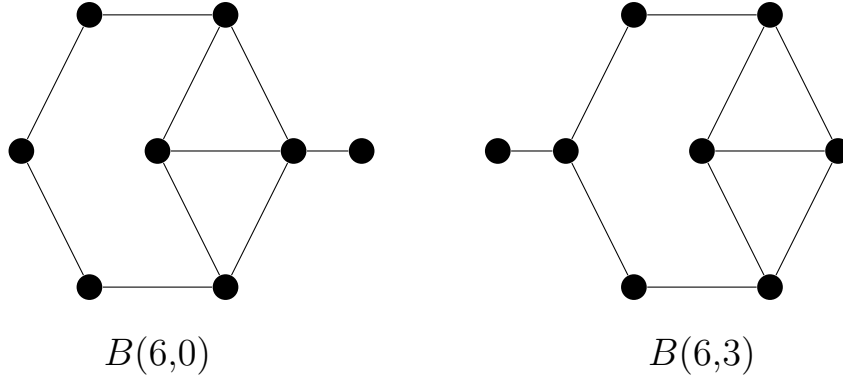


Рисунок 3.2 – Примеры графов $B(n,k)$

Лемма 3.2.4. Если n и k кратны 3, $1 \geq k \geq \frac{n}{2}$, то $B(n,k)$ – минимальный запрещенный граф для класса $\mathcal{K}(P_3)$.

Доказательство. Пусть $n = 3t$. Очевидно, $\mu_{P_3}(B(n,k)) = t$. Обозначим в исходном n -1-лассо x – узел, y – вершину степени 1, a – вершину, подвергшуюся замене. Из условия теоремы, $a \neq x$.

Все наименьшие P_3 -покрытия n -вершинного цикла данного графа являются 3-классами этого цикла и имеют мощность t . Отметим, что, поскольку k кратно 3, вершины x и a принадлежат одному 3-классу. Граф $B(n,k)$ содержит ровно две тройки, содержащие вершину y . Обе они содержат также и x . Таким образом, если 3-класс n -вершинного цикла, не содержит x , то одна из троек, содержащих y не покрыта этим 3-классом. Но 3-класс содержащий x , содержит также и a . То есть P_3 -покрытие графа $B(n,k)$, соответствующее данному 3-классу содержит секцию $S(a)$ и поэтому имеет мощность $t+1$. Таким образом, $\beta_{P_3}(B(n,k)) = t+1$, то есть $B(n,k)$ – запрещенный граф для класса $\mathcal{K}(P_3)$.

Удаление вершины $a_0 \in S(a)$ из графа $B(n,k)$ порождает подграф, являющийся n -1-лассо. Для этого графа, очевидно, $\mu_{P_3}(B(n,k) \setminus a_0) = \beta_{P_3}(B(n,k) \setminus a_0) = t$, так что он кёнигов относительно P_3 . Подграф $B(n,k) \setminus y$ может быть получен из C_n заменой одной вершины графом K_2 . Нетрудно видеть, что $\mu_{P_3}(B(n,k) \setminus y) = \mu_{P_3}(C_n) = t$, а 3-класс базового цикла, не содержащий вершины a , является P_3 -покрытием графа $B(n,k) \setminus y$ той же мощности.

Остальные собственные порожденные подграфы графа $B(n, k)$ являются R - \mathcal{Q} -расширениями лесов, а значит, по лемме 3.1.3, являются кёниговыми графами относительно P_3 . Лемма доказана. □

Обозначим \mathcal{B}_3 множество таких графов $B(n, k)$, что n и k кратны 3, причём $1 \geq k \geq \frac{n}{2}$.

Обозначим через $D(k_1, k_2, k_3)$ граф, полученный из цикла $C_{k_1+k_2+k_3}$ заменой графами K_2 трёх вершин, делящих цикл на пути длины k_1, k_2, k_3 . На рисунке 3.3 показан граф $D(4, 4, 4)$.

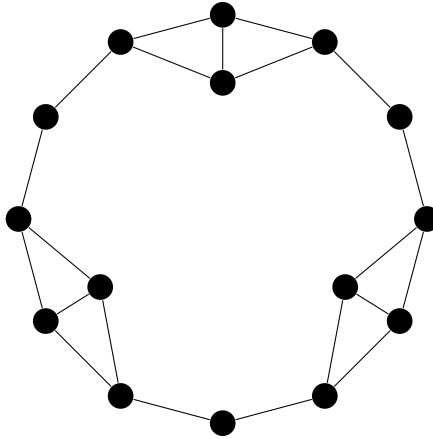


Рисунок 3.3 — Граф $D(4, 4, 4)$

Лемма 3.2.5. Если $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv 1 \pmod{3}$ и $k_i \geq 4$, $i \in 1, 2, 3$, то $D(k_1, k_2, k_3)$ — минимальный запрещенный подграф для класса $\mathcal{K}(P_3)$.

Доказательство. Можно считать, что замене подверглись вершины с номерами 0, k_1 и $k_1 + k_2$. Обозначим соответствующие секции через S_0, S_1, S_2 . Пусть $k_1 + k_2 + k_3 = 3t$. Очевидно, существует P_3 -упаковка графа $D(k_1, k_2, k_3)$ мощности t . Предположим, что существует P_3 -упаковка этого графа мощности $t + 1$. Тогда эта P_3 -упаковка разбивает все вершины графа на тройки. В ней обязательно есть тройка $(n - 2, n - 1, x)$, где $x \in S_0$, и тройка $(y, k_1 + 1, k_1 + 2)$, где $y \in S_1$. Тем самым на отрезке от 0 до k_1 имеется $k_1 + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ вершин и они все должны быть разбиты на тройки, что невозможно. Итак, $\mu_{P_3}(D(k_1, k_2, k_3)) = t$. Но $\beta_{P_3}(D(k_1, k_2, k_3)) = t + 1$, так как в любое из трёх наименьших P_3 -покрытий графа C_n входит одна из вершин 0, k_1 и $k_1 + k_2$.

Среди собственных порожденных подграфов графа $D(k_1, k_2, k_3)$ имеются R - \mathcal{Q} -расширения $3t$ -вершинного цикла, в которых не более двух вершин за-

менено графами K_2 . Поскольку такие графы содержат цикл C_{3t} , в них есть P_3 -упаковка мощности t , а, поскольку не более двух вершин заменено кликами, существует 3-класс, не содержащий вершин, подвергшихся замене. Он и является P_3 -покрытием мощности t .

Остальные собственные порожденные подграфы графа $D(k_1, k_2, k_3)$ являются R - Q -расширениями лесов, а значит, по лемме 3.1.3, являются кёниговыми графами относительно P_3 . Лемма доказана. □

Обозначим \mathcal{D}_3 множество таких графов $D(k_1, k_2, k_3)$, что $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv 1 \pmod{3}$ и $k_i \geq 4$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

3.3 Структурное описание класса $\mathcal{K}(P_3)$

Если граф не связан, то любая его P_3 -упаковка и любое P_3 -покрытие являются объединениями P_3 -упаковок и P_3 -покрытий всех компонент связности соответственно. Поэтому граф входит в класс $\mathcal{K}(P_3)$ тогда и только тогда, когда каждая его компонента связности входит в класс $\mathcal{K}(P_3)$.

В следующих трёх подразделах описываются возможные типы связанных кёниговых графов относительно P_3 и доказывается ряд лемм, необходимых для получения основного результата этого раздела.

3.3.1 R - Q -расширения графов, не являющихся простыми циклами

Пусть \mathcal{M} – мультиграф без петель. Каждое цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу) этого мультиграфа подразобьем двумя вершинами. Кратные рёбра мультиграфа \mathcal{M} считаются циклами длины 2 и тоже подразбиваются. Добавленные вершины назовём *новыми*. Заметим, что каждая новая вершина имеет степень 2. Заменим каждую новую вершину и каждую вершину степени 1 или 2, не принадлежащую циклу, кликой произвольного разме-

ра (в том числе, графом K_1). Полученный таким образом граф будем называть S_2 - R - Q -расширением исходного мультиграфа.

Нетрудно видеть, что S_2 - R - Q -расширение любого мультиграфа является R - Q -расширением некоторого графа, не содержащего порождённых подграфов из множества $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{C}_3$. Отметим также, что никакое S_2 - R - Q -расширение мультиграфа не содержит порождённых подграфов из \mathcal{D}_3

Теорема 3.3.1. *Следующие утверждения равносильны для связного графа G , не являющегося R - Q -расширением простого цикла:*

- (1) G – кёнигов граф относительно P_3 ;
- (2) G не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{gem, dart, K_2 \circ O_3\}$;
- (3) G является S_2 - R - Q -расширением некоторого мультиграфа.

Доказательство. Из лемм 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 следует, что (1) влечет (2).

Покажем, что из (2) следует (3).

Пусть G – связный граф, не содержащий подграфов из множества $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{gem, dart, K_2 \circ O_3\}$. Выберем по одной вершине из каждой однородной клики графа G и обозначим через H подграф, порожденный всеми выбранными вершинами.

Покажем сначала, что в графе H нет треугольников. Действительно, пусть Q – максимальная клика в H . Предположим, что $|Q| \geq 3$. Рассмотрим два возможных случая.

1. Существует вершина $x \notin Q$, смежная с не менее чем двумя вершинами клики. Пусть y и z – вершины клики, смежные с x . Так как Q – максимальная клика, то в ней есть вершина u , несмежная с x . Вершины y и z принадлежат разным однородным кликам, поэтому в графе G существует вершина v , смежная с одной из них и несмежная с другой. Пусть v смежна с y . Теперь, если нет ребер (x, v) и (u, v) , то образуется порожденный подграф $dart$, если есть ровно одно из этих ребер, то gem , а если есть они оба, то C_4 .
2. Каждая вершина вне Q смежна не более чем с одной вершиной из Q . Пусть x, y, z – вершины из Q . Так как x и y принадлежат разным однородным кликам, то существует вершина, смежная с одной из них и несмежная с другой. Пусть вершина u смежна с x и несмежна с y .

Тогда аналогично существует вершина $v \neq u$, смежная с одной из y, z и несмежная с другой. Пусть v смежна с y . Тогда если u и v не смежны, то множество $\{x, y, z, u, v\}$ порождает подграф $A(3,1)$, а если u и v смежны, то множество $\{x, y, v, u\}$ порождает C_4 .

Таким образом, граф H не содержит треугольников.

Пусть x – вершина степени 3 или выше в H . Возьмем три вершины u, v, w , смежные с вершиной x в H . Они несмежны между собой, так как в H нет треугольников. Если в графе G имеется вершина x' , принадлежащая той же однородной клике, что x , то вершины x, x', u, v, w образуют порожденный подграф $K_2 \circ O_3$. Значит, каждая вершина степени 3 и выше в графе H образует в графе G однородную клику, состоящую из одной этой вершины, а однородным кликам большего размера в графе H могут соответствовать только вершины степени 1 или 2. Следовательно, граф G является R - \mathcal{Q} -расширением графа H .

Пусть C – какой-нибудь порожденный цикл в графе H . Поскольку G не содержит порождённых подграфов из \mathcal{C}_3 , длина этого цикла кратна 3. В графе G вершина вне C может быть смежна либо только с одной вершиной на C , либо с тремя подряд идущими вершинами этого цикла. В любом другом случае, как нетрудно проверить, образуется запрещенный подграф типа $A(n,k)$, или цикл длины, не кратной 3, или gem . Если две вершины вне C смежны с одной и той же тройкой вершин на C , то они смежны и между собой, так как иначе образуется порожденный подграф $dart$. Таким образом, все вершины графа G , смежные с одной тройкой на C , образуют клику. Такую клику будем называть *главной кликой* с основанием x , где x – центральная вершина тройки, и обозначать $K(x)$ (при этом x тоже включается в $K(x)$). Если x и y – соседние вершины цикла C , то каждая вершина из $K(x)$ смежна с каждой из $K(y)$, иначе образовался бы порожденный подграф gem . Обратно, вершина, не принадлежащая главной клике и смежная с вершиной из этой клики, может быть только вершиной из соседней клики, в противном случае образуется один из запрещенных подграфов $gem, dart, K_2 \circ O_3$. Отсюда следует, что главные клики являются однородными кликами и смежны они тогда и только тогда, когда их основания – соседние вершины цикла.

Вершину x цикла C назовем *контактной*, если она имеет соседа вне цикла. Так как G не является R - \mathcal{Q} -расширением простого цикла, в нём существует хотя бы одна контактная вершина. Из леммы 3.2.3 следует, что все контактные вершины данного цикла принадлежат одному 3-классу. Назовем его *главным*

3-классом. Из леммы 3.2.4 следует, что размер любой главной клики с основанием, принадлежащим главному 3-классу равен 1. В графе H все вершины двух других 3-классов имеют степень 2. Если два цикла в графе H имеют общие вершины, то каждая такая вершина принадлежит или не принадлежит главным 3-классам одновременно в обоих циклах.

Построим мультиграф \mathcal{M} , заменяя во всех циклах графа H каждый путь длины 3, соединяющий две вершины из главного 3-класса, одним ребром. Очевидно, H получается из \mathcal{M} двойным подразбиением каждого циклового ребра. Следовательно, G является S_2 - R - \mathcal{Q} -расширением мультиграфа \mathcal{M} .

Покажем теперь, что из (3) следует (1).

Пусть G – граф, являющийся S_2 - R - \mathcal{Q} -расширением мультиграфа \mathcal{M} . Пусть C – множество всех цикловых вершин мультиграфа \mathcal{M} . Для каждой из этих вершин выберем в графе G какую-нибудь тройку, состоящую из нее и двух новых вершин. Пусть M – множество всех выбранных троек. Если из графа G удалить все вершины множества C , то оставшийся граф F – R - \mathcal{Q} -расширение леса, для него, по лемме 3.1.3, $\mu_{P_3}(F) = \beta_{P_3}(F)$. Добавляя к минимальному P_3 -покрытию графа F множество C , а к максимальной P_3 -упаковке – множество M , получим, очевидно, равномошные P_3 -покрытие и P_3 -упаковку графа G . Таким образом, $\mu_{P_3}(G) = \beta_{P_3}(G)$.

Теорема доказана. □

3.3.2 R - \mathcal{Q} -расширения циклов из 6 и 9 вершин

В этом и следующем подразделах рассматриваются кёниговы графы относительно P_3 , являющиеся R - \mathcal{Q} -расширениями простых циклов. По лемме 3.2.2 R - \mathcal{Q} -расширения циклов длины не кратной 3 не входят в класс $\mathcal{K}(P_3)$. Следовательно, подробно следует рассмотреть лишь R - \mathcal{Q} -расширения циклов, длина которых кратна 3.

Из леммы 3.2.5 следует, что не все R - \mathcal{Q} -расширения циклов, длина которых кратна 3, являются кёниговыми графами относительно P_3 . Наименьший из запрещенных подграфов, описываемых этой леммой – это $D(4,4,4)$, являющийся R - \mathcal{Q} -расширением C_{12} .

Будем нумеровать секции R - Q -расширения так же, как соответствующие им вершины исходного цикла. Если некоторое множество вершин состоит из целых секций, будем для описания этого множества перечислять номера составляющих его секций в квадратных скобках.

В R - Q -расширении цикла каждая тройка состоит из вершин трёх последовательных секций. При этом не важно, какие именно вершины из этих секций входят в тройку. Поэтому, чтобы указать тройку, будем просто перечислять в круглых скобках номера секций, содержащих ее вершины.

Набор секций, полученных из вершин некоторого 3-класса цикла будем также называть *3-классом* R - Q -расширения этого цикла.

Пусть в расширенном цикле задана некоторая P_3 -упаковка. Вершину, не принадлежащую никакой тройке этой P_3 -упаковки, назовем *свободной*. Секцию, содержащую свободную вершину, будем называть *дефектной*. Ясно, что в наибольшей P_3 -упаковке не может быть трех дефектных секций подряд. Такие три подряд идущие дефектные секции будем называть *блоком*.

P_3 -покрытие C назовем *стерильным* относительно P_3 -упаковки M , если:

1. оно не содержит дефектных секций;
2. всякая тройка M содержит ровно одну вершину из C .

Из определения следует, что имеется биекция между C и M , следовательно, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.3.1. *Если P_3 -покрытие C стерильно относительно P_3 -упаковки M , то $|M| = |C|$.*

Введем операцию *сдвига*, применяемую к P_3 -упаковке. Допустим, в P_3 -упаковке есть тройка $(k - 1, k, k + 1)$. Сдвиг вправо может быть применен, если секция $k + 2$ дефектная, и состоит в замене тройки $(k - 1, k, k + 1)$ на тройку $(k, k + 1, k + 2)$. В результате получается P_3 -упаковка с дефектной секцией $k - 1$. Секция $k + 2$ может перестать быть дефектной, статус остальных секций не изменяется. Аналогично сдвиг влево применяется, если секция $k - 2$ дефектная, и состоит в замене тройки $(k - 1, k, k + 1)$ на тройку $(k - 2, k - 1, k)$, при этом получается P_3 -упаковка с дефектной секцией $k + 1$.

Лемма 3.3.2. *Каждое R - Q -расширение циклов C_6 и C_9 является кёниговым графом относительно P_3 .*

Доказательство. Покажем, что для всякого такого графа мощность наибольшей P_3 -упаковки равна мощности наименьшего P_3 -покрытия. Отсюда и из леммы 3.1.3 будет следовать, что все они кёниговы относительно P_3 .

Пусть G – R - \mathcal{Q} -расширение цикла C_6 . Рассмотрим наибольшую P_3 -упаковку M графа G . Если секции 0 и 3 не дефектны, то $[0,3]$ – стерильное P_3 -покрытие относительно M и, по лемме 3.3.1, $\mu_{P_3}(G) = \beta_{P_3}(G)$. Аналогично, если не являются дефектными секции 1 и 4 или секции 2 и 5.

Остается рассмотреть случаи, когда в каждой из этих пар есть дефектная секция, при этом нет трех дефектных секций подряд. С точностью до циклического сдвига имеется единственная возможность: дефектными являются секции 0, 2, 4. Если в M есть тройка (1,2,3), то ее сдвиг вправо приводит к образованию блока (0,1,2). Следовательно, P_3 -упаковка M – не наибольшая. Аналогично, если в M есть тройка (3,4,5) или (5,0,1). Если же ни одной из этих троек нет, то $[1,3,5]$ – стерильное P_3 -покрытие относительно M и, по лемме 3.3.1, $\mu_{P_3}(G) = \beta_{P_3}(G)$.

Пусть теперь G – R - \mathcal{Q} -расширение C_9 . Рассмотрим наибольшую P_3 -упаковку M графа G . Как и в предыдущем случае заключаем, что если среди секций некоторого 3-класса нет дефектных, то эти секции образуют стерильное P_3 -покрытие. Остается рассмотреть случаи, когда в каждом 3-классе есть дефектная секция. Легко проверить, что с точностью до циклического сдвига и зеркального отражения имеется семь вариантов (перечисляются дефектные секции в каждом варианте): $\{0,1,5\}$, $\{0,2,4\}$, $\{0,1,3,5\}$, $\{0,1,4,5\}$, $\{0,2,4,6\}$, $\{0,1,3,5,6\}$, $\{0,1,3,5,7\}$.

Рассмотрим каждый из них.

1. Дефектные секции 0,1,5. Если в M есть тройка (6,7,8), то при сдвиге ее влево получаем блок (8,0,1). Если есть тройка (2,3,4), то сдвиг ее вправо дает блок (0,1,2). Следовательно, P_3 -упаковка M – не наибольшая. Допустим, что тех и других троек нет. Если нет и тройки (4,5,6), то P_3 -покрытие $[2,4,6,8]$ стерильно относительно M . Допустим, такая тройка есть. Если нет тройки (7,8,0), то P_3 -покрытие $[2,4,7,8]$ стерильно относительно M , а если нет тройки (1,2,3), то $[2,3,6,8]$ стерильно относительно M . Если же обе тройки есть, то следующая последовательность сдвигов снова приводит к образованию блока (3,4,5): (7,8,0) вправо, (4,5,6) вправо, (1,2,3) влево.

2. Дефектные секции 0,2,4. Если в M есть тройка (1,2,3), то сдвиг вправо дает блок (0,1,2). Если есть тройки (5,6,7) и (8,0,1), то при одновременном сдвиге первой из них влево, а второй вправо возникает блок (7,8,0). Аналогично, если есть тройки (6,7,8) и (3,4,5), то одновременный сдвиг дает блок (4,5,6). Во всех трёх случаях P_3 -упаковка M – не наибольшая.

Остается рассмотреть случаи, когда в той и другой паре одна из троек отсутствует:

- если нет (5,6,7) и (6,7,8), то $[1,3,6,7]$ – стерильное относительно M P_3 -покрытие;
- если нет (5,6,7) и (3,4,5), то $[1,3,5,7]$ – стерильное относительно M P_3 -покрытие;
- если нет (8,0,1) и (6,7,8), то $[1,3,6,8]$ – стерильное относительно M P_3 -покрытие;
- если нет (8,0,1) и (3,4,5), то $[1,3,5,8]$ – стерильное относительно M P_3 -покрытие.

3. Дефектные секции 0,1,3,5. Если в M есть тройка (2,3,4), то ее сдвиг вправо дает блок (0,1,2). Если есть тройка (6,7,8), то ее сдвиг влево дает блок (8,0,1). В обоих случаях P_3 -упаковка M – не наибольшая. Допустим, что ни тех, ни других троек нет. Если нет тройки (4,5,6), то P_3 -покрытие $[2,4,6,8]$ стерильно относительно M . Если нет тройки (7,8,0), то P_3 -покрытие $[2,4,7,8]$ стерильно относительно M . Допустим, те и другие тройки есть. Тогда одновременный сдвиг (4,5,6) влево и (7,8,0) вправо снова дает блок (5,6,7).
4. Дефектные секции 0,1,4,5. Если в M есть тройка (2,3,4), то ее сдвиг вправо дает блок (0,1,2). Если есть тройка (6,7,8), то ее сдвиг вправо дает блок (4,5,6). Если есть тройка (1,2,3), то ее сдвиг влево дает блок (3,4,5). Во всех трёх случаях P_3 -упаковка M – не наибольшая. Если же всех этих троек нет, то $[2,3,6,8]$ – стерильное относительно M P_3 -покрытие.
5. Дефектные секции 0,2,4,6. Если в M есть тройка (1,2,3), то сдвиг влево дает блок (2,3,4). Если есть тройка (3,4,5), то при сдвиге ее вправо возникает блок (2,3,4). В обоих случаях P_3 -упаковка M – не наибольшая. Допустим, что тех и других троек нет. Если нет тройки (5,6,7), то $[1,3,5,7]$ – стерильное относительно M P_3 -покрытие. Если нет тройки

- $(8,0,1)$, то $[1,3,5,8]$ — стерильное относительно M P_3 -покрытие. Если же и те и другие тройки есть, то одновременный сдвиг $(5,6,7)$ влево, а $(8,0,1)$ вправо снова даёт блок $(7,8,0)$.
6. Дефектные секции $0,1,3,5,6$. Если в M есть тройка $(2,3,4)$, то ее сдвиг вправо даёт блок $(0,1,2)$. Если есть тройка $(6,7,8)$, то ее сдвиг влево даёт блок $(8,0,1)$. Если есть тройка $(7,8,0)$, то ее сдвиг вправо даёт блок $(5,6,7)$. Во всех трёх случаях P_3 -упаковка M — не наибольшая. Если же никаких из перечисленных троек нет, то $[2,4,7,8]$ — стерильное относительно M P_3 -покрытие.
7. Дефектные секции $0,1,3,5,7$. Если в M есть тройка $(2,3,4)$, то ее сдвиг вправо даёт блок $(0,1,2)$. Если есть тройка $(6,7,8)$, то ее сдвиг влево даёт блок $(8,0,1)$. В обоих случаях P_3 -упаковка M — не наибольшая. Если нет ни тех, ни других, то $[2,4,6,8]$ — стерильное относительно M P_3 -покрытие.
- Лемма доказана. □

3.3.3 R - \mathcal{Q} -расширения циклов 12 и более вершин

Из леммы 3.2.5 следует, что не все R - \mathcal{Q} -расширения простых циклов, длина которых кратна 3 и больше или равна 12, являются кёниговыми графами относительно P_3 . Более того, все запрещённые графы из множества \mathcal{D}_3 являются R - \mathcal{Q} -расширениями циклов. В этом подразделе будет показано, что других запрещённых графов, среди R - \mathcal{Q} -расширений циклов нет.

Теорема 3.3.2. *R - \mathcal{Q} -расширение цикла C_n , где n кратно 3, является кёниговым графом относительно P_3 тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов из множества \mathcal{D}_3 .*

Доказательство. По лемме 3.3.2 любое R - \mathcal{Q} -расширение циклов C_6 и C_9 входит в класс $\mathcal{K}(P_3)$. Рассмотрим теперь R - \mathcal{Q} -расширения циклов большей длины.

Пусть граф G является R - \mathcal{Q} -расширением цикла C длины $3n$, где $n \geq 4$.

По лемме 3.2.5 если G содержит подграфы из множества \mathcal{D}_3 , то он не является кёниговым относительно P_3 . Таким образом, достаточно показать, что в противном случае всегда выполняется равенство $\mu_{P_3}(G) = \beta_{P_3}(G)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1. В графе G никакие две нетривиальные секции не являются смежными. Пусть k_1, k_2, \dots, k_m – длины путей, проходящих только через тривиальные секции, с концами в нетривиальных секциях. Будем называть эти величины *расстояниями* между нетривиальными секциями, а соответствующие секции – *соседними*. Нетрудно видеть, что $\sum_{i=1}^m k_i = 3n$. Рассмотрим следующие случаи:

- а) Существует такое i , что $k_i \equiv 2 \pmod{3}$. Пусть нетривиальные секции S_1 и S_2 соседние и находятся друг от друга на расстоянии $3p + 2$. Возьмём по одной вершине из S_1 и S_2 и удалим все вершины пути длины $3p + 2$, соединяющего эту пару вершин. Полученный граф является R - \mathcal{Q} -расширением дерева и по лемме 3.1.3 принадлежит классу $\mathcal{K}(P_3)$, а значит он содержит такие P_3 -упаковку M и P_3 -покрытие C , что $|M| = |C|$. Удалённый путь содержит $3p + 3$ вершин и может быть разбит на $p + 1$ троек. Добавив эти тройки к M , получим P_3 -упаковку графа G . Добавив к C вершины удалённого пути с номерами $2, 5, \dots, 3p + 2$ получим P_3 -покрытие той же мощности.
- б) Не существует такого i , что $k_i \equiv 2 \pmod{3}$, но существует такое i , что $k_i \equiv 1 \pmod{3}$. Поскольку длина цикла кратна 3, число таких i также кратно 3 и, следовательно, не меньше 3. Тогда существуют такие p и q , что

$$l_1 = k_1 + k_2 + \dots + k_p \equiv 1 \pmod{3};$$

$$l_2 = k_{p+1} + k_{p+2} + \dots + k_q \equiv 1 \pmod{3};$$

$$l_3 = k_{q+1} + k_{q+2} + \dots + k_s \equiv 1 \pmod{3}.$$

Поскольку $k_i > 1$ для всех i , мы заключаем, что $l_j \geq 4$ для всех j . Но тогда G содержит подграф $D(l_1, l_2, l_3)$, принадлежащий \mathcal{D}_3 .

- в) Все k_i кратны 3. В этом случае существует 3-класс графа G , состоящий только из тривиальных секций. Объединение секций этого 3-класса является P_3 -покрытием графа G мощности n . Очевидно, G содержит P_3 -упаковку той же мощности.
2. Граф G содержит две смежных нетривиальных секции S_1 и S_2 , но нет трёх подряд идущих вдоль цикла нетривиальных секций. Пусть $\{a_1\}$ и $\{a_2\}$ – тривиальные секции, смежные с S_1 и S_2 соответственно.

Рассмотрим граф G' , полученный из G удалением секций $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, S_1 , S_2 . G' является R - \mathcal{Q} -расширением дерева и по лемме 3.1.3 принадлежит классу $\mathcal{K}(P_3)$, а значит он содержит такие P_3 -упаковку M и P_3 -покрытие C , что $|M| = |C|$. Нетрудно видеть, что $C \cup \{a_1, a_2\}$ является P_3 -покрытием графа G размера $|C| + 2$. P_3 -упаковку графа G той же мощности получим, добавив к M тройки (a_1, x_1, x_2) и (y_1, y_2, a_2) , где $x_1, y_1 \in S_1, x_2, y_2 \in S_2, x_1 \neq y_1, x_2 \neq y_2$.

3. Граф G содержит три подряд идущих вдоль цикла нетривиальных секции. Если граф G не содержит порождённых подграфов из \mathcal{D}_3 , то G' также их не содержит. В этом случае доказательство равенства $\mu_{P_3}(G) = \beta_{P_3}(G)$ проведём индукцией по числу вершин. Случаи 1 и 2 будут являться базой индукции. Пусть для любого графа с числом вершин меньшим $|G|$ верно равенство $\mu_{P_3}(G) = \beta_{P_3}(G)$.

Поскольку $n \geq 4$, G содержит тривиальные секции, иначе появляется порождённый подграф из \mathcal{D}_3 . Выберем такие секции S_0, S_1, S_2, S_3 , что секция S_0 тривиальна, а S_1, S_2, S_3 – нетривиальны. Выберем по одной вершине $x_i \in S_i, i \in \{1, 2, 3\}$ из каждой нетривиальной секции. Обозначим G' граф, полученный из G удалением вершин x_1, x_2, x_3 . Обозначим M его наибольшую P_3 -упаковку, а C – его наименьшее P_3 -покрытие.

По предположению индукции, $|M| = |C|$. Нетрудно видеть, что C содержит как минимум одну из секций $S'_i = S_i \setminus \{x_i\}$, но не все три. Предположим, что C содержит две из этих секций. Пусть S'_j – секция с меньшим номером, включённая в C . Тогда $j \leq 2$ и $(C \setminus S'_j) \cup S_0$ также является P_3 -покрытием графа G , причём, поскольку $|S_0| = 1$, его размер не превышает $|C|$. Таким образом, всегда существует наименьшее P_3 -покрытие графа G' , содержащее ровно одну из секций S'_1, S'_2, S'_3 . Будем считать, что C – именно такое P_3 -покрытие. Пусть $S'_k \in C$. Тогда $C \cup \{x_k\}$ – P_3 -покрытие графа G мощности $|C| + 1$. P_3 -упаковку той же мощности получим, добавив к M тройку (x_1, x_2, x_3) .

Итак, если G не содержит порождённых подграфов из множества \mathcal{D}_3 , то он кёнигов относительно P_3 . Теорема доказана. \square

3.4 Полное описание класса $\mathcal{K}(P_3)$

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 3.4.1. *Следующие утверждения эквивалентны для графа G :*

- (1) G – кёнигов граф относительно P_3 ;
- (2) G не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{D}_3 \cup \{gem, dart, K_2 \circ O_3\}$;
- (3) Каждая компонента связности графа G является либо S_2 - R - \mathcal{Q} -расширением некоторого мультиграфа, либо R - \mathcal{Q} -расширением цикла длины кратной 3, не содержащего графов из множества \mathcal{D}_3 .

Доказательство. Если граф G не связан, то любые его наибольшая P_3 -упаковка и наименьшее P_3 -покрытие являются объединениями наибольших P_3 -упаковок и наименьших P_3 -покрытий всех компонент связности соответственно. Поэтому G кёнигов относительно P_3 тогда и только тогда, когда каждая его компонента связности является кёниговым графом относительно P_3 .

Из теоремы 3.3.1 следует, что если связный граф не является R - \mathcal{Q} -расширением цикла, то условия теоремы выполняются для него.

Из теоремы 3.3.2 и леммы 3.2.3 следует, что если связный граф является R - \mathcal{Q} -расширением цикла, то он кёнигов относительно P_3 тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{D}_3$. Но никакое R - \mathcal{Q} -расширение цикла не содержит также и порождённых подграфов из множества $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{B}_3 \cup \{gem, dart, K_2 \circ O_3\}$. Таким образом, для любого R - \mathcal{Q} -расширения цикла также выполняются условия теоремы.

Теорема доказана. □

3.5 Алгоритмические особенности кёниговых графов относительно P_3

Здесь и далее считаем, что число вершин произвольного графа G равно n , а число его рёбер – m .

В этом разделе показано, что кёниговы графы относительно P_3 могут быть распознаны за время $O(n^2)$ и что можно найти максимальную P_3 -упаковку и P_3 -покрытие в этих графах с той же временной сложностью.

3.5.1 Вспомогательный взвешенный граф

Две вершины, принадлежащие одной однородной клике, всегда имеют общую закрытую окрестность. Будем называть такие вершины *подобными*.

Обозначим $B(G)$ взвешенный граф, полученный из графа G удалением из каждой однородной клики всех вершин, кроме одной. Вес $w_B(v)$ вершины v графа $B(G)$ равен числу вершин в однородной клике графа G , соответствующей вершине v . Можно сказать, что, граф G построен из графа $B(G)$ заменой каждой его вершины v кликой размера $w_B(v)$. Назовём вершину графа $B(G)$ *тяжёлой*, если её вес больше 1.

Лемма 3.5.1. *Граф $B(G)$ может быть построен за время $O(n^2)$.*

Доказательство. Следующий алгоритм строит граф $B(G)$ и создаёт весовую функцию w_B по произвольному графу G , заданному матрицей смежности I_G .

Алгоритм построения $B(G)$.

Шаг 1. Построить матрицу $I_0 = I_G + E$, где E – единичная матрица.

Шаг 2. Присвоить значения $w_B(v) = 1$ для каждой вершины $v \in V(G)$.

Шаг 3. Отсортировать строки матрицы I_0 в лексикографическом порядке. Соответствие строк полученной матрицы I'_0 строкам матрицы I_G должно быть сохранено. Пусть j строка матрицы I'_0 соответствует i_j строке матрицы I_G .

Шаг 4. В цикле по j от 2 до n , где n – число вершин исходного графа, если j и $j - 1$ строки матрицы I'_0 равны, выполнить следующее:

Шаг 4.1 удалить из матрицы I_G i_j строку и i_j столбец;

Шаг 4.2 увеличить $w_B(i_{j-1})$ на 1.

Шаг 5. Полученная матрица является матрицей смежности графа $B(G)$.

На шаге 3 можно применить поразрядную сортировку [6], осуществив его за $O(n^2)$ шагов. Поразрядное сравнение на шаге 4 двух строк осуществляется не более, чем за n операций. Таким образом, шаг 4 также может быть осуществлён за $O(n^2)$ шагов.

Итак, $B(G)$ может быть построен за время $O(n^2)$. □

3.5.2 Распознавание кёниговых графов относительно P_3

Если G является R - Q -расширением простого цикла, тогда $B(G)$ – простой цикл. По теореме 3.3.2, такой граф является кёниговым графом относительно P_3 тогда и только тогда, когда число вершин в графе $B(G)$ кратно 3 и, кроме того, $B(G)$ не содержит трёх тяжёлых вершин, делящих цикл на сегменты длины не менее 4 и сравнимой с 1 по модулю 3. Поиск такой *запрещённой тройки* можно осуществить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм поиска запрещённой тройки.

Шаг 1. Выделить в $B(G)$ произвольный 3-класс T_1 .

Шаг 2. Для каждой тяжёлой вершины $a \in T_1$ выполнить следующее:

Шаг 2.1 Пронумеровать вершины графа $B(G)$ вдоль цикла так, что вершина a имеет номер 0.

Шаг 2.2 Найти тяжёлую вершину b с наименьшим номером $3k + 1$, где $k \in \mathbb{N}$. Если такой вершины не существует, перейти к следующей вершине множества T_1 .

Шаг 2.3 Найти тяжёлую вершину c с наименьшим номером $3l + 2$, где $l \in \mathbb{N}$ и $l > k$. Если такая вершина найдена, то a, b, c – запрещённая

тройка вершин и G не является кёниговым графом относительно P_3 .
СТОП.

Шаг 3. Если на предыдущих шагах запрещённой тройки не найдено, то граф является кёниговым графом относительно P_3 .

Заметим, что максимальное число вершин графа $B(G)$ равно n . Тогда размер T_1 не более $\frac{n}{3}$. Число вершин, не входящих в T_1 не более $\frac{2n}{3}$. То есть поиск тяжёлой вершины влодь по циклу можно осуществить не более, чем за $\frac{2n}{3}$ шагов. Таким образом, максимальное число шагов алгоритма $\frac{n}{3} \frac{2n}{3} = \frac{2}{9}n^2$. То есть справедлива следующая лемма.

Лемма 3.5.2. *Если $B(G)$ – цикл, то поиск запрещённой тройки может быть осуществлён за время $O(n^2)$.*

Пусть G – связный граф, не являющийся R - \mathcal{Q} -расширением простого цикла. Согласно теореме 3.3.1, G является кёниговым графом относительно P_3 тогда и только тогда, когда

1. $B(G)$ получен из какого-нибудь мультиграфа подразбиением каждого его циклового ребра двумя вершинами. Такой мультиграф назовём *базовым* для графа G ;
2. каждая тяжёлая вершина графа $B(G)$ имеет степень 1 или 2 и либо добавлена при подразбиении, либо не является цикловой.

Если $B(G)$ – дерево, то достаточно проверить, имеет ли каждая тяжёлая вершина степень 1 или 2. Граф $B(G)$ в этом случае является базовым мультиграфом. Если $B(G)$ содержит циклы, тогда в нём есть вершина степени не менее 3. В этом случае проверка указанных условий может быть осуществлена с помощью следующей процедуры. Она проверяет возможность «обратного S_2 - R - \mathcal{Q} -расширения». Граф H равен $B(G)$ в начале работы алгоритма и является базовым мультиграфом в конце, если G является кёниговым графом относительно P_3 .

Алгоритм построения базового мультиграфа.

Шаг 1. Построить граф H , равный $B(G)$.

Шаг 2. Найти все перешейки в H и пометить их как *базовые рёбра*.

Шаг 3. Пометить все вершины степени более 2 в H как *активные вершины*.

Шаг 4. Если среди активных вершин есть тяжёлые, то G не является кёниговым графом относительно P_3 . СТОП.

Шаг 5. Если в H нет активных вершин, то G является кёниговым графом относительно P_3 . СТОП.

Шаг 6. Найти какую-нибудь активную вершину a . Для каждой вершины b , где ребро (a, b) не базовое, сделать шаги 1–4.

Шаг 6.1 Если вершина b активная, то G не является кёниговым графом относительно P_3 . СТОП.

Шаг 6.2 Найти ребро (b, c) , где $c \neq a$. Поскольку (a, b) – не перешеек, а вершина b не активна, $\deg b = 2$ и вершина c определяется однозначно. Если ребро (b, c) базовое или вершина c активна, то G не является кёниговым графом относительно P_3 . СТОП.

Шаг 6.3 Найти ребро (c, d) , где $d \neq b$. Аналогично вершина d определяется однозначно. Если ребро (c, d) базовое или вершина d тяжёлая, то G не является кёниговым графом относительно P_3 . СТОП.

Шаг 6.4 Удалить вершины b и c из H . Добавить ребро (a, d) к H и пометить его как базовое. Пометить вершину d как активную.

Шаг 7. Пометить a как не активную и перейти к шагу 5.

Перешейки в связном графе можно найти с помощью алгоритма Тарьяна за время $O(m)$ [73]. Внутренний цикл 1–4 выполняется не более чем 1 раз для каждого ребра. Следовательно, оценка временной сложности всей процедуры $O(m)$. Число рёбер m в графе не превышает $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, справедлива следующая лемма.

Лемма 3.5.3. *Если $B(G)$ – связный граф, не являющийся простым циклом, то оценка принадлежности графа G классу $\mathcal{K}(P_3)$ может быть осуществлена за время $O(n^2)$.*

По теореме 3.4.1, если G является кёниговым графом относительно P_3 , то каждая его компонента связности является либо S_2 - R - \mathcal{Q} -расширением некоторого мультиграфа, либо R - \mathcal{Q} -расширением цикла длины кратной 3, не содержащего графов из множества \mathcal{D}_3 . Следовательно, проверку графа G на принадлежность классу $\mathcal{K}(P_3)$ можно провести, построив граф $B(G)$ и осуществив для

каждой его компоненты связности проверку на принадлежность классу $\mathcal{K}(P_3)$ исходной компоненты связности. Из лемм 3.5.1, 3.5.2 и 3.5.3 следует следующая теорема.

Теорема 3.5.1. *Оценка принадлежности любого графа классу $\mathcal{K}(P_3)$ может быть осуществлена за время $O(n^2)$.*

3.5.3 Задачи P_3 -MATCHING и P_3 -COVER в кёниговых графах относительно P_3

Рассмотрим теперь задачи поиска наибольшей P_3 -упаковки (P_3 -MATCHING) и наименьшего P_3 -покрытия (P_3 -COVER) в кёниговых графах относительно P_3 . Заметим, что в указанном классе графов для любой наибольшей P_3 -упаковки M и любого наименьшего P_3 -покрытия C каждая тройка M содержит ровно одну вершину C .

Теорема 3.5.2. *Задачи P_3 -MATCHING и P_3 -COVER могут быть решены в любом графе класса $\mathcal{K}(P_3)$ за время $O(n^2)$.*

Доказательство. Алгоритм с квадратичной оценкой сложности для R - \mathcal{Q} -расширений простых циклов легко выводится из доказательства леммы 3.3.2 и теоремы 3.3.2. Алгоритм с квадратичной оценкой сложности для R - \mathcal{Q} -расширения лесов выводится из доказательства леммы 3.1.3.

Поиск наибольшей P_3 -упаковки и наименьшего P_3 -покрытия в графе G , являющемся S_2 - R - \mathcal{Q} -расширением некоторого мультиграфа можно осуществить с помощью следующего алгоритма.

Алгоритм решения задач P_3 -MATCHING и P_3 -COVER.

Шаг 1. Построить базовый мультиграф H графа G .

Шаг 2. Построить множество A – все цикловые вершины мультиграфа H .

Шаг 3. Удалить все вершины множества A из графа G .

Шаг 4. Полученный граф является R - \mathcal{Q} -расширением леса. Найти в нём наибольшую P_3 -упаковку M и наименьшее P_3 -покрытие C .

Шаг 5. $C \cup A$ – наименьшее P_3 -покрытие графа G . Наибольшую P_3 -упаковку графа G можно построить, добавив к M для каждой вершины $a \in A$ тройку, состоящую из a и двух цикловых вершин графа $B(G)$, смежных с a и не смежных между собой в графе G .

Множество A может быть найдено за линейное время с использованием поиска в глубину [69]. Сложность остальных шагов не превышает $O(n^2)$.

По теореме 3.4.1, если G является кёниговым графом относительно P_3 , то каждая его компонента связности является либо S_2 - R - \mathcal{Q} -расширением некоторого мультиграфа, либо R - \mathcal{Q} -расширением цикла длины кратной 3, не содержащего графов из множества \mathcal{D}_3 . Следовательно, задачи P_3 -MATCHING и P_3 -COVER в графе класса $\mathcal{K}(P_3)$ можно решить, найдя в каждой его компоненте связности наибольшую P_3 -упаковку и наименьшее P_3 -покрытие, а затем объединив полученные множества.

Таким образом, задачи P_3 -MATCHING и P_3 -COVER в кёниговых графах относительно P_3 могут быть решены за время $O(n^2)$.

□

Глава 4. Структурное описание и запрещённые графы для класса кёниговых графов относительно P_4

Глава посвящена исследованию класса кёниговых графов относительно P_4 . На настоящий момент данный класс полностью не описан и не найдено его полное множество запрещённых графов. Однако описано несколько важных подклассов данного класса графов и найдено значительное количество минимальных запрещённых порождённых подграфов данного класса.

Результаты данной главы опубликованы в работах [3; 8; 61; 62].

4.1 Особенности класса и дополнительная терминология

В этом разделе рассказывается об основных особенностях класса кёниговых графов относительно P_4 , а так же вводятся несколько терминов для упрощения дальнейшего описания класса.

Будем называть *квartetом* порождённый подграф, изоморфный P_4 . Будем обозначать (v_1, v_2, v_3, v_4) *квartet*, состоящий из вершин v_1, v_2, v_3, v_4 , идущих в указанном порядке.

4.1.1 P_4 -связность

Понятие P_4 -связности графа интуитивно связано с понятием P_4 -структуры графа, представляющей собой гиперграф, каждое гиперребро которого соответствует какому-то *квartetу* данного графа. Понятие P_4 -структуры было введено В. Хваталом в 1984 [18]. P_4 -связным графом можно назвать граф, P_4 -структура которого представляет собой связный гиперграф

Граф G назовём *P_4 -связным*, если для любой его пары вершин u и v существует такая последовательность *квartetов* q_0, q_1, \dots, q_p , что $u \in q_0, v \in q_p$ и каждая пара *квartetов* q_{i-1}, q_i , где $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, имеет хотя бы одну общую вершину.

Другие термины, связанные с P_4 -связностью графа, определяются аналогично терминам, связанным со связностью.

Компонента P_4 -связности графа – это его максимальный по включению P_4 -связный подграф.

Вершину v графа G назовём *P_4 -изолированной*, если в G через v не проходит ни одного квартета. Такая вершина формирует отдельную компоненту P_4 -связности.

Очевидно, каждая наибольшая P_4 -упаковка графа есть объединение наибольших P_4 -упаковок всех его компонент P_4 -связности. Аналогично, всякое наименьшее P_4 -покрытие графа есть объединение P_4 -покрытий всех его компонент P_4 -связности. Таким образом, равенство $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$ зависит от равенства данных величин в каждой компоненте P_4 -связности. Из этого следует, что:

Лемма 4.1.1. *Граф G является кёниговым относительно P_4 тогда и только тогда, когда каждая компонента P_4 -связности G – кёнигов граф.*

4.1.2 Самодополнительность класса $\mathcal{K}(P_4)$

Одной из особенностей класса кёниговых графов относительно P_4 является его самодополнительность.

Поскольку P_4 является самодополнительным графом, $\{P_4\} = co(\{P_4\})$. Тогда утверждение 1.3.4 влечёт следующую лемму:

Лемма 4.1.2. *Граф G является кёниговым относительно P_4 тогда и только тогда, когда \overline{G} кёнигов относительно P_4 .*

Иными словами, класс $\mathcal{K}(P_4)$ является самодополнительным.

Из утверждения 1.3.5, в свою очередь, следует справедливость следующей леммы:

Лемма 4.1.3. *Если F – минимальный запрещённый порождённый подграф для класса $\mathcal{K}(P_4)$, то \overline{F} – также минимальный запрещённый порождённый подграф для этого класса.*

Таким образом, при описании графов класса $\mathcal{K}(P_4)$ и поиске запрещённых порождённых подграфов для данного класса имеет смысл рассматривать пары P_4 -связных графов, являющихся дополнениями друг друга.

4.2 R - F_4 -расширение и RT -расширение графов

Обозначим F_4 класс кографов. Для описания класса кёниговых графов относительно P_4 будем использовать операцию R - F_4 -расширения графа.

Во многом свойства R - F_4 -расширений графов относительно класса $\mathcal{K}(P_4)$ аналогичны свойствам R - \mathcal{Q} -расширений графов относительно класса $\mathcal{K}(P_3)$. Это касается, например, свойств секций и расширений лесов и простых циклов.

Как и для класса $\mathcal{K}(P_3)$, среди R - F_4 -расширений графов, являющихся кёниговыми графами относительно P_4 можно выделить несколько подклассов. Некоторые из них будут рассмотрены в настоящей главе.

4.2.1 Особенности однородных кографов и секций R - F_4 -расширений

Будем называть *однородным кографом* максимальное по включению однородное множество вершин, порождающее кограф.

Следующая пара утверждений сформулирована для P_q -упаковок, P_q -покрытий и для R - $Free(P_q)$ -расширений, где $q \geq 4$. Применимо к настоящей главе они рассматриваются при $q = 4$.

Лемма 4.2.1. *Если множество вершин A порождает P_q в R - $Free(P_q)$ -расширении некоторого графа G , то $|A \cap S(x)| \leq 1$ для всех $x \in V(G)$.*

Доказательство. Каждая секция порождает подграф из $Free(P_q)$, поэтому множество A не может целиком содержаться в какой-нибудь секции. Каждая секция является однородным множеством. Следовательно, если некоторая секция $S(x)$ содержит не менее двух вершин из A , то множество $A \cap S(x)$ являет-

ся нетривиальным однородным множеством в подграфе, порожденном множеством A . Но в графе P_q при $q \geq 4$ нет нетривиальных однородных множеств. \square

Лемма 4.2.2. *Если множество вершин F порождает подграф из класса $Free(P_q)$, где $q \geq 4$, в некотором графе G и является однородным множеством в этом графе, то оно либо целиком содержится в наименьшем P_q -покрытии, либо не пересекается с ним.*

Доказательство. Пусть C – наименьшее P_q -покрытие графа G . Предположим, что множество F содержит вершину a , принадлежащую некоторому C , и вершину b , ему не принадлежащую. Так как P_q -покрытие C наименьшее, то в графе существует такое множество вершин A , порождающее P_q , что $a \in A$ и $A \setminus \{a\} \cap C = \emptyset$, иначе $C \setminus \{a\}$ также является P_q -покрытием G и P_q -покрытие C не наименьшее. По лемме 4.2.1, $b \notin A$. Тогда множество $(A \setminus \{a\}) \cup \{b\}$ порождает граф P_q , но не содержит ни одной вершины из C . Лемма доказана. \square

Любая секция R - $Free(P_q)$ -расширения любого графа является однородным множеством. Поэтому справедлива

Лемма 4.2.3. *Каждое наименьшее P_q -покрытие любого R - $Free(P_q)$ -расширения любого графа, где $q \geq 4$, состоит из целых секций.*

4.2.2 RT -расширение

Основой для описания одного из подклассов класса $\mathcal{K}(P_4)$ является процедура RT -расширения. Для её описания необходимо определить операции замены кографами висячих путей.

Операция замены кографом висячего пути из 2 вершин состоит в следующем:

1. Вершины этого пути удаляются из графа.
2. К графу добавляются вершины и рёбра некоторого кографа.
3. Некоторые (но не все) вершины кографа соединяются с контактной вершиной так, чтобы подграф, порождённый контактной и новыми вершинами, не содержал квартетов.

4. Если степень контактной вершины в исходном графе не более 2, то она может быть заменена кографом.

Пусть граф G получен из некоторого графа H заменой висячего пути из 2 вершин с контактной вершиной x кографом, причём Y – вершины добавленного кографа. Определим в графе G два множества: $A = Y \cap N(x)$, $B = Y \setminus A$. Предположим, что в B существуют смежные вершины u, v и существует $a \in A$ такие, что u смежна с a и v не смежна с a . Тогда (v, u, a, x) является кварталом, что противоречит определению операции замены. Таким образом, каждая компонента связности графа $G[B]$ является однородным кографом в графе G .

Аналогично доказывается, что каждая компонента связности графа $\overline{G[A]}$ также является однородным кографом в графе G .

Таким образом, кограф, на который заменяется висячий путь из 2 вершин можно получить из некоторого графа T заменой его вершин кликами, причём вершины, смежные с контактной (обозначим это множество K) составляет клику, а не смежные с ней (обозначим это множество L) – независимое множество, следовательно граф T является расщепляемым. Из определения, T – порождённый подграф кографа, добавленного на шаге 2, а значит тоже является кографом. Следовательно, T – пороговый граф.

Лемма 4.2.4. [57] *Любой пороговый граф допускает линейное упорядочение вершин его клики и независимого множества по включению их окрестностей.*

Таким образом, по лемме 4.2.4, вершины множеств K и L можно линейно упорядочить по включению их окрестностей. Обозначим их k_1, k_2, \dots, k_p и l_1, l_2, \dots, l_q соответственно, так, что для любого $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ выполняется соотношение $N[k_{i+1}] \subseteq N[k_i]$ и для любого $j \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ выполняется $N(l_j) \subseteq N(l_{j+1})$.

Операция замены кографом висячего пути из 3 вершин состоит в следующем:

1. Вершины этого пути удаляются из графа.
2. К графу добавляются вершины и рёбра некоторого кографа.
3. Некоторые вершины кографа соединяются с контактной вершиной так, чтобы подграф, порождённый контактной и новыми вершинами, содержал квартал.

Будем называть вершину графа степени 3 или более *тяжёлой*, если в её окрестности есть не менее 3 вершин степени больше 1 и *полутяжёлой* – в противном случае. Вершины степени 1 и 2 будем называть *лёгкими*.

Пусть G – граф, в котором длины всех циклов кратны 4. RT -расширением графа G называется граф, полученный следующим образом:

1. Некоторые лёгкие вершины, не входящие ни в один цикл заменяются произвольными кографами.
2. Некоторые лёгкие цикловые вершины заменяются произвольными кографами. Причём вершина v может быть заменена кографом, при условии, что ни в одном цикле, содержащем v , нет тяжёлой или полутяжёлой вершины, расстояние от которой до вершины v вдоль цикла кратно 4, и нет полутяжёлой вершины, расстояние от которой до вершины v вдоль цикла сравнимо с 2 по модулю 4.
3. Некоторые висячие пути из 2 вершин заменяются произвольными кографами.
4. В полученном графе некоторые висячие пути из 3 вершин заменяются произвольными кографами.

Важно здесь отметить, что в процедуре RT -расширения графа имеет значение, в каком порядке выполняются указанные замены. В частности, нельзя после замены висячего пути кографом заменять его контактную вершину, даже если она имеет в графе степень 1 или 2.

Любое RT -расширение графа G также является $R-F_4$ -расширением некоторого графа. Отдельными секциями в нём будем считать:

- все кографы, заменяющие вершины графа G , включая контактные вершины висячих путей из 2 вершин, заменённых на шаге 3;
- все однородные кографы, появляющиеся при замене висячих путей из 2 вершин шаге 3 (иными словами, кографы, заменяющие вершины k_1, k_2, \dots, k_p и l_1, l_2, \dots, l_q в каждой из таких замен);
- все вершины кографов, заменяющих висячие пути из 3 вершин на шаге 4 и их контактные вершины.

Секцию RT -расширения графа G , на которую заменена вершина x , обозначим $S(x)$. В случае, если двухвершинный висячий путь x, y , где $\deg(x) = 1, \deg(y) = 2$, заменён кографом, соответствующие секции G будем обозначать $S(x|l_1), S(x|l_2), \dots, S(x|l_r)$ для секций, соответствующих вершинам

l_1, l_2, \dots, l_r , и $S(y|k_1), S(y|k_2), \dots, S(y|k_p)$ для секций, соответствующих вершинам k_1, k_2, \dots, k_p соответственно.

Лемма 4.2.5. *Если граф H является RT -расширением графа G , то любой его порождённый подграф также является RT -расширением графа G или одного из его собственных порождённых подграфов.*

Доказательство. Пусть граф H' получен из H удалением некоторых его вершин. Если ни одна секция графа H не была удалена полностью, то H' , очевидно, является R -расширением графа G .

Теперь рассмотрим случаи, когда в графе H' полностью отсутствуют какие-нибудь секции графа H . Пусть S – секция графа H и $H' = H \setminus S$. Рассмотрим следующие случаи:

- $S = S(x)$, где $x \in V(G)$, тогда H' является расширением графа $G \setminus x$.
- $S = S(x|l_i)$, где x, y – вершины G , образующие висячий путь, причём $\deg x = 1$. Тогда в случае, если соответствующее множество L содержит ровно одну вершину, граф H' является расширением графа $G \setminus x$. Иначе H' является расширением графа G .
- $S = S(y|k_i)$, где x, y – вершины G , образующие висячий путь, причём $\deg y = 2$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему.
- S является одной из вершин кографа A , заменившего висячий путь из 3 вершин на шаге 4. Тогда рассмотрим подграф A' графа G , порождённый вершинами $A \setminus S$ и контактной вершиной исходного висячего пути. Если A' содержит квартет, то H' является расширением графа G . Если A' не содержит квартета, то H' является расширением графа $G \setminus x$, где x – вершина степени 1 данного висячего пути, причём оставшийся висячий путь из 2 вершин заменён кографом.

□

4.2.3 RT -расширения лесов

Докажем теперь аналог леммы 3.1.3 для класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Лемма 4.2.6. *Любое RT -расширение любого леса принадлежит классу $\mathcal{K}(P_4)$.*

Доказательство. Пусть G – RT -расширение леса F . Поскольку, по лемме 4.2.5, любой порождённый подграф G также является RT -расширением леса, то достаточно доказать равенство величин μ_{P_4} и β_{P_4} в графе G .

Пусть в F существует два листа, смежных с одной и той же вершиной. Тогда, очевидно, F может быть получен из леса F' меньшего размера заменой листа графом O_2 . Иными словами, соответствующие секции в G могут быть объединены в одну. А значит G может быть получен из F' RT -расширением. Таким образом, достаточно рассмотреть только случай, когда в F каждая вершина смежна с не более чем одним листом.

Доказательство проведем индукцией по числу квартетов в наибольшей компоненте связности графа G . Если все компоненты связности F являются кографами, то G также является кографом и $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G) = 0$.

Предположим теперь, что для любого собственного порождённого подграфа G' графа G выполняется $\mu_{P_4}(G') = \beta_{P_4}(G') = 0$. Обозначим H наибольшую компоненту связности графа G и T – дерево, R - F_4 -расширением которого является H . Возможны следующие случаи:

Возможны следующие случаи.

1. Дерево T является квартетом (x_1, x_2, x_3, x_4) . Тогда, очевидно,

$$\mu_{P_4}(H) = \beta_{P_4}(H) = \min \{|S(x_1)|, |S(x_2)|, |S(x_3)|, |S(x_4)|\}.$$

По предположению индукции, $\mu_{P_4}(G \setminus H) = \beta_{P_4}(G \setminus H)$. Следовательно, $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G) = \mu_{P_4}(G \setminus H) + \mu_{P_4}(H) = \beta_{P_4}(G \setminus H) + \beta_{P_4}(H)$.

2. В T имеется висячий путь x_1, x_2, x_3 с контактной вершиной y , заменённый на кограф. Выберем из этого кографа такие вершины a_1, a_2, a_3 , что (a_1, a_2, a_3, y) – квартет в G . Рассмотрим граф G' , полученный из G удалением вершин a_1, a_2, a_3, y . Пусть M наибольшая P_4 -упаковка, а C наименьшее P_4 -покрытие графа G' . По предположению индукции, $|M| = |C|$. Теперь $M \cup \{(a_1, a_2, a_3, y)\}$ – P_4 -упаковка, а $C \cup \{y\}$ – P_4 -покрытие графа G той же мощности.
3. В T имеется такой квартет (x_1, x_2, x_3, x_4) , что $\deg(x_1) = 1$, $\deg(x_2) = 2$, $\deg(x_3) \geq 3$, $\deg(x_4) = 1$ или $\deg(x_4) = 2$, но второй смежной вершиной для x_4 является лист. Выберем вершины $a_1 \in S(x_1)$, $a_2 \in S(x_2)$, если x_1, x_2 заменены кографами по отдельности или $a_1 \in S(x_1|l_1)$, $a_2 \in S(x_2|k_1)$, если висячий путь x_1, x_2 заменён кографом. Выберем

также вершину $a_4 \in S(x_4)$, если x_4 заменена кографом или $a_4 \in S(k_1^{x_4})$, если висячий путь из 2 вершин, содержащий x_4 , заменён кографом.

Рассмотрим граф G' полученный из G удалением вершин a_1, a_2, x_3, a_4 . Пусть M – наибольшая P_4 -упаковка, а C наименьшее P_4 -покрытие графа G' . По предположению индукции, $|M| = |C|$. Теперь $M \cup \{(a_1, a_2, x_3, a_4)\}$ – P_4 -упаковка, а $C \cup \{x_3\}$ – P_4 -покрытие графа G той же мощности.

4. В T имеется такой квартет (x_1, x_2, x_3, x_4) , что $\deg(x_1) = 1$, $\deg(x_2) = \deg(x_3) = 2$, $\deg(x_4) \geq 2$, причём вершины висячего пути x_1, x_2, x_3 заменены кографами по отдельности. Выберем вершины $a_1 \in S(x_1)$, $a_2 \in S(x_2)$, $a_3 \in S(x_3)$, $a_4 \in S(x_4)$. Рассмотрим граф G' полученный из G удалением вершин a_1, a_2, a_3, a_4 . Пусть M – наибольшая P_4 -упаковка, а C наименьшее P_4 -покрытие графа G' . По предположению индукции, $|M| = |C|$. Если добавить квартет (a_1, a_2, a_3, a_4) в M , получится P_4 -упаковка графа G мощности $|M| + 1$. Покажем, что в G имеется P_4 -покрытие той же мощности.

Непустые множества среди $S(x_i) \setminus \{a_i\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, являются секциями в G' . Если при каком-нибудь i $S(x_i) \setminus \{a_i\}$ входит в C (такое множество может быть только одно), то $C \cup \{a_i\}$ – P_4 -покрытие графа G . В противном случае, среди этих множеств есть пустые. Пусть i^* – наибольшее i , при котором $|S(x_i)| = 1$. Тогда $C \cup \{a_{i^*}\}$ – P_4 -покрытие графа G . Мощность полученного P_4 -покрытия равна $|C| + 1 = |M| + 1$.

5. В T имеется такой квартет (x_1, x_2, x_3, x_4) , что $\deg(x_1) = 1$, $\deg(x_2) = \deg(x_3) = 2$, $\deg(x_4) \geq 2$, причём висячий путь x_1, x_2 заменён кографом. Выберем вершины $a_1 \in S(x_1|l_1)$, $a_2 \in S(x_2|k_1)$, $a_3 \in S(x_3)$, $a_4 \in S(x_4)$. Рассмотрим граф G' полученный из G удалением вершин a_1, a_2, a_3, a_4 . Пусть M – наибольшая P_4 -упаковка, а C наименьшее P_4 -покрытие графа G' . По предположению индукции, $|M| = |C|$. Если добавить квартет (a_1, a_2, a_3, a_4) в M , получится P_4 -упаковка графа G мощности $|M| + 1$. Покажем, что в G имеется P_4 -покрытие той же мощности. Возможны следующие случаи:

- а) $S(x_1|l_1) \setminus \{a_1\}$ непусто и включено в C , тогда $C \cup \{a_1\}$ – P_4 -покрытие графа G .
- б) $S(x_2|k_1) \setminus \{a_2\}$ непусто и включено в C , тогда $C \cup \{a_2\}$ – P_4 -покрытие графа G .

- в) $S(x_i) \setminus \{a_i\}$, где $i \in \{3,4\}$ непусто и включено в C , тогда $C \cup \{a_i\}$ – P_4 -покрытие графа G .
- г) Ни одно из множеств $S(x_1|l_1) \setminus \{a_1\}$, $S(x_2|k_1) \setminus \{a_2\}$, $S(x_i) \setminus \{a_i\}$, где $i \in \{3,4\}$, не включено в C , тогда среди них есть пустые. Рассмотрим все случаи:
- $|S(x_4)| = 1$. Тогда $C \cup \{a_4\}$ – P_4 -покрытие графа G .
 - $|S(x_4)| > 1$, $|S(x_3)| = 1$. Тогда $C \cup \{a_3\}$ – P_4 -покрытие графа G .
 - $|S(x_i)| > 1$, где $i \in \{3,4\}$, $|S(x_2|k_1)| = 1$, тогда каждый квартет графа G , проходящий через $S(x_4)$ и $S(x_3)$, проходит через какую-то вершину C или через a_2 , а каждый квартет, проходящий через $S(x_1|l_1)$, обязательно содержит a_2 . Все остальные квартеты графа G совпадают с квартетами графа G' . Поэтому $C \cup \{a_2\}$ – P_4 -покрытие графа G .
 - $|S(x_i)| > 1$, где $i \in \{3,4\}$, $|S(x_2|k_1)| > 1$, $|S(x_1|l_1)| = 1$, тогда каждый квартет графа G , проходящий через $S(x_4)$, $S(x_3)$ и $S(x_2|k_1)$, проходит через какую-то вершину C или через a_1 . Поэтому $C \cup \{a_1\}$ – P_4 -покрытие графа G .

Во всех случаях мощность полученного P_4 -покрытия равна $|C| + 1 = |M| + 1$.

Итак, в любом RT -расширении леса выполняется равенство величин μ_{P_4} и β_{P_4} . Значит любой такой граф является кёниговым относительно P_4 .

Лемма доказана □

4.3 Запрещённые графы

В этом разделе описаны минимальные запрещённые порождённые подграфы для класса $\mathcal{K}(P_4)$. Неизвестно, является ли этот список полным.

Как и для класса $\mathcal{K}(P_3)$, запрещённые порождённые подграфы для класса $\mathcal{K}(P_4)$ делятся на бесконечные семейства и отдельные графы, не входящие ни

в одно из этих семейств. Причём бесконечные семейства строятся во многом аналогично соответствующим семействам для класса $\mathcal{K}(P_3)$.

Стоит заметить, что, по лемме 4.1.3, все запрещённые порождённые подграфы для класса $\mathcal{K}(P_4)$ можно разбить на пары графов, являющихся дополнениями друг друга. Это касается как бесконечных семейств, так и отдельных графов, не входящих ни в одно из них.

4.3.1 Бесконечные семейства графов

Очевидно, $\mu_{P_4}(C_{4k}) = \mu_{P_4}(C_{4k+1}) = \mu_{P_4}(C_{4k+2}) = \mu_{P_4}(C_{4k+3}) = k$, $\beta_{P_4}(C_{4k}) = \beta_{P_4}(C_{4k-1}) = \beta_{P_4}(C_{4k-2}) = \beta_{P_4}(C_{4k-3}) = k$. Кроме того, любой собственный подграф простого цикла является лесом, а значит, по лемме 4.2.6, является кёниговым графом относительно P_4 . То есть, с учётом леммы 4.1.3, справедлива следующая лемма:

Лемма 4.3.1. *Графы C_n и $\overline{C_n}$ принадлежат классу $\mathcal{K}(P_4)$, если n кратно 4 и являются минимальными запрещёнными подграфами для $\mathcal{K}(P_4)$ в противном случае.*

Обозначим \mathcal{C}_4 множество всех простых циклов и их дополнений с числом вершин не кратным 4.

Второй тип запрещённых графов – это уже рассмотренные в главах 3 и 2 графы $A(n,k)$. Докажем для них следующую лемму:

Лемма 4.3.2. *Если n кратно 4, а k нечётно, то $A(n,k)$ и $\overline{A(n,k)}$ являются минимальными запрещёнными подграфами для класса $\mathcal{K}(P_4)$.*

Доказательство. Пусть $n = 4t$. Очевидно, $\mu_{P_4}(A(n,k)) = t$. Пусть S – наименьшее покрытие цикла C_n . Тогда S является 4-классом. Так как k не кратно 2, одна из вершин, смежных с вершинами степени 1 в $A(n,k)$, смежна так же с вершиной из S . Но тогда расстояние до другой ближайшей вершины из S равно 3. То есть эта вершина, смежная с ней вершина степени 1 и ещё две вершины цикла порождают квартет, не покрытый множеством S . Следовательно, $\beta_{P_4}(A(n,k)) > t$ и $A(n,k) \notin \mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.

Граф $A(n,k)$ содержит порождённые подграфы, изоморфные n -1-лассо и графу C_n . Для каждого из этих графов, очевидно, $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G) = t$, так что они кёниговы относительно P_4 . Остальные собственные порождённые подграфы графа $A(n,k)$ являются лесами, а значит, по по лемме 4.2.6, являются кёниговыми графами относительно P_4 .

Итак, все графы $A(n,k)$, где n кратно 4, а k нечётно, являются минимальными запрещёнными графами для класса $\mathcal{K}(P_4)$. Тогда по лемме 4.1.3 дополнения этих графов также являются минимальными запрещёнными графами для класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Лемма доказана. □

Обозначим \mathcal{A}_3 множество таких графов $A(n,k)$ и $\overline{A(n,k)}$, что n кратно 3, а k не кратно 3.

Другие бесконечные серии минимальных запрещённых подграфов для класса $\mathcal{K}(P_4)$ требуют новых обозначений.

Рассмотрим множество графов, получающихся из n -1-лассо заменой каких-нибудь двух вершин цикла графами K_2 или O_2 (возможно, различными). Это множество графов обозначим через $B_1(n, k_1, k_2)$, где k_1 и k_2 – расстояния от узла до вершин, подвергшихся замене. Все графы множества $B_1(n, k_1, k_2)$ отличаются друг от друга графами (K_2 или O_2), на которые были заменены соответствующие вершины. На рисунке 4.1 показан один из графов множества $B_1(8, 4, 2)$.

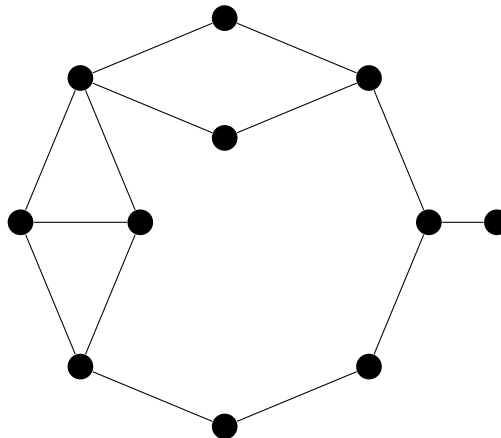


Рисунок 4.1 — Граф из множества $B_1(8, 4, 2)$

Лемма 4.3.3. Если n и одно из k_i , где $i \in \{1,2\}$, кратны 4, а k_{3-i} чётно, но не кратно 4, причём $1 \geq k_i \geq \frac{n}{2}$, то все графы множества $B_1(n, k_1, k_2)$ и их

дополнения являются минимальными запрещёнными порождёнными подграфами для класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь граф $B \in B_1(n, k_1, k_2)$.

Пусть $n = 4t$. Очевидно, $\mu_{P_4}(B) = t$. Обозначим в исходном лассо x – узел, y – вершину степени 1, a_1, a_2 – вершины, подвергшиеся замене, причём k_1 и k_2 – расстояния от x до a_1 и a_2 соответственно. Не уменьшая общности, предположим, что k_1 кратно 4, а k_2 – не кратно 4.

Все наименьшие P_4 -покрытия n -вершинного цикла данного графа являются 4-классами этого цикла и имеют мощность t . Отметим, что, поскольку k_1 кратно 4, вершины x и a принадлежат одному 4-классу. Граф B содержит ровно два квартета, содержащие вершину y . Оба они содержат также и x . Таким образом, если 4-класс n -вершинного цикла, содержит вершину, смежную с x , то один из квартетов, содержащих y не покрыт этим 4-классом. 4-класс содержащий x , содержит также и a . То есть P_4 -покрытие графа B , соответствующее данному 4-классу содержит секцию $S(a_1)$ и поэтому имеет мощность $t + 1$. Оставшийся 4-класс содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2 от узла, а значит и вершину a_2 . То есть P_4 -покрытие графа B , соответствующее данному 4-классу содержит секцию $S(a_2)$ и поэтому также имеет мощность $t + 1$.

Таким образом $\beta_{P_4}(B) \geq t + 1$, то есть B – запрещенный граф для класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Удаление вершины $v \in S(a_1)$ из графа B порождает подграф, полученный из $n-1$ -лассо заменой вершины a_2 двухвершинным кографом. Для этого графа, очевидно, $\mu_{P_4}(B \setminus v) = t$. Покрытием данного графа той же мощности является 4-класс n -вершинного цикла данного графа, содержащий вершину a_2 . То есть $\mu_{P_4}(B \setminus a_0) = \beta_{P_4}(B \setminus a_0) = t$, так что он кёнигов относительно P_4 . Аналогично, удаление вершины из секции $S(a_2)$ также порождает кёнигов граф относительно P_4 . Подграф $B \setminus y$ может быть получен из C_n заменой двух вершин двухвершинными кографами. Нетрудно видеть, что $\mu_{P_4}(B \setminus y) = \mu_{P_4}(C_n) = t$, а 4-класс базового цикла, не содержащий вершин a_1, a_2 , является P_4 -покрытием графа $B \setminus y$ той же мощности.

Остальные собственные порожденные подграфы графа $B_1(n, k_1, k_2)$ являются R - F_4 -расширениями лесов, а значит, по лемме 4.2.6, являются кёниговыми графами относительно P_4 .

Итак, граф B является минимальным запрещённым порождённым подграфом класса $\mathcal{K}(P_4)$. Тогда по лемме 4.1.3 граф \overline{B} также является минимальным запрещённым порождённым подграфом класса $\mathcal{K}(P_4)$. Лемма доказана. \square

Рассмотрим множество графов, получающихся из n -2-лассо заменой одной вершины цикла одним из графов K_2 или O_2 . Это множество графов обозначим через $B_2(n, k)$, где k – расстояние от узла до вершины, подвергшейся замене. Все графы множества $B_2(n, k)$ отличаются друг от друга графами (K_2 или O_2), на которые была заменена вершина. На рисунке 4.2 показан один из графов множества $B_2(8, 4)$.

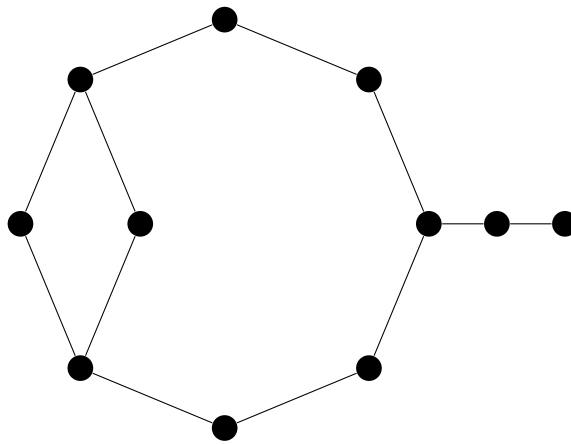


Рисунок 4.2 — Граф из множества $B_2(8, 4)$

Лемма 4.3.4. Если n и одно из k кратны 4 и $1 \geq k \geq \frac{n}{2}$, то все графы множества $B_2(n, k)$ и их дополнения являются минимальными запрещёнными порождёнными подграфами класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь граф $B \in B_2(n, k)$.

Пусть $n = 4t$. Очевидно, $\mu_{P_4}(B) = t$. Обозначим в исходном лассо x – узел, y_1, y_2 – вершины висячего пути, a – вершина, подвергшаяся замене.

Все наименьшие P_4 -покрытия n -вершинного цикла данного графа являются 4-классами этого цикла и имеют мощность t . Отметим, что, поскольку k кратно 4, вершины x и a принадлежат одному 4-классу. Граф B содержит ровно два квартета, содержащие вершины y_1 и y_2 . Каждый из них содержит также они содержат x и одну из вершин цикла, смежную с x . Если 4-класс n -вершинного цикла, не содержит вершину x , то по крайней мере один из указанных квартетов не покрыт этим 4-классом. 4-класс содержащий x , содержит

также и a . То есть P_4 -покрытие графа B , соответствующее данному 4-классу содержит секцию $S(a)$ и поэтому имеет мощность $t + 1$.

Таким образом $\beta_{P_4}(B) \geq t + 1$, то есть B является запрещённым порождённым подграфом класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Удаление вершины $a_0 \in S(a)$ из графа B порождает подграф, изоморфный n -2-лассо. Для этого графа, очевидно, $\mu_{P_4}(B \setminus a_0) = \beta_{P_4}(B \setminus a_0) = t$. Другие собственные порождённые подграфы графа B были рассмотрены в доказательстве леммы 4.3.3 или являются R - F_4 -расширениями лесов, а значит, по лемме 4.2.6, являются кёниговыми графами относительно P_4 .

Итак, граф B является минимальным запрещённым порождённым подграфом класса $\mathcal{K}(P_4)$. Тогда по лемме 4.1.3 граф \bar{B} также является минимальным запрещённым порождённым подграфом класса $\mathcal{K}(P_4)$. Лемма доказана. \square

Обозначим \mathcal{B}_4 множество всех графов, принадлежащих множествам $B_1(n, k_1, k_2)$ и $B_2(n, k)$, где n, k и k_1 кратны 4, причём $1 \geq k \geq \frac{n}{2}$ и $1 \geq k_1 \geq \frac{n}{2}$, а k_2 не кратно 4, но чётно, и дополнений всех таких графов.

Обозначим через $D(k_1, k_2, k_3, k_4)$ множество графов, полученных из цикла $C_{k_1+k_2+k_3+k_4}$ заменой графами K_2 или O_2 четырёх вершин, делящих цикл на пути длины k_1, k_2, k_3, k_4 в порядке обхода цикла. На рисунке 4.3 показан один из графов множества $D(2, 3, 2, 5)$.

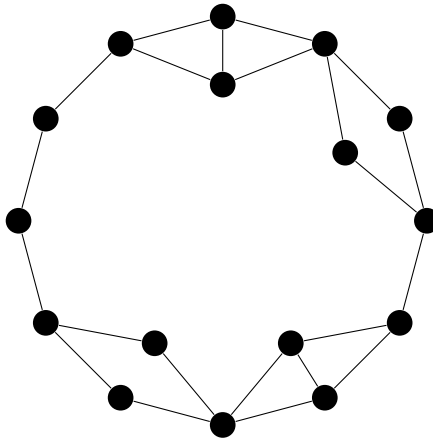


Рисунок 4.3 — Граф из множества $D(2, 3, 2, 5)$

Лемма 4.3.5. *Графы множества $D(k_1, k_2, k_3, k_4)$ и их дополнения являются минимальными запрещёнными порождёнными подграфами класса $\mathcal{K}(P_4)$, если выполняется одно из условий:*

- $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv k_4 \equiv 1 \pmod{4}$ и $k_i \geq 5$, $i \in \{1, 2, 3\}$;
- $k_1 \equiv 1 \pmod{4}$ и $k_1 \geq 5$, $k_2 \equiv k_4 \equiv 2 \pmod{4}$, $k_3 \equiv 3 \pmod{4}$

Доказательство. Пусть $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 4t$. Рассмотрим какой-нибудь граф $D \in D(k_1, k_2, k_3, k_4)$.

Можно считать, что замене подверглись вершины с номерами 0 , k_1 , $k_1 + k_2$ и $k_1 + k_2 + k_3$. Заметим, что при все заменяемые вершины принадлежат различным 4-классам исходного цикла C_n , причём вершины 0 и k_1 не смежны. Обозначим соответствующие секции через S_0, S_1, S_2, S_3 . Очевидно, существует P_4 -упаковка графа D мощности t . Предположим, что существует P_4 -упаковка этого графа мощности $t + 1$. Тогда эта P_4 -упаковка разбивает все вершины графа на квартеты. В ней обязательно есть квартет $(n - 3, n - 2, n - 1, x)$, где $x \in S_0$, и квартет $(y, k_1 + 1, k_1 + 2, k_1 + 3)$, где $y \in S_1$. Тем самым на отрезке от 0 до k_1 имеется $k_1 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ вершин и они все должны быть разбиты на квартеты, что невозможно. Итак, $\mu_{P_4}(D) = t$. Но в любой 4-класс цикла C_n входит одна из вершин 0 , k_1 , $k_1 + k_2$ и $k_1 + k_2 + k_3$. Поэтому любое наименьшее P_4 -покрытие графа D включает одну из секций S_0, S_1, S_2, S_3 . Следовательно $\beta_{P_4}(D) = t + 1$ и граф D не является кёниговым графом относительно P_4 .

Среди собственных порожденных подграфов графа D имеются R - F_4 -расширения $4t$ -вершинного цикла, в которых не более трёх вершин заменено двухвершинными кографами. Поскольку такие графы содержат цикл C_{4t} , в них есть P_4 -упаковка мощности t , а, поскольку не более трёх вершин заменено кликами, существует 4-класс исходного цикла, не содержащий вершин, подвергшихся замене. Он и является P_4 -покрытием мощности t .

Остальные собственные порожденные подграфы графа D являются R - F_4 -расширениями лесов, а значит, по лемме 3.1.3, являются кёниговыми графами относительно P_4 .

Итак, граф D является минимальным запрещённым порождённым подграфом класса $\mathcal{K}(P_4)$. Тогда по лемме 4.1.3 граф \bar{D} также является минимальным запрещённым порождённым подграфом класса $\mathcal{K}(P_4)$. Лемма доказана. \square

Обозначим \mathcal{D}_4 множество графов принадлежащих множествам $D(k_1, k_2, k_3, k_4)$, удовлетворяющих условиям теоремы 4.3.5, и их дополнений.

4.3.2 Другие запрещённые графы

Рассмотрим теперь запрещённые порождённые подграфы класса $\mathcal{K}(P_4)$, не входящие ни в одно из семейств $\mathcal{A}_4, \mathcal{B}_4, \mathcal{C}_4, \mathcal{D}_4$. По лемме 4.1.3 все эти графы можно разделить на пары графов, являющихся дополнениями друг друга.

Очевидно, что для графа G с 6 или 7 вершинами $\mu_{P_4}(G) \leq 1$. Запрещёнными порождёнными подграфами класса $\mathcal{K}(P_4)$ являются те из них, для которых $\beta_{P_4}(G) \geq 2$, следовательно для каждой вершины графа существует квартет, не проходящий через эту вершину.

Рассмотрим связные графы с числом вершин 6. По лемме 4.2.6 деревья всегда принадлежат классу $\mathcal{K}(P_4)$. То есть если $\beta_{P_4}(G) \geq 2$, то в G не менее 6 рёбер. Поскольку максимальное число рёбер в шестивершинном графе равно 15, по лемме 4.1.3 чтобы найти графы с числом P_4 -покрытия большим 1, достаточно перебрать все графы с 6 и 7 рёбрами. Все остальные графы будут являться их дополнениями.

Итак, непосредственным перебором найдено 14 графов из 6 вершин, в которых число P_4 -покрытия больше или равно 2. 6 из них содержат C_5 в качестве порождённого подграфа. Ещё 4 графа – это $C_6, A(4,1)$ и их дополнения, входящие в множества \mathcal{A}_4 и \mathcal{C}_4 . Последние 4 графа не входят ни в одно из бесконечных семейств – это графы E_1, E_2 и их дополнения, изображенные на рисунке 4.4. Легко проверить также, что каждый порожденный подграф каждого из этих графов принадлежит классу $\mathcal{K}(P_4)$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

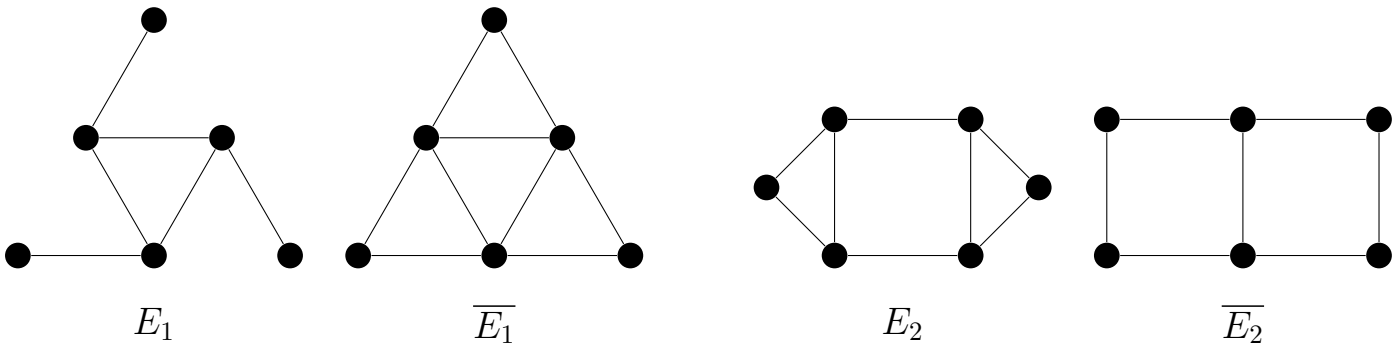


Рисунок 4.4 — Графы из множества $Forb(\mathcal{K}(P_4))$ из 6 вершин, не входящие в множества \mathcal{A}_4 и \mathcal{C}_4

Лемма 4.3.6. *Графы $E_1, \overline{E_1}, E_2, \overline{E_2}$ являются минимальными запрещенными графами для $\mathcal{K}(P_4)$.*

Рассмотрим теперь связные графы с числом вершин 7. По лемме 4.2.6 деревья всегда принадлежат классу $\mathcal{K}(P_4)$. То есть если $\beta_{P_4}(G) \geq 2$, то в G не менее 7 рёбер. Поскольку максимальное число рёбер в семивершинном графе равно 21, по лемме 4.1.3 чтобы найти графы с числом P_4 -покрытия большим 1, достаточно перебрать все графы с числом рёбер от 7 до 10. Все остальные графы будут являться их дополнениями.

Непосредственным перебором найдено 62 минимальных запрещённых подграфов класса $\mathcal{K}(P_4)$ из 7 вершин. Число P_4 -покрытия каждого из них больше или равно 2. Два из них – это C_7 и его дополнение, входящие в \mathcal{C}_4 . Остальные 60 графов не входят ни в одно из бесконечных семейств. Все эти графы – E_3, \dots, E_{32} и их дополнения – изображены на рисунках 4.5, 4.6, 4.7, 4.8. Легко проверить также, что каждый порожденный подграф каждого из этих графов принадлежит классу $\mathcal{K}(P_4)$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 4.3.7. *Графы $E_3, \dots, E_{32}, \overline{E_3}, \dots, \overline{E_{32}}$ являются минимальными запрещенными графами для $\mathcal{K}(P_4)$.*

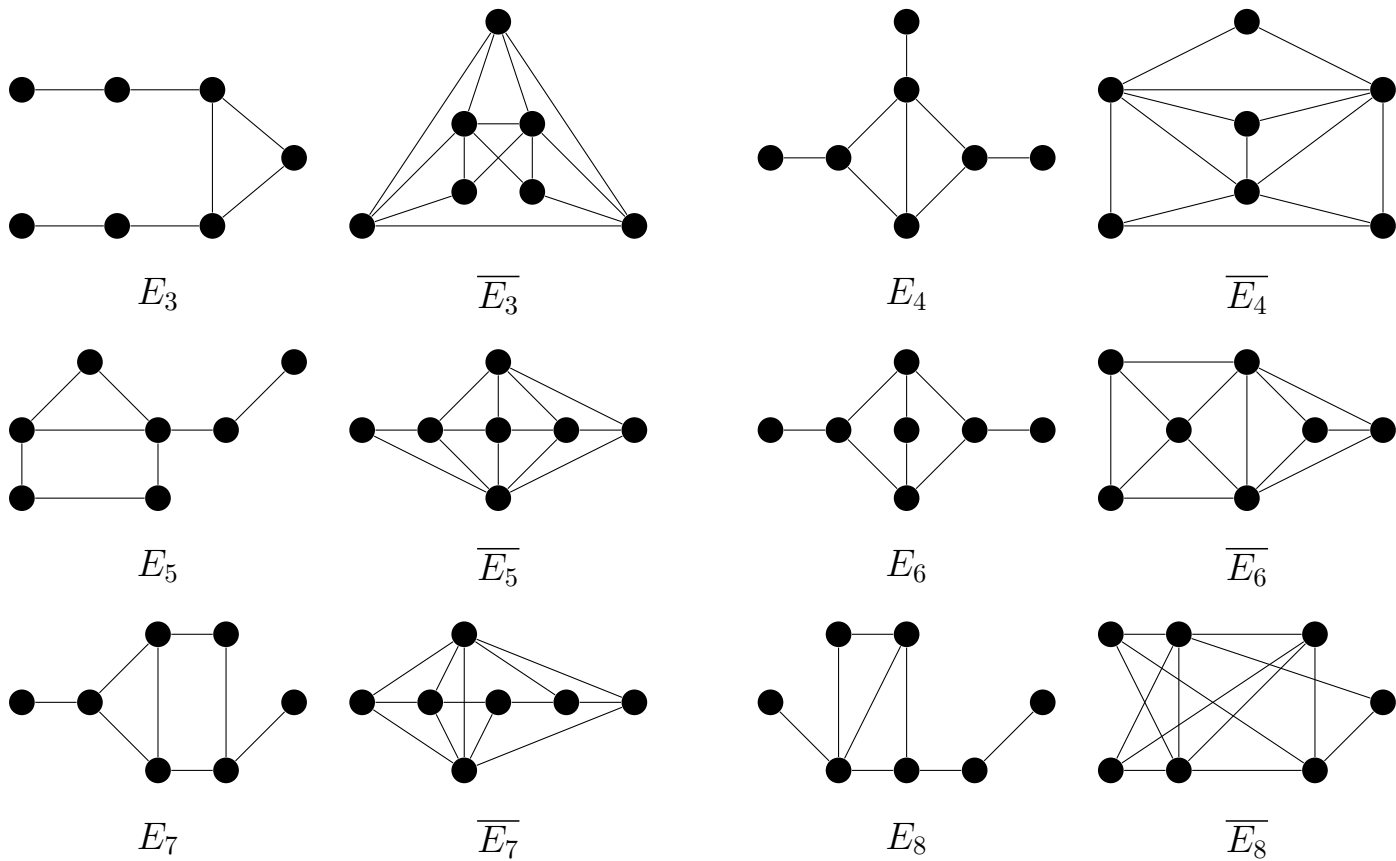
Обозначим $\mathcal{E}_4 = \{E_1, \overline{E_1}, E_2, \overline{E_2}, \dots, E_{32}, \overline{E_{32}}\}$

4.4 Структурное описание одного из подклассов класса $\mathcal{K}(P_4)$

В этом разделе описаны два типа P_4 -связных кёниговых графов относительно P_4 .

4.4.1 S - RT -расширения графов, не являющихся простыми циклами

Пусть H – двудольный граф. Каждое цикловое ребро (ребро, принадлежащее какому-нибудь циклу) этого графа подразобьем одной вершиной. Любое

Рисунок 4.5 — Графы $E_3 \dots E_8$ и их дополнения

RT -расширение полученного графа будем называть S - RT -расширением графа H .

Нетрудно видеть, что S - RT -расширение любого двудольного графа является RT -расширением некоторого графа, не содержащего порождённых подграфов из множества $\mathcal{A}_4 \cup \mathcal{C}_4$. Отметим также, что любое R - F_4 -расширение простого цикла с числом вершин кратным 4 является S - RT -расширением какого-нибудь чётного цикла.

Теорема 4.4.1. Пусть H – связный двудольный граф, отличный от простого цикла. Тогда P_4 -связное S - RT -расширение графа H и его дополнение являются кёниговыми графами относительно P_4 .

Доказательство. Пусть G – S - RT -расширение графа H . Обозначим H' граф, полученный из H подразбиением каждого его циклового ребра одной вершиной. Таким образом, G является RT -расширением графа H' . Поскольку H , а следовательно и H' , связны и не являются простыми циклами, каждый цикл графа H содержит хотя бы одну полутяжёлую или тяжёлую вершину. Следовательно,

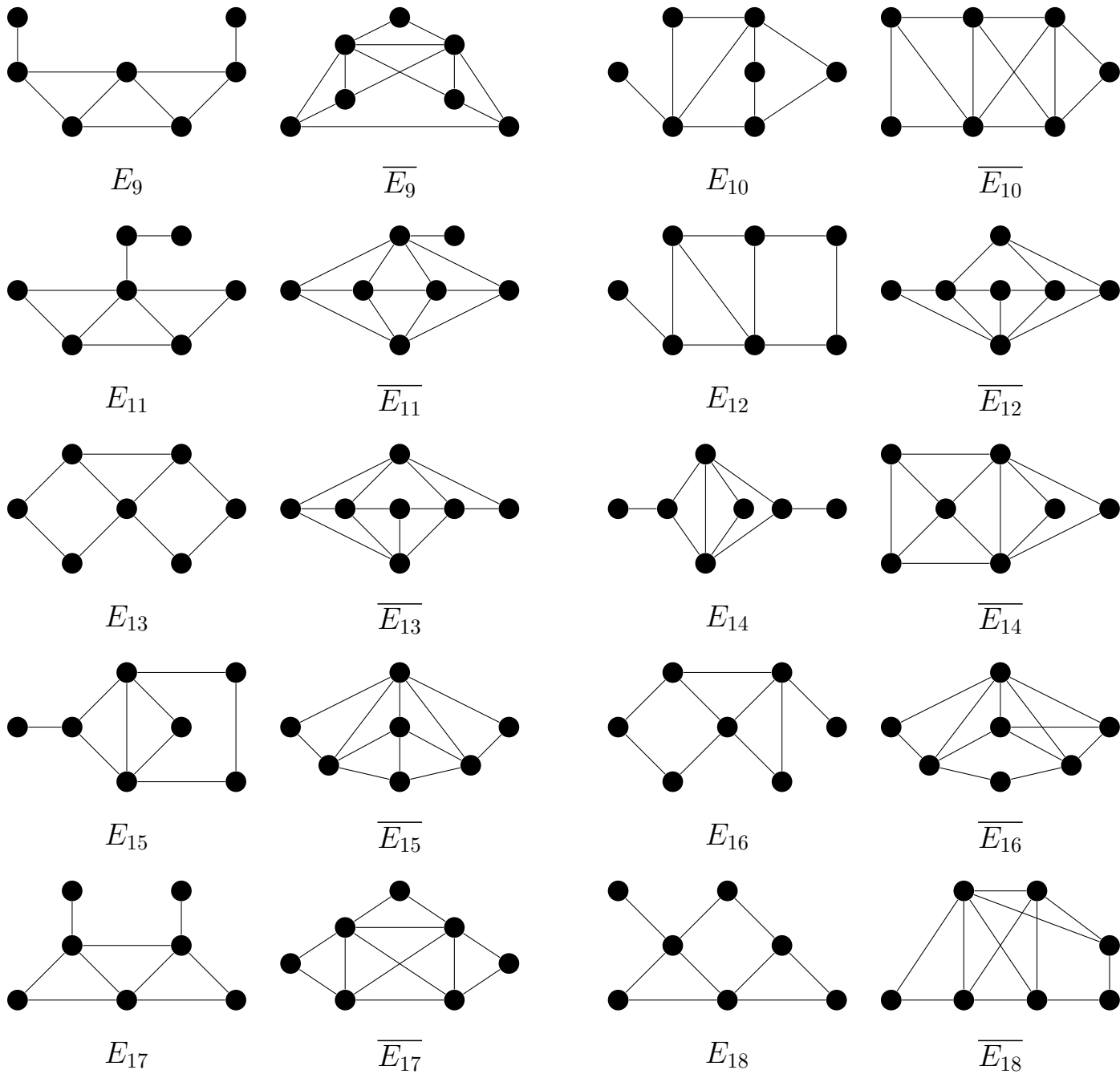
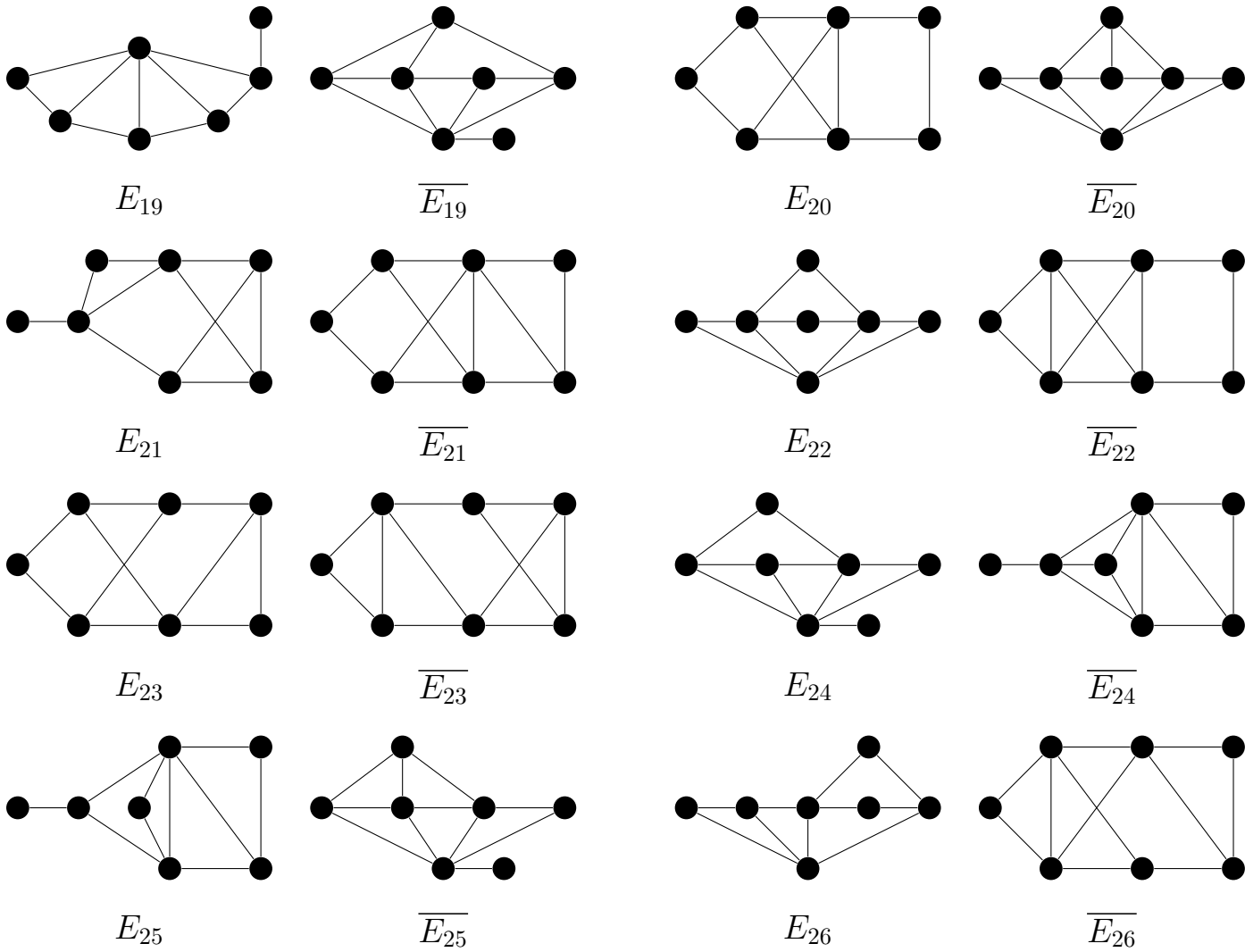


Рисунок 4.6 — Графы $E_9 \dots E_{18}$ и их дополнения

из определения RT -расширения, хотя бы один 4-класс любого преобразованного цикла графа G состоит только из тривиальных секций.

Таким образом, если RT -расширение простого цикла является порождённым подграфом графа G , то хотя бы один его 4-класс состоит только из тривиальных секций.

Аналогично доказательству леммы 4.2.6, не уменьшая общности, предположим, что в графе H' каждая вершина смежна с не более чем одной висячей вершиной.

Рисунок 4.7 — Графы $E_{19} \dots E_{26}$ и их дополнения

Отметим, что число вершин каждого цикла графа H' кратно 4. Значит, по лемме 4.2.5, любая компонента P_4 -связности порождённого подграфа графа G также является S - RT -расширением некоторого двудольного графа. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.

Доказательство проведём индукцией по числу вершин в графе G . Если H — дерево, то, по лемме 4.2.6, $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.

Поскольку индукция подразумевает замкнутость относительно удаления вершин, рассмотрим также отдельно случай, когда H является простым циклом. То есть G является RT -расширением простого цикла C_{4t} . В этом случае то хотя бы один 4-класс графа G состоит только из тривиальных секций. Этот 4-класс, очевидно, образует P_4 -покрытие графа G мощности t . Поскольку G содержит порождённый подграф C_{4t} , в нём также есть и P_4 -упаковка мощности t . То есть $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.

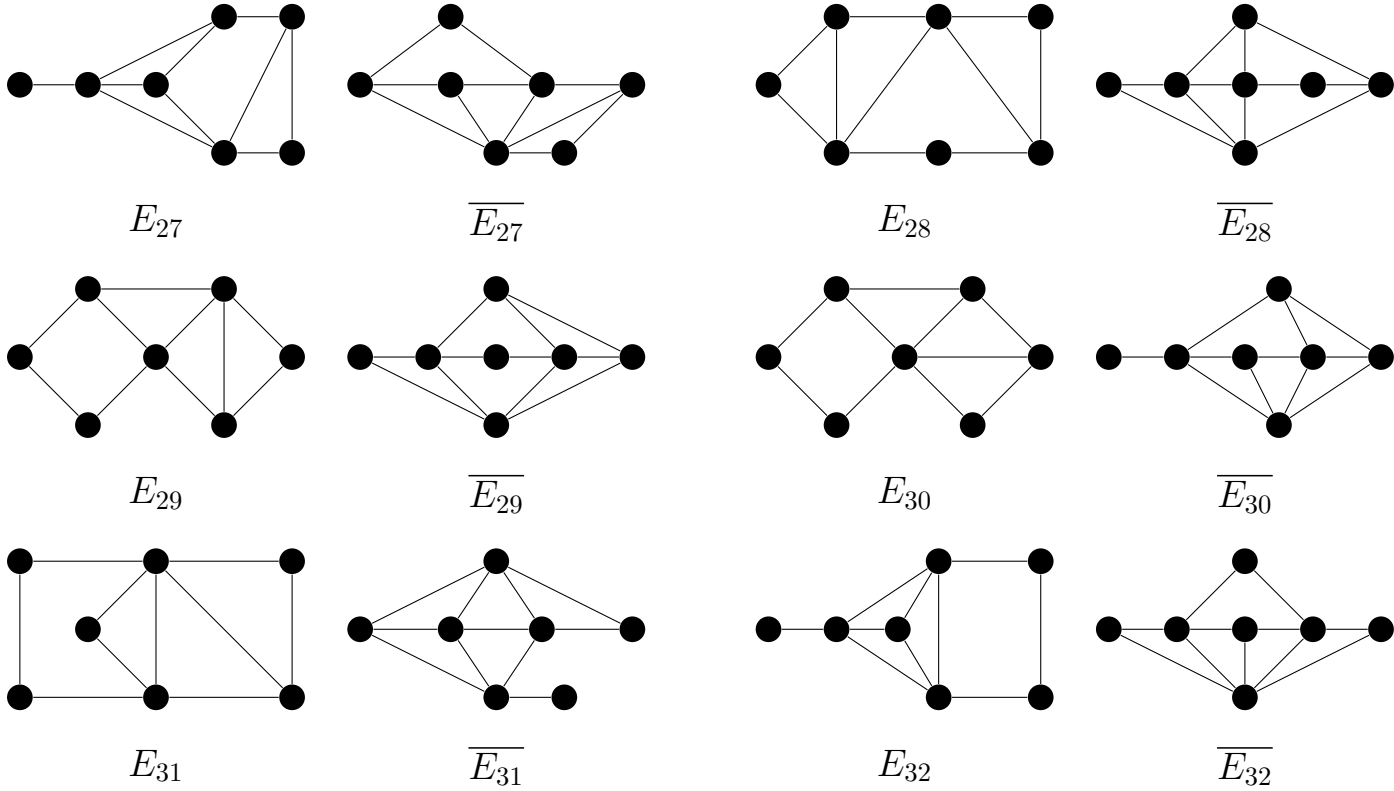


Рисунок 4.8 — Графы $E_{27} \dots E_{32}$ и их дополнения

Предположим теперь, что для любого собственного порождённого подграфа G' графа G выполняется $\mu_{P_4}(G') = \beta_{P_4}(G')$. Возможны следующие случаи:

1. В H имеется висячий путь из 2 вершин. Тогда имеет место один из случаев 2–5, рассматриваемых в доказательстве леммы 4.2.6 и равенство $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$ доказывается аналогично.
2. В H нет висячих путей из 2 вершин, но имеется блок X_0 , содержащий ровно один шарнир v_0 , являющийся тяжёлой вершиной (могут содержаться также лёгкие шарниры). Каждая вершина X_0 является цикловой.

Обозначим X подграф графа G , полученный из X_0 . Обозначим A долю X_0 , содержащую v_0 и B – вторую долю этого графа.

Построим в X_0 наибольшее паросочетание M_0 . Поскольку X_0 – блок графа H , каждое его ребро является цикловым и каждому ребру $m_i \in M_0$ можно поставить в соответствие смежное ребро $m'_i \notin M_0$. Множество всех таких рёбер обозначим M'_0 . В процессе процедуры S - RT -расширения каждое ребро X_0 подразбивается одной вершиной. Для каждого $m_i \in M_0$ возьмём квартет, состоящий из вершин, инцидентных m_i и вершин, добавленных при подразбиении рёбер m_i и

m'_i . Очевидно, что полученное множество M_1 четвертов составляет P_4 -упаковку графа X . Заметим, что $|M_1| = |M_0|$.

Заметим, что все вершины доли A составляют отдельные тривиальные секции в графе G . Заметим также, что вершины доли B могут быть заменены нетривиальными кографами только в том случае, если все они не являются тяжёлыми в графе H . Но в этом случае A является одним из наименьших вершинных покрытий графа X_0 . Таким образом, если v_0 принадлежит какому-нибудь наименьшему вершинному покрытию графа X_0 , можно выбрать его так, что все его вершины составляют отдельные секции в графе G . В противном случае, вершины любого вершинного покрытия графа X_0 составляют отдельные секции в графе G . Легко видеть, что любое такое вершинное покрытие является P_4 -покрытием графа X .

Таким образом, нахождение максимальной P_4 -упаковки и минимального P_4 -покрытия графа X сводится к задачам о паросочетании и вершинном покрытии для графа X_0 . Граф X_0 двудольный, следовательно, мощность его наибольшего паросочетания равна мощности наименьшего вершинного покрытия.

Рассмотрим два случая:

- Существует наименьшее вершинное покрытие C_0 графа X_0 , содержащее v_0 . Ввиду сказанного выше, C_0 может быть выбрано так, что все его вершины составляют отдельные секции в графе G , то есть C_0 является P_4 -покрытием графа X .

Рассмотрим граф G' , полученный из G удалением вершин подграфа X . Пусть M – наибольшая P_4 -упаковка, а C – наименьшее P_4 -покрытие графа G' . По предположению индукции, $|M| = |C|$. $M \cup M_1$ является P_4 -упаковкой, а $C \cup C_0$ – P_4 -покрытием графа G . Поскольку $|C_0| = |M_0| = |M_1|$, $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.

- v_0 не принадлежит никакому наименьшему вершинному покрытию графа X_0 . Тогда любое вершинное покрытие графа X_0 является P_4 -покрытием графа X . Будем использовать здесь терминологию метода увеличивающих путей (см., например, [5]). Все рёбра M_0 назовём *сильными*, а остальные – *слабыми*. Вершину назовём *свободной*, если она не инцидентна никакому

сильному ребру. *Чередующимся путём* назовём простой путь, в котором чередуются сильные и слабые ребра (т.е. за сильным ребром следует слабое, за слабым – сильное). *Увеличивающим путём* назовём чередующийся путь, концами которого являются свободные вершины. Нетрудно видеть, что, заменив в увеличивающем пути сильное ребро на слабое, а слабое – на сильное, получим паросочетание большего размера. То есть относительно M_0 увеличивающих путей не существует, так как оно наибольшее.

Пусть A_0 и B_0 множества свободных вершин в долях A и B соответственно. Найдём все вершины из A , достижимые чередующимися путями из A_0 , пусть A_1 – множество всех таких вершин а B_1 – множество других концов рёбер M_0 , инцидентных вершинам из A_1 . Обозначим $A_2 = A \setminus (A_0 \cup A_1)$, $B_2 = B \setminus B_1$. Вершины из B_2 не смежны с вершинами из $A_0 \cup A_1$, так как иначе они были бы достижимы из A_0 . Значит, $A_0 \cup A_1 \cup B_2$ – независимое множество графа X_0 , а $C_0 = A_2 \cup B_1$, следовательно, является его вершинным покрытием, причём это вершинное покрытие содержит по одной вершине из каждого ребра M_0 , следовательно, оно является наименьшим.

Поскольку v_0 не принадлежит никакому наименьшему вершинному покрытию графа X_0 , $v_0 \in A_0 \cup A_1$. Предположим, что $v_0 \in A_1$. Тогда существует чередующийся путь P из вершины v_0 в какую-нибудь свободную вершину a . Поменяем вдоль пути P сильные рёбра на слабые, а слабые – на сильные. Полученное паросочетание имеет ту же мощность, что и M_0 , но вершина v_0 не инцидентна ни одному его ребру.

Таким образом, не уменьшая общности, предположим, что $v_0 \in A_0$, то есть является свободной. Поскольку X является блоком графа G , все его вершины являются цикловыми.

Предположим, что все рёбра, инцидентные v_0 принадлежат множеству M'_0 . Возьмём какой-нибудь цикл Z , содержащий вершину v_0 . Число рёбер в Z обозначим $2k$. Поскольку все рёбра, инцидентные v_0 , слабые, в Z содержится ещё хотя бы одна вершина $u \neq v_0$, инцидентная двум слабым рёбрам данного цикла.

Поскольку паросочетание M_0 наибольшее, чередующийся путь из v_0 в u не является увеличивающим, то есть вершина u не свободная.

Итак, каждое слабое ребро цикла, не инцидентное вершине u , имеет сильных соседей только среди рёбер цикла Z . Но сильных рёбер в Z не более чем $k - 1$. Таким образом, не более k слабых рёбер цикла Z могут принадлежать множеству M'_0 . Поскольку слабых рёбер в Z не менее $k + 1$, хотя бы одно из них не принадлежит множеству M'_0 . Обозначим m'_0 ближайшее к v_0 такое ребро.

Рассмотрим чередующийся путь из вершины v_0 , заканчивающийся ребром m'_0 . Пусть m_1, \dots, m_k – последовательные сильные рёбра этого пути, причём ребро m_k – ближайшее к v_0 . Тогда каждое ребро m'_i смежно с m_{i+1} , где $i \in \{1, \dots, k - 1\}$. Заменяя в M'_0 каждое ребро m'_i на m'_{i-1} , где $i \in \{1, \dots, k\}$, получим множество рёбер, в котором каждое ребро также соответствует ровно одному смежному ребру паросочетания M_0 . Но в таком множестве не содержится одно из рёбер, инцидентных v_0 .

Итак, не уменьшая общности, предположим, что существует ребро, инцидентное v_0 , не принадлежащее множеству M'_0 . Обозначим v_1 вершину графа G , добавленную при подразбиении этого ребра.

Рассмотрим граф G' , полученный из G удалением вершин подграфа $X \setminus (v_0 \cup S(v_1))$. Пусть M – наибольшая P_4 -упаковка, а C – наименьшее P_4 -покрытие графа G' . Отметим, что если $v_1 \in C$, то $(C \setminus \{v_1\}) \cup v_0$ также является наименьшим P_4 -покрытием, поэтому, не уменьшая общности, предположим, что $v_1 \notin C$. По предположению индукции, $|M| = |C|$.

Очевидно, $M \cup M_1$ является P_4 -упаковкой графа G .

Отметим, что все вершины, смежные с v_0 в графе X_0 принадлежат C_0 . Поэтому любой квартет графа G , содержащий вершины графа $X \setminus N[v_0]$, покрывается вершинами из C_0 . Но любой квартет графа G , содержащий вершины $N[v_0]$ графа X , содержит v_0 , а значит покрывается вершинами из C . Таким образом, $C \cup C_0$ является P_4 -покрытием графа G .

Поскольку $|C_0| = |M_1|$ и $|M| = |C|$, в графе G выполняется равенство $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.

3. В H нет шарниров, являющихся тяжёлыми вершинами. Тогда H содержит ровно 1 блок X_0 такой, что $|X_0| \geq 4$ (любой другой блок состоит из шарнира и вичячей вершины). Обозначим X подграф графа G , полученный из X_0 .

Построим в X_0 наибольшее паросочетание M_0 . Поскольку X_0 – блок графа H и $|X_0| \geq 4$, каждое его ребро является цикловым и каждому ребру $m_i \in M_0$ можно поставить в соответствие смежное ребро $m'_i \notin M_0$. В процессе процедуры S - RT -расширения каждое ребро X_0 подразбивается одной вершиной. Для каждого $m_i \in M_0$ возьмём квартет, состоящий из вершин, инцидентных m_i и вершин, добавленных при подразбиении рёбер m_i и m'_i . Очевидно, что полученное множество M_1 квартетов составляет P_4 -упаковку графа X . Заметим, что $|M_1| = |M_0|$. Поскольку H не является простым циклом (этот случай был рассмотрен ранее), в нём есть вершины степени 3, то вершины по крайней мере одной из долей графа X_0 составляют отдельные тривиальные секции в графе G . Вершины второй доли могут быть заменены нетривиальными кографами только в том случае, если все они не являются тяжёлыми в графе H . Но тогда вершины первой доли составляют одно из наименьших вершинных покрытий графа X_0 . Таким образом, можно выбрать минимальное вершинное покрытие C_0 графа X_0 так, что все его вершины составляют отдельные секции в графе G . Легко видеть, что любое такое вершинное покрытие является P_4 -покрытием графа X . Граф X_0 двудольный, следовательно, $|C_0| = |M_0| = |M_1|$.

Пусть вершина v не входит ни в один цикл графа H . Тогда она имеет степень 1. Если u – смежная с v вершина, то либо $u \in C_0$, либо $N(u) \subseteq C_0$. Таким образом, расстояние от v до ближайших вершин C_0 в графе H не превышает 2. Поскольку ребро смежное с v сохраняется в графе G , расстояние от v до ближайших вершин C_0 в графе G не превышает 3. Значит любой квартет графа G , проходящий через v , содержит хотя бы одну вершину множества C_0 . То есть C_0 является P_4 -покрытием графа G . А значит в графе G выполняется равенство $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.

Теорема доказана. □

4.4.2 RT -расширения циклов из 8 вершин

В этом и следующем подразделах рассматриваются кёниговы графы относительно P_4 , являющиеся RT -расширениями простых циклов. Поскольку все вершины простого цикла лёгкие, любое $R-F_4$ -расширение цикла является также RT -расширением этого цикла. По лемме 4.3.1 $R-F_4$ -расширения циклов длины не кратной 4 не входят в класс $\mathcal{K}(P_4)$. Следовательно, подробно следует рассмотреть лишь $R-F_4$ -расширения циклов, длина которых кратна 4.

Объединение секций, полученных из вершин некоторого 4-класса цикла будем также называть *4-классом* $R-F_4$ -расширения этого цикла.

Из леммы 4.3.5 следует, что не все $R-F_4$ -расширения циклов, длина которых кратна 4, являются кёниговыми графами относительно P_4 . Наименьший из запрещенных подграфов, описываемых этой леммой – это $D(5, 2, 3, 2)$, являющийся $R-F_4$ -расширением C_{12} .

Аналогично главе 3, $R-F_4$ -расширения циклов длины меньше 12 составляют отдельный частный случай. Будем здесь использовать терминологию и обозначения из подраздела 3.3.2.

Будем нумеровать секции $R-F_4$ -расширения так же, как соответствующие им вершины исходного цикла. Если некоторое множество вершин состоит из целых секций, будем для описания этого множества перечислять номера составляющих его секций в квадратных скобках.

В $R-F_4$ -расширении цикла каждый квартет состоит из вершин четырёх последовательных секций. При этом не важно, какие именно вершины из этих секций входят в этот квартет. Поэтому, чтобы указать квартет, будем перечислять в круглых скобках номера секций, содержащих ее вершины.

Пусть в $R-F_4$ -расширении цикла задана некоторая P_4 -упаковка. Вершину, не принадлежащую никакому квартету этой P_4 -упаковки, назовем *свободной*. Секцию, содержащую свободную вершину, будем называть *дефектной*. Ясно, что в наибольшей P_4 -упаковке не может быть четырёх дефектных секций подряд. Такие четыре подряд идущие дефектные секции будем называть *блоком*.

P_4 -покрытие S назовем *стерильным* относительно P_4 -упаковки M , если:

1. оно не содержит дефектных секций;
2. всякий квартет M содержит ровно одну вершину из S .

Из определения следует, что имеется биекция между C и M , следовательно, справедлива

Лемма 4.4.1. *Если P_4 -покрытие C стерильно относительно P_4 -упаковки M , то $|M| = |C|$.*

Введем операцию *сдвига*, применяемую к P_4 -упаковке. Допустим, в P_4 -упаковке есть квартет $(k - 1, k, k + 1, k + 2)$. Сдвиг вправо может быть применен, если секция $k + 3$ дефектная, и состоит в замене квартета $(k - 1, k, k + 1, k + 2)$ на квартет $(k, k + 1, k + 2, k + 3)$. В результате получается P_4 -упаковка с дефектной секцией $k - 1$. Секция $k + 3$ может перестать быть дефектной, статус остальных секций не изменяется. Аналогично сдвиг влево применяется, если секция $k - 3$ дефектная, и состоит в замене квартета $(k - 2, k - 1, k, k + 1)$ на квартет $(k - 3, k - 2, k - 1, k)$, при этом получается P_4 -упаковка с дефектной секцией $k + 1$.

Лемма 4.4.2. *Каждое R - F_4 -расширение цикла C_8 является кёниговым графом относительно P_4 .*

Доказательство. Любой порожденный подграф R - F_4 -расширения цикла C_8 является либо R - F_4 -расширением этого же цикла, либо R - F_4 -расширением леса. В последнем случае, по лемме 4.2.6, он является кёниговым графом относительно P_4 . Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что в любом R - F_4 -расширении цикла C_8 существуют равномощные P_4 -покрытие и P_4 -упаковка.

Пусть граф G получен из C_8 заменой вершин кографами. Если существует такая наибольшая P_4 -упаковка M , что две секции одного 4-класса не дефектны относительно M , тогда эти две секции C образуют P_4 -покрытие, стерильное относительно M , то есть, по лемме 4.4.1 $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.

Рассмотрим теперь случай, когда для любой P_4 -упаковки хотя бы одна секция каждого 4-класса дефектна. Итак, пусть M - наибольшая P_4 -упаковка. С точностью до циклического сдвига имеется единственная возможность: дефектными относительно M являются секции 0, 1, 3, 6. Заметим, что секции 2 и 7 не дефектны относительно M , иначе P_4 -упаковка M не является наибольшей. По этой же причине хотя бы одна из секций 4 и 5 также не дефектна. Не уменьшая общности, предположим, что секция 4 не дефектна относительно M .

Если в M есть квартет $(7,0,1,2)$, то его сдвиг вправо приводит к образованию блока $(6,7,0,1)$. Следовательно, P_4 -упаковка M – не наибольшая. То есть M не содержит квартета $(7,0,1,2)$. Аналогично в M исключается возможность существования квартетов $(2,3,4,5)$ и $(4,5,6,7)$.

Рассмотрим 2 случая:

- M не содержит квартета $(1,2,3,4)$. Тогда $[2,4,7]$ – стерильное P_4 -покрытие относительно M , то есть, по лемме 4.4.1 $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.
- M содержит квартет $(1,2,3,4)$. Тогда секция 5 не дефектна относительно, иначе сдвиг влево квартета $(1,2,3,4)$ приводит к образованию блока $(3,4,5,6)$. Но в этом случае M не содержит квартета $(5,6,7,0)$, иначе одновременный сдвиг квартета $(1,2,3,4)$ влево и квартета $(5,6,7,0)$ вправо приводит к образованию блока $(3,4,5,6)$. Но тогда $[2,5,7]$ – стерильное P_4 -покрытие относительно M , то есть, по лемме 4.4.1, $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.

Лемма доказана. □

4.4.3 RT -расширения циклов из 12 и более вершин

Из леммы 4.3.5 следует, что не все $R-F_4$ -расширения простых циклов, длина которых кратна 4 и больше или равна 12, являются кёниговыми графами относительно P_4 . Более того, все запрещённые графы из множества \mathcal{D}_4 являются $R-F_4$ -расширениями циклов. В этом подразделе будет показано, что других запрещённых графов, среди $R-F_4$ -расширений циклов нет.

Теорема 4.4.2. *$R-F_4$ -расширение цикла C_n , где n кратно 4, является кёниговым графом относительно P_4 тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов из множества \mathcal{D}_4 .*

Доказательство. Любой порождённый подграф $R-F_4$ -расширения цикла является либо $R-F_4$ -расширением этого же цикла, либо $R-F_4$ -расширением леса. В последнем случае, по лемме 4.2.6, он является кёниговым графом относительно P_4 . Таким образом, для доказательства леммы достаточно показать, что в любом $R-F_4$ -расширении цикла существуют равномощные P_4 -покрытие и P_4 -упаковка.

По лемме 4.4.2 любое $R-F_4$ -расширение цикла C_8 входит в класс $\mathcal{K}(P_4)$. Рассмотрим теперь $R-F_4$ -расширения циклов большей длины.

Пусть граф G является $R-F_4$ -расширением цикла C длины $4n$, где $n \geq 3$.

По лемме 4.3.5 если G содержит подграфы из множества \mathcal{D}_4 , то он не является кёниговым относительно P_4 . Таким образом, достаточно показать, что в противном случае всегда выполняется равенство $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$.

Если в G есть 4-класс, в котором все секции тривиальны, то вершины из этого класса образуют P_4 -покрытие мощности n . Очевидно, имеется и P_4 -упаковка той же мощности.

Рассмотрим теперь случай, когда в каждом 4-классе есть нетривиальная секция. Выберем по одной большой секции из каждого 4-класса. Пусть k_1, k_2, k_3, k_4 – расстояния между этими секциями вдоль цикла (то есть $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 4n$). Легко видеть, что для этого набора расстояний по модулю 4 имеется ровно три варианта с точностью до циклического сдвига: $(1,1,1,1), (1,2,3,2), (3,3,3,3)$.

Рассмотрим следующие случаи:

1. В графе G никакие две нетривиальные секции не являются смежными.

Тогда как бы ни были выбраны нетривиальные секции разных 4-классов, каждая из k_1, k_2, k_3, k_4 больше 1. Но тогда из трёх перечисленных вариантов возможен только вариант $(3,3,3,3)$. В первых двух вариантах граф G содержит запрещённый порождённый подграф из множества \mathcal{D}_4 . Таким образом, $k_i = 4n_i + 3$, где $i \in \{1,2,3,4\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Итак, пусть секции $0, 4p+3, 4q+2, 4r+1$, где $p = n_1, q = n_1 + n_2 + 1, r = n_1 + n_2 + n_3 + 2$, нетривиальны. Тогда секции $4n-1, 1, 4p+2, 4p+4, 4q+1, 4q+3, 4r, 4r+2$ тривиальны. Пусть одна из секций $5, 9, \dots, 4p+1$ нетривиальна. Тогда граф G содержит порождённый подграф из множества $D(4i+1, 4(p-i)+2, 4n_2+3, 4(n_3+n_4+1)+2)$, где $4i+1$ – номер нетривиальной секции. Такой подграф принадлежит множеству \mathcal{D}_4 и является запрещённым порождённым подграфом класса P_4 .

Таким образом, секции $5, 9, \dots, 4p+1$ тривиальны. Аналогично тривиальными являются секции $4p+8, 4p+12, \dots, 4q, 4q+7, 4q+11, \dots, 4r-1$, или $4r+6, 4p+10, \dots, 4n-2$. Обозначим C объединение секций $1, 5, \dots, 4p+1, 4p+4, 4p+8, \dots, 4q, 4q+3, 4q+7, \dots, 4r-1, 4r+2, 4p+6, \dots, 4n-2$. Поскольку все эти секции тривиальны, $|C| = n+1$. Нетрудно видеть, что C является P_4 -покрытием G .

Возьмём по одной вершине из секций $0, 1, \dots, 4p + 3$ и рассмотрим получившийся путь. Он содержит $4p + 4$ вершин и, следовательно, может быть разбит на $p + 1$ квартетов. Аналогично, пути, состоящие из вершин секций $4p + 3, 4p + 4, \dots, 4q + 2, 4q + 2, 4q + 3, \dots, 4r + 1$ и $4r + 1, 4r + 2, \dots, 4n - 1, 0$ могут быть разбиты на $q - p, r - q$ и $n - r$ квартетов соответственно. Если указанные пути не содержат общих вершин в секциях $0, 4p + 3, 4q + 2, 4r + 1$ (а такое возможно, так как все эти секции нетривиальны), то объединение таких множеств квартетов составляет P_4 -упаковку M графа G , причём $|M| = n + 1 = |C|$.

2. Граф G содержит две смежных нетривиальных секции но нет трёх подряд идущих вдоль цикла нетривиальных секций. Тогда можно выбрать по одной большой секции из каждого 4-класса так, что одно из расстояний k_1, k_2, k_3, k_4 равно 1. Не уменьшая общности, предположим, что $k_1 = 1$. Тогда $k_2 > 1$ и $k_4 > 1$. Рассмотрим 2 случая:

а) $k_3 = 1$. Тогда, очевидно, $k_2 \equiv k_4 \equiv 1 \pmod{4}$. Пусть секции $0, 1, 4l + 2, 4l + 3$, где $l \in \mathbb{N}$ нетривиальны. Тогда секции $4n - 1, 2, 4l + 1, 4l + 4$ тривиальны. Пусть одна из секций $5, 9, \dots, 4(l - 1) + 1$ нетривиальна. Тогда граф G содержит порождённый подграф из множества $D(4i + 1, 4(l - i) + 1, 1, 4(n - l - 1) + 1)$, где $4i + 1$ – номер нетривиальной секции. Такой подграф принадлежит множеству \mathcal{D}_4 и является запрещённым порождённым подграфом класса P_4 .

Таким образом, секции $5, 9, \dots, 4(l - 1) + 1$ тривиальны. Аналогично тривиальными являются секции $6, 10, \dots, 4(l - 1) + 2, 4(l + 1) + 3, 4(l + 2) + 3, \dots, 4(n - 2) + 3$, и $4(l + 2), 4(l + 3), \dots, 4(n - 1)$. Обозначим C объединение секций $2, 6, \dots, 4(l - 1) + 2, 4l + 1, 4(l + 1), 4(l + 2), \dots, 4(n - 1), 4n - 1$. Поскольку все эти секции тривиальны, $|C| = n + 1$. Нетрудно видеть, что C является P_4 -покрытием G .

Возьмём по одной вершине из секций $0, 1, \dots, 4l + 2, 4l + 3$ и рассмотрим получившийся путь. Он содержит $4l + 4$ вершин и, следовательно, может быть разбит на $l + 1$ квартетов. Аналогично, путь, состоящий из вершин секций $4l + 2, 4l + 3, \dots, 4n - 1, 0, 1$ может быть разбит на $n - l$ квартетов соответственно.

Если указанные пути не содержат общих вершин в секциях $0, 1, 4l + 2, 4l + 3$ (а такое возможно, так как все эти секции нетривиальны), то объединение таких множеств квартетов составляет P_4 -упаковку M графа G , причём $|M| = n + 1 = |C|$.

б) $k_3 > 1$. Тогда если $k_2 \equiv k_3 \equiv k_4 \equiv 1 \pmod{4}$, то граф G содержит запрещённый порождённый подграф из множества \mathcal{D}_4 . Поэтому $k_2 \equiv k_4 \equiv 2 \pmod{4}$, а $k_3 \equiv 3 \pmod{4}$.

Итак, пусть секции $0, 1, 4p + 3, 4q + 2$, где $1 \leq p < q$, нетривиальны. Тогда секции $4n - 1, 2$ тривиальны. Не уменьшая общности, выберем секции $4p + 3$ и $4q + 2$ так, что все секции $4i + 2$ и $4i + 3$, где $p + 1 \leq i \leq q - 1$ (если таковые существуют) тривиальны. Если одна из секций $4p + 2, 4q + 3$ нетривиальна, то граф G соответствует также случаю **2а**, а значит содержит равносильные P_4 -упаковку и P_4 -покрытие.

Рассмотрим теперь случай, когда обе секции $4p + 2$ и $4q + 3$ тривиальны. Пусть одна из секций $6, 10, \dots, 4(p - 1) + 2$ нетривиальна. Тогда граф G содержит порождённый подграф из множества $D(1, 4i + 1, 4(p - i) + 1, 4(n - p - 1) + 1)$, где $4i + 2$ – номер нетривиальной секции. Такой подграф принадлежит множеству \mathcal{D}_4 и является запрещённым порождённым подграфом класса P_4 .

Таким образом, секции $6, 10, \dots, 4(p - 1) + 2$ тривиальны. Аналогично тривиальными являются секции $4(q + 1) + 3, 4(q + 2) + 3, \dots, 4n - 1$. Если $p + 1 < q$, то обозначим C объединение секций $2, 6, \dots, 4(q - 1) + 2, 4(q - 1) + 2, 4q + 3, 4(q + 1) + 3, \dots, 4n - 1$. Если же $p + 1 = q$, то хотя бы одна из секций $4q, 4q + 1$ тривиальна, иначе G содержит три нетривиальных секции, идущих вдоль цикла подряд. Не уменьшая общности, пусть секция $4q$ тривиальна. Тогда обозначим C объединение секций $2, 6, \dots, 4p + 2, 4q, 4q + 3, 4(q + 1) + 3, \dots, 4n - 1$. В обоих случаях все секции, входящие в C тривиальны, то есть $|C| = n + 1$. Нетрудно видеть, что C является P_4 -покрытием G .

Возьмём по одной вершине из секций $0, 1, \dots, 4p + 3$ и рассмотрим получившийся путь. Он содержит $4p + 4$ вершин и, следовательно, может быть разбит на $p + 1$ квартетов. Аналогично,

пути, состоящие из вершин секций $4p + 3, 4p + 4, \dots, 4q + 2, 4q + 2, 4q + 3, \dots, 4n - 1, 0, 1$ могут быть разбиты на $q - p$, и $n - q$ квартетов соответственно. Если указанные пути не содержат общих вершин в секциях $0, 1, 4p + 3, 4q + 2$ (а такое возможно, так как все эти секции нетривиальны), то объединение таких множеств квартетов составляет P_4 -упаковку M графа G , причём $|M| = n + 1 = |C|$.

3. Граф G содержит три подряд идущих вдоль цикла нетривиальных секции, но не содержит четырёх подряд идущих вдоль цикла нетривиальных секций. Выберем такие подряд идущие секции S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 , что секции S_1, S_2, S_3 нетривиальны, а секции $S_0 = \{a_0\}, S_4 = \{a_4\}$ тривиальны. Рассмотрим граф G' , полученный из G удалением секций S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 . G' является RT -расширением дерева и по лемме 4.2.6 принадлежит классу $\mathcal{K}(P_4)$, а значит он содержит такие P_4 -упаковку M и P_4 -покрытие C , что $|M| = |C|$. Нетрудно видеть, что $C \cup \{a_0, a_4\}$ является P_4 -покрытием графа G размера $|C| + 2$. P_4 -упаковку графа G той же мощности получим, добавив к M квартеты (a_0, x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3, a_4) , где для всех $i \in \{0, 1, 2\}$ x_i, y_i – такие вершины секции S_i , что $x_i \neq y_i$.
4. Граф G содержит 4 подряд идущих вдоль цикла нетривиальных секции. Если граф G не содержит порождённых подграфов из \mathcal{D}_3 , никакой его подграф также их не содержит. В этом случае доказательство равенства $\mu_{P_4}(G) = \beta_{P_4}(G)$ проведём индукцией по числу вершин. Случаи 1, 2, 3, а так же случай существования 4-класса, состоящего только из тривиальных секций, будут являться базой индукции. Пусть теперь для любого графа H с числом вершин меньшим $|G|$ верно равенство $\mu_{P_4}(H) = \beta_{P_4}(H)$.

Выберем такие подряд идущие секции S_0, S_1, S_2, S_3, S_4 , что секция S_0 тривиальна, а S_1, S_2, S_3, S_4 – нетривиальны. Выберем по одной вершине: $x_i \in S_i, i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Пусть G' – граф, полученный из G удалением выбранных вершин. Обозначим M' его наибольшую P_4 -упаковку, а C' – его наименьшее P_4 -покрытие.

По предположению индукции, $|M'| = |C'|$. Нетрудно видеть, что C' содержит как минимум одну из секций $S'_i = S_i \setminus \{x_i\}, i \in \{1, 2, 3, 4\}$, но не более двух. Предположим, что C' содержит две из этих секций. Пусть

S'_j – секция с меньшим номером, включённая в C' . Тогда $j \leq 3$ и S_0 не включена в C' (иначе C' не является наименьшим P_4 -покрытием). Но тогда $(C' \setminus S'_j) \cup S_0$ также является P_4 -покрытием графа G , причём, поскольку $|S_0| = 1$, его размер равен $|C'|$. Таким образом, всегда существует наименьшее P_4 -покрытие графа G' , содержащее ровно одну из секций S'_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Будем считать, что C' – именно такое покрытие.

Итак, C' содержит ровно одну из секций S'_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Пусть это секция S'_k . Тогда $C = C' \cup \{x_i\}$ – P_4 -покрытие графа G . Нетрудно видеть также, что $M = M' \cup \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ – P_4 -упаковка графа G . Очевидно, $|C| = |C'| + 1 = |M'| + 1 = |M|$.

Итак, если G не содержит порождённых подграфов из множества \mathcal{D}_4 , то он кёнигов относительно P_4 . Теорема доказана. □

4.5 Основной результат

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 4.5.1. *Пусть SRT – множество графов, каждая компонента P_4 -связности которых является S - RT -расширением некоторого двудольного графа. Тогда $SRT \cap Free(\mathcal{D}_4) \subseteq \mathcal{K}(P_4) \subseteq Free(\mathcal{A}_4 \cup \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{E}_4)$*

Доказательство. Если граф G не P_4 -связен, то, по лемме 4.1.1, он принадлежит классу $\mathcal{K}(P_4)$ тогда и только тогда, когда каждая его компонента связности является кёниговым графом относительно P_4 .

Из теоремы 4.4.1 и леммы 4.1.2 следует, что если P_4 -связный граф из множества SRT не является RT -расширением цикла или дополнением RT -расширения цикла, то он является кёниговым графом относительно P_4 .

Из теоремы 4.4.2 и леммы 4.1.2 следует, что если P_4 -связный граф является RT -расширением цикла или дополнением RT -расширения цикла, то он кёнигов относительно P_4 тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов из множества \mathcal{D}_4 . Из теоремы 4.4.1 следует, что P_4 -связный граф яв-

ляется S - RT -расширением двудольного графа, отличного от простого цикла, он всегда кёнигов относительно P_4 . Таким образом, $SRT \cap Free(\mathcal{D}_4) \subseteq \mathcal{K}(P_4)$

Включение $\mathcal{K}(P_4) \subseteq Free(\mathcal{A}_4 \cup \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{E}_4)$ следует из лемм 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.3.1, 4.3.5, 4.3.6, 4.3.7.

Теорема доказана. □

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Полностью описан класс кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$. Найдено множество всех минимальных запрещённых порождённых подграфов для данного класса. Кроме того, показано, каким образом можно построить любой граф данного класса из псевдографа с использованием операции подразбиения рёбер.
2. Полностью описан класс кёниговых графов относительно P_3 . Найдено множество всех минимальных запрещённых порождённых подграфов для данного класса. Кроме того, показано, каким образом можно построить любой граф данного класса из мультиграфа с использованием операций подразбиения рёбер и замены вершин кликами.
3. Предложены алгоритмы распознавания кёниговых графов относительно P_3 и решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на кёниговых графах относительно P_3 . Показано, что все перечисленные алгоритмы имеют сложность $O(n^2)$, где n – число вершин графа.
4. Дано частичное описание класса кёниговых графов относительно P_4 . Найдено множество минимальных запрещённых порождённых подграфов для данного класса, содержащее 4 бесконечных семейства и 64 отдельных графа. Кроме того, показано, каким образом можно построить некоторые графы данного класса из двудольного графа с использованием операций подразбиения рёбер и замены вершин кографами.

Возможные дальнейшие перспективы развития тематики диссертационного исследования состоят в обобщении и доработке полученных результатов. В частности, задача описания кёниговых графов относительно P_4 решена не полностью. Возможно существование других запрещённых графов и кёниговых графов вида, отличного от описанного.

Кроме того, особенности описания классов кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$ и P_4 позволяют разработать алгоритмы решения соответствующих задач упаковки и покрытия на графах данных классов, имеющие полиномиальную сложность.

Другие возможные перспективы развития состоят в рассмотрении новых классов кёниговых графов. Одним из направлений исследования может являть-

ся обобщение полученных описаний для классов кёниговых графов относительно P_k , где $k \geq 5$. Также можно рассмотреть классы кёниговых графов относительно других графов малого размера. В первую очередь, относительно S_3 . Наконец, перспективным представляется рассмотрение классов кёниговых графов относительно множества надграфов путей различной длины, полученных добавлением рёбер, что соответствует графам, имеющим нулевой разрыв двойственности в задачах о слабой упаковке и покрытии относительно путей.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Алексееву В.Е. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Автор благодарит сотрудников лаборатории ЛАТАС Высшей школы экономики за конструктивную критику, а также лично Малышева Д.С., Золотых Н.Ю. и Калягина В.А. за поддержку, помощь и консультации по вопросам оформления. Автор также благодарит разработчиков шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации, Рачинскую М.А. за помощь в оформлении документов и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список сокращений и условных обозначений

$V(G)$	множество вершин графа G
$E(G)$	множество рёбер графа G
$ G $	число вершин графа G
$N(v)$	окрестность вершины v (множество смежных с ней вершин)
$N[v] = N(v) \cup \{x\}$	замкнутая окрестность вершины v
I_G	матрица смежности графа G
$G_1 + G_2$	объединение графов G_1 и G_2
$G_1 \circ G_2$	объединение графов G_1 и G_2 с добавлением рёбер, соединяющих каждую вершину графа G_1 с каждой вершиной графа G_2
P_n	простой путь из n вершин
C_n	простой цикл из n вершин
K_n	полный граф из n вершин
$K_{p,q}$	полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле
O_n	пустой (не содержащий рёбер) граф из n вершин
$W_k = C_k \circ K_1$	колесо
K_4-e	граф, получаемый из K_4 удалением одного (произвольного) ребра
$A(n,k)$	граф, полученный из цикла C_n добавлением двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла; k – расстояние между вершинами цикла, смежными с добавленными вершинами
$B(n,k)$	граф, полученный из n -1-лассо заменой одной из вершин цикла графом K_2 ; k – расстояние от узла до вершины, подвергшейся замене
$B_1(n, k_1, k_2)$	множество графов, полученных из n -1-лассо заменой каких-нибудь двух вершин цикла графами K_2 или O_2 (возможно, различными); k_1 и k_2 – расстояния от узла до вершин, подвергшихся замене

- $B_2(n, k)$ множество графов, полученных из n -2-лассо заменой одной вершины цикла одним из графов K_2 или O_2 ; k – расстояние от узла до вершины, подвергшейся замене
- $D(k_1, k_2, k_3)$ граф, полученный из цикла $C_{k_1+k_2+k_3}$ заменой графами K_2 трёх вершин, делящих цикл на пути длины k_1, k_2, k_3
- $D(k_1, k_2, k_3, k_4)$ множество графов, полученных из цикла $C_{k_1+k_2+k_3+k_4}$ заменой графами K_2 или O_2 четырёх вершин, делящих цикл на пути длины k_1, k_2, k_3, k_4 в порядке обхода цикла
- \mathcal{A}_3 множество всех графов $A(n, k)$, где n кратно 3, k не кратно 3
- \mathcal{B}_3 множество всех графов $B(n, k)$, где n и k кратны 3
- \mathcal{C}_3 множество всех простых циклов с числом вершин не кратным 3
- \mathcal{D}_3 множество таких графов $D(k_1, k_2, k_3)$, что $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv 1 \pmod{3}$ и $k_i \geq 4, i \in \{1, 2, 3\}$
- \mathcal{A}_4 множество всех графов $A(n, k)$ и их дополнений, где n кратно 4, k нечётно
- \mathcal{B}_4 множество всех графов, принадлежащих множествам $B_1(n, k_1, k_2)$ и $B_2(n, k)$, где n, k и k_1 кратны 4, причём $1 \geq k \geq \frac{n}{2}$ и $1 \geq k_1 \geq \frac{n}{2}$, а k_2 не кратно 4, но чётно, и дополнений всех таких графов
- \mathcal{C}_4 множество всех простых циклов и их дополнений с числом вершин не кратным 4
- \mathcal{D}_4 множество графов, принадлежащих множествам $D(k_1, k_2, k_3, k_4)$, где выполняется одно из условий:
- $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv k_4 \equiv 1 \pmod{4}$ и $k_i \geq 5, i \in \{1, 2, 3\}$;
 - $k_1 \equiv 1 \pmod{4}$ и $k_1 \geq 5, k_2 \equiv k_4 \equiv 2 \pmod{4}, k_3 \equiv 3 \pmod{4}$,
- и их дополнений
- \mathcal{E}_4 множество минимальных запрещённых порождённых подграфов класса $\mathcal{K}(P_4)$ из 6 и 7 вершин, не входящих в одно множество $\mathcal{A}_4, \mathcal{C}_4$
- gem* граф $P_4 \circ K_1$
- dart* граф, полученный из графа K_4 -е добавлением вершины, соединённой ребром с одной из его вершин степени 3
- $G[A]$ подграф графа G , порожденный множеством вершин $A \subseteq V(G)$

- $G \setminus A$ подграф графа G , полученный удалением множества вершин $A \subseteq V(G)$
- $G \setminus v$ подграф графа G , полученный удалением вершины $v \in V(G)$
- $\mu_{\mathcal{X}}(G)$ размер наибольшей \mathcal{X} -упаковки в графе G
- $\beta_{\mathcal{X}}(G)$ размер наименьшего \mathcal{X} -покрытия в графе G
- P_3 -MATCHING задача поиска наибольшей P_3 -упаковки
- P_3 -COVER задача поиска наименьшего P_3 -покрытия
- $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ класс всех кёниговых графов относительно множества \mathcal{X} , где \mathcal{X} – множество графов или отдельный граф
- $S(v)$ секция графа G , полученная из вершины v графа H
- $B(G)$ взвешенный граф, полученный из графа G удалением из каждой однородной клики всех вершин, кроме одной
- $w_B(v)$ вес вершины v графа $B(G)$ – равен числу вершин в однородной клике графа G , соответствующей вершине v

Словарь терминов

n - k -лассо, где $n \geq 3$: граф, полученный из графа $C_n + P_k$ добавлением ребра, соединяющего вершину степени 1 пути (или единственную его вершину в случае $k = 1$) с вершиной цикла.

Узел: вершина степени 3 в n - k -лассо.

Висячий путь графа: его подграф, являющийся путём, одна из вершин которого имеет в данном графе степень 1, а остальные – не более 2.

Контактная вершина висячего пути: вершина, смежная с вершинами висячего пути, но не принадлежащая ему.

q -класс при $q \geq 3$: класс вычетов номеров вершин цикла C_n по модулю q , если $n = k \cdot q$, где $k \in \mathbb{N}$.

Упаковка графа G относительно \mathcal{X} или \mathcal{X} -упаковка графа G : множество попарно непересекающихся порождённых подграфов графа G , изоморфных графам из \mathcal{X} .

Вершинное покрытие графа G относительно \mathcal{X} или \mathcal{X} -покрытие графа G : множество S вершин графа G такое, что любой порождённый подграф G , изоморфный графу из \mathcal{X} содержит хотя бы одну вершину из S .

Кёнигов граф относительно \mathcal{X} : такой граф, что в любом его порождённом подграфе H достигается равенство $\mu_{\mathcal{X}}(H) = \beta_{\mathcal{X}}(H)$.

Операция замены графом H вершины x графа G состоит в следующем:

1. Эта вершина удаляется из графа G .
2. К графу G добавляется несколько новых вершин, соединённых между собой так, что они порождают подграф, изоморфный H .
3. Каждая новая вершина соединена ребром со всеми вершинами множества $N(x)$ в исходном графе.

Операция замены кографом висячего пути из 2 вершин состоит в следующем:

1. Вершины этого пути удаляются из графа.
2. К графу добавляются вершины и рёбра некоторого кографа.
3. Некоторые (но не все) вершины кографа соединяются с контактной вершиной так, чтобы подграф, порождённый контактной и новыми вершинами, не содержал квартетов.

4. Если степень контактной вершины в исходном графе не более 2, то она может быть заменена кографом.

Операция замены кографом висячего пути из 3 вершин состоит в следующем:

1. Вершины этого пути удаляются из графа.
2. К графу добавляются вершины и рёбра некоторого кографа.
3. Некоторые вершины кографа соединяются с контактной вершиной так, чтобы подграф, порождённый контактной и новыми вершинами, содержал квартет.

Однородное множество графа G : то же, что модуль.

Однородная клика: максимальное по включению однородное множество вершин, порождающее клику.

Однородный кограф: максимальное по включению однородное множество вершин, порождающее кограф.

\mathcal{F} -расширение графа G : граф, полученный из G заменой некоторых вершин графами из множества \mathcal{F} .

Секция \mathcal{F} -расширения графа G : подграфы графа G , на который была заменена вершины графа G .

$R\mathcal{F}$ -расширение графа G : граф, полученный из G заменой некоторых вершин степени 1 и 2 графами из множества \mathcal{F} .

S -2-преобразование псевдографа F : граф, полученный из F подразбиением двумя вершинами каждого циклового ребра, в том числе из двух и одной вершины (кратные рёбра и петли соответственно).

S_2 - R - \mathcal{Q} -расширение мультиграфа M : граф, полученный из S -2-преобразования мультиграфа M заменой кликами произвольного размера (в том числе, графом K_1) всех вершин степени 1 или 2, не принадлежащих циклам и вершин, добавленных при подразбиении рёбер.

Тяжёлая вершина: вершина, в окрестности которой есть не менее 3 вершин степени больше 1.

Полутяжёлая вершина: вершина степени 3 и более, не являющаяся тяжёлой.

Лёгкая вершина: вершина степени 1 или 2.

Пусть G – граф, в котором длины всех циклов кратны 4. **RT -расширение** графа G : граф, полученный следующим образом:

1. Некоторые лёгкие вершины, не входящие ни в один цикл заменяются произвольными кографами.
2. Некоторые лёгкие цикловые вершины заменяются произвольными кографами. Причём вершина v может быть заменена кографом, при условии, что ни в одном цикле, содержащем v , нет тяжёлой или полутяжёлой вершины, расстояние от которой до вершины v вдоль цикла кратно 4, и нет полутяжёлой вершины, расстояние от которой до вершины v вдоль цикла сравнимо с 2 по модулю 4.
3. Некоторые висячие пути из 2 вершин заменяются произвольными кографами.
4. В полученном графе некоторые висячие пути из 3 вершин заменяются произвольными кографами.

Тройка: порождённый подграф, изоморфный P_3 .

Квартет: порождённый подграф, изоморфный P_4 .

P_4 -связный граф: граф, в котором для любой пары вершин u и v существует такая последовательность квартетов q_0, q_1, \dots, q_p , что $u \in q_0, v \in q_p$ и каждая пара квартетов q_{i-1}, q_i , где $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, имеет хотя бы одну общую вершину.

Компонента P_4 -связности графа: его максимальный по включению P_4 -связный подграф.

P_4 -изолированная вершина графа: вершина, через которую в этом графе не проходит ни одного квартета.

Список литературы

1. *Алексеев В. Е., Замараев В. А., Захарова Д. В., Малышев Д. С., Мокеев Д. Б.* Некоторые результаты о наследственных классах графов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2011. — № 6. — С. 169—173.
2. *Алексеев В. Е., Замараев В. А., Захарова Д. В., Малышев Д. С., Мокеев Д. Б., Сорочан С. В.* Некоторые результаты о наследственных классах графов II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2012. — 6(1). — С. 115—120.
3. *Алексеев В. Е., Замараев В. А., Захарова Д. В., Малышев Д. С., Мокеев Д. Б., Сорочан С. В.* Некоторые результаты о наследственных классах графов III // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2013. — 6(1). — С. 165—172.
4. *Алексеев В. Е., Мокеев Д. Б.* Кёниговы графы относительно 3-путей // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, № 4. — С. 3—14.
5. *Емеличев В. А., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. — М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 384 с.
6. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. Сортировка и поиск, 2-е изд. Т. 3 / под ред. С. Н. Тригуб ; пер. с англ. В. Т. Тертышной, К. И. В. — М. : Издательский дом Вильямс, 2000. — 832 с.
7. *Малышев Д. С.* Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // Дискретный анализ и исследование операций. — 2009. — Т. 16, № 5. — С. 41—51.
8. *Мокеев Д. Б.* О кёниговых графах относительно P_4 // Дискретный анализ и исследование операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 61—79.
9. *Харари Ф.* Теория графов / под ред. Т. Б. Штейнпресс. — М. : Мир, 1973. — 301 с.
10. *Alekseev V. E., Mokeev D. B.* König graphs for 3-paths and 3-cycles // Discrete Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 204. — P. 1—5.

11. *Bai Z., Tu J., Shi Y.* An improved algorithm for the vertex cover P_3 problem on graphs of bounded treewidth // arXiv preprint arXiv:1603.09448. — 2016.
12. *Brause C., Schiermeyer I.* Kernelization of the 3-path vertex cover problem // Discrete Mathematics. — 2016. — Vol. 339, no. 7. — P. 1935–1939.
13. *Brešar B., Kardoš F., Katrenič J., Semanišin G.* Minimum k-path vertex cover // Discrete Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 159, no. 12. — P. 1189–1195.
14. *Camby E., Cardinal J., Chapelle M., Fiorini S., Joret G.* A primal-dual 3-approximation algorithm for hitting 4-vertex paths // 9th International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics, ICGT. — 2014. — P. 61.
15. *Ceroli M. R., Everett H., De Figueiredo C. M., Klein S.* The homogeneous set sandwich problem // Information Processing Letters. — 1998. — Vol. 67, no. 1. — P. 31–35.
16. *Chen Q., Chen X.* Packing cycles exactly in polynomial time // Journal of combinatorial optimization. — 2012. — Vol. 23, no. 2. — P. 167–188.
17. *Chen X., Hu X., Zang W.* Dual integrality in combinatorial optimization // Handbook of Combinatorial Optimization / ed. by P. M. Pardalos, D.-Z. Du, R. L. Graham. — NY : Springer New York, 2013. — P. 995–1063. — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-7997-1_57.
18. *Chvátal V.* A semi-strong perfect graph conjecture // North-Holland mathematics studies. — 1984. — Vol. 88. — P. 279–280.
19. *Chvátal V., Hammer P.* Set packing and threshold graphs // Res. Report, Comp. Sci. Dept. Univ. of Waterloo. — 1973. — P. 73–21.
20. *Corneil D. G., Lerchs H., Burlingham L. S.* Complement reducible graphs // Discrete Applied Mathematics. — 1981. — Vol. 3, no. 3. — P. 163–174.
21. *Cornuéjols G.* Combinatorial optimization: Packing and covering. — SIAM, 2001.
22. *Deming R. W.* Independence numbers of graphs-an extension of the König-Egerváry theorem // Discrete Mathematics. — 1979. — Vol. 27, no. 1. — P. 23–33.

23. *Devi N. S., Mane A. C., Mishra S.* Computational complexity of minimum P_4 vertex cover problem for regular and $K_{1,4}$ -free graphs // *Discrete Applied Mathematics*. — 2015. — Vol. 184. — P. 114–121.
24. *Ding G., Xu Z., Zang W.* Packing cycles in graphs, II // *Journal of Combinatorial Theory, Series B*. — 2003. — Vol. 87, no. 2. — P. 244–253.
25. *Edmonds J.* Paths, trees, and flowers // *Canadian Journal of mathematics*. — 1965. — Vol. 17, no. 3. — P. 449–467.
26. *Erdős P., Pósa L.* On independent circuits contained in a graph // *Canad. J. Math.* — 1965. — Vol. 17. — P. 347–352.
27. *Fernau H., Raible D.* A parameterized perspective on packing paths of length two // *Journal of Combinatorial Optimization*. — 2009. — Vol. 18, no. 4. — P. 319–341.
28. Fixed-parameter algorithms for vertex cover P_3 / M.-S. Chang, L.-H. Chen, L.-J. Hung, P. Rossmanith, P.-C. Su // *Discrete Optimization*. — 2016. — Vol. 19. — P. 12–22.
29. *Foldes S., Hammer P. L.* Split graphs. — Universität Bonn. Institut für Ökonometrie und Operations Research, 1976.
30. *Fomin F. V., Saurabh S., Thilikos D. M.* Strengthening Erdős–Pósa property for minor-closed graph classes // *Journal of Graph Theory*. — 2011. — Vol. 66, no. 3. — P. 235–240.
31. *Funke S., Nusser A., Storandt S.* On k -Path Covers and their applications // *The VLDB Journal*. — 2016. — Vol. 25, no. 1. — P. 103–123.
32. *Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.* The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization // *Combinatorica*. — 1981. — June. — Vol. 1, no. 2. — P. 169–197. — URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02579273>.
33. *Grötschel M., Lovász L., Schrijver A.* Geometric algorithms and combinatorial optimization. Vol. 2. — Springer Science, Business Media, 2012.
34. *Hassin R., Rubinfeld S.* An approximation algorithm for maximum packing of 3-edge paths // *Information Processing Letters*. — 1997. — Vol. 63, no. 2. — P. 63–67.

35. *Hell P.* Graph packings // *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. — 2000. — Vol. 5. — P. 170–173.
36. *Hell P., Kirkpatrick D. G.* Scheduling, matching, and coloring // *Alg. Methods in Graph Theory*. *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*. — 1981. — Vol. 25. — P. 273–279.
37. *Hoàng C. T., Le V. B.* On P_4 -transversals of perfect graphs // *Discrete Mathematics*. — 2000. — Vol. 216, no. 1–3. — P. 195–210.
38. *Jakovac M.* The k -path vertex cover of rooted product graphs // *Discrete Applied Mathematics*. — 2015. — Vol. 187. — P. 111–119.
39. *Jakovac M., Taranenko A.* On the k -path vertex cover of some graph products // *Discrete Mathematics*. — 2013. — Vol. 313, no. 1. — P. 94–100.
40. *Kaneko A., Kelmans A., Nishimura T.* On packing 3-vertex paths in a graph // *Journal of Graph Theory*. — 2001. — Vol. 36, no. 4. — P. 175–197.
41. *Kardoš F., Katrenič J., Schiermeyer I.* On computing the minimum 3-path vertex cover and dissociation number of graphs // *Theoretical Computer Science*. — 2011. — Vol. 412, no. 50. — P. 7009–7017.
42. *Karp R. M.* Reducibility among combinatorial problems // *Complexity of computer computations*. — Springer, 1972. — P. 85–103.
43. *Katrenič J.* A faster FPT algorithm for 3-path vertex cover // *Information Processing Letters*. — 2016. — Vol. 116, no. 4. — P. 273–278.
44. *Kelmans A.* Packing 3-vertex paths in 2-connected graphs // *arXiv preprint arXiv:0712.4151*. — 2007.
45. *Kelmans A.* Packing 3-vertex paths in cubic 3-connected graphs // *arXiv preprint arXiv:0910.2766*. — 2009.
46. *Kirkpatrick D. G., Hell P.* On the completeness of a generalized matching problem // *Proceedings of the tenth annual ACM symposium on Theory of computing*. — ACM, 1978. — P. 240–245.
47. *Kirkpatrick D. G., Hell P.* On the complexity of general graph factor problems // *SIAM Journal on Computing*. — 1983. — Vol. 12, no. 3. — P. 601–609.
48. *König D.* Gráfok és mátrixok // *Matematikai és Fizikai Lapok*. — 1931. — Vol. 38. — P. 116–119.

49. *König D.* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Vol. 16. — Leipzig : Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.
50. *Kosowski A., Małafiejski M., Żyliński P.* An approximation algorithm for maximum P_3 -packing in subcubic graphs // Information processing letters. — 2006. — Vol. 99, no. 6. — P. 230–233.
51. *Kosowski A., Małafiejski M., Żyliński P.* Packing three-vertex paths in a subcubic graph // DMTCS Proceedings. — 2006. — No. 1.
52. *Kosowski A., Małafiejski M., Żyliński P.* Tighter Bounds on the Size of a Maximum P_3 -Matching in a Cubic Graph // Graphs and Combinatorics. — 2008. — Vol. 24, no. 5. — P. 461–468.
53. *Lee E.* Partitioning a graph into small pieces with applications to path transversal // Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. — Society for Industrial, Applied Mathematics. 2017. — P. 1546–1558.
54. *Li Y., Tu J.* A 2-approximation algorithm for the vertex cover P_4 problem in cubic graphs // International Journal of Computer Mathematics. — 2014. — Vol. 91, no. 10. — P. 2103–2108.
55. *Lovász L.* Normal hypergraphs and the weak perfect graph conjecture // North-Holland mathematics studies. — 1984. — Vol. 88. — P. 29–42.
56. *Lovász L., Plummer M. D.* Matching theory. Vol. 29. — Budapest : Akadémiai Kiadó, 1986. — 544 p.
57. *Mahadev N. V., Peled U. N.* Threshold graphs and related topics. Vol. 56. — Elsevier, 1995.
58. *Malyshev D. S.* The impact of the growth rate of the packing number of graphs on the computational complexity of the independent set problem // Discrete Mathematics and Applications. — 2013. — Vol. 23, no. 3/4. — P. 245–249.
59. *Masuyama S., Ibaraki T.* Chain packing in graphs // Algorithmica. — 1991. — Vol. 6, no. 1. — P. 826–839.
60. *Micali S., Vazirani V. V.* An $O(\sqrt{|V|} \cdot |E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs // Foundations of Computer Science, 1980., 21st Annual Symposium on. — IEEE. 1980. — P. 17–27.

61. *Mokeyev D.* König graphs for 4-paths // Models, Algorithms and Technologies for Network Analysis. Vol. 104 / ed. by M. V. Batsyn, V. A. Kalyagin, P. M. Pardalos. — Cham : Springer, 2014. — P. 93–103. — (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics). — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-09758-9_8.
62. *Mokeyev D.* König Graphs for 4-Paths: Widened Cycles // Models, Algorithms and Technologies for Network Analysis. Vol. 156 / ed. by V. A. Kalyagin, P. A. Koldanov, P. M. Pardalos. — Cham : Springer, 2016. — P. 45–54. — (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics). — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-29608-1_3.
63. *Mokeyev D. B.* P_q -König Extended Forests and Cycles // Supplementary Proceedings of the 9th International Conference on Discrete Optimization and Operations Research and Scientific School (DOOR 2016). — 2016. — Vol. 1. — P. 86–95.
64. On the vertex cover P_3 problem parameterized by treewidth / J. Tu, L. Wu, J. Yuan, L. Cui // Journal of Combinatorial Optimization. — 2017. — Vol. 34, no. 2. — P. 414–425.
65. On the vertex k-path cover / B. Brešar, M. Jakovac, J. Katrenič, G. Semanišin, A. Taranenko // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 161, no. 13. — P. 1943–1949.
66. On the vertex k-path cover / J. Katrenič, M. Jakovac, B. Brešar, A. Taranenko, G. Semanišin // Discrete applied mathematics. — 2013. — Vol. 13, no. 161. — P. 1943–1949.
67. *Pêcher A., Wagler A. K.* Clique and chromatic number of circular-perfect graphs // Electronic Notes in Discrete Mathematics. — 2010. — Vol. 36. — P. 199–206. — URL: <https://doi.org/10.1016/j.endm.2010.05.026>.
68. PTAS for minimum k-path vertex cover in ball graph / Z. Zhang, X. Li, Y. Shi, H. Nie, Y. Zhu // Information Processing Letters. — 2017. — Vol. 119. — P. 9–13.
69. *Schmidt J. M.* A simple test on 2-vertex-and 2-edge-connectivity // Information Processing Letters. — 2013. — Vol. 113, no. 7. — P. 241–244.

70. *Seymour P. D.* The matroids with the max-flow min-cut property // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1977. — Vol. 23, no. 2/3. — P. 189–222.
71. *Stersoul F.* A characterization of the graphs in which the transversal number equals the matching number // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 1979. — Vol. 27, no. 2. — P. 228–229.
72. *Tanahashi R., Chen Z.-Z.* A simple test on 2-vertex-and 2-edge-connectivity // IEICE Transactions on Information and Systems. — 2010. — Vol. E93–D, no. 2. — P. 241–249.
73. *Tarjan R. E.* A note on finding the bridges of a graph // Information Processing Letters. — 1974. — Vol. 2, no. 6. — P. 160–161.
74. The complexity of König subgraph problems and above-guarantee vertex cover / S. Mishra, V. Raman, S. Saurabh, S. Sikdar, C. Subramanian // Algorithmica. — 2011. — Vol. 61, no. 4. — P. 857–881.
75. The strong perfect graph theorem / M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas // Annals of mathematics. — 2006. — P. 51–229.
76. *Tu J.* A fixed-parameter algorithm for the vertex cover P_3 problem // Information Processing Letters. — 2015. — Vol. 115, no. 2. — P. 96–99.
77. *Tu J.* Efficient algorithm for the vertex cover P_k problem on cacti // Applied Mathematics and Computation. — 2017. — Vol. 311. — P. 217–222.
78. *Tu J., Jin Z.* An FPT algorithm for the vertex cover P_4 problem // Discrete Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 200. — P. 186–190.
79. *Tu J., Yang F.* The vertex cover P_3 problem in cubic graphs // Information Processing Letters. — 2013. — Vol. 113, no. 13. — P. 481–485.
80. *Tu J., Zhou W.* A factor 2 approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem // Information Processing Letters. — 2011. — Vol. 111, no. 14. — P. 683–686.
81. *Tu J., Zhou W.* A primal-dual approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem // Theoretical Computer Science. — 2011. — Vol. 412, no. 50. — P. 7044–7048.

82. *Xiao M., Kou S.* Faster computation of the maximum dissociation set and minimum 3-path vertex cover in graphs // International Workshop on Frontiers in Algorithmics. — Springer. 2015. — P. 282–293.
83. *Yuster R.* Combinatorial and computational aspects of graph packing and graph decomposition // Computer Science Review. — 2007. — Vol. 1, no. 1. — P. 12–26.
84. *Zuo L., Zhang B., Zhang S.* The k-Path Vertex Cover in Product Graphs of Stars and Complete Graphs. // International Journal of Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 46, no. 1.

Список рисунков

2.1	Два запрещённых порождённых подграфа для класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.	29
3.1	Три запрещённых порождённых подграфа для класса $\mathcal{K}(P_3)$	36
3.2	Примеры графов $B(n, k)$	37
3.3	Граф $D(4, 4, 4)$	38
4.1	Граф из множества $B_1(8, 4, 2)$	67
4.2	Граф из множества $B_2(8, 4)$	69
4.3	Граф из множества $D(2, 3, 2, 5)$	70
4.4	Графы из множества $Forb(\mathcal{K}(P_4))$ из 6 вершин, не входящие в множества \mathcal{A}_4 и \mathcal{C}_4	72
4.5	Графы $E_3 \dots E_8$ и их дополнения	74
4.6	Графы $E_9 \dots E_{18}$ и их дополнения	75
4.7	Графы $E_{19} \dots E_{26}$ и их дополнения	76
4.8	Графы $E_{27} \dots E_{32}$ и их дополнения	77