На правах рукописи

Кащенко Илья Сергеевич

ДИНАМИКА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ярославль – 2018

Работа выполнена на кафедре математического моделирования математического факультета ФГБОУ ВО “Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова”

Официальные оппоненты:

Бутузов Валентин Федорович
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО “Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова”
профессор кафедры математики физического факультета

Новокшенов Виктор Юрьевич
доктор физико-математических наук, профессор
Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН
главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений

Нестеров Андрей Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор
ГАОУ ВО “Московский городской педагогический университет”
профессор института математики, информатики и естественных наук

Ведущая организация – ФГБОУ ВО “Национальный исследовательский университет “МЭИ”

Защита состоится «04» октября 2018 г. в 14 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского” по адресу 603950, г. Нижний-Новгород, пр. Гагарина, д. 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО “Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского” по адресу: 603950, г. Нижний-Новгород, пр. Гагарина, д. 23 и на официальном сайте организации:
https://diss.unn.ru/files/2018/806/diss-Kaschenko-806.pdf

Автореферат разослан «____»___________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.166.20
канд. физ.-мат. наук, доцент Кротов Н.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

При исследовании многих физических явлений и процессов часто выделяется малый либо большой параметр, в связи с чем математические модели этих явлений либо процессов могут оказаться сингулярно возмущенными динамическими системами. Исследование динамики уравнений такого типа очевидным образом представляет большой интерес.

В работе изучается несколько типов сингулярно возмущенных систем с бесконечномерным фазовым пространством: исследуются уравнения с большим запаздыванием и уравнения параболического типа с малой диффузией. Для них решается задача исследовать локальную динамику, т. е. поведение решений при $t \to \infty$ в некоторой малой фиксированной окрестности состояния равновесия, и найти асимптотическое приближение установившихся режимов.

Рассматриваемые в работе уравнения с запаздыванием возникают естественным образом в качестве математических моделей во многих приложениях, особенно в биологии, медицине, нейродинамике, радиофизике и электронике, лазерной физике и системах обработки и передачи информации. Среди них важное место занимают системы, в которых время запаздывания относительно велико. Также, математическими моделями широкого класса задач являются системы уравнений параболического типа и задачи, содержащие распределение по пространственной переменной.

Вопросы асимптотического приближения решений сингулярно возмущенных уравнений исследовались многими авторами. Большой цикл работ А. Б. Васильевой, В. Ф. Бутузова, Н. Н. Нефедова, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розова, С. А. Ломова посвящен асимптотике решений таких уравнений с произвольным начальным условием на конечном отрезке времени.

В настоящей работе развивается и обобщается асимптотический метод исследования локальной динамики в окрестности состояния равновесия, предложенный Ю. С. Колесовым для уравнений с малой диффузией (см., например статью[1]) и перенесенный С. А. Кащенко на уравнения с большим запаздыванием и уравнения с отклонением пространственной переменной. Главное отличие этих статей от настоящей работы состоит в том, что малые параметры находятся в одном, строго заданном соотношении.

Мультистабильность, индуцированная запаздыванием обсуждается в работах М. Вольфрума, С. Янчука, Т. Эрню и других авторов. Для лазерных систем мультистабильность была описана ранее в работах Е. В. Григорьевой, С. А. Кащенко, Г. Хакена методами нелокального анализа релаксационных режимов.

[1]Васильева А. Б., Кащенко С. А., Колесов Ю. С., Розов Н. Х. Бифуркация автоколебаний нелинейных параболических уравнений с малой диффузией // МатСборник. 1986. Т. 130(172), №4(8). С. 488–499.

Вопросы существования и устойчивости решений определенного вида в сингулярно возмущенных уравнениях параболического типа изучались многими авторами. Численные исследования параболических систем описаны, например, в работах Т. С. Ахромеевой, С. П. Курдюмова, Г. Г. Малинецковго, А. А. Самарского, С. Д. Глызина, А. Ю. Колесова, Н. Х. Розова.

Динамика решений функционально-дифференциальных уравнений с частными производными и отклонением пространственного аргумента изучалась в работах А. В. Разгулина, П. Перликовского, С. Янчука, А. Л. Скубачевского, С. А. Кащенко, Е. П. Белана, А. Ю. Колесова, С. Д. Глызина, Н. Х. Розова и др.

Цели и задачи

Целями работы являются, во-первых, необходимость разработать эффективный, универсальный метод, пригодный в том числе и для инженерных расчетов, исследования локальной (в окрестности состояния равновесия) динамики сингулярно возмущенных систем с бесконечномерным фазовым пространством. Во-вторых, предложить алгоритм построения с помощью разработанного метода асимптотических приближений установившихся решений. В-третьих, дать объяснение сложным динамическим эффектам, возникающих в уравнениях с большим запаздыванием и в пространственно-распределенных системах.

В диссертационной работе исследуются уравнения и системы уравнений с запаздыванием различного вида, системы параболического типа, в том числе содержащие запаздывание и интегральное распределение по пространственной переменной. Исследования проводятся для уравнений с одним запаздыванием, уравнений с двумя запаздываниями, уравнений, содержащих распределенное запаздывание, а также запаздывание, зависящее от неизвестной функции; для сингулярно возмущенных уравнений параболического типа, а также параболических уравнений с запаздыванием и распределением по пространственной переменной.

Для всех изучаемых уравнений и систем ставится задача исследовать поведение решений из некоторой малой фиксированной окрестности состояния равновесия. Для решения этой задачи, в свою очередь, ставятся задачи:

- провести анализ расположения корней характеристического уравнения, выделить критические случаи;

- в случаях, близких к критическим, свести исходную сингулярно возмущенную задачу к семейству эволюционных уравнений – квазинормальных форм (как правило, это уравнения параболического типа);

- получить явные формулы для асимптотических по невязке решений исходных задач.

Научная новизна

Научная новизна работы состоит в следующем.

1. Разработан метод исследования сингулярно возмущенных систем в критических случаях бесконечной размерности при различных соотношениях малых параметров. Суть этого метода состоит в сведении с помощью асимптотической замены исходной задачи к квазинормальной форме. не содержащей малых параметров.

2. Для применения метода были построены асимптотические приближения корней характеристических уравнений. Эти асимптотические приближения являются, с одной стороны, достаточно простыми для дальнейшего анализа, а с другой – позволяют строить замены для построения квазинормальных форм.

3. Разработанный метод применен к широкому классу сингулярно возмущенных задач: задачам с одним и двумя запаздываниями, распределенным запаздыванием, запаздыванием, зависящим от искомой функции, а также к задачам, содержащим распределение по пространственному аргументу. Для всех задач построены квазинормальные формы, которые не содержат вообще малых параметров, либо зависят от него регулярно. Показано, что квазинормальные формы, как правило, являются семействами нелинейных краевых задач параболического типа.

4. Показано, что решения квазинормальных форм являются нулевым приближением для асимптотических по невязке решений исходных задач. Приведены равномерные асимптотические формулы.

5. Математически описано в поставленных задачах явление гипермультистабильности, т. е. ситуации, когда количество установившихся режимов неограниченно возрастает при подходящем выборе малых параметров.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая ценность научной работы определяется тем, что предложенный метод квазинормальных форм является достаточно универсальным и может применяться для исследования большого класса сингулярно возмущенных задач с бесконечномерным фазовым пространством.

Исследованные системы с запаздыванием являются основами для математических моделей, описывающих различные классы лазеров, результаты относительно их динамики представляют интерес при изучении оптоэлектронных систем, систем передачи информации. Уравнения с распределением по пространственной переменной используются в задачах химической кинетики, поэтому результаты о динамике таких систем также имеют большое прикладное значение.

Разработанный метод построения приближенных решений сингулярно возмущенных систем позволяет получать явные формулы для решений и будет полезен при инженерных расчетах.

Методология и методы исследования

Основной используемый в работе метод – это метод построения так называемых квазинормальных форм для произвольного соотношения малых параметров. Это асимптотический метод, суть которого состоит в том, что система, параметры которой близки к критическим значениям, с помощью специальной замены сводится к семейству уравнений, не содержащих малых параметров либо зависящих от них регулярным образом. Решения квазинормальной формы доставляют главные части (и определяют построение следующих приближений) асимптотических по невязке решений равномерно при всех положительных значениях времени. Метод квазинормальных форм имеет в своей основе методы нормальных форм, которые в бесконечномерных критических случаях непосредственно неприменимы.

Положения, выносимые на защиту

1. Разработан метод сведения сингулярно возмущенной задачи в бесконечномерном критическом случае к специальному семейству эволюционных уравнений, не содержащего малого параметра, либо зависящего от него регулярным образом, – квазинормальной форме.

2. В бесконечномерных критических случаях в задачах об устойчивости состояния равновесия построены специальные асимптотические представления корней характеристических уравнений.

3. Построены квазинормальные формы и приведены явные асимптотические формулы, связывающие решения исходных уравнений и построенных квазинормальных форм, для задач первого и второго порядка с одним большим запаздыванием, а также уравнений и систем с сильным запаздывающим управлением.

4. Выделены области устойчивости и неустойчивости состояния равновесия, а также критические случаи в уравнениях с двумя запаздываниями, в случае когда хотя бы одно из них велико, а также для уравнений с распределенным запаздыванием и запаздыванием, зависящим от неизвестной функции. Построены полные наборы квазинормальных форм, получены формулы для асимптотических приближений решений в критических случаях.

5. Приведена классификация критических случаев в сингулярно возмущенных двухкомпонентных параболических системах. Построены квазинормальные формы, получены формулы для асимптотических приближений решений.

6. Развитые методы применены к задачам с запаздыванием и малой диффузией, а также к задачам, содержащим с распределение по пространственной переменной. В критических случаях построены квазинормальные фор-

мы, получены результаты относительно асимптотических по невязке решений таких задач.

7. Показано, что важную роль играет соотношение между малыми параметрами: основным, характеризующим «размер» области определения, и малым параметром, характеризующим «надкритичность», т. е. отклонение спектра соответствующего линейного оператора от мнимой оси. Как правило, увеличение «надкритичности» приводит к появлению семейств квазинормальных форм, зависящих от произвольных параметров и, как следствие, к гипермультистабильности.

8. Показано, что в ряде случаев присутствует чувствительная зависимость решений от малого параметра, выражающаяся в том, что при стремлении малого параметра к нулю в системе может идти бесконечный процесс прямых и обратных бифуркаций.

Апробация работы

Результаты, изложенные в тексте диссертации, докладывались на следующих международных и российских научных конференциях: «Тихонов и современная математика» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2006); «Математические методы в технике и технологиях» (Ярославль, ЯГТУ, 2007); «Хаотические автоколебания и образование структур» (Саратов, СГУ, 2007, 2010, 2013, 2016); «Synergetics: Self-Organization Principles in Animate and Inanimate Systems» (Германия, Бад Хоннеф, Физический центр, 2007), воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна (Воронеж, ВорГУ, 2008); международная научная конференция памяти А.Ю. Левина «Математика, кибернетика, информатика» (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008); научная школа «Нелинейный волны» (Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2010, 2012); IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES2010) (Германия, Дрезден, 2010); «Nonlinear Dynamics on Networks» (Киев, 2010); «Дифференциальные уравнения и их приложения» (Самара, СамГУ, 2011); «Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложение к проблемам естествознания» (Москва, ИМ РАН им. Стеклова, 2011); «Emergent Dynamics of Oscillatory Networks» (Меллас, 2012); «Foundations & Advances in Nonlinear Science and Advances in Nonlinear Photonic» (Минск, БГУ, 2012, 2014, 2016); «Моделирование и анализ информационных систем» (Ярославль, ЯрГУ, 2012); «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященная 90-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко (Москва, ИМ РАН им. Стеклова, 2012); «Dynamics, Bifurcations and Strange attractors», посвященная памяти Л. П. Шильникова (Нижний Новгород, ННГУ, 2013); «Нелинейная динамика и ее приложения», посвященная 150-летию со дня рождения П. Пенлеве (Ярославль, ЯрГУ, 2013); международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, РУДН, 2014, 2017); «Актуальные проблемы математической физики» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2014); «Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование» (Москва, НИЯУ МИФИ, 2015, 2016, 2017); «Nonlinear Photonics: intheory, Materials, Application» (Санкт-Петербург, СПбГУ, 2015); «Infinite-dimentional dynamics, dissipative systems, and attractors» (Ннижний Новгород, ННГУ, 2015); «Нелинейные методы в физике и механике» (Ярославль, ЯрГУ, 2015); «13th Annual Workshop on Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena» (Москва, МГУ); «Dynamics, Bifurcations and Chaos» (Нижний Новгород, ННГУ, 2016, 2017); «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики» (Москва, МГУ, 2016); «Dynamics Days Europe» (Венгрия, Сегед, 2017); «Новые тенденции в нелинейной динамике» (Ярославль, ЯрГУ им. П. Г. Демидова, 2017); «Shilnikov Workshop 2017» (Нижний Новгород, ННГУ, 2017).

Результаты заслушивались на заседаниях следующих научных семинаров: «Нелинейная динамика» под руководством профессоров С. Д. Глызина и С. А. Кащенко (Ярославль. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2007–2017); «Nichtlineare Dynamik» под руководством профессора Б. Фидлера (Германия, Берлин, Свободный университет, 2010), «Laser Dynamics» под руководством профессора А. Владимирова (Германия, Берлин, Институт анализа и стохастики им. Вейерштрасса, 2010, 2012, 2013); семинар кафедры математики физического факультета МГУ под руководством профессоров В. Ф. Бутузова и Н. Н. Нефедова (Москва, МГУ, 2012, 2016); семинар кафедры общей математики факультета ВМК МГУ под руководством профессора И. С. Ломова (Москва. МГУ, 2016); семинар кафедры высшей математики МЭИ под руководством профессоров В. Ф. Сафонова и А. А. Бободжанова (Москва. МЭИ, 2016); семинар кафедры математической физики факультета ВМК МГУ под руководством профессора А. В. Разгулина (Москва, МГУ, 2016); семинар «Асимптотические методы в математической физике» под руководством профессора С. Ю. Доброхотова (Москва, ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН, 2016); семинар «Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения» под руководством профессора А. Л. Скубачевского (Москва, РУДН, 2017); семинар лаборатории «Хаотические динамические системы» ФИЦ «Информатика и управление» РАН ИСА (Москва, ФИЦ «Информатика и управление» РАН ИСА, 2017).

Частично результаты диссертации были получены в процессе выполнения работ по проекту № 1.5722.2017/8.9 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Публикации

Результаты диссертации полностью опубликованы. Список основных публикаций содержит 29 статей, опубликованных в рецензируемых изданиях, входящих в список ВАК, базы Web of Science и Scopus. Он приведен в конце автореферата.

Работы, выполненные в соавторстве с Кащенко С.А., посвящены задачам, которые ранее исследовались им в одном частном случае. Соавтором сделана постановка задачи и получены результаты, относящиеся к одному (базовому) случаю соотношения между малыми параметрами. Это не выносится на защиту. В то время как метод исследований и новые результаты принадлежат автору диссертационной работы и вошли в диссертацию.

В работах, выполненных совместно с Григорьевой Е. В. и Кащенко С. А., соавторам принадлежат физическая и математическая постановка задачи, выделение критических случаев, а также трактовка полученных результатов. Это не входит в диссертацию и на защиту не выносится. Автору диссертационной работы принадлежит метод исследований, построенные квазинормальные формы, асимптотические формулы и итоговые теоремы.

Основное содержание работы

В работе изучается несколько типов сингулярно возмущенных систем с бесконечномерным фазовым пространством: исследуются уравнения с большим запаздыванием и уравнения параболического типа с малой диффузией. Отметим, что уравнения с малой диффузией эквивалентны уравнениям, заданным на асимптотически большой области изменения пространственной переменной. Таким образом фазовое пространство в каждой задаче – это пространство функций с большой областью определения.

Основная задача, которая решается, – это задача исследования локальной динамики этих систем, т. е. поведения решений при $t \to \infty$ в некоторой малой фиксированной окрестности состояния равновесия.

Центральное место исследований занимает изучение критических случаев – ситуаций, когда теорема об устойчивости по первому приближению не применима из-за того, что есть корни характеристического уравнения, сколь угодно близкие к мнимой оси. Главный результат – описание поведения решений в таких случаях, а также асимптотический метод, с помощью которого исходная система сводится к *квазинормальной форме* – уравнению без малых параметров, поведение решений которого доставляет главную часть асимптотического приближения решений исходной задачи.

При изучении случая, близкого к критическому, возникает второй малый параметр. Соотношение малых параметров играет важную роль и открывает путь к объяснению феномена гипермультистабильности – ситуации, когда количество установившихся решений может быть сколь угодно большим. Это объясняется тем фактом, что в качестве квазинормальных форм, как будет показано, получим семейство уравнений, зависящее от произвольного параметра (либо набора таких параметров).

Приводятся способы построения асимптотического приближения устойчивых решений для исходного уравнения.

Общая идея исследований

Предположим, что поставлена задача исследовать поведение решений в окрестности состояния равновесия нелинейного уравнения, содержащего малый параметр ε, причем зависимость от этого параметра сингулярная. Например, ε стоит при старшей производной в уравнении с запаздыванием, либо при коэффициенте диффузии в уравнении параболического типа.

Идея исследований состоит в следующем. Для определения поведения решений вблизи состояния равновесия линеаризуем исходную задачу и построим характеристическое уравнение. Затем в пространстве параметров выделим области, когда при всех достаточно малых значениях ε все корни характеристического уравнения имеют отрицательные, отделенные от нуля вещественные части. При таких значениях параметров в исходной задаче наблюдается тривиальная динамика – все решения из некоторой малой (но фиксированной) окрестности состояния равновесия стремятся к нему при достаточно малых ε. Аналогично выделяется область параметров, при которых существует отделенный от мнимой оси корень характеристического уравнения с положительной вещественной частью. В этой области динамика становится нелокальной – в некоторой фиксированной окрестности состояния равновесия при ε нет устойчивых режимов. Все оставшиеся – критические – случаи характеризуются тем, что при таких значениях параметров существует корень характеристического уравнения, сколь угодно близкий к мнимой оси (и при этом нет корней в правой комплексной полуплоскости, отделенных от мнимой оси). В работе изучаются случаи, когда число таких корней бесконечно. Такие критические случаи будем называть бесконечномерными. Дальнейшие исследования посвящены изучению ситуации, когда параметры близки к критическим. На этом этапе появляется еще один малый параметр μ.

Далее нам потребуется выписать асимптотические приближения для корней характеристического уравнения, которые стремятся к мнимой оси. В простейших ситуациях такие корни можно представить в виде

$$\lambda_k(\varepsilon,\mu) = \pm i\lambda_0(\varepsilon) + ik\lambda_{Im}(\varepsilon) + \varepsilon^n\lambda_{k2}(\varepsilon) + \mu\lambda_1 + \ldots, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь $\lambda_0(\varepsilon)$ некоторая не зависящая от k величина (допустимо $\lambda_0(\varepsilon) \to \infty$), $\lambda_{Im}(\varepsilon)$ близка к константе, n – некоторая константа, а λ_{k2} представляется в виде $\lambda_{k2} = (d_1k^2 + d_2k + d_3) + o(1)$. Важно отметить, что всегда $Re\, d_1 < 0$.

Предположим, что малые параметры связаны: $\mu = a\varepsilon^\alpha$. Тогда в случае $\alpha > n$ имеем $\varepsilon^\alpha = o(\varepsilon^n)$, а значит влияние μ слишком мало. Поэтому этот случай равносилен случаю $\alpha = n$ и $a = 0$. В обратном случае, когда $\alpha < n$ для того, чтобы учесть вещественные из λ_{k2} необходимо рассмотреть номера k, которые имеют порядок $\varepsilon^{(\alpha-n)/2}$. Нам будет удобно представить их как $(z\varepsilon^{(\alpha-n)/2} + \theta_z(\varepsilon))k$. Здесь z — произвольное, фиксированное число, а $\theta_z(\varepsilon) \in [0,1)$ дополняет $z\varepsilon^{(\alpha-n)/2}$ до целого значения. При таких номерах оба «главных» слагаемых в $\mathrm{Re}\,\lambda_k$ имеют одинаковый порядок по ε. Основная идея состоит в том, чтобы построить специальную замену, с помощью которой можно упростить исходную задачу. Такую замену бы будем строить в виде асимптотического ряда

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\delta_1}\left(\exp(\lambda_\Omega it)u + \exp(-\lambda_\Omega it)\overline{u}\right) + \varepsilon^{\delta_2}u_2 + \varepsilon^{\delta_3}u_3 + o(\varepsilon^{\delta_3}), \qquad (1)$$

где функция $u = u(\tau, r)$, а $u_j = u_j(t,\tau,r)$. Причем зависимость u, u_2 и u_3 от t и r периодическая. Через τ обозначено медленное время, $r = \lambda_{Im}t$, $0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_3$. Подставляя этот формальный ряд в исходную задачу и собирая слагаемые одного порядка малости, мы последовательно получим уравнения относительно u_2 и u_3. Условие разрешимости этих уравнений в классе периодических функций будет представлять из себя эволюционное уравнение относительно u. Такое уравнение мы будем называть квазинормальной формой исходной задачи. Обычно, квазинормальная форма – это параболическая система, которая не содержит малых либо больших параметров.

Изложенные идеи применяются к различным задачам. Опишем кратко полученные результаты.

Уравнения с одним большим запаздыванием

В **главе 1** изучается локальная динамика в окрестности состояния равновесия уравнений и систем уравнений с одним большим запаздыванием. Рассматриваются уравнения первого и второго порядков, а также системы таких уравнений. В том числе будут рассмотрены уравнения с большим коэффициентом запаздывающей обратной связи и системы уравнений, связанных через сильное запаздывающее управление – они сводятся к задачам с большим запаздыванием. В завершение главы, в качестве приложения, рассматривается система с запаздыванием, возникающая в задачах лазерной динамики.

В **§1.1** изучается поведение решений в окрестности нулевого состояния равновесия скалярного дифференциально-разностного уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + x = F(x(t-T)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Здесь $T > 0$, а $F(x)$ достаточно гладкая функция ($F(0) = 0$). Главным предположением является то, что время запаздывания является достаточно большим, т. е. $T \gg 1$. В качестве фазового пространства этой системы удобно выбрать пространство непрерывных на отрезке длины T функций $C_{[-T,0]}$ со стандартной нормой. После перенормировки времени приходим к эквивалентной задаче в пространстве $C_{[-1,0]}$.

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} + x = F(x(t-1)). \qquad (2)$$

Пусть $a = \dfrac{dF}{dx}(0)$. Установлено, что при $|a| < 1$ все решения (2) из некоторой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю, т. е. динамика тривиальна. При $|a| > 1$ в некоторой окрестности нуля нет устойчивых решений – динамика становится нелокальной. В дальнейшем исследовании нуждается случай, когда $a = \pm(1 + a_1\varepsilon^p)$.

В случае $a = (1 + a_1\varepsilon^p)$ замена, аналогичная (1), имеет вид

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^p u(\tau, r) + \varepsilon^{2p} u_2(\tau, r) + \ldots,$$

где $\tau = \varepsilon^p t$, $r = (z\varepsilon^{-\gamma} + \Theta_z + \varepsilon^{1-\gamma}(z + o(1)))t$, а $u(\tau, r)$ и $u_2(\tau, r)$ периодичны по второму аргументу с периодом 1. Подставим это в уравнение (2) и будем собирать слагаемые при одинаковых степенях малого параметра. Из разрешимости уравнения относительно u_2 в классе периодических функций получим, что u должно быть решением следующей задачи

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u - f_2 u^2, \quad u(\tau, r) = u\left(\tau, r + 1\right). \tag{3}$$

Отметим, что выбор z был абсолютно произволен. Следовательно, если мы возьмем другое значение параметра $z = z_1$, то получим аналогичную (3) краевую задачу, но с другим значением параметра. Таким образом, мы получили сразу целый класс уравнений, являющихся квазинормальными формами. Однако, у краевой задачи (3) могут быть устойчивы только пространственно-однородные состояния равновесия, которые не зависят от выбора z. Таким образом связь решений квазинормальной формы (3) и уравнения (2) описывается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть $a_1 > 0$. Тогда нулевое решение уравнения (2) неустойчиво, и существует асимптотически устойчивое стационарное решение $x_0(t,\varepsilon)$, допускающее представление вида*

$$x_0(t,\varepsilon) = \varepsilon^p \frac{a_1}{f_2}(1 + o(1)).$$

Если же $a_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (2) асимптотически устойчиво, а решение $x_0(t,\varepsilon)$ неустойчиво.

Ситуация в случае $a = -(1 + a_1\varepsilon^p)$ более интересная. Замена принимает вид

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2} u(\tau, r) + \varepsilon^p u_2(\tau, r) + \varepsilon^{3p/2} u_3(\tau, r) + \ldots,$$

где $\tau = \varepsilon^p t$, $r = (z\varepsilon^{-\gamma} + \theta_z + \varepsilon^{1-\gamma}(z + o(1)))t$. Действуя так же, как и выше, получим для определения $u(\tau, r)$ уравнение параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + (f_2^2 + f_3)u^3, \quad u(\tau, r) = -u(\tau, r + 1). \tag{4}$$

Так же, как и выше, мы получили в качестве квазинормальной формы семейство краевых задач (4), зависящее от непрерывного параметра z. При различных значениях параметра динамика этой задачи может быть, вообще говоря, различной.

Теорема 2. *Пусть при некотором фиксированном z краевая задача (4), имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$. Тогда исходное уравнение (2) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{2p})$ решение вида*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon^{p/2}u_*(\tau,r) - \varepsilon^p\frac{f_2}{2}u_*^2(\tau,r) - \varepsilon^{3p/2}2f_2u_*(\tau,r)\frac{\partial u_*}{\partial r}(\tau,r),$$

где $\tau = \varepsilon^p t$, а $r = (z\varepsilon^{p/2-1} + \theta_z + \varepsilon^{p/2}(z + o(1)))t$.

Замечание. Если дополнительно потребовать грубость периодического решения $u_*(\tau, r)$, то можно построить асимптотическое по невязке решение с любой точностью.

Замечание. Условие периодичности $u_*(\tau, r)$ по τ можно заменить требованием ограниченности $u_*(\tau, r)$ вместе со своими производными вплоть до третьего порядка.

Замечание. Из последней теоремы нельзя сделать вывод, существует ли у (2) точное решение с приведенной асимптотикой. Однако, можно утверждать, что если u_* неустойчиво, то даже если точное решение и существует, то оно заведомо неустойчиво.

В конце параграфа приведено сравнение полученных асимптотических формул и результатов численного исследования.

В **§1.2** мы изучим поведение решений уравнения второго порядка с запаздыванием

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sigma\frac{dx}{dt} + x = ax(t-T) + F(x(t-T)), \quad x \in \mathbb{R}$$

при условии $T \gg 1$ и $\sigma > 0$. Функция F имеет в нуле порядок малости выше первого. После перенормировки времени приходим к уравнению с малым множителем при производной

$$\varepsilon^2\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\sigma\frac{dx}{dt} + x = ax(t-1) + F(x(t-1)). \tag{5}$$

Таким образом, стоит задача исследовать поведение решений (5) в некоторой малой, но не зависящей от ε, окрестности состояния равновесия в фазовом пространстве непрерывно дифференцируемых функций на отрезке единичной длины $C^1_{[-1;0]}$.

Устойчивость нулевого решения (5) существенно зависит от σ. Для формулировки результата введем функцию $a(\sigma)$

$$a(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma > \sqrt{2}, \\ \sigma\sqrt{1-\sigma^2/4}, & \sigma < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Если $|a| < a(\sigma)$, то при достаточно малых ε нулевое решение (5) асимптотически устойчиво. Все решения с начальными условиями из его некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности стремятся к нулю. Если $|a| > a(\sigma)$, то нулевое решение (5) неустойчиво и в его его некоторой малой, но не зависящей от ε, окрестности нет устойчивых решений.

Критические случаи возникают при $a = \pm(a(\sigma) + \varepsilon^p a_1)$ $(0 < \mu \ll 1)$. При $\sigma > \sqrt{2}$ исследование этих ситуаций не имеет принципиальных отличий от аналогичных для уравнения первого порядка. Пусть $0 < \sigma < \sqrt{2}$.

При $p = 2$ получаем в качестве квазинормальной формы комплексное параболическое уравнение типа Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (d_1 + id_2)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2d_1(\theta(\varepsilon) + \Omega)\frac{\partial u}{\partial r}i + d_1(\theta(\varepsilon) + \Omega)^2 u + a_1 u + d_3|u|^2 u,$$
$$u(\tau, r) = u(\tau, r+1). \quad (6)$$

Точные значения параметров здесь приводить не будем, отметим только, что $d_1 > 0$, а функция $\theta(\varepsilon)$ такова, что ее значения лежат в полуинтервале $[0; 2\pi)$ и $\varepsilon^{-1}\omega_0 + \theta$ является кратным 2π числом. Таким образом, коэффициенты уравнения (6) через θ зависят от малого параметра ε. При $\varepsilon \to 0$ функция $\theta(\varepsilon)$ принимает бесконечное количество раз каждое значение из промежутка $[0, 2\pi)$. Обозначим через $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\alpha)$ такую последовательность, что $\varepsilon_n(\alpha) \to 0$ и $\theta(\varepsilon_n(\alpha)) = \alpha$ $(\alpha \in [0, 2\pi))$. Итоговый результат будет сформулирован уже не для всех сколь угодно малых ε, а только для элементов последовательности $\varepsilon_n(\alpha)$.

Теорема 3. *Пусть при $\theta = \alpha \in [0, 2\pi)$ краевая задача (6) имеет периодическое решение $u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (5) при $\varepsilon \in \{\varepsilon_n(\alpha)\}$ имеет асимптотическое по невязке (при $n \to \infty$) с точностью до $O(\varepsilon_n^2)$ равномерно по $t \geqslant 0$ решение вида*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon \left(\exp(it_0)\, u_*(\varepsilon^2 t, r) + \exp(-it_0)\, \overline{u}_*(\varepsilon^2 t, r)\right),$$

где $t_0 = \big(\varepsilon^{-1}\omega_0 + \theta + O(1)\big)t$, $r = (1 + o(1))t$.

При разных значениях θ система (6)может иметь, вообще говоря, качественно разную динамику. Это дает бесконечный процесс прямых и обратных бифуркаций в (5) при $\varepsilon \to 0$.

При $p < 2$ приходим к семейству комплексных параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (d_1 + d_2 i)z^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + d_3|u|^2 u, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+1). \qquad (7)$$

Здесь присутствует произвольный параметр z, однако, здесь нет зависимости от θ.

Теорема 4. *Пусть при некотором $z \neq 0$ краевая задача (7) имеет периодическое решение $u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (5) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^p)$ равномерно по $t \geqslant 0$ решение вида*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2}\left(e^{t_0 i}u_*(\varepsilon^p t, r) + e^{-t_0 i}\overline{u_*}(\varepsilon^p t, r)\right),$$

где $r = (z\varepsilon^{1-p/2} + \theta_z + o(1))t$, $t_0 = \big(\varepsilon^{-1}\omega_0 + \theta + O(1)\big)t$.

Довольно много задач приводит к необходимости изучения нелинейных систем с запаздыванием вида

$$\dot u = F(u) + K(u(t) - u(t-T)), \qquad u \in \mathbb{R}^n,$$

где K и T положительные параметры. Слагаемое $K(u(t) - u(t-T))$ будем называть запаздывающим управлением. В **§1.3** рассмотрим такое уравнение, в котором параметр K (коэффициент управления) является достаточно большим: $K \gg 1$. Все построения будет удобно проиллюстрировать на простейшем, и в то же время достаточно распространенном комплексном уравнении Стюарта-Ландау

$$\dot u = [a + d|u|^2]u + K(u(t-T) - u(t)),$$

в котором $a_0 = \operatorname{Re} a > 0$, $d_0 = \operatorname{Re} d < 0$, а запаздывание $T > 0$ как-то фиксировано. Если разделить исходное уравнение на K, то приходим к квазилинейной задаче

$$\varepsilon\dot u = \varepsilon[a + d|u|^2]u + u(t-T) - u(t), \quad \varepsilon = K^{-1} \ll 1. \tag{8}$$

Основной результат состоит в том, что при достаточно малых ε квазинормальной формой для уравнения (8) является семейство краевых задач

$$T\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{2\pi^2}{T^2}z^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + a\xi + d|\xi|^2\xi, \quad \xi(\tau, x+T) \equiv \xi(\tau, x). \tag{9}$$

Теорема 5. *Пусть краевая задача* (9) *имеет при некотором значении* z *периодическое по* τ *решение* $\xi_0(\tau, x)$. *Тогда уравнение* (8) *имеет асимптотическое по невязке решение* $u_0(t,\varepsilon)$ *с точностью до* $O(\varepsilon)$ *равномерно по* $t \geqslant 0$, *для которого*

$$u_0(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\xi_0\left(\varepsilon t, 2\pi T^{-1}(z\varepsilon^{-\frac{1}{2}} + \theta_z)(1 - \varepsilon T^{-1})t\right).$$

Также разработанные методы применены к некоторым более общим — зависящим от еще одного параметра $\varphi \in [0, 2\pi)$ — уравнениям:

$$\dot u = [a + d|u|^2]u + Ke^{i\varphi}[u(t-T) - u]$$

и

$$\dot u = [a + d|u|^2]u + K[e^{i\varphi}u(t-T) - u].$$

Дополнительно изучена ситуация, когда не только параметр K является большим, но и $T \gg 1$.

В **§1.4** рассмотрена задача изучения динамических свойств системы

$$\begin{aligned}\dot u &= F(u) + K[v(t-T) - u],\\ \dot v &= G(v) + K[u(t-T) - v],\end{aligned} \qquad u, v \in \mathbb{R}^n.$$

в предположении, что коэффициент запаздывающего управления K, является достаточно большим. После деления на K, эта система преобразуется к виду ($\varepsilon = K^{-1} \ll 1$)

$$\begin{aligned}\varepsilon\dot u &= \varepsilon F(u) + v(t-h) - u,\\ \varepsilon\dot v &= \varepsilon G(v) + u(t-h) - v.\end{aligned} \tag{10}$$

В качестве квазинормальной формы здесь выступает система двух параболических уравнений, зависящая от произвольного параметра z

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{1}{4}\left[F(\xi+\eta) + F(\xi-\eta) + G(\xi+\eta) + G(\xi-\eta)\right] + \frac{z^2}{2h}\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} = \frac{1}{4}\left[F(\xi+\eta) - F(\xi-\eta) + G(\xi+\eta) - G(\xi-\eta)\right] + \frac{z^2}{2h}\frac{\partial^2\eta}{\partial r^2}, \tag{12}$$

с краевыми условиями

$$\xi(\tau, r+1) \equiv \xi(\tau, r), \qquad \eta(\tau, r+1) \equiv -\eta(\tau, r). \tag{13}$$

Теорема 6. *Пусть при некотором значении z краевая задача* (11)–(13) *имеет периодическое по τ решение $(\xi_0(\tau, r), \eta_0(\tau, r))$. Тогда система уравнений* (10) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \geqslant 0$ решение*

$$\begin{pmatrix} u(t,\varepsilon) \\ v(t,\varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0(\tau, r) + \eta_0(\tau, r) \\ \xi_0(\tau, r) - \eta_0(\tau, r) \end{pmatrix},$$

где $\tau = \varepsilon t$, $r = \pi h^{-1}(z\varepsilon^{-1/2} + \theta_z)(1 - \varepsilon h^{-1})t$.

Развитые методы применены для исследования математических моделей лазерных систем. В **§1.5** рассмотрена система уравнений Лэнга-Кобаяши для комплексной амплитуды электрического поля $E(t)$ и инверсии носителей $y(t)$ полупроводникового лазера:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2}v(1+i\alpha)(y-1)E + \gamma_0 e^{i\varphi_0}E(t-T),\\ \frac{dy}{dt} &= q - y - y|E|^2.\end{aligned}$$

В отличие от предыдущих задач, здесь в качестве квазинормальной формы выступает более сложное уравнение

$$T\frac{\partial u}{\partial\tau} = \frac{1}{2}z^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\alpha_1 z\frac{\partial u}{\partial x} + wu\left[q\left(1 + \frac{1}{T}\int_0^T |u(\tau,s)|^2 ds\right)^{-1} - (1-c)\right]$$

$$u(\tau, x+T) = u(\tau, x).$$

Периодическому решению этой задачи соответствует такое асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{1/2})$ равномерно по $t \geqslant 0$ решение $E(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$, для которого

$$E(t,\varepsilon) = \exp(i\frac{\varphi}{T}(1-\frac{\varepsilon}{T})t)u(\tau,x) + O(\varepsilon^{1/2}),$$
$$y(t,\varepsilon) = q\left(1+\frac{1}{T}\int_0^T \mid u(\tau,s)\mid^2 ds\right)^{-1} + O(\varepsilon^{1/2}),$$

где $\tau = \varepsilon t$, $x = (z\varepsilon^{-1/2}+\theta)(1-\dfrac{\varepsilon}{T})t$.

Уравнения с двумя запаздываниями

Глава 2 посвящена локальной динамике более сложных объектов – уравнений с двумя запаздываниями вида

$$\dot{x} + x = f(x, x(t-T), x(t-T_1)), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $0 < T < T_1$. Такие уравнения, во-первых, являются естественным обобщением уравнений с одним запаздыванием, а во-вторых, часто возникают при моделировании процессов в медицине , математической биологии , лазерной физике и других отраслях знаний.

Как и в главе 1, основным предположением является то, что хотя бы одно запаздывание является достаточно большим. В силу этого, изучаются три основные задачи. В §2.1 одно запаздывание предполагается большим, а второе фиксированным. В §2.2 оба запаздывания асимптотически велики и при этом одинаковы по порядку. Наконец, в §2.3 оба запаздывания велики, но при этом различны по порядку.

Уравнение, изучаемое в **§2.1**, после нормировки времени принимает вид

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t-\varepsilon T) + bx(t-1) + f(x), \tag{14}$$

Ставится задача исследовать локальную динамику в некоторой окрестности нуля фазового пространства $C_{[-1,0]}$ при достаточно малых ε.

Пусть $\omega(T)$ – это наименьший положительный корень уравнения $-\omega = \operatorname{tg}\omega T$. Определим значение $a_0(T) = -\sqrt{1+\omega^2(T)}$. Пусть $P(\omega)$ — комплексная функция вещественного аргумента ω: $P(\omega) = i\omega + 1 - a\exp(-i\omega T) = \rho(\omega)\exp(i\varphi(\omega))$. Обозначим $b_0 = b_0(a) = \min\limits_{0\leqslant\omega<\infty}\rho(\omega) = \rho(\omega_0)$.

При $a_0(T) < a < 1$ и $|b| < b_0$ динамика уравнения (14) тривиальная, а при $a > 1$, $a < a_0(T)$ или $|b| > b_0$ – нелокальная. Таким образом, в рассмотрении нуждаются случаи $b = \pm b_0(1+\varepsilon^p b_1)$.

Если точкой минимума функции ρ является ноль, т.е. $\omega_0 = 0$, то соответствующие квазинормальные формы – это скалярные параболические уравнения с периодическими краевыми условиями. Все их устойчивые решения –

это пространственно-однородные состояния равновесия. Справедлив результат аналогичный теореме 1.

Если же $\omega_0 > 0$, то результаты отличаются для $p = 2$ и для $p < 2$. Так, при $p = 2$ квазинормальная форма – это комплексное уравнение типа Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + d_2 \frac{\partial u}{\partial r} + d_3 u + du|u|^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+1), \tag{15}$$

где коэффициенты d_2 и d_3 зависят от $\theta_0 = \theta_0(\varepsilon)$ – функции со значениями из $[0, 2\pi)$, такой что $\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0$ кратно 2π. При $\varepsilon \to 0$ функция $\theta_0(\varepsilon)$ принимает бесконечное количество раз каждое значение из промежутка $[0, 2\pi)$. Обозначим через $\varepsilon_n(\alpha)$ такую последовательность, что $\varepsilon_n(\alpha) \to 0$ и $\theta_0(\varepsilon_n(\alpha)) \equiv \alpha$ $(\alpha \in [0, 2\pi))$.

Теорема 7. *Пусть при $\theta_0 = \alpha$ уравнение (15) имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$. Тогда исходное уравнение (14) при $\varepsilon = \varepsilon_n(\alpha)$ имеет асимптотическое по невязке решение с точностью до $O(\varepsilon^2)$ равномерно по $t \geqslant 0$*

$$x_*(t) = \varepsilon \left(e^{it_0} u_*(\varepsilon^2 t, t(1 - \varepsilon\varphi'(\omega_0)) + e^{-it_0} \overline{u}_*(\varepsilon^2 t, t(1 - \varepsilon\varphi'(\omega_0))) \right),$$

где $t_0 = t(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0 + O(1))$.

В случае $p < 2$ квазинормальная форма – это семейство комплексных параболических уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = d_1 z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u + du|u|^2, \quad u(\tau, r) = u\left(\tau, r+1\right),$$

Периодическому решению этого уравнения при некотором z соответствует асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3p/2})$ равномерно по $t \geqslant 0$ решение (14) вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{p/2} \left(e^{(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0 + O(1))ti} u_*(\varepsilon^p t, r) + e^{-(\omega_0\varepsilon^{-1} + \theta_0 + O(1))ti} \overline{u}_*(\varepsilon^p t, r) \right) + o(\varepsilon^{p/2}),$$

где $r = (z\varepsilon^{p/2-1} + \theta_z + o(1))t$.

Отдельного внимания заслуживают случаи $a = 1$ и $a = a(T)$. В этих случаях $b_0 = 0$, т.е. мы имеем уравнение, в котором при большом запаздывании стоит малый множитель $b = \mu b_1$ $(\mu \ll 1)$. Если $a = 1 + \mu a_1$, то квазинормальная форма – это уравнение с запаздыванием

$$(1 + T)\frac{d\xi}{d\tau} = a_1 \xi(\tau) + b_1 \xi(\tau - \mu\varepsilon^{-1}) + f_2 \xi^2. \tag{16}$$

Теорема 8. *Пусть уравнение (16) имеет периодическое решение $\xi_*(\tau)$. Тогда уравнение (14) имеет асимптотическое по невязке решение с точностью до $O(\mu^3)$ равномерно по $t \geqslant 0$ $x(t, \varepsilon) = \mu\xi_*(\mu\varepsilon^{-1} t)$.*

Отметим, что если $\mu\varepsilon^{-1} \gg 1$, то уравнение (16) является уравнением с большим запаздыванием. Для исследования его динамики, в том числе, применимы методы, изложенные в главе 1.

Аналогично, при $a = a(T)(1+\mu a_1)$ и $b = \mu b_1$ квазинормальная форма – это комплексное уравнение с запаздыванием

$$\frac{d\xi}{d\tau} - A\xi = B\xi(\tau - \mu\varepsilon^{-1}) + \sigma_1|\xi|^2\xi, \tag{17}$$

периодические решения которого дают асимптотическое по невязке решение (14) с точностью $O(\mu^2)$ равномерно по $t \geqslant 0$ вида

$$x_*(t,\varepsilon) = \mu^{1/2}\left(\xi_*(\mu\varepsilon^{-1}t)e^{i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t} + \overline{\xi}_*(\mu\varepsilon^{-1}t)e^{-i\omega_0(T)\varepsilon^{-1}t}\right)(1+o(1)).$$

Таким образом, показано, что добавление второго запаздывания, даже асимптотически меньшего, чем первое, делает динамику сложнее.

В **§2.2** изучается случай, когда оба запаздывания большие и одинаковые по порядку. После нормировки времени приходим к задаче

$$\varepsilon\dot{x} + x = ax(t-1) + bx(t - k_0 - \varepsilon^{\alpha}k_1) + f(x). \tag{18}$$

Как показано, важную роль играют алгебраические свойства числа k_0. Принципиально различными будут случаи рационального и иррационального k_0. Кроме того, даже на результаты об устойчивости нуля существенное влияние оказывает значения α. Поэтому случаи $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ и $\alpha > 1$ рассмотрены отдельно.

Пусть $k_0 = \frac{m}{n}$, где m и n целые, взаимно простые числа. Опишем результаты линейного анализа. Для $\alpha < 1$ получаем следующую теорему.

Теорема 9. *Пусть $\alpha < 1$. Тогда при $|a| + |b| < 1$ и достаточно малых ε нулевое состояние равновесия* (18) *устойчиво, все решения* (18) *из некоторой малой (но не зависящей от ε окрестности) стремятся к нулю. При $|a| + |b| > 1$ и достаточно малых ε нулевое решение* (18) *неустойчиво, и в его окрестности не существует устойчивых режимов.*

Для описания результатов для $\alpha = 1$ рассмотрим систему

$$\begin{cases} 1 = a\cos\Omega + b\cos(k_0\Omega + k_1\omega_0), \\ -\omega_0 = a\sin\Omega + b\sin(k_0\Omega + k_1\omega_0), \end{cases}$$

Обозначим через S область на плоскости параметров (a, b), содержащую точку $(0, 0)$, такую, что эта система неразрешима при значениях параметров из этой области.

Теорема 10. *Пусть $\alpha = 1$. Тогда при $(a, b) \in S$ и достаточно малых ε все решения* (18) *из некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого решения стремятся к нулю. При $(a, b) \notin \overline{S}$ и всех достаточно малых ε в некоторой малой (и не зависящей от ε) окрестности нуля нет устойчивых решений.*

Наконец, рассмотрим оставшийся случай $\alpha > 1$. Обозначим $R(\Omega) = a\cos\Omega + b\cos k_0\Omega$. Так как k_0 предполагается рациональным, то существует максимум этой функции. Обозначим его $R_0 = R_0(a, b)$.

Теорема 11. *Пусть $\alpha > 1$. Тогда если $R_0 < 1$, то при всех достаточно малых ε нулевое состояние равновесия* (18) *асимптотически устойчиво, все решения из некоторой его фиксированной окрестности стремятся к нулю. Если $R_0 > 1$, то при всех достаточно малых ε нулевое состояние равновесия* (18) *неустойчиво, и в некоторой его (не зависящей от ε) окрестности нет устойчивых режимов.*

В критических случаях построены квазинормальные формы. Показано, что при $\alpha \geqslant 1$ их роль играют семейства уравнений параболического типа, некоторые коэффициенты которых зависят от функции, аналогичной описанным ранее функциям $\theta(\varepsilon)$. В случае $\alpha < 1$ ситуация существенно сложнее. Пусть

$$a = a_0(1+\varepsilon^\beta a_1), \quad b = b_0(1+\varepsilon^\beta b_1), \quad |a_0|+|b_0| = 1, \quad 0 < \beta \leqslant 2\min(\alpha, 1-\alpha).$$

При $a_0, b_0 \geqslant 0$ получаем, что квазинормальная форма имеет вид параболического уравнения, заданного на торе

$$d\frac{\partial u}{\partial \tau} = Lu + (a_0a_1 + b_0b_1)u + f_2u^2, \quad u(\tau, r+1, s) = u(\tau, r, s+1) = u(\tau, r, s).$$

Точный вид оператора L зависит от соотношения между α и β. Так, при $\alpha < 1/2$, $\beta = 2\alpha$ выполняется $L = L_1$, где

$$L_1u = \frac{|a_0|}{2d^2}\left(\frac{z}{k_1}\frac{\partial}{\partial r} + k_1|b_0|L_0\right)^2 u + \frac{|b_0|}{2}\left(k_1L_0 + \frac{m}{nd}(\frac{z}{k_1}\frac{\partial}{\partial r} + k_1|b_0|L_0)\right)^2 u,$$

в свою очередь L_0 выражается как

$$L_0u = n\theta\frac{\partial u}{\partial r} + (1+n\theta_1)\frac{\partial u}{\partial s}.$$

А в случае $\alpha > 1/2$, $\beta < 2-2\alpha$ выполняется $L = L_5$, где

$$L_5u = \frac{|a_0|}{2d^2}\left(\frac{z}{k_1}\frac{\partial}{\partial r} + (2|b_0|n\omega - \frac{m}{nk_1})\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 u +$$
$$+ \frac{|b_0|}{2}\left(\frac{m}{nd}(\frac{z}{k_1}\frac{\partial}{\partial r} + (2|b_0|n\omega - \frac{m}{nk_1})\frac{\partial}{\partial s}) + 2n\omega\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 u.$$

Выражения для L в остальных случаях приведены в тексте работы.

Все устойчивые решения этого уравнения – это пространственно однородные состояния равновесия.

Теорема 12. *Пусть $a_0, b_0 \geqslant 0$. При $a_0a_1 + b_0b_1 > 0$ и достаточно малых ε уравнение* (18) *имеет устойчивое решение вида*

$$x_* = -\varepsilon^\beta \frac{a_0a_1 + b_0b_1}{f_2} + o(\varepsilon^\beta).$$

А при $a_0a_1 + b_0b_1 < 0$ устойчиво нулевое решение, а x_* неустойчиво.

Если a_0 или b_0 отрицательно, то квазинормальная форма принимает вид

$$d\frac{\partial u}{\partial \tau} = Lu + (|a_0|a_1 + |b_0|b_1)u + \left(\frac{2f_2^2}{1 - a_0 - b_0} + f_3\right) u^3, \tag{19}$$

где точный вид оператора L зависит от α и β. По каждой из пространственных переменных r и s имеем периодические или антипериодические краевые условия в зависимости от знаков a_0 и b_0:

$$u(\tau,r,s{+}1) = \begin{cases} u(\tau,r,s), & a_0 \geqslant 0, \\ -u(\tau,r,s), & a_0 < 0; \end{cases} \qquad u(\tau,r{+}1,s) = \begin{cases} u(\tau,r,s), & b_0 \geqslant 0, \\ -u(\tau,r,s), & b_0 < 0. \end{cases} \tag{20}$$

Отметим, что всегда (19), (20) является уравнением параболического типа. В зависимости от соотношения между α и β оно может содержать один или два произвольных параметра z и ω, а также зависеть от ε через разрывные ограниченные функции θ и θ_1.

Теорема 13. *Пусть при $\theta = y_0$, $\theta_1 = y_1$ и некоторых z и ω задача* (19), (20) *имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r, s)$. Тогда при достаточно малых ε, таких что $\theta(\varepsilon) = y_0$ и $\theta_1(\varepsilon) = y_1$ уравнение* (18) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3\beta/2})$ равномерно по $t \geqslant 0$ решение*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\beta/2}u_*(\varepsilon^\beta t, r, s) + \varepsilon^\beta \frac{f_2}{1 - a_0 - b_0} u_*^2(\varepsilon^\beta t, r, s),$$

где

$$r = \left(n\left[\left(\frac{z}{\varepsilon^{1-\alpha-\beta/2}} + \theta_z\right)\frac{1}{\varepsilon^\alpha k_1 n} + \theta\right] + o(1)\right)t,$$

$$s = \left(-n\left[\left(\frac{\omega}{\varepsilon^{\alpha-\beta/2}} + \theta_\omega\right)\frac{m}{\varepsilon^\alpha k_1 n^2} + \theta_1\right] + \left(\frac{\omega}{\varepsilon^{\alpha-\beta/2}} + \theta_\omega\right) + o(1)\right)t.$$

В **§2.3** изучается ситуация, когда оба запаздывания большие, но одно больше по порядку другого. Такое уравнение можно записать в виде

$$\varepsilon^{1+\alpha}c\dot{x} + x = ax(t - \varepsilon^\alpha c) + bx\,(t-1) + f\,(x, x(t - \varepsilon^\alpha c), x(t-1))\,. \tag{21}$$

Показано, что при $|a| + |b| < 1$ все решения из некоторой окрестности нулевого состояния равновесия стремятся к нулю, а при $|a|+|b| > 1$ в окрестности нуля не может быть устойчивых решений. Таким образом, критический случай возникает, когда $|a| + |b| = 1$. Положим

$$a = a_0 + \operatorname{sign}(a_0)\varepsilon^\beta a_1,\ b = b_0 + \operatorname{sign}(b_0)\varepsilon^\beta b_1, \quad |a_0| + |b_0| = 1,\ 0 < \beta \leqslant 2\min(1;\alpha).$$

Пусть сначала $b_0 \neq 0$. Тогда в качестве квазинормальной формы получаем уравнение параболического типа на двумерной пространственной области. В этом уравнении, в зависимости от соотношения между α и β, может присутствовать зависимость от ограниченной функции малого параметра $\theta(\varepsilon)$, а также один либо два произвольных параметра. Справедливы теоремы, аналогичные теоремам 12, 13.

Новые эффекты возникают в случае, когда при наибольшем запаздывании стоит малый множитель, т. е. $b_0 = 0$. В этом случае квазинормальная форма – это уравнение в частных производных параболического типа, содержащее запаздывание. При $a_0 = 1$ и условии $\beta = \alpha \leqslant 2$ получаем

$$c\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - c\theta_0\frac{\partial u}{\partial r} + a_1 u + b_1 u(\tau - 1, r) + f_2 u^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+1). \quad (22)$$

В случае $a_0 = 1$ и $\beta < \alpha$ получаем

$$c\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + a_1 u + b_1 u(\tau - \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-\beta}}, r) + f_2 u^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r+1). \quad (23)$$

Теорема 14. *Пусть $\beta = \alpha \leqslant 2$. Пусть краевая задача (22) при $\theta_0 = Q \in [0; 1)$ и некотором $z \neq 0$ (для случая $\beta = \alpha = 2$ рассматриваем только $z = 1$) имеет периодическое решение $u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (21) при $\varepsilon = \varepsilon_m$, где ε_m определяются равенством $\theta_0(\varepsilon_m) = Q$ имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon_m^{2\beta})$ равномерно по всем $t \geqslant 0$ решение вида*

$$x_*(t, \varepsilon_m) = \varepsilon_m^{\beta} u_*(t, r),$$

где r при соответствующем z и $\varepsilon = \varepsilon_m$ определяется формулой

$$r = \left(\frac{(1-\varepsilon)z}{c\varepsilon^{1+\alpha-\beta/2}} + \frac{\theta_z}{c\varepsilon^{\alpha}} + \theta_0 + o(1)\right)t.$$

Теорема 15. *Пусть $\beta < \alpha$ и $\beta \leqslant 2$. Пусть краевая задача (23) при некотором $z \neq 0$ (для случая $\beta = 2$ рассматриваем только $z = 1$) имеет периодическое решение $u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (21) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{2\beta})$ равномерно по всем $t \geqslant 0$ решение вида*

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\beta} u_*(\varepsilon^{\beta-\alpha} t, r),$$

где r такое же, как и в теореме 14.

При $a_0 = -1$ получаем уравнения аналогичные (22) и (23) с кубической нелинейностью вместо квадратичной и антипериодическими краевыми условиями. Для них справедливы аналоги теоерем 14 и 15.

Уравнения с распределенным запаздыванием

В §§3.1 и 3.2 **главы 3** рассматривается уравнение с распределенным на промежутке $[-T, 0]$ запаздыванием:

$$\frac{dx}{dt} + x = \int\limits_{-T}^{0} x(t+s)\, dr(s) + f(x), \quad T > 0.$$

Уравнения такого вида являются обобщением уравнений, которые изучались в главе 1 и в главе 2. Действительно, если $r(s)$ – кусочно-постоянная, то это уравнение становится уравнением с несколькими запаздываниями. Основное предположение заключается в том, что значение запаздывания T является достаточно большим.

В **§3.1** запаздывание экспоненциально распределено, т.е.

$$\frac{dr}{ds} = R(s) = a\delta \exp(-\delta(s+T)), \quad \text{где} \quad \delta > 0.$$

Таким образом, после нормирующих замен приходим к задаче исследовать поведение решений

$$\varepsilon\dot{x} + x = \frac{a\delta}{\varepsilon}\int\limits_{-1}^{0} \exp\left(-\frac{\delta}{\varepsilon}(s+1)\right) x(t+s)\, ds + f(x)$$

в окрестности нулевого состояния равновесия в фазовом пространстве непрерывных на отрезке единичной длины функций $C_{[-1;0]}$ со стандартной нормой.

В результате исследований выделены критические случаи и показано, что при значения параметров близких к ним, уравнениями нулевого приближения являются уравнения параболического типа с периодическими или антипериодическими краевыми условиями.

В **§3.2** изучается случай линейно распределенного запаздывания

$$\frac{dr}{ds} = R(s) = a + \frac{bs}{T}.$$

После нормировок изучаемое уравнение принимает вид

$$\varepsilon^2\dot{x} + \varepsilon x = \int\limits_{-1}^{0} (a+bs)x(t+s)ds + \varepsilon f(x). \tag{24}$$

Как показано, если $2a+1 > 0$, то критический случай реализуется при условии $|a-b| = |a|$ (обязательно также должно выполняться условие $a < 0$), т.е. при $b = 0$ либо при $b = 2a$. В случае $2a+1 < 0$ критический случай возникает при $b = b_\pm = a \pm \frac{1}{2}\sqrt{-1(1+4a)}$ (в этом случае также $a < 0$).

Случай $2a+1>0$ не содержит принципиально новых результатов. В качестве квазинормальных форм получаем семейства параболических уравнений с периодическими или антипериодическими краевыми условиями. При условии $2a+1<0$ положим

$$a<0, \quad 2a+1<0, \quad b=b_{\pm}+\varepsilon b_1+\varepsilon^2 b_2.$$

Как оказывается, важным является значение b_1. Если $b_1 \neq -1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$, то квазинормальная форма имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=(d_1+id_2)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}-\frac{4a \pm 2(1+b_1)\sqrt{-(1+4a)}}{1+4a}u+ \\ +\frac{\omega_0 i e^{i\Omega}}{b_{\pm}-a}\left(2f_2^2\left(2i\omega_0+1-\frac{a(1-e^{-2i\Omega})+a}{2i\omega_0}\right)^{-1}+3f_3\right)u|u|^2, \quad (25)$$

$$u(\tau,r)=u(\tau,r+1). \quad (26)$$

Справедлива теорема.

Теорема 16. *Пусть задача (25),* (26) *имеет периодическое решение* $u_*(\tau,r)$*, тогда исходное уравнение (24) имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^2)$ *равномерно по* $t \geqslant 0$ *решение вида*

$$x_*(t,\varepsilon)=\sqrt{\varepsilon}\Big(e^{(\omega_0/\varepsilon+\theta(\varepsilon)+\Omega+\varepsilon c)it}u_*(\varepsilon t,(1-2\varepsilon)\varepsilon^{-1/2}t)+ \\ +e^{-(\omega_0/\varepsilon+\theta(\varepsilon)+\Omega+\varepsilon c)it}\overline{u}_*(\varepsilon t,(1-2\varepsilon)\varepsilon^{-1/2}t)\Big)+o(\sqrt{\varepsilon}).$$

Если же $b_1=-1 \mp 2a\sqrt{-(1+4a)^{-1}}$, то роль нормальной формы в этом случае играет уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=(d_1+id_2)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+(d_3+id_4)\frac{\partial u}{\partial r}+(d_5+id_6)u+ \\ +\frac{\omega_0 i e^{i\Omega}}{b_{\pm}-a}\left(2f_2^2\left(2i\omega_0+1-\frac{a(1-e^{-2i\Omega})+a}{2i\omega_0}\right)^{-1}+3f_3\right)u|u|^2 \quad (27)$$

с краевыми условиями

$$u(\tau,r)=u(\tau,r+1). \quad (28)$$

Теорема 17. *Пусть краевая задача (27), (28) имеет периодическое решение* $u_*(\tau,r)$*, тогда исходное уравнение (24) имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^2)$ *равномерно по* $t \geqslant 0$ *решение вида*

$$x_*(t,\varepsilon)=\varepsilon\big(\exp\big[(\omega_0/\varepsilon+\theta(\varepsilon)+\Omega+\varepsilon c)it\big]u_*(\varepsilon^2 t,(1-2\varepsilon)t)+ \\ +\exp\big[-(\omega_{-1}/\varepsilon+\theta(\varepsilon)+\Omega+\varepsilon c)it\big]\overline{u}_*(\varepsilon^2 t,(1-2\varepsilon)t)\big).$$

Уравнение с запаздыванием, зависящим от искомой функции

В **§3.3** изучается нелинейное дифференциально-разностное уравнение

$$\dot{u} + u = F(u(t - T\varphi(u))),$$

где F достаточно гладкая, а $\varphi > 0$ аналитическая, $T \gg 1$. Переходя к быстрому времени, получаем эквивалентное уравнение

$$\varepsilon\dot{u} + u = F(u(t - \varphi(u)), \quad 0 < \varepsilon = T^{-1} \ll 1. \tag{29}$$

Критические случаи возникают, когда $a = F'(0)$ близко к ± 1. Если $a = 1 + \varepsilon^p a_1$, то квазинормальная форма принимает вид семейства уравнений

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + a_1\xi + b\xi^2 - \alpha\xi z\frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad \xi(\tau, r+1) \equiv \xi(\tau, r). \tag{30}$$

Основное отличие от всех предыдущих случаев здесь состоит в присутствии производной в нелинейности. Связь решений описывает следующая теорема.

Теорема 18. *Пусть при некотором z уравнение (30) имеет периодическое по τ и 1-периодическое по r решение $\xi_0(\tau, r)$. Тогда уравнение (29) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3p/2})$ равномерно по $t \geqslant 0$ решение $u_0(t, \varepsilon)$, для которого*

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^p \xi(\varepsilon^p t, (\varepsilon^{\frac{p}{2}-1}z + \Theta_z - z\varepsilon^{\frac{p}{2}})t).$$

В случае $a = -1 + \varepsilon^p a_1$ приходим к квазинормальной форме

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{z^2}{2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} - a_1\xi + (b^2 - c)\xi^3 + (\frac{1}{2}\alpha b - \beta)z\xi^2\frac{\partial \xi}{\partial r} - \frac{1}{2}\alpha^2 z^2 \xi\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)^2,$$
$$\xi(\tau, r+1) \equiv -\xi(\tau, r). \tag{31}$$

Теорема 19. *Пусть для некоторого положительного z задача (31) имеет периодическое по τ решение $\xi_0(\tau, r)$. Тогда уравнение (29) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^p)$ равномерно по $t \geqslant 0$ решение $u_0(t, \varepsilon)$, для которого*

$$u_0(t, \varepsilon) = \varepsilon^p \xi_0(\varepsilon^p t, (\varepsilon^{\frac{p}{2}-1}z + \Theta_z - z\varepsilon^{\frac{p}{2}})t).$$

Сингулярно возмущенные системы параболического типа

В **главе 4** исследуется поведение решений системы нелинейных уравнений параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \mu A_1)u + F(u), \quad u(t, x) = u(t, x + 2\pi), \tag{32}$$

а также задачи с «сильной» нелинейностью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (A_0 + \mu A_1)u + F(u, \frac{\partial u}{\partial x}), \quad u(t,x) = u(t, x+2\pi). \qquad (33)$$

Предполагается, что все собственные значения матрицы $D(\varepsilon)$ имеют положительные вещественные части. Здесь ε и μ – положительные малые параметры, а матрица $D(\varepsilon)$ имеет вид

$$D(\varepsilon) = D_0 + \varepsilon D_1.$$

В §§4.1 и 4.2 будет изучен случай, когда матрица D_0 нулевая, а $u \in \mathbb{R}^n$. В §4.3 и §4.4 проведен детальный анализ случая $u \in \mathbb{R}^2$. Главное предположение §4.3 состоит в том, что матрица D_0 имеет нулевое и положительное собственное значение, таким образом изучаемая система является близкой к гибридной (содержащей уравнение в частных производных и обыкновенное дифференциальное уравнение). Наконец, §4.4 посвящен случаю, когда оба собственных значения D_0 равны нулю, но, в отличии от §§4.1 и 4.2, собственный вектор только один.

В **§4.1** матрица $D(\varepsilon)$ имеет вид $D(\varepsilon) = \varepsilon D$, а $\mu = c\varepsilon^\alpha$. Поведение решений в этом случае определяется расположением собственных чисел $A(z) = A_0 - zD$ при $z \geqslant 0$. Рассматриваются две критические ситуации. В первой из них, $A(0)$ имеет пару чисто мнимых собственных чисел $\pm i\omega$, а все остальные собственные значения $A(z)$ лежат в левой комплексной полуплоскости. В этом случае в качестве квазинормальной формы возникает комплексное параболическое уравнение, зависящее от произвольного γ:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \gamma^2 (Da, b)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + c(A_1 a, b)\xi + \sigma|\xi|^2\xi, \quad \xi(\tau, y+2\pi) \equiv \xi(\tau, y). \qquad (34)$$

Теорема 20. *Пусть при некотором γ краевая задача* (34) *имеет периодическое по τ решение $\xi_0(\tau, y)$. Тогда система* (32) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^\alpha)$ равномерно по всем $t \geqslant 0$, $x \in [0, 2\pi]$ решение*

$$u(t,x) = \varepsilon^{\alpha/2}\Big(\xi_0(\varepsilon^\alpha t, (\gamma\varepsilon^{-\beta} + \Theta_\gamma)x)ae^{i\omega t} + \overline{\xi_0}(\varepsilon^\alpha t, (\gamma\varepsilon^{-\beta} + \Theta_\gamma)x)\overline{a}e^{-i\omega t}\Big).$$

Во второй ситуации при некотором $z = z_0 > 0$ $A(z_0)$ имеет простое нулевое собственное значение, а все остальные собственные числа матриц $A(z)$ лежат слева от мнимой оси. В этом случае для определения главной части приближения решения приходим к уравнению

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = 4z_0(Da_1, b)\gamma^2\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + c(A_1 a, b)\xi + \zeta|\xi|^2\xi, \quad \xi(\tau, y+2\pi) \equiv \xi(\tau, y). \qquad (35)$$

Теорема 21. *Пусть при некотором $\gamma 0$ краевая задача* (35) *имеет периодическое решение $\xi_0(\tau, y)$. Тогда* (32) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^\alpha)$ равномерно по $t \geqslant 0$, $x \in [0, 2\pi]$ решение*

$$u = \varepsilon^{\alpha/2}\left(\xi(\varepsilon^\alpha t, y) a \exp\left[i\left(\sqrt{\frac{z_0}{\varepsilon}} + \theta\right)x\right] + \overline{\xi}(\varepsilon^\alpha t, y)\overline{a}\exp\left[-i\left(\sqrt{\frac{z_0}{\varepsilon}} + \theta\right)x\right]\right),$$

где $y = (\gamma\varepsilon^{-(1-\alpha)/2} + \Theta_\gamma)x$.

В **§4.2** изучается, как и в §4.1, уравнение с малой диффузией, но при этом нелинейность «сильная» (т.е. зависящая еще и от $\frac{\partial u}{\partial x}$). Основные изменения результатов касаются, во-первых, вида нелинейности в квазинормальной форме, а во-вторых, порядка малости возникающих колебательных решений. Так, в случае, когда $A(0)$ имеет пару чисто мнимых собственных значений, в роли квазинормальной формы выступает уравнение с произвольным $\varkappa$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \varkappa^2 d\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + c(A_1 a, b)\xi + \varkappa^2\left[\sigma_1\xi\left|\frac{\partial \xi}{\partial y}\right|^2 + \sigma_2|\xi|^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \sigma_3\xi^2\frac{\partial^2\overline{\xi}}{\partial y^2} + \sigma_4\overline{\xi}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$\xi(\tau, y + 2\pi) \equiv \xi(\tau, y). \quad (36)$$

Теорема 22. *Пусть при некотором $\varkappa$ уравнение (36) имеет периодическое при $\tau \to \infty$ решение $\xi_0(\tau, y)$. Тогда краевая задача (33) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{(1+\alpha)/2})$ равномерно по $t \geqslant 0$, $x \in [0, 2\pi]$ решение $u(t, x, \varepsilon)$, для которого*

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}[\xi_0(\varepsilon^\alpha t, (\varkappa\varepsilon^\delta + \theta)x)\exp(i\omega t)a + \overline{\xi_0}(\varepsilon^\alpha t, (\varkappa\varepsilon^\delta + \theta)x)\exp(-i\omega t)\overline{a}].$$

В **§4.3** уравнения (32) и (33) рассматриваются в предположении, что $u \in \mathbb{R}^2$ и

$$D(\varepsilon) = D_0 + \varepsilon D_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выделены критические случаи в задаче от устойчивости состояния равновесия и детально изучены те из них, которые имеют бесконечную размерность. Квазинормальные формы и формулы для асимптотических по невязке решений в этом случае могут иметь довольно сложный вид. Так, в одном из наиболее простых случаев для определения главной части асимптотики получаем семейство уравнений

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial \tau \partial y_1^2} = z_1^2\frac{\partial^4\xi}{\partial y_1^4} + ca_{11}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_1^2} + \delta z_1^2\left[\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1^2}\right)^2 - M\left(\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial y_1^2}\right)^2\right)\right] \quad (37)$$

с условиями 2π-периодичности $\xi(\tau, y_1)$ по y_1 и $M(\xi) = 0$. Здесь $M(\xi)$ – это среднее значение по пространственной переменной y_1. Решению (37) при некотором z_1 соответствует асимптотическое по невязке решение (32)

$$u(t,x,\varepsilon)=\left(\begin{array}{c}-\varepsilon^{\alpha}z_1^2\dfrac{\partial^2\xi_0(\varepsilon^{\alpha}t,y_1))}{\partial y_1^2}+o(\varepsilon^{\alpha})\\ \varepsilon a_3\xi_0(\varepsilon^{\alpha}t,y_1)+o(\varepsilon)\end{array}\right),$$

где $y_1=(z_1\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{2}}+\theta_1)x$.

Наконец, **§4.4** посвящен ситуации, когда $u\in\mathbb{R}^2$ и матрица $D(\varepsilon)$ задается равенством

$$D(\varepsilon)=\left(\begin{array}{cc}0&1\\0&0\end{array}\right)+\varepsilon\left(\begin{array}{cc}0&0\\d_1&d_2\end{array}\right)+O(\varepsilon^2).$$

В бесконечномерных критических случаях, которые здесь возникают, квазинормальные формы имеют вид уравнений, содержащих четвертую производную по пространственной переменной. Так, в одной из наиболее простых ситуаций имеем

$$a_1\frac{\partial\xi}{\partial\tau}=-z^4d_1\frac{\partial^4\xi}{\partial y^4}-ca_{21}z^2\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\beta_1\beta_3z^4(\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2})^2,\quad \xi(\tau,x)=\xi(\tau,x+2\pi).\quad(38)$$

Как и выше, каждое периодическое решение (38) определяет главную часть асимптотических по невязке решений (32) в рассматриваемом критическом случае с помощью формулы

$$u(t,x,\varepsilon)=\varepsilon\left(\begin{array}{c}-z^2\frac{\partial^2\xi(\varepsilon^{2\alpha-1}t,(z\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{2}}+\theta)x)}{\partial y^2}-a_2\xi(\varepsilon^{2\alpha-1}t,(z\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{2}}+\theta)x)\\ a_1\xi(\varepsilon^{2\alpha-1}t,(z\varepsilon^{\frac{\alpha-1}{2}}+\theta)x)\end{array}\right)$$

Уравнения с отклонением пространственной переменной

Глава 5 посвящена локальной динамике уравнений, содержащих распределение по пространственной переменной и, возможно, запаздывание.

В **§5.1** исследуется поведение решений уравнения параболического типа с отклонением пространственной переменной

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u=\varepsilon\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+K\sin u(t,x-h),\quad u(t,x+2\pi)\equiv u(t,x).\qquad(39)$$

Здесь $0<\varepsilon\ll1$, а относительно параметра h предполагаем, что он близок к рационально кратному 2π. Все рассуждения проведены для важного частного случая $h=\pi+\mu$, где μ — ещё один малый параметр: $0<\mu\ll1$.

Пусть u_0 – однородное состояние равновесия (39). Рассматривается наиболее интересный критический случай, когда параметр $p=K\cos u_0$ близок к -1. Это означает, что для некоторого малого параметра ν: $0<\nu\ll1$ выполнено соотношение $p=-1-\nu$.

Пусть параметры ε, μ и ν связаны соотношениями

$$\mu=\varepsilon^{1/2}h_1,\qquad \nu=\varepsilon^{\gamma}p_1,\qquad 0<\gamma<1.$$

Тогда роль квазинормальной формы играет уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \varkappa^2 \left(1 + \frac{1}{2} h_1^2\right) \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + p_1 \xi - \left(\frac{1}{6} + \frac{u_0^2}{4}\right) \xi^3, \quad \xi(\tau, r + \pi) \equiv -\xi(\tau, r). \quad (40)$$

Здесь значение $\varkappa$ выбирается произвольно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 23. *Пусть при некотором $\varkappa$ краевая задача (40) имеет периодическое по τ решение $\xi_0(\tau, r)$. Тогда задача (39) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3\gamma/2})$ равномерно по $t \geqslant 0$ и $x \in [0, 2\pi]$ решение*

$$u(t, x, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon^{\gamma/2} \xi(\varepsilon^\gamma t, r) - \varepsilon^\gamma \frac{1}{2} u_0 \xi^2(\varepsilon^\gamma t, r),$$

где $r = (\varkappa \varepsilon^{-\delta} + \theta_\varkappa)(x - \varepsilon^{\gamma/2} h_1 \varkappa t)$.

Также рассмотрен случай, когда параметр μ, характеризующий отклонение пространственной переменной, «существенно больше», т. е. $\mu = \varepsilon^\alpha h_1$ $(0 < \alpha < \frac{1}{2})$. Относительно параметра ν тогда предполагается, что $\nu = \varepsilon^\gamma p_1$ $(0 < \gamma \leqslant \min(2\alpha, 1 - 2\alpha))$. В этом случае структура решений усложняется. Квазинормальная форма теперь зависит от двух пространственных переменных:

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \Delta^2 h_1^{-2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \varkappa^2 h_1^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} + p_1 \xi - \left(\frac{1}{6} + \frac{u_0^2}{4}\right) \xi^3,$$
$$\xi(\tau, r + 2\pi, s) \equiv \xi(\tau, r, s) \equiv -\xi(\tau, r, s + \pi). \quad (41)$$

Параметры $\varkappa$ и Δ являются произвольными.

Теорема 24. *Пусть при некоторых $\varkappa$ и Δ краевая задача (41) имеет периодическое по τ решение $\xi_0(\tau, r, s)$. Тогда задача (39) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3\gamma/2})$ равномерно по $t \geqslant 0$ и $x \in [0, 2\pi]$ решение вида*

$$u(t, x, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon^{\gamma/2} \xi(\varepsilon^\gamma t, r, s) - \varepsilon^\gamma \frac{1}{2} u_0 \xi^2(\varepsilon^\gamma t, r, s),$$

где $r = \big(h^{-1} \pi \varepsilon^{-\alpha} (\Delta \varepsilon^{\alpha - \beta} + \theta_1) + \theta_2\big) x$, $s = (\varkappa \varepsilon^{-\delta} + \theta_3) x - h_1 \varkappa \varepsilon^{\gamma/2} t$.

В **§5.2** исследуем динамические свойства комплексного пространственно-распределенного комплексного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Phi(u) + K e^{i\varphi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(s) u(t, x + s) ds - u\right] + d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

в случае $\varepsilon = K^{-1} \ll 1$. Здесь функция F задается равенством

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu\pi}} \exp\left(-\frac{(x + h)^2}{\mu}\right), \qquad \mu > 0. \quad (42)$$

Пусть $\mu = \kappa\varepsilon$. Разделив на K и нормировав время получим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \varepsilon\Phi(u) + e^{i\varphi}[\int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(\tau, x+s)ds - u] + \varepsilon d\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(\tau, x+2\pi) \equiv u(\tau, x). \tag{43}$$

При условиях $h \neq 0, \varphi \neq 0$ и при достаточно малых ε уравнение (43) не может иметь устойчивых установившихся режимов. В связи с этим предположим, что для некоторого φ_1 имеем $\varphi = \varepsilon^{1/2}\varphi_1$.

Сначала разберем случай, когда h близко к нулю: $h = \varepsilon^{1/2}h_1$. В этом случае квазинормальной формой является уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = (\kappa + d + \frac{1}{2}h_1^2)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - i\varphi_1 h_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} + \Phi(\xi), \quad \xi(t, y+2\pi) \equiv \xi(t, y). \tag{44}$$

Теорема 25. *Пусть $\xi_0(t, y)$ – периодическое по t решение краевой задачи (44). Тогда краевая задача (43) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ равномерно по $\tau \geqslant 0$ и $x \in [0, 2\pi]$ решение $u_0(\tau, x, \varepsilon) = \xi_0\left(\varepsilon\tau, x - \varepsilon^{1/2}h_1\tau\right)$.*

Если дополнительно потребовать малость коэффициентов d, κ и h_1

$$d = \varepsilon^{\alpha}d_1, \quad \kappa = \varepsilon^{\alpha}\kappa_1, \quad h_1 = \varepsilon^{\alpha/2}h_2, \quad \alpha > 0,$$

то в качестве квазинормальной формы получаем зависящее от параметра z семейство краевых задач

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = z^2(\kappa_1 + d_1 + \frac{1}{2}h_2^2)\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - i\varphi_1 h_2 z\frac{\partial \xi}{\partial v} + \Phi(\xi), \qquad \xi(t, v+2\pi) \equiv \xi(t, v). \tag{45}$$

Теорема 26. *Пусть при некотором z краевая задача (45) имеет периодическое по t решение $\xi_0(t, v)$. Тогда краевая задача (43) имеет асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3/2})$ равномерно по $\tau \geqslant 0$ и $x \in [0, 2\pi]$ решение*

$$u_0(\tau, x) = \xi_0\left(\varepsilon\tau, (z\varepsilon^{-\alpha/2} + \Theta)x - (\varepsilon^{1/2}h_2 z + \varepsilon^{(1+\alpha)/2}h_2\Theta)\tau\right).$$

А если только коэффициенты d и κ будут малыми: $d = \varepsilon d_1$, $\kappa = \varepsilon\kappa_1$ – то приходим к тому, что в главном решения (43) определяются краевой задачей

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{4\pi^2}{h_1^2}(\kappa_1 + d_1)\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} + \frac{h_1^2}{2}\left(\Theta\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}\right)^2 \xi - i\varphi_1 h_1\left(\Theta\frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \xi}{\partial w}\right) + \Phi(\xi), \tag{46}$$

$$\xi(t, v+2\pi, w) \equiv \xi(t, v, w+2\pi) \equiv \xi(t, v, w). \tag{47}$$

Теорема 27. *Пусть при некотором $\Theta = \Theta_0$ краевая задача (46), (47) имеет периодическое по t решение $\xi_0(t, v, w)$. Пусть стремящаяся к нулю последовательность ε_k такова, что $\Theta(\varepsilon_k) = \Theta_0$. Тогда краевая задача (43) при*

$\varepsilon = \varepsilon_k$ *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon_k^{3/2})$ *равномерно по* $\tau \geqslant 0$ *и* $x \in [0, 2\pi]$ *решение*

$$u_0(\tau, x) = \xi_0(\varepsilon\tau, (2\pi h_1^{-1}\varepsilon_k^{-\frac{1}{2}} + \Theta_0)x - h_1\Theta_0\varepsilon_k^{\frac{1}{2}}\tau, x - h_1\varepsilon_k^{\frac{1}{2}}\tau).$$

Пусть теперь h близок к некоторому рационально соизмеримому с π числу: $h = \frac{\pi m_1}{m_2} + \varepsilon^{1/2}h_1$. Обозначим $m = Nn$, где $N = m_2$, если m_1 четно, и $N = 2m_2$, если m_1 нечетно. Тогда краевая задача

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = N^2(\kappa + d + \frac{1}{2}h_1^2)\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} - iNh_1\varphi_1\frac{\partial\xi}{\partial y} + \Phi(\xi), \quad \xi(t, y + 2\pi) \equiv \xi(t, y) \tag{48}$$

является квазинормальной формой. А связь между решениями (48) и (43) устанавливает формула $u(\tau, x, \varepsilon) = \xi\left(\varepsilon\tau, N(x - \varepsilon^{1/2}h_1\tau)\right)$.

В **§5.3** опишем поведение решений системы двух уравнений с пространственно-распределенной связью ($u_1, u_2 \in \mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \Phi_1(u_1) + K\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)u_2(t, x+s)ds - u_1\right], \\ \dot{u}_2 &= \Phi_2(u_2) + K\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)u_1(t, x+s)ds - u_2\right] \end{aligned} \tag{49}$$

с периодическими краевыми условиями. Функция F, как и в §5.2, задается формулой (42). Пусть $\mu = 4c^2\varepsilon^{2\alpha}$. Качественно новые, по сравнению с §5.2, результаты возникают, если $h = \varepsilon^\beta h_1$, $\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant \alpha - \frac{1}{2}$. Тогда квазинормальная форма имеет вид

$$\begin{gathered} \frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \frac{c^2\pi^2z^2}{h_1^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{1}{2}h_1^2v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial w^2} + R_1(\xi, \eta), \\ \frac{\partial\eta}{\partial\tau} = \frac{c^2\pi^2z^2}{h_1^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2} + \frac{1}{2}h_1^2v^2\frac{\partial^2\eta}{\partial w^2} + R_2(\xi, \eta), \\ \xi(\tau, y, w + 2\pi) \equiv \xi(\tau, y, w) \equiv \xi(\tau, y + 2\pi, w), \\ \eta(\tau, y, w + 2\pi) \equiv \eta(\tau, y, w) \equiv -\eta(\tau, y + \pi, w) \end{gathered} \tag{50}$$

где

$$\begin{aligned} R_1(\xi, \eta) &= \tfrac{1}{4}[\Phi_1(\xi + \eta) + \Phi_1(\xi - \eta) + \Phi_2(\xi + \eta) + \Phi_2(\xi - \eta)], \\ R_2(\xi, \eta) &= \tfrac{1}{4}[\Phi_1(\xi + \eta) - \Phi_1(\xi - \eta) + \Phi_2(\xi + \eta) - \Phi_2(\xi - \eta)]. \end{aligned}$$

Теорема 28. *Пусть параметры* z *и* v *произвольно фиксированы. Пусть краевая задача* (50) *имеет периодическое по* $\tau \to \infty$ *решение* $\xi_0(\tau, y, w)$, $\eta_0(\tau, y, w)$. *Тогда краевая задача* (49) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon)$ *равномерно по* $t \geqslant 0$ *и* $x \in [0, 2\pi]$ *решение*

$$\begin{aligned} u_{10}(t, x, \varepsilon) &= \xi_0(\varepsilon t, y, w) + \eta_0(\varepsilon t, y, w), \\ u_{20}(t, x, \varepsilon) &= \xi_0(\varepsilon t, y, w) - \eta_0(\varepsilon t, y, w), \end{aligned}$$

в котором $y = x\left(\pi h_1^{-1}\varepsilon^{-\beta}(z\varepsilon^{-\delta}+\theta_1)+\theta_2\right)$, $w = x\left(v\varepsilon^{-\gamma}+\theta_3\right) - h_1\varepsilon^{\frac{1}{2}}t$.

Если же $h = \frac{\pi m_1}{m_2} + h_1\varepsilon^{\beta}$, то в качестве квазинормальной формы получаем системы из $2m_2n$ уравнений параболического типа.

Параграфы §§5.4–5.7 посвящены пространственно-распределенному логистическому уравнению. В **§5.4** изучим локальную динамику

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN\left[1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)N(t,x+s)ds\right]N + \varepsilon^2\gamma^2\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}, \quad N(t,x+2\pi) \equiv N(t,x). \tag{51}$$

Рассматриваются два вида функции F:

$$F(s,\varepsilon) = \frac{1}{b-a}\{b(4\pi\sigma_1^2\varepsilon)^{-1/2}\exp[-s^2(4\varepsilon\sigma_1^2)^{-1}] - a(4\pi\sigma_2^2\varepsilon)^{-1/2}\exp[-s^2(4\varepsilon\sigma_2^2)^{-1}]\},$$

$$F(s,\varepsilon) = \frac{1}{b-a}\{b(4\pi\sigma_1^2\varepsilon)^{-1/2}\exp[-(s-\sqrt{\varepsilon}\alpha_1)^2(4\varepsilon\sigma_1^2)^{-1}] - \\ - a(4\pi\sigma_2^2\varepsilon)^{-1/2}\exp[-(s-\sqrt{\varepsilon}\alpha_2)^2(4\varepsilon\sigma_2^2)^{-1}] \qquad (b > a).$$

Корни характеристического уравнения линеаризованной краевой задачи имеют вид $\lambda_k = \lambda(\varepsilon k)$, где $\lambda(z) = -\gamma^2 z^2 - \frac{r}{b-a}[b\exp(-\sigma_1^2 z^2) - a\exp(-\sigma_2^2 z^2)]$ для первого вида F и $\lambda(z) = -\gamma^2 z^2 - \frac{r_0}{b-a}(b\exp[-i\alpha_1 z - \sigma_1^2 z^2] - a\exp[-i\alpha_2 z - \sigma_2^2 z^2])$ для второго. Изучается критический случай, когда для некоторого $z_0 > 0$ выполнены условия $\lambda(z_0) = 0$ $\lambda(z) < 0$ при $z \geqslant 0$ и $z \neq z_0$.

Для обоих вариантов функции F квазинормальные формы могут быть представлены в виде параболической краевой задачи

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}\lambda''(z_0)\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - i\theta\lambda''(z_0)\frac{\partial \xi}{\partial y} + (\frac{1}{2}\theta^2\lambda''(z_0) + r_1\gamma^2 z_0^2)\xi - R|\xi|^2\xi \tag{52}$$

с периодическими краевыми условиями

$$\xi(\tau, x+2\pi) \equiv \xi(\tau, x). \tag{53}$$

Теорема 29. *Пусть при* $\Theta = \Theta_0$ *краевая задача* (52), (53) *имеет периодическое решение* $\xi(\tau,x)$. *Тогда* (51) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^2)$ *равномерно по* $t \geqslant 0$ *и* $x \in [0, 2\pi]$ *решение*

$$N(t,x,\varepsilon) = 1 + \varepsilon\left[\xi_0(\tau,x)\exp(ix(\varepsilon^{-1}z_0 + \Theta_0)) + \overline{\xi}_0(\tau,x)\exp(-ix(\varepsilon^{-1}z_0 + \Theta_0))\right]$$

при ε *таких, что* $\Theta(\varepsilon) = \Theta_0$.

В **§5.5** рассмотрено существенно более сложное логистическое уравнение с двумерной пространственной областью определения

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN\left[1 - \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(p,q)N(t,x+p,y+q)dp\,dq\right] + d\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right), \tag{54}$$

с периодическими краевыми условиями по каждой пространственной переменной

$$N(t,x+2\pi,y) \equiv N(t,x,y+2\pi) \equiv N(t,x,y). \tag{55}$$

Поставим задачу исследовать локальную динамику в окрестности состояния равновесия $N \equiv 1$. Мы остановимся на рассмотрении только принципиально новых особенностей, обусловленных именно двумерностью области определения. Такие существенные особенности связаны со специфичным поведением корней характеристического уравнения

$$\lambda = -r\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(p,q)\exp(imp+inq)dp\,dq - d(m^2+n^2), \quad m,n \in \mathbb{Z}. \tag{56}$$

Для центральносимметричной функции

$$F(x,y) = \frac{1}{b-a}\left\{\frac{b}{(4\pi\sigma_1^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{4\varepsilon\sigma_1^2}\right] - \frac{a}{(4\pi\sigma_2^2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\exp\left[-\frac{(x^2+y^2)}{4\varepsilon\sigma_2^2}\right]\right\}$$

в качестве квазинормальной формы в близком к критическому случае получаем систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial\xi_\varphi}{\partial\tau} = -\frac{1}{2}\lambda''(z_0)z_0^2\Big[&\cos^2\varphi\frac{\partial^2\xi_\varphi}{\partial x^2} + \sin 2\varphi\frac{\partial^2\xi_\varphi}{\partial x\partial y} + \sin^2\varphi\frac{\partial^2\xi_\varphi}{\partial y^2} + \\ &+ 2i\left(\Theta_{1\varphi}\cos\varphi + \Theta_{2\varphi}\sin\varphi\right)\left(\cos\varphi\frac{\partial\xi_\varphi}{\partial x} + \sin\varphi\frac{\partial\xi_\varphi}{\partial y}\right) - \\ &- \left(\Theta_{1\varphi}\cos\varphi + \Theta_{2\varphi}\sin\varphi\right)^2\xi_\varphi\Big] - \frac{r_1}{r_0}d_0z_0^2\xi_\varphi + 2d_0z_0^2\xi_{\varphi+\frac{\pi}{3}}\xi_{\varphi-\frac{\pi}{3}},\end{aligned} \tag{57}$$

$$\xi_\varphi(\tau,x+2\pi,y) \equiv \xi_\varphi(\tau,x,y+2\pi) \equiv \xi_\varphi(\tau,x,y). \tag{58}$$

Здесь $\varphi \in [0,2\pi)$ – это произвольный параметр.

Теорема 30. *Пусть краевая задача* (57), (58) *для некоторых* φ, $\Theta_{1\varphi}$ *и* $\Theta_{2\varphi}$ *имеет периодическое по* τ *решение* $\xi_{\varphi+k\frac{\pi}{3}}(\tau,x,y)$, $(k = 0,1,\ldots 5)$. *Тогда существует такая периодическая функция* $N_2(t,x,y,\varepsilon)$, *что краевая задача* (54), (55) *имеет асимптотическое (при* $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$) *по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^{5/2})$ *равномерно по* $t \geqslant 0$, $x,y \in [0,2\pi]$ *решение*

$$N = 1 + \varepsilon_n\sum_{k=0}^{5}\exp[i(m_{\varepsilon_n}(\varphi+k\frac{\pi}{3})x + n_{\varepsilon_n}(\varphi+k\frac{\pi}{3})y)]\xi_{\varphi+k\frac{\pi}{3}}(\varepsilon_n t,x,y) + \varepsilon^2 N_2.$$

Для многих математических моделей базовым является логистическое уравнение с запаздыванием (так называемое уравнение Хатчинсона). В **§5.6** изучается динамика соответствующей системы с пространственно-распределенным насыщением

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \varepsilon d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + rN\left[1 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)N(t-h, x+s)ds\right], \tag{59}$$

где $d > 0$ и выполнены периодические краевые условия. Здесь запаздывание h предполагается фиксированной положительной константой.

Мы рассмотрим два вида функции $F(x)$, каждый из которых имеет определенный биологический смысл. В первом случае функция $F(x)$ будет определяться формулой

$$F(x) = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma^2 x^2}, \quad \sigma > 0,$$

а во втором — формулой

$$F(x) = \frac{\alpha\sigma_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\sigma_0^2 x^2} + \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\pi}}\left(\sigma_1 e^{-\sigma_1^2(x-\beta_1)^2} + \sigma_2 e^{-\sigma_2^2(x-\beta_2)^2}\right).$$

Здесь $0 < \alpha < 1$, $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 > 0$, β_1 и β_2 — любые.

Основное предположение заключается в выполнении условий

$$\delta = \varepsilon d, \quad \sigma = \varepsilon^{-1} a, \quad \sigma_j = \varepsilon^{-1} a_j, \quad \beta_j = \mu b_j, \quad \text{где} \quad 0 < \varepsilon, \mu \ll 1.$$

Тем самым предполагается, что коэффициент диффузии является малым параметром, а значения $F(x)$ сосредоточены, в основном, в малой окрестности точки $x = 0$.

Когда F задается первым способом, критические случаи возникают при $rh = \frac{\pi}{2}$. Пусть

$$r = r_0 + \varepsilon^p r_1, \quad h = h_0 + \varepsilon^p h_1, \quad 0 < p \leqslant 2.$$

Тогда получаем в качестве квазинормальной формы семейство уравнений типа Гинзбурга-Ландау

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(1 + \frac{\pi}{2}i) = z^2(d^2 + \frac{r_0}{4a^2}i)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r_0\frac{\pi h_1}{2h_0} + r_1 i)u + \frac{r_0(1-3i)}{5}u|u|^2,$$
$$u(\tau, x) \equiv u(\tau, x + 2\pi). \tag{60}$$

Основной результат состоит в следующем.

Теорема 31. *Каждому периодическому по τ решению $u(\tau, y)$ при некотором z задачи* (60) *отвечает асимптотическое по невязке с точностью до $O(\varepsilon^{3p/2})$ равномерно по $t \geqslant 0$, $x \in [0, 2\pi]$ решение* (59) *вида*

$$N(t,x) = 1 + \varepsilon^{p/2}\left(u(\varepsilon^p t, y)\exp(i\frac{\pi}{2h_0}t) + \varepsilon\overline{u}(\varepsilon^p t, y)\exp(-i\frac{\pi}{2h_0}t)\right) + \\ + \varepsilon^p\left(\frac{2-i}{5}\exp(i\frac{\pi}{h_0}t)u^2(\varepsilon^p t, y) + \frac{2+i}{5}\exp(-i\frac{\pi}{h_0}t)\overline{u}^2(\varepsilon^p t, y)\right),$$

где обозначено $y = (\frac{z}{\varepsilon^{1-p/2-1}} + \theta_z)x$.

Если F задается вторым способом, то тогда возможно дополнительное вырождение, в котором задача нулевого приближения для решений (59) имеет вид системы двух комплексных параболических уравнений.

В **§5.7** изучим систему двух логистических уравнений с запаздыванием и с сильной пространственно-распределенной связью

$$\frac{\partial u}{\partial t} = r[1 - u(t-T,x)]u + K\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)v(t,x+s)ds - u\right),$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = r[1 - v(t-T,x)]v + K\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t,x+s)ds - v\right)$$

с периодическими краевыми условиями для каждой неизвестной u и v

$$u(t, x+2\pi) \equiv u(t,x), \quad v(t,x+2\pi) \equiv v(t,x).$$

Параметр K предполагается большим. Результаты этого параграфа во многом схожи с результатами §5.3 с той лишь разницей, что теперь квазинормальные формы содержат запаздывание.

Последний параграф **§5.8** главы 5 посвящен вопросу о поведении решений с начальными условиями из достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = d\varepsilon^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(s)u(t-T,x+s)\,ds\right) \qquad (d>0),$$
$$u(t,x+2\pi) \equiv u(t,x). \quad (61)$$

Главным отличием от предыдущих задач тут является то, что время запаздывания является достаточно большим.

Функция $F(x)$ задается формулой $F(x) = \sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\exp(-\varkappa(x+h)^2)$. Основные предположения состоят в том, что величины T и $\varkappa$ являются достаточно большими, т.е. для некоторой положительной постоянной $\varkappa_0$ имеем

$$T = \varepsilon^{-1}, \quad \varkappa = \varkappa_0\varepsilon^{-2}, \quad a = -\big(1+\varepsilon^{2\alpha}a_1\big), \quad h = \varepsilon^{\gamma}h_1, \quad \text{и} \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Характеристическое уравнение для линеаризованной в нуле краевой задачи (61) имеет вид

$$\varepsilon\lambda_k + 1 = -\big(1 + \varepsilon^{2\alpha} a_1\big) \exp\big(-i\varepsilon^{\gamma} h_1 k - \lambda_k - \varkappa_0 \varepsilon^2 k^2\big) - d\varepsilon^2 k^2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При каждом k существует бесконечное количество корней этого уравнения λ_{kn}, действительная часть которых стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом реализуется критический случай бесконечной размерности. Исследование локальной динамики (61)при малых ε существенно зависит от соотношения между параметрами α и γ. Основная часть случаев является обобщением полученных выше результатов, а в последней реализуется некоторый новый механизм, специальным образом синтезирующий временную и пространственную переменные. В нем квазинормальная форма является параболическим уравнением, содержащим две произвольные постоянные ω и z:

$$\frac{\partial\xi}{\partial\tau} = \left(\frac{1}{2}\omega^2 + (d + \varkappa_0)z^2\right)\frac{\partial^2\xi}{\partial r^2} + a_1\xi - (b^2 + c)\xi^3, \quad \xi(\tau, r+1) \equiv -\xi(\tau, r), \tag{62}$$

Параметр z отвечает за «пространственную» составляющую решения, а ω за «временную». Справедлива следующая теорема.

Теорема 32. *Пусть система* (62) *имеет при* $z = z_0$, $\omega = \omega_0$ *периодическое решение* $\xi(\tau, r)$. *Тогда задача* (61) *имеет асимптотическое по невязке с точностью до* $O(\varepsilon^{2\alpha})$ *равномерно по всем* $t \geqslant 0$, $x \in [0, 2\pi]$ *решение вида*

$$u = \varepsilon^{\alpha}\xi\big(\varepsilon^{2\alpha}t, (\varepsilon^{\alpha-1}z_0 + \Theta)x + \big(\omega_0\varepsilon^{\alpha-1} + \Theta_0 + \varepsilon^{\alpha}\omega_0\big)t\big).$$

В **заключении** приведены общие выводы и возможные направления дальнейших исследований.

Основные публикации по теме диссертации

1. Кащенко, И. С. Асимптотический анализ поведения решений уравнения с большим запаздыванием / И. С. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 421, № 5. — С. 586–589.

2. Кащенко, И. С. Локальная динамика уравнений с большим запаздыванием / И. С. Кащенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 12. — С. 2141–2150.

3. Кащенко, И. С. Асимптотика сложных пространственно-временных структур в системах с большим запаздыванием / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Известия вузов. Прикладная нелинайная динамика. — 2008. — Т. 16, № 4. — С. 137–146.

4. Кащенко, И. С. Мультистабильность в нелинейных параболических системах с малой диффузией / И. С. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2010. — Т. 435, № 2. — С. 164–167.

5. Кащенко, И. С. Нормализация в системе с двумя близкими большими запаздываниями / И. С. Кащенко // Нелинейная динамика. — 2010. — Т. 6, № 1. — С. 169–180.

6. Кащенко, И. С. Быстро осциллирующие пространственно-неоднородные структуры в когерентных нелинейно-оптических системах / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2010. — Т. 435, № 1. — С. 14–17.

7. Кащенко, И. С. Динамика уравнения с большим пространственно распределенным управлением / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 438, № 1. — С. 30–34.

8. Кащенко, И. С. Динамика уравнения с большим коэффициентом запаздывающего управления / И. С. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 437, № 6. — С. 743–747.

9. Kashchenko, I. Local dynamics of spatially distributed Hutchinson equation / I. Kashchenko // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2011. — Vol. 16, no. 9. — P. 3520–3524.

10. Grigorieva, E. V. Dynamics of Lang-Kobayashi equations with large control coefficient / E. V. Grigorieva, I. S. Kashchenko, S. A. Kaschenko // Nonlinear phenomena in complex systems. — 2012. — Vol. 15, no. 4. — P. 403–409.

11. Кащенко, И. С. Асимптотическое исследование корпоративной динамики систем уравнений, связанных через запаздывающее управление / И. С. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2012. — Т. 443, № 1. — С. 9–13.

12. Кащенко, И. С. Квазинормальные формы двухкомпонентных сингулярно возмущенных систем / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2012. — Т. 447, № 4. — С. 376–381.

13. Кащенко, И. Корпоративная динамика сильно связанных распределенных систем / И. Кащенко, С. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2012. — Т. 442, № 5. — С. 600–604.

14. Кащенко, И. С. Квазинормальные формы для параболических систем с сильной нелинейностью и малой диффузией / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — Т. 52, № 8. — С. 1482–1491.

15. Kashchenko, I. S. Spatial properties of high-mode bifurcations of distributed logistic equations / I. S. Kashchenko // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. — Vol. 47, no. 7. — P. 516–525.

16. Kashchenko, I. Normalization of a system with two large delays / I. Kashchenko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2014. — Vol. 24, no. 8. — P. 1440021.

17. Кащенко, И. С. Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием и распределенным отклонением пространственной переменной / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Сибирский математический журнал. — 2014. — Т. 55, № 2. — С. 315–323.

18. Кащенко, И. С. Динамика логистического уравнения с запаздыванием и с большим коэффициентом пространственно распределенного управления / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2014. — Т. 54, № 5. — С. 766–778.

19. Кащенко, И. С. Локальная динамика уравнения с распределенным запаздыванием / И. С. Кащенко // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 1. — С. 17–26.

20. Grigorieva, E. V. Multistability in a laser model with large delay / E. V. Grigorieva, I. S. Kaschenko, S. A. Kaschenko // Automatic Control and Computer Sciences. — 2014. — Vol. 48, no. 7. — P. 564–570.

21. Kashchenko, I. Local dynamics of the two-component singular perturbed systems of parabolic type / I. Kashchenko, S. Kaschenko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2015. — Vol. 25, no. 11. — P. 1550142.

22. Кащенко, И. С. Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием, зависящим от искомой функции / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 464, № 5. — С. 521–524.

23. Кащенко, И. С. Динамика сильно связанных пространственно-распределенных логистических уравнений с запаздыванием / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2015. — Т. 55, № 4. — С. 610–620.

24. Kashchenko, I. Normal and quasinormal forms for systems of difference and differential-difference equations / I. Kashchenko, S. Kaschenko // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2016. — Vol. 38. — P. 243–256.

25. Kashchenko, I. Dynamics of the Kuramoto equation with spatially distributed control / I. Kashchenko, S. Kaschenko // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2016. — Vol. 34. — P. 123–129.

26. Кащенко, И. С. Локальная динамика уравнения с двумя большими различными по порядку запаздываниями / И. С. Кащенко // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 470, № 6. — С. 632–636.

27. Кащенко, И. С. Локальная динамика двухкомпонентных сингулярно возмущённых параболических систем / И. С. Кащенко, С. А. Кащенко // Труды Московского математического общества. — 2016. — Т. 77, № 1. — С. 133–148.

28. Кащенко, И. С. Исследование динамики уравнения с двумя большими разнопорядковыми запаздываниями / И. С. Кащенко // Вестник Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". — 2016. — Т. 5, № 1. — С. 32–37.

29. Кащенко, И. С. Локальная динамика дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием у первой производной / И. С. Кащенко // Математические заметки. — 2017. — Т. 101, № 2. — С. 318–320.