

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

На правах рукописи

Рачинская Мария Анатольевна

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ И
ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКАМИ
НЕОДНОРОДНЫХ ТРЕБОВАНИЙ**

Специальность 01.01.09 —

«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Федоткин Михаил Андреевич

Нижний Новгород — 2018

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Построение и исследование вероятностной модели	
потоков неоднородных требований	17
1.1 Формирование группы неоднородных требований	17
1.2 Распределение числа неоднородных требований в пачке при $N = 3$	24
1.3 Аппроксимация потока неоднородных требований	
неординарным пуассоновским потоком	27
1.4 Проверка адекватности модели неординарного пуассоновского	
потока	34
Глава 2. Циклическое управление потоками неоднородных	
требований	38
2.1 Описание класса систем обслуживания требований и	
управления потоками	38
2.2 Построение математической модели системы	41
2.3 Изучение одномерных распределений цепи Маркова (2.8) и ее	
пространства состояний	46
2.4 Критерий существования стационарного режима	55
Глава 3. Управление неоднородными потоками алгоритмом с	
пороговым приоритетом и продлением	61
3.1 Описание входных потоков и управляющего алгоритма	61
3.2 Математическая модель системы	63
3.3 Исследование рекуррентных зависимостей и пространства	
состояний для цепи Маркова (3.6)	66
3.4 Исследование условий существования стационарного режима . .	95
Глава 4. Исследование системы управления потоками с	
помощью имитационной модели	115
4.1 Задача квазиоптимального управления	115

4.2	Описание имитационной модели	117
4.3	Квазистационарный режим функционирования системы	120
4.4	Квазиоптимальное циклическое управления потоками	125
4.5	Квазиоптимальное управление с пороговым приоритетом	127
	Заключение	132
	Список литературы	134
	Приложение А. Эргодическое распределение числа требований в пачке для произвольного N	150
	Приложение Б. Исследование одномерных распределений неординарного пуассоновского потока	152
	Б.1 Доказательство леммы 2	152
	Б.2 Расчет значений вероятностей (1.19)	153
	Приложение В. Доказательство леммы 4	156
	Приложение Г. Доказательство леммы 6	159
	Приложение Д. Доказательство леммы 7	162
	Приложение Е. Доказательство леммы 9	170
	Приложение Ж. Доказательство леммы 10	175
	Приложение И. Доказательство леммы 11	180
	Приложение К. Доказательство леммы 12	196
	Приложение Л. Доказательство леммы 13	201
	Приложение М. Динамика основных характеристик системы в квазистационарном режиме	213
	Приложение Н. Применение алгоритма с обратной связью для однородных входных потоков	216

Введение

Актуальность темы исследования. Теория массового обслуживания (теория очередей) занимается построением и анализом моделей для сложных систем, осуществляющих большое количество однотипных операций по обслуживанию различного рода требований (заявок, клиентов). Первые работы в этой области были мотивированы решением прикладных задач, связанных с организацией деятельности телефонных станций в начале XX века. Задачи, поставленные и рассмотренные Ф.В. Йоханнсеном [1] и А.К. Эрлангом [2; 3], заложили основу так называемой классической теории очередей. Дальнейшее развитие этой отрасли науки связано с именами таких ученых как Ф. Поллачек, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин [4], Б.В. Гнеденко [5], И.Н. Коваленко, К. Пальм [6], Д.Дж. Кендалл [7], Л. Такач [8], Д.Р. Кокс, У.Л. Смит [9], Т.Л. Сати [10], Л. Клейнрок [11], С.Н. Бернштейн, Н.П. Бусленко [12], А.А. Боровков [13], В.С. Королюк, Г.П. Башарин [14], Г.П. Климов [15], Ю.В. Прохоров, А.Д. Соловьев, Б.А. Севастьянов [16], Н.Т.Дж. Бейли [17] и др. В их фундаментальных и прикладных работах закладываются основные понятия, формируются принципы и методы решения задач теории массового обслуживания.

На протяжении всего XX века происходит бурный рост сферы услуг, а вместе с ней развивается и классическая теория. Важным стимулом такого развития служит огромное число задач, к которым применимы результаты теории массового обслуживания. Так, начиная с области телефонии, результаты теории очередей находят свое применение при исследовании систем управления наземным, водным и воздушным транспортом [18–22], систем организации медицинских учреждений [23–25], биологических систем [26], телекоммуникационных и компьютерных систем [27; 28], процессов производства сложных объектов [29], в финансовой сфере [30] и т. д.

Напомним, что одной из первых задач, поставленных перед теорией массового обслуживания, являлась задача определения минимального числа телефонных каналов, обеспечивающих удовлетворительное обслуживание телефонных абонентов. Подобные оптимизационные цели существуют у большинства прикладных исследований в рамках теории очередей. Так, в некоторой идеализации система массового обслуживания есть система, которая, находясь под действием различных случайных, неопределенных, контролируемых факторов,

осуществляет операции по обслуживанию требований. При этом возможно определить различные критерии эффективности осуществления операции: среднее время пребывания требования в системе, вероятность простоя обслуживающих приборов, вероятность отказа, среднее количество занятых приборов, средняя длина очереди, коэффициент загрузки системы, производительность системы и т. д. Целью исследования таких систем является определение способов достижения наибольшей прибыли. В зависимости от выбранного критерия эффективности по-разному понимается и наибольшая прибыль, наибольшая эффективность работы системы. В связи с такой постановкой задачи теория массового обслуживания неразрывно связана с отраслью исследования операций. Такая связь наблюдается, например, в отечественных и зарубежных работах [24; 25; 31]. Заметим, что задачи теории очередей в этом случае понимаются как задачи организационно-управленческого характера, направленные на наиболее оптимальное использование имеющихся ресурсов.

Следует также обратить внимание на связь теории очередей и математической кибернетики. В работе [32] авторы выделяют понятие управляющей системы как одно из ключевых понятий математической кибернетики. Кибернетика представляется как «наука об общих закономерностях строения управляющих систем и течения процессов управления». При изучении конкретных управляющих систем кибернетика взаимодействует со многими другими областями знаний. Как отмечено в работе [32], к таким областям относится и теория массового обслуживания, поскольку система обслуживания может рассматриваться как управляющая система. В связи с этим привлечение аппарата и результатов математической кибернетики, исследования операций и других дисциплин представляется актуальным и позволяет получать новые результаты.

Оптимизационная постановка задачи всегда требует от исследователя возможности управления системой. В связи с этим, начиная со второй половины XX века, появляются работы, посвященные теории управляемых систем обслуживания. Понятие управляемой системы массового обслуживания было введено О.И. Бронштейном и В.В. Рыковым в работе [33]. Так, было отмечено, что в управляемых системах массового обслуживания можно выделить элементы, допускающие применение управляющих воздействий. Каждый подобный элемент характеризуется набором параметров. В свою очередь, выбор значений управляющих параметров является стратегией управления. Кроме того, изучению

управляемых систем обслуживания посвящены работы Н.М. Воробьева [34], Б.Г. Питтеля [35], А.Ф. Терпугова, В.В. Рыкова [36] и др.

В классическом варианте система массового обслуживания содержит четыре обязательных элемента: входной поток, дисциплина образования очереди, закон обслуживания заявок, структура обслуживающего устройства. Каждый из этих основных элементов может подвергаться управляющим воздействиям. Кроме того, каждый из элементов может обладать переменной структурой, что выводит исследователя из рамок классической теории очередей. В связи с этим, отметим здесь несколько направлений исследований, связанных с тематикой диссертационной работы.

Одним из важных направлений является изучение входных потоков системы. В первых работах по теории массового обслуживания самой распространенной моделью входного потока служил простейший поток, или поток Пуассона. Действительно, многие реальные потоки требований обладают свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия. Важным моментом в понимании распространенности модели пуассоновского потока являются предельные теоремы Пуассона для серий независимых испытаний с малой вероятностью успеха. Напомним, что в таком случае пуассоновское распределение возникает в качестве предельного для биномиального распределения при увеличении количества независимых испытаний [37]. Так, реальные потоки требований формируются, как правило, из большого числа независимых требований. Подобные рассуждения применимы, например, к транспортным потокам на крупных магистралях, потокам клиентов в крупных супермаркетах, потокам пациентов в поликлинику в период отсутствия массовых заболеваний, потокам отказов элементов сложных технических устройств и другим потокам различной физической природы. В работах [38; 39] изучается пространственная и временная характеристики транспортного потока и дается обоснование пуассоновской модели для такого потока. Однако довольно часто реальные потоки составлены из неоднородных, зависимых требований. Так, например, в работах [40; 41] предлагается строить нелокальное описание для таких потоков. Действительно, часто влияние внешних условий на формирование потока требований приводит к тому, что проявляется неоднородность требований. При исследовании различных механизмов образования потока заявок возникают такие модели, как поток Гнеденко–Коваленко [42], поток Бартлетта [43]. Актуальность диссертационного исследования в этом направлении обусловлена тем, что в работе предлагается

механизм образования пачки требований ограниченной длины и на его основе строится модель реальных потоков в виде неординарных пуассоновских потоков. Исследованию систем массового обслуживания с неординарными потоками, или потоками пачек, посвящены также работы [44–47].

Часто входные потоки системы являются управляемым элементом системы массового обслуживания. Так, например, можно отметить ряд работ, посвященных системам с управляемым входным потоком [48–50]. В последние десятилетия особую роль играют исследования потоков, управляемых марковскими процессами: МАР-потоки (Markovian Arrival Process) и их различные вариации. В общем случае процесс поступления заявок контролируется процессом, который можно моделировать с помощью процесса Маркова. К таким управляющим процессам часто относят влияние внешней среды. Так, при смене состояния внешней среды может существенно поменяться структура или интенсивность потока. Впервые понятие марковского потока было предложено М. Ньютсом [51] и уточнено Д. Лукантони [52; 53]. Дальнейшее распространение марковские модели получили благодаря исследованиям зарубежных и отечественных авторов [54–59]. Влияние внешней случайной среды на процесс формирования потока требований приводит также к дважды стохастическим моделям [60], при которых параметры входного потока меняются со временем. Такие потоки изучались, например, в работах [61–63]. В литературе рассмотрены и другие модели входных потоков: поток авторегрессионного типа [64], эрланговский поток [65], нестационарный поток [66] и т. д.

Следующее направление исследований связано с системами массового обслуживания с переменной структурой обслуживающего устройства. Пионерские работы в этой области принадлежат М.А. Федоткину и М.Г. Теплицкому [67; 68]. В работах [69; 70] методами теории массового обслуживания и математической кибернетики решалась задача управления потоками машин на перекрестке. В качестве обслуживающего устройства рассматривался перекресток с установленным автоматом-светофором. При этом светофор может находиться в одном из множества состояний, меняющихся согласно некоторому закону. Каждое состояние автомата характеризуется определенным режимом обслуживания входных потоков. Были найдены оптимальные значения для управляющих параметров светофора. Далее были рассмотрены системы с различными законами смены состояний обслуживающего устройства: например, в работах [71–73] изучался циклический алгоритм для различных входных потоков, в работе [74] – ал-

горитм с петлей, в [75] – алгоритм с упреждением, в работах [76–78] – различные иные адаптивные алгоритмы. Заметим, что подобные модели дают адекватное математическое описание многих реальных сложных управляемых процессов обслуживания, учитывающих воздействие случайных факторов.

Здесь же следует отметить ряд работ, изучающих алгоритмическое управление потоками в рамках исследования операций. Наиболее наглядным приложением таких моделей являются по-прежнему системы управления дорожным транспортом. Например, в работе [79] рассматривается линейный управляющий алгоритм, определяются условия стабильности управления потоками, изучаются условия, при которых минимизируются средние задержки в обслуживании. В работе [80] изучается адаптивный алгоритм, использующий информацию о длинах очередей. При построении модели используется z -преобразование, определяются условия стабильности. В работе [81] рассматривается совместное использование двух управляющих алгоритмов (алгоритм с обратной связью и алгоритм с упреждением), обосновывается эффективность такого подхода. Различные адаптивные алгоритмы и их комбинации в применении к управлению потоками данных рассматриваются в работах [82–85]. Конечной прикладной целью исследований является определение оптимальной стратегии управления системой. Для этого в [84], например, решается нелинейная оптимизационная задача с применением условий Куна-Таккера. Работа [86] содержит исследование системы обслуживания потоков разноклассовых клиентов в отделении неотложной помощи. Управление потоками в данной работе осуществляется на основе обратной связи по количеству заявок в очереди ожидания и времени пребывания в системе заявок, находящихся на обслуживании. Устанавливаются условия асимптотической оптимальности с использованием методов компьютерной имитации. Отметим, что многие подобные исследования существенно опираются на физические характеристики и особенности системы. Если постановка задачи формулируется при изучении реальной физической системы, то зачастую результаты исследований сложно перенести на задачи другой физической природы. В этом смысле диссертационная работа является актуальной, поскольку предлагает рассматривать управляющие системы и алгоритмы, абстрагируясь от физической постановки задачи.

Следующее направление связано с исследованием предельного поведения систем массового обслуживания и условий ее стационарности. Здесь следует отметить работы таких авторов, как А.А. Боровков [87; 88], Л.Г. Афанасьев

ва [89; 90], Е.В. Булинская, В. Уитт [91; 92], Дж. Дэвис [66] и др. Многие из подобных исследований направлены на асимптотический анализ операционных характеристик системы (время ожидания, размер очереди, число требований в системе и т. п.). Кроме того, как теоретический, так и прикладной интерес представляют работы, в которых определяются условия существования стационарного режима в системах обслуживания. В качестве примера таких работ можно привести исследования [93–96]. Частой методологией отыскания условий являются интегральные преобразования функций, характеризующих систему. Также используются известные результаты теории управления и теории цепей Маркова, например, критерий устойчивости Найквиста-Михайлова [94], теорема эргодичности Мустафы [97] и др. Нередко результатом подобных исследований являются условия существования стационарного режима, которые сложно проверить для реальных систем. Отметим, что свойство стационарности системы сопряжено с понятием ее управляемости. Исследование стационарного режима является важным этапом при решении задачи оптимального управления системой. В связи с этим желательным является получение условий существования стационарного режима, зависящих от управляющих параметров. В этом отношении следует обратить внимание на итеративно-мажорантный метод, разработанный М.А. Федоткиным [98; 99]. Данный метод позволяет получать легко проверяемые условия существования стационарного режима для управляющих систем конфликтного обслуживания. Например, такая методология применялась в [100] при исследовании системы с приоритетным направлением, [101] – при изучении системы, находящейся под влиянием внешней среды, [102] – при исследовании системы, использующей информацию о количестве заявок, интервалах поступления и очередности подхода заявок и др. В диссертационной работе указанный метод применяется для отыскания условий существования стационарного режима для двух новых систем управления конфликтными потоками.

Также следует отметить направление исследований, связанное с приоритетными системами. Системы с абсолютным, относительным или иным приоритетом в разное время изучались И.М. Духовным [103], О.И. Бронштейном [104], А.В. Печинкиным [45], П.П. Бочаровым [55], В.Г. Ушаковым [64; 65], а также в работах [105–108] и др. Системы, в которых входящие требования разнородны и могут быть разделены на классы, получают широкое распространение. В частности, это объясняется тем, что приоритетные системы служат математически-

ми моделями для информационно-вычислительных систем [109] и современных мультисерверных коммуникационных [110] и компьютерных [111] сетей. В диссертационной работе рассматривается как система с однородными входными потоками, так и система, в которой потоки различаются по своему приоритету. Во втором случае для управления потоками необходим адаптивный алгоритм. Кроме того, характеристика эффективности работы системы при решении оптимизационной задачи также учитывает различный приоритет заявок.

Как было указано выше, частой целью изучения систем обслуживания, выполняющих также операции по управлению, является поиск оптимальной стратегии управления. Так, оптимизационные задачи ставятся и решаются, например, в работах [49; 82; 84; 86; 112–116]. Постановка задачи в первых классических работах по теории очередей сводилась к поиску оптимального числа обслуживающих приборов, минимизирующего среднее время ожидания клиентов. Решение при этом находилось аналитически. Со временем системы, моделируемые и изучаемые методами теории массового обслуживания и исследования операций, значительно усложнялись. В связи с этим возникает необходимость в новых критериях оценки качества функционирования системы, а также в новых методах исследования. Обзор некоторых современных методов оценки производительности системы приведен, например, в [115]. Одним из самых распространенных методов при решении подобных оптимизационных задач на текущий момент является метод имитационного моделирования [117]. Компьютерные имитационные модели позволяют учитывать достаточно большое число факторов, которые с трудом могут быть учтены при аналитическом исследовании в силу его возрастающей сложности. Кроме того, преимущество имитационных моделей связано с возможностью исследовать различные сценарии работы управляемых систем, сравнительно легко адаптировать модели к изменениям в физической постановке задачи. С развитием параллельного программирования и увеличением вычислительных способностей компьютеров имеется возможность получать достоверные оценки качества и решать оптимизационные задачи в более короткие сроки. В диссертационной работе аналитические методы применяются наряду с численным исследованием путем имитационного моделирования. Такое объединение методологий представляется актуальным и увеличивает достоверность результатов.

Цели и задачи работы. Целями данной работы являются: 1) разработка и исследование математической модели потоков неоднородных требований;

2) разработка и исследование математических и имитационных моделей систем, осуществляющих операции по управлению потоками и обслуживанию их неоднородных требований.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

1. Выявление принципов образования потоков неоднородных зависимых требований, построение математической модели группы (пачки) зависимых требований, построение, исследование и обоснование корректности математической модели потока пачек.
2. Построение и изучение математической модели системы управления несколькими потоками неоднородных требований с помощью циклического алгоритма, получение условий существования в системе стационарного режима.
3. Построение математической модели системы управления несколькими потоками неоднородных требований с помощью адаптивного алгоритма с пороговым приоритетом и возможностью продления обслуживания, исследование свойств модели, получение условий существования в системе стационарного режима.
4. Разработка имитационных моделей указанных выше систем управления потоками, определение момента достижения системами квазистационарного режима, поиск квазиоптимальных значений управляющих параметров системы.

Научная новизна. Основные результаты являются новыми и состоят в следующем:

1. Представлена модель потока зависимых неоднородных требований в виде неординарного пуассоновского потока с ограниченным числом требований в пачке, обоснована корректность модели.
2. Построена модель системы циклического управления потоками неоднородных требований в виде многомерной цепи Маркова, получен критерий существования ее стационарного распределения.
3. Решена задача построения математической модели системы адаптивного управления разнородными потоками в классе алгоритмов с пороговым приоритетом и возможностью продления обслуживания, решена проблема выходного потока, исследованы эргодические свойства такой системы, получены необходимые и достаточные условия существования в ней стационарного режима.

4. Разработан алгоритм определения момента окончания квазипереходных процессов в указанных системах.
5. Проведено оригинальное исследование по поиску квазиоптимальной стратегии адаптивного управления потоками.

Теоретическая и практическая значимость. Научная ценность данной работы состоит в расширении класса алгоритмов управления конфликтными потоками. Так, был изучен адаптивный алгоритм с пороговым приоритетом и возможностью продления обслуживания. Проведенные исследования увеличивают базу для дальнейшего сравнения эффективности различных алгоритмов управления конфликтными потоками требований. Практическая значимость работы обусловлена возможностью применения полученных результатов к реальным управляющим системам обслуживания. В частности, разработанные модели являются адекватными для систем управления транспортом, систем обработки запросов клиентов интернет-магазинов, систем обработки почтовых отправок, телекоммуникационных систем, систем обработки и сборки деталей на промышленных предприятиях и т. п.

Полученные в работе результаты используются в учебном процессе при чтении специальных курсов для студентов четвертого курса Института информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Н.И. Лобачевского, специализирующихся на кафедре программной инженерии.

Методология и методы исследования. Методология диссертационной работы базируется на представлении стохастических систем массового обслуживания в виде кибернетических управляющих систем. Применение принципов кибернетического подхода позволяет выделить в изучаемых системах ключевые блоки, структурировать информацию о законах функционирования блоков и основных связях между ними. Указанная методология лежит в основе построения математических и имитационных моделей. В работе используется аппарат теории вероятностей, теории массового обслуживания, исследования операций, теории управляемых марковских процессов, теории функций комплексного переменного. Также применяются методы математической статистики, теории систем линейных дифференциальных уравнений и теории систем линейных алгебраических уравнений.

При разработке имитационных моделей использовался язык программирования C++ и среда разработки Microsoft Visual Studio. Для визуализации

результатов некоторых численных исследований использовался язык программирования R и среда разработки RStudio.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Способ нелокального описания потоков зависимых неоднородных требований в виде неординарных пуассоновских потоков.
2. Методика нахождения условий существования стационарного режима в системах управления потоками неоднородных требований циклическим алгоритмом и алгоритмом с пороговым приоритетом и возможностью продления обслуживания.
3. Метод определения момента достижения управляемой системой обслуживания квазистационарного режима.
4. Алгоритм поиска квазиоптимальной стратегии адаптивного управления неоднородными потоками, основанного на пороговом приоритете и возможности продления обслуживания.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим применением используемого математического аппарата, проведением статистических и численных исследований. Результаты работы находятся в соответствии с результатами, полученными ранее другими авторами при исследовании управляющих систем обслуживания.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах и конференциях:

1. Международный семинар «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2010 (Москва, 2010 г.).
2. Международная научная конференция «Современные вероятностные методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей» (Минск, Республика Беларусь, 2011 г.).
3. XVI Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Н. Новгород, 2011 г.).
4. Международный семинар «Прикладные методы статистического анализа. Имитационное моделирование и статистические выводы» (Новосибирск, 2011 г.).
5. XVII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2014 г.).

6. Международная научная конференция «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения» (Минск, Республика Беларусь, 2015 г.).
7. Межрегиональная научно-практическая конференция, посвященная 180-летию со времени образования органов государственной статистики Нижегородской области «Статистика в современном обществе: ее роль и значение в вопросах государственного управления и общественного развития» (Н. Новгород, 2015 г.).
8. IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 2015 г.).
9. 18-я международная научная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2015 (Москва, 2015 г.).
10. XII Международный семинар имени академика О.Б. Лупанова «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2016 г.).
11. XVIII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 2017 г.).
12. 20-я международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2017 (Москва, 2017 г.).
13. XVI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ-2017 (Казань, 2017 г.).
14. Международная научная конференция «Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и ее приложениях» АВМТВ-2017 (Москва, 2017 г.).

Отдельные результаты, представленные в диссертации, получены в рамках госбюджетной темы № 01201456585 «Математическое моделирование и анализ стохастических эволюционных систем и процессов принятия решений».

Личный вклад автора. В совместных публикациях научному руководителю принадлежит постановка задачи и общее редактирование работ. Все исследования выполнены автором диссертации лично, все полученные результаты принадлежат автору. В работах [118; 119] научному руководителю принадлежит постановка задачи, второму соавтору – результаты, полученные для транспортного потока при высокой плотности машин с быстрым движением,

автору диссертации – результаты, полученные для транспортного потока при относительно небольшой плотности машин с быстрым движением.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 24 работах, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [120–123], 2 — в библиографической базе Scopus [124; 125], 1 — в библиографической базе Web of Science [124], 11 — в библиографической базе РИНЦ [120–124; 126–131], 15 — в тезисах докладов [118; 119; 127; 130–141]. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [142].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двенадцати приложений. Полный объём диссертации составляет 218 страниц, включая 15 рисунков. Список литературы содержит 155 наименований.

Во *введении* приводится обзор научной литературы по изучаемой проблематике, обосновывается актуальность проводимых исследований и дается краткая характеристика работы, содержащая цели, задачи и основные результаты исследований, сведения об апробации результатов, а также теоретическую и практическую значимость работы.

Первая глава посвящена построению и изучению математической модели потока неоднородных требований. Часто под влиянием внешних факторов между требованиями потока образуется зависимость, что приводит к скоплению требований в группы (пачки). На примере транспортного потока в разделе 1.1 представлен механизм образования группы требований. Получена система дифференциальных уравнений, определяющая динамику изменения количества требований в пачке с течением времени. В разделе 1.2 найдено распределение для числа требований в пачке в установившемся режиме в случае, когда пачка может состоять не более, чем из трех требований. В разделе 1.3 произведен переход от модели отдельной пачки к модели потока пачек, описываемого с помощью неординарного пуассоновского потока. Найдены одномерные распределения процесса $\{\eta(t): t \geq 0\}$, где величина $\eta(t)$ считает количество требований, поступивших по потоку за промежуток $[0, t)$. Определены выражения для числовых характеристик величины $\eta(t)$, изучены их экстремальные значения. В разделе 1.4 предложены процедуры и методы анализа данных реальных потоков для обоснования корректности аппроксимации потоков неоднородных требований с помощью неординарных пуассоновских потоков.

Раздел 2.1 второй главы содержит описание класса кибернетических систем, осуществляющих операции по обслуживанию требований и управлению конфликтными потоками. Системы внутри класса различаются двумя составляющими: видом входных потоков и управляющим алгоритмом. Далее вся вторая глава посвящена исследованию системы с входными потоками неоднородных требований и циклическим управляющим алгоритмом. В разделе 2.2 построена математическая модель такой системы в виде управляемой многомерной цепи Маркова. Рекуррентные зависимости для одномерных распределений указанного марковского процесса получены в разделе 2.3. Произведена классификация состояний цепи Маркова. Основным результатом главы является критерий существования в системе стационарного режима в виде соотношений для параметров системы.

Аналогичные исследования проведены в третьей главе для системы адаптивного управления потоками с различными приоритетами и интенсивностями. Рассмотрен алгоритм с пороговым приоритетом и возможностью продления обслуживания. Алгоритм обеспечивает обратную связь по количеству требований высокоприоритетного потока в очереди ожидания начала обслуживания. Описание потоков и управляющего алгоритма приведено в разделе 3.1. Математическая модель системы в виде многомерной однородной цепи Маркова построена в разделе 3.2 и изучена в разделе 3.3. Произведен анализ пространства состояний цепи Маркова, доказано утверждение о существовании предельных распределений. В завершении главы найдены условия существования стационарного режима в системе по отдельным потокам.

В четвертой главе производится численное исследование управляющих систем обслуживания путем имитационного моделирования. Целью исследования является нахождение квазиоптимальной стратегии управления, т. е. таких значений управляющих параметров системы, при которых достигается минимальное значение оценки среднего времени ожидания начала обслуживания произвольным требованием. В разделе 4.2 приведено описание построенных имитационных моделей. В разделе 4.3 предложен метод определения момента достижения системой квазистационарного режима. Также в четвертой главе дано описание алгоритмов определения квазиоптимальных стратегий управления для систем, рассмотренных в главах 2 и 3.

В заключении приведены основные результаты работы и указаны возможные направления развития исследований.

Глава 1. Построение и исследование вероятностной модели потоков неоднородных требований

В главе 1 рассмотрена ситуация, когда под действием внешних факторов проявляется неоднородность требований некоторого потока. В этом случае между соседними заявками образуется зависимость, что приводит к скоплению требований в пачки. На примере потока движущихся автомобилей рассмотрен механизм образования зависимости между требованиями потока. На основе кибернетического подхода Ляпунова–Яблонского и методами теории массового обслуживания построена модель пачки, которая может состоять не более, чем из N требований. Получено эргодическое распределение числа заявок в пачке. В случае $N = 3$ построена модель потока в виде неординарного пуассоновского потока $\{\eta(t) : t \geq 0\}$, где $\eta(t)$ — число заявок, поступивших по потоку за промежуток $[0, t)$. Найдены выражения для одномерных распределений процесса $\{\eta(t) : t \geq 0\}$. Доказано свойство устойчивости неординарного пуассоновского потока относительно операции суммирования. Найдены выражения для основных числовых характеристик величины $\eta(t)$ и исследованы их экстремальные значения. Указан способ статистической проверки адекватности построенной модели для реальных потоков. Получены оценки параметров распределения числа заявок в пачке по результатам наблюдения за некоторым потоком.

1.1 Формирование группы неоднородных требований

Одной из наиболее распространенных моделей потока случайных требований является рекуррентный поток. По определению случайные интервалы между поступлениями требований по такому потоку есть величины независимые и одинаково распределенные. Действительно, часто можно наблюдать, что на поступление отдельной заявки по некоторому потоку, сформированному при естественных условиях, не влияет поступление прочих заявок. Например, рекуррентный поток является адекватной моделью для таких реальных потоков, как поток отказов элементов сложной технической системы, поток покупателей к кассе магазина, поток автомобилей, поступающих на поперечную линию

крупной магистрали, поток вызовов в отделение неотложной помощи, в зубной кабинет и пр. Однако, если предположить для подобных потоков наличие факторов, обуславливающих зависимость между поступлениями требований, то структура и свойства потока меняются. Так, в периоды распространения инфекций или эпидемий заболевание людей, ведущих активную социальную деятельность, необходимо влечет увеличение числа заразившихся. В свою очередь, следствием является появление зависимости между поступлениями пациентов в местную поликлинику. Аналогичным образом, плохие погодные условия или неудовлетворительное состояние дорожного полотна приводят к затрудненности движения автомобилей по магистрали, отсутствию возможности свободного перемещения и обгона и, как следствие, образованию скоплений. В подобных случаях необходимо исследовать и формализовать принципы образования взаимосвязей между соседними заявками с целью построения наиболее близкой, адекватной модели потока требований. Интерпретируя исследования и результаты текущей главы для транспортного потока, изучим один из возможных механизмов образования зависимости между требованиями.

В текущей главе будем рассматривать основное вероятностное пространство $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mathbf{P}_1(\cdot))$. Здесь Ω_1 есть достоверный исход, а через $\omega_1 \in \Omega_1$ обозначим описание некоторого элементарного исхода случайного эксперимента, определяющего процесс движения потока автомобилей по крупной магистрали до пересечения им некоторой поперечной стоп-линии. Множество всех наблюдаемых исходов $A \subset \Omega_1$ этого эксперимента составляет σ -алгебру \mathfrak{F}_1 , на которой задана вероятностная функция $\mathbf{P}_1(A): \mathfrak{F}_1 \rightarrow [0, 1]$. Ради компактности записи далее не будем явно фиксировать символ ω_1 как аргумент каких-либо функций или величин. При этом будем подразумевать, что все случайные события и величины в этой главе рассматриваются на указанном пространстве $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1, \mathbf{P}_1(\cdot))$.

При построении математических моделей в текущем разделе и следующих главах используется кибернетический подход Ляпунова-Яблонского к построению и изучению моделей управляющих систем. Основы данного подхода заложены в работах [32; 143]. Кибернетический подход предполагает соблюдение следующих фундаментальных принципов изучения системы:

1. Принцип дискретности функционирования системы: наблюдения за непрерывно функционирующей системой производится в выделенные дискретные моменты.

2. Принцип нелокального описания строения системы: отказ от полного описания в пользу достаточного для моделирования функционально-статистического описания блоков системы в выделенные моменты.
3. Принцип совместного рассмотрения блочного строения управляющей системы и ее функционирования во времени.

В работах [32; 143] вводится понятие управляющей системы как объекта со следующими составными частями: схема, информация, координаты и функция. Схема системы отражает ее каркасное строение. В схеме выделяется несколько основных (не всегда обязательных) блоков: внешняя среда, входные и выходные полюсы, внешняя и внутренняя память, устройства по переработке информации внешней и внутренней памяти. Информация управляющей системы в некоторый момент характеризуется набором состояний ячеек памяти. Координаты определяют расположение элементов схемы. Функция характеризует поведение системы, описывает тот набор действий, которые управляющая система может совершить при переходе к очередному моменту наблюдения. Выявление и описание указанных частей в некоторой управляющей системе является эффективным подходом к моделированию и исследованию сложных систем. Кибернетический подход применяется в данном разделе для построения модели группы связанных автомобилей в некотором транспортном потоке.

Итак, рассмотрим поток движущихся по магистрали автомобилей до поступления их на некую поперечную стоп-линию. Можно заметить, что под влиянием ухудшающихся погодных условий (гололед, туман и т. д.), при плохом состоянии дорожного покрытия или в случае недостаточности места на магистрали для совершения различных маневров и обгонов начинает проявляться неоднородность автомобилей. Так, во-первых, выделим в транспортном потоке медленные автомобили, обладающие низкой маневренностью, крупными габаритами, а потому – собственной невысокой скоростью. Все остальные автомобили назовем быстрыми. Заметим, что, как правило, быстрый автомобиль, догнав медленный, вынужден снизить скорость и следовать за медленным, ожидая возможности совершить обгон. Назовем транспортной пачкой скопление автомобилей, состоящее из одного медленного и, возможно, нескольких быстрых, догнавших его и движущихся за ним в ожидании возможности совершить маневр по обгону. Такую пачку можно рассматривать как управляющую систему [133]. В самом деле, схема такой системы содержит следующие структурные блоки: 1) входной полюс – поток быстрых автомобилей, поступающих

в пачку; 2) внешняя память – пачка, содержащая один медленный и несколько быстрых автомобилей; 3) устройство по переработке информации внешней памяти – правило отбора быстрых автомобилей из пачки для совершения обгона; 4) внутренняя память – механизм обгона; 5) устройство по переработке информации внутренней памяти – изменение механизма обгона в зависимости от количества автомобилей в пачке; 6) выходной полюс – поток быстрых автомобилей, совершивших обгон. Кибернетическая система осуществляет функции по управлению автомобилями в пачке и осуществлению обгона. Далее перейдем к математическому описанию блоков системы, т. е. кодированию информации кибернетической системы и определению координат. Для этого введем случайные величины, характеризующие изменение количества автомобилей в пачке с течением времени $t \geq 0$ при $\Delta t > 0$:

1. $\eta_0(t, \Delta t)$ – случайное число быстрых автомобилей, поступивших в пачку за промежуток времени $[t, t + \Delta t)$;
2. $\varkappa_0(t)$ – число всех автомобилей в пачке в момент времени t ;
3. $\xi_0(t, \Delta t)$ – число автомобилей, покинувших пачку (совершивших обгон) на промежутке времени $[t, t + \Delta t)$.

На введенные величины естественным образом налагается ограничение $\xi_0(t, \Delta t) \leq \varkappa_0(t) + \eta_0(t, \Delta t) - 1$. В рамках исследуемой задачи можно предположить следующее: 1) медленных автомобилей в потоке меньшинство, между ними образуются достаточно большие расстояния; 2) быстрые автомобили однородны и не оказывают влияния друг на друга при движении по магистрали в отсутствие медленных; 3) скорости автомобилей есть непрерывные одинаково распределенные случайные величины. При сделанных предположениях было показано [38], что единственным установившимся движением для быстрых автомобилей будет являться пуассоновский поток. Итак, пусть величина $\eta_0(t, \Delta t) \in \{0, 1, \dots\}$ имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda_0 \Delta t$. Заметим, что в силу свойств стационарности и отсутствия последствия для пуассоновского потока количество автомобилей, поступивших в пачку за некоторый промежуток, не зависит от расположения этого промежутка на временной оси, а зависит лишь от длительности этого промежутка.

В случае, если интенсивность обгона в транспортном потоке достаточно высока, будет наблюдаться образование пачек, содержащих не более, чем фиксированное количество $N \geq 2$ автомобилей. Тогда величина $\varkappa_0(t)$ принимает значения из конечного множества $\{1, 2, \dots, N\}$. В отличие от величины

$\eta_0(t, \Delta t)$, априорное распределение величины $\xi_0(t, \Delta t)$ неизвестно. Однако, исходя из физической постановки задачи и наблюдений за реальными транспортными потоками, возможно задать при любых $t \geq 0$, $\Delta t > 0$, $y \in \{1, 2, \dots, N\}$, $z \in \{0, 1, \dots\}$ ее условные распределения вида

$$\{\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = x \mid \varkappa_0(t) = y, \eta_0(t, \Delta t) = z), x \in \{0, 1, \dots, y + z - 1\}\} \quad (1.1)$$

с соответствующим условием нормировки

$$\sum_{x=0}^{y+z-1} \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = x \mid \varkappa_0(t) = y, \eta_0(t, \Delta t) = z) = 1. \quad (1.2)$$

Так, например, очевидно, что обгон не может совершаться в отсутствие быстрых автомобилей, поэтому

$$\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 \mid \varkappa_0(t) = 1, \eta_0(t, \Delta t) = 0) = 1. \quad (1.3)$$

Будем считать, что автомобиль, присоединившийся к пачке в малом промежутке длительностью $\Delta t > 0$, практически не может совершить обгон в этом же промежутке, т. е.

$$\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 \mid \varkappa_0(t) = 1, \eta_0(t, \Delta t) = 1) = 1 - o(\Delta t). \quad (1.4)$$

Здесь и далее $o(\Delta t)$ есть бесконечно малая величина высшего порядка малости, чем Δt . Будем предполагать также, что среднее время обгона для быстрого автомобиля зависит от количества автомобилей, находящихся в пачке. Так, пусть μ_1^{-1} и μ_2^{-1} – средние времена обгона в случаях, когда пачка содержит один или два быстрых автомобиля соответственно. Также пусть среднее время обгона не меняется и равно μ_3^{-1} , если пачка содержит три и более быстрых автомобилей. Таким образом, интенсивности обгона в соответствующих случаях есть μ_1 , μ_2 и μ_3 . С учетом введенных величин зададим следующие условные вероятности:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 1 \mid \varkappa_0(t) = 2, \eta_0(t, \Delta t) = 0) &= \mu_1 \Delta t - o(\Delta t), \\ \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 \mid \varkappa_0(t) = 2, \eta_0(t, \Delta t) = 0) &= 1 - \mu_1 \Delta t + o(\Delta t), \\ \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 1 \mid \varkappa_0(t) = 3, \eta_0(t, \Delta t) = 0) &= \mu_2 \Delta t - o(\Delta t), \\ \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 \mid \varkappa_0(t) = 3, \eta_0(t, \Delta t) = 0) &= 1 - \mu_2 \Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \quad (1.5)$$

а также для любого $k \in \{4, 5, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 1 \mid \varkappa_0(t) = k, \eta_0(t, \Delta t) = 0) &= \mu_3 \Delta t - o(\Delta t), \\ \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 0 \mid \varkappa_0(t) = k, \eta_0(t, \Delta t) = 0) &= 1 - \mu_3 \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Кроме того, по сделанному предположению пачка не может состоять более, чем из N автомобилей. В связи с этим будем считать, что в случае, если на некотором малом промежутке времени быстрый автомобиль присоединяется к пачке, содержащей уже N автомобилей, автомобиль, следующий непосредственно за медленным, практически мгновенно совершает обгон:

$$\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = 1 \mid \varkappa_0(t) = N, \eta_0(t, \Delta t) = 1) = 1. \quad (1.7)$$

Будем считать также, что при задании условных распределений (1.1) события вида $\{\varkappa_0(t) = k, \eta_0(t, \Delta t) = 1\}$ и $\{\varkappa_0(t) = k + 1, \eta_0(t, \Delta t) = 0\}$ при $k \in \{2, 3, \dots, N - 1\}$ и малых $\Delta t > 0$ неразличимы. Все условные вероятности из (1.1), не заданные здесь явно, находятся из условия нормировки (1.2). Например, при $k \in \{3, 4, \dots, N\}$ и $l \in \{0, 1, \dots\}$ верно равенство

$$\mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) \geq 2 \mid \varkappa_0(t) = k, \eta_0(t, \Delta t) = l) = o(\Delta t), \quad (1.8)$$

которое означает, что практически невозможно совершение обгона двумя или более автомобилями за малый промежуток времени.

Заметим, что для введенных величин при фиксированных $t \geq 0$, $\Delta t > 0$ справедливо соотношение баланса $\varkappa_0(t + \Delta t) = \varkappa_0(t) + \eta_0(t, \Delta t) - \xi_0(t, \Delta t)$, из которого следует очевидное равенство в событиях

$$\{\varkappa_0(t + \Delta t) = k\} = \bigcup_{l=1}^N \bigcup_{m=0}^{\infty} \{\varkappa_0(t) = l, \eta_0(t, \Delta t) = m, \xi_0(t, \Delta t) = l + m - k\}$$

для $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. В силу несовместности событий под знаком объединения, с использованием формулы умножения и с учетом очевидной независимости величин $\varkappa_0(t)$ и $\eta_0(t, \Delta t)$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\varkappa_0(t + \Delta t) = k) &= \\ &= \sum_{l=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_0(t) = l, \eta_0(t, \Delta t) = m, \xi_0(t, \Delta t) = l + m - k) = \\ &= \sum_{l=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_0(t) = l) \mathbf{P}(\eta_0(t, \Delta t) = m) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = l + m - k \mid \varkappa_0(t) = l, \eta_0(t, \Delta t) = m). \end{aligned}$$

Обозначив через $Q(t, k)$ вероятность $\mathbf{P}(\varkappa_0(t) = k)$ при $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ и $t \geq 0$, перейдем к разностным уравнениям для функций $Q(t, k)$:

$$Q(t + \Delta t, k) = \sum_{l=1}^N \sum_{m=0}^{\infty} Q(t, l) e^{-\lambda_0 \Delta t} \frac{(\lambda_0 \Delta t)^m}{m!} \times \\ \times \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = l + m - k \mid \mathfrak{a}_0(t) = l, \eta_0(t, \Delta t) = m).$$

С учетом (1.3)–(1.8), разложения $e^{-\lambda_0 \Delta t} = 1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$ при малых $\Delta t > 0$ и условия нормировки (1.2) получим систему равенств

$$\begin{aligned} Q(t + \Delta t, 1) &= (1 - \lambda_0 \Delta t)Q(t, 1) + \mu_{1,0} \Delta t Q(t, 2) + o(\Delta t), \\ Q(t + \Delta t, 2) &= \lambda_0 \Delta t Q(t, 1) + (1 - \lambda_0 \Delta t - \mu_{1,0} \Delta t)Q(t, 2) + \\ &\quad + \mu_{2,0} \Delta t Q(t, 3) + o(\Delta t), \\ Q(t + \Delta t, 3) &= \lambda_0 \Delta t Q(t, 2) + (1 - \lambda_0 \Delta t - \mu_{2,0} \Delta t)Q(t, 3) + \\ &\quad + \mu_{3,0} \Delta t Q(t, 4) + o(\Delta t), \\ Q(t + \Delta t, k) &= \lambda_0 \Delta t Q(t, k - 1) + (1 - \lambda_0 \Delta t - \mu_{3,0} \Delta t)Q(t, k) + \\ &\quad + \mu_{3,0} \Delta t Q(t, k + 1) + o(\Delta t), \quad k = 4, 5, \dots, N - 1, \\ Q(t + \Delta t, N) &= \lambda_0 \Delta t Q(t, N - 1) + (1 - \mu_{3,0} \Delta t)Q(t, N) + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые и поделим обе части полученных равенств на Δt :

$$\begin{aligned} \frac{Q(t + \Delta t, 1) - Q(t, 1)}{\Delta t} &= -\lambda_0 Q(t, 1) + \mu_{1,0} Q(t, 2) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \\ \frac{Q(t + \Delta t, 2) - Q(t, 2)}{\Delta t} &= \lambda_0 Q(t, 1) - (\lambda_0 + \mu_{1,0})Q(t, 2) + \\ &\quad + \mu_{2,0} Q(t, 3) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \\ \frac{Q(t + \Delta t, 3) - Q(t, 3)}{\Delta t} &= \lambda_0 Q(t, 2) - (\lambda_0 + \mu_{2,0})Q(t, 3) + \\ &\quad + \mu_{3,0} Q(t, 4) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \\ \frac{Q(t + \Delta t, k) - Q(t, k)}{\Delta t} &= \lambda_0 Q(t, k - 1) - (\lambda_0 + \mu_{3,0})Q(t, k) + \\ &\quad + \mu_{3,0} Q(t, k + 1) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad k = 4, 5, \dots, N - 1, \\ \frac{Q(t + \Delta t, N) - Q(t, N)}{\Delta t} &= \lambda_0 Q(t, N - 1) - \mu_{3,0} Q(t, N) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. Существование производных обусловлено существованием и непрерывностью пределов правых частей равенств. Получим систему

$$\begin{aligned}
\frac{dQ(t, 1)}{dt} &= -\lambda_0 Q(t, 1) + \mu_{1,0} Q(t, 2), \\
\frac{dQ(t, 2)}{dt} &= \lambda_0 Q(t, 1) - (\lambda_0 + \mu_{1,0}) Q(t, 2) + \mu_{2,0} Q(t, 3), \\
\frac{dQ(t, 3)}{dt} &= \lambda_0 Q(t, 2) - (\lambda_0 + \mu_{2,0}) Q(t, 3) + \mu_{3,0} Q(t, 4), \\
\frac{dQ(t, k)}{dt} &= \lambda_0 Q(t, k-1) - (\lambda_0 + \mu_{3,0}) Q(t, k) + \mu_{3,0} Q(t, k+1), \\
& k = 4, 5, \dots, N-1, \\
\frac{dQ(t, N)}{dt} &= \lambda_0 Q(t, N-1) - \mu_{3,0} Q(t, N)
\end{aligned} \tag{1.9}$$

линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, определяющую динамику распределения $\{Q(t, k), k \in \{1, 2, \dots, N\}\}$ числа неоднородных автомобилей в пачке с течением времени.

1.2 Распределение числа неоднородных требований в пачке при $N = 3$

Рассмотрим случай $N = 3$. Для реальных транспортных потоков такая ситуация складывается, как правило, когда интенсивность быстрых автомобилей превышает интенсивность медленных незначительно. В таком случае (1.9) примет вид

$$\begin{aligned}
\frac{dQ(t, 1)}{dt} &= -\lambda_0 Q(t, 1) + \mu_{1,0} Q(t, 2), \\
\frac{dQ(t, 2)}{dt} &= \lambda_0 Q(t, 1) - (\lambda_0 + \mu_{1,0}) Q(t, 2) + \mu_{2,0} Q(t, 3), \\
\frac{dQ(t, 3)}{dt} &= \lambda_0 Q(t, 2) - \mu_{2,0} Q(t, 3).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Можно убедиться, что корнями x_1, x_2 и x_3 характеристического уравнения

$$x^3 + (2\lambda_0 + \mu_{1,0} + \mu_{2,0})x^2 + (\lambda_0^2 + \lambda_0\mu_{2,0} + \mu_{1,0}\mu_{2,0})x = 0,$$

составленного для системы (1.10), являются различные действительные числа

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = -\lambda_0 - \frac{\mu_{1,0} + \mu_{2,0}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu_{1,0} - \mu_{2,0}}{2}\right)^2 + \lambda_0\mu_{1,0}}.$$

Каждому найденному простому корню x_i , $i = 1, 2, 3$, соответствует частное решение системы (1.10) в виде $C_i \bar{u}_i e^{x_i t}$, где C_i — произвольная постоянная, а \bar{u}_i есть собственный вектор, отвечающий значению x_i . Введем обозначения для существенных параметров системы:

$$\nu_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_{1,0}}, \nu_2 = \frac{\lambda_0}{\mu_{2,0}}. \quad (1.11)$$

Собственные вектора имеют вид

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \nu_1 \\ \nu_1 \nu_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ \nu_1 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right)^2} \right] \\ - \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right)^2} \right)^{-1} \end{pmatrix},$$

следовательно, общее решение $\bar{Q}(t) = (Q(t, 1), Q(t, 2), Q(t, 3))^T$ системы (1.10) представимо в виде

$$\bar{Q}(t) = C_1 \bar{u}_1 + C_2 \bar{u}_2 e^{x_2 t} + C_3 \bar{u}_3 e^{x_3 t}. \quad (1.12)$$

Решение системы (1.10) можно получить различными способами. В работе [126] был рассмотрен иной способ поиска решения и результаты его применения подтвердили решение (1.12). В полученном решении произвольные постоянные C_1 , C_2 и C_3 единственным образом определяются из начальных условий. Наибольший интерес в дальнейших исследованиях представляет предельная динамика распределения числа требований в пачке при $t \rightarrow \infty$ и стационарный режим. Под стационарным режимом в данном случае понимается такое функционирование системы, которое устанавливается с течением времени независимо от начальных условий и характеризуется неизменностью вероятностных или средних характеристик во времени. Содержательно для транспортного потока становление стационарного режима связано с постепенным уменьшением количества совершаемых обгонов. Так, каждый быстрый автомобиль с течением времени перестает совершать маневры и остается в пачке, средняя скорость которой является для него приемлемой.

В связи с этим для выделения частного решения рассмотрим начальные условия вида $\bar{Q}(0) = (1, 0, 0)^T$. Из (1.12) получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений вида $A\bar{x} = b$, где

$$A = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3), \quad \bar{x} = (C_1, C_2, C_3)^T, \quad b = (1, 0, 0)^T.$$

Решение такой системы можно получить, например, методом Крамера. Согласно этому методу

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad C_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ есть определитель матрицы A , который равен

$$\Delta = \frac{2\nu_2(1 + \nu_1 + \nu_1\nu_2)\sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right)^2}}{\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\right)^2 - \left(\nu_1\nu_2\sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right)^2}\right)^2}.$$

В свою очередь, Δ_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, есть определитель матрицы, полученной из матрицы A путем замены ее i -го столбца на вектор b :

$$\Delta_1 = \frac{2\nu_2\sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right)^2}}{\left(\frac{\nu_1 - \nu_2}{2}\right)^2 - \left(\nu_1\nu_2\sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right)^2}\right)^2},$$

$$\Delta_{2,3} = \frac{\pm\left(\frac{\nu_2}{2\nu_1} + \nu_2 + \frac{1}{2}\right) + 2\nu_2\sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right)^2}}{\frac{\nu_1 - \nu_2}{2} \mp \nu_1\nu_2\sqrt{\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right)^2}}.$$

Следовательно, $C_1 = (1 + \nu_1 + \nu_1\nu_2)^{-1}$, а явные выражения для C_2 и C_3 в силу громоздкости выписывать здесь не будем.

Теперь в выделенном частном решении с найденными константами перейдем к пределу при $t \rightarrow \infty$. Заметим, что в (1.12) $x_2 < 0$ и $x_3 < 0$, поэтому результат предельного перехода даст

$$(Q(1), Q(2), Q(3))^T = \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{Q}(t) = C_1 \bar{u}_1 = \frac{1}{1 + \nu_1 + \nu_1\nu_2} (1, \nu_1, \nu_1\nu_2)^T. \quad (1.13)$$

В приложении A рассмотрена система алгебраических уравнений, полученных для произвольного N путем предельного перехода $t \rightarrow \infty$ непосредственно из (1.9). Заметим, что если в полученном решении положить $N = 3$, то результат совпадет с результатом (1.13).

1.3 Аппроксимация потока неоднородных требований неординарным пуассоновским потоком

В разделах 1.1 и 1.2 построена математическая модель пачки движущихся по магистрали автомобилей в виде кибернетической системы. Равенство (1.13) дает распределение $\{Q(k) = \mathbf{P}(\mathfrak{a}_0 = k), k = 1, 2, 3\}$ случайной величины \mathfrak{a}_0 , характеризующей число автомобилей в пачке в установившемся режиме. При этом рассмотрен случай, когда интенсивности медленных и быстрых автомобилей сравнимы и, как следствие, образуются пачки не более, чем из $N = 3$ автомобилей. Заметим, что при получении этого результата в рассмотрение принималась как пространственная, так и временная характеристика транспортного потока. Так, фиксация расположения автомобилей на магистрали, замечание о близости автомобилей внутри одной пачки и удаленности различных пачек друг от друга есть результат наблюдения пространственной характеристики потока. В свою очередь, изменение количества автомобилей в пачке с течением времени и установление стационарного режима есть отражение временной характеристики. Интегральный показатель потока с точки зрения его пространственного изучения есть плотность расположения автомобилей, а подобной величиной для временной характеристики потока является интенсивность автомобилей. Сложная стохастическая связь между двумя указанными характеристиками отмечалась, например, в работе [38]. В текущем разделе будет произведен переход от пространственно-временной модели отдельной пачки к временной модели всего потока. Таким образом, для обоснования адекватности предлагаемой модели потока изучается история его формирования под влиянием внешней среды.

С течением времени стационарный режим устанавливается для каждой отдельной пачки автомобилей и, как следствие, для всего транспортного потока. Зафиксируем некоторую поперечную линию (стоп-линию) магистрали. Для каждого момента $t \geq 0$ будем считать случайное число автомобилей $\eta(t)$ потока, пересекших стоп-линию за промежуток времени $[0, t]$ от момента начала наблюдения. Сделаем два следующих предположения. Во-первых, предположим, что расстояние между двумя последовательными медленными автомобилями в среднем значительно превышает среднюю длину участка магистрали, занимаемого отдельной пачкой. В этом случае можно пренебречь разницей между временами поступления на стоп-линию автомобилей одной пачки и считать,

что быстрые автомобили пересекают стоп-линию одновременно с медленным. Во-вторых, предположим, что в силу удаленности медленных автомобилей друг от друга их взаимное влияние пренебрежимо и движение независимо. Тогда поток медленных автомобилей, пересекающих поперечную линию, может быть аппроксимирован пуассоновским потоком с параметром λ . Таким образом, модель потока неоднородных автомобилей $\{\eta(t): t \geq 0\}$ есть неординарный пуассоновский поток со следующими параметрами: λ – интенсивность вызывающих моментов, а величины

$$p = \frac{1}{1 + \nu_1 + \nu_1\nu_2}, \quad q = \frac{\nu_1}{1 + \nu_1 + \nu_1\nu_2}, \quad s = \frac{\nu_1\nu_2}{1 + \nu_1 + \nu_1\nu_2} \quad (1.14)$$

есть согласно (1.13) вероятности поступления в вызывающий момент пачки из одного, двух, трех требований. Заметим, что в силу условия нормировки для распределения числа требований в пачке, параметр s выражается единственным образом через p и q , т. е. $s = 1 - p - q$. В связи с этим далее будем считать, что исследуемый неординарный пуассоновский поток задается тройкой параметров: λ и p, q (или любая другая пара вероятностей из $\{p, q, s\}$). Заметим, что (1.14) представляет собой параметрический класс распределений $\{p, q, s\}$ с областью изменения параметров

$$G = \{(p, q): p > 0, q > 0, p + q \leq 1\} \cup (1, 0). \quad (1.15)$$

Здесь в силу (1.14) вероятность p всегда положительна и из $q = 0$ следует $s = 0$. Однако результаты текущего раздела остаются справедливы и для неординарных пуассоновских потоков с более широкой областью изменения параметров

$$G^* = \{(p, q): p \geq 0, q \geq 0, p + q \leq 1\}. \quad (1.16)$$

Пусть $P_k(t) = \mathbf{P}(\eta(t) = k)$, $k = 0, 1, \dots$, есть вероятности, порожденные процессом $\{\eta(t): t \geq 0\}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Производящая функция $\Psi(t; z) = \mathbf{M}z^{\eta(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t)z^k$ одномерных распределений процесса $\{\eta(t): t \geq 0\}$ при $t \geq 0$ и $|z| \leq 1$ имеет вид*

$$\Psi(t; z) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2i}{3} \rfloor} p^{k-2i-3j} q^i s^j \frac{(\lambda t)^{k-i-2j}}{i!j!(k-2i-3j)!},$$

где $[x]$ есть целая часть числа x .

Доказательство. Неординарный пуассоновский поток обладает свойствами стационарности и отсутствия последействия. Следовательно, согласно [4] для $t \geq 0$ и малых $\Delta t > 0$ справедливы равенства $P_k(t + \Delta t) = \sum_{i=0}^k P_i(t)P_{k-i}(\Delta t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и $P_0(\Delta t) = e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$. В результате преобразований получим

$$\frac{P_k(t + \Delta t) - P_k(t)}{\Delta t} = -\lambda P_k(t) + \sum_{i=0}^{k-1} P_i(t) \frac{P_{k-i}(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (1.17)$$

Из [4] следует существование пределов $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{k-i}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda Q(k-i)$, где $Q(k-i)$ интерпретируется как вероятность поступления пачки из $k-i$ требований в вызывающий момент. Для рассматриваемого потока такая вероятность положительна при $k-i \in \{1, 2, 3\}$. В результате предельного перехода $\Delta t \rightarrow 0$ в выражении (1.17) для любого $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ получим систему дифференциальных уравнений

$$P'_k(t) = -\lambda P_k(t) + \lambda(pP_{k-1}(t) + qP_{k-2}(t) + sP_{k-3}(t)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $P_{-1}(t) = P_{-2}(t) = P_{-3}(t) \equiv 0$ для любых $t > 0$. Путем домножения уравнений системы на z^k при соответствующем k и суммирования всех полученных равенств получим соотношение

$$\frac{\partial \Psi(t; z)}{\partial t} = -\lambda \Psi(t; z) + \lambda \left[p \sum_{k=1}^{\infty} z^k P_{k-1}(t) + q \sum_{k=2}^{\infty} z^k P_{k-2}(t) + s \sum_{k=3}^{\infty} z^k P_{k-3}(t) \right].$$

Следовательно, производящая функция $\Psi(t; z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \ln \Psi(t; z)}{\partial t} = \lambda(sz^3 + qz^2 + pz - 1).$$

Решение уравнения имеет вид $\Psi(t; z) = C(z) \exp\{\lambda t(sz^3 + qz^2 + pz - 1)\}$, где $C(z) \equiv 1$ в силу начальных условий $\Psi(0; z) = P_0(0) = 1$, поэтому окончательно имеем

$$\Psi(t; z) = \exp\{\lambda t(sz^3 + qz^2 + pz - 1)\}. \quad (1.18)$$

Используя разложение показательной функции в ряд Маклорена, получим

$$\Psi(t; z) = e^{-\lambda t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda t s z^3)^l}{l!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\lambda t q z^2)^i}{i!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t p z)^n}{n!}.$$

В результате перегруппировки слагаемых находим соотношение

$$\Psi(t; z) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2i}{3} \rfloor} p^{k-2i-3j} q^i s^j \frac{(\lambda t)^{k-i-2j}}{i!j!(k-2i-3j)!},$$

подтверждающее утверждение теоремы. \square

Сопоставляя разложение производящей функции $\Psi(t; z)$ по степеням аргумента z с ее определением, получим общую формулу для одномерных распределений неординарного пуассоновского потока:

$$P_k(t) = e^{-\lambda t} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k-2i}{3} \rfloor} p^{k-2i-3j} q^i s^j \frac{(\lambda t)^{k-i-2j}}{i!j!(k-2i-3j)!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.19)$$

Заметим, что в работе [5] представлены формулы для вероятностей вида $P_k(t)$ при $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ в случае, когда в каждый вызывающий момент по потоку может прийти неограниченное число заявок, а также для вероятностей вида $P_k(t)$ при $k \in \{1, 2, \dots\}$ в случае, когда в каждый вызывающий момент по потоку может прийти не более двух заявок. Можно убедиться, что указанные формулы соответствуют равенствам (1.19).

Следующие утверждения дают представление о некоторых свойствах исследуемого потока.

Лемма 1. Пусть $\{\eta_j(t): t \geq 0\}$, $j = 1, 2, \dots, m$, – независимые неординарные пуассоновские потоки, и λ_j , p_j , q_j – параметры потока $\{\eta_j(t): t \geq 0\}$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Тогда суперпозиция $\{\eta(t) = \sum_{j=1}^m \eta_j(t): t \geq 0\}$ является неординарным пуассоновским потоком с параметрами

$$\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j, \quad p = \frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j p_j}{\lambda}, \quad q = \frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j q_j}{\lambda}.$$

Доказательство. Докажем, что поток $\{\eta(t): t \geq 0\}$ с начальными условиями $\eta(0) = \sum_{j=1}^m \eta_j(0) = 0$ является стационарным. Пусть величина $a \geq 0$. Рассмотрим производящую функцию $\mathbf{M}(\prod_{i=1}^n z_i^{\eta(t_i+a) - \eta(a)})$ для n -мерного вектора $(\eta(t_1+a) - \eta(a), \eta(t_2+a) - \eta(a), \dots, \eta(t_n+a) - \eta(a))$ при любых $n \in \{1, 2, \dots\}$ и $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$. В силу независимости и стационарности процессов

$\{\eta_j(t) : t \geq 0\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}\left(\prod_{i=1}^n z_i^{\eta(t_i+a)-\eta(a)}\right) = \mathbf{M}\left(\prod_{i=1}^n z_i^{\sum_{j=1}^m (\eta_j(t_i+a)-\eta_j(a))}\right) = \\ & = \mathbf{M}\left(\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n z_i^{\eta_j(t_i+a)-\eta_j(a)}\right) = \prod_{j=1}^m \mathbf{M}\left(\prod_{i=1}^n z_i^{\eta_j(t_i+a)-\eta_j(a)}\right) = \\ & = \prod_{j=1}^m \mathbf{M}\left(\prod_{i=1}^n z_i^{\eta_j(t_i)-\eta_j(0)}\right) = \mathbf{M}\left(\prod_{i=1}^n z_i^{\eta(t_i)-\eta(0)}\right) = \mathbf{M}\left(\prod_{i=1}^n z_i^{\eta(t_i)}\right). \end{aligned}$$

Поскольку производящие функции векторов

$$(\eta(t_1 + a) - \eta(a), \eta(t_2 + a) - \eta(a), \dots, \eta(t_n + a) - \eta(a))$$

и $(\eta(t_1), \eta(t_2), \dots, \eta(t_n))$ совпадают, то их распределения также совпадают, т. е. поток $\{\eta(t) : t \geq 0\}$ является стационарным процессом. Аналогичным образом при $t_0 = 0$ можно получить, что производящая функция вектора $(\eta(t_1) - \eta(t_0), \eta(t_2) - \eta(t_1), \dots, \eta(t_n) - \eta(t_{n-1}))$ совпадает с произведением производящих функций величин $\eta(t_1) - \eta(t_0)$, $\eta(t_2) - \eta(t_1)$, \dots , $\eta(t_n) - \eta(t_{n-1})$:

$$\mathbf{M} \prod_{i=1}^n z_i^{\eta(t_i)-\eta(t_{i-1})} = \prod_{i=1}^n \mathbf{M} z_i^{\eta(t_i)-\eta(t_{i-1})},$$

что доказывает отсутствие последствия для потока $\{\eta(t) : t \geq 0\}$. Следовательно, поток $\{\eta(t) : t \geq 0\}$ полностью определяется одномерными распределениями [4].

Производящая функция $\Psi_j(t; z)$ одномерных распределений процесса $\{\eta_j(t) : t \geq 0\}$ имеет вид $\Psi_j(t; z) = \exp\{\lambda_j t (s_j z^3 + q_j z^2 + p_j z - 1)\}$ для любого $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Известно, что производящая функция $\Psi(t; z)$ одномерных распределений процесса, полученного в результате суммирования независимых процессов, является произведением соответствующих производящих функций. Обозначим $\lambda = \sum_{j=1}^m \lambda_j$, тогда справедливы преобразования

$$\begin{aligned} \Psi(t; z) &= \prod_{j=1}^m \Psi_j(t; z) = \exp\left\{\lambda t \sum_{j=1}^m \frac{\lambda_j}{\lambda} (s_j z^3 + q_j z^2 + p_j z) - \sum_{j=1}^m \lambda_j t\right\} = \\ &= \exp\{\lambda t (s z^3 + q z^2 + p z - 1)\}, \end{aligned}$$

где $p = \frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j p_j}{\lambda}$, $q = \frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j q_j}{\lambda}$ и $s = \frac{\sum_{j=1}^m \lambda_j s_j}{\lambda} = 1 - p - q$. Производящая функция однозначно определяет вид одномерных распределений. Таким образом, мож-

но утверждать, что поток $\{\eta(t): t \geq 0\}$ будет неординарным пуассоновским потоком с найденными выше параметрами. \square

Лемма 2. Для математического ожидания $\mathbf{M}\eta(t)$, дисперсии $\mathbf{D}\eta(t)$, коэффициента асимметрии $\mathbf{Ka}\eta(t)$ и эксцесса $\mathbf{Ex}\eta(t)$ величины $\eta(t)$ при любом $t > 0$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\eta(t) &= \lambda t(2s + q + 1), \quad \mathbf{D}\eta(t) = \lambda t(8s + 3q + 1), \\ \mathbf{Ka}\eta(t) &= \frac{26s + 7q + 1}{\sqrt{\lambda t}(8s + 3q + 1)^{3/2}}, \quad \mathbf{Ex}\eta(t) = \frac{80s + 15q + 1}{\lambda t(8s + 3q + 1)^2}. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2 приведено в приложении Б.1.

Полученные выражения для числовых характеристик дают некоторое представление о поведении величины $\eta(t)$ при изменении различных параметров. Так, нетрудно заметить, что $\mathbf{Ka}\eta(t) > 0$, поэтому можно утверждать, что среди значений, близких к $\mathbf{M}\eta(t)$, величина $\eta(t)$ чаще принимает значения, находящиеся слева от $\mathbf{M}\eta(t)$, а среди удаленных от среднего $\mathbf{M}\eta(t)$ – значения, находящиеся справа. Кроме того, неравенство $\mathbf{Ex}\eta(t) > 0$ указывает на то, что распределение исследуемой величины имеет более острую вершину вблизи наиболее вероятного значения и более «легкие» хвосты в сравнении с нормальным распределением. С увеличением длительности t рассматриваемого промежутка наблюдения за потоком или интенсивности λ поступления пачек по потоку среднее значение для числа поступивших заявок, как и его разброс, будет расти. В то же время асимметрия распределения и его искажение относительно нормального распределения будет уменьшаться. Фиксируя теперь значения λ и t , рассмотрим найденные числовые характеристики как функции аргументов q и s . Перейдем к поиску экстремальных значений этих функций в области (1.16), которая относительно параметров q и s имеет вид

$$G^* = \{(q, s): q \geq 0, s \geq 0, q + s \leq 1\}.$$

Заметим, что функции $M(q, s) = \lambda t(2s + q + 1)$ и $D(q, s) = \lambda t(8s + 3q + 1)$ являются линейными функциями, возрастающими по обоим аргументам q и s . В связи с этим их экстремальные значения следуют искать лишь на границах области G^* . Нетрудно заметить, что такие экстремальные значения равны

$$\begin{aligned} \min_{(q,s) \in G^*} \mathbf{M}\eta(t) &= \lambda t = M(0, 0), & \max_{(q,s) \in G^*} \mathbf{M}\eta(t) &= 3\lambda t = M(0, 1), \\ \min_{(q,s) \in G^*} \mathbf{D}\eta(t) &= \lambda t = D(0, 0), & \max_{(q,s) \in G^*} \mathbf{D}\eta(t) &= 9\lambda t = D(0, 1). \end{aligned}$$

Таким образом, величины $\mathbf{M}\eta(t)$ и $\mathbf{D}\eta(t)$ достигают своего минимального значения в случае пуассоновского потока ($p = 1$), а максимального – в случае потока пачек, каждая из которых содержит три требования ($s = 1$).

Рассмотрим функцию $K(q, s) = \frac{26s+7q+1}{\sqrt{\lambda t}(8s+3q+1)^{3/2}}$. Единственная ее стационарная точка $(^{-99/121}, ^{22/121})$, являющаяся решением уравнений $\frac{\partial K(q,s)}{\partial q} = 0$, $\frac{\partial K(q,s)}{\partial s} = 0$, находится вне области G^* . На каждой из границ $q = 0$, $s = 0$ и $q + s = 1$ функция $K(q, s)$ имеет по одной точке максимума: $(0, ^{7/52})$, $(^{5/21}, 0)$ и $(^{63/95}, ^{32/95})$ соответственно. В каждой из вершин треугольника G^* значение функции $K(q, s)$ равно $(\sqrt{\lambda t})^{-1}$. Таким образом, в области G^* коэффициент асимметрии достигает следующих экстремальных значений:

$$\begin{aligned} \min_{(q,s) \in G^*} \mathbf{Ka}\eta(t) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda t}} = K(0, 0) = K(1, 0) = K(0, 1), \\ \max_{(q,s) \in G^*} \mathbf{Ka}\eta(t) &= \frac{1}{6\sqrt{\lambda t}} (^{13/3})^{3/2} = K(0, ^{7/52}) \approx \frac{1.50343}{\sqrt{\lambda t}}. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения применим к функции $E(q, s) = \frac{80s+15q+1}{\lambda t(8s+3q+1)^2}$. Единственная стационарная точка $(-0.6, 0.1)$ не принадлежит области G^* . На каждой из границ $q = 0$, $s = 0$ и $q + s = 1$ функция $E(q, s)$ имеет по одной точке максимума: $(0, 0.1)$, $(0.2, 0)$ и $(^{9/13}, ^{4/13})$ соответственно. В каждой из точек $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ верно равенство $E(q, s) = 1/\lambda t$. Следовательно, коэффициент эксцесса имеет следующие экстремальные значения в области G^* :

$$\begin{aligned} \min_{(q,s) \in G^*} \mathbf{Ex}\eta(t) &= \frac{1}{\lambda t} = E(0, 0) = E(1, 0) = E(0, 1), \\ \max_{(q,s) \in G^*} \mathbf{Ex}\eta(t) &= \frac{25}{9\lambda t} = E(0, 0.1) \approx \frac{2.7778}{\lambda t}. \end{aligned}$$

Таким образом, коэффициенты асимметрии и эксцесса величины $\eta(t)$ минимальны в случае, когда неординарный пуассоновский поток является потоком пачек, состоящих из одинакового числа требований. В приложении [Б.2](#) приведен пример расчета вероятностей [\(1.19\)](#) для различных значений k , t и параметров λ , p , q .

1.4 Проверка адекватности модели неординарного пуассоновского потока

В разделах 1.1–1.3 построена и изучена модель потока неоднородных требований в виде неординарного пуассоновского потока. При этом все выкладки интерпретировались на примере транспортного потока, движущегося по крупной магистрали при существенном влиянии внешней среды: погодных условий, личностного фактора у водителей, состояния дорожного покрытия и т. д. Заметим, что в процессе построения модели был сделан ряд предположений, отражающих реальные потоки, но упрощающих модель. Например, предполагалось, что все автомобили одной пачки поступают на стоп-линию одновременно. Для реальных транспортных потоков это есть лишь некоторая аппроксимация. Действительно, каждый из автомобилей не является материальной точкой и имеет положительную длину. Кроме того, расстояние между соседними автомобилями внутри пачки в целях безопасности не должно быть меньше установленных ограничений. Можно также отметить, что при наблюдении за некоторым транспортным потоком довольно сложно определить, является ли некоторый автомобиль быстрым или медленным. Итак, необходим способ, позволяющий оценить, насколько модель неординарного пуассоновского потока близка реальным транспортным и прочим потокам.

В силу проявляющейся при влиянии различных факторов зависимости между неоднородными требованиями классические способы описания потока не всегда удобны в применении. К классическим способам относятся представление потока в виде 1) случайной последовательности $\{\tau'_i, i = 1, 2, \dots\}$, где τ'_i есть момент поступления по потоку i -го требования; 2) случайной последовательности $\{\Delta_i, i = 1, 2, \dots\}$, где $\Delta_i = \tau'_i - \tau'_{i-1}$ есть интервал между поступлением $(i-1)$ -го и i -го требований, $\tau'_0 \equiv 0$; 3) случайного процесса $\{\eta^*(t) : t \geq 0\}$, где $\eta^*(t)$ – количество требований, поступивших за промежуток времени $[0, t)$. Указанные три способа эквивалентны между собой. В случае, рассмотренном в разделах 1.1–1.3, величины $\Delta_i, i = 1, 2, \dots$, зависимы и имеют различные распределения. В связи с этим не удастся получить конечномерные распределения процесса $\{\eta^*(t) : t \geq 0\}$. Предлагается применить нелокальный способ описания потока, представленный в [40]. При таком описании происходит фиксация случайных моментов $\tau_i, i = 1, 2, \dots$, поступления по потоку лишь некоторых из

исходных требований. Указанные моменты выбираются таким образом, чтобы интервалы $\tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, были независимы и имели одинаковое распределение ($\tau_0 \equiv 0$). К примеру, для транспортного потока такие моменты будут совпадать с моментами поступлений медленных автомобилей на стоп-линию. Случайное число требований, поступивших за промежуток $[\tau_i, \tau_{i+1})$ для любого $i = 1, 2, \dots$, фиксируется величиной η_i . Тогда исходный поток можно описать нелокально в виде случайной последовательности $\{(\tau_i, \eta_i), i = 1, 2, \dots\}$. Заметим, что в то время как классические способы описания содержат полную информацию о потоке, при нелокальном способе теряется информация о временах поступления некоторых требований. Однако грамотный выбор моментов τ_i , $i = 1, 2, \dots$, значительно облегчает дальнейшие исследования.

В работе [144] предложены четыре способа преобразования последовательности $\{\tau'_i, i = 1, 2, \dots\}$ в последовательность $\{(\tau_i, \eta_i), i = 1, 2, \dots\}$, т. е. разбиения потока на пачки. Для подтверждения адекватности модели неординарного пуассоновского потока преобразования необходимо выполнить таким образом, чтобы 1) величины $\tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, были независимы и имели показательное (или смещенное показательное) распределение; 2) величины η_i , $i = 1, 2, \dots$, были независимы и имели распределение

$$\{\mathbf{P}(\eta_i = 1) = p, \mathbf{P}(\eta_i = 2) = q, \mathbf{P}(\eta_i = 3) = s = 1 - p - q\} \quad (1.20)$$

со значениями вероятностей из допустимой области (1.15). В связи с этим в работе [144] также даны ссылки на статистические критерии проверки гипотезы случайности (гипотезы о независимости и одинаковом распределении величин).

После подтверждения гипотезы случайности необходимо проверить гипотезу о виде распределения для каждой из последовательностей $\{\eta_i, i = 1, 2, \dots\}$ и $\{\tau_{i+1} - \tau_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$. Напомним, что гипотетическое распределение (1.14) количества требований в пачке зависит от двух существенных параметров ν_1 и ν_2 . Значения этих параметров неизвестны, но из (1.11) известен их содержательный смысл. Оценим эти значения по выборке, полученной в результате обработки данных реального потока. Пусть поступление заявок по некоторому транспортному потоку наблюдалось в течение времени T . Предположим, что после применения какого-либо из алгоритмов разбиения реального транспортного потока на пачки было получено n пачек. Пусть также n_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, есть количество пачек, содержащих в точности i заявок. Тогда величина $n = \sum_{i=1}^3 n_i$ является также числом всех медленных автомобилей, а $n_2 + 2n_3$ — числом всех

быстрых автомобилей. В этом случае можно предложить оценку $\lambda_0^* = \frac{n_2 + 2n_3}{T}$ для интенсивности λ_0 поступления быстрых автомобилей и оценку $\beta_1^* = \frac{n_1}{T}$ для интенсивности β_1 пачек, состоящих из одного автомобиля. Часто для реальных транспортных потоков имеется зависимость между интенсивностью обгона $\mu_{1,0}$ и интенсивностью потока пачек, состоящих из одного автомобиля. Как правило, такую зависимость можно моделировать при помощи линейной функции $\mu_{1,0} = K\beta_1$, где значение коэффициента K определяется дорожными условиями. Оценка для $\mu_{1,0}$ с учетом введенной зависимости принимает вид $\mu_{1,0}^* = K\frac{n_1}{T}$. Следовательно, значение параметра ν_1 можно оценить следующим образом:

$$\nu_1^* = \frac{\lambda_0^*}{\mu_{1,0}^*} = \frac{n_2 + 2n_3}{Kn_1}. \quad (1.21)$$

Применим теперь видоизмененный метод минимума χ^2 , изложенный в [145], для оценки второго неизвестного параметра ν_2 . Поскольку рассматриваемое гипотетическое распределение (1.20) величины η_i сконцентрировано в трех точках, то целесообразно поделить область значений величины η_i на три одноточечных множества $S_i = \{i\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Тогда гипотетические вероятности попадания в каждый из них определяются соответственно величинами p , q , s , а количество выборочных наблюдений определяется величинами n_1 , n_2 , n_3 . Видоизмененный метод минимума χ^2 предлагает строить оценку ν_2^* неизвестного параметра как решение уравнения $\frac{n_1}{p} \frac{\partial p}{\partial \nu_2} + \frac{n_2}{q} \frac{\partial q}{\partial \nu_2} + \frac{n_3}{s} \frac{\partial s}{\partial \nu_2} = 0$. Решая это уравнение, получим с учетом (1.21) оценку

$$\nu_2^* = \frac{(1 + \nu_1^*)n_3}{\nu_1^*(n_1 + n_2)} = \frac{(Kn_1 + n_2 + 2n_3)n_3}{(n_2 + 2n_3)(n_1 + n_2)}. \quad (1.22)$$

Статистика χ^2 , характеризующая близость гипотетического распределения наблюдаемой выборке, определяется равенством

$$\chi^2 = \frac{(n_1 - np^*)^2}{np^*} + \frac{(n_2 - nq^*)^2}{nq^*} + \frac{(n_3 - ns^*)^2}{ns^*}.$$

Здесь p^* , q^* и s^* вычисляются согласно выражениям (1.14) со значениями параметров (1.21) и (1.22). В случае верности выдвинутой гипотезы о виде распределения (1.20) статистика χ^2 при $n \rightarrow \infty$ имеет распределение χ^2 с одной степенью свободы. При фиксированном уровне значимости принимается решение об истинности или ложности гипотезы.

В [144] показано, что распределение интервалов $\tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 1, 2, \dots$, хорошо согласуется с показательным смещенным распределением вида

$$\mathbf{P}(\tau_{i+1} - \tau_i < t) = F(t; \sigma, h) = \begin{cases} 1 - \exp\{-\frac{t-h}{\sigma}\}, & t > h; \\ 0, & t \leq h \end{cases} \quad (1.23)$$

с параметрами $h \geq 0$ и $\sigma > 0$. Появление смещения h объясняется следующими соображениями. Все автомобили имеют некоторую длину и двигаются на безопасном расстоянии друг от друга. Следовательно, следующие друг за другом транспортные пачки не могут поступать на стоп-линию одновременно, и имеется некоторый минимальный промежуток времени между их поступлениями. В работе [144] также указан способ проверки согласованности выборочных данных с гипотетическим распределением (1.23) и получены оценки для неизвестных параметров указанного распределения.

На языке программирования C++ с использованием средств разработки Microsoft Visual Studio была получена и зарегистрирована программа для ЭВМ «Статистический анализ потока событий» [142]. Программа реализует следующие процедуры для анализа данных некоторого потока: 1) проверка гипотезы случайности для интервалов $\tau'_{i+1} - \tau'_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, между соседними требованиями с применением четырех статистических критериев; 2) разбиение потока на пачки любым из четырех способов, указанных в [144], и получение описания потока в виде последовательности $\{(\tau_i, \eta_i), i = 1, 2, \dots\}$; 3) проверка гипотезы случайности для интервалов $\tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, между поступлениями последовательных пачек и для количеств η_i , $i = 1, 2, \dots$, требований в полученных пачках; 4) проверка гипотез о виде распределения (1.20) и (1.23) с сопутствующей оценкой неизвестных параметров распределений (значение параметра K вводится исследователем). На основе разработанной программы в работе [136] приведен результат анализа данных потока импульсов вдоль нервного волокна, в работе [124] произведен анализ данных некоторого транспортного потока. Заметим, что в проведенных исследованиях значение оценки параметра смещения h распределения (1.23) оказывается пренебрежимо малым. Таким образом, полученные результаты позволяют утверждать, что многие реальные потоки, в которых в силу определенных факторов проявляется неоднородность требований, могут быть аппроксимированы неординарными пуассоновскими потоками.

Глава 2. Циклическое управление потоками неоднородных требований

В разделе 2.1 главы 2 дано общее описание класса систем управления конфликтными независимыми случайными потоками и обслуживания требований. При этом системы внутри класса различаются моделью входных потоков и выбранным алгоритмом управления. В последующих разделах главы 2 изучена конкретная система из представленного класса: система с неординарными пуассоновскими входными потоками и циклическим алгоритмом управления. Построена математическая модель такой системы в виде трехмерной счетной однородной цепи Маркова. Получены рекуррентные соотношения между одномерными распределениями цепи Маркова, а также их производящими функциями. Произведена классификация состояний цепи Маркова. Аналитически доказан критерий существования стационарного режима в изучаемой системе.

2.1 Описание класса систем обслуживания требований и управления потоками

Рассматривается система массового обслуживания, общая схема которой представлена на рисунке 2.1. На вход поступает $m \geq 2$ потоков $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \dots, \bar{\Pi}_m$. Относительно потоков предполагаем следующее. Во-первых, входные потоки являются независимыми в совокупности: случайное поступление требований по одному потоку никак не влияет на поступление требований по другому. Во-вторых, входные потоки являются конфликтными: требования различных потоков не могут находиться на обслуживании в один и тот же промежуток времени. Поступая в систему и не получая обслуживание мгновенно, требования потока $\bar{\Pi}_j$ (здесь и далее $j \in J = \{1, 2, \dots, m\}$, если не указано иное) ожидают начала обслуживания в бункере O_j неограниченной вместимости, организованном согласно дисциплине очереди (FIFO). Никакие требования не покидают систему, не получив обслуживания, т. е. рассматривается система без потерь. Обслуживающее устройство (ОУ) совмещает в себе две функции: непосредственно обслуживание требований и управление потоками. Обслуживающее устройство

может находиться в одном из состояний множества Γ . Все состояния можно разделить на два типа: состояния обслуживания и состояния переналадки. В любом из состояний обслуживания могут обслуживаться требования только одного из входных потоков, требования остальных потоков ожидают в очереди. Во всех состояниях обслуживания одного потока $\bar{\Pi}_j$ интенсивность обслуживания одинакова и равна μ_j . С целью безопасности состояния обслуживания различных потоков разделены интервалами переналадки. В таком состоянии завершается обслуживание требований потока, находившегося на обслуживании в предыдущем состоянии. Никакие новые требования при этом на обслуживание не поступают. В каждом из состояний ОУ пребывает в течение промежутка времени с фиксированной длительностью. После завершения такого промежутка ОУ может перейти в другое состояние или остаться в текущем. Переходы на множестве Γ осуществляются согласно некоторому управляющему алгоритму $s(\Gamma)$. В состояниях обслуживания потока $\bar{\Pi}_j$ действует экстремальная стратегия обслуживания δ_j : из очереди ожидания O_j на обслуживание поступает как можно большее количество требований, но не превышающее пропускной способности ОУ в данном состоянии. Так обеспечивается отсутствие немотивированных простоев ОУ. Пропускная способность в некотором состоянии связана функционально с интенсивностью обслуживания и длительностью пребывания ОУ в этом состоянии. Обслуженные требования потока $\bar{\Pi}_j$ образуют выходной поток Π'_j .

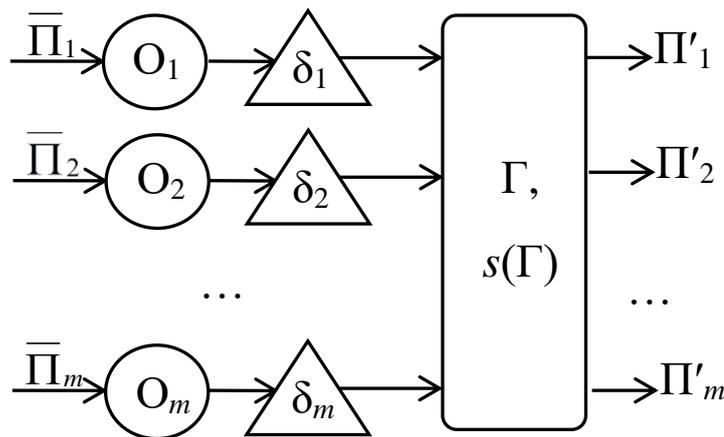


Рисунок 2.1 — Общая схема системы обслуживания требований и управления конфликтными потоками

Таким образом, рассмотренная схема является общей для целого класса систем массового обслуживания. Системы внутри этого класса различаются

двумя составляющими: 1) структурой и математической моделью входных потоков; 2) видом множества Γ и алгоритма $s(\Gamma)$. При изучении реальных систем вид входных потоков обусловлен различными факторами и не находится в распоряжении исследователя. Однако исследователь может выбирать алгоритм $s(\Gamma)$ и устанавливать различные значения его управляющих параметров. Общая цель исследования подобных систем состоит в определении оптимальной стратегии управления. Оптимальной стратегией может называться такой выбор алгоритма $s(\Gamma)$ и значений его управляющих параметров, при котором достигается минимальное значение среднего времени ожидания начала обслуживания произвольным требованием системы.

В работе [146] изучены системы с пуассоновскими входными потоками и двумя различными алгоритмами: циклическим и некоторым алгоритмом с упреждением. В работе [144] рассмотрена система с входными потоками Гнеденко–Коваленко (поток пачек, содержащих не более двух требований) и циклическим алгоритмом $s(\Gamma)$. В текущей работе рассматривается случай, когда входные потоки до поступления в систему были сформированы под воздействием внешних факторов, рассмотренных в главе 1. Следовательно, при моделировании входной поток $\bar{\Pi}_j$ может быть аппроксимирован неординарным пуассоновским потоком $\Pi_j = \{\eta_j(t) : t \geq 0\}$ с параметрами λ_j , p_j , q_j и s_j — интенсивность поступления пачек и вероятности поступления пачки из одного, двух и трех требований соответственно. Одномерные распределения такого потока имеют вид (1.19). В связи с этим далее с входным потоком $\bar{\Pi}_j$ будем ассоциировать его математическую модель Π_j . В текущей главе рассмотрен циклический алгоритм управления такими потоками.

Заметим, что рассматриваемая система с общей схемой на рисунке 2.1 является кибернетической системой, изучение которой может быть проведено с применением подхода Ляпунова–Яблонского. Описание подхода приведено в разделе 1.1. Так, выделяются следующие блоки в схеме системы: 1) входные полюса — m входных потоков $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \dots, \bar{\Pi}_m$; 2) внешняя память — накопители требований O_1, O_2, \dots, O_m ; 3) блок по переработке информации внешней памяти — экстремальные стратегии обслуживания $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$; 4) внутренняя память — обслуживающее устройство с множеством состояний Γ ; 5) блок по переработке информации внутренней памяти — алгоритм $s(\Gamma)$ смены состояний обслуживающего устройства; 6) выходные полюса — выходные потоки $\Pi'_1, \Pi'_2, \dots, \Pi'_m$. Управляющая система осуществляет следующие функции: управ-

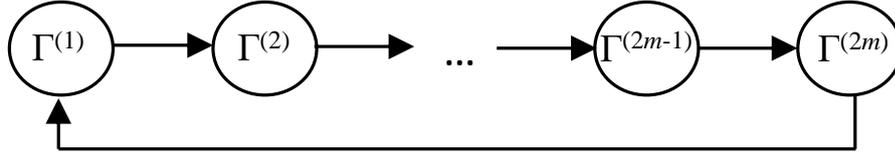
ление входными потоками и обслуживание требований потоков. В следующем разделе на основе принципов кибернетического подхода при выявлении функциональных и статистических связей между указанными блоками будет построена математическая модель системы.

При исследовании кибернетической системы массового обслуживания из класса систем со схемой на рисунке 2.1 будем рассматривать вероятностное пространство вида $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \mathbf{P}_2(\cdot))$. Здесь Ω_2 содержит все возможные описания элементарных исходов $\omega_2 \in \Omega_2$ случайного эксперимента, определяющего процесс обслуживания требований и управления потоками, а также процесс формирования потоков до поступления их в систему. Все наблюдаемые исходы $A \subset \Omega_2$ эксперимента составляют σ -алгебру \mathfrak{F}_2 , на которой задана вероятностная функция $\mathbf{P}_2(A): \mathfrak{F}_2 \rightarrow [0, 1]$. Будем в дальнейших исследованиях опускать символ ω_2 , помня, что все случайные события и величины рассматриваются на основном вероятностном пространстве вида $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2, \mathbf{P}_2(\cdot))$.

2.2 Построение математической модели системы

Рассмотрим случай, когда все входные потоки системы однородны. Это означает, что основные характеристики различных потоков (интенсивность поступления требований, приоритет требований и т. д.) сравнимы по величине. В этом случае ни один из потоков не имеет преимуществ в обслуживании. В связи с этим целесообразно выделить любому потоку Π_j одно состояние обслуживания $\Gamma^{(2j-1)}$ и одно состояние переналадки $\Gamma^{(2j)}$ и рассмотреть циклический управляющий алгоритм $s(\Gamma)$. Тогда $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m)}\}$, а граф алгоритма $s(\Gamma)$ представлен на рисунке 2.2. Пусть ОУ находится в состоянии $\Gamma^{(k)}$ (здесь и далее в этой главе $k \in M = \{1, 2, \dots, 2m\}$, если не указано иное) в течение промежутка длительностью T_k . Тогда цикл смены состояний ОУ будет осуществляться за время $T = \sum_{k \in M} T_k$. Кроме того, пропускная способность ОУ по потоку Π_j в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ выражается величиной $l_j = [\mu_j T_{2j-1}]$.

Система функционирует в непрерывном времени. При построении ее математической модели предлагается соблюдать принципы кибернетического подхода (сформулированные в разделе 1.1) и применять метод вложенных цепей Маркова. Согласно этому методу при исследовании непрерывного процесса необ-

Рисунок 2.2 — Граф циклического алгоритма $s(\Gamma)$

ходимо выбрать дискретные моменты на оси времени таким образом, чтобы значения исследуемого процесса в эти моменты образовывали цепь Маркова. Пусть последовательность $\{\tau_i, i = 0, 1, 2, \dots\}$ составлена из случайных моментов, в которые происходят смены состояний ОУ. При этом $\tau_0 \geq 0$ и $\tau_{i+1} > \tau_i$ (здесь и далее $i \in I = \{0, 1, 2, \dots\}$, если не указано иное). Такими моментами временная ось $0t$ разбивается на счетное число промежутков $\Delta_{-1} = [0, \tau_0)$, $\Delta_i = [\tau_i, \tau_{i+1})$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Будем фиксировать характеристики системы на этих промежутках или в их концах при помощи следующих случайных величин и элементов:

- $\Gamma_i \in \Gamma$ — состояние ОУ на промежутке Δ_i ;
- $\eta_{j,i} \in X = \{0, 1, 2, \dots\}$ — количество требований потока Π_j , поступивших в систему на промежутке Δ_i ;
- $\alpha_{j,i} \in X$ — количество требований потока Π_j , находящихся в очереди ожидания в момент τ_i ;
- $\xi_{j,i} \in \{0, l_j\}$ — максимальное число требований потока Π_j , которое может быть обслужено на промежутке Δ_i ;
- $\xi'_{j,i} \in Y_j = \{0, 1, \dots, l_j\}$ — реальное число требований потока Π_j , обслуженных на промежутке Δ_i (в данном случае $i \in I \cup \{-1\}$).

Относительно введенных величин и их распределений можно заметить следующее. Во-первых, $\tau_{i+1} = \tau_i + t(\Gamma_i)$, $i \in I$, где функция, определяющая длительность пребывания ОУ в некотором состоянии, задана поточечно: $t(\Gamma^{(k)}) = T_k$, $k \in M$. Циклический алгоритм функционально выражен зависимостью $\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i)$, $i \in I$, где

$$u(\Gamma^{(k)}) = \begin{cases} \Gamma^{(k+1)}, & k \in M \setminus \{2m\}; \\ \Gamma^{(1)}, & k = 2m. \end{cases} \quad (2.1)$$

Во-вторых, для величины $\eta_{j,i}$ известны условные вероятности

$$\mathbf{P}(\eta_{j,i} = n \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = \varphi_j(n; T_k), \quad (2.2)$$

где $n \in X$, $k \in M$ и функции $\varphi_j: X \times [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$ согласно (1.19) имеют вид

$$\varphi_j(n; t) = e^{-\lambda_j t} \sum_{u=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{v=0}^{\lfloor \frac{n-2u}{3} \rfloor} p_j^{n-2u-3v} q_j^u s_j^v \frac{(\lambda_j t)^{n-u-2v}}{u!v!(n-2u-3v)!}.$$

В-третьих, значение величины $\xi_{j,i}$ зависит от состояния ОУ. Условное распределение этой величины задается равенством

$$\mathbf{P}(\xi_{j,i} = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = \beta_j(b; \Gamma^{(k)}), \quad (2.3)$$

где $b \in \{0, l_j\}$, $k \in M$ и поточечно заданы функции $\beta_j: \{0, l_j\} \times \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$:

$$\beta_j(b; \Gamma^{(k)}) = \begin{cases} 1, & b = 0, k \in M \setminus \{2j - 1\}; \\ 1, & b = l_j, k = 2j - 1; \\ 0, & \text{в иных случаях.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Можно заметить, что при таком задании максимально насыщенных выходных потоков $\{\xi_{j,i}, i \in I\}$ любые два потока Π_{j_1} и Π_{j_2} ($j_1, j_2 \in J$, $j_1 \neq j_2$) будут в действительности являться конфликтными. Так, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_{j_1,i} > 0, \xi_{j_2,i} > 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(2j_1-1)}) &\leq \mathbf{P}(\xi_{j_2,i} > 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(2j_1-1)}) = \\ &= 1 - \mathbf{P}(\xi_{j_2,i} = 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(2j_1-1)}) = 1 - \beta_{j_2}(0; \Gamma^{(2j_1-1)}) = 0; \\ \mathbf{P}(\xi_{j_1,i} > 0, \xi_{j_2,i} > 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) &\leq \mathbf{P}(\xi_{j_1,i} > 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = \\ &= 1 - \mathbf{P}(\xi_{j_1,i} = 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = 1 - \beta_{j_1}(0; \Gamma^{(k)}) = 0, k \in M \setminus \{2j_1 - 1\}. \end{aligned}$$

Следовательно, никакие два потока не могут обслуживаться одновременно на произвольном промежутке Δ_i , что означает их конфликтность.

Экстремальная стратегия обслуживания δ_j формализована равенством

$$\xi'_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}. \quad (2.5)$$

Заметим, что такая стратегия является однородной по потокам и стационарной по времени [147]. В силу своего содержательного смысла введенные величины связаны соотношением баланса

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi'_{j,i}. \quad (2.6)$$

Следовательно, динамика изменения количества требований в очереди ожидания определяется равенством

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}. \quad (2.7)$$

Заметим, что независимость входных потоков и цикличность смены состояний ОУ позволяет изучать функционирование системы по каждому из потоков в отдельности. В качестве случайного состояния системы с точки зрения потока Π_j в момент τ_i выберем вектор $(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \xi'_{j,i-1})$. При этом первая компонента вектора характеризует систему на промежутке Δ_i , третья – на промежутке Δ_{i-1} , а вторая – в момент τ_i , находящийся на стыке этих промежутков. Кроме того, элемент Γ_i не привязан к конкретному потоку. Итак, функционирование системы определяется многомерной последовательностью

$$\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{j,i}, \xi'_{j,i-1}), i \in I\} \quad (2.8)$$

и рекуррентным по $i \in I$ соотношением

$$(\Gamma_{i+1}, \mathfrak{a}_{j,i+1}, \xi'_{j,i}) = (u(\Gamma_i), \max\{0, \mathfrak{a}_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \min\{\mathfrak{a}_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}). \quad (2.9)$$

Теорема 2. Для каждого $j \in J$ многомерная случайная последовательность (2.8), определяемая рекуррентным соотношением (2.9), с заданным на пространстве $\Gamma \times X \times Y_j$ начальным распределением

$$\{\mathbf{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(k)}, \mathfrak{a}_{j,0} = x, \xi'_{j,-1} = y) : k \in M, x \in X, y \in Y_j\} \quad (2.10)$$

вектора $(\Gamma_0, \mathfrak{a}_{j,0}, \xi'_{j,-1})$ является однородной цепью Маркова.

Доказательство. Зафиксируем $i \in I$ и для всех $r = 0, 1, \dots, i$ произвольные значения $k_r \in M$, $x_r \in X$, $y_r \in Y_j$, а также $k \in M$, $x \in X$, $y \in Y_j$. Введем в рассмотрение следующие случайные события:

$$\begin{aligned} A_{0,i} &= \{\Gamma_r = \Gamma^{(k_r)}, \mathfrak{a}_{j,r} = x_r, \xi'_{j,r-1} = y_r, r = 0, 1, \dots, i\}, \\ A_i &= \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_i, \xi'_{j,i-1} = y_i\}, \\ A_{i+1} &= \{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi'_{j,i} = y\}. \end{aligned}$$

Для $n \in X$ и $b \in \{0, l_j\}$ введем обозначения $H_{n,b} = \{\eta_{j,i} = n, \xi_{j,i} = b\}$. Тогда множество $\{H_{n,b} : n \in X, b \in \{0, l_j\}\}$ образует полную группу попарно несовместных событий и может рассматриваться как набор гипотез при применении формулы полной вероятности. Следовательно, справедливы преобразования

$$\mathbf{P}(A_{i+1} | A_{0,i}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0, l_j\}} \mathbf{P}(H_{n,b} | A_{0,i}) \mathbf{P}(A_{i+1} | A_{0,i}, H_{n,b}). \quad (2.11)$$

Из вида условных распределений (2.2) и (2.3) следует, что при известном значении элемента Γ_i случайные величины $\eta_{j,i}$ и $\xi_{j,i}$ независимы. Кроме того, из физических соображений ясно, что они также не зависят от случайного вектора $(\Gamma_0, \mathfrak{a}_{j,0}, \xi'_{j,-1}, \Gamma_1, \mathfrak{a}_{j,1}, \xi'_{j,0}, \dots, \Gamma_{i-1}, \mathfrak{a}_{j,i-1}, \xi'_{j,i-2}, \mathfrak{a}_{j,i}, \xi'_{j,i-1})$. Тогда с учетом обозначений (2.2) и (2.3) верно равенство

$$\mathbf{P}(H_{n,b} \mid A_{0,i}) = \mathbf{P}(\eta_{j,i} = n, \xi_{j,i} = b \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k_i)}) = \varphi_j(n; T_{k_i}) \beta_j(b; \Gamma^{(k_i)}).$$

В силу рекуррентного соотношения (2.9) имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_{0,i}, H_{n,b}) = \\ &= \mathbf{P}(u(\Gamma^{(k_i)}) = \Gamma^{(k)}, \max\{0, x_i + n - b\} = x, \min\{x_i + n, b\} = y \mid A_{0,i}, H_{n,b}) = \\ &= \mathbf{P}(u(\Gamma^{(k_i)}) = \Gamma^{(k)}, \max\{0, x_i + n - b\} = x, \min\{x_i + n, b\} = y). \end{aligned}$$

Тогда из (2.11) окончательно получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_{0,i}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0, l_j\}} \varphi_j(n; T_{k_i}) \beta_j(b; \Gamma^{(k_i)}) \times \\ &\times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(k_i)}) = \Gamma^{(k)}, \max\{0, x_i + n - b\} = x, \min\{x_i + n, b\} = y). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Аналогичным образом можно показать справедливость равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_i) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0, l_j\}} \varphi_j(n; T_{k_i}) \beta_j(b; \Gamma^{(k_i)}) \times \\ &\times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(k_i)}) = \Gamma^{(k)}, \max\{0, x_i + n - b\} = x, \min\{x_i + n, b\} = y). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Сравнивая последнее равенство с (2.12), получим соотношение

$$\mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_{0,i}) = \mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_i),$$

которое является свойством Маркова, сформулированным для последовательности (2.8). Итак, последовательность (2.8) является многомерной цепью Маркова. В свою очередь, равенства вида (2.13) представляют собой формулы для поиска ее переходных вероятностей за один шаг. Заметим, что правые части указанных равенств не зависят от времени. Следовательно, цепь Маркова является однородной. \square

2.3 Изучение одномерных распределений цепи Маркова (2.8) и ее пространства состояний

Для любых $j \in J$, $i \in I$, $k \in M$, $x \in X$, $y \in Y_j$ введем обозначения для вероятностей событий, порождаемых случайной последовательностью (2.8):

$$Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, x, y) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k)}, \mathfrak{a}_{j,i} = x, \xi'_{j,i-1} = y). \quad (2.14)$$

Кроме того, ради удобства записи дальнейших исследований определим $\Gamma^{(2mi+k)} \equiv \Gamma^{(k)}$, $T_{2mi+k} \equiv T_k$ для любых $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и $k \in M$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Одномерные распределения случайной многомерной последовательности (2.8) удовлетворяют при $i \in I \setminus \{0\}$ рекуррентным соотношениям*

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) = \sum_{v=0}^y Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(y - v; T_{2j-1}), \quad y \in Y_j \setminus \{l_j\}; \quad (2.15)$$

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) = \sum_{v=0}^{x+l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(x + l_j - v; T_{2j-1}), \quad x \in X; \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, x, 0) &= \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \varphi_j(x; T_{2j}) + \\ &+ \sum_{v=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) \varphi_j(x - v; T_{2j}), \quad x \in X; \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, 0) = \sum_{v=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, 0) \varphi_j(x - v; T_{k-1}), \quad (2.18)$$

$$k \in M \setminus \{2j, 2j + 1\}, \quad x \in X.$$

Доказательство. Набор событий вида $\{\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i} = v, \xi'_{j,i-1} = w\}$ при всех $r \in M$, $v \in X$, $w \in Y_j$ является полной группой попарно несовместных событий. Тогда согласно формуле полной вероятности, соотношению (2.13) и с учетом (2.1) справедливы преобразования

$$\begin{aligned}
Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, y) &= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}, v, w) \times \\
&\times \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k)}, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x, \xi'_{j,i} = y \mid \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \mathfrak{a}_{j,i} = v, \xi'_{j,i-1} = w) = \\
&= \sum_{r=1}^{2m} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(r)}, v, w) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0, l_j\}} \varphi_j(n; T_r) \beta_j(b; \Gamma^{(r)}) \times \\
&\times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(r)}) = \Gamma^{(k)}, \max\{0, v + n - b\} = x, \min\{v + n, b\} = y) = \\
&= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, w) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b \in \{0, l_j\}} \varphi_j(n; T_{k-1}) \beta_j(b; \Gamma^{(k-1)}) \times \\
&\times \mathbf{P}(\max\{0, v + n - b\} = x, \min\{v + n, b\} = y).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Напомним, что согласно (2.4) множитель $\beta_j(b; \Gamma^{(k-1)})$ в (2.19) отличен от нуля и равен единице в двух случаях. Рассмотрим сначала случай $k - 1 = 2j - 1$. Тогда из (2.19) получим

$$\begin{aligned}
Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, x, y) &= \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) \beta_j(l_j; \Gamma^{(2j-1)}) \times \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n; T_{2j-1}) \mathbf{P}(\max\{0, v + n - l_j\} = x, \min\{v + n, l_j\} = y) = \\
&= \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{v=0}^c \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) \varphi_j(c - v; T_{2j-1}) \times \\
&\times \mathbf{P}(\max\{0, c - l_j\} = x, \min\{c, l_j\} = y) = \\
&= \sum_{c=0}^{l_j-1} \sum_{v=0}^c \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) \varphi_j(c - v; T_{2j-1}) \mathbf{P}(0 = x, c = y) + \\
&+ \sum_{c=l_j}^{\infty} \sum_{v=0}^c \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) \varphi_j(c - v; T_{2j-1}) \mathbf{P}(c - l_j = x, l_j = y).
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Заметим, что события в аргументе вероятностной функции в последнем равенстве могут быть либо достоверными, либо невозможными в зависимости от значений x , y и c . Следовательно, их вероятности могут быть равны либо единице, либо нулю. В связи с этим равенство (2.20) распадается на рекуррентные соотношения

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) = \sum_{v=0}^y \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) \varphi_j(y - v; T_{2j-1}),$$

$$y \in Y_j \setminus \{l_j\}, \quad (2.21)$$

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) = \sum_{v=0}^{x+l_j} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) \varphi_j(x + l_j - v; T_{2j-1}), \quad x \in X$$

и верное для любых $i \in I$ равенство

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, x, y) = 0, \quad x \in X \setminus \{0\}, \quad y \in Y_j \setminus \{l_j\}. \quad (2.22)$$

Поскольку равенство $\beta_j(b; \Gamma^{(k-1)}) = 1$ возможно также при $k-1 \in M \setminus \{2j-1\}$, $b = 0$, то в этом случае из (2.19) получим

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, y) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, w) \beta_j(0; \Gamma^{(k-1)}) \times$$

$$\times \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n; T_{k-1}) \mathbf{P}(\max\{0, v+n\} = x, \min\{v+n, 0\} = y) =$$

$$= \sum_{v=0}^x \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, w) \varphi_j(x - v; T_{k-1}) \mathbf{P}(0 = y).$$

Следовательно, при $k \in M \setminus \{2j\}$ имеет место соотношение

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, 0) = \sum_{v=0}^x \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, w) \varphi_j(x - v; T_{k-1}) \quad (2.23)$$

и, кроме того, для любых $i \in I$

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, y) = 0, \quad k \in M \setminus \{2j\}, \quad x \in X, \quad y \in Y_j \setminus \{0\}. \quad (2.24)$$

В силу последнего равенства из (2.21) для $i \in I \setminus \{0\}$ получим соотношения

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) = \sum_{v=0}^y Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(y - v; T_{2j-1}), \quad y \in Y_j \setminus \{l_j\},$$

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) = \sum_{v=0}^{x+l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(x + l_j - v; T_{2j-1}), \quad x \in X,$$

которые подтверждают равенства (2.15) и (2.16).

Теперь с учетом равенства (2.22) получим из (2.23) в случае $k = 2j + 1$ соотношение

$$Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, x, 0) = \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \varphi_j(x; T_{2j}) + \\ + \sum_{v=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) \varphi_j(x-v; T_{2j}), \quad x \in X.$$

Это равенство верно для $i \in I \setminus \{0\}$ и совпадает с (2.17). В свою очередь, из (2.23) при $k \in M \setminus \{2j, 2j + 1\}$ и при $i \in I \setminus \{0\}$ с учетом (2.24) получим соотношение (2.18). \square

Замечание. В формулировке леммы 3 участвуют рекуррентные соотношения для одномерных распределений при $i \in I \setminus \{0\}$. Заметим, что согласно рассуждениям доказательства леммы в случае $i = 0$ остаются справедливы рекуррентные соотношения (2.21) и (2.23).

Лемма 4. Для распределений $\{Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, x, y) : k \in M, x \in X, y \in Y_j\}$, порожденных цепью Маркова (2.8) и подчиняющихся рекуррентным соотношениям (2.15)–(2.18), при любом $i \in I$ справедливо условие нормировки $\sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, x, y) = 1$.

Доказательство леммы 4 приведено в приложении В.

Введем при $k \in M$, $|z| \leq 1$ обозначения

$$\Psi_j(T_k; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n; T_k) z^n \quad (2.25)$$

для производящих функций распределений условных вероятностей (2.2) величины $\eta_{j,i}$, отвечающей за входной поток Π_j . Тогда согласно теореме 1 и равенству (1.18) для любого $k \in M$

$$\Psi_j(T_k; z) = \exp\{\lambda_j T_k (s_j z^3 + q_j z^2 + p_j z - 1)\}. \quad (2.26)$$

Кроме того, рассмотрим производящие функции

$$\Phi_{j,i}(\Gamma^{(k)}, z, y) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, x, y) z^x, \quad k \in M, y \in Y_j, |z| \leq 1, \quad (2.27)$$

одномерных распределений последовательности $\{\alpha_{j,i}, i \in I\}$, отвечающей за динамику изменения количества ожидающих заявок в очереди O_j . Имеет место следующая лемма.

Лемма 5. Производящие функции (2.27) удовлетворяют при $i \in I \setminus \{0\}$ рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} \Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) &= z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j-1}; z) \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, z, 0) - \\ &- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r; \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) &= \Psi_j(T_{2j}; z) \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + \\ &+ \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w); \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, z, 0) = \Psi_j(T_{k-1}; z) \Phi_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, z, 0), \quad k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}. \quad (2.30)$$

Доказательство. Установим сначала справедливость равенства (2.28). Воспользуемся соотношением (2.16):

$$\begin{aligned} \Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) &= \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) z^x = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{x+l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(x+l_j-v; T_{2j-1}) z^{x+l_j-v-(l_j-v)} = \\ &= z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l_j-v; T_{2j-1}) z^{x+l_j-v} + \\ &+ z^{-l_j} \sum_{v=l_j}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{x=v-l_j}^{\infty} \varphi_j(x+l_j-v; T_{2j-1}) z^{x+l_j-v} = \\ &= z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=l_j-v}^{\infty} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r + \\ &+ z^{-l_j} \sum_{v=l_j}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений для производящих функций получим

$$\begin{aligned} \Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) &= z^{-l_j} \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \Psi_j(T_{2j-1}; z) - \\ &- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z^{-l_j} \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, z, 0) \Psi_j(T_{2j-1}; z) - \\
&- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r.
\end{aligned}$$

Аналогичные преобразования для функций вида $\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$ с учетом (2.17) дадут в результате

$$\begin{aligned}
\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) &= \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, x, 0) z^x = \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \varphi_j(x; T_{2j}) z^x + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) \varphi_j(x-v; T_{2j}) z^x = \\
&= \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x; T_{2j}) z^x + \\
&+ \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) z^v \sum_{x=v}^{\infty} \varphi_j(x-v; T_{2j}) z^{x-v} = \\
&= \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \Psi_j(T_{2j}; z) + \Phi_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) \Psi_j(T_{2j}; z),
\end{aligned}$$

что подтверждает равенство (2.29). Наконец, применяя соотношение (2.18), получим для любого $k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}$

$$\begin{aligned}
\Phi_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, z, 0) &= \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, 0) z^x = \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, 0) \varphi_j(x-v; T_{k-1}) z^x = \\
&= \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, 0) z^v \sum_{x=v}^{\infty} \varphi_j(x-v; T_{k-1}) z^{x-v} = \Phi_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, z, 0) \Psi_j(T_{k-1}; z).
\end{aligned}$$

Таким образом, установлено и последнее соотношение (2.30), участвующее в формулировке леммы. \square

Полученные рекуррентные соотношения (2.28)–(2.30) имеют место при $i \in I \setminus \{0\}$. Указанные соотношения необходимы в дальнейшем главным образом для изучения предельной динамики системы при $i \rightarrow \infty$ вне зависимости от начальных условий. Таким образом, переход от $i = 0$ к $i = 1$ не играет

существенной роли и не будет рассматриваться в работе. В то же время, рекуррентные соотношения для случая $i = 0$ могут быть получены аналогично рассуждениям доказательства леммы 5.

В лемме 5 получены рекуррентные соотношения за один шаг перехода цепи Маркова (2.8). Теперь необходимо получить подобные соотношения за $2m$ шагов цепи, т. е. за полный цикл смены состояний ОУ длительностью T .

Лемма 6. *Производящие функции (2.27) удовлетворяют при $i \in I \setminus \{0\}$ рекуррентным соотношениям*

$$\begin{aligned} \Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) &= z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + \\ &+ z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - \\ &- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r; \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) &= z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) + \\ &+ \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$- z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r;$$

$$\begin{aligned} \Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(k)}, z, 0) &= z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, z, 0) - \\ &- z^{-l_j} \Psi_j\left(\sum_{u=k-l-1}^{k-1} T_u; z\right) \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-l-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \times \\ &\times \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r + \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$+ \Psi_j\left(\sum_{u=k-l-1}^{k-1} T_u; z\right) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-l-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w),$$

где $k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}$ и

$$l = \begin{cases} k - 2j - 1, & k > 2j + 1, \\ k + 2m - 2j - 1, & k < 2j. \end{cases}$$

Доказательство леммы 6 приведено в приложении Г.

Произведем теперь классификацию состояний многомерной цепи Маркова (2.8). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Пространство $\Gamma \times X \times Y_j$ состояний многомерной цепи Маркова (2.8) содержит незамкнутое подмножество D_j несущественных состояний и замкнутое подмножество E_j существенных $2m$ -периодических состояний. При этом*

$$\begin{aligned} D_j &= \{(\Gamma^{(k)}, x, y) : k \in M \setminus \{2j\}, x \in X, y \in Y_j \setminus \{0\}\} \cup \\ &\quad \cup \{(\Gamma^{(2j)}, x, y) : x \in X \setminus \{0\}, y \in Y_j \setminus \{l_j\}\}; \\ E_j(\Gamma^{(2j)}) &= \{(\Gamma^{(2j)}, x, l_j), x \in X\} \cup \{(\Gamma^{(2j)}, 0, y), y \in Y_j \setminus \{l_j\}\}; \\ E_j(\Gamma^{(k)}) &= \{(\Gamma^{(k)}, x, 0), x \in X\}, \quad k \in M \setminus \{2j\}; \\ E_j &= \bigcup_{k=1}^{2m} E_j(\Gamma^{(k)}); \quad \Gamma \times X \times Y_j = D_j \cup E_j. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Доказательство. Согласно (2.22) и (2.24) вероятности нахождения цепи Маркова (2.8) в любом из состояний множества D_j в момент τ_i , начиная с $i = 1$, равны нулю. Другими словами, если цепь Маркова в начальный момент находилась в состоянии множества D_j , то за один шаг она выйдет из этого множества и не вернется в него. Следовательно, множество D_j является незамкнутым, а его состояния — несущественными. Действительно, нахождение цепи в момент τ_i в состоянии вида $(\Gamma^{(k)}, x, y)$ при $k \in M \setminus \{2j\}$, $x \in X$, $y \in Y_j \setminus \{0\}$ означает, что ОУ на промежутке Δ_{i-1} не находилось в состоянии обслуживания потока Π_j , но при этом систему покинуло положительное число заявок этого потока. В свою очередь, пребывание цепи в момент τ_i в состоянии вида $(\Gamma^{(2j)}, x, y)$ при $x \in X \setminus \{0\}$, $y \in Y_j \setminus \{l_j\}$ указывает на то, что ОУ на промежутке Δ_{i-1} находилось в состоянии $\Gamma^{(2j-1)}$ обслуживания потока Π_j , к концу этого промежутка в очереди O_j осталось положительное число требований, хотя ОУ не реализовало всей своей пропускной способности l_j . Обе эти ситуации невозможны для исследуемой системы, описание которой дано в разделе 2.1.

Теперь рассмотрим множество $E_j = \Gamma \times X \times Y_j \setminus D_j$. Разобьем его на подмножества $E_j(\Gamma^{(k)})$, $k \in M$, сформированные согласно (2.34), и покажем, что все состояния множества E_j сообщаются между собой. Для этого зафиксируем некоторое состояние, например $(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0) \in E_j$, и приведем два следующих алгоритма. Первый алгоритм показывает, как произвольное состояние $(\Gamma^{(s)}, x, y) \in E_j$ достижимо из выбранного $(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)$.

Начало алгоритма 1: цепь Маркова (2.8) в состоянии $(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)$;
 Присвоить переменной r значение $2j - 1$;
 Пока $(next(r) \neq s)$ {
 Переход в состояние $(u(\Gamma^{(r)}), 0, 0)$ с вероятностью $\varphi_j(0; T_r)$;
 Присвоить переменной r значение $next(r)$; }
 Переход в состояние $(\Gamma^{(s)}, x, y)$ с вероятностью $\varphi_j(x + y; T_r)$;
 Конец алгоритма 1: цепь Маркова (2.8) в состоянии $(\Gamma^{(s)}, x, y)$.

Здесь функция $next(r): M \rightarrow M$ задана поточечно: $next(k) = k + 1$ при $k \in M \setminus \{2m\}$ и $next(2m) = 1$. Вторым алгоритм показывает, как состояние $(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)$ можно достичь из произвольного состояния $(\Gamma^{(s)}, x, y) \in E_j$.

Начало алгоритма 2: цепь Маркова (2.8) в состоянии $(\Gamma^{(s)}, x, y) \in E_j$;
 Присвоить переменным r и v значения s и x соответственно;
 Пока $((r \neq 2j - 1)$ или $(v \neq 0))$ {
 Присвоить переменной w значение 0;
 Если $(r = 2j - 1)$ {
 Присвоить переменной w значение $\min\{v, l_j\}$;
 Присвоить переменной v значение $v - w$; }
 Переход в состояние $(u(\Gamma^{(r)}), v, w)$ с вероятностью $\varphi_j(0; T_r)$;
 Присвоить переменной r значение $next(r)$; }
 Конец алгоритма 2: цепь Маркова (2.8) в состоянии $(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)$.

Таким образом, получаем, что любые два состояния множества E_j сообщаются – как минимум, через состояние $(\Gamma^{(2j-1)}, 0, 0)$. Следовательно, замкнутое множество E_j является классом существенных состояний. Кроме того, в силу цикличности управляющего алгоритма (2.1), покинув произвольное состояние из E_j , можно в него вернуться с положительной вероятностью за $2mi$ шагов, где $i = 1, 2, \dots$. Действительно, если в произвольный момент цепь (2.8) находится в состоянии множества $E_j(\Gamma^{(k)})$, $k \in M$, то в следующий момент она непременно перейдет в состояние множества $E_j(u(\Gamma^{(k)}))$ и т. д. При этом первое возвращение в какое-либо (в т. ч. и исходное) состояние множества $E_j(\Gamma^{(k)})$ возможно минимум через цикл алгоритма (2.1), т. е. через $2m$ шагов. \square

Замечание. В начальный момент τ_0 цепь Маркова (2.8) может находиться в любом из состояний пространства $\Gamma \times X \times Y_j$. В связи с этим ранее рассматривалось произвольное начальное вероятностное распределение вида (2.10). Однако, в теореме 3 было установлено, что выходя в начальный момент из произволь-

ного несущественного состояния, цепь (2.8) окончательно покидает множество D_j за один шаг. Таким образом, не уменьшая общности, далее будем задавать начальное распределение цепи (2.8) лишь на классе существенных состояний:

$$\{\mathbf{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(k)}, \mathfrak{a}_{j,0} = x, \xi'_{j,-1} = y) : (\Gamma^{(k)}, x, y) \in E_j\}. \quad (2.35)$$

2.4 Критерий существования стационарного режима

Результаты исследований вероятностных свойств многомерной марковской последовательности (2.8), полученные в разделе 2.3, позволяют определить т. н. условия стационарности. Стационарный режим в системе управления потоками содержательно связан с сохранением средних характеристик системы. В частности, что будет показано ниже, в стационарном режиме не происходит неограниченного нарастания количества требований в очереди ожидания. С точки зрения математической модели системы стационарный режим связан с существованием стационарного распределения цепи Маркова (2.8), не зависящего от начальных условий. Согласно теории цепей Маркова, если для цепи существует эргодическое распределение, то оно также является стационарным. В связи с этим далее поиск стационарного распределения будем связывать с поиском эргодического, т. е. наблюдать за динамикой распределения с течением времени ($i \rightarrow \infty$) вне зависимости от начального распределения (2.35).

Теорема 4. *Необходимое и достаточное условие существования стационарного режима в системе по потоку Π_j заключается в выполнении неравенства*

$$\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - l_j < 0. \quad (2.36)$$

Доказательство. 1. Докажем необходимость условия (2.36) для существования стационарного режима. Пусть стационарное распределение

$$\{Q_j(\Gamma^{(k)}, x, y) : (\Gamma^{(k)}, x, y) \in E_j\} \quad (2.37)$$

цепи Маркова (2.8) существует. Кроме того, пусть стационарное распределение выбрано в качестве начального (2.35). Тогда согласно (2.31) производящие функции $\Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = \sum_{x=0}^{\infty} Q_j(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) z^x$ удовлетворяют соотношению

$$\Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = r_j(z) \Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + A_j(z), \quad (2.38)$$

где введены вспомогательные функции

$$r_j(z) = z^{-l_j} \Psi_j(T; z) = z^{-l_j} \exp\{\lambda_j T(s_j z^3 + q_j z^2 + p_j z - 1)\}, \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} A_j(z) = z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - \\ - z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Указанные функции являются аналитическими в области $|z| \leq 1 + \delta$, где $\delta > 0$. Разложим функции $r_j(z)$ и $A_j(z)$ по степеням $(z - 1)$ в указанной области. Для функции $r_j(z)$ непосредственно получим

$$r_j(z) = 1 + (\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - l_j)(z - 1) + o(z - 1),$$

а функцию $A_j(z)$ предварительно преобразуем. Заметим, что при выборе стационарного распределения в качестве начального, соотношение (2.15) для любых $y \in Y_j \setminus \{l_j\}$ приобретает вид

$$Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) = \sum_{v=0}^y Q_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(y - v; T_{2j-1}).$$

Тогда, вводя замену переменных и меняя порядок суммирования, получим

$$\begin{aligned} A_j(z) = z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - \\ - z^{-l_j} \sum_{y=0}^{l_j-1} \sum_{v=0}^y Q_j(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(y - v; T_{2j-1}) z^y = \\ = z^{-l_j} \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) (\Psi_j(T; z) - z^y). \end{aligned}$$

Следовательно, имеет место следующее разложение:

$$\begin{aligned} A_j(z) = A_j(1) + A'_j(z)|_{z=1}(z - 1) + o(z - 1) = \\ = \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) (\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - y)(z - 1) + o(z - 1). \end{aligned}$$

Теперь равенство (2.38) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = (1 + (\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - l_j)(z - 1)) \Phi_j(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + \\ + \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) (\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - y)(z - 1) + o(z - 1). \end{aligned}$$

Отсюда, поделив обе части равенства на $(z - 1)$ и перейдя в области $|z| \leq 1 + \delta$ к пределу $z \rightarrow 1$, получим

$$0 = (\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - l_j) \Phi_j(\Gamma^{(2j)}, 1, l_j) + \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) (\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - y).$$

Таким образом, существование стационарного распределения (2.37) равносильно выполнению равенства

$$\begin{aligned} (l_j - \lambda_j T(2s_j + q_j + 1)) (\Phi_j(\Gamma^{(2j)}, 1, l_j) + \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y)) = \\ = \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) (l_j - y). \end{aligned}$$

Правая часть полученного равенства положительна. Множитель

$$\left(\Phi_j(\Gamma^{(2j)}, 1, l_j) + \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_j(\Gamma^{(2j)}, 0, y) \right)$$

в левой части также положителен. Следовательно, для существования стационарного распределения необходимо выполнение равенства (2.36).

2. Перейдем к доказательству достаточности условия (2.36) для существования стационарного режима. Предположим, что при выполнении (2.36) стационарного распределения цепи Маркова (2.8) не существует. В этом случае согласно [148] имеет место предельное равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, x, y) = 0 \quad (2.41)$$

для любых $k \in M$, $x \in X$, $y \in Y_j$. Рассмотрим математическое ожидание $\mathbf{M}\mathfrak{a}_{j,2mi}$ количества требований в очереди по потоку Π_j в момент τ_{2mi} . С учетом равенства нулю вероятностей в (2.22) и (2.24) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathfrak{a}_{j,2mi} &= \sum_{x=0}^{\infty} x \sum_{k=1}^{2m} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, x, y) = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \sum_{k \in M \setminus \{2j\}} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, x, 0) + \sum_{x=0}^{\infty} x Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Теперь для любого натурального x^* справедливы преобразования

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\mathfrak{a}_{j,2mi} &= \sum_{x=0}^{x^*} x \sum_{k \in M \setminus \{2j\}} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, x, 0) + \sum_{x=x^*+1}^{\infty} x \sum_{k \in M \setminus \{2j\}} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, x, 0) + \\
&\quad + \sum_{x=0}^{x^*} x Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) + \sum_{x=x^*+1}^{\infty} x Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) \geq \\
&\geq \sum_{x=x^*+1}^{\infty} x \sum_{k \in M \setminus \{2j\}} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, x, 0) + \sum_{x=x^*+1}^{\infty} x Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) \geq \\
&\geq x^* \left(\sum_{x=x^*+1}^{\infty} \sum_{k \in M \setminus \{2j\}} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, x, 0) + \sum_{x=x^*+1}^{\infty} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) \right) = \\
&= x^* \left(1 - \sum_{k \in M \setminus \{2j\}} \sum_{x=0}^{x^*} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, x, 0) - \sum_{x=0}^{x^*} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) \right).
\end{aligned}$$

Поскольку при сделанных предположениях имеет место предельное равенство (2.41), то для любого малого $\varepsilon > 0$ и большого x^* найдется индекс $i^*(\varepsilon, x^*)$ такой, что для всех $i > i^*(\varepsilon, x^*)$ верно неравенство

$$\mathbf{M}\mathfrak{a}_{j,2mi} \geq x^*(1 - \varepsilon). \quad (2.43)$$

Таким образом, за счет выбора x^* при отсутствии стационарного распределения можно сделать величину $\mathbf{M}\mathfrak{a}_{j,2mi}$ сколь угодно большой.

Рассмотрим теперь производящие функции вида $\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$. Аналогично (2.40) введем для всех $i \in I$ функции

$$\begin{aligned}
A_{j,2mi}(z) &= z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - \\
&- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r.
\end{aligned}$$

Тогда рекуррентное соотношение (2.31) приобретает вид

$$\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = r_j(z) \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + A_{j,2mi}(z). \quad (2.44)$$

Функция $r_j(z)$, определенная в (2.39), удовлетворяет равенству $r_j(z) = 1$, и в предположении (2.36) имеет место $r'_j(z)|_{z=1} = \lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - l_j < 0$. Следовательно, существует точка $z^* > 1$ такая, что при любых $z \in (1, z^*]$ выполняется

неравенство $0 < r_j(z) < 1$. Для функций $A_{j,2mi}(z)$ с учетом (2.15) при $z \in (1, z^*]$ справедливы следующие оценки и преобразования:

$$\begin{aligned}
|A_{j,2mi}(z)| &\leq |z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, w)| + \\
&+ |z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} \sum_{v=0}^w Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(w-v; T_{2j-1}) z^w| \leq \\
&\leq |z^{-l_j} \Psi_j(T; z)| + |z^{-l_j} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) z^w| = \\
&= r_j(z) + \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) z^{w-l_j}.
\end{aligned}$$

Тогда в промежутке $(1, z^*]$ имеет место оценка $|A_{j,2mi}(z)| < K_{2j}$, где K_{2j} – некоторая постоянная, причем $K_{2j} < l_j + 1$.

Выберем начальное распределение (2.35) так, чтобы $\Phi_{j,0}(\Gamma^{(2j)}, z^*, l_j) < \infty$. Тогда $\Phi_{j,0}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) < \infty$ в любой точке промежутка $(1, z^*]$. Теперь для $z \in (1, z^*]$ определим мажорирующие функции $\tilde{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$, $i \in I$. Пусть $\tilde{\Phi}_{j,0}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = \Phi_{j,0}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$ и

$$\tilde{\Phi}_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) = r_j(z) \tilde{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + K_{2j}, \quad i \in I. \quad (2.45)$$

Соотношение (2.45) задает в случае $r_j(z) < 1$ сжимающее отображение с неподвижной точкой $K_{2j}/(1 - r_j(z))$. Тогда при ограниченном начальном значении $\tilde{\Phi}_{j,0}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) < \infty$ функции $\tilde{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$ ограничены сверху некоторой постоянной $C_{2j} > 0$ при любом $i \in I$. Итак, сравнив (2.44) и (2.45), получим для любого $i \in I$

$$\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) \leq \tilde{\Phi}_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) \leq C_{2j}.$$

Таким образом, степенной ряд $\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$ сходится в области $(0, z^*]$ для любого $i \in I$. Следовательно, функции $\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$ являются аналитическими и имеют производные, ограниченные некоторой постоянной $L_{2j} > 0$:

$$\frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) \leq L_{2j}.$$

Аналогичным образом можно показать, что производящие функции $\Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, z, 0)$, $k \in M \setminus \{2j\}$, $i \in I$, в области $(0, z^*]$ также имеют ограниченные производные:

$$\frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, z, 0) \leq L_k,$$

где $L_k > 0$ при любом $k \in M$. В этом случае из (2.42) следует оценка

$$\mathbf{M}\alpha_{j,2mi} = \sum_{k \in M \setminus \{2j\}} \frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, z, 0)|_{z=1} + \frac{d}{dz} \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)|_{z=1} \leq \sum_{k=1}^{2m} L_k.$$

Получено противоречие с неограниченностью величины $\mathbf{M}\alpha_{j,2mi}$, установленной в (2.43). Следовательно, сделанное предположение неверно, и условие (2.36) является достаточным для существования стационарного распределения. \square

Замечание 1. В теореме 4 установлен критерий существования в системе стационарного режима только по отдельному потоку Π_j . Для существования стационарного режима во всей системе необходимо и достаточно одновременного выполнения условий

$$\lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - l_j < 0, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Замечание 2. Условия вида (2.36) при произвольном $j \in J$ для реальной системы управления потоками легко проверить. Так, критерий (2.36) является ограничением на ключевые параметры системы, физический смысл и реальное значение которых известны: параметры входного неординарного пуассоновского потока Π_j , длительность полного цикла смены состояний ОУ, пропускная способность ОУ для потока Π_j . При этом длительность цикла является одним из основных управляющих параметров системы. В связи с этим полученные условия стационарности могут быть использованы для сокращения допустимой области значений управляющих параметров при численном поиске оптимального управления.

Глава 3. Управление неоднородными потоками алгоритмом с пороговым приоритетом и продлением

В главе 3 исследуется система, принадлежащая классу, рассмотренному в разделе 2.1. Предполагается при этом, что входные потоки имеют одинаковую вероятностную структуру, но существенно различаются интенсивностью поступления требований и приоритетом требований. Управляющий алгоритм является адаптивным алгоритмом с пороговым приоритетом и возможностью продления обслуживания. Построена математическая модель такой системы в виде пятимерной цепи Маркова. Изучено пространство состояний указанной цепи. Доказано утверждение о существовании предельного распределения. Получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений цепи Маркова и для их производящих функций. Доказывается критерий существования стационарного режима в системе по потоку с высоким приоритетом. Определяются условия, при которых в системе не будет существовать стационарный режим по потоку с большой интенсивностью поступления требований.

3.1 Описание входных потоков и управляющего алгоритма

В разделе 2.1 был представлен класс кибернетических систем – систем массового обслуживания, осуществляющих также управление входными конфликтными потоками. Общая схема класса систем изображена на рисунке 2.1. В разделах 2.2–2.4 рассмотрена система с входными потоками, каждый из которых может быть аппроксимирован неординарным пуассоновским, и циклическим алгоритмом управления. Все величины, параметры и обозначения главы 2, для которых не будет дано явное переопределение, сохраняются. В текущей главе изучается ситуация, когда входные потоки имеют, как и прежде, одинаковую вероятностную структуру, однако являются неоднородными между собой, т. е. существенно различаются интенсивностью требований и их приоритетом. Так, пусть поток $\bar{\Pi}_j$, $j \in J$, по-прежнему ассоциируется со своей математической моделью в виде неординарного пуассоновского потока Π_j с параметрами λ_j , p_j , q_j и s_j . Общая интенсивность поступления требований такого потока выражается

величиной $\lambda_j(2s_j + q_j + 1)$. Пусть требования потока Π_1 обладают высоким приоритетом, но интенсивность поступления требований по потоку Π_1 мала. Поток Π_m , в свою очередь, имеет большую интенсивность поступления требований, но низкий приоритет. Потоки $\Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{m-1}$ имеют малую интенсивность требований и низкий приоритет. В этом случае циклический алгоритм управления не представляется рациональным. Напротив, необходимо организовать в системе обратную связь по количеству требований в очереди ожидания высокоприоритетного потока Π_1 . Кроме того, целесообразно осуществлять продление обслуживания потока Π_m с большой интенсивностью. С этой целью предлагается рассмотреть множество состояний ОУ вида $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m+1)}\}$. В состоянии $\Gamma^{(k)}$ (здесь и далее в этой главе $k \in M = \{1, 2, \dots, 2m + 1\}$, если не указано иное) ОУ находится в течение промежутка времени длительностью T_k . При этом любое из состояний вида $\Gamma^{(2j-1)}$ по-прежнему выделено для обслуживания потока Π_j . Также введено дополнительное состояние $\Gamma^{(2m)}$ обслуживания потока Π_m , причем $T_{2m-1} > T_{2m}$. Пропускная способность в дополнительном состоянии обслуживания характеризуется величиной $l'_m = [\mu_m T_{2m}]$, $l'_m \leq l_m$. Состояния $\Gamma^{(2j)}$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, и $\Gamma^{(2m+1)}$ являются состояниями переналадки ОУ после обслуживания соответствующего потока. Решения о смене или продлении текущего состояния ОУ принимаются в моменты $\tau_0, \tau_{i+1} = \tau_i + t(\Gamma_i)$, $i \in I$. Здесь $t(\Gamma^{(k)}) = T_k$, $k \in M$. На каждом из промежутков Δ_i , $i \in I$, или на их концах следующие величины и элементы, введенные в разделе 2.2, сохраняют свой смысл и множество значений: $\Gamma_i \in \Gamma$ и $\eta_{j,i} \in X$, $\alpha_{j,i} \in X$ при $j \in J$. Кроме того, для любого $i \in I \cup \{-1\}$ по-прежнему $\xi'_{j,i} \in Y_j$, $j \in J$. Однако теперь $\xi_{j,i} \in B_j = \{0, l_j\}$ для $j \in J \setminus \{m\}$ и $\xi_{m,i} \in B_m = \{0, l'_m, l_m\}$.

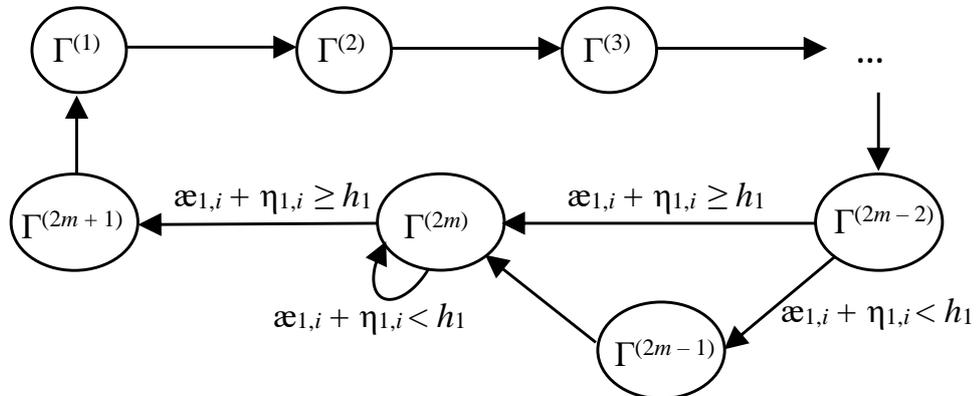


Рисунок 3.1 — Граф алгоритма управления $s(\Gamma)$ с пороговым приоритетом и возможностью продления

Предлагается алгоритм управления $s(\Gamma)$, граф переходов на множестве состояний ОУ которого представлен на рисунке 3.1. При этом реализуется «пороговый» приоритет потока Π_1 с величиной порога $h_1 \in \{0, 1, \dots, l_1 - 1\}$. Величина h_1 является управляющим параметром системы. Алгоритм является алгоритмом с упреждением. Так, в момент τ_i происходит упреждающее вычисление количества $\mathfrak{a}_{j,i+1}$ требований в очереди в момент τ_{i+1} согласно соотношению (2.6). Поскольку подобные вычисления производятся, когда ОУ не находится в состоянии обслуживания потока Π_1 , то $\xi'_{1,i} = 0$ и $\mathfrak{a}_{j,i+1} = \mathfrak{a}_{j,i} + \eta_{j,i}$. Если ожидается, что эта величина не достигнет к концу текущего промежутка Δ_i величины порога h_1 , то принимается решение о дальнейшем увеличении интервала обслуживания потока с большой интенсивностью. Такое увеличение может происходить либо за счет перехода в более длительное состояние $\Gamma^{(2m-1)}$, либо за счет продления более короткого состояния $\Gamma^{(2m)}$. В противном случае принимается решение о наискорейшем переходе к состоянию обслуживания высокоприоритетного потока Π_1 . Заметим, что в случае $h_1 = 0$ управляющий алгоритм вырождается в циклический алгоритм на множестве состояний $\{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(2m-2)}, \Gamma^{(2m)}, \Gamma^{(2m+1)}\}$. Кроме того, в случае $h_1 \geq l_1$ система не будет справляться с обслуживанием потока Π_1 , и количество ожидающих требований этого потока будет неограниченно возрастать. Такое управление заведомо не является эффективным, поэтому величина порога h_1 ограничена сверху пропускной способностью l_1 .

3.2 Математическая модель системы

Функциональные и статистические связи между величинами системы, представленной в разделе 3.1, математически можно формализовать следующим образом. Во-первых, алгоритм переходов на множестве состояний ОУ выражается равенством

$$\Gamma_{i+1} = u(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \eta_{1,i}),$$

где функция $u: \Gamma \times X \times X \rightarrow \Gamma$ задана поточечно:

$$u(\Gamma^{(k)}, x_1, n_1) = \begin{cases} \Gamma^{(k+1)}, k \in M \setminus \{2m-2, 2m, 2m+1\}; \\ \Gamma^{(2m-1)}, k = 2m-2, x_1 + n_1 < h_1; \\ \Gamma^{(2m)}, k = 2m-2, x_1 + n_1 \geq h_1; \\ \Gamma^{(2m)}, k = 2m, x_1 + n_1 < h_1; \\ \Gamma^{(2m+1)}, k = 2m, x_1 + n_1 \geq h_1; \\ \Gamma^{(1)}, k = 2m+1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Во-вторых, при сохранении обозначений (2.3) условное распределение величин $\xi_{j,i}$ задается функциями $\beta_j: B_j \times \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$, где

$$\beta_j(b; \Gamma^{(k)}) = \begin{cases} 1, b = 0, k \in M \setminus \{2j-1\}, j \in J \setminus \{m\}; \\ 1, b = 0, k \in M \setminus \{2m-1, 2m\}, j = m; \\ 1, b = l_j, k = 2j-1, j \in J; \\ 1, b = l'_m, k = 2m, j = m; \\ 0, \text{ в иных случаях.} \end{cases} \quad (3.2)$$

Тогда для любого $i \in I$ имеют место следующие оценки:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\xi_{1,i} > 0, \xi_{m,i} > 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(1)}) &\leq \mathbf{P}(\xi_{m,i} > 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(1)}) = \\ &= 1 - \mathbf{P}(\xi_{m,i} = 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(1)}) = 1 - \beta_m(0; \Gamma^{(1)}) = 0; \\ \mathbf{P}(\xi_{1,i} > 0, \xi_{m,i} > 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) &\leq \mathbf{P}(\xi_{1,i} > 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = \\ &= 1 - \mathbf{P}(\xi_{1,i} = 0 \mid \Gamma_i = \Gamma^{(k)}) = 1 - \beta_1(0; \Gamma^{(k)}) = 0, k \in M \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

Таким образом, невозможно осуществлять обслуживание потоков Π_1 и Π_m одновременно, что указывает на их конфликтность. Аналогичные рассуждения применимы для любого набора из $2, 3, \dots, m$ потоков. Следовательно, потоки $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ являются конфликтными в совокупности.

Пусть по-прежнему имеют место соотношения (2.5) и (2.7) для любого $j \in J$. Поскольку рассматриваемый управляющий алгоритм реализует обратную связь по количеству ожидающих требований высокоприоритетного потока, то изучать динамику функционирования системы по каждому потоку в отдельности не представляется возможным. В качестве случайного состояния системы в момент τ_i предлагается выбирать пятимерный вектор

$$(\Gamma_i, \alpha_{1,i}, \alpha_{j,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{j,i-1}),$$

где $j \in J \setminus \{1\}$. Для компонент вектора справедливы рекуррентные по $i \in I$ соотношения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i+1} &= u(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \eta_{1,i}), \\ \mathfrak{a}_{1,i+1} &= \max\{0, \mathfrak{a}_{1,i} + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, \quad \mathfrak{a}_{j,i+1} = \max\{0, \mathfrak{a}_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \\ \xi'_{1,i} &= \min\{\mathfrak{a}_{1,i} + \eta_{1,i}, \xi_{1,i}\}, \quad \xi'_{j,i} = \min\{\mathfrak{a}_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Для каждого $j \in J \setminus \{1\}$ многомерная случайная последовательность*

$$\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{j,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{j,i-1}), i \in I\}, \quad (3.4)$$

для компонент которой справедливы соотношения (3.3), с заданным на пространстве $\Gamma \times X \times X \times Y_1 \times Y_j$ начальным распределением вектора $(\Gamma_0, \mathfrak{a}_{1,0}, \mathfrak{a}_{j,0}, \xi'_{1,-1}, \xi'_{j,-1})$ является однородной многомерной цепью Маркова.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $i \in I, k \in M, x_1, x_j \in X, y_1 \in Y_1, y_j \in Y_j$. Кроме того, для всех $r = 0, 1, \dots, i$ зафиксируем значения $k_r \in M, x_{1,r}, x_{j,r} \in X, y_{1,r} \in Y_1, y_{j,r} \in Y_j$. Введем в рассмотрение события вида

$$A_{0,i} = \{\Gamma_r = \Gamma^{(k_r)}, \mathfrak{a}_{1,r} = x_{1,r}, \mathfrak{a}_{j,r} = x_{j,r}, \xi'_{1,r-1} = y_{1,r}, \xi'_{j,r-1} = y_{j,r}, r = 0, 1, \dots, i\},$$

$$A_i = \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i)}, \mathfrak{a}_{1,i} = x_{1,i}, \mathfrak{a}_{j,i} = x_{j,i}, \xi'_{1,i-1} = y_{1,i}, \xi'_{j,i-1} = y_{j,i}\},$$

$$A_{i+1} = \{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k)}, \mathfrak{a}_{1,i+1} = x_1, \mathfrak{a}_{j,i+1} = x_j, \xi'_{1,i} = y_1, \xi'_{j,i} = y_j\}.$$

Кроме того, для любых $n_1, n_j \in X, b_1 \in B_1, b_j \in B_j$ введем обозначения

$$H_{n_1, n_j, b_1, b_j} = \{\eta_{1,i} = n_1, \xi_{1,i} = b_1, \eta_{j,i} = n_j, \xi_{j,i} = b_j\}.$$

Тогда согласно формуле полной вероятности и по аналогии с рассуждениями доказательства теоремы 2 справедливы следующие преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_{0,i}) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{b_1 \in B_1} \sum_{n_j=0}^{\infty} \sum_{b_j \in B_j} \mathbf{P}(H_{n_1, n_j, b_1, b_j} \mid A_{0,i}) \mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_{0,i}, H_{n_1, n_j, b_1, b_j}) = \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{b_1 \in B_1} \sum_{n_j=0}^{\infty} \sum_{b_j \in B_j} \varphi_1(n_1; T_{k_i}) \beta_1(b_1; \Gamma^{(k_i)}) \varphi_j(n_j; T_{k_i}) \beta_j(b_j; \Gamma^{(k_i)}) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(k_i)}, x_{1,i}, n_1) = \Gamma^{(k)}, \max\{0, x_{1,i} + n_1 - b_1\} = x_1, \\ &\quad \max\{0, x_{j,i} + n_j - b_j\} = x_j, \min\{x_{1,i} + n_1, b_1\} = y_1, \min\{x_{j,i} + n_j, b_j\} = y_j) = \\ &= \mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_i). \end{aligned}$$

Итак, установлено для всех $i \in I$ равенство $\mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_{0,i}) = \mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_i)$, которое является свойством Маркова для последовательности (3.4). Более того, полученные выражения для переходных вероятностей $\mathbf{P}(A_{i+1} \mid A_i)$ не зависят от индекса времени i , следовательно, цепь Маркова является однородной. Доказательство теоремы было опубликовано в работе [122]. \square

Проводя аналогичные рассуждения нетрудно установить, что свойство Маркова будет выполняться для многомерных случайных последовательностей

$$\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \xi'_{1,i-1}), i \in I\}, \quad (3.5)$$

$$\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{2,i}, \dots, \mathfrak{a}_{m,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{2,i-1}, \dots, \xi'_{m,i-1}), i \in I\}.$$

Однако далее в работе сконцентрируемся на изучении динамики функционирования системы с точки зрения высокоприоритетного потока Π_1 и потока Π_m с большой интенсивностью. В связи с этим в текущей главе рассматривается последовательность (3.4) при $j = m$, т. е. цепь Маркова

$$\{(\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{m,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{m,i-1}), i \in I\}. \quad (3.6)$$

3.3 Исследование рекуррентных зависимостей и пространства состояний для цепи Маркова (3.6)

Введем при $i \in I$, $k \in M$, $x_1, x_m \in X$, $y_1 \in Y_1$, $y_m \in Y_m$ обозначения для вероятностей, порождаемых последовательностью (3.6):

$$\begin{aligned} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \\ &= \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k)}, \mathfrak{a}_{1,i} = x_1, \mathfrak{a}_{m,i} = x_m, \xi'_{1,i-1} = y_1, \xi'_{m,i-1} = y_m). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Согласно рассуждениям доказательства теоремы 5 имеет место равенство

$$\begin{aligned} Q_{i+1}(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{r=1}^{2m+1} \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(r)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\ &\times \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{b_1 \in B_1} \sum_{n_m=0}^{\infty} \sum_{b_m \in B_m} \varphi_1(n_1; T_r) \beta_1(b_1; \Gamma^{(r)}) \varphi_m(n_m; T_r) \beta_m(b_m; \Gamma^{(r)}) \times \\ &\times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(r)}, v_1, n_1) = \Gamma^{(k)}, \max\{0, v_1 + n_1 - b_1\} = x_1, \\ &\max\{0, v_m + n_m - b_m\} = x_m, \min\{v_1 + n_1, b_1\} = y_1, \\ &\min\{v_m + n_m, b_m\} = y_m). \end{aligned} \quad (3.8)$$

События в аргументе вероятностной функции правой части выражения (3.8) могут быть либо достоверными, либо невозможными. С учетом равенств (3.1) и (3.2) соотношение (3.8) распадается на следующие частные случаи.

1. Пусть $k = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\times \beta_1(0; \Gamma^{(2m+1)}) \beta_m(0; \Gamma^{(2m+1)}) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m+1}) \varphi_m(n_m; T_{2m+1}) \times \\
&\times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, n_1) = \Gamma^{(1)}, \max\{0, v_1 + n_1\} = x_1, \\
&\max\{0, v_m + n_m\} = x_m, \min\{v_1 + n_1, 0\} = y_1, \min\{v_m + n_m, 0\} = y_m) = \\
&= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\times \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m+1}) \varphi_m(n_m; T_{2m+1}) \times \\
&\times \mathbf{P}(v_1 + n_1 = x_1, v_m + n_m = x_m, 0 = y_1, 0 = y_m).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что справедливо рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \\
&= \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m+1}) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m+1}) \times \\
&\times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(y_1 = 0, y_m = 0).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

2. Пусть $k = 2$. Тогда из (3.8) получим

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\times \beta_1(l_1; \Gamma^{(1)}) \beta_m(0; \Gamma^{(1)}) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_1) \varphi_m(n_m; T_1) \times \\
&\times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(1)}, v_1, n_1) = \Gamma^{(2)}, \max\{0, v_1 + n_1 - l_1\} = x_1, \\
&\max\{0, v_m + n_m\} = x_m, \min\{v_1 + n_1, l_1\} = y_1, \min\{v_m + n_m, 0\} = y_m) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{c_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{c_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(c_1 - v_1; T_1) \varphi_m(x_m - v_m; T_1) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\max\{0, c_1 - l_1\} = x_1, \min\{c_1, l_1\} = y_1, 0 = y_m) = \\
&= \sum_{c_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{c_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(c_1 - v_1; T_1) \varphi_m(x_m - v_m; T_1) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(0 = x_1, c_1 = y_1, 0 = y_m) + \\
&+ \sum_{c_1=l_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{c_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(c_1 - v_1; T_1) \varphi_m(x_m - v_m; T_1) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(c_1 - l_1 = x_1, l_1 = y_1, 0 = y_m).
\end{aligned}$$

Итак, справедливо рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{y_1} \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_1) \times \\
&\times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(x_1 = 0, y_1 < l_1, y_m = 0) + \\
&\quad + \sum_{v_1=0}^{x_1+l_1} \varphi_1(x_1 + l_1 - v_1; T_1) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_1) \times \\
&\quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(y_1 = l_1, y_m = 0).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3. В случае $k \in \{3, 4, \dots, 2m - 2\}$ из (3.8) следуют преобразования

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\quad \times \beta_1(0; \Gamma^{(k-1)}) \beta_m(0; \Gamma^{(k-1)}) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{k-1}) \varphi_m(n_m; T_{k-1}) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(k-1)}, v_1, n_1) = \Gamma^{(k)}, \max\{0, v_1 + n_1\} = x_1, \\
&\quad \max\{0, v_m + n_m\} = x_m, \min\{v_1 + n_1, 0\} = y_1, \min\{v_m + n_m, 0\} = y_m) = \\
&= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{k-1}) \varphi_m(n_m; T_{k-1}) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(v_1 + n_1 = x_1, v_m + n_m = x_m, 0 = y_1, 0 = y_m).
\end{aligned}$$

Окончательно имеем соотношение

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \\
&= \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{k-1}) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{k-1}) \times \\
&\times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(y_1 = 0, y_m = 0).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

4. Пусть теперь $k = 2m - 1$.

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\times \beta_1(0; \Gamma^{(2m-2)}) \beta_m(0; \Gamma^{(2m-2)}) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m-2}) \varphi_m(n_m; T_{2m-2}) \times \\
&\times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, n_1) = \Gamma^{(2m-1)}, \max\{0, v_1 + n_1\} = x_1, \\
&\max\{0, v_m + n_m\} = x_m, \min\{v_1 + n_1, 0\} = y_1, \min\{v_m + n_m, 0\} = y_m) = \\
&= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m-2}) \times \\
&\times \varphi_m(n_m; T_{2m-2}) \mathbf{P}(v_1 + n_1 < h_1, v_1 + n_1 = x_1, v_m + n_m = x_m, 0 = y_1, 0 = y_m).
\end{aligned}$$

Из полученного равенства заключаем справедливость соотношения

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \times \\
&\times \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\times \mathbf{P}(x_1 < h_1, y_1 = 0, y_m = 0).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

5. Положим в (3.8) $k = 2m$. Тогда

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\times \beta_1(0; \Gamma^{(2m-2)}) \beta_m(0; \Gamma^{(2m-2)}) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m-2}) \varphi_m(n_m; T_{2m-2}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, n_1) = \Gamma^{(2m)}, \max\{0, v_1 + n_1\} = x_1, \\
& \max\{0, v_m + n_m\} = x_m, \min\{v_1 + n_1, 0\} = y_1, \min\{v_m + n_m, 0\} = y_m) + \\
& + \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \beta_1(0; \Gamma^{(2m-1)}) \beta_m(l_m; \Gamma^{(2m-1)}) \times \\
& \quad \times \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m-1}) \varphi_m(n_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, n_1) = \Gamma^{(2m)}, \max\{0, v_1 + n_1\} = x_1, \\
& \max\{0, v_m + n_m - l_m\} = x_m, \min\{v_1 + n_1, 0\} = y_1, \min\{v_m + n_m, l_m\} = y_m) + \\
& + \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \beta_1(0; \Gamma^{(2m)}) \beta_m(l'_m; \Gamma^{(2m)}) \times \\
& \quad \times \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m}) \varphi_m(n_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(2m)}, v_1, n_1) = \Gamma^{(2m)}, \max\{0, v_1 + n_1\} = x_1, \\
& \max\{0, v_m + n_m - l'_m\} = x_m, \min\{v_1 + n_1, 0\} = y_1, \min\{v_m + n_m, l'_m\} = y_m) = \\
& = \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
& \quad \times \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m-2}) \varphi_m(n_m; T_{2m-2}) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}(v_1 + n_1 \geq h_1, v_1 + n_1 = x_1, v_m + n_m = x_m, 0 = y_1, 0 = y_m) + \\
& + \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{c_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
& \quad \times \sum_{n_1=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m-1}) \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}(v_1 + n_1 = x_1, \max\{0, c_m - l_m\} = x_m, 0 = y_1, \min\{c_m, l_m\} = y_m) + \\
& + \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{c_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
& \quad \times \sum_{n_1=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m}) \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \mathbf{P}(v_1 + n_1 < h_1, \\
& v_1 + n_1 = x_1, \max\{0, c_m - l'_m\} = x_m, 0 = y_1, \min\{c_m, l'_m\} = y_m).
\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \times \\
&\times \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(x_1 \geq h_1, y_1 = 0, y_m = 0) + \\
&+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \sum_{c_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\max\{0, c_m - l_m\} = x_m, y_1 = 0, \min\{c_m, l_m\} = y_m) + \\
&+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{c_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(x_1 < h_1, \max\{0, c_m - l'_m\} = x_m, y_1 = 0, \min\{c_m, l'_m\} = y_m).
\end{aligned} \tag{3.13}$$

6. Последний случай в (3.8) возможен при $k = 2m + 1$:

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\quad \times \beta_1(0; \Gamma^{(2m)}) \beta_m(l'_m; \Gamma^{(2m)}) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m}) \varphi_m(n_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(u(\Gamma^{(2m)}, v_1, n_1) = \Gamma^{(2m+1)}, \max\{0, v_1 + n_1\} = x_1, \\
&\quad \max\{0, v_m + n_m - l'_m\} = x_m, \min\{v_1 + n_1, 0\} = y_1, \min\{v_m + n_m, l'_m\} = y_m) = \\
&= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(n_1; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \varphi_m(n_m; T_{2m}) \mathbf{P}(v_1 + n_1 \geq h_1, v_1 + n_1 = x_1, \\
&\quad \max\{0, v_m + n_m - l'_m\} = x_m, 0 = y_1, \min\{v_m + n_m, l'_m\} = y_m) = \\
&= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \sum_{n_m=0}^{\infty} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(n_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(x_1 \geq h_1, \max\{0, v_m + n_m - l'_m\} = x_m, 0 = y_1, \min\{v_m + n_m, l'_m\} = y_m).
\end{aligned}$$

Получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\
&\times \sum_{c_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
&\times \mathbf{P}(x_1 \geq h_1, \max\{0, c_m - l'_m\} = x_m, y_1 = 0, \min\{c_m, l'_m\} = y_m).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Соотношения (3.9)–(3.14) позволяют доказать следующую лемму.

Лемма 7. *Пространство $S = \Gamma \times X \times X \times Y_1 \times Y_m$ состояний цепи Маркова (3.6) распадается на множество D несущественных состояний и на минимальное замкнутое множество E существенных апериодических состояний.*

При этом

$$\begin{aligned}
D &= \{(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: k \in M \setminus \{2\}, y_1 \in Y_1 \setminus \{0\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: k \in M \setminus \{2m, 2m + 1\}, y_m \in Y_m \setminus \{0\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in X \setminus \{0\}, y_1 \in Y_1 \setminus \{l_1\}\} \\
&\cup \{(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: y_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}, x_m \in X \setminus \{0\}, \\
&\quad y_m \in Y_m \setminus \{l'_m, l_m\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, x_m \in X \setminus \{0\}, \\
&\quad y_m \in Y_m \setminus \{0, l_m\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, x_m \in X \setminus \{0\}, \\
&\quad y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m - 1\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, \\
&\quad y_m \in \{l'_m + 1, l'_m + 2, \dots, l_m\}\};
\end{aligned}$$

$$E(\Gamma^{(1)}) = \{(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0): x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, x_m \in X\};$$

$$E(\Gamma^{(2)}) = \{(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, l_1, 0): x_1 \in X, x_m \in X\} \cup$$

$$\cup \{(\Gamma^{(2)}, 0, x_m, y_1, 0): x_m \in X, y_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots, l_1 - 1\}\};$$

$$\begin{aligned}
E(\Gamma^{(k)}) &= \{(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, 0, 0) : x_1 \in X, x_m \in X\}, \quad k \in \{3, 4, \dots, 2m-2\}; \\
E(\Gamma^{(2m-1)}) &= \{(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) : x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1-1\}, x_m \in X\}; \\
E(\Gamma^{(2m)}) &= \{(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, 0) : x_1 \in \{h_1, h_1+1, \dots\}, x_m \in X \setminus \{0\}\} \cup \\
&\quad \cup \{(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l_m) : x_1 \in X, x_m \in X \setminus \{0\}\} \cup \\
&\quad \cup \{(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) : x_1 \in X, y_m \in Y_m\} \cup \\
&\quad \cup \{(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l'_m) : x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1-1\}, x_m \in X \setminus \{0\}\}; \\
E(\Gamma^{(2m+1)}) &= \{(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, 0, l'_m) : x_1 \in \{h_1, h_1+1, \dots\}, x_m \in X \setminus \{0\}\} \cup \\
&\quad \cup \{(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, 0, 0, y_m) : x_1 \in \{h_1, h_1+1, \dots\}, y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m\}\}; \\
E &= \bigcup_{k=1}^{2m+1} E(\Gamma^{(k)}).
\end{aligned}$$

Доказательство леммы 7 приведено в приложении Д.

Лемма 8. При любом начальном распределении

$$\{Q_0(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) : (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S\} \quad (3.15)$$

многомерной цепи Маркова (3.6) либо для любого $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0$$

и стационарного распределения не существует, либо существуют пределы

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m),$$

причем

$$Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) > 0 \text{ при } (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E,$$

$$Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0 \text{ при } (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D,$$

имеет место равенство

$$\sum_{(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S} Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 1$$

и стационарное распределение существует и единственно.

Доказательство. Поскольку множество D счетно, то может сложиться ситуация, когда цепь Маркова с заданным начальным распределением на множестве

несущественных состояний, будет блуждать в этом множестве бесконечно долго. Покажем, что для цепи Маркова (3.6) такого свойства наблюдаться не будет. Обозначим случайное состояние цепи Маркова на шаге с номером i , $i \in I$, через $\chi_i = (\Gamma_i, \mathfrak{a}_{1,i}, \mathfrak{a}_{m,i}, \xi'_{1,i-1}, \xi'_{m,i-1})$. Согласно соотношениям (3.9)–(3.14), вероятность

$$P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \mathbf{P}(\chi_1 \in E \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m))$$

того, что цепь Маркова (3.6), отправляясь из произвольного несущественного состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$, перейдет за один шаг в состояние множества E , положительна. Более того, для любого состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$ можно показать справедливость неравенства

$$\begin{aligned} & P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) > \\ & > \min\{\varphi_1(h_1; T_1)\varphi_m(0; T_1), \varphi_1(h_1; T_{2m+1})\varphi_m(0; T_{2m+1})\} > 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Обозначим через $P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$ вероятность того, что цепь (3.6) когда-либо попадет в класс E , отправляясь из несущественного состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$, т. е.

$$\begin{aligned} & P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(\chi_n \in E, \chi_i \in D, i = 0, 1, \dots, n-1 \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)). \end{aligned}$$

Тогда согласно [148] введенные вероятности удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} & P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \sum_{(\Gamma^{(r)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \in D} P_0^*(\Gamma^{(r)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\ & \times \mathbf{P}(\chi_1 = (\Gamma^{(r)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)) + \\ & + P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m), \quad (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Неравенство (3.16) для любого $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$ позволяет показать справедливость оценки

$$\begin{aligned} & \sum_{(\Gamma^{(r)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \in D} \mathbf{P}(\chi_1 = (\Gamma^{(r)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mid \chi_0 = (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)) = \\ & = 1 - P_0^1(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) < \\ & < 1 - \min\{\varphi_1(h_1; T_1)\varphi_m(h_1; T_1), \varphi_1(h_1; T_{2m+1})\varphi_m(h_1; T_{2m+1})\} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно, система (3.17) является вполне регулярной. Тогда согласно [149] система (3.17) имеет единственное ограниченное решение. Можно легко проверить, что этим решением является $P_0^*(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 1$ для любого $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$. Таким образом, цепь Маркова (3.6) с вероятностью единица когда-либо покинет множество D несущественных состояний.

Итак, если выбирать начальное распределение цепи лишь на замкнутом множестве E существенных состояний, то получим неприводимую апериодическую цепь Маркова. В таком случае, используя эргодическую теорему из [148], получаем справедливость утверждения леммы. Доказательство леммы было опубликовано в работе [123]. \square

Замечание 1. Проведенные рассуждения дают общий метод доказательства аналогичных утверждений для класса систем, представленного в разделе 2.1. Такой метод особенно полезен, если достаточно сложно или трудоемко определить непосредственно из рекуррентных соотношений для одномерных распределений конечное количество шагов, за которое цепь Маркова покидает множество несущественных состояний. Однако для рассматриваемого алгоритма $s(\Gamma)$ при доказательстве леммы 7 было показано, что цепи Маркова (3.6) достаточно трех шагов, чтобы гарантированно покинуть множество несущественных состояний. Иными словами, при любом начальном распределении (3.15) имеет место равенство

$$Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0$$

для любых $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in D$ и $i \in I \setminus \{0, 1, 2\}$.

Замечание 2. В лемме 8 фактически установлено, что асимптотическое поведение процесса (3.6) не зависит от выбора начальных условий. В связи с этим, не уменьшая общности, далее будем выбирать начальное распределение многомерной последовательности (3.6) лишь на множестве E существенных состояний, т. е. рассматривать распределение вида

$$\{Q_0(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) : (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E\}. \quad (3.18)$$

Лемма 9. *Одномерные распределения (3.7) многомерной цепи Маркова (3.6) с начальным распределением (3.18) удовлетворяют рекуррентным по $i \in I$ соотношениям*

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0) &= \sum_{v_1=h_1}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l'_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\
&\times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m+1}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m+1}), \\
&x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, x_m \in X;
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2)}, 0, x_m, y_1, 0) &= \sum_{v_1=h_1}^{y_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
&\times \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \varphi_m(x_m - v_m; T_1), x_m \in X, y_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots, l_1 - 1\};
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, l_1, 0) &= \sum_{v_1=h_1}^{l_1+x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
&\times \varphi_1(l_1 + x_1 - v_1; T_1) \varphi_m(x_m - v_m; T_1), x_1, x_m \in X;
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(3)}, x_1, x_m, 0, 0) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} Q_i(\Gamma^{(2)}, v_1, v_m, w_1, 0) \times \\
&\times \varphi_1(x_1 - v_1; T_2) \varphi_m(x_m - v_m; T_2), x_1, x_m \in X;
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, 0, 0) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(k-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
&\times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{k-1}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{k-1}), x_1, x_m \in X;
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
&\times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}), \\
&x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}, x_m \in X;
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
&\times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) + \\
&+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}), \\
&x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}, y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m\};
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l'_m) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l'_m+x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\
&\times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(l'_m + x_m - v_m; T_{2m}), \\
&x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}, x_m \in X \setminus \{0\};
\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}
&Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) = \\
&= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}), \\
&x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}, y_m \in \{l'_m + 1, l'_m + 2, \dots, l_m - 1\} \text{ } u \text{ } u \text{ } u \\
&x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, y_m \in Y_m \setminus \{0, l_m\};
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l_m) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l_m+x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
&\times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(l_m + x_m - v_m; T_{2m-1}), \quad x_1, x_m \in X;
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
&Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, 0) = \\
&= \sum_{v_1=0}^{x_1} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, 0, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \varphi_m(0; T_{2m-2}) + \\
&+ \sum_{v_1=0}^{x_1} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, 0, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(0; T_{2m-1}),
\end{aligned} \tag{3.29}$$

$$x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\};$$

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, 0) =$$

$$\sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}), \tag{3.30}$$

$$x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, \quad x_m \in X \setminus \{0\};$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, 0, 0, y_m) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\
&\times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}), \\
&x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, \quad y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m - 1\};
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, 0, l'_m) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m+l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\
&\times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(x_m + l'_m - v_m; T_{2m}), \\
&x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, x_m \in X.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Доказательство леммы 9 приведено в приложении Е.

Замечание 1. Соотношения (3.19)–(3.32) выводятся из равенств (3.9)–(3.14). При этом в случае, если задается начальное распределение на всем пространстве S , то в течение первых трех шагов цепи Маркова (3.6) осуществляются переходы согласно рекуррентным соотношениям (3.9)–(3.14). Поскольку после трех шагов цепь Маркова гарантированно покинет множество D несущественных состояний, то далее имеет смысл применять равенства (3.19)–(3.32).

Лемма 10. *Одномерные распределения*

$$\{Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) : (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S\},$$

удовлетворяющие рекуррентным соотношениям (3.9)–(3.14), подчиняются для любого $i \in I$ условию нормировки

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 1. \tag{3.33}$$

Доказательство леммы 10 приведено в приложении Ж.

Введем обозначения для производящих функций одномерных распределений цепи Маркова (3.6) при любом $i \in I$. Пусть для $k \in M$, $y_1 \in Y_1$, $y_m \in Y_m$, $|z_1| \leq 1$ и $|z_m| \leq 1$ введены следующие функции:

$$\Phi_i(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m, y_1, y_m) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m}, \tag{3.34}$$

$$\Phi_i^1(\Gamma^{(k)}, z_1, 0, y_1, y_m) = \sum_{x_1=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, 0, y_1, y_m) z_1^{x_1}, \tag{3.35}$$

$$\Phi_i^m(\Gamma^{(k)}, 0, z_m, y_1, y_m) = \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, 0, x_m, y_1, y_m) z_m^{x_m}. \tag{3.36}$$

Напомним, что производящая функция распределений входного потока Π_j по-прежнему выражается формулами (2.25) и (2.26).

Лемма 11. Производящие функции (3.34)–(3.36) удовлетворяют следующим рекуррентным по $i \in I$ соотношениям:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\
& = \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \times \Phi_i(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) + A_i^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m), \\
& A_i^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) = \\
& = \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{w_m=0}^{l'_m-1} \Phi_i^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, 0, 0, w_m);
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m, l_1, 0) = \\
& = z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1; z_1) \Psi_m(T_1; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^2(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m), \\
& A_i^2(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) = -z_1^{-l_1} \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) z_1^{x_1} \times \\
& \times \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m};
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}^m(\Gamma^{(2)}, 0, z_m, y_1, 0) = \\
& = \sum_{v_1=h_1}^{y_1} \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}, \\
& y_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots, l_1 - 1\};
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(3)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\
& = \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m, l_1, 0) + A_i^3(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m), \\
& A_i^3(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m) = \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \sum_{w_1=0}^{l_1-1} \Phi_i^m(\Gamma^{(2)}, 0, z_m, w_1, 0);
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\
& = \Psi_1(T_{k-1}; z_1) \Psi_m(T_{k-1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(k-1)}, z_1, z_m, 0, 0), \quad k \in \{4, 5, \dots, 2m - 2\};
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m, 0, 0) &= \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \times \\
&\times \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^4(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m), \\
A_i^4(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m) &= - \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
&\times \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m};
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, 0) &= \\
&= \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \times \\
&\times \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^5(\Gamma^{(2m-2)}, \Gamma^{(2m-1)}, \Gamma^{(2m)}, z_1, z_m), \\
A_i^5(\Gamma^{(2m-2)}, \Gamma^{(2m-1)}, \Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) &= \\
&= \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \varphi_m(0; T_{2m-1}) \Phi_i^1(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, 0, 0, 0) + \\
&+ \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \varphi_m(0; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, 0, 0, w_m) - \\
&- \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
&\times \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m};
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, y_m) &= \\
&= \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \varphi_m(y_m; T_{2m-1}) \Phi_i^1(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, 0, 0, 0) + \\
&+ \Psi_1(T_{2m}; z_1) \varphi_m(y_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{\infty} \Phi_i^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, w_m) + \\
&+ \Psi_1(T_{2m}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} + \\
&+ \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} - \\
&- \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m), \quad y_m \in \{1, 2, \dots, l'_m - 1\};
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l'_m) = \\
& = z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\
& \times \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^6(\Gamma^{(2m-1)}, \Gamma^{(2m)}, z_1, z_m), \\
& A_i^6(\Gamma^{(2m-1)}, \Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
= & \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{l'_m} \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \times \sum_{w_m=1}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \tag{3.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) - \\
& - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, y_m) = \\
& = \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \varphi_m(y_m; T_{2m-1}) \Phi_i^1(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, 0, 0, 0) + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1}, \tag{3.46}
\end{aligned}$$

$$y_m \in \{l'_m + 1, l'_m + 2, \dots, l_m - 1\};$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l_m) = \\
& = z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m, 0, 0) + \\
& + A_i^7(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m), \tag{3.47} \\
& A_i^7(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) = \\
= & - z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} \times \\
& \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) = \\
& = z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^8(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m), \\
& \quad A_i^8(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
& = z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=1}^{l'_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& \quad - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
& \quad - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0);
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) = \\
& = z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l_m) + A_i^9(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m), \\
& \quad A_i^9(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
& = z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l'_m-1} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& \quad - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, l_m) z_m^{v_m} - \\
& \quad - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, l_m);
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, 0, 0, y_m) = \\
& = \Psi_1(T_{2m}; z_1) \varphi_m(y_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} \Phi_i^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, w_m) + \\
& + \Psi_1(T_{2m}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} - \\
& - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m), \quad y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m - 1\}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Доказательство леммы 11 приведено в приложении И.

Также далее потребуются рекуррентные соотношения для редуцированных производящих функций вида

$$\Phi_{i+1}(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m) = \sum_{y_1 \in Y_1} \sum_{y_m \in Y_m} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m, y_1, y_m), \tag{3.51}$$

заданных для $k \in M$ и сходящихся по крайней мере в области $|z_1| \leq 1$, $|z_2| \leq 1$.

Лемма 12. *Производящие функции (3.51) удовлетворяют следующим рекуррентным по $i \in I$ соотношениям:*

$$\Phi_{i+1}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) = \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m); \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m) &= z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1; z_1) \Psi_m(T_1; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \Psi_m(T_1; z_m) \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m};
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m) &= \Psi_1(T_{k-1}; z_1) \Psi_m(T_{k-1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(k-1)}, z_1, z_m), \\
& k \in \{3, 4, \dots, 2m - 2\};
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) &= \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m) - \\
&- \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m};
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) &= \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m) - \\
&- \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
&+ \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
&+ z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
&+ \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&+ z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
&\quad \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m);
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) &= z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) - \\
&- z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&+ \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Доказательство леммы 12 приведено в приложении К.

Кроме того, важной основой для последующих исследований служат рекуррентные соотношения для указанных производящих функций за $2m$ или $2m + 1$ шаг. В связи с этим введем следующие обозначения для возможных длительностей полного цикла смены состояний устройства обслуживания: $T = \sum_{k=1}^{2m+1} T_k$ и $T^* = T - T_{2m-1}$.

Лемма 13. *Производящие функции (3.51) удовлетворяют следующим рекуррентным по $i \in I$ соотношениям:*

1. Для состояния $\Gamma^{(1)}$ обслуживающего устройства:

$$\begin{aligned}
\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) &= z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) - \\
&- z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
&\times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&+ \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
&\quad \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
&- z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times
\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} \times \\
& \times Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l'_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-2l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l'_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m};
\end{aligned}$$

2. Для состояния $\Gamma^{(2)}$ обслуживающего устройства:

$$\begin{aligned}
\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m) &= z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m) + \\
& + \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times
\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
& - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_m^{v_m} + \\
& \quad + z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1 + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \times \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m-2} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& \quad + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \times \\
& \quad \times \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& \quad + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_1^{-l_1} z_m^{-2l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\ & \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m); \end{aligned}$$

3. Для состояния $\Gamma^{(k)}$ при $k \in \{3, 4, \dots, 2m-2\}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m) &= z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m) + \\ &+ \Psi_1\left(\sum_{k_1=2}^{k-1} T_{k_1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1}; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\ & \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-(k-1)}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\ & \quad - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1\left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m+1}; z_m\right) \times \\ & \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\ & \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-(k+1)}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ & \quad + z_1^{-l_1} \Psi_1\left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m+1}; z_m\right) \times \tag{3.60} \\ & \quad \times \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{y_m-l'_m}) \times \\ & \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-(k+1)}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\ & \quad - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1\left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1\right) \times \\ & \quad \times \Psi_m\left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m-2} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\ & \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-(k+2)}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1 \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1 \right) \times \\
& \quad \times \Psi_m \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m \right) \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_{2m(i+1)-(k+2)}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& \quad + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1 \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1 \right) \times \\
& \quad \times \Psi_m \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m \right) \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} Q_{2m(i+1)-(k+2)}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& \quad + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1 \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1 \right) \Psi_m \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m \right) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-(k+2)}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_1^{-l_1} z_m^{-2l'_m} \Psi_1 \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1 \right) \Psi_m \left(\sum_{k_1=1}^{k-1} T_{k_1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m \right) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-(k+2)}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m);
\end{aligned}$$

4. Для состояния $\Gamma^{(2m)}$ обслуживающего устройства:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
& = z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) - \\
& \quad - \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times
\end{aligned} \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + \Psi_1\left(\sum_{k=2}^{2m-2} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi+2}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
& - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_m\right) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2mi}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_1^{-l_1} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_m\right) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\ & \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2mi}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m); \end{aligned}$$

5. Для состояния $\Gamma^{(2m+1)}$ обслуживающего устройства:

$$\begin{aligned} & \Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) = \\ & = z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) - \\ & \quad - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\ & \quad \times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ & + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\ & \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\ & - z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2} + T_{2m}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \quad (3.62) \\ & \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\ & \quad + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\ & \quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\ & \quad + z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\ & \quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\ & \quad \times Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{x_m} + \\ & \quad + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_m^{-2l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^* - T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T^* - T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \times \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi+1}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m};
\end{aligned}$$

6. Для состояния $\Gamma^{(2m-1)}$ обслуживающего устройства при переходе цепи Маркова за $2m + 1$ шаг:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{(2m+1)(i+1)}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) = \\
& = z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1(T; z_1) \Psi_m(T; z_m) \Phi_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) + \\
& + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^* + T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& \quad + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) (1 - z_m^{x_m-l_m}) \times \\
& \quad \times Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_1^{-l_1} z_m^{-2l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) -
\end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
& -z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_m\right) \times \\
& \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-2m}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_1^{-l_1} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_m\right) \times \\
& \times \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-2m}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + \Psi_1\left(\sum_{k=2}^{2m-2} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1 - l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-(2m-2)}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
& - \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m};
\end{aligned}$$

7. Для состояния $\Gamma^{(2m)}$ обслуживающего устройства при переходе цепи Маркова за $2m + 1$ шаг:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{(2m+1)(i+1)}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
& = z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1(T; z_1) \Psi_m(T; z_m) \Phi_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) - \\
& \quad - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1(T - T_{2m}; z_1) \Psi_m(T - T_{2m}; z_m) \times \\
& \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) +
\end{aligned} \tag{3.64}$$

$$\begin{aligned}
& + z_1^{-l_1} z_m^{-l_m} \Psi_1(T - T_{2m}; z_1) \Psi_m(T - T_{2m}; z_m) \times \\
& \times \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-l_m} \Psi_1\left(\sum_{k=2}^{2m-1} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-1} T_k; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1 - l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)i+2}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
& - z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2} + T_{2m-1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-2}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& \quad + \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& \quad + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) (1 - z_m^{x_m - l_m}) \times \\
& \quad \times Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& \quad + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

Вывод соотношений леммы 13 приведен в приложении Л.

3.4 Исследование условий существования стационарного режима

По аналогии с исследованием системы циклического управления потоками разнородных заявок, проведенным в главе 2, следующим этапом изучения системы, управляемой алгоритмом с обратной связью, будет являться изучение условий существования стационарного режима в системе. Для отыскания подобных условий понадобятся рекуррентные соотношения, полученные в разделе 3.3, и методы, применяемые в разделе 2.4. Алгоритм управления потоками, граф которого изображен на рисунке 3.1, существенным образом выделяет потоки Π_1 и Π_m . В связи с этим целесообразно рассматривать условия существования стационарного режима по потокам Π_1 и Π_m отдельно.

Теорема 6. *Если параметры системы удовлетворяют условию*

$$\lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 \geq 0,$$

то стационарного распределения цепи Маркова (3.6) не существует.

Доказательство. 1. Докажем, что при $\lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 > 0$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = 0$$

для любых состояний $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S$. Для этого выберем некоторое рекуррентное соотношение для производящих функций из леммы 13 и рассмотрим его при $z_m = 1$ в области $|z_1| \leq 1$. Например, изучим равенство (3.58):

$$\begin{aligned} \Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) &= z_1^{-l_1} \Psi_1(T^*; z_1) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) - \\ &- \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\ &\times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\ &- \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\ &\times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& \quad + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0).
\end{aligned}$$

Заметим, что для любого $t > 0$ имеет место равенство

$$\sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; t) = \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; t).$$

Поскольку $\sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; t) = 1$, то справедливо продолжить преобразования следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) & = z_1^{-l_1} \Psi_1(T^*; z_1) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) - \\
& - \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) -
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
& -\Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
& \quad + \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \times \\
& \quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0).
\end{aligned}$$

Перейдем теперь к пределу $i \rightarrow \infty$. Заметим, что согласно лемме 8 пределы вида

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = Q(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$$

существуют всегда. Поскольку производящие функции (3.34)–(3.36) и (3.51) сходятся равномерно как минимум в области вида $|z_1| \leq 1$, $|z_m| \leq 1$, то для них также будут существовать пределы при $i \rightarrow \infty$. Результаты предельного перехода для производящих функций будем в дальнейшем обозначать отсутствием нижнего индекса, отвечающего за время. Например,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) = \Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1).$$

Итак, справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) & = z_1^{-l_1} \Psi_1(T^*; z_1) \Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) + \\
& + (\Psi_1(T_{2m}; z_1) - 1) \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание результат перехода к пределу $i \rightarrow \infty$ в соотношении (3.24), получим

$$\begin{aligned}
\Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) &= z_1^{-l_1} \Psi_1(T^*; z_1) \Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) + \\
& + (\Psi_1(T_{2m}; z_1) - 1) \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& - \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) = \\
& = z_1^{-l_1} \Psi_1(T^*; z_1) \Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) + \\
& + (\Psi_1(T_{2m}; z_1) - 1) \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + (\Psi_1(T_{2m-1}; z_1) - 1) \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{v_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0).
\end{aligned}$$

Поскольку состояния цепи (3.6) вида $(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$, $v_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}$, $v_m \in X$, являются несущественными, то согласно лемме 8 соответствующие вероятности $Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ будут равны нулю. В связи с этим можно преобразовать последнее соотношение следующим образом:

$$\begin{aligned}
& (1 - g_1(z_1))\Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) = \\
& = (\Psi_1(T_{2m}; z_1) - 1)\Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m})z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + (\Psi_1(T_{2m-1}; z_1) - 1)\Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0)z_1^{x_1} + \\
& \quad + \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1)(1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0),
\end{aligned} \tag{3.66}$$

где введена функция

$$g_1(z_1) = z_1^{-l_1}\Psi_1(T^*; z_1) = z_1^{-l_1} \exp\{\lambda_1 T^*(s_1 z_1^3 + q_1 z_1^2 + p_1 z_1 - 1)\}.$$

Заметим, что $g_1(1) = 1$. Кроме того, по условию теоремы имеем

$$g_1'(z_1)|_{z_1=1} = -l_1 + \lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) > 0$$

и, следовательно, в некоторой левой окрестности точки $z_1 = 1$ функция $g_1(z_1)$ возрастает, т. е. существует точка $z^* \in (0, 1)$ такая, что для всех z_1 из области $z^* \leq z_1 < 1$ выполняется неравенство $0 < g_1(z_1) < 1$. График функции $g_1(z_1)$ качественно представлен на рисунке 3.2а.

Итак, левая часть равенства (3.66) становится положительна в области $z^* \leq z_1 < 1$. Рассмотрим теперь правую часть равенства (3.66) в действительных точках указанной области. Во-первых, заметим, что в этом промежутке для любых $t > 0$ имеет место оценка

$$\Psi_1(t; z_1) = \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_1(t; x)z_1^x \leq \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_1(t; x) = 1.$$

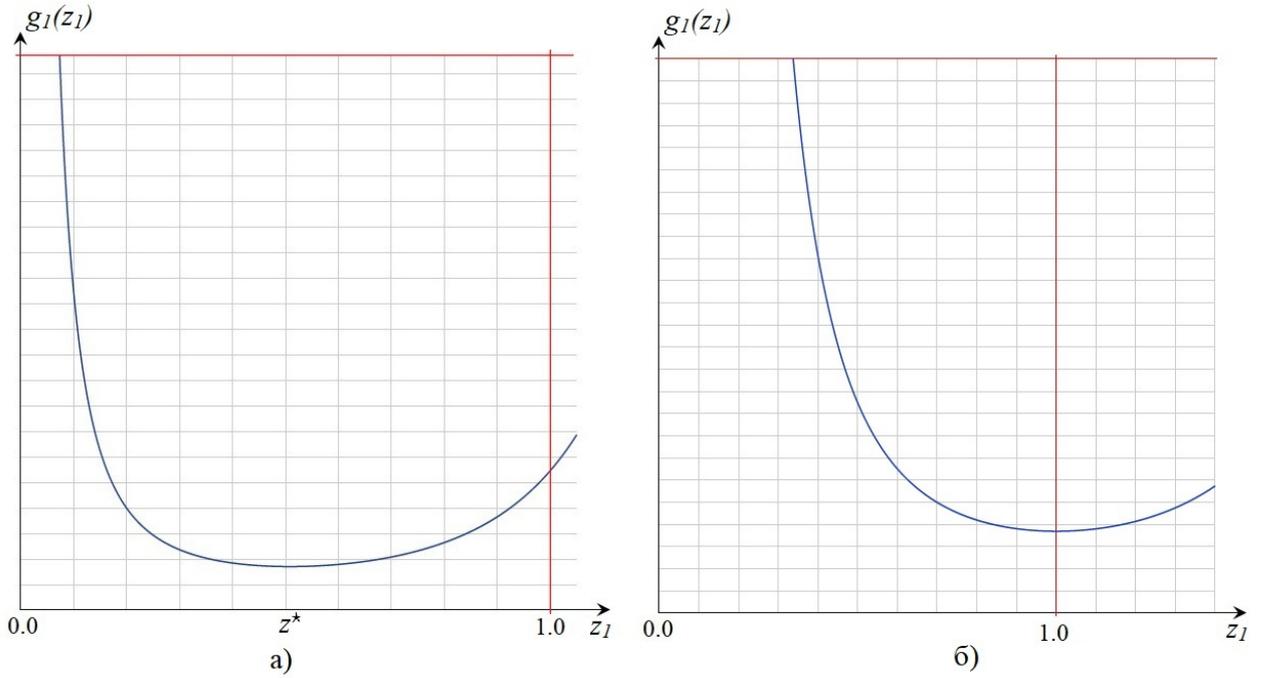


Рисунок 3.2 — График функции $g_1(z_1)$ при

а) $-l_1 + \lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) > 0$;

б) $-l_1 + \lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) = 0$

Следовательно, получаем $\Psi_1(T_{2m}; z_1) - 1 < 0$ и $\Psi_1(T_{2m-1}; z_1) - 1 < 0$. Далее, поскольку в последнем слагаемом правой части (3.66) выполняется неравенство $x_1 < l_1$, то в промежутке $z \in [z^*, 1)$ будем иметь $1 - z_1^{x_1 - l_1} < 0$. С учетом приведенных рассуждений получаем, что правая часть равенства (3.66) отрицательна в то время, как левая его часть положительна. Это противоречие разрешается только если все стационарные вероятности нахождения цепи Маркова (3.6) в существенных состояниях из правой части (3.66) положить равными нулю. В этом случае в силу леммы 8 стационарного распределения цепи (3.6) не существует.

2. Рассмотрим случай $\lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 = 0$. Заметим, что теперь в точке $z_1 = 1$ функция $g_1(z_1)$ имеет экстремум и необходимо определить тип этого экстремума. Нетрудно проверить, что

$$g_1''(z_1)|_{z_1=1} = l_1(l_1 + 1) + \lambda_1 T(6s_1 + 2q_1) + (\lambda_1 T)^2(3s_1 + 2q_1 + p_1)^2 > 0.$$

Следовательно, в левой окрестности точки $z_1 = 1$ функция $g_1(z_1)$ убывает. График функции в данном случае качественно имеет вид, представленный на рисунке 3.2б. Вновь обратимся к соотношению (3.66). Разложим в ряд Тейлора в левой окрестности точки $z_1 = 1$ функции $g_1(z_1)$, $z_1^{x_1}$, $z_1^{x_1 - l_1}$, а также функции

вида $\Psi_1(t; z_1)$ при $t \in \{T_{2m}, T_{2m+1}, T_{2m} + T_{2m+1}, T_{2m-1}, T^* - T_1\}$:

$$\begin{aligned}
& [(l_1 - \lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1))(z_1 - 1) + o(z_1 - 1)]\Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) = \\
& = (\lambda_1 T_{2m}(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1) + o(z_1 - 1)) \times \\
& \quad \times (1 + \lambda_1 T_{2m+1}(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1) + o(z_1 - 1)) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m})(1 + x_1(z_1 - 1) + o(z_1 - 1)) \times \\
& \quad \quad \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad \quad \quad + (\lambda_1 T_{2m-1}(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1) + o(z_1 - 1)) \\
& \quad \times (1 + \lambda_1(T_{2m} + T_{2m+1})(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1) + o(z_1 - 1)) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0)(1 + x_1(z_1 - 1) + o(z_1 - 1)) + \\
& \quad \quad \quad + (1 + \lambda_1(T^* - T_1)(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1) + o(z_1 - 1)) \times \\
& \quad \quad \quad \times \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1)((l_1 - x_1)(z_1 - 1) + o(z_1 - 1)) \times \\
& \quad \quad \quad \quad \quad \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0).
\end{aligned}$$

Отсюда справедливы преобразования

$$\begin{aligned}
& (l_1 - \lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1))(z_1 - 1)\Phi(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) = \\
& = \lambda_1 T_{2m}(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad \quad \quad + \lambda_1 T_{2m-1}(3s_1 + 2q_1 + p_1)(z_1 - 1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) + \\
& \quad \quad \quad + \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1)(l_1 - x_1)(z_1 - 1) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) + o(z_1 - 1).
\end{aligned}$$

Теперь разделим обе части полученного равенства на $(z_1 - 1)$, перейдем к пределу $z_1 \rightarrow 1$ и при $\lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 = 0$ получим

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_1 T_{2m} (3s_1 + 2q_1 + p_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&+ \lambda_1 T_{2m-1} (3s_1 + 2q_1 + p_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) + \\
&+ \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (l_1 - x_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что стационарные вероятности нахождения цепи Маркова в существенных состояниях из правой части полученного равенства равны нулю. Следовательно, в силу леммы 8 можно утверждать отсутствие стационарного распределения для цепи (3.6) при $\lambda_1 T^* (3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 = 0$. Теорема доказана. Доказательство теоремы было опубликовано в работе [123]. \square

Теорема 7. *Если параметры системы удовлетворяют условиям*

$$\lambda_m T_{2m} (3s_m + 2q_m + p_m) - l'_m \geq 0, \quad \lambda_m T_{2m-1} (3s_m + 2q_m + p_m) - l_m \geq 0, \quad (3.67)$$

то стационарного распределения цепи Маркова (3.6) не существует.

Доказательство. Рассмотрим рекуррентное соотношение (3.59) для редуцированных производящих функций при $z_1 = 1$ в области $|z_m| \leq 1$. Аналогично доказательству теоремы 6 перейдем к пределу при $i \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}
&(1 - g_m(z_m)) \Phi(\Gamma^{(2)}, 1, z_m) = \\
&= F_1^1(z_m) + F_2^1(z_m) + F_3^1(z_m) + F_4^1(z_m) + F_5^1(z_m),
\end{aligned} \quad (3.68)$$

где введены следующие обозначения:

$$g_m(z_m) = z_m^{-l'_m} \Psi_m(T^*; z_m) = z_m^{-l'_m} \exp\{\lambda_m T^* (s_m z_m^3 + q_m z_m^2 + p_m z_m - 1)\},$$

$$\begin{aligned}
F_1^1(z_m) &= -z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_m^{v_m},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2^1(z_m) &= \Psi_m(T_1 + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\
&\times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{y_m-l'_m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m), \\
F_3^1(z_m) &= -z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m-2} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \times \\
&\times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}, \\
F_4^1(z_m) &= z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&\quad + z_m^{-l'_m-l_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0), \\
F_5^1(z_m) &= z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\
&\times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&\quad + z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\
&\times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m-l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай строгих неравенств

$$\lambda_m T_{2m}(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l'_m > 0, \quad \lambda_m T_{2m-1}(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_m > 0.$$

Заметим, что $g_m(1) = 1$ и

$$g'_m(z_m)|_{z_m=1} = -l'_m + \lambda_m T^*(3s_m + 2q_m + p_m) > \lambda_m T_{2m}(3s_m + 2q_m + p_m) - l'_m > 0.$$

Следовательно, существует точка $z_m^* \in (0, 1)$ такая, что для любого $z_m \in [z_m^*, 1)$ выполняется $0 < g_m(z_m) < 1$. Заметим, что график функции $g_m(z_m)$ не будет качественно отличаться от графика на рисунке 3.2а. Итак, в области $z_m \in [z_m^*, 1)$

левая часть равенства (3.68) будет положительна. На том же промежутке действительной оси имеет место неравенство $F_2^1(z_m) < 0$, и справедлива оценка

$$\begin{aligned}
F_4^1(z_m) &< z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{y_m-l_m} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&\quad + z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m-l_m} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) = \\
&\quad = z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m-l_m} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) = \\
&\quad = z_m^{-l'_m-l_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Здесь последнее равенство возможно в силу того, что все состояния вида $(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ при $v_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}$ и $v_m \in X$ являются несущественными и предельные вероятности пребывания в них равны нулю.

Далее, заметим, что в силу предельного перехода при $i \rightarrow \infty$ в равенстве (3.24) верно

$$F_3^1(z_m) = -z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) z_m^{x_m},$$

откуда следует оценка

$$\begin{aligned}
F_3^1(z_m) + F_4^1(z_m) &< z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
&\quad - z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) z_m^{x_m} = \\
&\quad = z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} (z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}; z_m) - 1) Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Можно убедиться, что $z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}; z_m)|_{z_m=1} = 1$ и

$$\left(\frac{d}{dz_m}(z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}; z_m))\right)|_{z_m=1} = -l_m + \lambda_m T_{2m-1}(3s_m + 2q_m + p_m) > 0$$

по условию теоремы. Следовательно, существует точка $z_m^{**} \in [z_m^*, 1)$ такая, что в некоторой окрестности $[z_m^{**}, 1) \subseteq [z_m^*, 1)$ выполняются неравенства $z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}; z_m) < 1$ и $F_3^1(z_m) + F_4^1(z_m) < 0$.

Заметим теперь, что в области $[z_m^{**}, 1)$ верно

$$\begin{aligned} F_5^1(z_m) &< z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ &\times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) z_m^{y_m-l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ &+ z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ &\times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m-l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) = \\ &= z_m^{-2l'_m} \Psi_m(T_1 + 2T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ &\times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_m^{v_m}, \end{aligned}$$

следовательно имеет место неравенство

$$\begin{aligned} F_1^1(z_m) + F_5^1(z_m) &< \\ &< z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) (z_m^{-l'_m} \Psi_m(T_{2m}; z_m) - 1) \times \\ &\times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_m^{v_m}. \end{aligned}$$

т. е. получаем $F_1^1(z_m) + F_5^1(z_m) < 0$ в области $z_m \in [z_m^{**}, 1)$. Таким образом, левая часть равенства (3.68) положительна в указанной области, в то время как правая его часть отрицательна. Такое противоречие можно разрешить только положив предельные вероятности в правой части равными нулю. Поскольку указанные предельные вероятности определяют пребывание цепи (3.6) в существенных состояниях, то согласно лемме 8 стационарного распределения при

выполнении неравенств

$$\lambda_m T_{2m}(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l'_m > 0, \quad \lambda_m T_{2m-1}(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_m > 0$$

не существует.

Аналогично рассуждениям доказательства теоремы 6 разложением в ряд Тейлора в левой окрестности точки $z_m = 1$ функций из равенства (3.68) можно доказать, что стационарное распределение последовательности (3.6) также не будет существовать в случае, если хотя бы одно из неотрицательных выражений $\lambda_m T_{2m}(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l'_m$ и $\lambda_m T_{2m-1}(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_m$ равно нулю. Доказательство теоремы опубликовано в работе [123]. \square

Теорема 8. *Если параметры системы удовлетворяют условиям*

$$\begin{aligned} \lambda_m(T - T_{2m})(3s_m + 2q_m + p_m) - l_m &< 0, \\ \lambda_m T(3s_m + 2q_m + p_m) - l_m - l'_m &> 0, \end{aligned} \quad (3.69)$$

то стационарного распределения цепи Маркова (3.6) не существует.

Доказательство. Рассмотрим рекуррентное соотношение (3.64) в точке $z_1 = 1$ при $|z_m| \leq 1$ и, по аналогии с доказательством предыдущих теорем, запишем результат предельного перехода при $i \rightarrow \infty$:

$$(1 - g_m^1(z_m))\Phi(\Gamma^{(2m)}, 1, z_m) = F_1^2(z_m) + F_2^2(z_m) + F_3^2(z_m) + F_4^2(z_m), \quad (3.70)$$

где введены следующие функции:

$$\begin{aligned} g_m^1(z_m) &= z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_m(T; z_m), \\ F_1^2(z_m) &= -z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_m(T - T_{2m}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \Phi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ &\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_m^{v_m}, \\ F_2^2(z_m) &= z_m^{-l_m} \Psi_m(T - T_{2m}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \Phi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ &\quad \times \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \Phi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ &\quad + \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \Phi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) (1 - z_m^{x_m - l_m}) Q(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3^2(z_m) &= -z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-2} + T_{2m-1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
&+ \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}, \\
F_4^2(z_m) &= \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&+ \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m - l'_m} \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

Заметим, что $g_m^1(1) = 1$ и

$$\left(\frac{d}{dz_m} g_m^1(z_m) \right) \Big|_{z_m=1} = -l_m - l'_m + \lambda_m T(3s_m + 2q_m + p_m) > 0$$

по условию теоремы, т. е. существует точка $z_m^* \in (0, 1)$ такая, что для любого $z_m \in [z_m^*, 1)$ выполняется $g_m^1(z_m) < 1$, т. е. левая часть равенства (3.70) будет положительна. В этой же области очевидно $F_2^2(z_m) < 0$. Далее, имеем

$$\begin{aligned}
F_3^2(z_m) &= (1 - z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}; z_m)) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \times \\
&\times \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Поскольку $(z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}; z_m)) \Big|_{z_m=1} = 1$ и

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dz_m} (z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}; z_m)) \right) \Big|_{z_m=1} &= -l_m + \lambda_m T_{2m-1} (3s_m + 2q_m + p_m) < \\
&< -l_m + \lambda_m (T - T_{2m}) (3s_m + 2q_m + p_m) < 0
\end{aligned}$$

в силу условий теоремы, то в некоторой области $z_m \in [z_m^{**}, 1) \subseteq [z_m^*, 1)$ будет верно $z_m^{-l_m} \Psi_m(T_{2m-1}; z_m) > 1$, т. е. $F_3^2(z_m) < 0$. Кроме того, в указанной области

$$F_1^2(z_m) + F_4^2(z_m) < (1 - z_m^{-l_m} \Psi_m(T - T_{2m}; z_m)) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ \times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m - l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m),$$

и аналогичными рассуждениями выводим оценку $F_1^2(z_m) + F_4^2(z_m) < 0$. Таким образом, левая часть равенства (3.70) положительна в промежутке $z_m \in [z_m^{**}, 1)$, а правая часть отрицательна. Противоречие снимается только в случае, когда все предельные вероятности из (3.70) для нахождения цепи Маркова в существенных состояниях положить равными нулю. В этом случае в силу леммы 8 стационарного распределения не существует. \square

Теорема 9. *Для существования стационарного распределения цепи Маркова (3.5) достаточно выполнения условия*

$$\lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 < 0.$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением (3.65) для получения следующих оценок:

$$\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) \leq |g_1(z_1)| \Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) + \\ + \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\ \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\ \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\ + \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\ + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) |1 - z_1^{x_1 - l_1}| \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0).
\end{aligned}$$

Заметим, что $g_1(1) = 1$ и в силу условий теоремы

$$\left(\frac{d}{dz_1} g_1(z_1) \right) \Big|_{z_1=1} = -l_1 + \lambda_1 T^* (3s_1 + 2q_1 + p_1) < 0,$$

следовательно, найдется точка $\bar{z}_1 > 1$ такая, что для $z_1 \in (1, \bar{z}_1]$ выполняется $0 < g_1(z_1) < 1$. Далее отметим, что функции вида $\Psi_1(t; z_1)$ возрастают в области $z_1 \in (1, \bar{z}_1]$ для любых $t > 0$. Кроме того, для всех $v_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}$ состояния цепи (3.6) вида $(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0)$ являются несущественными. Следовательно, в силу леммы 8 соответствующие предельные вероятности равны нулю. Таким образом в области $z_1 \in (1, \bar{z}_1]$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m+1}; \bar{z}_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&+ \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; \bar{z}_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&\quad + \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; \bar{z}_1) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&+ \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; \bar{z}_1) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \leq \\
&\leq \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m+1}; \bar{z}_1) \sum_{v_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&+ \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; \bar{z}_1) \sum_{v_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&\quad + \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; \bar{z}_1) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) + \\
&\quad + \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; \bar{z}_1) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) = \\
&\quad = \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m+1}; \bar{z}_1) \times \\
&\quad \times \left[\mathbf{P}(\Gamma_{2m(i+1)-2} = \Gamma^{(2m)}, \mathfrak{a}_{1,2m(i+1)-2} < h_1, \xi'_{1,2m(i+1)-2} = 0) + \Psi_1(T_{2m}; \bar{z}_1) \times \right. \\
&\quad \left. \times (\mathbf{P}(\Gamma_{2m(i+1)-3} = \Gamma^{(2m-2)}, \mathfrak{a}_{1,2m(i+1)-3} < h_1, \xi'_{1,2m(i+1)-3} = 0, \xi'_{m,2m(i+1)-3} = 0) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_1(T_{2m-1}; \bar{z}_1) \times \\
& \times \mathbf{P}(\Gamma_{2m(i+1)-3} = \Gamma^{(2m-1)}, \mathfrak{a}_{1,2m(i+1)-3} < h_1, \xi'_{1,2m(i+1)-3} = 0, \xi'_{m,2m(i+1)-3} = 0) + \\
& \left. + \mathbf{P}(\Gamma_{2m(i+1)-3} = \Gamma^{(2m)}, \mathfrak{a}_{1,2m(i+1)-3} < h_1, \xi'_{1,2m(i+1)-3} = 0) \right] \leq \\
& \leq \bar{z}_1^{h_1-1} \Psi_1(T_{2m+1}; \bar{z}_1) [1 + \Psi_1(T_{2m}; \bar{z}_1) (2 + \Psi_1(T_{2m-1}; \bar{z}_1))] = C_1.
\end{aligned}$$

Кроме того, в указанной области справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
& \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) |1 - z_1^{x_1-l_1}| \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) \leq \\
& \leq \Psi_1(T^* - T_1; \bar{z}_1) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) < \\
& < \Psi_1(T^* - T_1; \bar{z}_1) \sum_{v_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) = \\
& = \Psi_1(T^* - T_1; \bar{z}_1) \mathbf{P}(\Gamma_{2mi} = \Gamma^{(1)}, \mathfrak{a}_{1,2mi} < l_1, \xi'_{1,2mi} = 0, \xi'_{m,2mi} = 0) \leq \\
& \leq \Psi_1(T^* - T_1; \bar{z}_1) = C_2.
\end{aligned}$$

При этом обе величины C_1 и C_2 положительны.

Таким образом, получим для $i \in I$ соотношение

$$|\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| \leq |g_1(z_1)| |\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| + C_1 + C_2.$$

Рассмотрим теперь сжимающее отображение вида

$$|\tilde{\Phi}_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| = |g_1(z_1)| |\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)| + C_1 + C_2, \quad i \in I, \quad (3.71)$$

в совокупности с начальным равенством $\tilde{\Phi}_0(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) = \Phi_0(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) < +\infty$. Заметим, что соотношения $\Phi_0(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) < +\infty$ в области $z_1 \in (1, \bar{z}_1]$ всегда можно достичь за счет выбора начального распределения цепи Маркова (3.6). Итак, при $|g_1(z_1)| < 1$ итеративная процедура (3.71) сходится. Следовательно, функции $\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)$ ограничены, т. е. существует постоянная \tilde{C}^1 такая, что $\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) \leq \tilde{C}^1$ для любых $i \in I$. Поскольку последовательность $\{\tilde{\Phi}_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1), i = 0, 1, \dots\}$ является мажорирующей для последовательности $\{\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1), i = 0, 1, \dots\}$, то в рассматриваемой области $z_1 \in (1, \bar{z}_1]$ также имеет место оценка $\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) \leq \tilde{C}^1$. Функции вида $\Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1)$

являются аналитическими в области $\{z_1: z_1 \in (1, \bar{z}_1]\}$ и, значит, они имеют ограниченные производные. Таким образом, существует постоянная \widetilde{L}^1 , что

$$\frac{d}{dz_1} \Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, 1) \leq \widetilde{L}^1.$$

Аналогичными рассуждениями можно получить оценки при $k \in M \setminus \{1\}$:

$$\frac{d}{dz_1} \Phi_{2mi}(\Gamma^{(k)}, z_1, 1) \leq \widetilde{L}^k.$$

Теперь можно записать оценку для среднего количества заявок в очереди ожидания по потоку Π_1 в произвольный момент τ_{2mi} при $i \in I$:

$$\mathbf{M}\alpha_{1,2mi} = \sum_{k=1}^{2m+1} \frac{d}{dz_1} \Phi_{2mi}(\Gamma^{(k)}, z_1, 1) \Big|_{z_1=1} \leq \sum_{k=1}^{2m+1} \widetilde{L}^k. \quad (3.72)$$

Допустим теперь, что неравенство $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 < 0$ выполняется, но стационарного распределения цепи Маркова (3.5) не существует. Тогда пусть \widetilde{X} некоторое натуральное число, и имеют место преобразования

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\alpha_{1,2mi} &= \sum_{x_1=0}^{\infty} x_1 \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=0}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) = \\ &= \sum_{x_1=0}^{\widetilde{X}-1} x_1 \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=0}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) + \sum_{x_1=\widetilde{X}}^{\infty} x_1 \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=0}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) \geq \\ &\geq \widetilde{X} \sum_{x_1=\widetilde{X}}^{\infty} \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=0}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) = \widetilde{X} \left(1 - \sum_{x_1=0}^{\widetilde{X}-1} \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{y_1=0}^{l_1} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1)\right). \end{aligned}$$

Поскольку в силу предположения стационарного распределения не существует, то справедливо предельное равенство $\lim_{i \rightarrow \infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(k)}, x_1, y_1) = 0$. Следовательно, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и любого сколь угодно большого \widetilde{X} найдется такой индекс $I(\varepsilon, \widetilde{X})$, что для любого $i > I(\varepsilon, \widetilde{X})$ будет выполняться

$$\mathbf{M}\alpha_{1,2mi} \geq \widetilde{X}(1 - \varepsilon), \quad (3.73)$$

т. е. за счет выбора ε и \widetilde{X} можно сделать величину $\mathbf{M}\alpha_{1,2mi}$ сколь угодно большой. Итак, при отсутствии стационарного распределения получаем противоречие: с одной стороны, средняя величина очереди по потоку Π_1 ограничена

сверху в силу оценки (3.72), а с другой – она неограниченна в силу неравенства (3.73). Следовательно, предположение об отсутствии стационарного распределения не верно и выполнения условия $\lambda_1 T(3s_1 + 2q_1 + p_1) - l_1 < 0$ достаточно для существования стационарного режима в системе по потоку Π_1 . Доказательство теоремы опубликовано в работе [123]. \square

Следует отметить, что условия существования стационарного режима в системе, полученные в теоремах 6–9, легко проверить для реальных управляющих систем конфликтного обслуживания. Кроме того, полученным условиям можно дать простую интерпретацию для физических систем. Так, например, теоремы 6 и 9 дают критерий существования стационарного режима в системе по потоку Π_1 с высоким приоритетом:

$$\lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) < l_1. \quad (3.74)$$

Здесь в левой части неравенства стоит величина, оценивающая среднее число заявок потока Π_1 , поступивших в систему за промежуток времени длительностью T^* . Такой промежуток времени отвечает циклу смены состояний устройства обслуживания вида

$$\Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma^{(2m-2)} \rightarrow \Gamma^{(2m)} \rightarrow \Gamma^{(2m+1)} \rightarrow \Gamma^{(1)}, \quad (3.75)$$

т. е. исключая дополнительное состояние обслуживания $\Gamma^{(2m-1)}$ для потока с высокой интенсивностью. Заметим, что согласно графу, изображенному на рисунке 3.1, обслуживающее устройство будет менять свое состояние по цепочке (3.75) в случае, если очередь по высокоприоритетному потоку Π_1 накапливается и достигает размера h_1 довольно быстро. Иными словами, такой цикл реализуется при достаточно высокой интенсивности приоритетного потока, т. е. в «худшем» случае. Следовательно, соотношению (3.74) можно дать следующую интерпретацию: пропускная способность l_1 системы по потоку Π_1 превышает среднее число заявок этого потока, поступивших за один цикл работы системы при достаточно высокой его интенсивности. Если же система успешно справляется с обслуживанием потока Π_1 в «худшем» случае, то следует ожидать, что очередь также не будет накапливаться и при меньших интенсивностях потока Π_1 , т. е. при различных иных возможных цепочках перехода графа на рисунке 3.1.

Аналогичные рассуждения можно применить к условиям, полученным в теоремах 7 и 8. Действительно, неравенства (3.67) указывают на то, что пропуск-

ная способность системы по потоку Π_m не превышает среднего числа заявок этого потока, поступивших за промежуток пребывания устройства обслуживания в состояниях обслуживания $\Gamma^{(2m-1)}$ и $\Gamma^{(2m)}$. В свою очередь, совокупное выполнение условий (3.69) означает, с одной стороны, что система справляется с обслуживанием потока Π_m за промежуток длительностью $T - T_{2m}$. С другой стороны, обслуживание в состоянии $\Gamma^{(2m)}$ организовано таким образом, что суммарная пропускная способность $l_m + l'_m$ меньше среднего числа заявок, поступающих за полный цикл смены состояний устройства обслуживания вида

$$\Gamma^{(1)} \rightarrow \Gamma^{(2)} \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma^{(2m-2)} \rightarrow \Gamma^{(2m-1)} \rightarrow \Gamma^{(2m)} \rightarrow \Gamma^{(2m+1)} \rightarrow \Gamma^{(1)}.$$

Таким образом, теоремы 7 и 8 дают представление о неоптимальной настройке параметров системы, которая заведомо не может привести к стационарному режиму функционирования.

Итак, главным результатом глав 2 и 3 является нахождение легко проверяемых условий существования в системе стационарного режима по различным потокам для двух различных алгоритмов обслуживания: циклического алгоритма и алгоритма с обратной связью. Дальнейшее аналитическое исследование подобных систем достаточно затруднительно, в связи с чем полученные результаты предлагается применять при численном исследовании, т. е. при построении и изучении имитационной модели рассматриваемых систем обслуживания.

Глава 4. Исследование системы управления потоками с помощью имитационной модели

В главе 4 решается задача синтеза квазиоптимального управления путем имитационного моделирования. Приводится описание имитационной модели, разработанной для систем, рассмотренных в главах 2 и 3. Предлагается алгоритм определения момента достижения системой квазистационарного режима. В качестве основного показателя качества функционирования системы выбрана оценка $\hat{M}\gamma^*$ среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания произвольного требования системы. Управляющими параметрами обеих изученных систем являются длительности пребывания обслуживающего устройства в состояниях обслуживания. Для системы, управляемой алгоритмом с пороговым приоритетом, к управляющим параметрам также относится величина порога. Предлагаются алгоритмы поиска квазиоптимальных значений управляющих параметров, т. е. тех, при которых в результате численного исследования было получено минимальное значение оценки $\hat{M}\gamma^*$.

4.1 Задача квазиоптимального управления

Одной из основных целей изучения сложной управляющей системы обслуживания является синтез оптимальной в некотором смысле системы. Для того, чтобы оценивать эффективность функционирования системы, необходимо ввести в рассмотрение показатели качества. Для систем с общей схемой на рисунке 2.1 к таким показателям могут, например, относиться следующие величины: 1) среднее/максимальное время ожидания начала обслуживания произвольным требованием; 2) среднее/максимальное время пребывания в системе произвольного требования; 3) среднее/максимальное количество ожидающих требований произвольного потока в момент перехода ОУ в состояние обслуживания этого потока; 4) среднее/максимальное время простоя обслуживающего устройства за цикл обслуживания. В случаях, когда входные потоки существенно различаются приоритетом и интенсивностью, как в главе 3, указанные показатели могут считаться только для требований приоритетного потока. При использовании

перечисленных характеристик оптимальное управление предполагает сведение одной или нескольких из них к минимальному значению. В текущем исследовании в качестве показателя эффективности применяется среднее время ожидания начала обслуживания произвольным требованием.

К управляющим параметрам рассматриваемого класса систем при фиксированном алгоритме $s(\Gamma)$ относятся следующие характеристики: длительности пребывания обслуживающего устройства в состояниях множества Γ , интенсивности μ_j обслуживания соответствующих потоков Π_j . Заметим, однако, что часто в реальных системах изменение интенсивности обслуживания подразумевает существенную переработку физического устройства системы. Напротив, как правило, изменение длительностей пребывания обслуживающего устройства в различных состояниях не сопряжено с качественными изменениями. Так, например, рассмотрим систему автоматического управления транспортными потоками на перекрестке. Интенсивность обслуживания по некоторому потоку тогда связана с количеством полос, подходящих к перекрестку в соответствующем направлении, геометрией перекрестка, техническими средствами регулирования и т. п. Если необходимо увеличить пропускную способность перекрестка по определенному потоку при наименьших затратах, то в современных городских условиях легче всего увеличить длительность обслуживания данного потока без реорганизации указанных выше технических характеристик, отвечающих за интенсивность обслуживания. По этой причине в текущем исследовании основными управляющими параметрами будут являться длительности T_k , $k \in M$. Кроме того, при изучении системы управления с пороговым приоритетом из главы 3 управляющим параметром также является величина порога h_1 .

Основным инструментом при синтезе оптимального управления в данном исследовании является имитационное моделирование. Следовательно, получаемые результаты представляют собой не точное решение задачи оптимизации, а некоторую оценку, полученную при численном анализе. В связи с этим целесообразно дальнейшее исследование связывать с задачей не оптимального, а т. н. *квазиоптимального* управления системой.

4.2 Описание имитационной модели

На языке программирования C++ с использованием среды разработки Microsoft Visual Studio была разработана компьютерная программа, реализующая имитационные модели для системы циклического управления и системы управления с обратной связью согласно алгоритму с графом переходов на рисунке 3.1. Предполагалось, что в систему поступает $m = 2$ входных потоков. Заметим, что в случае системы, рассматриваемой в главе 3, наибольший интерес представляет исследование эффективности функционирования системы именно с точки зрения двух потоков: потока Π_1 с высоким приоритетом и потока Π_m с большой интенсивностью. В системе, представленной в главе 2, можно также выделить два наиболее интенсивных потока и ставить задачу о квазиоптимальном управлении этими потоками. При этом за счет укрупнения состояний переналадки можно в имитационной модели добиться сохранения реального промежутка времени, затрачиваемого на обслуживание прочих потоков.

Следует отметить, что для использования некоторой величины как показателя качества функционирования системы необходимо, чтобы она характеризовала стационарный режим работы системы. В действительности, с момента начала функционирования системы должны пройти так называемые переходные процессы, необходимые для ее стабилизации. Определение момента достижения системой стационарного режима является сложной задачей. Поскольку к важным характеристикам стационарного режима относится отсутствие влияния начальных условий на динамику процессов, то для определения момента достижения квазиоптимального режима в имитационной модели предлагается следующее. До запуска процесса имитации генерируются входные потоки Π_1 и Π_2 . Происходит имитация работы системы при одних и тех же значениях параметров для двух следующих различных начальных условий. *Нулевое начальное условие*: для любого $j \in \{1, 2\}$ первая пачка требований, поступающая по потоку Π_j , застаёт очередь O_j пустой. *Смещенное начальное условие*: для любого $j \in \{1, 2\}$ в очереди O_j на обслуживание перед поступлением первой пачки требований потока Π_j находится положительное количество $K_j l_j$ требований. Здесь введен параметр смещения $K_j > 0$ для потока Π_j . Фиксируется некоторая величина, характеризующая функционирование системы. Такой показатель динамически обновляется для систем как при нулевых, так и при смещенных

начальных условиях с одними и теми же входными потоками. Одновременная имитация происходит до тех пор, пока разница между значениями указанного показателя для систем с различными условиями не станет устойчиво незначительной. Например, можно проверять, что такая разница по абсолютной величине меньше некоторого заранее заданного числа. Также можно сравнивать указанную разницу в каждый следующий момент обновления не с фиксированным числом, а с предыдущим значением все той же разницы. Постепенное уменьшение этого значения указывает на снижение влияния начальных условий на динамику системы. В свою очередь, это характеризует окончание переходных процессов в системе. Подробный алгоритм определения момента достижения квазистационарного режима, реализованный в имитационной модели, будет приведен позднее. Здесь лишь отметим, что все вводимые далее величины могут характеризовать систему при нулевых начальных условиях, при смещенных условиях, а также быть характеристикой квазистационарного режима. С целью их различения введем следующее правило для обозначений: верхние индексы «0» и «+» будут указывать на подсчет характеристик в системах с нулевыми и смещенными начальными условиями соответственно. Отсутствие таких индексов будет указывать на то, что величина дает описание квазистационарного режима системы.

Имитационная модель системы с общей схемой, представленной на рисунке 2.1, построена на основе метода дискретных событий [117]. Представим описание основных компонент модели, необходимых для ее организации:

- *Состояние системы* – набор переменных, необходимых для описания системы в некоторый момент. Здесь необходимо отметить, что состояние системы в имитационной модели отличается от состояния цепи Маркова (2.8) или (3.6). Так, в данной главе под состоянием системы в некоторый момент понимается состояние обслуживающего устройства и количество ожидающих требований в каждой из очередей как при нулевых, так и при смещенных начальных условиях.
- *Типы событий*, которые могут наступать в системе, приводя к смене ее состояния: 1) смена состояния обслуживающего устройства; 2) поступление пачки заявок по определенному потоку; 3) завершение обслуживания заявки определенного потока при нулевых начальных условиях; 4) завершение обслуживания заявки определенного потока при смещенных начальных условиях.

- *Статистические счетчики* – переменные, используемые для хранения информации о функционировании системы и оценки эффективности ее работы. Конкретные величины, отслеживаемые в имитационной модели, приведем позднее.
- *Текущее время имитации.*

Программа, реализующая имитационную модель, содержит следующие функции:

- Функция *инициализации*: 1) устанавливает начальное состояние системы (начальное состояние обслуживающего устройства есть $\Gamma^{(1)}$, очереди ожидания при нулевых начальных условиях пусты, очередь ожидания по потоку Π_j при смещенных начальных условиях содержат $K_j l_j$ требований); 2) инициализирует все переменные, отвечающие за статистические счетчики; 3) запускает функцию генерации входных потоков системы; 4) устанавливает текущее время имитации в ноль.
- Функции-*обработчики* для событий каждого типа: в соответствии с типом события обновляет состояние системы и пересчитывает статистические счетчики.
- Функция *планировки*: определяет следующее событие для обработки в согласии с 1) алгоритмом $s(\Gamma)$; 2) временем поступления пачек требований по заранее сгенерированным входным потокам; 3) временем, необходимым для завершения обслуживания требований, находящихся на обслуживании в текущий момент. Кроме того, функция планировки присваивает текущему времени имитации время наступления следующего события.
- *Остановочные* функции: определяют момент достижения системой квазистационарного режима и момент окончания процесса имитации. Процесс имитации останавливается по завершению обслуживания всех требований хотя бы одного из заранее сгенерированных входных потоков.
- *Отчетные* функции: выводят на экран данные о процессе имитации по его завершению в виде таблиц, графиков и т. п.
- Главная программа: передает управление указанным выше функциям.

Введем следующие обозначения для переменных, являющихся существенными для дальнейшего исследования:

1. $k \in \{0, 1, \dots\}$ – номер цикла процесса имитации. Здесь под циклом понимается промежуток времени между двумя последовательными пе-

реключениями состояния обслуживающего устройство в начальное состояние $\Gamma^{(1)}$;

2. $j \in \{1, 2\}$ – как и прежде, номер потока;
3. $v \in \{1, 2, \dots\}$ – номер требования в потоке;
4. t – текущее время имитации;
5. $\gamma_{j,v}$ – время ожидания начала обслуживания требованием с номером v потока Π_j ;
6. $\alpha_{j,k}$ – количество требований потока Π_j , которые были обслужены в течение цикла с номером k ;
7. $\beta_{j,k}$ – количество требований в очереди O_j в момент первого на протяжении цикла с номером k переключения состояния ОУ на какое-либо из состояний обслуживания потока Π_j .

4.3 Квазистационарный режим функционирования системы

Наиболее важным результатом глав 2 и 3 для соответствующих систем является определение условий, при которых стационарный режим в системе достижим. Процесс имитации запускался только в случае, если параметры системы удовлетворяют условиям типа (2.36) для системы циклического управления или необходимым и достаточным условиям, полученным в главе 3 для системы адаптивного управления. Для определения момента, когда влияние начальных условий становится устойчиво незначимым, т. е. «траектории» процесса имитации для нулевых и смещенных начальных условий становятся близки, предлагается следующий алгоритм. Зафиксируем параметры сближения траекторий: $d \in \{1, 2, \dots\}$ и $\delta \in (0, 1)$ и инициализируем вспомогательную переменную-счетчик: $i = 0$. Каждый раз после обработки события «завершение обслуживания заявки с номером v потока Π_j при смещенных начальных условиях» вычисляются значения величин $\hat{\gamma}_{j,v}^0 = \frac{1}{v} \sum_{u=1}^v \gamma_{j,u}^0$ и $\hat{\gamma}_{j,v}^+ = \frac{1}{v} \sum_{u=1}^v \gamma_{j,u}^+$. Указанные величины определяют среднее время ожидания начала обслуживания по первым v заявкам потока Π_j в системе с нулевыми и смещенными начальными условиями соответственно. В случае, когда условие

$$|\hat{\gamma}_{j,v}^+ - \hat{\gamma}_{j,v}^0| \leq \delta \hat{\gamma}_{j,v}^0$$

выполняется для очередного v , счетчик i увеличивается на единицу. В противном случае счетчик обнуляется: $i = 0$. Определим значение t_j величины t , при котором впервые выполнится равенство $i = d$, т. е. траектории процесса обслуживания потока Π_j для различных начальных условий сблизятся d раз подряд. Будем считать, что квазистационарный режим по потоку Π_j достигнут в момент t_j . Кроме того, зафиксируем номер v_j заявки потока Π_j , которая была первой обслужена после момента t_j , и номер k_j первого цикла работы системы, наступившего после момента t_j . Будем считать, что окончание переходных процессов во всей системе произошло в момент

$$t^* = \max_{j \in J} t_j.$$

Тогда момент t^* является моментом достижения квазистационарного режима во всей системе. Кроме того, определим номер j^* потока, для которого квазистационарный режим достигнут позднее остальных, т. е. $t_{j^*} = t^*$. Тогда для каждого потока требование с номером v_{j^*} является первым требованием, обслуженным в квазистационарном режиме. Аналогично, можно определить номер k_{j^*} первого цикла системы в квазистационарном режиме.

Заметим, что при подобном исследовании момент t^* , как и прочие статистические характеристики системы, существенно зависит от реализации входных потоков. В связи с этим необходимо иметь возможность построить оценку, уменьшающую влияние отдельных реализаций. Для этого следует получить некоторую выборку для каждой из отслеживаемых величин. Предлагается следующий алгоритм, позволяющий строить более устойчивые оценки характеристик системы в квазистационарном режиме:

1. Зафиксировать параметры системы (параметры λ_j , p_j , q_j и s_j входных потоков, параметры T_k , $k \in M$, h_1 алгоритма $s(\Gamma)$, параметры μ_j обслуживающего устройства) и параметры метода: $K_j > 0$, d , $N \in \{1, 2, \dots\}$, $\delta \in (0, 1)$.
2. Для реализации с номером $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ выполнить следующую процедуру:

Сгенерировать входные потоки Π_1 и Π_2 ;

Запустить процесс имитации системы;

Определить следующие характеристики:

t^{n*} – момент достижения квазистационарного режима,

$v_{j^*}^n$ – номер первой заявки в квазистационарном режиме,

$k_{j^*}^n$ – номер первого цикла в квазистационарном режиме;

3. В качестве оценки момента достижения квазистационарного режима принять величину $t^{**} = \max_{n \in \{1, 2, \dots, N\}} t^{n*}$.

На рисунке 4.1 приведена иллюстрация работы представленного алгоритма. Для наглядности рассмотрен лишь фрагмент работы алгоритма – приведены результаты определения момента достижения квазистационарного режима только для потока Π_1 . Имитировалась работа системы, изученной в главе 3, со следующими значениями параметров:

$$\lambda_1 = 0.08, p_1 = 0.5, q_1 = 0.2, s_1 = 0.3,$$

$$\lambda_2 = 0.13, p_2 = 0.4, q_2 = 0.4, s_2 = 0.2,$$

$$T_1 = T_4 = 10, T_2 = T_5 = 2, T_3 = 20, \mu_1 = 0.9, \mu_2 = 0.95, h_1 = 2,$$

$$K_1 = 1.3, K_2 = 0.8, d = 5, N = 8, \delta = 0.1.$$

На графике построено $N = 8$ ломаных, каждая из которых соединяет точки

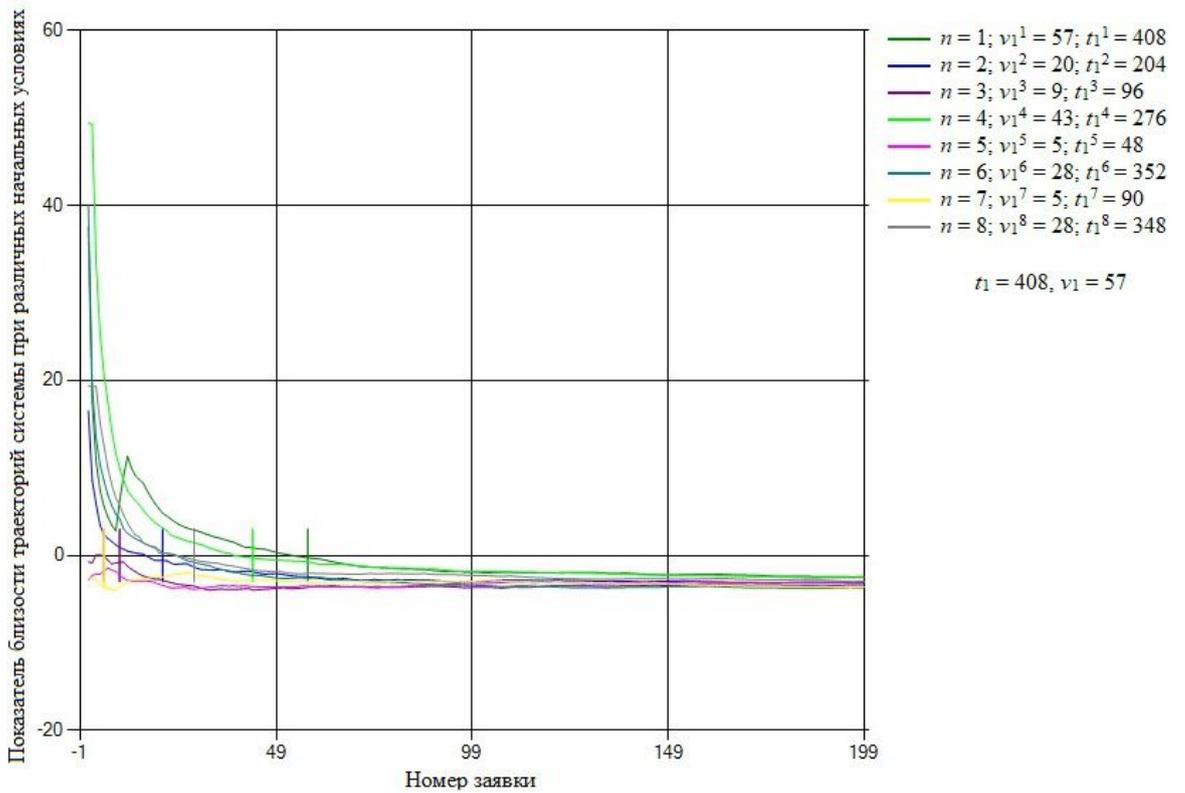


Рисунок 4.1 – Пример определения момента достижения квазистационарного режима по потоку Π_1 по $N = 8$ независимым реализациям

вида $(v, |\hat{\gamma}_{j,v}^+ - \hat{\gamma}_{j,v}^0| - \delta \hat{\gamma}_{j,v}^0)$, $v = 1, 2, \dots$, для потока Π_1 . Для каждой реализации с номером $n \in \{1, 2, \dots, 8\}$ указан момент t_1^n достижения квазистационарного режима и номер v_1^n первой обслуженной в квазистационарном режиме заявки. Согласно представленному выше алгоритму квазистационарный режим по

потоку Π_1 достигнут во всех реализациях в момент $t_1 = 408$ и номер первой обслуженной в квазистационарном режиме заявки равен $v_1 = 57$.

Следует отметить, что необходимо получать N независимых реализаций случайных потоков. Для их получения была использована библиотека динамического создания генераторов псевдослучайных чисел на основе вихря Мерсенна [150].

Перейдем к описанию метода получения оценок характеристик системы в квазистационарном режиме. Пусть, например, необходимо получить оценку для среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной заявкой потока Π_j в квазистационарном режиме. Верхним индексом $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ будем указывать, что величина была посчитана в реализации с номером n . Рассмотрим последовательность величин

$$\gamma_{j,v_{j^*}}^n, \gamma_{j,v_{j^*}+1}^n, \gamma_{j,v_{j^*}+2}^n, \dots$$

Эта последовательность составлена из времен ожидания начала обслуживания последовательных заявок потока Π_j в квазистационарном режиме, полученных в одной реализации. С применением четырех статистических критериев (инверсионный критерий [151], фазовый критерий Валлиса-Мура [152], критерий серий, основанный на медиане выборки [153], и фазово-частотный критерий с учетом длин фаз [145]) было показано, что гипотезу о независимости и одинаковом распределении указанных величин следует отвергнуть. В свою очередь, аналогичную гипотезу для величин

$$\gamma_{j,v_{j^*}}^1, \gamma_{j,v_{j^*}}^2, \dots, \gamma_{j,v_{j^*}}^N \quad (4.1)$$

следует принять. Последовательность (4.1) составлена из времен ожидания первых заявок квазистационарного режима во всех реализациях. Таким образом, целесообразно использовать выборку (4.1) для построения оценок среднего времени ожидания начала обслуживания первым требованием квазистационарного режима для потока Π_j :

$$\hat{M}\gamma_j^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \gamma_{j,v_{j^*}}^n. \quad (4.2)$$

Заметим, что в силу случайности номера v_{j^*} оценку (4.2) можно считать оценкой среднего времени ожидания для произвольного требования потока Π_j .

Аналогичными рассуждениями можно получить оценки для различных показателей функционирования системы:

- $\hat{\mathbf{D}}\gamma_j^* = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\gamma_{j,v_j^*}^n - \hat{\mathbf{M}}\gamma_j^*)^2$ – оценка дисперсии времени ожидания для произвольного требования потока Π_j ;
- $\hat{\mathbf{M}}\alpha_j^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \alpha_{j,k_j^*}^n$ и $\hat{\mathbf{D}}\alpha_j^* = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\alpha_{j,k_j^*}^n - \hat{\mathbf{M}}\alpha_j^*)^2$ – оценки математического ожидания и дисперсии количества требований потока Π_j , обслуженных в течение произвольного цикла функционирования системы;
- $\hat{\mathbf{M}}\beta_j^* = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \beta_{j,k_j^*}^n$ и $\hat{\mathbf{D}}\beta_j^* = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (\beta_{j,k_j^*}^n - \hat{\mathbf{M}}\beta_j^*)^2$ – оценки математического ожидания и дисперсии количества ожидающих требований в очереди O_j в момент первого на протяжении произвольного цикла переключения состояния ОУ на какое-либо из состояний обслуживания потока Π_j .

Для дальнейших исследований с целью поиска квазиоптимальных параметров управления необходимо выделить характеристику, дающую представление о качестве работы системы по всем потокам. В качестве такого показателя предлагается рассматривать оценку для среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания произвольным требованием системы:

$$\hat{\mathbf{M}}\gamma^* = \frac{\sum_{j=1}^2 \lambda_j (3s_j + 2q_j + p_j) R_j \hat{\mathbf{M}}\gamma_j^*}{\sum_{j=1}^2 \lambda_j (3s_j + 2q_j + p_j) R_j}. \quad (4.3)$$

Заметим, что здесь показателю $\hat{\mathbf{M}}\gamma_j^*$ потока Π_j приписывается, во-первых, $\lambda_j(3s_j+2q_j+p_j)$, равный среднему количеству требований, поступающих по данному потоку за единицу времени. Таким образом учитывается разнородность входных потоков в смысле интенсивности. Во-вторых, для потока Π_j введен вес $R_j > 0$, который позволяет учитывать приоритет различных потоков. Так, например, для системы, рассмотренной в главе 3, заявки потока Π_1 обладают наивысшим приоритетом. В таком случае целесообразно положить $R_1 > R_2$. В случае же однородных входных потоков, рассмотренных в главе 2, преимущество не отдается ни одному из потоков, поэтому будем считать $R_1 = R_2 = 1$.

Итак, оценка (4.3) основана на величинах, посчитанных в квазистационарном режиме функционирования системы. Кроме того, для ее получения рассматриваются несколько независимых траекторий процесса имитации, что делает ее более устойчивой. Такая оценка включает в себя показатели качества работы системы для различных потоков. Также имеется возможность учитывать разнородность потоков в смысле их приоритета и интенсивности поступления требований. С учетом перечисленных характеристик, оценку (4.3) предлагает-

ся использовать в качестве основного показателя качества функционирования системы.

В приложении М проведено исследование динамики средних значений основных характеристик системы в квазистационарном режиме. В работе [137] также изучен вопрос построения оценок степени загруженности системы.

4.4 Квазиоптимальное циклическое управления потоками

В данном разделе решается задача о синтезе квазиоптимального управления для системы циклического управления двумя потоками, рассмотренной в главе 2. Предположим, что длительности состояний переналадки фиксированы и равны $T_2 = T_4 \equiv t_0 > \max\{\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\}$. Тогда управляющими параметрами системы являются длительности пребывания ОУ в состояниях обслуживания: T_1 и T_3 . В допустимой области $(0; \infty) \times (0; \infty)$ значений управляющих параметров выделим область D^1 поиска квазиоптимальных значений параметров. Такая область, во-первых, должна содержать только те точки, в которых согласно теореме 4 существует стационарный режим. Во-вторых, с целью обеспечения безопасного обслуживания укажем нижнюю границу $\underline{T} > 0$ и верхнюю границу $\bar{T} > \underline{T}$ изменения полной длительности цикла $T = \sum_{k=1}^4 T_k$. Итак, область D^1 имеет вид

$$D^1 = \{(T_1, T_3) : \lambda_j T(2s_j + q_j + 1) - l_j < 0, j = 1, 2, \underline{T} \leq T \leq \bar{T}\}.$$

Кроме того, выделим в области D^1 так называемую ломаную равных квазизагрузок, уравнение которой имеет вид

$$\frac{\lambda_1 T(2s_1 + q_1 + 1)}{[\mu_1 T_1]} = \frac{\lambda_2 T(2s_2 + q_2 + 1)}{[\mu_2 T_3]}.$$

Заметим, что величина $\rho_j = \frac{\lambda_j T(2s_j + q_j + 1)}{[\mu_j T_{2j+1}]}$ выражает для потока Π_j отношение среднего количества заявок, поступивших в систему в течение одного цикла, к максимальному числу заявок, обслуженных за цикл. Такая характеристика используется в качестве оценки степени загруженности (квазизагрузки) системы. В терминах квазизагрузки условие существования стационарного режима по потоку Π_j принимает вид $\rho_j < 1$. Следует отметить, что любая точка на ло-

маной равных квазизагрузок означает в некотором смысле, что предпочтение в обслуживании не дается заявкам ни одного, ни другого потока.

Предлагается следующий алгоритм поиска квазиоптимальных значений длительностей T_1 и T_3 . Перед началом работы алгоритма зафиксируем значения параметров потоков и обслуживающего устройства, а также значения параметров алгоритма: $h_2 > 0$, $h_3 > 0$. На первом этапе производится имитация работы системы в точках (T_1, T_3) , лежащих на ломаной равных квазизагрузок в области D^1 и отстоящих друг от друга на расстоянии h_2 по длительности T_1 . Пусть среди просмотренных точек минимальное значение оценки (4.3) было достигнуто в точке (\hat{T}_1, \hat{T}_3) . На втором этапе алгоритма функционирование системы имитируется в точках (T_1, T_3) , лежащих в области D^1 на прямой $T_1 + T_3 = \hat{T}_1 + \hat{T}_3$ и отстоящих друг от друга на расстоянии h_3 по длительности T_1 . Среди них определим точку (T_1^*, T_3^*) , на которой было достигнуто минимальное значение оценки (4.3). Значения T_1^* и T_3^* длительностей состояний обслуживания для потоков Π_1 и Π_2 будем считать квазиоптимальными.

Рассмотрим пример, опубликованный в работе [121]. Пусть

$$\lambda_1 = 0.165, p_1 = 0.5, q_1 = 0.3, s_1 = 0.2,$$

$$\lambda_2 = 0.079, p_2 = 0.4, q_2 = 0.3, s_2 = 0.3,$$

$$t_0 = 2, \mu_1 = 0.8, \mu_2 = 0.6, \underline{T} = 34, \bar{T} = 74,$$

$$h_2 = 5, h_3 = 2, K_1 = K_2 = 1, d = 3, N = 100, \delta = 0.1, R_1 = R_2 = 1.$$

На рисунке 4.2а красным цветом обозначены границы области существования стационарного режима. Синим цветом указана ломаная равных квазизагрузок. Любая прямая, отмеченная зеленым цветом, содержит точки с равной длительностью полного цикла. Зеленым также отмечены точки, в которых производилась имитация системы. Точка (T_1^*, T_3^*) выделена красным цветом. Итак, квазиоптимальными значениями управляющих параметров для данной системы оказались значения $T_1^* = 17$ и $T_3^* = 13$ с минимальной оценкой среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания произвольной заявки $\hat{M}\gamma^* = 11.647$. На рисунке 4.2б приведены все точки, в которых производилась имитация работы системы при поиске квазиоптимальных значений параметров, а также показатели работы системы для этих точек. Отметим, что в результате многократного проведения подобных экспериментов можно выделить следующую достаточно устойчивую тенденцию. Квазиоптимальная точка, как правило, находится вблизи прямой с минимально допустимой длительностью цикла

T . Кроме того, квазиоптимальная точка чаще всего находится вблизи ломаной равных квазизагрузок. Такие выводы подтверждаются, если организовать поиск квазиоптимальных значений управляющих параметров путем полного перебора точек в области D^1 .

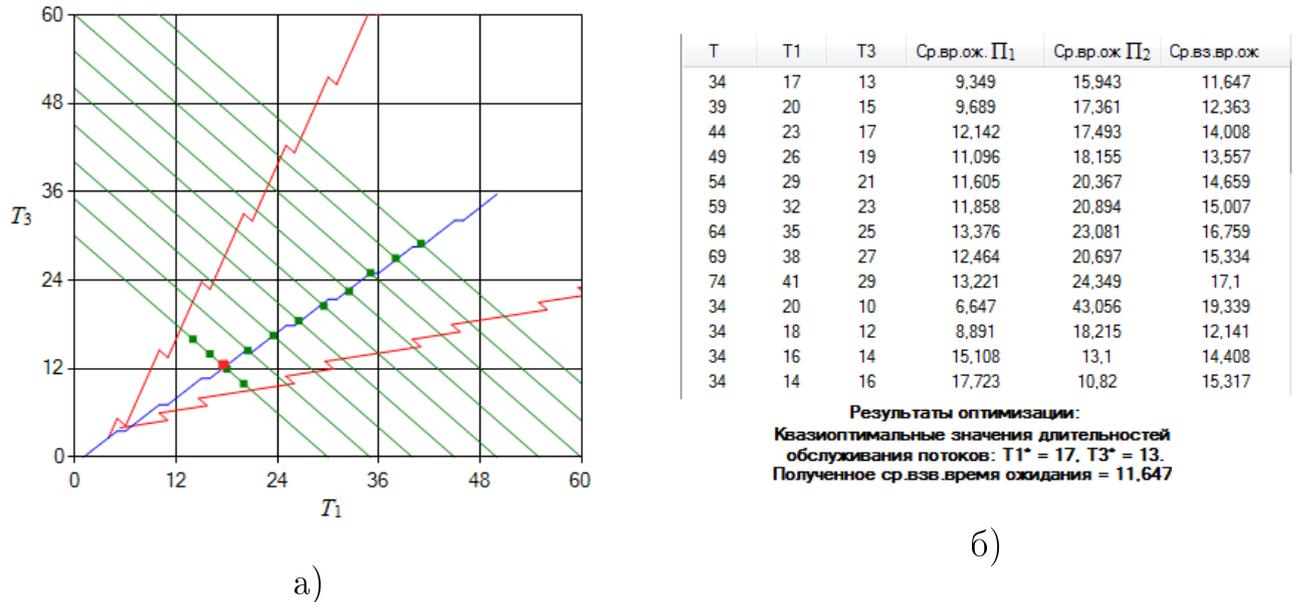


Рисунок 4.2 — Иллюстрация алгоритма поиска квазиоптимального циклического управления

4.5 Квазиоптимальное управление с пороговым приоритетом

Теперь рассмотрим задачу о поиске квазиоптимального управления для системы, рассмотренной в главе 3. Пусть по-прежнему длительности состояний переналадки фиксированы и равны $T_2 = T_5 \equiv t_0 > \max\{\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}\}$. В таком случае к управляющим параметрам относятся длительности T_1, T_3, T_4 , а также величина порога h_1 . Определим область D^2 поиска квазиоптимальных значений управляющих параметров. Во-первых, в точках области D^2 должен существовать стационарный режим в системе. В теоремах 6 и 9 установлен критерий существования в системе стационарного режима по потоку Π_1 . На основании теорем 7 и 8 формулируются необходимые условия существования стационарного режима по потоку Π_2 . Кроме того, область D^2 также ограничена условиями, накладываемыми на длительность полного цикла смены состояний ОУ. Напомним, что $T^* = \sum_{k=1}^5 T_k - T_3$ и $T = \sum_{k=1}^5 T_k$. Таким образом, будем рассматривать

область

$$D^2 = \{(T_1, T_3, T_4, h_1) : \lambda_1 T^*(3s_1 + 2q_1 + p_1) - [\mu_1 T_1] < 0, \\ \lambda_2 T_4(3s_2 + 2q_2 + p_2) - [\mu_2 T_4] < 0, \lambda_2(T - T_4)(3s_2 + 2q_2 + p_2) - [\mu_2 T_3] < 0, \\ \underline{T} \leq T \leq \bar{T}, h_1 \in \{0, 1, \dots, [\mu_1 T_1] - 1\}\}.$$

Предлагается следующий алгоритм синтеза квазиоптимального управления. Перед началом работы алгоритма зафиксируем значения параметров потоков и обслуживающего устройства. Кроме того, зафиксируем значение одного из двух управляющих параметров: длительность T_4 пребывания устройства обслуживания в петлевом состоянии обслуживания $\Gamma^{(4)}$ или величина порога h_1 . Тогда все просматриваемые алгоритмом точки будут отличаться тремя координатами. Рассмотрим подробно случай, когда значение T_4 фиксировано и равно $T_4 = t_4$. Тогда показатель $\hat{M}\gamma^*$ будет являться функцией точки вида $x = (T_1, T_3, t_4, h_1)$, т. е. $\hat{M}\gamma^* = \hat{M}\gamma^*(x)$. Установим значения для параметров алгоритма: $t_3 > 0$, $h_4 > 0$, $h_5 > 0$, $h_6 \in \{1, 2, \dots\}$. Алгоритм поиска квазиоптимальных значений параметров состоит в следующем:

1. Положить $i = 1$, $T = \underline{T}$.
2. Положить $T_3^i = t_3$.
3. Положить $h_1^i = 1$, определить $T_1^i = T - (2t_0 + T_3^i + t_4)$.
4. Если точка $x_i = (T_1^i, T_3^i, t_4, h_1^i)$ принадлежит области D^2 , запустить процесс имитации, получить значение оценки $\hat{M}\gamma^*(x_i)$, перейти в шаг 5. В противном случае положить $\hat{M}\gamma^*(x_i) = \infty$ и перейти к шагу 5.
5. Если $h_1^i + h_6 \leq [\mu_1 T_1^i] - 1$, то положить $i = i + 1$, $T_1^i = T_1^{i-1}$, $T_3^i = T_3^{i-1}$, $h_1^i = h_1^{i-1} + h_6$, перейти к шагу 4. В противном случае перейти к шагу 6.
6. Если $T_3^i + h_4 < T - 2t_0 - t_4$, то положить $i = i + 1$, $T_3^i = T_3^{i-1} + h_4$, перейти к шагу 3. В противном случае перейти к шагу 7.
7. Если $T + h_5 \leq \bar{T}$, то положить $T = T + h_5$, $i = i + 1$ и перейти к шагу 2. В противном случае перейти к шагу 8.
8. Среди всех просмотренных точек определить номер i^* точки, для которой было достигнуто минимальное значение оценки $\hat{M}\gamma^*(x_i)$, т. е. $\hat{M}\gamma^*(x_{i^*}) = \min_i \hat{M}\gamma^*(x_i)$.

Тогда квазиоптимальные значения управляющих параметров системы есть $T_1^* = T_1^{i^*}$, $T_3^* = T_3^{i^*}$ и $h_1^* = h_1^{i^*}$ с наилучшим показателем среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания произвольной заявки $\hat{M}\gamma^*(x_{i^*})$. Заметим, что аналогичным образом можно изначально фиксировать величину

порога h_1 и искать квазиоптимальные значения трех оставшихся управляющих параметров.

Рассмотрим пример работы алгоритма. Пусть

$$\lambda_1 = 0.05, p_1 = 0.5, q_1 = 0.2, s_1 = 0.3,$$

$$\lambda_2 = 0.13, p_2 = 0.4, q_2 = 0.4, s_2 = 0.2,$$

$$t_0 = 2, t_4 = 5, \mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.75, \underline{T} = 40, \bar{T} = 80,$$

$$t_3 = 11, h_4 = 3, h_5 = 7, h_6 = 2, K_1 = 1.3, K_2 = 0.5,$$

$$d = 5, N = 100, \delta = 0.05, R_1 = 3, R_2 = 1.$$

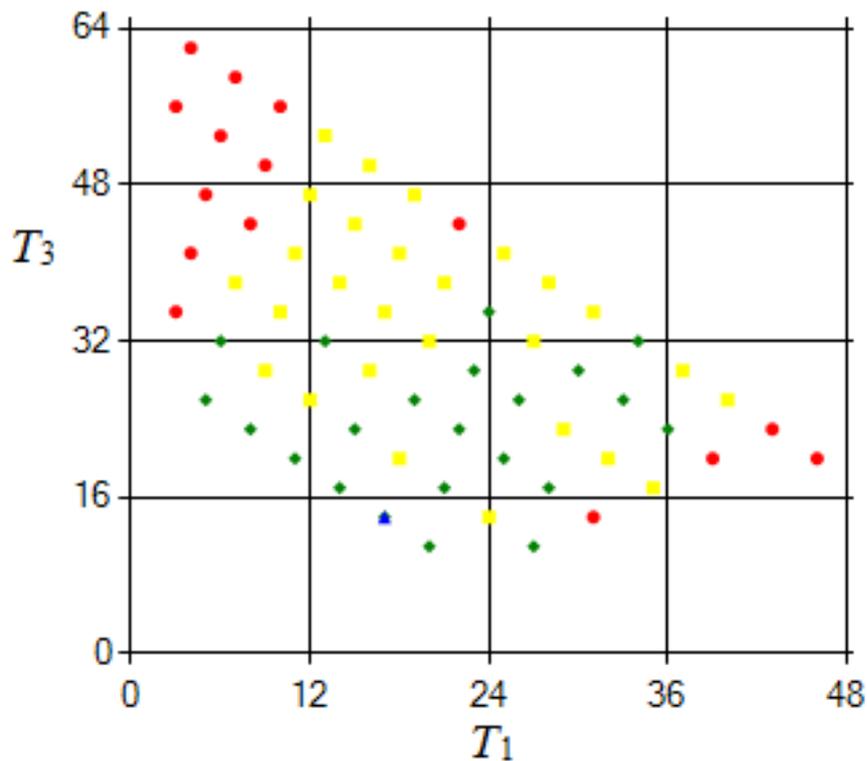


Рисунок 4.3 — Точки (T_1, T_3) запуска процесса имитации при поиске квазиоптимальных значений управляющих параметров

На рисунке 4.3 в проекции на плоскость точек (T_1, T_3) изображены те точки области D^2 , в которых производилась имитация системы при работе алгоритма. Все точки при этом разделены на 3 группы: 1) зеленым цветом отмечены точки, для которых значение оценки $\hat{M}\gamma^*(x_i)$ оказалось меньше 10; 2) желтым цветом изображены точки, для которых значение оценки $\hat{M}\gamma^*(x_i)$ принадлежит отрезку $[10; 15]$; 3) красным цветом отмечены точки, для которых значение оценки $\hat{M}\gamma^*(x_i)$ оказалось больше 15. Квазиоптимальными значениями управляющих параметров являются $T_1^* = 17$, $T_3^* = 14$ и $h_1^* = 3$ при значении оценки

среднего взвешенного времени ожидания 6.215. Синим цветом на рисунке 4.3 отмечена квазиоптимальная точка.

Кроме этого, на рисунке 4.4 приведен фрагмент таблицы, содержащей результаты работы алгоритма. Так, каждая строка таблицы содержит значения различных величин и характеристик системы для какой-либо из просмотренных точек x_i . При этом среди всех точек с равными значениями величин T_1 и T_3 в таблицу выведена лишь та точка, для которой было достигнуто минимальное значение оценки $\hat{M}\gamma^*(x_i)$.

T	T1	T3	h1	Ср.вр.ож П1	Ср.вр.ож П2	Ср.вз.вр.ожид.
40	20	11	1	6,965	11,308	8,981
40	17	14	3	5,283	7,29	6,215
40	14	17	1	4,949	5,066	5,003
40	11	20	1	15,468	3,502	9,913
40	8	23	3	11,708	3,952	8,107
40	5	26	1	13,429	3,077	8,623
47	27	11	1	5,137	15,358	9,882
47	24	14	5	14,31	11,139	12,838
47	21	17	1	4,299	16,278	9,861
47	18	20	3	19,157	3,187	11,742
47	15	23	3	13,665	3,724	9,05
47	12	26	1	11,377	8,675	10,123
47	9	29	1	16,524	4,078	10,746
47	6	32	1	12,377	3,691	8,344
47	3	35	1	26,598	4,472	16,325
54	31	14	3	10,643	21,328	15,604
54	28	17	3	8,096	5,665	6,967
54	25	20	1	6,974	6,766	6,877
54	22	23	5	15,625	2,39	9,48
54	19	26	1	11,117	4,055	7,838
54	16	29	1	14,111	6,855	10,742
54	13	32	1	7,892	7,591	7,752
54	10	35	1	14,293	12,649	13,53
54	7	38	1	19,229	9,847	14,873
54	4	41	1	32,619	2,966	18,852

Рисунок 4.4 — Характеристики точек запуска процесса имитации при поиске квазиоптимальных значений управляющих параметров

Можно заметить, что, как и в случае циклического управления потоками, точки с меньшим значением показателя $\hat{M}\gamma^*$ группируются вблизи минимальной длительности полного цикла \underline{T} .

На рисунке 4.5 представлен полигон частот числа обслуженных заявок за цикл работы системы при ее квазиоптимальном функционировании (при квазиоптимальных значениях управляющих параметров, указанных выше). Так, для потока Π_1 наибольшую статистическую вероятность имеет число заявок, равное величине порога. Для полигона частот числа обслуженных заявок потока Π_2 в свою очередь характерно несколько точек максимума, разница между которыми равна пропускной способности системы $l'_2 = [0.75 \times 5] = 3$ в состоянии T_4 . Наиболее вероятное значение связано с пребыванием обслуживающего устройства в течение цикла один раз в состоянии T_3 и один раз – в состоянии T_4 . Заметим, что в случае неоптимального функционирования системы обслуживающее устройство редко находится в состоянии T_3 , что часто влечет вырождение адаптивного алгоритма в циклический [140].



Рисунок 4.5 — Полигон частот числа обслуженных заявок за цикл работы системы

Итак, приведены алгоритмы синтеза квазиоптимального управления как для системы, управляемой циклически, так и для системы, управляемой алгоритмом с пороговым приоритетом и возможностью продления обслуживания. Результаты применения адаптивного алгоритма к управлению однородными потоками вынесены в приложение Н и опубликованы в работе [140].

Заключение

В работе были построены и изучены математические модели для трех следующих объектов: 1) поток неоднородных заявок, формируемый в условиях образования зависимости между последовательными заявками; 2) система, выполняющая операции по циклическому управлению конфликтными потоками неоднородных требований и их обслуживанию; 3) система управления потоками с различными приоритетами и интенсивностями в классе алгоритмов с пороговым приоритетом и продлением.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Построена и исследована математическая модель потока неоднородных требований в виде неординарного пуассоновского потока с ограниченным количеством требований в группе. Найдены основные вероятностные характеристики такого потока.
2. Для обоснования корректности построенной модели потока разработана компьютерная программа. Такая программа позволяет 1) получить нелокальное описание реальных потоков требований, 2) проверить, может ли построенная математическая модель быть использована при описании реальных потоков, 3) получить оценку неизвестных параметров распределений, возникающих в указанной модели.
3. Построена математическая модель для двух систем обслуживания требований и управления потоками: 1) циклическое управление потоками неоднородных заявок, 2) управление разнородными потоками с помощью адаптивного алгоритма с пороговым приоритетом и возможностью продления обслуживания. В обоих случаях модель представляет собой многомерную однородную управляемую цепь Маркова.
4. Произведена классификация состояний указанных цепей Маркова, получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений таких марковских процессов и их производящих функций. Итеративно-мажорантным методом получены условия существования в системах стационарного режима. Найденные условия являются легко проверяемыми ограничениями на значения параметров и характеристик системы.

5. Для указанных систем построены компьютерные имитационные модели. Разработан алгоритм определения момента достижения системами квазистационарного режима. Предложен способ получения численных оценок основных показателей качества функционирования системы.
6. Для рассмотренных систем управления предложены алгоритмы поиска квазиоптимальных значений управляющих параметров, при которых достигается минимальное значение оценки среднего времени ожидания начала обслуживания произвольной заявкой в квазистационарном режиме.

В качестве перспектив дальнейшей разработки темы можно выделить следующие направления.

- Определение дополнительных условий существования стационарного режима для рассмотренной системы адаптивного управления с пороговым приоритетом. В частности, отыскание достаточных условий для высокоинтенсивного потока. Такие условия позволят сократить допустимую область значений управляющих параметров при поиске квазиоптимальной стратегии управления.
- Расширение численного исследования изученных систем. Здесь можно отметить несколько направлений: 1) разработка алгоритма поиска квазиоптимальной стратегии для системы адаптивного управления в четырехмерном пространстве параметров T_1 , T_3 , T_4 и h_1 ; 2) исследование влияния типа входных потоков на квазиоптимальную стратегию управления; 3) определение условий вырождения адаптивного управляющего алгоритма в циклический.

Список литературы

1. *Johannsen F. W.* Waiting times and number of calls // *P.O. Elec. Engrs. J.* — 1907. — reprinted October, 1910, and January, 1911.
2. *Erlang A. R.* Probability and telephone calls // *Nut Tidssk. Mat. Ser. B.* — 1909. — Vol. 20. — Pp. 33–39.
3. *Erlang A. R.* Solution of some probability problems of significance for automatic telephone exchanges // *Elektroteknikeren.* — 1917. — Vol. 13. — Pp. 5–13.
4. *Хунчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. — Под ред., с предисл. и закл. ст. Б. В. Гнеденко. Изд. 3-е. изд. — М.: Едиториал УРСС, 2009. — 240 с.
5. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — Изд. 4-е., испр. изд. — М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 400 с.
6. *Palm C.* Intensitätsschwankungen in Fernsprechverkehr // *Ericsson Technics.* — 1943. — Vol. 1, no. 44. — Pp. 1–189.
7. *Kendall D. G.* Some problems in the theory of queues // *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B.* — 1951. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 151–185.
8. *Такач Л.* Некоторые вероятностные задачи в телефонии // *Математика. Период сб. перев. ин. статей.* — 1960. — № 6. — С. 93–144.
9. *Кокс Д. Р., Смит У. Л.* Теория очередей. — М.: Мир, 1966. — 218 с.
10. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. — М.: Советское радио, 1971. — 520 с.
11. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания. — М.: Машиностроение, 1979. — 432 с.
12. *Бусленко Н. П.* Решение задач теории массового обслуживания методом моделирования на электронных цифровых вычислительных машинах // *Сб. Проблемы передачи информации.* — Вып. 9 — 1961. — С. 48–69.

13. *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1972. — 368 с.
14. *Башарин Г. П.* Теоретико-вероятностное исследование двухкаскадной телефонной системы с отказами, работающей в режиме свободного искания // *Докл. АН СССР*. — 1958. — Т. 121, № 1. — С. 101–104.
15. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. — М.: Наука, 1966. — 244 с.
16. *Севастьянов Б. А.* Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора // *Тр. 3-го Всес. матем. съезда*. — 1969. — С. 68–70.
17. *Bailey N. T. J.* Study of queues and appointment systems in outpatient departments with special reference waiting times // *J. Roy. Statist. Soc.* — 1952. — Pp. 185–199.
18. *Darroch J. N.* On the traffic-light queue // *Ann. Math. Statistics*. — 1964. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 380–388.
19. *Helly W.* Two stochastic traffic systems whose service times increase with occupancy // *Operat. Res.* — 1964. — Vol. 12, no. 6. — Pp. 951–963.
20. *Haight F. A.* Annotated bibliography of scientific research in road traffic and safety // *Operat. Res.* — 1964. — Vol. 12, no. 6. — Pp. 976–1039.
21. *Gideon R., Pyke R.* Markov renewal modelling of Poisson traffic at intersections having separate turn lanes // *Semi-Markov Models and Applications*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. — 1999. — Pp. 285–310.
22. *Афанасьева Л. Г., Руденко И. В.* Системы обслуживания $GI|G|\infty$ и их приложения к анализу транспортных моделей // *Теория вероятностей и ее применения*. — 2012. — Т. 57, № 3. — С. 427–452.
23. *Bailey N. T. J.* Queueing for medical care // *Appl. Statist.* — 1954. — Vol. 3, no. 2. — Pp. 137–145.
24. *Bailey N. T. J.* Operational research in hospital planning and design // *Operat. Res. Quart.* — 1957. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 149–157.

25. *Flagle C. D.* Operations research in the health services // *Operat. Res.* — 1962. — Vol. 10, no. 5. — Pp. 591–603.
26. *Kendall D. G.* Les processus stochastiques de croissance en biologie // *Ann. Inst. H. Poincaré.* — 1952. — Vol. 13. — Pp. 43–108.
27. *Eisen M.* On switching problems requiring queueing theory in computer-based systems // *IRE Trans. Commun. Syst.* — 1962. — Vol. 10, no. 3. — Pp. 299–303.
28. *Вишневецкий В. М., Дудин А. Н.* Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применения для моделирования телекоммуникационных сетей // *Автомат. и телелемех.* — 2017. — № 8. — С. 3–59.
29. *Brigham G.* On a congestion problem in an aircraft factory // *J. Operat. Res. Soc. Amer.* — 1955. — no. 3. — Pp. 412–428.
30. *Albrecher H., Borst S. C., Boxma O. J., Resing J.* Ruin excursions, the $G|G|\infty$ queue and tax payments in renewal risk models // *J. Appl. Prob.* — 2011. — Vol. 48A. — Pp. 3–14.
31. *Бусленко Н. П., Черенков А. П.* Применение методов теории массового обслуживания при исследовании операций // *Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.* — 1968, 1970. — С. 69–110.
32. *Ляпунов А. А., Яблонский С. В.* Теоретические проблемы кибернетики // *Проблемы кибернетики.* — 1963. — № 9. — С. 5–22.
33. *Бронштейн О. И., Рыков В. В.* Об оптимальных дисциплинах обслуживания в управляющих системах // *Управление производством: Тр. III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (техническая кибернетика).* — 1967. — С. 215–224.
34. *Воробьев Н. М.* Об управлении системой массового обслуживания одного вида // *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.* — 1967. — № 3. — С. 86–93.
35. *Питтель Б. Г.* Оптимальное управление в системе массового обслуживания с несколькими потоками требований // *Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.* — 1972. — № 6. — С. 101–116.

36. Рыков В. В. Управляемые системы массового обслуживания // *Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.* — 1975. — Т. 12. — С. 43–153.
37. Кингман Дж. Пуассоновские процессы. — М.: МЦНМО, 2007. — 136 с.
38. Хейт Ф. Математическая теория транспортных потоков. — М.: Мир, 1966. — 288 с.
39. Breiman L. The Poisson tendency in traffic distribution // *Ann. Math. Statistics.* — 1963. — Vol. 34, no. 1. — Pp. 308–311.
40. Федоткин М. А. Неполное описание потоков неоднородных требований // *Теория массового обслуживания.* — М.: МГУ, ВНИИСИ, 1981. — С. 113–118.
41. Федоткин А. М. Нелокальное описание входных потоков неоднородных требований // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2012. — № 4(1). — С. 211–216.
42. Федоткин А. М., Федоткин А. А. Исследование реализации транспортного потока Бартлетта // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2013. — № 3(1). — С. 195–198.
43. Федоткин М. А. Процессы обслуживания и управляющие системы // *Математические вопросы кибернетики.* — 1996. — Т. 6. — С. 51–70.
44. Foster F. G. Queues with batch arrivals. I // *Acta math. Acad. scient. hung.* — 1964. — Vol. 12, no. 1–2. — Pp. 1–10.
45. Печинкин А. В. Система с абсолютными непрерывными приоритетами и неординарным входящим потоком // *Автомат. и телемех.* — 1990. — № 10. — С. 116–125.
46. Монсик В. Б., Скрынников А. А., Федотов А. Ю. Показатели эффективности функционирования системы массового обслуживания с неординарным входным потоком заявок в нестационарном режиме работы // *Научный вестник МГТУ ГА.* — 2010. — № 145. — С. 113–118.

47. Монсик В. Б., Скрынников А. А., Федотов А. Ю. Система массового обслуживания с групповым обслуживанием неординарного потока требований // *Научный вестник МГТУ ГА.* — 2010. — № 157. — С. 42–50.
48. Натан А. А. Статистический отбор заявок при массовом обслуживании с отказами // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* — 1966. — № 1. — С. 27–10.
49. Коваленко И. Н. Об одной задаче, связанной с оптимальной обработкой информации системой массового обслуживания // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* — 1968. — № 5. — С. 75–79.
50. Коваленко И. Н., Юркевич О. М. О некоторых вопросах оптимального обслуживания требований в системах с ограниченным временем ожидания // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* — 1971. — № 1. — С. 26–35.
51. Neuts M. F. A versatile Markovian point process // *J. Appl. Prob.* — 1979. — Vol. 16. — Pp. 764–779.
52. Lucantoni D. M., Meier-Hellstern K. S., Neuts M. F. A single server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes // *Adv. Appl. Prob.* — 1990. — Vol. 22, no. 3. — Pp. 676–705.
53. Lucantoni D. M., Choudhury G. L., W. Whitt. The transient $BMAP|G|1$ queue // *Stoch. Models.* — 1993.
54. Asmussen S., Koole G. Marked point processes as limits of Markovian arrival streams // *J. Appl. Prob.* — 1993. — Vol. 30. — Pp. 365–372.
55. Бочаров П. П., Фонг Н. Х. Анализ систем массового обслуживания $MAR_2|G_2|1|r$ с абсолютным приоритетом // *Автомат. и телемех.* — 1997. — № 11. — С. 102–117.
56. Abolnikov L., Dshalalow J., Dukhovny A. On stochastic processes in a multi-level control bulk queueing system // *Stoch. Anal. Appl.* — 2007. — Vol. 10, no. 2. — Pp. 155–179.
57. Назаров А. А., Лапатин И. Л. Асимптотически пуассоновские МАР-потоки // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* — 2010. — № 4(13). — С. 72–78.

58. *Моисеев А. Н., Назаров А. А.* Исследование высокоинтенсивного МАР-потока // *Изв. Томского политехнического университета.* — 2013. — Т. 322, № 2. — С. 16–18.
59. *Дудин С. А., Дудин О. С.* Многоканальная система обслуживания с марковским входным потоком нетерпеливых запросов, функционирующая в случайной среде // *Информатика.* — 2015. — № 1. — С. 45–55.
60. *Grandell J.* Doubly stochastic Poisson processes. Lecture Notes in Mathematics. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1967. — 234 pp.
61. *Горцев А. М., Голофастова М. Н.* Оптимальная оценка состояний моделированного синхронного дважды стохастического потока событий // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* — 2013. — № 2(23). — С. 42–53.
62. *Зорин А. В.* О периоде занятости системы с дважды стохастическим входным потоком // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математика.* — 2005. — № 1. — С. 43–53.
63. *Головкин Н. И., Каретник В. О., Пелешок О. В.* СМО с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока // *Автомат. и телемех.* — 2009. — № 10. — С. 75–96.
64. *Леонтьев Н. Д., Ушаков В. Г.* Анализ системы обслуживания с входящим потоком авторегрессионного типа и относительным 2016. — № 10:3. — С. 15–22.
65. *Ушаков В. Г.* Система обслуживания с эрланговским входящим потоком и относительным приоритетом // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1977. — № 22:4. — С. 860–866.
66. *Davis J. L., Massey B., Whitt W.* Sensitivity to the service-time distribution in the nonstationary Erlang loss model // *Management Science.* — 1995. — Vol. 41, no. 6. — Pp. 1107–1116.
67. *Теплицкий М. Г.* Об одной системе массового обслуживания с управляемым режимом работы прибора // *Автоматика и вычисл. техн.* — 1968. — № 2. — С. 36–42.

68. *Теплицкий М. Г.* Об управляемых полумарковских процессах с конечным числом состояний и управлений // *Автомат. и телемех.* — 1969. — № 10. — С. 45–53.
69. *Неймарк Ю. И., Федоткин М. А.* О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке // *Автомат. и телемех.* — 1966. — Т. 27, № 3. — С. 78–87.
70. *Федоткин М. А.* Управление уличным движением на перекрестке автоматом с фиксированным ритмом переключения при периодическом случайном потоке прибывающих машин // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* — 1969. — № 3. — С. 66–76.
71. *Пройдакова Е. В., Федоткин М. А.* Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // *Автомат. и телемех.* — 2008. — № 6. — С. 96–107.
72. *Федоткин А. М., Голышева Н. М., Сутягина Н. И.* Циклическое управление конфликтными потоками Гнеденко-Коваленко // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2014. — № 4(1). — С. 382–387.
73. *Зорин А.В.* Кибернетическая модель циклического управления конфликтными потоками с последствием // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* — 2014. — Т. 156, № 3. — С. 66–75.
74. *Зорин А. В.* Исследование операций обслуживания конфликтных потоков Пуассона по алгоритму с петлей // *Проблемы теоретической кибернетики: XVIII международная конференция (Пенза, 19–23 июня 2017 г.) : Материалы : Под редакцией Ю. И. Журавлева.* — 2017. — С. 100–103.
75. *Кувыкина Е. В.* Исследование систем управления конфликтными потоками Бартлетта в классе однородных алгоритмов с упреждением // *Горький: ГГУ.* — 1990. — 56 с. — Деп. в ВИНТИ, № 2972-В90.
76. *Куделин А. Н., Федоткин М. А.* Управление конфликтными потоками в случайной среде по информации о наличии очереди // *Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Н. Новгород.* — 1996. — 22 с. — Деп. в ВИНТИ, № 1717-В96.

77. *Литвак Н. В., Федоткин М. А.* Вероятностная модель адаптивного управления конфликтными потоками // *Автомат. и телемех.* — 2000. — № 5. — С. 67–76.
78. *Гольшиева Н. М.* Построение и исследование математической модели управления потоками в классе алгоритмов с дообслуживанием // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2010. — № 6. — С. 164–171.
79. *Dunne M. C., Potts R. B.* Algorithm for traffic control // *Jr. Oper. Res.* — 1964. — no. 12. — Pp. 870–871.
80. *Gordon R. L.* A technique for control of traffic at critical intersections // *Transp. Sci.* — 1969. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 279–288.
81. *Day C. M., Bullock, D. M, Nichols A. P., Brennan Jr. T. M., Chou Ch.-Sh.* Integrated adaptive and traffic responsive algorithms // *Procedia – Social and Behavioral Sciences.* — 2012. — Vol. 48. — Pp. 3451–3460.
82. *Vasilakos A., Moschonas C. A., Paximadis C. T.* Adaptive window flow control and learning algorithms for adaptive routing in data networks. — 1990. — Vol. 18. — Pp. 265–266.
83. *Cotton M., Mason L. G.* Adaptive isarithmic flow control in fast packet switching networks // *IEEE Trans. on Communications.* — 1995. — Vol. 43. — Pp. 1580–1590.
84. *Vazquez-Abad F. J., Mason L. G.* Decentralized adaptive flow control of high-speed connectionless data networks // *Jr. Oper. Res.* — 1999. — Vol. 47, no. 6. — Pp. 928–942.
85. *Kokkonis G., Psannis K. E., Roumeliotis M.* Network adaptive flow control algorithm for haptic data over the internet – NAFCAH // *Genetic and Evolutionary Computing.* — Cham: Springer International Publishing, 2016. — Pp. 93–102.
86. *Huang J., Carmeli B., Mandelbaum A.* Control of patient flow in emergency departments, or multiclass queues with deadlines and feedback // *Oper. Res.* — 2015. — Vol. 63, no. 4. — Pp. 892–908.

87. Боровков А. А. Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания. I // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1964. — Т. 9, № 4. — С. 608–625.
88. Боровков А. А. Асимптотические методы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1980. — 381 с.
89. Афанасьева Л. Г., Баштова Е. Е. Предельные теоремы для систем обслуживания с дважды стохастическим пуассоновским потоком (условия высокой загрузки) // *Пробл. передачи информ.* — 2008. — Т. 44, № 4. — С. 72–91.
90. Афанасьева Л. Г., Белорусов Т. Н. Предельные теоремы для систем с нетерпеливыми клиентами в условиях высокой загрузки // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2011. — Т. 56(4). — С. 788–796.
91. Whitt W. Weak convergence theorems for priority queues: preemptive-resume discipline // *J. Appl. Prob.* — 1971. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 74–94.
92. Whitt W. On the heavy-traffic limit theorem for $GI|G|\infty$ queues // *Adv. Appl. Prob.* — 1982. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 171–190.
93. Loynes R. M. The stability of a queue with nonindependent inter-arrival and service times // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1962. — Vol. 58, no. 3. — Pp. 497–520.
94. Davis J. H. Encirclement conditions for stability and instability of feedback systems with delays // *International Journal of Control.* — 1972. — Vol. 15, no. 4. — Pp. 793–799.
95. Choudhury G. L., Whitt W. Computing transient and steady-state distributions in polling models by numerical transform inversion // *IEEE International Conference on Communications, Seattle, WA.* — 1995. — Pp. 803–809.
96. Whitt W. The steady-state distribution of the $M_t|M|\infty$ queue with a sinusoidal arrival rate function // *Oper. Res. Lett.* — 2014. — Vol. 42. — Pp. 311–318.
97. Назаров А. А., Судько Е. А. Условия существования стационарного режима в немарковских RQ-системах с конфликтами заявок // *Известия*

- Томского политехнического университета.* — 2011. — Т. 318, № 5. — С. 166–168.
98. Федоткин М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой, I // *Литовский математический сборник.* — 1988. — Т. 28, № 4. — С. 784–794.
99. Федоткин М. А. Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой, II // *Литовский математический сборник.* — 1989. — Т. 29, № 1. — С. 148–159.
100. Пройдакова Е. В. Необходимые условия существования стационарного распределения выходных потоков в системе с приоритетным направлением // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2007. — № 1. — С. 167–172.
101. Зорин А. В. Итеративно-мажорантный метод доказательства предельных теорем для процесса обслуживания конфликтных потоков в случайной среде // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2008. — № 3. — С. 155–159.
102. Литвак Н. В. Адаптивное управление конфликтными потоками: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. — Нижний Новгород, 1998. — 237 с.
103. Духовный И. М. Однолинейная система обслуживания с чередованием приоритетов // *Пробл. передачи информ.* — 1969. — № 5:2. — С. 61–71.
104. Бронштейн О. И., Розенталь Г. О. Приоритетная система обслуживания с зонами прерываний // *Автомат. и телемех.* — 1971. — № 7. — С. 162–168.
105. Волковинский М. И. Системы приоритетного обслуживания с переменными параметрами. I. Абсолютный приоритет // *Автомат. и телемех.* — 1989. — № 7. — С. 120–126.
106. Волковинский М. И. Системы приоритетного обслуживания с переменными параметрами. II. Относительный приоритет // *Автомат. и телемех.* — 1989. — № 8. — С. 81–88.

107. Мишкой Г. К., Рыков В. В., Джуордано С., Бежан А. Ю. Многомерные аналоги уравнения Кендалла для приоритетных систем: вычислительные аспекты // *Автомат. и телемех.* — 2008. — № 6. — С. 82–95.
108. Ушаков А. В. О длине очереди в системе $HM|G|1|\infty$ с абсолютным приоритетом и потерей прерванного требования // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика.* — 2012. — № 4. — С. 7–15.
109. Бронштейн О. И., Духовный И. М. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. — М.: Наука, 1976. — 219 с.
110. Вишнеvский В. М., Ляхов А. И., Портной С. Л., Шахнович И. В. Широкополосные беспроводные сети передачи информации. — М.: Техносфера, 2005. — 592 с.
111. Вишнеvский В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. — М.: Техносфера, 2003. — 512 с.
112. Климов А. Ф., Ушаков И. А. Одна задача выбора оптимальной дисциплины обслуживания // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* — 1966. — № 2. — С. 40–44.
113. Креденцер Б. П. Об оптимальной загрузке двухприоритетной системы с ожиданием // *Автомат. и телемех.* — 1970. — № 9. — С. 145–150.
114. Ланин М. И., Шварц Л. Б. Об оптимизации приоритетов в однолинейной системе массового обслуживания с потерями // *Автомат. и телемех.* — 1972. — № 5. — С. 163–168.
115. Cruz F. R. B., van Woensel T. Finite queueing modeling and optimization: a selected review // *J. Appl. Math.* — 2014. — Vol. 2014. — 56 pp. — Article ID 374962.
116. Babicheva T. S. The use of queueing theory at research and optimization of traffic on the signal-controlled road intersections // *Procedia Computer Science: Information Technology and Quantitative Management (ITQM 2015).* — 2015. — Vol. 55. — Pp. 469–478.
117. Averill M. L., Kelton W. D. Simulation Modeling and Analysis. — McGraw-Hill, 2000. — 760 pp.

118. *Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V., Rachinskaya M. A.* About correctness of probabilistic models of traffic flows dynamics on a motorway // *Proceedings of International Workshop «Distributed computer and communication networks» (DCCN-2010)*. — Moscow: 2010. — Pp. 86–93.
119. *Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V., Rachinskaya M. A.* Simulation and research of probabilistic regularities in motion of traffic flows // *Proceedings of the International conference «Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference»*. — Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 2010. — Pp. 117–124.
120. *Рачинская М. А., Федоткин М. А.* Построение и исследование вероятностной модели циклического управления потоками малой интенсивности // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. — 2014. — № 4(1). — С. 370–376.
121. *Федоткин М. А., Рачинская М. А.* Имитационная модель циклического управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками // *Вестник Волжской государственной академии водного транспорта*. — 2016. — № 47. — С. 43–51.
122. *Федоткин М. А., Рачинская М. А.* Модель функционирования системы управления и обслуживания потоков разной интенсивности и приоритетности // *Вестник Волжской государственной академии водного транспорта*. — 2016. — № 48. — С. 62–69.
123. *Рачинская М. А., Федоткин М. А.* Исследование условий существования стационарного режима в системе конфликтного обслуживания неоднородных требований // *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. — 2018. — № 51. — С. 33–47.
124. *Fedotkin M. A., Rachinskaya M. A.* Parameters estimator of the probabilistic model of moving batches traffic flow // *Distributed Computer and Communication Networks, Ser. Communications in Computer and Information Science*. — 2014. — Vol. 279. — Pp. 154–169.
125. *Rachinskaya M., Fedotkin M.* Stationarity conditions for the control systems that provide service to the conflicting batch Poisson flows // *Lecture Notes*

- in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*. — 2017. — Vol. 10684 LNCS. — Pp. 43–53.
126. *Рачинская М. А., Федоткин М. А.* Изучение характеристик потока машин в условиях малой плотности. — Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород., 2012. — 36 с. — Деп. в ВИНТИ 26.01.12, № 27 — В2012.
127. *Fedotkin M. A., Rachinskaya M. A.* Parameters estimator of the probabilistic model of batches traffic flow with the non-intensive movement // *Proceedings of International Workshop «Distributed computer and communication networks» (DCCN-2013)*. — Moscow: 2013. — Pp. 357–364.
128. *Рачинская М. А., Федоткин М. А.* Построение вероятностной модели процесса циклического управления конфликтными потоками пачек в условиях малой плотности. — Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород., 2014. — 30 с. — Деп. в ВИНТИ 14.01.2014., №13 — В2014.
129. *Рачинская М. А., Федоткин М. А.* Предельные свойства распределений выходных процессов циклического управления конфликтными потоками пачек в условиях малой плотности. — Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород., 2014. — 38 с. — Деп. в ВИНТИ 23.04.2014., №111 — В2014.
130. *Рачинская М. А., Федоткин М. А.* Численное исследование и синтез дискретных управляющих систем обслуживания // *IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем»: Москва и Подмосковье, 20-22 мая 2015 г.: Труды / Отв. ред. В.Б. Алексеев, Д.С. Романов, Б.Р. Данилов*. — М: МАКС Пресс, 2015. — С. 200–202.
131. *Рачинская М. А., Федоткин М. А.* Исследование операций по управлению конфликтными потоками неоднородных требований // *Проблемы теоретической кибернетики: XVIII международная конференция (Пенза, 19-23 июля 2017г.): Материалы: Под редакцией Ю.И. Журавлева*. — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 203–205.

132. *Fedotkin M., Rachinskaya M.* Investigation of traffic flows characteristics in case of the small density // *Collection «Queues: Flows, Systems, Networks». Proceedings of the International Conference «Modern Probabilistic Methods for Analysis and Optimization of Information Telecommunication Networks»*. — No. 21. — Minsk: BSU, 2011. — Pp. 82–87.
133. *Федоткин М. А., Рачинская М. А.* Изучение математической модели трафика автомобилей на основе подхода Ляпунова-Яблонского // *Сборник научных статей XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики»*. — Н. Новгород: ННГУ, 2011. — С. 508–512.
134. *Федоткин М. А., Рачинская М. А.* Подход Ляпунова-Яблонского при построении и исследовании модели управляющих систем обслуживания конфликтных потоков // *Сборник научных статей XVII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики»*. — Казань: КФУ, 2014. — С. 280–282.
135. *Федоткин М. А., Рачинская М. А.* Свойства стационарного режима в модели управления конфликтными потоками // *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Материалы Международной научной конференции*. — Минск: РИВШ, 2015. — С. 262–267.
136. *Федоткин М. А., Рачинская М. А.* Статистический анализ потока импульсов вдоль нервного волокна // *Статистика в современном обществе: её роль и значение в вопросах государственного управления и общественного развития: Материалы Межрегиональной научно-практической конференции, посвященной 180-летию со времени образования органов государственной статистики Нижегородской области (г. Н. Новгород, 28 мая 2015 г.)*. — Н. Новгород: Нижегородстат –Нижегородский госуниверситет, 2015. — С. 457–464.
137. *Rachinskaya M. A., Fedotkin M. A.* Research of the process of traffic flows control by means of simulation // *«Distributed computer and communication networks: control, computation, communications» (DCCN-2015) : материалы Восемнадцатой междунар. Научн. Конфер, 19-22 окт. 2015 г., Москва: / Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова Рос. Акад. Наук.* — М.: ИПУ РАН, 2015. — С. 136–143.

138. *Рачинская М. А., Федоткин М. А.* Построение модели и анализ управляющих систем обслуживания // *Материалы XII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения», им. академика О.Б. Лупанова (Москва, МГУ, 20-25 июня 2016 г.)*. — М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2016. — С. 156–158.
139. *Rachinskaya M. A., Fedotkin M. A.* Probabilistic and simulation model of the queuing system with non-homogeneous input flows and feedback control algorithm with prolongations // *Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2017): материалы Двадцатой междунар. науч. конфер., 25-29 сент. 2017 г., Москва: / Ин-т проблем упр. им. В.А. Трапезникова Рос. акад. наук; под общ. ред. В.М. Вишневого*. — М.: ТЕХНОСФЕРА, 2017. — С. 510–516.
140. *Рачинская М. А., Федоткин М. А.* Квазиоптимальное управление неординарными пуассоновскими потоками // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017): Материалы XVI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (29 сентября - 3 октября 2017 г.)*. — Томск: Изд-во НТЛ, 2017. — С. 164–171.
141. *Rachinskaya M. A., Fedotkin M. A.* Stationarity conditions for the control systems that provide service to the conflicting non-ordinary Poisson flows // *Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ-2017): материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23–27 октября 2017 г. / под общ. ред. А. В. Лебедева*. — Москва: РУДН, 2017. — С. 629–633.
142. *Рачинская М. А.* Статистический анализ потока событий: А. с. № 2016616411, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 10 июня 2016 г. — 2016.
143. *Яблонский С. В.* Основные понятия кибернетики // *Проблемы кибернетики*. — 1959. — № 2. — С. 7–39.
144. *Федоткин А. М.* Моделирование и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными потоками Гнеденко – Коваленко: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Нижний Новгород, 2010. — 150 с.

145. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975. — 648 с.
146. *Пройдакова Е. В.* Анализ выходных потоков управляющих процессов обслуживания: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. — Нижний Новгород, 2008. — 279 с.
147. *Федоткин М. А.* Процессы обслуживания и управляющие системы // *Математические вопросы кибернетики*. — 1996. — № 6. — С. 51–70.
148. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. — Т. 1. — 499 с.
149. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. — Л.: Физматгиз, 1962. — 708 с.
150. *Matsumoto M., Nishimura T.* Dynamic creation of pseudorandom number generators // *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 1998*. — 2000. — Pp. 56–69.
151. *Закс Л.* Статистическое оценивание. — М.: Статистика, 1976. — 600 с.
152. *Ивченко Г. И., Медведев Ю. И.* Математическая статистика. — М.: Высшая школа, 1984. — 248 с.
153. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 472 с.
154. *Чжун Кай-Лай.* Однородные цепи Маркова. — М.: Мир, 1964. — 425 с.
155. *Ширяев А. Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1980. — 576 с.

Приложение А

Эргодическое распределение числа требований в пачке для произвольного N

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.9). Заметим, что согласно [4] существуют конечные пределы $Q(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} Q(t, k)$ для любого $k \in \{1, 2, \dots, N\}$. Следовательно, при стремлении $t \rightarrow \infty$ существуют конечные пределы левых частей уравнений системы (1.9). Кроме того, такие пределы должны быть равны нулю, поскольку в противном случае величины $|Q(t, k)|$ возрастали бы неограниченно с ростом t , что противоречит, как минимум, смыслу этих величин как вероятностей. Итак, при переходе к $t \rightarrow \infty$ имеем однородную систему

$$\begin{aligned}
 0 &= -\lambda_0 Q(1) + \mu_{1,0} Q(2), \\
 0 &= \lambda_0 Q(1) - (\lambda_0 + \mu_{1,0}) Q(2) + \mu_{2,0} Q(3), \\
 0 &= \lambda_0 Q(2) - (\lambda_0 + \mu_{2,0}) Q(3) + \mu_{3,0} Q(4), \\
 0 &= \lambda_0 Q(k-1) - (\lambda_0 + \mu_{3,0}) Q(k) + \mu_{3,0} Q(k+1), \\
 & \quad k = 4, 5, \dots, N-1, \\
 0 &= \lambda_0 Q(N-1) - \mu_{3,0} Q(N)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

линейных алгебраических уравнений, определяющую так называемое эргодическое распределение $\{Q(k), k \in \{1, 2, \dots, N\}\}$ для числа требований в пачке в стационарном режиме.

Для получения решения системы (A.1) выразим $Q(k)$, $k = 2, 3, \dots, N$, через $Q(1)$. Продолжая систему обозначений (1.11) дополнительным параметром

$$\nu_3 = \frac{\lambda_0}{\mu_{3,0}},$$

запишем рекуррентные соотношения для эргодических вероятностей:

$$Q(2) = \nu_1 Q(1), \quad Q(3) = \nu_1 \nu_2 Q(1), \quad Q(k) = \nu_1 \nu_2 \nu_3^{k-3} Q(1), \quad k = 4, 5, \dots, N.$$

Справедливо условие нормировки

$$\sum_{k=1}^N Q(k) = 1,$$

следовательно, решение системы (A.1) окончательно примет вид

$$\begin{aligned}
 Q(1) &= \frac{1}{1 + \nu_1 + \nu_1 \nu_2 \frac{\nu_3^{N-2} - 1}{\nu_3 - 1}}, \\
 Q(2) &= \nu_1 \times \frac{1}{1 + \nu_1 + \nu_1 \nu_2 \frac{\nu_3^{N-2} - 1}{\nu_3 - 1}}, \\
 Q(3) &= \nu_1 \nu_2 \times \frac{1}{1 + \nu_1 + \nu_1 \nu_2 \frac{\nu_3^{N-2} - 1}{\nu_3 - 1}}, \\
 Q(k) &= \nu_1 \nu_2 \nu_3^{k-3} \times \frac{1}{1 + \nu_1 + \nu_1 \nu_2 \frac{\nu_3^{N-2} - 1}{\nu_3 - 1}}, \\
 &k = 4, 5, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Положив в полученном решении $N = 3$ получим эргодическое распределение (1.13).

Приложение Б

Исследование одномерных распределений неординарного пуассоновского потока

Б.1 Доказательство леммы 2

Искомые числовые характеристики могут быть выражены через первые четыре начальных момента $\alpha_j \eta(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$. В свою очередь, для отыскания начальных моментов воспользуемся их представлением через значения частных производных по z производящей функции (1.18) в точке $z = 1$. Опираясь в преобразованиях на условие нормировки $p + q + s = 1$, получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Psi(t; z)}{\partial z} \right|_{z=1} &= \lambda t (\exp\{\lambda t (sz^3 + qz^2 + pz - 1)\} (3sz^2 + 2qz + p)) \Big|_{z=1} = \\ &= \lambda t (3s + 2q + p) = \lambda t (2s + q + 1); \\ \left. \frac{\partial^2 \Psi(t; z)}{\partial z^2} \right|_{z=1} &= \exp\{\lambda t (sz^3 + qz^2 + pz - 1)\} \Big|_{z=1} \times \\ &\quad \times [(\lambda t)^2 (3sz^2 + 2qz + p)^2 + \lambda t (6sz + 2q)] \Big|_{z=1} = \\ &= (\lambda t)^2 (2s + q + 1)^2 + \lambda t (6s + 2q); \\ \left. \frac{\partial^3 \Psi(t; z)}{\partial z^3} \right|_{z=1} &= \exp\{\lambda t (sz^3 + qz^2 + pz - 1)\} \Big|_{z=1} \times [(\lambda t)^3 (3sz^2 + 2qz + p)^3 + \\ &\quad + 3(\lambda t)^2 (6sz + 2q)(3sz^2 + 2qz + p) + 6s\lambda t] \Big|_{z=1} = \\ &= (\lambda t)^3 (2s + q + 1)^3 + 3(\lambda t)^2 (6s + 2q)(2s + q + 1) + 6s\lambda t; \\ \left. \frac{\partial^4 \Psi(t; z)}{\partial z^4} \right|_{z=1} &= \exp\{\lambda t (sz^3 + qz^2 + pz - 1)\} \Big|_{z=1} \times [(\lambda t)^4 (3sz^2 + 2qz + p)^4 + \\ &\quad + 6(\lambda t)^3 (3sz^2 + 2qz + p)^2 (6sz + 2q) + 6s(\lambda t)^2 (3sz^2 + 2qz + p) + \\ &\quad + 3(\lambda t)^2 ((6sz + 2q)^2 + 6s(3sz^2 + 2qz + p))] \Big|_{z=1} = \\ &= (\lambda t)^4 (2s + q + 1)^4 + 6(\lambda t)^3 (2s + q + 1)^2 (6s + 2q) + \\ &\quad + 3(\lambda t)^2 [(6s + 2q)^2 + 8s(2s + q + 1)]. \end{aligned}$$

Теперь выразим начальные моменты следующим образом:

$$\alpha_1 \eta(t) = \left. \frac{\partial \Psi(t; z)}{\partial z} \right|_{z=1} = \lambda t (2s + q + 1);$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2\eta(t) &= \left. \frac{\partial^2 \Psi(t; z)}{\partial z^2} \right|_{z=1} + \left. \frac{\partial \Psi(t; z)}{\partial z} \right|_{z=1} = \\
&= (\lambda t)^2 (2s + q + 1)^2 + \lambda t (8s + 3q + 1); \\
\alpha_3\eta(t) &= \left. \frac{\partial^3 \Psi(t; z)}{\partial z^3} \right|_{z=1} + 3 \left. \frac{\partial^2 \Psi(t; z)}{\partial z^2} \right|_{z=1} + \left. \frac{\partial \Psi(t; z)}{\partial z} \right|_{z=1} = \\
&= (\lambda t)^3 (2s + q + 1)^3 + 3(\lambda t)^2 (8s + 3q + 1)(2s + q + 1) + \lambda t (26s + 7q + 1); \\
\alpha_4\eta(t) &= \left. \frac{\partial^4 \Psi(t; z)}{\partial z^4} \right|_{z=1} + 6 \left. \frac{\partial^3 \Psi(t; z)}{\partial z^3} \right|_{z=1} + 7 \left. \frac{\partial^2 \Psi(t; z)}{\partial z^2} \right|_{z=1} + \left. \frac{\partial \Psi(t; z)}{\partial z} \right|_{z=1} = \\
&= (\lambda t)^4 (2s + q + 1)^4 + 6(\lambda t)^3 (8s + 3q + 1)(2s + q + 1)^2 + \\
&+ (\lambda t)^2 [3(6s + 2q)^2 + 6(2s + q + 1)(22s + 6q) + 7(2s + q + 1)^2] + \\
&+ \lambda t (80s + 15q + 1).
\end{aligned}$$

Далее выразим необходимые центральные моменты $\beta_3\eta(t)$ и $\beta_4\eta(t)$:

$$\beta_3\eta(t) = \sum_{i=0}^3 C_3^i (-1)^{3-i} (\alpha_1\eta(t))^{3-i} \alpha_i\eta(t) = \lambda t (26s + 7q + 1);$$

$$\begin{aligned}
\beta_4\eta(t) &= \sum_{i=0}^4 C_4^i (-1)^{4-i} (\alpha_1\eta(t))^{4-i} \alpha_i\eta(t) = \\
&= 3(\lambda t)^2 (8s + 3q + 1)^2 + \lambda t (80s + 15q + 1).
\end{aligned}$$

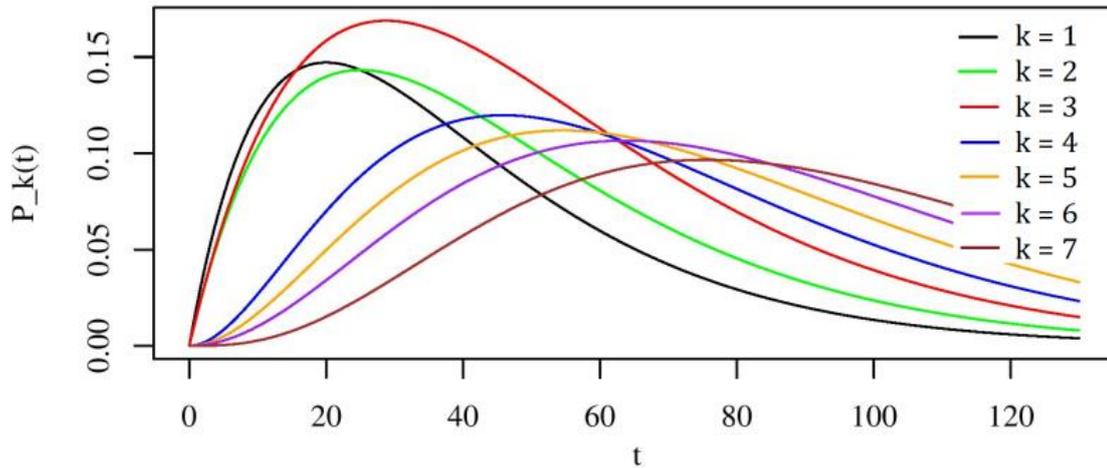
Выражения для искомым характеристик, таким образом, приобретают вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}\eta(t) &= \alpha_1\eta(t) = \lambda t (2s + q + 1); \\
\mathbf{D}\eta(t) &= \alpha_2\eta(t) - (\alpha_1\eta(t))^2 = \lambda t (8s + 3q + 1); \\
\mathbf{K}\alpha\eta(t) &= \frac{\beta_3\eta(t)}{(\mathbf{D}\eta(t))^{3/2}} = \frac{26s + 7q + 1}{\sqrt{\lambda t} (8s + 3q + 1)^{3/2}}; \\
\mathbf{E}\kappa\eta(t) &= \frac{\beta_4\eta(t)}{(\mathbf{D}\eta(t))^2} - 3 = \frac{80s + 15q + 1}{\lambda t (8s + 3q + 1)^2}.
\end{aligned}$$

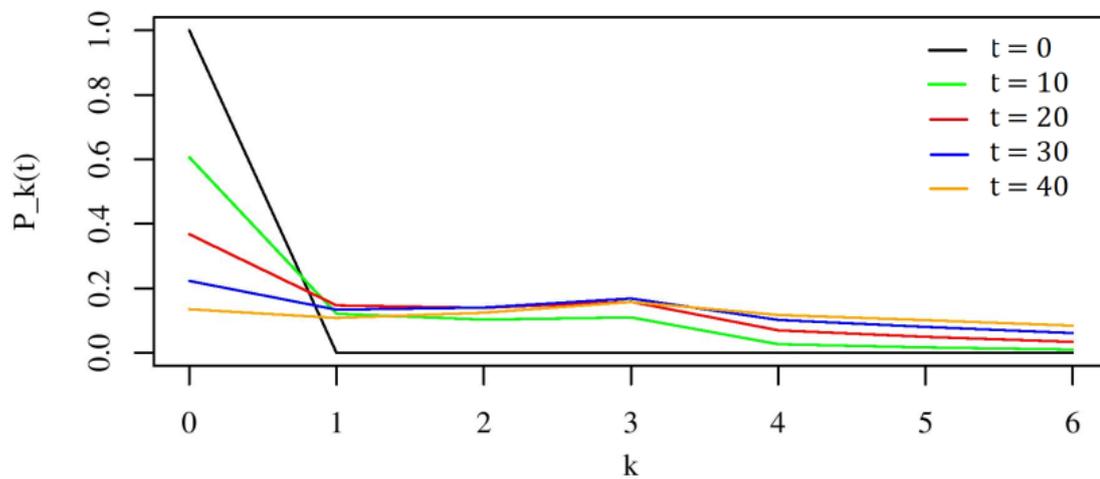
Полученные соотношения доказывают утверждение леммы.

Б.2 Расчет значений вероятностей (1.19)

На рисунках Б.1 и Б.2 дано графическое представление $P_k(t)$ как функции переменных $t \geq 0$ и $k = 0, 1, 2, \dots$ для двух неординарных пуассоновских потоков с различными значениями параметров.

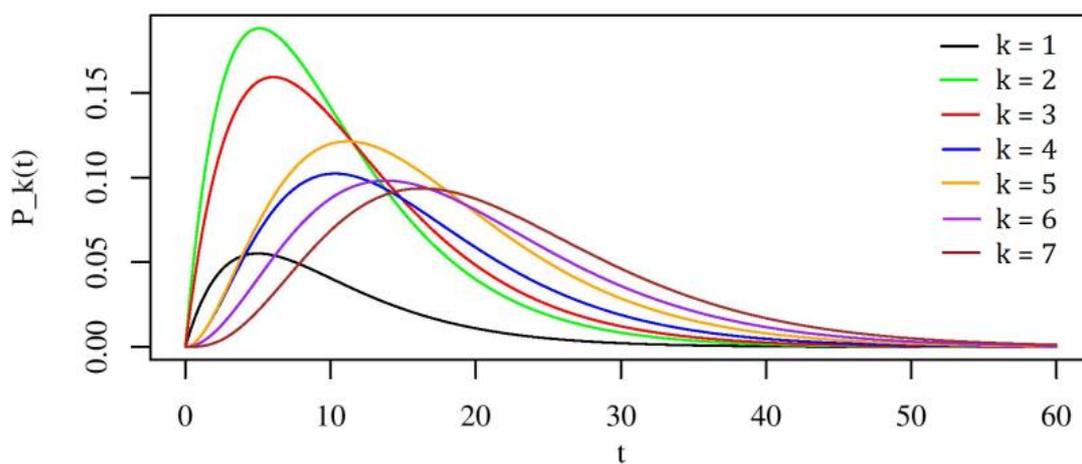


а) Зависимость $P_k(t)$ от $t \geq 0$

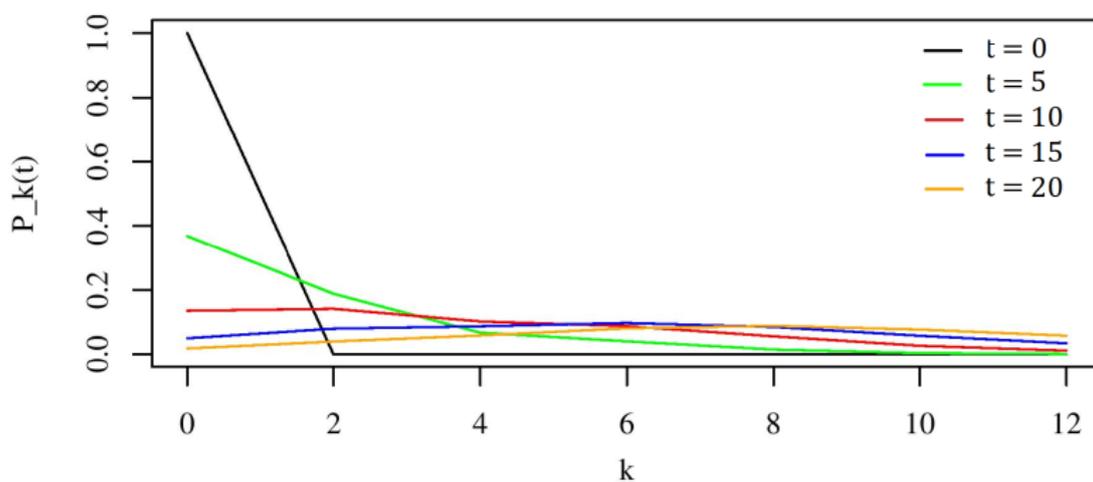


б) Зависимость $P_k(t)$ от $k = 0, 1, 2, \dots$

Рисунок Б.1 — Графики функций $P_k(t)$ для потока с параметрами $\lambda = 0.05$,
 $p = 0.4$, $q = 0.3$, $s = 0.3$



а) Зависимость $P_k(t)$ от $t \geq 0$



б) Зависимость $P_k(t)$ от $k = 0, 1, 2, \dots$

Рисунок Б.2 — Графики функций $P_k(t)$ для потока с параметрами $\lambda = 0.2$, $p = 0.15$, $q = 0.5$, $s = 0.35$

Приложение В

Доказательство леммы 4

Рассмотрим случай $i \in I \setminus \{0\}$. Тогда с учетом равенства нулю вероятностей (2.22) и (2.24), а также с применением рекуррентных соотношений, полученных в лемме 3, произведем следующие преобразования

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, y) &= \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) + \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) + \\
&+ \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(2j+1)}, x, 0) + \sum_{k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}} \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, 0) = \\
&= \sum_{y=0}^{l_j-1} \sum_{v=0}^y Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(y-v; T_{2j-1}) + \\
&+ \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{x+l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \varphi_j(x+l_j-v; T_{2j-1}) + \\
&+ \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \varphi_j(x; T_{2j}) + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) \varphi_j(x-v; T_{2j}) + \\
&+ \sum_{k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^x Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, 0) \varphi_j(x-v; T_{k-1}).
\end{aligned}$$

Теперь в суммах правой части полученного выражения изменим порядок суммирования:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, y) &= \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \sum_{y=v}^{l_j-1} \varphi_j(y-v; T_{2j-1}) + \\
&+ \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x+l_j-v; T_{2j-1}) + \\
&+ \sum_{v=l_j}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \sum_{x=v-l_j}^{\infty} \varphi_j(x+l_j-v; T_{2j-1}) + \\
&+ \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x; T_{2j}) + \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) \sum_{x=v}^{\infty} \varphi_j(x-v; T_{2j}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}} \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, 0) \sum_{x=v}^{\infty} \varphi_j(x-v; T_{k-1}) = \\
& = \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) \sum_{y=0}^{\infty} \varphi_j(y; T_{2j-1}) + \\
& + \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x; T_{2j}) + \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x; T_{2j}) + \\
& + \sum_{k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}} \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, 0) \sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x; T_{k-1}).
\end{aligned}$$

Заметим, что $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n; t) = 1$ для любого $t > 0$ в силу условия нормировки для одномерных распределений неординарного пуассоновского потока. Тогда последнее равенство можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, y) = \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) + \\
& + \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) + \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) + \sum_{k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}} \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, 0).
\end{aligned}$$

Теперь добавим к сумме в правой части полученного выражения нулевые вероятности из (2.22) и (2.24):

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, y) = \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) + \\
& + \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=1}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) + \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) + \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, w) + \\
& + \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, l_j) + \sum_{k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}} \sum_{v=0}^{\infty} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, 0) + \\
& + \sum_{k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=1}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, w) = \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) + \\
& + \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(2j)}, v, w) + \sum_{k \in M \setminus \{2j, 2j+1\}} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k-1)}, v, w) = \\
& = \sum_{k=1}^{2m} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, v, w).
\end{aligned}$$

Таким образом, при $i \in I \setminus \{0\}$ справедливо рекуррентное равенство

$$\sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,i+1}(\Gamma^{(k)}, x, y) = \sum_{k=1}^{2m} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, v, w). \quad (\text{B.1})$$

Рассмотрим теперь сумму $\sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,1}(\Gamma^{(k)}, x, y)$. В силу замечания к лемме 3 в случае $i = 0$ имеют место равенства (2.21) и (2.23). Следовательно, с учетом нулевых вероятностей из (2.22) и (2.24) справедливы преобразования

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,1}(\Gamma^{(k)}, x, y) = \sum_{y=0}^{l_j-1} Q_{j,1}(\Gamma^{(2j)}, 0, y) + \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,1}(\Gamma^{(2j)}, x, l_j) + \\ & + \sum_{k \in M \setminus \{2j\}} \sum_{x=0}^{\infty} Q_{j,1}(\Gamma^{(k)}, x, 0) = \sum_{y=0}^{l_j-1} \sum_{v=0}^y \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) \varphi_j(y-v; T_{2j-1}) + \\ & + \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{x+l_j} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(2j-1)}, v, w) \varphi_j(x+l_j-v; T_{2j-1}) + \\ & + \sum_{k \in M \setminus \{2j\}} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{v=0}^x \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(k-1)}, v, w) \varphi_j(x-v; T_{k-1}) = \\ & = \sum_{k=1}^{2m} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(k-1)}, v, w) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_j(n; T_{k-1}) = \sum_{k=1}^{2m} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(k-1)}, v, w). \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (B.1) справедливо и для $i = 0$. Выбранное начальное вероятностное распределение (2.10) цепи Маркова (2.8) удовлетворяет условию нормировки $\sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,0}(\Gamma^{(k-1)}, x, y) = 1$. Таким образом, в силу рекуррентного равенства (B.1) условие

$$\sum_{k=1}^{2m} \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=0}^{l_j} Q_{j,i}(\Gamma^{(k)}, x, y) = 1$$

будет выполняться для любого $i \in I$.

Приложение Г

Доказательство леммы 6

Доказательство основано на последовательных преобразованиях с применением соотношений (2.28)–(2.30). Рассмотрим сначала функции $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j)$. В следующих преобразованиях воспользуемся для начала соотношением (2.28), затем $(2m - 2)$ раза последовательно применим равенство (2.30) и в завершении воспользуемся соотношением (2.29):

$$\begin{aligned}
\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) &= z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j-1}; z) \Phi_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, z, 0) - \\
&- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r = \\
&= z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j-1}; z) \Psi_j(T_{2j-2}; z) \Phi_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-2)}, z, 0) - \\
&- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r = \dots = \\
&= z^{-l_j} \prod_{k=2j-2m+1}^{2j-1} \Psi_j(T_k; z) \Phi_{j,2m(i+1)-2m+1}(\Gamma^{(2j-2m+1)}, z, 0) - \\
&- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r = \\
&= z^{-l_j} \prod_{k \in M \setminus \{2j\}} \Psi_j(T_k; z) \Phi_{j,2mi+1}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) - \\
&- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r = \\
&= z^{-l_j} \prod_{k \in M} \Psi_j(T_k; z) \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + \\
&+ z^{-l_j} \prod_{k \in M} \Psi_j(T_k; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2mi}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) - \\
&- z^{-l_j} \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r.
\end{aligned} \tag{Г.1}$$

Поскольку $\Psi_j(T_k; z)$ есть экспоненциальные функции вида (2.26), то $\prod_{k \in M} \Psi_j(T_k; z) = \Psi_j(\sum_{k=1}^{2m} T_k; z) = \Psi_j(T; z)$ и из (Г.1) получим (2.31).

Далее рассмотрим функции вида $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$. Сначала последовательно применим равенства (2.29) и (2.28), а затем $(2m - 2)$ раза – соотношение (2.30).

$$\begin{aligned}
\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) &= \Psi_j(T_{2j}; z) \Phi_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + \\
&\quad + \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) = \\
&= z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j-1}; z) \Psi_j(T_{2j}; z) \Phi_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-1)}, z, 0) - \\
&\quad - z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r + \\
&\quad + \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) = \\
&= z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j-2}; z) \Psi_j(T_{2j-1}; z) \Psi_j(T_{2j}; z) \Phi_{j,2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2j-2)}, z, 0) - \\
&\quad - z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r + \\
&\quad + \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) = \dots = \\
&= z^{-l_j} \prod_{k \in M} \Psi_j(T_k; z) \Phi_{j,2m(i+1)-2m}(\Gamma^{(2j+1-2m)}, z, 0) - \\
&\quad - z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r + \\
&\quad + \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) = \\
&= z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) - \\
&\quad - z^{-l_j} \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r + \\
&\quad + \Psi_j(T_{2j}; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w).
\end{aligned}$$

Полученный результат подтверждает соотношение (2.32).

В завершении доказательства рассмотрим функции $\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(k)}, z, 0)$ при $k \in M \setminus \{2j, 2j + 1\}$. Преобразуем их следующим образом. Сначала при-

меним соотношение (2.30) подряд l раз. При этом l выбирается таким образом, чтобы в результате преобразований получить справа функцию вида $\Phi_{j,2m(i+1)-l}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0)$. Это означает, что $l = k - 2j - 1$ при $k > 2j + 1$ и $l = k + 2m - 2j - 1$ при $k < 2j$. Далее воспользуемся последовательно соотношениями (2.29) и (2.28) и вновь $(2m - l - 2)$ раз применим соотношение (2.30):

$$\begin{aligned}
\Phi_{j,2m(i+1)}(\Gamma^{(k)}, z, 0) &= \dots = \prod_{u=k-l}^{k-1} \Psi_j(T_u; z) \Phi_{j,2m(i+1)-l}(\Gamma^{(2j+1)}, z, 0) = \\
&= \prod_{u=k-l-1}^{k-1} \Psi_j(T_u; z) \Phi_{j,2m(i+1)-l-1}(\Gamma^{(2j)}, z, l_j) + \\
&+ \prod_{u=k-l-1}^{k-1} \Psi_j(T_u; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-l-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) = \\
&= z^{-l_j} \prod_{u=k-l-2}^{k-1} \Psi_j(T_u; z) \Phi_{j,2m(i+1)-l-2}(\Gamma^{(2j-1)}, z, 0) - \\
&- z^{-l_j} \prod_{u=k-l-1}^{k-1} \Psi_j(T_u; z) \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-l-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r + \\
&+ \prod_{u=k-l-1}^{k-1} \Psi_j(T_u; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-l-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) = \\
&= z^{-l_j} \prod_{u=k-l-3}^{k-1} \Psi_j(T_u; z) \Phi_{j,2m(i+1)-l-3}(\Gamma^{(2j-2)}, z, 0) - \\
&- z^{-l_j} \prod_{u=k-l-1}^{k-1} \Psi_j(T_u; z) \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-l-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r + \\
&+ \prod_{u=k-l-1}^{k-1} \Psi_j(T_u; z) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-l-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w) = \dots = \\
&= z^{-l_j} \Psi_j(T; z) \Phi_{j,2mi}(\Gamma^{(k)}, z, 0) - \\
&- z^{-l_j} \Psi_j\left(\sum_{u=k-l-1}^{k-1} T_u; z\right) \sum_{v=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-l-2}(\Gamma^{(2j-1)}, v, 0) z^v \sum_{r=0}^{l_j-v-1} \varphi_j(r; T_{2j-1}) z^r + \\
&+ \Psi_j\left(\sum_{u=k-l-1}^{k-1} T_u; z\right) \sum_{w=0}^{l_j-1} Q_{j,2m(i+1)-l-1}(\Gamma^{(2j)}, 0, w).
\end{aligned}$$

В результате преобразований получаем соотношение (2.33).

Приложение Д

Доказательство леммы 7

Во-первых, определим состояния цепи Маркова, вероятности пребывания в которых в любой момент, начиная с τ_1 , равны нулю. Из соотношения (3.9) и вида алгоритма управления (3.1) следует, что в любое состояние вида $(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S$ можно с положительной вероятностью попасть только из состояния вида $(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \in S$. Вероятность $\mathbf{P}(y_1 = 0, y_m = 0)$ в правой части равенства (3.9) равна нулю, если не выполняется хотя бы одно из условий $y_1 = 0$ или $y_m = 0$. Поэтому вероятность пребывания цепи Маркова в любом состоянии из множества

$$D(\Gamma^{(1)}) = \{(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S : y_1 \in Y_1 \setminus \{0\}\} \cup \\ \cup \{(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S : y_m \in Y_m \setminus \{0\}\}$$

в момент τ_i равна нулю для любого $i \in I \setminus \{0\}$. Так, если в начальный момент времени цепь Маркова находится в состоянии из множества $D(\Gamma^{(1)})$, то согласно соотношению (3.10) с положительной вероятностью на следующем шаге она переходит в состояние вида $(\Gamma^{(2)}, 0, x_m, l_1, 0) \in S$. Следуя возможным переходам по алгоритму $s(\Gamma)$, далее цепь (3.6) с положительной вероятностью переходит в какое-либо состояние вида $(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S$, из которого вероятность возвращения в любое состояние множества $D(\Gamma^{(1)})$ равна нулю. Таким образом, состояния множества $D(\Gamma^{(1)})$ являются несущественными по определению.

Аналогичными рассуждениями с использованием рекуррентных соотношений (3.10)–(3.14) определяем, что вероятности пребывания цепи Маркова в состоянии из множеств

$$D(\Gamma^{(2)}) = \{(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S : y_m \in Y_m \setminus \{0\}\} \cup \\ \cup \{(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S : x_1 \in X \setminus \{0\}, y_1 \in Y_1 \setminus \{l_1\}\}, \\ D(\Gamma^{(k)}) = \{(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S : y_1 \in Y_1 \setminus \{0\}\} \cup \\ \cup \{(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S : y_m \in Y_m \setminus \{0\}\}, k \in \{3, 4, \dots, 2m - 2\}, \\ D(\Gamma^{(2m-1)}) = \{(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S : y_1 \in Y_1 \setminus \{0\}\} \cup \\ \cup \{(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S : y_m \in Y_m \setminus \{0\}\} \cup \\ \cup \{(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S : x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}\},$$

$$\begin{aligned}
D(\Gamma^{(2m)}) &= \{(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: y_1 \in Y_1 \setminus \{0\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}, x_m \in X \setminus \{0\}, \\
&y_m \in Y_m \setminus \{l'_m, l_m\}\} \cup \{(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, \\
&x_m \in X \setminus \{0\}, y_m \in Y_m \setminus \{0, l'_m\}\}, \\
D(\Gamma^{(2m+1)}) &= \{(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: y_1 \in Y_1 \setminus \{0\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, \\
&y_m \in \{l'_m + 1, l'_m + 2, \dots, l_m\}\} \cup \\
&\cup \{(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, \\
&x_m \in X \setminus \{0\}, y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m - 1\}\}
\end{aligned}$$

в момент τ_i при $i \in I \setminus \{0\}$ равна нулю, что указывает на несущественность этих состояний.

Во-вторых, выделим еще одно подмножество пространства S . Из соотношения (3.9) следует, что при любых $x_1, x_m \in X$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}
Q_{i+1}(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0) &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m+1}) \times \\
&\times \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m+1}) \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, w_1, w_m).
\end{aligned}$$

Тогда в состояние $(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0)$ при $x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}$ и $x_m \in X$ можно с положительной вероятностью попасть только из множества $D(\Gamma^{(2m+1)})$, а именно из состояний вида $(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S$ при $x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}$. Следовательно, вероятность пребывания цепи Маркова в состоянии множества

$$D^*(\Gamma^{(1)}) = \{(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0) \in S: x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}\}$$

в любой момент τ_i , начиная с $i = 2$, равна нулю, и указанные состояния также являются несущественными. В свою очередь, согласно (3.10) в состоянии множества

$$D^*(\Gamma^{(2)}) = \{(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in S: y_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}\}$$

с положительной вероятностью возможен переход только из множества $D^*(\Gamma^{(1)})$. Тогда вероятность пребывания в момент τ_i цепи (3.6) в состоянии множества $D^*(\Gamma^{(2)})$ равна нулю для всех $i \in I \setminus \{0, 1, 2\}$. Следовательно,

множество $D^*(\Gamma^{(2)})$ содержит лишь несущественные состояния. Заметим, что

$$D = \bigcup_{k=1}^{2m+1} D(\Gamma^{(k)}) \cup D^*(\Gamma^{(1)}) \cup D^*(\Gamma^{(2)}).$$

Таким образом, множество D незамкнуто и состоит только из несущественных состояний.

Несложно видеть, что все состояния пространства S за вычетом множества D образуют множество E . Покажем, что все состояния множества E общаются между собой. Для этого выделим состояние $(\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \in E$ и для произвольного состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E$ покажем возможность перехода с положительной вероятностью за конечное число шагов из состояния $(\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0)$ в состояние $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$ и обратно. Такой переход за конечное число шагов будем графически обозначать стрелкой, ведущей из начального состояния в конечное. В случае перехода за один шаг будем дополнительно указывать вероятность такого перехода над соответствующей стрелкой. Особенностью доказательства в сравнении с работой [146] является выделение состояний вида $(\Gamma^{(2m-2)}, x_1, x_m, 0, 0)$ при $x_1, x_m \in X$ как промежуточных при переходе из произвольного $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E$ в $(\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0)$. Это связано с тем, что подобное промежуточное состояние будет встречаться в большинстве цепочек вида $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \rightarrow (\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0)$.

1. Для начала для любых $x_1, x_m \in X$ укажем возможность с положительной вероятностью цепочки переходов из состояния $(\Gamma^{(2m-2)}, x_1, x_m, 0, 0)$ в состояние $(\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0)$. 1.1. Если $0 \leq x_1 < h_1$:

$$\begin{aligned} & (\Gamma^{(2m-2)}, x_1, x_m, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(h_1-x_1; T_{2m-2})\varphi_m(0; T_{2m-2})} \\ & \rightarrow (\Gamma^{(2m)}, h_1, x_m, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m})\varphi_m(0; T_{2m})} \\ & \rightarrow (\Gamma^{(2m+1)}, h_1, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, \min\{x_m, l'_m\}) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m+1})\varphi_m(0; T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, h_1, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, 0) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_1)\varphi_m(0; T_1)} (\Gamma^{(2)}, 0, \max\{0, x_m - l'_m\}, h_1, 0) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_2)\varphi_m(0; T_2)} (\Gamma^{(3)}, 0, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m-3})\varphi_m(0; T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, 0, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, 0). \end{aligned}$$

Такую процедуру необходимо повторить $\lceil \frac{x_m}{l'_m} \rceil + 1$ раз, пока не будет достигнуто состояние $(\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0)$.

1.2. Если $x_1 \geq h_1$:

$$\begin{aligned}
& (\Gamma^{(2m-2)}, x_1, x_m, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m-2})\varphi_m(0;T_{2m-2})} \\
& \rightarrow (\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m})\varphi_m(0;T_{2m})} \\
& \rightarrow (\Gamma^{(2m+1)}, x_1, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, \min\{x_m, l'_m\}) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m+1})\varphi_m(0;T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, x_1, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, 0) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_1)\varphi_m(0;T_1)} (\Gamma^{(2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, \max\{0, x_m - l'_m\}, \min\{x_1, l_1\}, 0) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_2)\varphi_m(0;T_2)} (\Gamma^{(3)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m-3})\varphi_m(0;T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, 0).
\end{aligned}$$

Такую процедуру необходимо повторить $\lceil \frac{x_1}{l_1} \rceil$ раз. Если при этом имеет место неравенство $\max\{0, x_1 - \lceil \frac{x_1}{l_1} \rceil \times l_1\} > 0$ или неравенство $\max\{0, x_m - \lceil \frac{x_1}{l_1} \rceil \times l'_m\} > 0$, то по завершении указанной процедуры перейти к 1.1.

2. Рассмотрим состояние $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E(\Gamma^{(2m-1)})$, т. е. состояние вида $(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0)$ при $x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}$. Тогда возможен переход

$$(\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(x_1;T_{2m-2})\varphi_m(x_m;T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0)$$

и обратный переход

$$\begin{aligned}
& (\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(h_1-x_1;T_{2m-1})\varphi_m(0;T_{2m-1})} \\
& \rightarrow (\Gamma^{(2m)}, h_1, \max\{0, x_m - l_m\}, 0, \min\{x_m, l_m\}) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m})\varphi_m(0;T_{2m})} \\
& \rightarrow (\Gamma^{(2m+1)}, h_1, \max\{0, x_m - l_m - l'_m\}, 0, \min\{\max\{0, x_m - l_m\}, l'_m\}) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m+1})\varphi_m(0;T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, h_1, \max\{0, x_m - l_m - l'_m\}, 0, 0) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_1)\varphi_m(0;T_1)} (\Gamma^{(2)}, 0, \max\{0, x_m - l_m - l'_m\}, h_1, 0) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_2)\varphi_m(0;T_2)} (\Gamma^{(3)}, 0, \max\{0, x_m - l_m - l'_m\}, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m-3})\varphi_m(0;T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, 0, \max\{0, x_m - l_m - l'_m\}, 0, 0).
\end{aligned}$$

Если $\max\{0, x_m - l_m - l'_m\} \neq 0$, то по завершении процедуры перейти к 1.1.

3. Рассмотрим состояние вида $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E(\Gamma^{(2m)})$.

3.1. Пусть $k = 2m$, $x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}$, $x_m \in X$, $y_1 = y_m = 0$. Тогда имеет место переход

$$(\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(x_1;T_{2m-2})\varphi_m(x_m;T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, 0)$$

и обратный переход

$$\begin{aligned}
& (\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m})\varphi_m(0;T_{2m})} \\
& \rightarrow (\Gamma^{(2m+1)}, x_1, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, \min\{x_m, l'_m\}) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m+1})\varphi_m(0;T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, x_1, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, 0) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_1)\varphi_m(0;T_1)} (\Gamma^{(2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, \max\{0, x_m - l'_m\}, \min\{x_1, l_1\}, 0) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_2)\varphi_m(0;T_2)} (\Gamma^{(3)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m-3})\varphi_m(0;T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, 0).
\end{aligned}$$

Если $\max\{0, x_m - l'_m\} \neq 0$ или $\max\{0, x_1 - l_1\} \neq 0$, то по завершении процедуры перейти к 1.

3.2. Пусть $k = 2m$, $x_1 \in X$, $x_m \in X \setminus \{0\}$, $y_1 = 0$, $y_m = l_m$. В этом случае возможен переход

$$\begin{aligned}
& (\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m-2})\varphi_m(x_m+l_m;T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m-1)}, 0, x_m + l_m, 0, 0) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(x_1;T_{2m-1})\varphi_m(0;T_{2m-1})} (\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l_m).
\end{aligned}$$

Обратная цепочка начинается переходом

$$(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l_m) \xrightarrow{\varphi_1(\max\{0, h_1 - x_1\}; T_{2m})\varphi_m(0; T_{2m})} (\Gamma^{(2m)}, \max\{x_1, h_1\}, x_m, 0, 0),$$

а далее осуществляется переход аналогично случаю 3.1.

3.3. Пусть $k = 2m$, $x_1 \in X$, $x_m = 0$, $y_1 = 0$, $y_m \in Y_m$. Имеет место цепочка переходов

$$\begin{aligned}
& (\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m-2})\varphi_m(y_m;T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m-1)}, 0, y_m, 0, 0) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(x_1;T_{2m-1})\varphi_m(0;T_{2m-1})} (\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m).
\end{aligned}$$

Обратная цепочка начинается переходом

$$(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) \xrightarrow{\varphi_1(\max\{0, h_1 - x_1\}; T_{2m})\varphi_m(0; T_{2m})} (\Gamma^{(2m)}, \max\{x_1, h_1\}, 0, 0, 0),$$

а далее осуществляется переход аналогично случаю 3.1.

3.4. Пусть $k = 2m$, $x_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}$, $x_m \in X \setminus \{0\}$, $y_1 = 0$, $y_m = l'_m$. Тогда с положительной вероятностью возможна цепочка переходов

$$\begin{aligned}
& (\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m-2})\varphi_m(0;T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m-1)}, 0, 0, 0, 0) \rightarrow \\
& \xrightarrow{\varphi_1(x_1;T_{2m-1})\varphi_m(0;T_{2m-1})} (\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m})\varphi_m(x_m+l'_m;T_{2m})} (\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l'_m).
\end{aligned}$$

Обратная цепочка начинается переходом

$$(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l'_m) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m})\varphi_m(0;T_{2m})} (\Gamma^{(2m)}, x_1, \max\{0, x_m - l'_m\}, 0, \min\{x_m, l'_m\}),$$

который необходимо повторить $\lceil \frac{x_m}{l'_m} \rceil + 1$ раз до достижения состояния $(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, 0)$. Далее осуществляется переход

$$(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(\max\{0, h_1 - x_1\}; T_{2m})\varphi_m(0; T_{2m})} (\Gamma^{(2m)}, \max\{x_1, h_1\}, 0, 0, 0),$$

а затем необходимо перейти к случаю 3.1.

4. Перейдем к рассмотрению состояний $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E(\Gamma^{(2m+1)})$.

4.1. Пусть $k = 2m + 1$, $x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}$, $x_m \in X \setminus \{0\}$, $y_1 = 0$, $y_m = l'_m$.

В этом случае имеет место цепочка

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) &\xrightarrow{\varphi_1(x_1; T_{2m-2})\varphi_m(x_m + l'_m; T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m + l'_m, 0, 0) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m})\varphi_m(0; T_{2m})} (\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, 0, l'_m). \end{aligned}$$

Обратная цепочка начинается переходами

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, 0, l'_m) &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m+1})\varphi_m(0; T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_1)\varphi_m(0; T_1)} (\Gamma^{(2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, x_m, \min\{x_1, l_1\}, 0) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_2)\varphi_m(0; T_2)} (\Gamma^{(3)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, x_m, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow \\ &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m-3})\varphi_m(0; T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, x_m, 0, 0), \end{aligned}$$

а затем необходимо перейти к случаю 1.

4.2. Пусть теперь $k = 2m + 1$, $x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}$, $x_m = 0$, а также $y_1 = 0$, $y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m\}$. Тогда возможна цепочка

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) &\xrightarrow{\varphi_1(x_1; T_{2m-2})\varphi_m(y_m; T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m)}, x_1, y_m, 0, 0) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m})\varphi_m(0; T_{2m})} (\Gamma^{(2m+1)}, x_1, 0, 0, y_m). \end{aligned}$$

Обратная цепочка содержит переходы

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(2m+1)}, x_1, 0, 0, y_m) &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m+1})\varphi_m(0; T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, x_1, 0, 0, 0) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_1)\varphi_m(0; T_1)} (\Gamma^{(2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, 0, \min\{x_1, l_1\}, 0) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_2)\varphi_m(0; T_2)} (\Gamma^{(3)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, 0, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow \\ &\xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m-3})\varphi_m(0; T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

В случае, если $\max\{0, x_1 - l_1\} \neq 0$, то по завершении процедуры перейти к 1.

5. Для любого состояния $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$ из множества $E(\Gamma^{(1)})$ имеем $k = 1, x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}, x_m \in X, y_1 = 0, y_m = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & (\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(x_1; T_{2m-2})\varphi_m(x_m+l'_m; T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m + l'_m, 0, 0) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m})\varphi_m(0; T_{2m})} (\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, 0, l'_m) \xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m+1})\varphi_m(0; T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0). \end{aligned}$$

Обратная цепочка начинается с переходов

$$\begin{aligned} & (\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0; T_1)\varphi_m(0; T_1)} (\Gamma^{(2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, x_m, \min\{x_1, l_1\}, 0) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_2)\varphi_m(0; T_2)} (\Gamma^{(3)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, x_m, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m-3})\varphi_m(0; T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, \max\{0, x_1 - l_1\}, x_m, 0, 0). \end{aligned}$$

Далее, если $x_m \neq 0$ или $\max\{0, x_1 - l_1\} \neq 0$, необходимо перейти к 1.

6. Теперь рассмотрим $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E(\Gamma^{(2)})$.

6.1. Пусть $k = 2, x_1, x_m \in X, y_1 = l_1, y_m = 0$. Возможны с положительной вероятностью переходы

$$\begin{aligned} & (\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(h_1; T_{2m-2})\varphi_m(x_m+l'_m; T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m)}, h_1, x_m + l'_m, 0, 0) \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m})\varphi_m(0; T_{2m})} (\Gamma^{(2m+1)}, h_1, x_m, 0, l'_m) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(x_1+l_1-h_1; T_{2m+1})\varphi_m(0; T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, x_1 + l_1, x_m, 0, 0) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_1)\varphi_m(0; T_1)} (\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, l_1, 0). \end{aligned}$$

Обратная цепочка содержит переходы

$$\begin{aligned} & (\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, l_1, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0; T_2)\varphi_m(0; T_2)} (\Gamma^{(3)}, x_1, x_m, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m-3})\varphi_m(0; T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, x_1, x_m, 0, 0). \end{aligned}$$

Затем, в случае если $x_1 \neq 0$ или $x_m \neq 0$, необходимо перейти к 1.

6.2. Пусть $k = 2, x_1 = 0, x_m \in X, y_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots, l_1 - 1\}, y_m = 0$. В этом случае осуществимы переходы

$$\begin{aligned} & (\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(h_1; T_{2m-2})\varphi_m(x_m+l'_m; T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m)}, h_1, x_m + l'_m, 0, 0) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(0; T_{2m})\varphi_m(0; T_{2m})} (\Gamma^{(2m+1)}, h_1, x_m, 0, l'_m) \rightarrow \\ & \xrightarrow{\varphi_1(y_1-h_1; T_{2m+1})\varphi_m(0; T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, y_1, x_m, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0; T_1)\varphi_m(0; T_1)} (\Gamma^{(2)}, 0, x_m, y_1, 0). \end{aligned}$$

Возможный обратный переход имеет вид

$$(\Gamma^{(2)}, 0, x_m, y_1, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_2)\varphi_m(0;T_2)} (\Gamma^{(3)}, 0, x_m, 0, 0) \rightarrow \dots \rightarrow \\ \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m-3})\varphi_m(0;T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, 0, x_m, 0, 0).$$

Если $x_m \neq 0$, то по завершении процедуры перейти к 1.

7. Наконец, пусть $(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) \in E(\Gamma^{(r)})$, $r \in \{3, 4, \dots, 2m - 2\}$. Тогда $k \in \{3, 4, \dots, 2m - 2\}$, $x_1, x_m \in X$, $y_1 = y_m = 0$ и имеют место переходы

$$(\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(h_1;T_{2m-2})\varphi_m(x_m+l'_m;T_{2m-2})} (\Gamma^{(2m)}, h_1, x_m + l'_m, 0, 0) \rightarrow \\ \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m})\varphi_m(0;T_{2m})} (\Gamma^{(2m+1)}, h_1, x_m, 0, l'_m) \rightarrow \\ \xrightarrow{\varphi_1(x_1+l_1-h_1;T_{2m+1})\varphi_m(0;T_{2m+1})} (\Gamma^{(1)}, x_1 + l_1, x_m, 0, 0) \rightarrow \\ \xrightarrow{\varphi_1(0;T_1)\varphi_m(0;T_1)} (\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, l_1, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_2)\varphi_m(0;T_2)} (\Gamma^{(3)}, x_1, x_m, 0, 0) \rightarrow \\ \rightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{k-1})\varphi_m(0;T_{k-1})} (\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, 0, 0).$$

В свою очередь, обратно возможно перейти по цепочке

$$(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, 0, 0) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_k)\varphi_m(0;T_k)} \dots \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m-3})\varphi_m(0;T_{2m-3})} (\Gamma^{(2m-2)}, x_1, x_m, 0, 0).$$

Затем, если $x_1 \neq 0$ или $x_m \neq 0$, перейти к 1.

Теперь можно видеть, что любые два состояния из множества E сообщаются друг с другом – как минимум, через состояние $(\Gamma^{(2m-2)}, 0, 0, 0, 0)$. Следовательно, множество E является неразложимым классом сообщающихся существенных состояний, т. е. минимальным замкнутым множеством [154]. Кроме того, данный класс содержит состояние $(\Gamma^{(2m)}, 0, 0, 0, l'_m)$, для которого возможен с положительной вероятностью переход

$$(\Gamma^{(2m)}, 0, 0, 0, l'_m) \xrightarrow{\varphi_1(0;T_{2m})\varphi_m(l'_m;T_{2m})} (\Gamma^{(2m)}, 0, 0, 0, l'_m).$$

Следовательно, период этого состояния равен единице, что, в свою очередь, означает, что указанный класс E является апериодическим [155]. Лемма доказана.

Приложение Е

Доказательство леммы 9

1. Непосредственно из (3.9) и с учетом введенной классификации состояний получаем, что для любых $x_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots\}$ и $x_m \in X$ верно

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0) = \sum_{v_1=h_1}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l'_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\ \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m+1}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m+1}).$$

2. Согласно (3.10) для состояний из множества $E(\Gamma^{(2)})$ справедливы следующие соотношения: во-первых, при $x_m \in X$ и $y_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots, l_1 - 1\}$

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(2)}, 0, x_m, y_1, 0) = \\ = \sum_{v_1=h_1}^{y_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \varphi_m(x_m - v_m; T_1),$$

а во-вторых, при любых $x_1, x_m \in X$ верно

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, l_1, 0) = \\ = \sum_{v_1=h_1}^{l_1+x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(l_1 + x_1 - v_1; T_1) \varphi_m(x_m - v_m; T_1).$$

3. Из соотношения (3.11) следует, что для состояний $(\Gamma^{(3)}, x_1, x_m, 0, 0)$ при $x_1, x_m \in X$ верно равенство

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(3)}, x_1, x_m, 0, 0) = \\ = \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} Q_i(\Gamma^{(2)}, v_1, v_m, w_1, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_2) \varphi_m(x_m - v_m; T_2),$$

а для состояний из множеств $E(\Gamma^{(k)})$, $k \in \{4, 5, \dots, 2m - 2\}$, при $x_1, x_m \in X$ выводим соотношение

$$Q_{i+1}(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, 0, 0) = \\ = \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(k-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{k-1}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{k-1})$$

4. Согласно (3.12) получаем рекуррентное соотношение, справедливое при $x_1 < h_1$ и $x_m \in X$:

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, 0, 0) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}). \end{aligned}$$

5. Непосредственно из соотношения (3.13) получаем несколько частных случаев. Во-первых, пусть $x_1 < h_1$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, y_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{c_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \times \\ & \quad \times \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m-1}) \mathbf{P}(0 = x_m, c_m = y_m) + \\ &+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{c_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \times \\ & \quad \times \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m-1}) \mathbf{P}(c_m - l_m = x_m, l_m = y_m) + \\ &+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{c_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ & \quad \times \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \mathbf{P}(0 = x_m, c_m = y_m) + \\ &+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{c_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ & \quad \times \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \mathbf{P}(c_m - l'_m = x_m, l'_m = y_m). \end{aligned}$$

В зависимости от значений вероятностей в правой части полученного соотношения и с учетом классификации состояний, данной в лемме 7, возможны несколько случаев. Для $y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m - 1\}$ имеем

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) + \\ &+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}). \end{aligned}$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, l'_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l'_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m-1}) + \\ &+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m}), \end{aligned}$$

а также при $x_m > 0$

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l'_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l'_m+x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(l'_m + x_m - v_m; T_{2m}). \end{aligned}$$

Далее, при $y_m \in \{l'_m + 1, l'_m + 2, \dots, l_m - 1\}$ получаем

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}), \end{aligned}$$

и при любых $x_m \in X$ справедливо

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l_m+x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(l_m + x_m - v_m; T_{2m-1}). \end{aligned}$$

Во-вторых, рассмотрим случай $x_1 \geq h_1$. Тогда из (3.13) выводим

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, y_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \times \\ &\quad \times \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) \mathbf{P}(0 = y_m) + \\ &+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{c_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \times \\ &\quad \times \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m-1}) \mathbf{P}(0 = x_m, c_m = y_m) + \\ &+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{c_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \times \\ &\quad \times \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m-1}) \mathbf{P}(c_m - l_m = x_m, l_m = y_m). \end{aligned}$$

Вновь с учетом несущественных состояний множества D из полученного соотношения выведем несколько случаев. Например,

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, 0) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, 0, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \varphi_m(0; T_{2m-2}) + \\ &+ \sum_{v_1=0}^{x_1} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, 0, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(0; T_{2m-1}). \end{aligned}$$

Далее, при $x_m > 0$ имеем

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, 0) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}). \end{aligned}$$

Также при $y_m \in \{1, 2, \dots, l_m - 1\}$ получим

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}), \end{aligned}$$

и, в завершении, для любых $x_m \in X$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l_m+x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(l_m + x_m - v_m; T_{2m-1}). \end{aligned}$$

6. Для состояний из множества $E(\Gamma^{(2m+1)})$ из соотношения (3.14) находим, что при $x_1 \geq h_1$

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, 0, y_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{c_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ &\quad \times \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \mathbf{P}(0 = x_m, c_m = y_m) + \\ &+ \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{c_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \times \\ &\quad \times \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \mathbf{P}(c_m - l'_m = x_m, l'_m = y_m). \end{aligned}$$

Отсюда имеем при $y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m - 1\}$

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, 0, 0, y_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \end{aligned}$$

и, кроме того, для любых $x_m \in X$ справедливо

$$\begin{aligned} & Q_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, 0, l'_m) = \\ &= \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m+l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(x_m + l'_m - v_m; T_{2m}). \end{aligned}$$

Таким образом, получены все соотношения (3.19)–(3.32).

Приложение Ж

Доказательство леммы 10

Во-первых, покажем, что соотношения (3.9)–(3.14) позволяют для любого $i \in I$ показать рекуррентное равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} Q_{i+1}(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \\ & = \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m). \end{aligned}$$

В самом деле, суммируя указанные равенства, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} Q_{i+1}(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \\ & = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m+1}) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m+1}) \times \\ & \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(y_1 = 0, y_m = 0) + \\ & \quad + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{y_1} \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_1) \times \\ & \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(x_1 = 0, y_1 < l_1, y_m = 0) + \\ & \quad + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1+l_1} \varphi_1(x_1 + l_1 - v_1; T_1) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_1) \times \\ & \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(y_1 = l_1, y_m = 0) + \\ & \quad + \sum_{k=3}^{2m-2} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{k-1}) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{k-1}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(y_1 = 0, y_m = 0) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) \times \\
& \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(x_1 < h_1, y_1 = 0, y_m = 0) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) \times \\
& \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(x_1 \geq h_1, y_1 = 0, y_m = 0) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \sum_{c_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}(\max\{0, c_m - l_m\} = x_m, y_1 = 0, \min\{c_m, l_m\} = y_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{c_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}(x_1 < h_1, \max\{0, c_m - l'_m\} = x_m, y_1 = 0, \min\{c_m, l'_m\} = y_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{c_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}(x_1 \geq h_1, \max\{0, c_m - l'_m\} = x_m, y_1 = 0, \min\{c_m, l'_m\} = y_m) = \\
& = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m+1}) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m+1}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{y_1} \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_1) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=l_1}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_1) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) + \\
& + \sum_{k=2}^{2m-3} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_k) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_k) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k)}, v_1, v_m, w_1, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, w_1, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \sum_{c_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(0 = x_m, c_m = y_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \sum_{c_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(c_m - l_m = x_m, l_m = y_m) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{c_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(0 = x_m, c_m = y_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{c_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{c_m} \varphi_m(c_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) \mathbf{P}(c_m - l'_m = x_m, l'_m = y_m) = \\
= & \sum_{k \in \{1, 2, \dots, 2m-2, 2m+1\}} \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_1=v_1}^{\infty} \varphi_1(x_1 - v_1; T_k) \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; T_k) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k)}, v_1, v_m, w_1, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \sum_{v_m=0}^{x_m+l_m} \varphi_m(x_m + l_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, w_1, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{v_m=0}^{x_m+l'_m} \varphi_m(x_m + l'_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, w_1, w_m) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_1=v_1}^{\infty} \varphi_1(x_1 - v_1; T_k) \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; T_k) \times \\
&\quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k)}, v_1, v_m, w_1, w_m).
\end{aligned}$$

Поскольку имеет место нормировочное равенство $\sum_{x=0}^{\infty} \varphi_j(x; T_k) = 1$ при $j \in J$ и любом $k \in M$, то для любых $i \in I$ полученное соотношение преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{y_1=0}^{l_1} \sum_{y_m=0}^{l_m} Q_{i+1}(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, y_1, y_m) = \\
&= \sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k)}, v_1, v_m, w_1, w_m).
\end{aligned}$$

Согласно полученным результатам выбор удовлетворяющего условию нормировки

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_0(\Gamma^{(k)}, v_1, v_m, w_1, w_m) = 1$$

начального распределения вектора $(\Gamma_0, \mathfrak{a}_{1,0}, \mathfrak{a}_{m,0}, \xi'_{1,-1}, \xi'_{m,-1})$ на всем пространстве состояний цепи Маркова (3.6) позволяет соблюсти равенство

$$\sum_{k=1}^{2m+1} \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(k)}, v_1, v_m, w_1, w_m) = 1$$

для любого $i \in I$. Таким образом, имеет место соотношение (3.33), что завершает доказательство леммы.

Приложение И

Доказательство леммы 11

1. В определении (3.34) для производящих функций при $k = 1$, $y_1 = y_m = 0$ подставим рекуррентное соотношение (3.19). С учетом обозначений (2.25) получим, что справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m, 0, 0) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(1)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
&= \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=h_1}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l'_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\
&\quad \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m+1}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m+1}) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
&= \sum_{v_1=h_1}^{\infty} \sum_{x_1=v_1}^{\infty} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m+1}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m+1}) \times \\
&\quad \times z_m^{x_m - v_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} z_m^{v_m} = \\
&= \sum_{v_1=h_1}^{\infty} \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} z_m^{v_m}.
\end{aligned} \tag{И.1}$$

Состояния вида $(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, 0, w_m)$ при $v_m > 0$, $w_m \in \{0, 1, \dots, l'_m - 1\}$ или при $w_m \in \{l'_m + 1, l'_m + 2, \dots, l_m\}$ являются несущественными. Следовательно, в силу замечания 2 к лемме 8 в случае, если начальное распределение цепи (3.6) задается на множестве существенных состояний, преобразования (И.1) можно продолжить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m, 0, 0) &= \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, v_m, 0, l'_m) z_1^{v_1} z_m^{v_m} + \\
&\quad + \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l'_m-1} Q_i(\Gamma^{(2m+1)}, v_1, 0, 0, w_m) z_1^{v_1} =
\end{aligned}$$

$$= \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) + \quad (\text{И.2})$$

$$+ A_i^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m),$$

где введена функция

$$A_i^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) = \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{w_m=0}^{l'_m-1} \Phi_i^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, 0, 0, w_m).$$

2. Рассмотрим теперь случай производящих функций (3.34) при $k = 2$, $y_1 = l_1$, $y_m = 0$. Тогда с применением (3.21) преобразуем

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m, l_1, 0) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2)}, x_1, x_m, l_1, 0) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\ &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{l_1+x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\ &\quad \times \varphi_1(l_1 + x_1 - v_1; T_1) \varphi_m(x_m - v_m; T_1) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\ &= \sum_{x_1=l_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) z_1^{x_1-l_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; T_1) z_m^{x_m-v_m} \times \\ &\quad \times Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\ &= z_1^{-l_1} \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) z_1^{x_1} \Psi_m(T_1; z_m) \times \\ &\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\ &\quad - z_1^{-l_1} \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) z_1^{x_1} \Psi_m(T_1; z_m) \times \\ &\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\ &= z_1^{-l_1} \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_1=v_1}^{\infty} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) z_1^{x_1-v_1} \Psi_m(T_1; z_m) \times \\ &\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} - \\ &\quad - z_1^{-l_1} \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) z_1^{x_1} \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} & \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m, l_1, 0) = \\ & = z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1; z_1) \Psi_m(T_1; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^2(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m), \end{aligned} \quad (\text{И.3})$$

где через $A_i^2(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m)$ обозначена функция

$$\begin{aligned} & A_i^2(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) = \\ & = -z_1^{-l_1} \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) z_1^{x_1} \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь производящие функции вида $\Phi_{i+1}^m(\Gamma^{(2)}, 0, z_m, y_1, 0)$ при $y_1 \in \{h_1, h_1 + 1, \dots, l_1 - 1\}$ и в преобразованиях будем опираться на равенство (3.20):

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}^m(\Gamma^{(2)}, 0, z_m, y_1, 0) & = \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2)}, 0, x_m, y_1, 0) z_m^{x_m} = \\ & = \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=h_1}^{y_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\ & \quad \times \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \varphi_m(x_m - v_m; T_1) z_m^{x_m} = \\ & = \sum_{v_1=h_1}^{y_1} \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; T_1) z_m^{x_m - v_m} \times \\ & \quad \times Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\ & = \sum_{v_1=h_1}^{y_1} \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}. \end{aligned} \quad (\text{И.4})$$

3. Пусть теперь $k = 3$, $y_1 = y_m = 0$. Тогда из определения (3.34) и рекуррентного соотношения (3.22) с учетом несущественности состояний $(\Gamma^{(2)}, v_1, v_m, w_1, 0)$ цепи (3.6) при одновременном выполнении $v_1 \in X \setminus \{0\}$ и $w_1 \in Y_1 \setminus \{l_1\}$ получим справедливость следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(3)}, z_1, z_m, 0, 0) & = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(3)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\ & = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \sum_{w_1=0}^{l_1} Q_i(\Gamma^{(2)}, v_1, v_m, w_1, 0) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_2) \varphi_m(x_m - v_m; T_2) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
& = \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_1=v_1}^{\infty} \varphi_1(x_1 - v_1; T_2) z_1^{x_1-v_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_1(x_m - v_m; T_2) z_m^{x_m-v_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_1=0}^{l_1} Q_i(\Gamma^{(2)}, v_1, v_m, w_1, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} = \\
& = \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1} Q_i(\Gamma^{(2)}, v_1, v_m, w_1, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} = \\
& = \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2)}, v_1, v_m, l_1, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} + \\
& \quad + \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_1=0}^{l_1-1} Q_i(\Gamma^{(2)}, 0, v_m, w_1, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(3)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\
& = \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m, l_1, 0) + A_i^3(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m),
\end{aligned} \tag{И.5}$$

где

$$A_i^3(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m) = \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \sum_{w_1=0}^{l_1-1} \Phi_i^m(\Gamma^{(2)}, 0, z_m, w_1, 0).$$

4. Рассмотрим теперь случай производящих функций (3.34) при значениях $k \in \{4, 5, \dots, 2m-2\}$ и $y_1 = y_m = 0$. Тогда согласно соотношению (3.23) имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m, 0, 0) & = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(k)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
& = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(k-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
& \quad \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{k-1}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{k-1}) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
& = \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_1=v_1}^{\infty} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{k-1}) z_1^{x_1-v_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; T_{k-1}) z_m^{x_m-v_m} \times \\
& \quad \times Q_i(\Gamma^{(k-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} = \\
& = \Psi_1(T_{k-1}; z_1) \Psi_m(T_{k-1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(k-1)}, z_1, z_m, 0, 0).
\end{aligned} \tag{И.6}$$

5. При $k = 2m - 1$, $y_1 = y_m = 0$ производящие функции (3.34) с учетом (3.24) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m, 0, 0) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m-2)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
&= \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
&\quad \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
&= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) z_m^{x_m - v_m} \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} - \\
&- \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{x_m=v_m}^{\infty} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) z_m^{x_m - v_m} \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m, 0, 0) &= \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \times \\
&\quad \times \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^4(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m),
\end{aligned} \tag{И.7}$$

где введена функция

$$\begin{aligned}
A_i^4(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m) &= - \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
&\quad \times \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

6. Аналогичными рассуждениями выведем рекуррентные соотношения для производящих функций (3.34) при $k = 2m$. Так, учитывая (3.25) при $y_m = 0$, (3.29) и (3.30), преобразуем

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, 0) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
&= \sum_{x_1=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, 0) z_1^{x_1} + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=1}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, 0) z_1^{x_1} z_m^{x_m} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, 0, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(0; T_{2m-1}) z_1^{x_1} + \\
&+ \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, 0, 0, w_m) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(0; T_{2m}) z_1^{x_1} + \\
&+ \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, 0, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \varphi_m(0; T_{2m-2}) z_1^{x_1} + \\
&+ \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, 0, 0, 0) \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(0; T_{2m-1}) z_1^{x_1} + \\
&\quad + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{x_m=1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
&\quad \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
&= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) z_1^{x_1-v_1} \varphi_m(0; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, 0, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
&+ \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \varphi_m(0; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, 0, 0, w_m) + \\
&\quad + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1-v_1} \times \\
&\times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) z_m^{x_m-v_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} - \\
&\quad - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1-v_1} \times \\
&\times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-2}) z_m^{x_m-v_m} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} = \\
&= \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \varphi_m(0; T_{2m-1}) \sum_{v_1=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, 0, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
&+ \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \varphi_m(0; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, 0, 0, w_m) + \\
&+ \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} - \\
&- \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Получим, таким образом, соотношение

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\
& = \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m, 0, 0) + \\
& = A_i^5(\Gamma^{(2m-2)}, \Gamma^{(2m-1)}, \Gamma^{(2m)}, z_1, z_m),
\end{aligned} \tag{И.8}$$

где введена функция

$$\begin{aligned}
& A_i^5(\Gamma^{(2m-2)}, \Gamma^{(2m-1)}, \Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
& \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \Phi_m(0; T_{2m-1}) \Phi_i^1(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, 0, 0, 0) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \varphi_m(0; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, 0, 0, w_m) - \\
& - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Пусть по-прежнему $k = 2m$, но рассмотрим производящие функции вида $\Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, y_m)$ при $y_m \in \{1, 2, \dots, l'_m - 1\}$. Для преобразований воспользуемся равенствами (3.25) и (3.27):

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, y_m) = \sum_{x_1=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) z_1^{x_1} = \\
& = \sum_{x_1=0}^{h_1-1} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) z_1^{x_1} + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) z_1^{x_1} = \\
& = \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
& \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) z_1^{x_1} + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\
& \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) z_1^{x_1} + \\
& + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
& \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) z_1^{x_1} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v_1=0}^{\infty} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
&\quad + \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} - \\
&\quad - \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{2m}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

В результате получим для $y_m \in \{1, 2, \dots, l'_m - 1\}$

$$\begin{aligned}
&\Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, y_m) = \\
&= \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \varphi_m(y_m; T_{2m-1}) \Phi_i^1(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, 0, 0, 0) + \\
&\quad + \Psi_1(T_{2m}; z_1) \varphi_m(y_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} \Phi_i^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, w_m) + \\
&\quad + \Psi_1(T_{2m}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} + \\
&\quad + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} - \\
&\quad - \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{2m}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned} \tag{И.9}$$

Перейдем к выводу рекуррентных соотношений для производящих функций $\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l'_m)$. Для этого применим равенства (3.25), (3.26) и (3.27):

$$\begin{aligned}
&\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l'_m) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l'_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
&= \sum_{x_1=0}^{h_1-1} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, l'_m) z_1^{x_1} + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=1}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l'_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l'_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
& = \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l'_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
& \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m-1}) z_1^{x_1} + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l'_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\
& \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m}) z_1^{x_1} + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{x_m=1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l'_m+x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\
& \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(l'_m + x_m - v_m; T_{2m}) z_1^{x_1} z_m^{x_m} + \\
& + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l'_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\
& \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m-1}) z_1^{x_1} = \\
& = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) z_1^{x_1-v_1} \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{l'_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1-v_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{l'_m+x_m} \varphi_m(l'_m + x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m-v_m} \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} z_m^{v_m} = \\
& = \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{l'_m} \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1-v_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m-v_m} \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} z_m^{v_m-l'_m} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{l'_m} \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
&+ \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m - v_m} \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m - l'_m} - \\
&- \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m - v_m} \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m - l'_m} - \\
&- \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m - v_m} \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m - l'_m} + \\
&+ \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m - v_m} \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=1}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} z_m^{v_m - l'_m}.
\end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l'_m) &= z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\
&\quad \times \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^6(\Gamma^{(2m-1)}, \Gamma^{(2m)}, z_1, z_m),
\end{aligned} \tag{И.10}$$

где функция $A_i^6(\Gamma^{(2m-1)}, \Gamma^{(2m)}, z_1, z_m)$ задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&A_i^6(\Gamma^{(2m-1)}, \Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
&= \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{l'_m} \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
&+ z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=1}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
&- z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) -
\end{aligned}$$

$$-z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m}; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.$$

Положим теперь $y_m \in \{l'_m + 1, l'_m + 2, \dots, l_m - 1\}$ в определении (3.35). Тогда с учетом соотношения (3.27) производящие функции примут вид

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, y_m) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, 0, 0, y_m) z_1^{x_1} = \\ &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\ &\quad \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) z_1^{x_1} = \\ &= \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_1=v_1}^{\infty} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\ &\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} = \\ &= \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \varphi_m(y_m; T_{2m-1}) \sum_{v_1=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, 0, 0, 0) z_1^{v_1} + \\ &+ \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем для $y_m \in \{l'_m + 1, l'_m + 2, \dots, l_m - 1\}$ рекуррентное равенство

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, y_m) &= \\ &= \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \varphi_m(y_m; T_{2m-1}) \Phi_i^1(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, 0, 0, 0) + \\ &+ \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1}. \end{aligned} \tag{И.11}$$

Теперь при $k = 2m$ осталось рассмотреть случай производящих функций для $y = l_m$. Для этого в определение (3.34) подставим соотношение (3.28) и получим

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l_m) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, x_1, x_m, 0, l_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\ &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{l_m+x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) \times \\ &\quad \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-1}) \varphi_m(l_m + x_m - v_m; T_{2m-1}) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{x_m - l_m} = \\
&= z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m - v_m} \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{v_m} - \\
&\quad - z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} z_m^{x_m},
\end{aligned}$$

поэтому получаем

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l_m) &= z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-1}; z_m) \times \\
&\quad \times \Phi_i(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^7(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m).
\end{aligned} \tag{И.12}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_i^7(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) &= -z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1}.
\end{aligned}$$

7. Пусть теперь $k = 2m + 1$. Тогда согласно (3.35) и равенству (3.31) при $y_m \in \{0, 1, \dots, l'_m - 1\}$ справедливы преобразования

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, 0, 0, y_m) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, 0, 0, y_m) z_1^{x_1} = \\
&= \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) \times \\
&\quad \times \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) z_1^{x_1} = \\
&= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} - \\
&\quad - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) = \\
= & \Psi_1(T_{2m}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} - \\
& - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

Окончательно результат преобразований приобретает вид

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, 0, 0, y_m) = \\
= & \Psi_1(T_{2m}; z_1) \varphi_m(y_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} \Phi_i^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, w_m) + \\
& + \Psi_1(T_{2m}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} - \\
& - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned} \tag{И.13}$$

В свою очередь, при $y_m = l'_m$ преобразования выражения (3.34) с применением (3.32) дают в результате

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{\infty} Q_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, x_1, x_m, 0, l'_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m} = \\
= & \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m+l'_m} \varphi_m(x_m + l'_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m - l'_m} = \\
&= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m - l'_m} \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} - \\
&\quad - \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{x_1} z_m^{x_m - l'_m} - \\
&\quad - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{x_1} z_m^{x_m - l'_m} + \\
&\quad + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=1}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m - l'_m}.
\end{aligned}$$

Следовательно, получаем равенство

$$\begin{aligned}
&\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) = \\
&= z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, 0) + A_i^8(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m),
\end{aligned} \tag{И.14}$$

где введена функция

$$\begin{aligned}
&A_i^8(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
&= z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
&\quad \times \sum_{w_m=1}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
&\quad - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0).
\end{aligned}$$

Заметим также, что для функций $\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m)$ справедливы следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) = \\
& = \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m - l'_m} = \\
& = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1 - v_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, l_m) z_1^{v_1} z_m^{x_m - l'_m} - \\
& - \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, l_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m - l'_m} - \\
& - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, l_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m - l'_m} + \\
& + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m-1} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{x_1} z_m^{x_m - l'_m}.
\end{aligned}$$

Поэтому имеет место соотношение

$$\begin{aligned}
& \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) = \\
& = z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l_m) + A_i^9(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m), \tag{И.15}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& A_i^9(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
& = z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1, T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l'_m-1} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& \quad - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, l'_m) z_m^{v_m} - \\
& \quad - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, l'_m).
\end{aligned}$$

Полученные соотношения (И.2)–(И.15) совпадают с выражениями (3.37)–(3.50). Итак, лемма доказана.

Приложение К

Доказательство леммы 12

Исключая все нулевые производящие функции из (3.34)–(3.36), получим с учетом соотношений (3.37)–(3.50) следующие равенства. Например, для случая $k = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) &= \Phi_{i+1}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\ &= \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) + \\ &+ \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{w_m=0}^{l'_m-1} \Phi_i^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, 0, 0, w_m) = \\ &= \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m). \end{aligned}$$

Далее, с учетом равенств (3.38) и (3.39) классификации состояний вида $(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0)$, $v_1 \in \{0, 1, \dots, h_1 - 1\}$, $v_m \in X$, как несущественных получим

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m) &= \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m, l_1, 0) + \sum_{y_1=0}^{l_1-1} \Phi_{i+1}^m(\Gamma^{(2)}, 0, z_m, y_1, 0) = \\ &= z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1; z_1) \Psi_m(T_1; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m, 0, 0) - \\ &- z_1^{-l_1} \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) z_1^{x_1} \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\ &+ \sum_{y_1=h_1}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{y_1} \varphi_1(y_1 - v_1; T_1) \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\ &= z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1; z_1) \Psi_m(T_1; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) + \\ &+ \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай $k = 3$:

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(3)}, z_1, z_m) &= \Phi_{i+1}(\Gamma^{(3)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\ &= \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m, l_1, 0) + \\ &+ \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \sum_{w_1=0}^{l_1-1} \Phi_i^m(\Gamma^{(2)}, 0, z_m, w_1, 0) = \\ &= \Psi_1(T_2; z_1) \Psi_m(T_2; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m). \end{aligned}$$

Аналогичные преобразования имеют место и при $k \in \{4, 5, \dots, 2m - 2\}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m) &= \Phi_{i+1}(\Gamma^{(k)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\ &= \Psi_1(T_{k-1}; z_1) \Psi_m(T_{k-1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(k-1)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\ &= \Psi_1(T_{k-1}; z_1) \Psi_m(T_{k-1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(k-1)}, z_1, z_m). \end{aligned}$$

Далее применим соотношение (3.42) и получим:

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) &= \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m, 0, 0) = \\ &= \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m, 0, 0) - \\ &- \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\ &= \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m) - \\ &- \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}. \end{aligned}$$

Более обширный случай имеет место при $k = 2m$. Так, необходимо воспользоваться равенствами (3.43)–(3.47):

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) &= \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, 0) + \\ &+ \sum_{y_m=1}^{l'_m-1} \Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, y_m) + \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l'_m) + \\ &+ \sum_{y_m=l'_m+1}^{l_m-1} \Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, y_m) + \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l_m) = \\ &= \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m, 0, 0) + \\ &+ \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \varphi_m(0; T_{2m-1}) \Phi_i^1(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, 0, 0, 0) + \\ &+ \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \varphi_m(0; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, 0, 0, w_m) - \\ &- \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\ &+ \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{y_m=1}^{l'_m-1} \varphi_m(y_m; T_{2m-1}) \Phi_i^1(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, 0, 0, 0) + \\ &+ \Psi_1(T_{2m}; z_1) \sum_{y_m=1}^{l'_m-1} \varphi_m(y_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{\infty} \Phi_i^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, w_m) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_1(T_{2m}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=1}^{l'_m-1} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=1}^{l'_m-1} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} - \\
& - \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=1}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{2m}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, 0) + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{l'_m} \varphi_m(l'_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=1}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) - \\
& - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{y_m=l'_m+1}^{l_m-1} \varphi_m(y_m; T_{2m-1}) \Phi_i^1(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, 0, 0, 0) + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=l'_m+1}^{l_m-1} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m, 0, 0) -
\end{aligned}$$

$$-z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} \times \\ \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1}.$$

Окончательно для функций $\Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m)$ получим равенство

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) &= \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m) - \\ &\quad - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \times \\ &\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\ &\quad + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\ &\quad + z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} \times \\ &\quad \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\ &\quad + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\ &\quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ &\quad + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\ &\quad \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m). \end{aligned}$$

Наконец, при $k = 2m + 1$ с учетом (3.49) и (3.50) получим

$$\begin{aligned} \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) &= \\ &= \Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m, 0, l'_m) + \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \Phi_{i+1}^1(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, 0, 0, y_m) = \\ &= z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m, 0, l_m) + \\ &\quad + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m-1} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \Psi_m(T_{2m}; z_m) \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, l_m) z_m^{v_m} - \\
& - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \times Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, l_m) + \\
& + \Psi_1(T_{2m}; z_1) \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \varphi_m(y_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} \Phi_i^1(\Gamma^{(2m)}, z_1, 0, 0, w_m) + \\
& + \Psi_1(T_{2m}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=1}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_1^{v_1} - \\
& - \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

В результате преобразований получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) &= z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m}; z_1) \Psi_m(T_{2m}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) - \\
& - z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

Приложение Л

Доказательство леммы 13

Заметим, что для любых $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ и любых $j \in \{1, m\}$ в силу равенства (2.26) справедливо соотношение

$$\Psi_j(t_1; z_j) \times \Psi_j(t_2; z_j) = \Psi_j(t_1 + t_2; z_j).$$

Последовательное применение рекуррентных соотношений за один шаг цепи Маркова, полученных в лемме 12, позволяет записать для функции $\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m)$ следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) &= \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \Phi_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) = \\ &= z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \Phi_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) - \\ &\quad - z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\ &\quad \times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\ &\quad + \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\ &\quad \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) = \\ &= z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m-2} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\ &\quad \times \Phi_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m) - \\ &\quad - z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\ &\quad \times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& - z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& \quad + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& \quad + z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-2l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) = \\
& \quad = z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) - \\
& \quad - z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi_1(T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& - z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& \quad + z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1(T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-2l'_m} \Psi_1(T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^* - T_1; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1 - l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2mi}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Аналогичными преобразованиями для случая функций $\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m)$ получим

$$\begin{aligned}
\Phi_{2m(i+1)}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m) &= z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1; z_1) \Psi_m(T_1; z_m) \Phi_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) + \\
&\quad + \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\
&= z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1 + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m+1}; z_m) \Phi_{2m(i+1)-2}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) + \\
&\quad + \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\
&= z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \times \Phi_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) + \\
&\quad + \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
&\quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
&\quad - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
&\quad \times \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
&\quad + z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1 + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
&\quad \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m-l'_m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \Phi_{2mi}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m) + \\
&\quad + \Psi_m(T_1; z_m) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1 - l_1}) \times \\
&\quad \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-1}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
&\quad - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{v_m=0}^{\infty} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) z_m^{v_m} + \\
&\quad + z_1^{-l_1} \Psi_1(T_1 + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m+1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
&\quad \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{y_m - l'_m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-3}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
&\quad - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m-2} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
&\quad \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
&\quad + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{y_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m-1}) Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
&\quad + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m-1} + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=l_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) z_m^{x_m} Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
&\quad + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
&\quad \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
&\quad \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z_1^{-l_1} z_m^{-2l'_m} \Psi_1(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_1) \Psi_m(T_1 + T_{2m} + T_{2m+1}; z_m) \times \\
& \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{2m(i+1)-4}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

Соотношения (3.60) для $k \in \{3, 4, \dots, 2m - 2\}$, а также соотношения (3.61) и (3.62) выводятся аналогичным образом.

Заметим, что наряду с соотношением (3.56) справедливо также равенство

$$\begin{aligned}
\Phi_{i+1}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) & = z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-1}; z_m) \Phi_i(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) + \\
& + \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_i(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) (1 - z_m^{x_m - l_m}) \times \\
& \times Q_i(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_i(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned} \tag{Л.1}$$

Кроме того, согласно алгоритму управления $s(\Gamma)$, заданному функционально равенством (3.1), минимальное число шагов цепи Маркова (3.6) для возврата в произвольное состояние вида $(\Gamma^{(2m-1)}, x_1, x_m, y_1, y_m)$ равно $2m + 1$. В связи с этим рекуррентное соотношение для производящих функций $\Phi_i(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m)$ необходимо рассматривать за цикл смены состояний обслуживающего устройства длительностью $T = T^* + T_{2m-1}$. Итак, с применением равенств (3.52)–(3.55),

(Л.1) и (3.57) получим

$$\begin{aligned}
& \Phi_{(2m+1)(i+1)}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) = \\
& = \Psi_1(T_{2m-2}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \Phi_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, z_1, z_m) - \\
& \quad - \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\
& = \Psi_1\left(\sum_{k=2}^{2m-2} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=2}^{2m-2} T_k; z_m\right) \Phi_{(2m+1)(i+1)-(2m-3)}(\Gamma^{(2)}, z_1, z_m) - \\
& \quad - \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\
& = z_1^{-l_1} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k; z_m\right) \Phi_{(2m+1)(i+1)-(2m-2)}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) + \\
& + \Psi_1\left(\sum_{k=2}^{2m-2} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-(2m-2)}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
& \quad - \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\
& = z_1^{-l_1} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_m\right) \times \\
& \quad \times \Phi_{(2m+1)(i+1)-(2m-1)}(\Gamma^{(2m+1)}, z_1, z_m) + \\
& + \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1-l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-(2m-2)}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\
& = z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \Phi_{(2m+1)(i+1)-2m}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) - \\
& \quad - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_m\right) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-2m}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_1^{-l_1} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_m\right) \times \\
& \quad \times \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-2m}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + \Psi_1\left(\sum_{k=2}^{2m-2} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1 - l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-(2m-2)}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
& \quad - \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} = \\
& = z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m - l_m} \Psi_1(T; z_1) \Psi_m(T; z_m) \Phi_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) + \\
& \quad + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^* + T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \times \\
& \times \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
& \quad \times Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_1^{-l_1} z_m^{-2l'_m} \Psi_1(T^*; z_1) \Psi_m(T^*; z_m) \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) - \\
& - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_m\right) \times \\
& \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-2m}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_1^{-l_1} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k + T_{2m+1}; z_m\right) \times \\
& \times \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) (1 - z_m^{x_m - l'_m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-2m}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + \Psi_1\left(\sum_{k=2}^{2m-2} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-2} T_k; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1 - l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-(2m-2)}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m}.
\end{aligned}$$

Подобными преобразованиями можно получить рекуррентные соотношения за цикл длительностью T для остальных редуцированных производящих функций. Например, в случае функций $\Phi_{(2m+1)(i+1)}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
& \Phi_{(2m+1)(i+1)}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) = \\
& = z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-1}; z_m) \Phi_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-1)}, z_1, z_m) + \\
& + \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) \times \\
& \times Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} (1 - z_m^{x_m - l_m}) + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) = \\
& = z_1^{-l_1} z_m^{-l_m} \Psi_1\left(\sum_{k=1}^{2m-1} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-1} T_k; z_m\right) \Phi_{(2m+1)i+2}(\Gamma^{(1)}, z_1, z_m) + \\
& + z_m^{-l_m} \Psi_1\left(\sum_{k=2}^{2m-1} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-1} T_k; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1) (1 - z_1^{x_1 - l_1}) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)i+2}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
& - z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2} + T_{2m-1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-2}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1}) (1 - z_m^{x_m-l_m}) \times \\
& \times Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) = \\
& = z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m-l_m} \Psi_1(T; z_1) \Psi_m(T; z_m) \Phi_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, z_1, z_m) - \\
& - z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m-l_m} \Psi_1(T - T_{2m}; z_1) \Psi_m(T - T_{2m}; z_m) \times \\
& \times \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{x_m=0}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \times \\
& \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_1^{-l_1} z_m^{-l'_m-l_m} \Psi_1(T - T_{2m}; z_1) \Psi_m(T - T_{2m}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{x_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m})(1 - z_m^{x_m - l'_m}) \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)i}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& + z_m^{-l_m} \Psi_1\left(\sum_{k=2}^{2m-1} T_k; z_1\right) \Psi_m\left(\sum_{k=1}^{2m-1} T_k; z_m\right) \sum_{x_1=0}^{l_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_1)(1 - z_1^{x_1 - l_1}) \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)i+2}(\Gamma^{(1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} - \\
& - z_m^{-l_m} \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \Psi_m(T_{2m-2} + T_{2m-1}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-2}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + \Psi_m(T_{2m-2}; z_m) \sum_{x_1=h_1}^{\infty} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m-2}) z_1^{x_1} \times \\
& \quad \times \sum_{v_m=0}^{\infty} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-2)}, v_1, v_m, 0, 0) z_m^{v_m} + \\
& + \Psi_1(T_{2m-1}; z_1) \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{x_m=0}^{l_m-1} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m-1})(1 - z_m^{x_m - l_m}) \times \\
& \quad \times Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m-1)}, v_1, v_m, 0, 0) z_1^{v_1} + \\
& + \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \sum_{y_m=0}^{l'_m-1} \sum_{v_m=0}^{y_m} \varphi_m(y_m - v_m; T_{2m}) \times \\
& \quad \times \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m) + \\
& \quad + z_m^{-l'_m} \sum_{x_1=0}^{h_1-1} \sum_{v_1=0}^{x_1} \varphi_1(x_1 - v_1; T_{2m}) z_1^{x_1} \times \\
& \times \sum_{x_m=l'_m}^{\infty} \sum_{v_m=0}^{x_m} \varphi_m(x_m - v_m; T_{2m}) z_m^{x_m} \sum_{w_m=0}^{l_m} Q_{(2m+1)(i+1)-1}(\Gamma^{(2m)}, v_1, v_m, 0, w_m).
\end{aligned}$$

Полученные соотношения подтверждают равенства леммы 13.

Приложение М

Динамика основных характеристик системы в квазистационарном режиме

Как было указано в разделе 4.3, основные характеристики и показатели системы изучаются в квазистационарном режиме системы. Такой режим характеризуется, в частности, устойчивостью средних показателей. Например, рассмотрим динамику изменения значения оценки среднего взвешенного времени ожидания последовательных требований (4.3). Напомним, что оценка такой характеристики для произвольного требования системы была получена как среднее среди времен ожидания первой заявкой квазистационарного режима по N реализациям. Обозначим через $\hat{M}\gamma_j^{*i}$ оценку среднего времени ожидания i -ой заявкой потока Π_j квазистационарного режима, $i \in \{1, 2, \dots\}$. Тогда для $i \in \{1, 2, \dots\}$

$$\hat{M}\gamma_j^{*i} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \gamma_{j, v_{j^*+i-1}^n}^n$$

и $\hat{M}\gamma_j^{*1} = \hat{M}\gamma_j^*$. Построим теперь оценку среднего взвешенного времени ожидания начала обслуживания для заявки с номером i произвольного потока в квазистационарном режиме:

$$\hat{M}\gamma_j^{*i} = \frac{\sum_{j=1}^2 \lambda_j (3s_j + 2q_j + p_j) R_j \hat{M}\gamma_j^{*i}}{\sum_{j=1}^2 \lambda_j (3s_j + 2q_j + p_j) R_j}.$$

Аналогичным образом можно построить оценки $\hat{M}\beta_j^{*k}$ и $\hat{M}\beta^{*k}$ для среднего количества заявок в очереди перед началом обслуживания заявок потока Π_j и произвольного потока в цикле с номером k квазистационарного режима:

$$\hat{M}\beta_j^{*k} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \beta_{j, k_{j^*+k-1}^n}^n, \quad \hat{M}\beta^{*k} = \frac{\sum_{j=1}^2 \lambda_j (3s_j + 2q_j + p_j) R_j \hat{M}\beta_j^{*k}}{\sum_{j=1}^2 \lambda_j (3s_j + 2q_j + p_j) R_j}.$$

Здесь $k \in \{1, 2, \dots\}$. На рисунке М.1а отображена динамика изменения оценок $\hat{M}\gamma_1^{*i}$, $\hat{M}\gamma_2^{*i}$ и $\hat{M}\gamma^{*i}$ с увеличением номера i заявки квазистационарного режима. В свою очередь, рисунок М.1б дает представление о динамике изменения рассмотренных оценок для среднего количества заявок в очереди с увеличением номера цикла квазистационарного режима. Можно отметить постоянство средних характеристик.

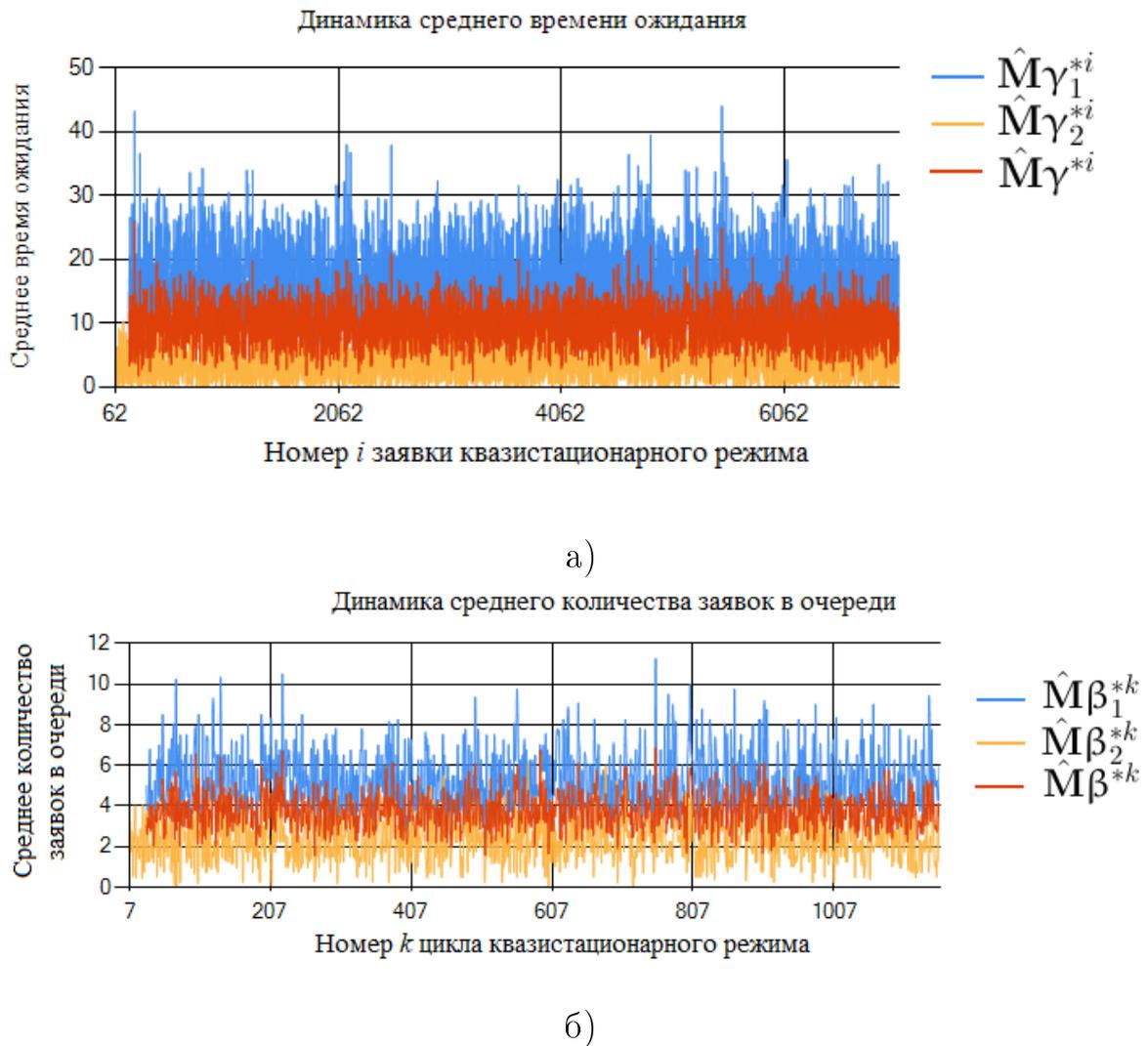
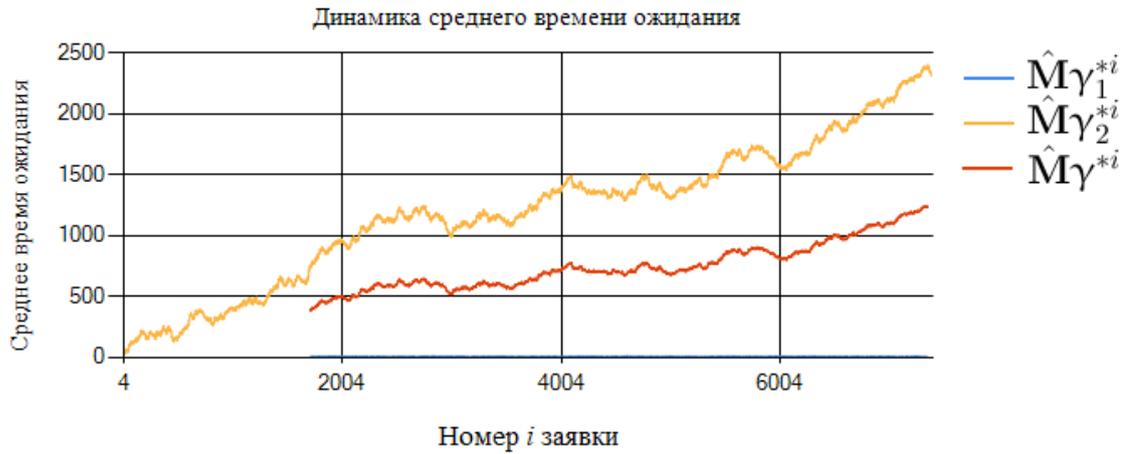
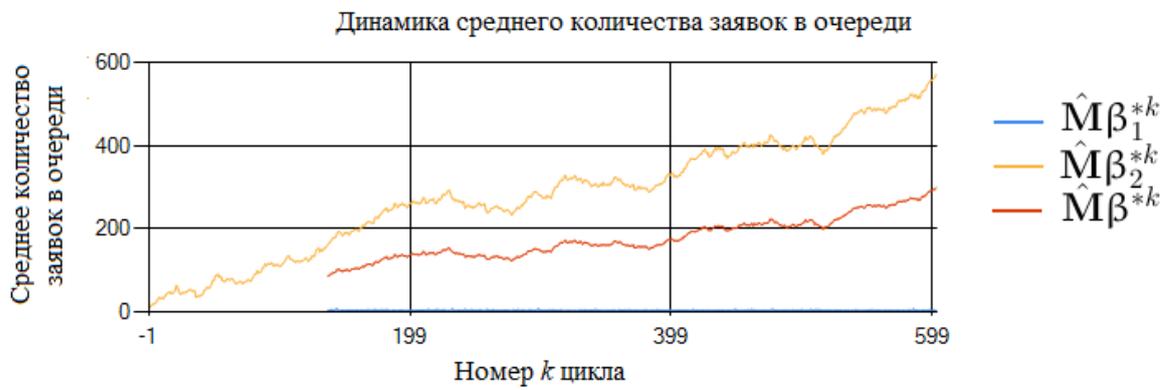


Рисунок М.1 — Динамика изменения средних характеристик системы в квазистационарном режиме

Заметим, однако, что при исследовании системы, представленной в главе 3, для потока Π_2 были получены лишь условия, при которых стационарного режима существовать не будет. Это означает, что область D^2 может содержать точки, в которых не существует стационарного режима. При этом алгоритм определения момента достижения квазистационарного режима из раздела 4.3 не отслеживает подобные ситуации. Действительно, на рисунке М.2 приведен пример динамики $\hat{M}\gamma_1^{*i}$, $\hat{M}\gamma_2^{*i}$ и $\hat{M}\gamma^{*i}$ с увеличением номера i заявки в случае, когда согласно алгоритму квазистационарный режим достигнут. Однако наблюдается устойчивый рост средней характеристики. Для того, чтобы вывести подобные случаи из рассмотрения при поиске квазиоптимальных значений управляющих параметров, можно дополнительно применять алгоритмы, детектирующие устойчивое возрастание средних характеристик.



а)



б)

Рисунок М.2 — Динамика изменения средних характеристик системы при отсутствии стационарного режима

Приложение Н

Применение алгоритма с обратной связью для однородных входных потоков

Управляющий алгоритм с графом, изображенным на рисунке 3.1, был предложен для системы, на вход которой поступают разнородные потоки. Часто для реальных систем адаптивные алгоритмы требуют дополнительных затрат на их техническую реализацию и поддержание по сравнению с циклическим алгоритмом. В данном разделе производится сравнение эффективности работы управляющего алгоритма для потоков, не предусмотренных системой.

Рассмотрим случай, когда входные потоки для системы, описанной в главе 3, однородны. Пусть, к примеру,

$$\lambda_1 = 0.05, p_1 = 0.5, q_1 = 0.2, s_1 = 0.3,$$

$$\lambda_2 = 0.05, p_2 = 0.5, q_2 = 0.2, s_2 = 0.3.$$

Пусть $h_1 = 0$. В таком случае обслуживающее устройство не будет попадать в состояние $\Gamma^{(3)}$ и рассматриваемый алгоритм с графом на рисунке 3.1 вырождается в циклический алгоритм на множестве состояний $\{T_1, T_2, T_4, T_5\}$. Положим следующие значения для параметров системы и алгоритма поиска квазиоптимального управления:

$$t_0 = 2, \mu_1 = 0.7, \mu_2 = 0.75, \underline{T} = 34, \bar{T} = 64,$$

$$h_5 = 7, K_1 = 1.3, K_2 = 0.5,$$

$$d = 5, N = 100, \delta = 0.05, R_1 = 1, R_2 = 1.$$

Просматривая точки, лежащие в области существования стационарного режима, и меняя длительность T_4 с шагом 3, получим следующие результаты. Квазиоптимальной стратегией управления является набор длительностей $T_1^* = 24$, $T_4^* = 13$ с минимальным значением среднего взвешенного времени ожидания 5.91. Результаты представлены на рисунке Н.1.

Теперь, сохраняя указанные выше значения параметров, применим алгоритм поиска квазиоптимальной стратегии управления из раздела 4.5. Для применения указанного алгоритма положим $t_3 = 8$, $t_4 = 5$, $h_4 = 3$, $h_6 = 2$. Квазиоптимальными значениями являются длительности $T_1^* = 14$, $T_4^* = 11$ и величина

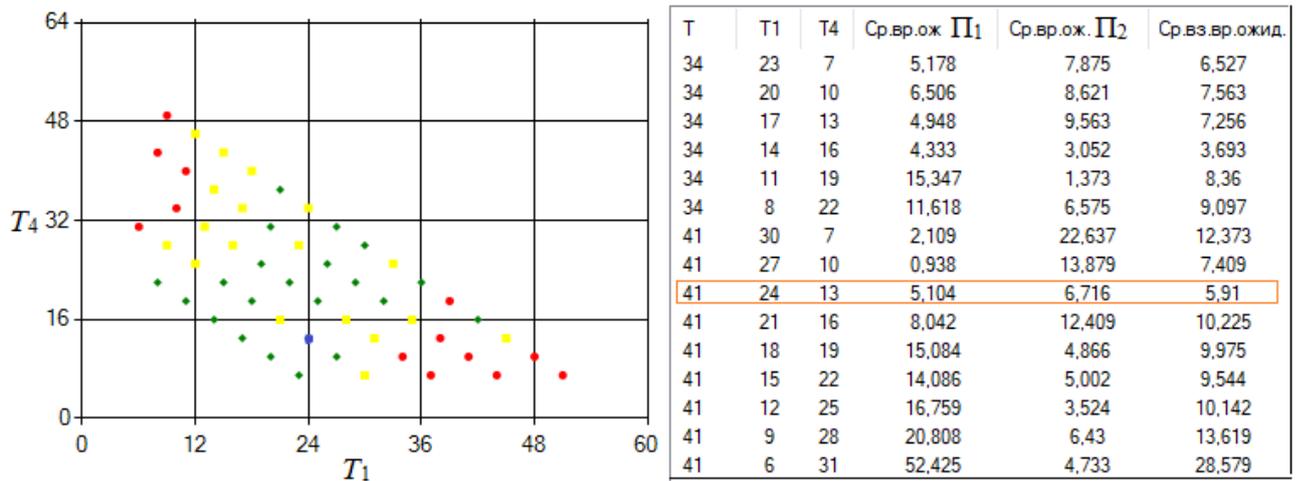


Рисунок Н.1 — Результаты поиска квазиоптимальной стратегии управления однородными потоками циклическим алгоритмом

порога $h_1^* = 1$ с минимальным значением среднего взвешенного времени ожидания 3.857. Результаты представлены на рисунке Н.2.

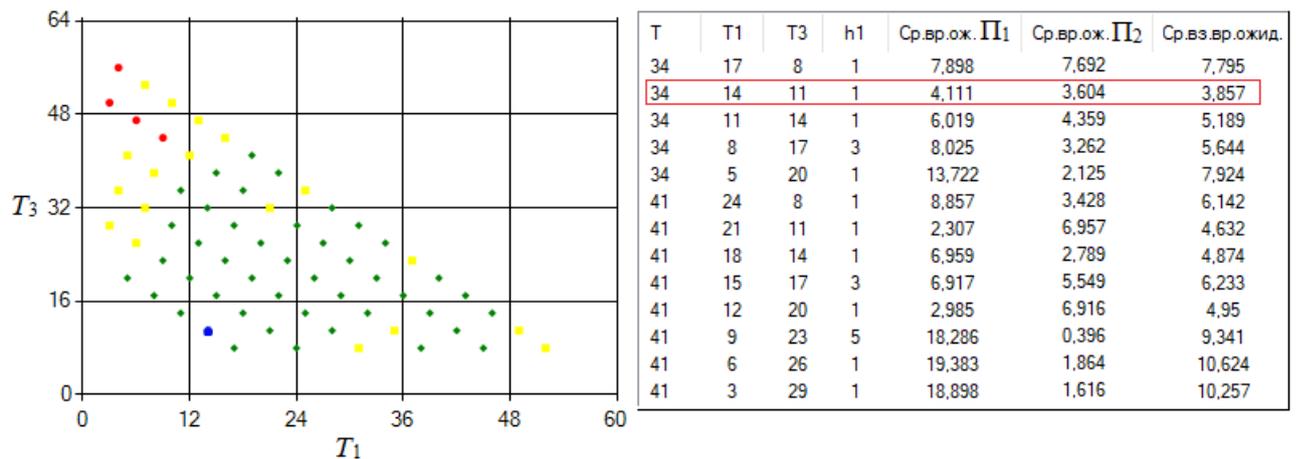


Рисунок Н.2 — Результаты поиска квазиоптимальной стратегии управления однородными потоками адаптивным алгоритмом

Можно заметить, что при использовании адаптивного алгоритма появляется больше «зеленых» точек и меньше — «красных». Таким образом, в среднем, имеется возможность улучшить показатель времени ожидания начала обслуживания произвольного требования. Однако при однородных входных потоках на рисунке Н.2 становится заметна асимметрия области точек. Так, в случае, если значения управляющих параметров находятся на границе области существования стационарного режима для потока П1, то наблюдается значительное ухудшение показателя качества работы системы. В случае же границы области существования стационарного режима для потока П2 по-прежнему имеется

достаточное количество «зеленых» точек. Однако такое удовлетворительное поведение системы в среднем скрывает значительный рост среднего времени ожидания начала обслуживания требованием потока Π_1 . В связи с этим при применении адаптивного алгоритма к управлению однородными потоками можно дать рекомендации о поиске иных оценок показателей эффективности работы системы.