

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского»

На правах рукописи



Ларюшин Иван Дмитриевич

**Ионизационный механизм генерации низкочастотных токов в  
плазме, создаваемой двухцветными лазерными импульсами**

Специальность 01.04.21 —  
«Лазерная физика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Введенский Николай Вадимович

Нижний Новгород — 2018

# Оглавление

	Стр.
<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Механизм ионизационного многоволнового смещения</b> . . . . .	17
1.1 Уравнения и приближения . . . . .	17
1.2 Аналитические решения . . . . .	18
1.3 Результаты численных расчетов . . . . .	24
1.4 Сравнение эффективностей генерации остаточных токов при использовании добавочных полей на половинной и удвоенной частоте основного поля . . . . .	32
1.5 Выводы к главе 1 . . . . .	38
<b>Глава 2. Оптимизация параметров двухцветных импульсов для наиболее эффективной генерации остаточных токов</b> . . . . .	40
2.1 Результаты численных расчетов . . . . .	40
2.2 Аналитические решения . . . . .	52
2.2.1 Теория возмущений по малому добавочному полю в случае произвольных поляризаций компонент ионизирующего импульса . . . . .	52
2.2.2 Отношения частот вида $2k/1$ . . . . .	58
2.2.3 Отношения частот вида $(2k-1)/2$ . . . . .	60
2.2.4 Законы подобия . . . . .	61
2.2.5 Возбуждение остаточного тока двухцветными импульсами с циркулярно поляризованными компонентами . . . . .	62
2.2.6 Возбуждение остаточного тока при сопоставимых интенсивностях компонент ионизирующего импульса . . . . .	64
2.3 Выводы к главе 2 . . . . .	67
<b>Глава 3. Генерация ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне частот</b> . . . . .	69
3.1 Расчет длительности и энергии генерируемого импульса низкочастотного тока . . . . .	69

	Стр.
3.2 Сопоставление полученных результатов с численными решениями нестационарного уравнения Шредингера . . . . .	74
3.3 Выводы к главе 3 . . . . .	84
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>86</b>
<b>Список литературы</b> . . . . .	<b>88</b>
Публикации автора по теме диссертации . . . . .	101

# Введение

## Актуальность работы

Современные установки позволяют получать интенсивные фемтосекундные лазерные импульсы, которые могут производить быструю ионизацию среды и эффективно ускорять своим полем освободившиеся электроны. В результате в образующейся плазме возбуждаются электронные токи на различных частотах, в том числе и на значительно более низких, чем частоты ионизирующих лазерных полей. Явления возбуждения таких низкочастотных токов в плазме, создаваемой в результате ионизации среды интенсивными фемтосекундными лазерными импульсами, вызывают в настоящее время большой интерес в связи с возможностью использования этих явлений для создания компактных источников широкополосного терагерцового и среднего инфракрасного излучения [1—58]. Такие источники требуются для различных фундаментальных и прикладных исследований [8—11; 58—71], в частности, для наблюдения сверхбыстрой электронной и колебательной динамики в широком классе материалов, для спектроскопии и диагностики фармацевтических препаратов, взрывчатых и отравляющих веществ, состава атмосферы и других сред и т.д.

В настоящее время исследованию механизмов и поиску оптимальных условий генерации низкочастотных токов в лазерной плазме посвящено большое число работ. Как правило, в качестве ионизирующих полей рассматриваются двухцветные лазерные импульсы, в которых отношение частот одноцветных компонент близко к 2 [11—43]. В этом случае механизм генерации низкочастотного тока наиболее просто можно объяснить следующим образом. Пусть, например, линейно-поляризованный интенсивный лазерный импульс на основной частоте производит туннельную ионизацию атомов и молекул. Поскольку вероятность туннельной ионизации является очень резкой функцией мгновенного значения напряженности электрического поля [72; 73], зависимость от времени концентрации образующихся свободных электронов имеет резкие скачки на каждом полупериоде поля. Таким образом, временной спектр плотности плазмы (концентрации электронов) содержит ярко выраженную вторую гармонику частоты

ионизирующего поля. Если при этом к основному полю добавить слабое поле на частоте, близкой к частоте второй гармоники, то это приведет к возникновению в плазме нелинейного низкочастотного тока свободных электронов, который может иметь как постоянную (не зависящую от времени) составляющую, так и переменную, колеблющуюся на частоте, равной величине частотной отстройки добавочного поля от частоты второй гармоники. Постоянная составляющая плотности тока, которую называют остаточной плотностью тока, является начальным толчком к поляризации плазмы и возбуждению в ней колебаний, частоты которых в широком диапазоне параметров лазерных импульсов и ионизируемых сред могут лежать в терагерцовом диапазоне [4; 5]. Переменная составляющая плотности тока на частоте отстройки может порождать импульсы более коротковолнового (по сравнению с терагерцовым) излучения, лежащего в среднем инфракрасном диапазоне [13; 20; 36]. Заметим также, что при ионизации в присутствии добавочного поля возникают также слабые гармоники плотности плазмы на частотах, близких к частоте основного поля [35; 36]. Произведение этих гармоник плотности с полем на основной частоте дает дополнительные слагаемые в плотность низкочастотного тока, сравнимые по величине с произведением второй гармоники концентрации и добавочного поля. Аналогичным (немного более сложным) образом можно пояснить возникновение низкочастотного тока при использовании частотно-перестраиваемого поля половинной гармоники [20; 36]. В первой главе данной работы показано, что эффективная генерация низкочастотных токов возможна при различных отношениях частот, таких как 1:2, 2:3, 2:5 и т.д. Сам же процесс генерации может быть интерпретирован как ионизационное многоволновое смешение с числом смешивающихся волн, определяемым резкостью вероятности ионизации как функции поля.

Рассматриваемый ионизационный механизм генерации низкочастотного тока имеет принципиально важное отличие от стандартного четырехволнового смешения, обусловленного наличием кубической нелинейной восприимчивости среды (эффектом Керра), вызванной движением связанных электронов [23]. Это отличие обусловлено тем, что при реализации ионизационного механизма нестационарная поляризация среды и, соответственно, порождаемое ей электромагнитное излучение вызваны движением свободных (а не связанных) электронов. Это отличие проявляется в характере зависимости величины генерируемого тока от амплитуды основного поля, которая в случае реализации ионизационного механизма является существенно более резкой [35; 36], чем в случае стандарт-

ного четырехволнового смешения, что может приводить к существенно более высоким значениям интенсивности генерируемых импульсов. Другое очевидное достоинство ионизационного механизма заключается в отсутствии ограничений сверху на интенсивность лазерного импульса, которые есть при использовании твердотельных нелинейных сред [74—79]. Кроме этого, для реализации ионизационного механизма зачастую не требуется специальной подготовки среды, поскольку в качестве ионизируемого газа может выступать окружающий воздух. Это также позволяет генерировать низкочастотное излучение на удаленных расстояниях [80—82], за счет чего, в частности, удастся преодолеть ряд проблем распространения терагерцового излучения, таких как высокое поглощение водяного пара в атмосфере и дифракция.

Согласно имеющимся экспериментальным данным, реализация ионизационного механизма обуславливает возможность получения терагерцовых импульсов с большой спектральной шириной и высокими пиковыми значениями напряженности поля (порядка 10 МВ/см и выше) [12; 83]. Также стоит отметить недавно обнаруженную возможность увеличения эффективности генерации терагерцового излучения при использовании в качестве ионизируемой среды некоторых специфических жидкостей [84]. Еще одним привлекательным свойством этих методов является возможность достаточно простого управления параметрами генерируемого терагерцового излучения. Экспериментально продемонстрированы возможности управления несущей частотой и длительностью терагерцовых импульсов при изменении давления ионизируемого газа (при этом центральная частота и длительность изменялись в несколько раз) и при изменении абсолютной фазы малоциклового (содержащего несколько периодов оптического поля) лазерного импульса [7; 55; 85], а также управление поляризацией при изменении относительной разности фаз между первой и второй гармониками в схеме генерации, использующей бихроматическое лазерное излучение [86—89].

Несмотря на то, что в последние годы достигнут значительный прогресс в исследованиях генерации низкочастотных токов в двухцветных ионизирующих полях, ряд важных вопросов в этой области остался пока мало изученным. К числу таких вопросов относится поиск оптимальных параметров двухцветных импульсов при различных отношениях частот одноцветных компонент, имеющих произвольную (эллиптическую) поляризацию. Некоторые шаги для решения этой задачи предприняты в работах [2; 3], однако в них рассматривались только линейные коллинеарные поляризации компонент ионизирующего поля, тогда

как в недавних экспериментах [37; 38] было показано, что использование эллиптических поляризаций в случае двухцветных импульсов может приводить к существенному увеличению эффективности. Во второй главе данной работы проводится аналитическое и численное исследование оптимальных поляризаций и интенсивностей компонент двухцветных ионизирующих импульсов для наиболее эффективной генерации остаточного тока.

Генерация частотно-перестраиваемых ультракоротких импульсов в более коротковолновом (по сравнению с терагерцовым) среднем инфракрасном диапазоне (3 – 30 мкм) также является важной и актуальной проблемой. Использование интенсивных ультракоротких импульсов среднего инфракрасного излучения с большой длиной волны и контролируемой фазой для генерации высоких гармоник позволяет эффективно продвинуться в коротковолновую область мягкого рентгеновского диапазона и получить сверхкороткие аттосекундные импульсы [90—92]. Кроме этого источники ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне требуются для наблюдения сверхбыстрой электронной и колебательной динамики в широком классе материалов [93; 94]. Интерес к таким источникам также связан с возможностями спектроскопии и диагностики фармацевтических препаратов, взрывчатых и отравляющих веществ, состава атмосферы и других сред [95; 96]. При этом для достижения высокой точности диагностики необходимо охватывать широкий спектральный диапазон, что может быть реализовано при использовании частотно-перестраиваемых либо сверхширокополосных импульсов. Существуют несколько направлений в методах генерации ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне. Один из них связан с использованием волоконных световодов [97; 98]. Соответствующие источники излучения достаточно компактны, обладают высокой стабильностью и надежностью, но недостаточно мощны для многих приложений и к тому же пока не позволяют продвинуться в длинноволновую часть спектра (с длиной волны больше 5 мкм) и получать очень короткие малоцикловые импульсы. Основные же успехи в генерации мощных (и в том числе относительно длинноволновых) ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне связаны с использованием параметрических генераторов света на основе частотной конверсии в нелинейных кристаллах [99—105]. Среди основных достижений в этом направлении необходимо отметить генерацию трехцикловых импульсов на длине волны 3.9 мкм с энергией 20 мДж [100] и на длине волны 7 мкм с энергией 0.5 мДж [101], субцикловых импульсов (длительностью

20 фс) с центральной длиной волны 6.8 мкм и энергией 1 мкДж [102], а также осуществление частотной перестройки в диапазоне длин волн 2.4–4 мкм импульсов с длительностью 70 фс и энергией 80 мкДж [103]. Несмотря на эти успехи, генерация мощных перестраиваемых в широких пределах малоцикловых и субцикловых импульсов в среднем инфракрасном диапазоне остается существенной и фактически нерешенной проблемой (особенно в его длинноволновой части). Основные сложности обусловлены ограниченностью интенсивности света в кристалле (и связанной с этим необходимостью изготовления и применения широкоапертурных кристаллов) и ограниченностью его рабочей полосы, а также необходимостью организации условий широкополосного фазового синхронизма или дополнительной компрессии для генерации ультракоротких импульсов.

Альтернативой использованию кристаллов является организация нелинейного волнового смешения в воздухе и других газах [20; 96; 106]. Однако в газах нелинейная восприимчивость второго порядка обычно равна нулю, а нелинейная восприимчивость третьего порядка, обусловленная движением связанных электронов в частицах газа, значительно меньше, чем в кристаллах, и схемы, основанные на четырехволновом смешении в газах, не способны обеспечить эффективную генерацию [23]. В третьей главе данной работы исследуется генерация ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне, основанная на ионизационном принципе нелинейного волнового смешения в газах. При этом отличие (отстройка) частоты одной из волн от точного значения дробно-кратной частоты другой волны определяет центральную частоту генерируемого излучения, что делает это нелинейное волновое смешение внешне схожим с обычным многоволновым смешением. Длительность генерируемых импульсов определяется временем ионизации, которое обычно значительно меньше, чем длительность исходного ионизирующего импульса, что делает естественным получение очень коротких, малоцикловых и субцикловых импульсов. В качестве исходных взаимодействующих волн, в частности, могут выступать волна на частоте накачки для параметрического генератора света и одна из генерируемых в нём (сигнальная или холостая) волн в ближнем инфракрасном диапазоне [36; 54]. В этом случае частотная перестройка волны параметрического генератора света вблизи половинной частоты волны накачки может обеспечить частотную перестройку генерируемых импульсов в экстремально широких пределах. Стоит отметить, что абсолютная фаза в генерируемых импульсах может быть стабилизирована, если стабилизирован фазовый сдвиг исходных волн. В некоторых экспериментах по

волновому смещению в воздухе наблюдалась генерация ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне с эффективностью конверсии на уровне  $10^{-3}$  [107], которая не может быть объяснена только четырехволновым смещением, обусловленным эффектом Керра и, по всей видимости, связана с реализацией ионизационного механизма, что могло бы объяснить такие высокие значения эффективности.

## **Цели диссертационной работы**

Целью работы являются аналитические и численные исследования процессов возбуждения электронных токов в терагерцовом и среднем инфракрасном диапазонах в плазме, создаваемой при ионизации газа фемтосекундным двухцветным лазерным импульсом. В ходе исследования должны быть построены теоретические модели, позволяющие объяснить имеющиеся экспериментальные данные, определить оптимальные условия для возбуждения электронных токов в терагерцовом и среднем инфракрасном диапазонах и предсказать новые эффекты, которые могут иметь место при ионизации газа двухцветным лазерным импульсом.

## **Научная новизна**

1. Впервые исследовано возбуждение низкочастотных токов в плазме, создаваемой двухцветным фемтосекундным лазерным импульсом с произвольным отношением частот его одноцветных компонент, и показано, что процесс возбуждения электронных токов может рассматриваться как проявление ионизационного многоволнового смещения, основные свойства которого определяются нелинейными свойствами ионизируемых частиц.
2. Впервые найдена область значений параметров двухцветных лазерных импульсов, образованных циркулярно поляризованными одноцветными

ми компонентами, для которой возможна генерация остаточного тока вследствие ионизационного многоволнового смешения в образующейся плазме.

3. Впервые найдены оптимальные для генерации остаточных токов параметры ионизирующего двухцветного лазерного импульса при произвольных эллиптичностях поляризации его одноцветных компонент.
4. Впервые найдены условия для эффективной генерации малоцикловых и субцикловых импульсов в среднем инфракрасном диапазоне в плазме, создаваемой при ионизации газа двухцветными лазерными импульсами.

## **Научная и практическая значимость**

Полученные в диссертационной работе результаты могут быть использованы для объяснения известных экспериментальных данных, планирования новых экспериментов и разработки эффективных методов генерации широкополосного электромагнитного излучения в терагерцовом и среднем инфракрасном диапазонах частот.

Разработанный в работе теоретический подход для исследования ионизационного многоволнового смешения может быть также использован для исследования генерации более высокочастотного излучения в процессах ионизации различных сред двухцветными (или, в более общем случае, многоцветными) лазерными импульсами.

## **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Возбуждение остаточного тока в плазме, создаваемой двухцветным лазерным импульсом с произвольным отношением частот его одноцветных компонент, является следствием ионизационного многоволнового смешения, основные свойства которого определяются нелинейными свойствами ионизируемых частиц. Число смешивающихся волн опре-

деляется эффективным показателем степени в зависимости скорости ионизации от напряженности ионизирующего поля. Зависимость остаточной плотности тока от частотного отношения в двухцветном лазерном импульсе представляет собой набор резонансоподобных пиков вблизи рациональных дробей с не очень большой нечётной суммой числителя и знаменателя (таких как  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $2/5$ ,  $3/4$  и т. д.). Различные пики сопоставимыми по величине в случае, когда интенсивности одноцветных компонент импульса близки.

2. Генерация остаточного тока при ионизационном многоволновом смешении двухцветных лазерных импульсов, образованных циркулярно поляризованными одноцветными компонентами, возможна только при их сонаправленном вращении, при этом отношение их частот должно быть близким к рациональной дроби, числитель и знаменатель которой отличается на единицу.
3. Оптимальные для генерации остаточных токов поляризации одноцветных компонент ионизирующего двухцветного лазерного импульса определяются их частотным отношением. Если это отношение близко к рациональной дроби, числитель и знаменатель которой отличается на единицу, то оптимальным является использование сонаправленно вращающихся циркулярно поляризованных одноцветных компонент. При других частотных отношениях, используемых для генерации остаточного тока, оптимальным является использование коллинеарных линейно поляризованных одноцветных компонент.
4. Генерация ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне при ионизации газа интенсивным двухцветным полем фемтосекундной длительности, содержащим квазимонохроматические компоненты с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_1$ , возможна при  $\omega_1/\omega_0 \approx a/b$ , где  $a$  и  $b$  – небольшие взаимно простые натуральные числа разной четности, и происходит на частоте отстройки  $\Delta\omega = b\omega_1 - a\omega_0$ . Эффективность генерации определяется как величиной  $\Delta\omega$ , так и ее знаком, принимая более высокие значения при знаках отстройки, приводящих к уменьшению  $|\omega_1 - \omega_0|$ . Длительность генерируемых импульсов определяется длительностью ионизации, которая много меньше длительности ионизирующего поля, что обеспечивает получение малоцикловых и субцикловых импульсов в среднем инфракрасном диапазоне.

## Апробация

Основные результаты работы докладывались на конференциях: Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2014, Нижний Новгород), 23th annual International Laser Physics Workshop (LPHYS'14, София, Болгария), Spring World Congress on Engineering and Technology (SCET 2014, Шанхай, Китай), 26th Symposium on Plasma Physics and Technology (2014, Прага, Чехия), 7th International Congress on Plasma Physics (2014, Лиссабон, Португалия), International Conference-School on Dynamics, Bifurcations and Chaos (DBC II 2015, Нижний Новгород), IX Международная конференция молодых ученых и специалистов «Оптика-2015» (Санкт-Петербург), 10th International Ultrafastoptics Conference (UFOX 2015, Пекин, Китай), 24th annual International Laser Physics Workshop (LPHYS'15, Шанхай, Китай), 11th Conference on Super-Intense Laser-Atom Physics (2015, Бордо, Франция), EMN Light-Matter Interactions Meeting 2016 (Сингапур), 7th International Workshop and Summer School on Plasma Physics (2016, Китен, Болгария), 25th Annual International Laser Physics Workshop (LPHYS'16, Ереван, Армения), The VII International Symposium and Young Scientist School «Modern problems of laser physics» (MPLP 2016, Новосибирск), 19th International Conference and School on Quantum Electronics: Laser Physics and Applications (ISCQE'16, София, Болгария), XVIII, XIX, XX и XXI научных конференциях по радиофизике (Нижний Новгород, 2014-2018гг.), Нижегородской сессии молодых ученых (Нижний Новгород, 2016г.), 19th International Conference on Optics, Lasers and Spectroscopy (COLS 2017, Париж, Франция), International Conference on Ultrafast Optical Science (UltrafastLight-2018, Москва).

Материалы диссертации опубликованы в 27 печатных работах А [1—27], из них 5 статей в рецензируемых журналах А [1—5] а также 8 статей в сборниках трудов конференций и 14 тезисов докладов.

## **Достоверность полученных результатов**

Проведенное исследование опирается на известные и апробированные методы, применяемые в лазерной физике. Результаты теоретических исследований согласуются с известными экспериментальными данными. Выполненные численные расчеты хорошо согласуются с аналитическими выводами.

## **Личный вклад автора**

Автором выполнены численные расчеты и получены аналитические формулы для спектральных компонент и волновых форм генерируемых низкочастотных импульсов тока свободных электронов. Численное решение нестационарного уравнения Шредингера, использованное в главах 1 и 3 для верификации полученных в диссертации результатов, выполнено А. А. Силаевым.

## **Структура и объём диссертации**

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Общий объём составляет 104 страницы. В диссертации 32 рисунка, 2 таблицы, 87 формул. Количество цитированных источников — 140, в том числе публикаций диссертанта — 27.

## **Благодарности**

Автор выражает признательность и благодарность своему научному руководителю Николаю Вадимовичу Введенскому, а также Костину Василию Алек-

сандровичу и Силаеву Александру Андреевичу за помощь и поддержку, а также за ценные наставления в научной работе и при подготовке диссертации.

## Краткое содержание диссертации

**Во введении** обосновывается актуальность исследований, формулируются цели и выносимые на защиту положения и излагается краткое содержание диссертации.

**В первой главе** рассматриваются процессы возбуждения низкочастотных токов в плазме, создаваемой при ионизации газов двухцветными фемтосекундными лазерными импульсами с произвольными отношениями частот квазимонохроматических компонент. В разделе 1.1 формулируется подход, применяющийся для исследования этих процессов, состоящий в совместном решении уравнений для концентрации свободных электронов, растущей под действием ионизирующего импульса и для плотности тока свободных электронов, возбуждаемой полем этого же импульса. В разделе 1.2 проводится вывод аналитических выражений для спектральных компонент зависимости концентрации свободных электронов от времени на комбинационных частотах компонент ионизирующего импульса, а также для низкочастотной компоненты производной плотности тока свободных электронов и для остаточной плотности тока в случае, когда компоненты лазерного импульса линейно поляризованы и интенсивность одной из компонент ионизирующего импульса (добавочного поля) мала по сравнению с интенсивностью другой компоненты (основного поля). В разделе 1.3 проводятся численные исследования характеристик остаточной плотности тока в широком диапазоне параметров ионизирующих импульсов, в том числе при равных интенсивностях квазимонохроматических компонент, и проводятся сравнения результатов классических расчетов с квантовомеханическими, основанными на решении трехмерного нестационарного уравнения Шредингера. В разделе 1.4 полученные в предыдущих разделах результаты используются для анализа двух важных с практической точки зрения случаев, в которых в качестве двухцветных ионизирующих полей используются импульсы, в которых к сильному основному полю добавляется слабое поле на удвоенной, либо на половинной

частоте основного поля. Определяются условия, при которых использование добавочной половинной гармоники приводит к большей эффективности генерации остаточных токов, чем использование второй гармоники. В разделе 1.5 приводятся основные выводы из первой главы.

**Во второй главе** результаты, полученные в первой главе, обобщаются на случай использования двухцветных импульсов с произвольными эллиптическими поляризациями компонент. В разделе 2.1 проводятся численные исследования зависимостей остаточной плотности тока от всех параметров ионизирующих импульсов и находятся их оптимальные параметры, соответствующие максимально возможной эффективности генерации остаточного тока. В разделе 2.2 проводится вывод аналитических выражений для остаточной плотности тока, позволяющих интерпретировать результаты, полученные численно в разделе 2.1. Общее выражение для остаточной плотности тока при произвольных поляризациях одноцветных компонент ионизирующего импульса и малой интенсивности одной из них получено в разделе 2.2.1; случаи отношений частот компонент вида  $\omega_1/\omega_0 = 2k$ , где  $k$  – произвольное натуральное число, более подробно рассмотрены в подразделе 2.2.2; случаи  $\omega_1/\omega_0 = (2k - 1)/2$  рассмотрены в подразделе 2.2.3. В подразделе 2.2.4 приводятся законы подобия, позволяющие пересчитать остаточную плотность тока при изменении центральной частоты основного поля (при сохранении отношения частот компонент), длительности ионизирующего импульса и потенциала ионизации используемого газа. В подразделах 2.2.5 и 2.2.6 приведены выводы аналитических формул для остаточной плотности тока при произвольных отношениях интенсивностей компонент. В подразделе 2.2.5 рассматривается случай использования двухцветных ионизирующих импульсов с циркулярно поляризованными компонентами и аналитически демонстрируется, что при противоположных направлениях вращения поляризаций одноцветных компонент генерация остаточного тока подавлена, а при совпадающих направлениях вращения возможна только при определенных значениях отношений частот, близких к рациональным дробям, числитель и знаменатель которых отличаются на единицу. В подразделе 2.2.6 проанализирован случай ионизирующих импульсов с линейными коллинеарными компонентами с сопоставимыми интенсивностями. В разделе 2.3 приводятся основные выводы из третьей главы.

**В третьей главе** исследуется генерация компонент производной плотности тока с центральными частотами в среднем инфракрасном диапазоне. В разделе 3.1 проводится вывод аналитических выражений, описывающих огибающую

низкочастотной компоненты производной плотности тока и сдвиг её максимума к переднему фронту ионизирующего импульса при различных видах огибающих компонент двухцветного ионизирующего импульса. Также в данном разделе производится оценка эффективности генерации ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне. В разделе 3.2 проводится сравнение спектров и волновых форм низкочастотных компонент производной плотности тока с результатами численных решений трехмерного нестационарного уравнения Шредингера. В разделе 3.3 приводятся основные выводы из третьей главы.

**В заключении** кратко сформулированы основные результаты работы.

# Глава 1. Механизм ионизационного МНГОВОЛНОВОГО СМЕШЕНИЯ

В данной главе исследуется явление ионизационного многоволнового смешения интенсивных двухцветных фемтосекундных лазерных импульсов, приводящее к генерации тока свободных электронов в плазме на комбинационных частотах компонент ионизирующего импульса. Основное внимание уделяется генерации остаточной плотности тока (компоненты на нулевой частоте), определяющей амплитуду последующих излучающих колебаний на плазменной (терагерцовой) частоте.

## 1.1 Уравнения и приближения

Основная модель, используемая в данной работе, основана на подходе, заключающемся в решении балансного ионизационного уравнения для плотности  $N$  свободных электронов в плазме и уравнения для плотности тока  $\mathbf{j}$  свободных электронов [2; 3; 23; 36; 52—54; 108],

$$\frac{dN}{dt} = (N_g - N)w(|\mathbf{E}|), \quad (1.1)$$

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{e^2}{m}N\mathbf{E}, \quad (1.2)$$

здесь  $N_g$  — начальная концентрация нейтральных частиц газа;  $w(|\mathbf{E}(t)|)$  — вероятность ионизации атома за единицу времени в электрическом поле с напряжённостью  $\mathbf{E}$ ;  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона;  $\mathbf{E}(t)$  — заданная зависимость электрического поля лазерного импульса от времени  $t$ . В первой главе рассматриваются линейно поляризованные двухцветные лазерные импульсы, электрическое поле которых параметризуется следующим образом:

$$\mathbf{E}(t) = \hat{\mathbf{x}}(\mathcal{E}_0(t) \cos(\omega_0 t) + \mathcal{E}_1(t) \cos(\omega_1 t + \varphi)), \quad (1.3)$$

где  $\mathcal{E}_0(t)$  и  $\mathcal{E}_1(t)$  — медленные огибающие, соответственно, основного и добавочного полей,  $\varphi$  — фазовый сдвиг между полями,  $\hat{\mathbf{x}}$  — единичный вектор,

направленный вдоль оси  $x$ ,  $\omega_0$  и  $\omega_1$  — несущие частоты полей. Точное решение системы (1.1), (1.2) имеет вид

$$N(t) = N_g \left( 1 - \exp \left[ - \int_{-\infty}^t w(|\mathbf{E}(t')|) dt' \right] \right), \quad (1.4)$$

$$\mathbf{j}(t) = \frac{e^2}{m} \int_{-\infty}^t N(t) \mathbf{E}(t) dt. \quad (1.5)$$

Величина  $\bar{\mathbf{j}} = \mathbf{j}(t \rightarrow +\infty)$  является значением плотности тока свободных электронов, остающейся после прохождения ионизирующего импульса, и определяется компонентой  $d\mathbf{j}/dt$  на нулевой частоте.

Характерные временные параметры задачи соотносятся между собой следующим образом:

$$\omega_p, \nu \ll 1/\tau, \Delta\omega \ll \omega_{0,1}, \quad (1.6)$$

где  $\omega_p$  — плазменная частота,  $\nu$  — частота столкновений электронов,  $\tau$  — ширина временной огибающей ионизирующего импульса,  $\Delta\omega$  — малая отстройка частоты одной из компонент ионизирующего импульса от дробной частоты другой компоненты. Первое неравенство ограничивает сверху плотность плазмы, позволяющее упрощенно рассматривать возбуждение плазменных колебаний, так как в этом случае все характерные плазменные времена дольше длительности ионизирующего импульса, и амплитуду плазменных колебаний, возникающих после прохождения ионизирующего импульса, можно считать определяемой величиной остаточной плотности тока  $\bar{\mathbf{j}}$  [4].

## 1.2 Аналитические решения

В данном разделе описывается разработанная аналитическая модель для отыскания остаточной плотности тока (ОПТ) и выводятся замкнутые формулы для зависимостей ОПТ от всех параметров лазерного импульса для случая, когда одна из компонент двухцветного лазерного импульса (добавочное поле) достаточно мала по сравнению с другой (основным полем).

Изменение плотности свободных электронов в поле линейно поляризованного лазерного импульса происходит ступенчатым образом, при этом моменты

скачков плотности совпадают с моментами наступления максимумов модуля напряженности электрического поля. Будем рассматривать лазерные импульсы, в которых ионизация идёт достаточно долго (на протяжении нескольких периодов основного поля), так что величина каждого скачка мала по сравнению с конечной плотностью свободных электронов. В этом случае в правой части уравнения (1.1) плотность  $N(t)$  можно заменить на усреднённое по периоду основного поля значение  $\bar{N}(t)$ ,

$$\frac{dN}{dt} = (N_g - \bar{N}) \int_{-\infty}^t w(E) dt, \quad (1.7)$$

где само усреднённое значение удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = (N_g - \bar{N}) \int_{-\infty}^t \bar{w}(E) dt, \quad (1.8)$$

В последнем уравнении  $\bar{w}(E)$  — усреднённая по периоду основного поля вероятность ионизации. В условиях туннельной ионизации вероятность ионизации обычно представляет собой резкую функцию поля, поэтому для усреднённой вероятности ионизации можно использовать выражение  $\bar{w}(E) = (2/\pi n_0)^{1/2} w(E)$ , где  $n_0(E) = Ew'(E)/w(E) \gg 1$  — показатель резкости вероятности ионизации  $w$  как функции поля  $E$ . Число  $n_0(E)$  равно показателю степенной функции, наилучшим образом аппроксимирующей функцию  $w(E)$  в окрестности конкретного значения  $E$ . Корень из этого числа в максимуме напряжённости поля определяет, во сколько раз длительность соответствующего скачка плотности плазмы меньше периода основного поля.

Для получения замкнутой формулы для величины ОПТ необходимо проанализировать спектральный состав электронной плотности  $N$ , что может быть сделано с использованием теории возмущений по малому добавочному полю. Формула Тейлора для вероятности ионизации как функции электрического поля позволяет записать добавочному полю:

$$w(|\mathbf{E}(t)|) = w_0 + w_1 + \dots \quad (1.9)$$

где вклад  $w_l$  в вероятность ионизации в порядке  $l$  теории возмущений имеет вид

$$w_l = \frac{w^{(l)}(E_0(t)) E_1^l(t)}{l!}. \quad (1.10)$$

Здесь  $E_0(t) = \mathcal{E}_0(t) \cos \omega_0 t$  и  $E_1(t) = \mathcal{E}_1(t) \cos(\omega_1 t + \varphi)$  — проекции основного и добавочного полей на ось  $x$ ,  $\tilde{w}^{(l)} = \text{sgn}(E) w^{(l)}(|E|)$ , где  $w^{(l)}(E)$  — производная

порядка  $l$  вероятности ионизации по полю,  $\text{sgn}$  обозначает знак аргумента. После подстановки (1.9) и (1.10) в уравнения (1.2) и (1.7), получим

$$N(t) = N_0 + N_1 + \dots; \mathbf{j}(t) = (j_0 + j_1 + \dots)\hat{\mathbf{x}}, \quad (1.11)$$

где вклады  $N_l$  и  $j_l$  в плотность свободных электронов и плотность тока в порядке  $l$  удовлетворяют уравнениям

$$N_l = (N_g - \bar{N}) \int_{-\infty}^t w_l dt, \quad (1.12)$$

$$\frac{dj_l}{dt} = \frac{e^2}{m} (N_l E_0 + N_{l-1} E_1). \quad (1.13)$$

В длинных и не слишком интенсивных лазерных импульсах, когда ионизация продолжается в течение значительного числа периодов основного поля, каждая из функций представляет собой последовательность узких пиков вблизи моментов наступления экстремумов  $E_0(t)$ , то есть вблизи моментов  $t_s = s\pi/\omega_0$ , где  $s$  — целое, при этом величины соседних пиков не сильно отличаются по модулю. Это позволяет представить  $\tilde{w}^{(l)}$  как набор гармоник частоты  $\omega_0$  с медленными огибающими  $W_k^l(t)$ ,

$$\tilde{w}^{(l)}(E_0(t)) = \sum W_k^l(t) \cos(k\omega_0 t) \quad (1.14)$$

где

$$W_k^l(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \int_{t-\frac{\pi}{\omega_0}}^{t+\frac{\pi}{\omega_0}} \tilde{w}^{(l)}(E_0(t')) \cos(k\omega_0 t') dt' \quad (1.15)$$

Так как вероятность ионизации является функцией абсолютного значения напряженности поля, при чётных  $l$  величины всех пиков одного знака (положительны), а при нечётных  $l$  положительные пики чередуются с отрицательными. Соответственно в разложении (1.14) при чётных  $l$  слагаемые с нечётными номерами малы и могут быть отброшены, а при нечётных, — наоборот, могут быть отброшены слагаемые с чётными номерами. Интеграл (1.15) для оставшихся слагаемых может быть вычислен приближённо с помощью метода Лапласа:

$$W_k^l(t) \approx (2\pi n_l)^{-1/2} w^{(l)}(\mathcal{E}_0(t)) \exp\left(-\frac{k^2}{2n_l}\right). \quad (1.16)$$

при чётном  $k + l$ . Здесь  $n_l = w^{(l+1)}(|\mathcal{E}_0|)|\mathcal{E}_0|/w^{(l)}(|\mathcal{E}_0|)$  — показатель резкости производной вероятности ионизации порядка  $l$  по полю. При вычислении интеграла (1.16) методом Лапласа было использовано условие  $n_l \gg 1$ . Для обычно

встречающихся функций  $w(E)$  при  $n_l \gg 1$  оказывается  $n_l - n_{l-1} \approx 1$ . Для таких функций сильные неравенства  $n_l \gg 1$  и  $n_0 \gg l + 1$  являются эквивалентными. Последнее неравенство фактически задаёт ограничение сверху на порядок теории возмущений, для которого корректны дальнейшие выкладки.

Таким образом,  $w^{(l)}(E_0(t))$  при нечетных  $l$  имеет разложение

$$\tilde{w}^{(l)}(E_0(t)) = \frac{\prod_{k=0}^{l-1} n_k}{\mathcal{E}_0^l \sqrt{2\pi n_l}} w(\mathcal{E}_0) \sum_{k=0,1,\dots}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2}{2n_l}\right) \cos([2k+1]\omega_0 t), \quad (1.17)$$

и при четных  $l$ ,

$$\tilde{w}^{(l)}(E_0(t)) = \frac{\prod_{k=0}^{l-1} n_k}{\mathcal{E}_0^l \sqrt{2\pi n_l}} w(\mathcal{E}_0) \sum_{k=0,1,\dots}^{+\infty} \exp\left(-\frac{4k^2}{2n_l}\right) \cos(2k\omega_0 t), \quad (1.18)$$

Вклады  $w_l$  теории возмущений пропорциональны произведению  $\tilde{w}^{(l)}(E_0)$  и  $E_1^l = \mathcal{E}_1^l \cos^l(\omega_1 t + \varphi)$  и представляют собой набор гармоник на определённых комбинационных частотах двухцветного импульса. В соответствии с (1.12) и (1.13) вклады  $j_l$  в плотность тока также представляют собой набор некоторых гармоник на некоторых комбинационных частотах  $\alpha\omega_0 + \beta\omega_1$  двухцветного импульса (иных, нежели входят в состав  $w_l$ ), где  $\alpha$  и  $\beta$  — целые, и  $\alpha + \beta$  — нечётное число. Вклад в ОПТ могут дать лишь очень низкие комбинационные частоты  $\Delta\omega = b\omega_1 - a\omega_0$ , малые по сравнению с обратными временными масштабами медленных огибающих соответствующих гармоник, где  $a$  и  $b$  — натуральные числа разной чётности. Для нахождения этих низкочастотных составляющих плотности тока согласно (1.13) необходимо найти гармоники электронной плотности на частотах  $\omega_0 \pm \Delta\omega$  и  $\omega_1 \pm \Delta\omega$ , близких к частотам ионизирующего импульса.

Подставляя (1.17) и (1.18) в (1.12) и анализируя получившиеся выражения, получаем, что низшим порядком теории возмущений, в котором появляется низкочастотная компонента производной плотности тока на частоте  $\Delta\omega$ , является порядок  $l = b$ . Эта низкочастотная плотность тока в порядке  $b$  определяется поправкой  $N_b$ , содержащей гармоники  $N_b^{\omega_0 \pm \Delta\omega}$  на частотах  $\omega_0 \pm \Delta\omega = (1 \mp a)\omega_0 \pm b\omega_1$ , и поправкой  $N_{b-1}$ , содержащей гармонику  $N_{b-1}^{\omega_1 - \Delta\omega}$  на частоте  $\omega_1 - \Delta\omega = a\omega_0(b-1)\omega_1$ ,

$$N_b^{\omega_0 \pm \Delta\omega} = \frac{2K_b}{\omega_0 \pm \Delta\omega} \exp\left[-\frac{(a \mp 1)^2}{2n_b}\right] \cos[(\omega_0 \pm \Delta\omega)t \pm b\varphi] \quad (1.19)$$

$$N_{b-1}^{\omega_1 - \Delta\omega} = \frac{2K_{b-1}}{\omega_1 - \Delta\omega} \exp\left[-\frac{a^2}{2n_{b-1}}\right] \cos[(\omega_1 - \Delta\omega)t - (b-1)\varphi] \quad (1.20)$$

где

$$K_l = \sqrt{\frac{n_0}{n_l}} \left( \prod_{k=0}^{l-1} n_k \right) \frac{(N_g - \bar{N})\bar{w}^{(l)}}{b!} \left[ \frac{\mathcal{E}_1}{2\mathcal{E}_0} \right]^l. \quad (1.21)$$

При  $a + b \ll n_0$  можно считать что  $n_0 \approx n_1 \approx \dots \approx n_b$ . Тогда подставляя (1.19) и (1.20) в (1.13) получим

$$\frac{dj_b^{\Delta\omega}}{dt} = g \frac{e^2 N_g \mathcal{E}_0}{m\omega_0} (1 - \bar{N}/N_g) \bar{w}(\mathcal{E}_0) \left( \frac{n_0 \mathcal{E}_1}{2\mathcal{E}_0} \right)^b \sin(\Delta\omega t + b\varphi), \quad (1.22)$$

где  $g$  - безразмерный коэффициент, зависящий от соотношения частот компонент поля  $\omega_1/\omega_0$  и резкости  $n_0$ ,

$$g = \frac{2}{b!} \exp\left(-\frac{a^2}{2n_0}\right) \left( \frac{a^2 - b^2}{n_0 a} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right). \quad (1.23)$$

При интегрировании выражения (1.22) по времени с помощью метода Лапласа получаем выражение для остаточной плотности тока,

$$\bar{\mathbf{J}} = g j_{\text{osc}} \sigma \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2 \tau_i^2}{2}\right) \left( \frac{n_0 F_1}{2F_0} \right)^b \sin(b\varphi - \Delta\omega t_0) \hat{\mathbf{x}} \quad (1.24)$$

Здесь  $F_{0,1} = \mathcal{E}_{0,1}(t_0)$ ,  $j_{\text{osc}} = e^2 N_g F_0 / m\omega_0$  — амплитуда осцилляторного тока, наводимого основным полем в плазме плотностью  $N_g$ ,  $t_0$  — положение точки перегиба функции  $\bar{N}(t)$ , то есть момент, в который усреднённая электронная плотность растёт наиболее быстро — «момент ионизации»,  $\tau_i = [-(d\bar{N}/dt)^2 / (d^3\bar{N}/dt^3)]_{t=t_0} \approx \tau/n_0^{1/2}$  — характерное время ионизации,  $\tau = [-\mathcal{E}_0 / (d^2\mathcal{E}_0/dt^2)]_{t=t_0}^{1/2}$  — длительность ионизирующего импульса (полагаем здесь для удобства, что максимум огибающей  $\mathcal{E}_0$  наступает при  $t = 0$ ),  $\sigma = N(+\infty)/N_g \approx 1 - \exp[-(2\pi)^{1/2} \bar{w}(\mathcal{E}_0(t=0))\tau_i]$  — конечная (максимальная) степень ионизации плазмы.

Полученное выражение (1.24) описывает вклад в ОПТ для конкретных значений  $a$  и  $b$ . Общее выражение для ОПТ получается суммированием по всем допустимым  $a + b$ :

$$\bar{\mathbf{J}} = \sum_{a,b,(a+b-1)/2 \in \mathbb{N}} \bar{\mathbf{J}}^{(a,b)}. \quad (1.25)$$

В этой сумме слагаемые быстро спадают с ростом как  $a$ , так и  $b$ , и суммирование можно производить только по слагаемым с  $a + b \leq n_0$ , когда верно выражение (1.24). Более того, из-за резкого гауссова множителя  $\exp(-\Delta\omega^2\tau_i^2/2)$  в (1.24) при каждом конкретном значении отношения  $\omega_1/\omega_0$  существенными оказываются только одно или два слагаемых, отвечающих не очень большим значениям  $\Delta\omega$  и не очень большой сумме  $a + b$ .

При отношении  $\omega_1/\omega_0$ , близком к некоторой дроби  $a/b$  с не очень большой нечётной суммой числителя и знаменателя фактически можно пренебречь всеми слагаемыми кроме одного, отвечающего этим конкретным значениям  $a$  и  $b$ , и считать, что выражение (1.24) описывает полное значение ОПТ. Иными словами, при тех частотных отношениях, при которых ОПТ не слишком мала из-за указанных гауссовых множителей, в сумме можно оставить только одно слагаемое. Если при этом конечная степень ионизации оказывается не очень большой, то можно положить  $t_0 = 0$ ,  $\sigma \approx (2\pi)^{1/2}\bar{w}(\mathcal{E}_0(t=0))\tau_i$ , что превращает (1.24) в замкнутую формулу для ОПТ при заданных зависимостях  $\mathcal{E}_{0,1}(t)$  и  $\bar{w}(E)$ . Эта формула и описываемые ей зависимости остаточного тока от параметров лазерного импульса свидетельствуют, что возбуждение остаточного тока двухцветным импульсом может быть интерпретировано, как волновое смещение при взаимодействии  $b$  квантов добавочного поля и большого числа (порядка  $n_0 \gg 1$ ) квантов основного поля. Далее мы подробно обсуждаем эти зависимости.

При  $\omega_1/\omega_0 \approx a/b$  и  $\bar{\mathbf{J}} \approx \bar{\mathbf{J}}^{(a,b)}$  значение ОПТ периодически зависит от сдвига фаз  $\varphi$  между несущими основным и добавочного полей с периодом  $2\pi/b$ , определяемым знаменателем дроби  $a/b$ . Максимальная по модулю величина ОПТ, достигаемая при оптимальном значении сдвига фаз, определяется выражением

$$\max_{\varphi} |\bar{\mathbf{J}}^{(a,b)}| = |j_{\text{osc}}|g\sigma \exp\left(-\frac{\Delta\omega^2\tau_i^2}{2}\right) \left| \frac{n_0 F_1}{2F_0} \right|. \quad (1.26)$$

При этом, так как в сумме (1.26) одно слагаемое доминирует над всеми остальными, либо все слагаемые достаточно малы, можно считать также, что

$$\max_{\varphi} |\bar{\mathbf{J}}| \approx \sum_{a,b,(a+b-1)/2 \in \mathbb{N}} \max_{\varphi} |\bar{\mathbf{J}}^{(a,b)}|. \quad (1.27)$$

### 1.3 Результаты численных расчетов

В данном разделе проводится численное исследование генерации остаточной плотности тока в широких диапазонах параметров ионизирующих импульсов, в том числе выходящих за рамки применимости аналитической теории, а также результаты классических расчетов остаточной плотности тока сопоставляются с результатами квантовомеханических расчетов.

Формулы (1.26), (1.27) дают представление о зависимости максимального значения ОПТ (соответствующего оптимальному сдвигу фаз) от всех параметров двухцветного лазерного импульса, в частности, от частоты добавочного поля при фиксированной частоте  $\omega_0$ . Каждое слагаемое в сумме (1.27) соответствует в этой зависимости резонансоподобному гауссову пику вблизи частоты  $\omega_1$ , отвечающей некоторому рациональному отношению  $a/b$ , где  $a$  и  $b$  удовлетворяют указанным выше условиям. Рисунок 1.1 демонстрирует эту зависимость, рассчитанную для двухцветного импульса с гауссовыми огибающими основного и добавочного полей,

$$\mathcal{E}_{0,1} = \sqrt{\frac{8\pi I_{0,1}}{c}} \exp\left(-\frac{t^2 \ln 4}{\tau_p^2}\right), \quad (1.28)$$

где  $I_0$  и  $I_1$  — максимальные интенсивности основного и добавочного полей,  $\tau_p = 2(\ln 2)^{1/2}\tau$  — длительность лазерного импульса (полная ширина по полувысоте), одинаковая для огибающих основного и добавочного полей,  $c$  — скорость света. Для вероятности ионизации используется формула Тонга для атома водорода [73],

$$w(E) = 4\Omega_a \frac{E_a}{E} \exp\left(-\frac{2E_a}{3E} - \frac{12E}{E_a}\right), \quad (1.29)$$

где  $\Omega_a$  и  $E_a$  — атомные частота и поле. В отличие от традиционной формулы для вероятности туннельной ионизации формула Тонга хорошо описывает рост плотности плазмы в режиме надбарьерной ионизации и при нахождении остаточной плотности тока приводит к результатам, хорошо согласующимся с результатами квантовомеханических расчётов [109].

Как видно из рисунка 1.1, в интервале частотных отношений от 0.3 до 2.7 наиболее выраженными оказываются пики вблизи частотных отношений  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $2/5$ ,  $3/4$  и обратных к ним, то есть вблизи частотных отношений с не очень большими  $a$  и  $b$ . На рисунке 1.1 приведены как результаты аналитических расчётов

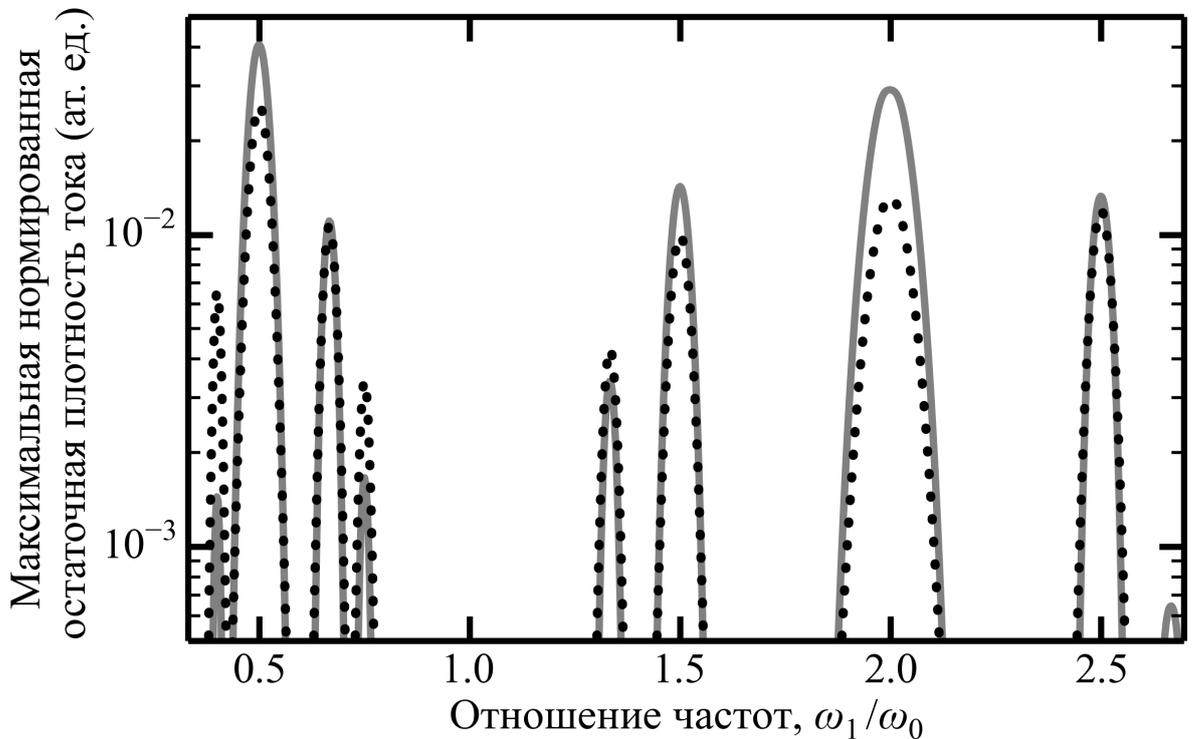


Рисунок 1.1 — Зависимость максимальной нормированной остаточной плотности тока (ОПТ) от отношения частот  $\omega_1$  и  $\omega_0$  добавочного и основного полей в ионизирующем двухцветном лазерном импульсе. Значения ОПТ нормированы на начальную плотность  $N_g$  нейтральных частиц и соответствуют оптимальному (при котором ОПТ достигает максимального значения по абсолютной величине) значению фазового сдвига  $\varphi$  между несущими основным и добавочного полей. Параметры лазерного импульса: интенсивность основного поля  $I_0 = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>, интенсивность добавочного поля  $I_1 = 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>, длительность лазерного импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  соответствует длине волны 800 нм. Точки получены с помощью аналитических формул (1.26) и (1.27). Сплошная линия — результат расчетов по формуле (1.5).

по формулам (1.26) и (1.27), так и результат прямого численного интегрирования по формуле (1.5).

Несмотря на то, что для построения этих зависимостей было выбрано достаточно большое значение интенсивности добавочного поля, находящееся на границе применимости аналитической модели, положения и ширины пиков, как видно из рисунка 1.1, очень хорошо описываются полученными аналитическими выражениями. Величины максимумов также достаточно хорошо совпадают в аналитических и численных расчетах для не очень больших значений знаменателя  $b$ , в то время как для больших значений наблюдаются расхождения.

Для пиков при отношениях с одинаковыми знаменателями максимумы пиков уменьшаются с ростом  $a$  из-за гауссова множителя  $\exp(-a^2/2n_0)$  в  $g$  при больших  $a$ . При малых  $a$  зависимость ширины пиков от  $a$  может быть немонотонной. К примеру, при  $n_0 > 7$  пик при отношении 4/1 оказывается выше, чем при 2/1, то есть добавка четвертой гармоники приводит к большему остаточному току и большему терагерцовому выходу, чем добавка второй гармоники той же интенсивности. Величина ОПТ зависит от максимальной амплитуды добавочного поля по степенному закону с показателем  $b$ , поэтому соотношение между максимумами пиков с разными знаменателями существенно зависит от отношения интенсивностей добавочного и основного полей или, более точно, от величины  $n_0 \mathcal{E}_1 / 2\mathcal{E}_0$ . Это иллюстрирует рисунок 1.2, где изображены зависимости максимальной ОПТ от интенсивности добавочного поля.

Как видно из рисунка 1.2, при не очень больших интенсивностях добавочного поля указанная зависимость является степенной с большой точностью, и аналитические выражения дают очень хорошее приближение для величины остаточного тока. При этом максимумы пиков быстро спадают с ростом  $b$ . При больших значениях отношения, вблизи границы области применимости теоретического подхода, основанного на теории возмущений по добавочному полю, пики с большими знаменателями могут оказаться выше, чем пики с меньшими. Например, пик при отношении 1/2 оказывается выше, чем при 2/1, если добавочное поле не очень мало.

Зависимость максимумов пиков от интенсивности основного поля при фиксированном значении отношения интенсивностей основного и добавочного полей в значительной мере определяется множителем  $j_{\text{osc}} \sigma$ . Это быстрорастущая зависимость при малых значениях интенсивности основного поля, когда степень ионизации  $\sigma$  остаётся малой. Когда наступает истощение нейтральных частиц

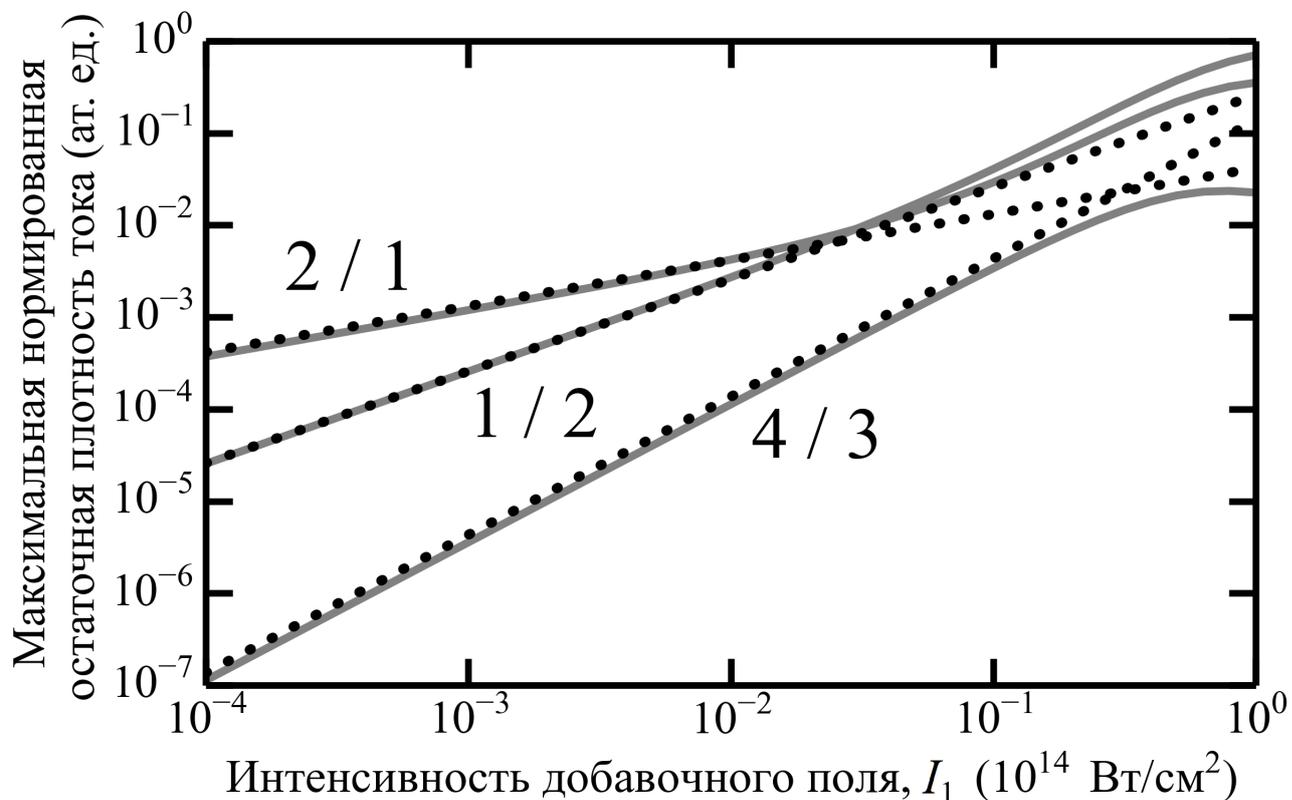


Рисунок 1.2 — Зависимости максимальной нормированной ОПТ от интенсивности добавочного поля в двухцветном лазерном импульсе. Параметры лазерного импульса: интенсивность основного поля  $I_0 = 10^{14}$  Вт/см $^2$ , длительность лазерного импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  соответствует длине волны 800 нм, отношения частот  $\omega_1/\omega_0$  в двухцветном импульсе указаны на рисунке. Точки получены с помощью аналитической формулы (1.26). Сплошные кривые — результаты расчетов по формуле (1.5).

и рост степени ионизации насыщается, рост остаточного тока тоже сильно замедляется. Следует отметить, что на зависимость от интенсивности могут также влиять и другие множители в формуле (1.24), так как  $n_0$  и  $\tau_i$  тоже зависят от интенсивности основного поля. Несмотря на то, что  $n_0$  и  $\tau_i$  обычно зависят от интенсивности основного поля медленнее, чем  $\sigma$ , они могут приводить к существенной модификации зависимостей ОПТ от интенсивности основного поля (например, немонотонности) при больших значениях  $a$ ,  $b$  или  $\Delta\omega\tau$ .

Форма пиков практически полностью описывается гауссовым множителем  $\exp(-\Delta\omega^2\tau_i^2/2)$  в (1.24). Ширина пиков больше, чем ширина спектра основного поля, и уменьшается с ростом знаменателя дроби  $b$ . При отсутствии насыщения ионизации ширина пика больше ширины спектра основного поля в  $n_0^{1/2}/b$  раз. В общем случае (даже когда условия применимости аналитической модели нарушены) эта ширина оказывается порядка  $1/\tau_i b$ . Представление о том, как резкость  $n_0$  вероятности ионизации, характерное время  $\tau_i$  ионизации и ширина пика зависят от интенсивности основного поля и связаны между собой даёт рисунок 1.3. На нём изображены зависимости времени ионизации, обратной ширины пика при  $\omega_1 \approx \omega_0/2$  и величины  $\tau/n_0^{1/2}$  в максимуме импульса от интенсивности основного поля. Время ионизации рассчитывается как

$$\tau_i = \sqrt{\frac{1}{N(+\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \langle t \rangle)^2 \frac{dN}{dt} dt}, \quad (1.30)$$

где

$$\langle t \rangle = \frac{1}{N(+\infty)} \int_{-\infty}^{+\infty} t \frac{dN}{dt} dt, \quad (1.31)$$

Такое определение  $\tau_i$  оказывается практически эквивалентным данному ранее, когда форма функции  $d\bar{N}/dt$  близка к гауссовой. Ширина пика рассчитывается как

$$\delta = \sqrt{\frac{\int_{0.55\omega_0}^{0.55\omega_0} (2\omega_1 - \omega_0)^2 \max_{\varphi} |\bar{J}| d\omega_1}{\int_{0.55\omega_0}^{0.55\omega_0} \max_{\varphi} |\bar{J}| d\omega_1}}. \quad (1.32)$$

Как видно, во всём диапазоне интенсивностей время ионизации и обратная ширина пика достаточно хорошо совпадают, а при малых интенсивностях, когда нет истощения нейтральных частиц, обе эти величины совпадают с  $\tau/n_0^{1/2}$ . Это свойство остаточного тока может быть интересным в связи с возможностью определения величина  $\tau_i$  и  $n_0$  в экспериментах по генерации терагерцового излучения ионизирующими частотно-перестраиваемыми двухцветными импульсами

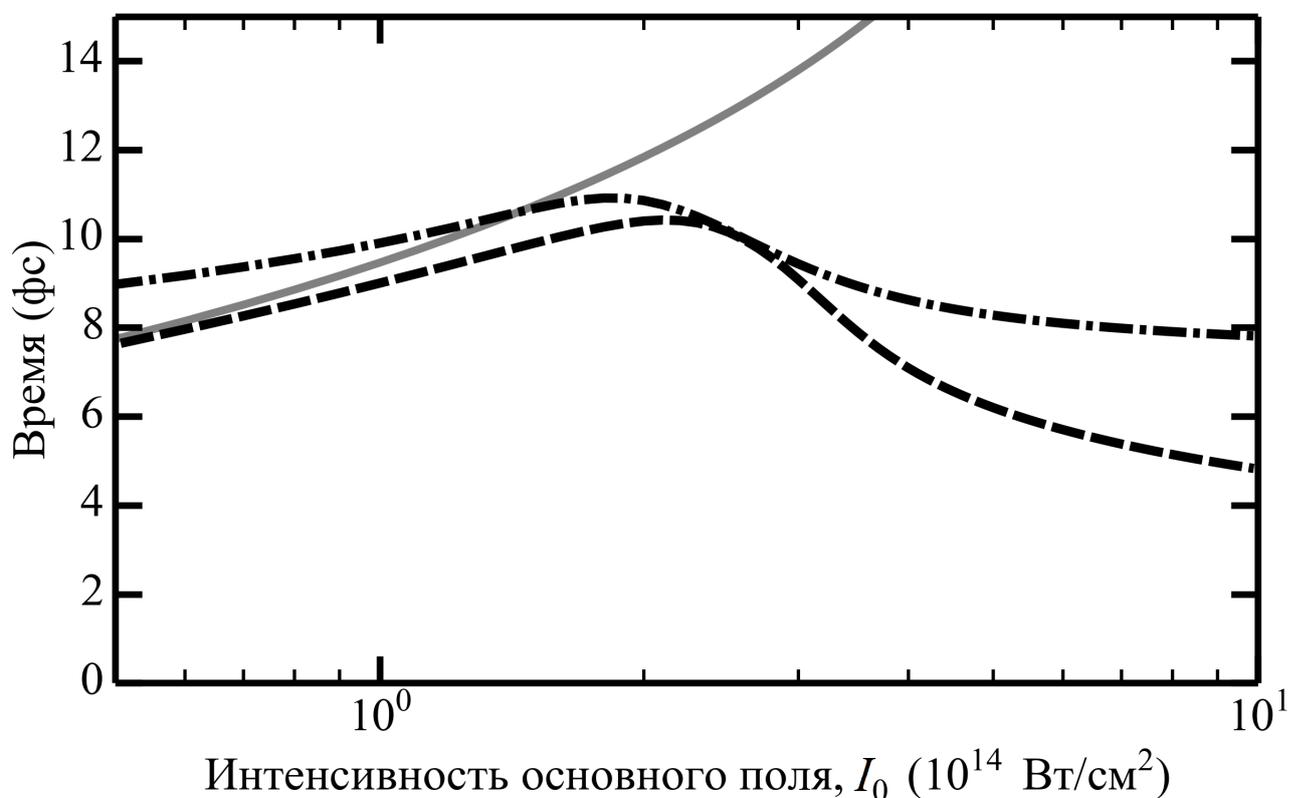


Рисунок 1.3 — Зависимость времени ионизации  $\tau_i$  (сплошная и пунктирная кривые) и обратной ширины пика зависимости ОПТ от частоты добавочного поля (штрихпунктирная кривая) от интенсивности  $I_0$  основного поля в двухцветном лазерном импульсе. Длительность лазерного импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  соответствует длине волны 800 нм, частота добавочного поля  $\omega_1$  отвечает длине волны 1600 нм, отношение интенсивностей добавочного и основного поля фиксировано,  $I_1/I_0 = 0.01$ . Пунктирная и штрихпунктирная кривые — результаты численных расчётов. Сплошная кривая получена по аналитической формуле для  $\tau_i$ .

с помощью измерений характерных диапазонов перестройки, в которых происходит эффективная генерация терагерцового излучения. Такие измерения были, например, выполнены в [36]. Отметим также интересную особенность рассматриваемого явления возбуждения остаточного тока, связанную с асимметричной формой пика. Об этой асимметрии свидетельствует формула (1.23) для множителя  $g$ , который явным образом зависит от знака частотной отстройки  $\Delta\omega$ . Наличие этой зависимости приводит к тому, что максимум пика оказывается смещён относительно точного значения  $\omega_1 = a\omega_0/b$ . Находя максимум выражения (1.26), получаем, что максимум пика соответствует частотной отстройке

$$\Delta\omega_{opt} \approx \frac{2n_0a}{\omega_0\tau_p^2(a^2 - b^2)}. \quad (1.33)$$

Для верификации результатов, полученных с использованием уравнения (1.2) использовался квантовомеханический подход, состоящий в решении трехмерного нестационарного уравнения Шрёдингера для волновой функции электрона в атоме водорода под действием внешнего поля лазерного импульса,

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{r} - eE(t)x \right) \psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.34)$$

Результаты решения уравнения (1.34) были предоставлены А. А. Силаевым, детали, касающиеся квантовомеханического подхода описаны в работе [54].

Рисунок 1.4 показывает рассчитанные с помощью классического и квантовомеханического подходов зависимости максимального значения ОПТ от частоты одной из квазимонохроматических составляющих двухцветного импульса (при равных интенсивностях составляющих двухцветного импульса, когда нельзя выделить основное и добавочное поля).

Как видно из рисунка 1.4, описанные выше пики около рациональных отношений частот в двухцветном лазерном импульсе проявляются как в классическом, так и квантовомеханическом расчётах. Для больших интенсивностей, когда реализуется туннельный режим ионизации, результаты, полученные с помощью классического подхода, и качественно, и количественно согласуются с результатами квантовомеханического расчёта (см. рисунок 1.4а). Таким образом, в условиях туннельной ионизации классический подход позволяет адекватно рассчитывать как максимумы пиков, так и их ширины. При более низких интенсивностях, соответствующих многофотонному режиму ионизации, когда условия применимости классического подхода не выполнены, классический подход приводит к заниженным результатам для максимумов пиков и завышенным результатам для их

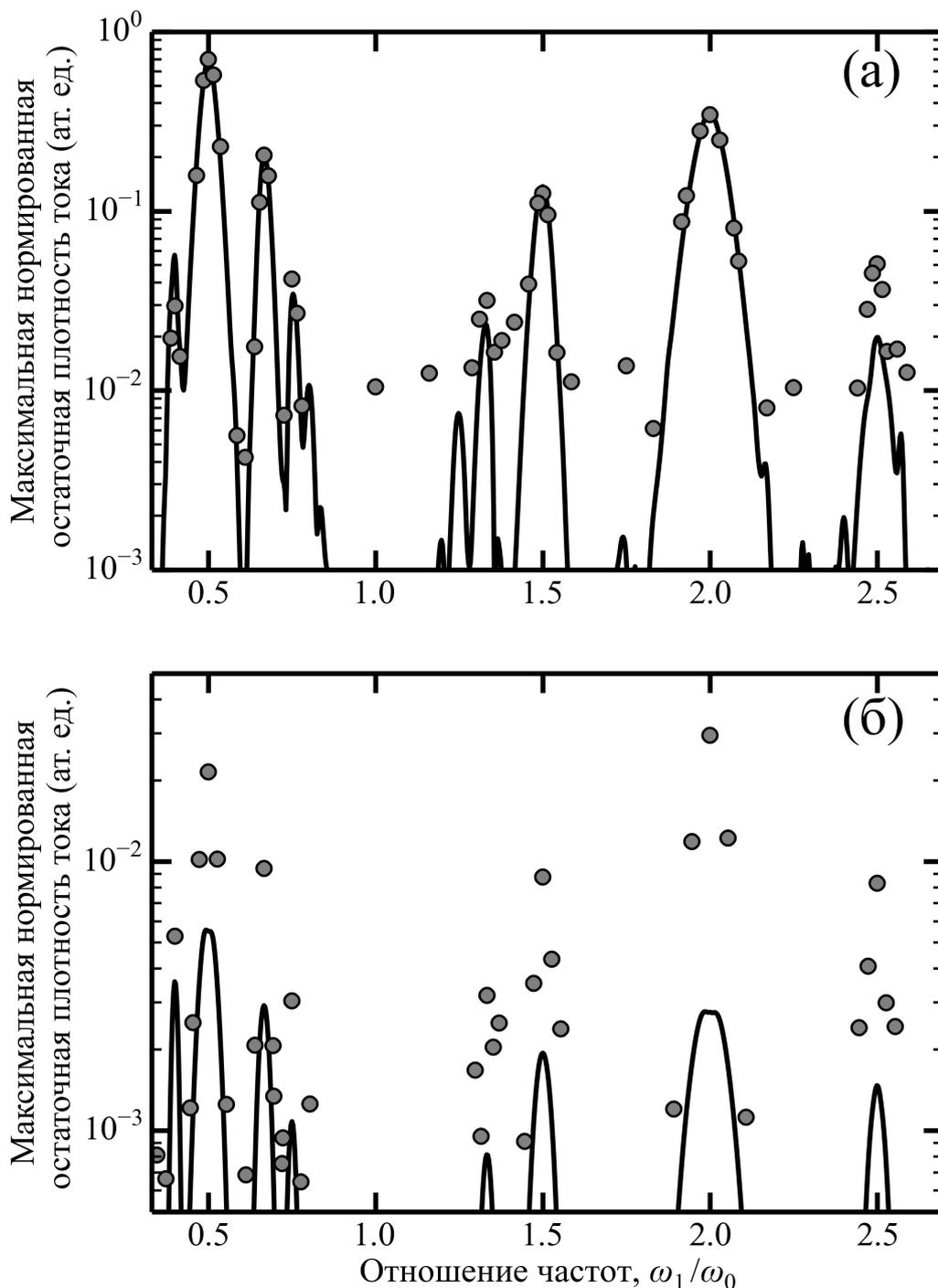


Рисунок 1.4 — Зависимость максимальной нормированной остаточной плотности тока от отношения частот квазимонохроматических компонент двухцветного лазерного импульса. Параметры лазерного импульса: длительность импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  соответствует длине волны 800 нм, интенсивности компонент лазерного импульса: (а)  $I_0 = I_1 = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>, (б)  $I_0 = I_1 = 3 \cdot 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>. Сплошные линии — результаты классических расчетов; кружками отмечены результаты квантовомеханических расчетов.

ширин. Это также можно видеть на рисунке 1.5, где изображены зависимости максимального значения ОПТ от интенсивностей составляющих двухцветного импульса для различных частотных отношений в нём.

Для частотных отношений  $\omega_1/\omega_0 = a/b$  с не очень большими  $a$  и  $b$  (таких, как  $1/2$ ,  $2/3$ ) зависимость от интенсивности насыщается при больших интенсивностях и достаточно точно описывается классической моделью (см. рисунок 1.5а). Для больших  $a$  и  $b$  (например  $2/5$  или  $3/4$ ) зависимости оказываются более сложными и не насыщаются даже при очень больших интенсивностях, что связано с близостью более сильных пиков с меньшими знаменателями: пик при отношении  $2/5$  близок к пику при  $1/2$ , а пик при  $3/4$  — к  $2/3$  (см. рисунок 1.5б). По всей видимости, это также приводит к тому, что результаты классических расчётов менее точно описывают зависимость ОПТ от интенсивности. При этом классическая модель сохраняет все особенности этих зависимостей, например, немонотонность зависимости и положение минимума и максимума при  $a/b = 2/5$ .

#### **1.4 Сравнение эффективностей генерации остаточных токов при использовании добавочных полей на половинной и удвоенной частоте основного поля**

В данном разделе проводится анализ двух наиболее практически значимых и распространенных методов генерации терагерцового излучения с использованием двухцветных импульсов, меньшая из квазимонохроматических компонент которых предварительно генерируется с помощью частотного преобразования основной компоненты поля. Способы создания добавочного поля двухцветного импульса в случаях второй и половинной частоты различны: вторая гармоника, как правило, генерируется в нелинейных кристаллах [3; 12; 13; 24; 62; 110—112], в то время как половинная гармоника может быть сгенерирована в оптическом параметрическом усилителе [20; 36]. Поскольку добавочное поле в ионизирующем двухцветном импульсе генерируется из основного поля, используемого в качестве накачки, разумно сравнить схемы с половинной и второй гармоникой, анализируя зависимости остаточной плотности тока от интенсивности дополнительной компоненты  $I_1$  при фиксированной интенсивности основной компоненты  $I_0$ , имея в

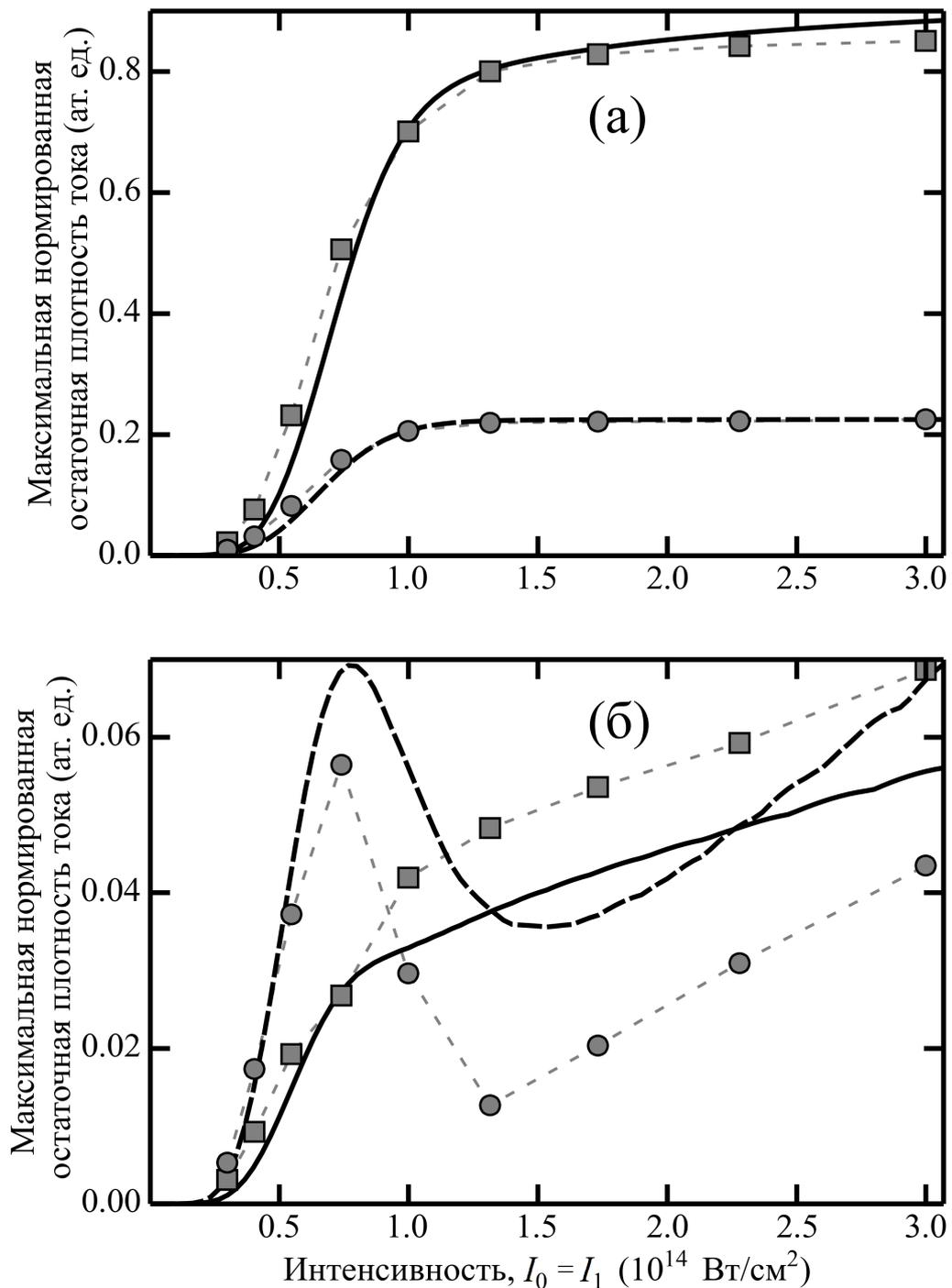


Рисунок 1.5 — Зависимости максимальной нормированной ОПТ от интенсивностей  $I_0 = I_1$  квазимонохроматических компонент двухцветного лазерного импульса. Кривые соответствуют результатам классических расчетов, кружками и квадратами отмечены результаты квантовомеханических расчетов. На панели (а) сплошная линия и квадраты соответствуют отношению частот компонент двухцветного импульса  $\omega_1/\omega_0 = 1/2$ ; пунктирная линия и кружки —  $\omega_1/\omega_0 = 2/3$ . На панели (б) сплошная линия и квадраты соответствуют отношению частот компонент двухцветного импульса  $\omega_1/\omega_0 = 3/4$ ; пунктирная линия и кружки —  $\omega_1/\omega_0 = 2/5$ . Длительность импульса  $\tau_p = 50$  фс, частота основного поля  $\omega_0$  соответствует длине волны 800 нм.

виду, что эффективность генерации самого добавочного поля может в этих двух случаях различаться.

В численных расчетах использовались импульсы с длительностью  $\tau_p = 30$  фс и длиной волны  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 = 800$  нм. Во всех выполненных расчетах находилось оптимальное значение фазового сдвига  $\varphi_{\text{opt}}$ , соответствующее максимальной остаточной плотности тока  $\bar{j}$ , и выбиралось для представления результата. Таким образом, мы фокусируемся на зависимостях  $\bar{j}$  от интенсивностей основной и дополнительной лазерных компонент в двух сравниваемых случаях (с  $\omega_1 = \omega_0/2$  и  $\omega_1 = 2\omega_0$ ).

Начнем со сравнения результатов вычисления  $\bar{j}$  в рамках квантовомеханических и квазиклассических расчетов для импульсов с  $I_1/I_0 = 0,04$  для случаев половинной гармоники и второй гармоники для определения области применимости квазиклассического подхода. Результат сравнения проиллюстрирован на рисунке 1.6 (для дополнительного поля на удвоенной частоте) и на рисунке 1.7 (для дополнительного поля на половинной частоте), где построена  $\bar{j}$  в зависимости от интенсивности  $I_0$ . Можно видеть, что существует хорошее (как количественное, так и качественное) согласие между квазиклассическими и квантовомеханическими расчетами при интенсивностях  $I_0 \geq 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>, которые соответствуют туннельной ионизации.

Для сравнения двух схем были найдены значения интенсивности  $I^*(I_0, \zeta)$  такие, что  $\bar{j}^{1/2}(I_0, I^*) = \bar{j}^2(I_0, \zeta I^*)$ , где  $\zeta$  - произвольная положительная константа. Это значение интенсивности соответствует равным выходным терагерцовым сигналам в случае дополнительных полей с половинной и второй гармониками с интенсивностью основного поля и фиксированным параметром дополнительной эффективности генерации поля  $\zeta$  в этих двух случаях. Другими словами, при заданных значениях  $I_0$  и  $\zeta$  использование дополнительного поля на половинной частоте является предпочтительным по сравнению с полем на удвоенной частоте, если интенсивность добавочного поля  $I_1 > I^*(I_0, \zeta)$ . Мы используем квазиклассический подход для нахождения функции  $I^*(I_0, \zeta)$ , которая представлена на рисунке 1.8.

Как видно, отношение  $I^*/I_0$  имеет сложное поведение как функция  $\zeta$  и  $I_0$  в диапазоне  $10^{14}$  Вт / см<sup>2</sup> <  $I_0$  <  $1,5 \cdot 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>, но оно насыщается и почти не зависит от  $I_0$  при  $I_0 > 1,5 \cdot 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>: в то время как  $I^*$  – сильная функция  $\zeta$  при малых интенсивностях, она зависит от  $\zeta$  значительно слабее при более высоких интенсивностях. Это насыщение может быть объяснено ис-

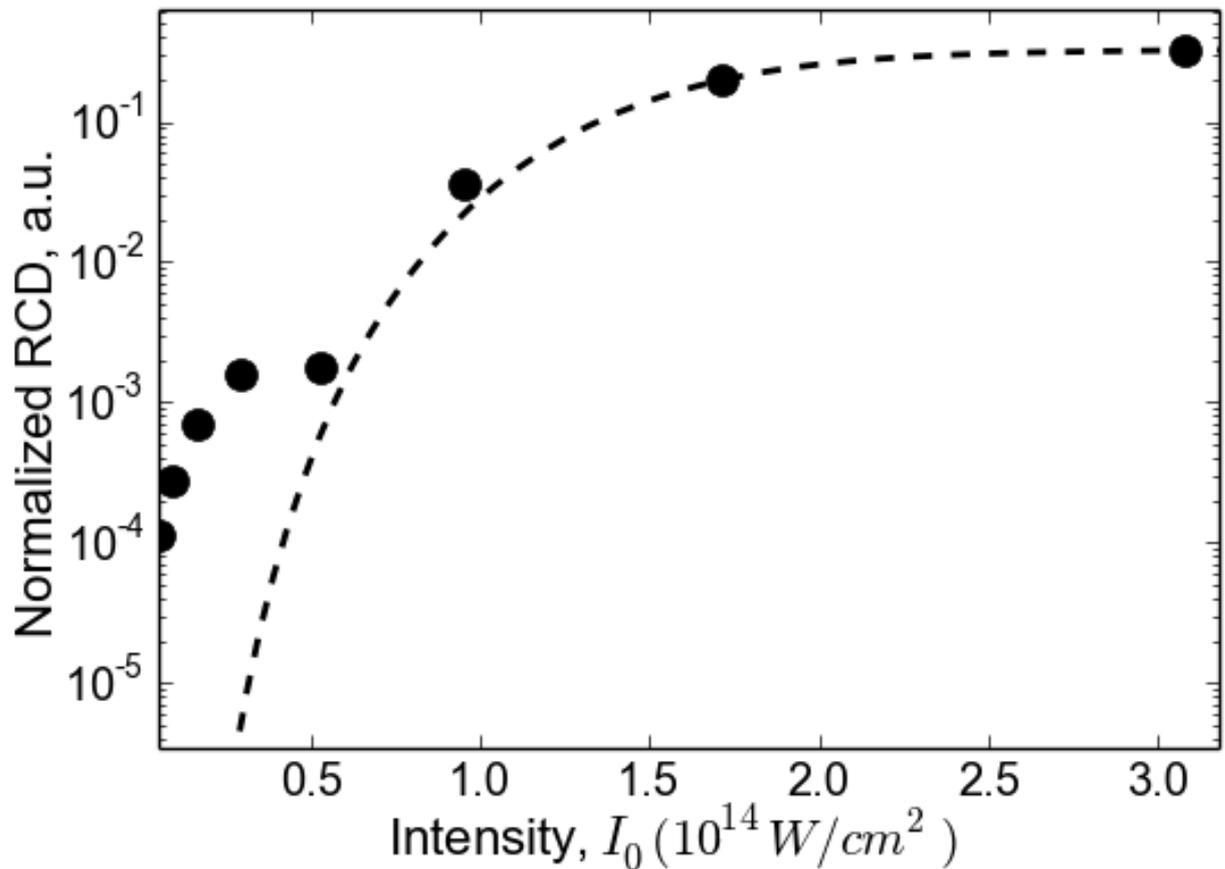


Рисунок 1.6 — Остаточная плотность тока (нормированная на  $N_g$ ) из квантовомеханических (точек) и квазиклассических (пунктирная линия) расчетов в зависимости от интенсивности  $I_0$  основной лазерной составляющей в ионизирующем двухцветном лазерном импульсе с интенсивностью дополнительной второй гармоники  $I_1 = 0.04I_0$  при оптимальном сдвиге фаз; длительность лазерного импульса  $\tau_p = 30$  фс, длина волны основной компоненты лазера  $\lambda_0 = 800$  нм.

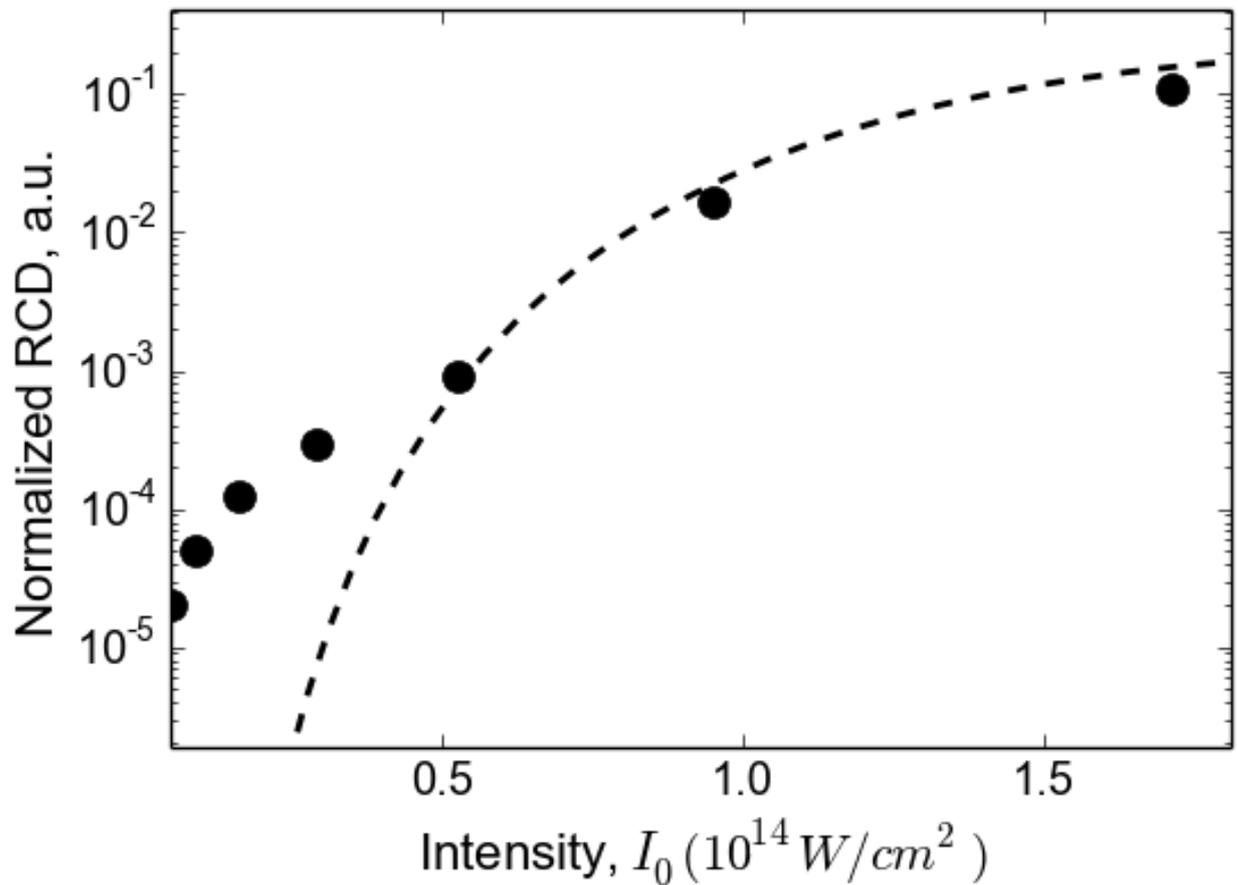


Рисунок 1.7 — Остаточная плотность тока (нормированная на  $N_g$ ) из квантовомеханических (точек) и квазиклассических (пунктирная линия) расчетов в зависимости от интенсивности  $I_0$  основной лазерной составляющей в ионизирующем двухцветном лазерном импульсе с интенсивностью дополнительной половинной гармоники  $I_1 = 0.04I_0$  при оптимальном сдвиге фаз; длительность лазерного импульса  $\tau_p = 30$  фс, длина волны основной компоненты лазера  $\lambda_0 = 800$  нм.

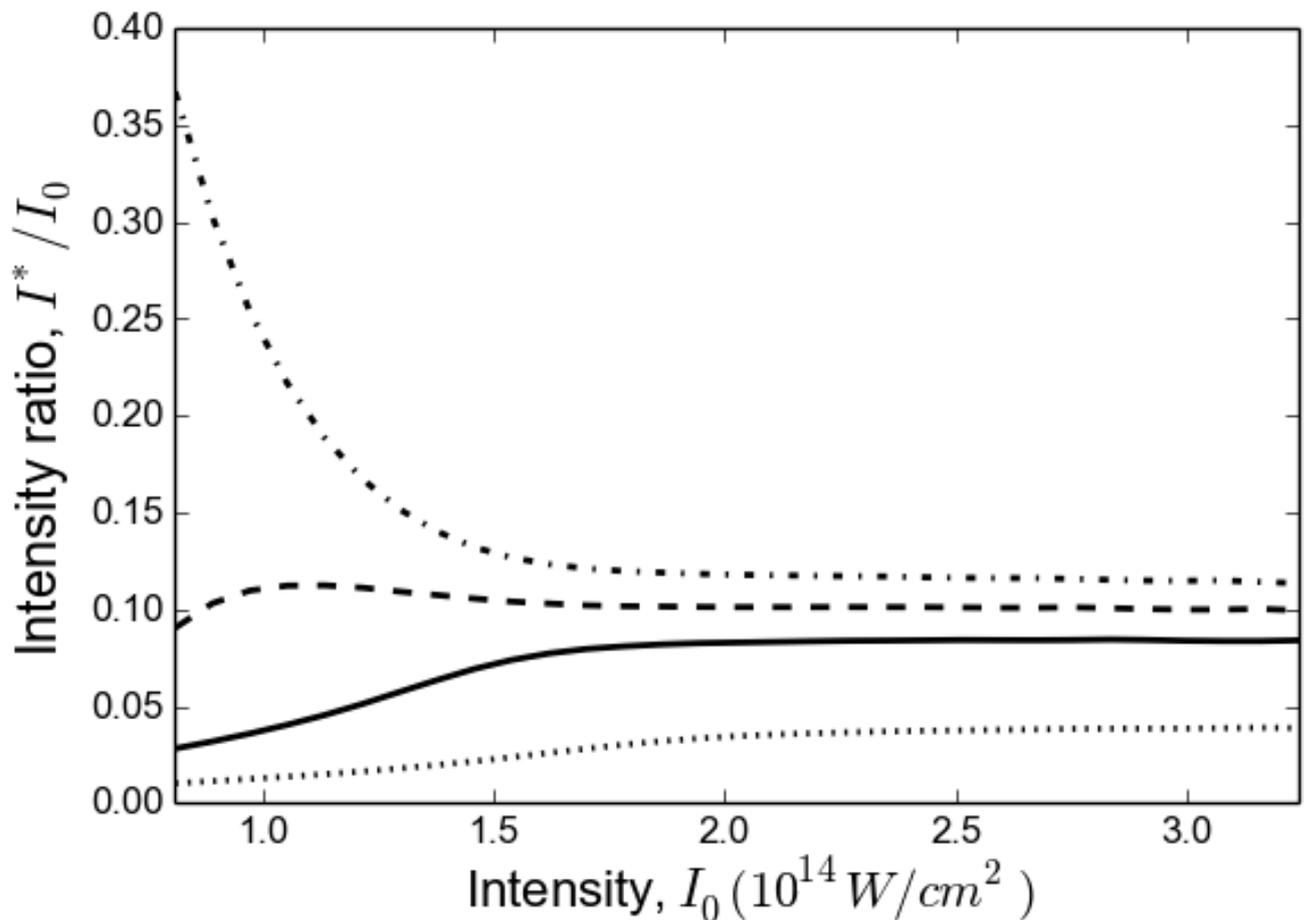


Рисунок 1.8 — Минимальная интенсивность половинной гармоники  $I^*$  (нормированная на интенсивность основного поля), необходимая для того, чтобы добавление половинной гармоники было по меньшей мере столь же эффективным, как добавление второй гармоники против основной напряженности поля  $I_0$  при различных значениях относительного коэффициента эффективности генерации добавочного поля в случаях половинной и второй гармоники:  $\zeta = 0.5$  (пунктирная линия),  $\zeta = 1$  (сплошная линия),  $\zeta = 1.3$  (штриховая линия),  $\zeta = 2$  (штрихпунктирная линия).

тощением нейтральных частиц ионизацией на фронте лазерного импульса при достаточной интенсивности основной компоненты. При  $\zeta = 1$ ,  $I^*/I_0$  насыщается до 0,085. Таким образом, для равных добавочных полей второй и половинной гармоники предпочтительнее использовать половинную гармонику, когда интенсивность добавочного поля больше 9% интенсивности основного поля. В целом, при широком диапазоне общих интенсивностей лазерного импульса, половинная гармоника становится предпочтительной для эффективной генерации терагерцового излучения, когда интенсивность добавочного поля больше, чем несколько процентов (5% -10%) интенсивности основного поля.

## 1.5 Выводы к главе 1

Исследован механизм ионизационного многоволнового смешения, проявляющийся в генерации комбинационных частот компонент двухцветных ионизирующих лазерных импульсов в спектре тока свободных электронов, в том числе квазипостоянной компоненты – остаточной плотности тока, при произвольном соотношении частот квазимонохроматических составляющих этого импульса. На основе классического подхода получено аналитическое выражение, описывающее зависимость остаточной плотности тока от всех параметров лазерного импульса в случае, когда двухцветный импульс представляет собой суперпозицию сильного квазимонохроматического основного поля и слабого добавочного поля на другой частоте. Полученные аналитические выражения показывают, что зависимость остаточного тока от частоты добавочного поля представляет собой набор резонансоподобных пиков вблизи частот, отвечающих отношениям частот добавочного и основного полей, равным рациональной дроби с не очень большой нечётной суммой числителя и знаменателя. Ширины пиков больше ширины спектра основного ионизирующего поля и определяются обратным характерным временем ионизации, делённым на знаменатель дроби, выражающей частотное отношение в двухцветном лазерном импульсе. Найдены зависимости максимумов пиков от интенсивностей основного и добавочного полей. Проведенные численные расчёты показывают, что полученные аналитические формулы хорошо описывают ОПТ в достаточно широком диапазоне параметров лазерных

импульсов. Результаты расчётов, основанные на численном решении трёхмерного нестационарного уравнения Шрёдингера, хорошо согласуются с результатами классических расчётов в туннельном режиме ионизации. Проведено подробное сравнение результатов расчетов в рамках квазиклассического и квантовомеханического подходов к описанию динамики тока свободных электронов и показано, что квазиклассический подход может быть использован для расчета плотности остаточного тока при достаточно высоких интенсивностях основного поля в случаях дополнительных полей как на удвоенной, так и на половинной частоте. В результате сравнения плотностей остаточного тока в этих двух случаях, показано, что добавление полугармонического поля обеспечивает более эффективную терагерцовую генерацию, чем добавление второй гармоники при интенсивности добавочного поля, превышающей несколько процентов от общей интенсивности лазерного импульса.

## Глава 2. Оптимизация параметров двухцветных импульсов для наиболее эффективной генерации остаточных токов

В данной главе исследуются зависимости остаточной плотности тока, генерируемой под действием двухцветных ионизирующих лазерных импульсов с произвольными поляризациями компонент, от параметров этих ионизирующих импульсов, при различных рациональных отношениях центральных частот компонент.

### 2.1 Результаты численных расчетов

В данном разделе приводятся результаты численных расчетов зависимости остаточной плотности тока от параметров двухцветных лазерных импульсов с произвольными поляризациями квазимонохроматических компонент. Ионизирующее поле  $\mathbf{E}$  представляет собой суперпозицию двух квазимонохроматических компонент,  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1$ . Поля компонент двухцветного импульса параметризуются следующим образом:

$$\mathbf{E}_{0,1}(t) = \text{Re}\{\mathbf{A}_{0,1}(t)e^{i\omega_{0,1}t}\}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{A}_0(t) = \mathcal{E}_0(t)(\hat{\mathbf{x}} + i\varepsilon_0\hat{\mathbf{y}}), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(t) = \mathcal{E}_1(t)(\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\hat{\mathbf{y}} + \\ + i\varepsilon_1[\cos\theta\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\hat{\mathbf{x}}])e^{i\varphi}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{A}_{0,1}$  — векторные комплексные огибающие основного и добавочного полей,  $\mathcal{E}_{0,1}$  — большие полуоси эллипсов поляризации компонент,  $\omega_{0,1}$  — центральные частоты компонент,  $-1 \leq \varepsilon_{0,1} \leq 1$  — эллиптичности компонент (знак эллиптичности определяет направление вращения вектора электрического поля),  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  — угол между главными осями эллипсов поляризации и  $0 \leq \varphi < 2\pi$  — сдвиг фаз между несущими компонент,  $\hat{\mathbf{x}}$  — единичный вектор, направленный вдоль главной оси эллипса поляризации первой компоненты,  $\hat{\mathbf{y}}$  — единичный

вектор, направленный вдоль малой оси эллипса поляризации первой компоненты. Замена  $\varepsilon_0 \rightarrow -\varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_1 \rightarrow -\varepsilon_1$ ,  $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$  (комплексное сопряжение обеих компонент) сохраняет остаточный ток, так что можно ограничиться рассмотрением  $0 \leq \varepsilon_0 \leq 1$ . В данной работе рассмотрен случай совпадающих плоскостей поляризаций компонент ионизирующего импульса. Разность фаз между несущей и огибающей (СЕР) первой компоненты поля может быть опущена при условии  $\omega_{0,1}\tau_i \gg 1$ , где  $\tau_i$  — длительность ионизации.

Как показано в первой главе данной диссертации, а также в экспериментальной работе [6], эффективная генерация возможна только при отношениях частот  $\omega_1/\omega_0 \approx a/b$ , где  $a$  и  $b$  являются небольшими натуральными числами разной четности. В данной работе подробно рассматриваются импульсы с отношениями частот 2/1, 3/2, 4/1; также в таблице 1 приведены оптимальные параметры импульсов с частотными отношениями 4/3 и 5/2.

В численных расчетах использовались импульсы с огибающими  $\mathcal{E}_{0,1}(t) = \sqrt{8\pi I_{0,1}/(c[1 + \varepsilon_{0,1}^2])} \exp -\frac{t^2 \ln 4}{\tau_p^2}$ , где  $I_{0,1}$  — пиковые интенсивности компонент, с длительностью (FWHM)  $\tau_p = 50$  fs и центральной частотой  $\omega_0$  соответствующей длине волны  $\lambda_0 = 800$  nm. В качестве ионизируемой среды рассматривались атомарный водород, для вероятности ионизации в численных расчетах была использована формула (1.29).

В первую очередь рассмотрим зависимость остаточного тока от сдвига фаз между несущими компонент  $\varphi$  (рисунок 2.1). Проекция  $\bar{j}$  на оси  $x$  и  $y$  являются сдвинутыми синусоидами с периодом  $2\pi/b$ , где  $b$  — знаменатель рациональной дроби, выражающей отношение центральных частот компонент, в некоторых случаях модулированные зависимостью конечной степени ионизации  $\sigma$  от  $\varphi$  (в частности это видно на группе картинок в правом столбце рисунка 2.1, отвечающих частотному отношению  $\omega_1/\omega_0 = 4$ ). В то же время амплитуды синусоид проекций являются нетривиальными функциями эллиптичностей, таким образом зависимость абсолютного значения  $\bar{j}$  от  $\varphi$  может качественно меняться в ходе изменения эллиптичностей компонент, таким образом могут существовать некоторые промежуточные значения эллиптичностей компонент, при которых зависимость  $\bar{j}$  от фазы является практически константой, также как в случае циркулярных поляризаций компонент.

В то время как фактор зависимости  $\sigma$  от  $\varphi$  довольно слабо влияет на вид зависимости  $\bar{j}$  от  $\varphi$ , при рассмотрении зависимости  $\bar{j}$  от угла наклона между главными осями эллипсов поляризации (или, в случае линейных поляризаций, между

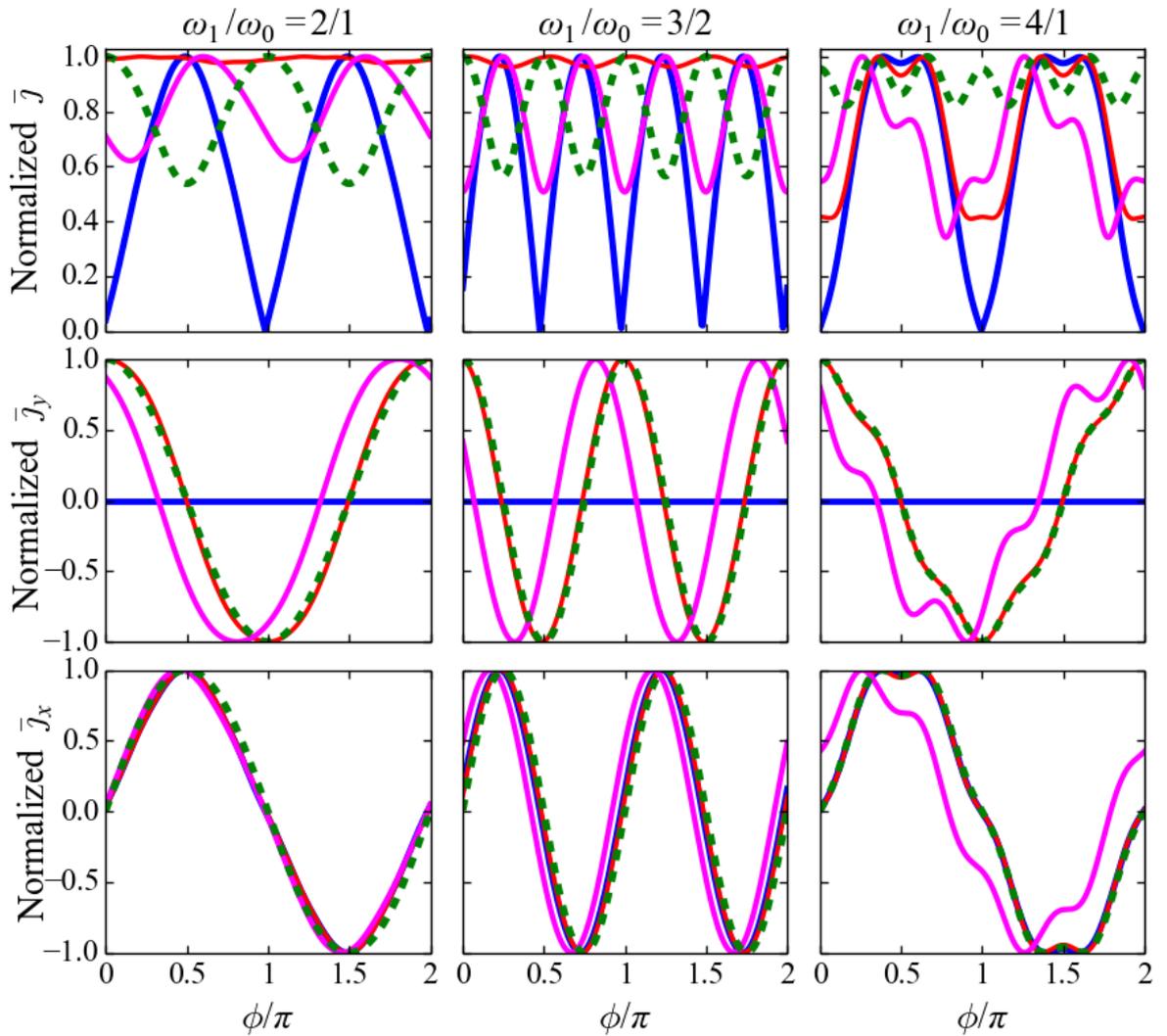


Рисунок 2.1 — Зависимость остаточного тока от сдвига фаз между несущими компонентами ионизирующего импульса  $\phi$  при различных частотных отношениях.

$I_0 = I_1 = 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ,  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ ,  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ . Синие кривые соответствуют  $\epsilon_{0,1} = 0$ , красные и фиолетовые  $\epsilon_{0,1} = 0.315$ , зеленые  $\epsilon_{0,1} = 0.8$ . Синие, зеленые и красные кривые построены при  $\theta = 0$ , фиолетовые при  $\theta = \pi/4$ . В первом ряду изображены зависимости абсолютного значения  $\bar{j}$  от  $\phi$ , во втором - проекция  $\bar{j}$  на ось  $y$ , в третьем - проекция  $\bar{j}$  на ось  $x$ . Столбцы отвечают различным отношениям частот компонент  $\omega_1/\omega_0$ : (слева-направо)  $2/1, 3/2, 4/1$ .

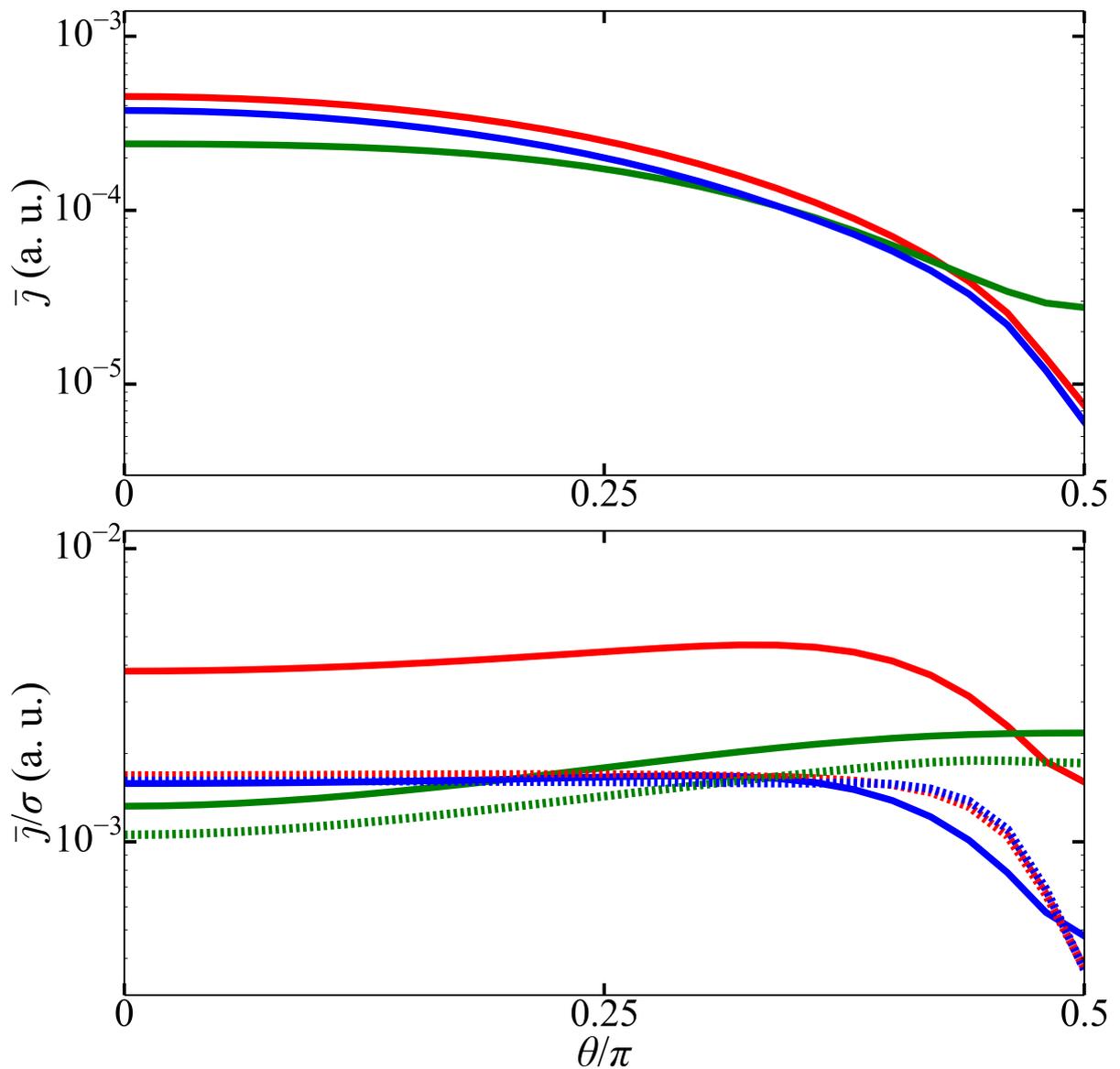


Рисунок 2.2 — Зависимость (а)  $\bar{j}$  от угла наклона между поляризациями компонент ионизирующего импульса  $\theta$  при  $I_0 = I_1 = 5 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$  (б)  $\bar{j}/\sigma$  от  $\theta$  при  $I_0 = I_1 = 5 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$  (пунктирные кривые) и  $I_0 = I_1 = 2 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$  (сплошные кривые). Различные цвета относятся к различным отношениям частот компонент: красные —  $\omega_1/\omega_0 = 2/1$ , зеленые —  $\omega_1/\omega_0 = 3/2$ , синие —  $\omega_1/\omega_0 = 4/1$ . Значения оптимизированы по сдвигу фаз  $\varphi$ .

осями поляризации) компонент  $\theta$  обнаруживается (рисунок 2.2), что при  $\sigma \ll 1$  определяющую роль играет именно зависимость конечной степени ионизации от угла наклона. Простое объяснение состоит в том, что вероятность ионизации - очень резкая функция абсолютного значения поля, а при фиксированных интенсивностях наибольшее значение поля достигается именно при сонаправленных линейных поляризациях компонент. Однако при достаточно больших интенсивностях, достаточных для близкой к полной ионизации при любых углах  $\theta$ , зависимости  $\bar{j}$  от  $\theta$  могут становиться немонотонными, при которых существует некоторый оптимальный угол  $\theta_{\text{opt}}$ , отличный от 0.

На рисунках 2.3, 2.4, 2.5 на верхних панелях изображены результаты сравнения  $\bar{j}_{\text{opt}}$ , генерируемой импульсами с оптимальными параметрами поляризации компонент (значения этих оптимальных параметров изображены на рисунок 2.1 и таблица 1) с  $\bar{j}_{\text{lin}}$ , генерируемой коллинеарными линейно поляризованными компонентами ( $\theta = \varepsilon_{0,1} = 0$ ) с той же пиковой интенсивностью и длительностью. Согласно рисункам 2.3, 2.4, 2.5 наибольший относительный выигрыш от изменения поляризационных свойств компонент импульсов наблюдается в случае, когда одна из компонент поля мала по сравнению с другой, и при этом суммарная интенсивность  $I = I_0 + I_1$ , достаточно велика для того, чтобы производить почти полную ионизацию плазмы (отношения  $\bar{j}_{\text{opt}}$ , производимой импульсами с оптимальной поляризацией к  $\bar{j}_{\text{lin}}$  хорошо совпадают с полученными экспериментально в работе [37]). В то же время при низких суммарных интенсивностях,  $I < 1.5 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$ , когда конечная степень ионизации мала, из-за резкой зависимости вероятности ионизации от абсолютного значения поля, любые поляризации создают намного меньшую конечную плотность плазмы, нежели линейные коллинеарные, и именно за этот счет остаточная плотность тока наиболее эффективно генерируется импульсами с линейными коллинеарными поляризациями. Наибольший интерес представляют поляризационные свойства в точке, в которой эффективность генерации, пропорциональная отношению квадрата  $\bar{j}$  к суммарной пиковой интенсивности, оказывается наибольшей из возможных (нижние панели рисунков 2.3, 2.4, 2.5). Различным частотным отношениям соответствуют различные оптимальные интенсивности компонент (таблица 1).

Для каждого из рассматриваемых частотных отношений на рисунках 2.6, 2.7, 2.8 приведены графики зависимостей  $\bar{j}$  и  $\theta_{\text{opt}}$  - оптимального угла наклона между главными осями поляризации в зависимости от эллиптичностей обеих компонент, фиксируя их интенсивности в оптимальных значениях (максимальных).

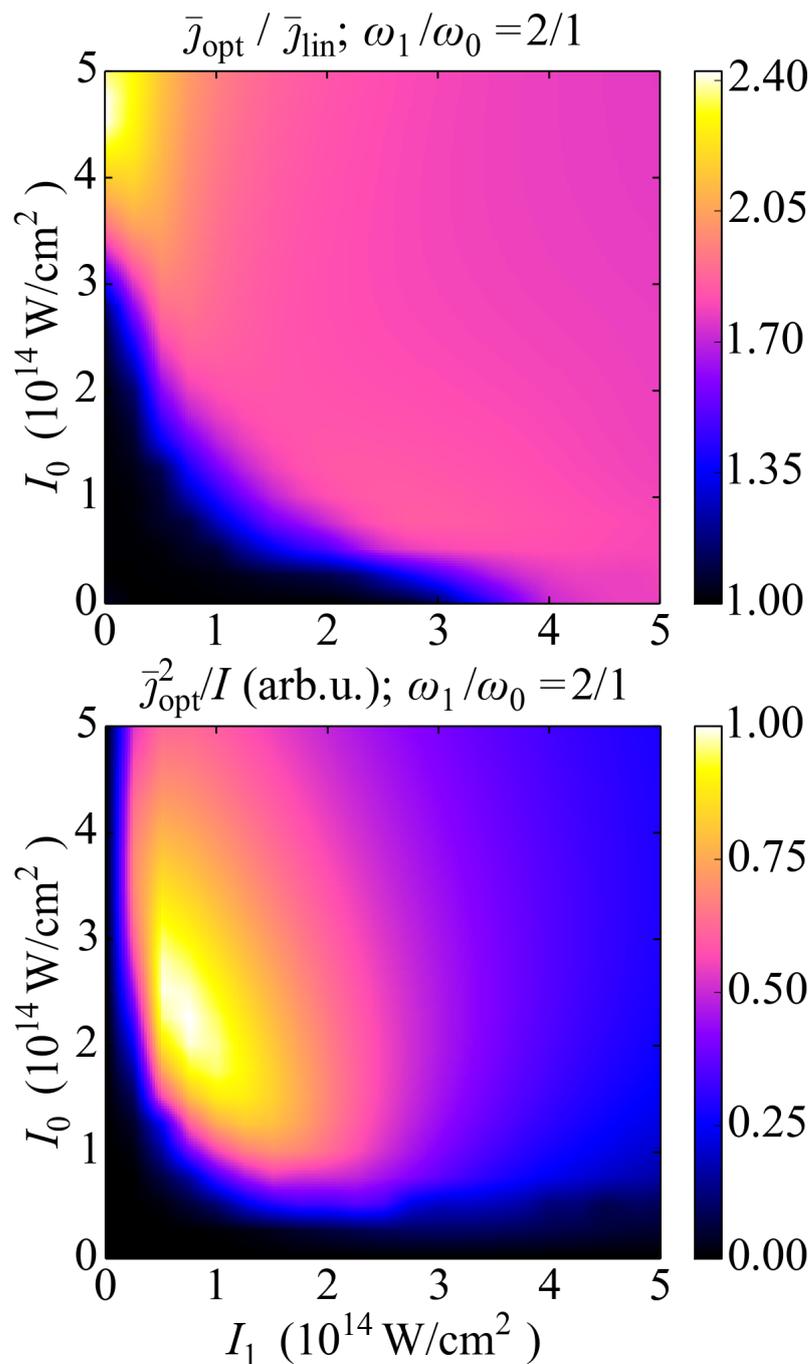


Рисунок 2.3 — (Верхняя панель) отношение  $\bar{j}$  (оптимизированного по сдвигу фаз между несущими компонент ионизирующего импульса), генерируемой импульсами с оптимальной поляризацией компонент к  $\bar{j}$ , генерируемой импульсами с коллинеарными линейно поляризованными компонентами с той же интенсивностью, (нижняя панель) отношение квадрата  $\bar{j}_{\text{opt}}$  к суммарной интенсивности компонент. Отношение частот компонент  $\omega_1 / \omega_0 = 2.0$ . Длительность импульсов (FWHM)  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ , длина волны первой компоненты  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

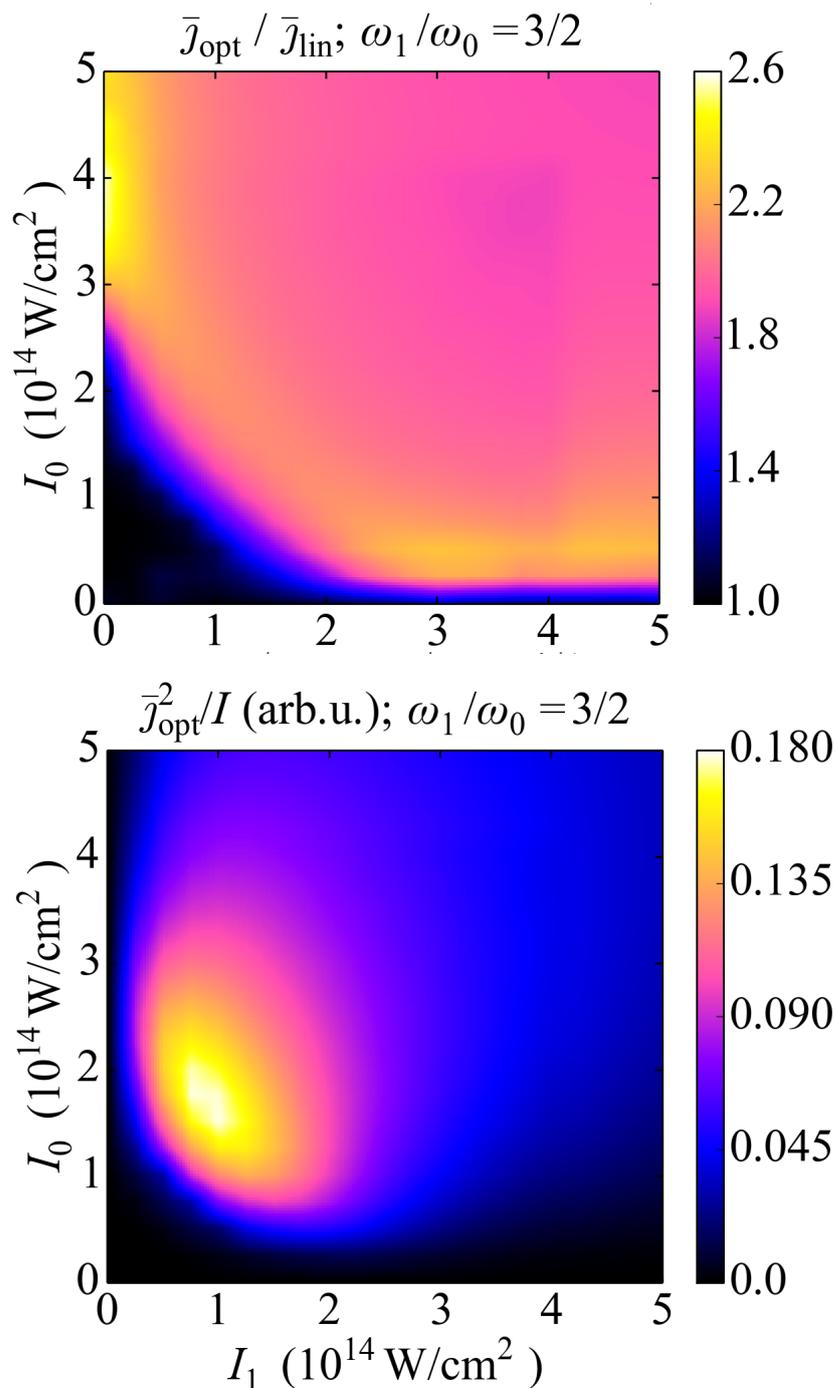


Рисунок 2.4 — (Верхняя панель) отношение  $\bar{j}$  (оптимизированного по сдвигу фаз между несущими компонент ионизирующего импульса), генерируемой импульсами с оптимальной поляризацией компонент к  $\bar{j}$ , генерируемой импульсами с коллинеарными линейно поляризованными компонентами с той же интенсивностью, (нижняя панель) отношение квадрата  $\bar{j}_{\text{opt}}$  к суммарной интенсивности компонент. Отношение частот компонент  $\omega_1 / \omega_0 = 1.5$ . Длительность импульсов (FWHM)  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ , длина волны первой компоненты  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

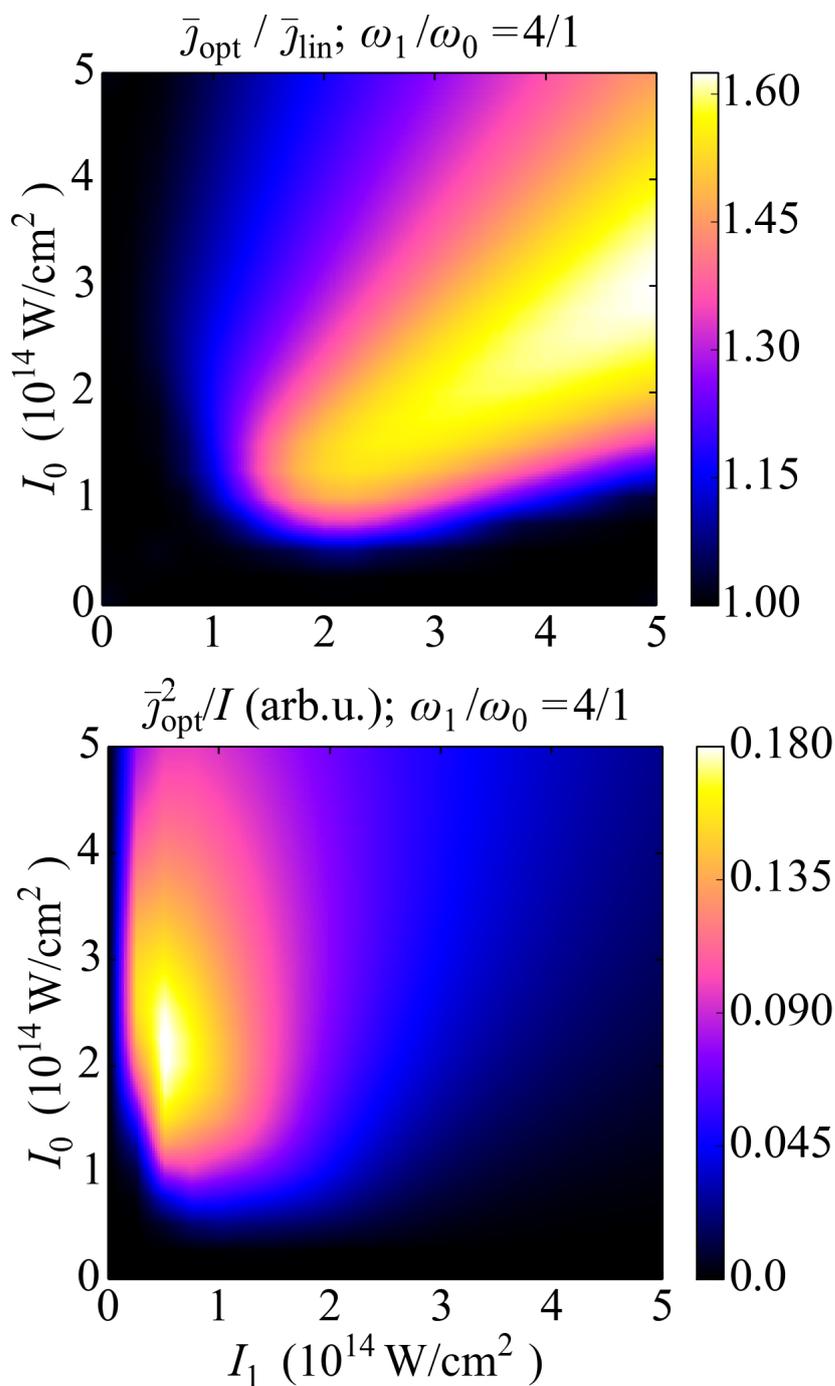


Рисунок 2.5 — (Верхняя панель) отношение  $\bar{J}$  (оптимизированного по сдвигу фаз между несущими компонент ионизирующего импульса), генерируемой импульсами с оптимальной поляризацией компонент к  $\bar{J}$ , генерируемой импульсами с коллинеарными линейно поляризованными компонентами с той же интенсивностью, (нижняя панель) отношение квадрата  $\bar{J}_{\text{opt}}$  к суммарной интенсивности компонент. Отношение частот компонент  $\omega_1 / \omega_0 = 4.0$ . Длительность импульсов (FWHM)  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ , длина волны первой компоненты  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

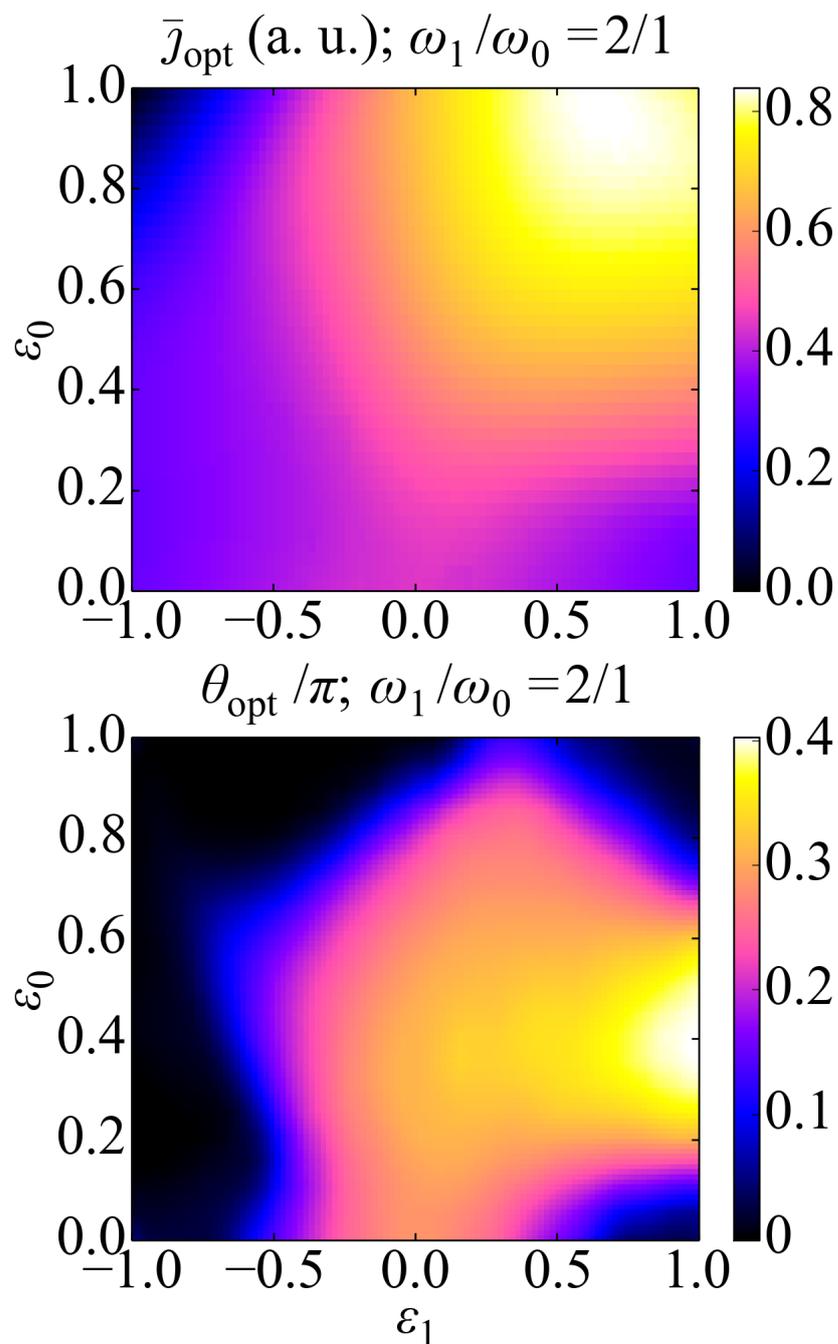


Рисунок 2.6 — Зависимость (верхняя панель) остаточного тока, оптимизированного по сдвигу фаз между компонентами и наклону между главными осями поляризации от эллиптичностей обеих компонент при фиксированных оптимальных интенсивностях для частотного отношения  $\omega_1/\omega_0 = 2$ ,  $I_0 = 2.3 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ,  $I_1 = 7 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ ; (нижняя панель) зависимость оптимального наклона между главными осями поляризации компонент  $\theta$  от эллиптичностей при тех же параметрах. Длительность импульсов (FWHM)  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ , длина волны основной компоненты  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

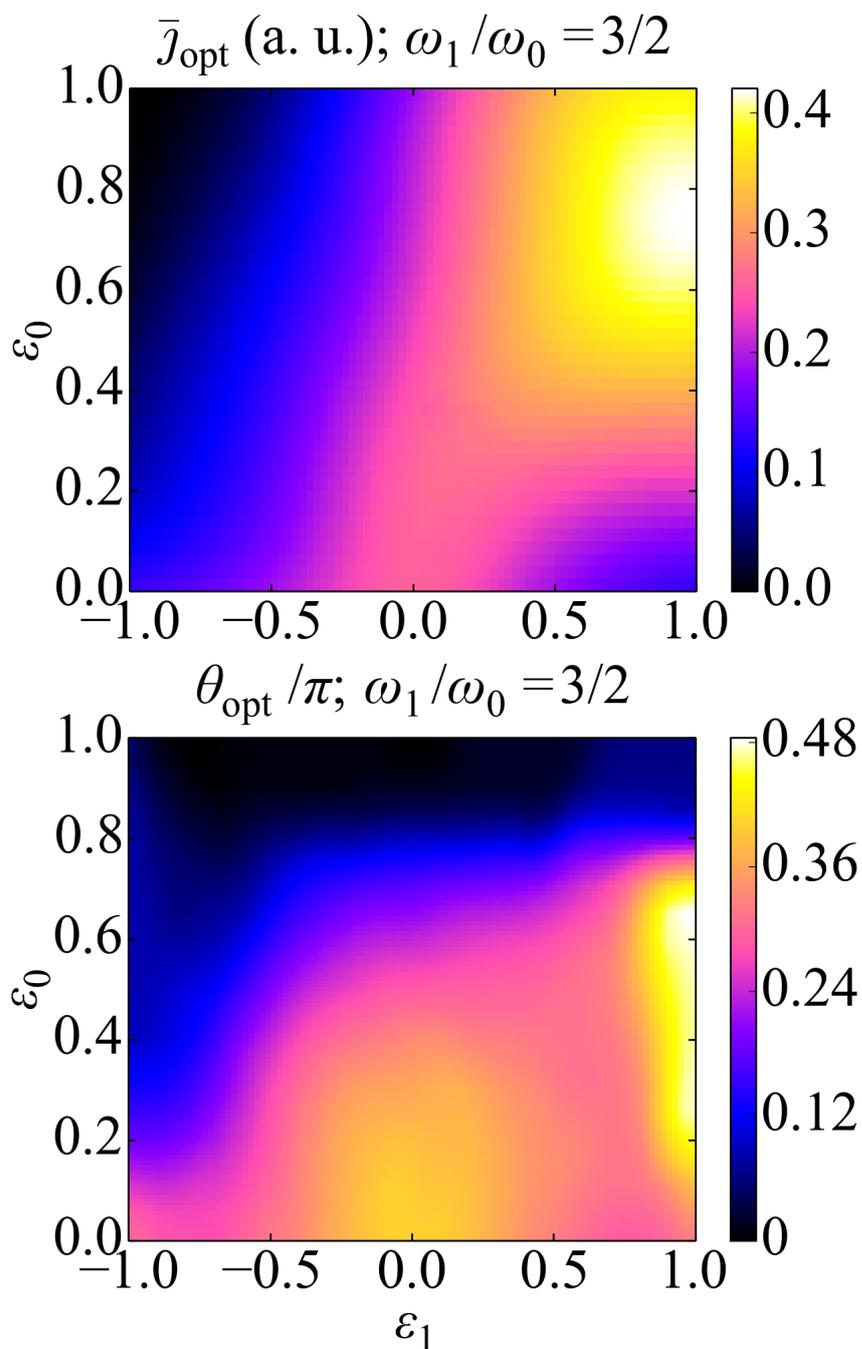


Рисунок 2.7 — Зависимость (верхняя панель) остаточного тока, оптимизированного по сдвигу фаз между компонентами и наклону между главными осями поляризации от эллиптичностей обеих компонент при фиксированных оптимальных интенсивностях для частотного отношения  $\omega_1/\omega_0 = 3/2$ ,  $I_0 = 1.7 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ,  $I_1 = 9 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$  (е)  $\omega_1/\omega_0 = 4$ ,  $I_0 = 2.1 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ,  $I_1 = 3 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$  (нижняя панель) зависимости оптимального наклона между главными осями поляризации компонент  $\theta$  от эллиптичностей при тех же параметрах. Длительность импульсов (FWHM)  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ , длина волны основной компоненты  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

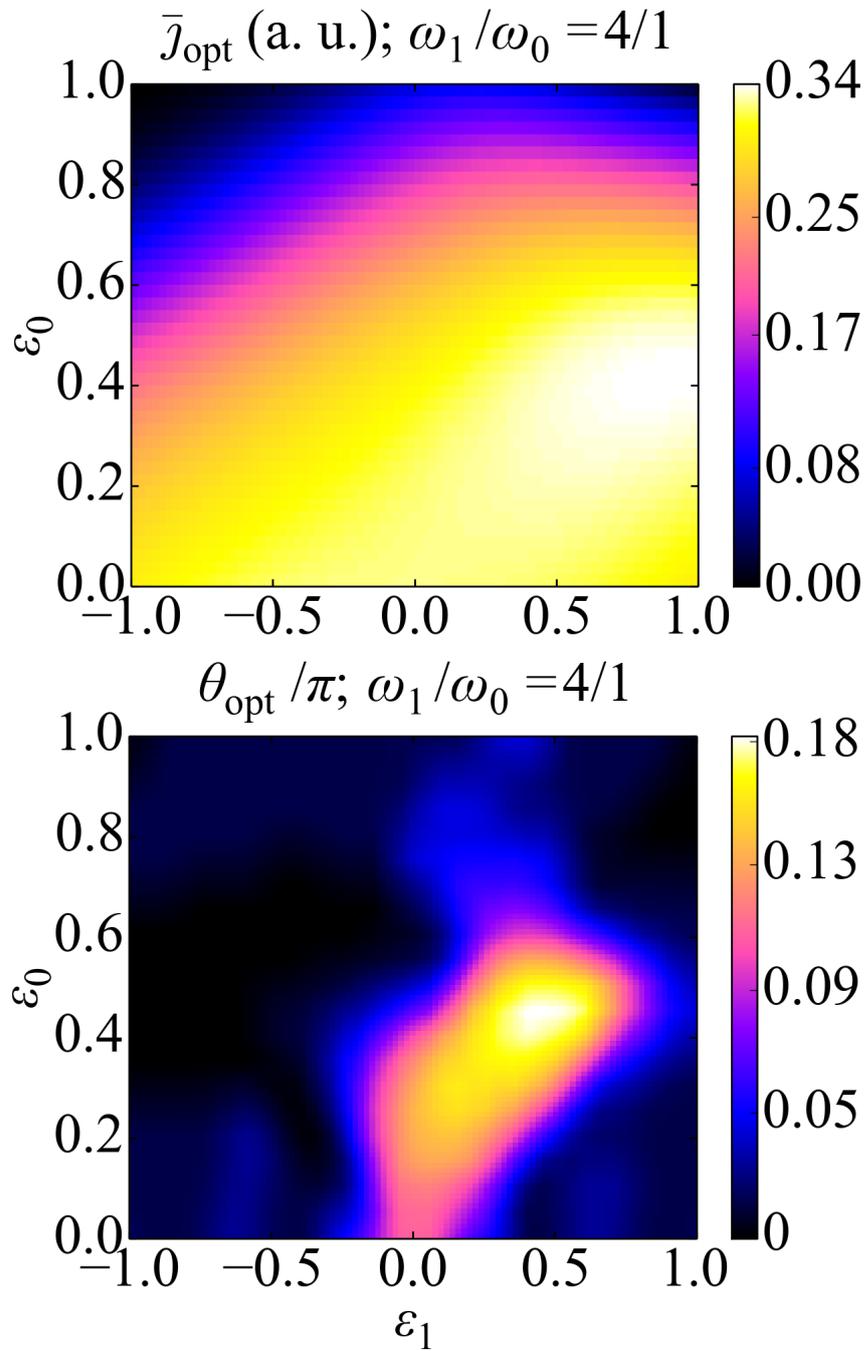


Рисунок 2.8 — Зависимость (верхняя панель) остаточного тока, оптимизированного по сдвигу фаз между компонентами и наклону между главными осями поляризации от эллиптичностей обеих компонент при фиксированных оптимальных интенсивностях для частотного отношения  $\omega_1/\omega_0 = 4$ ,  $I_0 = 2.1 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ,  $I_1 = 3 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$  (нижняя панель) зависимость оптимального наклона между главными осями поляризации компонент  $\theta$  от эллиптичностей при тех же параметрах. Длительность импульсов (FWHM)  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ , длина волны основной компоненты  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

Таблица 1 — Оптимальные параметры компонент ионизирующих импульсов и отношения  $K_{\text{lin,circ}} = \bar{j}_{\text{lin,circ}}/\bar{j}_{\text{opt}}$ , где  $\bar{j}_{\text{lin,circ}}$  - остаточная плотность тока, производимая импульсами с линейными и циркулярными компонентами соответственно, и  $\bar{j}_{\text{opt}}$  производимая импульсами с оптимальными поляризациями компонент, для различных частотных отношений при  $\tau_p = 50$  fs,  $\lambda_0 = 800$  nm.

$\omega_1/\omega_0$	$\varepsilon_{1opt}$	$\varepsilon_{0opt}$	$K_{\text{lin}}$	$K_{\text{circ}}$	$I_{0opt},$ W/cm <sup>2</sup>	$I_{1opt},$ W/cm <sup>2</sup>
4/3	0.97	0.81	0.68	0.93	$1.4 \cdot 10^{14}$	$8 \cdot 10^{13}$
3/2	0.98	0.73	0.61	0.88	$1.7 \cdot 10^{14}$	$9 \cdot 10^{13}$
2/1	0.65	0.94	0.53	0.95	$2.3 \cdot 10^{14}$	$7 \cdot 10^{13}$
5/2	0.89	0.46	0.86	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{14}$	$5 \cdot 10^{13}$
4/1	0.86	0.40	0.96	$8.5 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{14}$	$3 \cdot 10^{13}$

симум зависимости  $\bar{j}$  на данных графиках, таким образом, определяет глобально оптимальные параметры поля в смысле эффективности генерации терагерцового излучения для конкретных частотных отношений).

При изменении длительности импульса и потенциала ионизации газа зависимости, изображенные на рисунках 2.3, 2.4, 2.5 сохраняются с точностью до постоянных множителей при значениях функций и аргументах. Для оптимальных интенсивностей компонент, значения которых приведены в таблице 1 для  $\tau_p = \tau_{p0} = 50$  fs,  $V_i = V_H = 13.6$  eV, в диапазонах  $\tau_p \in [25 \text{ fs}; 800 \text{ fs}]$ ,  $U_i \in [0.5U_H; 2U_H]$  приблизительно справедлива зависимость

$$I_{0,1opt} \approx I_{0,1opt}(1 - 0.3 \ln\{\tau_p/\tau_{p0}\})(V_i/V_H)^{3.6}. \quad (2.4)$$

От  $\lambda_0$  оптимальные интенсивности не зависят (в предположении, что сохраняется туннельный режим ионизации), однако максимальная эффективность генерации имеет скейлинг  $\lambda_0^2$ .

Как видно из рисунков 2.6, 2.7 при  $\omega_1/\omega_0 = 2/1, 3/2$  оптимальные поляризации компонент близки к сонаправленным циркулярным, при этом при противоположно направленных  $\bar{j}$  практически не генерируется. Однако при  $\omega_1/\omega_0 = 4/1$  (рисунок 2.8) циркулярно поляризованные поля в обоих случаях практически не генерируют остаточного тока, при этом использование линейно поляризованных компонент в этом случае дает возможность получить 96% от оптимальной остаточной плотности тока.

Общий случай двухцветного поля с циркулярно поляризованными компонентами, отношение частот которых произвольно, рассмотрен далее. Как будет показано, эффективная генерация остаточной плотности тока при циркулярных поляризациях возможна только при частотных соотношениях вида  $\omega_1/\omega_0 = [a/(a+1)]^{\pm 1}$ , где  $a$  - натуральное число (2/1 и 3/2 удовлетворяют этому условию, а 4/1 нет). Более общее представление о зависимостях  $\bar{J}$  от поляризационных свойств компонент ионизирующего импульса позволяет получить рассмотрение теории возмущений по малому добавочному полю в случае, когда интенсивность одной из компонент (добавочного поля) можно считать малой по сравнению с интенсивностью другой компоненты (основного поля).

На рисунках 2.9, 2.10, 2.11 приведены временные зависимости оптимального двухцветного поля от времени при различных отношениях центральных частот компонент. Ортогональная направлению генерации низкочастотного тока проекция двухцветного поля вносит вклад только в динамику вероятности ионизации (при этом смена знака не повлияет на остаточный ток). Как видно из рисунков, оптимальное поле устроено таким образом, чтобы наибольшей производной поля по направлению генерации остаточного тока также сопутствовала наиболее интенсивная ионизация (максимум модуля поля).

## 2.2 Аналитические решения

### 2.2.1 Теория возмущений по малому добавочному полю в случае произвольных поляризаций компонент ионизирующего импульса

В данном разделе выводятся аналитические выражения для остаточной плотности тока с помощью теории возмущений, параметр  $I_1/I_0$  полагается малым. При этом предполагается, что функция  $w(E)$  такова, что для функции  $W(E^2) \equiv w(E)$  верна формула Тейлора некоторого порядка  $K$ , тогда можно за-

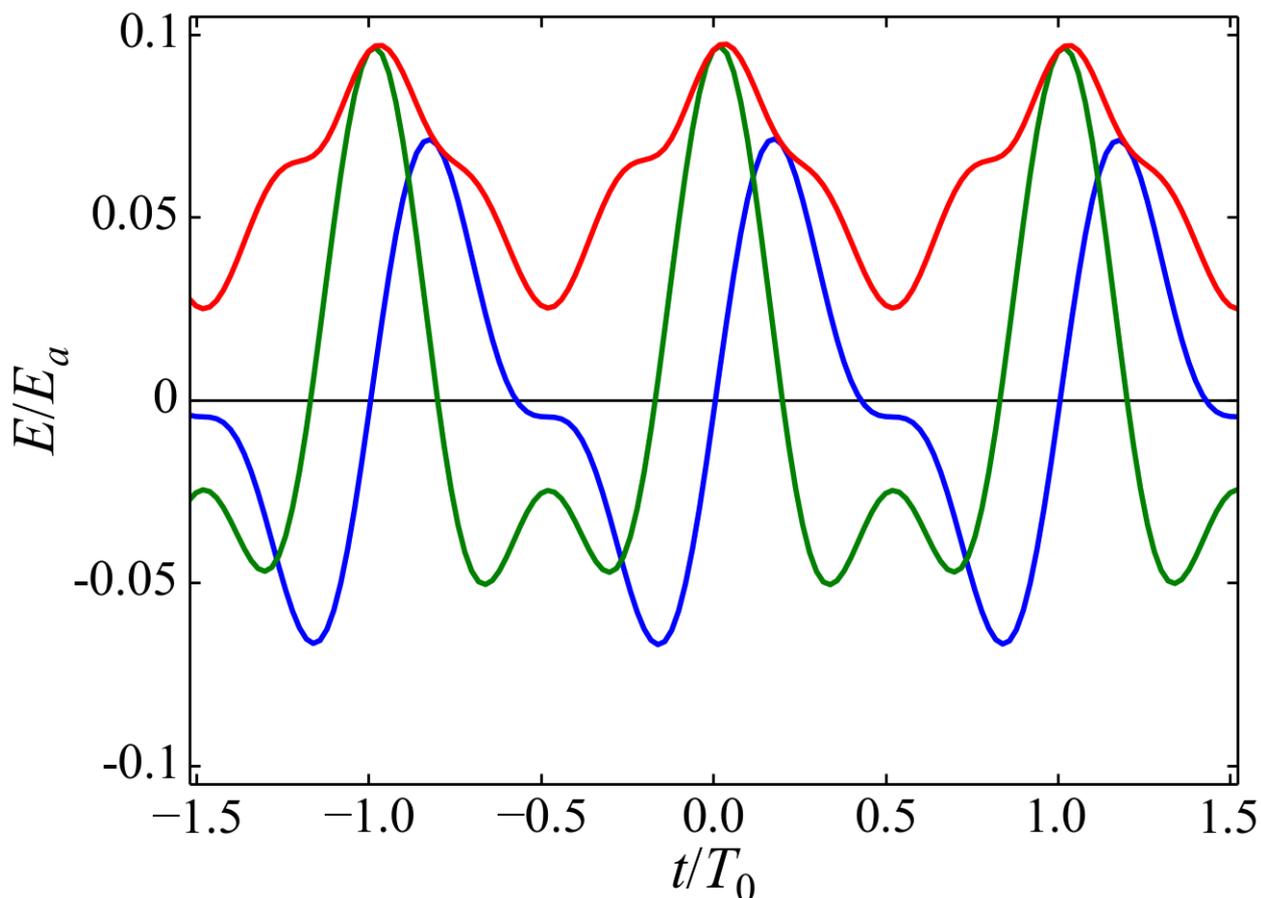


Рисунок 2.9 — Двухцветное поле с оптимальными поляризациями компонент при  $\omega_1/\omega_0 = 2$ ,  $I_0 = 2.3 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ,  $I_1 = 7 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ . Красная кривая соответствует модулю напряженности двухцветного поля, синяя – проекция двухцветного поля на направление  $\bar{j}$  и зеленая – ортогональная направлению  $\bar{j}$  проекция двухцветного поля. Длительность импульса (FWHM)  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ , длина волны основной компоненты  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

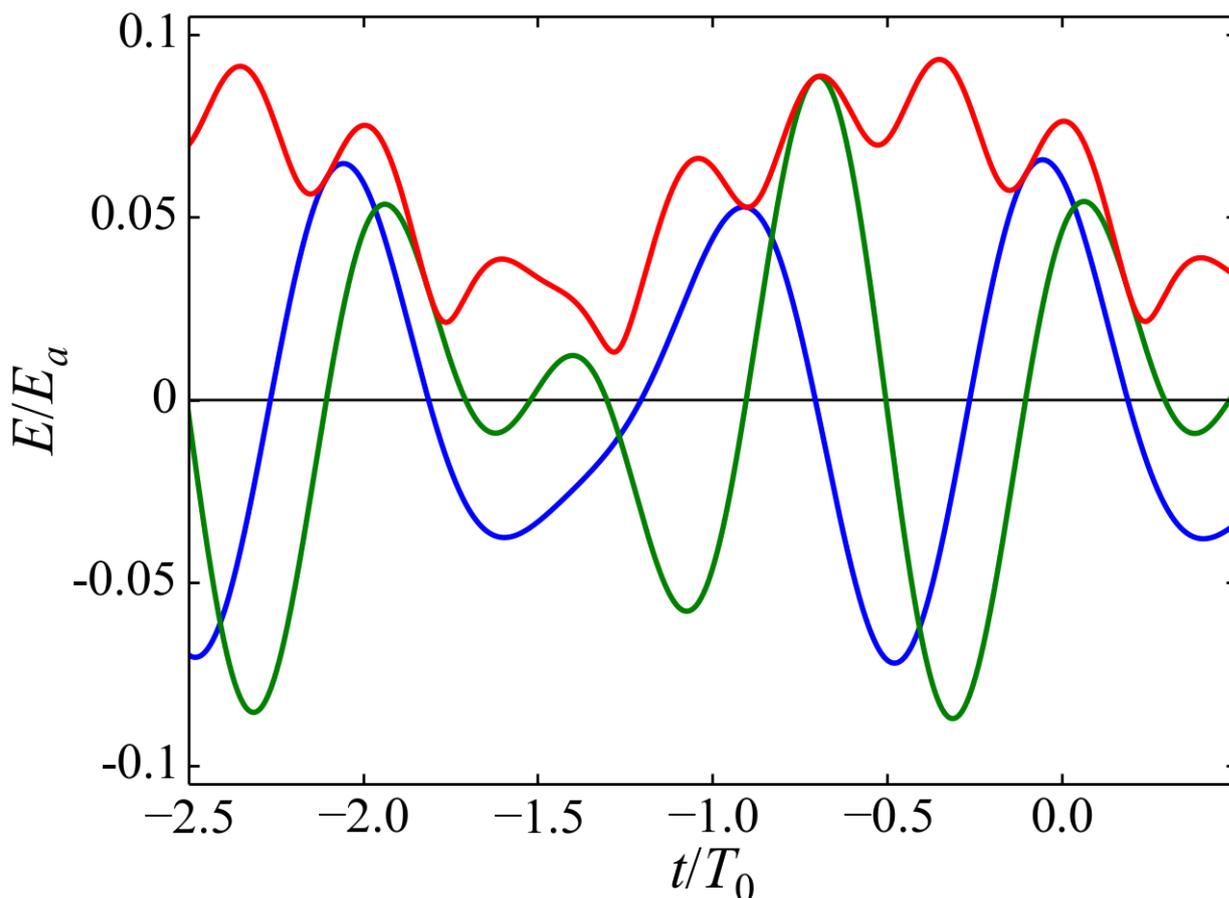


Рисунок 2.10 — Двухцветное поле с оптимальными поляризациями компонент при  $\omega_1/\omega_0 = 3/2$ ,  $I_0 = 1.7 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ,  $I_1 = 9 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ . Красная кривая соответствует модулю напряженности двухцветного поля, синяя – проекция двухцветного поля на направление  $\vec{j}$  и зеленая – ортогональная направлению  $\vec{j}$  проекция двухцветного поля. Длительность импульса (FWHM)  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ , длина волны основной компоненты  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

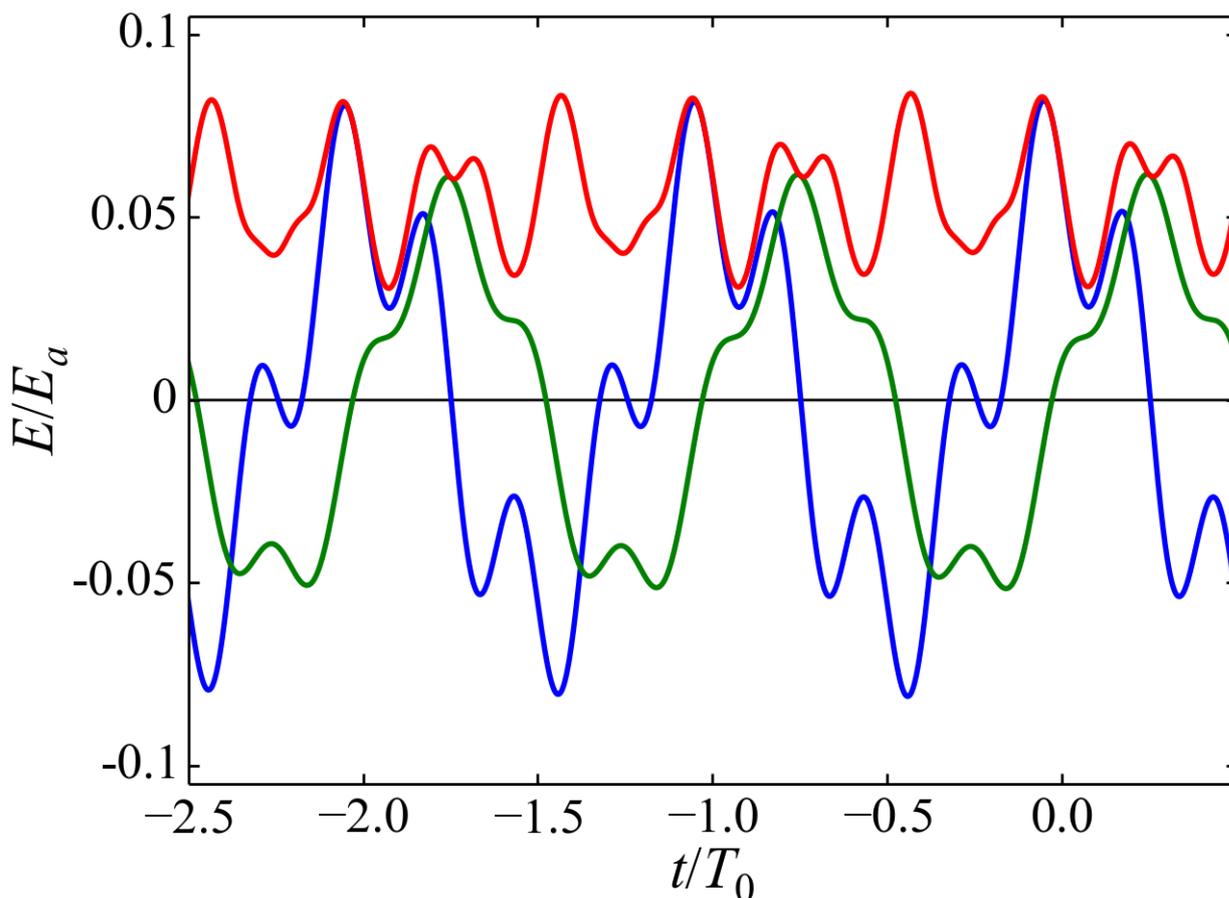


Рисунок 2.11 — Двухцветное поле с оптимальными поляризациями компонент при  $\omega_1/\omega_0 = 4$ ,  $I_0 = 2.1 \cdot 10^{14} \text{ W/cm}^2$ ,  $I_1 = 3 \cdot 10^{13} \text{ W/cm}^2$ . Красная кривая соответствует модулю напряженности двухцветного поля, синяя – проекция двухцветного поля на направление  $\bar{j}$  и зеленая – ортогональная направлению  $\bar{j}$  проекция двухцветного поля. Длительность импульса (FWHM)  $\tau_p = 50 \text{ fs}$ , длина волны основной компоненты  $\lambda_0 = 800 \text{ nm}$ .

писать

$$w(|\mathbf{E}|) = W(\mathbf{E}_0^2) + W'(\mathbf{E}_0^2) (2\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^2) + \dots + \frac{W^{(K)}(\mathbf{E}_0^2)}{K!} (2\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_1^2)^K + \dots \quad (2.5)$$

Обозначим  $w_s(t)$  вклад в вероятность ионизации в порядке теории возмущений по добавочному полю. Выписывая слагаемые в (5) содержащие  $\mathbf{E}_1^s$ , получим

$$w_s = \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \frac{2^{s-2j} W^{(s-j)}(\mathbf{E}_0^2)}{j!(s-2j)!} (\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_1)^{(s-2j)} (\mathbf{E}_1^2)^j. \quad (2.6)$$

Разложим производную  $W^{(j)}(\mathbf{E}_0^2)$  в ряд Фурье на периоде основного поля:

$$W^{(j)}(\mathbf{E}_0^2) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} Q_{jv}(t) e^{iv\omega_0 t}, \quad (2.7)$$

где коэффициенты Фурье определяются выражением

$$\begin{aligned} Q_{jv}(t) &= \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} W^{(j)}[\mathbf{E}_0^2(t')] e^{-iv\omega_0 t'} dt' \\ &\approx \frac{\omega_0 W^{(j)}[\mathcal{E}_0^2(t)]}{2\pi} \int_{t-\pi/\omega_0}^{t+\pi/\omega_0} e^{-\eta(1-\cos 2\omega_0 t')} \cos(v\omega_0 t') dt' \\ &= W^{(j)}(\mathcal{E}_0^2) \exp(-\eta) \mathcal{I}_{v/2}(\eta), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $\mathcal{I}_v$  – модифицированная функция Бесселя первого рода порядка  $v$ ,  $\eta = (1 - \varepsilon_0^2)n_j(\mathcal{E}_0)/4$  – эффективный коэффициент спадаения вероятности ионизации вблизи максимума основного поля,  $n_j(\mathcal{E}_0) = 2\mathcal{E}_0^2 W^{(j+1)}(\mathcal{E}_0^2)/W^{(j)}(\mathcal{E}_0^2) \gg 1$  – резкость вероятности ионизации как функции квадрата поля, конкретно для зависимости  $w(E)$  определяемой выражением (1.29)  $n_0(\mu E_a) = (2 - 3\mu - 36\mu^2)/(3\mu)$  и при  $\mu \ll 1$ ,  $n_j = n_0 - 3j + O(\mu)$ . Далее для простоты будем полагать, что  $n_j \approx n_0 \gg 1$ .

Таким образом,  $w$  представляет собой суперпозицию гармоник,  $w = \sum_{\alpha, \beta} w_{\alpha\beta}(t) e^{i(\alpha\omega_0 + \beta\omega_1)t}$ , где  $w_{\alpha\beta}(t)$  – медленные комплексные амплитуды этих гармоник. При этом  $w_{-\alpha, -\beta} = w_{\alpha\beta}^*$  и без ограничения общности далее можно рассматривать только  $\beta \geq 0$ . Гармоника  $w_{\alpha\beta}$  впервые появляется в порядке  $\beta$  теории возмущений и равна

$$\begin{aligned} w_{\alpha\beta} &= \sum_{j=0}^{\lfloor \beta/2 \rfloor} \sum_k \frac{Q_{\beta-j, \alpha-\beta+2j+2k}}{2^\beta j! k! (\beta - 2j - k)!} \\ &\cdot (\mathbf{A}_0 \cdot \mathbf{A}_1)^{\beta-2j-k} (\mathbf{A}_0^* \cdot \mathbf{A}_1)^k (\mathbf{A}_1^2)^j. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Будем предполагать для простоты, что амплитуды высокочастотных компонент концентрации свободных электронов малы по сравнению с изменением средней концентрации  $\bar{N}$  за период основного поля. Тогда вклады  $N_s$  и  $\mathbf{j}_s$  порядка  $s$  в плотность плазмы и плотность тока соответственно определяются выражениями

$$N_s(t) = (N_m - \bar{N}) \int_{-\infty}^t w_s(t') dt', \quad (2.10)$$

$$\bar{N}(t) = N_m (1 - \exp(-\int_{-\infty}^t \bar{w}(t') dt')), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \frac{e^2}{m} (N_{s-1} \mathbf{E}_1 + N_s \mathbf{E}_0), \quad s \geq 1, \quad (2.12)$$

где  $\bar{w}(t) = Q_{00}(t)$ . В свою очередь в выражение для комбинационных частот производной тока входит несколько гармоник вероятности ионизации:

$$\frac{\partial \mathbf{j}_s}{\partial t} = \sum_{b=0}^s \sum_{a=-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathbf{j}_{ab}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \mathbf{j}_{ab}}{\partial t} = \text{Re} \mathbf{F}_{ab} e^{i\omega_{ab}t}, \quad (2.13)$$

с нечётной суммой  $a + b$ , где  $\omega_{ab} = a\omega_0 + b\omega_1$  и

$$\mathbf{F}_{ab} = \frac{d\bar{N}}{dt} \frac{ie^2}{m\bar{w}} \left( \frac{w_{a-1,b}}{\omega_{a-1,b}} \mathbf{A}_0 + \frac{w_{a+1,b}}{\omega_{a+1,b}} \mathbf{A}_0^* + \frac{w_{a,b-1}}{\omega_{a,b-1}} \mathbf{A}_1 \right), \quad (2.14)$$

т.е. форма огибающей комбинационных компонент производной плотности тока с точностью до константы совпадает с изменением средней концентрации свободных электронов  $d\bar{N}/dt$ , так как отношения  $w_{ab}/\bar{w}$  являются слабыми функциями амплитуды поля, и при интегрировании их можно положить константами, определенными их значениями в точке  $t_0$ , которая может быть найдена из уравнения  $d^2\bar{N}/dt^2(t_0) = 0$ , данный вопрос подробно разобран в третьей главе диссертации. При малой конечной степени ионизации  $\sigma = \bar{N}(t \rightarrow +\infty)/N_m \ll 1$  можно считать, что  $t_0$  совпадает с максимумом огибающей поля, т.е.  $t_0 = 0$ .

Для удобства выпишем в явном виде  $w_{\alpha\beta}/\bar{w}$  для  $\beta = 0, 1, 2$ :

$$w_{2\alpha,0}/\bar{w} = \mathcal{I}_\alpha/\mathcal{I}_0; \quad (2.15)$$

$$w_{2\alpha-1,1}/\bar{w} = \frac{n_0 \mathcal{E}_1 e^{i\varphi}}{4\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0} (\mathcal{I}_{\alpha-1} \mathbf{p}_0 + \mathcal{I}_\alpha \mathbf{p}_0^*) \cdot \mathbf{p}_1; \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}
w_{2\alpha,2}/\bar{w} &= \frac{n_0 \mathcal{E}_1^2 e^{i2\varphi}}{16 \mathcal{E}_0^2 \mathcal{I}_0} \left( \mathcal{I}_\alpha \mathbf{p}_1^2 + \frac{n_0}{4} \left[ \mathcal{I}_{\alpha-1} (\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1)^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \mathcal{I}_\alpha (\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}_1) (\mathbf{p}_0^* \cdot \mathbf{p}_1) + \mathcal{I}_{\alpha+1} (\mathbf{p}_0^* \cdot \mathbf{p}_1)^2 \right] \right) \\
&= \frac{n_0 \mathcal{E}_1^2 e^{i2\varphi}}{16 \mathcal{E}_0^2 \mathcal{I}_0} \left( p_x^2 (\mathcal{I}_\alpha + n_0 [\mathcal{I}_\alpha + \mathcal{I}'_\alpha]/2) + p_y^2 (\mathcal{I}_\alpha \right. \\
&\quad \left. + n_0 \varepsilon_0^2 [\mathcal{I}_\alpha - \mathcal{I}'_\alpha]/2) + i \varepsilon_0 n_0 p_x p_y \mathcal{I}_\alpha \right) \tag{2.17}
\end{aligned}$$

здесь  $\mathbf{p}_0 = \hat{\mathbf{x}} + i \varepsilon_0 \hat{\mathbf{y}}$ ,  $\mathbf{p}_1 = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + i \varepsilon_1 (\cos \theta \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{x}})$  – вектора, характеризующие поляризации компонент лазерного импульса,  $p_{x,y}$  – проекции  $\mathbf{p}_1$  на оси  $x$  и  $y$ ,  $\mathcal{I}_v = \mathcal{I}_v(\eta)$ .

### 2.2.2 Отношения частот вида $2k/1$

Проинтегрировав  $d\mathbf{j}_{-2k,1}/dt$  из (2.13) для случая  $\omega_1 = 2k\omega_0$ , где  $k$  – натуральное число, получаем выражение для остаточной плотности тока:

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{j}} &= \frac{e^2 N_m \sigma \mathcal{I}_k \mathcal{E}_1(t_0)}{2km\omega_0 \mathcal{I}_0 (1 - \varepsilon_0^2)} \text{Im} \left\{ e^{i\varphi} \right. \\
&\quad \cdot \left[ ([4k^2 - 1] p_x - i4k\varepsilon_0 \eta [\mathcal{I}'_k/\mathcal{I}_k - 1] p_y) \hat{\mathbf{x}} \right. \\
&\quad \left. \left. + (i4k\varepsilon_0 \eta [\mathcal{I}'_k/\mathcal{I}_k + 1] p_x + [4\varepsilon_0^2 k^2 + 1] p_y) \hat{\mathbf{y}} \right] \right\}, \tag{2.18}
\end{aligned}$$

здесь  $\mathcal{I}_v = \mathcal{I}_v(\eta(t_0))$  и все остальные функции времени взяты в точке  $t_0$ .

Подставим  $\mathcal{I}'_k/\mathcal{I}_k = k/\eta + \mathcal{I}_{k+1}/\mathcal{I}_k \approx k/\eta + 1 - \delta_{k+1}$ , где  $\delta_k \approx 2k/(\eta + 2k)$  и распишем  $p_x$  и  $p_y$

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{j}} &= \frac{e^2 N_m \sigma \mathcal{I}_k \mathcal{E}_1(t_0)}{2km\omega_0 \mathcal{I}_0 (1 - \varepsilon_0^2)} \text{Im} \{ e^{i\varphi} \mathbf{B}(\theta, \eta, \varepsilon_0, \varepsilon_1) \}; \\
B_x &= \cos \theta \{ [4k^2 - 1] + 4k\varepsilon_0 \varepsilon_1 [k - \eta \delta_{k+1}] \} \\
&\quad - i \sin \theta \{ 4k\varepsilon_0 [k - \eta \delta_{k+1}] + \varepsilon_1 [4k^2 - 1] \}; \\
B_y &= \sin \theta \{ 4k\varepsilon_0 \varepsilon_1 [k + 2\eta] + [4\varepsilon_0^2 k^2 - 1] \} \\
&\quad + i \cos \theta \{ 4k\varepsilon_0 [k + 2\eta] + \varepsilon_1 [4\varepsilon_0^2 k^2 - 1] \}. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

При  $\eta \rightarrow 0$  (что соответствует  $\varepsilon_0 \rightarrow 1$ ) выражение (17) упрощается в силу того, что при  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{I}_k(\eta) \approx (\eta/2)^k/k!$ , и главный член разложения по  $\eta$

$$\bar{\mathbf{J}}_{\text{circ}} = \frac{e^2 k n_0 N_m \sigma \mathcal{E}_1(t_0) (1 + \varepsilon_1) \eta^{k-1}}{2m\omega_0} \frac{\eta^{k-1}}{2^k k!} \cdot \text{Im}\{e^{i(\varphi-\theta)}(\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})\}, \quad (2.20)$$

отсюда, например, видно, что эффективная генерация возможна только при  $k = 1$  и при этом невозможна при противоположно направленных циркулярных поляризациях компонент ионизирующего импульса.

При линейных поляризациях  $\eta = n_0/4 \gg 1$ , так что можно воспользоваться приближением при  $\eta \rightarrow +\infty$ ,  $\mathcal{I}_k(\eta)/\mathcal{I}_0(\eta) = 1 - k^2/2\eta + \dots \approx \exp(-k^2/2\eta)$ ,

$$\bar{\mathbf{J}}_{\text{lin}} = \frac{e^2 N_m \sigma \mathcal{E}_1(t_0)}{2km\omega_0} \exp\left(-\frac{2k^2}{n_0}\right) \cdot ([4k^2 - 1] \cos \theta \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) \sin \varphi, \quad (2.21)$$

откуда следует, что при ортогональных линейных поляризациях компонент ионизирующего импульса ( $\theta = \pi/2$ ) остаточный ток направлен вдоль оси поляризации добавочного поля, что согласуется с результатами, полученными экспериментально в работе [24].

Мы можем сравнить остаточную плотность тока при  $\sigma \rightarrow 1$  и фиксированных интенсивностях компонент при различных поляризациях компонент для добавочной второй гармоники (т.к. только при  $a = 2$  есть RCD при циркулярной поляризации основной компоненты). Обозначим остаточные плотности тока  $\bar{j}_\circ$  при циркулярных сонаправленных поляризациях обеих компонент,  $\bar{j}_{\circ|}$  при циркулярной поляризации основной компоненты и линейной поляризации добавочной,  $\bar{j}_\parallel$  при коллинеарных линейных поляризациях компонент и  $\bar{j}_\perp$  при ортогональных линейных поляризациях обеих компонент. Их отношения приближенно выражаются как  $\bar{j}_\perp : \bar{j}_\parallel : \bar{j}_{\circ|} : \bar{j}_\circ = 1 : 3 : n_0(t_0)/\sqrt{2} : n_0(t_0)$ . При  $a \neq 2$  можем найти  $\bar{j}_\perp : \bar{j}_\parallel = 1 : (a^2 - 1)$ .

### 2.2.3 Отношения частот вида $(2k-1)/2$

При  $2\omega_1 = (2k - 1)\omega_0$ , где  $k$  – натуральное число, выражение для остаточной плотности тока существенно усложняется,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}} = & \frac{e^2 N_m n_0 \sigma \mathcal{E}_1^2(t_0)}{32m\omega_0 \mathcal{I}_0 \mathcal{E}_0(t_0) (2k-1)(1-\varepsilon_0^2)} \text{Im} \left\{ e^{i2\varphi} \right. \\ & \left[ p_x^2 \left( \mathcal{I}_{k-1} [(2k-1)^2 - 4 - \varepsilon_0^2(2k-5)] + \mathcal{I}_k [(2k-1)^2 - 4 + \varepsilon_0^2(2k+3)] \right) \right. \\ & + p_y^2 \varepsilon_0^2 (2k-1) \left( \mathcal{I}_{k-1} [4\eta + 3 - \varepsilon_0^2 - 2k] - \mathcal{I}_k [4\eta + 1 - \varepsilon_0^2 + 2k] \right) \\ & \left. + i4p_x p_y \varepsilon_0 (\mathcal{I}_{k-1} - \mathcal{I}_k) \left( \eta(2k-1) - 1 + \varepsilon_0^2 \right) \right] \mathbf{\hat{x}} \\ & - \left[ p_x^2 i \varepsilon_0 (2k-1) \left( (4\eta - 2k + 1 - \varepsilon_0^2) \mathcal{I}_k + (4\eta + 2k - 1 - \varepsilon_0^2) \mathcal{I}_{k-1} \right) \right. \\ & + p_y^2 i \varepsilon_0 \left( (2k-1)(\mathcal{I}_{k-1} + \mathcal{I}_k) + (\varepsilon_0^2 [(2k-1)^2 + 4] - 4)(\mathcal{I}_k - \mathcal{I}_{k-1}) \right) \\ & \left. + 2p_x p_y \left( (\mathcal{I}_{k-1} - \mathcal{I}_k) \left( \varepsilon_0^2 \eta(2k-1) - 1 + \varepsilon_0^2 \right) \right) \right] \mathbf{\hat{y}} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Подставим  $\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_{k-1}(1 - \delta_k)$ :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}} = & \frac{e^2 N_m n_0 \sigma \mathcal{E}_1^2(t_0) \mathcal{I}_{k-1}}{32m\omega_0 \mathcal{I}_0 \mathcal{E}_0(t_0) \eta} \text{Im} \left\{ e^{i2\varphi} \right. \\ & \left[ p_x^2 \left( n_0(2k-1 - k\delta_k) + 2\eta\delta_k + 8\eta(2 - \delta_k)/(2k-1) \right) + p_y^2 \left( \varepsilon_0^2 n_0(-2k+1 \right. \right. \\ & \left. \left. + [2\eta + k]\delta_k) + 2\eta\delta_k \right) + ip_x p_y \varepsilon_0 \left( n_0(-1 + k\delta_k) + 8\eta\delta_k/(2k-1) \right) \right] \mathbf{\hat{x}} \\ & + \left[ p_x^2 i \varepsilon_0 \left( n_0(2\eta + 1 - [2\eta + k]\delta_k) + 2\eta(2 - \delta_k) \right) + p_y^2 i \varepsilon_0 \left( \varepsilon_0^2 n_0(1 - k\delta_k) + 2\eta(2 - \delta_k) \right. \right. \\ & \left. \left. + 8\eta\delta_k/(2k-1) \right) + p_x p_y \left( in_0 \varepsilon_0^2 (2k-1 - k\delta_k) + 8\eta(2 - \delta_k)/(2k-1) \right) \right] \mathbf{\hat{y}} \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

При линейных поляризациях компонент ионизирующего импульса получается выражение

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}_{\text{lin}} = & \frac{e^2 N_m n_0 \sigma \mathcal{E}_1^2(t_0)}{8m\omega_0 \mathcal{E}_0(t_0)} \exp\left(-\frac{2k^2}{n_0}\right) \left( \left[ \frac{2k-1}{n_0} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(2k-1)^2 - 4}{2k-1} \cos^2 \theta \right] \mathbf{\hat{x}} - \frac{4}{2k-1} \sin \theta \cos \theta \mathbf{\hat{y}} \right) \sin 2\varphi. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Как видно, в данном случае при ортогональных поляризациях направление остаточного тока будет совпадать с направлением основного поля, а не добавочного, при этом  $\bar{j}_{\perp 0} : \bar{j}_{\parallel} = 1 : n_0(a^2 - 4)/a^2$ .

При  $k > 1$  и  $\eta \rightarrow 0$  главный член разложения по  $\eta$

$$\bar{\mathbf{J}}_{\text{circ}} = \frac{e^2 N_m n_0^2 \sigma \mathcal{E}_1^2(t_0) (k-1) (1 + \varepsilon_1)^2}{32 m \omega_0 \mathcal{I}_0 \mathcal{E}_0(t_0)} \frac{\eta^{k-2}}{2^{k-1} (k-1)!} \cdot \text{Im}\{e^{i2(\varphi-\theta)} (\mathbf{x} + i\mathbf{y})\}, \quad (2.25)$$

При  $k = 1$  и  $\eta \rightarrow 0$  выражение (2.25) зануляется из-за множителя  $(k-1)$ , и главным членом становится

$$\bar{\mathbf{J}}_{\text{circ}} = \frac{e^2 N_m n_0^2 \sigma \mathcal{E}_1^2(t_0)}{32 m \omega_0 \mathcal{I}_0 \mathcal{E}_0(t_0)} \text{Im}\{(\mathbf{p}_0^* \cdot \mathbf{p}_1)^2 \mathbf{p}_0\}. \quad (2.26)$$

При остальных значениях  $k$  эффективная генерация в этом случае отсутствует.

## 2.2.4 Законы подобия

Анализируя выражения (2.18, 2.22) можно сформулировать несколько законов подобия для параметров  $\omega_0$ ,  $\tau_p$ , зафиксированных в данной работе в разделе с численными расчетами, а также привести соображения, обобщающие результаты на случай произвольного выбора ионизируемой среды.

Так, зависимость

$$\bar{j}(\omega_0) \propto \omega_0^{-1} \quad (2.27)$$

при фиксированных остальных параметрах обусловлена тем, что амплитуды гармоник  $w_{ab}$  не зависят от частоты, и данный множитель появляется при интегрировании их по времени.

Зависимость от  $\tau_p$  при точном синхронизме (в случае, когда отношение частот компонент лазерного импульса в точности соответствует рациональной дроби) проявляется только в степени ионизации

$$\bar{j}(\tau_p) \propto \sigma(\tau_p) \approx 1 - \exp\left[-\frac{\bar{w}\tau_p}{2\sqrt{\pi n_0 \ln 2}}\right]. \quad (2.28)$$

При малых степенях ионизации она линейна, далее существенно замедляется. При наличии частотной отстройки ширина пика зависимости  $\bar{j}$  от частоты обратно пропорциональна длительности импульса. Стоит отметить, что выражения (2.27) и (2.28) справедливы при  $\omega_0\tau_p \gg 1$ , т.е. когда ионизирующий импульс нельзя считать малоцикловым.

Вероятность ионизации ионов и атомов с потенциалом ионизации  $V_i$ , отличным от потенциала ионизации водорода  $V_H$  имеет экспоненциальный множитель [73]  $w(\kappa, E) \propto \exp(-2E_a\kappa^3/3E)$ , где  $\kappa = \sqrt{V_i/V_H}$ . Следовательно существует приближенный закон подобия  $w(\kappa, [\kappa^3 + \delta]E) = w(1, E)$ , где  $\delta$  - малая поправка, связанная с предэкспоненциальным фактором в зависимости вероятности ионизации от поля, и в свою очередь для остаточного тока можно получить приблизительный закон подобия

$$\bar{j}(\kappa, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1) \approx \bar{j}_H(\mathbf{A}_0/[\kappa^3 + \delta], \mathbf{A}_1/[\kappa^3 + \delta])\kappa^3, \quad (2.29)$$

обусловленный тем, что при смене газа приведенная замена амплитуд полей приводит к сохранению динамики генерации свободных электронов  $N(t)$ . Например при  $w(\kappa, E) = C_0\kappa^2(\kappa^3 E_a/E)^{C_1} \exp(-2\kappa^3 E_a/3E)$  поправка принимает вид  $\delta \approx -6 \ln(\kappa)\kappa^3 E_{\max}/(2E_a - 3C_1 E_{\max})$ , где  $E_{\max}$  - максимальное значение модуля поля.

## 2.2.5 Возбуждение остаточного тока двухцветными импульсами с циркулярно поляризованными компонентами

В случае циркулярной поляризации поле лазерного импульса принимает вид

$$\mathbf{E}(t) = \text{Re}\{[e^{i\omega_0 t}\mathcal{E}_0(t) + e^{i\omega_1 t+i\varphi}\mathcal{E}_1(t)][\mathbf{A} + i\mathbf{y}]\}, \quad (2.30)$$

а квадрат модуля поля выглядит следующим образом:

$$|\mathbf{E}|^2(t) = \mathcal{E}_0^2 + \mathcal{E}_1^2 + 2\mathcal{E}_0\mathcal{E}_1 \cos [(\omega_1 - \omega_0)t + \varphi]. \quad (2.31)$$

Вероятность ионизации будет представлять собой суперпозицию гармоник  $\omega_N = \omega_1 - \omega_0$ ,

$$W(|\mathbf{E}|^2(t)) = \sum_{l=0}^{+\infty} W_v \cos[v(\omega_N t + \varphi)], \quad (2.32)$$

а амплитуды гармоник выглядят следующим образом:

$$W_v = w(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1) \exp(-\eta_c) \mathcal{I}_v(\eta_c), \quad (2.33)$$

где  $\eta_c = 2n_0\mathcal{E}_0\mathcal{E}_1/(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1)^2$  – эффективный коэффициент спадания вероятности ионизации в случае циркулярных компонент поля,  $n_0 = n_0(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1)$ . В случае  $\eta_c \ll 1$ , то есть когда амплитуда одной из компонент много меньше амплитуды другой (для определенности  $\mathcal{E}_1 \ll \mathcal{E}_0/n_0$ ), амплитуды гармоник вероятности ионизации приближенно выражаются как  $W_v \approx w(\mathcal{E}_0)(n_0\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_0)^v/v!$ . В случае сравнимых по величине амплитуд компонент ионизирующего импульса ( $n_0\mathcal{E}_0 \gg \mathcal{E}_1 \gg \mathcal{E}_0/n_0$ ) амплитуды гармоник выражаются как  $W_v \approx w(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1) \exp(-2v^2/\eta_c)(2\pi\eta_c)^{-1/2}$ .

Из (2.32) следует, что генерация низкочастотного тока возможна в том случае, если какая-либо из гармоник  $\omega_N$  близка к  $\omega_0$  или  $\omega_1$ . Пусть  $a\omega_N = \omega_0$ , тогда  $(a+1)\omega_n = \omega_1$ , следовательно генерация низкочастотного тока при циркулярных поляризациях компонент ионизирующего импульса возможна только при соотношениях частот близких к  $a/(a+1)$ . Соответственно выражение для производной низкочастотного тока выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{j}_{\text{lf}}}{dt} = & \frac{e^2 N_m}{m} \left( \frac{W_a}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + a\varphi) \mathbf{E}_0 + \right. \\ & \left. + \frac{W_{a+1}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t + [a+1]\varphi) \mathbf{E}_1 \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Проинтегрировав (2.33) по времени получаем выражение для остаточного тока:

$$\bar{\mathbf{J}} = \frac{e^2 N_m \sigma}{m \omega_0 \mathcal{I}_0} K_a \text{Re} \{ e^{ia\varphi} [\mathbf{X} + i\mathbf{Y}] \}, \quad (2.35)$$

где  $K_a = [\mathcal{I}_a \mathcal{E}_0(t_0) + a\mathcal{I}_{a+1} \mathcal{E}_1(t_0)/(a+1)]/2$  – коэффициент, зависящий от отношения частот,  $\mathcal{I}_v = \mathcal{I}_v(\eta_c(t_0))$ .

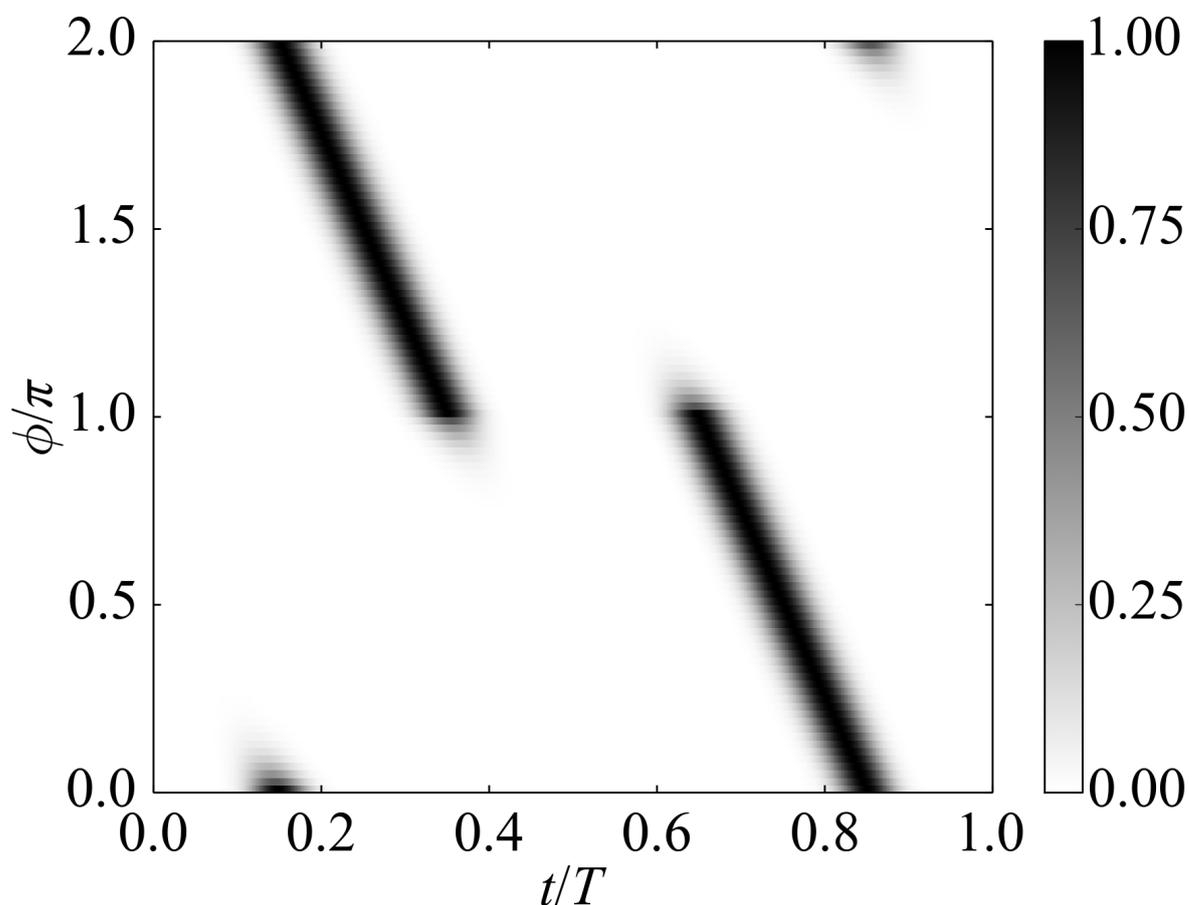


Рисунок 2.12 — Зависимость нормированной на максимальное значение при данной фазе  $\phi$  вероятности ионизации от времени и фазы на наименьшем общем периоде компонент ионизирующего поля при  $a = 1, b = 2, I_0 = I_1 = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>.

### 2.2.6 Возбуждение остаточного тока при сопоставимых интенсивностях компонент ионизирующего импульса

В случае точного соответствия отношения частот компонент ионизирующего импульса рациональной дроби с небольшой нечетной суммой числителя и знаменателя  $\omega_1/\omega_0 = a/b$ , несущая двухцветного поля также является периодической, мы можем ввести обозначение  $\omega = \omega_1/a = \omega_0/b$  и  $T = 2\pi/\omega$  — наименьший общий период поля двухцветного импульса. При сравнимых интен-

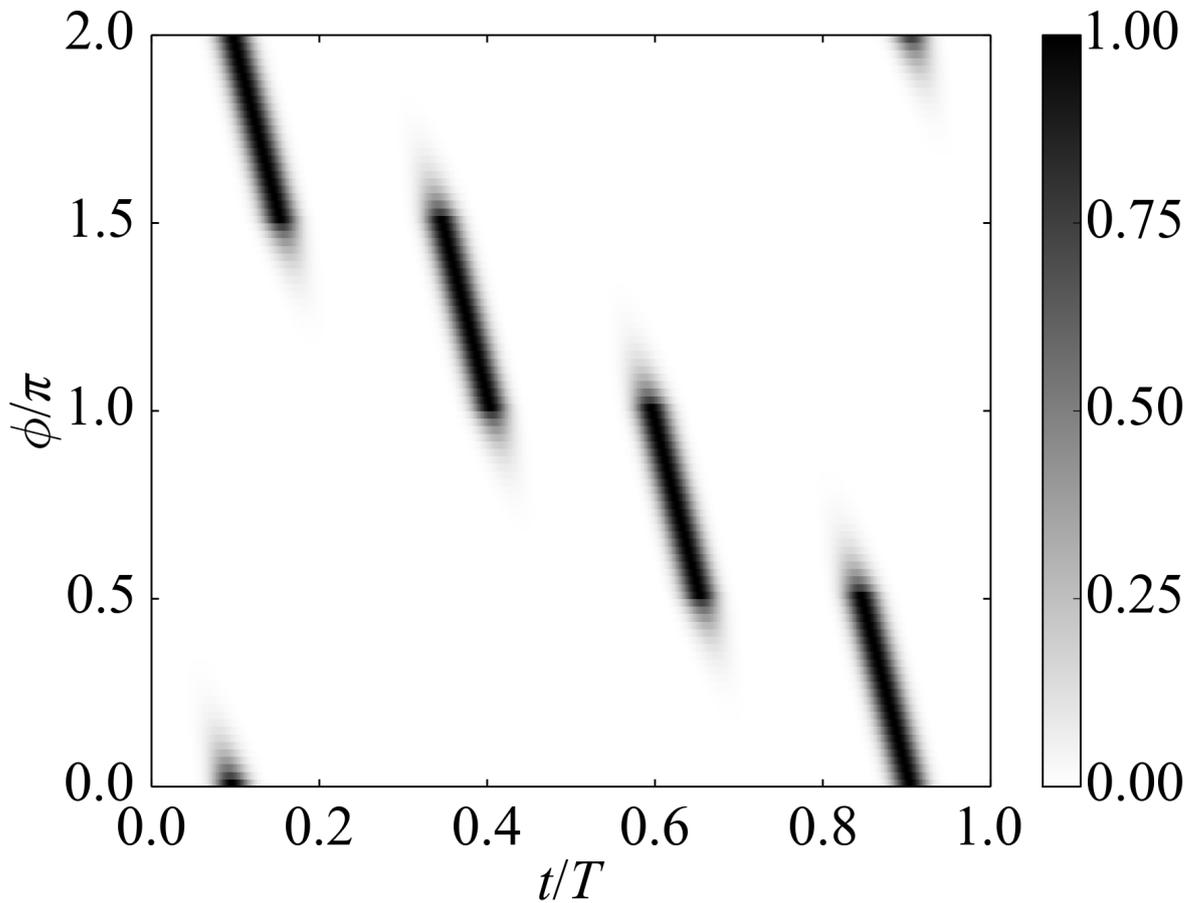


Рисунок 2.13 — Зависимость нормированной на максимальное значение при данной фазе  $\varphi$  вероятности ионизации от времени и фазы на наименьшем общем периоде компонент ионизирующего поля при  $a = 2, b = 3, I_0 = I_1 = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>.

СИВНОСТЯХ КОМПОНЕНТ

$$w(\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1) \gg w(\mathcal{E}_0), w(\mathcal{E}_1), \quad (2.36)$$

вероятность ионизации на периоде  $T$  будет иметь от одного до двух выраженных пиков (на рисунках 2.12, 2.13, 2.14 изображены пики  $w(t)$ , полученные при использовании линейно поляризованных компонент ионизирующего импульса равными интенсивностями, нормированные на максимальные значения  $w(t)$  при данной фазе, как видно из рисунков, при любом фиксированном сдвиге фаз может быть один выраженный пик, если сдвиг фаз  $\varphi$  не близок к  $\pi j/a$ , в случае точного равенства  $\varphi = \pi j/a$  существует два равных между собой пика), каждый из которых может быть приближенно описан следующим образом:

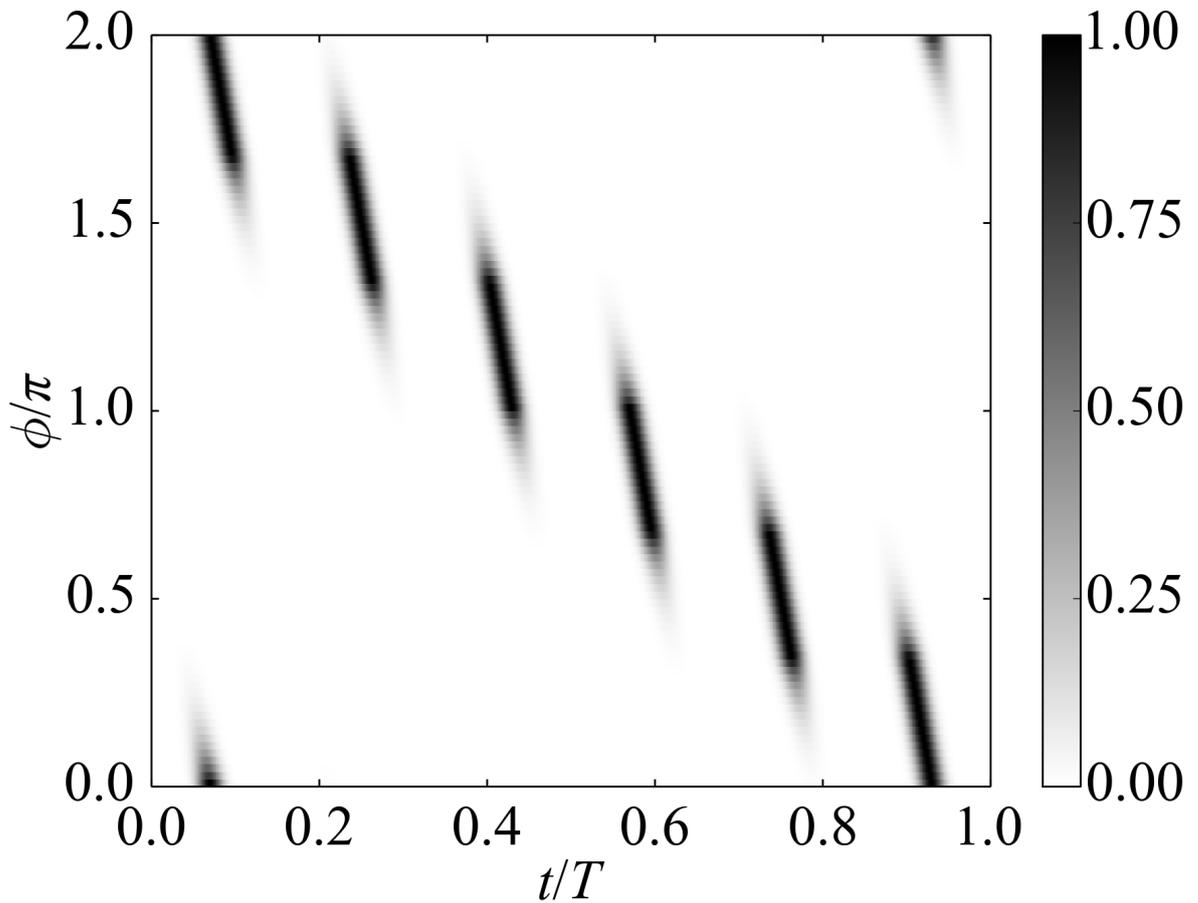


Рисунок 2.14 — Зависимость нормированной на максимальное значение при данной фазе  $\varphi$  вероятности ионизации от времени и фазы на наименьшем общем периоде компонент ионизирующего поля при  $a = 3, b = 4, I_0 = I_1 = 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>.

$$w(t) = \sum_{j=0}^{2a-1} w_j(t)$$

$$w_j(t) \approx w(X_j) \exp\left(-\frac{n_0 \omega^2 C_j}{2X_j} \left[t - \frac{Bb\varphi_j}{\omega C_j}\right]^2\right) \quad (2.37)$$

где  $C_j = (\mathcal{E}_0 a^2 + \mathcal{E}_1 b^2)$ ,  $X_j \approx \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 - \frac{\mathcal{E}_0 a^2 \mathcal{E}_1 \varphi_j^2}{2C_j}$  — величина максимума поля пика  $j$ , найденная из решения квадратного уравнения, получающегося при разложении косинусов несущих компонент полей вблизи максимумов,  $\varphi_j = \varphi - j\pi/a$  — эффективный сдвиг фаз для  $j$  пика. Каждый пик вероятности ионизации разложим по гармоникам  $\omega$  (по аналогии с (2.7)):

$$\begin{aligned}
w_j(t) &\approx w(X_j) \sqrt{2\pi X_j / n_0 \omega^2 C_j} \sum_{l=0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{l^2 X_j}{2n_0 C_j}\right) \cos(l\omega[t - t_j]) = \\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} \operatorname{Re}\{K_{jl} e^{il\omega t}\}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

где  $t_j = \mathcal{E}_1 b \varphi_j / \omega C_j$  – сдвиг максимума пика с номером  $j$ ,  $K_{jl}$  – комплексная огибающая гармоники  $l$  пика с номером  $j$ . Существенный вклад в ионизацию будут вносить только пики с  $j_0 = [a\varphi/\pi]$ ,  $j_1 = [a\varphi/\pi] + 1$  (при выполнении условия (2.36) все остальные будут намного меньше). С учетом этого факта выражение для низкочастотной плотности тока приобретает вид

$$dj/dt = \operatorname{Re}\left\{\mathcal{E}_0 \frac{K_{j_0 a} + K_{j_1 a}}{ia\omega} + \mathcal{E}_1 e^{i\varphi} \frac{K_{j_0 b} + K_{j_1 b}}{ib\omega}\right\} \tag{2.39}$$

Полученное выражение (2.39) останется верным и при более точном решении задачи о нахождении максимума поля, изменятся только выражения для входящих в него параметров  $X_j$  и  $C_j$ .

## 2.3 Выводы к главе 2

Проанализированы зависимости остаточной плотности тока свободных электронов, генерируемой под действием двухцветных ионизирующих лазерных импульсов с произвольными поляризациями компонент, от параметров этих ионизирующих импульсов, при различных рациональных отношениях центральных частот компонент. Показано, что в общем случае двухцветные импульсы с линейно поляризованными компонентами не являются оптимальными в смысле эффективности генерации терагерцового излучения. Найдены параметры компонент, а именно интенсивности, эллиптичности, угол между главными осями эллипсов поляризации и сдвиг фаз между несущими компонент двухцветных ионизирующих импульсов с отношениями частот 2/1, 4/1, 3/2, 5/2 и 4/3, соответствующие максимально возможной эффективности генерации, также приведены законы подобия, позволяющие рассчитать данные параметры для импульсов с произвольной длительностью и длиной волны основной компоненты, а также для случая произвольного ионизируемого газа. Показано, что при отношениях

частот, выражаемых рациональной дробью, числитель и знаменатель которой отличаются друг от друга на единицу, возможна генерация остаточной плотности тока при использовании сонаправленных циркулярно поляризованных компонент ионизирующего импульса, при этом эффективность генерации остаточной плотности тока в этом случае оказывается близкой к максимальной. При остальных отношениях частот компонент, таких как  $4/1$ , генерация при использовании обеих циркулярно поляризованных компонент отсутствует, и при этом эффективность, достигаемая при использовании линейно поляризованных компонент близка к максимально возможной. Получены аналитические выражения для остаточной плотности тока, возбуждаемой двухцветными импульсами с произвольными поляризациями квазимонохроматических компонент, при условии малости интенсивности одной из компонент ионизирующего импульса по сравнению с интенсивностью другой компоненты. Получены аналитические выражения для остаточной плотности тока, возбуждаемой ионизирующими импульсами с сонаправленными циркулярными поляризациями компонент при произвольном отношении интенсивностей и частот компонент. Показано, что при противоположно направленных циркулярных поляризациях компонент ионизирующего импульса генерация остаточной плотности тока отсутствует при любых отношениях частот компонент.

# Глава 3. Генерация ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне частот

В данной главе рассматриваются характеристики компонент производной тока свободных электронов в среднем инфракрасном диапазоне частот, возникающих под действием двухцветных ионизирующих фемтосекундных импульсов.

## 3.1 Расчет длительности и энергии генерируемого импульса низкочастотного тока

В данном разделе проводится аналитическое и численное исследование формы огибающей низкочастотных компонент производной плотности тока при различных формах огибающей, длительностях и энергиях основной компоненты двухцветного ионизирующего импульса, а также проводится оценка эффективности генерации низкочастотного излучения. Поле ионизирующего импульса в данном разделе задается выражением (1.3).

Волновая форма низкочастотной компоненты производной тока  $d\mathbf{j}_{LF}/dt$  на частоте отстройки  $\Delta\omega = b\omega_1 - a\omega_0$  описывается выражением (1.22), которое с учетом (1.8) удобно переписать в виде

$$\frac{dj_b^{\Delta\omega}}{dt} = g \frac{e^2 \mathcal{E}_0}{m\omega_0} \frac{d\bar{N}}{dt} \left( \frac{n_0 \mathcal{E}_1}{2\mathcal{E}_0} \right)^b \sin(\Delta\omega t + b\varphi), \quad (3.1)$$

где

$$g = \frac{2}{b!} \exp\left(-\frac{a^2}{2n_0}\right) \left(\frac{a^2 - b^2}{n_0 a} - \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right). \quad (3.2)$$

Форма огибающей импульса (3.1) определяется преимущественно множителем  $d\bar{N}/dt$ , все остальные множители гораздо слабее зависят от времени при  $n_0 \gg 1$ .

При малых конечных степенях ионизации в уравнении (1.8) можно положить  $N_g - \bar{N} \approx N_g$ , в этом случае максимум импульса низкочастотного тока и его ширина будут совпадать с максимумом и шириной  $\bar{w}(t)$ , а именно  $t_0 = 0, \tau_w =$

$\tau/\sqrt{n_0}$ . Рассмотрим более общий случай, когда конечная степень ионизации произвольна. Тогда условие максимума  $d\bar{N}/dt$  можно записать как:

$$\bar{N}'' = (N_g - \bar{N})(\bar{w}' - \bar{w}^2) = 0, \quad (3.3)$$

здесь ' означает производную по времени ( $x' = dx/dt$ ). Обозначим  $\mathcal{E}_0(t) = E_m f(t)$ , где  $E_m = \max \mathcal{E}_0 = \sqrt{8\pi I_0/c}$  и подставим  $\bar{w}'(\mathcal{E}_0(t)) \approx n_0 \bar{w} f'/f$  в (3.3) можно переписать условие на  $t_0$ :

$$\frac{f'}{f}(t_0) = \frac{\bar{w}}{n_0}(\mathcal{E}_0(t_0)). \quad (3.4)$$

Левая часть выражения (3.4) не зависит от пиковой интенсивности основной компоненты ионизирующего импульса, только от формы огибающей. При этом ширину генерируемого импульса низкочастотного тока можно определить как

$$\tau_i = \left( -\frac{\bar{N}'''(t_0)}{\bar{N}'(t_0)} \right)^{-1/2} = \left( \frac{n_0 f''}{f} - \frac{n_0^2 f'^2}{f^2} \right)^{-1/2}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим три типа огибающих:

$$f_0(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{2\tau^2}\right); \quad (3.6)$$

$$f_1(t) = \cosh^{-1}\left(\frac{t}{\tau}\right); \quad (3.7)$$

$$f_2(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2\tau^2}\right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Здесь  $\tau = (-f''(t=0))^{-1/2}$  – длительность ионизирующего импульса во всех трех случаях. На Рис. 3.1 изображена зависимость  $t_0/\tau_p$  от  $I_0$ , где  $\tau_p = \tau/\sqrt{\ln 16}$  – полуширина огибающей ионизирующего импульса по интенсивности. Как видно,  $t_0$  монотонно растет с ростом  $I_0$ , при этом конкретная зависимость определяется формой огибающей импульса. Обозначив за  $\xi(1/t)$  функцию, обратную к  $\bar{w}(E)/n_0(E)$  (функция  $\xi$  имеет размерность напряженности электрического поля), можно получить хорошее приближением для  $t_0$ ,

$$-t_0/\tau = \begin{cases} \ln(E_m/\xi(1/\tau)), & E_m > \xi(1/\tau) \\ \tau \bar{w}(E_m)/n_0(E_m), & E_m < \xi(1/\tau) \end{cases} \quad (3.9)$$

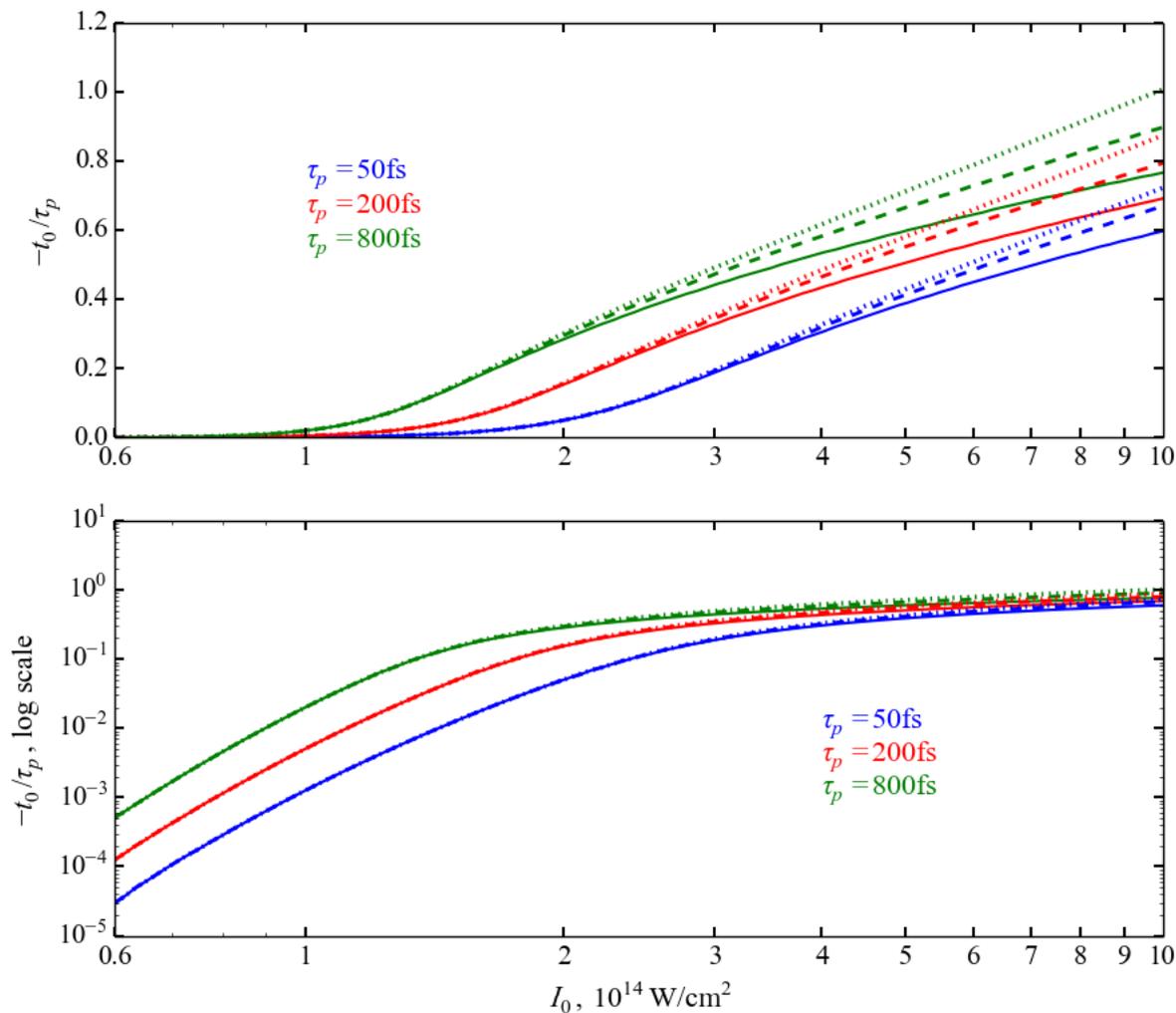


Рисунок 3.1 — Зависимость  $t_0/\tau_p$  от пиковой интенсивности основной компоненты поля  $I_0$  при различных формах огибающих и длительностях ионизирующих импульсов. Сплошные линии отвечают форме, задаваемой выражением (3.6), штриховые линии отвечают форме, задаваемой выражением (3.7) и точечные линии отвечают форме, задаваемой выражением (3.8). Синие линии соответствуют полуширине огибающей ионизирующего импульса по интенсивности  $\tau_p = 50$  фс, красные линии соответствуют  $\tau_p = 200$  фс, зеленые линии соответствуют  $\tau_p = 800$  фс. На верхнем и нижнем графиках представлены одни и те же данные с линейным и логарифмическим масштабами вертикальной оси соответственно.

При  $f = f_0$  получаются следующие выражения для средней вероятности ионизации и длительности ионизации:

$$\bar{w}(t_0) = -n_0 t_0 / \tau; \tau_i = \left( \frac{n_0}{\tau^2} + \frac{n_0^2 t_0^2}{\tau^4} \right)^{-1/2}. \quad (3.10)$$

При увеличении  $t_0$  (что соответствует увеличению  $I_0$ ) длительность импульса низкочастотного тока уменьшается, а его амплитуда увеличивается.

При  $f = f_1$  получим

$$\bar{w}(t_0) = n_0 \operatorname{th}(-t_0/\tau) / \tau; \tau_i = \left( \frac{n_0}{\tau^2} + \frac{n_0^2 \operatorname{th}^2(t_0/\tau)}{\tau^2} \right)^{-1/2}. \quad (3.11)$$

В данном случае длительность и амплитуда импульса с увеличением  $t_0$  выходят на константу.

При  $f = f_2$  получим

$$\bar{w}(t_0) = \frac{2n_0 t_0}{2\tau^2 + t_0^2}; \tau_i = \left( \frac{n_0}{\tau^2} + \frac{n_0^2 t_0^2}{\tau^4} \right)^{-1/2} \left( 1 + \frac{t_0^2}{2\tau^2} \right). \quad (3.12)$$

В данном случае с увеличением  $t_0$  длительность импульса увеличивается, а амплитуда уменьшается.

На Рис. 3.2 изображена зависимость  $\tau_i$  от интенсивности основной компоненты поля, рассчитанная по формуле (1.30).

Формулы (3.10), (3.11) и (3.12) во всех случаях приводят к одинаковому соотношению при  $t_0 \gg \tau/n_0$

$$\bar{w}(t_0) \sim 1/\tau_i, \quad (3.13)$$

из которого следует, что энергия генерируемого импульса при больших  $t_0$  имеет пропорциональность  $U_j \sim \bar{w}^2 \tau_i \sim 1/\tau_i$ , то есть при использовании огибающих ионизирующего лазерного импульса, спадающих быстрее, чем экспоненциально, энергия генерируемого низкочастотного импульса будет продолжать медленно расти с увеличением пиковой интенсивности выше порога, соответствующего полной ионизации, и наоборот, при использовании медленно спадающих огибающих, таких как (3.8), энергия будет уменьшаться с ростом интенсивности.

Используя полученные аналитические формулы можно сделать простые оценки для эффективности ионизационного механизма генерации ультракоротких импульсов в среднем ИК-диапазоне. Для этого можно воспользоваться квазистатической моделью на границе области ее применимости, считая размеры

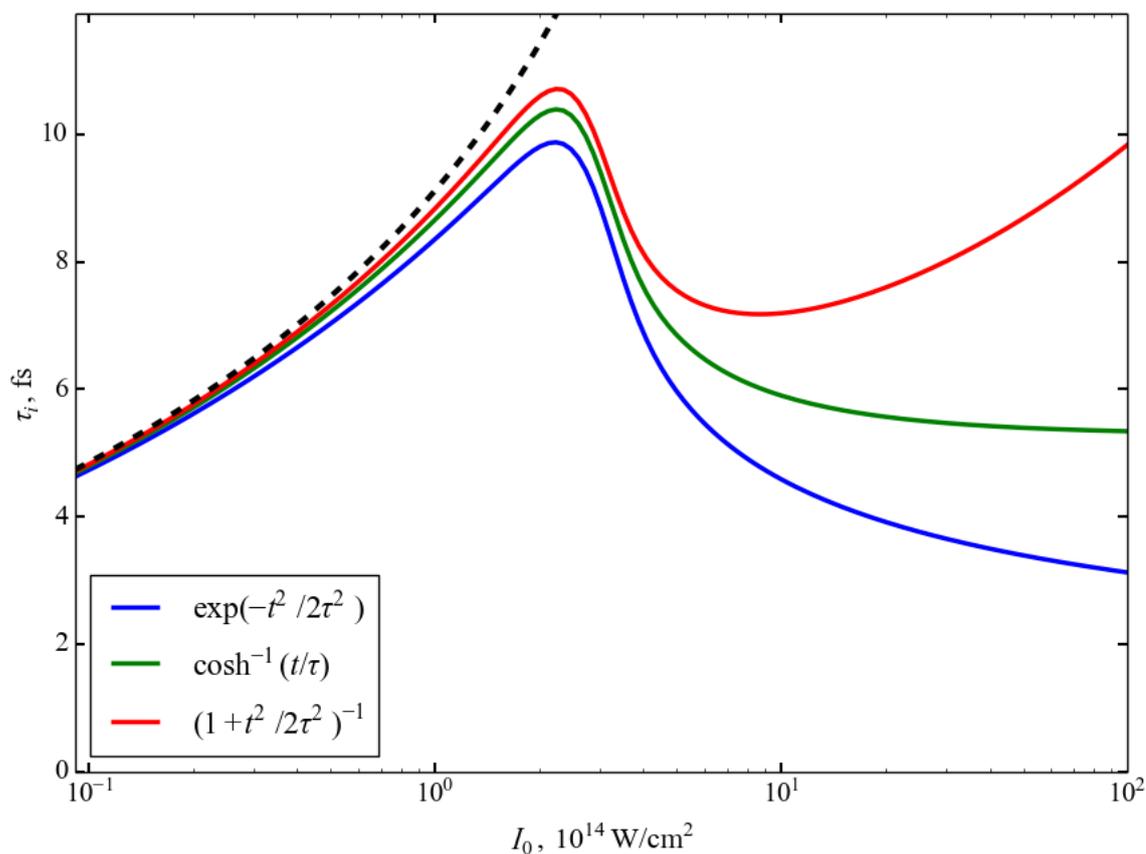


Рисунок 3.2 — Зависимость  $\tau_i$  от интенсивности основной компоненты поля  $I_0$ .

Синяя линия отвечает форме, задаваемой выражением (3.6), зеленая линия отвечает форме, задаваемой выражением (3.7) и красная линия отвечает форме, задаваемой выражением (3.8). Пунктирная линия соответствует  $\tau/\sqrt{n_0(\bar{E}_m)}$ . Полуширина огибающей ионизирующего импульса по интенсивности  $\tau_p = 50$

фс.

излучающей области порядка длины волны генерируемого излучения, а максимальную плотность плазмы – порядка критической плотности для частоты генерируемого излучения. В этом случае эффективность (т.е. отношение энергии генерируемого импульса к энергии ионизирующего поля) запишется как

$$\eta \sim \frac{m^2}{e^4 N_g} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (dj_{LF}/dt)^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} E^2 dt} \quad (3.14)$$

Воспользовавшись формулой (3.1) в длинноволновом пределе при  $a = 2, b = 1$  и положив  $I_0 = I_1$  и  $n_0 = 10$  [106; 113], получаем  $\eta \sim (\omega_0 \tau)^{-2}$ . Эффективность оказывается на уровне  $10^{-5} \dots 10^{-3}$  для лазерных импульсов фемтосекундной длительности, при этом большим эффективностям отвечает использование более коротких и более длинноволновых ионизирующих импульсов.

### 3.2 Сопоставление полученных результатов с численными решениями нестационарного уравнения Шредингера

В данном разделе сопоставлены результаты расчетов спектров и волновых форм импульсов низкочастотного тока, генерируемых под действием двухцветных ионизирующих лазерных импульсов, полученных в рамках классического и квантовомеханического подходов.

В этом разделе зафиксированы следующие параметры двухцветных импульсов: интенсивности компонент поля  $I_0 = 2 \cdot 10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>,  $I_1 = 2 \cdot 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>, длина волны основной компоненты поля  $\lambda_0 = 800$  нм, длина волны добавочного поля близка к 400 нм и соответствует  $\omega_1 = 2\omega_0 + \Delta\omega$ , длительность импульса  $\tau_p = 100$  фс. Аналитическая теория (3.1) опирается на соотношение  $\mathcal{E}_1 \ll \mathcal{E}_0/n_0$ , которое при данных параметрах не выполняется (т.к.  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0/10^{0.5} > \mathcal{E}_0/n_0$ ), однако, как будет показано, аналитические формулы даже при достаточно большом превышении соотношения между амплитудами компонент продолжают описывать импульсы низкочастотных компонент производной тока с хорошей точностью.

На рисунке 3.3 представлены результаты расчетов энергетических спектров низкочастотного тока под действием ионизирующих импульсов с добавочным

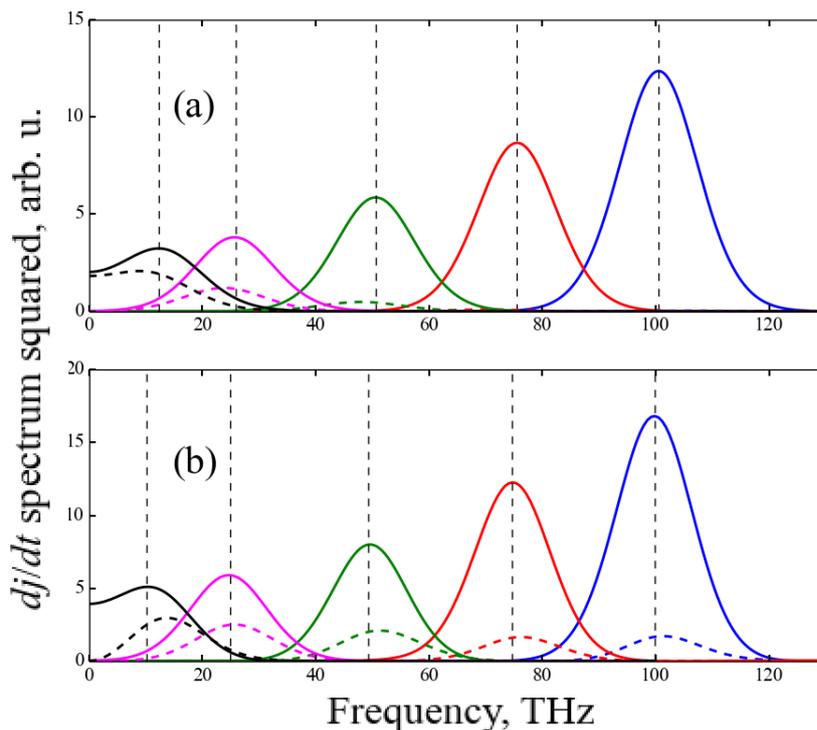


Рисунок 3.3 — Низкочастотная часть квадратичного спектра  $dj/dt$  при различных отстройках добавочного поля от удвоенной частоты основного.

Черные кривые соответствуют длине волны отстройки  $\lambda_{\Delta} = \pm 24 \mu\text{m}$ , фиолетовые соответствуют  $\lambda_{\Delta} = \pm 12 \mu\text{m}$ , зеленые соответствуют  $\lambda_{\Delta} = \pm 6 \mu\text{m}$ , красные соответствуют  $\lambda_{\Delta} = \pm 4 \mu\text{m}$ , синие соответствуют  $\lambda_{\Delta} = \pm 3 \mu\text{m}$  (что соответствует частотам  $\Delta f$  12.5, 25, 50, 75 и 100 ТГц). Сплошные линии соответствуют отрицательной отстройке, пунктирные – положительной. На рисунке (a) изображены результаты классических расчетов, на рисунке (b) результаты квантовомеханических расчетов.

полем, отстроеным на различные частоты от второй гармоники основного поля. Каждой из частот отстройки  $\Delta\omega$  (которую также удобно охарактеризовать тактовой частотой  $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ , выражаемой в терагерцах, либо ”длиной волны” отстройки  $\lambda_{\Delta} = 2\pi c/\Delta\omega$ , при таком обозначении  $\lambda_{\Delta}$  не положительно определена, и её знак совпадает со знаком частотной отстройки) соответствует спектральный пик  $dj/dt$ , с максимумом близким к частоте отстройки.

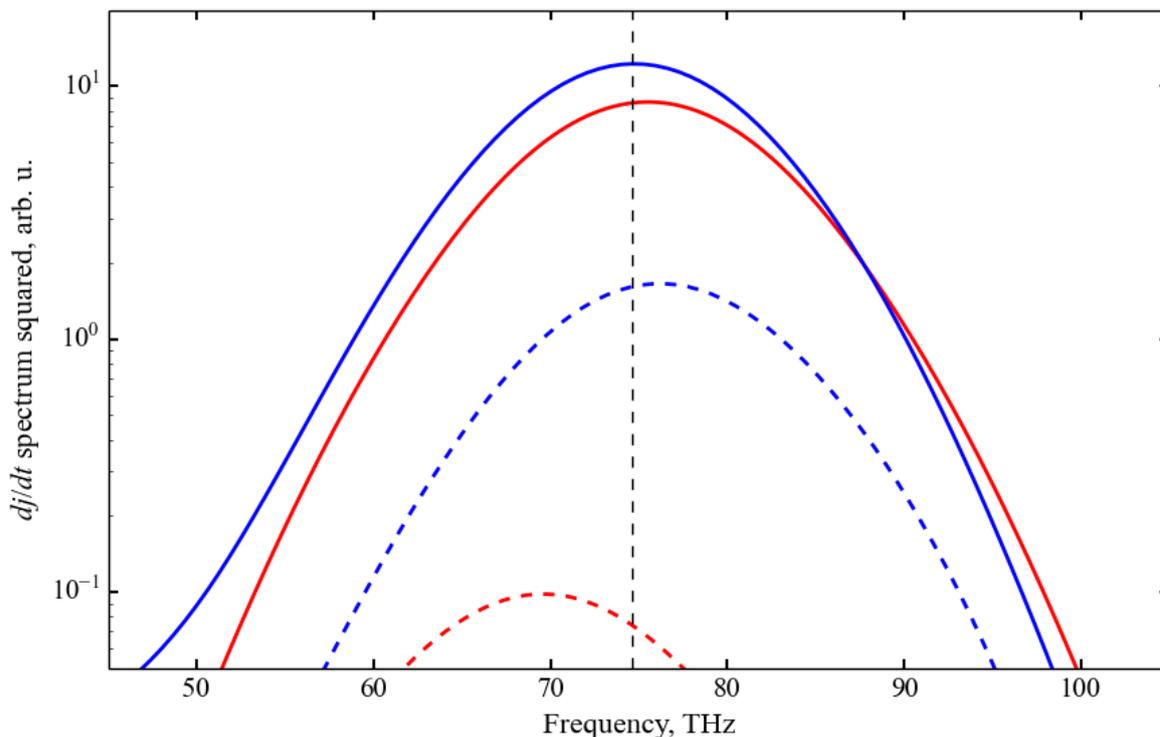


Рисунок 3.4 — Низкочастотная часть квадратичного спектра  $dj/dt$  при длине волны отстройки  $\lambda_{\Delta} = \pm 4 \mu\text{m}$ , что соответствует частоте 75 ТГц. Красные кривые – результаты классических расчетов, синие – результаты квантовомеханических расчетов. Сплошные линии соответствуют отрицательной отстройке, пунктирные – положительной.

В обоих результатах проявляется асимметрия по знаку  $\Delta\omega$ , связанная с множителем  $(a^2 - b^2)/(n_0 a) - (\Delta\omega)/(\omega_0)$  в коэффициенте (3.2). Как видно, наилучшее совпадение наблюдается в случае малых отрицательных частотных отстроек (которые соответствуют большей эффективности генерации низкочастотной компоненты тока). Ширины различных пиков приблизительно равны между собой и соответствуют обратной длительности импульса низкочастотного тока (обратному времени ионизации). При положительных отстройках зависимость  $g(\Delta\omega)$  (1.23) также качественно совпадает с квантовомеханическим случаем, однако масштаб спадания энергии низкочастотного тока слегка отличается от предсказываемого формулой (1.23). При выбранной пиковой интенсивности  $I_0 = 2 \cdot 10^{14} \text{ Вт/см}^2$  резкость вероятности ионизации, задаваемой формулой Тон-

га (1.29),  $n_0 \approx 7$ , откуда значение  $\Delta\omega$ , при котором  $g$  обращается в ноль, примерно соответствует длине волны  $\lambda_\Delta \approx 4 \mu\text{m}$ . На рисунке 3.4 совмещены спектры генерируемых низкочастотных токов при  $\lambda_\Delta = \pm 4 \mu\text{m}$ , рассчитанные в рамках классического и квантовомеханического подходов, как видно из рисунка, подавление генерации, предсказываемое классическими расчетами, в данном случае сильнее на порядок, чем полученное в рамках квантовомеханических расчетов.

Также на Рис 3.3 заметно, что в случае  $\lambda_\Delta = 24 \mu\text{m}$  в рамках обоих подходов появляется нулевая компонента спектра, отвечающая за генерацию остаточного тока. Как будет показано далее, наблюдаемая разница между абсолютными значениями остаточной плотности тока, получающимися в рамках классического и квантовомеханического подходов при одних и тех же сдвигах фаз  $\varphi$  между несущими компонент ионизирующего импульса, в данном случае возникает из-за дополнительного сдвига фаз  $\varphi_q$ , наблюдаемого в квантовомеханических расчетах относительно классических, уменьшающегося с ростом частоты отстройки, однако достаточно существенного при низких частотах, соответствующих длинам волн более  $10 \mu\text{m}$ .

На рисунках 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 изображены волновые формы импульсов низкочастотного тока, полученные в рамках квантовомеханических и классических расчетов, а также полученных применением формулы (1.22). Во всех трех случаях при достаточно больших частотных отстройках,  $|\Delta f|\tau_i \geq 1$ , генерируется импульс на частоте  $\Delta f$ , при этом фаза в импульсе определяется сдвигом фаз между несущими компонент двухцветного ионизирующего импульса  $\varphi$ . При меньших отстройках,  $|\Delta f|\tau_i < 1$ , генерируется субцикловый импульс, а  $\varphi$  влияет как на фазу в генерируемом импульсе, так и на его амплитуду. Центральная частота генерируемого импульса оказывается порядка  $1/\tau_i$ , и это значение фактически задает нижний предел возможной перестройки частоты.

Наиболее заметным различием обладают фазы генерируемых импульсов, получаемых в рамках классического и квантовомеханического подхода в случае малых частот отстройки. Согласно расчетам, с ростом длины волны увеличивается фазовый сдвиг между несущими низкочастотных компонент тока, получаемых в рамках различных подходов, конкретные значения сдвигов фаз  $\varphi_q$  указан в таблице 2. Данный эффект рассматривался в работе [108] применительно к возбуждению остаточной плотности тока, однако в ней не проводилось отстройки частоты добавочного поля, соответственно, зависимость сдвига фаз от отстройки в данной работе рассмотрена впервые.

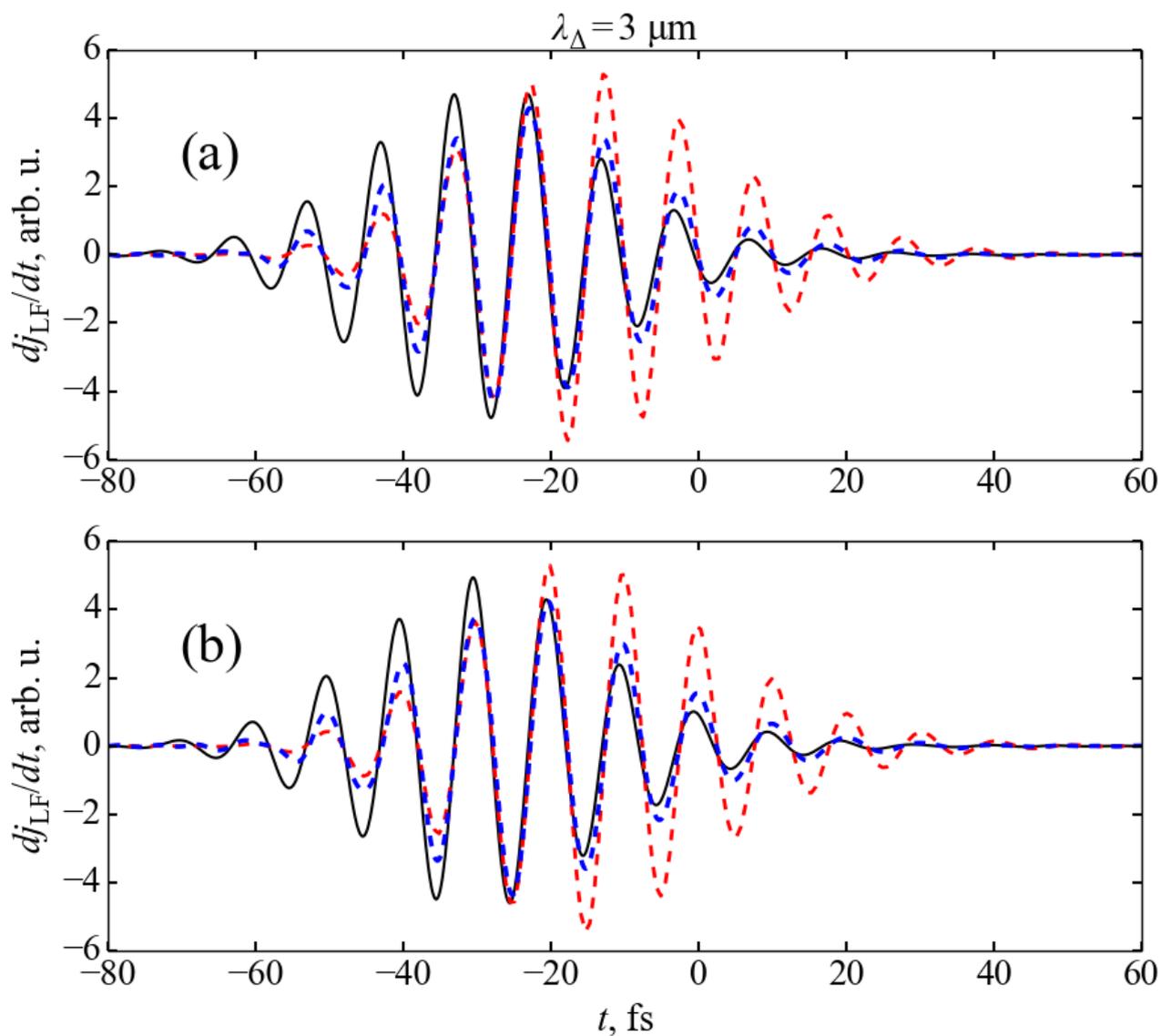


Рисунок 3.5 — Низкочастотная компонента  $dj/dt$  при длине волны отстройки  $\lambda_{\Delta} = -3 \mu\text{m}$ , что соответствует частоте 100 ТГц. Черные линии – результаты квантовомеханических расчетов, синие – результаты классических численных расчетов, красные кривые получены применением аналитической формулы (1.22). На рисунке (a) сдвиг фаз  $\varphi = 0$ , на рисунке (b)  $\varphi = \pi/2$ .

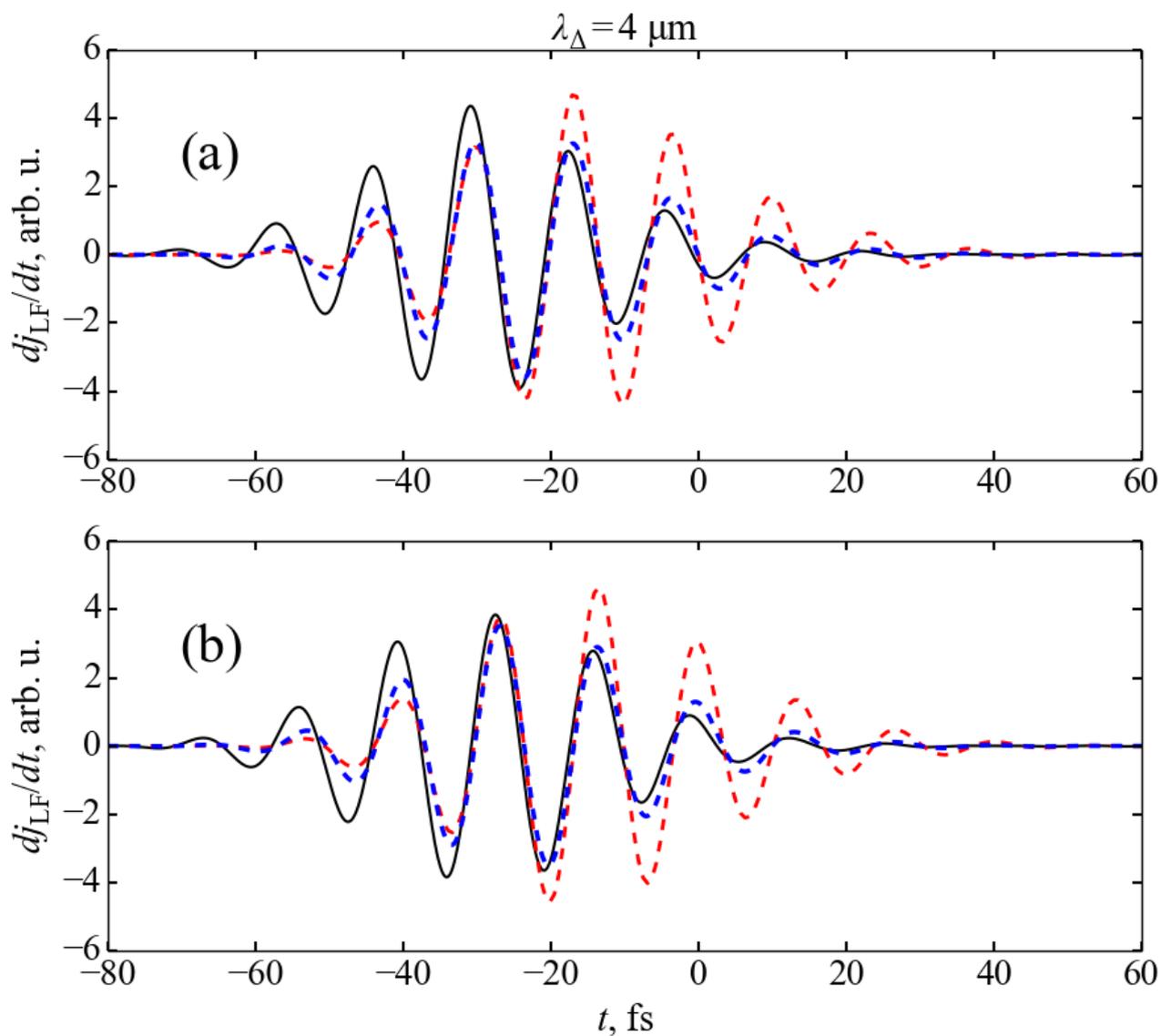


Рисунок 3.6 — Низкочастотная компонента  $dj/dt$  при длине волны отстройки  $\lambda_{\Delta} = -3 \mu\text{m}$ , что соответствует частоте 75 ТГц. Черные линии – результаты квантовомеханических расчетов, синие – результаты классических численных расчетов, красные кривые получены применением аналитической формулы (1.22). На рисунке (a) сдвиг фаз  $\varphi = 0$ , на рисунке (b)  $\varphi = \pi/2$ .

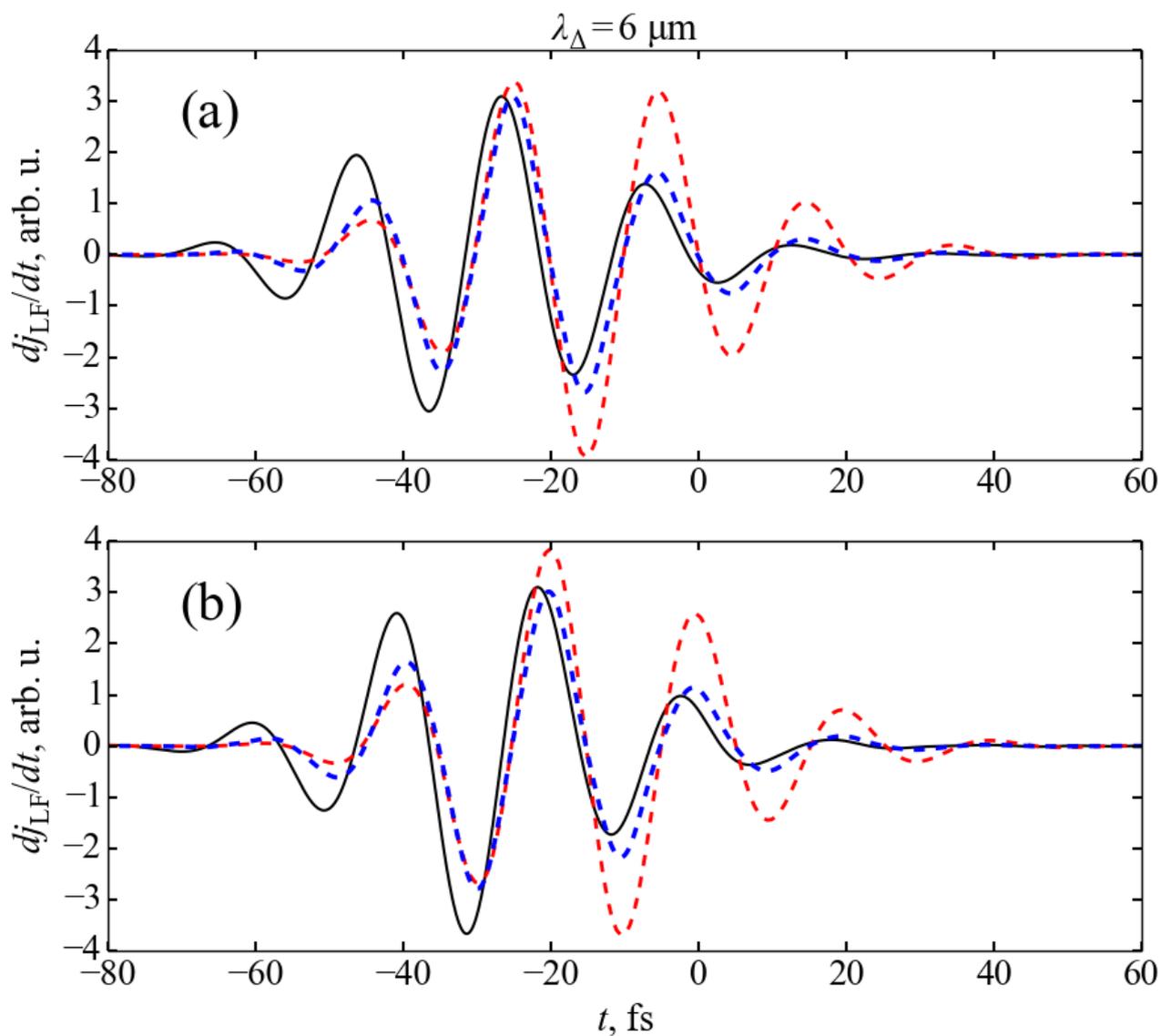


Рисунок 3.7 — Низкочастотная компонента  $dj/dt$  при длине волны отстройки  $\lambda_{\Delta} = -6 \mu\text{m}$ , что соответствует частоте 50 ТГц. Черные линии – результаты квантовомеханических расчетов, синие – результаты классических численных расчетов, красные кривые получены применением аналитической формулы (1.22). На рисунке (a) сдвиг фаз  $\varphi = 0$ , на рисунке (b)  $\varphi = \pi/2$ .

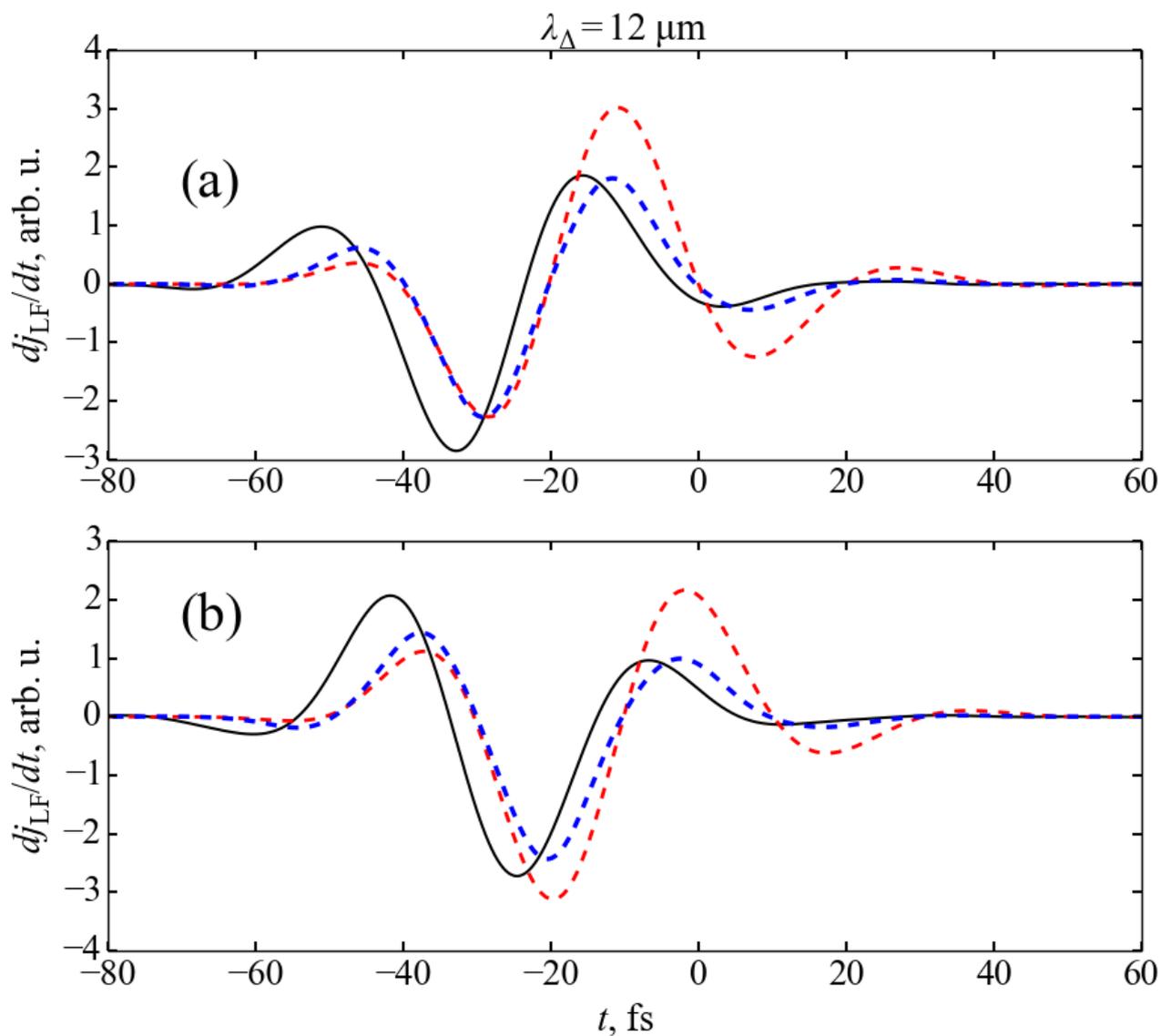


Рисунок 3.8 — Низкочастотная компонента  $dj/dt$  при длине волны отстройки  $\lambda_{\Delta} = 12 \mu\text{m}$ , что соответствует частоте 25 ТГц. Черные линии – результаты квантовомеханических расчетов, синие – результаты классических численных расчетов, красные кривые получены применением аналитической формулы (1.22). На рисунке (a) сдвиг фаз  $\varphi = 0$ , на рисунке (b)  $\varphi = \pi/2$ .

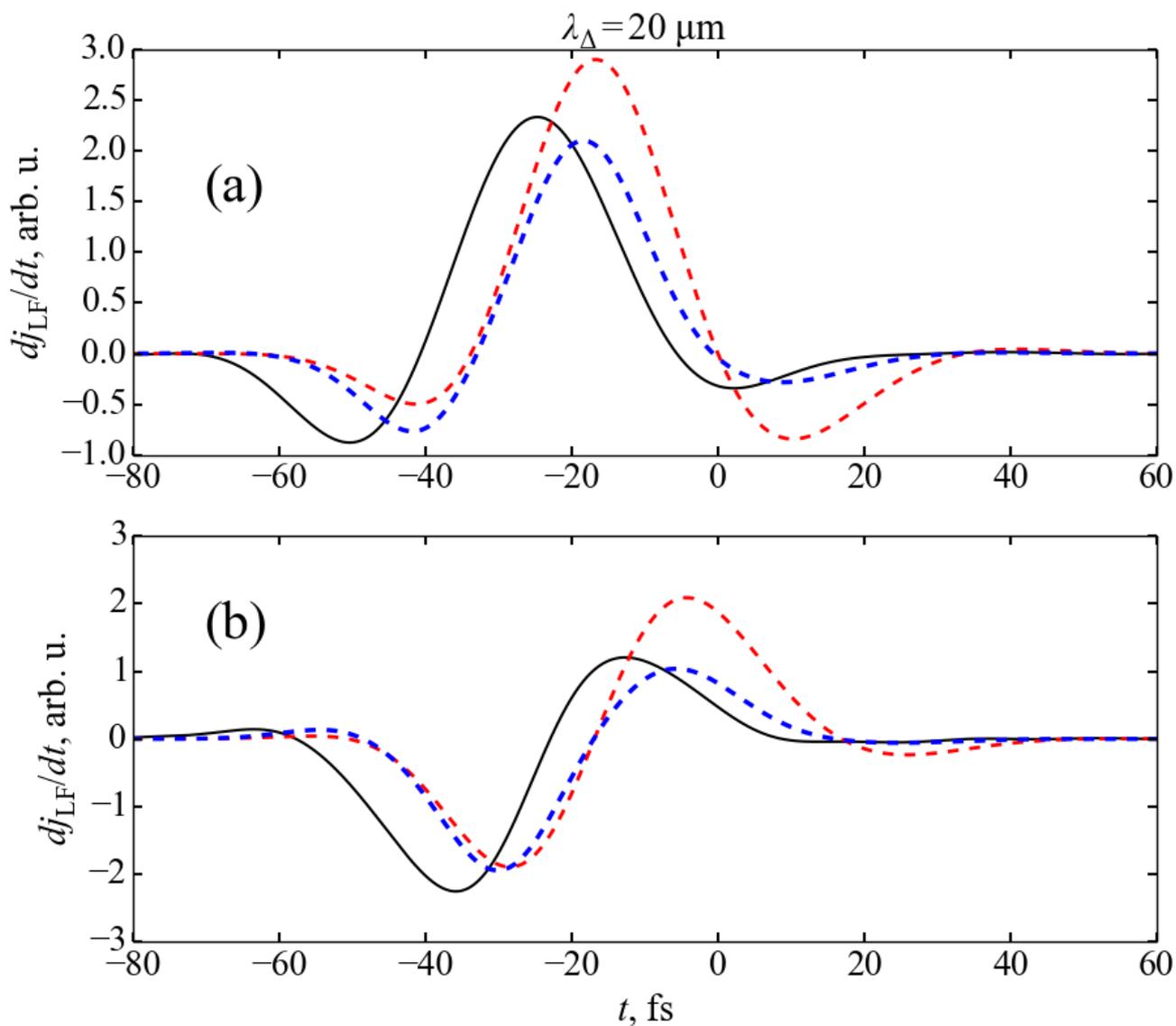


Рисунок 3.9 — Низкочастотная компонента  $dj/dt$  при длине волны отстройки  $\lambda_{\Delta} = -20 \mu\text{m}$ , что соответствует частоте 15 ТГц. Черные линии – результаты квантовомеханических расчетов, синие – результаты классических численных расчетов, красные кривые получены применением аналитической формулы (1.22). На рисунке (a) сдвиг фаз  $\varphi = 0$ , на рисунке (b)  $\varphi = \pi/2$ .

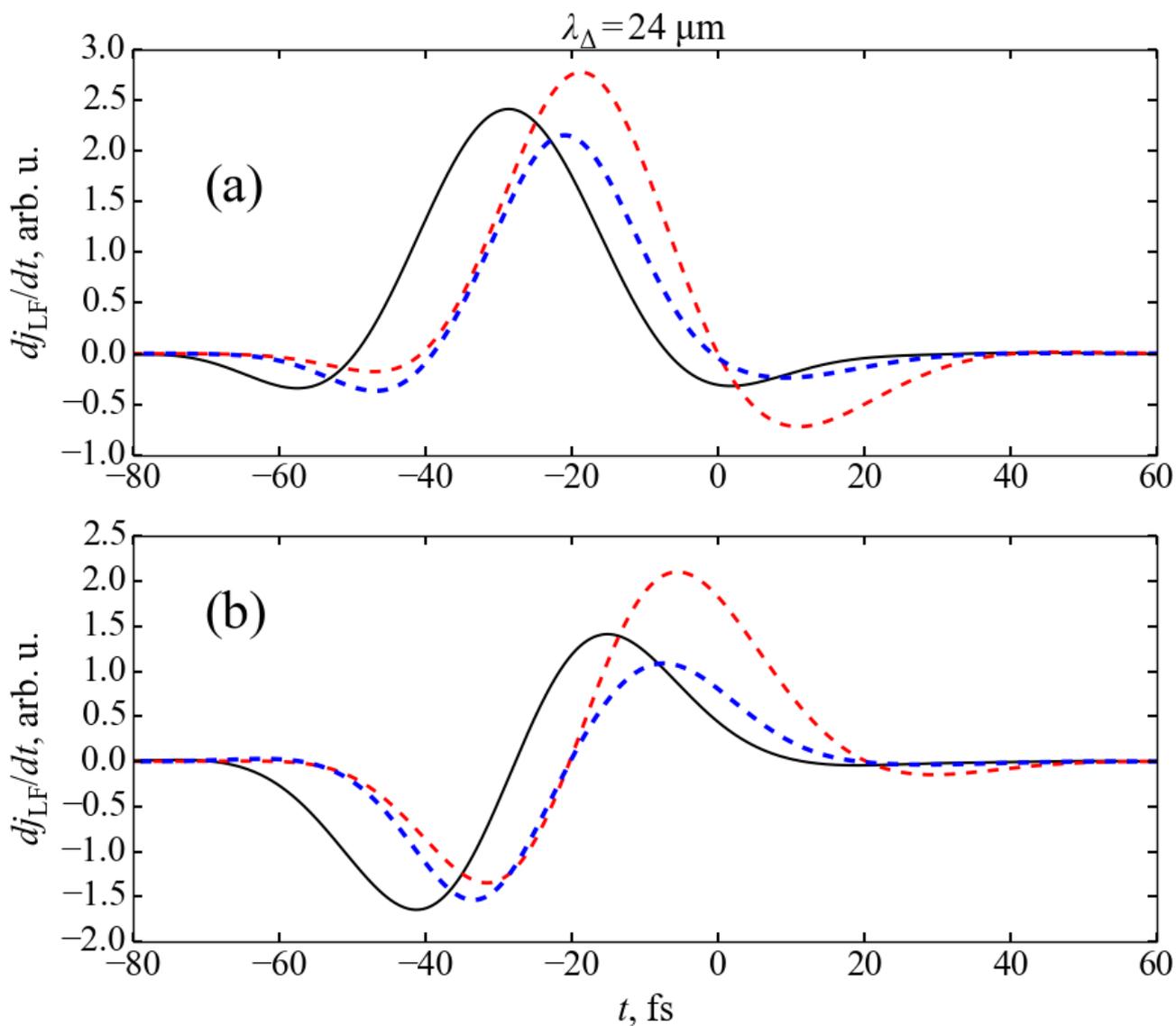


Рисунок 3.10 — Низкочастотная компонента  $dj/dt$  при длине волны отстройки  $\lambda_{\Delta} = -24 \mu\text{m}$ , что соответствует частоте 12.5 ТГц. Черные линии – результаты квантовомеханических расчетов, синие – результаты классических численных расчетов, красные кривые получены применением аналитической формулы (1.22). На рисунке (a) сдвиг фаз  $\varphi = 0$ , на рисунке (b)  $\varphi = \pi/2$ .

Таблица 2 — Дополнительный сдвиг фаз  $\varphi_q$ , при добавлении которого к несущей низкочастотного тока, получаемого в рамках классического подхода, корреляция между волновыми формами низкочастотных компонент тока, получаемых в рамках двух различных подходов максимальна (максимальное значение корреляции между результатами квантовомеханических и классических расчетов практически не зависит от частоты отстройки и равно 0.95).

$\lambda_{\Delta}$	$-3 \mu\text{m}$	$-4 \mu\text{m}$	$-6 \mu\text{m}$	$-12 \mu\text{m}$	$-20 \mu\text{m}$	$-24 \mu\text{m}$
$\varphi_q/\pi$	-0.05	-0.08	-0.12	-0.17	-0.19	-0.2

Также наблюдается небольшой сдвиг максимума огибающей ( $t_0$ ) в квантовомеханических расчетах по направлению к переднему фронту ионизирующего импульса по сравнению с классическими расчетами, связанный, по-видимому, с недооценкой скорости ионизации на переднем фронте импульса в рамках классического подхода, что приводит к более быстрому насыщению ионизации в квантовомеханических расчетах.

### 3.3 Выводы к главе 3

Проанализированы зависимости характеристик ультракоротких импульсов производной плотности тока свободных электронов в среднем инфракрасном диапазоне частот, генерируемых под действием двухцветных ионизирующих лазерных импульсов. Показано, что длительность импульса низкочастотного тока при малых конечных степенях ионизации генерируемой плазмы не зависит от формы огибающей импульса и растет с ростом интенсивности основной компоненты, однако всегда остается намного меньшей, чем длительность ионизирующего импульса, в том числе позволяющей получать малоцикловые и субцикловые импульсы. При больших степенях ионизации длительность генерируемого импульса в зависимости от формы огибающей ионизирующего импульса, может как расти с ростом интенсивности, если огибающая лазерного импульса спадает медленнее, чем экспоненциально, так и убывать с ростом интенсивности в противоположном случае. При этом энергия импульсов низкочастотного тока при близких к единице степенях ионизации плазмы обратно пропорциональна их длительности. Показано, что волновые формы импульсов низкочастотной производной плотности

тока свободных электронов, рассчитываемые с использованием классических и квантовомеханических подходов имеют практически одинаковые энергии и центральные частоты, совпадающие с частотой отстройки добавочной компоненты ионизирующего поля от удвоенной частоты основной компоненты, однако отличаются небольшим сдвигом абсолютной фазы и сдвигом максимума огибающей во времени. При этом сдвиг фазы зависит от центральной частоты генерируемого низкочастотного импульса. Показано, что все свойства ионизационного многоволнового смещения присутствуют в квантовомеханических расчетах, а именно: асимметрия, проявляющаяся в сильном понижении эффективности генерации при определенном знаке частотной отстройки, равенство длительности генерируемых импульсов длительности ионизации и сдвиг максимума огибающей к переднему фронту при насыщении ионизации.

## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Исследовано ионизационное многоволновое смешение, которое происходит в плазме, создаваемой двухцветным лазерным импульсом с произвольным отношением частот его одноцветных компонент. Показано, что процесс возбуждения остаточных токов свободных электронов, ответственных за генерацию терагерцового излучения, может рассматриваться как такое многоволновое смешение, а основные свойства этого смешения определяются нелинейными свойствами ионизируемых частиц. В частности, число смешивающихся волн определяется эффективным показателем степени в зависимости скорости ионизации от напряженности ионизирующего поля. Продемонстрировано, что зависимости остаточной плотности тока от частотного отношения в двухцветном лазерном импульсе представляют собой набор резонансоподобных пиков вблизи рациональных дробей с не очень большой нечётной суммой числителя и знаменателя (таких как  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $1/4$ ,  $2/5$  и т. д.). Различные пики оказываются сопоставимыми по величине в случае, когда интенсивности одноцветных компонент импульса близки, а лазерно-плазменная генерация терагерцового излучения при использовании ионизирующих двухцветных лазерных импульсов с нетрадиционными (отличными от двух) частотными отношениями может быть достаточно эффективной.
2. Исследована генерация остаточных токов при ионизационном многоволновом смешении двухцветных лазерных импульсов, образованных циркулярно поляризованными одноцветными компонентами. Показано, что генерация остаточного тока возможна только при сонаправленном вращении одноцветных компонент, при этом отношение их частот должно быть близким к рациональной дроби, числитель и знаменатель которой отличаются на единицу.
3. Найдены оптимальные для генерации остаточных токов параметры ионизирующего двухцветного лазерного импульса при произвольных эллиптичности поляризации его одноцветных компонент. Показано, что оптимальная эллиптичность определяется частотным отношением

в двухцветном импульсе. Если это отношение близко к рациональной дроби, числитель и знаменатель которой отличаются на единицу, то оптимальным является использование сонаправленно вращающихся циркулярно поляризованных одноцветных компонент. При других частотных отношениях, используемых для генерации остаточного тока, оптимальным является использование коллинеарных линейно поляризованных одноцветных компонент.

4. Исследована генерация ультракоротких импульсов в среднем инфракрасном диапазоне при ионизации газа интенсивным двухцветным полем фемтосекундной длительности, содержащим квазимонохроматические компоненты с частотами  $\omega_0$  и  $\omega_1$ , при  $\omega_1/\omega_0 \approx a/b$ , где  $a$  и  $b$  – небольшие взаимно простые натуральные числа разной четности. Генерация происходит на частоте отстройки  $\Delta\omega = b\omega_1 - a\omega_0$ . Показано, что эффективность генерации определяется как величиной  $\Delta\omega$ , так и ее знаком, и принимает более высокие значения при знаках отстройки, приводящих к уменьшению  $|\omega_1 - \omega_0|$ . Длительность генерируемых импульсов определяется длительностью ионизации, которая много меньше длительности ионизирующего поля, что обеспечивает получение малоцикловых и субцикловых импульсов в среднем инфракрасном диапазоне.

Проведённое исследование опирается на известные и апробированные методы, применяемые в лазерной физике. Результаты теоретических исследований согласуются с известными экспериментальными данными. Выполненные численные расчеты хорошо согласуются с аналитическими выводами.

## Список литературы

1. *Братман, В. Л.* Освоение терагерцевого диапазона: источники и приложения / В. Л. Братман, А. Г. Литвак, Е. В. Суворов // Успехи физических наук. — 2011. — Т. 181, № 8. — С. 867—874.
2. *Zhang, L.* Optimized two-and three-colour laser pulses for the intense terahertz wave generation / L. Zhang, G.-L. Wang, X.-X. Zhou // Journal of Modern Optics. — 2016. — Vol. 63, no. 21. — P. 2159—2165.
3. Boosting terahertz generation in laser-field ionized gases using a sawtooth wave shape / P. G. de Alaiza Martínez, I. Babushkin, L. Bergé, S. Skupin, E. Cabrera-Granado, C. Köhler, U. Morgner, A. Husakou, J. Herrmann // Physical Review Letters. — 2015. — Vol. 114, no. 18. — P. 183901.
4. *Gildenburg, V. B.* Optical-to-THz wave conversion via excitation of plasma oscillations in the tunneling-ionization process / V. B. Gildenburg, N. V. Vvedenskii // Physical Review Letters. — 2007. — Vol. 98, no. 24. — P. 245002.
5. *Silaev, A. A.* Residual-current excitation in plasmas produced by few-cycle laser pulses / A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii // Physical Review Letters. — 2009. — Vol. 102, no. 11. — P. 115005.
6. Observation of terahertz radiation via the two-color laser scheme with uncommon frequency ratios / L.-L. Zhang, W.-M. Wang, T. Wu, R. Zhang, S.-J. Zhang, C.-L. Zhang, Y. Zhang, Z.-M. Sheng, X.-C. Zhang // Physical Review Letters. — 2017. — Vol. 119, no. 23. — P. 235001.
7. Coherent control of terahertz supercontinuum generation in ultrafast laser–gas interactions / K.-Y. Kim, A. J. Taylor, J. H. Glowina, G. Rodriguez // Nature Photonics. — 2008. — Vol. 2, no. 10. — P. 605—611.
8. *Kitaeva, G. K.* Terahertz generation by means of optical lasers / G. K. Kitaeva // Laser Physics Letters. — 2008. — Vol. 5, no. 8. — P. 559—576.
9. Coherent millimetre wave to mid-infrared measurements with continuous bandwidth reaching 40 THz / N. E. Karpowicz, J. Chen, T. Tongue, X.-C. Zhang // Electronics Letters. — 2008. — Vol. 44, no. 8. — P. 544—545.
10. *Karpowicz, N.* Terahertz gas photonics / N. Karpowicz, X. Lu, X.-C. Zhang // Journal of Modern Optics. — 2009. — Vol. 56, no. 10. — P. 1137—1150.

11. *Гарнов, С. В.* Лазерные методы генерации мегавольтных терагерцевых импульсов / С. В. Гарнов, И. А. Щербаков // *Успехи физических наук.* — 2011. — Т. 181, № 1. — С. 97—102.
12. Generation of strong terahertz fields exceeding 8 MV/cm at 1 kHz and real-time beam profiling / T. I. Oh, Y. J. Yoo, Y. S. You, K. Y. Kim // *Applied Physics Letters.* — 2014. — Vol. 105, no. 4. — P. 041103.
13. *Thomson, M. D.* Terahertz white-light pulses from an air plasma photo-induced by incommensurate two-color optical fields / M. D. Thomson, V. Blank, H. G. Roskos // *Optics Express.* — 2010. — Vol. 18, no. 22. — P. 23173—23182.
14. Broadband terahertz radiation from two-color mid-and far-infrared laser filaments in air / A. Nguyen, P. G. de Alaiza Martínez, I. Thiele, S. Skupin, L. Bergé // *Physical Review A.* — 2018. — Vol. 97, no. 6. — P. 063839.
15. Spectral dynamics of THz pulses generated by two-color laser filaments in air: the role of Kerr nonlinearities and pump wavelength / A. Nguyen, P. G. de Alaiza Martínez, J. Déchard, I. Thiele, I. Babushkin, S. Skupin, L. Bergé // *Optics Express.* — 2017. — Vol. 25, no. 5. — P. 4720—4740.
16. Two-color laser wavelength effect on intense terahertz generation in air / S. Li, C. Lu, C. Yang, Y. Yu, Z. Sun, S. Zhang // *Chinese Physics B.* — 2017. — Vol. 26, no. 11. — P. 114206.
17. Plasma sheet and strong terahertz generation with elliptically shaped two-color laser pulses / D. Kuk, Y. J. Yoo, E. Rosenthal, N. Jhajj, H. M. Milchberg, K.-Y. Kim // *Lasers and Electro-Optics (CLEO), 2016 Conference on.* — IEEE. 2016. — P. 1—2.
18. Terahertz radiation driven by two-color laser pulses at near-relativistic intensities: Competition between photoionization and wakefield effects / P. G. de Alaiza Martínez, X. Davoine, A. Debayle, L. Gremillet, L. Bergé // *Scientific Reports.* — 2016. — Vol. 6. — P. 26743.
19. Generation of scalable terahertz radiation from cylindrically focused two-color laser pulses in air / D. Kuk, Y. J. Yoo, E. W. Rosenthal, N. Jhajj, H. M. Milchberg, K.-Y. Kim // *Applied Physics Letters.* — 2016. — Vol. 108, no. 12. — P. 121106.

20. CEP-stable tunable THz-emission originating from laser-waveform-controlled sub-cycle plasma-electron bursts / T. Balčiūnas, D. Lorenc, M. Ivanov, O. Smirnova, A. Zheltikov, D. Dietze, K. Unterrainer, T. Rathje, G. Paulus, A. Baltuška, [et al.] // *Optics Express*. — 2015. — Vol. 23, no. 12. — P. 15278—15289.
21. Wavelength scaling of terahertz generation by gas ionization / M. Clerici, M. Peci­anti, B. E. Schmidt, L. Caspani, M. Shalaby, M. Giguère, A. Lotti, A. Couairon, F. Légaré, T. Ozaki, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110, no. 25. — P. 253901.
22. Terahertz acoustics in hot dense laser plasmas / A. Adak, A. Robinson, P. K. Singh, G. Chatterjee, A. D. Lad, J. Pasley, G. R. Kumar // *Physical Review Letters*. — 2015. — Vol. 114, no. 11. — P. 115001.
23. Ultrabroad terahertz spectrum generation from an air-based filament plasma / V. A. Andreeva, O. G. Kosareva, N. A. Panov, D. E. Shipilo, P. M. Solyankin, M. N. Esaulkov, P. G. de Alaiza Martínez, A. P. Shkurinov, V. A. Makarov, L. Bergé, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 116, no. 6. — P. 063902.
24. Polarization control of terahertz radiation from two-color femtosecond gas breakdown plasma / O. Kosareva, M. Esaulkov, N. Panov, V. Andreeva, D. Shipilo, P. Solyankin, A. Demircan, I. Babushkin, V. Makarov, U. Morgner, [et al.] // *Optics Letters*. — 2018. — Vol. 43, no. 1. — P. 90—93.
25. Theoretical study of terahertz generation from atoms and aligned molecules driven by two-color laser fields / W. Chen, Y. Huang, C. Meng, J. Liu, Z. Zhou, D. Zhang, J. Yuan, Z. Zhao // *Physical Review A*. — 2015. — Vol. 92, no. 3. — P. 033410.
26. Effect of two-color laser pulse intensity ratio on intense terahertz generation / C. Lu, S. Zhang, Y. Yao, S. Xu, T. Jia, J. Ding, Z. Sun // *RSC Advances*. — 2015. — Vol. 5, no. 2. — P. 1485—1490.
27. Controllable terahertz radiation from a linear-dipole array formed by a two-color laser filament in air / Z. Zhang, Y. Chen, M. Chen, Z. Zhang, J. Yu, Z. Sheng, J. Zhang // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 117, no. 24. — P. 243901.

28. Experimental three-dimensional beam profiling and modeling of a terahertz beam generated from a two-color air plasma / P. Klarskov, A. C. Strikwerda, K. Iwaszczuk, P. U. Jepsen // *New Journal of Physics*. — 2013. — Vol. 15, no. 7. — P. 075012.
29. Ultrafast spatiotemporal dynamics of terahertz generation by ionizing two-color femtosecond pulses in gases / I. Babushkin, W. Kuehn, C. Koehler, S. Skupin, L. Berge, K. Reimann, M. Woerner, J. Herrmann, T. Elsaesser // *Physical Review Letters*. — 2010. — Vol. 105, no. 5. — P. 053903.
30. *You, Y.* Off-axis phase-matched terahertz emission from two-color laser-induced plasma filaments / Y. You, T. Oh, K. Kim // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 109, no. 18. — P. 183902.
31. THz generation by a two-color pulse in prealigned molecules / J. Wu, Y. Tong, M. Li, H. Pan, H. Zeng // *Physical Review A*. — 2010. — Vol. 82, no. 5. — P. 053416.
32. Scaling and saturation of high-power terahertz radiation generation in two-color laser filamentation / T. Oh, Y. You, N. Jhajj, E. Rosenthal, H. Milchberg, K. Kim // *Applied Physics Letters*. — 2013. — Vol. 102, no. 20. — P. 201113.
33. External focusing effect on terahertz emission from a two-color femtosecond laser-induced filament in air / T.-J. Wang, C. Marceau, S. Yuan, Y. Chen, Q. Wang, F. Théberge, M. Châteauneuf, J. Dubois, S. Chin // *Laser Physics Letters*. — 2010. — Vol. 8, no. 1. — P. 57.
34. Генерация терагерцового излучения при оптическом пробое воздуха: зависимость оптимального фазового сдвига между компонентами двухцветного лазерного импульса от их интенсивности / И. Е. Иляков, Б. В. Шишкин, Л. Н. Александров, М. Ю. Емелин, М. Ю. Рябикин // *Письма в ЖЭТФ*. — 2015. — Т. 101, № 2. — С. 78—83.
35. О генерации терагерцового излучения при оптическом пробое в поле бихроматического лазерного импульса / Р. А. Ахмеджанов, И. Е. Иляков, В. А. Миронов, Е. В. Суворов, Д. А. Фадеев, В. В. Шишкин // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2009. — Т. 136, № 3. — С. 431—441.

36. Two-color laser-plasma generation of terahertz radiation using a frequency-tunable half harmonic of a femtosecond pulse / N. V. Vvedenskii, A. I. Korytin, V. A. Kostin, A. A. Murzanev, A. A. Silaev, A. N. Stepanov // *Physical Review Letters*. — 2014. — Vol. 112, no. 5. — P. 055004.
37. Enhancement of terahertz radiation by using circularly polarized two-color laser fields / C. Meng, W. Chen, X. Wang, Z. Lü, Y. Huang, J. Liu, D. Zhang, Z. Zhao, J. Yuan // *Applied Physics Letters*. — 2016. — Vol. 109, no. 13. — P. 131105.
38. Optimal polarization of a two-colored pump for terahertz generation with a phase-unstable scheme / R. V. Volkov, P. A. Chizhov, A. A. Ushakov, V. V. Bukin, S. V. Garnov, A. B. Savel'ev // *Laser Physics*. — 2015. — Vol. 25, no. 6. — P. 065403.
39. Terahertz radiation from plasma filament generated by two-color laser gas-plasma interaction / K. K. M. Kumar, M. Kumar, T. Yuan, Z. M. Sheng, M. Chen // *Laser and Particle Beams*. — 2015. — Vol. 33, no. 3. — P. 473—479.
40. *Fedorov, V. Y.* Extreme THz fields from two-color filamentation of midinfrared laser pulses / V. Y. Fedorov, S. Tzortzakis // *Physical Review A*. — 2018. — Vol. 97, no. 6. — P. 063842.
41. Spectral self-action of THz emission from ionizing two-color laser pulses in gases / E. Cabrera-Granado, Y. Chen, I. Babushkin, L. Bergé, S. Skupin // *New Journal of Physics*. — 2015. — Vol. 17, no. 2. — P. 023060.
42. *Minami, Y.* Effect of preformed plasma on terahertz-wave emission from the plasma generated by two-color laser pulses / Y. Minami, M. Nakajima, T. Sue-moto // *Physical Review A*. — 2011. — Vol. 83, no. 2. — P. 023828.
43. Polarization of THz emission from gas plasma induced by two-color arbitrarily polarized laser pulses / V. A. Andreeva, M. Esaulkov, N. Panov, P. Solyankin, V. Makarov, D. Shipilo, A. Shkurinov, O. Kosareva, S. L. Chin // *CLEO: QELS\_Fundamental Science*. — Optical Society of America. 2016. — JW2A—47.
44. Intense terahertz emission from atomic cluster plasma produced by intense femtosecond laser pulses / F. Jahangiri, M. Hashida, T. Nagashima, S. Tokita, M. Hangyo, S. Sakabe // *Applied Physics Letters*. — 2011. — Vol. 99, no. 26. — P. 261503.

45. Intense broadband THz generation from femtosecond laser filamentation / T.-J. Wang, S. Yuan, Y. Chen, S. L. Chin // *Chinese Optics Letters*. — 2013. — Vol. 11, no. 1. — P. 011401.
46. Directionality of terahertz emission from photoinduced gas plasmas / C. Köhler, E. Cabrera-Granado, I. Babushkin, L. Bergé, J. Herrmann, S. Skupin // *Optics Letters*. — 2011. — Vol. 36, no. 16. — P. 3166—3168.
47. Efficient terahertz emission by mid-infrared laser pulses from gas targets / W.-M. Wang, S. Kawata, Z.-M. Sheng, Y.-T. Li, L.-M. Chen, L.-J. Qian, J. Zhang // *Optics Letters*. — 2011. — Vol. 36, no. 14. — P. 2608—2610.
48. Synchronizing terahertz wave generation with attosecond bursts / D. Zhang, Z. Lü, C. Meng, X. Du, Z. Zhou, Z. Zhao, J. Yuan // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 109, no. 24. — P. 243002.
49. Verification of the physical mechanism of THz generation by dual-color ultrashort laser pulses / M. Li, W. Li, Y. Shi, P. Lu, H. Pan, H. Zeng // *Applied Physics Letters*. — 2012. — Vol. 101, no. 16. — P. 161104.
50. *Manceau, J.-M.* Coherent control of THz pulses polarization from femtosecond laser filaments in gases / J.-M. Manceau, M. Massaouti, S. Tzortzakis // *Optics Express*. — 2010. — Vol. 18, no. 18. — P. 18894—18899.
51. Coherent synthesis of terahertz radiation from femtosecond laser filaments in air / S. I. Mitryukovskiy, Y. Liu, B. Prade, A. Houard, A. Mysyrowicz // *Applied Physics Letters*. — 2013. — Vol. 102, no. 22. — P. 221107.
52. High-power THz wave generation in plasma induced by polarization adjusted two-color laser pulses / Y. Minami, T. Kurihara, K. Yamaguchi, M. Nakajima, T. Suemoto // *Applied Physics Letters*. — 2013. — Vol. 102, no. 4. — P. 041105.
53. *Kostin, V. A.* Ionization-induced conversion of ultrashort Bessel beam to terahertz pulse / V. A. Kostin, N. V. Vvedenskii // *Optics Letters*. — 2010. — Vol. 35, no. 2. — P. 247—249.
54. *Silaev, A. A.* Analytical description of generation of the residual current density in the plasma produced by a few-cycle laser pulse / A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii // *Physics of Plasmas*. — 2015. — Vol. 22, no. 5. — P. 053103.

55. Waveform-controlled terahertz radiation from the air filament produced by few-cycle laser pulses / Y. Bai, L. Song, R. Xu, C. Li, P. Liu, Z. Zeng, Z. Zhang, H. Lu, R. Li, Z. Xu // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 108, no. 25. — P. 255004.
56. Terahertz emission of atoms driven by ultrashort laser pulses / Z. Zhou, D. Zhang, Z. Zhao, J. Yuan // *Physical Review A*. — 2009. — Vol. 79, no. 6. — P. 063413.
57. Quantum-Mechanical Description of Ionization-Induced Generation of Tunable Mid-Infrared Pulses / A. A. Silaev, A. A. Romanov, V. A. Kostin, N. V. Vvedenskii // *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 826. — IOP Publishing. 2017. — P. 012014.
58. *Blank, V.* Spatio-spectral characteristics of ultra-broadband THz emission from two-colour photoexcited gas plasmas and their impact for nonlinear spectroscopy / V. Blank, M. Thomson, H. Roskos // *New Journal of Physics*. — 2013. — Vol. 15, no. 7. — P. 075023.
59. Terahertz imaging with sub-wavelength resolution by femtosecond laser filament in air / J. Zhao, W. Chu, L. Guo, Z. Wang, J. Yang, W. Liu, Y. Cheng, Z. Xu // *Scientific Reports*. — 2014. — Vol. 4. — P. 3880—3887.
60. *Tani, S.* Ultrafast carrier dynamics in graphene under a high electric field / S. Tani, F. Blanchard, K. Tanaka // *Physical Review Letters*. — 2012. — Vol. 109, no. 16. — P. 166603.
61. *Kampfrath, T.* Resonant and nonresonant control over matter and light by intense terahertz transients / T. Kampfrath, K. Tanaka, K. A. Nelson // *Nature Photonics*. — 2013. — Vol. 7, no. 9. — P. 680—690.
62. *Clough, B.* Laser air photonics: beyond the terahertz gap / B. Clough, J. Dai, X.-C. Zhang // *Materials Today*. — 2012. — Vol. 15, no. 1/2. — P. 50—58.
63. Terahertz control of nanotip photoemission / L. Wimmer, G. Herink, D. Solli, S. Yalunin, K. Eichtenkamp, C. Ropers // *Nature Physics*. — 2014. — Vol. 10, no. 6. — P. 432—437.
64. *Castro-Camus, E.* Polarization-resolved terahertz time-domain spectroscopy / E. Castro-Camus // *Journal of Infrared, Millimeter, and Terahertz Waves*. — 2012. — Vol. 33, no. 4. — P. 418—430.

65. In situ spatial mapping of Gouy phase slip with terahertz generation in two-color field / C. Meng, Z. Lü, Y. Huang, X. Wang, W. Chen, D. Zhang, Z. Zhao, J. Yuan // *Optics Express*. — 2016. — Vol. 24, no. 11. — P. 12301—12309.
66. Ultrabroadband terahertz spectroscopy of a liquid crystal / N. Vieweg, B. Fischer, M. Reuter, P. Kula, R. Dabrowski, M. Celik, G. Frenking, M. Koch, P. U. Jepsen // *Optics Express*. — 2012. — Vol. 20, no. 27. — P. 28249—28256.
67. Coherent heterodyne time-domain spectrometry covering the entire “terahertz gap” / N. Karpowicz, J. Dai, X. Lu, Y. Chen, M. Yamaguchi, H. Zhao, X.-C. Zhang, L. Zhang, C. Zhang, M. Price-Gallagher, [et al.] // *Applied Physics Letters*. — 2008. — Vol. 92, no. 1. — P. 011131.
68. Ionization delays in few-cycle-pulse multiphoton quantum-beat spectroscopy in helium / R. Pazourek, M. Reduzzi, P. A. Carpeggiani, G. Sansone, M. Gaarde, K. Schafer // *Physical Review A*. — 2016. — Vol. 93, no. 2. — P. 023420.
69. Field-free molecular orientation with terahertz few-cycle pulses / C.-C. Shu, K.-J. Yuan, W.-H. Hu, S.-L. Cong // *The Journal of Chemical Physics*. — 2010. — Vol. 132, no. 24. — P. 244311.
70. Field-free orientation of CO by a terahertz few-cycle pulse / C. Qin, Y. Tang, Y. Wang, B. Zhang // *Physical Review A*. — 2012. — Vol. 85, no. 5. — P. 053415.
71. Steering proton migration in hydrocarbons using intense few-cycle laser fields / M. Kübel, R. Siemering, C. Burger, N. G. Kling, H. Li, A. Alnaser, B. Bergues, S. Zherebtsov, A. Azzeer, I. Ben-Itzhak, [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 116, no. 19. — P. 193001.
72. Попов, В. С. Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) / В. С. Попов // *Успехи физических наук*. — 2004. — Т. 174, № 9. — С. 921—951.
73. Tong, X. M. Empirical formula for static field ionization rates of atoms and molecules by lasers in the barrier-suppression regime / X. M. Tong, C. D. Lin // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. — 2005. — Vol. 38, no. 15. — P. 2593.
74. Efficient terahertz generation by optical rectification in Si-LiNbO<sub>3</sub>-air-metal sandwich structure with variable air gap / S. B. Bodrov, I. E. Ilyakov, B. V. Shishkin, A. N. Stepanov // *Applied Physics Letters*. — 2012. — Т. 100, № 20. — С. 201114.

75. Highly efficient terahertz pulse generation by optical rectification in stoichiometric and cryo-cooled congruent lithium niobate / W. R. Huang, S.-W. Huang, E. Granados, K. Ravi, K.-H. Hong, L. E. Zapata, F. X. Kärtner // *Journal of Modern Optics*. — 2015. — Vol. 62, no. 18. — P. 1486—1493.
76. Generation of 0.9-mJ THz pulses in DSTMS pumped by a Cr: Mg<sub>2</sub>SiO<sub>4</sub> laser / C. Vicario, A. V. Ovchinnikov, S. I. Ashitkov, M. B. Agranat, V. E. Fortov, C. P. Hauri // *Optics Letters*. — 2014. — Vol. 39, no. 23. — P. 6632—6635.
77. *Carnio, B.* Enhanced broadband terahertz radiation generation near the reststrahlen band in sub-wavelength leaky-mode LiNbO<sub>3</sub> waveguides / B. Carnio, A. Elezzabi // *Optics letters*. — 2018. — T. 43, № 8. — C. 1694—1697.
78. Highly efficient optical-to-terahertz conversion in a sandwich structure with LiNbO<sub>3</sub> core / S. B. Bodrov, A. N. Stepanov, M. I. Bakunov, B. V. Shishkin, I. E. Ilyakov, R. A. Akhmedzhanov // *Optics Express*. — 2009. — T. 17, № 3. — C. 1871—1879.
79. *Lewis, R. A.* A review of terahertz sources / R. A. Lewis // *Journal of Physics D: Applied Physics*. — 2014. — Vol. 47, no. 37. — P. 374001.
80. Toward remote high energy terahertz generation / T.-J. Wang, S. Yuan, Y. Chen, J.-F. Daigle, C. Marceau, F. Théberge, M. Châteauneuf, J. Dubois, S. L. Chin // *Applied Physics Letters*. — 2010. — Vol. 97, no. 11. — P. 111108.
81. Remote THz generation from two-color filamentation: long distance dependence / J.-F. Daigle, F. Théberge, M. Henriksson, T.-J. Wang, S. Yuan, M. Châteauneuf, J. Dubois, M. Piché, S. L. Chin // *Optics Express*. — 2012. — Vol. 20, no. 6. — P. 6825—6834.
82. Remote generation of high-energy terahertz pulses from two-color femtosecond laser filamentation in air / T.-J. Wang, J.-F. Daigle, S. Yuan, F. Théberge, M. Châteauneuf, J. Dubois, G. Roy, H. Zeng, S. Chin // *Physical Review A*. — 2011. — Vol. 83, no. 5. — P. 053801.
83. High-power terahertz generation from two-color laser filamentation in various types of gases / Y. J. Yoo, D. Kuk, Z. Zhong, K.-Y. Kim // *CLEO: Science and Innovations*. — Optical Society of America. 2017. — STu3J—7.

84. Highly efficient broadband terahertz generation from ultrashort laser filamentation in liquids / I. Dey, K. Jana, V. Y. Fedorov, A. D. Koulouklidis, A. Mondal, M. Shaikh, D. Sarkar, A. D. Lad, S. Tzortzakis, A. Couairon, [et al.] // *Nature Communications*. — 2017. — Vol. 8, no. 1. — P. 1184.
85. *Karpowicz, N.* Coherent terahertz echo of tunnel ionization in gases / N. Karpowicz, X.-C. Zhang // *Physical Review Letters*. — 2009. — Vol. 102, no. 9. — P. 093001.
86. *Dai, J.* Coherent polarization control of terahertz waves generated from two-color laser-induced gas plasma / J. Dai, N. Karpowicz, X.-C. Zhang // *Physical Review Letters*. — 2009. — Vol. 103, no. 2. — P. 023001.
87. *Wen, H.* Coherent terahertz polarization control through manipulation of electron trajectories / H. Wen, A. M. Lindenberg // *Physical Review Letters*. — 2009. — Vol. 103, no. 2. — P. 023902.
88. *Woerner, M.* Plasma photonics: Harnessing terahertz polarization / M. Woerner, K. Reimann // *Nature Photonics*. — 2009. — Vol. 3, no. 9. — P. 495—499.
89. *Rodriguez, G.* Scaling behavior of ultrafast two-color terahertz generation in plasma gas targets: energy and pressure dependence / G. Rodriguez, G. L. Dakovski // *Optics Express*. — 2010. — Vol. 18, no. 14. — P. 15130—15143.
90. High-order harmonic generation by atoms in a few-cycle laser pulse: Carrier-envelope phase and many-electron effects / M. V. Frolov, N. L. Manakov, A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii, A. F. Starace // *Physical Review A*. — 2011. — Vol. 83, no. 2. — P. 021405.
91. Bright coherent ultrahigh harmonics in the keV X-ray regime from mid-infrared femtosecond lasers / T. Popmintchev, M.-C. Chen, D. Popmintchev, P. Arpin, S. Brown, S. Ališauskas, G. Andriukaitis, T. Balčiunas, O. D. Mücke, A. Pugzlys, [et al.] // *Science*. — 2012. — Vol. 336, no. 6086. — P. 1287—1291.
92. *Chang, Z.* Attosecond optics and technology: progress to date and future prospects / Z. Chang, P. B. Corkum, S. R. Leone // *JOSA B*. — 2016. — Vol. 33, no. 6. — P. 1081—1097.
93. *Krausz, F.* Attosecond metrology: from electron capture to future signal processing / F. Krausz, M. I. Stockman // *Nature Photonics*. — 2014. — Vol. 8, no. 3. — P. 205—209.

94. Controlling dielectrics with the electric field of light / M. Schultze, E. M. Bothschafter, A. Sommer, S. Holzner, W. Schweinberger, M. Fiess, M. Hofstetter, R. Kienberger, V. Apalkov, V. S. Yakovlev, [et al.] // *Nature*. — 2013. — Vol. 493, no. 7430. — P. 75—78.
95. Broadband and tunable mid-infrared laser source based on a transversal array of chirped filaments / J.-F. Daigle, F. Théberge, G. Roy, M. Châteauneuf, J. Dubois // *Applied Physics Letters*. — 2012. — Vol. 101, no. 26. — P. 261103.
96. Gas-phase broadband spectroscopy using active sources: progress, status, and applications / K. C. Cossel, E. M. Waxman, I. A. Finneran, G. A. Blake, J. Ye, N. R. Newbury // *JOSA B*. — 2017. — Vol. 34, no. 1. — P. 104—129.
97. Widely tunable mid-infrared fiber laser source based on soliton self-frequency shift in microstructured tellurite fiber / M. Y. Koptev, E. A. Anashkina, A. V. Andrianov, V. V. Dorofeev, A. F. Kosolapov, S. V. Muravyev, A. V. Kim // *Optics Letters*. — 2015. — Vol. 40, no. 17. — P. 4094—4097.
98. Generation of intense 100 fs solitons tunable from 2 to 4.3  $\mu\text{m}$  in fluoride fiber / Y. Tang, L. G. Wright, K. Charan, T. Wang, C. Xu, F. W. Wise // *Optica*. — 2016. — Vol. 3, no. 9. — P. 948—951.
99. Concepts, performance review, and prospects of table-top, few-cycle optical parametric chirped-pulse amplification / A. Vaupel, N. Bodnar, B. Webb, L. Shah, M. C. Richardson // *Optical Engineering*. — 2013. — Vol. 53, no. 5. — P. 051507.
100. Multi-millijoule few-cycle mid-infrared pulses through nonlinear self-compression in bulk / V. Shumakova, P. Malevich, S. Ališauskas, A. Voronin, A. Zheltikov, D. Faccio, D. Kartashov, A. Baltuška, A. Pugžlys // *Nature Communications*. — 2016. — Vol. 7. — P. 12877.
101. 7  $\mu\text{m}$ , ultrafast, sub-millijoule-level mid-infrared optical parametric chirped pulse amplifier pumped at 2  $\mu\text{m}$  / D. Sanchez, M. Hemmer, M. Baudisch, S. Cousin, K. Zawilski, P. Schunemann, O. Chalus, C. Simon-Boisson, J. Biegert // *Optica*. — 2016. — Vol. 3, no. 2. — P. 147—150.
102. Solid-state source of subcycle pulses in the midinfrared / E. A. Stepanov, A. A. Lanin, A. A. Voronin, A. B. Fedotov, A. M. Zheltikov // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 117, no. 4. — P. 043901.

103. Generation of high beam quality, high-energy and broadband tunable mid-infrared pulse from a KTA optical parametric amplifier / Y. Chen, Y. Li, W. Li, X. Guo, Y. Leng // *Optics Communications*. — 2016. — Vol. 365. — P. 7—13.
104. 10 mJ 5-cycle pulses at 1.8 micrometers through optical parametric amplification / N. Thire, S. Beaulieu, V. Cardin, A. Laramée, V. Wanie, B. E. Schmidt, F. Légaré // *Applied Physics Letters*. — 2015. — Vol. 106, no. 9. — P. 091110.
105. High-efficiency optical parametric chirped-pulse amplifier in BiB<sub>3</sub>O<sub>6</sub> for generation of 3 mJ, two-cycle, carrier-envelope-phase-stable pulses at 1.7  $\mu\text{m}$  / Y. Yin, J. Li, X. Ren, K. Zhao, Y. Wu, E. Cunningham, Z. Chang // *Optics Letters*. — 2016. — Vol. 41, no. 6. — P. 1142—1145.
106. *Strelkov, V. V.* High-order optical processes in intense laser field: Towards non-perturbative nonlinear optics / V. V. Strelkov // *Physical Review A*. — 2016. — Vol. 93, no. 5. — P. 053812.
107. *Fuji, T.* Generation of sub-two-cycle mid-infrared pulses by four-wave mixing through filamentation in air / T. Fuji, T. Suzuki // *Optics Letters*. — 2007. — T. 32, № 22. — C. 3330—3332.
108. *Alexandrov, L. N.* Coulomb effects in directional current excitation in the ionization of gas by a two-color laser field / L. N. Alexandrov, M. Y. Emelin, M. Y. Ryabikin // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. — 2014. — Vol. 47, no. 20. — P. 204028.
109. *Silaev, A. A.* Quantum-mechanical approach for calculating the residual quasi-dc current in a plasma produced by a few-cycle laser pulse / A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii // *Physica Scripta*. — 2009. — Vol. 2009, T135. — P. 014024.
110. Intense terahertz generation in two-color laser filamentation: energy scaling with terawatt laser systems / T. I. Oh, Y. S. You, N. Jhajj, E. W. Rosenthal, H. M. Milchberg, K. Y. Kim // *New Journal of Physics*. — 2013. — Vol. 15, no. 7. — P. 075002-1-6.
111. Generation of tunable and broadband far-infrared laser pulses during two-color filamentation / F. Théberge, M. Châteauneuf, G. Roy, P. Mathieu, J. Dubois // *Physical Review A*. — 2010. — Vol. 81, no. 3. — P. 033821.
112. Physics of the conical broadband terahertz emission from two-color laser-induced plasma filaments / A. Gorodetsky, A. D. Koulouklidis, M. Massaouti, S. Tzortzakis // *Physical Review A*. — 2014. — Vol. 89, no. 3. — P. 033838-1-7.

113. *Kostin, V. A.* Generation of Few-and Subcycle Radiation in Midinfrared-to-Deep-Ultraviolet Range During Plasma Production by Multicolor Femtosecond Pulses / V. A. Kostin, N. V. Vvedenskii // *Physical Review Letters*. — 2018. — Vol. 120, no. 6. — P. 065002.

**Публикации автора по теме диссертации**

- A1. Ionization-induced multiwave mixing: terahertz generation with two-color laser pulses of various frequency ratios / V. A. Kostin, I. D. Laryushin, A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii // *Physical Review Letters*. — 2016. — Vol. 117, no. 3. — P. 035003.
- A2. Ионизационный механизм генерации ультракоротких частотно-перестраиваемых импульсов в среднем ИК-диапазоне / А. А. Силаев, В. А. Костин, И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский // *Письма в ЖЭТФ*. — 2018. — Т. 107, № 3. — С. 160—165.
- A3. Возбуждение низкочастотных остаточных токов на комбинационных частотах ионизирующего двухцветного лазерного импульса / Н. В. Введенский, В. А. Костин, И. Д. Ларюшин, А. А. Силаев // *Квантовая электроника*. — 2016. — Т. 46, № 5. — С. 419—425.
- A4. Low-frequency generation by ionizing femtosecond laser pulse supplied by its second or half-harmonic / I. D. Laryushin, L. S. Kuznetsov, V. A. Kostin, A. A. Silaev, N. V. Vvedenskii // *Problems of Atomic Science and Technology*. — 2015. — Vol. 98, no. 4. — P. 270—273.
- A5. Analytical study of residual-current excitation during gas ionization by two-color laser pulse / A. A. Silaev, V. A. Kostin, I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii // *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 594. — IOP Publishing. 2015. — P. 012020—012026.
- A6. Theory and simulations of laser-plasma generation of frequency-tunable mid-infrared pulses / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // *Proceedings of the International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics - 2014”*. — 2014. — P. 222.

- A7. Ionization-induced generation of tunable few-cycle mid-infrared pulses / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // Abstracts of the 23th International Laser Physics Workshop (LPHYS'14). Seminar «Strong field and attosecond physics». Sofia, Bulgaria. July 14–18, 2014. — 2014. — P. 28.
- A8. Laser-plasma source of tunable mid-infrared pulses / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // Spring World Congress on Engineering and Technology (SCET 2014). April 16-18, 2014, Shanghai, China. — 2014. — P. 47–48.
- A9. Theory and simulations of laser-plasma generation of tunable few-cycle mid-infrared pulses / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // 26th Symposium on Plasma Physics and Technology. 16th – 19th June, 2014, Prague, Czech Republic. — 2014. — P. 51.
- A10. Laser-plasma generation of tunable few-cycle mid-infrared pulses / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // 7th International Congress on Plasma Physics. 15-19 September, 2014, Lisbon, Portugal. Book of Abstracts. — 2014. — P. 20.
- A11. Terahertz generation from ionization-induced wavemixing of two femtosecond pulses with different frequencies / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // Abstracts of the 24th International Laser Physics Workshop (LPHYS'15). Seminar «Nonlinear Optics and Spectroscopy». Shanghai, China. August 21–25, 2015. — 2015.
- A12. Ionization-induced wavemixing of intense laser pulses / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // International Conference-School Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015 (DBC II). Nizhny Novgorod, Russia, July 20-24, 2015. Extended Abstracts. — 2015. — P. 34–35.
- A13. Генерация терагерцового излучения при ионизации газа бихроматическим лазерным импульсом с рациональным отношением частот / И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, В. А. Костин, А. А. Силаев // Сборник трудов IX Международной конференции молодых ученых и специалистов «Оптика-2015», Спб: Университет ИТМО, 2015. — 2015. — С. 199–201.

- A14. Ионизационно-стимулированная генерация ультракоротких частотно-перестраиваемых импульсов в среднем инфракрасном диапазоне длин волн / И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, В. А. Костин, А. А. Силаев // Сборник трудов IX Международной конференции молодых ученых и специалистов «Оптика-2015», Спб: Университет ИТМО, 2015. — 2015. — С. 292—293.
- A15. Laser-plasma source of ultrashort mid-infrared pulses / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // 10th International Ultrafastoptics Conference (UFOX). Beijing, China, August 16-21, 2015. Conference Book. — 2015. — P. 50.
- A16. Generation of frequency-tunable mid-infrared pulses during gas ionization by two-color fields / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // 11th Conference on Super-Intense Laser-Atom Physics, Bordeaux, France, 7-10 September 2015. Book of Abstracts. — 2015. — P. 114.
- A17. Ionization-induced wavemixing of two femtosecond pulses with different frequencies as a source of terahertz wave generation / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // EMN Light-Matter Interactions Meeting 2016, Singapore, May 10-13, 2016, Program and Abstract. — 2015. — P. 44—45.
- A18. Two-color laser-plasma generation of ultrashort frequency-tunable mid-infrared pulses / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // 7th International Workshop and Summer School on Plasma Physics, 26 June - 2 July, 2016, Kiten, Bulgaria, Book of Abstracts. — 2016. — P. 61.
- A19. Multiwave mixing of ionizing two-color laser pulses as a source of terahertz radiation / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // 25th Annual International Laser Physics Workshop (LPHYS'16). Yerevan, Republic of Armenia, July 11 – 15, 2016. Abstracts. — 2016. — S2.4.4.
- A20. Terahertz and mid-infrared radiation from gas ionized by two-color laser pulses. / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // The VII International Symposium and Young Scientist School «Modern problems of laser physics» (MPLP 2016). Novosibirsk, Russia, August 22 – 28, 2016. Technical digest. — 2016. — P. 181.

- A21. Ионизационный механизм генерации ультракоротких частотно-перестраиваемых импульсов в среднем инфракрасном диапазоне длин волн / И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, В. А. Костин, А. А. Силаев // Труды XVIII научной конференции по радиофизике. Нижний Новгород. — 2014. — С. 10—12.
- A22. Генерация терагерцового излучения при ионизации газа двухцветными лазерными импульсами с рациональным отношением частот / И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, В. А. Костин, А. А. Силаев // Труды XIX научной конференции по радиофизике. Нижний Новгород. — 2015. — С. 9—11.
- A23. Оптимальные параметры двухцветных ионизирующих лазерных импульсов для генерации терагерцового излучения / И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, В. А. Костин, А. А. Силаев // Труды XX научной конференции по радиофизике. Нижний Новгород. — 2016. — С. 9—11.
- A24. Генерация ультракоротких частотно-перестраиваемых импульсов тока в среднем ИК диапазоне при ионизации газа бихроматическими фемтосекундными лазерными импульсами / Л. С. Кузнецов, И. Д. Ларюшин, Н. В. Введенский, В. А. Костин, А. А. Силаев // Труды XIX научной конференции по радиофизике. Нижний Новгород. — 2015. — С. 11—12.
- A25. Ionization-induced wavemixing as the cause of terahertz generation by two-color laser pulses with various frequency ratios / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // Abstract of 19-th International Conference and School on Quantum Electronics. Sozopol, Bulgaria. 26-30 September, 2016. — 2016. — P. 32.
- A26. Optimal parameters of two-color ionizing laser pulses for terahertz generation / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin, A. A. Silaev // Abstracts of 19th International Conference on Optics, Lasers and Spectroscopy. Paris, France. September 21-22, 2017. — 2017. — P. 606.
- A27. *Laryushin, I. D.* Generation of terahertz radiation by two-color femtosecond laser pulses with arbitrary polarizations of components / I. D. Laryushin, N. V. Vvedenskii, V. A. Kostin // International Conference on Ultrafast Optical Science UltrafastLight-2018. Book of Abstracts. October 1-5, 2018, Moscow. — 2018. — P. 158.