

На правах рукописи

Секацкая Алина Вадимовна

**ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ ОБОБЩЕННОГО
УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО-СИВАШИНСКОГО**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2020

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений федерального государственного бюджетного учреждения высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова».

Научный руководитель:

Куликов Анатолий Николаевич
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры дифференциальных
уравнений ФГБОУ ВО «Ярославский
государственный университет
им. П.Г. Демидова»

Официальные оппоненты:

Нестеров Андрей Владимирович
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры информатики,
ФГБОУ ВО «Российский экономический
университет имени Г.В. Плеханова»

Левашова Наталия Тимуровна
кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики ФГБОУ
ВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова»

Ведущая организация:

кафедра прикладной математики
ФГБОУ ВО «Вологодский государственный
университет»

Защита состоится «14» мая 2020 г. в 14 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» по адресу: 603950, г. Н. Новгород, пр. Гагарина, 23, корп. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГАОУ ВО «Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского».

Автореферат разослан «___» _____ 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20,
кандидат физико-математических наук

Р. С. Бирюков

Общая характеристика работы

В диссертационной работе изучается вопрос о существовании, устойчивости и асимптотическом представлении пространственно неоднородных решений для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского. В работе также рассматривается и классический вариант такого уравнения в той форме, которая характерна для работ Курамото, Сивашинского, Темама. В диссертационной работе эти модификации уравнения Курамото-Сивашинского (обобщенный и классический варианты) изучаются в случае однородных краевых условий Неймана и Дирихле. При анализе возникающих бифуркационных задач использовались и развивались такие методы теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством как метод интегральных многообразий, теория нормальных форм Пуанкаре, а также асимптотические методы анализа, а также во второй главе применяется метод Галеркина в случае четырех- и пятичленного приближения.

Актуальность темы исследования

В диссертационной работе рассматривается ряд бифуркационных задач для известного уравнения Курамото-Сивашинского, его естественных обобщений и модификаций. Следует отметить, что под названием «уравнение Курамото-Сивашинского» в настоящее время подразумевается целый класс достаточно внешне похожих уравнений, но часто имеющих определенную специфику. Сразу отметим, что уравнением Курамото-Сивашинского долгое время называли уравнение, полученное в работах ^{1 2} при изучении математических задач химической кинетики и при асимптотическом интегрировании периодической краевой задачи для системы Навье-Стокса.

Актуальность темы исследования имеет два различных аспекта: прикладной и теоретический. Прикладной аспект связан с тем обстоятельством, что рассматриваемые модификации уравнения Курамото-Сивашинского используются, начиная с работы ³, где обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского используется в качестве математической модели процесса формирования неоднородного рельефа на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием ионной бомбардировки или лазерного воздействия на эту поверхность. Оба этих физико-технологических процесса находят широкое применение в современной микро- и наноэлектронике при производстве элементной базы компьютеров. Важное прикладное значение пучковых технологий послужило толчком к появлению достаточно большого числа работ, в которых численно были исследованы различные варианты уравнения Курамото-Сивашинского. В этих

¹Kuramoto Y. Chemical oscillations waves and turbulence // Berlin. Springer. — 1984. — P. 156.

²Sivashinsky G. I. Weak turbulence in periodic flows // Physica D. — 1985. — V. 17, № 2. — P. 243–255.

³Bradley R. M., Harper J. M. E. Theory of Ripple Topography Induced by Ion Bombardment // J. Vac. Sci. Technol. A. — 1988. — V. 6. — P. 2390–2395.

работах авторы предлагают, как правило, феноменологический подход для объяснения образования неоднородных структур. Для этого использовались численные методы (смотри, например, ^{4 5} и список цитируемой там литературы), а также ищались некоторые виды точных решений, например, в виде бегущих волн. При этом практически во всех работах предпочтение отдавалось периодическим краевым условиям.

С математической точки зрения для анализа этих задач самый естественный подход состоит в следующем. Пространственно неоднородный рельеф может возникать при потере устойчивости пространственно однородными состояниями равновесия. Это приводит к соответствующим бифуркационным задачам, которые и были изучены в диссертационной работе.

Как уже отмечалось, в большинстве работ с прикладной направленностью использовались и продолжают использоваться периодические краевые условия. Вместе с тем с прикладной точки зрения представляют интерес и иной выбор краевых условий. Например, однородных краевых условий Дирихле или Неймана.

Подчеркнем, что первыми работами, где дан анализ динамики решений классического варианта уравнения Курамото-Сивашинского, были работы Р. Темама с соавторами (смотри, например, монографию ⁶ и список цитируемой там литературы). В них было доказано существование глобального аттрактора конечной размерности именно в случае выбора однородных краевых условий Неймана и Дирихле. Анализу локальных бифуркаций в данных краевых задачах была посвящена работа ⁷, в которой был уточнен и продолжен анализ из работ Р. Темама. В частности, был изучен вопрос о существовании пространственно неоднородных решений на базе применения метода Галеркина в случае выбора четырех и пяти базисных функций с последующим бифуркационным анализом полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой анализ предполагал использование численных методов. Как показано в диссертационной работе такой подход, основанный на методе Галеркина, имеет определенные недостатки и в ряде случаев анализ соответствующих бифуркационных задач на базе применения теории бесконечномерных динамических систем имеет существенные преимущества.

Отметим, что исследование, проведенное в диссертационной работе, актуально по многим параметрам и с чисто математической точки зрения. Бифуркационные задачи при анализе рассматриваемых уравнений вместе с однород-

⁴Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. — 2010. — Т. 1, № 2. — С. 151–158.

⁵Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Федянин Т. Е. Особенности самоорганизации наноструктур на поверхности полупроводников при ионной бомбардировке // Матем. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 12. — С. 23–28.

⁶Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd ed // Appl. Math. Ser. — 1997. — V. 68. New York: Springer-Verlag.

⁷Armbruster D., Guckenheimer J., Holmes Ph. Kuramoto-Sivashinsky dynamics on the center-unstable manifold // Siam J. Appl. Math. — 1989. — V. 49, №. 3. — P. 676–691.

ными краевыми условиями Неймана имеют характерные особенности. Так, например, при всех значениях параметров спектр устойчивости однородных состояний равновесия всегда содержит собственное значение равное нулю. Следовательно, возникающие при этом бифуркационные задачи при критическом значении параметров, имеют как минимум двукратное нулевое собственное значение, а в некоторых вариантах постановки задачи реализуется трехкратный ноль спектра соответствующего линейного дифференциального оператора.

В работе также уделено внимание такому аспекту как влияние выбора краевых условий на характер бифуркаций, а также их зависимость от выбора области. Подчеркнем еще раз, что в большинстве работ изучались задачи для уравнения Курамото-Сивашинского в случае, когда неизвестная функция зависит от двух переменных: времени и одной пространственной переменной. Учет еще одной пространственной переменной приводит к новым задачам: в случае однородных краевых условий Неймана в ряде случаев к анализу бифуркаций при наличии трехмерного нулевого собственного значения, то есть актуальной задачи не только для бесконечномерных динамических систем, но и для конечномерных.

Цели и задачи

Целями и задачами данной работы являются:

1. анализ возникающих бифуркационных задач для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в случае однородных краевых условий Неймана и Дирихле;
2. изучение вопроса о характере локальных бифуркаций пространственно неоднородных состояний равновесия при смене устойчивости однородными состояниями равновесия;
3. анализ устойчивости пространственно неоднородных состояний равновесия;
4. вывод асимптотических формул для бифурцирующих пространственно неоднородных решений;
5. сравнение результатов анализа задач на основе применения и развития методов теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством с результатами анализа с использованием метода Галеркина;
6. анализ влияния краевых условий и выбора области на характер бифуркаций.

Научная новизна

Бифуркационные задачи для уравнения Курамото-Сивашинского в случае двух пространственных переменных с краевыми условиями Неймана и Дирихле другими авторами не рассматривались. При этом следует отметить, что при анализе обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского вместе с однородными краевыми условиями Неймана характерны краевые задачи, когда реализуются случаи близкие к критическим двукратного и трехкратного нулевых собственных значений. При этом одно нулевое собственное значение существует при всех значениях бифуркационного параметра, то есть возникаю бифуркационные задачи не общего положения.

Для всех изученных краевых задач особое значение отдавалось анализу такого вопроса как существование, устойчивость и асимптотическое представление пространственно неоднородных решений. Для этого был использован модифицированный вариант метода Крылова-Боголюбова. Следует отметить, что вывод асимптотических формул имеет не только теоретическое значение, но позволяет описывать форму неоднородного рельефа на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием ионной бомбардировки, то есть играет несомненно полезную роль при моделировании технологических процессов в микро- и наноэлектронике.

В работе проведен сравнительный анализ двух подходов при изучении бифуркационных задач для уравнения Курамото-Сивашинского. Один из них основан на применении и развитии методов анализа динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Второй предполагает использование метода Галеркина.

Отметим, что большинство исследований, посвященных анализу бифуркаций в тех или иных вариантах уравнения Курамото-Сивашинского предполагало применение трех подходов: либо использование метода Галеркина, либо поиск решения в виде бегущих волн, либо численный анализ с использованием компьютерных вычислений. То есть применялись методы анализа, отличные от используемых и развитых в диссертации.

Теоретическая и практическая значимость

В работе дан анализ локальных бифуркаций для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в случае двух пространственных переменных. Рассмотренный вариант однородных краевых условий Неймана привел к новой постановке задачи, когда реализовывался случай близкий к критическому двукратного и трехкратного нулевого собственного значения. При анализе задачи существенно использовались не только методы характерные для бесконечномерных динамических систем, но и такие особенности многих задач математической физики как инвариантность уравнения относительно некоторых преобразований, входящих в группу преобразований Галилея.

Применение методов теории бесконечномерных динамических систем позволило одновременно дать ответы на такие вопросы как существование пространственно неоднородных решений, их устойчивость и асимптотические представления.

В работе рассмотрены и исследованы задачи, актуальные для приложений в ряде разделов физики. В первую очередь, в микро- и наноэлектронике. С математической точки зрения подтверждена концепция о детерминированном характере формирования рельефа.

Методология и методы исследования

В диссертационной работе для решения возникающих бифуркационных задач были использованы методы исследования динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (пространством начальных условий) такие как метод инвариантных многообразий в сочетании с аппаратом теории нормальных форм, асимптотические методы, спектральная теория дифференциальных операторов, проекционные методы (метод Галеркина). В частности, это позволило получить асимптотические формулы для решений, бифурцирующих от однородных состояний равновесия, в случаях близких к критическим. При выводе асимптотических формул был использован модифицированный вариант метода Крылова-Боголюбова.

Во второй части второй главы был дан анализ двух краевых задач для уравнения Курамото-Сивашинского на основе применения не только современной теории динамических систем, но и с использованием метода Галеркина. Применение метода Галеркина сопровождалось использованием компьютерных технологий, что позволило получить формулы для определения координат состояний равновесия.

Положения, выносимые на защиту

1. Результаты бифуркационного анализа обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского, в котором неизвестная функция зависит от двух пространственных переменных, в случае однородных краевых условий Неймана. Данные результаты содержат достаточные условия существования пространственно неоднородных решений трех типов: решения, зависящие только от первой пространственной переменной, от второй, от обеих пространственных переменных, а также асимптотические формулы для таких решений, условия их устойчивости. Результаты сформулированы в виде трех основных теорем: теоремы 1.1, теоремы 1.2, теоремы 1.3., теоремы 1.4 из главы 1.
2. Результаты анализа классического уравнения Курамото-Сивашинского, в котором неизвестная функция зависит от одной пространственной пере-

менной, в случае однородных краевых условий Неймана и однородных краевых условий Дирихле, которые выявили существенную зависимость характера бифуркаций и вида асимптотических формул от выбора краевых условий. Полученные результаты сформулированы в виде теорем 2.1, 2.2, 2.3 из второй главы о существовании и свойствах пространственно неоднородных решений соответствующих краевых задач.

3. Результаты анализа конечномерных аппроксимаций краевых задач для классической версии уравнения Курамото-Сивашинского из второй главы диссертационной работы, полученных с помощью метода Галеркина. Частичное сравнение результатов анализа с использованием метода Галеркина с результатами анализа, основанного на применении и развитии качественных методов теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством, таких как: метод интегральных многообразий, теория нормальных форм Пуанкаре, а также асимптотические методы анализа.
4. Результаты анализа обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в случае однородных краевых условий Неймана и однородных краевых условий Дирихле в различных областях, таких как: прямоугольник, квадрат и равнобедренный треугольник. Эти результаты содержат достаточные условия существования, условия устойчивости пространственно неоднородных решений, а также асимптотические формулы для полученных решений. Следствиями этих результатов являются выводы о влиянии геометрических характеристик и выбора краевых условий на структуру решений изученных краевых задач.

Обоснованность и достоверность

При доказательстве теорем использовались результаты из таких разделов современной математики как качественная теория динамических систем, математический и функциональный анализ, некоторые разделы теории дифференциальных операторов.

Ряд полученных результатов имеет прикладной характер. Эти результаты на качественном уровне сравнивались с выводами, полученными после интерпретаций физических и численных экспериментов. Имеют вполне удовлетворительное соответствие.

Апробация работы

Основные результаты и положения работы были представлены на семинарах:

1. «Нелинейная динамика и синергетика», Ярославль (май, 2019);

2. «Нелинейная динамика: теория и приложения», Нижний Новгород (октябрь, 2019).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих конференциях:

1. международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферма-Паста-Улама. Ярославль (октябрь, 2015);
2. международная конференция «Путь в науку». Ярославль (апрель, 2015; апрель, 2016; апрель, 2017; апрель, 2018);
3. международная конференция «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования». Рязань (апрель, 2016);
4. международная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория», посвященная 110-летию со дня рождения профессора И. П. Макарова. Рязань (сентябрь, 2016);
5. международная конференция «XII Белорусская математическая конференция». Минск (сентябрь, 2016);
6. международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». Москва (апрель, 2017; апрель, 2018);
7. III Всероссийский научный форум «Наука будущего - наука молодых». Нижний Новгород (сентябрь, 2017);
8. международная студенческая конференция «G-Risc. Science and progress — 2017». Санкт-Петербург (ноябрь, 2017);
9. международная конференция «Новые тенденции в нелинейной динамике». Ярославль (октябрь, 2017);
10. 71-я Всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов с международным участием. Ярославль (апрель, 2018);
11. международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов — 2018». Москва (апрель, 2018);
12. международная научная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике». Рязань (сентябрь, 2018);

13. международная конференция «Интегрируемые системы и нелинейная динамика». Ярославль (октябрь, 2018);
14. международная конференция «ShilnikovWorkshop — 2018». Нижний Новгород (декабрь, 2018).

Частично результаты диссертации были получены в процессе выполнения работ по проекту №1.5722.2017/8.9 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 127 страниц. Библиография включает 69 наименований, сформирована в алфавитном порядке фамилий авторов и располагается в конце диссертационной работы.

Публикации

По теме диссертации опубликовано 5 работ, входящие в перечень ВАК:

1. Секацкая А. В. Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 5. — С. 615–628;
2. Sekatskaya A. V. Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Boundary Value Problem for the Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2018. — Т. 21, № 1. — С. 69–78;
3. Куликов Д. А., Секацкая А. В. О влиянии геометрических характеристик области на структуру нанорельефа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28, № 3. — С. 293–304;
4. Секацкая А. В. Исследование состояний равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными условиями Неймана // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 59–69.
5. Куликов А. Н., Секацкая А. В. Локальные аттракторы в одной краевой задаче для уравнения Курамото-Сивашинского. — Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 2018. — Т. 148. С. 58–65;

Прочие работы:

6. Куликов А. Н., Секацкая А. В. О влиянии выбора краевых условий на динамику решений в модели Бредли-Харпера формирования нанорельефа // Международная научно-практическая конференция «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования» Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина. — 2016. — С. 108-111;
7. Sekatskaya A. Dissipative structures of value boundary problems of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation // Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория: тезисы докладов Междунар. конф., посвященной 110-летию И. П. Макарова. Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина. — 2016. — С. 39-40;
8. Секацкая А. В. Локальные аттракторы в одной краевой задаче для уравнения Курамото-Сивашинского // III Всероссийский научный форум «Наука будущего – наука молодых». Нижний Новгород. — 2017;
9. Sekatskaya A. V. Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Boundary Value Problem for the Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation // Conference Abstracts. International Student Conference «Science and Progress — 2017» — SPb.: SOLO. — 2017. — P. 110;
10. Секацкая А. В. Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского // Новые тенденции в нелинейной динамике: тезисы докладов конференции. — Ярославль: ЯрГУ. — 2017. — С. 74–76;
11. Секацкая А. В. Исследование уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов — 2018» [Электронный ресурс]. — 2018;
12. Секацкая А. В. Состояния равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // 71-я Всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов с международным участием. Ярославль. ЯГТУ. — 2018. — С. 869–872;
13. Секацкая А. В. Состояния равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // Международная конференция «Геометрические методы в теории управления

и математической физике, посвященная 70-летию С. Л. Атанасяна, 70-летию И. С. Красильщика, 70-летию А. В. Самохина, 80-летию В. Т. Фоменко». Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина. — 2018. — С. 21–22;

14. Sekatskaya A. V. The Galerkin method in the problem of inhomogeneous equilibrium states for one of the boundary value problems of the Kuramoto-Sivashinsky equation // Интегрируемые системы и нелинейная динамика: тезисы докладов. — 2018. — С. 75–76;
15. Sekatskaya A. V. On the influence of the shape of a region on the character of local bifurcations in the Kuramoto-Sivashinsky equation // International Conference «ShilnikovWorkshop — 2018». Нижний Новгород. Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. — 2018. — С. 32–34;
16. Секацкая А. В. О характере локальных бифуркаций уравнения Курамото-Сивашинского в различных областях // Вестник Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 133–137.

Результаты диссертации полностью опубликованы в 16-ти работах и в том числе в 5-ти изданиях, входящих в перечень ВАК. Две публикации выполнены совместно с научным руководителем, которому принадлежит постановка задачи. Основная часть работы, связанная с реализацией плана исследования принадлежит соискателю. Данное замечание в целом относится к работе, выполненной совместно с доцентом Д. А. Куликовым.

Краткое содержание работы

В диссертационной работе изучается ряд бифуркационных задач для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского, дополненного однородными краевыми условиями Неймана и Дирихле. Изучен вопрос о существовании и устойчивости, асимптотическом представлении пространственно неоднородных решений, принадлежащих или формирующих локальные аттракторы.

В первой главе изучается обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского в случае, когда неизвестная функция зависит от времени и двух пространственных переменных. Данное уравнение изучено вместе с однородными краевыми условиями Неймана. Показано, что пространственно неоднородные решения возникают при смене устойчивости однородными состояниями равновесия. При этом реализуются случаи, близкие к критическому двукратного или трехкратного нулевого корня спектра устойчивости.

Получены асимптотические представления для бифурцирующих решений.

Во второй главе изучены бифуркационные задачи для классического варианта уравнения Курамото-Сивашинского, дополненного краевыми условиями Дирихле и Неймана.

При анализе динамики решений двух краевых задач использованы современные методы анализа бесконечномерных динамических систем, а также метод Галеркина. Дается сравнительный анализ результатов этих двух подходов.

В третьей главе изучается уравнение Курамото-Сивашинского в случае двух пространственных переменных. Выявлены особенности характера бифуркаций в зависимости от выбора области и краевых условий.

Далее рассмотрим содержание глав более подробно.

Глава 1

В первой главе диссертационной работы рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2, \quad (1)$$

где $u = u(t, x, y)$, $b_1, b_2, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$, $d_1, d_2, d_3 > 0$. Уравнение (1) принято называть обобщенным уравнением Курамото-Сивашинского.

Оно встречается во многих разделах физики. В частности, это уравнение используется в качестве математической модели формирования волнового напорельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов.

В первой главе уравнение (1) рассматривается вместе с однородными условиями Неймана

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi, y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0, y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, \pi, y) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, \pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t, x, 0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t, x, \pi) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Краевая задача (1), (2) имеет семейство пространственно однородных состояний равновесия

$$u(t, x, y) = \text{const}, \quad \text{const} \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Можно показать, что семейство состояний (3) содержит устойчивые состояния равновесия, если справедливы неравенства

$$b_1 < d_1, \quad b_2 < d_2.$$

Можно выделить три критических случая в задаче об устойчивости однородных состояний равновесия:

$$1) \ b_1 = d_1, \ b_2 < d_2; \quad 2) \ b_1 < d_1, \ b_2 = d_2; \quad 3) \ b_1 = d_1, \ b_2 = d_2$$

и, следовательно, три случая, близких к ним.

Пусть $b_1 = d_1$. Тогда спектр устойчивости однородных состояний равновесия ($u(t, x, y) = \text{const}$) содержит двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции $e_0(x) = 1$ и $e_1(x) = \cos x$. Положим $b_1 = d_1 + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $b_2 < d_2$.

Пусть $u(t, x, y)$ — решение краевой задачи (1), (2). Тогда функцию $u(t, x, y)$ можно представить в виде

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi u(t, x, y) dx dy,$$

а для $w(t, x, y)$ справедливо равенство

$$M(w) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi w(t, x, y) dx dy \equiv 0,$$

то есть функция $w(t, x, y)$ имеет нулевое пространственное среднее. При этом краевую задачу (1), (2) можно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{v} = \psi(w), \quad \psi(w) = M \left(c_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (4)$$

и краевой задачи для $w(t, x)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & -b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ & + c_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \psi(w), \end{aligned} \quad (5)$$

где w удовлетворяет краевым условиям (2), а также

$$M(w) = 0. \quad (6)$$

Пусть $b_1 = d_1$. Тогда спектр устойчивости однородных состояний равновесия $u(t, x, y) = \text{const}$ содержит двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции $e_0(x) = 1$ и $e_1(x) = \cos x$.

Положим $b_1 = d_1 + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $b_2 < d_2$. Справедливо утверждение.

Теорема 1.1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ вспомогательная краевая задача (5), (2), (6) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия*

$$S_{11} : w_{11}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2x +$$

$$+\varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (7)$$

$$S_{12} : w_{12}(x, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2x - \\ -\varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}). \quad (8)$$

При выбранных значениях параметра состояниям равновесия S_{11}, S_{12} вспомогательной краевой задачи (5), (2), (6) соответствуют два однопараметрических семейства пространственно неоднородных решений краевой задачи (1), (2)

$$u_{11}(t, x, \varepsilon) = K_{11} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon) \right) t + w_{11}(x, \varepsilon), \\ u_{12}(t, x, \varepsilon) = K_{12} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon) \right) t + w_{12}(x, \varepsilon),$$

где функции w_{11}, w_{12} указаны выше, а $K_{11}, K_{12} \in \mathbb{R}$ и произвольны.

Доказательство теоремы основано на использовании метода интегральных (инвариантных) многообразий, аппарата теории нормальных форм Пуанкаре-Дюлака, и в конечном итоге может быть сведено к анализу нормальной формы (укороченного варианта нормальной формы)

$$\psi' = \frac{c_1}{2} z^2, \\ z' = \gamma_1 z - \frac{c_1^2}{12d_1} z^3.$$

Пусть $b_1 < d_1$, $b_2 = d_2 + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. При таком варианте выбора параметров задачи реализуется случай, близкий к критическому двукратного нулевого собственного значения. При $b_2 = d_2$ есть двукратное нулевое собственное значение спектра устойчивости и ему отвечают собственные функции $e_0 = 1$, $e_1(y) = \cos y$.

В таком случае имеет место утверждение.

Теорема 1.2. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ вспомогательная краевая задача (5), (2), (6) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$S_{21} : w_{21}(y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2}}{|c_2|} \cos y - \frac{\varepsilon}{2c_2} \cos 2y + \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_2|\sqrt{d_2}} \cos 3y + o(\varepsilon^{3/2}), \\ S_{22} : w_{22}(y, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2}}{|c_2|} \cos y - \frac{\varepsilon}{2c_2} \cos 2y - \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_2|\sqrt{d_2}} \cos 3y + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Состояниям равновесия S_{21}, S_{22} вспомогательной краевой краевой задачи (5), (2), (6) соответствуют два однопараметрических семейства решений

$$u_{21}(t, x, \varepsilon) = K_{21} + \left(6\varepsilon \frac{d_2}{c_2} + o(\varepsilon)\right) t + w_{21}(x, \varepsilon),$$

$$u_{22}(t, x, \varepsilon) = K_{22} + \left(6\varepsilon \frac{d_2}{c_2} + o(\varepsilon)\right) t + w_{22}(x, \varepsilon),$$

где функции w_{21}, w_{22} указаны выше, а $K_{21}, K_{22} \in \mathbb{R}$ и произвольны.

Отметим, что при $b_1 = d_1$, $b_2 = d_2$ реализуется критический случай трехкратного нулевого собственного значения, которому отвечают собственные функции $e_0 = 1$, $e_1(x) = \cos x$, $e_2(y) = \cos y$.

При $b_1 = d_1 + \gamma_1 \varepsilon$, $b_2 = d_2 + \gamma_2 \varepsilon$ использование теоремы о центральном инвариантном многообразии, метод нормальных форм, адаптированный к использованию для бесконечномерных динамических систем позволяет свести задачу о бифуркациях пространственно неоднородных решений к анализу системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = \frac{c_1}{2} z_1^2 + \frac{c_2}{2} z_2^2,$$

$$z_1' = \alpha_1 z_1 - \frac{c_1^2}{12d_1} z_1^3,$$

$$z_2' = \alpha_2 z_2 - \frac{c_2^2}{12d_2} z_2^3.$$

Теорема 1.3. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ вспомогательная краевая задача (5), (2), (6) имеет четыре пространственно неоднородных асимптотически устойчивых состояния равновесия*

$$S_{31} : w_{31}(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left(\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left(\frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) +$$

$$+ \varepsilon^{3/2} \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$S_{32} : w_{32}(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left(\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left(\frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) +$$

$$+ \varepsilon^{3/2} \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$S_{33} : w_{33}(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left(-\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left(\frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) +$$

$$+ \varepsilon^{3/2} \left(-\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$S_{34} : w_{34}(x, y, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} \left(\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left(\frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) -$$

$$-\varepsilon^{3/2} \left(\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Состояниям равновесия $S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34}$ соответствуют четыре однопараметрических семейства пространственно неоднородных решений

$$u_{31}(t, x, y, \varepsilon) = K_{31} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2} \right) + o(\varepsilon) \right) t + w_{31}(x, y, \varepsilon),$$

$$u_{32}(t, x, y, \varepsilon) = K_{32} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2} \right) + o(\varepsilon) \right) t + w_{32}(x, y, \varepsilon),$$

$$u_{33}(t, x, y, \varepsilon) = K_{33} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2} \right) + o(\varepsilon) \right) t + w_{33}(x, y, \varepsilon),$$

$$u_{34}(t, x, y, \varepsilon) = K_{34} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2} \right) + o(\varepsilon) \right) t + w_{34}(x, y, \varepsilon),$$

где функции $w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{34}$ указаны выше, а $K_{31}, K_{32}, K_{33}, K_{34} \in \mathbb{R}$ и произвольны.

Теорема 1.4. Существует $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и любом $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ вспомогательная краевая задача (5), (2), (6) имеет четыре неустойчивых состояния равновесия

$$S_{41}, S_{42} : w_{\pm 1,0}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left(\pm \frac{2\sqrt{3d_1\alpha_1}}{|c_1|} \cos x \right) - \varepsilon \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + o(\varepsilon),$$

$$S_{43}, S_{44} : w_{0,\pm 1}(y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left(\pm \frac{2\sqrt{3d_2\alpha_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y + o(\varepsilon).$$

Состояниям равновесия $S_{41}, S_{42}, S_{43}, S_{44}$, соответствуют четыре однопараметрических семейства решений

$$u_{\pm 1,0}(t, x, \varepsilon) = K_{4,\pm 1} + \left(6\varepsilon \frac{d_1\alpha_1}{c_1} + o(\varepsilon) \right) t + w_{\pm 1,0}(x, \varepsilon),$$

$$u_{0,\pm 1}(t, y, \varepsilon) = K_{4,\pm 2} + \left(6\varepsilon \frac{d_2\alpha_2}{c_2} + o(\varepsilon) \right) t + w_{0,\pm 1}(y, \varepsilon),$$

где функции $w_{\pm 1,0}(x, \varepsilon), w_{0,\pm 1}(y, \varepsilon)$ указаны выше, а $K_{4,\pm 1}, K_{4,\pm 2} \in \mathbb{R}$ и произвольны.

Глава 2

Во второй главе рассматривается классический вариант уравнения Курамото-Сивашинского, изучается нелинейная краевая задача в случае, когда функция $u(t, x)$ зависит от одной пространственной переменной

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \quad (9)$$

с однородными краевыми условиями Неймана (раздел 2.3.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, \pi), \quad (10)$$

а также с однородными краевыми условиями Дирихле (раздел 2.3.2)

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, \pi). \quad (11)$$

Исследован вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода двумя способами. В первом — использован метод Галеркина в случае четырех и пяти базисных функций (раздел 2.3), во втором — изучаются локальные бифуркации данных краевых задач. Проведено сравнение результатов анализа задачи двумя разными способами в разделе 2.3.3.

Анализ краевой задачи (9), (10) с использованием метода Галеркина в случае четырех базисных функций приводит к анализу следующей системы функций:

$$\frac{du_0}{dt} = -(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= -u_1 + bu_1 - (6u_2u_3 + 2u_1u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= -16u_2 + 4bu_2 + \left(\frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3\right), \\ \frac{du_3}{dt} &= -81u_3 + 9bu_3 + 2u_1u_2. \end{aligned} \quad (13)$$

Анализ системы (13) показывает, что при $b \in (-\infty, 1] \cup (9, \infty)$ она не имеет действительных решений, отличных от нуля. При $b \neq 1, b \neq 4, b \neq 9$ система (13) имеет 4 типа решений V_1, V_2, V_3, V_4 , которые наглядно представлены на Рис. 1.

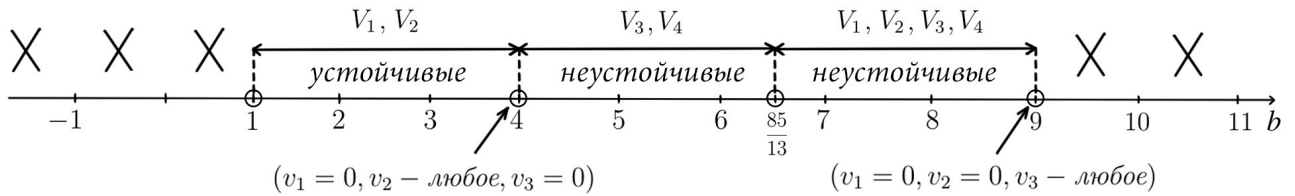


Рис. 1: Состояния равновесия системы (13). Здесь $V_1(v_1, v_2, v_3)$ — одно из состояний равновесия, крестом обозначены области, где решения отсутствуют.

В случае пяти базисных функций исследуется система функций:

$$\frac{du_0}{dt} = -(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2 + 16u_4^2), \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= -u_1 + bu_1 - (6u_2u_3 + 12u_3u_4 + 2u_1u_2), \\
\frac{du_2}{dt} &= -16u_2 + 4bu_2 + \left(\frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3 - 8u_2u_4 \right), \\
\frac{du_3}{dt} &= -81u_3 + 9bu_3 + 2(u_1u_2 - 2u_1u_4), \\
\frac{du_4}{dt} &= -256u_4 + 16bu_4 + (2u_2^2 + 3u_1u_3).
\end{aligned} \tag{15}$$

Для наглядности все решения системы (15) представлены на Рис. 2

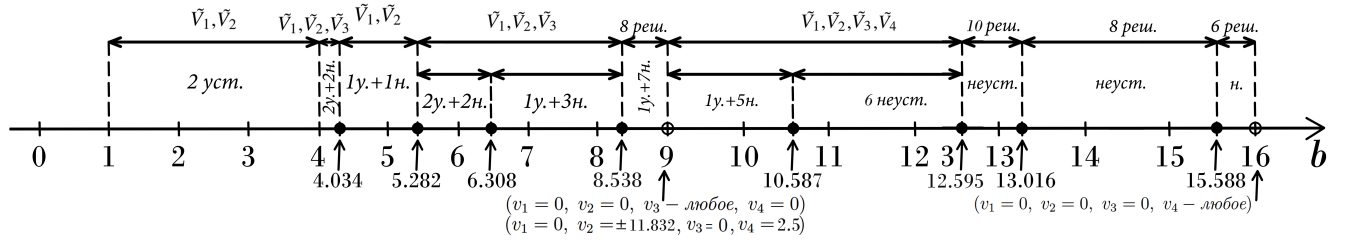


Рис. 2: Состояния равновесия системы (15). Здесь $\tilde{V}_1(v_1, v_2, v_3, v_4)$ — одно из состояний равновесия.

Анализ краевой задачи (9), (11) с использованием метода Галеркина в случае трех базисных функций приводит к анализу следующей системы функций:

$$\begin{aligned}
\frac{du_1}{dt} &= (b-1)u_1 - \frac{4u_1^2}{3\pi} - \frac{112u_2^2}{15\pi} + \frac{24u_1u_3}{5\pi} - \frac{612u_3^2}{35\pi}, \\
\frac{du_2}{dt} &= 4(b-4)u_2 - \frac{32u_1u_2}{15\pi} - \frac{96u_2u_3}{7\pi}, \\
\frac{du_3}{dt} &= 9(b-9)u_3 - \frac{28u_1^2}{15\pi} + \frac{16u_2^2}{21\pi} - \frac{72u_1u_3}{35\pi} - \frac{4u_3^2}{\pi}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Найдены ненулевые состояния равновесия вспомогательной системы (15), а также ненулевые состояния равновесия второго рода полной системы (14), (15) и системы (16). Используя численные методы анализа, были найдены состояния равновесия и исследован вопрос об их устойчивости.

Пусть в основной краевой задаче (9), (10)

$$b = b_n + \varepsilon, \quad b_n = n^2, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Положим также

$$u(t, x) = v(t) + w(t, x),$$

где

$$v(t) = M(u(t, x)) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(t, x) dx$$

и, следовательно,

$$M(w) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} w(t, x) dx \equiv 0.$$

Для функций $v(t)$, $w(t, x)$ получаем краевую задачу

$$\dot{v} = -\psi(w), \quad \psi(w) = M \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (17)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_n(\varepsilon)w - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \psi(w), \quad (18)$$

$$\frac{\partial w(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial w(t, \pi)}{\partial x} = \frac{\partial^3 w(t, 0)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w(t, \pi)}{\partial x^3} = 0, \quad M(w) = 0. \quad (19)$$

Применяя теорию локальных бифуркаций для бесконечномерных динамических систем, можно показать справедливость утверждения.

Теорема 2.1. *Существует такое $\varepsilon_n > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$ существует два семейства решений краевой задачи (18), (10), (19)*

$$w_{n1, n2}(x, \varepsilon) = \pm \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3}n \cos nx + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2nx + o(\varepsilon).$$

При $n = 1$ оба состояния равновесия асимптотически устойчивы, а при $n \neq 1$ они неустойчивы.

Основная краевая задача (9), (10) имеет два однопараметрических семейства решений

$$u_{n1, n2}(t, x, \varepsilon) = K_{n1, n2} + (-6n^4\varepsilon + o(\varepsilon))t + w_{n1, n2}(x, \varepsilon),$$

где функции $w_{n1, n2}(x, \varepsilon)$ указаны выше, а $K_{n1}, K_{n2} \in \mathbb{R}$ и произвольны.

В разделе 2.1.3 рассмотрены некоторые частные случаи в задаче о бифуркациях пространственно неоднородных решений непосредственно у краевых задач (9), (10) и (9), (11) при

$$1) \ b = 1 + \varepsilon; \quad 2) \ b = 4 + \varepsilon; \quad 3) \ b = 9 + \varepsilon.$$

В разделе 2.3.2 изучается задача нахождения состояний равновесия в случае краевых условий Дирихле (11). Рассматриваются бифуркационные задачи, возникающие при

$$b = b_n(\varepsilon) = n^2 + \frac{\varepsilon\gamma}{n^2}, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

При таком выборе значений бифуркационного («управляющего») параметра b изучен вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений у краевой задачи (9), (11). При этом рассмотрено два случая:

1. $n = 2m - 1$, $m = 1, 2, 3, \dots$, то есть, когда n — нечетно;
2. $n = 2m$, $n = 1, 2, 3, \dots$, то есть, когда n — четно.

Справедливы утверждения.

Теорема 2.2. Пусть $b = n^2 + \frac{\varepsilon\gamma}{n^2}$, $n = 2m - 1$, $m \in \mathbb{N}$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (9), (11) имеет состояние равновесия, для которого справедлива асимптотическая формула

$$u(t, x) = u(x, \varepsilon) = \varepsilon z_*(m) \sin(2m - 1)x + \varepsilon^2 z_*^2(m) v(x),$$

где функция $v(x)$ была найдена при анализе вспомогательной краевой задачи.

Это состояние равновесия асимптотически устойчиво, если $\gamma = 1$ ($\gamma > 0$) и $m = 1$. В остальных случаях имеем седловые состояния равновесия.

Теорема 2.3. Пусть $b = n^2 + \frac{\varepsilon\gamma}{n^2}$, $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$. Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существуют состояния равновесия

$$u_{1,2}(t, x) = \varepsilon^{1/2} z_{1,2}(m) \sin 2mx + \varepsilon u_2(t, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, x),$$

где $u_2(t, x)$, $u_3(t, x)$ были найдены при анализе вспомогательной краевой задачи. Эти состояния равновесия являются неустойчивыми.

Проведено сравнение некоторых из результатов, полученных на базе применения метода Галеркина с результатами бифуркационного анализа краевых задач (9), (10) и (9), (11) с использованием строго обоснованных методов качественной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Показаны некоторые ограниченные возможности анализа краевых задач (9), (10) и (9), (11) на основе использования метода Галеркина.

Глава 3

В третьей главе диссертационной работы рассматривается вопрос о характере локальных бифуркаций в различных областях в случае краевых условий Неймана и Дирихле. В этой главе изучается близкая задача к той, что была рассмотрена в первой главе. Детально рассмотрен вопрос о влиянии геометрических характеристик и выбора краевых условий на структуры решений изучаемой краевой задачи. Обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана и Дирихле в трех областях: прямоугольнике, квадрате и равнобедренном треугольнике.

После преобразований, перенормировок задача может быть сведена к анализу следующего нелинейного дифференциального уравнения с частными производными параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b\Delta_\mu u - \Delta_\mu^2 u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \quad u = u(t, x, y), \quad (20)$$

где $\Delta_\mu u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

В разделе 3.2 уравнение (20) рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана в трех областях: прямоугольнике, квадрате и равнобедренном треугольнике. Далее без нарушения общности считаем, что $\mu \geq 1$.

Если рассматривается прямоугольная область, то есть случай общего положения, то можно считать без нарушения общности, что $\mu > 1$. Уравнение (14) в этом разделе рассматривается вместе с краевыми условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0, x=\pi} &= \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=\pi} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0, y=\pi} &= \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

При $b < 1 + \mu$ состояния равновесия краевой задачи устойчивы. Критическое значение бифуркационного параметра $b = b_* = 1(\mu > 1)$.

Пусть теперь $b = 1 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Пусть $u(t, x, y)$ — какое-либо решение краевой задачи (20), (21) при $b = 1 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 \ll 1$. Повторяя достаточно стандартные конструкции первой и второй главы диссертационной работы, можно представить это решение в форме

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = M(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi u(t, x, y) dx,$$

а функция $w(t, x, y)$, следовательно, имеет нулевое пространственное среднее, то есть $M(w) = 0$. Используя такое представление для $u(t, x, y)$, вид правой части уравнения (20) можно и полезно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения для $v(t)$

$$\dot{v} = \psi(w), \quad \psi(w) = M \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (22)$$

и вспомогательной краевой задачи для w

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(\varepsilon)u + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad (23)$$

где $w(t, x, y)$ удовлетворяет краевым условиям (21), а также равенству

$$M(w) = 0. \quad (24)$$

Из результатов работ [?], [?] вытекает справедливость утверждения.

Теорема 3.1. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует два асимптотически устойчивых состояния равновесия краевой задачи (23), (21), (24)*

$$w_{\pm}(x, \varepsilon) = \pm 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2} \cos x - \frac{1}{2}\varepsilon \cos 2x \pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Этим состояниям равновесия вспомогательной краевой задачи (23), (21), (24) соответствуют два однопараметрических семейства решений

$$u_{\pm}(t, x, \varepsilon) = v_{\pm}(t, \varepsilon) + w_{\pm}(x, \varepsilon),$$

где функции $v_{\pm}(t, \varepsilon)$ находим после интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения (22). При этом

$$v_{\pm}(t, \varepsilon) = K_{\pm} + (6\varepsilon + o(\varepsilon))t,$$

где функции $w_{\pm}(x, \varepsilon)$ были указаны выше, а $K_{\pm} \in \mathbb{R}$ и произвольны.

Напомним, что решения $u_{\pm}(t, x, \varepsilon)$ — состояния равновесия второго рода.

Показано, что в ситуации, когда $\mu > 1$ существует пространственно неоднородные решения, которые не зависят от y , а только от x .

Если рассматривается квадратная форма области, то есть при $\mu = 1$ и $b = 1 + \varepsilon$, то рассматриваемая краевая задача имеет уже пространственно неоднородные решения, которые зависят от x и y одновременно.

Пусть $u(t, x, y)$ — решение краевой задачи (20), (21) при $b = 1 + \gamma_1\varepsilon$, $\mu = 1 + \gamma_2\varepsilon$, $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon)$. Положим

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = M(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x, y) dx dy,$$

а

$$M(w) \equiv 0.$$

Как и в предыдущих разделах вместо краевой задачи (20), (21) рассмотрим уравнение

$$\dot{v} = \psi(w), \tag{25}$$

$$\psi(w) = M \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \gamma_2 \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right)$$

и краевую задачу для $w(t, x, y)$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw + \varepsilon B_1 w + \varepsilon^2 B_2 w + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \gamma_2 \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \psi(w), \tag{26}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0, x=\pi} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Big|_{x=0, x=\pi} = \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0, y=\pi} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Big|_{y=0, y=\pi} = 0, \quad (27)$$

$$M(w) = 0.$$

Теорема 3.2. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (26), (21), (27) имеет состояния равновесия*

$$w_j(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}(\eta_1 \cos x + \eta_2 \cos y) - \frac{1}{24}\varepsilon(\eta_1^2 \cos 2x + \eta_2^2 \cos 2y) +$$

$$+ \frac{1}{864}\varepsilon^{3/2}(\eta_1^3 \cos 3x + \eta_2^3 \cos 3y) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

соответствующие состояниям равновесия S_j , $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$. Где (η_1, η_2) — координаты состояния равновесия S_j с наследованием свойств устойчивости.

Каждому состоянию равновесия $w_j(x, y, \varepsilon)$, где $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ вспомогательной краевой задачи (26), (21), (27) соответствует однопараметрическое решение основной краевой задачи (20), (21).

$$u(t, x, y, \varepsilon) = K_j + \left(\frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2)\varepsilon + o(\varepsilon) \right) t + w_j(x, y, \varepsilon),$$

где функции $w_j(x, y, \varepsilon)$ указаны выше, а $K_j \in \mathbb{R}$ и произвольны.

Здесь (η_1, η_2) — координаты соответствующего состояния равновесия S_j , где S_j — состояние равновесия следующей вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$z'_1 = \gamma_1 z_1 - \frac{1}{12} z_1^3, \quad (28)$$

$$z'_2 = (\gamma_1 - \gamma_2) z_2 - \frac{1}{12} z_2^3. \quad (29)$$

— главной части нормальной формы. При этом семейство решений $u(t, x, y, \varepsilon)$ наследует устойчивость соответствующего ему состояния равновесия нормальной формы.

Лемма 1. Система (28), (29) может иметь следующие ненулевые состояния равновесия:

$$S_1 : \eta_1 = z_1 = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, \eta_2 = z_2 = 0;$$

$$S_2 : \eta_1 = z_1 = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, \eta_2 = z_2 = 0;$$

$$S_3 : \eta_2 = z_2 = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}, \eta_1 = z_1 = 0;$$

$$S_4 : \eta_2 = z_2 = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}, \eta_1 = z_1 = 0;$$

$$S_5 : \eta_1 = z_1 = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, \eta_2 = z_2 = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2};$$

$$S_6 : \eta_1 = z_1 = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, \eta_2 = z_2 = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2};$$

$$S_7 : \eta_1 = z_1 = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, \quad \eta_2 = z_2 = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2};$$

$$S_8 : \eta_1 = z_1 = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1}, \quad \eta_2 = z_2 = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Состояния равновесия S_1, S_2 существуют при $\gamma_1 > 0$. Если $\gamma_1 > 0$, а $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$, то асимптотически устойчивы состояния равновесия S_1, S_2 , а остальные состояния равновесия $S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$ и нулевое состояние равновесия — неустойчивы.

Состояния равновесия S_3, S_4 существуют при $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$. Наконец, при $\gamma_1 < 0, \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ асимптотически устойчивы S_3, S_4 а остальные состояния равновесия $S_1, S_2, S_5, S_6, S_7, S_8$ и нулевое — неустойчивы.

Состояния равновесия S_5, S_6, S_7, S_8 существуют при $\gamma_1 > 0, \gamma_1 - \gamma_2 > 0$. Если $\gamma_1 > 0, \gamma_1 - \gamma_2 > 0$, то состояния равновесия S_5, S_6, S_7, S_8 асимптотически устойчивы, а остальные состояния равновесия S_1, S_2, S_3, S_4 и нулевое неустойчивы.

Для случая, когда область представляет собой равнобедренный треугольник, то есть, при $\mu = 1, b = 1 + \gamma\varepsilon$ справедливо утверждение.

Положим

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi u(t, x, y) dx dy, \quad w(t, x, y) = u(t, x, y) - v(t),$$

$$M(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^\pi w(t, x, y) dx dy = 0.$$

Вместо краевой задачи (20), (21) получим ее детализированный вариант

$$\dot{v} = \psi(w), \quad \psi(w) = M \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right), \quad (30)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_0 w + \varepsilon B w + \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) - \psi(w), \quad (31)$$

$$M(w) \equiv 0, \quad (32)$$

и, конечно, функция w удовлетворяет краевым условиям (21).

Теорема 3.3. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при каждом $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует два асимптотически устойчивых состояния равновесия*

$$w_\pm(x, y, \varepsilon) = \pm 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2}(\cos x + \cos y) - \frac{1}{2}\varepsilon(\cos 2x + \cos 2y) \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2}(\cos 3x + \cos 3y) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

Решениям $w_{\pm}(x, y, \varepsilon)$ соответствуют два однопараметрических семейства решений вида

$$u_{\pm}(t, x, y, \varepsilon) = K_{\pm} + (12\varepsilon + o(\varepsilon))t + w_{\pm}(x, y, \varepsilon),$$

где функции $w_{\pm}(x, y, \varepsilon)$ были указаны выше, а $K_{\pm} \in \mathbb{R}$ и произвольны.

Во второй части этой главы уравнение (20) изучено вместе с однородными краевыми условиями Дирихле.

В случае прямоугольной области справедливо утверждение. Пусть $\mu > 1$, $b = 1 + \mu + \gamma\varepsilon$.

Теорема 3.4. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует устойчивое пространственно неоднородное решение краевой задачи*

$$u(x, y, \varepsilon) = -\frac{9\pi^2\gamma}{32}\varepsilon \sin x \sin y + o(\varepsilon).$$

Для квадратной области справедливо утверждение. Пусть $\mu = 1$, $b = 2 + \gamma_1\varepsilon$.

Теорема 3.5. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ нелинейная краевая задача имеет ненулевое пространственно неоднородное решение*

$$u(x, y, \varepsilon) = -\frac{9}{32}\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)\varepsilon \sin x \sin y + o(\varepsilon).$$

Это решение асимптотически устойчиво, если $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$ и неустойчиво, если $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$.

В случае треугольной формы имеет место утверждение. Пусть $\mu = 1$, $b = 5 + \gamma\varepsilon$.

Теорема 3.6. *Существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует одно устойчивое состояния равновесия*

$$u(x, y, \varepsilon) = -\frac{5\pi^2\gamma}{27}\varepsilon(\sin x \sin 2y - \sin 2x \sin y) + O(\varepsilon^2),$$

если $\gamma > 0$ и оно неустойчиво при $\gamma < 0$.

Рассмотрены задачи о локальных бифуркациях пространственно неоднородных решений в окрестности однородных состояний равновесия соответствующих краевых задач. Для всех случаев выбора области (прямоугольник, квадрат, равнобедренный треугольник) с краевыми условиями Неймана и Дирихле механизм формирования нанорельефа один и тот же. Соответствующий неоднородный рельеф возникает при потере устойчивости однородными состояниями равновесия. С другой стороны, в зависимости от формы области меняется и структура нанорельефа. В случае прямоугольника он имеет цилиндрическую форму (зависит только от одной пространственной переменной). В квадрате и треугольнике такой «двумодовый» рельеф зависит от x и y одновременно.

Заключение

В диссертационной работе рассмотрено уравнение Курамото-Сивашинского и его обобщения. Например, в главах 1 и 3 изучаются краевые задачи для уравнения, которое следует считать обобщенным вариантом уравнения Курамото-Сивашинского. Так, определяемая из них функция зависит от t и двух пространственных переменных. В первоначальной, классической версии функция зависит только от t и x .

Рассматриваемый обобщенный вариант уравнения Курамото-Сивашинского был предложен в связи с рядом задач физики пограничных явлений, изучением механизма появления неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов.

В работе показано, что в рассмотренных задачах можно ожидать появления пространственно неоднородных решений (состояний равновесия и в том числе второго рода) при смене устойчивости пространственно однородными решениями. Чаще речь идет, естественно, о потере устойчивости.

При этом возникают бифуркационные задачи для динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий, как правило, имеющие определенное вырождение, коразмерности 2 или же, в которых имеет место и вырождение коразмерности больше единицы. Тем не менее, в работе удалось показать, опираясь на метод интегральных многообразий и нормальных форм, что исследование соответствующих бифуркационных задач сводится к анализу динамики вспомогательных уравнений или систем уравнений — нормальной формы Пуанкаре-Дюлака.

С точки зрения приложений к физике (в частности, к микро— и наноэлектронике) полученные результаты подтверждают точку зрения о том, что формирование нанорельефа — это процесс самоорганизации и соответствующие неоднородные решения могут возникать в результате анализа соответствующих бифуркационных задач. При этом такой вывод повторяется при изучении обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в разных областях с разными краевыми условиями, выбор которых, в первую очередь, зависит от физической постановки задачи.

В диссертационной работе также показано, что использование метода Галеркина, конечно, возможно, но при этом ответ часто зависит от числа базисных функций и диапазона выбора параметров задачи. Во многом данный недостаток удастся преодолеть при анализе соответствующих задач методом качественной теории бесконечномерных динамических систем. Тем не менее, в диссертации были получены новые результаты при анализе галеркинских приближений соответствующих краевых задач уже для классической версии уравнения Курамото-Сивашинского. Были рассмотрены те задачи, анализ которых был предложен в известной работе Дитера Армбрустера, Джона Гукенхеймера, Филипа Холмса.

Из полученных в диссертационной работе результатов, а также их уточнений

и корректировки вытекает, что они нуждаются в определенных уточнениях и комментариях.