#### ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. П.Г. ДЕМИДОВА»

На правах рукописи

Секацкая Алина Вадимовна

#### ДИССИПАТИВНЫЕ СТРУКТУРЫ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КУРАМОТО-СИВАШИНСКОГО

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

#### Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор Куликов Анатолий Николаевич

Ярославль – 2019

# Содержание

### Введение

1	Ура	авнение Курамото-Сивашинского в случае 2-х простран-			
	стве	енных переменных с краевыми условиями Неймана	30		
	1.1	Постановка задачи	30		
	1.2	Линеаризованный вариант краевой задачи	34		
	1.3	Бифуркации пространственно неоднородных решений	39		
		1.3.1 Анализ нормальной формы	46		
	1.4 Бифуркации пространственно неоднородных решений во вто				
		критическом случае	49		
		1.4.1 Анализ нормальной формы	53		
	1.5	Бифуркации пространственно неоднородных решений в случае,			
		близком к третьему критическому случаю	55		
		1.5.1 Анализ нормальной формы	60		
	1.6	Некоторые комментарии	64		
2	Классический вариант уравнения Курамото-Сивашинского				
21 Постановка залачи. Состояния равновесия в случае краевых					
		вий Неймана	68		
		211 Линейная краевая залача	69		
		2.1.2 Обобщенная бифуркационная залача	71		
	2.2	Состояния равновесия в случае краевых условий Лирихле	76		
	2.3 Анализ уравнения Курамото-Сивашинского с краевыми ус		••		
ми Неймана и Лирихле метс		ми Неймана и Лирихле метолом Галеркина. Сравнение с бифур-			
		кашионным анализом	82		
		2.3.1 Случай краевых условий Неймана	82		
		2.3.2 Случай краевых условий Дирихле	90		
		2.3.3 Некоторые замечания	93		
3	О х	арактере покальных бифуркаций в различных областях в			
U					
	3.1 Постановка залачи				
	3.2 Случай однородных краевых условий Неймана				
	0.2	3.2.1 Вариант прямоугольника	98		
			50		

	3.2.2	Квадратная форма области	103		
	3.2.3	Треугольная форма области	107		
3.3	Случа	й однородных краевых условий Дирихле	110		
	3.3.1	Вариант прямоугольника	111		
	3.3.2	Квадратная форма области	113		
	3.3.3	Треугольная форма области	115		
3.4	Некот	орые выводы	117		
Заключение					
Литература					

# Введение

### Актуальность темы исследования

В диссертационной работе рассматривается ряд задач для известного уравнения Курамото-Сивашинского [59,66], его естественных обобщений и модификаций. Уравнение Курамото-Сивашинского играет значительную роль в различных разделах физики, таких как гидродинамика, химическая кинетика, теория пограничных явлений. В частности, обобщенный вариант такого уравнения был предложен в работе [45] в качестве одной из основополагающих математических моделей процесса формирования рельефов различных конфигураций, например волнового, на поверхности полупроводников под воздействием ионной бомбардировки или лазерного воздействия на эту поверхность [51], то есть технологических процессов, широко используемых в современной микро– и наноэлектронике для производства элементной базы компьютеров и других электронных приборов [7,8,27,65] (смотри, также [68,69]).

Прикладная актуальность уравнения Курамото-Сивашинского послужила толчком к появлению большого числа математических работ, где изучались различные задачи для этого уравнения (смотри, например, монографию [69] и список цитируемой там литературы). Так, например, цикл работ Р. Темама с соавторами послужил основой для развития таких разделов теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством как теория инерциальных многообразий. В работах Р. Темама с соавторами были впервые рассмотрены такие аспекты теории бесконечномерных динамических систем как изучение вопроса о существовании и свойствах глобальных аттракторов.

В работе рассматриваются вопросы о существовании, устойчивости и асимптотическом представлении пространственно неоднородных решений. С точки зрения приложений ко многим разделам физики (микро– и наноэлектронике, например) значительный интерес представляют именно такие решения. При этом для приложений важен не только вопрос о существовании таких решений, но и такие аспекты этой тематики как устойчивость соответствующих решений, а также их асимптотические представления.

Во многих разделах математической физики при моделировании нелинейных эволюционных процессов используют уравнение Курамото-Сивашинского или его естественные модификации и обобщения. Обычно это уравнение рассматривают вместе с естественными для приложений краевыми условиями, и в большинстве работ в качестве краевых условий выбирались периодические краевые условия.

Впервые это уравнение появилось в работе [59], где оно было получено при изучении математических задач химической кинетики. В работе [66] это уравнение было получено при асимптотическом интегрировании периодической краевой задачи для системы уравнений Навье-Стокса. В работе [66] была предпринята попытка объяснить феномен турбулентности. Для этого была рассмотрена периодическая краевая задача для полученного модельного уравнения, которое вскоре получило название уравнение Курамото-Сивашинского.

В работе [45] была получена еще одна из редакций уравнения Курамото-Сивашинского. Эта версия была использована в качестве модели процесса формирования рельефов различных конфигураций на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов. Этот физико-технологический процесс нашел широкое применение в современной наноэлектронике. Более подробный обзор использования пучковых технологий можно найти в монографии [27]. Важное прикладное значение пучковых технологий послужило толчком к появлению достаточно большого числа работ, в которых численно были исследованы различные варианты уравнения Курамото-Сивашинского [8, 27, 44, 45, 47, 54–56, 65]. Кроме численного анализа в ряде этих работ были найдены его точные решения, как правило, в виде бегущих волн.

В монографии [69], а также работе [43] уравнение Курамото-Сивашинского было рассмотрено вместе с краевыми условиями Неймана. В монографии [69] были приведены результаты о наличии у такой краевой задачи глобального аттрактора, а в работе [43] эта краевая задача изучалась на основе применения метода Галеркина. Отметим также работу [60], где изучался вопрос о существовании и единственности ряда краевых (начально-краевых) задач для уравнения Курамото-Сивашинского.

В последнее время в связи с задачей описания формирования нанорельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов были предложены иные подходы для анализа задач о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений: состояний равновесия, периодичных по времени решений, локальных аттракторов более сложной структуры [12,14,15,30,54]. В этих работах был использован и развит подход, использующий методы качественного анализа бесконечномерных динамических систем. В частности, метод интегральных многообразий, нормальных форм Пуанкаре-Дюлака, асимптотические методы анализа динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Эти методы позволяют получить интересующие решения без использования метода Галеркина и численного анализа соответствующих краевых задач.

#### Степень разработанности темы исследования

В работе для исследования возникающих задач используются такие методы анализа теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством как:

– метод интегральных многообразий;

– метод нормальных форм Пуанкаре-Дюлака.

Эти методы во многих случаях позволяют свести анализ бесконечномерной задачи к конечномерной, то есть к изучению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом желательно и возможно получать достаточно простой вариант таких конечномерных систем, которые принято называть нормальными формами. Такой термин в свое время был предложен А. Пуанкаре при изучении конечномерных динамических систем (смотри, например, главу 5 из [1]).

Основные имеющиеся в настоящее время результаты, относящиеся к развитию этих методов теории бесконечномерных динамических систем и их применению к анализу бифуркационных задач, можно найти, в частности, в монографиях [4, 11, 24, 26, 42], где, в свою очередь, имеется более детальный список работ по данной тематике.

Следует отметить, что при изучении ряда задач для уравнения Курамото-Сивашинского возникают бифуркационные задачи с определенными вырождениями. Часто спектру устойчивости однородных состояний равновесия (при всех значениях параметров задачи) принадлежит нулевое собственное число и у соответствующей задачи существует семейство однородных состояний равновесия. Для данного уравнения характерна также инвариантность относительно преобразования Галилея. Все это вместе требует развития и углубления методов анализа бифуркационных задач в применении к бесконечномерным системам.

Данные трудности возникают и были преодолены в работах, посвященных периодической краевой задаче для уравнения Курамото-Сивашинского и его естественных модификаций [12–16].

В диссертационной работе изучены иные краевые задачи: однородная краевая задача Неймана в случае, когда неизвестная функция зависит от двух пространственных переменных, а также задача Дирихле. В двумерном варианте уравнения Курамото-Сивашинского изучен вопрос о влиянии геометрии области на характер рельефа [17–19, 21, 30]. В частности, выявлены варианты, когда возникают бифуркационные задачи коразмерности два. Подчеркнем, что интерес к изучению бифуркационных задач в случае однородных краевых условий Неймана возник в связи с работами Р. Темама, в которых очень часто рассматривался такой вариант краевой задачи, а также краевые задачи вместе с однородными краевыми условиями Дирихле. В этих работах не изучались вопросы анализа локальных бифуркаций. Отметим также, что в большинстве работ при анализе локальных бифуркаций был использован метод Галеркина [43] с использованием небольшого числа базисных функций. В ряде работ были найдены решения в виде бегущих волн. Последние два подхода преобладают при анализе рассматриваемых вопросов, связанных с изучением ряда задач для уравнения Курамото-Сивашинского или его модификаций и обобщений.

#### Цели и задачи исследования

Целями и задачами данной работы являются:

- 1. анализ возникающих бифуркационных задач для уравнения Курамото-Сивашинского и его естественных модификаций и обобщений в случае однородных краевых условий Неймана и Дирихле (краевых условий шарнирного опирания);
- 2. изучение вопроса о характере локальных бифуркаций пространственно неоднородных состояний равновесия при смене устойчивости однородными состояниями равновесия;
- 3. анализ устойчивости пространственно неоднородных состояний равновесия;
- 4. вывод асимптотических формул для бифурцирующих пространственно неоднородных решений;
- 5. сравнение результатов анализа задач на основе применения и развития методов теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством с результатами анализа с использованием метода Галеркина;
- 6. анализ влияния краевых условий и выбора области на характер бифуркаций.

#### Научная новизна результатов

Бифуркационные задачи для уравнения Курамото-Сивашинского в случае двух пространственных переменных с краевыми условиями Неймана и Дирихле другими авторами не рассматривались. При этом следует отметить, что при анализе обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского вместе с однородными краевыми условиями Неймана характерны краевые задачи, когда реализуются случаи близкие к критическим двукратного и трехкратного нулевых собственных значений. При этом одно нулевое собственное значение существует при всех значениях бифуркационного параметра, то есть возникаю бифуркационные задачи не общего положения. Для всех изученных краевых задач особое значение отдавалось анализу такого вопроса как существование, устойчивость и асимптотическое представление пространственно неоднородных решений. Для этого был использован модифицированный вариант метода Крылова-Боголюбова. Следует отметить, что вывод асимптотических формул имеет не только теоретическое значение, но позволяет описывать форму неоднородного рельефа на поверхности полупроводниковых материалов под воздействием ионной бомбардировки, то есть играет несомненно полезную роль при моделировании технологических процессов в микро- и наноэлектронике.

В работе проведен сравнительный анализ двух подходов при изучении бифуркационных задач для уравнения Курамото-Сивашинского. Один их них основан на применении и развитии методов анализа динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Второй предполагает использование метода Галеркина.

Отметим, что большинство исследований, посвященных анализу бифуркаций в тех или иных вариантах уравнения Курамото-Сивашинского предполагало применение трех подходов: либо использование метода Галеркина, либо поиск решения в виде бегущих волн, либо численный анализ с использованием компьютерных вычислений. То есть применялись методы анализа, отличные от используемых и развитых в диссертации.

# Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований

В диссертационной работе показана возможность применения таких методов анализа динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством как метод интегральных многообразий, нормальных форм, асимптотических методов анализа к исследованию локальных бифуркаций в краевых задачах Неймана и Дирихле для различных версий уравнения Курамото-Сивашинского и естественных обобщений, возникающих в прикладных задачах.

При этом возникают бифуркационные задачи не только классического типа, где встречаются бифуркации типа Тьюринга-Пригожина, но и бифуркационные задачи с вырождением и коразмерностью больше 1.

При их решении удалось использовать общий подход, позволяющий возникающие задачи сводить к конечномерным.

Полученные в работе результаты позволили подкрепить взгляд на процесс формирования неоднородного рельефа при ионной бомбардировке как на процесс самоорганизации и обосновать механизм формирования нанорельефа как следствия потери устойчивости однородными состояниями равновесия. Полученные асимптотические формулы позволяют во многих случаях получить уравнения, описывающие полученный неоднородный (волновой) рельеф на поверхности полупроводников. Уместно отметить, что рассматриваемый технологический процесс является перспективным при создании элементной базы компьютеров.

В разделах, посвященных исследованию рассмотренных задач с использованием метода Галеркина уточнены результаты из известной работы [43]. Это стало возможным благодаря использованию современных компьютерных технологий.

#### Методология и методы исследования

В работе для решения возникающих бифуркационных задач были использованы методы исследования динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством (пространством начальных условий), такие как метод инвариантных многообразий в сочетании с аппаратом теории нормальных форм, асимптотические методы, спектральная теория дифференциальных операторов, проекционные методы (метод Галеркина). В частности, анализ уравнений для определения координат состояний равновесия был проведен на базе численных методов с привлечением современных компьютерных технологий, позволяющих получать формулы для координат состояний равновесия. Последнее связано с возможностью более эффективного использования современных компьютерных технологий при анализе динамических систем, а также возможностью сравнения результатов компьютерного анализа с выводами, полученными в последнее время на основе современной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Данное сравнение продемонстрировало некоторые особенности анализа с использованием метода Галеркина.

#### Положения, выносимые на защиту

- 1. Результаты бифуркационного анализа обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского, в котором неизвестная функция зависит от двух пространственных переменных, в случае однородных краевых условий Неймана. Данные результаты содержат достаточные условия существования пространственно неоднородных решений трех типов: решения, зависящие только от первой пространственной переменной, от второй, от обеих пространственных переменных, а также асимптотические формулы для таких решений, условия их устойчивости. Результаты сформулированы в виде трех основных теорем: теоремы 1.1, теоремы 1.2, теоремы 1.3., теоремы 1.4 из главы 1.
- 2. Результаты анализа классического уравнения Курамото-Сивашинского, в котором неизвестная функция зависит от одной пространственной переменной, в случае однородных краевых условий Неймана и однородных краевых условий Дирихле, которые выявили существенную зависимость

характера бифуркаций и вида асимптотических формул от выбора краевых условий. Полученные результаты сформулированы в виде теорем 2.1, 2.2, 2.3 из второй главы о существовании и свойствах пространственно неоднородных решений соответствующих краевых задач.

- 3. Результаты анализа конечномерных аппроксимаций краевых задач для классической версии уравнения Курамото-Сивашинского из второй главы диссертационной работы, полученных с помощью метода Галеркина. Частичное сравнение результатов анализа с использованием метода Галеркина с результатами анализа, основанного на применении и развитии качественных методов теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством, таких как: метод интегральных многообразий, теория нормальных форм Пуанкаре, а также асимптотические методы анализа.
- 4. Результаты анализа обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в случае однородных краевых условий Неймана и однородных краевых условий Дирихле в различных областях, таких как: прямоугольник, квадрат и равнобедренный треугольник. Эти результаты содержат достаточные условия существования, условия устойчивости пространственно неоднородных решений, а также асимптотические формулы для полученных решений. Следствиями этих результатов являются выводы о влиянии геометрических характеристик и выбора краевых условий на структуру решений изученных краевых задач.

#### Апробация результатов исследования

Основные результаты и положения работы были представлены на семинарах:

- 1. «Нелинейная динамика и синергетика», Ярославль (май, 2019);
- 2. «Нелинейная динамика: теория и приложения», Нижний Новгород (октябрь, 2019).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих конеференциях:

- международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферма-Паста-Улама. Ярославль (октябрь, 2015);
- 2. международная конференция «Путь в науку». Ярославль (апрель, 2015; апрель, 2016; апрель, 2017; апрель, 2018);

- 3. международная конференция «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования». Рязань (апрель, 2016);
- 4. международная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория», посвященная 110-летию со дня рождения профессора И. П. Макарова. Рязань (сентябрь, 2016);
- 5. международная конференция «XII Белорусская математическая конференция». Минск (сентябрь, 2016);
- 6. международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов». Москва (апрель, 2017; апрель, 2018);
- 7. III Всероссийский научный форум «Наука будущего наука молодых». Нижний Новгород (сентябрь, 2017);
- 8. международная студенческая конференция «G-Risc. Science and progress 2017». Санкт-Петербург (ноябрь, 2017);
- 9. международная конференция «Новые тенденции в нелинейной динамике». Ярославль (октябрь, 2017);
- 71-я Всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов с международным участием. Ярославль (апрель, 2018);
- 11. международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2018». Москва (апрель, 2018);
- 12. международная научная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике». Рязань (сентябрь, 2018);
- 13. международная конференция «Интегрируемые системы и нелинейная динамика». Ярославль (октябрь, 2018);
- 14. международная конференция «ShilnikovWorkshop 2018». Нижний Новгород (декабрь, 2018).

### Публикации

По теме диссертации опубликовано 5 работ, входящие в перечень ВАК:

1. Секацкая А.В. Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. – Т. 24, № 5. — С. 615–628;

- Sekatskaya A. V. Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Boundary Value Problem for the Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2018. — T. 21, № 1. — C. 69– 78;
- Куликов Д. А., Секацкая А. В. О влиянии геометрических характеристик области на структуру нанорельефа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28, № 3. — С. 293–304;
- 4. Секацкая А.В. Исследование состояний равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными условиями Неймана // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 1. С. 59–69.
- 5. Куликов А. Н., Секацкая А. В. Локальные аттракторы в одной краевой задаче для уравнения Курамото-Сивашинского. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 2018. Т. 148. С. 58–65;

Прочие работы:

- 6. Куликов А. Н., Секацкая А. В. О влиянии выбора краевых условий на динамику решений в модели Бредли-Харпера формирования нанорельефа // Международная научно-практическая конференция «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования» Рязанский государственный университет имени С. А. есенина. — 2016. — С. 108-111;
- 7. Sekatskaya A. Dissipative structures of value boundary problems of the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation // Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория: тезисы докладов Междунар. конф., посвященной 110-летию И. П. Макарова. Рязанский государственный университет имени С. А. есенина. 2016. С. 39-40;
- 8. Секацкая А.В. Локальные аттракторы в одной краевой задаче для уравнения Курамото-Сивашинского // Ш Всероссийский научный форум «Наука будущего – наука молодых». Нижний Новгород. — 2017;
- 9. Sekatskaya A.V. Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Boundary Value Problem for the Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation // Conference Abstracts. International Student Conference «Science and Progress 2017» SPb.: SOLO. 2017. P. 110;

- Секацкая А.В. Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского // Новые тенденции в нелинейной динамике: тезисы докладов конференции. — Ярославль: ЯрГУ. — 2017. — С. 74–76;
- Секацкая А. В. Исследование уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // Материалы Международного молодежного научного форума «Ломоносов — 2018» [Электронный ресурс]. — 2018;
- Секацкая А. В. Состояния равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // 71-я Всероссийская научно-техническая конференция студентов, магистрантов и аспирантов с международным участием. Ярославль. ЯГТУ. — 2018. — С. 869–872;
- 13. Секацкая А. В. Состояния равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // Международная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике, посвященная 70-летию С. Л. Атанасяна, 70летию И. С. Красильщика, 70-летию А. В. Самохина, 80-летию В. Т. Фоменко». Рязанский государственный университет имени С. А. есенина. — 2018. — С. 21–22;
- 14. Sekatskaya A.V. The Galerkin method in the problem of inhomogeneous equilibrium states for one of the boundary value problems of the Kuramoto-Sivashinsky equation // Интегрируемые системы и нелинейная динамика: тезисы докладов. 2018. С. 75–76;
- 15. Sekatskaya A.V. On the influence of the shape of a region on the character of local bifurcations in the Kuramoto-Sivashinsky equation // International Conference «ShilnikovWorkshop 2018». Нижний Новгород. Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского. 2018. С. 32–34;
- 16. Секацкая А. В. О характере локальных бифуркаций уравнения Курамото-Сивашинского в различных областях // Вестник Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 133–137.

#### Структура диссертации. Основные результаты

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 127 страниц. Библиография включает 69 наименований, сформирована в алфавитном порядке фамилий авторов и располагается в конце диссертационной работы.

В диссертации рассматривается известное эволюционное уравнение математической физики, которое в современной математической литературе принято называть уравнением Курамото-Сивашинского. В данной работе это уравнение изучается в первоначальной редакции авторов работ, где оно было предложено, вместе с однородными краевыми условиями Неймана. Также рассматривается краевая задача вместе с однородными краевыми условиями Дирихле. Изучен вопрос о существовании и устойчивости локальных аттракторов, сформированных пространственно неоднородными решениями изучаемой краевой задачи. Данный вопрос стал особенно актуален в последнее время в связи с моделированием процесса формирования наноструктур на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов или лазерного излучения.

Один из возможных механизмов образования пространственно неоднородных решений (неоднородных диссипативных структур) — это локальные бифуркации состояний равновесия при смене ими устойчивости. В свою очередь, устойчивость решений краевой задачи будем понимать в смысле нормы фазового пространства (пространства начальных условий) решений изучаемых краевых задач.

В первой и третьей главах диссертационной работы для изучения вопроса о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода использован подход, основанный на использовании строго обоснованных методов теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством: метод интегральных многообразий, теория нормальных форм, асимптотические методы.

Во второй главе диссертационной работы использован метод Галеркина с использованием четырех– и пятичленного приближения. Проведено сравнение результатов, полученных с использованием метода Галеркина, с результатами бифуркационного анализа краевой задачи на базе применения методов качественного анализа бесконечномерных динамических систем.

Далее рассмотрим содержание глав более подробно.

#### Глава 1

В первой главе диссертационной работы рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \quad (1)$$

где  $u = u(t, x, y), b_1, b_2, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}, d_1, d_2, d_3 > 0$ . Уравнение (1) принято называть обобщенным уравнением Курамото-Сивашинского.

Оно встречается во многих разделах физики. В частности, это уравнение используется в качестве математической модели формирования волнового нанорельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов. В первой главе уравнение (1) рассматривается вместе с однородными условиями Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$
(2)

Краевая задача (1), (2) имеет семейство пространственно однородных состояний равновесия

$$u(t, x, y) = const, \ const \in \mathbb{R}.$$
(3)

Можно показать, что семейство состояний (3) содержит устойчивые состояния равновесия, если справедливы неравенства

$$b_1 < d_1, \ b_2 < d_2.$$

Можно выделить три критических случая в задаче об устойчивости однородных состояний равновесия:

1) 
$$b_1 = d_1, b_2 < d_2;$$
 2)  $b_1 < d_1, b_2 = d_2;$  3)  $b_1 = d_1, b_2 = d_2;$ 

и, следовательно, три случая, близких к ним.

Пусть  $b_1 = d_1$ . Тогда спектр устойчивости однородных состояний равновесия (u(t, x, y) = const) содержит двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции  $e_0(x) = 1$  и  $e_1(x) = cos x$ . Положим  $b_1 = d_1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $b_2 < d_2$ .

Пусть u(t, x, y) — решение краевой задачи (1), (2). Тогда функцию u(t, x, y) можно представить в виде

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} u(t, x, y) dx dy,$$

а для w(t, x, y) справедливо равенство

$$M(w) = \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} w(t, x, y) dx dy \equiv 0,$$

то есть функция w(t, x, y) имеет нулевое пространственное среднее. При этом краевую задачу (1), (2) можно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{v} = \psi(w), \ \psi(w) = M\left(c_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)$$
(4)

и краевой задачи для w(t,x)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -b_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + c_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \psi(w),$$
(5)

где w удовлетворяет краевым условиям (2), а также

$$M(w) = 0. (6)$$

Пусть  $b_1 = d_1$ . Тогда спектр устойчивости однородных состояний равновесия u(t, x, y) = const содержит двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции  $e_0(x) = 1$  и  $e_1(x) = cos x$ .

Положим  $b_1 = d_1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $b_2 < d_2$ . Справедливо утверждение.

**Теорема 1.1.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  вспомогательная краевая задача (5), (2), (6) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$S_{11}: w_{11}(x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2x + \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}),$$
(7)  
$$S_{12}: w_{12}(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2x - \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}).$$
(8)

При выбранных значениях параметра состояниям равновесия  $S_{11}, S_{12}$  вспомогательной краевой задачи (5), (2), (6) соответствуют два однопараметрических семейства пространственно неоднородных решений краевой задачи (1), (2)

$$u_{11}(t, x, \varepsilon) = K_{11} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t + w_{11}(x, \varepsilon),$$
$$u_{12}(t, x, \varepsilon) = K_{12} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t + w_{12}(x, \varepsilon),$$

где функции  $w_{11}, w_{12}$  указаны выше, а  $K_{11}, K_{12} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Доказательство теоремы основано на использовании метода интегральных (инвариантных) многообразий, аппарата теории нормальных форм Пуанкаре-Дюлака, и в конечном итоге может быть сведено к анализу нормальной формы (укороченного варианта нормальной формы)

$$\psi' = \frac{c_1}{2}z^2,$$
  
$$z' = \gamma_1 z - \frac{c_1^2}{12d_1}z^3$$

Пусть  $b_1 < d_1$ ,  $b_2 = d_2 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . При таком варианте выбора параметров задачи реализуется случай, близкий к критическому двукратного нулевого собственного значения. При  $b_2 = d_2$  есть двукратное нулевое собственное значение спектра устойчивости и ему отвечают собственные функции  $e_0 = 1$ ,  $e_1(y) = \cos y$ .

В таком случае имеет место утверждение.

**Теорема 1.2.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  вспомогательная краевая задача (5), (2), (6) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$S_{21}: w_{21}(y,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2}}{|c_2|} \cos y - \frac{\varepsilon}{2c_2} \cos 2y + \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_2|\sqrt{d_2}} \cos 3y + o(\varepsilon^{3/2}),$$
$$S_{22}: w_{22}(y,\varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2}}{|c_2|} \cos y - \frac{\varepsilon}{2c_2} \cos 2y - \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_2|\sqrt{d_2}} \cos 3y + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Состояниям равновесия  $S_{21}, S_{22}$  вспомогательной краевой краевой задачи (5), (2), (6) соответствуют два однопараметрических семейства решений

$$u_{21}(t, x, \varepsilon) = K_{21} + \left(6\varepsilon \frac{d_2}{c_2} + o(\varepsilon)\right)t + w_{21}(x, \varepsilon),$$
$$u_{22}(t, x, \varepsilon) = K_{22} + \left(6\varepsilon \frac{d_2}{c_2} + o(\varepsilon)\right)t + w_{22}(x, \varepsilon),$$

где функции  $w_{21}, w_{22}$  указаны выше, а  $K_{21}, K_{22} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Отметим, что при  $b_1 = d_1$ ,  $b_2 = d_2$  реализуется критический случай трехкратного нулевого собственного значения, которому отвечают собственные функции  $e_0 = 1$ ,  $e_1(x) = \cos x$ ,  $e_2(y) = \cos y$ .

При  $b_1 = d_1 + \gamma_1 \varepsilon$ ,  $b_2 = d_2 + \gamma_2 \varepsilon$  использование теоремы о центральном инвариантном многообразии, метод нормальных форм, адаптированный к использованию для бесконечномерных динамических систем позволяет свести задачу о бифуркациях пространственно неоднородных решений к анализу системы из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = \frac{c_1}{2}z_1^2 + \frac{c_2}{2}z_2^2,$$
$$z_1' = \alpha_1 z_1 - \frac{c_1^2}{12d_1}z_1^3,$$
$$z_2' = \alpha_2 z_2 - \frac{c_2^2}{12d_2}z_2^3.$$

**Теорема 1.3.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  вспомогательная краевая задача (5), (2), (6) имеет четыре пространственно неоднородных асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$\begin{split} S_{31} : w_{31}(x, y, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \left( \frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left( \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) + \\ &+ \varepsilon^{3/2} \left( \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ S_{32} : w_{32}(x, y, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \left( \frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left( \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) + \\ &+ \varepsilon^{3/2} \left( \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ S_{33} : w_{33}(x, y, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \left( -\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left( \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) + \\ &+ \varepsilon^{3/2} \left( -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ S_{34} : w_{34}(x, y, \varepsilon) &= -\varepsilon^{1/2} \left( \frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos 3x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) - \varepsilon \left( \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) - \\ &- \varepsilon^{3/2} \left( \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) - \varepsilon \left( \varepsilon^{3/2} \right). \end{split}$$

Состояниям равновесия  $S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34}$  соответствуют четыре однопараметрических семейства пространственно неоднородных решений

$$u_{31}(t, x, y, \varepsilon) = K_{31} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + w_{31}(x, y, \varepsilon),$$
  

$$u_{32}(t, x, y, \varepsilon) = K_{32} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + w_{32}(x, y, \varepsilon),$$
  

$$u_{33}(t, x, y, \varepsilon) = K_{33} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + w_{33}(x, y, \varepsilon),$$
  

$$u_{34}(t, x, y, \varepsilon) = K_{34} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + w_{34}(x, y, \varepsilon),$$

где функции  $w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{34}$  указаны выше, а  $K_{31}, K_{32}, K_{33}, K_{34} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

**Теорема 1.4.** Существует  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и любом  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  вспомогательная краевая задача (5), (2), (6) имеет четыре неустойчивых состояния равновесия

$$S_{41}, S_{42} : w_{\pm 1,0}(x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left( \pm \frac{2\sqrt{3d_1\alpha_1}}{|c_1|} \cos x \right) - \varepsilon \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + o(\varepsilon),$$
  
$$S_{43}, S_{44} : w_{0,\pm 1}(y,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left( \pm \frac{2\sqrt{3d_2\alpha_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y + o(\varepsilon).$$

Состояниям равновесия  $S_{41}, S_{42}, S_{43}, S_{44}$ , соответствуют четыре однопараметрических семейства решений

$$u_{\pm 1,0}(t,x,\varepsilon) = K_{4,\pm 1} + \left(6\varepsilon \ \frac{d_1\alpha_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t + w_{\pm 1,0}(x,\varepsilon),$$
$$u_{0,\pm 1}(t,y,\varepsilon) = K_{4,\pm 2} + \left(6\varepsilon \ \frac{d_2\alpha_2}{c_2} + o(\varepsilon)\right)t + w_{0,\pm 1}(y,\varepsilon),$$

где функции  $w_{\pm 1,0}(x,\varepsilon), w_{0,\pm 1}(y,\varepsilon)$  указаны выше, а  $K_{4,\pm 1}, K_{4,\pm 2} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

#### Глава 2

Во второй главе рассматривается классический вариант уравнения Курамото-Сивашинского, изучается нелинейная краевая задача в случае, когда функция u(t, x) зависит от одной пространственной переменной

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{9}$$

с однородными краевыми условиями Неймана (раздел 2.3.1)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi),$$
(10)

а также с однородными краевыми условиями Дирихле (раздел 2.3.2)

$$u(t,0) = u(t,\pi) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\pi).$$
(11)

Исследован вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода двумя способами. В первом — использован метод Галеркина в случае четырех и пяти базисных функций (раздел 2.3), во втором — изучаются локальные бифуркации данных краевых задач. Проведено сравнение результатов анализа задачи двумя разными способами в разделе 2.3.3.

Анализ краевой задачи (9), (10) с использованием метода Галеркина в случае четырех базисных функций приводит к анализу следующей системы функций:

$$\frac{du_0}{dt} = -\left(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2\right),\tag{12}$$

$$\frac{du_1}{dt} = -u_1 + bu_1 - (6u_2u_3 + 2u_1u_2),$$

$$\frac{du_2}{dt} = -16u_2 + 4bu_2 + \left(\frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3\right),$$

$$\frac{du_3}{dt} = -81u_3 + 9bu_3 + 2u_1u_2.$$
(13)

Анализ системы (13) показывает, что при  $b \in (-\infty, 1] \cup (9, \infty)$  она не имеет действительных решений, отличных от нуля. При  $b \neq 1, b \neq 4, b \neq 9$  система (13) имеет 4 типа решений  $V_1, V_2, V_3, V_4$ , которые наглядно представлены на Рис. 1.



Рис. 1: Состояния равновесия системы (13). Здесь  $V_1(v_1, v_2, v_3)$  — одно из состояний равновесия, крестом обозначены области, где решения отсутствуют.

В случае пяти базисных функций исследуется система функций:

$$\frac{du_0}{dt} = -\left(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2 + 16u_4^2\right),\tag{14}$$

$$\frac{du_1}{dt} = -u_1 + bu_1 - (6u_2u_3 + 12u_3u_4 + 2u_1u_2),$$

$$\frac{du_2}{dt} = -16u_2 + 4bu_2 + \left(\frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3 - 8u_2u_4\right),$$

$$\frac{du_3}{dt} = -81u_3 + 9bu_3 + 2\left(u_1u_2 - 2u_1u_4\right),$$

$$\frac{du_4}{dt} = -256u_4 + 16bu_4 + \left(2u_2^2 + 3u_1u_3\right).$$
(15)

Для наглядности все решения системы (15) представлены на Рис. 2



Рис. 2: Состояния равновесия системы (15). Здесь  $\tilde{V}_1(v_1, v_2, v_3, v_4)$  — одно из состояний равновесия.

Анализ краевой задачи (9), (11) с использованием метода Галеркина в случае

трех базисных функций приводит к анализу следующей системы функций:

$$\frac{du_1}{dt} = (b-1)u_1 - \frac{4u_1^2}{3\pi} - \frac{112u_2^2}{15\pi} + \frac{24u_1u_3}{5\pi} - \frac{612u_3^2}{35\pi}, 
\frac{du_2}{dt} = 4(b-4)u_2 - \frac{32u_1u_2}{15\pi} - \frac{96u_2u_3}{7\pi}, 
\frac{du_3}{dt} = 9(b-9)u_3 - \frac{28u_1^2}{15\pi} + \frac{16u_2^2}{21\pi} - \frac{72u_1u_3}{35\pi} - \frac{4u_3^2}{\pi}.$$
(16)

Найдены ненулевые состояния равновесия вспомогательной системы (15), а также ненулевые состояния равновесия второго рода полной системы (14), (15) и системы (16). Используя численные методы анализа, были найдены состояния равновесия и исследован вопрос об их устойчивости.

Пусть в основной краевой задаче (9), (10)

$$b = b_n + \varepsilon, \ b_n = n^2, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Положим также

$$u(t,x) = v(t) + w(t,x),$$

где

$$v(t) = M(u(t,x)) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} u(t,x) dx$$

и, следовательно,

$$M(w) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} w(t, x) dx \equiv 0.$$

Для функций v(t), w(t, x) получаем краевую задачу

$$\dot{v} = -\psi(w), \ \psi(w) = M\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx,$$
 (17)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_n(\varepsilon)w - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \psi(w), \tag{18}$$

$$\frac{\partial w(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial w(t,\pi)}{\partial x} = \frac{\partial^3 w(t,0)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w(t,\pi)}{\partial x^3} = 0, \ M(w) = 0.$$
(19)

Применяя теорию локальных бифуркаций для бесконечномерных динамических систем, можно показать справедливость утверждения.

**Теорема 2.1.** Существует такое  $\varepsilon_n > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$  существует два семейства решений краевой задачи (18), (10), (19)

$$w_{n1,n2}(x,\varepsilon) = \pm \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3}n \cos nx + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2nx + o(\varepsilon).$$

При n = 1 оба состояния равновесия асимптотически устойчивы, а при  $n \neq 1$  они неустойчивы.

Основная краевая задача (9), (10) имеет два однопараметрических семейства решений

$$u_{n1,n2}(t,x,\varepsilon) = K_{n1,n2} + \left(-6n^4\varepsilon + o(\varepsilon)\right)t + w_{n1,n2}(x,\varepsilon),$$

где функции  $w_{n1,n2}(x,\varepsilon)$  указаны выше, а  $K_{n1}, K_{n2} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

В разделе 2.1.3 рассмотрены некоторые частные случаи в задаче о бифуркациях пространственно неоднородных решений непосредственно у краевых задач (9), (10) и (9), (11) при

1) 
$$b = 1 + \varepsilon$$
; 2)  $b = 4 + \varepsilon$ ; 3)  $b = 9 + \varepsilon$ .

В разделе 2.3.2 изучается задача нахождения состояний равновесия в случае краевых условий Дирихле (11). Рассматриваются бифуркационные задачи, возникающие при

$$b = b_n(\varepsilon) = n^2 + \frac{\varepsilon \gamma}{n^2}, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

При таком выборе значений бифуркационного («управляющего») параметра *b* изучен вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений у краевой задачи (9), (11). При этом рассмотрено два случая:

1. n = 2m - 1, m = 1, 2, 3, ..., то есть, когда n — нечетно;

2. n = 2m, n = 1, 2, 3, ..., то есть, когда n — четно.

Справедливы утверждения.

**Теорема 2.2.** Пусть  $b = n^2 + \frac{\varepsilon \gamma}{n^2}$ , n = 2m - 1,  $m \in \mathbb{N}$ . Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  краевая задача (9), (11) имеет состояние равновесия, для которого справедлива асимптотическая формула

$$u(t,x) = u(x,\varepsilon) = \varepsilon z_*(m)\sin(2m-1)x + \varepsilon^2 z_*^2(m)v(x),$$

где функция v(x) была найдена при анализе вспомогательной краевой задачи.

Это состояние равновесия асимптотически устойчиво, если  $\gamma = 1(\gamma > 0)$  и m = 1. В остальных случаях имеем седловые состояния равновесия.

**Теорема 2.3.** Пусть  $b = n^2 + \frac{\varepsilon \gamma}{n^2}$ , n = 2m,  $m \in \mathbb{N}$ . Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существуют состояния равновесия

$$u_{1,2}(t,x) = \varepsilon^{1/2} z_{1,2}(m) \sin 2mx + \varepsilon u_2(t,x) + \varepsilon^{3/2} u_3(t,x),$$

где  $u_2(t,x), u_3(t,x)$  были найдены при анализе вспомогательной краевой задачи. Эти состояния равновесия являются неустойчивыми. Проведено сравнение некоторых из результатов, полученных на базе применения метода Галеркина с результатами бифуркационного анализа краевых задач (9), (10) и (9), (11) с использованием строго обоснованных методов качественной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством. Показаны некоторые ограниченные возможности анализа краевых задач (9), (10) и (9), (11) на основе использования метода Галеркина.

#### Глава 3

В третьей главе диссертационной работы рассматривается вопрос о характере локальных бифуркаций в различных областях в случае краевых условий Неймана и Дирихле. В этой главе изучается близкая задача к той, что была рассмотрена в первой главе. Детально рассмотрен вопрос о влиянии геометрических характеристик и выбора краевых условий на структуры решений изучаемой краевой задачи. Обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана и Дирихле в трех областях: прямоугольнике, квадрате и равнобедренном треугольнике.

После преобразований, перенормировок задача может быть сведена к анализу следующего нелинейного дифференциального уравнения с частными производными параболического типа:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b\Delta_{\mu}u - \Delta_{\mu}^{2}u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}, \ u = u(t, x, y), \tag{20}$$

где  $\Delta_{\mu} u = rac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu rac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$ 

В разделе 3.2 уравнение (20) рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана в трех областях: прямоугольнике, квадрате и равнобедренном треугольнике. Далее без нарушения общности считаем, что  $\mu \ge 1$ .

Если рассматривается прямоугольная область, то есть случай общего положения, то можно считать без нарушения общности, что  $\mu > 1$ . Уравнение (14) в этом разделе рассматривается вместе с краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0,x=\pi} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=0,x=\pi} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0,y=\pi} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{y=0,y=\pi} = 0.$$
(21)

При  $b < 1 + \mu$  состояния равновесия краевой задачи устойчивы. Критическое значение бифуркационного параметра  $b = b_* = 1(\mu > 1)$ .

Пусть теперь  $b = 1 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$ 

Пусть u(t, x, y) — какое-либо решение краевой задачи (20), (21) при  $b = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $0 < \varepsilon_0 << 1$ . Повторяя достаточно стандартные конструкции первой и второй главы диссертационной работы, можно представить это

решение в форме

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = M(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} u(t, x, y) dx,$$

а функция w(t, x, y), следовательно, имеет нулевое пространственное среднее, то есть M(w) = 0. Используя такое представление для u(t, x, y), вид правой части уравнения (20) можно и полезно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения для v(t)

$$\dot{v} = \psi(w), \ \psi(w) = M\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)$$
 (22)

и вспомогательной краевой задачи для w

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(\varepsilon)u + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\tag{23}$$

где w(t, x, y) удовлетворяет краевым условиям (21), а также равенству

$$M(w) = 0. (24)$$

Из результатов работ [15], [53] вытекает справедливость утверждения.

**Теорема 3.1.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует два асимптотически устойчивых состояния равновесия краевой задачи (23), (21), (24)

$$w_{\pm}(x,\varepsilon) = \pm 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2}\cos x - \frac{1}{2}\varepsilon\cos 2x \pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2}\cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Этим состояниям равновесия вспомогательной краевой задачи (23), (21), (24) соответствуют два однопараметрических семейства решений

$$u_{\pm}(t, x, \varepsilon) = v_{\pm}(t, \varepsilon) + w_{\pm}(x, \varepsilon),$$

где функции  $v_{\pm}(t,\varepsilon)$  находим после интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения (22). При этом

$$v_{\pm}(t,\varepsilon) = K_{\pm} + (6\varepsilon + o(\varepsilon))t,$$

где функции  $w_{\pm}(x,\varepsilon)$  были указаны выше, а  $K_{\pm} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Напомним, что решения  $u_{\pm}(t, x, \varepsilon)$  — состояния равновесия второго рода.

Показано, что в ситуации, когда  $\mu > 1$  существует пространственно неоднородные решения, которые не зависят от y, а только от x.

Если рассматривается квадратная форма области, то есть при  $\mu = 1$  и  $b = 1 + \varepsilon$ , то рассматриваемая краевая задача имеет уже пространственно неоднородные решения, которые зависят от x и y одновременно.

Пусть u(t, x, y) — решение краевой задачи (20), (21) при  $b = 1 + \gamma_1 \varepsilon$ ,  $\mu = 1 + \gamma_2 \varepsilon$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ . Положим

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = M(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x, y) dx dy,$$

a

 $M(w) \equiv 0.$ 

Как и в предыдущих разделах вместо краевой задачи (20), (21) рассмотрим уравнение

$$\dot{v} = \psi(w), \qquad (25)$$

$$\psi(w) = M\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \gamma_2 \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)$$

и краевую задачу для w(t, x, y)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw + \varepsilon B_1 w + \varepsilon^2 B_2 w + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \gamma_2 \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \psi(w), \quad (26)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0,x=\pi} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=0,x=\pi} = \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=0,y=\pi} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\Big|_{y=0,y=\pi} = 0, \quad (27)$$
$$M(w) = 0.$$

**Теорема 3.2.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ краевая задача (26), (21), (27) имеет состояния равновесия

$$w_j(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (\eta_1 \cos x + \eta_2 \cos y) - \frac{1}{24} \varepsilon (\eta_1^2 \cos 2x + \eta_2^2 \cos 2y) + \frac{1}{864} \varepsilon^{3/2} (\eta_1^3 \cos 3x + \eta_2^3 \cos 3y) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

соответствующие состояниям равновесия  $S_j$ , j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Где  $(\eta_1, \eta_2)$  — координаты состояния равновесия  $S_j$  с наследованием свойств устойчивости.

Каждому состоянию равновесия  $w_j(x, y, \varepsilon)$ , где j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 вспомогательной краевой задачи (26), (21), (27) соответствует однопараметрическое решение основной краевой задачи (20), (21).

$$u(t, x, y, \varepsilon) = K_j + \left(\frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2)\varepsilon + o(\varepsilon)\right)t + w_j(x, y, \varepsilon),$$

где функции  $w_j(x, y, \varepsilon)$  указаны выше, а  $K_j \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Здесь  $(\eta_1, \eta_2)$  — координаты соответствующего состояния равновесия  $S_j$ , где  $S_j$  — состояние равновесия следующей вспомогательной системы дифференциальных уравнений

$$z_1' = \gamma_1 z_1 - \frac{1}{12} z_1^3, \tag{28}$$

$$z_2' = (\gamma_1 - \gamma_2)z_2 - \frac{1}{12}z_2^3.$$
<sup>(29)</sup>

— главной части нормальной формы. При этом семейство решений  $u(t, x, y, \varepsilon)$  наследует устойчивость соответствующего ему состояния равновесия нормальной формы.

**Лемма 1**. Система (28), (29) может иметь следующие ненулевые состояния равновесия:

$$S_{1}: \eta_{1} = z_{1} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, \eta_{2} = z_{2} = 0;$$

$$S_{2}: \eta_{1} = z_{1} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, \eta_{2} = z_{2} = 0;$$

$$S_{3}: \eta_{2} = z_{2} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}}, \ \eta_{1} = z_{1} = 0;$$

$$S_{4}: \eta_{2} = z_{2} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}}, \ \eta_{1} = z_{1} = 0;$$

$$S_{5}: \eta_{1} = z_{1} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, \ \eta_{2} = z_{2} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}};$$

$$S_{6}: \eta_{1} = z_{1} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, \ \eta_{2} = z_{2} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}};$$

$$S_{7}: \eta_{1} = z_{1} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, \ \eta_{2} = z_{2} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}};$$

$$S_{8}: \eta_{1} = z_{1} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, \ \eta_{2} = z_{2} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}}.$$

Состояния равновесия  $S_1, S_2$  существуют при  $\gamma_1 > 0$ . Если  $\gamma_1 > 0$ , а  $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$ , то асимптотически устойчивы состояния равновесия  $S_1, S_2$ , а остальные состояния равновесия  $S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$  и нулевое состояние равновесия — неустойчивы.

Состояния равновесия  $S_3, S_4$  существуют при  $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$ . Наконец, при  $\gamma_1 < 0, \gamma_1 - \gamma_2 > 0$  асимптотически устойчивы  $S_3, S_4$  а остальные состояния равновесия  $S_1, S_2, S_5, S_6, S_7, S_8$  и нулевое — неустойчивы.

Состояния равновесия  $S_5, S_6, S_7, S_8$  существуют при  $\gamma_1 > 0, \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ . Если  $\gamma_1 > 0, \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ , то состояния равновесия  $S_5, S_6, S_7, S_8$  асимптотически устойчивы, а остальные состояния равновесия  $S_1, S_2, S_3, S_4$  и нулевое неустойчивы.

Для случая, когда область представляет собой равнобедренный треугольник, то есть, при  $\mu = 1, \ b = 1 + \gamma \varepsilon$  справедливо утверждение.

Положим

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x, y) dx dy, \ w(t, x, y) = u(t, x, y) - v(t),$$
$$M(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} w(t, x, y) dx dy = 0.$$

Вместо краевой задачи (20), (21) получим ее детализированный вариант

$$\dot{v} = \psi(w), \ \psi(w) = M\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right),$$
(30)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_0 w + \varepsilon B w + \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) - \psi(w), \tag{31}$$

$$M(w) \equiv 0, \tag{32}$$

и, конечно, функция w удовлетворяет краевым условиям (21).

**Теорема 3.3.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует два асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$w_{\pm}(x,y,\varepsilon) = \pm 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2}(\cos x + \cos y) - \frac{1}{2}\varepsilon(\cos 2x + \cos 2y) \pm \pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2}(\cos 3x + \cos 3y) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

Решениям  $w_{\pm}(x,y,\varepsilon)$  соответствуют два однопараметрических семейства решений вида

$$u_{\pm}(t, x, y, \varepsilon) = K_{\pm} + (12\varepsilon + o(\varepsilon))t + w_{\pm}(x, y, \varepsilon),$$

где функции  $w_{\pm}(x, y, \varepsilon)$  были указаны выше, а  $K_{\pm} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Во второй части этой главы уравнение (20) изучено вместе с однородными краевыми условиями Дирихле.

В случае прямоугольной области справедливо утверждение. Пусть <br/>  $\mu > 1, \; b = 1 + \mu + \gamma \varepsilon.$ 

**Теорема 3.4.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существует устойчивое пространственно неоднородное решение краевой задачи

$$u(x, y, \varepsilon) = -\frac{9\pi^2 \gamma}{32} \varepsilon \sin x \sin y + o(\varepsilon).$$

Для квадратной области справедливо утверждение. Пусть  $\mu = 1, b = 2 + \gamma_1 \varepsilon$ . **Теорема 3.5.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  нелинейная краевая задача имеет ненулевое пространственно неоднородное решение

$$u(x, y, \varepsilon) = -\frac{9}{32}\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)\varepsilon\sin x\sin y + o(\varepsilon).$$

Это решение асимптотически устойчиво, если  $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$  и неустойчиво, если  $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$ .

В случае треугольной формы имеет место утверждение. Пусть  $\mu=1,\ b=5+\gamma\varepsilon.$ 

**Теорема 3.6.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существует одно устойчивое состояния равновесия

$$u(x, y, \varepsilon) = -\frac{5\pi^2 \gamma}{27} \varepsilon(\sin x \sin 2y - \sin 2x \sin y) + O(\varepsilon^2),$$

если  $\gamma > 0$  и оно неустойчиво при  $\gamma < 0$ .

Рассмотрены задачи о локальных бифуркациях пространственно неоднородных решений в окрестности однородных состояний равновесия соответствующих краевых задач. Для всех случаев выбора области (прямоугольник, квадрат, равнобедренный треугольник) с краевыми условиями Неймана и Дирихле механизм формирования нанорельефа один и тот же. Соответствующий неоднородный рельеф возникает при потере устойчивости однородными состояниями равновесия. С другой стороны, в зависимости от формы области меняется и структура нанорельефа. В случае прямоугольника он имеет цилиндрическую форму (зависит только от одной пространственной переменной). В квадрате и треугольнике такой «двумодовый» рельеф зависит от x и y одновременно.

### Заключение

В диссертационной работе рассмотрено уравнение Курамото-Сивашинского и его обобщения. Например, в главах 1 и 3 изучаются краевые задачи для уравнения, которое следует считать обобщенным вариантом уравнения Курамото-Сивашинского. Так, определяемая из них функция зависит от t и двух пространственных переменных. В первоначальной, классической версии функция зависит только от t и x.

Рассматриваемый обобщенный вариант уравнения Курамото-Сивашинского был предложен в связи с рядом задач физики пограничных явлений, изучением механизма появления неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов.

В работе показано, что в рассмотренных задачах можно ожидать появления пространственно неоднородных решений (состояний равновесия и в том числе

второго рода) при смене устойчивости пространственно однородными решениями. Чаще речь идет, естественно, о потере устойчивости.

При этом возникают бифуркационные задачи для динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий, как правило, имеющие определенное вырождение, коразмерности 2 или же, в которых имеет место и вырождение коразмерности больше единицы. Тем не менее, в работе удалось показать, опираясь на метод интегральных многообразий и нормальных форм, что исследование соответствующих бифуркационных задач сводится к анализу динамики вспомогательных уравнений или систем уравнений — нормальной формы Пуанкаре-Дюлака.

С точки зрения приложений к физике (в частности, к микро— и наноэлектронике) полученные результаты подтверждают точку зрения о том, что формирование нанорельефа — это процесс самоорганизации и соответствующие неоднородные решения могут возникать в результате анализа соответствующих бифуркационных задач. При этом такой вывод повторяется при изучении обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в разных областях с разными краевыми условиями, выбор которых, в первую очередь, зависит от физической постановки задачи.

В диссертационной работе также показано, что использование метода Галеркина, конечно, возможно, но при этом ответ часто зависит от числа базисных функций и диапазона выбора параметров задачи. Во многом данный недостаток удается преодолеть при анализе соответствующих задач методом качественной теории бесконечномерных динамических систем. Тем не менее, в диссертации были получены новые результаты при анализе галеркинских приближений соответствующих краевых задач уже для классической версии уравнения Курамото-Сивашинского. Были рассмотрены те задачи, анализ которых был предложен в известной работе Дитера Армбрустера, Джона Гукенхеймера, Филипа Холмса.

Из полученных в диссертационной работе результатов, а также их уточнений и корректировки вытекает, что они нуждаются в определенных уточнениях и комментариях.

## Глава 1

# Уравнение Курамото-Сивашинского в случае 2-х пространственных переменных с краевыми условиями Неймана

### 1.1 Постановка задачи

В данной главе будет рассмотрена краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$
(1.2)

Здесь  $u = u(t, x, y), t \ge 0, x \in [0, \pi], y \in [0, \pi], b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}, d_1, d_2, d_3 > 0.$ Уравнение (1.1) можно называть обобщенным вариантом уравнения Курамото-Сивашинского или просто уравнением Курамото-Сивашинского. Напомним, что уравнение Курамото-Сивашинского впервые появилось в работах [59], [66] в связи с приложениями в гидродинамике и нелинейной кинетике. В этих работах рассматривался «одномерный» вариант такого уравнения. Например,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -d\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c\frac{\partial u}{\partial x} + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{1.3}$$

вместе с подходящими краевыми условиями. В уравнении (1.3) функция u = u(t,x), то есть зависит от одной пространственной переменной x. Двумерный вариант, то есть уравнение (1.1), было рассмотрено в различных работах (смотри, например, [12], [15]) и часто в связи с иными приложениями. В частности, в связи с изучением процесса формирования неоднородного рельефа (нанорельефа) на поверхности полупроводников под воздействием ионной бомбардировки. Более подробное обсуждение физических аспектов проблемы можно найти во введении диссертации, а также работе [40]. В данной главе уравнение (1.1) будет рассмотрено вместе с краевыми условиями (1.2), которые традиционно называют однородными краевыми условиями Неймана (краевыми условиями «непроницаемости», характерными для задач химической кинетики [59]).

Сразу отметим, что краевая задача (1.1), (1.2) имеет семейство решений вида u(t, x, y) = const, где const — произвольная действительная постоянная. Такие решения принято называть однородными (пространственно однородными) состояниями равновесия. Более того, краевая задача (1.1), (1.2) инвариантна относительно замены  $u(t, x, y) \rightarrow u(t, x, y) + const$  (преобразования Галилея). Напомним, что инвариантность уравнений относительно преобразований Галилея (замены системы координат) — один из основных принципов классической физики. Последние замечания означают, что без нарушения общности при изучении однородных состояний равновесия иногда можно ограничиться состоянием равновесия  $u \equiv 0$ .

В данной главе будут рассмотрены вопросы существования и устойчивости пространственно неоднородных решений краевой задачи. Поясним, что под термином пространственно неоднородных решений краевой задачи (в данном случае краевой задачи (1.1), (1.2)) понимаем такое ее решение u(t, x, y), для которого

$$grad u(t, x, y) = \left(\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(t, x, y)}{\partial y}\right) \neq 0.$$

При этом отметим, что будут найдены такие пространственно неоднородные решения краевой задачи (1.1), (1.2), которые мы будем квалифицировать как состояния равновесия второго рода. Таким термином можно назвать те решения u(t, x, y), у которых

$$grad u(t, x, y) = \left(\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial x}, \frac{\partial u(t, x, y)}{\partial y}\right)$$

уже не зависит от t, хотя сама функция u(t, x, y) в обычном смысле не является решением, которое принято называть состоянием равновесия.

С прикладной точки зрения такие решения представляют интерес в связи с изучением неоднородного нанорельефа на поверхности полупроводников.

Краевую задачу (1.1), (1.2) можно дополнить начальным условием

$$u(0, x, y) = f(x, y).$$
 (1.4)

При соответствующем выборе f(x, y) смешанная задача (1.1), (1.2), (1.4) локально корректно разрешима и порождает локальный полупоток

$$f(x,y) \rightarrow f_t(x,y) = u(t,x,y).$$

Далее устойчивость решений краевой задачи (1.1), (1.2) будем понимать в смысле нормы пространства начальных условий (фазового пространства). Выбор соответствующего фазового пространства для краевой задачи (1.1), (1.2) будет осуществлен далее, в следующих разделах данной главы.

Отметим, что краевые условия (1.2) имеют прозрачный физический смысл и вытекают из условий непроницаемости [59]. Математические аспекты выбора краевых условий (1.2) изложены, например в работах [52–56].

В заключение первого раздела главы 1 отметим еще одну особенность краевой задачи (1.1), (1.2). Она допускает решения вида

$$u(t, x, y) = u_1(t, x),$$

которые не зависят от у. естественно, у нее есть решения

$$u(t, x, y) = u_2(t, y),$$

то есть такие решения, которые не зависят от x. Последнее простое замечание будет тем не менее использоваться в дальнейших построениях при анализе рассматриваемой краевой задачи (1.1), (1.2).

Рассмотрим краевую задачу (1.1), (1.2) и отметим еще ряд особенностей этой краевой задачи.

Пусть через M(u) обозначено среднее функции u(t, x, y), то есть

$$M(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} u(t, x, y) dx dy = u_0(t).$$

Тогда  $u(t,x) = u_0(t) + v(t,x,y)$ , где  $M(v) \equiv 0$ . Следовательно, функция  $u_0(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{u_0} = c_1 \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 dx dy + c_2 \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 dx dy$$

или в иной форме

$$\dot{u}_0 = M\left(c_1\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + c_2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right)$$

и, очевидно, что правая часть последнего уравнения отлична от нуля, то есть в ситуациях общего положения  $u_0(t) \neq const$ . Например, при  $c_1, c_2 > 0$   $u_0(t)$  возрастает, а при  $c_1, c_2 < 0$  убывает.

Уравнение (1.1), в свою очередь, можно переписать в виде двух уравнений:

$$\dot{u}_0 = M \left( c_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + c_2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right),$$
  
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2} + c_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + c_2 \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - c_1 M \left( \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right) - c_2 M \left( \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right),$$

где функция v = v(t, x, y) удовлетворяет краевым условиям (1.2) и, конечно,  $M(v) \equiv 0$ . При этом, как нетрудно заметить, уравнение для v(t, x, y) не зависит от  $u_0(t)$ . От  $u_0(t)$ , как можно видеть, не зависит и обыкновенное дифференциальное уравнение для  $u_0(t)$  и, следовательно, функция  $u_0(t)$  восстанавливается отдельно простым интегрированием.

Последнее замечание в явной или неявной форме используется при анализе краевой задачи (1.1), (1.2). В частности, при использовании метода нормальных форм.

Аналогичное замечание относится и к другим разделам, где соответствующие уравнения рассматриваются с однородными краевыми условиями Неймана (смотри, например, краевую задачу (2.1), (2.2) из второй главы или (3.12), (3.13) из третьей).

В заключение этого раздела уместно сделать следующее замечание. Пусть краевая задача для функции v(t, x, y) имеет нетривиальное состояние равновесия  $v_0(x, y)$ . Тогда

$$\dot{u}_0 = \varphi_0,$$

где

$$\varphi_0 = c_1 M_1 \left( \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 \right) + c_2 M_2 \left( \left( \frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 \right) = const,$$

которая в ситуации общего положения отлична от нуля и, следовательно,

$$u_0(t) = \varphi_0 t + K \ (K \in \mathbb{R}).$$

Поэтому такие решения краевой задачи (1.1), (1.2) в фазовом пространстве (пространстве начальных условий) формируют одномерное интегральное многообразие

$$u_0(t) = \varphi_0 t + K, \ v(t, x, y) = v_0(x, y)$$

ИЛИ

$$u(t, x, y) = \varphi_0 t + K + v_0(x, y).$$

Далее размерность многообразий определяется как размерность в пространстве начальных условий (фазовом пространстве решений соответствующей краевой задачи).

### 1.2 Линеаризованный вариант краевой задачи

В данном разделе, в первую очередь, изучим линеаризованный вариант краевой задачи (1.1), (1.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2},\tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$
(1.6)

Обозначим через *А* линейный дифференциальный оператор, находящийся в правой части линейного дифференциального уравнения с частными производными (1.5) и изучим вопрос о его спектре. Итак, изучению подлежит линейный дифференциальный оператор

$$Av = -b_1 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b_2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial y^2},$$

где  $v(x, y) \in D_A$ . его область определения  $D_A$  состоит из достаточно гладких функций v(x, y), удовлетворяющих краевым условиям (1.6).

В результате, для определения собственных значений и собственных функций линейного дифференциального оператора А получаем краевую задачу

$$Av = \lambda v,$$
  

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$
  

$$\frac{\partial v}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$
(1.7)

При

$$\lambda = \lambda_{n,m} = (b_1 n^2 + b_2 m^2) - (d_1 n^4 + d_2 m^4 + d_3 n^2 m^2),$$

где n, m = 0, 1, 2, ... краевая задача (1.7) имеет нетривиальные решения

$$v_{n,m}(x,y) = \cos nx \cos my, n, m = 0, 1, 2, \dots$$

В частности, при n = m = 0, то есть при  $\lambda_{0,0} = 0$  получим  $v_{0,0}(x,y) = 1$ . Уместно отметить, что счетное семейство функций  $\{v_{n,m}(x,y)\}$  при

$$(x,y) \in D = \{0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$$

образует полную ортогональную систему функций. В частности,

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} v_{m_1n_1}(x,y) v_{m_2n_2}(x,y) \, dx dy = 0, \text{ если } n_1 \neq n_2 \text{ или } m_1 \neq m_2,$$

а также любая функция  $g(x,y) \in L_2(D)$  может быть разложена в ряд Фурье (двойной ряд Фурье)

$$g(x,y) = \sum_{n+m \ge 1}^{\infty} a_{n,m} v_{n,m}(x,y) + a_{0,0},$$

где

$$a_{n,m} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} g(x,y) v_{n,m}(x,y) \, dx \, dy,$$

$$a_{0,0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} g(x,y) \, dx dy, \ a_{0,n} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} g(x,y) v_{0,n}(x,y) \, dx dy,$$
$$a_{n,0} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} g(x,y) v_{n,0}(x,y) \, dx dy.$$

Если теперь дополнить краевую задачу (1.5), (1.6) начальным условием

$$u(0, x, y) = g(x, y),$$
 (1.8)

то смешанная задача (1.5), (1.6), (1.8) может быть проинтегрирована методом Фурье и ее решение имеет вид

$$u(t, x, y) = a_{0,0} + \sum_{n+m \ge 1}^{\infty} a_{n,m} \exp(\lambda_{n,m} t) v_{n,m}(x, y),$$
(1.9)

где  $v_{n,m}(x,y)$  — собственные функции линейного дифференциального оператора  $A, a_{n,m}$  — коэффициенты Фурье функции g(x,y).

Элементарно проверяется, что при  $g(x, y) \in L_2(D)$  функция u(t, x, y), определенная равенством (1.9) удовлетворяет уравнению (1.5) при t > 0 ( $t \in [0, T]$ ) и при всех таких t является бесконечно дифференцируемой функцией по совокупности переменных. Наконец, они удовлетворяют начальным условиям (1.8) в следующем смысле:

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (u(t, x, y) - g(x, y))^2 \, dx dy \to 0,$$

если  $t \to 0$ .

Следовательно, решения смешанной задачи (1.5), (1.6), (1.8) порождают аналитическую полугруппу линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $L_2(D)$  [22,39]. В частности, анализ ряда (1.9) позволяет показать справедливость следующего утверждения.

Пусть  $t \ge t_0 > 0$ . Тогда функция, представленная в виде ряда (1.9) имеет производные любого порядка по переменным t, x, y, если, конечно,  $x \in [0, \pi]$ ,  $y \in [0, \pi]$ . Доказательство этого утверждения стандартно и повторяет доказательство аналогичного утверждения для первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в случае однородных краевых условий. Поэтому можно утверждать, что при любом  $t \ge t_0 > 0$  решение (1.9) принадлежит  $W_2^k$  (D) — подпространству пространства Соболева  $W_2^k(D)$  при любом значении натурального k. Напомним, что через подпространство  $W_2^k$  (D) обозначаем замыкание линейного пространства достаточно гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.2) по норме пространства Соболева  $W_2^k(D)$ . Сразу отметим, что при анализе нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2) считаем, что  $g(x, y) = u(0, x, y) \in W_2^4$  (D), то есть в качестве фазового пространства (пространство  $W_2^4$  (D).

Аналогичный факт остается в силе, если

$$g(x, y) \in W_2^4(D).$$

Здесь через  $W_2^4$  обозначено пространство Соболева, состоящее из тех функций  $g(x,y) \in L_2(D)$ , у которых существуют обобщенные производные

$$\frac{\partial g}{\partial x}; \frac{\partial g}{\partial y}; ...; \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} \in L_2(D).$$

Подчеркнем, что  $W_2^4(D) \subset L_2(D)$ , но в случае, если  $g(x,y) \in W_2^4(D)$ , то решение смешанной задачи (1.5), (1.6), (1.8) удовлетворяет начальному условию (1.8) в смысле предельного перехода при  $t \to 0$  в норме гильбертова пространства  $W_2^4(D)$ . Далее в качестве фазового пространства решений линейной краевой задачи (1.5), (1.6), а также нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2) естественно выбрать пространство функций  $W_2^4(D)$ .

Перейдем к изучению устойчивости решений линейной краевой задачи (1.5), (1.6).

Из предыдущих построений вытекает справедливость утверждения.

**Лемма 1.1.** Линейный дифференциальный оператор A при всех значениях параметров обладает следующими свойствами.

- 1. Он симметричен.
- 2. Имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_{n,m} = (b_1 n^2 + b_2 m^2) - (d_1 n^4 + d_2 m^4 + d_3 m^2 n^2),$$
n, m = 0, 1, 2, ..., B частности, при всех значениях коэффициентов  $b_1, b_2, d_1, d_2, d_3 : \lambda_{0,0} = 0$ , то есть в нашем случае у линейного дифференциального оператора A всегда есть нулевое собственное число.

3. Соответствующие собственные функции образуют полную ортогональную систему в  $L_2(D)$ .

Из этого утверждения вытекает, что все решения линейной краевой задачи (1.5), (1.6) устойчивы в смысле определения А.М. Ляпунова и в смысле нормы фазового пространства, если при всех n, m выполнено неравенство

$$\lambda_{n,m} \leqslant 0.$$

Подчеркнем, что асимптотически устойчивыми решения краевой задачи (1.5), (1.6) никогда быть не могут, так как при всех значениях коэффициентов линейного дифференциального оператора A у него есть нулевое собственное значение  $\lambda_{0,0} = 0$ .

Если теперь возвратиться к анализу устойчивости состояний равновесия u(t, x, y) = const нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2), то они устойчивы при выполнении неравенства

$$\lambda_{n,m} < 0$$
, если  $n+m \ge 1$ .

При выполнении таких неравенств одномерное инвариантное множество u(t, x, y) = const (const - произвольная действительная постоянная) является устойчивым.

Пусть при некоторых  $n = n_0$ ,  $m = m_0$  ( $m_0 + n_0 \ge 1$ ) выполнено равенство  $\lambda_{n_0,m_0} = 0$ . В этом случае оно выделяет критический случай в задаче об устойчивости однородных состояний равновесия нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2). Подчеркнем, что при выполнении неравенства

$$\lambda_{n_0,m_0} > 0$$

состояния равновесия u(t, x) = const заведомо неустойчивы.

Выделим возможные критические случаи в задаче об устойчивости нулевого решения рассматриваемой краевой задачи (1.5), (1.6). Пусть для некоторых пар  $(n_0, k_0)$  выполнено равенство

$$\lambda(n_0, k_0) = 0, \quad k_0^2 + n_0^2 \neq 0,$$

а для остальных номеров  $n, k \ (n^2 + k^2 \neq 0)$  имеет место неравенство  $\lambda(n, k) < 0$ .

Отметим также, что в нашем случае все собственные значения  $\lambda(n,k)$  действительны. В терминах коэффициентов уравнения (1.5) условия устойчивости приобретают вид двух неравенств:  $b_1 - d_1 < 0$ ,  $b_2 - d_2 < 0$ . Следовательно, можно выделить три критических случая:

1) 
$$b_1 = d_1, b_2 < d_2;$$
 2)  $b_1 < d_1, b_2 = d_2;$  3)  $b_1 = d_1, b_2 = d_2.$ 

При проверке следует учитывать, что  $d_1, d_2, d_3 > 0$ .

Действительно,

$$\lambda_{n,k} = b_1 n^2 + b_2 k^2 - (d_1 n^4 + d_2 k^4 + d_3 n^2 k^2) =$$
$$= (b_1 - d_1 n^2) n^2 + (b_2 - d_2 k^2) k^2 - d_3 n^2 k^2, \ n, k = 0, 1, \dots$$

Ясно, что  $\lambda_{0,0} = 0$ . Пусть теперь,  $k^2 + n^2 \neq 0$ . Тогда

$$\lambda_{n,0} = (b_1 - d_1 n^2) n^2 < 0,$$

если  $b_1 < d_1$  и  $\lambda_{1,0} = 0$  при  $b_1 = d_1$ . При этом  $\lambda_{n,0} < 0$ , если n = 2, 3, ... и тем более  $\lambda_{n,k} < 0$ , если n = 2, 3, ..., а k — любое при  $b_2 < d_2$  или n = 1, а k = 1, 2, 3, ... Итак, при  $b_1 = d_1$ ,  $b_2 < d_1$  реализуется первый критический случай, когда

$$\lambda_{0,0} = 0, \ \lambda_{1,0} = 0.$$

Обоснование выделения второго и третьего критических случаев аналогично.

Отметим особо, что при  $d_1 = b_1$ ,  $d_2 = b_2$ ,  $\lambda_{0,0} = 0$ ,  $\lambda_{1,0} = 0$ ,  $\lambda_{0,1} = 0$ .

Далее рассмотрим эти критические случаи подробнее.

Первый критический случай. Пусть  $b_1 = d_1$ ,  $b_2 < d_2$ . В этом случае нулевое собственное значение оператора A двукратно. ему соответствуют собственные функции

$$e_{0,0}(x,y) = 1, \quad e_{1,0}(x,y) = \cos x.$$

При таком выборе коэффициентов удобно обозначить соответствующий оператор через A<sub>1</sub>.

При реализации второго критического случая оператор обозначим через  $A_2$ . Как и в первом случае, нулевое собственное значение двукратно. ему соответствуют две следующие собственные функции:

$$e_{0,0}(x,y) = 1, \quad e_{0,1}(x,y) = \cos y.$$

Наконец, последний третий критический случай выделяется равенствами  $b_1 = d_1, b_2 = d_2$ . В последнем третьем критическом случае соответствующий оператор обозначим через  $A_3$ . Собственное значение  $\lambda = 0$  здесь уже имеет кратность, равную трем, так как ему соответствуют следующие три собственные функции:

$$e_{0,0}(x,y) = 1, \ e_{1,0}(x,y) = \cos x, \ e_{0,1}(x,y) = \cos y.$$

Далее рассмотрим варианты выбора коэффициентов оператора *A*, при которых реализуются случаи, близкие к критическим, отмеченным выше.

В первом критическом случае положим

$$b_1 - d_1 = \gamma_1 \varepsilon, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \ \varepsilon_0 \ll 1, \ \gamma_1 = \pm 1$$

и введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор  $(b_2 < d_2)$ 

$$A_{1}(\varepsilon)v = -(\varepsilon + d_{1})\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}} - b_{2}\frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}} - d_{1}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{4}} - d_{2}\frac{\partial^{4}v}{\partial y^{4}} - d_{3}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{2}\partial y^{2}},$$
  
$$b_{1} = \varepsilon + d_{1}, \ b_{2} < d_{2}, \ |\varepsilon| \ll 1.$$

Во втором критическом случае рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$A_{2}(\varepsilon)v = -b_{1}\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}} - (d_{2} + \varepsilon)\frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}} - d_{1}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{4}} - d_{2}\frac{\partial^{4}v}{\partial y^{4}} - d_{3}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{2}\partial y^{2}}$$
$$b_{2} = \varepsilon + d_{2}, \ b_{1} < d_{1}, \ |\varepsilon| \ll 1.$$

И, наконец, в третьем критическом случае обозначим

$$A_{3}(\varepsilon)v = -(d_{1} + \alpha_{1}\varepsilon)\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}} - (d_{2} + \alpha_{2}\varepsilon)\frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}} - d_{1}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{4}} - d_{2}\frac{\partial^{4}v}{\partial y^{4}} - d_{3}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{2}\partial y^{2}},$$
  
$$b_{1} - d_{1} = \varepsilon\alpha_{1}, \ b_{1} = d_{1} + \varepsilon\alpha_{1},$$
  
$$b_{2} - d_{2} = \varepsilon\alpha_{2}, \ b_{2} = d_{2} + \varepsilon\alpha_{2}, \ \alpha_{1}, \alpha_{2} \in \mathbb{R}.$$

В следующих разделах работы будут проанализированы бифуркационные задачи, возникающие в случаях, близких к трем критическим, отмеченным выше. Это позволяет найти пространственно неоднородные решения, ответвляющиеся от состояния равновесия u = 0 (u = const).

# 1.3 Бифуркации пространственно неоднородных решений

В этом разделе рассмотрим нелинейную краевую задачу (1.1), (1.2) в случаях, близких к трем критическим, которые были выделены в предыдущем разделе, где изучался линеаризованный вариант краевой задачи (1.1), (1.2). В свою очередь, раздел, посвященный анализу бифуркационных задач будет разделен на три части. В них возможные варианты таких задач будут рассмотрены по очереди.

В первой части этого раздела рассмотрим нелинейную краевую задачу (1.1), (1.2) в случае, когда

$$b_1 = \gamma_1 \varepsilon + d_1, b_2 < d_2, |\varepsilon| \ll 1, \gamma_1 = \pm 1,$$

где  $\varepsilon$  — малый положительный параметр ( $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \varepsilon_0$  — достаточно малое положительное число). При таких вариантах выбора коэффициентов уравнения (1.1) изучим вопрос о возможности локальных бифуркаций пространственно неоднородных решений или интегральных многообразий, сформированных такими решениями. В обоих случаях рассматриваются решения, которые принадлежат достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия в смысле подходящей нормы. Вывод ее уточним далее.

Перепишем нелинейную краевую задачу (1.1), (1.2) в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_1(\varepsilon)u + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0,$$
(1.11)

где  $u = u(t, x, y), \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Здесь линейный дифференциальный оператор  $A_1(\varepsilon)$  определен равенством

$$A_1(\varepsilon)u = -b_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_1\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - d_2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - d_3\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2},$$

где  $b_1 = d_1 + \gamma_1 \varepsilon$ ,  $b_2 < d_2$ ,  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ,  $\gamma_1 = \pm 1$ ,  $0 < \varepsilon_0 \ll 1$ , то есть  $\varepsilon$  можно интерпретировать далее как малый параметр.

Если теперь дополнить краевую задачу (1.10), (1.11) начальным условием

$$u(0, x, y) = f(x, y),$$
 (1.12)

то при  $f(x,y) \in \overset{\circ}{W_2^4}(\bar{D})$  смешанная задача (1.10), (1.11), (1.12) локально корректно разрешима [39]. Здесь через  $\overset{\circ}{W_2^4}(\bar{D})$  обозначено замыкание достаточно гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.11) по норме пространства Соболева  $W_2^4(\bar{D})$ . Напомним, что некоторая функция  $g(x,y) \in W_2^4(\bar{D})$ , если она сама и ее обобщенные частные производные принадлежат  $L_2(D)$  до четвертого порядка включительно. Наконец,

$$D = \{ (x, y) : x \in (0, \pi), y \in (0, \pi) \},\$$

 $\overline{D}$  — замыкание D. Добавим, что в силу теорем вложения для функции двух переменных функция  $f(x,y) \in W_2^4(\overline{D})$  принадлежит  $C_2(\overline{D})$  — пространству дважды непрерывно дифференцируемых функций.

Отметим теперь, что линейный дифференциальный оператор имеет два простых собственных значения  $\lambda_0(\varepsilon) = \lambda_0 = 0$  и  $\lambda_1(\varepsilon) = \gamma_1 \varepsilon$  ( $\lambda_1(0) = 0$  и  $\lambda'_1(\varepsilon) = \frac{d\lambda_1(\varepsilon)}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} = \gamma$ ), отвечающих собственным функциям 1 и соз x. Остальные его собственные значения  $\lambda_n(\varepsilon)$ , n = 2, 3, ... лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенством

$$Re\lambda_n(\varepsilon) \leqslant -\gamma_0 < 0,$$

где  $\gamma_0$  — положительная постоянная, не зависящая от  $\varepsilon$ . Из результатов работ [5, 6, 9, 10, 12, 15] вытекает, что краевая задача (1.10), (1.11) имеет двумерное инвариантное многообразие  $M_2(\varepsilon)$ , которое будет локальным аттрактором для решений, не принадлежащих ему. Решения, принадлежащие этому инвариантному многообразию  $M_2(\varepsilon)$  (центральному многообразию  $M_2(\varepsilon)$ ) можно и целесообразно искать в виде [9, 10, 24, 42, 69]

$$u(t, s, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} u_1(t, s, x, y) + \varepsilon u_2(t, s, x, y) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, s, x, y) + O(\varepsilon^2),$$
(1.13)

где  $s = \varepsilon t$  — «медленное время», а функции  $u_j(t, s, x, y) \in W_2^4$  при любых рассматриваемых t и s, j = 1, 2, 3 достаточно гладко зависят от своих аргументов.

Здесь  $u_1(t, s, x, y) = z(s) \cos x$ , функции  $u_j(t, s, x, y)$  обладают априори следующими свойствами:

- 1. при всех рассматриваемых t и j они удовлетворяют краевым условиям (1.11);
- 2. для них справедливы равенства

$$M_0(u_j) = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u_j(t, s, x, y) \, dx \, dy = 0,$$
$$M_1(u_j) = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u_j(t, s, x, y) \cos x \, dx \, dy = 0, \ j = 2, 3.$$

Если подставить равенство (1.13) в нелинейную краевую задачу (1.10), (1.11) и приравнять выражения при  $\varepsilon^{1/2}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^{3/2}$  соответственно, то получим последовательность линейных краевых задач для определения  $u_1, u_2, u_3$  из суммы (1.13). При их формировании и изучении будем интерпретировать *s* как параметр.

Также отметим для дальнейших построений, что

$$\dot{\psi} = \varepsilon \psi', \quad \frac{\partial u_j}{\partial t} = \dot{u}_j + u'_j \varepsilon,$$

где точкой обозначена частная производная по t, а штрихом – по s.

Действительные функции  $z = z(s), \ \psi = \psi(s)$  будем искать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_0 z^2, \tag{1.14}$$

$$z' = \alpha z - a z^3, \tag{1.15}$$

где  $a_0, a, \alpha$  — действительные числа. Уравнения (1.14), (1.15) выписаны с точностью до слагаемых порядка  $O(\varepsilon^{1/2})$ . Система (1.14), (1.15) — «главная» часть нормальной формы Пуанкаре-Дюлака. В свою очередь, нормальная форма описывает динамику нелинейной краевой задачи (1.10), (1.11) на двумерном инвариантном многообразии («центральное многообразие») [49, 50]. Остальные решения нелинейной краевой задачи с течением времени приближаются к этому двумерному многообразию со скоростью экспоненты.

Подстановка суммы (1.13) в нелинейную краевую задачу (1.10), (1.11) приводит сначала к приближенному равенству

$$\begin{split} \psi'\varepsilon + \varepsilon^{3/2}z'\cos x + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial u_3}{\partial t} = \\ &= -(d_1 + \gamma_1\varepsilon)\left(\varepsilon^{1/2}(-z\cos x) + \varepsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right) - \\ -b_2\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right) - d_1\left(\varepsilon^{1/2}z\cos x + \varepsilon\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4}\right) - \\ -d_2\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} + \varepsilon\frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial y^4}\right) - d_3\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2\partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2\partial y^2} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2\partial y^2}\right) + \\ +c_1\left(\varepsilon^{1/2}(-z\sin x) + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial x} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + c_2\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial y} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2, \end{split}$$

в котором отдельные слагаемые выписаны с точностью до членов порядка  $o(\varepsilon^{3/2}).$ 

Приравнивая слагаемые при  $\varepsilon^{1/2}$ , получим однородную краевую задачу для функции  $u_1(t, s, x, y)$ 

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = A_0 u_1,$$
  
$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u_1}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$
  
$$\frac{\partial u_1}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u_1}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u_1}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$

В левой части дифференциального уравнения содержится частная производная по t. Здесь и ниже при реализации алгоритма построения нормальной формы переменные t и s считаем независимыми, хотя по смыслу задачи  $s = \varepsilon t$ . Краевая задача имеет решение

$$u_1(s, x, y) = z(s) \cos x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon, \varepsilon^{3/2}$ , получим линейные неоднородные краевые задачи для определения  $u_j$  (j = 2, 3). Выпишем сначала соответствующие уравнения

$$\varepsilon:\psi'+\frac{\partial u_2}{\partial t}=-d_1\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}-b_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}-d_1\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4}-d_2\frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4}-$$

$$-d_3 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial y^2} + c_1 z^2 \sin^2 x,$$
  
$$\varepsilon^{3/2} : z' \cos x + \frac{\partial u_3}{\partial t} = -d_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \gamma_1 z \cos x - b_2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} - d_1 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4} - d_2 \frac{\partial^4 u_3}{\partial y^4} - d_3 \frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2 \partial y^2} + 2c_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

В итоге для  $u_2$  получаем следующую неоднородную краевую задачу:

$$\psi' + \frac{\partial u_2}{\partial t} = A_1(0)u_2 + c_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2, \qquad (1.16)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u_2}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0,$$
(1.17)

где

$$A_1(0)u = -d_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_1\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - d_2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - d_3\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}$$

Для  $u_3$  получим аналогичную неоднородную краевую задачу

$$z'\cos x + \frac{\partial u_3}{\partial t} = A_1(0)u_3 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2c_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$
(1.18)

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u_3}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u_3}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$
(1.19)

При формировании краевых задач для  $u_2$  и  $u_3$  учтено, что  $\frac{\partial u_1(x)}{\partial y} = 0$ , то есть

отсутствует, например, слагаемое  $c_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2$ .

Замечание 1.1. Линейный оператор  $A_1(0)$  имеет двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции  $e_{0,0}(x, y)$ ,  $e_{1,0}(x, y)$ . Поэтому, как известно (смотри, например, [41]), неоднородная краевая задача

$$A_1(0)v(x,y) = F(x,y)$$

имеет решение, если справедливы в рассматриваемом здесь случае следующие равенства (условия разрешимости) [28], [41]:

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \cos x \, dx \, dy = 0.$$
(1.20)

Равенства

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} v(x,y) \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} v(x,y) \cos x \, dx \, dy = 0$$

выделяют одно такое решение.

Применим условия разрешимости (1.20) краевой задачи (1.16), (1.17)

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = A_1(0)u_2 + c_1 z^2 \sin^2 x - \psi',$$

где

$$F(x,y) = c_1 z^2 \sin^2 x - \psi'.$$

Находим, что

$$c_1 z^2 \frac{\pi^2}{2} = \psi' \pi^2.$$

Таким образом, применяя условия разрешимости при рассмотрении неоднородной краевой задачи (1.16), (1.17), приходим к выводу, что должно быть выполнено равенство

$$\psi' = \frac{c_1}{2}z^2.$$

Соответствующее решение неоднородной краевой задачи (1.16), (1.17) будем искать в виде

$$u_2 = \eta z^2 \cos 2x. \tag{1.21}$$

В результате получим, что соответствующее решение неоднородной краевой задачи (1.16), (1.17) имеет вид

$$u_2(t, s, x, y) = \eta z^2 \cos 2x,$$

где

$$\eta = -\frac{c_1}{24d_1}.$$

Подчеркнем еще раз, что решение неоднородной краевой задачи (1.16), (1.17) выбрано таким образом, чтобы были выполнены два равенства

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} u_2(t, s, x, y) \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} u_2(t, s, x, y) \cos x \, dx \, dy = 0.$$

Таким образом, при таком выборе  $\psi(s)$  функция

$$u_2 = -\frac{c_1}{24d_1} z^2 \cos 2x$$

будет искомым решением неоднородной краевой задачи (1.16), (1.17).

Теперь перейдем к краевой задаче для определения  $u_3$ , то есть к неоднородной краевой задаче (1.18), (1.19)

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = A_1(0)u_3 + \gamma_1 z \cos x - \frac{c_1^2 z^3}{12d_1}(\cos x - \cos 3x) - z' \cos x,$$
  
$$\frac{\partial u_3}{\partial x}(t, 0, y) = \frac{\partial u_3}{\partial x}(t, \pi, y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t, 0, y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t, \pi, y) = 0,$$
  
$$\frac{\partial u_3}{\partial y}(t, x, 0) = \frac{\partial u_3}{\partial y}(t, x, \pi) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t, x, 0) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t, x, \pi) = 0.$$

Таким образом, применение условий разрешимости неоднородной краевой задачи (1.18), (1.19) позволяет получить следующее уравнение для z(s):

$$z' = \gamma_1 z - \frac{c_1^2}{12d_1} z^3$$

Соответствующее решение неоднородной краевой задачи (1.18), (1.19) имеет вид

$$u_3(t, s, x, y) = \eta_3 z^3 \cos 3x, \qquad (1.22)$$

где

$$\eta_3 = \frac{c_1^2}{864d_1^2}$$

Таким образом, мы получили следующую нормальную форму:

$$\psi' = \frac{c_1}{2}z^2,\tag{1.23}$$

$$z' = \gamma_1 z - \frac{c_1^2}{12d_1} z^3. \tag{1.24}$$

Подчеркнем, что систему дифференциальных уравнений (1.23), (1.24) следует интерпретировать как «укороченный» вариант нормальной формы. Полный ее вариант отличается от системы (1.23), (1.24). Он имеет вид

$$\psi' = \frac{c_1}{2}z^2 + \psi_0(\varepsilon, z),$$
$$z' = \gamma_1 z - \frac{c_1^2}{12d_1}z^3 + \varphi_0(\varepsilon, z),$$

где достаточно гладкие функции  $\psi_0, \varphi_0$  имеют следующие свойства:

1.  $\psi_0(\varepsilon, 0) \equiv 0, \ \varphi_0(\varepsilon, 0) \equiv 0$  при всех рассматриваемых значениях параметра  $\varepsilon;$ 

#### 2. справедлива оценка

$$|\psi_0(\varepsilon, z)| \leqslant M_\psi \varepsilon^{1/2}, \ |\varphi_0(\varepsilon, z)| \leqslant M_\varphi \varepsilon^{1/2}, \ M_\varphi, \ M_\psi \in \mathbb{R}_+$$

Тем не менее анализ системы дифференциальных уравнений (1.23), (1.24) вполне достаточен для изучения вопросов данного раздела. В частности, это замечание вытекает из теоремы о неявной функции, если изучать, например, вопрос о состояниях равновесия второго уравнения «полной» нормальной формы. Координаты состояний равновесия дифференциальных уравнений

$$z' = \gamma_1 z - rac{c_1^2}{12d_1} z^3$$
 и  $z' = \gamma z - rac{c_1^2}{12d_1} z^3 + \varphi_0(\varepsilon, z)$ 

отличаются на величины, имеющие порядок малости  $O(\varepsilon^{1/2})$ , то есть стремятся к нулю при  $\varepsilon \to 0$ .

Далее систему дифференциальных уравнений (1.23), (1.24) будем называть нормальной формой, а не «укороченной» нормальной формой.

### 1.3.1 Анализ нормальной формы

Перейдем к рассмотрению полученной в предыдущем разделе системы уравнений (1.23), (1.24). Напомним, что  $\gamma_1$  может принимать два значения 1 и -1.

Систему дифференциальных уравнений (1.23), (1.24) обычно называют нормальной формой [1]. В частности, она имеет решение

$$z = 0, \ \psi(s) = \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

если  $\gamma_1 = -1$ , то это решение устойчиво. Напротив, при  $\gamma_1 = 1$  неустойчиво. Исследуемому решению нормальной формы соответствует решение  $u(t, x, y, \varepsilon)$  краевой задачи (1.10), (1.11), что легко увидеть, если обратиться к равенству (1.13).

При анализе нормальной формы (1.23), (1.24) основную роль играет дифференциальное уравнение (1.24).

Найдем состояния равновесия дифференциального уравнения (1.24). Для этого приравняем правую часть этого уравнения к нулю. При этом рассмотрим два случая: когда  $\gamma_1 = 1$  и  $\gamma_1 = -1$ .

Пусть  $\gamma_1 = 1$ . В этом случае получим уравнение для нахождения состояний равновесия z дифференциального уравнения (1.24)

$$z - \frac{c_1^2}{12d_1}z^3 = 0.$$

Откуда находим

$$z_0 = 0, \ z_{1,2} = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}.$$

Стандартный анализ показывает, что нулевое состояние равновесия  $S_0$  уравнения (1.20) неустойчиво, а состояние равновесия  $S_{\pm}$  асимптотически устойчиво.

Каждому решению

$$z_{1,2} = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \tag{1.25}$$

соответствует следующее решение нормальной формы (1.23), (1.24):

$$z(s) = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|}, \ \psi(s) = 6 \frac{d_1}{c_1} s + \psi_0, \ \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

Прежде чем перейти к формулировке основных результатов данного раздела работы сделаем ряд простых замечаний. Напомним, что в нашем случае фазовым пространством (пространством начальных условий) является гильбертово пространство  $H = W_2^4$  (D), которое является замыканием линеала достаточно гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.11). Естественно, что оно является линейным подпространством пространства Соболева  $W_2^4(D)$ . Гильбертового пространство H может быть представлено в виде прямой суммы двух ортогональных подпространств  $H_1$  и  $H_0$ . Здесь  $H_1$  — одномерное подпространство H, натянутое на элемент  $e_{0,0}(x, y) = 1$ , а  $H_0$  — ортогональное ему дополнение. Пусть  $f(x, y) \in W_2^4$  (D). Следовательно, любой элемент  $g(x, y) \in H$ может быть представлен в виде  $g(x, y) = g_0 + h(x, y)$ , где постоянная

$$g_0 = \frac{1}{\pi^2} \iint_D g(x, y) dx dy, \ D = \{ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi \},$$

а второе слагаемое h(x, y) обладает следующим свойством

$$\iint_D h(x,y) dx dy = 0.$$

Пусть u = u(t, x, y) — какое-либо решение краевой задачи (1.10), (1.11). Из предыдущих замечаний вытекает, что функция u(t, x, y) может быть представлена в виде

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где  $v(t) = \frac{1}{\pi^2} \iint_D w(t, x, y) dx dy$ , а

$$M(w) = \frac{1}{\pi^2} \iint_D w(t, x, y) dx dy \equiv 0.$$
 (1.26)

Отметим также, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}; \ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Следовательно, краевую задачу (1.10), (1.11), (1.26) можно записать более подробно в виде обыкновенного дифференциального уравнения для v(t) и вспомогательной краевой задачи для w(t, x, y).

Так, для v(t) имеем уравнение

$$\dot{v} = \psi(w), \tag{1.27}$$

где  $\psi(w) = M\left(c_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)$  и, естественно,  $\psi(w)$  зависит только от t или является постоянной величиной.

Наконец, для w = w(t, x, y) получаем вспомогательную краевую задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_1(\varepsilon)w + c_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \psi(w), \qquad (1.28)$$

где функция w(t, x, y) удовлетворяет краевым условиям (1.11) и имеет нулевое пространственное среднее

$$M(w) \equiv 0. \tag{1.29}$$

Используя результаты работ [5,6,9,10,12,15], можно обосновать справедливость утверждения.

**Теорема 1.1.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  решениям (состояниям равновесия) (1.25) уравнения (1.24) соответствуют состояния равновесия  $S_{1,2}$  вспомогательной краевой задачи (1.28), (1.11), (1.29). Для соответствующих решений справедливы асимптотические представления

$$S_1: w_{11}(x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2x + \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$S_2: w_{12}(x,\varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{\varepsilon}{2c_1} \cos 2x - \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_1|\sqrt{d_1}} \cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Эти состояния равновесия асимптотически устойчивы в метрике пространства  $W_2^4(D)$ .

Состояниям равновесия  $S_{1,2}$  соответствуют два однопараметрических семейства пространственно неоднородных и линейно зависящих от t семейств решений краевой задачи

$$u_{11}(t, x, \varepsilon) = v_{11}(t, \varepsilon) + w_{11}(x, \varepsilon),$$
$$u_{12}(t, x, \varepsilon) = v_{12}(t, \varepsilon) + w_{12}(x, \varepsilon),$$

где функции  $w_{11}(x,\varepsilon), w_{12}(x,\varepsilon)$  были указаны ранее,

$$v_{11}(t,\varepsilon) = K_{11} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t,$$
$$v_{12}(t,\varepsilon) = K_{12} + \left(6\varepsilon \frac{d_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t,$$

где  $K_{11}, K_{12} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Отметим сразу особенность этих решений: они не зависят от y.

Вид функций  $v_{11}(t,\varepsilon)$ ,  $v_{12}(t,\varepsilon)$  восстанавливается после подстановки функций  $w_{11}(x,\varepsilon)$ ,  $w_{12}(x,\varepsilon)$  соответственно с последующим интегрированием правой части равенства (1.27).

Наконец, подчеркнем, что семейства пространственно неоднородных решений из теоремы 1.1 зависят от t (как уже отмечалось) и, следовательно, не являются состояниями равновесия в классическом понимании этого термина.

Уместно подчеркнуть, что решения  $u_{11}(t, x, y, \varepsilon)$  и  $u_{12}(t, x, y, \varepsilon)$  связаны соотношением

$$u_{12}(t, x, y, \varepsilon) = u_{11}(t, \pi - x, y, \varepsilon).$$

Полученные решения (семейство решений) не зависят от y. Специфика краевой задачи (1.10), (1.11) такова, что она может иметь решения, которые не зависят от y или, наоборот, не зависят от x. Итак,

$$u_{11}(t, x, y, \varepsilon) = u_{11}(t, x, \varepsilon),$$
$$u_{12}(t, x, y, \varepsilon) = u_{12}(t, x, \varepsilon).$$

Аналогичные решения, но зависящие только от t и y и не зависящие от x, будут получены в следующем разделе при анализе второй бифуркационной задачи.

# 1.4 Бифуркации пространственно неоднородных решений во втором критическом случае

Второй вариант выделяется условиями

$$b_2 = d_2 + \gamma_2 \varepsilon, b_1 < d_1, |\varepsilon| \ll 1, \gamma_2 = \pm 1.$$

Построения этого фрагмента в значительной мере повторяют построения предыдущего раздела.

Перепишем нелинейную краевую задачу в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_2(\varepsilon)u + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (1.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$
  
$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0,$$
  
(1.31)

где  $u = u(t, x, y), \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Здесь линейный дифференциальный оператор  $A_2(\varepsilon)$  определен равенством

$$A_{2}(\varepsilon)v = -b_{1}\frac{\partial^{2}v}{\partial x^{2}} - (\gamma_{2}\varepsilon + d_{2})\frac{\partial^{2}v}{\partial y^{2}} - d_{1}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{4}} - d_{2}\frac{\partial^{4}v}{\partial y^{4}} - d_{3}\frac{\partial^{4}v}{\partial x^{2}\partial y^{2}},$$
  
$$b_{2} = \gamma_{2}\varepsilon + d_{2}, b_{1} < d_{1}, |\varepsilon| \ll 1, \gamma_{2} = \pm 1.$$

Как и в предыдущем случае, решения краевой задачи (1.30), (1.31) на двумерном инвариантном многообразии  $M_2(\varepsilon)$  будем искать в специальном виде

$$u(t, s, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} u_1(t, s, x, y) + \varepsilon u_2(t, s, x, y) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, s, x, y) + O(\varepsilon^2),$$
(1.32)

где  $s = \varepsilon t$  — «медленное время», а функции  $u_j(t, s, x, y) \in W_2^4$  при любых рассматриваемых t и s, j = 1, 2, 3 достаточно гладко зависят от своих аргументов.

если подставить равенство (1.32) в нелинейную краевую задачу (1.30), (1.31) и приравнять выражения при  $\varepsilon^{1/2}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^{3/2}$  соответственно, то получим последовательность линейных краевых задач для определения  $u_1, u_2, u_3$  из суммы (1.32).

В свою очередь положим

$$u_1(s, x, y) = z(s)\cos y.$$

Подстановка суммы (1.32) в краевую задачу (1.30), (1.31) с последующим приравниванием выражений при одинаковых степенях  $\varepsilon$  приводит к линейным краевым задачам для определения  $u_j$ , j = 1, 2, 3. При их формировании и изучении будем интерпретировать *s* как параметр.

Приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^{3/2}$ , получим линейные неоднородные краевые задачи для определения  $u_j$  (j = 2, 3).

Для  $u_2$  получаем следующую неоднородную краевую задачу:

$$\psi' + \frac{\partial u_2}{\partial t} = A_2(0)u_2 + c_2 z^2 \sin^2 y, \qquad (1.33)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u_2}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0,$$
(1.34)

где

$$A_2(0)u = -b_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d_2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_1\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - d_2\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - d_3\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}.$$

Для  $u_3$  получим аналогичную неоднородную краевую задачу

$$z'\cos y + \frac{\partial u_3}{\partial t} = A_2(0)u_3 + \gamma_2 z\cos y - 2c_2 z\sin y \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad (1.35)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u_3}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$
  

$$\frac{\partial u_3}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u_3}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$
(1.36)

Замечание 1.2. Линейный оператор  $A_2(0)$  имеет двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции  $e_{0,0}(x, y)$ ,  $e_{1,0}(x, y)$ . Поэтому, как известно (смотри, например, [41]), неоднородная краевая задача

$$A_2(0)v(x,y) = F(x,y)$$

имеет решение, если справедливы в рассматриваемом здесь случае следующие равенства (условия разрешимости) [41]:

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \cos y \, dx \, dy = 0.$$
(1.37)

Равенства

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} v(x,y) \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} v(x,y) \cos y \, dx \, dy = 0$$

выделяют одно такое решение.

Применяя условия разрешимости при рассмотрении неоднородной краевой задачи (1.33), (1.34), приходим к выводу, что должно быть выполнено равенство

$$\psi'(s) = \frac{c_2}{2}z^2.$$

Соответствующее решение неоднородной краевой задачи (1.33), (1.34) будем искать в виде

$$u_2 = \eta z^2 \cos 2y. \tag{1.38}$$

При этом оказалось, что

$$\eta = -\frac{c_2}{24d_2}$$

Теперь перейдем к анализу краевой задачи для определения  $u_3$ , то есть к неоднородной краевой задаче (1.35), (1.36). В более детальной записи получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} &= A_2(0)u_3 + \gamma_2 z \cos y - \frac{c_2^2 z^3}{12d_2}(\cos y - \cos 3y) - z' \cos y, \\ \frac{\partial u_3}{\partial x}(t,0,y) &= \frac{\partial u_3}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0, \\ \frac{\partial u_3}{\partial y}(t,x,0) &= \frac{\partial u_3}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0. \end{aligned}$$

Условия разрешимости данной неоднородной краевой задачи (1.35), (1.36) позволяют получить следующие равенства:

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (\gamma_2 z \cos y - \frac{c_2^2 z^3}{12d_2} (\cos y - \cos 3y) - z' \cos y) \, dx \, dy =$$
$$= \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} (\gamma_2 z \cos y - \frac{c_2^2 z^3}{12d_2} (\cos y - \cos 3y) - z' \cos y) \cos y \, dx \, dy = 0.$$

В итоге получаем, что

$$\gamma_2 z \frac{\pi^2}{2} - \frac{c_2^2 z^3}{12d_2} \frac{\pi^2}{2} - z' \frac{\pi^2}{2} = 0.$$

Таким образом, применение условий разрешимости для неоднородной краевой задачи (1.35), (1.36) позволяет получить следующее уравнение для z:

$$z' = \gamma_2 z - \frac{c_2^2}{12d_2} z^3.$$

Соответствующее решение неоднородной краевой задачи (1.35), (1.36) имеет вид

$$u_3(t, s, x, y) = \eta z^3 \cos 3y.$$
(1.39)

Для нахождения неизвестной переменной  $\eta$  необходимо подставить равенство (1.39) в уравнение (1.35)

$$\frac{\partial u_3(t,s,x,y)}{\partial t} = -d_2 \frac{\partial^2 u_3(t,s,x,y)}{\partial x^2} - d_2 \frac{\partial^4 u_3(t,s,x,y)}{\partial x^4} + z \cos y - \frac{c_2^2 z^3}{12d_2} (\cos y - \cos 3y) - \cos y \left(z - \frac{c_2^2 z^3}{12d_2}\right).$$

Соответствующее решение неоднородной краевой задачи (1.35), (1.36) имеет вид

$$u_3(s, x, y) = \eta z^3 \cos 3y,$$

где

$$\eta = \frac{c_2^2}{864d_2^2}$$

Таким образом, мы получили следующую нормальную форму:

$$\psi' = \frac{c_2}{2}z^2,\tag{1.40}$$

$$z' = \gamma_2 z - \frac{c_2^2}{12d_2} z^3. \tag{1.41}$$

### 1.4.1 Анализ нормальной формы

Перейдем к рассмотрению полученной в предыдущем разделе системы уравнений (1.40), (1.41). Напомним, что  $\gamma_2$  может принимать два значения 1 и -1.

Система дифференциальных уравнений (1.40), (1.41) имеет решение

$$z = 0, \ \psi(s) = \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

если  $\gamma_2 = -1$ , то это решение устойчиво. Напротив, при  $\gamma_2 = 1$  неустойчиво. Исследуемому решению нормальной формы соответствует решение  $u(t, x, y, \varepsilon)$  краевой задачи (1.30), (1.31), что легко увидеть, если обратиться к равенству (1.32). При этом основную роль играет дифференциальное уравнение (1.41) для переменной z(s).

Найдем состояния равновесия дифференциального уравнения (1.41). При этом рассмотрим два случая, когда  $\gamma_2 = 1$  и  $\gamma_2 = -1$ .

Пусть  $\gamma_2 = 1$ . В этом случае получим уравнение для нахождения состояний равновесия z дифференциального уравнения (1.41)

$$z - \frac{c_2^2}{12d_2}z^3 = 0$$

Откуда находим

$$z_1 = 0, \ z_{2,3} = S_{\pm 1} = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2}}{|c_2|}.$$

Оказывается, что при  $\gamma_2 = 1$  нулевое состояния равновесия является неустойчивым. Состояния равновесия  $S_{\pm 1}$  асимптотически устойчивы.

При  $\gamma_2 = -1$  существует только нулевое состояние равновесия, которое является асимптотически устойчивым.

Каждому решению

$$S_{\pm 1} = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2}}{|c_2|} \tag{1.42}$$

соответствует следующее решение нормальной формы (1.40), (1.41):

$$z(s) = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2}}{|c_2|}, \ \psi(s) = 6 \frac{d_2}{c_2} s + \psi_0, \ \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

Как и в первом разделе первой главы перепишем краевую задачу (1.30), (1.31) в более детализированной форме. Положим

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где  $v(t) = \frac{1}{\pi^2} \iint_D u(t, x, y) dx dy$ , а

$$M(w) = 0.$$

Следовательно, для v(t) получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{v} = \psi(w), \ \psi(w) = M\left(c_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right).$$
 (1.43)

Для w = w(t, x, y) получаем краевую задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_2(\varepsilon)w + c_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \psi(w), \qquad (1.44)$$

где w(t, x, y) удовлетворяет краевым условиям (1.31) и имеет нулевое пространственное среднее, то есть

$$M(w) = 0. (1.45)$$

Используя результаты работ [5, 6, 9, 10, 12, 15], можно показать справедливость утверждения.

**Теорема 1.2.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  вспомогательная краевая задача (1.44), (1.31), (1.45) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$S_{21}: w_{21}(y,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2}}{|c_2|} \cos y - \frac{\varepsilon}{2c_2} \cos 2y + \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_2|\sqrt{d_2}} \cos 3y + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$S_{22}: w_{22}(y,\varepsilon) = -\varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2}}{|c_2|} \cos y - \frac{\varepsilon}{2c_2} \cos 2y - \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{36|c_2|\sqrt{d_2}} \cos 3y + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Состояниям равновесия вспомогательной краевой задачи (1.44), (1.31), (1.45) соответствуют два однопараметрических семейства решений краевой задачи (1.30), (1.31)

$$u_{21}(t, y, \varepsilon) = K_{21} + \left(6\varepsilon \frac{d_2}{c_2} + o(\varepsilon)\right)t + w_{21}(y, \varepsilon),$$

$$u_{22}(t, y, \varepsilon) = K_{22} + \left(6\varepsilon \frac{d_2}{c_2} + o(\varepsilon)\right)t + w_{22}(y, \varepsilon),$$

где  $K_{21}, K_{22}$  — произвольные действительные постоянные, а функции  $w_{21}(y,\varepsilon), w_{22}(y,\varepsilon)$  были указаны выше.

# 1.5 Бифуркации пространственно неоднородных решений в случае, близком к третьему критическому случаю

Напомним, что третий критический случай выделяется равенствами

$$b_1 = d_1, b_2 = d_2$$

и, как правило, он реализуется в том случае, если в первоначальной постановке (в переменных  $x_1, y_1$ ) область была квадратом ( $l = l_1 = l_2$ ).

Случай, близкий к третьему критическому, реализуется, если

$$b_1 = d_1 + \alpha_1 \varepsilon, \ b_2 = d_2 + \alpha_2 \varepsilon, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

где  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \varepsilon_0$  — достаточно малая положительная постоянная.

В данном разделе анализу подлежит краевая задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_3(\varepsilon)u + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (1.46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$
(1.47)

Этот случай отличается тем, что линейный дифференциальный оператор  $A_3(0)$  имеет нулевое собственное число кратности 3, которому отвечают собственные функции

$$e_{0,0}(x,y) = 1$$
,  $e_{1,0}(x,y) = \cos x$ ,  $e_{0,1}(x,y) = \cos y$ .

При выделенных значениях  $b_1, d_1, b_2, d_2$  линейный дифференциальный оператор  $A_3(\varepsilon)$  имеет собственные значения

$$\lambda_{k,m}(\varepsilon) = (d_1 + \alpha_1 \varepsilon)k^2 + (d_1 + \alpha_2 \varepsilon)m^2 - (d_1k^4 + d_2m^4 + d_3k^2m^2),$$

которым отвечают собственные функции

$$e_{k,m}(x,y) = \cos kx \cos my, k, m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

В частности,  $\lambda_{0,0} = 0$  при любом выборе коэффициентов линейного дифференциального оператора  $A_3(\varepsilon)$ . Наконец,

$$\lambda_{1,0} = \alpha_1 \varepsilon, \ \lambda_{0,1} = \alpha_2 \varepsilon.$$

Остальные собственные значения  $\lambda_{k,m}(\varepsilon)$  при  $k^2 + m^2 > 1$  лежат в левой полуплоскости, выделяемой неравенством

$$Re\gamma(\varepsilon) \leqslant -\gamma_0 < 0,$$

где в качестве  $\gamma_0$  можно выбрать, например, величину равную  $\min\{d_1, d_2\}$ , если, конечно,  $\varepsilon_0$  достаточно малая положительная постоянная.

В такой ситуации в окрестности любого состояния равновесия u(t, x, y) = const (const - постоянная) существует трехмерное инвариантное многообразие  $M_3(\varepsilon)$ . Напомним, что без нарушения общности можно считать, что const = 0, то есть при t = 0 решения находятся в окрестности нулевого состояния равновесия (если u(t, x, y) – решение, то и u(t, x, y) + const также решения краевой задачи).

Решения краевой задачи (1.46), (1.47), принадлежащие  $M_3(\varepsilon)$ , можно записать в виде

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi_0(t) + u_1(t, x, y) + w(t, x, y),$$

где  $u_1(t, x, y) = z_1(t) \cos x + z_2(t) \cos y$ , а w(t, x, y) ортогонально в смысле скалярного произведения в  $L_2(0, \pi)$  функциям  $1, \cos x, \cos y$ .

Более того, решения, принадлежащие  $M_3(\varepsilon)$ , можно и целесообразно (смотри первые два раздела данной главы) искать в виде

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} u_1(s, x, y) + \varepsilon u_2(s, x, y) + \varepsilon^{3/2} u_3(s, x, y) + o(\varepsilon^{3/2}).$$
(1.48)

Здесь  $s = \varepsilon t$  — «медленное» время,

$$u_1(s, x, y) = z_1(s) \cos x + z_2(s) \cos y.$$

Наконец, функции  $u_2(s, x, y), u_3(s, x, y)$  обладают следующими свойствами:

- 1. они достаточно гладко зависят от своих аргументов и, в частности, при фиксированном *s* принадлежат пространству  $W_2^4(\bar{D})$   $((x,y) \in \bar{D}, \text{ если } x \in [0,\pi], y \in [0,\pi]);$
- 2. для функций  $u_2(s, x, y), u_3(s, x, y)$  выполнены равенства

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u_j(s, x, y) \, dx \, dy = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u_j(s, x, y) \cos x \, dx \, dy =$$
$$= \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u_j(s, x, y) \cos y \, dx \, dy = 0,$$

то есть они принадлежат ортогональному дополнению подпространства  $L_2(D)$ ,  $(W_2^4(D))$ , которое является линейной комбинацией собственных функций  $e_{0,0}(x,y) = 1$ ,  $e_{1,0}(x,y) = \cos x$ ,  $e_{0,1}(x,y) = \cos y$ .

Подчеркнем, что включение функции  $u_j(s, x, y)$  при фиксированном *s* в  $W_2^4(\bar{D})$  гарантирует в силу теорем вложения, что при тех же *s*, как функции x, y, они принадлежат  $C^2(\bar{D})$ .

В данном случае центральное инвариантное многообразие  $M_3(\varepsilon)$  имеет размерность, равную трем. На этом многообразии  $M_3(\varepsilon)$  краевая задача сводится к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = F_0(z_1, z_2) + o(\varepsilon),$$
 (1.49)

$$z'_{1} = F_{1}(z_{1}, z_{2}) + o(\varepsilon),$$
  

$$z'_{2} = F_{2}(z_{1}, z_{2}) + o(\varepsilon)$$
(1.50)

для функций  $\psi = \psi(s), z_1 = z_1(s), z_2 = z_2(s),$  где  $F_0, F_1, F_2$  — функции, подлежащие определению ниже, после реализации алгоритма.

Функции  $u_2(s, x, y), u_3(s, x, y)$  и коэффициенты нормальной формы (1.49), (1.50) могут быть определены из анализа неоднородных краевых задач для  $u_2, u_3$ , полученных при подстановке суммы (1.48) в краевую задачу (1.46), (1.47) с последующим приравниванием выражений при одинаковых степенях  $\varepsilon$ . Будем интерпретировать временно *s* как параметр  $\left(\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial s}\varepsilon\right)$ .

Подставив равенство (1.48) в уравнение (1.46), получим

$$\begin{split} \psi'\varepsilon + \varepsilon^{3/2}u'_1 + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial s} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial u_3}{\partial t} + \varepsilon^{5/2}\frac{\partial u_3}{\partial s} = \\ &= -d_1\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right) - d_2\varepsilon\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}\right) - \\ &- d_2\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right) - d_2\varepsilon\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2}\right) - \\ &- d_1\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + \varepsilon\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4}\right) - d_2\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} + \varepsilon\frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial y^4}\right) - \\ &- d_3\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \varepsilon\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^2 \partial y^2}\right) + \\ &+ c_1\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial x} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + c_2\left(\varepsilon^{1/2}\frac{\partial u_1}{\partial y} + \varepsilon\frac{\partial u_2}{\partial y} + \varepsilon^{3/2}\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2. \end{split}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим при этом линейные неоднородные краевые задачи для определения  $u_j$  (j = 2, 3).

Приравняв коэффициенты при  $\varepsilon$ , в итоге для  $u_2$  получаем следующую неоднородную краевую задачу:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = A_3(0)u_2 + c_1 z_1^2 \sin^2 x + c_2 z_2^2 \sin^2 y - \psi', \qquad (1.51)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$
  

$$\frac{\partial u_2}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u_2}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$
(1.52)

Для  $u_3$  получим аналогичную неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = A_3(0)u_3 + \alpha_1 z_1 \cos x + \alpha_2 z_2 \cos y - 2c_1 z_1 \sin x \frac{\partial u_2}{\partial x} - 2c_2 z_2 \sin y \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial z_1}{\partial s} \cos x - \frac{\partial z_2}{\partial s} \cos y,$$
(1.53)

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u_3}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$
  

$$\frac{\partial u_3}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u_3}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0.$$
(1.54)

Замечание 1.3. Отметим, что в рассматриваемом случае неоднородная краевая задача

$$A_{3}(0)v(x,y) = F(x,y),$$
  
$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(\pi,y) = \frac{\partial^{3} v}{\partial x^{3}}(0,y) = \frac{\partial^{3} v}{\partial x^{3}}(\pi,y) = 0,$$
  
$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,\pi) = \frac{\partial^{3} v}{\partial y^{3}}(x,0) = \frac{\partial^{3} v}{\partial y^{3}}(x,\pi) = 0$$

имеет решение, если

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \cos x \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \cos y \, dx \, dy = 0.$$

Используя условия разрешимости краевой задачи (1.46), (1.47) находим, что

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \cos x \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \cos y \, dx \, dy = 0,$$
$$c_1 z_1^2 \frac{\pi^2}{2} + c_2 z_2^2 \frac{\pi^2}{2} - \psi' \pi^2 = 0.$$

Таким образом, применяя условия разрешимости при рассмотрении неоднородной краевой задачи (1.51), (1.52), приходим к выводу, что должно быть выполнено равенство

$$\psi' = \frac{c_1}{2}z_1^2 + \frac{c_2}{2}z_2^2.$$

Соответствующее решение неоднородной краевой задачи (1.51), (1.52) будем искать как функции из  $W_0$ . Поэтому их следует выбрать следующим образом:

$$u_2 = \eta_1 z_1^2 \cos 2x + \eta_2 z_2^2 \cos 2y. \tag{1.55}$$

Коэффициенты  $\eta_1, \eta_2$  в формуле (1.55) выбираются после подстановки суммы (1.55) в неоднородную краевую задачу (1.51), (1.52). Функция (1.55) будет ее частным решением с необходимыми свойствами, если

$$\eta_1 = -\frac{c_1}{24d_1},$$
$$\eta_2 = -\frac{c_2}{24d_2}.$$

Теперь перейдем к краевой задаче для определения  $u_3$ , то есть к неоднородной краевой задаче (1.53), (1.54).

Условия разрешимости данной неоднородной краевой задачи (1.53), (1.54), то есть равенства

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \cos x \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x,y) \cos y \, dx \, dy = 0$$

позволяют получить в нашем случае следующие равенства:

$$\alpha_1 z_1 \frac{\pi^2}{2} - \frac{c_1^2 z_1^3}{3d_1} \frac{\pi^2}{8} - z_1' \frac{\pi^2}{2} = \alpha_2 z_2 \frac{\pi^2}{2} - \frac{c_2^2 z_2^3}{3d_2} \frac{\pi^2}{8} - z_2' \frac{\pi^2}{2} = 0.$$

Таким образом, применение условий разрешимости неоднородной краевой задачи (1.53), (1.54) позволяет получить следующие уравнения для  $z_1$ ,  $z_2$ :

$$z_1' = \alpha_1 z_1 - \frac{c_1^2}{12d_1} z_1^3,$$
$$z_2' = \alpha_2 z_2 - \frac{c_2^2}{12d_2} z_2^3.$$

Найдем соответствующее решение неоднородной краевой задачи (1.53), (1.54). В данном случае его следует искать в виде

$$u_3(s, x, y) = \xi_1 z_1^3 \cos 3x + \xi_2 z_2^3 \cos 3y \tag{1.56}$$

как подходящее решение неоднородной краевой задачи (1.53), (1.54).

Подстановка  $u_3(s, x, y)$  в соответствующий вариант неоднородной краевой задачи (1.53), (1.54) показывает, что

$$\xi_1 = \frac{c_1^2}{864d_1^2}, \ \xi_2 = \frac{c_2^2}{864d_2^2}$$

В результате, получим систему из трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = \frac{c_1}{2}z_1^2 + \frac{c_2}{2}z_2^2,\tag{1.57}$$

$$z_1' = \alpha_1 z_1 - \frac{c_1^2}{12d_1} z_1^3,$$
  

$$z_2' = \alpha_2 z_2 - \frac{c_2^2}{12d_2} z_2^3.$$
(1.58)

Выписанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений следует понимать как «укороченный» вариант системы дифференциальных уравнений на инвариантном многообразии (1.57), (1.58), в котором определены коэффициенты ее главной части и отброшены слагаемые, имеющие порядок  $o(\varepsilon)$ .

В англоязычной литературе (смотри, например, [48]) систему (1.57), (1.58) называют «укороченной» нормальной формой.

#### 1.5.1 Анализ нормальной формы

**Лемма 1.2.** Пусть  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ . Тогда замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.58) для  $z_1(s), z_2(s)$  имеет 9 состояний равновесия

$$S_{0,0}: z_1 = z_2 = 0;$$

$$S_{\pm 1,0}: \ z_1 = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1\alpha_1}}{|c_1|}, \ z_2 = 0;$$
$$S_{0,\pm 1}: \ z_1 = 0, z_2 = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2\alpha_2}}{|c_2|};$$
$$S_{\pm 1,\pm 1}: \ z_j = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_j\alpha_j}}{|c_j|}, \ j = 1, 2.$$

Состояния равновесия  $S_{0,0}, S_{\pm 1,0}, S_{0,\pm 1}$  неустойчивы, состояния равновесия  $S_{\pm 1,\pm 1}$ , соответственно, асимптотически устойчивы как решения замкнутой подсистемы (1.58).

Для нахождения координат следует рассмотреть систему из двух алгебраических уравнений

$$\alpha_1 z_1 - \frac{c_1^2}{12d_1} z_1^3 = 0,$$

$$\alpha_2 z_1 - \frac{c_2^2}{12d_1} z_2^3 = 0,$$
(1.59)

которая кроме тривиальных решений  $z_1, z_2$  может иметь и иные решения, которые удовлетворяют равенствам

$$\alpha_1 = \frac{c_1^2}{12d_1}z_1^2, \ \alpha_2 = \frac{c_2^2}{12d_1}z_1.$$

В результате, после перебора возможных случаев получаем набор решений, выписанный в лемме 1.2.

**Лемма 1.3.** При  $\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \leq 0$  замкнутая система (1.58) имеет только нулевое состояние равновесия  $z_1 = z_2 = 0$ .

Действительно, в данном случае система алгебраических уравнений (1.59) имеет только нулевое решение.

Наконец, справедливо утверждение.

**Лемма 1.4.** При  $\alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \le 0$  система дифференциальных уравнений (1.59) имеет три состояния равновесия  $S_{0,0}, S_{\pm 1,0}$ , а при  $\alpha_1 \le 0, \alpha_2 \ge 0$  существует три состояния равновесия  $S_{0,0}, S_{0,\pm 1}$ .

Подчеркнем, что для анализа устойчивости найденных состояний равновесия следует рассмотреть матрицу Якоби, которая в данном случае имеет диагональный вид

$$J = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \frac{c_1^2}{4d_1}\eta_1^2 & 0\\ 0 & \alpha_2 - \frac{c_1^2}{4d_2}\eta_2^2 \end{pmatrix},$$

где  $(\eta_1, \eta_2)$  — координаты одного из указанных в рамках формулировок лемм.

Так, например, в случае выбора одного из состояний равновесия  $S_{\pm 1,\pm 1}$  (всего их, разумеется, 4) получим, что матрица J имеет два отрицательных собственных значения.

Если  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , то в остальных случаях, разобранных в рамках первой леммы, то есть для оставшихся пяти состояний равновесия получим уже матрицу J, у которой, по крайней мере, одно из собственных значений положительно.

Отметим, что далее при перенесении результатов анализа нормальной формы, системы дифференциальных уравнений (1.58) на изучаемую нелинейную краевую задачу (1.46), (1.47), случаи, когда  $\alpha_1$  либо  $\alpha_2$  равны нулю, пропускаются как негрубые.

Замечание 1.4. если ограничиться изучением нормальной формы в укороченном варианте, то есть системы дифференциальных уравнений (1.58), то нетрудно сформулировать результаты и при  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$  или, когда хотя бы одна из этих величин равна 0, а вторая уже отлична от 0. Пусть сначала  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Тогда система приобретает вид

$$z_1' = -\frac{c_1^2}{12d_1} z_1^3,$$
$$z_2' = -\frac{c_1^2}{12d_2} z_2^3$$

и, следовательно, нулевое решение асимптотически устойчиво. Решения и первого и второго уравнения стремятся к 0. Это проверяется простым интегрированием

$$z_j^2(s) = \frac{6d_j\gamma_j^2}{c_j^2\gamma_j^2t + 6d_j},$$

где  $j = 1, 2, \gamma_j = z_j(0)$ , то есть элементарно проверяется, что  $\lim_{z \to +\infty} z_j^2(s) = 0$ .

Пусть теперь  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0$ . Тогда, безусловно, нулевое решение асимптотически устойчиво. При  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 > 0$  существует уже ненулевое состояние равновесия

$$z_1 = 0, z_{\pm 2} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_2 d_2}{c_2^2}}.$$

Оба они асимптотически устойчивы.

Аналогичная ситуация реализуется, если  $\alpha_2 = 0, \alpha_1 \neq 0.$ 

В этом случае также существуют два ненулевых состояния равновесия

$$z_{\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 d_1}{c_1^2}}, \ z_2 = 0,$$

если  $\alpha_1 > 0$ , которые асимптотически устойчивы, а  $z_1 = z_2 = 0$ , естественно, неустойчиво. Конечно, при  $\alpha_1 < 0, \alpha_2 = 0$  существует только одно нулевое асимптотически устойчивое состояние равновесия.

В основном случае, когда  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ , система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.57), (1.58) имеет 4 семейства устойчивых ненулевых решений вида

$$\psi(s) = 6\left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right)s + \psi_0, \ \psi_0 \in \mathbb{R},$$
  
$$z_j(s) = \pm 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{d_j\alpha_j}}{|c_j|}, \ j = 1,2$$
(1.60)

и 4 неустойчивых семейства решений, соответствующих  $S_{\pm 1,0}$  и  $S_{0,\pm 1}$ 

$$\psi(s) = 6 \frac{d_1 \alpha_1}{c_1} s + \psi_0,$$
  

$$z_1 = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_1 \alpha_1}}{c_1}, \ z_2 = 0$$
(1.61)

И

$$\psi(s) = 6 \frac{d_2 \alpha_2}{c_2} s + \psi_0,$$

$$z_2 = \pm 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{d_2 \alpha_2}}{c_2}, \quad z_1 = 0.$$
(1.62)

Как и в предыдущих двух разделах 1.3, 1.4 краевую задачу (1.46), (1.47) можно и целесообразно переписать в виде

$$\dot{v} = \psi(w), \ \psi(w) = M\left(c_1\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c_2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right),$$
(1.63)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_3(\varepsilon)w + c_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \psi(w), \qquad (1.64)$$

где w = w(t, x, y) удовлетворяет краевым условиям (1.47) и для нее справедливо равенство

$$M(w) \equiv 0. \tag{1.65}$$

Справедливо утверждение.

**Теорема 1.3.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  вспомогательная краевая задача (1.64), (1.47), (1.65) имеет четыре асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$\begin{split} S_{31} : w_{31}(x, y, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \left( \frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left( \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) + \\ &+ \varepsilon^{3/2} \left( \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ S_{32} : w_{32}(x, y, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \left( \frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x - \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left( \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) + \\ &+ \varepsilon^{3/2} \left( \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ S_{33} : w_{33}(x, y, \varepsilon) &= \varepsilon^{1/2} \left( -\frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left( \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) + \\ &+ \varepsilon^{3/2} \left( -\frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}), \\ S_{34} : w_{34}(x, y, \varepsilon) &= -\varepsilon^{1/2} \left( \frac{2\sqrt{3\alpha_1 d_1}}{|c_1|} \cos 3x + \frac{2\sqrt{3\alpha_2 d_2}}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \left( \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y \right) - \\ &- \varepsilon^{3/2} \left( \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_1})^3}{36\sqrt{d_1}|c_1|} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}(\sqrt{\alpha_2})^3}{36\sqrt{d_2}|c_2|} \cos 3y \right) + o(\varepsilon^{3/2}). \end{split}$$

Основная краевая задача (1.46), (1.47) имеет четыре однопараметрических семейства решений, соответствующих состояниям равновесия  $S_{31}, S_{32}, S_{33}, S_{34}$ :

$$u_{31}(t, x, y, \varepsilon) = K_{31} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + w_{31}(x, y, \varepsilon)$$

$$u_{32}(t, x, y, \varepsilon) = K_{32} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + w_{32}(x, y, \varepsilon)$$
$$u_{33}(t, x, y, \varepsilon) = K_{33} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + w_{33}(x, y, \varepsilon)$$
$$u_{34}(t, x, y, \varepsilon) = K_{34} + \left(6\varepsilon \left(\frac{d_1\alpha_1}{c_1} + \frac{d_2\alpha_2}{c_2}\right) + o(\varepsilon)\right)t + w_{34}(x, y, \varepsilon),$$

где функции  $w_{3j}(x, y, \varepsilon)$  были указаны выше, а  $K_{31}, K_{32}, K_{33}, K_{34} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Как и в предыдущих разделах, используя результаты работ [5,6,9,10,12,15], можно показать справедливость утверждения.

**Теорема 1.4.** Существует  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  и  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ вспомогательная краевая задача (1.64), (1.47), (1.65) имеет четыре неустойчивых состояния равновесия

$$S_{41}, S_{42} : w_{\pm 1,0}(x,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left( \pm \frac{2\sqrt{3d_1\alpha_1}}{|c_1|} \cos x \right) - \varepsilon \frac{\alpha_1}{2c_1} \cos 2x + o(\varepsilon),$$
  
$$S_{43}, S_{44} : w_{0,\pm 1}(y,\varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \left( \pm \frac{2\sqrt{3d_2\alpha_2}}{|c_2|} \cos y \right) - \varepsilon \frac{\alpha_2}{2c_2} \cos 2y + o(\varepsilon).$$

Состояниям равновесия  $S_{41}, S_{42}, S_{43}, S_{44}$  соответствуют четыре однопараметрических семейства решений

$$u_{\pm 1,0}(t,x,\varepsilon) = K_{4,\pm 1} + \left(6\varepsilon \ \frac{d_1\alpha_1}{c_1} + o(\varepsilon)\right)t + w_{\pm 1,0}(x,\varepsilon),$$
$$u_{0,\pm 1}(t,y,\varepsilon) = K_{4,\pm 2} + \left(6\varepsilon \ \frac{d_2\alpha_2}{c_2} + o(\varepsilon)\right)t + w_{0,\pm 1}(y,\varepsilon),$$

где функции  $w_{\pm 1,0}(x,\varepsilon), w_{0,\pm 1}(y,\varepsilon)$  указаны выше, а  $K_{4,\pm 1}, K_{4,\pm 2} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

В рамках теорем 1.3, 1.4 были указаны 8 семейств решений. Решения, принадлежащие этим семействам, можно назвать состояниями равновесия второго рода, так как для этих решений  $u_*(t, x)$  выполнены следующие свойства:

1)  $\frac{\partial u_*}{\partial t}$  не зависит от t и x; 2)  $\frac{\partial u_*}{\partial x}$  не зависит от t.

## 1.6 Некоторые комментарии

В предыдущих трех разделах были изучены три бифуркационные задачи для нелинейной краевой задачи (1.1), (1.2). Особый интерес представляет третий ее вариант, который, как уже отмечалось, возникает при

$$b_1 = d_1 + \alpha_1 \varepsilon, \ b_2 = d_2 + \alpha_2 \varepsilon, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Как было показано, в этом случае при  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  существуют решения, которые зависят от двух пространственных переменных (от x и y). В этом случае данная краевая задача имеет состояния равновесия второго рода (смотри теорему 1.4, которые устойчивы в смысле определения А.М. Ляпунова. Нетрудно дополнительно получить из анализа данной краевой задачи, что решения соответствующих четырех семейств из теоремы 1.3 могут быть записаны в следующей форме:

$$u(t, x, y, \varepsilon) = u_1(t, x, y, \varepsilon) + u_2(t, x, y, \varepsilon),$$

где  $u_1(t,x,y,\varepsilon)$  — решение нелинейной краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(d_1 + \alpha_1 \varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - d_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, \pi, y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, 0, y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, \pi, y) = 0,$$

а  $u_2(t,x,y,arepsilon)$  — решение краевой задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -(d_2 + \alpha_1 \varepsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - d_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(t, x, 0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, \pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t, x, 0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t, x, \pi) = 0.$$

Тем не менее уместно подчеркнуть, что это замечание справедливо в силу специфики выбора вида правой части уравнения (1.1) и главным образом, специфики ее нелинейных слагаемых. Наконец, анализ устойчивости построенных решений все равно требует подхода, изложенного в разделе 1.3.3 данной главы.

естественно, что иные модификации уравнения Курамото-Сивашинского приводит к другим результатам, для которых предыдущее замечание не будет справедливым. В задачах, связанных с формированием нанорельефа, иногда, но гораздо реже рассматривалась, например, краевая задача вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_3(\varepsilon)u + c_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + c_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3 + c_3 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + c_4 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2, \quad (1.66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0,y) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi,y) = 0,$$
  
$$\frac{\partial u}{\partial y}(t,x,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(t,x,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(t,x,\pi) = 0,$$
  
(1.67)

где  $A_3(\varepsilon)u$  — линейный дифференциальный оператор, определенный в третьем разделе данной главы. По сравнению с ранее изученной краевой задачей (1.2), (1.3) при  $b_1 = d_1 + \alpha_1 \varepsilon$ ,  $b_2 = d_2 + \alpha_2 \varepsilon$  добавлены два нелинейных слагаемых

$$c_3 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2, \ c_4 \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

Поэтому методика анализа такого варианта краевой задачи (1.1), (1.2), безусловно, остается неизменной, но нормальная форма, разумеется, претерпевает изменения. В результате реализации алгоритма из раздела 1.3.3 при собственных значениях, равных нулю, получим нормальную форму

$$\psi' = \frac{c_1}{2}z_1^2 + \frac{c_2}{2}z_2^2,\tag{1.68}$$

$$z_{1}' = \alpha_{1}z_{1} - \frac{c_{1}^{2}}{12d_{1}}z_{1}^{2} + \frac{1}{2}c_{4}z_{1}z_{2}^{2},$$

$$z_{2}' = \alpha_{2}z_{2} - \frac{c_{2}^{3}}{12d_{2}}z_{2}^{3},$$
(1.69)

где второе уравнение системы (1.69) то же самое, а первое содержит дополнительное слагаемое  $\frac{c_4}{2} z_1 z_2^2$ .

Найдем состояния равновесия замкнутой подсистемы (1.69). Она, как и ранее, имеет нулевое состояние равновесия. Кроме нулевого состояния равновесия, у нее существует два состояния равновесия

$$z_1 = 0, z_{\pm 2} = \pm \sqrt{\frac{12d_2}{c_2^2}} = \pm 2\frac{\sqrt{3d_2\alpha_2}}{|c_2|},$$

если, конечно,  $c_2 \neq 0$  и  $\alpha_2 \geq 0$ . Как состояния равновесия системы (1.69) они асимптотически устойчивы, если  $\alpha_1 < 0$  и неустойчивы, если  $\alpha_1 > 0$ . Также существуют состояния равновесия

$$z_2 = 0, z_{\pm 1} = \pm 2 \frac{\sqrt{3d_2\alpha_2}}{|c_1|},$$

если  $\alpha_2 > 0$ . Они оба асимптотически устойчивы, если  $\alpha_2 < 0$  и неустойчивы, если  $\alpha_2 > 0$ .

Как и ранее, особый интерес представляют те состояния равновесия, у которых обе координаты отличны от 0. Они могут быть найдены как решения алгебраической системы уравнений

$$\alpha_1 - \frac{c_1^2}{12d_1}z_1^2 + \frac{c_4}{2}z_2^2 = 0,$$
  
$$\alpha_2 - \frac{c_2^2}{12d_2}z_2^2 = 0.$$

У нее есть решения вида

$$z_{\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{12d_2\alpha_2}{c_2^2}} \ (\alpha_2 > 0),$$

$$z_{\pm 1} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 + \frac{c_4}{2} \frac{12d_2\alpha_2}{c_2^2}}{c_1^2}} = \pm \sqrt{\frac{\alpha_1 + \alpha_2 \frac{c_4d_2}{c_2^2}}{c_1^2}},$$

которое существует и асимптотически устойчиво, если

$$\alpha_1 + \alpha_2 \frac{c_4}{c_1^2} d_2 > 0.$$

Сразу отметим, что последнее неравенство может быть реализовано и при  $\alpha_1 < 0$ , если  $c_4 > 0$  ( $d_2 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$  по условию).

Последнему состоянию равновесия соответствуют 4 семейства состояний равновесия второго рода. Для асимптотической формулы из формулировки данной теоремы есть определенная корректировка. Она содержит дополнительное слагаемое

$$\frac{1}{6d_2 + 2d_3} \cos x \cos 2y.$$

Суммарно теперь решение нового варианта краевой задачи уже не имеет такой простой структуры, как в разделе 1.4.3.

# Глава 2

# Классический вариант уравнения Курамото-Сивашинского

# 2.1 Постановка задачи. Состояния равновесия в случае краевых условий Неймана

В данной главе будем изучать нелинейную краевую задачу в случае, когда функция u(t,x) зависит от одной пространственной переменной.

Приведем уравнение Курамото-Сивашинского уже в перенормированном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad (2.1)$$

где u = u(t, x), а  $c \neq 0$ . Далее без нарушения общности можно считать, что c = 1.

В данном подразделе уравнение (2.1) рассматривается вместе с однородными краевыми условиями Неймана. С учетом нормировок можно считать, что при всех  $x \in [0, \pi], t \ge 0$ , выполнены равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi) = 0, \ x \in [0,\pi].$$
(2.2)

Очевидно, что краевая задача (2.1), (2.2) имеет семейство пространственно однородных состояний равновесия

$$u(t,x) = const, \ const \in \mathbb{R}.$$

С другой стороны, краевая задача (2.1), (2.2) инвариантна относительно замены  $u \to u+const$ . Поэтому далее без нарушения общности можно считать, что будет изучаться состояние равновесия u = 0 (const = 0). С точки зрения приложений, особый интерес представляет наличие у нелинейной краевой задачи устойчивых решений u(t, x), которые существенно зависят от пространственной переменной x, то есть  $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ .

Положим

$$u(0,x) = f(x).$$
 (2.3)

Смешанная задача (2.1), (2.2), (2.3) локально корректно разрешима, если  $f(x) \in \overset{\circ}{W_2^4}[0,\pi]$  [39]. Здесь через  $\overset{\circ}{W_2^4}[0,\pi]$  обозначено замыкание линеала достаточно гладких функций f(x), удовлетворяющих краевым условиям (2.2) по норме пространства Соболева  $W_2^4[0,\pi]$ . Напомним, что  $g(x) \in W_2^4[0,\pi]$ , если функция g(x) имеет обобщенные производные  $\frac{dg}{dx}; \dots; \frac{d^4g}{dx^4}$  до четвертого порядка включительно, которые принадлежат  $L_2[0,\pi]$ . Подчеркнем, что в силу теорем вложения  $g(x) \in C^3[0,\pi]$ , то есть пространству трижды непрерывно дифференцируемых функций. Решения краевой задачи (2.1), (2.2), (2.3) в фазовом пространстве (пространстве начальных условий  $\overset{\circ}{W_2^4}[0,\pi]$ ) порождают полупоток

$$f(x) \to f_t(x) = u(t, x).$$

Эти замечания дают основания полагать, что для исследования краевой задачи можно использовать методы качественной теории дифференциальных уравнений с бесконечномерным фазовым пространством (смотри, например, [5,6]).

### 2.1.1 Линейная краевая задача

Для исследования устойчивости нулевого состояния равновесия рассмотрим вспомогательную краевую задачу, которая возникает после линеаризации краевой задачи (2.1), (2.2) в окрестности тривиального состояния равновесия. В результате получим линейную краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au,\tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi) = 0, \qquad (2.5)$$

где линейный дифференциальный оператор

$$Av = -b\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}$$

определен на достаточно гладких функциях v = v(x), удовлетворяющих краевым условиям

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0) = \frac{\partial v}{\partial x}(\pi) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(\pi) = 0$$

Пусть  $\lambda$  — собственное значение, а v(x) — собственная функция линейного дифференциального оператора A. Для исследования устойчивости нулевого решения краевой задачи (2.4), (2.5) найдем все ее решения следующего вида:

$$u(t,x) = e^{\lambda t} v(x).$$

Для нахождения собственного значения  $\lambda$ , а также соответствующей собственной функции получим краевую задачу

$$Av = \lambda v,$$
  

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0) = \frac{\partial v}{\partial x}(\pi) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0) = \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(\pi) = 0.$$
(2.6)

Подстановкой проверяется, что краевая задача (2.6) имеет нетривиальные решения, если

$$\lambda = \lambda(n) = bn^2 - n^4.$$

Каждому из них соответствует собственная функция

$$v(x,y) = e_n(x) = \cos nx,$$

где n = 0, 1, 2, 3, ... Как хорошо известно, собственные функции  $e_n(x)$  в пространстве  $L_2[0, \pi]$  образуют полную ортогональную систему функций. Поэтому линейный дифференциальный оператор A не может иметь иных собственных значений, отличных от  $\lambda(n)$ .

Отметим, что  $\lambda(0) = 0$ . Понятно, что если  $\lambda(n) < 0$  при всех  $n \neq 0$ , то любое состояние равновесия задачи (2.4), (2.5) устойчиво (но не может быть асимптотически устойчивым). Устойчивость следует понимать в смысле нормы фазового пространства (пространства начальных условий). Например, пространства Соболева  $W_2^4[0,\pi]$ . Если же существует такое  $n_0 \neq 0$ , что  $\lambda(n_0) > 0$ , то состояние равновесия неустойчиво. Критические случаи выделяются условиями: пусть для некоторого  $n_0$  выполнено равенство

$$\lambda(n_0) = 0, \quad n_0 \neq 0,$$

а для остальных номеров  $n \ (n \neq 0)$  имеет место неравенство  $\lambda(n) < 0$ . Отметим также, что в нашем случае все собственные значения  $\lambda(n)$  действительны. Условие устойчивости приобретает вид неравенства b < 1.

Следовательно, равенство  $b = b_1 = 1$  выделяет критическое значение параметра b в задаче об устойчивости состояний равновесия u = const для краевой задачи (2.4), (2.5). При таком значении b линейный дифференциальный оператор A имеет двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции 1,  $\cos x$ . Подчеркнем также, что при  $b = b_n = n^2$  линейный оператор A имеет также двукратное нулевое собственное значение, но ему уже отвечает собственная функция  $\cos nx$  и, конечно, 1. Если  $b = b_1 = 1$ , остальные собственные значения линейного дифференциального оператора A лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости  $(\lambda_m = -m^4 + m^2 < 0, \text{ если } m \neq 1)$ . В случае  $b = b_n$   $(n \neq 1)$  линейный дифференциальный оператор A имеет уже n - 1 собственных значений, находящихся в правой полуплоскости комплексной плоскости  $(\lambda_k = -k^4 + n^2k^2 > 0, \text{ если } k < n)$ .

### 2.1.2 Обобщенная бифуркационная задача

В этом разделе рассмотрим краевую задачу (2.1), (2.2) в случае, когда

$$b = n^2 + \gamma \varepsilon, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0), \ \gamma \in \mathbb{R}$$

а n = 1, 2, ... При n = 1 ( $b_1 = 1 + \gamma \varepsilon$ ) данная краевая задача имеет двумерное устойчивое центральное многообразие  $M_1$ , решения на котором определяются после анализа двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной формы. Если же  $b = b_n = n^2$  и  $n \neq 1$ , то краевая задача (2.1), (2.2) также имеет двумерное интегральное многообразие  $M_n$  и решения на нем восстанавливаются после анализа соответствующей двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной формы для данного выбора параметра b. Инвариантное многообразие  $M_n$  часто называют «центральным».

При n = 2, 3, ... соответствующие интегральные многообразия  $M_n$  уже не являются устойчивыми, а седловыми (неустойчивыми) и поэтому все решения на таких инвариантных многообразиях заведомо неустойчивы.

Построим соответствующие инвариантным многообразиям  $M_n$  нормальные формы ( $b = b_n + \gamma \varepsilon$ ). Решения на  $M_n$  будем искать в следующем виде:

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} z(s) \cos nx + \varepsilon u_2(x, z(s)) + \varepsilon^{3/2} u_3(x, z(s)) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (2.7)$$

где  $s = \varepsilon t$  — «медленное время», z(s) — решения нормальной формы, которая будет выписана позднее. Наконец,  $u_j(x, z)$  — функции, для которых выполнены следующие свойства:

- 1. при фиксированных z, как функции от x, принадлежат  $W_2^4$   $[0, \pi]$  пространству Соболева функций, для которых выполнены краевые условия (2.2);
- 2. справедливы равенства

$$M_n(u_j) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_j \cos nx dx = 0, \ M_0(u_j) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u_j dx = 0.$$

Итак, рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_n(\varepsilon)u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2,\tag{2.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi) = 0, \qquad (2.9)$$

где u = u(t, x), а

$$A_n(\varepsilon)u = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - (n^2 + \gamma \varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Действительные функции  $z = z(s), \ \psi = \psi(s)$  будем искать как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\psi' = a_0 z^2, \tag{2.10}$$

$$z' = \alpha z - a z^3, \tag{2.11}$$

где  $a_0, a, \alpha$  — действительные числа. Уравнения (2.10), (2.11) выписаны с точностью до слагаемых порядка  $O(\varepsilon^{1/2})$ . Система (2.10), (2.11) — «главная» часть нормальной формы Пуанкаре-Дюлака. В свою очередь, нормальная форма описывает динамику нелинейной краевой задачи (2.1), (2.2) на двумерном инвариантном многообразии («центральное многообразие»).

Подстановка суммы (2.10) в краевую задачу (2.8), (2.9) с последующим приравниванием выражений при одинаковых степенях  $\varepsilon$  приводит к линейным краевым задачам для определения  $u_j$ , j = 1, 2, 3. При их формировании и изучении будем интерпретировать *s* как параметр.

В итоге для  $u_2, u_3$  получим две следующие неоднородные краевые задачи:

$$\psi' + \frac{\partial u_2}{\partial t} = A_n(0)u_2 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2, \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}(t,\pi) = 0, \qquad (2.13)$$

$$z'\cos x + \frac{\partial u_3}{\partial t} = A_n(0)u_3 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2c_1\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x},$$
(2.14)

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u_3}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}(t,\pi) = 0.$$
(2.15)

В формулах (2.12)–(2.15) штрихом обозначена частная производная по вспомогательной переменной s.

Неоднородная краевая задача

$$A_n(0)v(x) = F(x)$$
имеет решение, если справедливы следующие равенства (условия разрешимости):

$$\int_{0}^{\pi} F(x) \, dx = \int_{0}^{\pi} F(x) \, \cos nx \, dx = 0.$$

Равенства

$$\int_{0}^{\pi} v(x) \, dx = \int_{0}^{\pi} v(x) \, \cos nx \, dx = 0$$

выделяют одно такое решение.

Применяя условия разрешимости при рассмотрении неоднородной краевой задачи (2.12), (2.13), получаем, что

$$\psi' = -\frac{n^2 z^2}{2}.\tag{2.16}$$

Далее решение краевой задачи (2.12), (2.13) будем искать в виде

$$u_2 = \eta_2 z^2 \cos 2nx. \tag{2.17}$$

После подстановки (2.17) в (2.12), (2.13) находим, что

$$\eta_2 = \frac{1}{24n^2}$$

а соответствующее решение  $u_2$  равно

$$u_2(s,x) = \frac{z^2 \cos 2nx}{24n^2}.$$

Из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (2.14), (2.15) вытекает, что

$$z'_{n} = \gamma n^{2} z_{n} - \frac{1}{12} z_{n}^{3}.$$
(2.18)

Перейдем к рассмотрению нормальной формы (2.16), (2.18). При этом основную роль играет дифференциальное уравнение (2.18).

$$z'_{n} = \gamma n^{2} z_{n} - \frac{1}{12} z_{n}^{3}.$$
(2.19)

Стандартный анализ показывает, что дифференциальное уравнение (2.19) имеет ненулевые состояния равновесия  $S_{\pm 1}$ , если  $\gamma = 1$ , вида

$$z_n(s) = \pm 2\sqrt{3}n.$$
 (2.20)

При  $\gamma = -1$  уравнение (2.20) имеет только нулевое состояние равновесия, которое асимптотически устойчиво. Состояния равновесия  $S_{\pm 1}$  асимптотически

устойчивы. Каждому такому решению (2.20) соответствует следующее решение нормальной формы (2.16), (2.18):

$$z(s) = \pm 2\sqrt{3}n, \ \psi(s) = -6n^4s + \psi_0, \ \psi_0 \in \mathbb{R}.$$

Гильбертово пространство функций  $g(x) \in W_2^{\circ}[0,\pi] = H$  можно представить в виде прямой суммы подпространств  $H_0, H_1$ , где  $H_1$  — одномерное подпространство пространства H, натянутое на собственную функцию оператора  $A : e_0(x) = 1$ , а  $H_0$  — ортогональное ему дополнение в смысле скалярного произведения в  $L_2(0,\pi)$ .

Пусть u(t, x) — решение краевой задачи (2.8). Тогда функцию u(t, x) можно представить в виде

$$u(t,x) = v(t) + w(t,x),$$
$$x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\pi} u(t,x) dx \quad a$$

где  $v(t) = M(u(t,x)) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} u(t,x) dx$ , а

$$M(w) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} w(t, x) dx \equiv 0,$$

то есть w(t, x) при каждом t принадлежит  $H_0$ . В таком случае краевую задачу можно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения для v(t)

$$\dot{v} = -\psi(w), \ \psi(w) = M\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx,$$
 (2.21)

а также краевой задачи для w = w(t, x)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_n(\varepsilon)w - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \psi(w), \qquad (2.22)$$

$$\frac{\partial w(t,0)}{\partial x} = \frac{\partial w(t,\pi)}{\partial x} = \frac{\partial^3 w(t,0)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 w(t,\pi)}{\partial x^3} = 0, \ M(w) = 0.$$
(2.23)

Из результатов работ [5,6,9,10,12,15] вытекает справедливость утверждения.

**Теорема 2.1.** Существует такое  $\varepsilon_n > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_n)$  решению (2.20) соответствует решение краевой задачи (2.22), (2.9), (2.23)

$$S_{1,2}: w_{n1,n2}(x,\varepsilon) = \pm \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{3}n \cos nx + \frac{\varepsilon}{2} \cos 2nx + o(\varepsilon).$$
 (2.24)

При n = 1 оба состояния равновесия асимптотически устойчивы, а при  $n \neq 1$  они неустойчивы.

Основная краевая задача (2.8), (2.9) при  $b = b_n + \gamma \varepsilon$ ,  $b_n = n^2$  имеет два однопараметрических семейства решений

$$u_{n1,n2}(t,x,\varepsilon) = K_{n1,n2} + \left(-6n^{4}\varepsilon + o(\varepsilon)\right)t + w_{n1,n2}(x,\varepsilon),$$

где  $K_{n1,n2} \in \mathbb{R}$  и произвольны, а функции  $w_{n1,n2}(x,\varepsilon)$  были указаны выше.

Уместно подчеркнуть, что решения  $u_{11}(x,\varepsilon)$  и  $u_{12}(x,\varepsilon)$  связаны соотношением

$$u_{12}(x,\varepsilon) = u_{11}(\pi - x,\varepsilon)$$

Например, пусть  $b = 4 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Это означает, что следует рассматривать краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_2(\varepsilon)u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad (2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi) = 0.$$
(2.26)

Практически дословно повторяя построения при анализе нелинейной краевой задачи (2.1), (2.2), можно доказать, что существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существует 2 семейства неустойчивых решений

$$u_{21,22}(t, x, \varepsilon) = K_{21,22} + (-96\varepsilon + o(\varepsilon)) t \pm \varepsilon^{1/2} 4\sqrt{3} \cos 2x + \frac{\varepsilon}{2} \cos 4x \pm \varepsilon^{3/2} \frac{\sqrt{3}}{72} \cos 6x + o(\varepsilon^{3/2})$$

краевой задачи (2.25), (2.26). Здесь  $K_{21}, K_{22}$  — произвольные действительные постоянные.

Наконец, в третьем варианте положим  $b = 9 + \varepsilon, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Это означает, что следует рассматривать краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_3(\varepsilon)u - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad (2.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi) = 0.$$
(2.28)

Тогда получаем, что существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  существует 2 семейства устойчивых решений

$$u_{31,32}(t, x, \varepsilon) = K_{31,32} + (-56\varepsilon + o(\varepsilon)) t \pm \varepsilon^{1/2} 2\sqrt{7} \cos 3x + \frac{\varepsilon}{2} \cos 6x \pm \varepsilon^{3/2} \frac{2\sqrt{7}}{243} \cos 9x + o(\varepsilon^{3/2})$$

краевой задачи (2.27), (2.28). Здесь  $K_{31}, K_{32}$  — произвольные действительные постоянные.

В рамках теорем этого раздела были указаны 6 семейств решений. Решения, принадлежащие этим семействам, можно назвать состояниями равновесия второго рода краевой задачи (2.1), (2.2), так как для этих решений u(t,x) выполнено свойство:  $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = v(x) - ф$ ункция, которая от t не зависит.

# 2.2 Состояния равновесия в случае краевых условий Дирихле

Далее рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \tag{2.29}$$

вместе с однородными краевыми условиями Дирихле

$$u(t,0) = u(t,\pi) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\pi) = 0, \qquad (2.30)$$

где

$$Au = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ u = u(t, x).$$

Для краевой задачи (2.29), (2.30) рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных состояний равновесия из малой окрестности решения  $u(t, x) \equiv 0$ .

Как и в предыдущих разделах изучим спектр линейного дифференциального оператора A, определенного равенством

$$Av = -\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - b\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ b \in \mathbb{R}, \ v = v(x)$$

с областью определения, состоящей из достаточно гладких функций v(x), которые удовлетворяют краевым условиям

$$v(0) = v(\pi) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\pi) = 0.$$

Линейный дифференциальный оператор A = A(b) имеет счетный набор собственных значений

$$\lambda_n = \lambda_n(b) = -n^4 + bn^2, \ n = 1, 2, 3, \dots$$

Соответствующие собственные функции  $\sin nx$  образуют полную ортогональную систему функций в пространстве  $L_2[0, \pi]$ .

Отметим, что при <br/> b<1нулевое состояние равновесия краевой задачи (2.29), (2.30) асимптотически устойчиво, а пр<br/>иb>1неустойчиво.

Далее рассмотрим бифуркационные задачи, возникающие при

$$b = b_n(\varepsilon) = n^2 + \frac{\gamma \varepsilon}{n^2}, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Выбор  $b = b_n(\varepsilon)$  мотивирован тем, что при  $b = n^2$  линейный дифференциальный оператор  $A_n = A(n^2)$  имеет простое нулевое собственное значение. При этом, за исключением варианта  $n^2 = 1$ , этот оператор имеет собственные значения  $\lambda_k > 0$  и  $\lambda_m < 0$ . Если  $n^2 = 1$ , то  $A_1$  имеет нулевое собственное значение, а остальные его собственные значения лежат на отрицательной полуоси.

При таком выборе значений бифуркационного («управляющего») параметра *b* изучим вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных решений у краевой задачи (2.29), (2.30). Как будет видно из дальнейших построений следует различать прежде всего два случая:

1. n = 2m - 1, m = 1, 2, 3, ..., то есть, когда n — нечетно.

2. n = 2m, m = 1, 2, 3, ..., то есть, когда n — четно.

Замечание 2.1. Напомним, что неоднородная краевая задача

$$A_n v = f,$$
  
$$v(0) = v(\pi) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\pi) = 0,$$

где  $f(x) \in L_2[0,\pi]$ , а v(x) — достаточно гладкая функция  $(v(x) \in W_2^4[0,\pi]$ и, следовательно, в силу теорем вложения Соболева  $v(x) \in C^3[0,\pi]$ , то есть пространству трижды непрерывно дифференцируемых функций), удовлетворяющая краевым условиям, имеет решение, если выполнено условие разрешимости

$$\int_0^\pi f(x)\sin nx dx = 0.$$

Здесь, как и ранее,

$$A_n v = -\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - n^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Если выполнено условие разрешимости, то решение существует, но уже не единственно. Условие

$$\int_0^\pi v(x)\sin nx dx = 0$$

выделяет единственное решение.

Пусть сначала n = 2m - 1. Решение краевой задачи (2.29), (2.30) при соответствующем выборе b ( $b = b_n(\varepsilon)$ ) будем искать в следующем виде:

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon u_1(s, x) + \varepsilon^2 u_2(s, x) + \dots, \qquad (2.31)$$

где  $s = \varepsilon t$  — медленное время, а точками обозначены слагаемые, имеющие более высокий порядок малости по сравнению с выписанными  $(O(\varepsilon^2))$ . Наконец, функции двух переменных s и x  $u_j(s, x)$  обладают следующими свойствами:

- 1. они достаточно гладко зависят от s;
- 2. при фиксированных *s* они принадлежат  $W_2^4[0,\pi]$ ;
- 3. удовлетворяют краевым условиям;
- 4. выполнены равенства

$$\int_0^{\pi} u_j(s,x) \sin nx \, dx = 0, \ n = 2m - 1, \ m = 2, 3.$$

Как вытекает из теоремы об инвариантных многообразиях в окрестности точки бифуркации можно считать, что  $u_1(s, x) = z(s) \sin(2m - 1)x$ .

После подстановки суммы (2.31) в краевую задачу при соответствующем данному случаю выборе параметра b и выделения слагаемых пропорциональных  $\varepsilon$  получим для определения  $u_2(s, x)$  неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + (2m-1)^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = F(x,s),$$
 (2.32)

$$u_2\Big|_{x=0,x=\pi} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\Big|_{x=0,x=\pi} = 0, \qquad (2.33)$$

где

$$F(x,z) = -z'\sin nx + z(\gamma\sin nx) - n^2(\cos^2 nx)z^2, \ n = 2m - 1.$$

При анализе краевой задачи (2.32), (2.33) следует интерпретировать s (z(s), z'(s)) как параметр.

Условия ее разрешимости приводят к равенству

$$-z'\frac{\pi}{2} + \gamma \frac{\pi}{2}z - (2m-1)^2 \frac{2}{3(2m-1)}z^2 = 0.$$

В результате получим уравнение

$$z' = \gamma z - \frac{4(2m-1)z^2}{3\pi}.$$
(2.34)

При этом можно найти ее соответствующее решение  $u_2(s,x) = z^2 v(x)$ , где v(x) следует искать как решение краевой задачи

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + n^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{4(2m-1)z^2}{3\pi} \sin((2m-1)x) - (2m-1)^2 z^2 \cos^2((2m-1)x), \quad (2.35)$$

$$\int_0^{\pi} v(x) \sin(2m-1)x dx = 0,$$

$$v(0) = v(\pi) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\pi) = 0.$$
(2.36)

Правая часть уравнения выписана с учетом того обстоятельства, что условия разрешимости выполнены и z(s) — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$z'(s) = \Phi(z,\varepsilon), \qquad (2.37)$$

то есть уравнения на одномерном инвариантном многообразиий в окрестности нулевого состояния равновесия. При этом предыдущие построения (смотри также предыдущие разделы диссертации) показывают, что

$$\Phi(z,\varepsilon) = \gamma z - \frac{4(2m-1)}{3\pi}z^2 + O(\varepsilon).$$

Следовательно, уравнение (2.34) — укороченный вариант нормальной формы (2.37).

Решение краевой задачи (2.35), (2.36) можно найти в виде

$$v(x) = c_1 x + c_2 + c_3 \cos(2m - 1)x + c_4 \sin(2m - 1)x + \eta_1 x \cos(2m - 1)x + \eta_2 + \eta_3 \cos 2(2m - 1)x,$$

где  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  выбираются так, чтобы v(x) удовлетворяла уравнению (2.35),  $c_1, c_3, c_4$  можно выбрать таким образом, чтобы функция v(x) удовлетворяла краевым условиям (2.36). Наконец, выбор постоянной  $c_2$  обеспечивает условие

$$\int_0^{\pi} v(x) \sin(2m - 1) x dx = 0.$$

Выполнив необходимые вычисления, получим, что решение краевой задачи (2.35), (2.36) имеет вид

$$\eta_1 = \frac{2}{3\pi n^2}, \ \eta_2 = -\frac{1}{4}x^2, \ \eta_3 = -\frac{1}{24n^2},$$

где

$$c_1 = \frac{\pi}{4}, \ c_2 = \frac{3}{8n^2},$$
  
 $c_3 = -\frac{1}{3n^2}, \ c_4 = -\frac{29}{9\pi n^3}.$ 

Приступим к анализу нормальной формы (2.34). При этом существует две возможности для выбора  $\gamma$ :  $\gamma = 1, \gamma = -1$ . В первом варианте выбора  $\gamma$  речь идет о послекритических бифуркациях, а при  $\gamma = -1$  – о докритических.

**Лемма 2.1.** Дифференциальное уравнение (2.34) имеет ненулевое состояние равновесия

$$z = z_* = \gamma \frac{3\pi}{4}.$$

Оно асимптотически устойчиво, если  $\gamma > 0$  ( $\gamma = 1$ ) и неустойчиво при  $\gamma < 0$  ( $\gamma = -1$ ).

Справедливо утверждение, которое вытекает из результатов работ [5,6,9,10, 12,15].

**Теорема 2.2.** Пусть  $b = n^2 + \frac{\varepsilon \gamma}{n^2}$ , n = 2m - 1,  $m \in \mathbb{N}$ . Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  состоянию равновесия  $z = z_*(m)$  соответствует состояние равновесия краевой задачи (2.29), (2.30). Для этого состояния равновесия справедлива асимптотическая формула

$$u(t,x) = u(x,\varepsilon) = \varepsilon z_*(m)\sin(2m-1)x + \varepsilon^2 z_*^2(m)v(x),$$

где функция v(x) была найдена при анализе вспомогательной краевой задачи (2.35), (2.36).

Это состояние равновесия асимптотически устойчиво, если  $\gamma = 1$  ( $\gamma > 0$ ) и m = 1. В остальных случаях имеем седловые состояния равновесия.

Пусть теперь  $b = b_{2m} = (2m)^2 + \frac{\gamma \varepsilon}{(2m)^2}$ , то есть рассмотрим краевую задачу (2.29), (2.30) при четном *n*. При таком выборе параметра *b* решение этой краевой задачи следует искать в виде

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} u_1(x, z) + \varepsilon u_2(x, z) + \varepsilon^{3/2} u_3(x, z) + O(\varepsilon^{3/2}).$$
(2.38)

Здесь функция

$$u_1(x,z) = z(s)\sin 2mx, \ s = \varepsilon t.$$

Свойства функций  $u_2, u_3$  аналогичны свойствам функции  $u_2(x, z)$ , которые были описаны ранее.

Для функций  $u_2, u_3$  получаем неоднородные краевые задачи (после подстановки суммы (2.38) в краевую задачу (2.29), (2.30)).

Итак,

$$u_{2t} = -\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} - (2m)^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2,$$
  

$$u_2\Big|_{x=0,x=\pi} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\Big|_{x=0,x=\pi} = 0,$$
(2.39)

а также

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u_3}{\partial x^4} - (2m)^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \gamma u_1 - 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial x} - z' \sin nx,$$

$$u_3 \Big|_{x=0,x=\pi} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} \Big|_{x=0,x=\pi} = 0.$$
(2.40)

Краевая задача для  $u_2$  всегда разрешима. Именно по этой причине решения, принадлежащие интегральному многообразию следует искать в виде (2.38), а не в форме (2.31). Ниже будет видно, что в частности, разрешимость краевой задачи (2.39) приводит к изменению структуры нормальной формы, а также асимптотики решений. ее решение можно представить в виде

$$u_2(x,z) = z^2 v(x),$$

где v(x) — решение вспомогательной краевой задачи

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 4m^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4mx\right)(2m)^2,$$
$$v(0) = v(\pi) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\pi) = 0.$$

Решение последней краевой задачи можно искать в виде

$$v(x) = c_1 x + c_2 + c_3 \cos 2mx + c_4 \sin 2mx + \eta_1 x^2 + \eta_2 \cos 4mx$$

При этом

$$\eta_1 = -\frac{1}{4}, \eta_2 = -\frac{1}{96m^2}$$

Постоянные  $c_1, c_2, c_3$  выбираем используя краевые условия. Следовательно, получаем систему для определения  $c_1, c_2, c_3$ .

Если x = 0, то

$$c_2 + c_3 + \eta_2 = 0,$$
  
-(2m)<sup>2</sup>c\_3 + 2\eta\_1 - 4(2m)<sup>2</sup>\eta\_2 = 0.

Если  $x = \pi$ , то получаем еще два уравнения

$$c_1\pi + c_2 + c_3 + \eta_1\pi^2 + \eta_2 = 0,$$
  
-(2m)<sup>2</sup>c\_3 + 2\eta\_1 - 4(2m)<sup>2</sup>\eta\_2 = 0.

Из этих уравнений находим, что

$$c_1 = \frac{\pi}{4}, \ c_2 = \frac{3}{32} \frac{1}{m^2}, \ c_3 = -\frac{1}{12m^2}.$$

Величину постоянной  $c_4$  следует находить после определения  $c_1, c_2, c_3$  из условия

$$\int_0^\pi v(x)\sin 2mx dx = 0.$$

В итоге получим

$$c_4 = 0.$$

Таким образом находим, что v(x) имеет следующий вид:

$$v(x) = \frac{3}{32m^2} + \frac{\pi x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2mx}{12m^2} - \frac{\cos 4mx}{96m^2}.$$

Далее перейдем к нахождению  $u_3(x, z)$ . Для этого подставим найденное  $u_2(x, z)$  в краевую задачу для определения  $u_3(x, z)$ , то есть (2.40). Затем, применяя условия разрешимости краевой задачи для  $u_3(x, z)$ , находим нормальную форму

$$z' = \gamma z - \frac{7}{12} z^3. \tag{2.41}$$

**Лемма 2.2.** Дифференциальное уравнение (2.41) имеет при  $\gamma > 0$  два асимптотически устойчивых ненулевых состояния равновесия

$$z_{1,2} = \pm 2\sqrt{\frac{3\gamma}{7}}$$

Как и в предыдущем случае, из результатов работ [5,6,9,10,12,15] вытекает справедливость утверждения.

**Теорема 2.3.** Пусть  $b = n^2 + \frac{\varepsilon \gamma}{n^2}$ , n = 2m,  $m \in \mathbb{N}$ . Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  состояниям равновесия  $z = z_{1,2}(m)$  соответствует состояние равновесия краевой задачи (2.29), (2.30). Для этих состояний равновесия справедлива асимптотическая формула

$$u_{1,2}(t,x) = \varepsilon^{1/2} z_{1,2}(m) \sin 2mx + z_{1,2}^2(m)v(x) + o(\varepsilon),$$

где v(x),  $z_{1,2}(m)$  были найдены при анализе вспомогательных краевых задач (2.39), (2.40).

Эти состояния равновесия всегда неустойчивы.

# 2.3 Анализ уравнения Курамото-Сивашинского с краевыми условиями Неймана и Дирихле методом Галеркина. Сравнение с бифуркационным анализом

### 2.3.1 Случай краевых условий Неймана

В данном подразделе будем изучать нелинейную краевую задачу (см. [43], [45], [52], [59], [66])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad (2.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,\pi) = 0, \qquad (2.43)$$

где  $u = u(t, x), x \in [0, \pi], t \ge 0, b, c$  — некоторые действительные постоянные  $(c \ne 0)$ . При этом без нарушения общности можно считать, что c = 1. Действительно, если положить  $u = \gamma v$  и считать, что  $\gamma c = 1$  (за счет выбора  $\gamma$ ), то получим уравнение (2.42), в котором c = 1. В дальнейших вычислениях будем считать, что c = 1. При всех допустимых  $t \in [0, T]$  справедливо представление решения в виде ряда

$$u(t,x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos nx,$$

так как на отрезке  $[0, \pi]$  система функций  $1, \cos x, \cos 2x, \dots$  формирует полную ортогональную систему. При этом в нашем случае

$$u_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t,x) \, dx, \ u_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t,x) \cos kx \, dx, \ k = 1, 2, \dots$$

Приближенные решения можно и целесообразно искать в виде

$$u(t,x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx.$$

При использовании метода Галеркина принято фиксировать m. В работе [43] и данном разделе будет изучен вариант m = 3 и m = 4, что в целом означает изучение четырехчленной и пятичленной галеркинской аппроксимации.

Уточним сразу один важный момент. В работе [43] и здесь главное внимание уделялось нахождению состояний равновесия второго рода. Напомним, что решения краевой задачи (2.42), (2.43) принято называть состояниями равновесия второго рода, если ее решение u(t,x) таково, что  $\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = v(x) - функция,$ которая от t не зависит.

В работе [43] для нахождения некоторых таких решений был использован метод Галеркина, то есть решения краевой задачи (2.42), (2.43) представлены в виде

$$u(t,x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx$$

в варианте, когда m = 2, 4. В принципе, число m может быть и иным.

#### Редукция с помощью метода Галеркина

Далее в этом разделе будет рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода. Напомним, что решение краевой задачи (здесь (2.42), (2.43)) называется состоянием равновесия второго рода, если  $\frac{\partial u}{\partial x} = v(x)$ , то есть функция v(x) не зависит от t. В данном разделе приближенное решение u(t,x) краевой задачи (2.42),

(2.43) будем искать в аналогичном виде

$$u(t,x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^m u_n(t) \cos nx, \qquad (2.44)$$

где

$$u_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \, dx,$$

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u(t, x) \cos nx \, dx, \ n = 1, 2..., m.$$

Сумма (2.44) стремится к точному решению краевой задачи (2.42), (2.43)

$$u(t,x) = \frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cos nx$$

при  $m \to \infty$ .

Подставив ряд (2.44) при m = 3 в уравнение (2.42) получим

$$\left(\frac{1}{2}\frac{du_0(t)}{dt} + \sum_{n=1}^3 \frac{du_n(t)}{dt}\cos nx\right) = -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t)\cos nx\right) - b\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t)\cos nx\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^3 u_n(t)\cos nx\right)\right)^2.$$

Далее применим стандартную процедуру получения приближений Галеркина, в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения  $u_i(t)$ 

$$\frac{du_0}{dt} = -\left(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2\right),\tag{2.45}$$

$$\frac{du_1}{dt} = (b-1)u_1 - 6u_2u_3 - 2u_1u_2, 
\frac{du_2}{dt} = 4(b-4)u_2 + \frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3, 
\frac{du_3}{dt} = 9(b-9)u_3 + 2u_1u_2,$$
(2.46)

где точкой обозначена производная по t.

У системы (2.46) интерес представляют ненулевые состояния равновесия. Таким решениям соответствуют приближенные пространственно неоднородные решения краевой задачи (2.42), (2.43)

$$u(t,x) = -\frac{1}{2} \left( v_1^2 + 4v_2^2 + 9v_3^2 \right) t + v_1 \cos x + v_2 \cos 2x + v_3 \cos 3x + K,$$

где  $(v_1, v_2, v_3)$  — координаты одного из состояний равновесия системы (2.46), а K — произвольная постоянная.

Последнее семейство приближенных пространственно неоднородных решений формирует однопараметрическое семейство решений краевой задачи (2.39), (2.40). Подчеркнем еще раз, что эти решения будут состояниями равновесия второго рода.

В свою очередь, нахождение состояний равновесия у системы дифференциальных уравнений (2.46) приводит к необходимости решения системы трех алгебраических уравнений

$$(b-1) v_{1} = 2 v_{1} v_{2} + 6 v_{2} v_{3},$$
  

$$4 (b-4) v_{2} = -\frac{1}{2} v_{1}^{2} + 3 v_{1} v_{3},$$
  

$$9 (b-9) v_{3} = -2 v_{1} v_{2},$$
  
(2.47)

у которой, безусловно, есть решение  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ , но интерес представляют иные ее решения. Нулевое состояние равновесия системы (2.45), (2.46) устойчиво при  $b \in (-\infty, 1)$  и теряет устойчивость дивергентным образом (при b = 1 одно из собственных значений равно нулю). Исследование устойчивости проводилось с использованием теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

### Анализ галеркинских приближений

Анализ системы (2.47) показывает, что при  $b \in (-\infty, 1] \cup (9, \infty)$  она не имеет действительных решений, отличных от нуля. Действительно, пусть сначала  $b \neq 1, b \neq 4, b \neq 9$ . Эти особые значения для параметра b рассмотрим отдельно. Тогда из третьего уравнения системы (2.47) можно выразить  $v_3$  и подставить выраженное  $v_3$  в первое уравнение системы (2.47). После этого получим следующее равенство

$$(b-1)v_1 = 2v_1v_2 + \left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{b-9}v_2^2v_1.$$

Если  $v_1 = 0$ , то  $v_2, v_3 = 0$ . Но при  $v_1 \neq 0$  получим квадратное уравнение, которое имеет действительные решения, если  $b \in [-23, 9)$ . В свою очередь из второго уравнения получаем равенство  $v_1^2 = \frac{4b(4-b)(b-9)v_2}{3(b-9)+4v_2}$ , из которого  $v_1$ не находится как действительное число, если b < 1. При b = 1 также нетрудно установить наличие только нулевого решения системы (2.47).

При b = 4 система дифференциальных уравнений (2.46) имеет инвариантное многообразие  $u_1 = u_3 = 0$ ,  $u_2 = \alpha$ , где  $\alpha$  — произвольная действительная постоянная. На инвариантном многообразии все решения — состояния равновесия. При b = 4 краевая задача (2.42), (2.43) имеет приближенные решения

$$u(t,x) = -2\alpha^2 t + \alpha \cos 2x + K, \qquad (2.48)$$

где K — произвольная постоянная.

Если b = 9, то система (2.47) имеет решение  $v_1 = v_2 = 0$ ,  $v_3 = \beta$ , где  $\beta$  – произвольная действительная постоянная, то есть краевая задача (2.42), (2.43) имеет приближенные решения

$$u(t,x) = -\frac{9\beta^2 t}{2} + \beta \cos 3x + K, \qquad (2.49)$$

где K — произвольная постоянная.

Возвратимся к общему случаю, когда  $b \neq 1, b \neq 4, b \neq 9$ . Из анализа системы (2.47) вытекает, что система (2.47) имеет 4 типа решений:  $V_1(v_1, v_2, v_3), V_2(v_1, v_2, v_3), V_3(v_1, v_2, v_3), V_4(v_1, v_2, v_3),$  где  $v_1, v_2, v_3 \neq 0$ , — следующего вида:

$$V_{1}(v_{1}, v_{2}, v_{3}): \begin{cases} v_{1} = \frac{\sqrt{2} \left(3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}\right) \sqrt{\left(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}\right)(b - 4)}}{5b - 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}}, \\ v_{2} = \frac{3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}}{4}, \\ v_{3} = -\frac{\sqrt{2} \left(b - 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}\right) \sqrt{\left(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}\right)(b - 4)}}{15b - 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}}; \end{cases}$$
(2.50)

$$V_{2}(v_{1}, v_{2}, v_{3}): \begin{cases} v_{1} = -\frac{\sqrt{2}\left(3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}\right)\sqrt{\left(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}\right)(b - 4)}}{5b - 77 + 3\sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}}, \\ v_{2} = \frac{3b - 27 + \sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}}{4}, \\ v_{3} = \frac{\sqrt{2}\left(b - 25 + \sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}\right)\sqrt{\left(77 - 5b - 3\sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}\right)(b - 4)}}{15b - 231 + 9\sqrt{621 - 42b - 3b^{2}}}); \end{cases}$$
(2.51)

$$V_{3}(v_{1}, v_{2}, v_{3}): \begin{cases} v_{1} = -\frac{\sqrt{2}\left(-3b+27+\sqrt{621-42b-3b^{2}}\right)\sqrt{\left(77-5b+3\sqrt{621-42b-3b^{2}}\right)(b-4)}}{-5b+77+3\sqrt{621-42b-3b^{2}}}, \\ v_{2} = \frac{3b-27-\sqrt{621-42b-3b^{2}}}{4}, \\ v_{3} = \frac{\sqrt{2}\left(-b+25+\sqrt{621-42b-3b^{2}}\right)\sqrt{\left(77-5b+3\sqrt{621-42b-3b^{2}}\right)(b-4)}}{-15b+231+9\sqrt{621-42b-3b^{2}}}; \end{cases}$$

$$(2.52)$$

$$V_4(v_1, v_2, v_3) : \begin{cases} v_1 = \frac{\sqrt{2} \left(-3b+27+\sqrt{621-42b-3b^2}\right) \sqrt{\left(77-5b+3\sqrt{621-42b-3b^2}\right)(b-4)}}{\frac{-5b+77+3\sqrt{621-42b-3b^2}}{4}}, \\ v_2 = \frac{3b-27-\sqrt{621-42b-3b^2}}{4}, \\ v_3 = -\frac{\sqrt{2} \left(-b+25+\sqrt{621-42b-3b^2}\right) \sqrt{\left(77-5b+3\sqrt{621-42b-3b^2}\right)(b-4)}}{-15b+231+9\sqrt{621-42b-3b^2}}. \end{cases}$$

$$(2.53)$$

Данные формулы написаны формально, как уже отмечалось ранее, они получены при  $b \neq 1, b \neq 4, b \neq 9$ . Проанализировав их подробнее, мы приходим к выводу, что  $b \neq \frac{85}{13}$ , данное значение обращает в нуль знаменатели координат  $v_1, v_3$  решений  $V_1(v_1, v_2, v_3), V_2(v_1, v_2, v_3)$ .

Решения  $V_1(v_1, v_2, v_3), V_2(v_1, v_2, v_3)$  существуют при  $b \in (1, 4) \cup \left(\frac{85}{13}, 9\right)$ , они устойчивы при  $b \in (1, 4)$ . Решения  $V_3(v_1, v_2, v_3), V_4(v_1, v_2, v_3)$  при  $b \in (1, 4)$  не существуют.

Решения  $V_3(v_1, v_2, v_3), V_4(v_1, v_2, v_3)$  существуют при  $b \in (4, 9)$ , и они при всех этих значениях b неустойчивы.

Для наглядности представим все решения на Рис. 2.1.

Рис. 2.1: Состояния равновесия системы (2.46). Здесь  $V_1(v_1, v_2, v_3)$  — одно из состояний равновесия, крестом обозначены области, где решения отсутствуют.

Далее приближенное решение u(t, x) краевой задачи (2.42), (2.43) будем искать в виде (2.44), но уже в случае разложения по пяти базисным функциям, то есть при m = 4.

Подставив сумму (2.44) при m = 4 в уравнение (2.42), получим

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u_0(t)}{\partial t} + \sum_{n=1}^4 \frac{\partial u_n(t)}{\partial t}\cos nx\right) = -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^4 u_n(t)\cos nx\right) - b\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^4 u_n(t)\cos nx\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^4 u_n(t)\cos nx\right)\right)^2.$$
(2.54)

Далее применим стандартную процедуру получения приближений Галеркина, в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для

нахождения  $u_j(t)$ :

$$\frac{du_0}{dt} = -\left(u_1^2 + 4u_2^2 + 9u_3^2 + 16u_4^2\right), \qquad (2.55)$$

$$\frac{du_1}{dt} = -u_1 + bu_1 - (6u_2u_3 + 12u_3u_4 + 2u_1u_2),$$

$$\frac{du_2}{dt} = -16u_2 + 4bu_2 + \left(\frac{u_1^2}{2} - 3u_1u_3 - 8u_2u_4\right),$$

$$\frac{du_3}{dt} = -81u_3 + 9bu_3 - 4u_1u_4 + 2u_1u_2,$$

$$\frac{du_4}{dt} = -256u_4 + 16bu_4 + 2u_2^2 + 3u_1u_3.$$
(2.56)

Проанализировав систему (2.56), мы приходим к выводу, что она может иметь состояния равновесия следующих видов:

1) 
$$\tilde{V}_1(0, +v_2, 0, v_4), \tilde{V}_2(0, -v_2, 0, v_4),$$
 где  
 $v_2 = 2\sqrt{-b^2 + 20b - 64}, v_4 = \frac{b}{2} - 2, b \in (4, 16).$ 

Для нахождения состояний равновесия, как обычно, следует изучить систему алгебраических уравнений

$$-v_{1} + bv_{1} - (6v_{2}v_{3} + 12v_{3}v_{4} + 2v_{1}v_{2}) = 0,$$
  

$$-16v_{2} + 4bv_{2} + \left(\frac{v_{1}^{2}}{2} - 3v_{1}v_{3} - 8v_{2}v_{4}\right) = 0,$$
  

$$-81v_{3} + 9bv_{3} - 4v_{1}v_{4} + 2v_{1}v_{2} = 0,$$
  

$$-256v_{4} + 16bv_{4} + 2v_{2}^{2} + 3v_{1}v_{3} = 0,$$
  
(2.57)

где  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  — координаты одного из состояний равновесия. Подставим значения  $v_1 = v_3 = 0$  в систему (2.57), получим два уравнения, которые далее необходимо решить

$$16v_2 + 4bv_2 - 8v_2v_4 = 0, (2.58)$$

$$-256v_4 + 16bv_4 + 2v_2^2 = 0. (2.59)$$

Выразив  $v_4$  из уравнения (2.58) при  $v_2 \neq 0$  и подставив в уравнение (2.59), получим равенство

$$4(b^2 - 20b + 64) + u_2^2 = 0,$$

из которого получаем, что  $u_2 = \pm 2\sqrt{-b^2 + 20b - 64}$ .

Исследовав устойчивость решений  $\tilde{V}_1(0, +v_2, 0, v_4), \tilde{V}_2(0, -v_2, 0, v_4)$  с применением теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, мы приходим к выводу, что решение  $\tilde{V}_1(0, +v_2, 0, v_4)$  устойчиво при  $b \in [4.036, 10.587]$ .

При b = 4.0349 одно из собственных значений равно нулю. При b = 10.5884 спектр устойчивости одного из состояний равновесия имеет два собственных значения, лежащих в левой полуплоскости и два чисто мнимых собственных значения. Решение  $\tilde{V}_2(0, -v_2, 0, v_4)$  устойчиво при  $b \in [5.282, 6.308]$ , при b = 5.281 одно из собственных значений равно нулю. При b = 6.3081 два собственных значения лежат в полуплоскости, выделяемой неравенством  $Re\lambda < 0$ , а еще два собственных значения спектра устойчивости будут чисто мнимыми.

2) Кроме решений  $\tilde{V}_1, \tilde{V}_2$  были найдены еще 4 решения с  $v_1 = 0$ ,  $v_3 \neq 0$  :  $\tilde{V}_3(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$ ,  $\tilde{V}_4(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$ ,  $\tilde{V}_5(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$ ,  $\tilde{V}_6(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$ . Данные решения были найдены с использованием программы «Wolfram Mathematica». Решения  $\tilde{V}_3(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$  существуют при  $b \in (1, 4.034] \cup [5.282, 16)$ . Решения  $\tilde{V}_4(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$  существуют при  $b \in (1, 4.034]$ , эти решения являются устойчивыми при  $b \in (1, 4.034]$ . Решения  $\tilde{V}_4(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$  существуют при  $b \in (9, 16)$ , эти решения являются неустойчивыми. Решения  $\tilde{V}_5(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$  существуют при  $b \in [12.5948, 13.016]$ , эти решения являются неустойчивыми. Решения  $\tilde{V}_6(\pm v_1, v_2, v_3, \mp v_4)$  существуют при  $b \in [12.5948, 16)$ , эти решения являются неустойчивыми. Формулы для  $v_1, v_2, v_3, v_4$  для этого случая в данной статье не приводятся из-за их громоздкости.

3) Нулевое решение является устойчивым при b < 1. Для того чтобы показать это, составим матрицу Якоби для системы (2.57)

$$J = \begin{pmatrix} -1+b-2v_2 & -2v_1-6v_3 & -6v_2-12v_4 & -12v_3 \\ v_1-3v_3 & -16+4b-8v_4 & -3v_1 & -8v_2 \\ 2v_2-4v_4 & 2v_1 & -81+9b & -4v_1 \\ 3v_3 & 4v_2 & 3v_1 & -256+16b \end{pmatrix};$$

подставив в нее значения  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$ , получим матрицу

$$J(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} -1+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -16+4b & 0 & 0 \\ 0 & -81+9b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -256+16b \end{pmatrix}$$

Далее найдем собственные значения матрицы J(0, 0, 0, 0). Они равны следующим значениям:  $\lambda_1 = 16(b - 16), \lambda_2 = 9(b - 9), \lambda_3 = 4(b - 4), \lambda_4 = b - 1$ . Из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует, что нулевое решение будет асимптотически устойчивым, если собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  имеют вещественную часть  $Re\lambda_i < 0, i = 1...4$ . Откуда находим, что последнее неравенство выполняется при b < 1.

4) При b = 9 существует решение  $(0, 0, v_3, 0)$ , где  $v_3$  принимает любое значение, а также существуют решения  $(0, \pm 11.8321, 0, 2.5)$ . Решение (0, +11.8321, 0, 2.5) является устойчивым, решение (0, -11.8321, 0, 2.5) — неустойчивое.

5) Кроме отмеченных решений, которые были найдены при  $b \neq 1, b \neq 4, b \neq 9, b \neq 16$  нетрудно отметить, что при b = 16 есть решение  $\tilde{V}_1(0, 0, 0, v_4)$ , где  $v_4$  принимает любое действительное значение. Соответствующее решение изучаемой краевой задачи имеет вид

$$u(t,x) = -\frac{v_4^2 t}{2} + v_4 \cos 4x.$$

Для наглядности представим все решения на Рис. 2.2:



Рис. 2.2: Состояния равновесия системы (2.56). Здесь  $\tilde{V}_1(v_1, v_2, v_3, v_4)$  — одно из состояний равновесия.

Каждому состоянию равновесия  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  системы (2.53) соответствует приближенное решение краевой задачи (2.39), (2.40) вида

$$u(t,x) \approx \frac{1}{2}(v_1^2 + 4v_2^2 + 9v_3^2 + 16v_4^2)t + v_1\cos x + v_2\cos 2x + v_3\cos 3x + v_4\cos 4x + K,$$

где K — произвольная действительная постоянная. Если  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2 \neq 0$ , то все эти решения будут состояниями равновесия второго рода.

### 2.3.2 Случай краевых условий Дирихле

В данном подразделе будем изучать нелинейную краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad (2.60)$$

$$u(t,0) = u(t,\pi) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,\pi) = 0, \qquad (2.61)$$

где  $u = u(t, x), x \in [0, \pi], t \ge 0, b, c$  — некоторые действительные постоянные  $(c \ne 0)$ . При этом без нарушения общности можно считать, что c = 1. При всех допустимых  $t \in [0, T]$  справедливо представление решения в виде ряда

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx,$$

так как на отрезке  $[0, \pi]$  система функций  $\sin x, \sin 2x...$  формирует полную ортогональную систему. При этом в нашем случае

$$u_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \sin kx \, dx, \ k = 1, 2, \dots$$

Приближенные решения можно и целесообразно искать в виде

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{m} u_n(t) \sin nx.$$

### Редукция с помощью метода Галеркина

Далее будет рассмотрен вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия второго рода.

В данном разделе приближенное решение u(t,x) краевой задачи (2.60), (2.61) будем искать в виде

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{m} u_n(t) \sin nx,$$
(2.62)

где

$$u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x) \sin nx \, dx, \ n = 1, 2..., m.$$

Сумма (2.62) стремится к точному решению краевой задачи (2.60), (2.61)

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin nx$$

при  $m \to \infty$ .

Подставив ряд (2.62) при m = 3 в уравнение (2.60) получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{n=1}^{3} u_n(t) \sin nx \right) = -\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( \sum_{n=1}^{3} u_n(t) \sin nx \right) - b\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{n=1}^{3} u_n(t) \sin nx \right) - \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{n=1}^{3} u_n(t) \sin nx \right) \right)^2.$$

Далее применим стандартную процедуру получения приближений Галеркина, в результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения  $u_i(t)$ 

$$\frac{du_1}{dt} = (b-1)u_1 - \frac{4u_1^2}{3\pi} - \frac{112u_2^2}{15\pi} + \frac{24u_1u_3}{5\pi} - \frac{612u_3^2}{35\pi}, 
\frac{du_2}{dt} = 4(b-4)u_2 - \frac{32u_1u_2}{15\pi} - \frac{96u_2u_3}{7\pi}, 
\frac{du_3}{dt} = 9(b-9)u_3 - \frac{28u_1^2}{15\pi} + \frac{16u_2^2}{21\pi} - \frac{72u_1u_3}{35\pi} - \frac{4u_3^2}{\pi},$$
(2.63)

где точкой обозначена производная по t.

У системы (2.63) интерес представляют ненулевые состояния равновесия. Таким решениям соответствуют приближенные пространственно неоднородные решения краевой задачи (2.60), (2.61)

$$u(t,x) = v_1 \cos x + v_2 \cos 2x + v_3 \cos 3x,$$

где  $(v_1, v_2, v_3)$  — координаты одного из состояний равновесия системы (2.63).

В свою очередь, нахождение состояний равновесия у системы дифференциальных уравнений (2.63) приводит к необходимости решения системы трех алгебраических уравнений

$$(b-1) v_{1} = \frac{4v_{1}^{2}}{3\pi} + \frac{112v_{2}^{2}}{15\pi} - \frac{24v_{1}v_{3}}{5\pi} + \frac{612v_{3}^{2}}{35\pi},$$
  

$$4 (b-4) v_{2} = -4 (b-4) v_{2} + \frac{32v_{1}v_{2}}{15\pi} + \frac{96v_{2}v_{3}}{7\pi},$$
  

$$9 (b-9) v_{3} = \frac{28v_{1}^{2}}{15\pi} - \frac{16v_{2}^{2}}{21\pi} + \frac{72v_{1}v_{3}}{35\pi} + \frac{4v_{3}^{2}}{\pi},$$
  
(2.64)

у которой, безусловно, есть решение  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ , но интерес представляют иные ее решения. Нулевое состояние равновесия системы (2.63) устойчиво при  $b \in (-\infty, 1)$  и теряет устойчивость дивергентным образом (при b = 1 одно из собственных значений равно нулю). Исследование устойчивости проводилось с использованием теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

### Анализ галеркинских приближений

Анализ системы (2.64) показывает, что при b = 1, b = 9 она не имеет действительных решений, отличных от нуля. Действительно, пусть сначала  $b \neq 1, b \neq 9$ . Эти особые значения для параметра *b* рассмотрим отдельно.

При b = 1, b = 9 нетрудно установить наличие только нулевого решения системы (2.63).

Проанализировав систему (2.63), мы приходим к выводу, что она может иметь решения следующих видов:

1)  $V_1(v_1, +v_2, v_3), V_2(v_1, -v_2, v_3)$ , которые существуют при  $b \in (-\infty, -22.9] \cup (4, 4.48] \cup [12.56, \infty)$ . Данные решения были найдены с использованием программы «Wolfram Mathematica». Исследовав устойчивость решений  $V_1(v_1, +v_2, v_3), V_2(v_1, -v_2, v_3)$  с применением теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, мы приходим к выводу, что эти решения неустойчивы.

2)  $V_3(v_1, 0, v_3)$ . Данные решения существуют при  $b \in (-\infty, 1) \cup (1, 9) \cup (9, \infty)$ . Эти решения являются устойчивыми при  $b \in (1, 4.488)$  и теряют устойчивость дивергентным образом. При b = 4.488 одно из собственных значений равно нулю.

3) Нулевое решение, которое является устойчивым при b < 1. Для того чтобы показать это, составим матрицу Якоби для системы (2.63)

$$\begin{pmatrix} -1+b-\frac{8v_1}{3\pi}+\frac{24v_3}{5\pi} & -\frac{224v_2}{15\pi} & \frac{24v_1}{5\pi}-\frac{1224v_3}{35\pi} \\ -\frac{32v_2}{15\pi} & -16+4b-\frac{32v_1}{15\pi}-\frac{96v_3}{7\pi} & -\frac{-\frac{96v_2}{7\pi}}{7\pi} \\ -\frac{56v_1}{15\pi}-\frac{72v_3}{35\pi} & \frac{32v_2}{21\pi} & -81+9b-\frac{72v_1}{35\pi}-\frac{8v_3}{\pi} \end{pmatrix};$$

подставив в нее значения  $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$ , получим матрицу

$$J(0,0,0) = \begin{pmatrix} -1+b & 0 & 0\\ 0 & -16+4b & 0\\ 0 & 0 & -81+9b \end{pmatrix}.$$

Далее найдем собственные значения матрицы J(0, 0, 0). Они равны следующим значениям:  $\lambda_1 = 9(b - 9), \ \lambda_2 = 4(b - 4), \ \lambda_3 = b - 1$ . Из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению следует, что нулевое решение будет асимптотически устойчивым, если собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  имеют вещественную часть  $Re\lambda_i < 0, \ i = 1...3$ . Откуда находим, что последнее неравенство выполняется при b < 1.

### 2.3.3 Некоторые замечания

Сравним некоторые из результатов, полученных на базе применения метода Галеркина с результатами бифуркационного анализа краевой задачи (2.42), (2.43) с использованием строго обоснованных методов качественной теории динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (2.46), для которой был исследован вопрос о существовании и устойчивости состояний равновесия. Вопрос о существовании у нее состояний равновесия был сведен к нахождению решений у системы алгебраических уравнений (2.47). В работе было показано существование у этой системы решений при  $b \in (1, 9]$ . Непосредственный анализ краевой задачи (2.42), (2.43) показал, что при  $b = 9 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \ 0 < \varepsilon_0 << 1$  краевая задача имеет нетривиальные состояния равновесия второго рода. Для этого следует использовать методику и результаты работ [19], [30].

Отметим также, что при рассмотрении краевой задачи (2.42), (2.43), u(t, x), для которой справедливо следующее:

$$u(0,x) = f_3(x) = \sum_{p=1}^{\infty} a_{3p} \cos 3px,$$

где  $f_3(x) \in W_2^4[0,\pi]$ , то есть пространству Соболева таких функций, у которых  $f(x), f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x) \in L_2(0,\pi)$ , то оказывается, что для всех таких решений справедливо равенство

$$\lim_{t \to \infty} u(t, x) = 0$$

или в иной форме записи

$$\lim_{t \to \infty} u_{3p}(t) = 0, \ p = 1, 2, 3...,$$

где  $u(t,x) = \sum_{p=1}^{\infty} u_{3p}(t) \cos 3px.$ 

С другой стороны, анализ системы дифференциальных уравнений (2.46) при b = 9 показывает, что она имеет состояние равновесия  $u_1 = u_2 = 0$ ,  $u_3 = \alpha$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$  — произвольная действительная постоянная и, следовательно, значение  $u_3$  не отрицательно. Данные два замечания показывают ограниченные возможности анализа краевой задачи (2.42), (2.43) на основе использования метода Галеркина.

# Глава З

# О характере локальных бифуркаций в различных областях в случае краевых условий Неймана и Дирихле

### 3.1 Постановка задачи

В главе 1 были исследованы различные варианты краевой задачи (1.1), (1.2). Показано, что у нее возникают, или точнее, могут появиться пространственно неоднородные решения и в том числе устойчивые. Они бифурцируют из нулевого состояния равновесия при смене им устойчивости. Для бифурцирующих решений приведены асимптотические формулы. В главе 1 изучен вопрос об устойчивости однородных состояний равновесия. В частности, выведены условия на коэффициенты, при которых происходит потеря устойчивости. В случаях, близких к критическим, для значений параметров рассмотрены задачи о локальных бифуркациях.

В этой главе будет изучаться близкая задача к той, что была рассмотрена в первой главе. Будет детально рассмотрен вопрос о влиянии геометрических характеристик и выбора краевых условий на структуры решений изучаемой краевой задачи. Обобщенное уравнение Курамото-Сивашинского будем рассматривать вместе с однородными краевыми условиями Неймана и Дирихле в трех областях: прямоугольнике, квадрате и равнобедренном треугольнике.

После преобразований, перенормировок задача может быть сведена к анализу следующего нелинейного дифференциального уравнения с частными производными параболического типа:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = -v\Delta w - \delta\Delta^2 w + \gamma \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y_1} \right)^2 \right), \tag{3.1}$$

где  $w = w(\tau, x_1, y_1), \ \delta > 0, \ \gamma \neq 0, \ v \in \mathbb{R}, \ (x_1, y_1) \in D \subset \mathbb{R}^2$ . Ниже будем в качестве области D рассматривать прямоугольник

$$D = \{ (x_1, y_1), \ 0 < x_1 < l_1, \ 0 < y_1 < l_2 \}, \ l_1, l_2 > 0.$$

В частности, при  $l_1 = l_2$  имеем квадрат.

Положим в уравнении (3.1)

$$\tau = d_1 t, \ w = d_2 u, \ x_1 = \frac{l_1}{\pi} x, \ y_1 = \frac{l_2}{\pi} y, \ \mu = \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2,$$
$$d_1 = \left(\frac{l_1}{\pi}\right)^4 \frac{1}{\delta}, \ d_2 = -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \delta.$$

Последние нормировки (замены) приводят уравнение (3.1) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -b\Delta_{\mu}u - \Delta_{\mu}^{2}u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}, \qquad (3.2)$$

где  $u = u(t, x, y), \ \Delta_{\mu} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$  то есть  $\Delta_1 u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$  а  $b = \frac{v}{\delta} \left(\frac{l_1}{\pi}\right)^2.$ 

## 3.2 Случай однородных краевых условий Неймана

В первой части этой главы уравнение (3.2) будем рассматривать вместе со следующими краевыми условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0,$$
(3.3)

то есть однородными краевыми условиями Неймана.

Кроме основной задачи в третьей части раздела будет рассмотрено уравнение (3.2) при  $\mu = 1$  вместе с однородными краевыми условиями Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0, \ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x=y} = 0,$$
  
$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{y=0} = 0, \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=\pi} = 0, \ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)\Big|_{x=y} = 0.$$
  
(3.4)

В данном случае рассматривается краевая задача Неймана для области

$$D_{\Delta} = \{ (x, y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant x \},\$$

то есть для равнобедренного треугольника.

Напомним, что уравнение (3.1), (3.2) принято называть обобщенным уравнением Курамото-Сивашинского. В разделе 2.2 будет рассмотрена нелинейная краевая задача (3.2), (3.3) при  $\mu > 1$ . Случай квадрата ( $\mu = 1$ ) заслуживает отдельного анализа. ему будет посвящен раздел 2.3. Вариант  $\mu < 1$  сводится к первому ( $\mu > 1$ ) переобозначением  $x \to y, y \to x$ . Наконец, вариант треугольника будет изучен в разделе 2.4.

Отметим также, что нелинейные краевые задачи (3.2), (3.3), а также (3.2), (3.4) имеют решения вида u(t, x, y) = const, где const — произвольная действительная постоянная. Более того, обе краевые задачи инвариантны относительно замены  $u \rightarrow u + const$ . Поэтому для определенности далее будет идти речь об окрестности нулевого состояния равновесия. При этом окрестность будем понимать в смысле нормы фазового пространства решений краевой задачи (пространства начальных условий).

Положим

$$u(0, x, y) = f(x, y).$$
 (3.5)

Будем считать, что  $f(x,y) \in \overset{\circ}{W_2^4}(\overline{D})$ , где  $\overset{\circ}{W_2^4}(\overline{D})$  — подпространство пространства Соболева  $W_2^4(D)$  (определение подпространства  $\overset{\circ}{W_2^4}(\overline{D})$ ) было изложено в главе 1), где

$$\overline{D} = \{ (x, y), \ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant \pi \}$$

в случае краевой задачи (3.2), (3.3) и  $f(x,y) \in W_2^4(\overline{D}_\Delta)$ , где

$$D_{\Delta} = \{ (x, y), \ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ 0 \leqslant y \leqslant x \}$$

во втором случае (то есть в случае краевой задачи (3.2), (3.4)). Наконец, через  $W_2^4(\overline{D})$  ( $W_2^4(\overline{D}_{\Delta})$ ) обозначено пространство Соболева [41], то есть

$$f(x,y) \in L_2(\overline{D}) \ (f(x,y) \in L_2(\overline{D}_\Delta)),$$

а также интегрируемы с квадратом все частные производные f(x, y) до четвертого порядка включительно. Подчеркнем, что в силу теорем вложения

$$f(x,y) \in C^2(\overline{D}) \ (C^2(\overline{D_\Delta})).$$

Выбор краевых условий (3.3) в случае, когда область является прямоугольником или их аналогом (3.4) в случае треугольника был сделан под влияниям, пожалуй, наиболее известных работ [51], [61], в которых рассматривалось уравнение Курамото-Сивашинского. В них уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = 0, \ (u = u(t, x))$$

было рассмотрено вместе с краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,l) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,0) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t,l) = 0,$$

и было доказано существование глобального аттрактора для решений последней краевой задачи, но не был изучен вопрос о структуре решений, принадлежащих аттрактору. Тем самым, данная глава является естественным продолжением этих работ, а также служит естественным дополнением к предыдущей главе. Ниже, в разделе 3.2.1, будет рассмотрена близкая задача к той, что была рассмотрена в предыдущей главе и детально изучен вопрос о влиянии геометрических характеристик на структуры решений изучаемой краевой задачи.

### 3.2.1 Вариант прямоугольника

В этом подразделе нелинейная краевая задача (3.2), (3.3) будет рассмотрена при  $\mu > 1$ . Сначала рассмотрим линеаризованный ее вариант

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \equiv -b \ \Delta_{\mu}u - \ \Delta_{\mu}^{2}u, 
\Delta_{\mu}u = \frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} + \mu \frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}},$$
(3.6)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = 0,\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0.$$
(3.7)

Линейный дифференциальный оператор  $A = A(b, \mu)$  при всех значениях *b* является симметричным линейным оператором, который имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_{k,m} = \lambda_{k,m}(b) = b \ (k^2 + \mu m^2) - (k^2 + \mu m^2)^2$$
, где  $k, m = 0, 1, 2, ...$ 

отвечающих собственным функциям  $h_{k,m} = \cos kx \cos my$ , которые в пространстве  $L_2(D)$  образуют полную ортогональную систему

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} h_{k_1,m_1}(x,y) h_{k_2,m_2}(x,y) \, dx \, dy = 0$$

при  $(k_1 - k_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 \neq 0.$ 

Линейный дифференциальный оператор A(b) является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $L_2(D)$ . Из двух предыдущих замечаний вытекает, что при выполнении неравенства  $\lambda_{k,m}(b) \leq 0$  при всех k, m решения краевой задачи (3.6), (3.7) устойчивы ( $\lambda_{0,0}(b) = 0$  при всех b). Если при некоторых  $k = k_1, m = m_1$  выполнено неравенство  $\lambda_{k_1,m_1}(b) > 0$ , то решения краевой задачи (3.6), (3.7) неустойчивы.

Отметим, что при b<1справедливы неравенства

$$\lambda_{k,m}(b) < 0$$
, если  $k^2 + m^2 \ge 1$ ,

а при b = 1 имеем  $\lambda_{0,0}(1) = 0$ ,  $\lambda_{1,0}(1) = 0$ , а остальные собственные значения линейного дифференциального оператора  $A(1,\mu)$  лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенствами  $\lambda_{k,m}(1) \leq -\gamma_0 < 0$ , где в качестве  $\gamma_0$  можно выбрать число min $\{12, \mu^2 - \mu\}$ .

Далее будем изучать уже нелинейную задачу (3.2), (3.3) при  $b = 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1$  может быть записана в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(\varepsilon)u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (3.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0, \tag{3.9}$$

где

$$A(\varepsilon)u = -\Delta_{\mu}u - \varepsilon\Delta_{\mu}u - \Delta_{\mu}^{2}u = A_{0}u + \varepsilon Bu,$$

то есть

$$A_0 u = A(0,\mu), \text{ a } B u = -\Delta_\mu u.$$

Краевая задача (3.8), (3.9) при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , если  $\varepsilon_0$  достаточно малая положительная постоянная, имеет локально инвариантное притягивающее многообразие  $M_2(\varepsilon)$ , размерность которого равна 2 (центральное многообразие). Решения краевой задачи (3.8), (3.9), принадлежащие достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия и  $M_2(\varepsilon)$  удовлетворяют системе из двух обыкновенных уравнений

$$\psi'(s) = F_0(z(s), \varepsilon),$$
  

$$z'(s) = F_1(z(\varepsilon), \varepsilon),$$
(3.10)

где  $s = \varepsilon t$  – «медленное» время, функции  $F_0, F_1$  достаточно гладко зависят от аргументов, если  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  (смотри [15], [53]). Систему дифференциальных уравнений (3.10) принято называть нормальной формой. Далее будет реализован алгоритм построения правых частей системы дифференциальных уравнений (3.10). Аналогичный алгоритм был использован в работах [15], [30], [53], где изучалось уравнение (3.2), но при ином выборе краевых условий.

Положим

$$u(t, x, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} u_1(x, y, z) + \varepsilon u_2(x, y, z) + \varepsilon^{3/2} u_3(x, y, z) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (3.11)$$

где  $u_1(x, y, z) = zcosx$ , функции  $u_2(x, y, z)$ ,  $u_3(x, y, z) \in W$ . Через W обозначен класс следующих функций:  $g(x, y, z) \in W$ , если выполняются следующие свойства:

1. при фиксированном z функция  $g(x, y, z) \in W_2^4(\overline{D});$ 

2. функция g(x, y, z) удовлетворяет краевым условиям (3.7);

3. выполняются равенства

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} g(x, y, z) dx dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} g(x, y, z) cosx dx dy = 0;$$

### 4. она имеет непрерывные частные производные по переменной z.

Равенство (3.11) следует интерпретировать как уравнение интегрального многообразия  $M_2(\varepsilon)$ , если  $\psi = \psi(s)$ , z = z(s) — решения нормальной формы (3.10) [13], [15], [53], [56], [57].

Подстановка суммы (3.11) в краевую задачу (3.8), (3.9) и выделение слагаемых при одинаковых степенях  $\varepsilon : \varepsilon, \varepsilon^{3/2}$  приводит к формированию линейных неоднородных краевых задач для определения  $u_2, u_3$ .

Для определения  $u_2 = u_2(x, y, z)$  получаем краевую задачу

$$\psi' = A_0 u_2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2,$$
(3.12)

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0,\ \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}\Big|_{x=0,\ y=0} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0.$$
(3.13)

Здесь  $\psi' = \psi'(s) = \frac{d\psi}{ds} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t} = \varepsilon z' cosx\right)$ . Уравнение (3.12) можно перепи-

сать в иной форме

$$\Delta_{\mu}u_{2} + \Delta_{\mu}^{2}u_{2} = z^{2}sin^{2}x - \psi'(s). \qquad (3.14)$$

Краевая задача (3.12), (3.13) (или (3.13), (3.14)), при анализе которой следует рассматривать z = z(s) как параметр, имеет единственное решение  $u_2(x, y, z) \in W$ , если выполнены условия разрешимости для данной краевой задачи (смотри, замечание 3.1). Их использование приводит к равенству

$$\psi'(s) = \frac{z^2}{2}.$$

При этом соответствующее решение

$$u_2(x, y, z) = -\frac{1}{24}z^2\cos 2x.$$

Замечание 3.1. Неоднородное уравнение  $A_0v = \varphi(x,y), v = v(x,y)$  имеет решение, если выполнены условия разрешимости

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \varphi(x,y) dx dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \varphi(x,y) \cos x \, dx dy = 0,$$

то есть функция  $\varphi(x, y)$  ортогональна в пространстве  $L_2(D)$  функциям 1,  $\cos x$ , принадлежащим ядру линейного дифференциального оператора A.

На третьем шаге, приравнивая члены при  $\varepsilon^{3/2}$ , получаем неоднородную краевую задачу для определения  $u_3(x, y, z)$ 

$$A_0 u_3 = \varphi(x, y, z), \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}\Big|_{x=0, x=\pi} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}\Big|_{x=0, x=\pi} = 0,$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial y}\Big|_{y=0, y=\pi} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}\Big|_{y=0, y=\pi} = 0,$$
(3.16)

где в данном случае

$$\varphi(x, y, z) = -2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + z'\cos x - z\cos x.$$

Здесь  $z' = \frac{dz}{ds}$ . Из условий разрешимости неоднородной краевой задачи (3.15), (3.16) вытекает, что с необходимостью

$$z' = z - \frac{z^3}{12}$$

решение этой краевой задачи из W определяется однозначно

$$u_3(x, y, z) = \frac{z^3}{864} \cos 3x.$$

На данном этапе уже получена главная часть нормальной формы, то есть найдены  $F_0(z,0), F_1(z,0)$ . Итак,

$$\psi' = \frac{z^2}{2},\tag{3.17}$$

$$z' = z - \frac{z^3}{12}.\tag{3.18}$$

Правые части дифференциальных уравнений (3.17), (3.18) выписаны с точностью до членов  $O(\varepsilon)$ . Уравнение (3.18) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия  $S_{\pm}$ , где  $S_{\pm}$ :  $z_{\pm} = 2\sqrt{3}$ ,  $S_{\pm}$ :  $z_{\pm} = -2\sqrt{3}$ . Этим состояниям равновесия дифференциального уравнения (3.18) соответствуют решения  $l_{\pm}$  уравнения (3.17), где

$$l_+: \psi_+(s) = 6s + \alpha_1, \ l_-: \psi_-(s) = 6s + \alpha_2, \ \alpha_1, \ \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Пусть u(t, x, y) — какое-либо решение краевой задачи (3.8), (3.9). Повторяя достаточно стандартные конструкции первой и второй главы диссертационной работы, можно представить это решение в форме

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = M(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} u(t, x, y) dx,$$

а функция w(t, x, y), следовательно, имеет нулевое пространственное среднее, то есть M(w) = 0. Используя такое представление для u(t, x, y), вид правой части уравнения (3.8) можно и полезно переписать в виде обыкновенного дифференциального уравнения для v(t)

$$\dot{v} = \psi(w), \ \psi(w) = M\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)$$
(3.19)

и вспомогательной краевой задачи для w

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(\varepsilon)u + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \qquad (3.20)$$

где w(t, x, y) удовлетворяет краевым условиям (3.9), а также равенству

$$M(w) = 0.$$
 (3.21)

Из результатов работ [15], [53] вытекает справедливость утверждения.

**Теорема 3.1.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  состояниям равновесия  $S_{\pm}$  дифференциального уравнения (3.18) соответствуют два асимптотически устойчивых пространственно неоднородных решения краевой задачи (3.20), (3.9), (3.21)

$$w_{\pm}(x,\varepsilon) = \pm 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2}\cos x - \frac{1}{2}\varepsilon\cos 2x \pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2}\cos 3x + o(\varepsilon^{3/2}).$$

Этим состояниям равновесия вспомогательной краевой задачи (3.20), (3.9), (3.21) соответствуют два однопараметрических семейства решений

$$u_{\pm}(t, x, \varepsilon) = v_{\pm}(t, \varepsilon) + w_{\pm}(x, \varepsilon),$$

где функции  $v_{\pm}(t,\varepsilon)$  находим после интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения (3.19). При этом

$$v_{\pm}(t,\varepsilon) = K_{\pm} + (6\varepsilon + o(\varepsilon))t_{\pm}$$

где функции  $w_{\pm}(x,\varepsilon)$  были указаны выше, а  $K_{\pm} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Напомним, что решения  $u_{\pm}(t,x,\varepsilon)$  — состояния равновесия второго рода.

### 3.2.2 Квадратная форма области

Пусть изначально был квадрат, то есть  $l_1 = l_2$ . Тогда  $\mu = 1$  и линейный дифференциальный оператор A(b, 1) при b = 1 имеет трехкратное нулевое собственное значение, которому соответствуют три линейно независимые собственные функции:  $1, \cos x, \cos y$ .

В краевой задаче (3.2), (3.3) положим

$$b = 1 + \gamma_1 \varepsilon, \ \mu = 1 + \gamma_2 \varepsilon, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},$$

а  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , то есть рассмотрим область D, близкую к квадратной области. В результате получим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + \varepsilon B_1 u + \varepsilon^2 B_2 u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \gamma_2 \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0,$$
(3.23)

где в данном случае

$$Au = -\Delta u - \Delta^2 u, \ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$B_1 u = -\gamma_1 \Delta u - \gamma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\gamma_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\gamma_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4},$$
$$B_2 u = -\gamma_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Нелинейная краевая задача (3.22), (3.23) при достаточно малых  $\varepsilon$  имеет трехмерное локально инвариантное (центральное) многообразие  $M_3(\varepsilon)$ . Решения, принадлежащие  $M_3(\varepsilon)$  (смотри [13], [15], [53], [56], [57]), как и ранее, будем искать в следующем виде:

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} u_1 + \varepsilon u_2 + \varepsilon^{3/2} u_3 + o(\varepsilon^{3/2}), \qquad (3.24)$$

где

$$u_1 = u_1(x, y, z_1, z_2) = z_1(s) \cos x + z_2(s) \cos y, s = \varepsilon t.$$

Функции  $u_k = u_k(x, y, z_1, z_2) \subset W$  (k = 2, 3). Здесь W пространство функций, для которых справедливы следующие свойства:

- 1) функции  $\varphi(x, y, z_1, z_2) \in W$  достаточно гладко зависят от  $x, y, z_1, z_2$ ;
- 2) при фиксированных  $z_1, z_2$  функция  $\varphi(x, y, z_1, z_2) \in W_2^4(\overline{D});$
- 3) удовлетворяют краевым условиям (3.23);

4) для таких функций справедливы равенства

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \varphi(x, y, z_1, z_2) \, dx \, dy = \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \varphi(x, y, z_1, z_2) \cos x \, dx \, dy =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \varphi(x, y, z_1, z_2) \cos y \, dy dx = 0.$$

Как и в предыдущем разделе, после подстановки суммы (3.24) в краевую задачу (3.22), (3.23) и приравнивая слагаемые при  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^{3/2}$  получим неоднородные линейные краевые задачи для определения  $u_2, u_3$ . При их выписывании учтено, что  $\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial u_k}{\partial s} \varepsilon$ . Итак,

$$\psi' = Au_2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2,$$
(3.25)

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial u_2}{\partial y}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0, \tag{3.26}$$

$$z_1'\cos x + z_2'\cos y = Au_3 + 2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) + B_1u_1, \qquad (3.27)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial x}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial x^3}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial u_3}{\partial y}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = \frac{\partial^3 u_3}{\partial y^3}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0.$$
(3.28)

Из условий разрешимости краевой задачи (3.25), (3.26) вытекает, что

$$\psi' = \frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2), \tag{3.29}$$

а из условий разрешимости краевой задачи (3.27), (3.28) получаем

$$z_1' = \gamma_1 z_1 - \frac{1}{12} z_1^3, \tag{3.30}$$

$$z_2' = (\gamma_1 - \gamma_2)z_2 - \frac{1}{12}z_2^3. \tag{3.31}$$

Систему (3.29)–(3.31), как и ранее, будем называть нормальной формой («укороченной» нормальной формой). При этом соответствующие решения краевых задач (3.25), (3.26) и (3.27), (3.28) имеют следующий вид:

$$u_{2} = u_{2}(x, y, z_{1}, z_{2}) = -\frac{z_{1}^{2}}{24}\cos 2x - \frac{z_{2}^{2}}{24}\cos 2y,$$
$$u_{3} = u_{3}(x, y, z_{1}, z_{2}) = \frac{z_{1}^{3}}{864}\cos 3x + \frac{z_{2}^{3}}{864}\cos 3y.$$

Рассмотрим сначала замкнутую подсистему дифференциальных уравнений (3.30), (3.31).

**Лемма 3.1.** Система (3.30), (3.31) может иметь следующие ненулевые состояния равновесия:

$$S_{1}: z_{1} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, z_{2} = 0;$$

$$S_{2}: z_{1} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, z_{2} = 0;$$

$$S_{3}: z_{2} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}}, z_{1} = 0;$$

$$S_{4}: z_{2} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}}, z_{1} = 0;$$

$$S_{5}: z_{1} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, z_{2} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}};$$

$$S_{6}: z_{1} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, z_{2} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}};$$

$$S_{7}: z_{1} = 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, z_{2} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}};$$

$$S_{8}: z_{1} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1}}, z_{2} = -2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_{1} - \gamma_{2}};$$

Состояния равновесия  $S_1, S_2$  существуют при  $\gamma_1 > 0$ . Если  $\gamma_1 > 0$ , а  $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$ , то асимптотически устойчивы состояния равновесия  $S_1, S_2$ , а остальные состояния равновесия  $S_3, S_4, S_5, S_6, S_7, S_8$  и нулевое состояние равновесия — неустойчивы.

Состояния равновесия  $S_3, S_4$  существуют при  $\gamma_1 - \gamma_2 > 0$ . Наконец, при  $\gamma_1 < 0, \gamma_1 - \gamma_2 > 0$  асимптотически устойчивы  $S_3, S_4$  а остальные состояния равновесия  $S_1, S_2, S_5, S_6, S_7, S_8$  и нулевое — неустойчивы.

Состояния равновесия  $S_5, S_6, S_7, S_8$  существуют при  $\gamma_1 > 0, \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ . Если  $\gamma_1 > 0, \gamma_1 - \gamma_2 > 0$ , то состояния равновесия  $S_5, S_6, S_7, S_8$  асимптотически устойчивы, а остальные состояния равновесия  $S_1, S_2, S_3, S_4$  и нулевое неустойчивы.

Подчеркнем, что при  $\gamma_1 \leq 0, \gamma_1 - \gamma_2 \leq 0$  ненулевых состояний равновесия нет, а нулевое состояние равновесия будет асимптотически устойчиво.

Пусть u(t, x, y) — решение краевой задачи (3.22), (3.23). Положим

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$v(t) = M(u) = \frac{1}{\pi^2} \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} u(t, x, y) dx dy,$$

a

$$M(w) \equiv 0.$$

Как и в предыдущих разделах вместо краевой задачи (3.22), (3.23) рассмотрим уравнение

$$\dot{v} = \psi(w), \qquad (3.32)$$
$$\psi(w) = M\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \gamma_2 \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right)$$

и краевую задачу для w(t, x, y)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw + \varepsilon B_1 w + \varepsilon^2 B_2 w + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \gamma_2 \varepsilon \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \psi(w), \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0,x=\pi} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=0,x=\pi} = \frac{\partial w}{\partial y}\Big|_{y=0,y=\pi} = \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\Big|_{y=0,y=\pi} = 0, \quad (3.34)$$
$$M(w) = 0.$$

Используя результаты работ [5,6,9,10,12,15], можно обосновать справедливость утверждения.

**Теорема 3.2.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  краевая задача (3.33), (3.23), (3.34) имеет состояния равновесия

$$w_j(x, y, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} (\eta_1 \cos x + \eta_2 \cos y) - \frac{1}{24} \varepsilon (\eta_1^2 \cos 2x + \eta_2^2 \cos 2y) + \frac{1}{864} \varepsilon^{3/2} (\eta_1^3 \cos 3x + \eta_2^3 \cos 3y) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

соответствующие состояниям равновесия  $S_j$  (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.30), (3.31) с наследованием свойств устойчивости, где  $(\eta_1, \eta_2)$  — координаты состояния равновесия  $S_j$ .

Каждому состоянию равновесия  $w_j(x, y, \varepsilon)$ , где j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 вспомогательной краевой задачи (3.33), (3.23), (3.34) соответствует однопараметрическое решение основной краевой задачи (3.22), (3.23).

$$u(t, x, y, \varepsilon) = K_j + \left(\frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2)\varepsilon + o(\varepsilon)\right)t + w_j(x, y, \varepsilon),$$

где функции  $w_j(x,y,\varepsilon)$  указаны выше, а  $K_j \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Подчеркнем, что состоянию равновесия  $S_j, j = 5, 6, 7, 8$  соответствует состояние равновесия краевой задачи (3.1), (3.2), зависящее от двух пространственных переменных x и y. В остальных случаях такое состояние равновесия зависит только от одной переменной x или y. Решения, зависящие от x, y имеет в качестве «главной» части функцию

$$\varepsilon^{1/2} \left\{ \pm 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1} \cos x \pm 2\sqrt{3}\sqrt{\gamma_1 - \gamma_2} \cos y \right\}.$$

В таком случае это решение описывает «двухмодовый рельеф». Последний термин носит условный характер, так как решение зависит от  $\cos 2x$ ,  $\cos 2y$  и так далее, если выписать остальные части асимптотического представления.

Подчеркнем, что при  $\gamma_2 > 0$  размер мишени  $(l_1, l_2)$  по переменной y был меньше, чем по  $x \left( \mu = \left( \frac{l_1}{l_2} \right)^2 \right)$ , и, следовательно, «амплитуда» рельефа по переменной y будет меньше. Если же  $\gamma_1 = \gamma_2$ , то фактически мы возвратимся к разделу 3.2.1 и рельеф превратится в «одномодовый», зависящий только от x.

### 3.2.3 Треугольная форма области

В данном разделе рассмотрим в качестве области равнобедренный треугольник, когда переменные *x*, *y* в значительной мере «неравноправны». Итак,

$$D_{\Delta} = \{ 0 < x < l, \ 0 < y < x \},\$$

то есть  $l_1 = l_2 = l = \pi$ .

В нормированных переменных x,y,tв данном случае приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (3.35)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = u\Big|_{x=\pi} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x=y} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)\Big|_{x=y} = 0.$$
(3.36)

Подчеркнем, что равенства (3.36) — это однородные краевые условия Неймана для области  $D_{\Delta}$ .

Краевая задача (3.35), (3.36) похожа на задачу из раздела 3.2.2, но вместе с тем есть существенные различия, которые, в первую очередь, и будем отмечать.

Напомним, что линейный дифференциальный оператор

$$Av = -b\Delta v - \Delta^2 v, \ v = v(x, y)$$

и определен на достаточно гладких функциях v(x, y) (u = u(t, x, y)), удовлетворяющих краевым условиям (3.36).

Нетрудно проверить, что он имеет собственные значения

$$\lambda_{k,m}(b) = b \ (k^2 + m^2) - (k^2 + m^2)^2,$$

которым отвечают собственные функции

$$h_{k,m}(x,y) = \cos kx \cos my + \cos mx \cos ky, k, m = 0, 1, 2, 3, ...$$

Отметим, что при m = k = 0 имеем  $h_{0,0} = 2$ , при m = k получим  $h_{m,m}(x, y) = 2 \cos mx \cos my$ . Относительно сложную структуру собственные функции имеют при  $k \neq m$ . Подчеркнем, что в этой задаче не различаются  $\lambda_{k,m}$  и  $\lambda_{m,k}$ .

Подчеркнем, что  $\lambda_{0,0} = 0$  вне зависимости от *b*, а также, как и ранее,  $\lambda_{k,m} < 0$ , если b < 1. При b > 1, по крайней мере,  $\lambda_{1,0} > 0$ .

Поэтому бифуркационная задача возникает при

$$b = 1 + \gamma \varepsilon, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \ \gamma \in \mathbb{R}.$$

При таком выборе *b* имеем  $\lambda_{0,0} = 0$ ,  $\lambda_{1,0} = \gamma \varepsilon$  (соответствующая собственная функция  $e_{1,0}(x,y) = e_{0,1}(x,y) = \cos x + \cos y$ ), а остальные собственные

значения линейного дифференциального оператора A лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенствами

$$\lambda_{k,m} \leqslant -\gamma_0 < 0 \ (\gamma_0 \in \mathbb{R}_+).$$

Итак, рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_0 u + \varepsilon B u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (3.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = 0, \ \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{x=y} = 0,$$
  
$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\Big|_{y=0} = 0, \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\Big|_{x=\pi} = 0, \ \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)\Big|_{x=y} = 0,$$
  
(3.38)

где  $A_0 u = -\Delta u - \Delta^2 u \left( \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad B u = -\gamma \Delta u.$ 

На двумерном центральном многообразии  $M_2(\varepsilon)$  (dim  $M_2(\varepsilon) = 2$ ) динамика решений нелинейной краевой задачи (3.37), (3.38) из достаточно малой окрестности состояний равновесия может быть восстановлена после анализа двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений — нормальной формы

$$\psi' = F_0(z,\varepsilon),$$
  

$$z' = F_1(z,\varepsilon)$$
(3.39)

(смотри подраздел 1). Ниже приведем алгоритм, позволяющий найти, хотя бы приближенно, явный вид правых частей системы (3.39).

Решения нелинейной краевой задачи (3.37), (3.38), как и в разделах 2.3.1, 2.3.2 будем искать в виде суммы. В данном случае она приобретает следующий вид:

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \psi(s) + \varepsilon^{1/2} z(\cos x + \cos y) + \varepsilon u_2(x, y, z) + \varepsilon^{3/2} u_3(x, y, z) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

$$(3.40)$$

где z = z(s),  $s = \varepsilon t$  «медленное» время,  $u_2, u_3$  – функции, принадлежащие классу функций W (смотри разделы 3.2.1 и 3.2.2). Здесь есть некоторые отличия: они удовлетворяют краевым условиям (3.38) и соответствующие интегралы в условиях разрешимости следует понимать как интегралы по треугольнику

$$D_{\Delta} = \{ 0 < x < \pi, \ 0 < y < x \}$$

Для  $u_2 = u_2(x, y, z)$  получаем неоднородную краевую задачу

$$\psi' = A_0 u_2 + (\sin^2 x + \sin^2 y) z^2,$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\pi} = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)\Big|_{x=y} = 0,$$
  
$$\frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}\Big|_{y=0} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}\Big|_{x=\pi} = \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^2 \partial y} + 3\frac{\partial^3 u_2}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial y^3}\right)\Big|_{x=y} = 0,$$

у которой есть единственное решение из соответствующего класса функций, если  $F_0(z,\varepsilon) = z^2 + O(\varepsilon)$ , а подходящее решение —

$$u_2(x, y, z) = -\frac{z^2}{24}(\cos 2x + \cos 2y).$$

Для определения  $u_3 = u_3(x, y, z)$  получаем аналогичную краевую задачу, но, конечно, с иным неоднородным членом в уравнении для  $u_3$ 

$$0 = A_0 u_3 + \gamma \Delta u_1 - z'(\cos x + \cos y) - \frac{1}{6}z^3(\sin x \sin 2x + \sin y \sin 2y).$$

Из условий разрешимости соответствующей краевой задачи для  $u_3$  получаем, что

$$F_1(z,\varepsilon) = \gamma z - \frac{1}{12}z^3 + O(\varepsilon)$$

Итак, укороченная нормальная форма приобретает следующий вид:

$$\psi' = z^2, \tag{3.41}$$

$$z' = \gamma z - \frac{1}{12} z^3. \tag{3.42}$$

Дифференциальное уравнение (3.42) имеет два асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$S_{\pm}: z_{\pm} = \pm 2\sqrt{3},$$
если  $\gamma > 0 \ (\gamma = 1).$ 

При  $\gamma \leqslant 0$  таких состояний равновесия нет.

Положим

$$u(t, x, y) = v(t) + w(t, x, y),$$

где

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} u(t, x, y) dx dy, \ w(t, x, y) &= u(t, x, y) - v(t), \\ M(w) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} w(t, x, y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Вместо краевой задачи (3.37), (3.38) получим ее детализированный вариант

$$\dot{v} = \psi(w), \ \psi(w) = M\left(\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right),$$
(3.43)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A_0 w + \varepsilon B w + \left( \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) - \psi(w), \qquad (3.44)$$

$$M(w) \equiv 0, \tag{3.45}$$

и, конечно, функция w удовлетворяет краевым условиям (3.38).

Используя результаты работ [5,6,9,10,12,15], можно обосновать справедливость утверждения.

**Теорема 3.3.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при каждом  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  решениям  $z_{\pm} = \pm 2\sqrt{3}$  дифференциального уравнения (3.42) соответствуют два асимптотически устойчивых состояния равновесия

$$w_{\pm}(x,y,\varepsilon) = \pm 2\sqrt{3}\varepsilon^{1/2}(\cos x + \cos y) - \frac{1}{2}\varepsilon(\cos 2x + \cos 2y) \pm \pm \frac{\sqrt{3}}{36}\varepsilon^{3/2}(\cos 3x + \cos 3y) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

Решениям  $w_{\pm}(x,y,\varepsilon)$  соответствуют два однопараметрических семейства решений вида

$$u_{\pm}(t, x, y, \varepsilon) = K_{\pm} + (12\varepsilon + o(\varepsilon))t + w_{\pm}(x, y, \varepsilon),$$

где функции  $w_{\pm}(x, y, \varepsilon)$  были указаны выше, а  $K_{\pm} \in \mathbb{R}$  и произвольны.

Подчеркнем, что

$$u_{-}(x, y, z) = u_{+}(\pi - x, \pi - y, \varepsilon).$$

Последнее равенство отражает то обстоятельство, что замена переменных не может существенным образом отражаться на форме и типе рельефа.

### 3.3 Случай однородных краевых условий Дирихле

Во второй части этой главы уравнение (3.2) будем изучать вместе со следующими краевыми условиями:

$$u\Big|_{x=0, \ x=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0, \ x=\pi} = 0, \ u\Big|_{y=0, \ y=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0, \ y=\pi} = 0,$$

то есть однородными краевыми условиями Дирихле.

Сначала рассмотрим линеаризованный ее вариант

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au \equiv -b \ \Delta_{\mu}u - \ \Delta_{\mu}^{2}u, 
\Delta_{\mu}u = \frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}} + \mu \frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}},$$
(3.46)

$$u\Big|_{x=0, \ x=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0, \ x=\pi} = 0, \ u\Big|_{y=0, \ y=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0, \ y=\pi} = 0.$$
(3.47)

Линейный дифференциальный оператор  $A = A(b, \mu)$  при всех значениях b является симметричным линейным оператором, который имеет счетное множество собственных значений

$$\lambda_{k,m} = \lambda_{k,m}(b) = b \ (k^2 + \mu m^2) - (k^2 + \mu m^2)^2$$
, где  $k, m = 1, 2, ...,$ 

отвечающих собственным функциям  $h_{k,m} = \sin kx \sin my$ , которые в пространстве  $L_2(D)$  образуют полную ортогональную систему

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} h_{k_1,m_1}(x,y) h_{k_2,m_2}(x,y) \, dx \, dy = 0$$

при  $(k_1 - k_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 \neq 0.$ 

Линейный дифференциальный оператор A(b) является производящим оператором аналитической полугруппы линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $L_2(D)$ . Из двух предыдущих замечаний вытекает, что при выполнении неравенства  $\lambda_{k,m}(b) \leq 0$  при всех k, m решения краевой задачи (3.46), (3.47) устойчивы. Если при некоторых  $k = k_1, m = m_1$  выполнено неравенство  $\lambda_{k_1,m_1}(b) > 0$ , то решения краевой задачи (3.46), (3.47) неустойчивы.

Отметим, что при  $b < 1+\mu$ справедливы неравенства

$$\lambda_{k,m}(b) < 0$$
, если  $k^2 + m^2 \ge 2$ ,

а при  $b = 1 + \mu$  имеем  $\lambda_{1,1}(1 + \mu) = 0$ , а остальные собственные значения линейного дифференциального оператора  $A(1, 1 + \mu)$  лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенствами  $\lambda_{k,m}(1 + \mu) < 0$ .

#### 3.3.1 Вариант прямоугольника

Далее будем изучать уже нелинейную задачу (3.2), (3.3) при  $b = 1 + \mu + \gamma \varepsilon$ , где  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 << 1, \ \gamma = \pm 1, \ \mu > 1$ , которая может быть записана в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(\varepsilon)u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (3.48)$$

$$u\Big|_{x=0, \ x=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0, \ x=\pi} = 0, \ u\Big|_{y=0, \ y=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0, \ y=\pi} = 0,$$
(3.49)

где

$$A(\varepsilon)u = -\Delta_{\mu}u - \varepsilon\Delta_{\mu}u - \Delta_{\mu}^{2}u = A_{0}u + \varepsilon Bu,$$

то есть

$$A_0 u = A(0, \mu), \text{ a } B u = -\Delta_{\mu} u.$$

Рассмотрим нелинейную краевую задачу (3.48), (3.49) при  $\mu > 1$ . Положим

$$u(t, x, \varepsilon) = \varepsilon u_1(x, y, z) + \varepsilon^2 u_2(x, y, z) + o(\varepsilon^2), \qquad (3.50)$$

где  $u_1(x, y, z) = z \sin x \sin y$ , функции  $u_2(x, y, z), u_3(x, y, z) \in W$ . Через W обозначен класс функций  $g(x, y, z) \in W$ , удовлетворяющих следующим свойствам:

- 1. при фиксированном z функция  $g(x, y, z) \in W_2^4(\overline{D});$
- 2. функция g(x, y, z) удовлетворяет краевым условиям (3.49);
- 3. выполняются равенства

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} g(x, y, z) \sin x \sin y \, dx dy = 0;$$

4. функция g(x, y, z) имеет непрерывные частные производные по переменной z.

Подстановка суммы (3.50) в краевую задачу (3.48), (3.49) и выделение слагаемых при одинаковых степенях  $\varepsilon^2$  приводит к формированию линейной неоднородной краевой задачи для определения  $u_2 = u_2(x, y, z)$ 

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = A_0 u_2 + \gamma z \sin x \sin y + \gamma \mu z \sin x \sin y + z^2 \cos^2 x \sin^2 y + \mu z^2 \sin^2 x \cos^2 y - z' \sin x \sin y, \qquad (3.51)$$

$$u_2\Big|_{x=0, x=\pi} = u_2\Big|_{y=0, y=\pi} = 0, \ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\Big|_{x=0, y=0} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\Big|_{y=0, y=\pi} = 0.$$
(3.52)

Краевая задача (3.51), (3.52), при анализе которой следует рассматривать z = z(s) как параметр, имеет единственное решение  $u_2(x, y, z) \in W$ , если выполнены условия разрешимости для данной краевой задачи (смотри, замечание 3.2). Их использование приводит к равенству

$$z' = (1+\mu)\left(\gamma z + \frac{32z^2}{9\pi^2}\right).$$

Замечание 3.2. Неоднородное уравнение  $A_0v = \varphi(x,y), v = v(x,y)$  имеет решение, если выполнены условие разрешимости

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \varphi(x, y) \sin x \sin y dx dy = 0,$$

то есть функция  $\varphi(x, y)$  ортогональна в пространстве  $L_2(D)$  функции  $\sin x \sin y$ , принадлежащей ядру линейного дифференциального оператора A.

На данном этапе уже получена главная часть нормальной формы, то есть найдена  $F_0(z,0)$ . Итак,

$$z' = (1+\mu) \left(\gamma z + \frac{32z^2}{9\pi^2}\right).$$
 (3.53)

Правая часть дифференциального уравнения (3.53) выписана с точностью до членов  $O(\varepsilon^2)$ . Уравнение (3.53) имеет состояния равновесия  $z_1 = 0, z_2 = -\frac{9\pi^2\gamma}{32}$ . Состояние равновесия  $z_1$  является асимптотически устойчивым при  $\gamma < 0$ , а  $z_2$  при  $\gamma > 0$ .

Используя результаты работ [5,6,9,10,12,15], можно обосновать справедливость утверждения.

**Теорема 3.4.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  состоянию равновесия  $z_2$  дифференциального уравнения (3.53) соответствует устойчивое пространственно неоднородное решение краевой задачи (3.48), (3.49)

$$u(t, x, y, \varepsilon) = -\frac{9\pi^2 \gamma}{32} \varepsilon \sin x \sin y + o(\varepsilon).$$

#### 3.3.2 Квадратная форма области

Пусть изначально был квадрат, то есть  $l_1 = l_2$ . Тогда  $\mu = 1$  и линейный дифференциальный оператор A(b, 2) при b = 2 имеет нулевое собственное значение, которому соответствует собственная функция  $\sin x \sin y$ .

В краевой задаче (3.48), (3.49) положим

$$b = 2 + \gamma_1 \varepsilon, \ \mu = 1 + \gamma_2 \varepsilon, \ \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R},$$

а  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ , то есть рассмотрим область D, близкую к квадратной области. В результате получим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + \varepsilon B_1 u + \varepsilon^2 B_2 u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \gamma_2 \varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \quad (3.54)$$

$$u\Big|_{x=0, \ x=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0, \ x=\pi} = 0, \ u\Big|_{y=0, \ y=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0, \ y=\pi} = 0,$$
(3.55)

где в данном случае

$$Au = -\Delta u - \Delta^2 u, \ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$
$$B_1 u = -\gamma_1 \Delta u - \gamma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2\gamma_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\gamma_2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$
$$B_2 u = -\gamma_2^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - \gamma_1 \gamma_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Решения, принадлежащие одномерному локально инвариантному (центральному) многообразию  $M_1(\varepsilon)$  (смотри [13], [15], [53], [56], [57]), как и ранее, будем искать в следующем виде:

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + o(\varepsilon^2), \qquad (3.56)$$

где

$$u_1 = u_1(x, y, z) = z \sin x \sin y, s = \varepsilon t.$$

Функции  $u_k = u_k(x, y, z) \subset W$  (k = 2, 3). Здесь W пространство функций, для которых справедливы следующие свойства:

- 1) функции  $\varphi(x, y, z) \in W$  достаточно гладко зависят от x, y, z;
- 2) при фиксированном  $z: \varphi(x, y, z) \in W_2^4(\overline{D});$
- 3) удовлетворяют краевым условиям (3.55);

4) для таких функций справедливы равенства

$$\int_{0}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \varphi(x, y, z_1, z_2) \sin x \sin y \, dy dx = 0.$$

Как и в предыдущем разделе, после подстановки суммы (3.56) в краевую задачу (3.54), (3.55) и приравнивая слагаемые при  $\varepsilon^2$  получим неоднородную линейную краевую задачу для определения  $u_2$ . При ее выписывании учтено, что  $\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial u_k}{\partial s} \varepsilon$ . Итак,

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = A_0 u_2 - z' \sin x \sin y + 2\gamma_1 z \sin x \sin y - 2\gamma_2 z \sin x \sin y + z^2 \cos^2 y \sin^2 x + z^2 \cos^2 x \sin^2 y, \qquad (3.57)$$

$$u\Big|_{x=0,\ x=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0,\ x=\pi} = 0,\ u\Big|_{y=0,\ y=\pi} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0,\ y=\pi} = 0.$$
(3.58)

Из условий разрешимости краевой задачи (3.57), (3.58) вытекает, что нормальная форма имеет вид

$$z' = 2z(\gamma_1 - \gamma_2) + \frac{64z^2}{9\pi^2}.$$
(3.59)

Лемма 3.2. Уравнение (3.59) имеет состояния равновесия

$$z_1 = 0, \ z_2 = -\frac{9}{32}\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)$$

Нулевое состояние равновесия является асимптотически устойчивым, если  $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$ , состояние равновесия  $z_2$  асимптотически устойчиво при  $\gamma_1 - \gamma_2 < 0$ .

Используя результаты работ [5,6,9,10,12,15], можно обосновать справедливость утверждения.

**Теорема 3.5.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  нелинейная краевая задача (3.54), (3.55) имеет ненулевое пространственно неоднородное решение

$$u(x, y, \varepsilon) = -\frac{9}{32}\pi^2(\gamma_1 - \gamma_2)\varepsilon\sin x\sin y + o(\varepsilon),$$

соответствующее состоянию равновесия  $z_2$  с наследованием свойств устойчивости.

#### 3.3.3 Треугольная форма области

В данном разделе рассмотрим в качестве области равнобедренный треугольник, когда переменные x, y в значительной мере «неравноправны». Итак

$$D_{\Delta} = \{ 0 < x < l, \ 0 < y < x \},\$$

то есть  $l_1 = l_2 = l$ .

В нормированных переменных x, y, t в данном случае приходим к краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2,\tag{3.60}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=\pi} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = 0, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{x=y} = 0.$$
(3.61)

Подчеркнем, что равенства (3.61) — это однородные краевые условия Дирихле для области  $D_{\Delta}$ . Линейный дифференциальный оператор

$$Av = -b\Delta v - \Delta^2 v, \ v = v(x, y)$$

определен на достаточно гладких функциях v(x, y) (u = u(t, x, y)), удовлетворяющих краевым условиям (3.61).

Нетрудно проверить, что он имеет собственные значения

$$\lambda_{k,m}(b) = b (k^2 + m^2) - (k^2 + m^2)^2,$$

которым отвечают собственные функции

$$h_{k,m}(x,y) = \sin kx \sin my - \sin mx \sin ky, k, m = 1, 2, 3, ..., k \neq m.$$

Отметим, что при m = k = 0 имеем  $h_{0,0} = 0$ , при m = k получим  $h_{m,m}(x, y) = 0$ . Относительно сложную структуру собственные функции имеют при  $k \neq m$ . Подчеркнем, что в этой задаче не различают  $\lambda_{k,m}$  и  $\lambda_{m,k}$ .

Подчеркнем, что как и ранее,  $\lambda_{k,m} < 0$ , если b < 5. При b > 5, по крайней мере,  $\lambda_{1,2} > 0$ .

Поэтому бифуркационная задача возникает при

$$b = 5 + \gamma \varepsilon, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \ \gamma \in \mathbb{R}$$

При таком выборе *b* имеем  $\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = 0$  (соответствующая собственная функция  $h_{1,2}(x,y) = -h_{2,1}(x,y) = \sin x \sin 2y - \sin 2x \sin y$ , а остальные собственные значения линейного дифференциального оператора *A* лежат в полуплоскости комплексной плоскости, выделяемой неравенствами

$$\lambda_{k,m} \leqslant -\gamma_0 < 0 \ (\gamma_0 \in \mathbb{R}_+).$$

Итак, рассмотрим краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_0 u + \varepsilon B u + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2, \qquad (3.62)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=\pi} = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{x=y} = 0,$$
(3.63)

где  $A_0 u = -\Delta u - \Delta^2 u \left( \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), Bu = -\gamma \Delta u.$ 

Решения нелинейной краевой задачи 3.62, 3.63, как и в разделах 3.3.1, 3.3.2 будем искать в виде суммы. В данном случае она приобретает следующий вид:

$$u(t, x, y, \varepsilon) = \varepsilon u_1(x, y, z) + \varepsilon^2 u_2(x, y, z) + o(\varepsilon^2), \qquad (3.64)$$

где z = z(s),  $s = \varepsilon t$  «медленное» время,  $u_2$  – функция, принадлежащая классу функций W (смотри разделы 3.3.1, 3.3.2).

Для  $u_2 = u_2(x, y, z)$  получаем неоднородную краевую задачу

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + z'(\sin x \sin 2y - \sin 2x \sin y) = A_0 u_2 - 5\gamma z \sin 2x \sin y + 5\gamma z \sin x \sin 2y + 4z^2 \cos^2 2y \sin^2 x - 4z^2 \cos y \cos 2y \sin x \sin 2x + z^2 \cos^2 y \sin^2 2x + 4z^2 \cos^2 2x \sin^2 y - 4z^2 \cos x \cos 2x \sin y \sin 2y + z^2 \cos^2 x \sin^2 2y,$$

$$\begin{split} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\Big|_{x=\pi} &= 0, \ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} &+ \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\Big|_{x=y} = 0. \end{split}$$

Из условий разрешимости соответствующей краевой задачи для  $u_2$  получаем, что укороченная нормальная форма приобретает следующий вид:

$$z' = 5\gamma z + \frac{27z^2}{\pi^2}.$$
 (3.65)

Дифференциальное уравнение (3.65) имеет асимптотически устойчивое ненулевое состояние равновесия

$$z = -\frac{5\pi^2\gamma}{27}, \$$
если  $\gamma > 0.$ 

При  $\gamma \leqslant 0$  таких состояний равновесия нет.

Используя результаты работ [5,6,9,10,12,15], можно обосновать справедливость утверждения.

**Теорема 3.6.** Существует такое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  нелинейная краевая задача (3.62), (3.63) имеет одно устойчивое состояния равновесия

$$u(x, y, \varepsilon) = -\frac{5\pi^2 \gamma}{27} \varepsilon(\sin x \sin 2y - \sin 2x \sin y) + O(\varepsilon^2).$$

### 3.4 Некоторые выводы

В разделах 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3 рассмотрены задачи о локальных бифуркациях пространственно неоднородных решений в окрестности однородных состояний равновесия соответствующих краевых задач. Для всех случаев выбора области (прямоугольник, квадрат, равнобедренный треугольник) с краевыми условиями Неймана и Дирихле механизм формирования нанорельефа один и тот же. Соответствующий неоднородный рельеф возникает при потере устойчивости однородными состояниями равновесия. С другой стороны, в зависимости от формы области меняется и структура нанорельефа. В случае однородных краевых условий Дирихле вне зависимости от выбора области (прямоугольника, области, близкой к квадрату и равнобедренного треугольника) состояния равновесия зависят от обоих пространственных переменных, то есть x и y. В случае однородных краевых условий Неймана бифурцируют пространственно неоднородные решения (состояния равновесия второго рода) двух типов. В случае прямоугольника они зависят только от одной пространственной переменной (в работе от x). В случае треугольника они обязательно двухмодовые (то есть зависят от пространственных переменных x и y). Если рассматривается квадратная область, то соответствующие решения зависят от x и y.

В случае прямоугольника, он имеет цилиндрическую форму (зависит только от одной пространственной переменной). В квадрате и треугольнике такой «двумодовый» рельеф зависит от x и y одновременно. Иные краевые задачи для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского были рассмотрены в работах [13], [56], [57].

# Заключение

В диссертационной работе рассмотрено уравнение Курамото-Сивашинского и его обобщения. Например, в главах 1 и 3 изучаются краевые задачи для уравнения, которое следует считать обобщенным вариантом уравнения Курамото-Сивашинского. Так, определяемая из них функция зависит от t и двух пространственных переменных. В первоначальной, классической версии функция зависит только от t и x.

Рассматриваемый обобщенный вариант уравнения Курамото-Сивашинского был предложен в связи с рядом задач физики пограничных явлений, изучением механизма появления неоднородного рельефа на поверхности полупроводников под воздействием потока ионов.

В работе показано, что в рассмотренных задачах можно ожидать появления пространственно неоднородных решений (состояний равновесия и в том числе второго рода) при смене устойчивости пространственно однородными решениями. Чаще речь идет, естественно, о потере устойчивости.

При этом возникают бифуркационные задачи для динамических систем с бесконечномерным пространством начальных условий, как правило, имеющие определенное вырождение, коразмерности 2 или же, в которых имеет место и вырождение коразмерности больше единицы. Тем не менее, в работе удалось показать, опираясь на метод интегральных многообразий и нормальных форм, что исследование соответствующих бифуркационных задач сводится к анализу динамики вспомогательных уравнений или систем уравнений — нормальной формы Пуанкаре-Дюлака.

С точки зрения приложений к физике (в частности, к микро— и наноэлектронике) полученные результаты подтверждают точку зрения о том, что формирование нанорельефа — это процесс самоорганизации и соответствующие неоднородные решения могут возникать в результате анализа соответствующих бифуркационных задач. При этом такой вывод повторяется при изучении обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского в разных областях с разными краевыми условиями, выбор которых, в первую очередь, зависит от физической постановки задачи.

В диссертационной работе также показано, что использование метода Галчркина, конечно, возможно, но при этом ответ часто зависит от числа базисных функций и диапазона выбора параметров задачи. Во многом данный недостаток удается преодолеть при анализе соответствующих задач методом качественной теории бесконечномерных динамических систем. Тем не менее, в диссертации были получены новые результаты при анализе галчркинских приближений соответствующих краевых задач уже для классической версии уравнения Курамото-Сивашинского. Были рассмотрены те задачи, анализ которых был предложен в известной работе Дитера Армбрустера, Джона Гукенхеймера, Филипа Холмса [43].

Из полученных в диссертационной работе результатов, а также их уточнений и корректировки вытекает, что они противоречат в значительной степени анализу тех же задач (смотри главу 2) на базе применения метода интегральных многообразий и нормальных форм.

# Литература

- [1] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Наука. — 1978. — 304 С.
- [2] емельянов В. М. Дефектно–деформационная неустойчивость как универсальный механизм образования решеток и ансамблей наноточек при действии ионных и лазерных пучков на твердые тела // Известия РАН. Серия физическая. — 2010. — Т. 74, № 2. — С. 124–130.
- [3] Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: принцип кольца // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 5. — С. 584–601.
- [4] Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций // М.: Мир. — 1983. — 300 С.
- [5] Колесов А. Ю., Куликов А. Н., Розов Н. Х. Инвариантные торы одного класса точечных отображений: сохранение инвариантного тора при возмущениях // Дифференц. уравнения. — 2003. — Т. 39, № 6. — С. 738-753.
- [6] Колесов А. Ю., Куликов А. Н. Инвариантные торы нелинейных эволюционных уравнений // Ярославль. Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова. — 2003. — 107 С.
- [7] Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Стриханов М. Н. Численное моделирование формирования наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Ядерная физика и инжиниринг. — 2010. — Т. 1, № 2. — С. 151–158.
- [8] Кудряшов Н. А., Рябов П. Н., Федянин Т. е. Особенности самоорганизации наноструктур на поверхности полупроводников при ионной бомбардировке // Матем. моделирование. — 2012. — Т. 24, № 12. — С. 23–28.
- [9] Куликов А. Н. О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: Изд-во ЯрГУ. — 1976. — С. 114–129.

- [10] Куликов А. Н. Интегральные многообразия нелинейных автономных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Препринт №85 института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР. — 1991. — 24 С.
- [11] Куликов А. Н. Некоторые бифуркационные задачи теории упругой устойчивости и математической физики // Диссерт. на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Нижний Новгород. — 2018. — 299 С.
- [12] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Формирование волнообразных наноструктур на поверхности плоских подложек при ионной бомбардировке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. С. 930—945.
- [13] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Бифуркации пространственно неоднородных решений в двух краевых задачах для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского // Вестник МИФИ. — 2014. — Т. 3, № 4. — С. 408-415.
- [14] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Уравнение Курамото-Сивашинского. Локальный аттрактор, заполненный неустойчивыми периодическими решениями // Моделирование и анализ информационных систем. — 2018. — № 1. — С. 92–101.
- [15] Куликов А. Н., Куликов Д. А., Рудый А. С. Бифуркации наноструктур под воздействием ионной бомбардировки // Вестник Удмуртского ун-та. — 2011. — № 4. — С. 86–99.
- [16] Куликов А. Н., Куликов Д. А. Бифуркации в одной краевой задаче наноэлектроники // Проблемы мат. анализа. — 2015. — В. 80. — С. 61–69.
- [17] Куликов А. Н., Секацкая А. В. Уравнение Кана-Хиллиарда и локальные бифуркации пространственно неоднородных решений // Материалы международной научной конференции «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферма-Паста-Улама. — 2015. — С. 55–57.
- [18] Куликов А. Н., Секацкая А. В. О влиянии выбора краевых условий на динамику решений в модели Бредли-Харпера формирования нанорельефа // Материалы международной научной конференции «Математика: фундаментальные и прикладные исследования и вопросы образования». — 2016. — С. 108–111.
- [19] Куликов А. Н., Секацкая А. В. Локальные аттракторы в одной краевой задаче для уравнения Курамото-Сивашинского // Итоги науки и техн. Сер.

Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., ВИНИТИ РАН, М. — 2018. — Т. 148. — С. 58–65.

- [20] Куликов А. Н., Секацкая А. В. Состояния равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 27, № 1.
- [21] Куликов Д. А., Секацкая А. В. О влиянии геометрических характеристик области на структуру нанорельефа // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2018. — Т. 28, № 3. — С. 293–304.
- [22] Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // М.: Наука. — 1967. — 464 С.
- [23] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа // Гос. изд-во технико-теоретич. литературы, М.–Л. 1951. 360 С.
- [24] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения // М.: Мир. 1980. 368 С.
- [25] Метлицкая А. В., Куликов А. Н., Рудый А. С. Механизм формирования волнового нанорельефа при эрозии поверхности ионной бомбардировки в рамках модели Бредли-Харпера // Микроэлектроника. — 2013. — Т. 42, № 4. — С. 298–305.
- [26] Мищенко е. Ф., Садовничий В. А., Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией // Физматлит. — 2005. — 430 С.
- [27] Монография под общей редакцией В. И. Рудакова. Кремниевые наноструктуры. Физика. Технология. Моделирование // Ярославль. — Изд-во Индиго. — 2014. — 560 С.
- [28] Неймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы // М.: Наука. 1972. 544 С.
- [29] Рудый А. С., Куликов А. Н., Метлицкая А. В. Самоорганизация наноструктур в рамках пространственно-нелокальной модели эрозии поверхности кремния ионной бомбардировкой // Физика. Технология. Моделирование. Ярославль. Изд-во Индиго. — 2014. — 560 С.
- [30] Секацкая А.В. Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 5. — С. 615–628.

- [31] Секацкая А.В. Бифуркации пространственно неоднородных решений в одной краевой задаче для обобщенного уравнения Курамото-Сивашинского // Материалы международной научной конференции студентов «Новые тенденции в нелинейной динамике». Ярославль. ЯрГУ. — 2017. — С. 74–76.
- [32] Секацкая А. В. Локальные аттракторы в одной краевой задаче для уравнения Курамото-Сивашинского // III Всероссийский научный форум «Наука будущего – наука молодых». Нижний Новгород. — 2017.
- [33] Секацкая А.В. Исследование уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // Материалы международной научной конференции студентов «Ломоносов–2018». Москва. МГУ. — 2018.
- [34] Секацкая А. В. Состояния равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // Материалы 71-й Всероссийской научно-технической конференции студентов, магистрантов и аспирантов с международным участием. Ярославль. ЯГТУ. — 2018. — С. 869–872.
- [35] Секацкая А.В. Исследование состояний равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными условиями Неймана // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 59–69.
- [36] Секацкая А. В. О характере локальных бифуркаций уравнения Курамото-Сивашинского в различных областях // Вестник Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 19, № 2. — С. 133–137.
- [37] Секацкая А. В. Состояния равновесия второго рода уравнения Курамото-Сивашинского с однородными краевыми условиями Неймана // Международная конференция «Геометрические методы в теории управления и математической физике, посвященная 70-летию С. Л. Атанасяна, 70-летию И. С. Красильщика, 70-летию А. В. Самохина, 80-летию В. Т. Фоменко». Рязанский государственный университет имени С. А. есенина. — 2018. — С. 21–22.
- [38] Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике // Л.: Изд-во ЛГУ им. А. А. Жданова. — 1950. — 255 С.
- [39] Соболевский П. е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве // Труды ММО. — 1961. — Т. 10. — С. 297-350.

- [40] Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле // М.: ОНТИ. 1934. 341 С.
- [41] Функциональный анализ. Справочная математическая библиотека // М.: Наука. — 1972. — 544 С.
- [42] Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркаций цикла // М.: Мир. — 1985. — 280 С.
- [43] Armbruster D., Guckenheimer J., Holmes Ph. Kuramoto-Sivashinsky dynamics on the center-unstable manifold // Siam J. Appl. Math. - 1989. - V. 49, №. 3.
   - P. 676–691.
- [44] Barker B., Johnson M.A., Noble P., Zumbrun K. Stability of periodic Kuramoto-Sivashinsky waves // Applied Mathematics Letters, Elsevier. — 2012. — V. 5, № 25. — P. 824–829.
- [45] Bradley R. M., Harper J. M. E. Theory of Ripple Topography Induced by Ion Bombardment // J. Vac. Sci. Technol. A. - 1988. - V. 6. - P. 2390-2395.
- [46] Bradley R. M., Hofsass H. Nanoscale patterns produced by self-sputtering of solid surfaces: The effect of ion implantation // J. Appl. Phys. - 2016. -V. 120, № 7. - P. 120.
- [47] Emel'yanov B.I. The Kuramoto-Sivashinsky equation for the defect– deformation. Instability of a surface–stressed nanolayer // Laser Physics. – 2009. – V. 19, № 3. – P. 538–543.
- [48] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector field // Springer-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin. - 1983. - 462 P.
- [49] Holmes P. J., Marsden J. E. Bifurcations to divergence and flutter in flowinduced oscillations: an infinite-dimensional analysis // Automatica. — 1978. — V. 14, №3. — P. 367–384.
- [50] Holmes P. J., Marsden J. E. Bifurcations of dynamical systems and nonlinear oscillations in engineering systems // Nonlinear partial differential equation and application. Lectures Notes in Mathematics. Berlin: Springer.— 1978. — №648. — P. 136–206.
- [51] Foias C., Nicolaenko B., Sell G.R., Temam R. Inertial manifolds for the Kuramoto-Sivashinsky equation and an estimate of their lowest dimension // J. Math. Pures Appl. - 1988. - V. 67. - P. 197-226.
- [52] Kulikov A. N. Attractors of two boundary problems for modified equations of telegraphy // Nelin.Dinamika. — 2008. — V. 4, № 1. — P. 57–68.

- [53] Kulikov A. N., Kulikov D. A. Formation of wavy nanostructures on the surface of flat substrates by ion bombardment // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — V. 52, № 5. — P. 800–814.
- [54] Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcations of spatially heterogeneous solutions in two boundary problems for generalized Kuramoto-Sivashinsky equation // Vestn. MIFI. — 2014. — V. 3, № 4. — P. 468–475.
- [55] Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcation in Kuramoto-Sivashinsky Equation // Pliska Stud. Math. — 2015. — № 6. — P. 101–110.
- [56] Kulikov A. N., Kulikov D. A. Bifurcations in a boundary value problem of nanoelectronics // J. Math. Sci. — 2015. — V. 208, № 2. — P. 211–221.
- [57] Kulikov A. N., Kulikov D. A. Local bifurcations in the periodic boundary value problem for the generalized Kuramoto-Sivashinsky equation // Automation and Remote Control. - 2017. - V. 78, № 11. - P. 1955–1966.
- [58] Kulikov A. N., Kulikov D. A. Local bifurcations in the Cahn-Hilliard and Kuramoto-Sivashinsky Equation and Their Generalizations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2019. — V. 59, № 4. — P. 630–643.
- [59] Kuramoto Y. Chemical oscillations waves and turbulence // Berlin. Springer. -1984. P. 156.
- [60] Larkin N.A. Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky equations in bounded domains // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 297, № 1. P. 169–185.
- [61] Nicolaenko B., Scheurer B., Temam R. Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations: nonlinear stability and attractors // Physics 16D. - 1985. - P. 155–183.
- [62] Sekatskaya A.V. Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Boundary Value Problem for the Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation // International Student Conference «G-Risc. Science and progress». — 2017. — P. 110.
- [63] Sekatskaya A. V. On the influence of the shape of a region on the character of local bifurcations in the Kuramoto-Sivashinsky equation // International Conference «ShilnikovWorkshop — 2018». — 2018. — P. 32–34.
- [64] Sekatskaya A.V. Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Boundary Value Problem for the Generalized Kuramoto-Sivashinsky Equation // Nonlinear Phenomena in complex Systems. — 2018. — V. 21, № 1. — P. 69–78.

- [65] Sigmund P. Theory of Sputtering. I. Sputtering Yield of Amorphous and Polycrystalline Targets // Phys. Rev. - 1969. - V. 184, № 2. - P. 383-416.
- [66] Sivashinsky G. I. Weak turbulence in periodic flows // Physica D. 1985. V. 17, Nº 2. P. 243–255.
- [67] Sigmund P. Sputtering by ion bombardment theoretical concepts. Sputtering by Particle Bombardment I, Topics in Applied Physics // Berlin: Springer-Verlag. - 1981. - V. 47. - P. 9-72.
- [68] Sigmund P. A mechanism of surface micro-roughening by ion bombardment // J. Mat. Sci. - 1973. - V. 8, № 11. - P. 1545-1553.
- [69] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics. 2nd ed // Appl. Math. Ser. - 1997. - V. 68. New York: Springer-Verlag.