На правах рукописи

Козлов Александр Дмитриевич

О сценариях перехода к диссипативной хаотической динамике в семействах меняющих ориентацию трехмерных диффеоморфизмов

Специальность 01.01.02 —
«дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2019

Работа выполнена в учреждении, в котором выполнялась данная диссертационная работа.

Научный руководитель: **Гонченко Сергей Владимирович**, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник кафедры ДУМЧА, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского"

Официальные оппоненты: **Купцов Павел Владимирович**, д.ф.-м.н., доцент кафедры «Приборостроение» ФГАОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»,

Медведев Владислав Сергеевич, к.ф.-м.н., эксперт лаборатории топологические методы в динамике ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова», кафедра математического моделирования математического факультета

Защита состоится 23.01.2020 г. в 14:40 на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н.И.Лобачевского-по адресу: 603950, г.Нижний Новгород, пр.Гагарина, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н.И.Лобачевского".

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учреждения, просьба направлять по адресу: 603950, г.Нижний Новгород, пр.Гагарина, 23, ИИТММ, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.166.20 Кротову Николаю Владимировичу.

Автореферат разослан ___.___.2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.166.20,
к-т физ.-мат. наук — Кротов Николай Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая работа относится к одному из наиболее важных и интересных разделов качественной теории динамических систем – теории многомерных систем со сложным, хаотическим поведением траекторий.

Основы качественной теории динамических систем были заложены еще в конце 19-го и начале 20-го века в классических работах А. Пуанкаре, Ж. Адамара, А.М. Ляпунова, И. Бендиксона, Дж. Биркгофа. Качественная теория и теория бифуркаций динамических систем на плоскости была построена в 30-х годах в работах А.А. Андронова, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера, Л.С. Понтрягина, а систем на замкнутых двумерных многообразиях – в 40-50-х годах в работах А.Г. Майера, М. Морса, М. Пейксото, Х. ДеБаггиса, К. Пью и др. Позднее эта теория была развита в работах С.Х. Арансона, В.З. Гринеса, М. Любич и других.

В 60-е годы началось бурное развитие качественной теории многомерных динамических систем (размерность которых не меньше трех для потоков и двух для отображений). Прежде всего это касалось теории грубых динамических систем, получившей наименование гиперболической теории. Основы этой теории были заложены в работах В.М. Алексеева, Д.В. Аносова, Р. Боуэна, Р. Вильямса, Р. Манэ, К. Пью, К. Робинсона, Я.Г. Синая, С. Смейла, Д. Френкса, Л.П. Шильникова, М. Шуба и др.

Основы теории нелокальных бифуркаций многомерных динамических систем были заложены в работах Л.П. Шильникова еще в 60-х годах. В дальнейшем бифуркации многомерных динамических систем изучались в работах В.И. Арнольда, В.С. Афраймовича, В.Н. Белых, Л.А. Белякова, В.В. Быкова, М. Вианы, Р. Вильямса, Н.К. Гаврилова, С.В. Гонченко, Дж. Гукенхейиера, Л. Диаса, Ю.С. Ильяшенко, Ю.А. Кузнецова, Л.М. Лермана, В.И. Лукьянова, В.С. Медведева, А.Д. Морозова, Ю.И. Неймарка, А.И. Нейштадта, Ш. Ньюхауса, Дж. Пэлиса, К. Симо, Ф. Такенса, Д.В. Тураева, А.Я. Хомбурга и др.

Развитие гиперболической теории и теории бифуркаций многомерных динамических систем привело, в свою очередь, к открытию динамического хаоса, что по праву считается одним из самых замечательных достижений современной науки. Благодаря ему стало понятно, что сложное поведение траекторий является характерным свойством нелинейных динамических систем, и, таким образом, для многих проблем естествознания и техники оказалось возможным получить адекватное математическое описание.

Математическим образом динамического хаоса в диссипативных системах является *странный аттрактор* – нетривиальное притягивающее замкнутое инвариантное множество. К настоящему времени принято разделять странные аттракторы на две группы: *настоящие странные аттракторы* и *квазиаттракторы*.

Настоящим странным аттрактором называется такой, у которого, по определению, траектория любой его точки имеет положительный максимальный ляпуновский показатель, и это свойство сохраняется для всех достаточно близких систем. Такие аттракторы могут быть грубыми – это гиперболические странные аттракторы, или негрубыми. Среди последних можно выделить хорошо известные аттракторы лоренцевского типа многомерных потоков, а также сравнительно недавно открытые *псевдогиперболические аттракторы*.

Квазиаттракторы составляют громадное большинство известных на сегодня странных аттракторов, встречающихся в приложениях. Они обладают весьма сложной структурой, но в отличие от настоящих аттракторов могут содержать устойчивые периодические траектории весьма больших периодов, которые также неизбежно возникают при сколь угодно малых возмущениях. Однако периоды таких траекторий могут быть настолько большими, а области притяжения насколько экстремально малые, что в экспериментах, в том числе и численных, они никак себя не проявляют. Поэтому "на физическом уровне" квазиаттракторы могут ничем не отличаться от настоящих аттракторов. Теория квазиаттракторов была заложена в работах В.С. Афраймовича и Л.П. Шильникова, и в настоящее время она представляет собой большую область теории динамического хаоса, в которой остается еще много открытых проблем. Одна из таких проблем – это то как, собственно, различать квазиаттракторы и настоящие аттракторы. Эта задача частично рассматривается и в настоящей диссертации.

Теория гиперболических странных аттракторов была развита в работах Д.В. Аносова, С.Х. Арансона, Р. Вильямса, В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы, С.П. Кузнецова, Р.В. Плыкина, О.В. Починки, С. Смейла и др. Эта теория в настоящее время представляет собой достаточно хорошо изученную область теории динамического хаоса, в которой практически не осталось "белых пятен".

Однако гиперболические аттракторы редко встречаются в приложениях,[1] в отличие, например, от тех же квазиаттракторов. Также как и для гиперболической теории, бурному развитию которой дал начало пример Смейла (1961) его знаменитой подковы, в математической теории динамического хаоса эту роль сыграли две работы: работа Э.Лоренца (1963), в которой был открыт знаменитый аттрактор Лоренца, а также работа Д. Рюэля и Ф. Такенса (1971), в которой, собственно, и был введен термин "странный аттрактор", а также было показано, что хаос может возникать при разрушении трехмерного тора. Эта последняя работа вызвала большой

[1] Недавно гиперболические аттракторы были найдены (С.П. Кузнецов, П.Е. Купцов) в некоторых моделях радиоэлектроники.

интерес у физиков и математиков, так как показала, что хорошо известный феноменологический сценарий Ландау-Хопфа возникновения турбулентности в результате бесконечной цепочки добавления частот может легко прерываться – приводить к хаотической динамике – уже при появлении третьей частоты. Тем самым, динамический хаос (странные аттракторы) может возникать уже у конечномерных диссипативных систем.

К настоящему времени имеется большое множество работ по теории странных аттракторов. Отметим только, что важнейший вклад в эту теорию был сделан Л.П. Шильниковым и его учениками. Ими были заложены основы теории спиральных аттракторов (Л.П. Шильников), теории лоренцевских аттракторов (геометрическая модель Афраймовича-Быкова-Шильникова), теории тор-хаоса (возникновение хаоса в результате разрушения двумерного тора – Афраймович-Шильников), теории псевдогиперболических странных аттракторов (Тураев-Шильников), математические основы теории гомоклинического хаоса (Гаврилов-Гонченко-Тураев-Шильников) и др. Тем не менее, в теории странных аттракторов до сих пор остается много нерешенных актуальных проблем.

В частности, одними из основных таких проблем являются задачи изучения структуры странных аттракторов и бифуркационных сценариев перехода к ним от простых притягивающих режимов – устойчивых состояний равновесия и периодических траекторий. В случае двумерных отображений и трехмерных потоков в этих задачах получено большое число фундаментальных результатов. Достаточно отметить такие из них, как описание сценариев возникновения спиральных аттракторов (Л.П. Шильников), исследование структуры аттрактора Лоренца и бифуркаций, приводящих к его возникновению (Гукенхеймер, Вильямс, Афраймович-Быков-Шильников, М.И. Малкин, В. Такер, А.Л. Шильников), исследование структуры хаотических аттракторов в отображении Эно (М.Эно, М.Бенедикс-Л.Карлесон), исследование аттракторов в цепях Чуа (В.Н. Белых, Л.Чуа и др.), развитие теории сингулярно-гиперболических аттракторов потоков (К.Моралес, М.Пасифико, Е.А. Сатаев) и отображений (В.Н. Белых, Р. Лози) и т.п. Естественно, все эти результаты могут быть использованы и при исследовании хаотической динамики многомерных систем (размерности ≥ 3 для отображений и ≥ 4 для потоков). Однако, как недавно выяснилось, такие многомерные системы могут обладать странными аттракторами новых типов, т.н. *дикими гиперболическими аттракторами* (Тураев-Шильников). Главной особенность этих аттракторов является то, что они допускают гомоклинические касания, но не содержат устойчивых периодических траекторий, которые не появляются также и при возмущениях (Тураев-Шильников, Белых-Чуа, Е.А. Сатаев). Соответственно дикие гиперболические аттракторы нужно относить к “настоящим” странным аттракторам, образующих класс т.н. псевдогиперболических аттракторов, к которым до недавнего времени можно было приписывать только лишь гиперболические аттракторы и аттракторы Лоренца.

В связи с этим возникает естественный интерес к проблемам теории странных аттракторов многомерных систем, связанный, в частности, с изучением структуры таких аттракторов, в том числе и псевдогиперболических аттракторов, а также сценариев их возникновения. В этом направлении совсем недавно в работах С.В. Гонченко, А.С. Гонченко, и Л.П. Шильникова (2012, 2016) были получены весьма интересные результаты, связанные с построением и исследованием феноменологических сценариев возникновения *дискретных гомоклинических аттракторов* в однопараметрических семействах трехмерных ориентируемых отображений.

Дискретным аттрактор называется потому, что он встречается либо непосредственно у отображений, либо у потоков, но идентифицируется для соответствующих отображений Пуанкаре. Термином *гомоклинический аттрактор* отражается тот факт, что странный аттрактор содержит выделенную неподвижную (периодическую) точку седлового типа и, тем самым, он также содержит целиком ее неустойчивое инвариантное многообразие.

В настоящей диссертации мы продолжаем эту тематику, в основном в двух следующих направлениях.

1) Построение новых универсальных сценариев возникновения странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных меняющих ориентацию (неориентируемых) диффеоморфизмов, а также построение элементов классификации таких аттракторов.

2) Разработка новых качественных и численных методов исследования структуры таких аттракторов. В частности, это обобщение методов карт седел и модифицированных диаграмм Ляпунова, предложенных в работе С.В. Гонченко, А.С. Гонченко (2016), и LMP-метода, предложенного недавно в работе С.В. Гонченко, А.О. Казакова и Тураева (2018). Первые два метода предлагаются в качестве новых эффективных поисковых методов гомоклинических аттракторов у трехмерных неориентируемых отображений и трехмерных потоков, а последний – для численной проверки псевдогиперболичности найденных аттракторов. Его можно рассматривать также в качестве начального и весьма простого метода при решении общей задачи различения настоящих аттракторов и квазиаттракторов.

Кроме того, в диссертации разработанные в пп. 1) и 2) качественные и численные методы иллюстрируются на достаточно большом числе конкретных многомерных систем (в том числе из приложений), допускающих существование странных гомоклинических аттракторов. Некоторые из полученных в диссертации результатов о трехмерных неориентируемых отображениях обобщаются также на случай четырехмерных ориентируемых отображений.

Целью данной работы является исследование дискретных странных гомоклинических аттракторов неориентируемых трехмерных диффеоморфизмов и создание базовых элементов качественной теории таких аттракторов.

Научная новизна: Среди новых результатов, полученных в диссертации, можно выделить следующие:

1. Дана классификация дискретных неориентируемых странных гомоклинических аттракторов по типу структуры их однообходных гомоклинических траекторий. Выделены следующие классы таких аттракторов: дискретные аттракторы Лоренца, восьмерочные аттракторы, спиральные аттракторы, аттракторы Шильникова, двойные аттракторы Лоренца, двойные восьмерочные аттракторы.
2. Построены новые универсальные сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов. Даны примеры реализации этих сценариев в случае неориентируемых трехмерных обобщенных отображений Эно.
3. Обобщен на случай трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов метод карт седел, направленный на эффективный поиск дискретных гомоклинических аттракторов заданных типов.
4. В части, касающейся феноменологического описания неориентируемого аттрактора Шильникова, показано, что замкнутая инвариантная кривая неориентируемого отображения может бифурцировать неизвестным ранее образом – вместо удвоения инвариантной кривой, от нее отрождается замкнутая инвариантная кривая периода два.
5. Построена модификация метода численной проверки необходимых условий псевдогиперболичности странных гомоклинических аттракторов многомерных систем (диффеоморфизмов и потоков), не требующего построения уравнений в вариациях. Этот метод является весьма эффективным при исследовании в том числе систем с первыми интегралами (в диссертации, он апробирован на некоторых системах из приложений, в частности, на неголономных моделях кельтского камня и волчка Чаплыгина).
6. Рассмотренные в диссертации качественные методы распространены на случай трехмерных потоков, с которыми, кроме того, также проведен ряд численных экспериментов. В частности, найден новый пример системы с сильно несимметричным аттрактором Лоренца.

Практическая значимость Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы могут быть применены как в теории динамических систем, так и при исследовании конкретных моделей.

Методология и методы исследования. В диссертации использованы методы качественной теории динамических систем и теории бифуркаций, а также численные методы, использующие как стандартные алгоритмы, так и специально разработанные.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Универсальные сценарии возникновения дискретных странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов (неориентируемые аттрактор Лоренца, восьмерочный аттрактор, спиральный аттрактор, аттрактор Шильникова) и примеры реализации этих сценариев в случае неориентируемых трехмерных обобщенных отображений Эно.
2. Теорема о карте седел и ее следствие об областях существования неориентируемых дискретных гомоклинических аттракторов различных типов. Классификация таких аттракторов по типу структуры их однообходных гомоклинических траекторий.
3. Теоремы о бифуркации удвоения замкнутой инвариантной кривой в случае трехмерного неориентируемого отображения и ее приложение к феноменологическому описанию дискретных неориентируемых аттракторов Шильникова.
4. Модифицированный метод численной проверки необходимых условий псевдогиперболичности странных гомоклинических аттракторов многомерных систем и его иллюстрации для ряда моделей, в том числе моделей неголономной механики.
5. Результаты исследования странных гомоклинических аттракторов трехмерных потоков с использованием разработанных в диссертации методов.

Достоверность Теоретические результаты получены с помощью современных методов качественной теории динамических систем, их достоверность основана на корректности логических построений и соответствии с классическими результатами. Численные эксперименты проведены с помощью адекватных вычислительных методов и корректно построенных алгоритмов, основанных на использовании строгих математических положений, что свидетельствует об их достоверности. В частности, численные эксперименты проверки условий псевдогиперболичности были проведены разными способами, как традиционным (т.н. LMP-метод), так и с помощью его модификации, предложенной автором диссертационной работы. При этом полученные результаты совпадали, что также свидетельствует об их достоверности

Апробация работы. По теме диссертации опубликовано 14 работ. Результаты работы докладывались на следующих конференциях:
“Dynamics, Bifurcations and Chaos”, Нижний Новгород, 2016, 2017, 2018;

конференции “Shilnikov Workshop” 2017, 2017, 2018; публикация в материалах конференции “Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции”; доклад на Крымской осенней математической школе-симпозиуме 2017 и 2018. По теме диссертации были также сделаны доклады на Нижегородском научном семинаре “Нелинейная динамика: теория и приложения” (семинар им. Л.П.Шильникова).

Публикации. Всего по теме диссертации автором опубликовано 14 работ, из них 6 работ – в журналах, рекомендованных ВАК. Основные результаты, выносимые на защиту, являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно, автору принадлежат основные результаты, вошедшие в диссертацию. В частности, в работе [6] автору принадлежит разработка модифицированного LMP-метода, а также численное доказательство свойства псевдогиперболичности аттракторов в неголономных моделях кельтского камня и волчка Чаплыгина. В работе [1] постановка задачи принадлежит А.С. Гонченко, а основные результаты получены автором. В работе [3] автору принадлежат примеры сценариев и построение конкретных примеров их реализации в трехмерных неориентируемых отображениях Эно. В работах [4], [5] автору принадлежит постановка задачи и результаты численных исследований.

Содержание работы

В первой главе обсуждаются новые методы исследования хаотической динамики многомерных систем. В § 1.1 описываются новые феноменологические сценарии возникновения гомоклинических аттракторов в случае трехмерных неориентируемых диффеоморфимов. Особое внимание уделяется отличиям в сценарии возникновения аттракторов Шильникова в ориентируемом и неориентируемом случаях, для чего в § 1.2 доказываются теоремы 1.1 и 1.2 о бифуркациях удвоения инвариантной кривой в случае вложения ее в поток (для T^2, когда T неориентируемо) и в случае, когда такая кривая является диофантовой. В § 1.3 рассматриваются новые методы исследования хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях. § 1.3.1 посвящен методу карт седел применительно к трехмерным обобщенным неориентируемым отображениям Эно. Основным результатом данного параграфа является теорема о расширенной буфуркационной диаграмме неподвижной точки трехмерных неориентируемых отображений Эно. В § 1.3.2 обсуждается модифицированный метод диаграмм показателей Ляпунова и предлагается способ нахождения странных гомоклинических аттракторов с помощью комбинирования этого метода и метода карт седел. В § 1.4 рассматриваются основные понятия теории псевдогиперболических странных аттракторов и обсуждаются некоторые методы их исследования. В частности, в § 1.4.1 дается описание LMP-метода проверки условий псевдогиперболичности аттракторов, а в § 1.4.2 рассматривается вопрос об областях возможного существования псевдогиперболических гомоклинических аттркторов у трехмерных отображений (утверждение 1.1).

Во второй главе рассматриваются примеры дискретных гомоклинических аттракторов трехмерных и четырехмерных диффеоморфизмов. В § 2.1 приводятся примеры таких аттракторов для трехмерных неориентируемых отображений Эно (неориентируемые дискретные аттрактор Лоренца, "восьмерочный" аттрактор, аттрактор Шильникова и др.), а в § 2.2 – конкретные примеры реализации феноменологических сценариев, приводящих к их возникновению. В § 2.3 рассматриваются четырехмерные отображения Эно, для которых показывается, что при малом значении их якобиана возможно существование ориентируемых дискретных странных аттракторов, имеющих неориентируемые аналоги в трехмерном случае.

Третья глава посвящена исследованию свойств псевдогиперболичности странных аттракторов. В § 3.1 дается определение псевдогиперболичности инвариантного множества диффеоморфизма на языке ляпуновских показателей, а также обсуждается роль гомоклинических касаний, сохраняющих или разрушающих псевдогиперболичность. В § 3.2 обсуждается алгоритм LMP-метода проверки достаточных условий псевдогиперболичности, а также его модификация, которая применялась в настоящей работе. В § 3.3 приводятся результаты применения этого метода для определения псевдогиперболичности различных странных аттракторов, как описанных в настоящей диссертации, так и аттракторов других известных систем.

В четвертой главе рассматриваются семейства трехмерных потоков специального вида. В § 4.1 обсуждается метод карт седел для таких семейств (доказывается теорема 4.1) и находятся необходимые условия существования псевдогиперболических гомоклинических аттракторов. В § 4.2 рассматриваются феноменологические сценарии, приводящие к рождению странных гомоклинических аттракторов различных типов. В § 4.3 приводятся конкретные примеры систем с гомоклиническими аттракторами, а также, при помощи LMP-метода, доказывается псевдогиперболичность одного из них – несимметричного аттрактора Лоренца

Содержание главы 1. Во введении к главе 1 приводятся основные определения понятий, используемых в диссертации: странный аттрактор, гомоклинический аттрактор и др., а также дается обзор известных феноменологических сценариев (С.В. Гонченко, А.С. Гонченко, Л.П. Шильников) возникновения гомоклинических аттракторов у трехмерных ориентируемых отображений и многомерных потоков (спиральный аттрактор Шильникова).

§ 1.1 посвящен изучению феноменологических сценариев возникновения дискретных гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях. Для этого рассматриваются однопараметрические семейства T_μ таких отображений. Предполагается, что отображение T_μ при

$\mu_0 < \mu < \mu_1$ имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку O. Соответстченно, ее мультипликаторы λ_1,λ_2,λ_3 такие, что $|\lambda_i| < 1$, и поскольку T_μ неориентируемо, то $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$.

Пусть $\mu = \mu_1$ – это значение параметра, при котором точка O_μ теряет устойчивость в результате мягкой (суперкритической) невырожденной бифуркации. Тогда, в общем случае, μ_1 – это бифуркационное значение параметра, отвечающее либо бифуркации удвоения периода точки O_μ, либо дискретной бифуркации Андронова-Хопфа (бифуркации Неймарка-Сакера). В первом случае у точки O_μ при $\mu = \mu_1$ появляется мультипликатор -1, а во втором – пара мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$ с $0 < \varphi < \pi$. Описываемые сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов, содержащих точку O_μ, предполагают также, что эта точка лежит в некоторой достаточно большой поглощающей области U.

Рассмотрим сначала сценарии, при которых μ_1 – это бифуркационное значение, отвечающее бифуркации удвоения периода точки O_μ. Все они содержат такие этапы в развитии хаоса:

O_μ – устойчивая неподвижная точка $\Rightarrow$ O_μ – седло типа (2,1) с неустойчивым мультипликатором $\lambda_1 < -1$ (после бифуркации удвоения периода) $\Rightarrow$ у седла O_μ появляются гомоклинические траектории.

Так как у точки O_μ при $\mu > \mu_1$ неустойчивое многообразие $W^u(O_\mu)$ является одномерным, то оно состоит из двух сепаратрис W^{u+} и W^{u-}, которые инвариантны относительно T_μ^2, но $T_\mu(W^{u+}) = W^{u-}$ и $T_\mu(W^{u-}) = W^{u+}$, поскольку неустойчивый мультипликатор отрицательный. Поэтому, если одна из сепаратрис пересечет $W^s(O_\mu)$, то это же автоматически сделает и другая. Здесь появляется "внутренняя" симметрия отображения на неустойчивом многообразии его неподвижной точки. В следствии этого у седла O_μ появляются т.н. гомоклинические восьмерки. Заметим, что основные элементы конфигураций этих восьмерок, а значит и форма соответствующих гомоклинических аттракторов, определяются в основном знаками устойчивых мультиплиакторов λ_2 и λ_3 седла O_μ. В зависимости от этого, мы различаем три основных сценария, см. рис.1

В случае $\lambda_1 < -1{,}0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1$ конфигурация сепаратрис W^{u+} и W^{u-} напоминает лоренцевскую ("восьмерка-бабочка"), рис.1а. Поэтому в этом случае мы говорим о сценарии образования *дискретного неориентирумого аттрактора Лоренца.*

В случае $\lambda_1 < -1, -1 < \lambda_2, \lambda_3 < 0$ конфигурация сепаратрис W^{u+} и W^{u-} напоминает обычную гомоклиническую восьмерку, рис.1б. Поэтому в этом случае мы говорим о сценарии образования *дискретного неориентирумого восъмерочного аттрактора.*

В случае $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \rho < 1$, восьмерка будет иметь спиральную конфигурацию, рис.1в. Поэтому в этом случае мы говорим о сценарии образования *дискретного неориентирумого спирального аттрактора.*

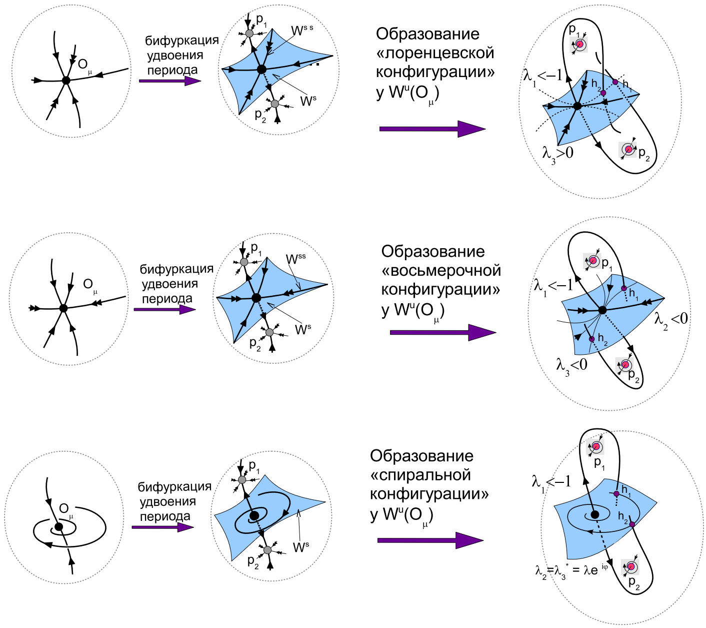

Рис. 1: Иллюстрация основных этапов сценариев, приводящих к возникновению дискретных неориентируемых гомоклинических аттракторов лоренцевского, восьмерочного и спирального типов.

В ряду этих новых сценариев особое место занимает (четвертый) сценарий возникновения неориентируемого дискретного аттрактора Шильникова. Здесь точка O_μ теряет устойчивость при $\mu = \mu_1$ в результате мягкой (суперкритической) бифуркации Неймарка-Сакера. Сама точка O_μ становится седло-фокусом типа (1,2) с мультипликаторами $\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\psi}, -1 < \lambda_3 < 0$, где $\rho > 1$, а в её окрестности рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая L. Поначалу эта кривая является аттрактором, затем она теряет устойчивость, например, в результате ее "удвоения" (рис.2б). После этого неустойчивое мноообразие $W^u(O_\mu)$ образует границу "неориентируемой воронки Шильникова", основные этапы ее образования показаны на рис. 2. Теперь внутрь этой воронки затягиваются все близкие траектории (рис.2г), и может возникнуть странный аттрактор. В случае, когда этот аттрактор содержит точку O_μ (седло-фокус типа (1,2)) и ее двумерное неустойчивое инвариантное многообразие, мы называем его *дискретным неориентируемым аттрактором Шильникова.*

Однако, здесь есть принципиальные отличия от ориентируемого случая. В частности, неориентируемая "воронка Шильникова" образуется более сложным образом – после бифуркации удвоения инвариантной кривой (в ориентируемом случае это происходило из-за "дифференцируемой бифуркации", когда кривая L меняла свой тип с узлового на фокусный). Отметим существенное отличие структуры бифуркаций удвоения инвариантных кривых в ориентируемом и неориентируемом случаях. В ориентируемом случае сама инвариантная кривая становится седловой, а в её окрестности появляется *одна* устойчивая инвариантная кривая, обвивающая исходную. В неориентируемом случае такая бифуркация имеет другую структуру: инвариантная кривая L также становится седловой, но в ее окрестности появляются *две* устойчивые инвариантные кривые периода два. Это связано с тем, что вблизи бифуркационного момента центральным двумерным инвариантным многообразием кривой L в ориентируемом случае является лист Мёбиуса, а в неориентируемом – цилиндр (лемма 1.1). Поскольку бифуркация удвоения инвариантной кривой в неориентируемом случае ранее не изучалась, поэтому в § 1.2 ей уделено особое внимание.

Помимо четырех универсальных сценариев в § 1.1.5 также приводятся два специальных сценария возникновения *дискретного двойного неориентируемого аттрактора Лоренца* и *дискретного двойного неориентируемого восьмерочного аттрактора*. Особенность данных сценариев заключается в том, что однопараметрические семейства, в которых они могут возникать, в каждом случае должны обладать специальной симметрией.

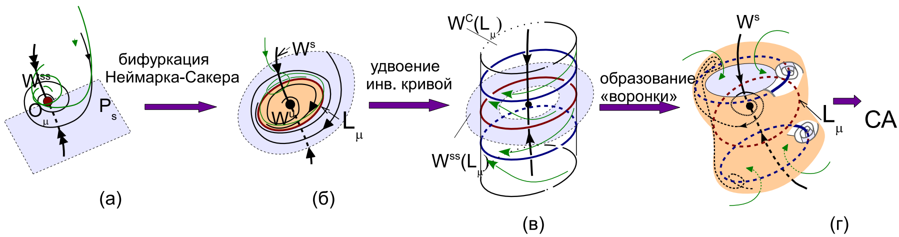

Рис. 2: Сценарий, приводящий к возникновению дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова.

В § 1.2 рассматриваются бифуркации удвоения инвариантных кривых трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов. В частности в § 1.2.1 доказываются две теоремы для случая, когда инвариантная кривая является нерезонансной. Первая теорема предполагает условие вложения диффеоморфизма в поток в малой окрестности инвариантной кривой и формулируется следующим образом.

Теорема 1.1 Предположим, что $T^2(\mu)$ вкладывается в поток в достаточно малой фиксированной окрестности нерезонансной инвариантной кривой L_μ[2] для всех значений параметра μ, близких к бифуркационному значению $\mu = \mu_1$. Тогда возможны следующие три случая.

1) Случай $\Lambda_3(\mu_1) = 0$. При $\mu > \mu_1$ кривая L_μ становится седловой, и при общих условиях в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ, которые образуют цикл периода 2, т.е. $T(L^1) = L^2$ и $T(L^2) = L^1$.

2) Случай $\Lambda_2(\mu_1) = 0$. В общем случае при $\mu = \mu_1$ устойчивая кривая L_μ сливается с некоторой седловой, и обе исчезают при $\mu > \mu_1$.

3) Случай $\Lambda_2(\mu_1) = 0$ при условии, что при $\mu > \mu_1$ кривая L_μ сохраняется. Тогда при $\mu > \mu_1$ кривая L_μ становится седловой и в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ, которые являются неподвижными относительно T_μ, т.е. $T(L^1) = L^1$ и $T(L^2) = L^2$.

Заметим, что случай 3) теоремы 1.1 имеет, по-видимому, коразмерность 2, так как он отвечает бифуркации вилки предельного цикла у потока X_μ. Здесь более типичной должен быть случай 2).

Для второй теоремы также требуется выполнение специального условия, а именно, предполагается, что число вращений инвариантной кривой является диофантовым. Напомним, что иррациональное число ω называется *диофантовым*, если существуют такие $c > 0$ и $\alpha \geq 2$, что для любых натуральных p и q выполняется неравенство

$$|\omega - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^\alpha}$$

.

Теорема 1.2 Пусть T – C^∞-гладкий трехмерный неориентируемый диффеоморфизм, который имеет негрубую диофантовую инвариантную кривую L, у которой отображение T в ограничении на двумерное центральное многообразие $W^c(L)$ обращает ориентацию.[3] Тогда существуют такие C^r-гладкие возмущения, что в окрестности инвариантной кривой L на W^c появляется инвариантная кривая (L_1,L_2) периода 2 того же типа устойчивости, что и L, а L меняет свой тип устойчивости.

В § 1.2.2 также рассмотрены возможные бифуркации в случае, когда инвариантная кривая является резонансной.

В § 1.3 дается описание методов нахождения странных гомоклинических аттракторов. Первым из таких методов рассматривается метод карт

[2] Охарактеризовать тип нерезонансной кривой L трехмерного отображения можно по спектру ее показателей Ляпунова $\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3$. Один из ее показателей, направленный по касательной вдоль кривой, всегда нулевой, например, $\Lambda_1 = 0$. Тогда кривая L

– *устойчивая*, если $\Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$, *вполне неустойчивая*, если $\Lambda_2 > 0, \Lambda_3 > 0$ – при этом она *узлового типа*, если $\Lambda_2 \neq \Lambda_3$, и *фокусного типа*, если $\Lambda_2 = \Lambda_3$;

– *седловая*, если $\Lambda_2\Lambda_3 < 0$.

[3] Негрубость кривой L означает, что у отображения T_{W^c} оба ляпуновских показателя точек на кривой L (показатели Λ_1 и Λ_3) равны нулю.

седел на примере трехмерных обобщенных отображений Эно вида:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y,z), \tag{1}$$

где

$$g(0,0) = g_y(0,0) = g_z(0,0) = 0,$$

при условии, что якобиан B отображения отрицателен $-1 < B < 0$, т.е. когда отображение (1) является неориентируемым.

Суть метода карт седел, применительно к отображению (1), состоит в том, что для данного фиксированного значения якобиана B на плоскости параметров (A,C) строятся области, соответствующие разным наборам мультипликаторов неподвижной точки $O(0,0,0)$, которые являются корнями характеристического уравнения

$$\lambda^3 - A\lambda^2 - C\lambda - B = 0. \tag{2}$$

Здесь наиболее важными являются три момента:

A1) Расположение мультипликаторов относительно единичной окружности: является ли точка O устойчивой или седловой типа (2,1) или (1,2), где первая цифра обозначает размерность устойчивого многообразия, а вторая - размерность неустойчивого многообразия.

A2) Являются ли мультипликаторы вещественными или комплексными, тем самым различаются седла и седло-фокусы.

A3) В случае (2,1) нужно указать больше или меньше единицы его седловая величина σ (модуль произведения устойчивого и неустойчивого мультипликаторов, ближайших к мнимой оси), а также когда ведущий устойчивый мультипликатор является положительным или отрицательным.

Далее, используя указанные прицipы, для отображения (1) на карте седел определяются кривые, служащие границами областей, которые отвечают различным в силу условий 1)-3) наборам мультипликаторов точки $O(0,0,0)$.

Для нахождения этих областей доказывается теорема 1.3.

Теорема 1.3 В случае отображения (1) расширенная бифуркационная диаграмма его неподвижной точки $O(0,0,0)$ при каждом фиксированном B, где $-1 < B < 0$, на плоскости параметров A и C (карта седел) содержит 14 областей, отвечающих различным в силу условий A1)–A3) наборам мультипликаторов точки O.

Аналитически границы этих областей определяются с помощью лемм 1.3–1.6, а графически карта седел для отображения (1) выглядит как на рис. 3.

При численных исследованиях гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях использование карты седел (которая строится “мгновенно”) совместно с цветными диаграммами показателей

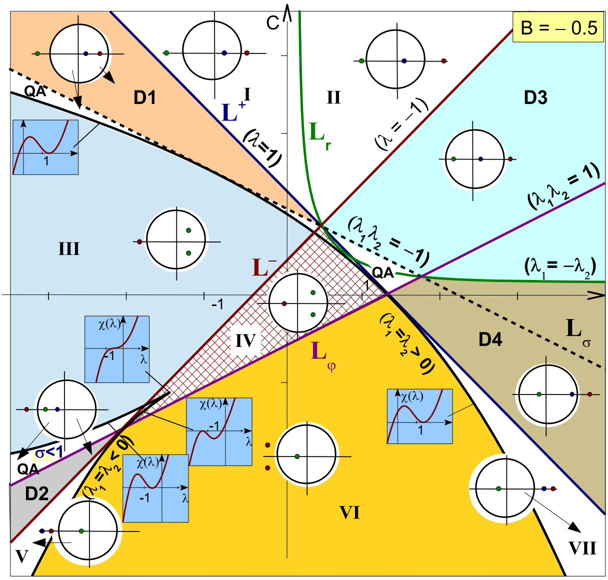

Рис. 3: Карта седел отображения (1) при $B = -0.5$

Ляпунова оказалось весьма эффективным. При этом на последних отдельным цветом указываются области с гомоклиническими аттракторами (когда численно получаемые точки на аттракторе приближаются к точке O на расстояние не меньше, чем 10^{-4}). Тогда, если, например, данная область принадлежит области III карты седел, то аттрактор – определенно неориентируемый спиральный, а если области VI – то неориентируемый аттрактор Шильникова и т.д.

Однако заметим, что особый интерес для нас представляют т.н. *псевдогиперболические аттракторы*, которым посвящен § 1.4, где рассматриваются основные понятия теории псевдогиперболических аттракторов и кратко описывается один из методов проверки условий псевдогиперболичности аттракторов в конкретных моделях. При этом отдельно дается определение псевдогиперболического аттрактора на случай потоков (определение 1.1) и диффеоморфизмов (определение 1.2).

Содержание главы 2. В § 2.1 рассматриваются конкретные примеры странных гомоклинических аттракторов трехмерных неориентируемых отображений, основы теории которых были представлены в гл.1. А именно, приводятся примеры трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно с такими аттракторами, как неориентируемые дискретные аттрактор Лоренца, восьмерочный аттрактор, двойной восьмерочный аттрактор, спиральный аттрактор, аттрактор Шильникова. Для некоторых аттракторов схематично показывается поведение гомоклинических траекторий, а также их отличие от ориентируемого случая. В конце параграфа также приводятся некоторые примеры дискретных гомоклинических аттракторов,содержащих точку периода два.

В § 2.2 рассматриваются примеры реализации феноменологических сценариев из гл.1 в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых отображений Эно вида (1). Здесь дается описание четырех таких сценариев приводящих к возникновению таких типов неориентируемых гомоклинических аттракторов:

– неориентируемого дискретного "тонкого" аттрактора Лоренца;
– неориентируемого восьмерочного аттрактора;
– неориентируемого спирального аттрактора;
– неориентируемого аттрактора Шильникова.

В § 2.3 рассматриваются четырехмерные отображения Эно вида

$$\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = w, \bar{w} = Ax + By + Cz + Dw + g(y,z,w), \tag{3}$$

где A,B,C,D – некоторые коэффициенты, $g(y,z,w)$ – функция только координат y, z и w, обращающаяся в ноль при $y = z = w = 0$ вместе со своими первыми производными. Численно показывается, что при достаточно малых значениях якобиана $J = -A$ у отображений (3) могут существовать(ориентируемые четырехмерные) странные аттракторы, имеющие свои аналоги среди аттракторов трехмерных неориентируемых отображений Эно. В качестве примеров приводятся четыре типа таких аттракторов.

Содержание главы 3. Эта глава посвящена в основном прикладным аспектам теории псевдогиперболических аттракторов, основные элементы которой были изложены в § 1.3 диссертации. В § 3.1 дается определение псевдогиперболичности диффеоморфизма в ограничении на его поглощающую область (определение 3.1) на языке показателей Ляпунова. Рассмотрим диффеоморфизм f, определенный в $\mathbb{R}^m$, и пусть Df – это его дифференциал. Открытая область $D \subset \mathbb{R}^m$ называется *поглощающей областью* диффеоморфизма f, если $f(\overline{D}) \subset D$. Если говорить кратко, псевдогиперболичность диффеоморфизма f на D означает, что в каждой точке области D существуют два трансверсальных линейных подпространства N_1 и N_2, непрерывно зависящие от точки и инвариантные относительно дифференциала Df отображения, такие, что Df является экспоненциально сильно сжимающим на N_1 и растягивающим (экспоненциально) объемы на N_2 (здесь слово "сильно" означает, что любое возможное сжатие в N_2 равномерно слабее любого сжатия в N_1). В случае трехмерных диффеоморфизмов эти условия налагают следующие ограничения на показатели Ляпунова

$$\Lambda_1 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0. \tag{4}$$

Таким образом, условия (4) нужно рассматривать в качестве одного из необходимых условий псевдогиперболичности странных аттракторов трехмерных отображений. Только нужно иметь в виду, что в качестве Λ_i

обычно рассматриваются численно найденные значения показателей, поэтому если даже для них условия (4) выполняются, это еще не гарантирует искомую псевдогиперболичность. В § 3.1 также обсуждается влияние гомоклинических касаний на свойство псевдогиперболичности (показывается, что простые гомоклинические касания не разрушают псевдогиперболичность, в отличие от непростых касаний, примеры которых приводятся). Также особо подчеркивается, что свойство псевдогиперболичности является открытым, т.е. оно не нарушается при любых малых гладких возмущениях.

В § 3.2 приводится описание LMP-метода проверки достаточных условий псевдогиперболичности трехмерных отображений. Кратко алгоритм его работы можно представить следующим образом. Метод состоит из двух этапов, первый из которых – стандартный: вычисляется спектр показателей Ляпунова Λ_1,Λ_2,Λ_3 (если условие (4) не выполнено, метод прекращает свою работу) и, параллельно, сохраняется массив данных $N = \{x_n\}$, где $x_{n+1} = f(x_n)$ и $n = 1,...k$, содержаший информацию о точках x_n на аттракторе. Второй этап не совсем стандартный: вычисляется максимальный показатель Ляпунова для обратных итераций отображения, используя, по существу, информацию, полученную на первом этапе. В частности, обратные итерации принудительно привязаны к тем точкам аттрактора, которые были получены на первом этапе.

В качестве конечного результата вычислений строится LMP-граф на плоскости координат $(dx,d\varphi)$, где dx – расстояние между двумя точками x и y аттрактора и $d\varphi$ – угол между векторами $N_1(x)$ и $N_1(y)$.

В настоящей работе для проверки свойства псевдогиперболичности было создано обобщение LMP-метода, которое позволяет получать ляпуновские показатели и вектора без использования уравнений в вариациях, которые используются в оригинальном методе. Данное обобщение позволяет осуществлять проверку условий псевдогиперболичности систем, в которых не удается явным образом задать отображение[4].

В § 3.3 представлены результаты работы LMP-метода проверки достаточных условий псевдогиперболичности аттракторов различных систем, в частности: аттрактор Эно, аттрактор Лози, аттрактор Чена, аттракторы в системах Лоренца и Шимицу-Мариока, аттракторы трехмерных неориентируемых отображений Эно. С помощью данного метода было показано, что из рассмотренных аттракторов аттрактор Лоренца системы Лоренца (при классических значениях параметров), дискретный аттрактор Лоренца периода 2 в неориентируемом отображении Эно, а также аттракторы неголономных моделей кельтского камня и волчка Чаплыгина могут претендовать на то, чтобы называться “настоящими.”

[4]Примерами таких систем могут служить неголономные модели кельтского камня и волчка Чаплыгина, где отображение задается, как отображение Пуанкаре.

Содержание главы 4. В § 4.1 рассматривается система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y + g_1(x,y,z), \\ \dot{y} = z + g_2(x,y,z), \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x,y,z), \end{cases} \tag{5}$$

где A, B и C – параметры системы, а $g_i, i = 1, 2, 3$ – функции, обращающиеся в нуль вместе с первыми производными в начале координат.

У системы (5) состояние равновесия $O(0{,}0{,}0)$ имеет дивергенцию, равную C, а его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A = 0. \tag{6}$$

Мы распространим метод карт седел и на случай потоков вида (5). В отличие от отображений (см. § 1.2), здесь уже для каждого фиксированного отрицательного значения дивергенции C на плоскости параметров (A,B) выделяются области (теорема 4.1), соответствующие разным наборам корней характеристического уравнения (6). Кроме того, когда равновесие O является седлом или седло-фокусом типа (2,1), различаются области, где O имеет положительную или отрицательную седловую величину ν (здесь ν – это сумма действительных частей двух собственных значений точки O, лежащих справа и слева от мнимой оси и ближайших к ней).

На рисунке 4 показан фрагмент карты седел для системы (5) при $C = -1.4$. В области I состояние равновесия $O(0{,}0{,}0)$ является асимптотически устойчивым. В остальных областях состояние равновесие $O(0{,}0{,}0)$ – седлового типа, и здесь могут существовать странные гомоклинические аттракторы, содержащие точку O. В работе показано, что представленное на рис. 4 разбиение на области качественно сохраняется при всех $C < 0$. Поэтому мы можем прогнозировать какого типа гомоклинические аттракторы могут существовать при значениях параметров A,B из этих областей. Особый интерес при этом представляют случаи, когда ожидаемый аттрактор является псевдогиперболическим.

Далее дается описание всех восьми областей, образуемых данными кривыми, а также гомоклинических аттракторов, которые могут возникать при соответствующих значениях параметров.

В § 4.2 рассматриваются феноменологические сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в трехмерных потоках. При этом особое внимание уделяется описанию сценариев возникновения аттракторов, которые могут возникать в семействе систем (5), а именно:

– Сценарии возникновения несимметричного аттрактора Лоренца
– Сценарий возникновения спирального аттрактора
– Сценарий возникновения аттрактора Шильникова

В § 4.3 приводятся конкретные примеры странных гомоклинических аттракторов трехмерных потоков, обнаруженные в семействе (5). Это –

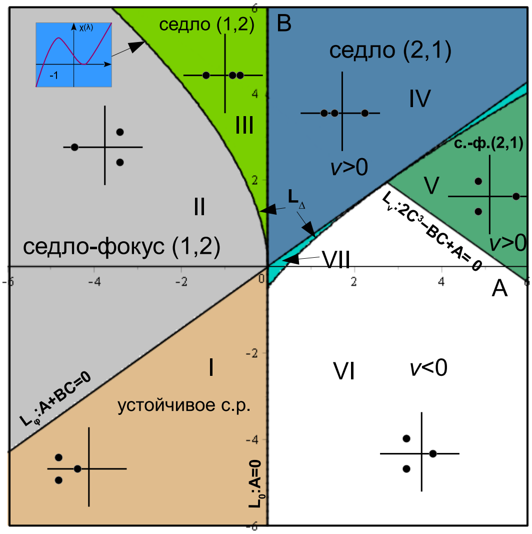

Рис. 4: Карта седел для системы (5), при $C = -1.4$.

аттрактор Шильникова, спиральный аттрактор, а также несимметричный аттрактора Лоренца.

Для проверки свойства псевдогиперболичности последнего был применен LMP-метод проверки псевдогиперболичности, и в результате исследований было подтверждено, что данный аттрактор действительно является псевдогиперболическим.

В **заключении** приводятся основные результаты представленные в диссертации, а также обсуждаются перспективы дальнейшего развития тематики диссертиционных исследований.

Публикации

Публикации в изданиях, включенных в перечень международной базы цитирования Web of Science

[1] Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I. Pseudohyperbolic Attractors //International Journal of Bifurcation and Chaos. - 2018. - V. 28. - No. 11. - P. 1830036.

Публикации в изданиях, включенных в перечень международной базы цитирования Scopus

[2] Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О., Козлов А.Д. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. - 2017. - Т. 25. - №. 2. - С. 4-36.

Публикации в изданиях, включенных в перечень международной базы цитирования Zentralblatt MATH (zbMATH)

[3] Гонченко А. С., Козлов А. Д. О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях //Журнал Средневолжского математического общества. - 2016. - Т. 18. - №. 4. - С. 17-29.
[4] Козлов А. Д. Примеры странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях //Журнал Средневолжского математического общества. - 2017. - Т. 19. - №. 2. - С. 62-75.
[5] Казаков А. О., Козлов А. Д., Коротков А. Г. О гомоклинических аттракторах в трехмерных системах с постоянной дивергенцией //Материалы XIII международной научной конференции. (Саранск, 12-16 июля 2017 г.). - Саранск: СВМО, 2017. - С. 364-369.
[6] Казаков А. О., Козлов А. Д. Несимметричный аттрактор Лоренца как пример нового псевдогиперболического аттрактора в трехмерных системах //Журнал СВМО. - 2018. - Т. 20, № 2. - С. 187-197.

Прочие работы

[7] Gonchenko A.S., Kozlov A.D. Strange attractors in three-dimensional nonorientable Henon maps. //Int. Conf. “Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors” dedicated to memory of L.P. Shil’nikov. - 2016. - P. 13.
[8] Gonchenko A.S., Kozlov A.D. On scenarios of chaos appearance in three-dimensional nonoriented maps. //Int. Conf. Shilnikov WorkShop. - 2016. - P. 7.
[9] A. Kozlov., Using flow saddle charts for searching homoclinic attractor. // Int. Conf. “Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors” dedicated to memory of L.P. Shil’nikov. - 2017. - P. 17.
[10] Казаков А. О., Козлов А. Д., Коротков А. Г., О гомоклинических

аттракторах в трехмерных системах с постоянной дивергенцией. //Тезисы докладов 29-й Крымской осенней математической школы-симпозиума. - 2017. - С. 66.
[11] Kozlov A, On homoclinic attractors of three-dimensional systems with constant divergency. //Int. Conf. Shilnikov WorkShop. - 2016. - P. 18.
[12] Kozlov A., On asymmetric Lorenz attractors of three-dimensional systems. // Int. Conf. "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors" dedicated to memory of L.P. Shil'nikov. - 2018. - P. 13.
[13] Козлов А.Д., Казаков А.О., О несимметричном аттракторе Лоренца в трехмерных, системах. //Тезисы докладов 29-й Крымской осенней математической школы-симпозиума. - 2018. - С. 116.
[14] A. Kozlov, On numerical methods of pseudehyperbolicity check. //Int. Conf. Shilnikov WorkShop. - 2018. P. 27.

Козлов Александр Дмитриевич

О сценариях перехода к диссипативной хаотической динамике в семействах меняющих ориентацию трехмерных диффеоморфизмов

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.
Типография ______________________________________