НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

Институт Информационных Технологий Математики и Механики

На правах рукописи

Козлов Александр Дмитриевич

О сценариях перехода к диссипативной хаотической динамике в семействах меняющих ориентацию трехмерных диффеоморфизмов

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

(специальность: дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление - 01.01.02)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, Гонченко С.В.

Нижний Новгород

2019

Содержание

Введение **4**

1 Методы исследования хаотической динамики трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов **26**

1.1 Сценарии возникновения дискретных гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых диффеоморфихмах 33

1.1.1 Сценарий возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Лоренца 33

1.1.2 Сценарий возникновения дискретного неориентируемого восьмерочного аттрактора 35

1.1.3 Сценарий возникновения дискретного неориентируемого спирального аттрактора 35

1.1.4 Сценарий возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова 36

1.1.5 Сценарии возникновения дискретных гомоклинических аттракторов в неориентируемых отображениях с симметрией. 39

1.2 О бифуркациях замкнутых инвариантных кривых трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов 41

1.2.1 Теоремы о бифуркациях удвоения нерезонансных инвариантных кривых 45

1.2.2 Бифуркации резонансных инвариантных кривых . . . 53

1.3 Методы нахождения странных гомоклинических аттракторов 57

1.3.1 Метод карт седел для неориентируемых трехмерных отображений 57

1.3.2 Обобщенные диаграммы показателей Ляпунова . . . 68

1.4 Псевдогиперболические аттракторы и методы их исследования 69

1.4.1 LMP-метод проверки псевдогиперболичности и его обобщение 75

1.4.2 К вопросу о существовании псевдогиперболических гомоклинических аттракторов у трехмерных неориентируемых отображений. 77

2 Примеры странных гомоклинических аттракторов и сценариев их возникновения в трехмерных неориентируемых отображениях Эно 80

2.1 Примеры гомоклинических аттракторов трехмерных неориентируемых отображениях Эно 81

2.1.1 Неориентируемый дискретный аттрактор Лоренца . . 81

2.1.2 Неориентируемый дискретный восьмерочный аттрактор 83

2.1.3 Двойной неориентируемый дискретный восьмерочный аттрактор 84

2.1.4 Неориентируемый дискретный спиральный аттрактор и аттрактор Шильникова 84

2.2 Реализация сценариев возникновения странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно 87

2.3 Примеры странных аттракторов четырехмерных отображений Эно 91

3 Псевдогиперболические аттракторы 95

3.1 Определение и свойства псевдогиперболичности 95

3.2 Метод проверки псевдогиперболичности 101

3.3 Результаты проверки псевдогиперболичности некоторых аттракторов 104

4 Странные гомоклинические аттракторы трехмерных потоков 114

4.1 Метод карт седел для трехмерных потоков 116

4.1.1 Доказательство теоремы 4.1 117

4.2 О феноменологических сценариях возникновения странных гомоклинических аттракторов в трехмерных потоках 122

4.3 Примеры странных гомоклинических аттракторов трехмерных потоков 128

4.3.1 Примеры спиральных аттракторов трехмерных потоков 130

4.3.2 Примеры несимметричных аттракторов Лоренца . . . 131

Заключение 134

Список литературы **136**

Введение

Настоящая работа относится к одному из наиболее важных и интересных разделов качественной теории динамических систем – теории многомерных систем со сложным, хаотическим поведением траекторий.

Основы качественной теории динамических систем были заложены еще в конце 19-го и начале 20-го века в классических работах А. Пуанкаре, Ж. Адамара, А.М. Ляпунова, И. Бендиксона, Дж. Биркгофа. Качественная теория и теория бифуркаций динамических систем на плоскости была построена в 30-х годах в работах А.А. Андронова, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера, Л.С. Понтрягина. Основные элементы теории динамических систем на замкнутых двумерных многообразиях были построены в 40-50-х годах в работах А.Г. Майера, М. Морса, М. Пейксото, Х. ДеБаггиса, К. Пью и др. Позднее эта теория была развита в работах С.Х. Арансона, В.З. Гринеса, М. Любич и других.

В 60-е годы началось бурное развитие качественной теории многомерных динамических систем (размерность которых не меньше трех для потоков и двух для отображений). Прежде всего это касалось теории грубых динамических систем, получившей наименование гиперболической теории. Основы этой теории были заложены в работах В.М. Алексеева, Д.В. Аносова, Р. Боуэна, Р. Вильямса, Р. Манэ, К. Пью, К. Робинсона, Я.Г. Синая, С. Смейла, Д. Френкса, Л.П. Шильникова, М. Шуба и др. При этом, как оказалось, грубые (гиперболические) системы, в отличие от двумерных, могут допускать и счетное множество периодических траекторий. Хорошо известными примерами такого рода являются двумерный диффеоморфизм с подковой Смейла [113] и диффеоморфизм Аносова двумерного тора [1]. К настоящему времени гиперболическая теория представляет собой важную самостоятельную часть качественной теории, в которой практически не осталось нерешенных проблем.

Основы теории нелокальных бифуркаций многомерных динамических систем были заложены в работах Л.П. Шильникова. Так еще в 60-х годах им были исследованы бифуркации гомоклинических траекторий к состояниям равновесия типа седло [36, 40], седло-узел [36], седло-седло с одной [38] и несколькими [41] гомоклиническими траекториями, а также бифуркации гомоклинических петель состояний равновесия типа седло-фокус [37, 39, 42]. В дальнейшем бифуркации многомерных динамических систем изучались в работах В.И. Арнольда, В.С. Афраймовича, В.Н. Белых, Л.А. Белякова, В.В. Быкова, М. Вианы, Н.К. Гаврилова, С.В. Гонченко, Л. Диаса, Ю.С. Ильяшенко, Ю.А. Кузнецова, Л.М. Лермана, В.И. Лукьянова, А.Д. Морозова, Ю.И. Неймарка, А.И. Нейштадта, Ш. Ньюхауса, Дж. Пэлиса, К. Симо, Ф. Такенса, Д.В. Тураева, А.Я. Хомбурга и др.

Развитие гиперболической теории и теории бифуркаций многомерных динамических систем привело, в свою очередь, к открытию в 60–70-х годах динамического хаоса, что по праву считается одним из самых замечательных достижений современной науки. Благодаря этому открытию стало понятно, что сложное поведение траекторий является характерным свойством нелинейных динамических систем, и, таким образом, для многих проблем естествознания и техники оказалось возможным получить адекватное математическое описание.

Математическим образом динамического хаоса в диссипативных системах является *странный аттрактор* – нетривиальное притягивающее замкнутое инвариантное множество. К настоящему времени принято разделять странные аттракторы на две группы: *настоящие странные аттракторы* и *квазиаттракторы.*

Настоящим странным аттрактором называется такой, у которого, по определению, траектория любой его точки имеет положительный максимальный ляпуновский показатель, и это свойство сохраняется для всех достаточно близких систем. Такие аттракторы могут быть грубыми – это гиперболические странные аттракторы, или негрубыми. Среди последних можно выделить хорошо известные аттракторы лоренцевского типа многомерных потоков, а также сравнительно недавно открытые *псевдогиперболические аттракторы.*

Квазиаттракторы составляют громадное большинство известных на сегодня странных аттракторов, встречающихся в приложениях. Они обладают весьма сложной структурой, но в отличие от настоящих аттракторов могут содержать устойчивые периодические траектории весьма больших периодов, которые также неизбежно возникают при сколь угодно малых возмущениях. Однако периоды таких траекторий настолько большие, а области притяжения насколько экстремально малые, что в экспериментах, в том числе и численных, они никак себя не проявляют. Поэтому “на физическом уровне” квазиаттракторы могут ничем не отличаться от настоящих аттракторов. Теория квазиаттракторов была заложена в работах В.С. Афраймовича и Л.П. Шильникова, и в настоящее время она представляет собой большую область теории динамического хаоса, в которой остается еще много открытых проблем. Одна из таких проблем – это то как, собственно, различать квазиаттракторы и настоящие аттракторы. Эта задача частично рассматривается и в настоящей диссертации

Теория гиперболических странных аттракторов была развита в работах Д.В. Аносова, Р. Вильямса, С. Смейла, Р.В. Плыкина, В.З. Гринеса, С.Х. Арансона, О.В. Починки, С.П. Кузнецова. Эта теория в настоящее время представляет собой достаточно хорошо изученную область теории динамического хаоса, в которой практически не осталось "белых пятен".

Однако гиперболические аттракторы редко встречаются в приложениях [27], в отличие от странных аттракторов других типов. Также как и для гиперболической теории, бурному развитию которой дал начало пример Смейла [113] его знаменитой подковы, в математической теории динамического хаоса эту роль сыграли две работы: работа Э.Лоренца [97], в которой был открыт знаменитый аттрактор Лоренца, а также работа Д. Рюэля и Ф. Такенса [107], в которой, собственно, и был введен термин “странный аттрактор”, а также было показано, что хаос может возникать при разрушении трехмерного тора. Эта последняя работа вызвала большой интерес у физиков и математиков, так как показала, что хорошо известный сценарий Ландау-Хопфа возникновения турбулентности в результате бесконечной цепочки добавления частот может легко прерываться – приводить к хаотической динамике – уже при появлении третьей частоты. Тем самым, динамический хаос – странные аттракторы – может возникать уже у конечномерных диссипативных систем.

К настоящему времени имеется большое множество работ, по теории странных аттракторов. Отметим только, что важнейший вклад в эту теорию был сделан Л.П. Шильниковым и его учениками. Ими была построена теория спиральных аттракторов (Л.П. Шильников), теория лоренцевских аттракторов (геометрическая модель – Афраймович-Быков-Шильников), теория тор-хаоса (возникновение хаоса в результате разрушения двумерного тора – Афраймович-Шильников, и при исчезновении периодического движения типа седло-узел с гомоклинической траекторией – Лукьянов-Шильников), теория квазиаттракторов (Афраймович-Шильников) теория псевдогиперболических странных аттракторов – Тураеев-Шильников, математические основы теории гомоклинического хаоса – Гонченко-Тураев-Шильников) и др. Тем не менее, в отличие, например, от гиперболической теории, теория странных негиперболических аттракторов далека от своего завершения, здесь еще есть много актуальных и нерешенных проблем.

В частности, одной из основных проблем является задача описания сценариев перехода к странным аттракторам от простых притягивающих режимов – устойчивых состояний равновесия и периодических траекторий. В случае двумерных отображений и трехмерных потоков в этом направлении, как хорошо известно, получено большое число весьма интересных и фундаментальных результатов. Здесь достаточно отметить такие из них, как описание сценариев перехода к спиральному странному аттрактору (Л.П. Шильников), исследование бифуркаций, приводящих к возникновению аттрактора Лоренца (Афраймович-Быков-Шильников, А.Л. Шильников), доказательство существования хаотического аттрактора в отображении Эно (М.Эно, М.Бенедикс, Л.Карлесон), исследование аттракторов в цепях Чуа (В.Белых, Л.Чуа и др.), а также построение новых аттракторов таких, как сингулярно-гиперболические аттракторы (Моралес, Пасифико, Е.А. Сатаев), аттрактор Белых, аттрактор Лози и т.п. Естественно, все эти результаты могут быть использованы и при исследовании хаотической динамики многомерных систем (размерности ≥ 3 для отображений и ≥ 4 для потоков). Однако, как недавно выяснилось, такие многомерные системы могут обладать странными аттракторами новых типов, т.н. *дикими гиперболическими аттракторами* (Тураев-Шильников). Главной особенность этих аттракторов является то, что они допускают гомоклинические касания, но не содержат устойчивых периодических траекторий, которые не появляются также и при возмущениях (Тураев-Шильников, Белых-Чуа, Е.А. Сатаев). Соответственно дикие гиперболические аттракторы нужно относить к "настоящим" странным аттракторам, к которым, как известно, до недавнего времени можно было приписывать только лишь гиперболические и квазигиперболические (аттракторы Лоренца) странные аттракторы.

В связи с этим возникает естественный интерес к проблемам хаотической динамики многомерных систем, связанный, в частности, с нахождением сценариев возникновения странных аттракторов, в том числе и нового типа – диких гиперболических. В этом направлении совсем недавно в работах С.В. Гонченко, А.С. Гонченко, и Л.П. Шильникова [21, 69] были получены весьма интересные результаты, связанные с построением и исследованием феноменологических сценариев возникновения *дискретных гомоклинических аттракторов* в однопараметрических семействах трехмерных ориентируемых отображений.

Дискретным аттрактор называется потому, что он встречается либо непосредственно у отображений, либо у потоков, но идентифицируется для соответствующих отображений Пуанкаре. Термином *гомоклинический аттрактор* отражается тот факт, что аттрактор содержит выделенную неподвижную (периодическую) точку седлового типа, тем самым этот аттрактор содержит все ее гомоклинические траектории, а также неустойчивое инвариантное многообразие этой точки.

В настоящей диссертации мы продолжаем эту тематику, но будем рассматривать меняющие ориентацию трехмерные диффеоморфизмы, которые характеризуются тем, что у них якобиан везде отрицательный. Далее для краткости такие диффеоморфизмы мы будем называть неориентируемыми. Исследования проводятся в основном в двух следующих направлениях.

1) Построение новых универсальных сценариев возникновения странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов, а также построение элементов классификации таких аттракторов.

2) Разработка новых методов исследования структуры таких аттракторов. В частности, это обобщение метода карт седел [21, 69], метода диаграмм Ляпунова, а также LMP-метода, предложенного недавно в [76]. Первые два метода предлагаются в качестве новых эффективных поисковых методов гомоклинических аттракторв у неориентируемых отображений и трехмерных потоков, а последний – для численной проверки псевдогиперболичности найденных аттракторов.

Кроме того, в диссертации разработанные в пп. 1) и 2) качественные и численные методы иллюстрируются на достаточно большом числе конкретных многомерных систем (в том числе из приложений), допускающих существование странных гомоклинических аттракторов. Некоторые из полученных в диссертации результатов о трехмерных неориентируемых отображениях обобщаются на случай четырехмерных ориентируемых отображений. Мы также показываем, что разработанные сценарии и методы могут быть эффективно перенесены на случай трехмерных потоков, при изучении в них гомоклинических аттракторов (в этом случае аттрактор содержит седловое состояние равновесия – седло или седло-фокус).

Объект исследования Основной объект исследования – это хаотическая динамика трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов, а сами исследования проводятся по следующим основным темам.

1) Динамика и бифуркации трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно различного вида.

2) Универсальные сценарии перехода к хаосу в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов – от устойчивой неподвижной точки к странному гомоклиническому аттрактору.

3) Конкретные примеры динамических систем, допускающих странные гомоклинические аттракторы различных типов.

4) Методы изучения хаотической динамики.

Цели и задачи исследования Основоной целью данной работы является исследование дискретных странных гомоклинических аттракторов неориентируемых трехмерных диффеоморфизмов и создание базовых элементов качественной теории таких аттракторов.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Универсальные сценарии возникновения дискретных странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов (неориентируемые аттрактор Лоренца, восьмерочный аттрактор, спиральный аттрактор, аттрактор Шильникова) и примеры реализации этих сценариев в случае неориентируемых трехмерных обобщенных отображений Эно.

2. Теорема о карте седел и ее следствие об областях существования неориентируемых дискретных гомоклинических аттракторов различных типов. Классификация таких аттракторов по типу структуры их однообходных гомоклинических траекторий.

3. Теоремы о бифуркации удвоения замкнутой инвариантной кривой в случае трехмерного неориентируемого отображения и ее приложение к феноменологическому описанию дискретных неориентируемых аттракторов Шильникова.

4. Модифицированный метод численной проверки необходимых условий псевдогиперболичности странных гомоклинических аттракторов многомерных систем и его иллюстрации для ряда моделей, в том числе моделей неголономной механики.

5. Результаты исследования странных гомоклинических аттракторов трехмерных потоков с использованием разработанных в диссертации методов.

Теоретическая ценность и практическая значимость Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы могут быть применены как в теории динамических систем, так и при исследовании конкретных моделей.

Методологическая и теоретическая основа исследования. В диссертации использованы методы качественной теории динамических систем и теории бифуркаций, а также численные методы, включающие как стандартные алгоритмы, так и специально разработанные.

Научная новизна исследования Среди новых результатов, полученных в диссертации, можно выделить следующие:

1. Дана классификация дискретных неориентируемых странных гомоклинических аттракторов по типу структуры их однообходных гомоклинических траекторий. Выделены следующие классы таких аттракторов: дискретные аттракторы Лоренца, восьмерочные аттракторы, спиральные аттракторы, аттракторы Шильникова, двойные аттракторы Лоренца, двойные восьмерочные аттракторы.

2. Построены новые универсальные сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов. Даны примеры реализации этих сценариев в случае трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно.

3. Обобщен на случай трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов метод карт седел, направленный на эффективный поиск дискретных гомоклинических аттракторов заданных типов.

4. В части, касающейся феноменологического описания неориентируемого аттрактора Шильникова, показано, что замкнутая инвариантная кривая неориентируемого отображения может бифурцировать неизвестным ранее образом – вместо удвоения инвариантной кривой, от нее отрождается замкнутая инвариантная кривая периода два.

5. Построена модификация метода численной проверки необходимых условий псевдогиперболичности странных гомоклинических аттракторов многомерных систем (диффеоморфизмов и потоков), не требующего построения уравнений в вариациях. Этот метод является весьма эффективным при исследовании в том числе систем с первыми интегралами (в диссертации, он апробирован на некоторых системах из приложений, в частности, на неголономных моделях кельтского камня и волчка Чаплыгина).

6. Рассмотренные в диссертации качественные методы распространены на случай трехмерных потоков, с которыми, кроме того, также проведен ряд численных экспериментов. В частности, найден новый пример системы с сильно несимметричным аттрактором Лоренца.

Аппробация результатов исследования По теме диссертации опубликовано 14 работ.
Результаты работы докладывались на следующих конференциях: "Dynamics, Bifurcations and Chaos", Нижний Новгород, 2016, 2017, 2018; конференции "Shilnikov Workshop" 2017, 2017, 2018; публикация в материалах конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции"; доклад на Крымской осенней математической школе-симпозиуме 2017 и 2018.

По теме диссертации были также сделаны доклады на Нижегородском научном семинаре "Нелинейная динамика: теория и приложения" (семинар им. Л.П.Шильникова).

Публикации Всего по теме диссертации автором опубликовано 14 работ, из них 6 работ – в журналах, рекомендованных ВАК. Основные результаты, выносимые на защиту, являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно, автору принадлежат основные результаты, вошедшие в диссертацию. В частности, в работе [72] автору принадлежит разработка модифицированного LMP-метода, а также численное доказательство свойства псевдогиперболичности аттракторов в неголономных моделях кельтского камня и волчка Чаплыгина. В работе [11] постановка задачи принадлежит А.С. Гонченко, а основные результаты получены автором. В работе [12] автору принадлежат примеры сценариев и построение конкретных примеров их реализации в трехмерных неориентируемых отображениях Эно. В работах [23, 24] автору принадлежит постановка задачи и результаты численных исследований.

Структура диссертации Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Объем диссертации: 147 стр., 63 рис., 114 наименований литературы.

Содержание диссертации.

В первой главе обсуждаются новые методы исследования хаотической динамики многомерных систем. Такие методы можно разделить на три типа: качественные, поисковые и проверочные. К качественным методам, используемым в диссертации, относится прежде всего построение феноменологических сценариев возникновения странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах многомерных потоков и отображений. В параграфе § 1.1 дается как краткое описание известных феноменологических сценариев, так и новых – в случае трехмерных потоков и неориетрируемых отображений. В § 1.3 в качестве поисковых методов рассматривается метод карт седел и модифицированный метод диаграмм показателей Ляпунова. § 1.3.1 посвящен методу карт седел применительно к трехмерным обобщенным неориентируемым отображениям Эно. Суть этого метода состоит в аналитическом построении областей значений параметров, отвечающих существованию седловых неподвижных точек различных типов. Тем самым определяются (в том числе и визуально, что важно для компьютерных исследований) весьма простыми способами области значений параметров, в которых можно ожидать существование странных гомоклинических аттракторов определенных типов (возможно, заданных заранее). В § 1.3.2 обсуждается модифицированный метод диаграмм показателей Ляпунова. Здесь также проиллюстрировано, как с помощью комбинирования этого метода и метода карт седел можно находить странные гомоклинические аттракторы заданных типов. В § 1.4 рассматриваются основные понятия теории псевдогиперболических странных аттракторов и обсуждаются некоторые методы их исследования. В частности, в § 1.4.1 дается описание LMP-метода проверки условий псевдогиперболичности аттракторов. Основным результатом § 1.4.2 является теорема определяющая области возможного существования псевдогиперболических аттракторов.

Во второй главе приводятся примеры странных гомоклинических аттракторов трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов, а также конкретные примеры реализации феноменологических сценариев, приводящих к возникновению этих аттракторов, а именно дискретный неориентируемый аттрактор Лоренца, неориентируемый дискретный восьмерочный аттрактор, неориентируемый дискретный аттрактор Шильникова, неориентируемый спиральный аттрактор. В конце главы рассматривается обобщенное четырехмерное отображение Эно, для которого показывается, что при малом значении якобиана отображения возможно существование ориентируемых дискретных странных аттракторов, имеющих неориентируемые аналоги в трехмерном случае.

Третья глава полностью посвящена исследованию свойства псевдогиперболичности, а также влиянию различных факторов, таких как гомоклинические касания, на выполнимость необходимых и достаточных условий определяющих данное свойство. Также приводится формальное описание разработанного LMP-метода проверки достаточных условий псевдогиперболичности, и результаты применения данного метода для определения псевдогиперболичности различных странных аттракторов описанных в настоящей диссертации, а также аттракторов систем, ставших уже классическими.

В четвертой главе рассматривается семейство трехмерных потоков, на примере которого делается обобщение метода карт седел на случай систем с непрерывным временем. С помощью построенной карты седел в рассматриваемом семействе доказывается возможность существования различных типов гомоклинических аттракторов, большинство из которых найдены в конкретных примерах систем. Как и в случае диффеоморфизмов, в главе строятся феноменологические сценарии, приводящие к рождению странных гомоклинических аттракторов различных типов. Также для нового типа аттракторов – несимметричного аттрактора Лоренца, при помощи LMP-метода проводится исследование его структуры и подтверждается свойство псевдогиперболичности.

Содержание главы 1. В первой главе рассматриваются методы исследования хаотической динамики, такие как метод карт седел, обобщенные диаграммы показателей Ляпунова, LMP-метод проверки псевдогиперболичности, феноменологические сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов. Каждый метод рассматривается на примере конкретной системы или же семейства систем. В частности карта седел строится для семейства трехмерных обобщенных неориентируемых отображений Эно, а с помощью обобщенных диаграмм показателей Ляпунова находятся области существования странных аттракторов в конкретных примерах таких систем. Также для различных типов гомоклинических аттракторов строятся феноменологические сценарии их возникновения. В конце главы даются определения псевдогиперболического аттрактора в случае потоков и диффеоморфизмов, а также дается описание основных идей LMP-метода проверки достаточных условий псевдогиперболичности.

В § 1.1 рассматриваются универсальные сценарии возникновения дискретных гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях. Для этого в рассмотрение вводится однопараметрическое семейство T_μ трехмерных неориентируемых отображений. Предполагается, что T_μ при $\mu_0 < \mu < \mu_1$ имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку O, т.е. мультипликаторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ точки O такие, что $|\lambda_i| < 1$, и поскольку T_μ неориентируемо, то $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$. Пусть $\mu = \mu_1$ – это значение параметра, при котором точка O теряет устойчивость в результате мягкой (суперкритической) невырожденной бифуркации. Тогда, в общем случае, μ_1 – это бифуркационное значение параметра, отвечающее либо бифуркации удвоения периода точки O, либо (дискретной) бифуркации Андронова-Хопфа. В первом случае у точки O при $\mu = \mu_1$ появляется мультипликатор -1, а во втором – пара мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$ с $0 < \varphi < \pi$. Описываемые сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов, содержащих точку O, предполагают также, что эта точка лежит в некоторой достаточно большой поглощающей области U. Далее оказывается, что в таком семействе существует четыре типа универсальных сценариев, приводящих к возникновению различных гомоклинических странных аттракторов.

Первый сценарий приводит к появлению неориентируемого гомоклинического аттрактора, который будем называть “тонкий дискретный аттрактор Лоренца”. Он возникает в результате цепочки: устойчивая неподвижная точка $\Rightarrow$ бифуркация удвоения периода $\Rightarrow$ образование гомоклинических пересечений многообразий седловой неподвижной точки с мультипликаторами $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1$. Поскольку устойчивые мультипликаторы здесь *положительны*, то гомоклиническая точка в $W^s_{loc}(O)$ и все её образы относительно положительных итераций отображения T_μ будут лежать в $W^s_{loc}(O)$ на одной и той же гладкой инвариантной кривой, входящей в точку O.

Второй сценарий образования неориентируемого дискретного восьмерочного аттрактора может быть реализован в тех случаях, когда все мультипликаторы точки O *отрицательны*, т.е. когда $\lambda_1 < -1 < \lambda_2, \lambda_3 < 0$ при $\mu > \mu_1$. Возникающие здесь гомоклинические аттракторы очень похожи на те, которые имеют место в ориентируемом случае.

Третий сценарий связан с образованием неориентируемого дискретного спирального аттрактора. Этот сценарий можно рассматривать как промежуточный между первыми двумя сценариями ("лоренцевским" и "восьмерочным"). Здесь опять первая бифуркацией потери устойчивости является бифуркацией удвоения периода точки O, в результате которой она приобретает мультипликаторы $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \lambda < 1$. То есть, точка O становится седло-фокусом типа (2,1), а в её окрестности рождается устойчивая траектория периода 2. В результате потери устойчивости этой траектории и других устойчивых инвариантных множеств, которые могут от неё отродиться, и последующего образования гомоклинических пересечений инвариантных многообразий точки O, здесь может образоваться неориентируемый дискретный спиральный аттрактор.

В ряду этих новых сценариев особое место занимает (четвертый) сценарий возникновения неориентируемого дискретного аттрактора Шильникова. Здесь, также как и в ориентируемом случае, первой бифуркацией потери устойчивости точки O является дискретная бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой точка O становится седло-фокусом типа (1,2) с мультипликаторами $\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\psi}, -1 < \lambda_3 < 0$, где $\rho > 1$, а в её окрестности рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая L. Поначалу эта кривая является аттрактором, затем она и все ассоциированные с ней устойчивые инвариантные множества теряют устойчивость, образуется неориентируемая "воронка Шильникова" и возникает странный аттрактор, содержащий точку O и ее неустойчивое инвариантное многообразие. Далее приводится существенное отличие сценариев возникновения данного аттрактора в ориентируемом и неориентируемом случаях. Для этого в § 1.2 доказывается *Теорема 1.1*, в которой рассматриваются возможные варианты бифуркаций инвариантной кривой L в случае трехмерных неориентируемых отображений.

В § 1.1.5 рассматриваются сценарии возникновения дискретных гомоклинических аттракторов в неориентируемых отображениях с симметрией, такие как сценарий возникновения двойного восьмерочного аттрактора и сценарий возникновения двойного аттрактора Лоренца.

В § 1.3 дается описание методов нахождения странных гомоклинических аттракторов. Первым из таких методов рассматривается метод карт седел на примере трехмерных обобщенных отображений Эно вида:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z), \tag{1}$$

где

$$g(0,0) = g_y(0,0) = g_z(0,0) = 0,$$

при условии, что якобиан B отображения отрицателен $-1 < B < 0$, т.е. когда отображение (1) является неориентируемым.

Суть метода карт седел, применительно к отображению (1), состоит в том, что для данного фиксированного значения якобиана B на плоскости параметров (A, C) строятся области, соответствующие разным наборам мультипликаторов неподвижной точки $O(0, 0, 0)$. Здесь наиболее важными являются три момента:

1. Расположение мультипликаторов относительно единичной окружности: является ли точка O устойчивой или седловой типа (2,1) или (1,2), где первая цифра обозначает размерность устойчивого многообразия, а вторая - размерность неустойчивого многообразия.

2. Являются ли мультипликаторы вещественными или комплексными, тем самым различаются седла и седло-фокусы.

3. В случае (2,1) нужно указать больше или меньше единицы его седловая величина σ (модуль произведения устойчивого и неустойчивого мультипликаторов, ближайших к мнимой оси), а также когда ведущий устойчивый мультипликатор является положительным или отрицательным.

Основным результатом параграфа является *теорема 1.3*, описывающая структуру расширенной бифуркационной диаграммы (карты седел) неподвижной точки $O(0, 0, 0)$ для семейства трехмерных неориентируемых отображений вида (1). Доказательство теоремы 1.3 оформленно с помощью нескольких лемм, в которых идентифицируются границы областей карты седел (лемма 1.3), а также гладкие типы седловых неподвижных точек в соответствующих областях (леммы 1.4-1.6). В соответствии с этим, описываются типы потенциальных гомоклинических аттракторов, содержащих такие точки.

После определения границ на карте седел непосредственно находятся области параметров, при которых в рассматриваемом отображении могут возникать различные аттракторы.

Первым из таких аттракторов является дискретный неориентируемый аттрактор Лоренца. При этом, если в отображении (1) при условии, что $-1 < B < 0$, существует дискретный аттрактор Лоренца, то его неподвижная точка имеет мультипликаторы, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1, \\ &\lambda_1\lambda_2 < -1. \end{aligned} \tag{2}$$

Для определения области параметров, которая сооответсвует дискретному неориентируемогу аттрактору Лоренца доказывается *лемма 1.4*.

Далее рассматривается неориентируемый восьмерочный аттрактор, для которого мультипликаторы неподвижной точки $O(0,0,0)$ будут удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 < -1, -1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0, \\ &\lambda_1\lambda_2 < -1. \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогично предыдущему случаю для определения области параметров карты седел, соответствующей даному аттрактору, доказывается *лемма 1.5*.

Особый интерес для исследований представляют квазиаттракторы, содержащие неподвижную точку типа седло-фокус, которым соответствуют следующие значения мультипликаторов:

$$\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, |\rho| < 1, 0 < \varphi < \pi, \tag{4}$$

$$|\lambda_1| < 1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, |\rho| > 1, 0 < \varphi < \pi. \tag{5}$$

Первый аттрактор был назван неориентируемым спиральным аттрактором, а второй неориентируемым аттрактором Шильникова. Для определения областей параметров, соответствующих существованию данных аттракторов доказывается *лемма 1.6*.

Далее в данном параграфе приводится описание других областей карты седел, соответствующих таким аттракторам, как:

- Дискретный двойной неориентируемый аттрактор Лоренца

- Дискретный двойной неориентируемый восьмерочный аттрактор

В § 1.3.2 также рассматривается широко известный метод диаграмм показателей Ляпунова. Стандартно, он состоит в построении карт ляпуновских показателей, в которых разным цветом обозначаются области параметров, отвечающие разным спектрам ляпуновских показателей $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$. Представленное обобщение метода состоит в том, что к основным цветам добавляется еще один для обозначения областей с гомоклиническими аттракторами (когда численно получаемые точки на аттракторе приближаются к точке O на расстояние не меньше, чем 10^{-4}).

В § 1.4 рассматриваются основные понятия теории псевдогиперболических странных аттракторов и дается короткое описание одного из методов проверки условий псевдогиперболичности аттракторов в конкретных моделях. При этом отдельно дается определение псевдогиперболического аттрактора на случай потоков и диффеоморфизмов.

Определение 1.1 Случай потока. Аттрактор n-мерного потока F_t называется *псевдогиперболическим*, если для каждой точки некоторой поглощающей области аттрактора $\mathcal{D}$ существуют два линейных подпространства E^{ss} с $\dim E^{ss} = k$ и E^{cu} с $\dim E^{cu} = n - k$, где $k \geq 1$, инвариантные относительно дифференциала DF_t потока и такие, что:

1) DF_t экспоненциально сжимает по всем направлениям в E^{ss} и экспоненциально растягивает все $(n-k)$-мерные объемы в E^{cu};

2) Подпространства E^{ss} и E^{cu} непрерывно зависят от точки из D;

3) Соответствующие коэффициенты сжатия и растяжения равномерно отделены от 1;

4) Углы между любыми касательными векторами к подпространствам E^{ss} и к E^{cu} равномерно отделены от нуля;

5) Любое возможное сжатие в E^{cu} равномерно слабее любого возможного сжатия в E^{ss}.

Определение для дискретных псевдогиперболических аттракторов диффеоморфизмов очень похоже, приведем более краткую формулировку.

Определение 1.2 Случай диффеоморфизмов. Аттрактор n-мерного диффеоморфизма f называется *псевдогиперболическим*, если для каждой точки некоторой поглощающей области $\tilde{\mathcal{D}}$ аттрактора существует два линейных подпространства E^{ss} с $\dim E^{ss} = k$ и E^{cu} с $\dim E^{cu} = n - k$, где $k \geq 1$, инвариантные относительно дифференциала Df диффеоморфизма f и такие, что свойства 1)–5) определения 1.1 выполняются для Df.

Что касается метода проверки псевдогиперболичности, то ему также целиком посвящена третья глава настоящей диссертации.

В § 1.3.2 рассматривается вопрос существования псевдогиперболических гомоклинических аттракторов у отображений вида (1). В конце параграфа приводится *утверждение 1.1*, в котором рассматривается неориентируемое семейство отображений следующего вида:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= y + Q_1(x, y, z), \\ \bar{y} &= z + Q_2(x, y, z), \\ \bar{z} &= Bx + Cy + Az + Q_3(x, y, z), \end{aligned} \tag{6}$$

где $Q_i(0,0,0) = 0$, $\frac{\partial Q_i(0,0,0)}{\partial(x,y,z)} = 0$. Данное утверждение определяет, что, если неориентируемое отображение вида (1.20) имеет при данном $-1 < B < 0$ и некоторых значениях параметров A и C псевдогиперболический гомоклинический аттрактор $\mathcal{A}$, содержащий неподвижную точку O, у которой ее неустойчивое инвариантное многообразие $W^u(O)$ одномерно. Тогда эти значения параметров A и C обязательно принадлежат одной из следующих областей на карте седел соответствующего отображения Эно вида (1):

- область $1 + AB + B^2 < C < 1 - A - B$ (область D1 рис. 1.15 – тогда $\mathcal{A}$ является дискретным (тонким) аттрактором Лоренца);
- область $B^2 - 1 - BA < C < 1 + A + B$ (область D2 рис. 1.15 – тогда $\mathcal{A}$ является дискретным восьмерочным аттрактором);
- область, ограниченная кривыми L^-, L_σ и L_r (область D3 рис. 1.15 – тогда $\mathcal{A}$ является дискретным двойным восьмерочным аттрактором);
- область, ограниченная кривыми L_r, L_φ и L_r (область D4 рис. 1.15 – тогда $\mathcal{A}$ является дискретным двойным аттрактором Лоренца).

Содержание главы 2. Во второй главе приводятся примеры странных гомоклинических аттракторов трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов, а также конкретные примеры реализации феноменологических сценариев, приводящих к возникновению этих аттракторов, а именно: неориентируемый дискретный аттрактор Лоренца, неориентируемый дискретный восьмерочный аттрактор, неориентируемый дискретный аттрактор Шильникова, неориентируемый спиральный аттрактор. В конце главы рассматривается обобщенное четырехмерное отображение Эно, для которого показывается, что при малом значении якобиана отображения возможно существование ориентируемых дискретных странных аттракторов, имеющих неориентируемые аналоги в трехмерном случае.

В § 2.1 рассматриваются конкретные примеры странных аттракторов трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов, а именно неориентируемый дискретный аттрактор Лоренца, неориентируемый дискретный восьмерочный аттрактор, двойной неориентируемый восьмерочный аттрактор, неориентируемый спиральный аттрактор, неориентируемый аттрактор Шильникова. Для некоторых аттракторов показывается поведение траекторий, а также их отличие от ориентируемого случая на языке "примитивных гомоклинических структур". В конце параграфа также приводятся некоторые примеры двухкомпонентных аттракторов, каждая из компонент которых содержит точку периода два.

В § 2.2 рассматривается реализация сценариев возникновения странных аттракторов в трехмерных неориентированных отображениях Эно, описание которых было дано в главе 1. В качестве примера отображения выбрано семейство неориентируемых трехмерных обобщенных отображений Эно вида

$$\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y,z), \tag{7}$$

где A, B, C – коэффициенты (B – якобиан отображения (7)), $g(y,z)$ – функция только координат y и z, обращающаяся в нуль при $y = z = 0$ вместе с первыми производными.

В параграфе дается описание четырех подобных сценариев, приводящих к возникновению различных типов неориентируемых гомоклинических аттракторов:

- Сценарий возникновения неориентируемого дискретного аттрактора Лоренца
- Сценарий возникновения неориентируемого дискретного восьмерочного аттрактора
- Сценарий возникновения неориентируемого дискретного спирального аттрактора
- Сценарий возникновения неориентируемого дискретного аттрактора Шильникова

В § 2.3 рассматривается обобщение отображения Эно на четырехмерный случай, представленное в виде:

$$\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = w, \bar{w} = Ax + By + Cz + Dw + g(y, z, w), \qquad (8)$$

где A, B, C, D – коэффициенты ($-A$ – якобиан отображения (8)), $g(y, z, w)$ – функция только координат y, z и w, обращающаяся в ноль при $y = z = w = 0$ вместе со своими первыми производными.

Показывается, что при достаточно малом значении якобиана $-A \sim 0$, данное отображение обладает странными аттракторами, сильно схожими по своей структуре с аттракторами трехмерных неориентируемых отображений Эно. В качестве примеров приводятся четыре типа таких аттракторов.

Содержание главы 3. Третья глава полностью посвящена исследованию свойства псевдогиперболичности, а также влиянию различных факторов, таких как гомоклинические касания, на выполнимость необходимых и достаточных условий характеризующих данное свойство. Также приводится формальное описание разработанного LMP-метода проверки достаточных условий псевдогиперболичности, и результаты применения данного метода для определения псевдогиперболичности различных странных аттракторов описанных в настоящей диссертации, а также аттракторов систем, ставших уже классическими.

В § 3.1 дается определение псевдогиперболичности для диффеоморфизмов, а также приводятся необходимые и достаточные условия псевдогиперболичности. Коротко, псевдогиперболичность диффеоморфизма f на некоторой области $\mathcal{D}$ означает, что в каждой точке этой области существуют два трансверсальных линейных подпространства N_1 и N_2, непрерывно зависящие от точки и инвариантные относительно дифференциала Df отображения, такие, что Df является экспоненциально сильно сжимающим на N_1 и растягивающим (экспоненциально) объемы на N_2 (здесь слово “сильно” означает, что любое возможное сжатие в N_2 равномерно слабее любого сжатия в N_1). Данные условия налагают следующие ограничения на показатели Ляпунова:

$$\Lambda_1 > 0,\ \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0,\ \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0. \qquad (9)$$

Далее дается описание влияния гомоклинических касаний на свойство псевдогиперболичности, а именно, что простые гомоклинические касания не разрушают это свойство, так как не приводят к возникновению периодических точек, а лишь только седловых. Также особо подчеркивается, что свойство псевдогиперболичности является грубым, т.е. при любых малых гладких возмущениях данное свойство сохраняется.

В § 3.2 приводится описание LMP-метода проверки достаточных условий псевдогиперболичности. Коротко алгоритм его работы можно представить следующим образом. Метод состоит из двух стадий, первая из которых – стандартная: вычисляется спектр показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ (если условие (9) не выполнено, метод прекращает свою работу) и, параллельно, сохраняется массив данных $\mathcal{N} = \{x_n\}$, где $x_{n+1} = f(x_n)$ и $n = 1, ...k$, содержат информацию о точках x_n на аттракторе. Второй шаг не совсем стандартный: вычисляется максимальный показатель Ляпунова для обратных итераций отображения, используя, по существу, информацию, полученную на первом этапе. В частности, обратные итерации принудительно привязаны к тем точкам аттрактора, которые были получены на первом этапе.

В качестве конечного результата вычислений строится LMP-граф на плоскости координат $(dx, d\varphi)$, где dx – расстояние между двумя точками x и y аттрактора и $d\varphi$ – угол между векторами $N_1(x)$ и $N_1(y)$.

В § 3.3 представлены результаты работы LMP-метода проверки достаточных условий псевдогиперболичности к аттракторам различных систем, в частности: аттрактор Эно, аттрактор Лози, аттрактор Чена, аттракторы в системах Лоренца и Шимицу-Мариока, аттракторы трехмерных неориентируемых отображений Эно. С помощью данного метода было показано, что из рассмотренных аттракторов лишь аттрактор Лоренца системы Лоренца (при классических значениях параметров), а также дискретный аттрактор Лорецна периода 2 в неориентируемом отображении Эно могут претендовать на то, чтобы называться “настоящими.”

Содержание главы 4. В четвертой главе рассматривается семейство трехмерных потоков, на примере которого делается обобщение метода карт седел на случай систем с непрерывным временем. С помощью построенной карты седел в рассматриваемом семействе доказывается возможность существования различных типов гомоклинических аттракторов, большинство из которых найдены в конкретных примерах систем. Как и в случае диффеоморфизмов, в главе строятся феноменологические сценарии, приводящие к рождению странных гомоклинических аттракторов различных типов. Также для нового типа аттракторов – несимметричного аттрактора Лоренца, при помощи LMP-метода проводится исследование его структуры и подтверждается свойство псевдогиперболичности.

В § 4.1 рассматривается система вида

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y + g_1(x, y, z), \\
\dot{y} = z + g_2(x, y, z), \\
\dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z),
\end{cases}
\tag{10}
$$

где A, B и C – параметры системы, а $g_i, i = 1, 2, 3$ – нелинейные части, удовлетворяющие соотношениям

$$
g_i(0,0,0) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial g_i}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial g_i}{\partial z}(0,0,0) = 0,\ i = 1, 2, 3. \tag{11}
$$

.

Для данной системы характерно, что состояние равновесия $O(0,0,0)$ имеет постоянную дивергенцию равную C, а его характеристическое уравнение имеет вид:

$$
\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A = 0. \tag{12}
$$

Далее на примере системы (11) проводится обобщение метода карт седел на случай потоков. Суть метода состоит в том, что для фиксированного значения дивергенции $C < 0$ на плоскости параметров (A, B) выделяются области, соответствующие различным наборам корней характеристического уравнения (12), определяющим тип состояния равновесия $O(0,0,0)$.

Основным результатом данного параграфа является *теорема 4.1*, определяющая расширенную бифуркационную диаграмму (карту седел) состояния равновесия $O(0,0,0)$ для семейства трехмерных потоков вида (10).

Далее дается описание всех восьми областей, образуемых данными кривыми, а также гомоклинических аттракторов, которые могут возникать при соответствующих значениях параметров.

В § 4.2 рассматриваются феноменологические сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в трехмерных потоках. При этом особое внимание уделяется описанию сценариев возникновения аттракторов, которые могут возникать в семействе систем (10), а именно:

- Сценарий возникновения несимметричного аттрактора Лоренца

- Сценарий возникновения спирального аттрактора

- Сценарий возникновения аттрактора Шильникова

В § 4.3 приводятся конкретные примеры странных гомоклинических аттракторов трехмерных потоков, обнаруженные в семействе (10). Это аттрактор Шильникова, обнаруженный в системе вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + x^2, \end{cases} \tag{13}$$

при $C = -0.4, A = -0.87, B = -1$. А также спиральный аттрактор, возникающий в системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = Ax + By + Cz - 0.5x^3, \end{cases} \tag{14}$$

при $C = -0.4, A = -0.612, B = -1$.

Особый интерес представляет собой пример несимметричного аттрактора Лоренца (рис. 1), который был обнаружен в системе вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (0.2xy + 0.3xz + 0.5y^2 + 1.2yz + 0.7z^2) \\ \dot{y} = z + (-0.1x^2 - 0.6xy - 0.7xz + 0.3y^2 + 0.6yz + 0.4z^2) \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + (0.1x^2 + 0.5xy + 0.6xz - 0.3y^2 - 0.7yz - 0.4z^2) \end{cases} \tag{15}$$

Для данного типа аттрактора выполняются необходимые условия псевдогиперболичности, поэтому потенциально он может быть признан “настоящим”. Для проверки достаточных условий был применен LMP-метод проверки псевдогиперболичности, и в результате исследований было подтверждено, что данный аттрактор действительно является псевдогиперболическим.

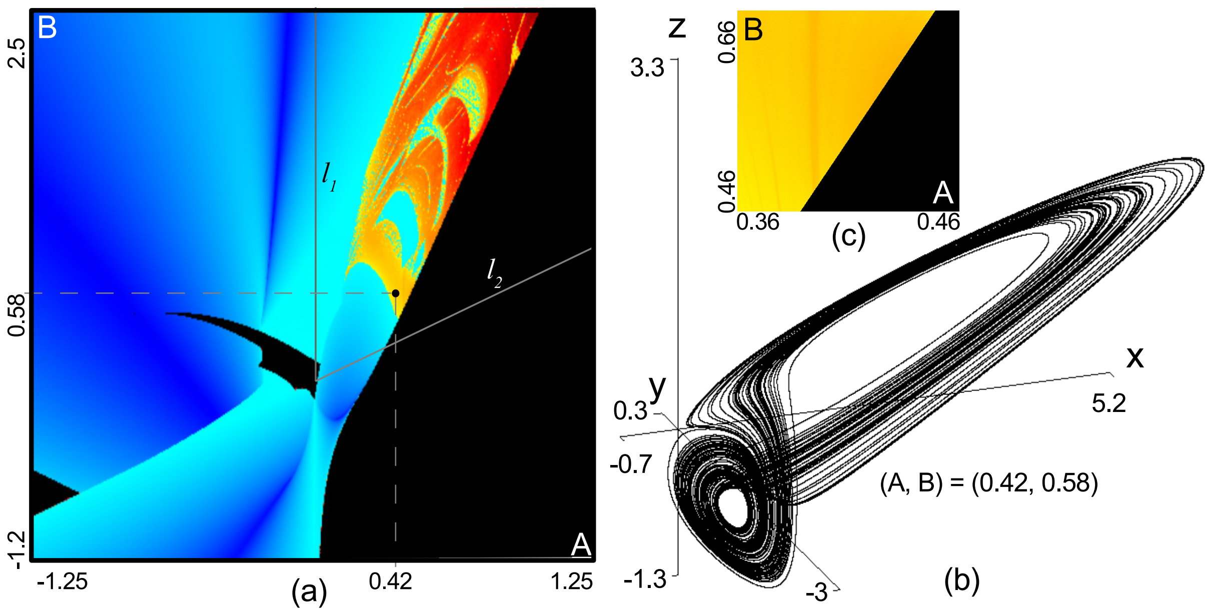


Рисунок 1: (a) Фрагмент диаграммы показателей Ляпунова (желто-красная область соответствует положительному старшему показателю Ляпунова) для системы (4.10) при $C = -1.4$. (b) Портрет аттрактора системы при $A = 0.42, B = 0.58, C = -1.4$. (c) Увеличенный фрагмент диаграммы показателей Ляпунова вблизи точки на плоскости параметров, соответствующей найденному аттрактору.

Глава 1

Методы исследования хаотической динамики трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов

Введение

Одной из самых важных и интересных задач в математической теории динамического хаоса является задача изучения механизмов его возникновения. В качественной теории динамических систем она обычно рассматривается как один из наиболее важных разделов общей проблемы изучения *бифуркационных сценариев возникновения сложной динамики*.

Математическим образом диссипативного динамического хаоса является *странный аттрактор* – нетривиальное устойчивое замкнутое инвариантное множество с неустойчивым поведением траекторий на нем. При этом тип устойчивости аттрактора, который рассматривается в диссертации – это *асимптотическая устойчивость* – положительные полутраектории всех начальных точек, близких к аттрактору, стремятся к нему. Здесь нетривиальность аттрактора означает, что исходная система в ограничении на нем имеет сложную структуру, в частности, аттрактор содержит счетное множество периодических траекторий.

Особую ценность для теории странных аттракторов представляют сценарии, которые мы будем называть *феноменологическими сценариями возникновения хаоса*, которые связаны с описанием последовательности бифуркаций (локальных и глобальных), приводящих к возникновению странных аттракторов в моделях различного типа, независимо от их конкретного вида. В этих сценариях важно, что они могут реализовываться не только в какой-то определенной системе, но также и в широком классе систем, удовлетворяющим определенным условиям. Примеров основных феноменологических сценариев такого типа (реализующихся в однопараметрических семействах общего положения) – не слишком много, но все они имеют большую ценность как для теории динамического хаоса, так и ее приложений. Отметим некоторые наиболее важные из них.

В работе [107] был описан сценарий возникновения странного аттрактора в результате разрушения трехмерного тора – здесь реализуется такая цепочка бифуркаций: состояние равновесия $\Rightarrow$ предельный цикл $\Rightarrow$ двумерный тор $\Rightarrow$ трехмерный тор $\Rightarrow$ хаос. Знаменитый сценарий Фейгенбаума [34, 65] возникновения странного аттрактора в результате бесконечной цепочки бифуркаций удвоения периода, как хорошо известно, часто встречается в одномерных отображениях и в сильно диссипативных маломерных системах. Другой пример – это сценарий "перехода к хаосу через перемежаемость", его феноменологическое описание было построено в работах Помо и Манневиля [103], а математическое обоснование было дано в работе Лукьянова и Шильникова [28]. Отметим также известный сценарий Афраймовича и Шильникова [8] возникновения странного аттрактора, т.н. "тор-хаоса", в результате разрушения двумерного тора. Заметим, что ряд важных математических проблем, относящихся к теории "тор-хаоса", был исследован в работах Афраймовича и Шильникова [6, 7] (в которых, в частности, был представлен хорошо уже известный "принцип кольца"), а также в работах Аронсона и др. [52], Ньюхауса, Пэлиса и Такенса [101], Тураева и Шильникова [31] и др.

Все эти работы вызвали большой интерес у исследователей, и описанные в них типы странных аттракторов были вскоре найдены во многих математических моделях. Заметим, что указанные выше сценарии возникновения хаоса потребовали развития весьма серьезного математического аппарата. Однако, что интересно, в математической теории динамического хаоса, особенно в последнее время, появились весьма интересные и сравнительно простые по структуре феноменологические сценарии, не требующие развития мощного математического аппарата, но представляющие весьма большой интерес для прикладных исследований. Первый сценарий такого рода, сценарий возникновения спирального хаоса в многомерных потоках, был предложен в работе Шильникова [44]. Иллюстрация этого сценария представлена на рис. 1.1, а суть состоит в следующем.

Рассмотрим однопараметрическое семейство $\dot{x} = X(x, \mu)$ потоков, где $x \in R^n, n \geq 3$, и μ – параметр. Пусть при $\mu \leq \mu_0$ эта система имеет устойчивое состояние равновесия O, а при $\mu > \mu_0$ равновесие теряет устойчивость

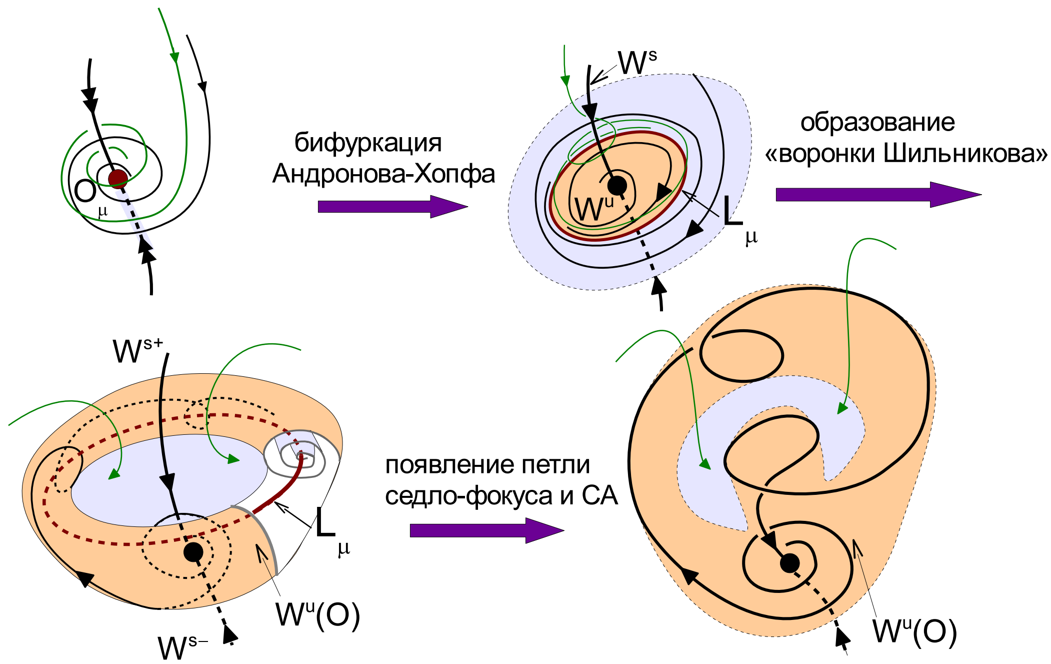


Рисунок 1.1: Основные этапы сценария рождения аттрактора Шильникова: (1) бифуркация Андронова-Хопфа, (2) образование “воронки Шильникова”, (3) появление петли седло-фокуса (Рисунок взят из работы [69]).

в результате мягкой (суперкритической) бифуркации Андронова-Хопфа. Тогда при $\mu > \mu_0$ точка O становится седло-фокусом, типа $(n-2, 2)$, т.е. с $(n-2)$-мерным устойчивым и двумерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а в ее окрестности рождается устойчивый предельный цикл L. При небольших $\mu - \mu_0 > 0$ многообразие $W^u(O)$ является диском с краем L. Далее предположим, что при некотором значении параметра $\mu = \mu^*$ предельный цикл претерпевает “дифференцируемую бифуркацию”, в результате которой два его мультипликатора, ближайшие к единичной окружности, становятся комплексно-сопряженными. И теперь неустойчивое многообразие седловой точки O начинает наматываться на предельный цикл L, образуя конфигурацию в виде воронки, в которую будут втягиваться все траектории из некоторой области. В последствии, при дальнейшем увеличении параметра возникает гомоклиническая петля седло-фокуса O, и, если выполняются условия Шильникова [37], [42] появляется спиральный квазиаттрактор (называемый также аттрактором Шильникова [73]).

Что касается многомерных отображений, здесь также существует несколько универсальных сценариев рождения странных аттракторов, некоторые из которых были описаны в работах [21], [69]. В частности, в указанных работах для трехмерных ориентируемых отображений построены феноменологические сценарии возникновения дискретных странных аттракторов таких типов как, дискретный аттрактор Шильникова, дискретный аттрактор Лоренца и дискретный восьмерочный аттрактор. Коротко опишем эти три сценария.

Все эти сценарии начинаются с простого аттрактора – устойчивой неподвижной точки, а различаются уже тем, каким образом эта точка теряет устойчивость.

В случае возникновения дискретного аттрактора Шильникова эта точка теряет устойчивость в результате мягкой (субкритической) бифуркации Андронова-Хопфа, неподвижная точка O становится седло-фокусом типа (1,2), т.е. с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а из нее рождается замкнутая инвариантная кривая L, рис. 1.2(2). Соответственно предполагается, что при дальнейшем изменении μ сначала аттрактором является эта кривая L, а затем она теряет устойчивость (каким способом – зависит от конкретной задачи, см., например, [73]), при дальнейшем изменении параметра может образоваться странный гомоклинический аттрактор, содержащий седло-фокус O и его неустойчивое двумерное многообразие, рис. 1.2(3). При этом важным этапом в становлении аттрактора является образование "воронки", когда кривая L меняет свой тип с узлового на фокусный – тогда неустойчивое многообразие точки O начинает накручиваться на L, рис. 1.2(4), и в образовавшуюся воронку будут втягиваться все траектории из поглощающей области (кроме одной из устойчивых сепаратрис седло-фокуса O).[1]

В случае возникновения дискретного аттрактора Лоренца (рисунок 1.3а точка O теряет устойчивость в результате *бифуркации удвоения периода*: она сама становится седловой типа (2,1), т.е. с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2 (он в этот момент становится аттрактором). Затем при изменении параметра, в результате серии некоторых бифуркаций, этот цикл и все притягивающие инвариантные

[1]Одним из существенных отличий дискретного сценария Шильникова от его потокового аналога является то, что здесь возможны резонансные случаи бифуркации Андронова-Хопфа. В частности, могут быть сильные резонансы 1:3 и 1:4 (т.е. у L появляются мультипликаторы $e^{\pm i2\pi/3}$ и $e^{\pm i\pi/2}$ соответственно), при прохождении вблизи которых возникающий странный аттрактор будет иметь весьма специфическую форму, см. [74].

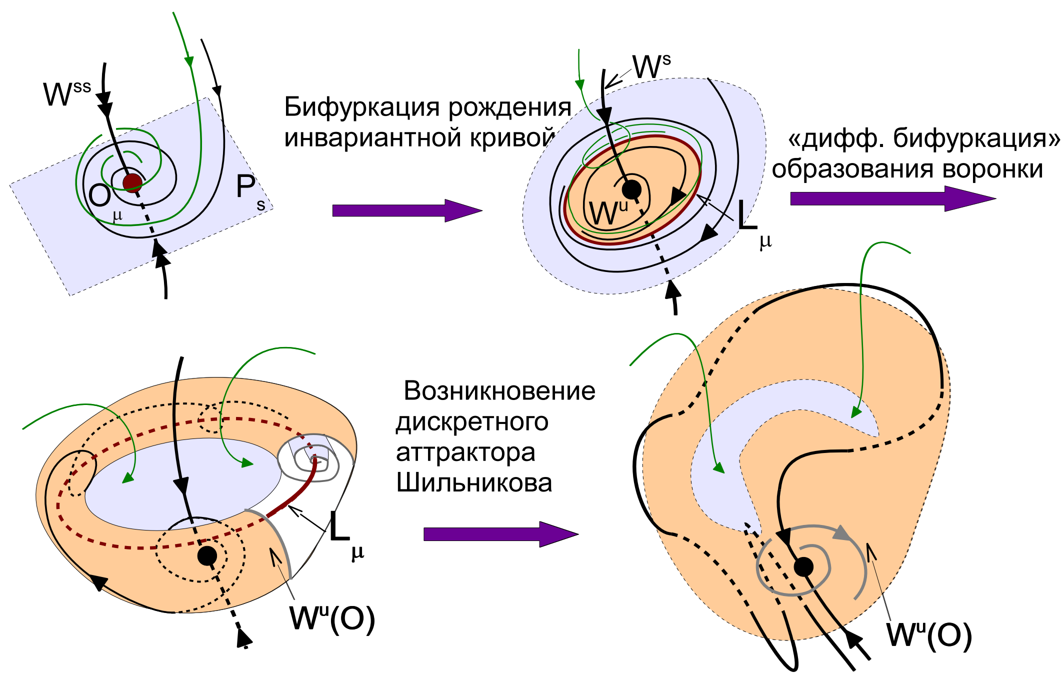


Рисунок 1.2: Основные этапы сценария рождения дискретного аттрактора Шильникова: (1) устойчивая неподвижная точка, (2) бифуркация Андронова-Хопфа, (3) образование "воронки Шильникова", (4) появление петли седло-фокуса и образование странного аттрактора.

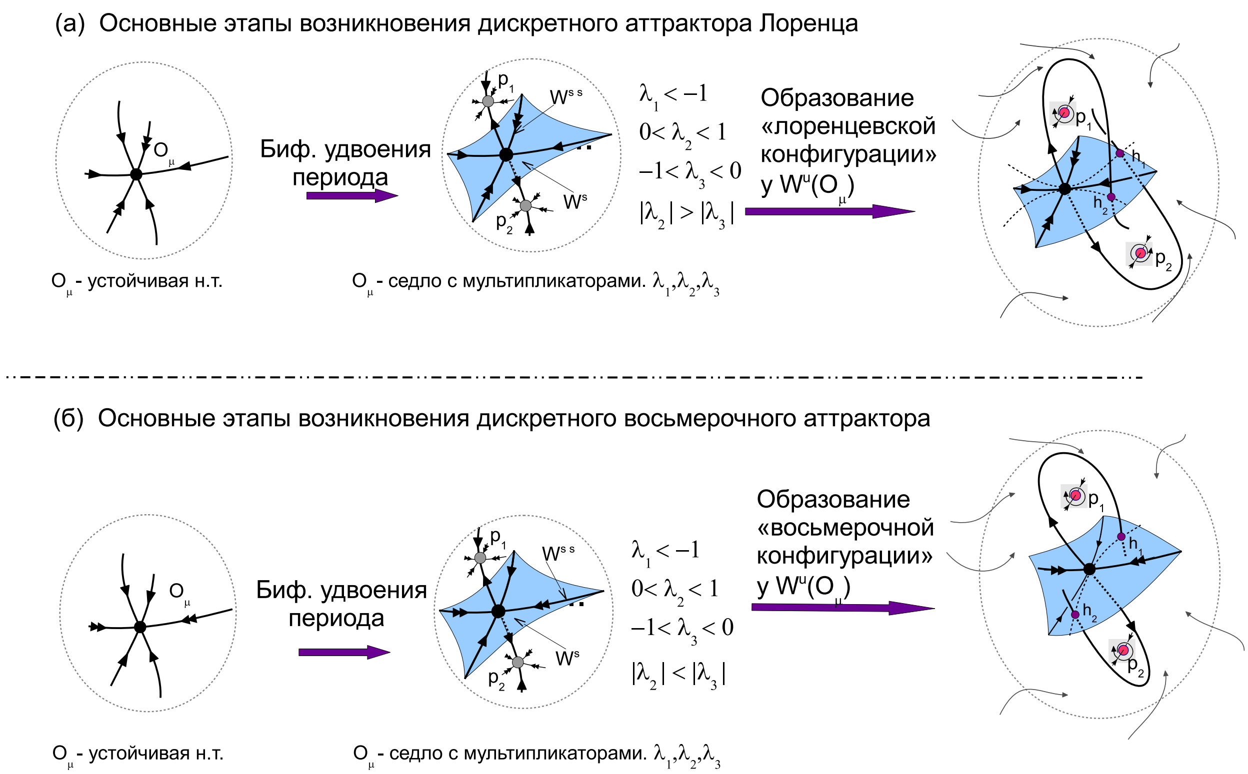


Рисунок 1.3: Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению либо дискретного аттрактора Лоренца (а), либо дискретного восьмерочного аттрактора (б). Здесь показаны точки h_1 и h_2, принадлежащие одной и той же гомоклинической траектории, такие, что $h_i \in W^s(O) \cap W^u(O)$ и $h_2 = T_\mu(h_1)$. Эти точки расположены с одной стороны от $W^{ss}_{loc}(O)$ в лоренцевском случае (в) и по разные стороны от of $W^{ss}_{loc}(O)$ в случае восьмерочного аттрактора (г).

множества, которые от него отрождаются, теряют устойчивость. Каким способом это происходит, зависит от конкретной задачи.[2] При этом важно, что устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия седловой точки O начинают пересекаться, когда $W^u(O)$ целиком лежит в поглощающей области, образуется *гомоклинический аттрактор*. Поскольку точка O имеет в этот момент мультипликатор $\lambda_1 < -1$, то два других λ_2 и λ_3 будут действительными и разных знаков, например, $0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$. В случае, когда $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, конфигурация получившегося гомоклинического аттрактора будет очень похожа по форме на аттрактор Лоренца, см. рис. 1.3в. Только здесь мы имеем дело с его дискретным вариантом. При этом роль состояния равновесия аттрактора в случае отображения будет играть неподвижная точка O, а в "дырках" дискретного аттрактора, вместо равновесий, будет лежать седловой цикл (p_1, p_2) периода 2. Кроме того, точка O делит одномерное неустойчивое многообразие $W^u(O)$ на две связные компоненты – сепаратрисы. Поскольку неустойчивый мультипликатор λ_1 отрицательный, то точки на $W^u(O)$ будут "прыгать" под действием T_μ с одной сепаратрисы на другую (в классическом аттракторе Лоренца каждая из сепаратрис сама по себе инвариантна). Отметим также, что отрицательность мультипликаторов точки O обеспечивает локальную (на её инвариантных многообразиях) симметрию, схожую с симметрией в модели Лоренца [97].

В случае возникновения дискретного восьмерочного аттрактора (см. рис. 1.3б) его начало практически такое же как и в случае дискретного аттрактора Лоренца. Принципиальное отличие состоит в том, что в момент образования гомоклинического пересечения мультипликаторы точки O такие, что опять $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$, но $|\lambda_2| < |\lambda_3|$. Тогда по форме гомоклинический аттрактор, см. рис. 1.3г, будет похож на аттрактор, возникающий при периодическом возмущении двумерной системы с гомоклинической восьмеркой седлового равновесия [86]. Поэтому такой аттрактор был назван в [21],[69] "дискретным восьмерочным аттрактором".

[2] Укажем два простейших варианта: 1) устойчивый цикл (p_1, p_2) претерпевает обратную бифуркацию Андронова-Хопфа (в него "влипает" замкнутая инвариантная кривая (C_1, C_2) периода 2 седлового типа, которая, в свою очередь, отрождается от гомоклинической восьмерки седла O в момент ее образования) – такие бифуркации происходят, например, в отображении Пуанкаре одной модели кельтского камня, [71],[70], а в случае потоков – в модели Лоренца, [43]; 2) устойчивый цикл (p_1, p_2) претерпевает прямую бифуркацию Андронова-Хопфа (из него рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая периода 2, которая затем сливается с инвариантной кривой (C_1, C_2) и исчезает) – такие бифуркации происходят в некоторых трехмерных отображениях Эно, [87],[21],[74], а в случае потоков – в модели Шимицу-Мориока, [108],[110].

1.1 Сценарии возникновения дискретных гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых диффеоморфихмах

В этом параграфе будут рассмотрены новые феноменологические сценарии, связанные с возникновением странных гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых диффеоморфизмах.

Рассмотрим однопараметрическое семейство T_μ трехмерных неориентируемых отображений. Предположим, что T_μ при $\mu_0 < \mu < \mu_1$ имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку O_μ, т.е. мультипликаторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ точки O_μ такие, что $|\lambda_i| < 1$, и поскольку T_μ неориентируемо, то $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$. Пусть $\mu = \mu_1$ – это значение параметра, при котором точка O теряет устойчивость в результате мягкой (суперкритической) невырожденной бифуркации. Тогда, в общем случае, μ_1 – это бифуркационное значение параметра, отвечающее либо бифуркации удвоения периода точки O_μ, либо (дискретной) бифуркации Андронова-Хопфа. В первом случае у точки O_μ при $\mu = \mu_1$ появляется мультипликатор -1, а во втором – пара мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$ с $0 < \varphi < \pi$. Описываемые ниже сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов, содержащих точку O_μ, предполагают также, что эта точка лежит в некоторой достаточно большой поглощающей области U.

1.1.1 Сценарий возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Лоренца

Первый сценарий, см. рис. 1.4а, приводит к появлению неориентируемого гомоклинического аттрактора, который будем называть "тонкий дискретный аттрактор Лоренца". Он возникает в результате цепочки: устойчивая неподвижная точка $\Rightarrow$ бифуркация удвоения периода $\Rightarrow$ образование гомоклинических пересечений многообразий седловой неподвижной точки с мультипликаторами $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1$. Поскольку устойчивые мультипликаторы здесь *положительны*, то гомоклиническая точка в $W^s_{loc}(O)$ и все её образы относительно положительных итераций отображения T_μ будут лежать в $W^s_{loc}(O)$ на одной и той же гладкой инвариантной кривой, входящей в точку O (а не на разных, как в случае ориентируемого дискретного аттрактора Лоренца, см. рис. 1.3а и 1.4а, а также рис. 1.5а и 1.5г).[3]

[3]Заметим, что в общем случае гомоклинический аттрактор можно представлять как замыкание неустойчивого многообразия точки O. Поскольку неустойчивые сепаратрисы седла O накапливаются

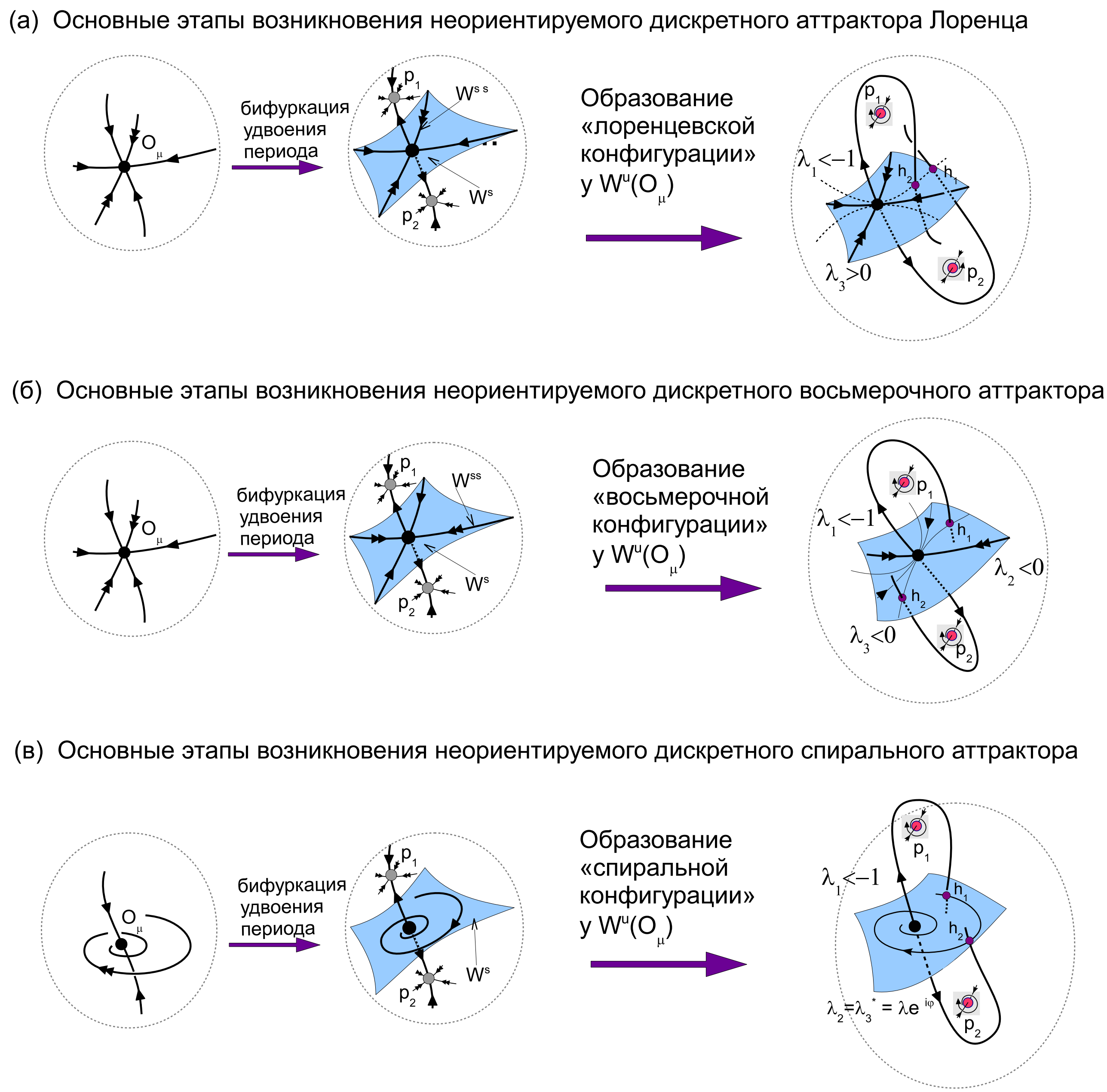


Рисунок 1.4: Иллюстрация бифуркационных сценариев, приводящих к возникновению дискретных неориентируемых гомоклинических аттракторов: аттрактора Лоренца (а); восьмерочного аттрактора (б); спирального аттрактора (в). Здесь показаны точки h_1 и h_2, принадлежащие одной и той же гомоклинической траектории, такие, что $h_i \in W^s(O) \cap W^u(O)$ и $h_2 = T(h_1)$. Эти точки расположены с одной стороны от $W^{ss}_{loc}(O)$ в лоренцевском случае, по разные стороны от of $W^{ss}_{loc}(O)$ в случае восьмерочного аттрактора, и гомоклинические точки лежат в $W^{ss}_{loc}(O)$ на спирали, закручивающейся вокруг O, в случае спирального аттрактора.

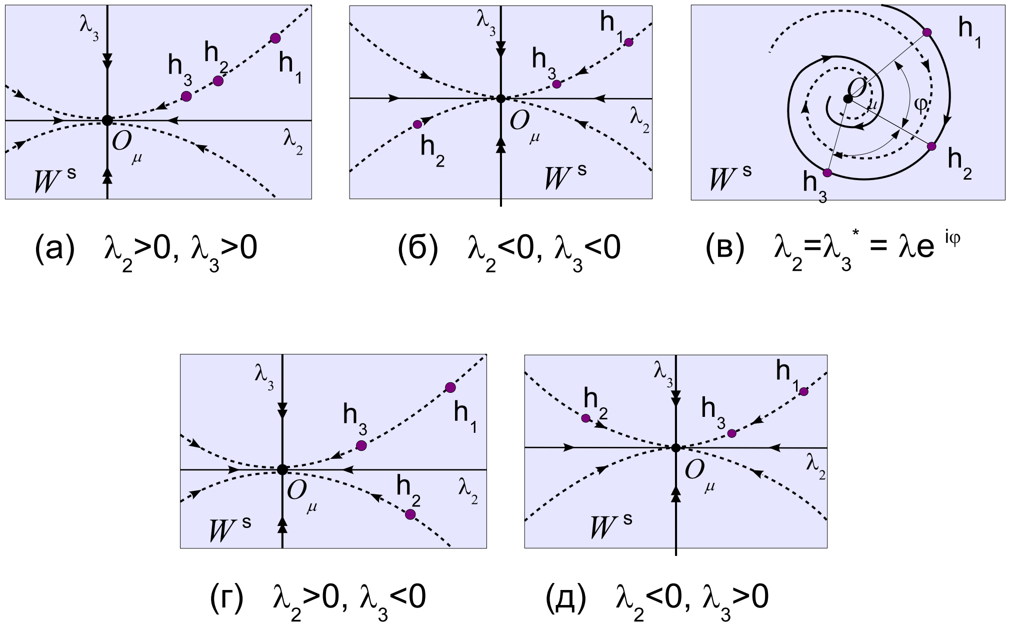


Рисунок 1.5: Иллюстрация поведения итераций точки $h_1 \in W^s_{loc}(O)$ отображения T_μ в ограничении на $W^s_{loc}(O)$ в зависимости от знаков мультипликаторов λ_2, λ_3 устойчивой на $W^s_{loc}(O)$ неподвижной точки O: (а)–(в) ориентируемые случаи, $\lambda_2\lambda_3 > 0$; (г)–(д) неориентируемые случаи, $\lambda_2\lambda_3 < 0$.

1.1.2 Сценарий возникновения дискретного неориентируемого восьмерочного аттрактора

Второй сценарий, образования неориентируемого дискретного восьмерочного аттрактора, см. рис. 1.4б, может быть реализован в тех случаях, когда все мультипликаторы точки O *отрицательны*, т.е. когда $\lambda_1 < -1 < \lambda_2, \lambda_3 < 0$ при $\mu > \mu_1$. Возникающие здесь гомоклинические аттракторы очень похожи на те, которые имеют место в ориентируемом случае, см. рис. 1.3б и 1.4б.

1.1.3 Сценарий возникновения дискретного неориентируемого спирального аттрактора

Третий сценарий связан с образованием неориентируемого дискретного спирального аттрактора, см. рис. 1.4в. Этот сценарий можно рассматривать как промежуточный между первыми двумя сценариями ("лоренцев-

---

сами к себе (образуя, что называется, одномерный неразложимый континуум), то их гомоклинические точки на $W^s_{loc}(O)$ будут лежать вблизи точек $h_1, h_2, ..., h_i = T_\mu^{i-1}(h_1), ...$. Последние же, т.к. $0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1$, будут лежать на одной гладкой кривой, входящей в O с одной стороны от $W^{ss}_{loc}(O)$, см. рис. 1.5, – в этом случае термин "тонкий" кажется здесь вполне подходящим.

ским" и "восьмерочным"). Здесь опять первой бифуркацией потери устойчивости является бифуркация удвоения периода точки O, в результате которой она приобретает мультипликаторы $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \lambda < 1$. То есть, точка O становится седло-фокусом типа (2,1), а в её окрестности рождается устойчивая траектория периода 2. В результате потери устойчивости этой траектории и других устойчивых инвариантных множеств, которые могут от неё отродиться, и последующего образования гомоклинических пересечений инвариантных многообразий точки O, здесь может образоваться неориентируемый дискретный спиральный аттрактор.

Этот аттрактор в какой-то степени может быть похож и на дискретный аттрактор Лоренца и на дискретный восьмерочный аттрактор. Более того, при эволюции устойчивых мультипликаторов точки O они могут стать действительными одного знака. В случае, когда устойчивые мультипликаторы становятся положительными, возможен переход от спирального аттрактора к лоренцевскому, а в случае отрицательных мультипликаторов – к восьмерочному.[4]

1.1.4 Сценарий возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова

В ряду этих новых сценариев особое место занимает (четвертый) сценарий возникновения неориентируемого дискретного аттрактора Шильникова (схематическую иллюстрацию см. на рис. 1.6). Здесь, также как и в ориентируемом случае, первой бифуркацией потери устойчивости точки O является бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой точка O становится седло-фокусом типа (1,2) с мультипликаторами $\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\psi}, -1 < \lambda_3 < 0$, где $\rho > 1$, а в её окрестности рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая L. Поначалу эта кривая является аттрактором, затем она и все ассоциированные с ней устойчивые инвариантные множества теряют устойчивость, образуется неориентируемая "воронка Шильникова", в которую "втягиваются" все траектории из ее окрестности. При дальнейшем изменении параметра возникает странный аттрактор, содержащий точку O и ее неустойчивое инвариантное многообразие.

Однако, здесь есть принципиальные отличия от ориентируемого случая. В частности, неориентируемая "воронка Шильникова" образуется более сложным образом. После бифуркации Андронова-Хопфа точка O ста-

[4]Такие переходы также наблюдались в компьютерных экспериментах с трехмерными отображениями Эно.

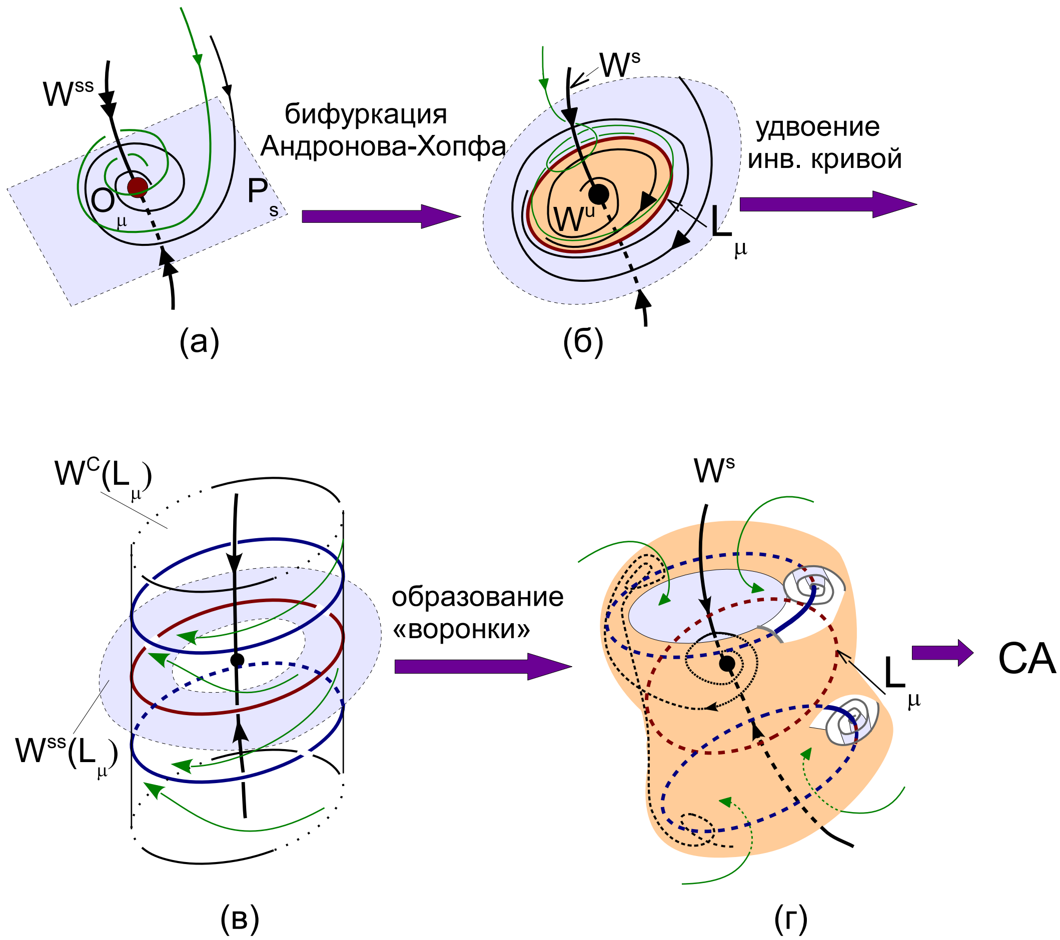
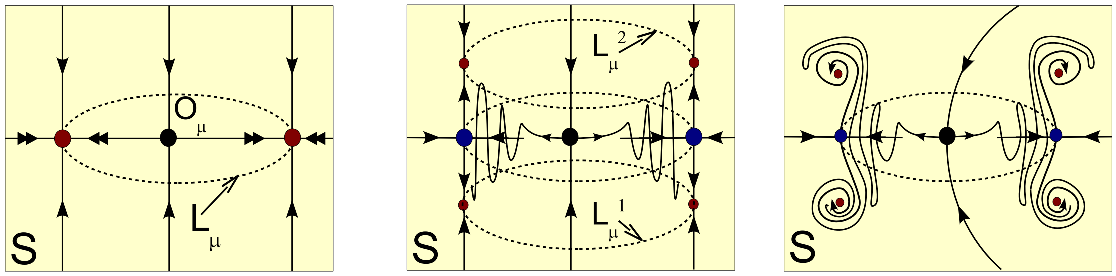


Рисунок 1.6: Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова. Здесь в этот сценарий включен переход (б)→(в), связанный с бифуркацией удвоения кривой L, см. также рис. 1.7.

новится седло-фокусом типа (1,2), ее неустойчивое многообразие является двумерным диском D с краем L. Заметим, что D является частью центрального многообразия W^C точки O. При значениях параметра μ, близких к бифуркационному, W^C – гладкая поверхность, соответственно воронки нет. Для её образования нужно, чтобы W^C потеряло гладкость. В ориентируемом случае это происходило из-за "дифференцируемой бифуркации", когда кривая L меняла свой тип с узлового на фокусный [21],[73]. В неориентируемом случае этого, очевидно, не может быть, так как L имеет тип "неориентируемого узла". Однако здесь есть другие варианты потери гладкости. Один из наиболее очевидных (а главное, наблюдаемых в численных экспериментах) вариантов – это когда при изменении μ кривая L сначала претерпевает бифуркацию "удвоения", в результате которой она становится седловой, а в её окрестности появляется *пара* устойчивых инвариантных кривых $\hat{L}^1$ и $\hat{L}^2$ периода 2 (таких, что $T_\mu(\hat{L}^1) = \hat{L}^2, T_\mu(\hat{L}^2) = \hat{L}^1$), переход (б)$\to$(в) на рис. 1.6. Каждая из кривых $\hat{L}^1$ и $\hat{L}^2$ инвариантна относительно T_μ^2, поэтому с ними при изменении μ одновременно может случиться "дифференцируемая бифуркация" (кривые узлового типа становятся фокальными), в результате которой неустойчивое двумерное многообразие седла O начинает навиваться на эти обе кривые, формируя уже нечто вроде границы "двусторонней воронки", в которую будут входить все траектории из поглощающей области, см. рис. 1.6г. После потери устойчивости инвариантными кривыми $\hat{L}^1$ и $\hat{L}^2$ (и всеми теми устойчивыми инвариантными множествами, которые от них отрождаются) может образоваться неориентируемый дискретный аттрактор Шильникова.

Отметим существенное отличие структуры бифуркаций удвоения инвариантных кривых в ориентируемом и неориентируемом случаях. В ориентируемом случае сама инвариантная кривая становится седловой, а в её окрестности появляется *одна* устойчивая инвариантная кривая, дважды обвивающая исходную кривую. В неориентируемом случае сама инвариантная кривая L также становится седловой, но в ее окрестности появляются *две* устойчивые инвариантные кривые, но периода два, см. рис. 1.6в и рис. 1.7. Это связано с тем, что вблизи бифуркационного момента центральным двумерным инвариантным многообразием кривой L в ориентируемом случае является лист Мёбиуса, а в неориентируемом – цилиндр. Последнее объясняется тем, что направление сильного сжатия для DT, оно же ортогональное к двумерному центральному многообразию $W^C(L)$, сохраняется (на самом многообразии $W^C(L)$ вектор ортогональный кривой L меняет



(а) (б) (в)

Рисунок 1.7: Иллюстрация сценария образования неориентируемой воронки Шильникова. Здесь S – это двумерная площадка, содержащая точку O и $W^s_{loc}(O)$ и пересекающая трансверсально кривую L в двух точках. Площадка S пересекает трансверсально также двумерные инвариантные многообразия $W^u(O)$, $W^C(L)$ и $W^{ss}(L)$ по соответствующим кривым.

направление на противоположное под действием DT).

Заметим, что бифуркация удвоения инвариантной кривой в особенности в случае трехмерных неориентируемых отображений, как нам кажется, до сих пор не изучалась. Поэтому в следующем параграфе мы рассмотрим ее более подробно.

1.1.5 Сценарии возникновения дискретных гомоклинических аттракторов в неориентируемых отображениях с симметрией.

Помимо четырех универсальных феноменологических сценариев возникновения странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов, также возможны два специальных сценария, отличающиеся тем, что системы, в которых они могут возникать, должны обладать специальной симметрией. Первый из таких сценариев – *сценарий возникновения дискретного неориентируемого двойного восьмерочного аттрактора*, представленный на рис. 1.8. Вначале, как и во всех предыдущих сценариях, имеется единственное асимптотически устойчивая неподвижная точка O типа узел, с мультипликаторами $-1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3 < \lambda_1 < 1, |\lambda_2| > |\lambda_3|$, при $\mu = \mu_0$. Далее при каком-то $\mu = \mu_1$, точка O теряет устойчивость ($\lambda_1 > 1$) в результате симметричной бифуркации "вилка" и становится седлом, а в его окрестности рождаются две устойчивых неподвижных точки O_1 и O_2, при этом

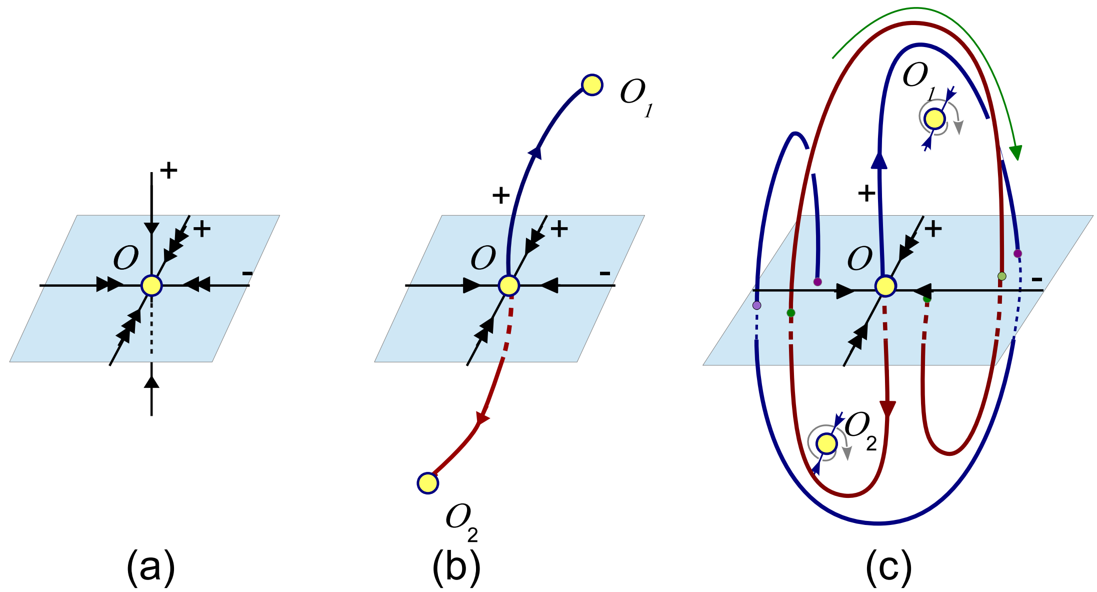


Рисунок 1.8: Сценарий возникновения дисктретного неориентируемого двойного восьмерочного аттрактора

неустойчивые сепаратрисы седла O ассимтотически стремятся к этим точкам. Затем неподвижные точки O_1 и O_2, при $\mu = \mu_2$, могут также потерять устойчивость, каким именно образом зависит от конкретной системы. Однако, здесь важно, что обе неустойчивые сепаратрисы седла O образуют гомоклиники, причем в силу наличия симметрии, происходит это одновременно, и далее может возникнуть странный аттрактор. Как можно видеть на рис. 1.8, в силу симметрии каждая из гомоклиник седла O в отдельности образует конфигурацию в виде восьмерки, поэтому такой аттрактор мы будем называть *двойным восьмерочным аттрактором.*

Второй специальный сценарий – это *сценарий возникновения дисктретного неориентируемого двойного аттрактора Лоренца*, представленный на рис. 1.9. В целом данный сценарий соответствует описанному выше сценарию возникновения неориентируемого двойного восьмерочного аттрактора. Отличие заключается в том, что возникающий в данном случае аттрактор по своей структуре отличется от предыдущего. В следствие того, что мультипликаторы седла O удовлетворяют следующим условиям $-1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3 < \lambda_1 < 1, |\lambda_3| > |\lambda_2|$, каждая из его гомоклиник образует конфигурацию, напоминающую восьмерку-бабочку, как в аттракторе Лоренца. В силу симметрии, соотсветственно, то же самое происходит и со второй гомоклиникой. Таким образом образующийся в данном сценарии

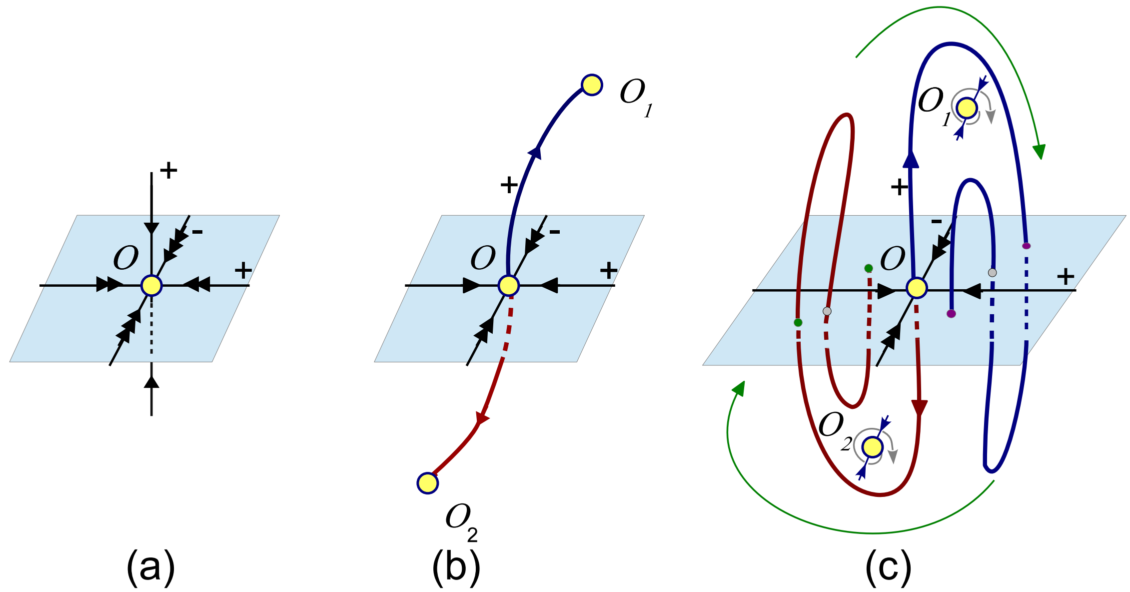


Рисунок 1.9: Сценарий возникновения дисктретного неориентируемого двойного аттрактора Лоренца

аттрактор будет также двойным.

В Главе 2 будут рассмотрены, в частности, примеры реализации указанных сценариев в случае обобщенных неориентируемых трехмерных отображений Эно.

1.2 О бифуркациях замкнутых инвариантных кривых трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов

В этом параграфе мы рассмотрим задачу о бифуркациях удвоения замкнутых инвариантных кривых в однопараметрических семействах диффеоморфизмов в R^3. Как нам кажется, такая задача, именно как задача теории бифуркаций, до сих пор не изучалась. В приложениях она более известна как бифуркация удвоения двумерного инвариантного тора многомерного потока (размерности ≥ 4) – на секущей Пуанкаре такой тор может быть представлен как замкнутая инвариантная кривая.

Возможность бифуркации удвоения инвариантного тора в случае многомерных потоков впервые была отмечена в работе В.С. Анищенко [2], см. также [66, 91]. Впоследствии такие бифуркации были обнаружены во многих прикладных задачах, см., например, [3, 26, 25, 59]. Однако теория бифуркаций удвоения инвариантного тора до сих пор не построена, хотя она, по крайней мере для двумерных торов четырехмерных потоков и замкнутых инвариантных кривых трехмерных отображений, выглядит очень похожей на теорию бифуркаций удвоения периодической траектории. Заметим также, что бифуркации удвоения замкнутых инвариантных кривых в случае трехмерных неориентируемых отображений ранее не рассматривались. Поэтому в диссертации мы уделим этой бифуркации особое внимание.

Сначала установим некоторые предварительные результаты.

Пусть трехмерный диффеоморфизм T, определенный в R^3 (или в некоторой области $B \subset R^3$, гомеоморфной шару), имеет замкнутую инвариантную кривую L. Различают два основных вида таких кривых: резонансные и нерезонансные. Для гладкой резонансной кривой отображение $T|_L$ имеет рациональное число вращения $\nu = p/q$, тогда у отображения $T|_L$ имеется одинаковое число устойчивых и неустойчивых периодических циклов периода q, точки которых чередуются на L. При этом сама кривая является замыканием инвариантных многообразий этих периодических точек. Для гладкой нерезонансной кривой отображение $T|_L$ имеет иррациональное число вращения, периодических точек у отображения $T|_L$ нет, и здесь траектория любой точки является транзитивной (в достаточно гладком случае [64]). Охарактеризовать тип нерезонансной кривой L трехмерного отображения можно по спектру ее показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Один из ее показателей, направленный по касательной вдоль кривой, всегда нулевой, например, $\Lambda_1 = 0$. Тогда кривая L

- *устойчивая*, если $\Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$, *вполне неустойчивая*, если $\Lambda_2 > 0, \Lambda_3 > 0$ – при этом она *узлового типа*, если $\Lambda_2 \neq \Lambda_3$, и *фокусного типа*, если $\Lambda_2 = \Lambda_3$;

- *седловая*, если $\Lambda_2 \Lambda_3 < 0$.

В случае, когда инвариантная кривая седловая, у нее есть два двумерных инвариантных многообразия $W^s(L)$ и $W^u(L)$, устойчивое и неустойчивое соответственно, которые пересекаются по L трансверсально. По определению, кривая L является ω-предельной (α-предельной) для любой точки из $W^s(L)$ (из $W^u(L)$). Обозначим через $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ локальные полоски многообразий $W^s(L)$ и $W^u(L)$ ширины δ, где δ достаточно мало. При этом $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ касаются на L собственных векторов, отвечающих показателю $\Lambda_2 < 0$ и показателю $\Lambda_3 > 0$ соответственно.

Лемма 1.1. *Пусть T – диффеоморфизм, заданный на R^3, имеет седловую* *замкнутую инвариантную кривую L_μ. Пусть одномерное отображение $T|_L$, т.е. ограничение T на L, является транзитивным. Тогда $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ являются одновременно либо цилиндрами, либо листами Мёбиуса.*

Доказательство. Рассмотрим такую геометрическую конструкцию. В пространстве (x, y, z) возьмем отрезок $L = [0, 1]$ оси Ox и гладко склеим его концевые точки $x = 0$ и $x = 1$. Отображение $T|_L$ пусть имеет вид $\bar{x} = f(x) (\mathrm{mod}\ 1)$. В некоторой точке x_0 рассмотрим два маленьких диска $d_s \subset W^s_{loc}(L)$ и $d_u \subset W^u_{loc}(L)$. В силу эргодичности отображения $T|_L$ эти диски могут быть продолжены до полных полосок D_s и D_u на $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ соответственно, которые пересекаются трансверсально по отрезку $[0, 1]$ и пересекают плоскости $x = 0$ и $x = 1$ по отрезкам: $[AB] = D_s \cap \{x = 0\}$, $[A'B'] = D_s \cap \{x = 1\}$ и $[CD] = D_u \cap \{x = 0\}$, $[C'D'] = D_u \cap \{x = 1\}$. Без ограничения общности можно полагать, что отрезки $[AB]$ и $[A'B']$ лежат в плоскости $z = 0$, а отрезки $[CD]$ и $[C'D']$ – в плоскости $y = 0$, а также, что эти отрезки одинаково ориентированы в этих плоскостях (например, $A = (0, -\delta, 0)$, $A' = (1, -\delta, 0)$, $B = (0, \delta, 0)$, $B' = (1, \delta, 0)$ и $= (0, 0, -\delta)$, $C' = (1, 0, -\delta)$, $D = (0, 0, \delta)$, $D' = (1, 0, \delta)$), см. рис. 1.10a.

Теперь мы склеим отрезки $[AB]$ и $[A'B']$ и отрезки $[CD]$ и $[C'D']$, считая, что плоскости $x = 0$ и $x = 1$ отождествлены. Это можно сделать двумя способами. Первым способом – отождествив точки A и A', B и B', C и C', D и D'. Тогда получим, что $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ являются оба цилиндрами. Второй способ – это когда отождествляются точки A и B', B и A', C и D', D и C'. Тогда получим, что $W^s_{loc}(L)$ и $W^u_{loc}(L)$ являются оба листами Мёбиуса, см. рис. 1.10(b) и (d).

Покажем, что случай, когда одно из многообразий является листом Мебиуса, а другое цилиндром в R^3 невозможен. Действительно, пусть, например, $W^s_{loc}(L)$ – цилиндр, т.е. отождествлены точки A и A', B и B', а $W^u_{loc}(L)$ – лист Мёбиуса, т.е. отождествлены точки C и D', D и C'. Тогда кривая AA' (а также и BB') обязательно пересечет $W^u_{loc}(L)$ в некоторой точке, см. рис. 1.10c, т.к. $W^u_{loc}(L)$ локально разделяет R^3. $\square$

В случае, когда инвариантная кривая L устойчивая или вполне неустойчивая и ляпуновские вектора l_2 и l_3 трансверсальны, у дифференциала $DT(L)$ в каждой точке p существуют касательные к L плоскости P_2 и P_3 такие, что $DT(P_i(p)) = P_i(T(p))$. Эти плоскости в совокупности являются касательными на L к инвариантным многообразиям $W_2(L)$ и $W_3(L)$. Если $\Lambda_2 \neq \Lambda_3$, то одно из этих многообразий является неведущим (сильно устойчивым или сильно неустойчивым), а другое – ведущим[5].

Отметим, что доказательство леммы 1.1 не меняется, если кривая L имеет узловой тип. Тогда в качестве дисков d_s и d_u можно рассмотреть диски d_2 и d_3, касательные соответственно к $W_2(L)$ и $W_3(L)$. Тогда получаем следующее утверждение

Лемма 1.2. *Пусть кривая L является устойчивой (сильно неустойчивой), и пусть одномерное отображение $T|_L$ является транзитивным. Тогда, если ляпуновские вектора l_2 и l_3 трансверсальны, то многообразия $W_2(L)$ и $W_3(L)$ являются одновременно либо цилиндрами, либо листами Мёбиуса.*

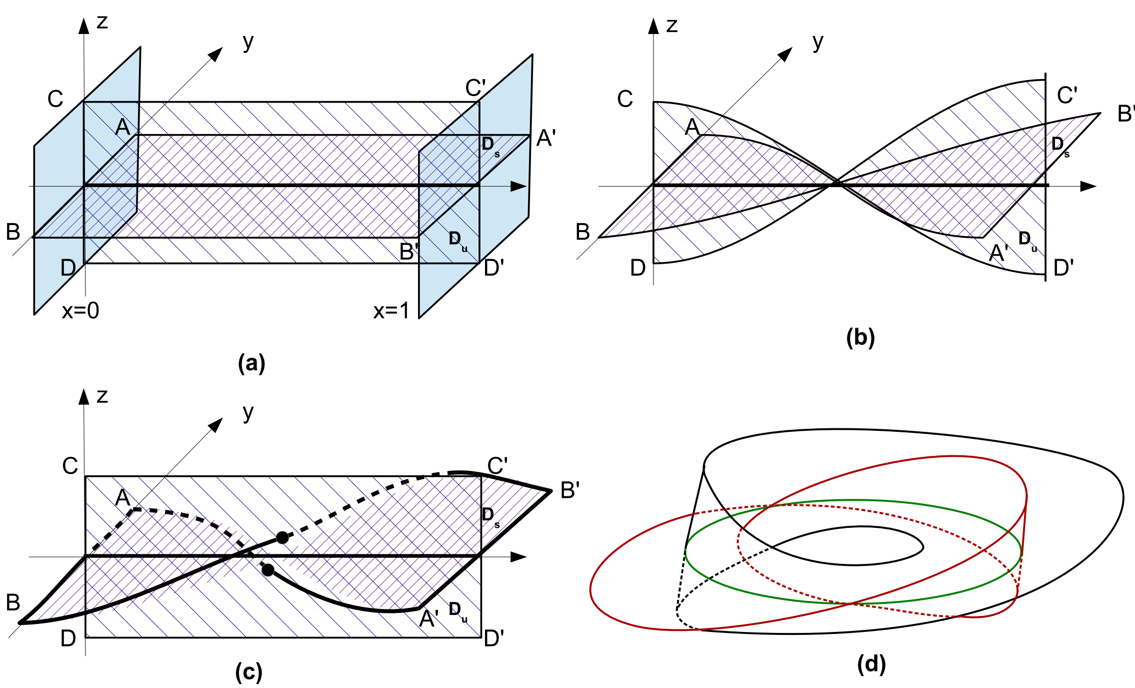


Рисунок 1.10: Иллюстрация к лемме 1.1, когда инвариантные многообразия седловой инвариантной кривой отображения в R^3 являются одновременно либо (a) цилиндрами, либо (b) и (c) листами Мёбиуса. На рис. (d) проиллюстрировано, что случай, когда одно многообразие является цилиндром, а другое – листом Мёбиуса, в R^3 невозможен.

[5]Например, если L устойчива и $|\Lambda_2| < |\Lambda_3|$, то многообразие $W_2(L)$ является неведущим, а $W_3(L)$ – ведущим. При этом $W_2(L)$ единственное такое многообразие, касательное во всех точках к плоскостям P_2, а ведущих многообразий континуум, поэтому $W_3(L)$ – это одно из них.

1.2.1 Теоремы о бифуркациях удвоения нерезонансных инвариантных кривых

Рассмотрим теперь наш основной случай, когда замкнутая инвариантная кривая L_μ рождается в результате бифуркации при $\mu = 0$ устойчивой неподвижной точки O_μ неориентируемого трехмерного отображения T_μ. Тогда точка O_μ при $\mu = 0$ имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}, \lambda_3$, где $-1 < \lambda_3 < 0$. Будем также предполагать, что $\varphi \neq 0, \pi, 2\pi/3, \pi/2$, т.е., что в момент бифуркации отсутствуют сильные резонансы, а сама бифуркация является мягкой (суперкритической) и устойчивая инвариантная кривая L_μ рождается при $\mu > 0$. Тогда при достаточно малых $\mu > 0$ кривая L_μ будет гладкой. При этом точка O_μ будет иметь мультипликаторы $\lambda_{1,2} = \lambda e^{\pm i\varphi}, \lambda_3$, где $\lambda > 1$, т.е. O_μ станет седло-фокусом (1,2), у которого неустойчивое многообразие $W^u(O_\mu)$ будет диском с краем L_μ. Сама кривая L_μ будет устойчивой узлового типа, а ее сильно устойчивое $W_3(L_\mu)$ и неведущее $W_2(L_\mu)$ инвариантные многообразия будут цилиндрами.

Рассмотрим сначала случай, когда кривая L_μ при изменении μ остается *нерезонансной* вплоть до момента (бифуркации), когда еще один ее ляпуновский показатель, кроме Λ_1, обратится в нуль при $\mu = \mu_1$. При этом кривая L_μ будет оставаться краем диска $W^u(O_\mu)$, а в силу того, что отображение T_μ неориентируемо, она будет узлового типа вплоть до момента $\mu = \mu_1$ (ляпуновские вектора $l_2(\mu)$, касающийся $W_2(L_\mu)$, и $l_3(\mu)$, касающийся $W_3(L_\mu)$, всегда не коллинеарны, т.к. тройки векторов (l_1, l_2, l_3) и $DT(l_1), DT(l_2), DT(l_3)$ имеют разную ориентацию). Момент $\mu = \mu_1$ является, очевидно, бифуркационным, так как при переходе через $\mu = \mu_1$ кривая L_μ меняет свой тип с узлового на седловой. Если кривая L_μ при $\mu = \mu_1$ является нерезонансной, это означает, что один из ее показателей Λ_2 или Λ_3 меняет знак: $\Lambda_i(\mu) < 0$ при $\mu < \mu_1$, $\Lambda_i(\mu) = 0$ при $\mu = \mu_1$ и $\Lambda_i(\mu) > 0$ при $\mu > \mu_1$, где i равно 2 или 3.

Рассмотрим случай, когда Λ_3 меняет знак при $\mu = \mu_1$. Тогда, поскольку отображение T_μ неориентируемо, кривая L_μ при малых $\mu - \mu_1 < 0$ имеет узловой тип, и у нее есть два инвариантных многообразия: сильно устойчивое $W^{ss}_{loc}(L)$ и центрально-устойчивое $W^{cs}_{loc}(L)$, которые касаются на L собственных ляпуновских векторов, отвечающих показателям $\Lambda_2(\mu) < 0$ и $\Lambda_3(\mu) < 0$, соответственно. При этом $|\Lambda_3(\mu)| < |\Lambda_2(\mu)|$ при μ близких к μ_1. При наших условиях, многообразие $W^{ss}_{loc}(L)$ является цилиндром. В силу леммы 1.1, многообразие $W^{cs}_{loc}(L)$ также является цилиндром.

Бифуркации нерезонансных инвариантных кривых при условии вложения в поток

Сделаем следующее

Предположение 1.1. *Пусть отображение $T^2(\mu)$ вкладывается в достаточно гладкий поток X_μ в окрестности кривой L_μ для всех значений параметра μ, близких к μ_1.*

Рассмотрим теперь этот поток X_μ. По нашим предположениям кривая L_μ становится теперь предельным циклом потока X_μ, устойчивым при $\mu < \mu_1$ и седловым при $\mu > \mu_1$. Поток ориентируемый и инвариантные многообразия цикла L_μ (устойчивое и неустойчивое при $\mu > \mu_1$, устойчивое и центральное при $\mu = \mu_1$, сильно устойчивое и центрально-устойчивое при $\mu < \mu_1$) являются цилиндрами. Поэтому мультипликаторы $\lambda(\mu)$ и $\gamma(\mu)$ цикла L_μ, где $\lambda(\mu) < \gamma(\mu)$, будут положительными. Напомним, что мультипликаторы цикла L_μ можно определить как собственные значения матрицы линеаризации отображения Пуанкаре $\mathcal{T}_\mu : S \to S$ некоторой локальной секущей S к L_μ, вычисленные в его неподвижной точке $O_\mu = S \cap L_\mu$. При μ, близких к μ_1, будем иметь, что всегда $0 < \lambda(\mu) < 1$ и $0 < \gamma(\mu) < 1$ при $\mu < \mu_1$, $\gamma(\mu) = 1$ при $\mu = \mu_1$, $\gamma(\mu) > 1$ при $\mu > \mu_1$. Тогда, поскольку точка O_μ не исчезает, наблюдаемая при $\mu = \mu_1$ бифуркация является в общем случае бифуркацией растроения неподвижной точки (или, по-другому, бифуркацией "вилки"): точка O_μ при $\mu < \mu_1$ является устойчивой, а при $\mu > \mu_1$ она становится седловой, и в ее окрестности рождаются две устойчивые неподвижные точки O^1_μ и O^2_μ.

Возвращаясь к нашему случаю трехмерного неориентируемого отображения $T(\mu)$, получаем, что, так как $W^s_{loc}(L_\mu)$ и $W^u_{loc}(L_\mu)$ являются цилиндрами, то при $\mu > \mu_1$ кривая L_μ, содержащая точку O_μ, становится седловой, а в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ, содержащие точки O^1_μ и O^2_μ, которые образуют цикл периода 2, т.е. $T(L^1_\mu) = L^2_\mu$ и $T(L^2_\mu) = L^1_\mu$. Заметим, что в этом случае многообразие $W^u_{loc}(L_\mu)$ является центральным многообразием по отношению к рассматриваемой бифуркации, и поэтому инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ лежат на нем – с разных сторон от L_μ. При этом траектории на $W^u_{loc}(L_\mu)$ также прыгают, под действием отображения $T(\mu)$, с одной стороны от L_μ на другую, т.е. инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ действительно образуют цикл периода 2.

Рассмотрим теперь случай, когда Λ_2 меняет знак. Тогда, поскольку отображение T_μ неориентируемо, кривая L_μ при малых $\mu - \mu_1 < 0$ имеет узловой тип, и у нее есть два локальных инвариантных многообразия: сильно устойчивое $W_3(L)$ и центрально-устойчивое $W_2(L)$, которые касаются на L собственных ляпуновских векторов, отвечающих показателям $\Lambda_3(\mu) < 0$ и $\Lambda_2(\mu) < 0$, соответственно. При этом $|\Lambda_2(\mu)| < |\Lambda_3(\mu)|$ при μ близких к μ_1. При наших условиях, многообразие $W_2(L)$ является цилиндром. В силу леммы 1.2, многообразие $W_3(L)$ также является цилиндром.

Предполагая, что условие 1.1 выполнено, рассмотрим соответствующий поток X_μ. Также как и выше показываем, что в том случае, когда кривая L_μ *сохраняется* и при $\mu > \mu_1$ наблюдаемая при $\mu = \mu_1$ бифуркация является в общем случае бифуркацией "вилки": точка O_μ при $\mu < \mu_1$ является устойчивой, а при $\mu > \mu_1$ она становится седловой, и в ее окрестности рождаются две устойчивые неподвижные точки $\tilde{O}^1_\mu$ и $\tilde{O}^2_\mu$.

Возвращаясь к нашему случаю трехмерного неориентируемого отображения $T(\mu)$, получаем, что, так как $W_2 = W^u_{loc}(L_\mu)$ и $W_3 = W^s_{loc}(L_\mu)$ являются цилиндрами, то при $\mu > \mu_1$ кривая L_μ, содержащая точку O_μ становится седловой, а в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые $\tilde{L}^1_\mu$ и $\tilde{L}^2_\mu$, содержащие точки $\tilde{O}^1_\mu$ и $\tilde{O}^2_\mu$. Заметим, что в этом случае многообразие $W_2 = W^u_{loc}(L_\mu)$ является центральным многообразием по отношению к рассматриваемой бифуркации, и поэтому инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ лежат на нем – с разных сторон от L_μ. При этом траектории на $W_2(L_\mu)$, в отличие от предыдущего случая не перепрыгивают, под действием отображения $T(\mu)$, с одной стороны от L_μ на другую, т.е. инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ являются неподвижными относительно T_μ.

Однако заметим, что эта бифуркация, если не предполагать, что предельный цикл L_μ сохраняется у потока X_μ и при $\mu > \mu_1$, имеет, все-таки, коразмерность 2, так как она отвечает бифуркации "вилки" предельного цикла у потока X_μ. Здесь более типичной должна быть седло-узловая бифуркация, связанная со слиянием в момент $\mu = \mu_1$ устойчивого цикла L_μ с некоторым седловым циклом. С другой стороны, рассмотренная выше бифуркация в случае, когда меняет знак ляпуновский показатель $\Lambda_3(\mu)$, имеет коразмерность 1 из-за наличия симметрии у отображения $T(\mu)$ в силу того, что у него направление в W_3, трансверсальное к L_μ, является прыгающим (эта симметрия наследуется от того, что у отображения T_μ мультипликатор λ_3 точки O_μ отрицательный).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1.1. *Предположим, что выполняется условие 1.1, т.е. $T^2(\mu)$ вкладывается в поток в достаточно малой фиксированной окрестности*

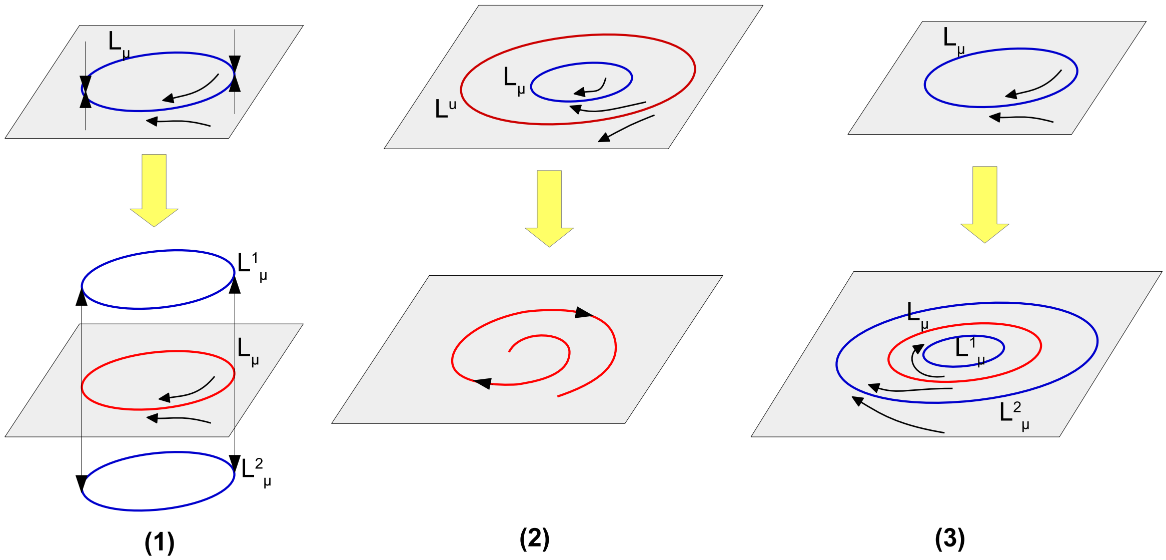


Рисунок 1.11: Иллюстрация к теореме 1.1 трех вариантов буфуркации нерезонансной инвариантной кривой L_μ у трехмерных неориентируемых отображений.

нерезонансной инвариантной кривой L_μ для всех значений параметра μ, близких к бифуркационному значению $\mu = \mu_1$. Тогда возможны следующие три случая.

1) Случай $\Lambda_3(\mu_1) = 0$. При $\mu > \mu_1$ кривая L_μ становится седловой, и при общих условиях в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ, которые образуют цикл периода 2, т.е. $T(L^1) = L^2$ и $T(L^2) = L^1$, см. рис. 1.11(1).

2) Случай $\Lambda_2(\mu_1) = 0$. В общем случае при $\mu = \mu_1$ устойчивая кривая L_μ сливается с некоторой седловой, и обе исчезают при $\mu > \mu_1$[6], см. рис. 1.11(2).

3) Случай $\Lambda_2(\mu_1) = 0$ при условии, что при $\mu > \mu_1$ кривая L_μ сохраняется. Тогда при $\mu > \mu_1$ кривая L_μ становится седловой и в ее окрестности рождаются две устойчивые инвариантные кривые L^1_μ и L^2_μ, которые являются неподвижными относительно T_μ, т.е. $T(L^1) = L^1$ и $T(L^2) = L^2$, см. рис. 1.11(3).

Заметим, что случай 3) теоремы 1.1 имеет, по-видимому, коразмерность 2, так как он отвечает бифуркации “вилки” предельного цикла у потока X_μ. Здесь более типичной должна быть седло-узловая бифуркация, связанная со слиянием в момент $\mu = \mu_1$ устойчивого цикла L_μ с некоторым седловым циклом (который, правда, неизвестно откуда появляется).

[6]Бифуркация слияния инвариантых кривых была изучена А. Шенсоне, см., например, [61]

Доказательство теоремы для случая 1) можно провести, не делая предположения о возможности вложения диффеоморфизма в поток в локальной окрестности кривой, а предположив, что инвариантная кривая в бифуркационный момент является гладкой и имеет диофантово число вращений. Напомним, что иррациональное число ω называется *диофантовым*, если существуют такие $c > 0$ и $\alpha \geq 2$, что для любых натуральных p и q выполняется неравенство

$$|\omega - \frac{p}{q}| \geq \frac{c}{q^\alpha}$$

Рассмотрим обращающий ориентацию дифеоморфизм $F : R^3 \to R^3$, у которого есть гладкая замкнутая инвариантная кривая L. Предположим, что в каждой точке кривой L определена пара линейных пространств, одномерное устойчивое подпространство E^s и двумерное центральное подпространство E^c, такие, что они непрерывно зависят от точки на L и ограничение производной DF отображения F на E^s - экспоненциально сжимающее, а ограничение DF на E^c, если и сжимает расстояние, то слабее, чем ограничение DF на E^s, т.е. можно ввести норму в E^s и E^c так, что для некоторых $\lambda < \mu < 1$, не зависящих от точки на L, мы имеем

$$\|DF|_{E^s}\| < \lambda < \mu < \|DF^{-1}|_{E^c}\|^{-1}.$$

Мы также предположим, что касательный вектор к L в каждой точке принадлежит E^c. Тогда диффеоморфизм F (а также любой C^1-близкий к нему) имеет гладкое двумерное инвариантное многообразие W^c, содержащее L и касательное к E^c в точках L. По лемме 1.1 это многообразие может быть или цилиндром, или листом Мебиуса. Мы предположим, что W^c - цилиндр, и что F обращает ориентацию на W^c. Гладкость W^c зависит от показателей λ и μ: если $F \in C^r$ и $\lambda < \mu^r$, то $W^c \in C^r$. Мы предположим, что это свойство выполнено, поэтому впредь достаточно рассматривать ограничение F на W^c. Таким образом, задача сводится к изучению обращающих ориентацию диффеоморфизмов двумерного цилиндра с гладкой инвариантной кривой.

Мы предположим, что кривая L имеет гладкость C^r. Поэтому в окрестности кривой L можно ввести C^r-координаты y, ϕ так, что кривая задается уравнением $y = 0$. Более того, мы предположим, что ограничение F на $L : y = 0$ сохраняет ориентацию, и что число вращения $\omega/2\pi$ - диофантово, так что $F|_L$ сопряжено C^r-гладким образом поворота на угол ω. Таким образом, можно ввести координату ϕ так, что $F|_L$ имеет вид $\phi = \phi + \omega$ и, соответственно, отображение $f = F|_{W^c}$ вблизи L имеет вид

$$\bar{y} = a(\phi)y + O(y^2), \qquad \bar{\phi} = \phi + \omega + O(y),$$

где $a(\phi)$ - периодическая функция такая, что

$$a(\phi) < 0$$

(напомним, что f меняет ориентацию на цилиндре). Правые части здесь - C^r-гладкие функции, периодические по ϕ. Будем считать, что период равен 2π.

Очевидно, что сколь угодно малым C^r-гладким возмущением можно сделать правые части C^∞-гладкими.

Сделаем замену переменных:

$$y_{new} = ye^{-\Phi(\phi)}.$$

Подберем функицю $\Phi(\phi)$ таким образом, чтобы данной заменой убрать зависимость a от ϕ. Подставив замену в отображение f и, пренебрегая членами малых порядков, получим, что

$$\bar{y}_{new} = \bar{y}e^{-\Phi(\bar{\phi})} = \bar{y}e^{-\Phi(\phi+\omega)}$$

Тогда, подставив $\bar{y} = \bar{y}_{new}e^{\Phi(\phi+\omega)}$ и $y = y_{new}e^{\Phi(\phi)}$ в первое уравнение отображения, получим

$$\bar{y}_{new}e^{\Phi(\phi+\omega)} = a(\phi)e^{\Phi(\phi)}y_{new} + O(y_{new}^2)$$

и

$$\bar{y}_{new} = e^{-\Phi(\phi+\omega)}a(\phi)e^{\Phi(\phi)}y_{new} + O(y_{new}^2)$$

Положим, что

$$a_0 = a(\phi)e^{\Phi(\phi)-\Phi(\phi+\omega)} = const$$

Прологарифмировав, получим, что

$$\ln a_0 = \ln|a(\phi)| + \Phi(\phi) - \Phi(\phi+\omega)$$

Далее разложим функции правых частей в ряд Фурье, предполагая, что они являются достаточно гладкими при $\phi \in [-\pi, \pi]$:

$$b(\phi) = \ln|a_0| + \sum_{n\neq 0} b_n e^{in\phi}$$

$$\Phi(\phi) = \phi_0 + \sum_{n\neq 0} \phi_n e^{in\phi}$$

$$\Phi(\phi+\omega) = \phi_0 + \sum_{n\neq 0} \phi_n e^{in(\phi+\omega)}$$

Подставив разложения в исходное уравнение, получим

$$\ln a_0 = \ln a_0 + \sum_{n\neq 0} b_n e^{in\phi} + \phi_0 + \sum_{n\neq 0} \phi_n e^{in\phi} - \phi_0 - \sum_{n\neq 0} \phi_n e^{in(\phi+\omega)}$$

Сокращая и приравнивая соответствующие коэффициенты в суммах, имеем, что

$$b_n = \phi_n - \phi_n e^{in\phi},$$

или же

$$\phi_n = \frac{b_n}{1 - e^{in\omega}}$$

Тогда

$$\Phi(\phi) = \phi_0 + \sum_{n\neq 0} \frac{b_n}{1 - e^{in\omega}} e^{in\phi}, \tag{1.1}$$

а b_n - коэффциенты Фурье функции $b(\phi) = \ln |a(\phi)|$:

$$b(\phi) = \ln a_0 + \sum_{n\neq 0} b_n e^{in\phi}.$$

Так как $b(\phi)$ - C^r-гладкая периодическая функция, то ее коэффициенты Фурье убывают достаточно быстро ($b_n = o(\frac{1}{n^r})$), и из диофантовости ω следует, что ряд для $\Phi(\phi)$ сходится вместе с первыми k производными, где k - достаточно большое целое число. Покажем это.

Вначале сделаем оценку

$$|1 - e^{n\omega i}| \geq |1 - e^{in(\frac{2\pi p}{n} + \frac{c}{n^\alpha})}| \geq |1 - e^{2\pi pi} e^{\frac{nci}{n^\alpha}}|$$

Учитывая, что $e^{2\pi pi} = 1$, получим

$$|1 - e^{\frac{nci}{n^\alpha}}| \geq |1 - 1 - \frac{nci}{n^\alpha} - o(\frac{1}{n^{2\alpha}})| = |\frac{nci}{n^\alpha} + o(\frac{1}{n^{2\alpha}})| \geq \frac{c}{n^{\alpha-1}}$$

Тогда

$$|\frac{b_n}{1 - e^{in\omega}}| \leq \frac{\frac{1}{n^r}}{\frac{c}{n^{\alpha-1}}} = \frac{c}{n^{r-\alpha+1}}$$

и

$$|\frac{b_n}{1-e^{in\omega}}e^{in\phi}| \le \frac{c}{n^{r-\alpha+1}}$$

Т.е. ряд сходится при $r > \alpha + 2$, что можно всегда положить в силу большой гладкости кривой L.

Очевидно, что после замены (1.1) отображение сохраняет свой вид, но коэффициент при y в уравнении для $\bar{y}$ становится независимым от ϕ:

$$\bar{y} = -a_0 y + O(y^2), \qquad \bar{\phi} = \phi + \omega + O(y),$$

где

$$a_0 > 0.$$

Мы будем предполагать, что

$$a_0 = 1.$$

Таким образом, отображение можно записать в виде

$$\bar{y} = -y + \sum_{m=2}^{r} \alpha_m(\phi) y^m + o(y^r), \qquad \bar{\phi} = \phi + \omega + O(y),$$

где правые части - достаточно гладкие функции, 2π-периодические по ϕ.

Покажем, что достаточно гладкими заменами переменных можно сделать все функции α_m ($m = 2, \ldots, r$) независящими от ϕ (и, более того, все α_m с четными индексами m можно занулить). В самом деле, гладкая замена

$$y_{new} = y - y^m \sum_n \frac{a_{mn}}{(-1)^m e^{in\omega} + 1} e^{in\phi},$$

где a_{mn} - коэффициенты Фурье функции α_m, а суммирование ведется по всем целым n в случае четного m и по всем целым $n \ne 0$ в случае нечетного m, не меняет вид отображения, не меняет члены степени меньше m и, при этом, зануляет коэффициент перед y^m в уравнении для $\bar{y}$ в случае четного m и делает этот коэффициент независящим от ϕ в случае нечетного m, [35].

Таким образом, выполняя эти замены последовательно, начиная с $m = 2$ и вплоть до $m = r$, мы приводим отображение к виду

$$\bar{y} = -y - \sum_{1 \le p \le (r-1)/2} L_p y^{2p+1} + o(y^r), \qquad \bar{\phi} = \phi + \omega + O(y),$$

где коэффициенты L_p не зависят от ϕ. Теперь, сколь угодно малым C^r-гладким возмущением можно сделать правую часть уравнения для $\bar{y}$ полностью не зависящей от ϕ:

$$\bar{y} = -y - \sum_{1 \le p \le (r-1)/2} L_p y^{2p+1}.$$

Мы будем рассматривать возмущения вида

$$\bar{y} = -(1+\mu)y - \sum_{1 \le p \le (r-1)/2} L_p y^{2p+1},$$

где μ - малый параметр. Неподвижная точка этого отображения отвечает гладкой инвариантной кривой, точки периода два - инвариантной паре замкнутых гладких кривых.

Предположим, что

$$L_1 \neq 0.$$

Тогда при изменении μ от исходной инвариантной кривой отрождается ровно одна инвариантная пара гладких замкнутых инвариантных кривых. Таким образом доказана следующая

Теорема 1.2. *Пусть T – C^∞-гладкий трехмерный неориентируемый диффеоморфизм, который имеет негрубую диофантовую инвариантную кривую L, у которой отображение T в ограничении на двумерное центральное многообразие $W^c(L)$ обращает ориентацию.*[7] *Тогда существуют сколь угодно малые C^r-гладкие возмущения, что в окрестности инвариантной кривой L на W^c появляется инвариантная кривая (L_1, L_2) периода 2 того же типа устойчивости, что и L, а L меняет свой тип устойчивости.*

1.2.2 Бифуркации резонансных инвариантных кривых

Бифуркации резонансных замкнутых инвариантных кривых, в отличие от нерезонансных, изучены более детельно, см., например, [6, 8, 35], так как они по сути описываются бифуркациями ее периодических точек и их инвариантных многообразий (гомоклинические бифуркации). В двумерном случае основные такие бифуркации, приводящие к разрушению инвариантой кривой и возникновению хаоса были изучены в работах Афраймовича и Шильникова [6, 8]. Эти же бифуркации наблюдаются и в трехмерном случае, но здесь также возможны и новые.

[7]Негрубость кривой L означает, что у отображения T_{W^c} оба ляпуновских показателя точек на кривой L (показатели Λ_1 и Λ_3) равны нулю.

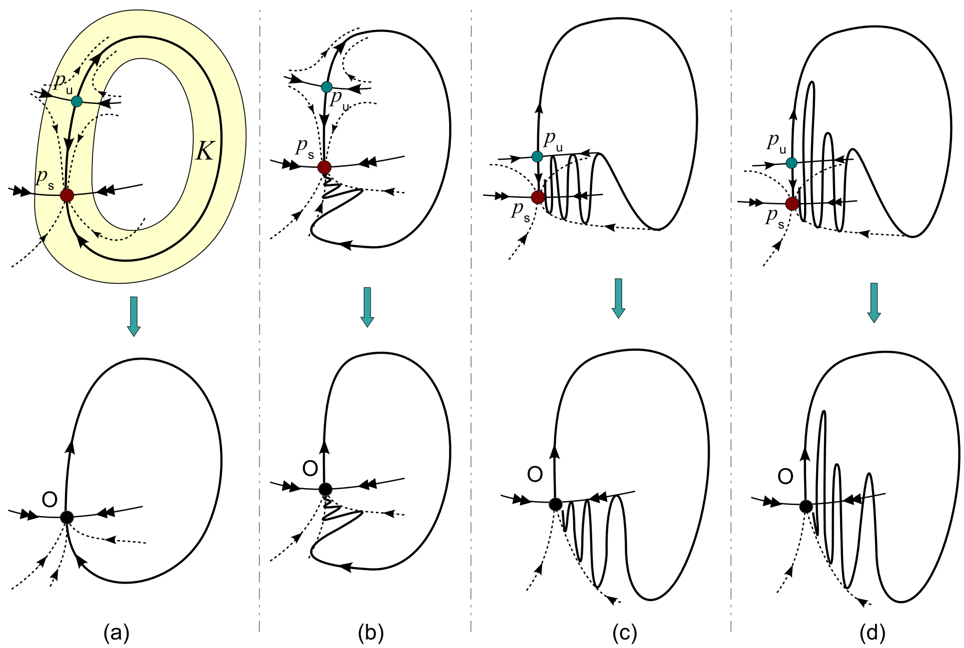


Рисунок 1.12: Поведение неустойчивого многообразия седловой точки p_u (верхний ряд) и седло-узла O (на границе зоны синхронизации – нижний ряд) при увеличении μ (слева направо).

Здесь мы будем предполагать, что кривая L_μ при изменении μ перестает быть нерезонансной. Она может быть нерезонансной и с самого начала, например, когда уже при $\mu = 0$ у устойчивой неподвижной точки O_μ неориентируемого трехмерного отображения T_μ появляются собственные значения $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}, \lambda_3$, где $-1 < \lambda_3 < 0$, такие, что $\varphi = p/q$. Однако, даже если это резонансное условие не выполняется, при изменении μ кривая L_μ может стать резонансной: на ней возникают, в случае резонанса $p : q$, по крайней мере два цикла периода q (на самой кривой у отображения $T|_L$ – устойчивый и неустойчивый, а у отображения T_μ – устойчивый и седловой типа (2,1)).

Как известно [6, 8], такая резонансная кривая при изменении μ может разрушиться. Даже в случае двумерного отображения это может произойти разными способами.

1. Случай рис. 1.12b. Еще до слияния точек p_u и p_s кривая L_μ становится негладкой, т.к. одна из сепаратрис $W^u(p_u)$ входит в p_s негладко. В момент слияния точек p_u и p_s кривая еще существует, а сразу после их исчезновения при выполнении некоторых условий [6] (негладкая) кривая либо еще существует, либо сразу возникает хаос.

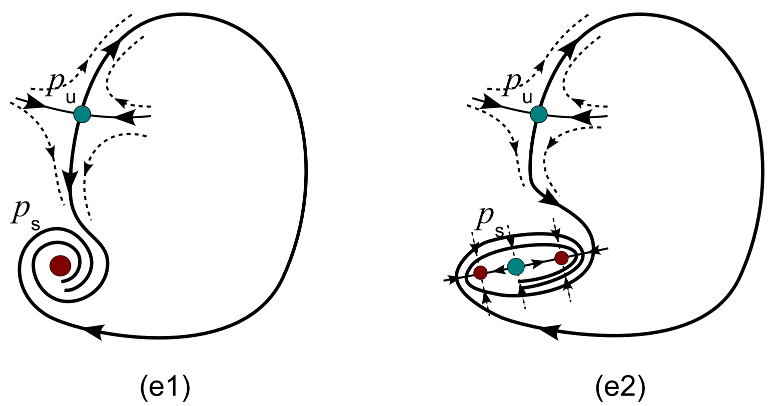


Рисунок 1.13: (e1) Точка p_s становится фокусом – кривая L_μ еще существует; (e2) точка p_s претерпевает бифуркацию удвоения – инвариантная кривая разрушилась.

2. Случаи рис. 1.12c и d. У седла p_u образуются гомоклинические траектории и соответственно хаотическая динамика возникает еще внутри зоны синхронизации, в которой аттрактором является пока все-таки устойчивая точка p_s.

3. Случай рис. 1.13. Инвариантная кривая L_μ разрушается внутри зоны синхронизации в результате бифуркации удвоения периода устойчивой точки p_s, а затем возникает хаос, например, после каскада бифуркаций удвоения периода.

На рис. 1.12 и 1.13 эти случаи проиллюстрированы на примере отображения кольца K в себя, содержащего устойчивую резонансную кривую. Для простоты, мы показываем такую кривую с двумя неподвижными точками p_u и p_s. При этом резонансная инвариантная кривая L_μ рассматривается как замыкание неустойчивого многообразия седловой в K точки p_u, т.е. $L_\mu = \overline{W^u(p_u)}$. В начальный момент, вблизи $\mu = 0$, например, инвариантная кривая гладкая и после бифуркации, когда седловая точка сливается с устойчивой на границе области синхронизации (нижний ряд рисунков), кривая сохраняется, остается гладкой и становится нерезонансной, рис. 1.12a. При увеличении μ кривая L_μ может разрушиться как сразу же при выходе из зоны синхронизации, рис. 1.12b, так и еще внутри этой зоны, когда точки p_u и p_s еще не слились, рис. 1.12c, d и рис. 1.13.

Как мы сказали, указанные сценарии разрушения инвариантной кривой

L_μ присутствуют уже в двумерном случае – у диффеоморфизма кольца K. В трехмерном случае они также наблюдаются, см. рис. 1.14, но также добавляются и новые, связанные, например, с тем, что кривая L_μ перестает быть нормально-гиперболической кривой в трансверсальном к K направлении. Тогда бифуркации с точками p_u и p_s могут происходить "поперек" кривой. В случае, когда с орбитой точки p_s происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, кривая L_μ может "рассыпаться" на отдельные устойчивые замкнутые инвариантные кривые того же периода, что и p_s, см. пример рис 1.14(b),(c). Аналогично, когда "поперек" кривой происходит суперкритическая бифуркация удвоения периода устойчивой точки периода q, вместо кривой будет наблюдаться устойчивая точка периода $2q$.

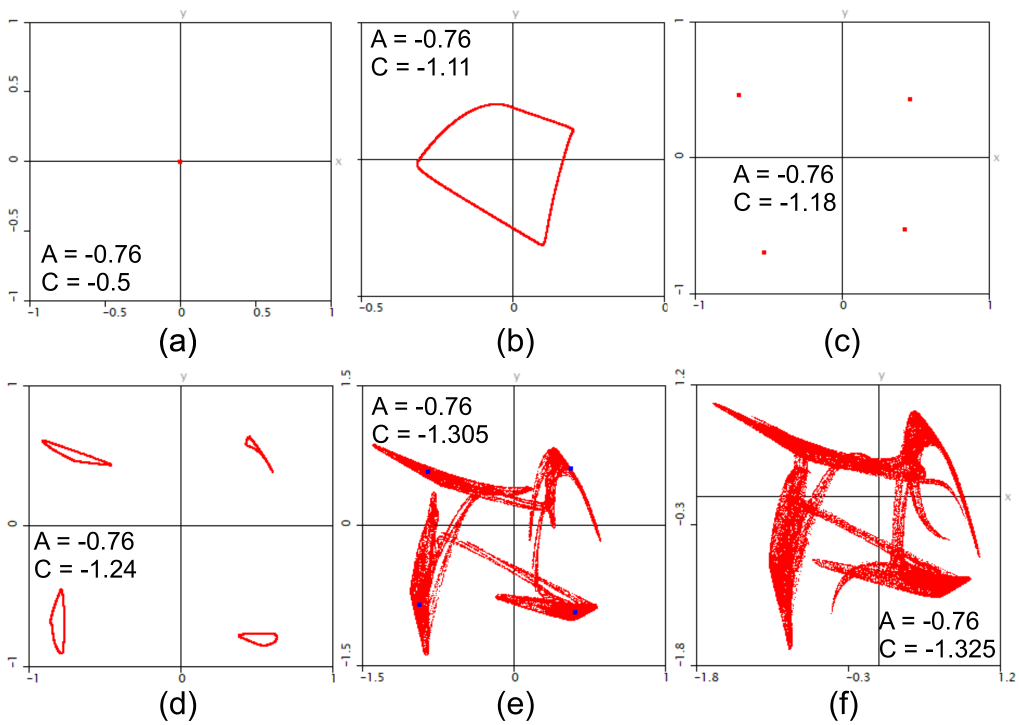


Рисунок 1.14: Реализация сценария разрушения инвариантной кривой для отображения $\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - y^2$, при изменения параметра A и фиксированном $B = -0.7$, с последующим образованием неориентируемого аттрактора Шильникова.

Что касается дискретного аттрактора Шильникова в рассматриваемом резонансном случае, то он тоже может возникать, но его конфигурация (воронка $W^u(O_\mu)$) здесь может иметь форму совсем непохожую на ту, которая схематично представлена на рис. 1.7.

1.3 Методы нахождения странных гомоклинических аттракторов

1.3.1 Метод карт седел для неориентируемых трехмерных отображений

В работе [69] для нахождения странных аттракторов в дискретных динамических системах были предложены достаточно эффективные новые поисковые методы. В частности, впервые был описан так называемый *метод карт седел*, позволяющий находить дискретные гомоклинические аттракторы различных типов, основываясь на определении областей параметров, отвечающих существованию неподвижных точек с заданным набором мультипликаторов. С помощью такого метода в [69] были решены важные вопросы существования гомоклинических аттракторов, содержащих неподвижную точку $O(0,0,0)$, в случае трехмерных обобщенных отображений Эно вида:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y,z), \tag{1.2}$$

где

$$g(0,0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial z}(0,0) = 0,$$

при условии, что якобиан B отображения положителен $0 < B < 1$, т.е. когда отображение (1.2) является ориентируемым.

В настоящей работе метод карт седел был применен к аналогичной задаче в случае, когда отображение (1.2) неориентируемо, т.е. когда якобиан отображения $B < 0$. Заметим, что точка $O(0,0,0)$ является неподвижной для отображения (1.2), в которой оно имеет характеристическое уравнение вида

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - A\lambda^2 - C\lambda - B = 0. \tag{1.3}$$

Суть метода карт седел, применительно к отображению (1.2), состоит в том, что для данного фиксированного значения якобиана B на плоскости параметров (A, C) строятся области, соответствующие разным наборам мультипликаторов неподвижной точки $O(0,0,0)$. Здесь наиболее важными являются три момента:

A1) Расположение мультипликаторов относительно единичной окружности: является ли точка O устойчивой или седловой типа (2,1) или (1,2), где первая цифра обозначает размерность устойчивого многообразия, а вторая - размерность неустойчивого многообразия.

A2) Являются ли мультипликаторы вещественными или комплексными, тем самым различаются седла и седло-фокусы.

A3) В случае (2,1) нужно указать больше или меньше единицы его седловая величина σ (модуль произведения устойчивого и неустойчивого мультипликаторов, ближайших к мнимой оси), а также когда ведущий устойчивый мультипликатор является положительным или отрицательным.

Условие A3) представляет для нас особый интерес в связи с тем, что из всего многообразия возможных аттракторов, возникающих в трехмерных отображениях, наибольший интерес вызывают псевдогиперболические гомоклинические аттракторы, для существования которых условие $\sigma > 1$ является необходимым.

Исходя из представленных выше условий, накладываемых на мультипликаторы, аналитически находятся кривые относительно параметров A, B, C отображения (1.2), которые являются границами областей, соответствующих разным наборам мультипликаторов неподвижной точки $O(0,0,0)$. Данные области изображаются в виде цветной диаграммы, для того чтобы дать наглядное представление о возможных режимах и бифуркационных сценариях отображения.

Теорема 1.3. *В случае отображения (1.2) расширенная бифуркационная диаграмма его неподвижной точки $O(0,0,0)$ при каждом фиксированном B, где $-1 < B < 0$, на плоскости параметров A и C (карта седел) содержит 14 областей, отвечающих различным в силу условий A1)–A3) наборам мультипликаторов точки O.*

Иллюстрация к этой теореме, карта седел при $B = -0.5$, представлена на рис. 1.15, а ее доказательство мы даем в следующем параграфе. На карте выделена область IV, т.н. “треугольник устойчивости” (область $\{C > B^2 - 1 - BA\} \cap \{C < A + B + 1\} \cap \{C < 1 - B - A\}$), когда неподвижная точка $O(0,0,0)$ является асимптотически устойчивой. При всех других значениях параметров A и C (кроме бифуркационных кривых) точка $O(0,0,0)$ является седловой – она имеет мультипликаторы как внутри, так и вне единичного круга (их расположение также показано на рис. 1.15).

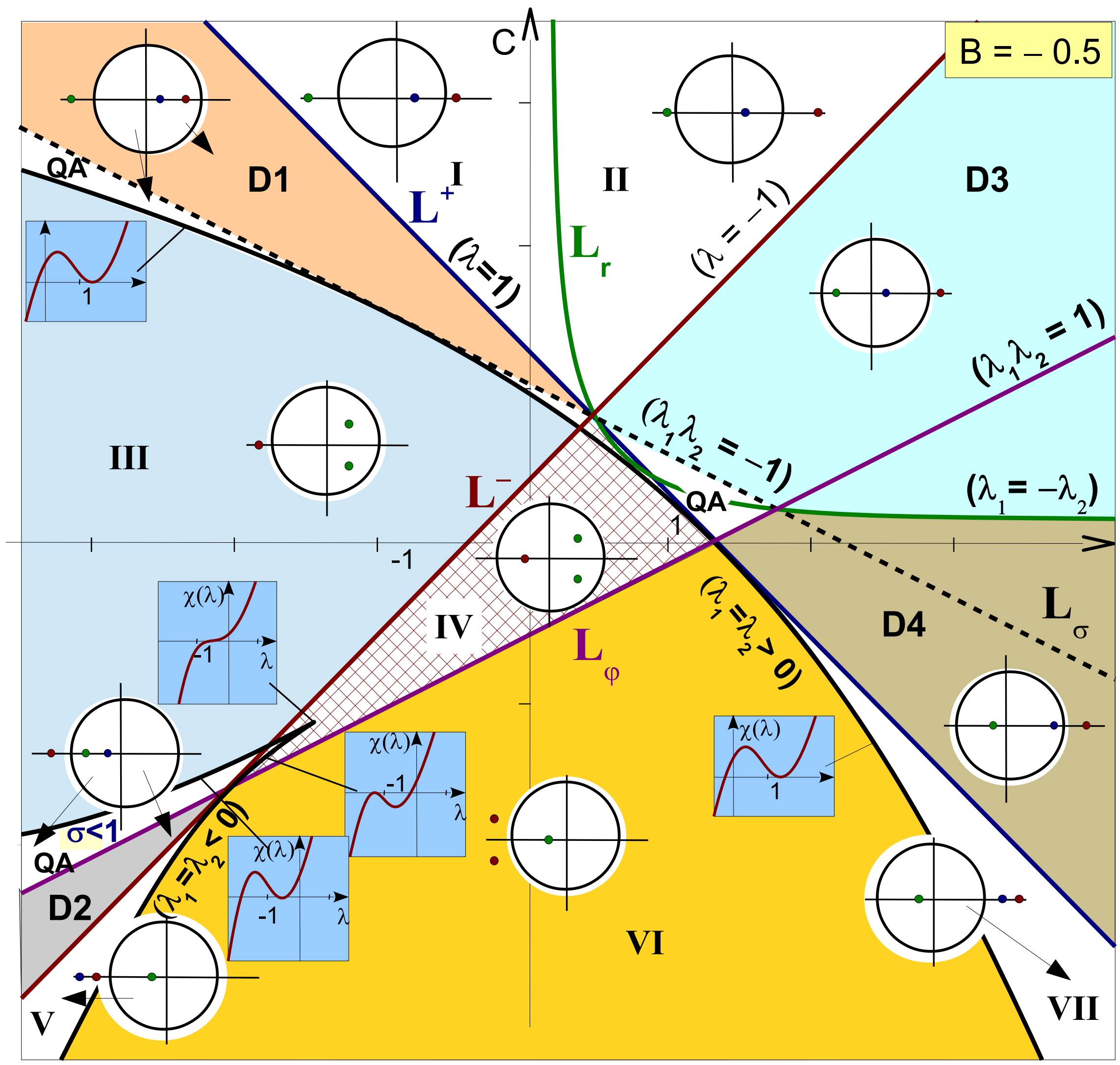


Рисунок 1.15: Карта седел отображения (1.2) при $B = -0.5$

Доказательство теоремы 1.3

Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов, которые оформим в виде лемм.

Лемма 1.3. *Границами областей на карте седел для отображения (1.2) служат 7 основных кривых:*

$$\begin{array}{ll} (a) & L_+ : \;\; C = 1 - B - A \;\; (\lambda = 1), \\ (b) & L_- : \;\; C = 1 + B + A \;\; (\lambda = -1), \\ (c) & L_\varphi : \;\; C = B^2 - 1 - BA, \;\; |A - B| < 2 \;\; (\lambda_1\lambda_2 = 1), \\ (d) & L_r : AC + B = 0, \;\; A > 0 \;\; (\lambda_1 = \lambda_2), \\ (e) & L_\sigma : \;\; C = 1 + B^2 + AB \;\; (\lambda_1\lambda_2 = -1), \\ (f) & S^- \;\; (\lambda_1 = \lambda_2 < 0), \\ (g) & S^+ \;\; (\lambda_1 = \lambda_2 > 0) \end{array} \tag{1.4}$$

Доказательство. Первые два уравнения соответствуют переходу действительного мультипликатора через единичную окружность. Соответственно их можно получить, подставив в характеристическое уравнение $\lambda = \pm 1$, то есть кривые L_+ и L_- получаются из соотношений $\chi(1) = 0$ и $\chi(-1) = 0$, соответственно.

В случае кривой L_φ, при ($\lambda = e^{\pm i\varphi}$), корни характеристического уравнения будут равны $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, $\lambda_3 = B$, где $0 < \varphi < \pi$. По теореме Виета:

$$\begin{array}{ll} (a) & \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = B, \\ (b) & \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -C, \\ (c) & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = A. \end{array} \tag{1.5}$$

Тогда из условий (1.5)b и (1.5)c получаем уравнение кривой L_φ в параметрическом виде

$$\begin{array}{l} 1 + B2cos\varphi = -C, \\ 2cos\varphi + B = A, \end{array} \tag{1.6}$$

где $0 < \varphi < \pi$ – параметр, а в явной форме кривая L_φ имеет вид $C = B^2 - 1 - BA$.

Уравнение (d) соответствует “резонансной кривой” в случае, когда $\lambda_1 = -\lambda_2$. Уравнение данной кривой можно получить, если воспользоваться условием (1.5)c. Тогда получим, что один из корней равен A, далее подставив его в характеристическое уравнение, получим $AC + B = 0$. Из равенства (1.5)a получаем, что $-\lambda^2 A = B$. Т.к. якобиан $B < 0$, в итоге имеем условие, что $A > 0$.

Рассмотрим кривую L_σ, на которой $\lambda_1\lambda_2 = -1$. Из (1.5)а получаем, $\lambda_3 = -B$. Подставив данный корень в характеристическое уравнение, получим искомое уравнение $C = 1 + B^2 + AB$.

Последние две кривые S^- и S^+ – это кривые равных корней, здесь $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, соответственно. Данные кривые разделяют области с точками типа "узел" и "фокус", а также "седло" и "седло-фокус". Уравнения этих кривых можно получить, рассмотрев корни производной характеристического уравнения

$$\chi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2A\lambda - C, \tag{1.7}$$

которые в свою очередь равны

$$\lambda_\pm = \frac{A \pm \sqrt{A^2 + 3C}}{3} \tag{1.8}$$

Таким образом уравнения кривых выглядят, как

$$\begin{aligned} &S^+ : \chi(\lambda_+) = 0, (A, C) \in A > 0 \cup C > 0, \\ &S^- : \chi(\lambda_+) = 0 \cup \chi(\lambda_-) = 0, (A, C) \in A < 0 \cap C < 0,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Графики данных кривых при $B = -0.5$ представлены на рис. 1.15, где кривая S^+ имеет вид параболы, а кривая S^- – форму полукубической параболы с вершиной $Q^* \in IV$, отвечающей случаю, когда характеристическое уравнение имеет тройной корень $\lambda = B^{1/3}$. Лемма доказана.

Далее выделим области существования наиболее важных для рассмотрения странных гомоклинических аттракторов, таких как дискретный неориентируемый аттрактор Лоренца, дискретный неориентируемый восьмерочный аттрактор, а также области существования спиральных аттракторов.

Область существования дискретного неориентируемого аттрактора Лоренца

Если в отображении (1.2) при условии, что $-1 < B < 0$, существует дискретный аттрактор Лоренца, то его неподвижная точка имеет мультипликаторы, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1, \\ &\lambda_1\lambda_2 < -1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Лемма 1.4. *Пусть отображение (1.2) при $B < 0$ имеет неподвижную точку с мультипликаторами, удовлетворяющими условиям (1.10). Тогда,*

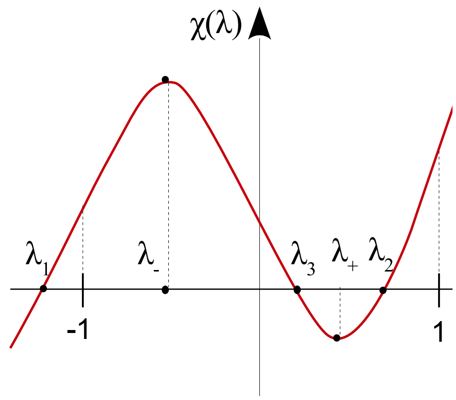


Рисунок 1.16: Расположение корней характеристического уравнения в случае неориентируемого аттрактора Лоренца.

$$1 + AB + B^2 < C < 1 - A - B, \tag{1.11}$$

Доказательство. На рис. 1.16 показано расположение корней характеристического уравнения, удовлетворяющих условиям (1.10). Очевидно, что $\chi(1) > 0$ и $\chi(-1) > 0$. Неравенство $\chi(1) > 0$ дает нам, что область D1 лежит в полуплоскости $C < 1-A-B$. Условие $\lambda_1\lambda_2 = -1$ определяет прямую L_σ, см. уравнение (4.4)е. Эта прямая делит плоскость (A, C) на две части, и легко увидеть, что $\lambda_1\lambda_2 < -1$ в верхней полуплоскости $C > 1 + AB + B^2$ (например, вблизи прямой L_+ в этой области мы имеем, что $\lambda_1 < -1$ и $\lambda_2 \sim 1$, т.е. здесь, а значит и во всей этой полуплоскости, выполняется неравенство $\lambda_1\lambda_2 < -1$).

Заметим, что условие $\lambda_1 < -1$ автоматически выполняется в области (1.11), т.к. прямые L^+, L^- и L_σ все пересекаются в одной точке $(A = -B, C = 1)$, и L^- лежит справа от области (1.11), см. 1.17.

Осталось проверить, что в области (1.11) у точки O все корни действительные, как на рис. 1.16, т.е. что кривая S^+ лежит ниже этой области. Но как нетрудно видеть, что кривая S^+ пересекается (касается снизу) с прямой L_σ ровно в одной точке $(A = \frac{1}{B} - 2B, C = 2 - B^2)$. Действительно, в точках пересечения этих кривых у точки O должны быть мультипликаторы такие, что $\lambda_1\lambda_2 = -1$ и $\lambda_2 = \lambda_3$. Это, по теореме Виета, сразу дает, что $\lambda_2 = \lambda_3 = -B$, а $\lambda_1 = \frac{1}{B}$. Соответственно характеристическое уравнение (1.3) принимает вид $(\lambda + B)^2(\lambda - \frac{1}{B}) = 0$. Отсюда однозначно

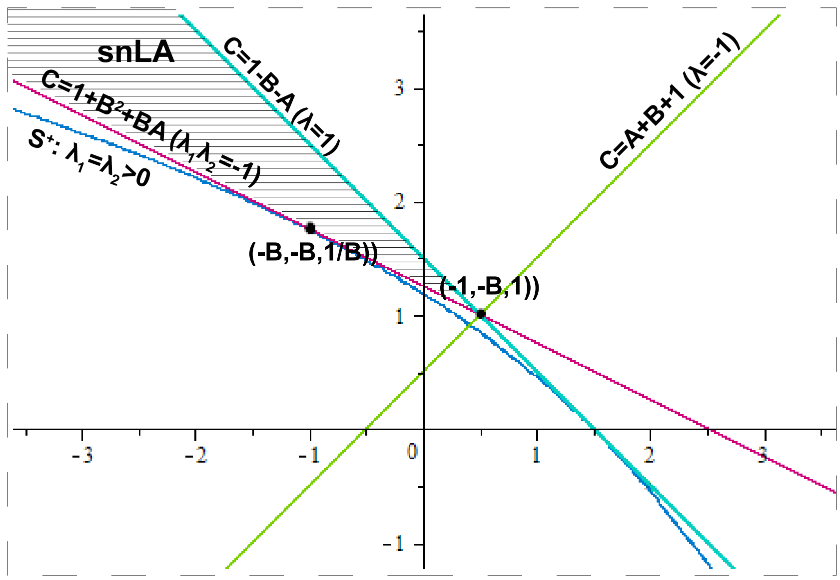


Рисунок 1.17: Иллюстрация расположения кривых, ограничивающих область существования неориентируемого аттрактора Лоренца.

находятся A и C. Поскольку кривая S^+ выпукла, то она касается прямой L_σ снизу, и значит в области (1.11) у точки O будут все мультипликаторы различны и действительны, как на рис. 1.15. Таким образом область существования неориентируемого аттрактора Лоренца расположена ниже кривой L_+ и выше кривой L_σ. Что и требовалось доказать.

Область существования дискретного неориентируемого восьмерочного аттрактора.

В случае существования в отображении (1.2) неориентируемого восьмерочного аттрактора, мультипликаторы неподвижной точки $O(0,0,0)$ будут удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 < -1, -1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0, \\ \lambda_1\lambda_2 < -1. \end{array} \qquad (1.12)$$

Лемма 1.5. *Пусть отображение (1.2) при $B < 0$ имеет неподвижную точку с мультипликаторами, удовлетворяющими условиям (1.12). Тогда,*

$$B^2 - 1 - BA < C < 1 + A + B \qquad (1.13)$$

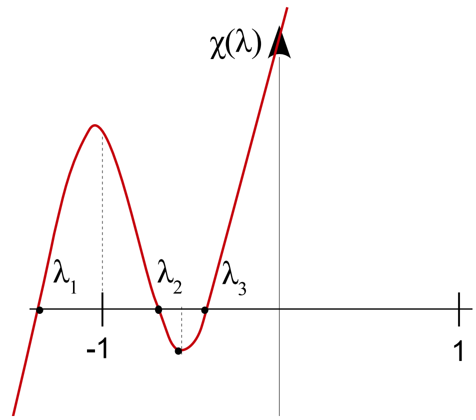


Рисунок 1.18: Расположение корней характеристического уравнения в случае неориентируемого восьмерочного аттрактора.

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится по аналогии с доказательством предыдущей. На рис. 1.19 показан график характеристического уравнения (1.3) с корнями, удовлетворяющими условиям (1.12). Из него, видно, что $\chi(-1) > 0$. Данное неравенство дает нам, что область D2 лежит в полуплоскости $C > 1 + A + B$. Условие $\lambda_1\lambda_2 = 1$ определяет прямую $C = B^2 - 1 - BA$, на которой в частности лежит бифуркационная кривая L_φ, см. уравнение (4.4)с. Легко увидеть, что $\lambda_1\lambda_2 > 1$ в верхней полуплоскости, т.к. вблизи прямой L_- в этой области мы имеем, что $\lambda_1 < -1$ и $\lambda_2 \sim -1$, т.е. здесь, а значит и во всей этой полуплоскости, выполняется неравенство $\lambda_1\lambda_2 > 1$.

Отметим также, что условие того, что все корни характеристического уравнения (1.3) являются действительными внутри области (1.13), выполняется автоматически. Если рассмотреть дискриминантные кривые S^+ и S^-, то можно заметить, что обе кривые пересекаются с прямыми $C = B^2 - 1 - BA$ и L_- в трех точках, как показано на рис. 1.19. Докажем это.

Рассмотрим точки пересечения кривых S^+, S^- и $C = B^2 - 1 - BA$. В них неподвижная точка O должна иметь мультипликаторы $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 < 0$, что, по теореме Виета, дает $\lambda_3 = B$, при этом для двух других корней возможны два варианта: первый, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, в данном случае координаты точки пересечения будут равны $M^* = (-2 + B, 2B - 1)$, и второй, когда $\lambda_2 = \lambda_3 = B$, а $\lambda_3 = \frac{1}{B}$, здесь координаты точки пересечения будут равны $K^* = (2B + \frac{1}{B}, -2 - B^2)$, см. рис. 1.19.

Далее рассмотрим точки пересечения кривых S^+, S^- и кривой L_-. Учитывая условия, что $\lambda_1\lambda_2 = 1$ и $\lambda = -1$, получим также, что в первом

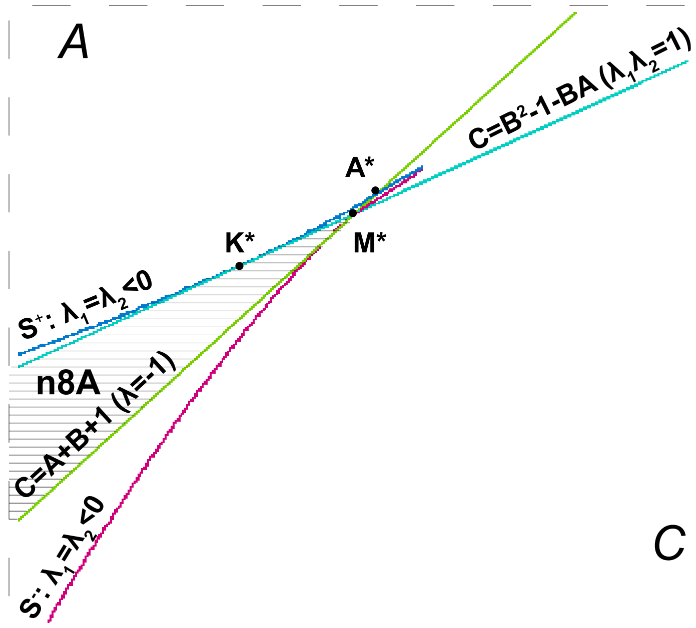


Рисунок 1.19: Иллюстрация расположения кривых, ограничивающих область существования неориентируемого восьмерочного аттрактора.

случае $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = B$, при этом точкой пересечения будет M^*. Во втором случае, получаем, что $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = -\sqrt{-B}$, здесь точкой пересечения будет точка с координатами $A^* = (-1-2\sqrt{-B}, -2\sqrt{-B}+B)$. Таким образом получаем, что все четыре кривые S^+, S^-, $C = B^2-1-BA$ и L_- пересекаются в 3-х точках M^*, K^*, A^*, при этом точка M^* является еще и точкой пересечения прямых $C = B^2 - 1 - BA$ и L_-. Учитывая тот факт, что точка A^* лежит правее точки M^* на кривой L_-, получим что необходимо рассмотреть лишь точки K^* и M^*. Точка K^* является точкой касания кривых S^+ и $C = B^2 - 1 - BA$, а поскольку кривая S^+ является вогнутой вблизи области (1.13) и лежит выше $C = B^2 - 1 - BA$, то получаем, что ниже этой прямой внутри (1.13) мультипликаторы являются вещественными. То же самое будет, если рассмотреть точку M^*, которая является точкой касания кривых S^- и L_-. Здесь получаем, что выше L_- внутри (1.13) мультипликаторы также вещественные. Лемма доказана.

Область существования дискретных гомоклинических аттракторов, содержащих неподвижную точку типа седло-фокус.

Особый интерес для исследований представляют квазиаттракторы, содержащие неподвижную точку типа седло-фокус, которым соответствуют следующие значения мультипликаторов:

$$\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, |\rho| < 1, 0 < \varphi < \pi, \tag{1.14}$$

$$|\lambda_1| < 1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, |\rho| > 1, 0 < \varphi < \pi. \tag{1.15}$$

По аналогии с работой [69] первый аттрактор был назван неориентируемым спиральным аттрактором, а второй неориентируемым аттрактором Шильникова. На рис. 1.15 области возможного существования данных аттракторов отмечены, как III и VI, соответственно.

Лемма 1.6. *Пусть отображение (1.2) при* $B < 0$ *имеет неподвижную точку с мультипликаторами, удовлетворяющими условиям* (1.14) *или* (1.15). *Тогда область* Q_c *значений параметров* A *и* C, *лежащая между дискриминантными кривыми* S^+ *и* S^- *соответствует тому, что точка* O *имеет пару комплексно сопряженных корней. При этом*

- *Точка* O *является седло-фокусом типа (2,1) в области* $Q_c \cap \{C > A + B + 1\}$
- *Точка* O *является седло-фокусом типа (1,2) в области* $Q_c \cap \{C < B^2 - 1 - BA\}$

Доказательство. Все условия необходимые для доказательства данной леммы были получены ранее (см. (1.4) и (1.5)). Стоит лишь отметить, что в случае спирального аттрактора, так как действительный мультипликатор меньше -1, то область его существования лежит выше кривой L^-. Заметим, что внутри области, ограниченной двумя ветвями дискриминантной кривой, точка $O(0, 0, 0)$ имеет комплексно-сопряженные мультипликаторы. Эти мультипликаторы лежат вне единичной окружности, ниже бифуркационной кривой L_φ, что дает нам область VI. В другой части, комплексно-сопряженные корни лежат внутри единичной окружности, а третий мультипликатор $\lambda < -1$, появляется в области выше кривой L^-, что дает нам область III.

Описание других областей карты седел

На плоскости параметров (A, C) были определены области возможного существования различных неориентируемых гомоклиниеских аттракторов, таких как неориентируемый восьмерочный аттрактор (D2) и неориентируемый аттрактор Лоренца (D1) спиральных III и VI и других, исходя из условий, накладываемых на мультипликаторы характеристического уравнения (1.3) для отображения (1.2) в неподвижной точке $O(0, 0, 0)$.

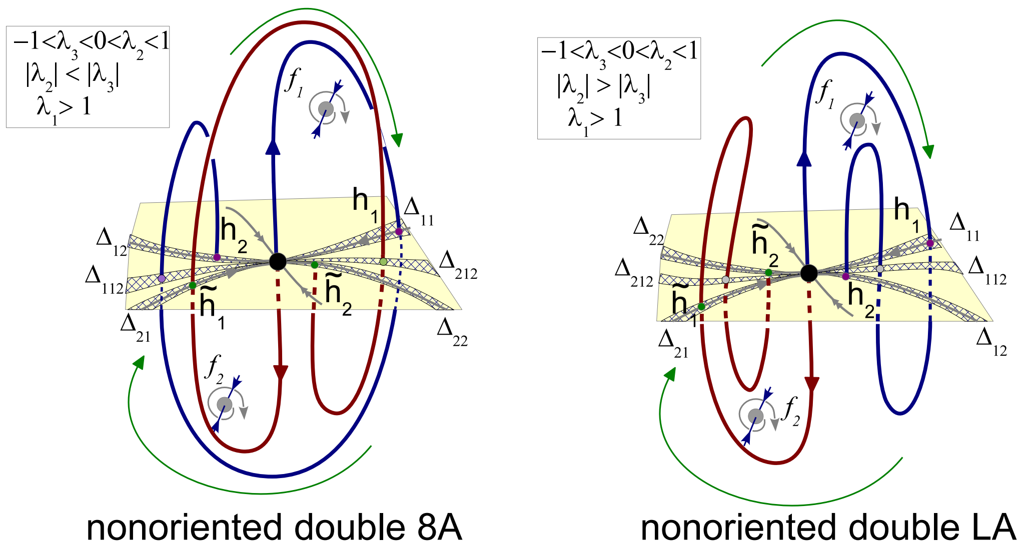


Рисунок 1.20: Поведение гомоклиник у двойных неориентируемых аттракторов.

Однако, на данной плоскости имеются также области, отвечающие условиям существования других не менее интересных аттракторов. Одними из таких являются гомоклинические аттракторы, значения мультипликаторов их неподвижной точки $O(0, 0, 0)$, удовлетворяют условиям:

$$\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, |\lambda_2| < |\lambda_3| < 1, |\lambda_1\lambda_3| < 1 \ , \tag{1.16}$$

$$\lambda_1 > 1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, |\lambda_3| < |\lambda_2| < 1, |\lambda_1\lambda_2| < 1 \ . \tag{1.17}$$

Условия (1.16) представляют собой ограничения, формируемые область **D4** существования двойного неориентируемого аттрактора Лоренца. Эта область ограничена кривыми L_-, L_σ и L_r., а (1.17) – область **D3** существования двойного неориентируемого восьмерочного аттрактора, которая в свою очередь ограничена кривыми $C = B^2 - 1 - BA$, L_+, и L_r. Поведение гомоклинических траекторий данных двух типов аттракторов представлено на рис. 1.20.

На карте седел отдельным цветом (желтый) выделены области (QA), отвечающих случаям, когда у неподвижной точки $O(0, 0, 0)$ седловая величина $\sigma < 1$ и неустойчивое многообразие одномерно. Поэтому, если здесь и существуют какие-либо гомоклинические странные аттракторы, то все они являются квазиаттракторами. Также на карте седел присутствуют области, обозначенные, как I, II, V, VII и соответствующие различным аттракторам, содержащим неподвижную точку типа седло, имеющее двумерное неустойчивое и одномерное устойчивое многообразие. Примеры таких аттракторов в случае обобщенных неориентируемых отображений Эно показаны в Главе 2.

1.3.2 Обобщенные диаграммы показателей Ляпунова

Другой важный метод поиска хаотических аттракторов – диаграммы показателей Ляпунова.

Для вычисления всего спектра показателей Ляпунова $\Lambda_1, ..., \Lambda_m$, где m – размерность фазового пространства, существует несколько алгоритмов, самым популярным из которых является алгоритм Бенеттина [54], которым мы и пользуемся в настоящей работе.

Стоит отметить, что в случае потоков $\dot{X} = F(X)$ один из показателей Ляпунова в спектре всегда равен нулю для большинства траекторий аттрактора. Такой эффект возникает в силу того, что вектор вдоль траектории системы имеет координаты $F(X)$, которые являются ограниченными внутри области притяжения странного аттрактора на всем промежутке времени $(0, +\infty)$. Таким образом показатель Ляпунова, соответствующий данному вектору, равен нулю.

Сам метод диаграмм показателей Ляпунова широко известен и применяется для нахождения областей существования хаотической динамики на плоскости параметров рассматриваемой системы. Однако, последний метод также несколько модифицируется. Для простоты, предположим, что размерность рассматриваемой системы равна 3. Стандартно, он состоит в построении карт ляпуновских показателей, в которых разным цветом обозначаются области параметров, отвечающих разным спектрам ляпуновских показателей $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$. В частности, зеленый цвет используется (на черно-белых рисунках обозначается также цифрой “1”) для устойчивых периодических режимов ($\Lambda_1 < 0$); голубой (цифра “2”) – для квазипериодических ($\Lambda_1 = 0$); желтый (цифра “3”), когда $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 < 0$, красный (цифра “4”), когда $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 \sim 0$, и синий (цифра “5”), когда $\Lambda_1 > \Lambda_2 > 0$ – для странных аттракторов.[8] К этим пяти цветам добавляется еще один – темно-серый (цифра “6”) для обозначения областей с гомоклиническими аттракторами (когда численно получаемые точки на аттракторе прибли-

[8]Области с красным цветом, $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 \sim 0$, были специально выделены еще в работе [87], для обозначения тех областей, у которых значение Λ_2 либо всегда колебалось в очень узких границах около нуля, либо отличалось от нуля на величину (порядка 10^{-5} или 10^{-6}), сравнимую с точностью вычисления показателей. На удивление, такие области оказались весьма большими, и этот феномен (связанный, по-видимому, с тем, что отображение на аттракторе оказалось очень близким к дискретизации некоторого потока, например, с аттрактором Лоренца), обсуждался в [87].

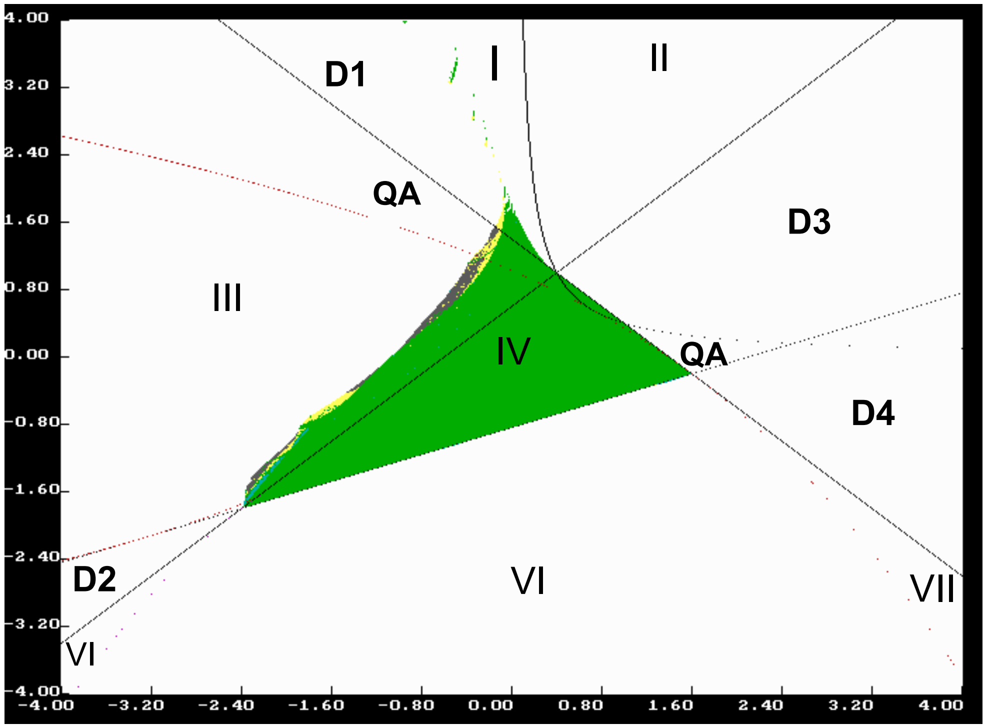


Рисунок 1.21: Карта обобщенных показателей Ляпунова с наложенной на ней картой седел. Данный метод используется для поиска странных гомоклинических аттракторов (темно серая область соответствует условиям существования странного гомоклинического аттрактора)

жаются к точке O на расстояние не меньше, чем 10^{-4}).

В качестве примера, на рис. 1.21 изображена диаграмма спектра показателей Ляпунова для отображения (1.2) на плоскости параметров (A, C), область существования неориентируемого спирального аттрактора выделена специальным цветом (темно-серый).

1.4 Псевдогиперболические аттракторы и методы их исследования

В этом параграфе будут рассмотрены основные понятия теории псевдогиперболических странных аттракторов и описан один из методов проверки условий псевдогиперболичности аттракторов в конкретных моделях. Понятие псевдогиперболической системы было введено Тураевым и Шильниковым: случай потоков рассматривался в работе [32], а дискретных динамических систем, диффеоморфизмов, – в [33], см. также [30, 71]. Описываемый метод проверки псевдогиперболичности был предложен совсем недавно в работе [72], и отличается от всех других аналогичных методов, см., например, [115, 92], своей простотой и эффективностью. Поэтому он был назван LMP-метод (аббревиатура от англ. Light Method of Pseudohyperbolicity check).

Что касается странных аттракторов, то общепринятого определения, которое годилось бы на все случаи жизни, до сих пор не существует. Исключение составляют т.н. *настоящие странные аттракторы*, определение которых включает два основных момента: 1) существование поглощающей области в фазовом пространстве (в которую входят все траектории, пересекающие границу этой области), и 2) неустойчивость траекторий на аттракторе, которая постулируется тем, что у каждой траектории на аттракторе существует положительный максимальный ляпуновский показатель. Предполагается также, что свойства 1) и 2) выполняются для всех близких систем.

С другой стороны, к странным аттракторам, с должным на то основанием, см. дискуссию в [47, 112, 81], относят также т.н. *квазиаттракторы* – нетривиальные притягивающие инвариантные множества, которые либо сами содержат устойчивые периодические траектории весьма больших периодов (и с очень узкими областями притяжения), либо такие траектории появляются при сколь угодно малых гладких возмущениях. Последнее обстоятельство связано с тем, что квазиаттракторы допускают существование седловых периодических траекторий, у которых устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия пересекаются нетрансверсально. В свою очередь, бифуркации таких гомоклинических касаний при выполнении определенных условий-критериев, [10, 13, 15, 80, 82], приводят к рождению асимптотически устойчивых периодических траекторий, притягивающих инвариантных торов, маленьких странных аттракторов типа аттракторов Эно, [99, 102, 77, 63, 90], и даже аттракторов лоренцевского типа, [67, 83, 84, 85], и т.п. Таким образом, следуя [32, 33], будем придерживаться следующих определений для псевдогиперболических аттракторов.

Определение 1.1. Случай потока. *Аттрактор n-мерного потока F_t называется* псевдогиперболическим, *если для каждой точки некоторой поглощающей области аттрактора $\mathcal{D}$ существуют два линейных подпространства E^{ss} с $\dim E^{ss} = k$ и E^{cu} с $\dim E^{cu} = n - k$, где $k \geq 1$, инвариантные относительно дифференциала DF_t потока и такие, что:*

1) *DF_t экспоненциально сжимает по всем направлениям в E^{ss} и экспоненциально растягивает все $(n-k)$-мерные объемы в E^{cu};*

2) *Подпространства E^{ss} и E^{cu} непрерывно зависят от точки из D;*

3) *Соответствующие коэффициенты сжатия и растяжения равномерно отделены от 1;*

4) *Углы между любыми касательными векторами к подпространствам E^{ss} и к E^{cu} равномерно отделены от нуля;*

5) *Любое возможное сжатие в E^{cu} равномерно слабее любого возможного сжатия в E^{ss}.*

Определение для дискретных псевдогиперболических аттракторов диффеоморфизмов очень похоже, приведем более краткую формулировку.

Определение 1.2. Случай диффеоморфизмов. *Аттрактор n-мерного диффеоморфизма f называется* псевдогиперболическим, *если для каждой точки некоторой поглощающей области $\tilde{\mathcal{D}}$ аттрактора существует два линейных подпространства E^{ss} с $\dim E^{ss} = k$ и E^{cu} с $\dim E^{cu} = n - k$, где $k \geq 1$, инвариантные относительно дифференциала Df диффеоморфизма f и такие, что свойства 1)–5) определения 1.1 выполняются для Df.*

Таким образом, в отличие от гиперболичности, здесь не требуется существования равномерных растяжений в E^{cu} вдоль всех направлений. Тем не менее, псевдогиперболичность, также как и гиперболичность, сохраняется при малых гладких возмущениях [32, 33]. Поэтому, если система имеет псевдогиперболический аттрактор внутри некоторой поглощающей области, то этот аттрактор является странным, так как растяжение объемов в E^{cu} гарантирует существование положительного максимального показателя Ляпунова у любой траектории. Другими словами, псевдогиперболические аттракторы являются настоящими аттракторами.

Однако, хорошо известно, что большинство известных странных аттракторов гладких динамических систем, в том числе встречающихся в приложениях, не являются настоящими аттракторами, это по-существу, квазиаттракторы. Примерами таких аттракторов являются многочисленные аттракторы типа “тор-хаос”, возникающие в результате разрушения двумерного тора [8]; аттракторы в цепях Чуа [62]; аттрактор Эно [89, 53]; аттракторы в периодически возмущенных двумерных системах с гомоклиническими восьмерками седла [86] и многие другие. Особый класс квазиаттракторов составляют т.н. спиральные аттракторы, которые содержат седло-фокусы. Они часто возникают в приложениях, и примеры таких аттракторов хорошо известны. Это, например, спиральные аттракторы трехмерных потоков, такие как аттрактор Рёсслера [104, 105], аттракторы в моделях Арнеодо-Калле-Трессе [49, 51, 50] и т.п.

До сравнительно недавнего времени к настоящим странным аттракторам гладких динамических систем можно было с уверенностью относить только лишь гиперболические аттракторы и аттракторы Лоренца. Однако ситуация изменилась после работы Тураева и Шильникова [32], в которой был введен новый класс настоящих странных аттракторов, т.н. *диких гиперболических аттракторов*. Эти аттракторы, в отличие от гиперболических, допускают существование гомоклинических касаний, но не содержат устойчивых периодических траекторий и любых других собственных устойчивых инвариантных подмножеств, которые не возникают также при малых гладких возмущениях. Системы с дикими гиперболическими аттракторами принадлежат областям Ньюхауса, т.е. открытым (в C^2-топологии) областям из пространства динамических систем, в которых плотны системы с гомоклиническими касаниями.[9] Однако эти касания, в отличие от гомоклинических касаний у систем с квазиаттракторами, являются такими, что их бифуркации не приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [15, 80, 82].

В работе [32] был также построен пример четырехмерного потока с диким спиральным аттрактором, содержащим состояние равновесия типа седло-фокус. Одной из главных особенностей спирального аттрактора Тураева-Шильникова является то, что он обладает *псевдогиперболической структурой*. Стоит отметить, что условия псевдогиперболичности проверяются для точек поглощающей области. Если они выполняются, то тогда, как показано в [32], аттрактор, существует и он единственный, у каждой его траектории существует положительный максимальный ляпуновский показатель (это вытекает из свойства растяжения объемов), а сам аттрактор является аттрактором по Рюэллю [106], т.е. замкнутым, инвариантным, асимптотически устойчивым и цепнотранзитивным множеством.

Фактически, в работе [32] были заложены основы очень перспективной теории псевдогиперболических странных аттракторов. Новые примеры таких аттракторов были также вскоре найдены. Так, в работе [87] было показано, что у трехмерных отображений Эно вида

$$\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = M_1 + Bx + M_2 y - z^2, \tag{1.18}$$

[9] Сам термин “дикий” восходит к статье Ньюхауса [100], в которой было введено понятие “дикого гиперболического множества”, т.е. такого равномерно гиперболического инвариантного множества, у которого среди его устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий всегда есть пересекающиеся нетрансверсально, и это свойство сохраняется при все малых C^2-гладких возмущениях.

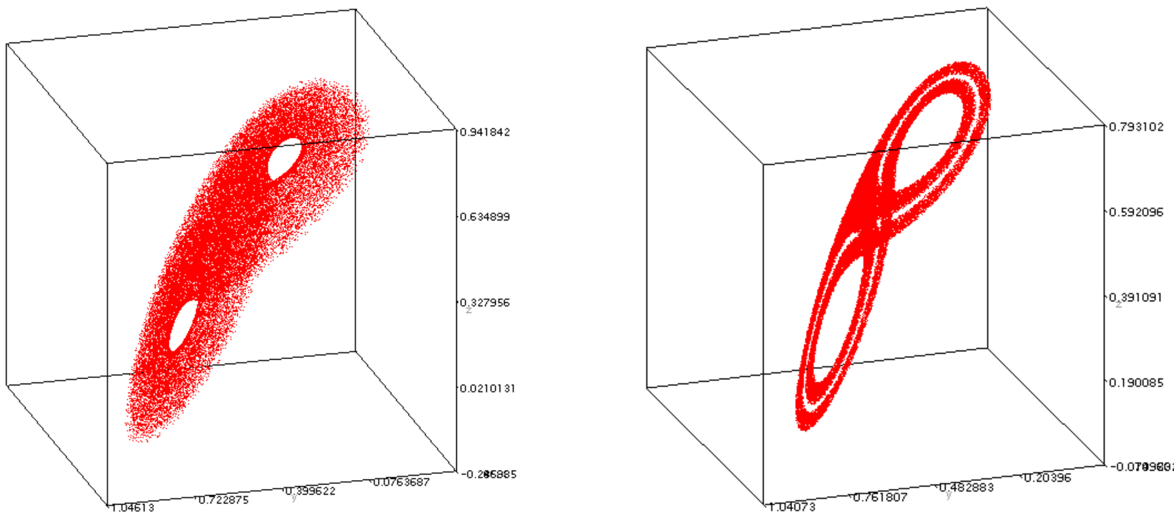


Рисунок 1.22: Портреты дискретных аттракторов Лоренца в случае отображения (1.18) при (a) $M_1 = 0, M_2 = 0.85, B = 0.7$ и (b) $M_1 = 0, M_2 = 0.825, B = 0.7$. В обоих случаях показано порядка 10^5 итераций одной начальной точки на аттракторе. Показаны также проекции аттракторов на плоскость (x, y) и некоторые срезы аттрактора плоскостью $z = const$ (хотя эти срезы выглядят как линии, на самом деле они имеют сложную канторовскую структуру).

где M_1, M_2, B – параметры (B – якобиан отображения), в некоторой области параметров, примыкающих к точке $A^* = (M_1 = 1/4, M_2 = 1, B = 1)$, где отображение (19) имеет трехкратно вырожденную неподвижную точку с мультипликаторами $+1, -1, -1$, существуют дискретные аттракторы Лоренца.[10] На рис. 1.22 показаны примеры дискретных аттракторов Лоренца в случае отображения (1.18). Заметим, что их фазовые портреты очень похожи на потоковые аттракторы Лоренца. Однако значения параметров, при которых эти аттракторы наблюдаются, совсем не близки к A^*: здесь $M_1 = 0, M_2 = 0.85, B = 0.7$ в случае рис. 1.22a и $M_1 = 0, M_2 = 0.825, B = 0.7$ в случае рис. 1.22b. Поэтому условия псевдогиперболичности таких аттракторов нужно проверять дополнительно.

Такая задача кажется очень сложной. Легко можно только лишь проверить некоторые необходимые условия. Например, для псевдогиперболического аттрактора трехмерного отображения его ляпуновские показатели

[10]Псевдогиперболичность таких аттракторов проверялась в [87] аналитически на основе того, что при близких к A^* значениях параметров квадрат отображения в некоторой окрестности седловой неподвижной точки может быть представлен как отображение Пуанкаре периодически возмущенной системы Шимицу-Мориока, которая имеет аттрактор Лоренца [108, 110]. Если возмущение достаточно мало (что определяется близостью параметров к A^*), то искомая псевдогиперболичность должна естественно наследоваться от аттрактора Лоренца (который сам является таковым [115]). В частности, в работе [33] было показано, что свойство псевдогиперболичности потоков сохраняется также и для их отображений Пуанкаре при малых периодических возмущениях.

$\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$ должны удовлетворять условиям

$$\Lambda_1 > 0, \ \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \ \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0. \tag{1.19}$$

Первое и третье условия говорят о том, что наблюдаемый аттрактор является странным, а второе – то, что на нем имеет место растяжение двумерных площадей.

Однако ляпуновские показатели являются усредненными характеристиками траекторий на аттракторе, поэтому, в принципе, не исключена ситуация, когда аттрактор имеет очень маленькие "дырки" (размеры которых могут быть меньше всякой разумной точности счета), где условия (1.19) для соответствующих траекторий нарушаются.

Условия псевдогиперболичности аттракторов рис. 1.22 были проверены (с помощью методов интервальной арифметики) математиками из университета Уппсалы, Швеция, Ж. Фигуеросом и В. Такером, которые получили весьма интересные и очень тонкие результаты. Так, в случае аттрактора рис. 1.22a внутри него был найдена устойчивая периодическая траектория с областью притяжения размером порядка 10^{-40}, тогда как дискретный аттрактор Лоренца рис. 1.22b оказался настоящим псевдогиперболическим аттрактором. Также независимо и другими методами аналогичные результаты были получены саратовскими математиками С.П. Кузнецовым и П.В. Купцовым [92]. При этом были проверены на псевдогиперболичность также и некоторые другие аттракторы из работы [69].

С другой стороны, сам факт существования гомоклинических касаний в аттракторе, уже может подсказать, является ли рассматриваемый аттрактор настоящим (псевдогиперболическим) аттрактором или квазиаттрактором.

Так устойчивые периодические траектории обязательно рождаются при бифуркациях гомоклинических касаний, если $\sigma < 1$, или если неподвижная (периодическая) точка на аттракторе является седло-фокусом (неважно, с одномерным или двумерным неустойчивым многообразием) [79, 80, 82]. В частности, спиральные аттракторы трехмерных гладких отображений или потоков всегда являются квазиаттракторами.

В этой связи, кажется весьма интересной и такая проблема: *пусть трехмерный диффеоморфизм в R^3 имеет странный аттрактор, содержащий седловую неподвижную точку с двумерным неустойчивым инвариантным многообразием, тогда этот аттрактор является квазиаттрактором.*[11]

[11]Эта проблема кажется весьма трудной, и ее решение связано, например, с доказательством су-

По этой причине, если говорить о существовании псевдогиперболических странных аттракторов у трехмерных отображений, то основное внимание нужно уделять тем, которые содержат неподвижные точки типа седло с одномерными неустойчивыми многообразиями и с седловой величиной σ большей 1. Более того, основное внимание будет уделяться т.н. гомоклиническим аттракторам, которые содержат *ровно одну* неподвижную точку. Как показано в работах [87, 21, 73, 69, 11], это направление является весьма перспективным.

1.4.1 LMP-метод проверки псевдогиперболичности и его обобщение

Хорошо известно, что при численном исследовании странных аттракторов трехмерных потоков, основные критерии их хаотичности связаны с вычислением спектра $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \Lambda_3$ ляпуновских показателей. Когда на счете получается, что $\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 \approx 0, \Lambda_3 < 0$, это создает "видимость", что аттрактор хаотический. Однако большинство известных странных аттракторов трехмерных потоков являются квазиаттракторами. Поэтому одного только вычисления спектра ляпуновских показателей здесь явно недостаточно. То есть, необходимое условие псевдогиперболичности $\Lambda_1 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0$ для численно полученных показателей мало что дает. Здесь нужны более тонкие методы исследования, позволяющие, в частности, проверить достаточные условия псевдогиперболичности в силу определения 1. Один из таких методов, т.н. LMP-метод, был недавно предложен в работе [76].

Суть LMP-метода заключается в проверке достаточного условия непрерывности подпространств E^{ss} и E^{cu} от точки на аттракторе. В этой работе проверяется только непрерывность E^{ss}, что дает, впрочем, очень хорошие результаты. Заметим, что в случае трехмерных потоков, непрерывность подпространства E^{ss} часто оказывается более чувствительной к разрушению псевдогиперболичности, чем непрерывность E^{cu}. Так, например, хорошо известно, что в классической системе Лоренца условия псевдогиперболичности нарушаются за границей существования аттрактора Лоренца

ществования т.н. непростых гомоклинических касаний [114, 75, 85]. Заметим, что бифуркации таких касаний приводят к рождению устойчивых периодических траекторий [114]. В свою очередь, появление непростых касаний в рассматриваемом случае следует ожидать из-за того, что само двумерное неустойчивое многообразие, чтобы оно принадлежало аттрактору, должно бесконечно много раз "складываться" в разных направлениях (это похоже на то, как если бы пытаться "упаковать" двумерную плоскость в трехмерный куб, избегая при этом появления острых углов).

(аттрактор становится квазиаттрактором из-за смены знака сепаратрисной величины у седла [4, 9]). Однако, численно с использованием LMP-метода, это проявляется, как показано в работе [76], прежде всего в том, что нарушается условие непрерывности подпространства E^{ss} (при этом непрерывность E^{cu} визуально сохраняется). С другой стороны, очевидно, что из непрерывности подпространства E^{ss} следует непрерывность E^{cu}.

Во всех рассматриваемых в диссертации случаях подпространство сильного сжатия является одномерным ($\dim E^{ss} = 1$). Для непрерывности этого подпространства необходимо, чтобы угол $d\varphi$ между любыми парами векторов в E^{ss} был малым для любых близких точек x и y, лежащих на аттракторе (теоретически, $d\varphi \to 0$ при $x \to y$). Фактически, LMP-метод позволяет оценить эти углы для большого набора точек на аттракторе и, тем самым, проверить условие непрерывности поля E^{ss} от точек на этом аттракторе.

Сам LMP-метод можно разбить на два этапа. Первый этап стандартный: здесь производится расчет набора показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ (притом, если в какой-то момент условие не выполняется, то можно остановить расчет). В процессе вычисления набора показателей Ляпунова сохраняется набор точек $\{x_n\}$, где $n = 1, \ldots, k$, вдоль траектории аттрактора. На втором этапе вычисляется максимальный показатель Ляпунова для системы в обратном времени, двигаясь вдоль траектории $\{x_n\}$, полученной на первом этапе, в обратном направлении. Отметим, что использование набора точек $\{x_n\}$ является необходимым условием работы алгоритма, так как очевидно, что если возьмем любую точку на аттракторе, то ее обратные итерации рано или поздно убегут с него, и можно потерять любую информацию об аттракторе.

Заметим, что максимальный показатель Ляпунова для обратных итераций исходной системы совпадает с минимальным показателем Ляпунова Λ_3, взятым со знаком минус. В свою очередь минимальный показатель Ляпунова Λ_3 отвечает за сильное сжатие на аттракторе. На втором этапе работы алгоритма, помимо расчета Λ_3, находится и запоминается также направление векторов $E^{ss}(x_n)$, отвечающих этому сжатию.

По окончании работы алгоритма строится LMP-график на координатной плоскости $(dx, d\varphi)$, где dx определяет расстояние между любыми двумя точками x_i и x_j в наборе $\{x_n\}$, а $d\varphi$ – угол между соответствующими этим точкам векторами $E^{ss}(x_i)$ и $E^{ss}(x_j)$. Если исследуемый аттрактор является псевдогиперболическим, то поле $E^{ss}(x_n)$ является непрерывным, а огибающая точек на LMP-графике пересекает вертикальную ось $d\varphi$ только в начале координат. Таким образом, если построенный LMP-график удовлетворяет такому свойству, делаем вывод, что сильно сжимающее подпространство E^{ss} непрерывно зависит от точки, а исследуемый аттрактор, с большой вероятностью, является псевдогиперболическим. С другой стороны, если огибающая набора точек на построенной LMP-диаграмме пересекает ось $d\varphi$ в нескольких точках или же между этой огибающей и осью $d\varphi$ нет видимого промежутка, исследуемый аттрактор определенно является квазиаттрактором.

Результаты применения описанного метода приводятся в Главе 3.

1.4.2 К вопросу о существовании псевдогиперболических гомоклинических аттракторов у трехмерных неориентируемых отображений.

Задача нахождения псевдогиперболических аттракторов у трехмерных отображений является новой и весьма важной с точки зрения развития теории многомерного хаоса. Здесь имеется не очень много результатов. Можно сказать, что первый важный результат в этом направлении был получен в работе [109], в которой были найдены условия, при которых бифуркация неподвижной точки с мультипликаторами $+1, -1, -1$ может приводить к рождению дискретного аттрактора лоренцевского типа.[12] На основании этого в работе [87] были найдены такие аттракторы в трехмерных ориентируемых отображениях Эно.

Для трехмерных неориентируемых отображений (в том числе отображений Эно) соответствующей теории еще нет, поэтому задача о нахождении в них псевдогиперболических аттракторов является, по существу, во многом неопределенной. Тем не менее, некоторые результаты в этом направлении можно получить и сейчас, используя метод карты седел, который позволяет получить некоторые необходимые условия для существования псевдогиперболических аттракторов.

[12]В [109] было показано, что если трехмерное отображение T имеет неподвижную точку с мультипликаторами $+1, -1, -1$, то в соответствующем трехпараметрическом семействе общего положения отображение T^2 может быть локально вложено в неавтономный поток. Причем этот поток может быть представлен как система Лоренца с малым периодическим возмущением (чем ближе значения параметров к критическому, тем меньше амплитуду возмущения). В работе [33] было показано, что свойства псевдогиперболичности системы сохраняются при малых периодических возмущениях.

Рассмотрим трехпараметрическое семейство отображений вида

$$\begin{aligned} \bar{x} &= y + Q_1(x,y,z), \\ \bar{y} &= z + Q_2(x,y,z), \\ \bar{z} &= Bx + Cy + Az + Q_3(x,y,z), \end{aligned} \tag{1.20}$$

где $Q_i(0,0,0) = 0$, $\frac{\partial Q_i(0,0,0)}{\partial(x,y,z)} = 0$. Тогда справедлив следующий результат.

Утверждение 1.1. *Предположим, что неориентируемое отображение вида* (1.20) *имеет при данном* $-1 < B < 0$ *при некоторых значениях параметров* A *и* C *псевдогиперболический гомоклинический аттрактор* $\mathcal{A}$, *содержащий неподвижную точку* O, *у которой ее неустойчивое инвариантное многообразие* $W^u(O)$ *одномерно. Тогда эти значения параметров* A *и* C *обязательно принадлежат одной из следующих областей на карте седел соответствующего отображения Эно вида* (1.2)*:*

- *область* $1 + AB + B^2 < C < 1 - A - B$ *(область D1 рис. 1.15);*
- *область* $B^2 - 1 - BA < C < 1 + A + B$ *(область D2 рис. 1.15);*
- *область, ограниченная кривыми* L^-, L_σ *и* L_r *(область D3 рис. 1.15);*
- *область, ограниченная кривыми* L_r, L_φ *и* L_r *(область D4 рис. 1.15).*

Доказательство. Необходимым условием псевдогиперболичности гомоклинического аттрактора является то, что неподвижная точка O сама является псевдогиперболической. Для указанных в теореме областей это, очевидно, выполняется. Действительно, в области D1 точка O имеет собственные значения $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_3 < \lambda_2 < 1$. Тогда подпространство $N^{ss}(O)$ – это собственное направление матрицы линеаризации отображения в точке O, отвечающее собственному значению λ_3, а $N^{cu}(O)$ – это плоскость, натянутая на собственные вектора, отвечающие $\lambda_1 < -1$ и λ_2. Так как $|\lambda_1\lambda_2| > 1$ и $|\lambda_3| < 1$, то, очевидно, все условия определения 1.2 для точки O выполнены. Точно также показывается, что условия определения 1.2 для точки O выполняются и для остальных областей, указанных в утверждении.

Рассмотрим остальные области. В областях, пронумерованных римскими цифрами I,II,IV–VII, не выполняются условия теоремы – здесь либо точка O имеет двумерное неустойчивое многообразие, либо является устойчивой (в области IV). В области III точка O является седло-фокусом, поэтому ее гомоклинический аттрактор заведомо является квазиаттрактором (в

принципе, в этой точке нельзя построить инвариантное разбиение на подпространства, удовлетворяющее условиям определения 1.2). Теперь остаются только области, обозначенные на рис.1.8 как QA . В этих областях не выполняется условие растяжения площадей на $N^{cu}(O)$, так как здесь седловая величина точки O меньше единицы. Теорема доказана.
Заметим, что форма (1.20) трехмерного отображения является в некотором смысле универсальной формой отображения, у которого известны координаты неподвижной точки. Действительно, эту точку можно сдвинуть в начало координат, получится отображение вида

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + F(x, y, z),$$

где S – некоторая (3×3)-матрица, а F – функция, обращаюшаяся в ноль в начале координат вместе с первыми производными. Теперь остается сделать линейную замену координат, приводящую матрицу S к форме Фробениуса $S' \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ B & C & A \end{pmatrix}$, что можно сделать всегда, кроме некоторых специальных случаев.[13]

К сожалению, при работе над диссертацией не удалось найти примеров псевдогиперболических аттракторов, удовлетворяющих условиям теоремы 1.1 – все найденные нами такие аттракторы не выдержали проверку LMP-методом. Мы надеемся решить эту задачу при дальнейших исследованиях. Однако, псевдогиперболические гомоклинические аттракторы у отображения (1.2) все-таки удалось найти – это дискретные аттракторы Лоренца периода два. Они не содержат неподвижных точек, но содержат точку периода два, см. гл.4, пример рис. 3.12.

[13]Например, так. Пусть $S = \{a_{ij}\}$. Заменой $\xi = x, \eta = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \rho = z$ приводим линейную часть к виду $\bar{\xi} = \eta, \bar{\eta} = \tilde{a}_{21}\xi + \tilde{a}_{22}\eta + \tilde{a}_{23}\rho, \bar{\rho} = \tilde{a}_{31}\xi + \tilde{a}_{32}\eta + \tilde{a}_{33}\rho$. Заменой $x = \xi, y = \eta, z = \tilde{a}_{21}\xi + \tilde{a}_{22}\eta + \tilde{a}_{23}\rho$ приводим линейную часть к искомому виду $\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Cy + Az$.

Глава 2

Примеры странных гомоклинических аттракторов и сценариев их возникновения в трехмерных неориентируемых отображениях Эно

В главе 1 было дано описание феноменологических сценариев возникновения дискретных гомоклинических аттракторов трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов. С помощью метода карт седел были получены условия существования аттракторов различных типов, а именно:

- Неориентируемый аттрактор Лоренца, характеризуемый тем, что мультипликаторы неподвижной точки типа седло удовлетворяют условиям: $\lambda_1 < -1$, $0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$, при этом $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, а седловая величина $\sigma = |\lambda_1 \lambda_2| > 1$.

- Неориентируемый восьмерочный аттрактор, для которого мультипликаторы седловой гомоклинической точки удовлетворяют условиям: $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$, но $|\lambda_2| < |\lambda_3|$, седловая величина $\sigma = |\lambda_1 \lambda_3| > 1$.

- Неориентируемый спиральный аттрактор. В данном случае неподвижная точка типа седло-фокус (2,1) имеет мультипликаторы $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \lambda < 1$, а седловая величина $\sigma = |\lambda_1 \lambda| > 1$.

- Неориентируемый аттрактор Шильникова, у которого мультипликаторы неподвижной точки типа седло-фокус (1,2), удовлетворяют условию $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \lambda < 1$,

В данной главе будут рассмотрены конкретные примеры странных дискретных гомоклинических аттракторов трехмерных неориентируемых отображений Эно, а также примеры реализации феноменологических сценариев, приводящих к возникновению таких аттракторов.

В последнем параграфе будет также рассмотрено четырехмерное обобщенное отображение Эно, и приведены примеры странных гомоклинических аттракторов, при малом значении якобиана отображения.

2.1 Примеры гомоклинических аттракторов трехмерных неориентируемых отображениях Эно

Рассмотрим конкретные примеры гомоклинических странных аттракторов, найденных с помощью методов карт седел и диаграмм показателей Ляпунова в отображении вида:

$$\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z), \tag{2.1}$$

где A, B, C – коэффициенты (B – якобиан отображения (2.1)), $g(y, z)$ – функция только координат y и z, обращающаяся в нуль при $y = z = 0$ вместе с первыми производными. В этом случае отображение (2.1) всегда имеет неподвижную точку $O(0, 0, 0)$, тип которой зависит только от коэффициентов A, B, C. Например, эта точка асимптотически устойчива в области значений параметров A, B и C, определяемой неравенствами $C < 1 - B - A, C < A + B + 1, C > B^2 - 1 - AB$, [69]. Мы рассматриваем случай, когда отображение (2.1) неориентируемо, т.е. $B < 0$.

Заметим, что диаграммы показателей Ляпунова позволяют определить области существования хаотических режимов, а карты седел помогают ответить на вопрос о том, какому типу аттрактора соответствует данная область. После этого можно построить такой аттрактор численно.

2.1.1 Неориентируемый дискретный аттрактор Лоренца

Рассмотрим отображение Эно вида

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 0.54y^3 + 0.54z^3 + 1.5yz \tag{2.2}$$

при $B = -0.4$. Фрагмент диаграммы показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C), а также наложенной на него картой седел показан на рис. 2.1 справа. Видно, что область “темно-серого” цвета, соответствующая странному гомоклиническому аттрактору, для которого выполнены необходимые условия псевдогиперболичности, попала в область **D1**. При

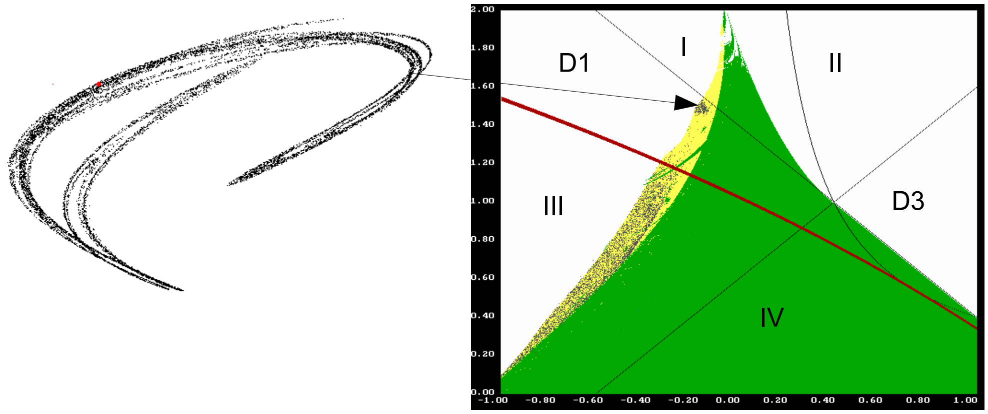


Рисунок 2.1: Пример неориентируемого дискретного аттрактора Лоренца. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.4$. Слева – проекция аттрактора на плоскость (x, y).

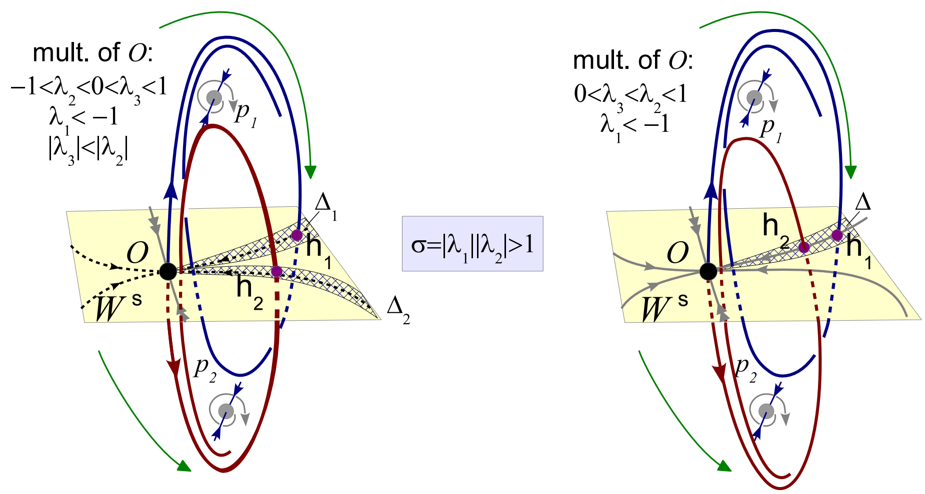


Рисунок 2.2: Поведение гомоклинических траекторий ориентируемого и неориентируемого аттракторов Лоренца.

следующих значениях параметров $A = -0.16, C = 1.51$ из этой области можно наблюдать такой аттрактор.

На рис. 2.1 слева показан пример неориентируемого аттрактора Лоренца. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для данного отображения равны $\lambda_1 = -1.42, \lambda_2 = 0.97, \lambda_3 = 0.29$, что соответствует условиям (1.10) существования неориентируемого аттрактора Лоренца.

Исходя из внешнего вида аттрактора, назовем его, в по аналогии с [11], неориентируемый "тонкий" аттрактор Лоренца. Действительно, если обратить внимание на поведение гомоклинических траекторий, показанных на рис. 2.2, можно заметить, что при пересечении устойчивого подпространства они образуют только один гомоклинический "клин". В то время как

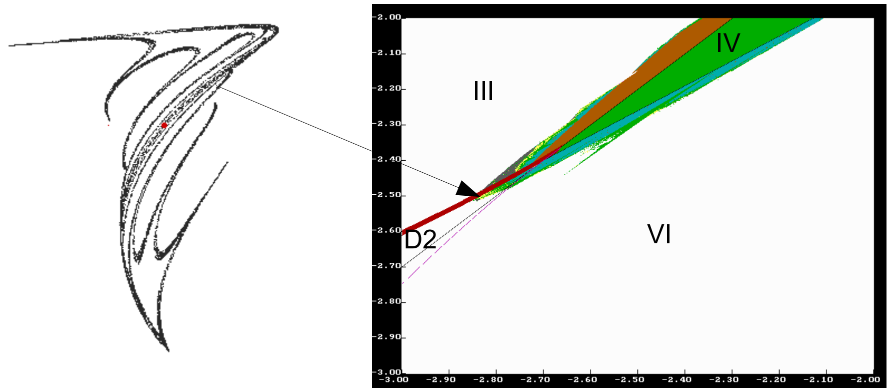


Рисунок 2.3: Пример неориентируемого восьмерочного аттрактора. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.55$. Слева – проекция аттрактора на плоскость (x, y).

ориентируемый аттрактор Лоренца образует два таких “клина”.

2.1.2 Неориентируемый дискретный восьмерочный аттрактор

Рассмотрим отображение Эно вида

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + 1.3y^2 + 0.22z^2 + 12.5yz + 2.7z^3 \tag{2.3}$$

при $B = -0.55$. Фрагмент диаграммы показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C), а также наложенной на него картой седел показан на рис. 2.3 справа. Видно, что область “темно-серого” цвета, соответствующая странному гомоклиническому аттрактору, для которого выполнены необходимые условия псевдогиперболичности, попала в область **D2**. При следующих значениях параметров $A = -2.667, C = -2.155$ из этой области можно наблюдать такой аттрактор.

На рис. 2.3 слева показан пример неориентируемого восьмерочного аттрактора. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для данного отображения равны $\lambda_1 = -1.327, \lambda_2 = -0.939, \lambda_3 = 0.401$, что соответствует условиям (1.12) существования данного аттрактора.

Отметим, что формы восьмерочного аттрактора в ориентируемом и неориентируемом случае очень похожи. Действительно, если рассмотреть поведение гомоклинических траекторий (рис. 2.4), то можно заметить, что принципиальной разницы между ними нет. И в том, и в другом случае гомоклиники седла $O(0, 0, 0)$ пересекают устойчивое многообразие, образуя два гомоклинических “клина”, расположенные по разные стороны от

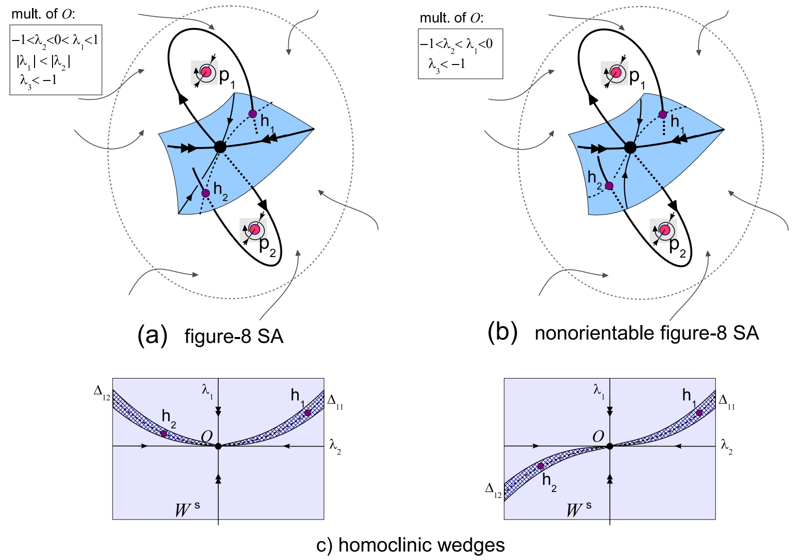


Рисунок 2.4: Поведение гомоклинических траекторий восьмерочного аттрактора в ориентируемом и неориентируемом случаях

сепаратрисы, соответствующей направлению наибольшего сжатия.

2.1.3 Двойной неориентируемый дискретный восьмерочный аттрактор

Данный аттрактор присутствует в следующем отображении Эно:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 2y^3 + 1.25z^3, \tag{2.4}$$

при значениях параметров $A = 1.45, C = 1.21, B = -0.4$.

На рис. 2.5 показан пример двойного неориентируемого восьмерочного аттрактора. Значения мультипликаторов в точке $O(0,0,0)$ для данного отображения равны $\lambda_1 = 1.96, \lambda_2 = 0.26, \lambda_3 = -0.7$, что соответствует условиям (1.16).

Как и в случае с ориентируемым отображением Эно, данный аттрактор называется двойным в силу того, что его гомоклиники при пересечении с устойчивым многообразием образуют дополнительные “клинья”, как можно увидеть на рис. 1.20.

2.1.4 Неориентируемый дискретный спиральный аттрактор и аттрактор Шильникова

Особый случай составляют спиральные аттракторы, содержащие неподвижную точку типа седло фокус и являющиеся, по сути, квазиаттракторами.

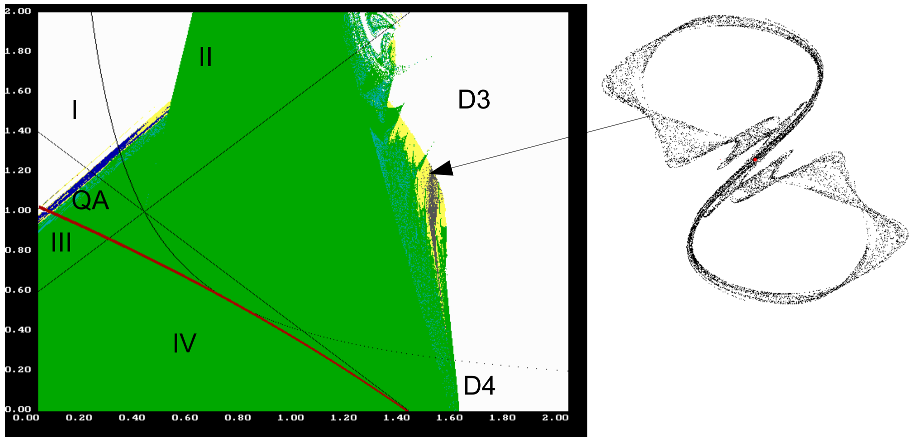


Рисунок 2.5: Пример двойного неориентируемого восьмерочного аттрактора. Слева изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.4$. Справа – проекция аттрактора на плоскость (x, y).

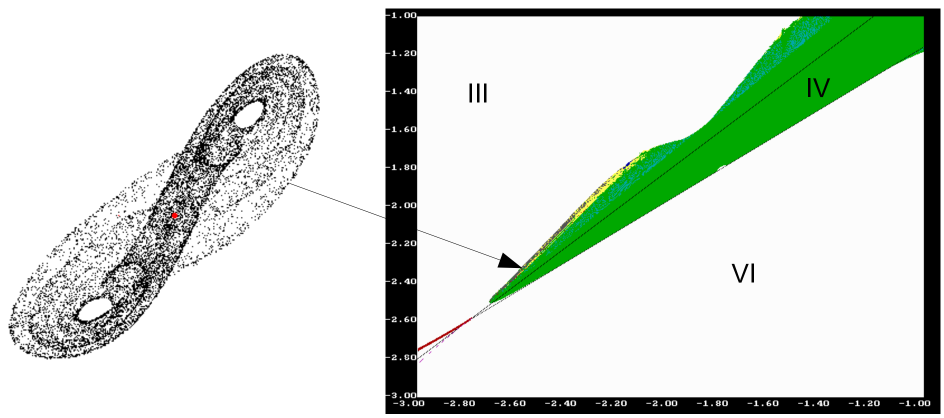


Рисунок 2.6: Пример неориентируемого спирального аттрактора. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.8$. Слева – проекция аттрактора на плоскость (x, y).

Первый из рассматриваемых нами таких аттракторов – неориентируемый спиральный аттрактор. Он присутствует в следующем отображении Эно:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - y^3 + 1.45z^3 - 1.5yz \tag{2.5}$$

при значениях параметров $A = -2.64, C = 2.37, B = -0.8$

На рис. 2.6 показан пример неориентируемого спирального аттрактора. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для приведенного отображения равны $\lambda_1 = -1.26, \lambda_{2,3} = 0.69 \pm 0.4i$, что соответствует условиям (1.14).

Второй из рассматриваемых спиральных аттракторов – неориентируемый аттрактор Шильникова, который был найден в следующем отображе-

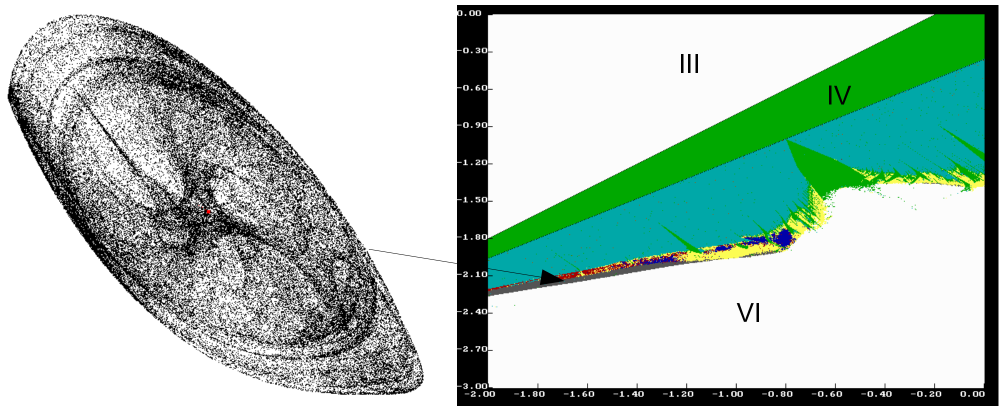


Рисунок 2.7: Пример неориентируемого аттрактора Шильникова. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.8$. Слева - проекция аттрактора на плоскость (x, y).

нии Эно:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 1.5z^3 + 2.5y^3 - 0.2y^2 \tag{2.6}$$

при значениях параметров $A = -1.66, C = -2.15, B = -0.8$.

На рис. 2.7 показан пример неориентируемого аттрактора Шильникова. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для приведенного отображения равны $\lambda_1 = -0.51, \lambda_{2,3} = -0.57 \pm 1.11i$, что соответствует условиям (1.15).

Заметим также, что у трехмерных неориентируемых отображений могут существовать такие же странные гомоклинические аттракторы, как и в ориентируемом случае, но только с точками периода два (или четного периода). Такие аттракторы состоят из двух компонент, каждая из которых содержит точку цикла периода 2. Кроме того, каждая компонента аттрактора инвариантна относительно T^2. Примеры дискретных (ориентируемых) периода 2 аттракторов Лоренца, Шильникова и восьмерочного в случае отображения

$$\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = Bx + Cy + Az - z^2 \tag{2.7}$$

показаны на рис. 2.8 а, б и в соответственно.

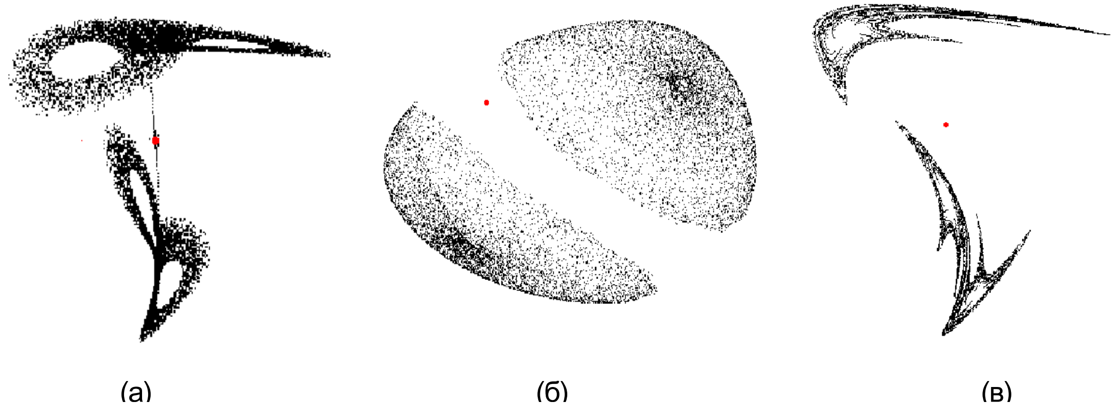


Рисунок 2.8: Примеры дискретных ориентируемых странных аттракторов периода 2: (а) аттрактор Лоренца; (б) аттрактор Шильникова и (в) восьмерочный аттрактор.

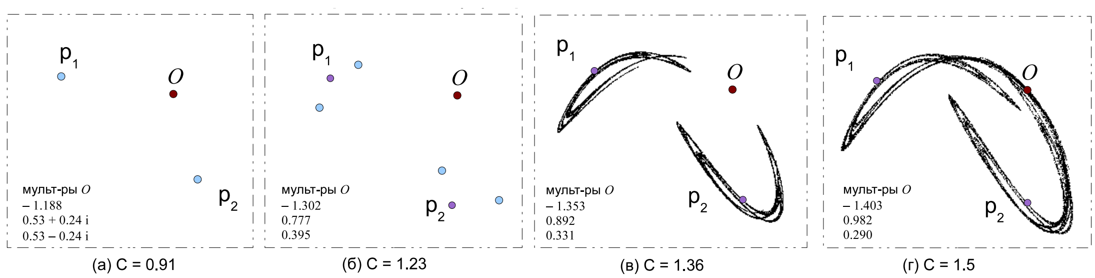


Рисунок 2.9: Этапы возникновения неориентируемого дискретного аттрактора Лоренца в случае отображения (1.2) с $B = -0.4; A = -o.13; g = 1.5yz - 0.54y^3 + 0.54z^3$ при изменении C от $C = 0.9$ до $C = 1.5$.

2.2 Реализация сценариев возникновения странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно

Приведем конкретные примеры реализации рассмотренных в главе 1 сценариев в случае неориентируемых трехмерных обобщенных отображений Эно вида (1.2).

На рис. 2.9 показаны этапы возникновения неориентируемого дискретного аттрактора Лоренца в однопараметрическом семействе отображений (1.2) при фиксированных $B = -0.4; A = -0.13; g = 1.5yz - 0.54y^3 + 0.54z^3$, где C – параметр. Здесь точка $O(0,0,0)$ асимптотически устойчива при $-0.892 < C < 0.47$, при $C = 0.47$ она теряет устойчивость в результате

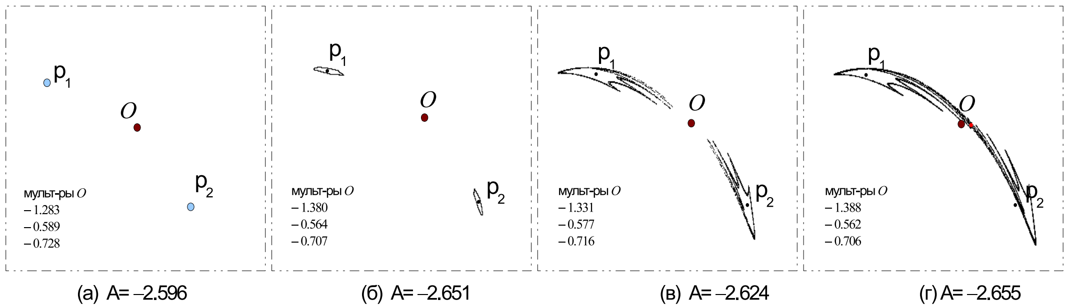


Рисунок 2.10: Этапы возникновения неориентируемого восьмерочного аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (1.2) с $B = -0.55; g = 1.3y^2 + 12.5yz + 2.2z^2 + 2.7z^3$ и $C = \frac{2}{3}A - 0.385$ при изменении A.

бифуркации удвоения периода: сама точка становится седловой (на интервале $0.47 < C < 1.53$ точка O имеет мультипликаторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такие, что $\lambda_1 < -1, |\lambda_{2,3}| < 1$), а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2, рис. 2.9а. В свою очередь, при изменении C цикл (p_1, p_2) теряет устойчивость в результате второй бифуркации удвоения периода, рис. 2.9б. Эта бифуркация подсказывает [21], что здесь может возникнуть двухкомпонентный дискретный аттрактор лоренцевского или восьмерочного типа, содержащий цикл (p_1, p_2). Численный счет подтверждает это: на рис. 2.9в показан такой аттрактор – он содержит цикл (p_1, p_2) (в соответствии с [21],[69] – это двухкомпонентный квазиаттрактор, тип которого можно определить как промежуточный между лоренцевским и восьмерочным). При дальнейшем изменении C в результате образования гомоклинических пересечений инвариантных многообразий точки O образуется однокомпонентный дискретный “тонкий” аттрактора Лоренца, рис. 2.9г.

На рис. 2.10 показаны этапы возникновения неориентируемого восьмерочного аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (1.2) при $B = -0.55; g = 1.3y^2 + 12.5yz + 2.2z^2 + 2.7z^3$ и $C = \frac{2}{3}A - 0.385$, где A – параметр. Здесь точка $O(0, 0, 0)$ асимптотически устойчива при $-2.205 < A < 1.161$, при $A = -2.823$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: сама точка становится седловой (на всем интервале $A < -2.823$ точка O имеет мультипликаторы такие, что $\lambda_1 < -1, |\lambda_{2,3}| < 1$), а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2, рис. 2.10а. При дальнейшем уменьшении A цикл (p_1, p_2) теряет устойчивость в результате дискретной бифуркации Андронова-Хопфа, после которой аттрактором становится замкнутая инвариантная кривая пе-

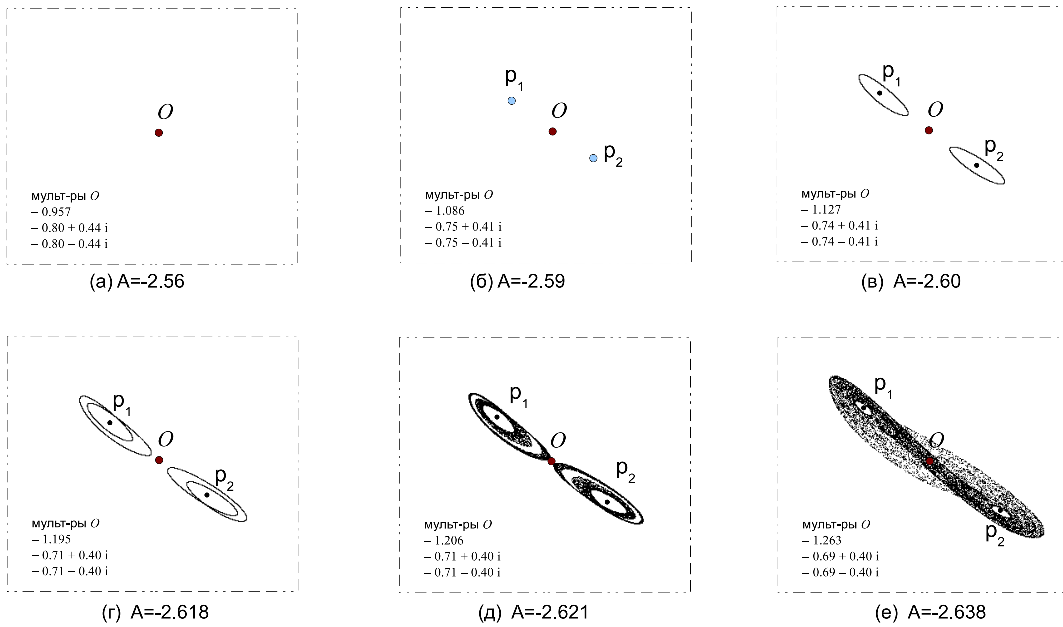


Рисунок 2.11: Этапы возникновения неориентируемого спирального аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (1.2) при $B = -0.8; C = -2.37; g(y, z) = -1.5yz - y^3 + 1.45z^3$, где A – параметр.

риода 2, рис. 2.10б; в свою очередь, эта инвариантная кривая разрушается в соответствии со сценарием Афраймовича-Шильникова [8], образуется сначала двухкомпонентный странный аттрактор типа “тор-хаос”, рис. 2.10в, а затем и дискретный неориентируемый восьмерочный аттрактор, содержащий точку O, рис. 2.10г.

На рис. 2.11 показаны этапы возникновения неориентируемого спирального аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (1.2) при $B = -0.8; C = -2.37; g(y, z) = -1.5yz - y^3 + 1.45z^3$, где A – параметр. Здесь точка $O(0, 0, 0)$ асимптотически устойчива при $A* = -2.57 < A < -2.5125$, рис. 2.11а; при $A = A*$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: сама точка становится седловой (на всем интервале $A < -A*$ точка O имеет мультипликаторы такие, что $\lambda_1 < -1$, $\lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\omega}$, где $0 < \rho < 1, 0 < \omega < 1$), а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2, рис. 2.11б. При дальнейшем уменьшении A цикл (p_1, p_2) теряет устойчивость в результате дискретной бифуркации Андронова-Хопфа, после которой аттрактором становится замкнутая инвариантная кривая периода 2, рис. 2.11в; далее с этой кривой происходит несколько бифуркаций удвоений (см. рис. 2.11г после первого удвое-

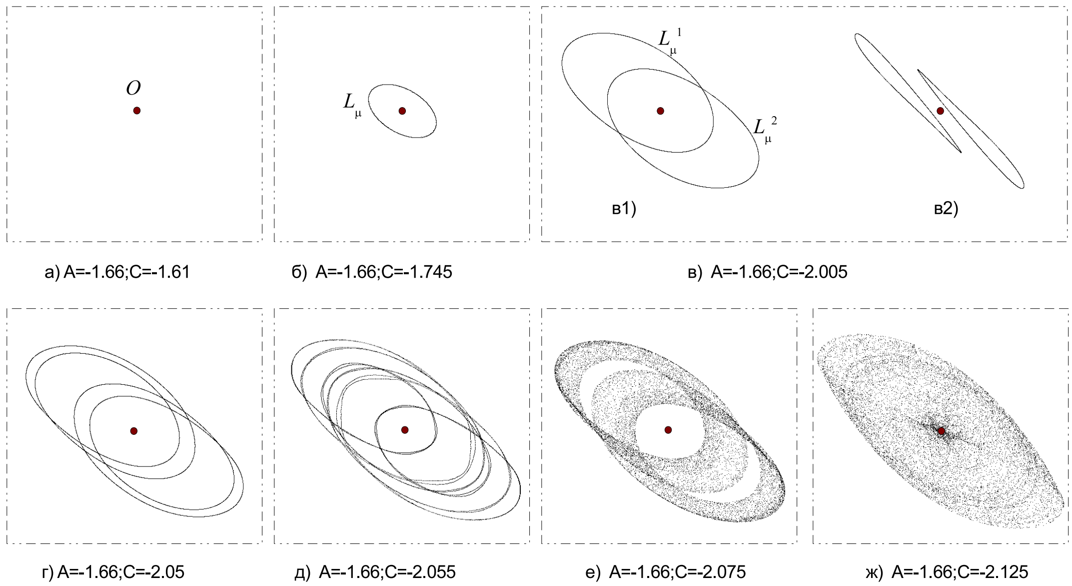


Рисунок 2.12: Этапы возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова в в однопараметрическом семействе отображений (1.2) при $B = -0.8; A = -1.66; g(y,z) = -1.5z^3 + 2.5y^3$, где C – параметр.

ния) и возникает двухкомпонентный странный аттрактор типа "тор-хаос", рис. 2.11д; затем этот аттрактор трансформируется в дискретный неориентируемый спиральный аттрактор, содержащий точку O, рис. 2.11е.

На рис. 2.12 показаны этапы возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова в однопараметрическом семействе отображений (1.2) при $B = -0.8; A = -1.66; g(y,z) = -1.5z^3 + 2.5y^3$, где C – параметр. Здесь точка $O(0,0,0)$ асимптотически устойчива при $C* = -1.688 < C < -1.46$, рис. 2.12а при $C < C*$ она теряет устойчивость в результате дискретной бифуркации Андронова-Хопфа – точка O становится седло-фокусом типа (1,2), а в её окрестности рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая L_μ, рис. 2.12б. Эта кривая затем "удваивается" – сама кривая становится седлового типа, а в её окрестности появляются устойчивые замкнутые инвариантные кривые L_μ^1 и L_μ^2 периода 2 (показаны на рис. 2.12в в разных ракурсах в1) и в2)), которые затем претерпевают несколько бифуркаций удвоения (рис. 2.12г–д), трансформируются в "тор-хаос", рис. 2.12е; в конце концов возникает дискретный неориентируемый аттрактор Шильникова, содержащий точку O.

2.3 Примеры странных аттракторов четырехмерных отображений Эно

Само по себе исследование трехмерных неориентируемых отображений имеет смысл лишь только в случае приложения полученных результатов к исследованию систем более высокой размерности. Так как обнаруженные странные неориентируемые аттракторы, в принципе, могут появляться в четырехмерных ориентируемых отображениях в случае, если якобиан отображения достаточно мал, а значит они могут возникать в пятимерных потоках, как аттракторы отображения первого возвращения.

Далее будем рассматривать класс четырехмерных обобщенных отображений Эно, который сконструируем по аналогии с трехмерными отображениями, введя дополнительную размерность w:

$$\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = w, \bar{w} = Ax + By + Cz + Dw + g(y, z, w), \tag{2.8}$$

где A, B, C, D – коэффициенты ($-A$ – якобиан отображения (2.8)), $g(y, z, w)$ – функция только координат y, z и w, обращающаяся в ноль при $y = z = w = 0$ вместе со своими первыми производными.

Можно заметить, что данное отображение, как и в трехмерном случае, обладает постоянным якобианом $-A$, а точка $O(0, 0, 0, 0)$ является неподвижной точкой системы при любых значениях параметров A, B, C, D. Характеристическое уравнение в точке $O(0, 0, 0, 0)$ имеет следующий вид:

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^4 - D\lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A = 0. \tag{2.9}$$

Нетрудно заметить, что при достаточно малом значении якобиана $-A \sim 0$, мы получаем отображение с разделяющимися переменными и исходное четырехмерное отображение начинает обладать всеми свойствами трехмерного. Воспользовавшись этим наблюдением в семействе четырехмерных обобщенных отображений Эно при малом значении якобиана были найдены странные гомоклинические аттракторы по своей структуре похожие на аттракторы трехмерных неориентируемых отображений Эно. Далее приведем примеры таких аттракторов.

Первый – это аттрактор лоренцевского типа (рис. 2.16), найденный в системе $\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = w, \bar{w} = Ax+By+Cz+Dw+1.5zw-0.54z^2+0.54w^3$, при значениях параметров $A = -0.01, B = -0.4, C = 1.5, D = -0.13$. Значения мультипликаторов неподвижной точки $O(0, 0, 0, 0)$ равны $\lambda_1 =$

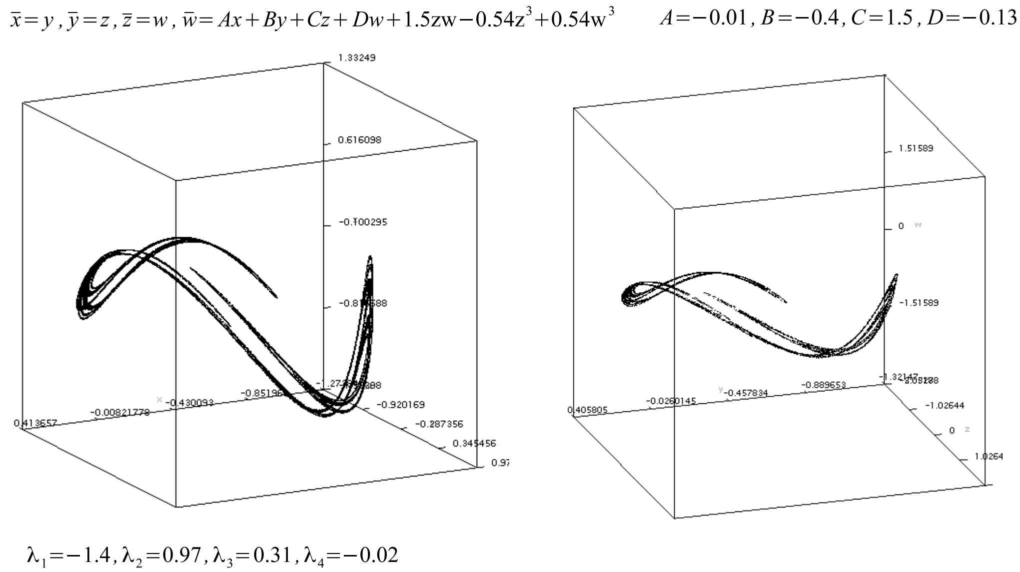


Рисунок 2.13: Пример странного гомоклинического аттрактора лоренцевского типа в семействе четырехмерных отображений Эно вида (2.8) (проекции на гиперплоскость XYZ – слева, YZW – справа).

$-1.4, \lambda_2 = 0.97, \lambda_3 = 0.31, \lambda_4 = -0.02$, что в точности соответствует расположению мультипликаторов аттрактора лоренцевского типа $\lambda_1 < -1 < \lambda_4 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$, $|\lambda_2| > |\lambda_3| > |\lambda_4|$. При этом первая седловая величина $\sigma_1 = \lambda_1\lambda_2 > 1$.

Далее рассмотрим пример аттрактора восьмерочного типа (рис. 2.14), который был найден в системе $\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = w, \bar{w} = Ax + By + Cz + Dw + 1.3z^2 + 2.2w^2 + 12.5zw + 2.7w^3$, при значениях параметров $A = -0.001, B = -0.55, C = -2.155, D = -2.667$. Значения мультипликаторов седла $O(0, 0, 0, 0)$ равны $\lambda_1 = -1.426, \lambda_2 = -0.652, \lambda_3 = -0.587, \lambda_4 = -0.002$, что в точности соответствует расположению мультипликаторов аттрактора восьмерочного типа $\lambda_1 < -1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0 < \lambda_4$.

Следующим будет пример аттрактора Шильникова (рис. 2.14), который был найден в системе $\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = w, \bar{w} = Ax + By + Cz + Dw + 2.5z^3 - 1.5w^3$, при значениях параметров $A = -0.01, B = -0.8, C = -2.125, D = -1.66$. Значения мультипликаторов неподвижной точки $O(0, 0, 0, 0)$ равны $\lambda_{1,2} = -0.57 \pm 1.09i, \lambda_3 = -0.51, \lambda_4 = -0.13$, что соответствует расположению мультипликаторов аттрактора шильниковского типа $\lambda_{1,2} \in \mathbb{C}, |\lambda_{1,2}| > 1, \lambda_3 < \lambda_4 < 0$.

Последним будет пример спирального аттрактора, найденного в системе $\bar{x} = y,\ \bar{y} = z,\ \bar{z} = w, \bar{w} = Ax + By + Cz + Dw - 1.5zw - z^3 + 1.45w^3$,

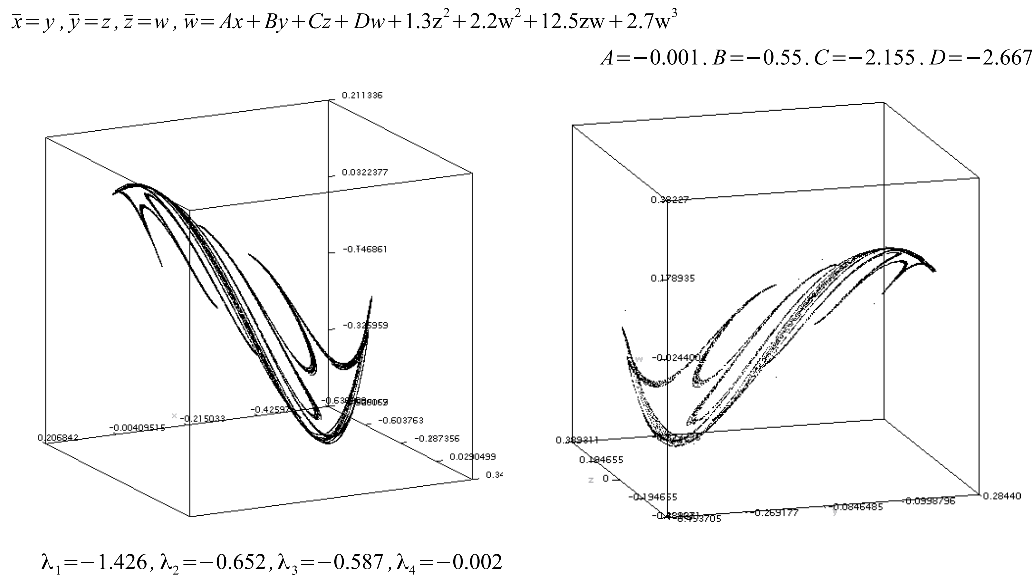


Рисунок 2.14: Пример странного гомоклинического аттрактора лоренцевского типа в семействе четырехмерных отображений Эно вида (2.8) (проекции на гиперплоскость XYZ – слева, YZW – справа).

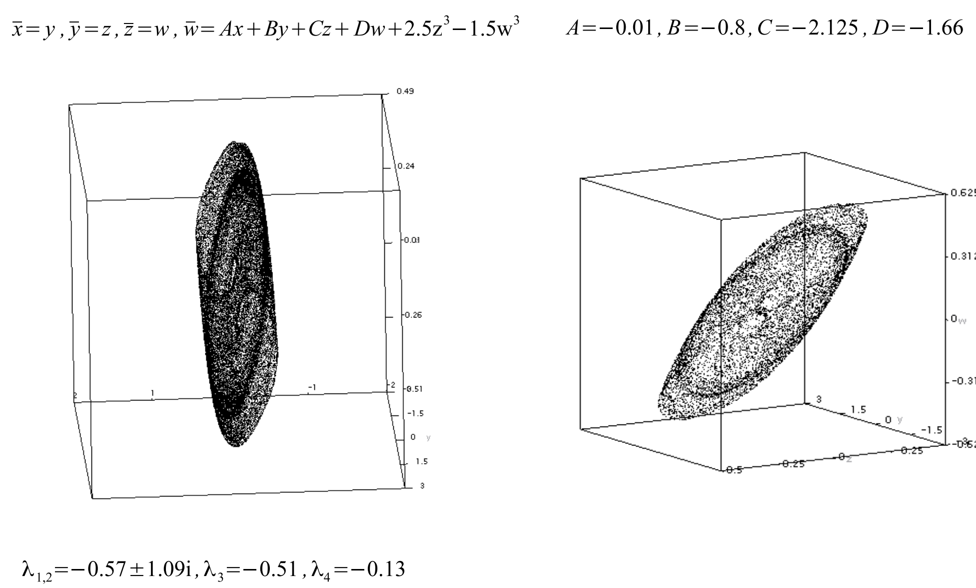


Рисунок 2.15: Пример странного гомоклинического аттрактора Шильникова в семействе четырехмерных отображений Эно вида (2.8) (проекции на гиперплоскость XYZ – слева, YZW – справа).

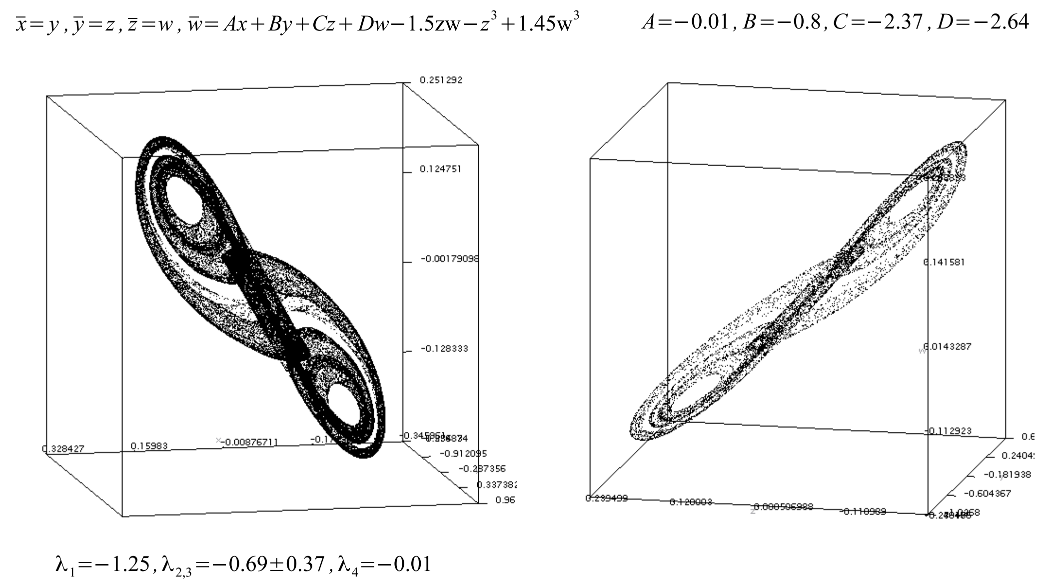


Рисунок 2.16: Пример странного гомоклинического аттрактора спирального типа в семействе четырехмерных отображений Эно вида (2.8) (проекции на гиперплоскость XYZ – слева, YZW – справа).

при значениях параметров $A = -0.01, B = -0.8, C = -2.37, D = -2.64$. Значения мультипликаторов неподвижной точки $O(0,0,0,0)$ равны $\lambda_1 = -1.25, \lambda_{2,3} = -0.69 + -0.37, \lambda_4 = -0.01$, что также соответствует расположению мультипликаторов спирального аттрактора $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} \in \mathbb{C}, |\lambda_{2,3}| > 1, -1 < \lambda_4 < 0$.

Стоит отметить, что все перечисленные примеры аттракторов имеют аналоги в трехмерном неориентируемом отображении Эно.

Глава 3

Псевдогиперболические аттракторы

3.1 Определение и свойства псевдогиперболичности

В этой главе будут рассмотрены основные понятия теории псевдогиперболических странных аттракторов. В случае потоков определение псевдогиперболичности было дано в работе Тураева и Шильникова [32], см. также [33, 30], а в случае отображений – в работе [71]. Если говорить коротко, то псевдогиперболичность диффеоморфизма f на некоторой области $\mathcal{D}$ означает, что в каждой точке этой области существуют два трансверсальных линейных подпространства N_1 и N_2, непрерывно зависящие от точки и инвариантные относительно дифференциала Df отображения, такие, что Df является экспоненциально сильно сжимающим на N_1 и растягивающим (экспоненциально) объемы на N_2 (здесь слово "сильно" означает, что любое возможное сжатие в N_2 равномерно слабее любого сжатия в N_1). Данные условия налагают следующие ограничения на показатели Ляпунова:

$$\Lambda_1 > 0,\ \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0,\ \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0. \tag{3.1}$$

Таким образом, в отличие от гиперболичности, здесь не требуется, чтобы растяжение в N_2 существовало по всем направлениям. Тем не менее, псевдогиперболичность, также как и гиперболичность, сохраняется при малых гладких возмущениях [32]. Поэтому если диффеоморфизм f имеет аттрактор в $\mathcal{D}$, то этот аттрактор является странным, т.к. растяжение объемов в N_2 гарантирует существование положительного максимального ляпуновского показателя у любой траектории. Другими словами, псевдогиперболические аттракторы являются настоящими аттракторами.

Дадим строгое определение псевдогиперболичности для случая отображений произвольной размерности $N >= 2$.

Рассмотрим диффеоморфизм f, определенный в $\mathbb{R}^m$, и пусть Df – это его дифференциал.[1] Открытая область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$ называется *поглощающей областью* диффеоморфизма f, если $f(\overline{\mathcal{D}}) \subset \mathcal{D}$.

Определение 3.1. *Диффеоморфизм f называется* псевдогиперболическим *на $\mathcal{D}$, если выполняются следующие условия.*

1) *У каждой точки из $\mathcal{D}$ существуют два трансверсальных линейных подпространства N_1 и N_2, которые имеют дополнительные размерности* ($\dim N_1 = k \geq 1, \dim N_2 = m - k \geq 2$)*, непрерывно зависят от точки, инвариантны относительно Df, то есть*

$$Df(N_1(x)) = N_1(f(x)), \;\; Df(N_2(x)) = N_2(f(x)),$$

и такие, что у каждой траектории $L : \{x_i \mid x_{i+1} = f(x_i), \;\; i = 0, 1, ...; x_0 \in \mathcal{D}\}$ максимальный ляпуновский показатель, отвечающий подпространству N_1, строго меньше, чем минимальный ляпуновский показатель, отвечающий подпространству N_2, т.е. выполняется такое неравенство:

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ \ln \big(\sup_{\substack{u \in N_1(x_0) \\ \|u\| = 1}} \|Df^n(x_0)u\|\big) < \\ &\qquad < \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ \ln \big(\inf_{\substack{v \in N_2(x_0) \\ \|v\| = 1}} \|Df^n(x_0)v\|\big), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где Df^n – матрица размера $m \times m$, определяемая соотношением

$$Df^n = Df_{x_{n-1}} \cdot \ldots \cdot Df_{x_1} \cdot Df_{x_0},$$

а $\limsup\limits_{n\to\infty}$ и $\liminf\limits_{n\to\infty}$ – соответственно верхний и нижний пределы.

2) *Диффеоморфизм f в ограничении на N_1 является равномерно сжимающим, т.е. существуют такие константы $\lambda > 0$ и $C_1 > 0$, что*

$$\|Df^n(N_1)\| \leq C_1 e^{-\lambda n}. \tag{3.3}$$

[1] Напомним, что дифференциал в точке x_0 отображения $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ – это линейный оператор $A = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0}$, переводящий вектор ℓ_{x_0} точке x_0 в вектор $\ell_{x_1} = A\ell_{x_0}$ в точке $x_1 = f(x_0)$.

3) *Диффеоморфизм f в ограничении на N_2 растягивает экспоненциально $(m-k)$-мерные объемы, т.е. существуют такие константы $\sigma > 0$ и $C_2 > 0$, что*[2]

$$|\det Df^n(N_2)| \geq C_2 e^{\sigma n}. \tag{3.4}$$

Из определения 3.1 немедленно вытекает, что :

1* все траектории в $\mathcal{D}$ неустойчивы: каждая траектория имеет положительный максимальный ляпуновский показатель

$$\Lambda_{max}(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ \ln\ \|Df^n(x)\| > 0.$$

Заметим, что условия псевдогиперболичности означают, что на $(m-k)$-мерных подпространствах N_2 растягиваются $(m-k)$-мерные объемы. Это не запрещает, что на N_2 могут быть и сжимающие направления, но сжатие вдоль них должно быть равномерно не таким сильным, как любое сжатие в N_1. Поэтому условия псевдогиперболичности являются более слабыми, чем условия равномерной гиперболичности, которые означают, что $\|Df^{-n}(N_2)\| < Ce^{-\sigma n}$, т.е. равномерное растяжение должно иметь место по всем направлениям в N_2. Тем не менее, также как и в случае гиперболических систем, здесь стандартно доказывается, [1, 32], следующий результат.

2* Условия псевдогиперболичности сохраняются при всех достаточно малых C^r-возмущениях системы. Более того, пространства N_1 и N_2 меняются при этом непрерывно.

Из утверждения 1* вытекает, что если диффеоморфизм f имеет аттрактор в $\mathcal{D}$, то этот аттрактор является странным, и он не содержит устойчивых периодических траекторий, которые, как следует из условия 2*, не появляются также при малых гладких возмущениях. Другими словами, псевдогиперболические аттракторы являются настоящими аттракторами.

В отличие от гиперболических аттракторов и аттракторов Лоренца, у псевдогиперболических аттракторов могут существовать *гомоклинические касания*. Более того, если заранее неизвестно, что странный аттрактор является гиперболическим, то у него помимо грубых гомоклинических траекторий (в точках, которых устойчивые и неустойчивые инвариантные многообразия седловых периодических траекторий пересекаются трансверсально), должны существовать и негрубые. Само по себе возникновение определенного гомоклинического касания не является чем-то исключительным

[2]Если $\dim N_2 = 1$, то получается обычное определение равномерной гиперболичности, поэтому требуем в определении, что $\dim N_2 \geq 2$.

– это бифуркационный момент коразмерности один в общем случае (когда касание квадратичное). Однако, как показал еще Ньюхаус [100], эта бифуркация влечет чрезвычайно сложную структуру бифуркационного множества. В частности, здесь возникает бесконечно много вторичных гомоклинических касаний, эти касания могут быть вырожденными [17], что, в свою очередь, означает возможность появления сколь угодно вырожденных периодических траекторий и т.п. Все это приводит к тому, что бифуркации гомоклинических касаний нельзя изучить полностью, например, с помощью конечно-параметрических семейств – традиционного аппарата классической теории бифуркаций. Здесь по необходимости возникают задачи другого рода, связанные с исследованием основных бифуркаций и основных характеристических свойств таких систем. При этом, что является весьма важным и интересным, вопрос о том, какие бифуркации и какие характеристические свойства являются основными, должен решать сам исследователь.

В теории странных аттракторов гладких динамических систем один из наиболее важных вопросов связан с определением того, является ли данный аттрактор квазиаттрактором или настоящим аттрактором (в частности, псевдогиперболическим). Иногда этот вопрос решается просто и параллельно с основными компьютерными вычислениями. В случае странных аттракторов двумерных диффеоморфизмов (если таковые не являются гиперболическими), бифуркации неизбежных в них гомоклинических касаний приводят к возникновению устойчивых периодических траекторий весьма больших периодов [10], и соответственно, любой такой аттрактор следует считать квазиаттрактором.[3]

В случае странных аттракторов трехмерных диффеоморфизмов, вопрос об определении их типов (квазиаттрактор или настоящий аттрактор) является более сложным. Однако и здесь гомоклинические касания, обнаруживаемые в аттракторах, являются своеобразными индикаторами. Так, если аттрактор допускает гомоклинические касания к неподвижной или периодической точке такие, как на рис. 3.1, то он определенно является квазиаттрактором. В первом случае, рис. 3.1a, неподвижная точка является седлом с седловой величиной σ меньше единицы, а во втором случае, рис. 3.1b, – седло-фокусом. Здесь требуется только, что якобиан J неподвижной

[3]Это справедливо, например, и для аттракторов Эно, у которых устойчивые периодические траектории могут отсутствовать для значений параметров, образующих нигде не плотное множество положительной меры, согласно теории Бенедикса-Карлесона [53], однако они сразу возникают при сколь угодно малых возмущениях.

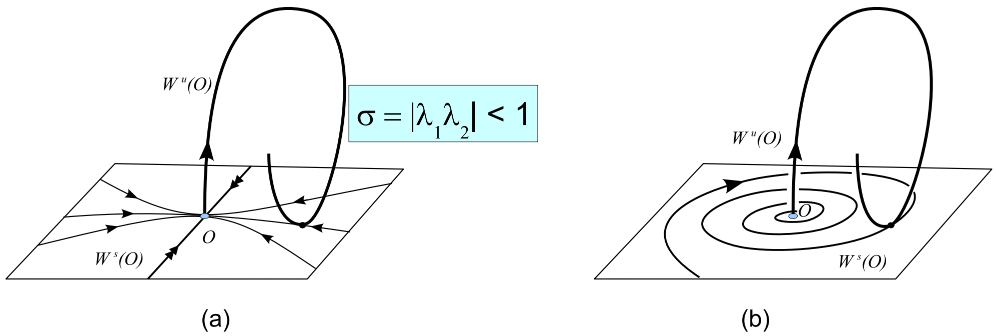


Рисунок 3.1: Гомоклинические касания, бифуркации которых приводят к рождению устойчивых периодических траекторий.

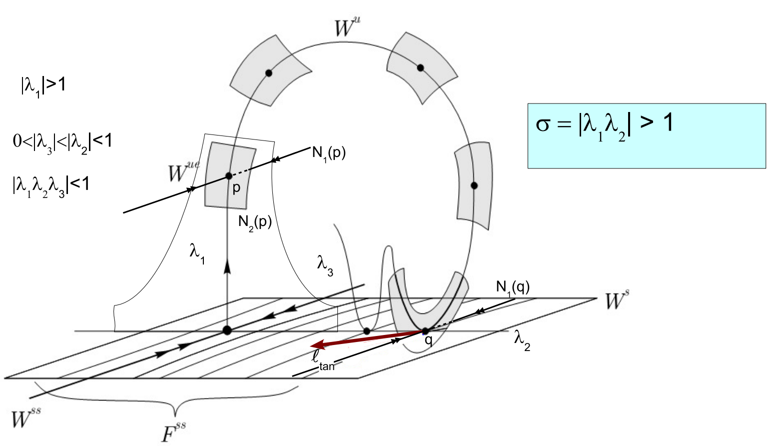


Рисунок 3.2: К определению простого гомоклинического касания.

точки меньше единицы, и в случае седла его неустойчивое многообразие одномерно (в случае седло-фокуса оно может быть как одномерным, так и двумерным).

С другой стороны, весьма важно, что существуют гомоклинические касания, которые не разрушают псевдогиперболичность. В случае трехмерных диффеоморфизмов таковыми являются *простые гомоклинические касания*, [14, 15], при условии, что $\sigma > 1$. Пусть, например, диффеоморфизм f имеет седловую неподвижную (периодическую) точку O с действительными мультипликаторами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такими, что $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2| > |\lambda_3| > 0$ при условии, что $\sigma = |\lambda_1||\lambda_2| > 1$. У таких касаний сама точка является псевдогиперболической: у неё $N_1(O)$ – это прямая, проходящая через O в направлении собственного вектора матрицы линеаризации A, отвечающего её сильно устойчивому собственному значению (мультипликатору) λ_3, а $N_2(O)$ – это плоскость, натянутая на собственные вектора матрицы A, отвечающие мультипликаторам λ_1 и λ_2. Очевидно, у любой точки p из малой окрестности $U(O)$ седла O будут такие же инвариантные разложения на пространства $N_1(p)$ и $N_2(p)$. Такие же инвариантные разложения вблизи всей гомоклинической траектории также удается получить, если гомоклиническое касание простое.

Последнее означает следующее. Возьмем две произвольные гомоклинические точки p и q в $U(O)$ такие, что $p \in W^u_{loc}(O)$ и $q \in W^s_{loc}(O)$, по которым[4] определим т.н. глобальное отображение T_1, строящееся по траекториям рассматриваемого диффеоморфизма и действующее из малой окрестности $V(p)$ точки p в малую окрестность точки q так, что $T_1(p) = q$ (заметим, что $f^s(p) = q$ для некоторого натурального s, тогда $T_1 = f^s|_{V(p)}$). Тогда требуется, что плоскость $DT_1(N_2(p))$ пересекается трансверсально с $N_1(q)$ и с $W^s_{loc}(O)$. Заметим, что при этом кривая $T_1(W^u_{loc}(O))$ касается двумерной плоскости $W^s_{loc}(O)$ вдоль вектора ℓ_{tan}, который, в свою очередь, образует ненулевой угол с прямой $N_1(q)$, см. рис. 3.2.

Если аттрактор трехмерного гладкого отображения является псевдогиперболическим, то он может содержать только простые гомоклинические касания.[5] При любых малых гладких возмущениях псевдогиперболичность сохраняется, но если эти возмущения не слишком малы, она может разрушиться. При этом само разрушение может быть вызвано появлением таких гомоклинических касаний как на рис. 3.1 (например, сама неподвижная точка, первоначально с $\sigma > 1$, в процессе эволюции может стать точкой с $\sigma < 1$, или, вообще, седло-фокусом). Более тонкий механизм разрушения псевдогиперболичности связан с возникновением т.н. непростых гомоклинических касаний, примеры которых показаны на рис. 3.3. При этом, как было установлено в [114, 75, 68], при бифуркациях таких гомоклинических касаний уже могут рождаться устойчивые периодические траектории, замкнутые инвариантные кривые и даже нетривиальные притягивающие инвариантные множества, например, маленькие аттракторы лоренцевского типа [68].

[4]Заметим, что локальные инвариантные многообразия $W^u_{loc}(O)$ и $W^s_{loc}(O)$ всегда можно распрямить, введя в $U(O)$ такие C^r-гладкие координаты (x, y, z), в которых $W^u_{loc}(O) = \{x = 0, y = 0\}$ и $W^s_{loc}(O) = \{z = 0\}$, [82].)

[5]При этом кроме квадратичных касаний, здесь могут существовать гомоклинические касания произвольно больших порядков [17], однако все они тоже являются простыми (в том смысле, что в любой гомоклинической точке p подпространства $N_2(p)$ и $N_1(p)$ пересекаются трансверсально.

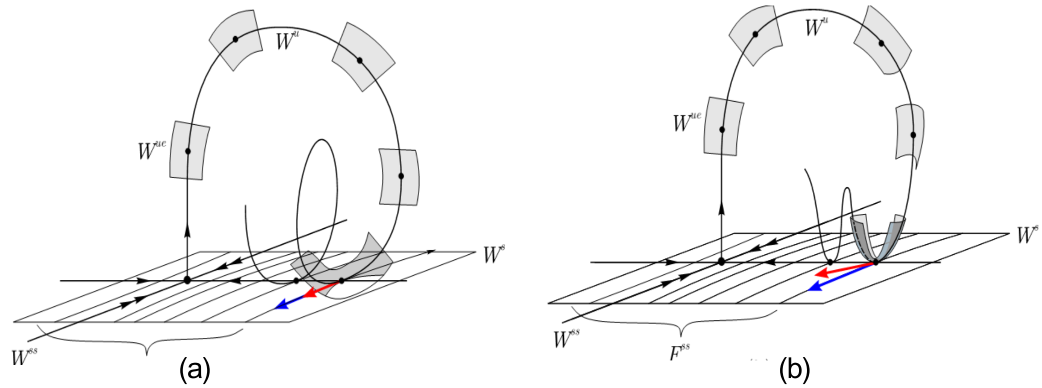


Рисунок 3.3: Два типа непростых гомоклинических касаний, когда (a) поверхность $T_1(N_2(p))$ пересекается трансверсально с $W^s_{loc}(O)$, но вектор ℓ_{tan} лежит в $N_1(q)$; (b) поверхность $T_1(N_2(p))$ касается $W^s_{loc}(O)$.

Отсюда можно сделать важный вывод для теории странных аттракторов трехмерных гладких отображений: если такой аттрактор является настоящим, то он должен быть либо гиперболическим, либо псевдогиперболическим. Что касается гиперболических аттракторов, то их математическая теория достаточно хорошо развита, см., например, [88]. Более того, после замечательных работ С.П. Кузнецова [93, 94, 95, 96] стало известно, что такие аттракторы встречаются также и в приложениях. Стоит заметить, что для доказательства того, что странный аттрактор в некоторой модели является гиперболическим, разработаны достаточно тонкие качественные и компьютерные методы. Как известно, аналогичные методы сейчас создаются и для детектирования псевдогиперболических аттракторов (в научных школах из Нижнего Новгорода, Саратова и Уппсалы, Швеция). Далее будет дано описание одного из таких методов, позволяющего проверить достаточные условия псевдогиперболичности аттрактора.

3.2 Метод проверки псевдогиперболичности

Как уже было замечено, условие (3.1) для спектра показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$, получаемых численно, может рассматриваться лишь как необходимое условие псевдогиперболичности странных аттракторов трехмерных отображений. Более того, данное условие, очевидно, выполнено для странных аттракторов трехмерных потоков: здесь $\Lambda_2 = 0$ и, поэтому, $\Lambda_1 > 0$ автоматически подразумевает, что $\Lambda_1+\Lambda_2 > 0$; а неравенство $\Lambda_1+\Lambda_2+\Lambda_3 < 0$ из свойства сжатия объемов в области существования странного аттрактора.

Однако, хорошо известно, что не все хаотические аттракторы трехмерных потоков, и тем более трехмерных отображений, являются псевдогиперболическими. Таким образом, требуются некоторые дополнительные численные методы, которые дают больше уверенности в том, что аттрактор является настоящим. Такие методы уже были разработаны, например, матод Такера строгих чисел [115], основанный на интервальной арифметике. Однако, метод Такера достаточно вычислительно сложен, и требует большого количества времени, для использования его в простых и стандартных методах, направленных больше на поиск аттракторов, чем на их подробное изучение. Вместо этого используется "простой метод" для проверки псевдогиперболичности (LMP-метод) трехмерных отображений и потоков. Данный метод был предложен в работе [76].

Суть LMP-метода заключается в том, что большое внимание уделяется проверке достаточных условий псевдогиперболичности. В случае трехмерных отображений (а также потоков), предполагается, что необходимое условие (3.1) выполняется. При этом, достаточное условие связано с существованием в каждой точке x вблизи аттрактора двух трансверсальных подпространств $N_1(x)$ и $N_2(x)$ таких, что

(i) $\dim N_1 = 1, \dim N_2 = 2$;

(ii) $N_1(x)$ и $N_2(x)$ непрерывно зависят от x;

(iii) $N_1(x)$ и $N_2(x)$ инвариантны относительно дифференциала DT отображения T, т.е. $Df(N_1(x)) = N_1(f(x)),\ \ Df(N_2(x)) = N_2(f(x))$;

(iv) Отображение T на N_1 является равномерно сжимающим, а на N_2 экспоненциально растягивает двумерные объемы, если в N_2 существует сжатие, то оно экспоненциально слабее, чем в N_1.

На самом деле эти условия являются упрощенной формулировкой определения 3.1.

Заметим, что строго сжимающее пространство $N_1(x)$ является одномерным и непрерывно зависит от x. Это означает, что углы $d\varphi$ между любыми векторами $N_1(x)$ и $N_1(y)$ должны быть близки при достаточно близких x и y. Фактически, LMP-метод позволяет вычислить эти углы и, таким образом, проверить непрерывность поля сильно сжимающих направлений N_1 в точках аттрактора.

Процесс вычисления метода состоит из двух стадий. Первая стадия – стандартная: вычисляется спектр показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ (если условие (3.1) не выполнено, метод прекращает свою работу) и, параллельно, сохраняется массив данных $\mathcal{N} = \{x_n\}$, где $x_{n+1} = f(x_n)$ и $n = 1, ...k$, содержат информацию о точках x_n на аттракторе. Второй шаг не совсем стандартный: вычисляется максимальный показатель Ляпунова для обратных итераций отображения, используя, по существу, информацию, полученную на первом этапе. В частности, обратные итерации принудительно привязаны к тем точкам аттрактора, которые были получены на первом этапе. [6] Заметим, что максимальный показатель Ляпунова при обратном итерировании равен наименьшему показателю Ляпунова Λ_3 взятому с обратным знаком, и во время данных вычислений находятся вектора $N_1(x_n)$.

В качестве конечного результата вычислений строится LMP-граф на плоскости координат $(dx, d\varphi)$, где dx – расстояние между двумя точками x и y аттрактора и $d\varphi$ – угол между векторами $N_1(x)$ и $N_1(y)$ (на самом деле мы строим график, зная точки x_i и x_j и векторы $N_1(x_i)$ и $N_1(x_j)$ для всех возможных i и j).

Заметим, что если аттрактор псевдогиперболический, из этого следует, что поле $N_1(x)$ непрерывно, LMP-граф должен пересекать ось $d\varphi$ только в начале координат ($dx = 0, d\varphi = 0$) или, если N_1 неориентируемо, в точках $d\varphi = 0$ и $d\varphi = \pi$. Таким образом, если построенный LMP-граф удовлетворяет этому свойству, можно заключить, что аттрактор должен быть, безусловно, псевдогиперболическим. С другой стороны, если LMP-граф пересекает ось $d\varphi$ в других точках, за исключением $d\varphi = 0$ и $d\varphi = \pi$ (или нет видимого промежутка между точками графа и осью $d\varphi$), говорим, что аттрактор является квазиаттрактором.

В настоящей работе для проверки свойства псевдогиперболичности была создана модификация LMP-метода, которая позволяет получать ляпуновские показатели и вектора без использования уравнений в вариациях, которые используются в оригинальном методе. Суть модификации заключается в том, что вместо уравнений в вариациях используется вариация начальных условий для построения вспомогательной траектории в методе вычисления показателей Ляпунова. Данная модификация позволяет осуществлять проверку псевдогиперболичности в случаях, когда невозможно

[6] Очевидно, что если возьмем любую точку на аттракторе, то ее обратные итерации рано или поздно удаляются далеко от аттрактора. Таким образом, можно потерять любую информацию об аттракторе. В данном случае это не является проблемой, когда при обратном итерировании берутся точки с первого этапа LMP-алгоритма.

явным образом выразить отображение, в котором возникает странный аттрактор, как, например, в случае отображения Пуанкаре для потоков. При этом описанные свойства оригинального LMP-метода остаются справедливыми и для его модификации.

Ниже будут рассмотрены некоторые примеры трехмерных отображений и потоков, содержащих странные аттракторы, и проверено свойство псевдогиперболичности данных аттракторов с помощью модифицированного LMP-метода.

3.3 Результаты проверки псевдогиперболичности некоторых аттракторов

Для подтверждения состоятельности LMP-метода проверки псевдогиперболичности, вначале применим его к аттракторам широко известных систем, для которых имеются доказательства наличия или отсутствия свойства псевдогиперболичности. Рассмотрим двумерное отображение Эно вида:

$$\bar{x} = 1 - ax^2 + by,\ \bar{y} = x, \tag{3.5}$$

Данное отображение обладает странным гомоклиническим аттрактором, называемым аттрактор Эно, при следующих значениях параметров $a = 1.4$ и $b = 0.3$ (рис. 3.4). Стоит отметить, что в двумерном случае свойство псевдогипеболичности по определению совпадает со свойством гиперболиности. Применив LMP-метод к отображению (3.5), в результате получим граф, изображенный на рис. 3.4 (справа), из которого видно, что при достаточно малом расстоянии между точками на аттракторе dX норма разности между векторами, соотсветствующими сильно устойчивому направлению сжатия (сильно устойчивое подпространство), достигает больших значений. Основываясь на данном факте можно сделать вывод о том, что существуют достаточно близкие точки на аттракторе, для которых вектора имеют противоположное направление, и, следовательно, данное подпространство не является непрерывным. Таким образом в исследуемом аттракторе нарушается свойство псевдогиперболичности (гиперболичности).

И действительно, как было показано в работе [45] аттрактор Эно не является гиперболическим, что и подтверждает LMP-метод.

Также интересным для исследования является аттрактор Лози, который возникает в системе (3.6), при значениях параметров $a = 1.7, b = 0.5$.

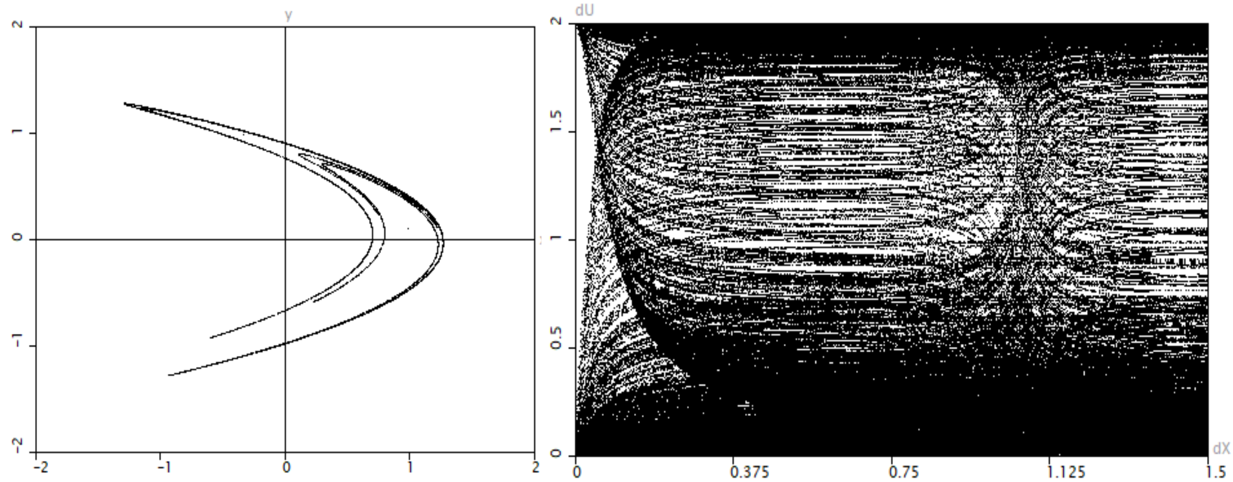


Рисунок 3.4: Аттрактор Эно (слева) и LMP-граф (справа) для отображения (3.5).

$$\bar{x} = 1 + y - a|y|,\ \bar{y} = bx, \tag{3.6}$$

Аналогично аттрактору Эно, проведем исследование свойств гиперболичности, используя LMP-метод.

На рис. 3.5 представлен внешний вид аттрактора и LMP-граф для системы (3.6). Как видно, точки графа касаются оси ординат не только вначале координат, но и в других точках, соответствующих большим значениям углов между векторами направлений сильного сжатия. Отсюда можно сделать вывод, что с большой вероятностью рассматриваемый аттрактор не является псевдогиперболическим.

Следующим рассмотренным аттрактором будет широко известный аттрактор Чена ([60]), возникаюший в системе:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x - xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \tag{3.7}$$

Данный аттрактор возникает при следующих значениях параметров $a = 35, b = 3, c = 28$.

Насколько известно, до настоящего времени не было проведено исследования свойств псевдогиперболичности данного аттрактора, хотя формально необходимые условия псевдогиперболичности, а именно ограничения, накладываемые на значения показателей Ляпунова, являются вы-

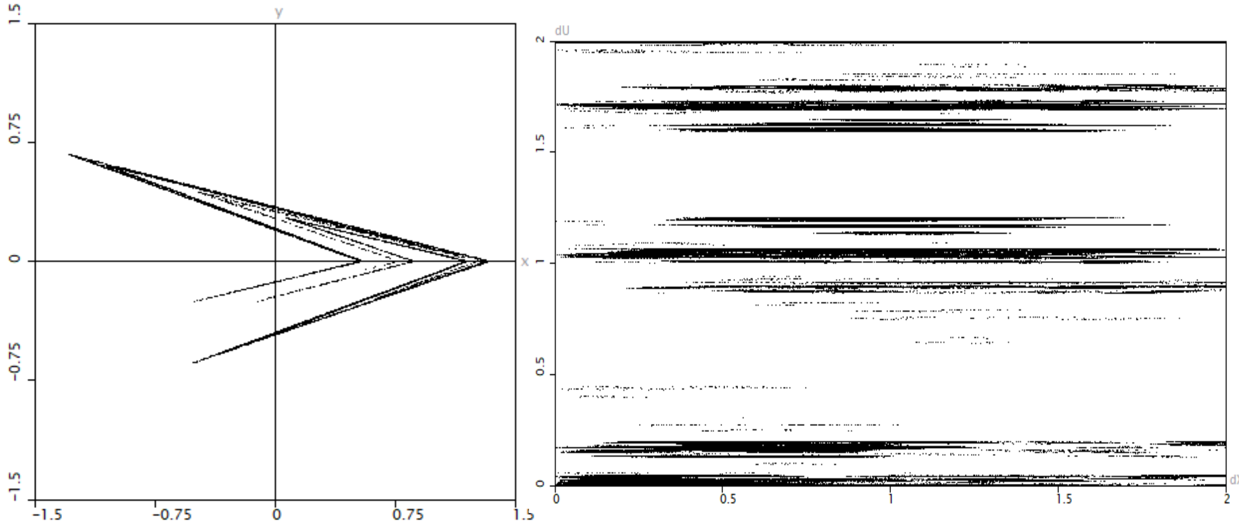


Рисунок 3.5: Аттрактор Лози (слева) и LMP-граф (справа) для отображения (3.6). Как видно, точки графа касаются оси ординат только .

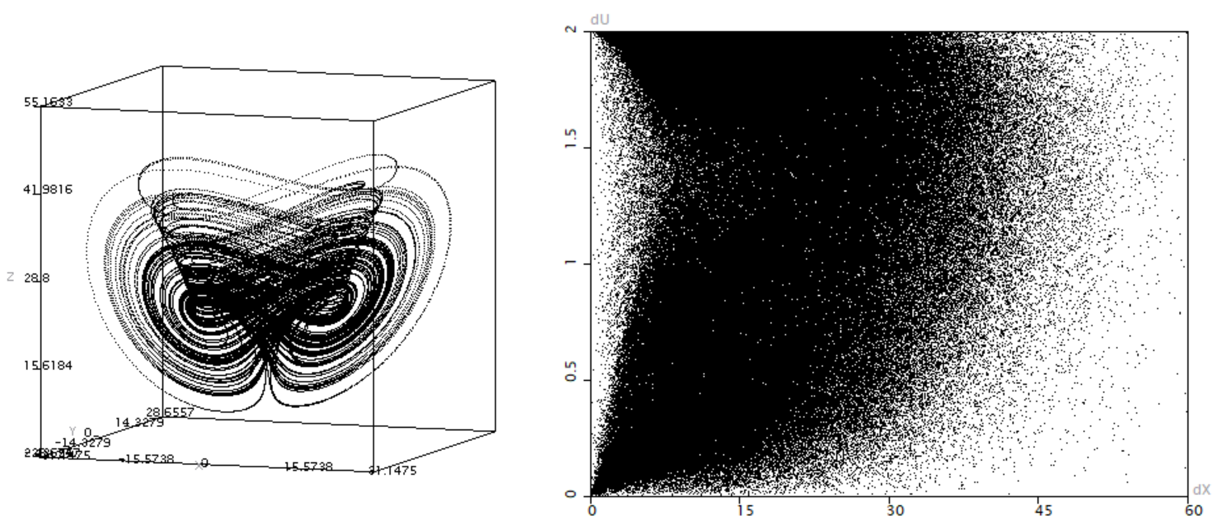


Рисунок 3.6: Аттрактор Чена (слева) и LMP-граф (справа) для системы (3.7).

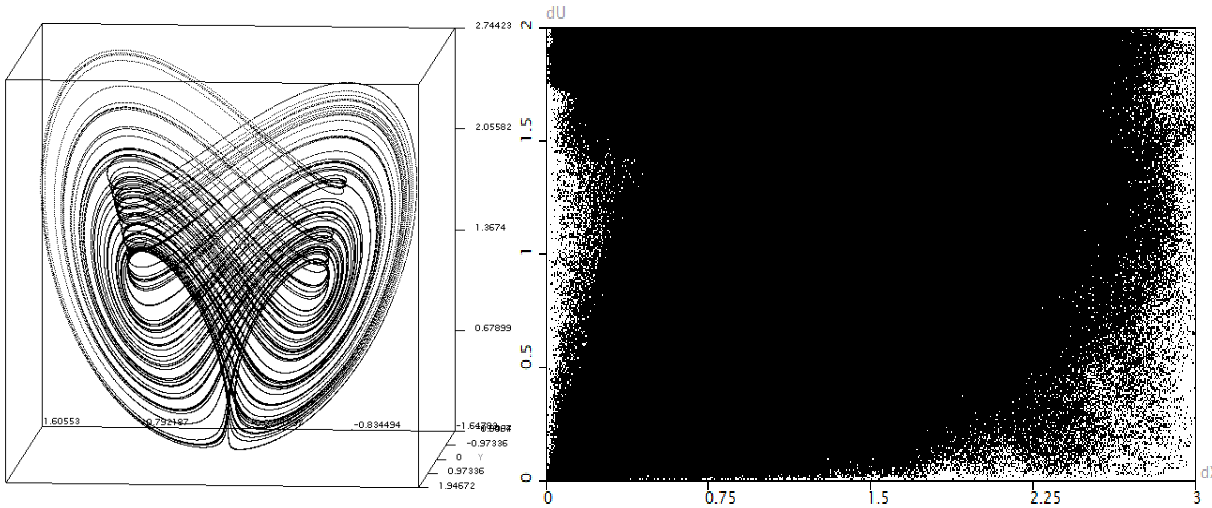


Рисунок 3.7: Аттрактор в системе Шимицу-Мариока при значениях параметров $\alpha = 0.36, \lambda = 0.5$ (слева) и LMP-граф (справа) для системы (3.8).

полненными. Поэтому применение LMP-метода в данном случае видится весьма целесообразным. На рис. 3.6 справа приведен результат работы LMP-метода. Основываясь на данном результате, как и в предыдущем случае, можно сделать вывод, что пространство сильного сжатия не является непрерывным, а значит данный аттрактор не является псевдогиперболическим.

По своей структуре аттрактор Чена схож с аттрактором, возникающим в системе Шимицу-Мариока:

$$\begin{cases} \dot{x} = y) \\ \dot{y} = x - \lambda y - xz \\ \dot{z} = -\alpha z + x^2 \end{cases} \tag{3.8}$$

Приведем также результат работы LMP-метода для аттрактора данной системы, возникающего при следующих значениях параметров: $\alpha = 0.36, \lambda = 0.5$.

Как видно из рис. 3.7, данный аттрактор, также как и аттрактор Чена, не является псевдогиперболическим. Однако, система (3.8) интересна также тем, что в ней может возникать аттрактор Лоренца [110]. Для классического аттрактора Лоренца [97], с помощью достаточно трудоемких методов интервальной арифметики [115] было показано, что при стандартных значениях параметров $\sigma = 10, \rho = 28, b = 8/3$ аттрактор Лоренца облада-

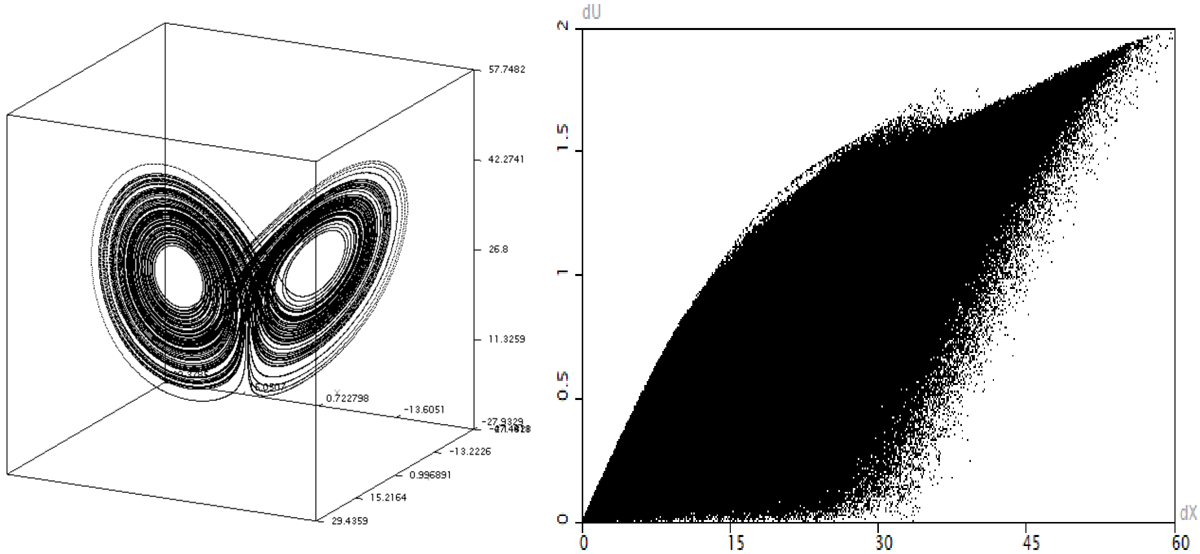


Рисунок 3.8: Аттрактор Лоренца системы Лоренца при значении параметров $\sigma = 10, \rho = 28, b = 8/3$ (слева) и соответствующий ему LMP-граф (справа).

ет псевдогиперболической структурой. Применим LMP-метод для данных значений параметров системы Лоренца, а также при значении параметра $\rho = 70$, соответствующего переходу от хаотической динамики к автоколебательным режимам.

На рис. 3.8 и 3.9 видно, что при стандартных значениях параметров, как и предполагалось аттрактор Лоренца является псевдогиперболическим. Однако, за границей существования при значении параметра $\rho = 70$, аттрактор теряет свойство псевдогиперболичности. Проведенное исследование в очередной раз доказывает состоятельность LMP-метода.

В Главе 2 были рассмотрены примеры странных гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых обобщенных отображениях Эно вида (2.1). В результате исследований, проведенных с использованием методов карт седел и обобщенных диаграмм показателей Ляпунова, удалось обнаружить следующие виды аттракторов:

- “Тонкий” неориентируемый аттрактор Лоренца.
- Неориентируемый восьмерочный аттрактор.
- Двойной неориентируемый восьмерочный аттрактор.
- Неориентируемый спиральный аттрактор.
- Неориентируемый аттрактор Шильникова.

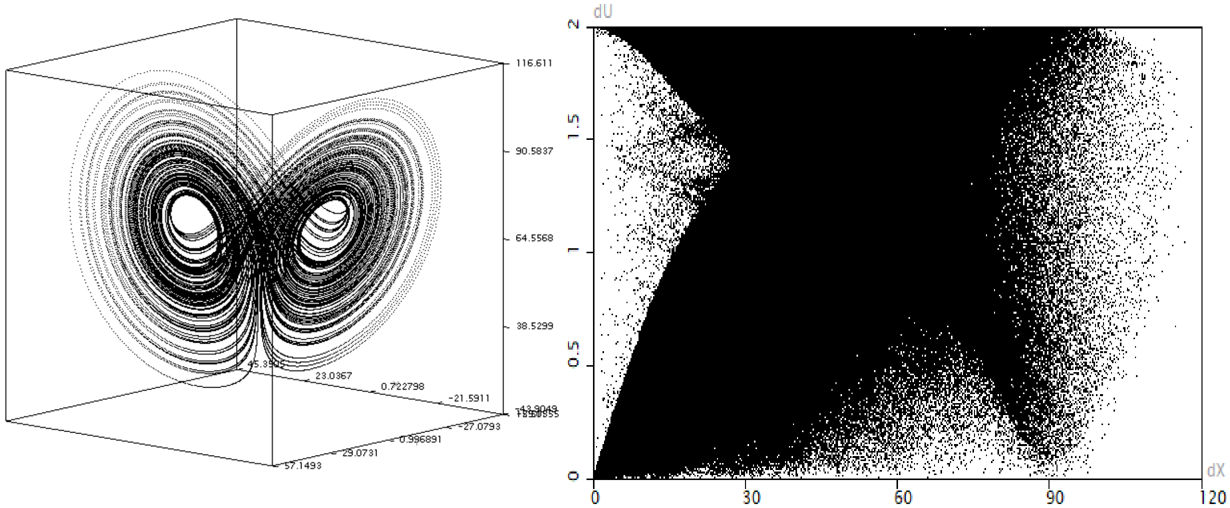


Рисунок 3.9: Аттрактор Лоренца системы Лоренца при значениях параметров $\sigma = 10, \rho = 70, b = 8/3$ (слева) и соответствующий ему LMP-граф (справа).

При этом для первых двух аттракторов выполнены необходимые условия псевдогиперболичности, накладываемые на значения ляпуновских показателей, которые, к сожалению, не выполняются для 3-го типа двойного неориентируемого восьмерочного аттрактора. Что касается последних двух аттракторов, то для них известно, что в силу наличия в системе неподвижной точки типа седло-фокус, в них неизбежно возникают устойчивые точки, пусть возможно и довольно больших периодов. Таким образом данные аттракторы спирального типа, по сути, являются квазиаттракторами. Поэтому разумным представляется проверка достаточных условий псевдогиперболичности лишь для первых двух из найденных аттракторов.

На рис. 3.10 представлен неориентируемый аттрактор Лоренца, а также LMP-граф. Исходя из полученных результатов, можно с уверенностью сказать, что данный аттрактор не является псевдогиперболическим, в силу нарушения условия непрерывности подпространства сильного сжатия.

Далее рассмотрим пример неориентируемого восьмерочного аттрактора. На рис. 3.11 приведено изображение данного аттрактора, а также его LMP-граф. Как и в случае с неориентируемым аттрактором лоренцевского типа, можно заметить, что рассматриваемый аттрактор не является “настоящим” в силу нарушения достаточных условий псевдогиперболичности.

Таким образом ни один из рассмотренных гомоклинических аттракторов семейства неориентируемых отображений (2.1) не является псевдоги-

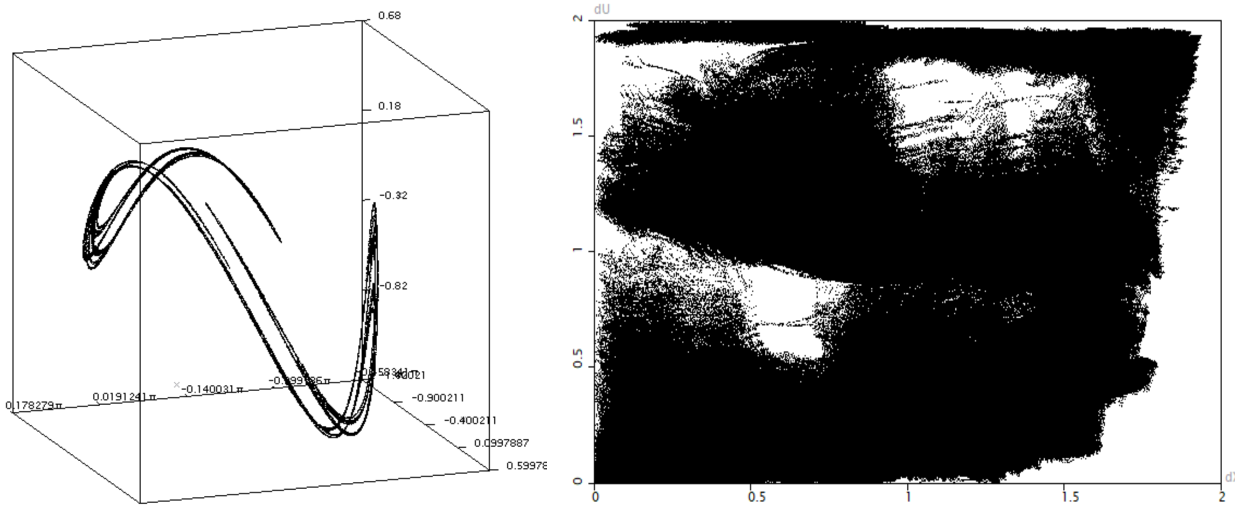


Рисунок 3.10: Неориентируемый аттрактор лоренцевского типа (слева) и LMP-граф (справа) для системы (2.2).

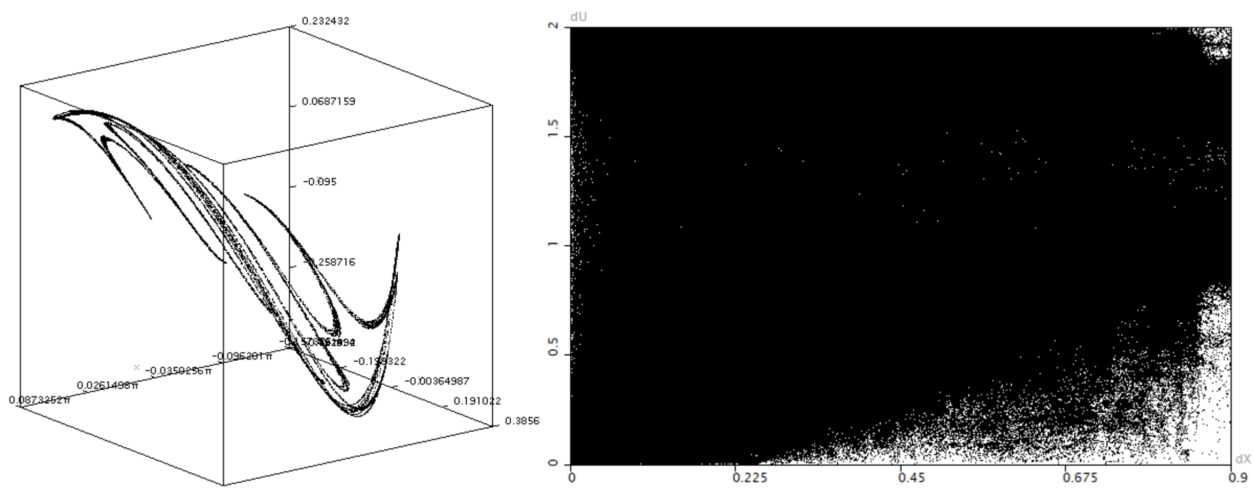


Рисунок 3.11: Неориентируемый восьмерочный аттрактор (слева) и LMP-граф (справа) для системы (2.3).

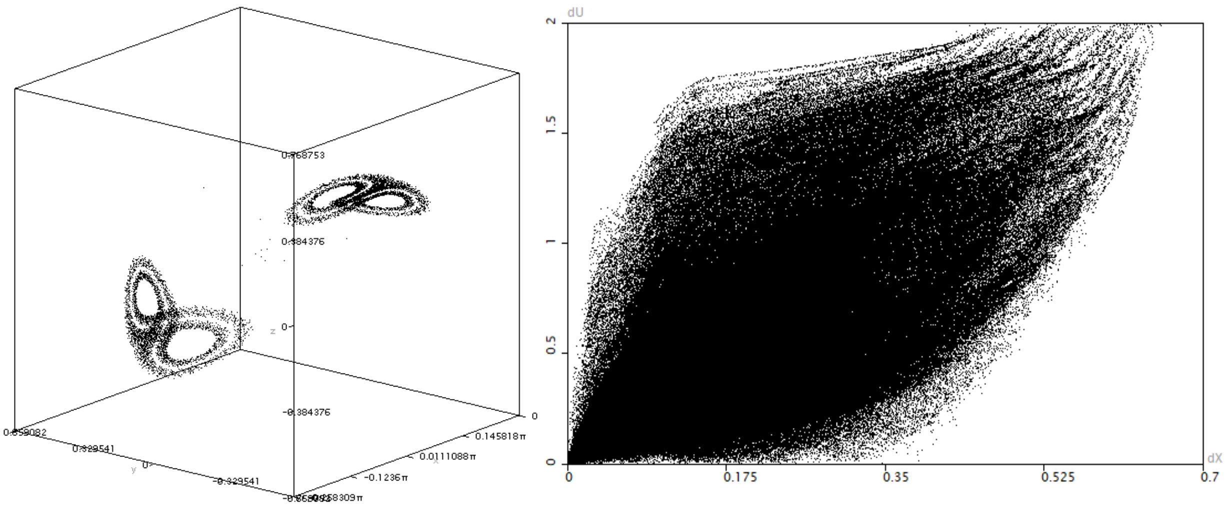


Рисунок 3.12: Аттрактор Лоренца периода 2 (слева) и его LMP-граф (справа).

перболическим. Однако, при исследовании данной системы удалось обнаружить некоторые другие аттракторы, возникающие из неподвижных точек периода 2. Одним из таких аттракторов является дискретный аттрактор Лоренца периода 2, который появляется в следующей системе:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - z^2 \tag{3.9}$$

Как было показано в работе [72], дискретный аттрактор Лоренца может обладать свойством псевдогиперболичности при некоторых значениях параметров. Поэтому целесообразным видится применение LMP-метода и в случае аттрактора Лоренца периода 2. Тот факт, что данный аттрактор не является гомоклиническим, никак не отражается на работе метода. Стоит заметить, однако, что в силу того, что рассматриваемый аттрактор является аттрактором периода 2, а также лоренцевского типа (неустойчивый мультипликатор его неподвижной точки является отрицательным, поэтому при итерациях отображения точки траектории прыгают с одной половины аттрактора на другую), для получения корректного результата при работе метода необходимо рассматривать каждую четвертую точку при итерациях обратного прохода метода проверки псевдогиперболичности.

На рис. 3.12 изображен внешний вид данного аттрактора, а также его LMP-граф. В данном случае, основываясь на результатах работы метода проверки псевдогиперболичности, можно сделать вывод о том, что сильно устойчивое многообразие данного аттрактора является непрерывным, а, следовательно, выполняются достаточные условия псевдогиперболичности, т.е. рассматриваемый аттрактор Лоренца периода 2 является *псевдогиперблическим.*

Еще одним примером негомоклинического аттрактора является так называемый аттрактор Симо, представленный в работе [87] и возникающий в трехмерном неориентируемом отображении Эно вида:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2 \tag{3.10}$$

Проверим также свойство псевдогиперболичности данного аттрактора, применив LMP-метод. На рис. 3.13 изображен внешний вид аттрактора Симо, а также его LMP-граф. Основываясь на результатах работы метода, можно сделать вывод о том, что для достаточно близких точек x_i и x_j одномерного сильно сжимающего многообразия $N_1(x)$, вектора $N_1(x_i)$ и $N_1(x_j)$ в данных точках имеют противоположное направление. Отсюда можно заключить, что пространство $N_1(x)$ не является непрерывным, поэтому достаточное условие псевдогиперболичности не выполняется.

Одними из наиболее интересных для исследования, конечно же, являются аттракторы систем из приложений, как, например, странные аттракторы неголономных систем моделей кельтского камня и вочка Чаплыгина, см. [72]. В данной работе было проведено исследование свойства псевдогиперболичности с использованием LMP-метода. На рис. 3.14 и рис. 3.15 показаны результаты этих исследований. В обоих случаях было показано, что аттрактор Лоренца в модели кельтского камня, а также восьмерочный аттрактор в модели волчка Чаплыгина с большой долей вероятности можно отнести к псевдогиперболическим аттракторам.

Таким образом, согласно проведенным исследованиям, можно сделать вывод о том, что далеко не все аттракторы известных систем можно отнести к настоящим, многие из них являются квазиаттракторами.

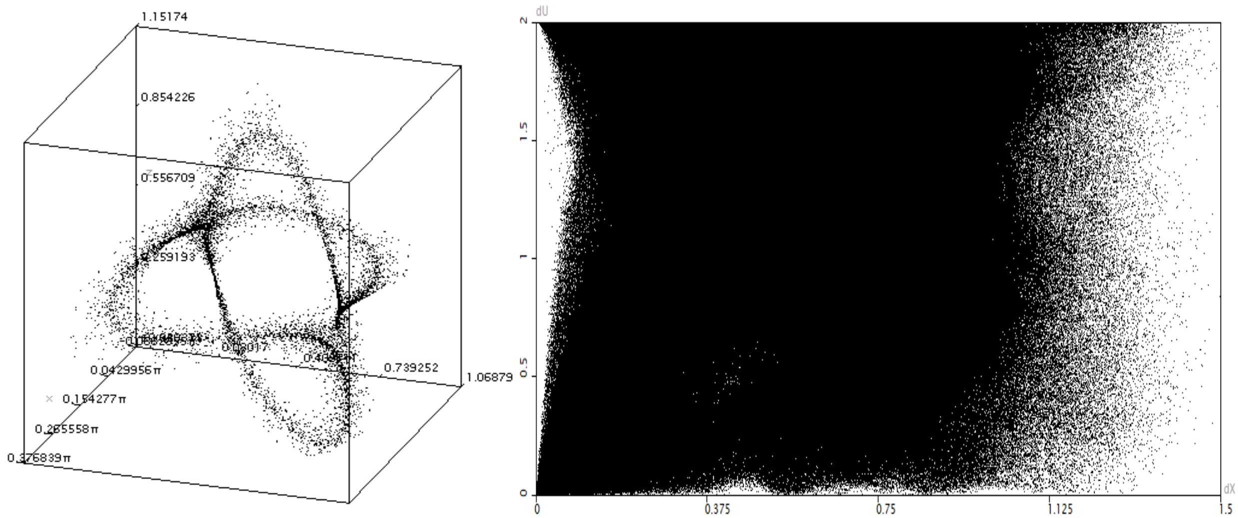


Рисунок 3.13: Аттрактор Симо системы (3.10) (слева) и его LMP-граф (справа).

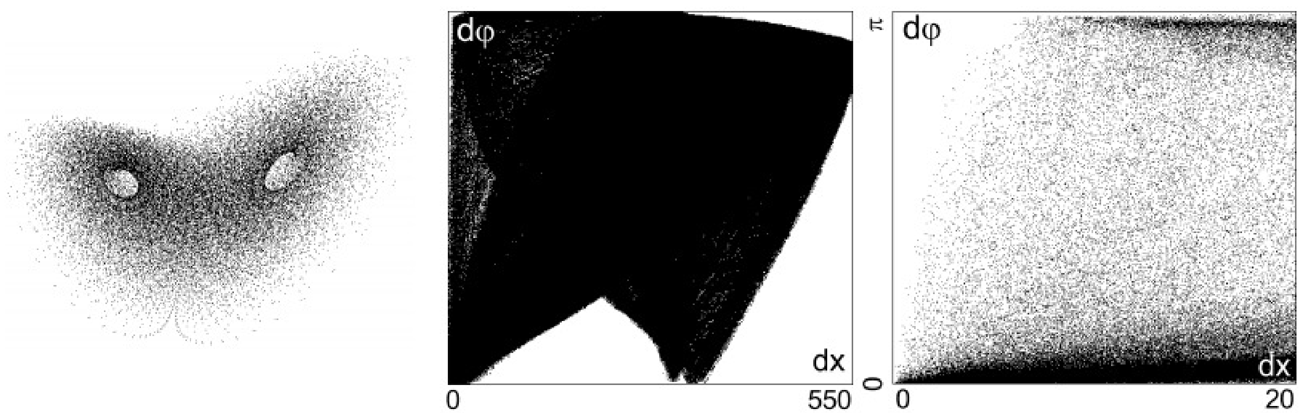


Рисунок 3.14: Аттрактор Лоренца в модели кельтского камня (слева), а также его LMP-граф и увеличенный фрагмент LMP-графа (справа).

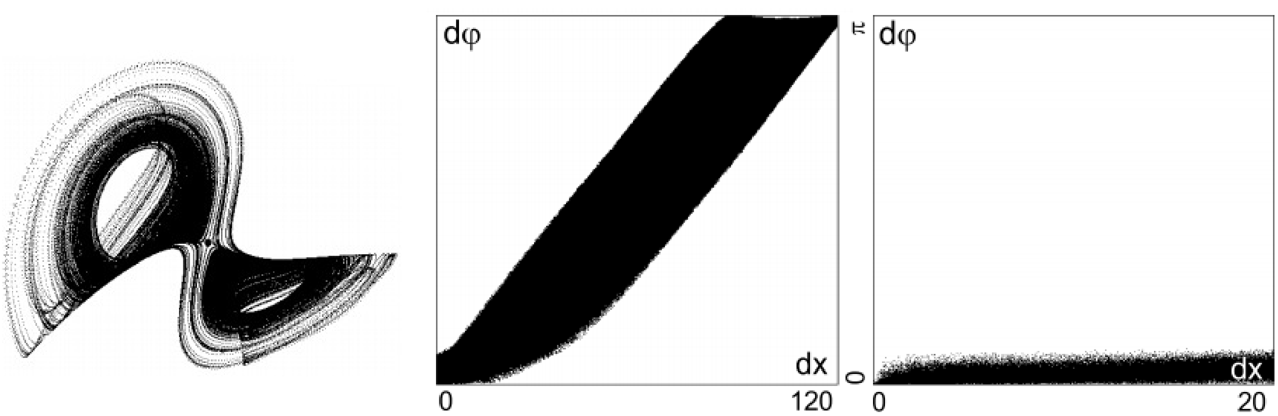


Рисунок 3.15: Восьмерочный аттрактор в модели волчка Чаплыгина (слева), а также его LMP-граф и увеличенный фрагмент LMP-графа (справа).

Глава 4

Странные гомоклинические аттракторы трехмерных потоков

В этой главе рассматриваются трехмерные потоки. Их хаотическая динамика к настоящему времени достаточно хорошо изучена, и ее обычно относят к маломерному хаосу, в отличие от многомерного, для которого размерность фазового пространства в случае потока должна быть не меньше 4. Однако и в трехмерном случае осталось много открытых проблем и появился целый ряд новых актуальных задач.[1]

Один из таких классов важных задач составляют задачи, связанные с построением новых эффективных методов нахождения странных аттракторов и исследованием их тонкой структуры. В частности, большой интерес представляют задачи, направленные на решение важного в теории динамических систем вопроса о различении аттракторов разных типов, в том числе и о классификации аттракторов. Последние задачи связаны, например, с тем общепринятым фактом, что странные аттракторы многомерных гладких динамических систем могут быть условно разделены на два класса: настоящие аттракторы и квазиаттракторы. Аттракторы обоих этих типов существуют и у трехмерных потоков. Классическими примерами настоящих странных аттракторов являются аттракторы Лоренца, а квазиаттракторов – спиральные аттракторы. Однако в целом граница между аттракторами этих двух типов является совершенно неопределенной: как отличить настоящий аттрактор от квазиаттрактора – это та задача, которая принципиально не допускает полного решения. С другой стороны, эта задача вполне решаема для многих частных случаев.

[1]В частности, это задачи, направленные на обобщение известных результатов. Например, в последнее время стала модной тематика, связанная с исследованием странных аттракторов, содержащих несколько состояний равновесия, в частности, т.н. мультиспирального хаоса, когда странный аттрактор содержит несколько чередующихся седло-фокусов типа (2,1) и (1,2), см., например, [98].

Так, с помощью методов интервальной арифметики и с применением вычислительной техники в работе Такера [115] была доказана гипотеза Смейла о том, что классический аттрактор Лоренца (существующий в модели Лоренца при классических значениях параметров $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$) является настоящим аттрактором, т.е. удовлетворяющим условиям геометрической модели Афраймовича-Быкова-Шильникова [5]. С другой стороны, например, все спиральные аттракторы, в том числе и мультиспиральные, трехмерных потоков являются квазиаттракторами. Последнее вытекает из теоретических результатов по исследованию бифуркаций многомерных систем с гомоклиническими петлями седло-фокусов, см., например, [29].

При изучении странных аттракторов, помимо развития их математической теории, важной также является задача их нахождения в конкретных системах. И здесь могут очень помочь новые методы их поиска, предложенные в настоящей главе. Это

- *метод карты седел*, позволяющий графически идентифицировать области значений параметров, отвечающих существованию состояний равновесия различных типов (седла и седло-фокусы типа (2,1) и (1,2) и с седловой величиной больше и меньше 1, устойчивые равновесия);
- *модифицированный метод диаграмм показателей Ляпунова*, позволяющий графически различать области значений параметров, отвечающих существованию регулярной и хаотической динамики.

Эти методы и их комбинация могут быть эффективно дополнены численным LMP-методом, приспособленным для трехмерных потоков, который применяется в том случае, когда неясно является ли рассматриваемый аттрактор настоящим аттрактором или квазиаттрактором. Отметим, что LMP-метод является достаточно простым в реализации и не требует использования сложной вычислительной техники – алгоритм его построения практически не отличается от случая трехмерных отображений, см. гл.1. Поэтому его применение видится более предпочтительным в отличие от методов интервальной арифметики, являющихся более требовательными к вычислительным ресурсам и рассчитанные на выполнение вычислений, для которых заранее трудно определить время, требуемое для выполнения расчетов. Таким образом, данный метод может применяться широким кругом исследователей.

В следующем параграфе мы даем описание метода карт седел применительно к трехмерным потокам. На его основании мы выясним, какие странные гомоклинические аттракторы возможны в этом случае, и в § 2 предложим обзор феноменологических сценариев, которые могут приводить к возникновению таких аттракторов в результате цепочек бифуркаций, начинающихся с потери устойчивости состояния равновесия. В § 3 будут построены конкретные примеры аттракторов, для нахождения которых мы использовали комбинацию метода карт седел и диаграмм показателей Ляпунова. Для найденного нами несимметричного аттрактора Лоренца мы также проверяем его псевдогиперболичность с помощью LMP-метода.

4.1 Метод карт седел для трехмерных потоков

Рассмотрим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = y + g_1(x, y, z), \\ \dot{y} = z + g_2(x, y, z), \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z), \end{cases} \tag{4.1}$$

где A, B и C – параметры системы, а $g_i, i = 1, 2, 3$ – нелинейные части, удовлетворяющие соотношениям

$$g_i(0,0,0) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial g_i}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial g_i}{\partial z}(0,0,0) = 0,\ i = 1, 2, 3. \tag{4.2}$$

Заметим, что у системы (4.1) состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ имеет дивергенцию равную C, а его характеристическое уравнение имеет вид:

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A = 0. \tag{4.3}$$

Стоит также отметить, что матрица линеаризации системы (4.1) представляет собой матрицу Фробениуса, соответственно, к ней можно свести любую систему, матрица линеаризации которой имеет $rank > 1$.

Для нахождения областей параметров, соответствующих возможному существованию странных гомоклинических аттракторов различных типов, по аналогии с методом описанным в главе 1, применим метод карт седел для потоковых систем. В данном случае суть его состоит в том, что для фиксированного значения дивергенции C на плоскости параметров (A, B) выделяются области, соответствующие различным наборам корней характеристического уравнения (4.3), определяющим тип состояния равновесия. При этом, учитываются следующие условия:

B1) Расположение собственных значений относительно мнимой оси: является ли точка O устойчивой или седловой типа (2,1) или (1,2).

B2) Являются ли собственные значения вещественными или комплексными, тем самым различаются седла и седло-фокусы.

B3) В случае (2,1) нужно указать больше или меньше нуля его седловая величина ν (сумма действительных частей устойчивого и неустойчивого собственного значения, ближайших к мнимой оси).

Мы всюду будем полагать, что $C < 0$, так как наша основная задача это все-таки – изучение странных аттракторов, содержащих состояние равновесия $O(0,0,0)$. Заметим, что системы вида (4.1) часто встречаются в приложениях, и более того, весьма популярными являются системы с постоянной дивергенцией – в нашем случае это такие, у которых $f \equiv 0, h \equiv 0$ и $g = g(x,y)$

Теорема 4.1. *Расширенная бифуркационная диаграмма (карта седел) состояния равновесия $O(0,0,0)$ на плоскости параметров A и B при каждом фиксированном $C < 0$ содержит 7 областей, отвечающих различным наборам, в силу условий B1)–B3), собственных значений точки O.*

4.1.1 Доказательство теоремы 4.1

Для начала выделим границы областей карты седел. Для этого докажем соответствующую лемму.

Лемма 4.1. *Границами областей на карте седел для системы* (4.1) *служат 4 основных кривых:*

$$\begin{array}{ll} (a) & L_\Delta: \;\; -4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 = 0 \;\; (\lambda_1 = \lambda_1), \\ (b) & L_0: \;\; A = 0 \;\; (\lambda = 0), \\ (c) & L_\phi: \;\; A + BC = 0 \;\; (\lambda = \pm i\varphi \text{ } \textit{при } A < 0, \lambda_1 = -\lambda_2 \text{ } \textit{при } A > 0) \\ (d) & L_\nu: \;\; 2C^3 - BC + A = 0, A > -C^3, B < C^2 \;\; (\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega, \gamma, \\ & \textit{где } \gamma > 0, \omega > 0) \end{array} \tag{4.4}$$

Доказательство. Первое уравнение представляет собой дискриминантную кривую, которая разделяет плоскость параметров на области, в которых

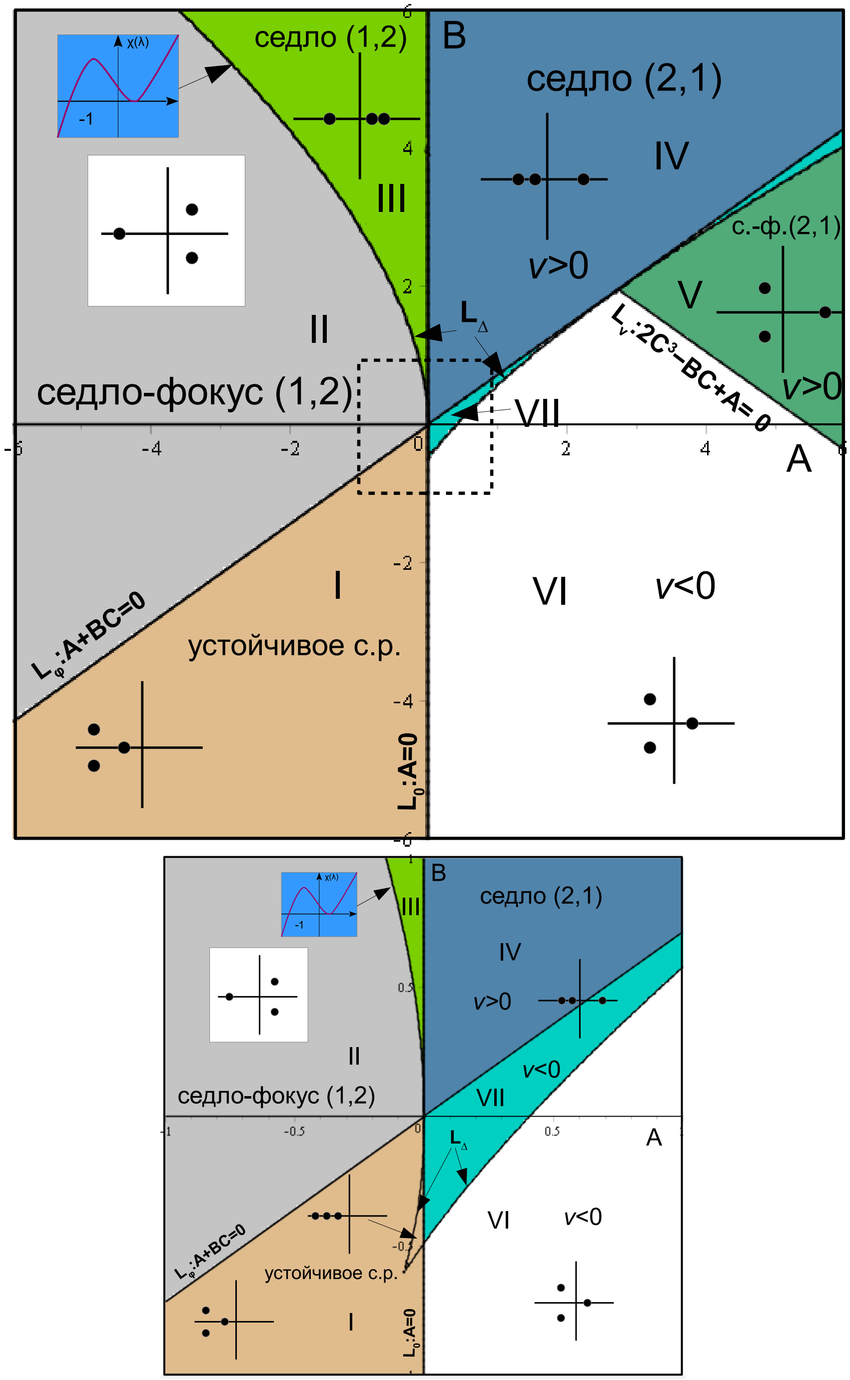


Рисунок 4.1: Карта седел для состояния равновесия $O(0,0,0)$ системы (4.1), при $C = -1.4$, а также её увеличенный фрагмент в окрестности точки $(0,0)$ на плоскости параметров (A, B).

характеристическое уравнение (4.3) имеет один действительный и два комплексных корня, и – только действительные корни. Получить данную кривую можно из условия, что на ней уравнение (4.3) имеет два кратных корня, т.е. в данном случе здесь выполняется условие, что

$$\chi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2C\lambda - B = 0, \tag{4.5}$$

корни которой в свою очередь равны

$$\lambda_{\pm} = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 3B}}{3} \tag{4.6}$$

Используя эти два равенства и уравнение (4.3), можно получить условие (a) леммы.

Второе уравнение (b) теоремы соответствует переходу действительного собственного значения через 0. Так как в системе (4.1) состояние равновесия $O(0,0,0)$ сохраняется, то этот момент соответствует так называемой бифуркации трансляции, когда равновесие сохраняется, но меняет свой тип за счет перехода собственного значения через ноль.

Третья прямая (c) отвечает тому, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ и, следовательно, $\lambda_3 = C$. При $A < 0$ эта кривая является бифуркационной. Здесь у равновесия $O(0,0,0)$ появляются чисто мнимые собственные значения $\pm i\omega$. При переходе через эту кривую происходит бифуркация Андронова-Хопфа (в общем случае из этой точки рождается предельный цикл, устойчивый или седловой, это зависит от нелинейностей). Само равновесие меняет свой тип от асимптотически устойчивого в обл. I на седло-фокус типа (1,2) в обл. II. Вторая полупрямая, $A = -BC$ при $A > 0$, получается из условия того, что седловая величина ν (сумма двух ближайших к мнимой оси собственных значений, одно из которых лежит слева от мнимой оси, а другое – справа) равна нулю. Соответственно, в области IV точка O является седлом типа (2,1) с $\nu > 0$.

Последняя прямая (d) также получается из условия равенства седловой величины нулю, однако в этом случае состояние равновесия O имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = C \pm i\omega$ и $\lambda_3 = -C$ (т.е. O – это седло-фокус типа (2,1)) с седловой величиной $\nu \equiv Re\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Соответственно, O является седло-фокусом типа (2,1) при значениях параметров из обл. V и VI, но в области V этот седло-фокус имеет $\nu > 0$ (выполняется условие Шильникова), а в области VI его седловая величина отрицательна. Лемма доказана.

На рисунке 4.1 изображена карта седел для системы (4.1) при $C = -1.4$. В области I состояние равновесия $O(0,0,0)$ является устойчивым. В остальных областях состояние равновесие $O(0,0,0)$ – седлового типа, и здесь могут существовать странные гомоклинические аттракторы, содержащие точку O. Из леммы 2.1 вытекает, что показанное на рис.4.1 разбиение на области качественно сохраняется при всех $C < 0$. Поэтому мы можем прогнозировать какого типа гомоклинические аттракторы могут существовать при значениях параметров A, B из этих областей. Особый интерес при этом представляют случаи, когда ожидаемый аттрактор является псевдогиперболическим.

Утверждение 4.1. *Пусть трехмерный поток вида* (4.1) *имеет странный псевдогиперболический аттрактор, содержащий состояние равновесия O при некотором $C < 0$. Тогда параметры A и B должны принадлежать только одной из областей III или IV.*

Необходимым условием псевдогиперболичности гомоклинического аттрактора является то, что состояние равновесия O само является псевдогиперболическим. Для областей III и IV это, очевидно, выполняется. Действительно, в области III точка O имеет собственные значения $\lambda_1 < 0 < \lambda_2 < \lambda_3$. Тогда подпространство $N^{ss}(O)$ – это собственное направление матрицы линеаризации потока, отвечающее собственному значению $\lambda_1 < 0$, а $N^{cu}(O)$ – это плоскость, натянутая на собственные вектора, отвечающие $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_3 > 0$. В области IV точка O имеет собственные значения $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$. Тогда подпространство $N^{ss}(O)$ – это собственное направление матрицы линеаризации потока, отвечающее собственному значению $\lambda_1 < 0$, а $N^{cu}(O)$ – это плоскость, натянутая на собственные вектора, отвечающие $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_3 > 0$. Поскольку $\lambda_1 < \lambda_2$ и $\nu = \lambda_2 + \lambda_3 > 0$, то условия 1)-5) определения 1.1 для $N^{ss}(O)$ и $N^{cu}(O)$ автоматически выполнены.

Если $(A, B) \in VII$, то, в отличие от области IV, здесь не выполняется условие растяжения площадей на $N^{cu}(O)$, поскольку $\nu = \lambda_2 + \lambda_3 < 0$.

Когда $(A, B) \in II, V, VI$, соответствующий гомоклинический аттрактор является спиральным, т.к. O является седло-фокусом. Хорошо известно, [29], что любой такой аттрактор является квазиаттрактором.[2] В области I равновесие O является асимптотически устойчивым. Теорема доказана.

Области I–VII определяются неравенствами в силу леммы 4.1:

1. **Область I.** Данная область определяется неравенствами: $A < 0, CB+$

[2]Такой аттрактор либо сам содержит устойчивые периодические траектории достаточно больших периодов, либо они возникают при сколь угодно малых возмущениях.

$A > 0$. Здесь точка O является асимптотически устойчивым состоянием равновесия.

2. **Область II.** Данная область определяется неравенствами: $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 < 0, A < 0, CB + A < 0$. Здесь точка O является седло-фокусом (1,2). Соответственно, ожидаемый здесь странный гомоклинический аттрактор – это аттрактор Шильникова, сценарий возникновения которого был описан в главе 1 (см. рис. 1.1).

3. **Область III.** Определяется неравенствами: $-4AC^3+B^2C^2-18ABC+4B^3 - 27A^2 > 0, A < 0$. В данной области точка O является седлом с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Существование странных гомоклинических аттракторов в данной области также возможно. Однако, поскольку у седла имеется неведущее неустойчивое собственное значение, то вдоль соответствующего направления траектории могут легко покинуть окрестность седла. Поэтому существование странного гомоклинического аттрактора, который можно назвать седловым аттрактором Шильникова, можно ожидать лишь для значений параметров вблизи границы между областями II и III. По-видимому, впервые такой аттрактор был численно найден в работе [58]. К сожалению, других самостоятельных примеров седлового аттрактора Шильникова найти не удалось.

4. **Область IV.** Данная область задается неравенствами: $0 < A < -CB$. В этой области точка O является седлом типа (2,1) с седловой величиной $\nu > 0$. Возникновение гомоклинического аттрактора здесь связано с образованием гомоклинических восьмерок седла. Однако, если неустойчивые сепаратрисы седла входят в него, касаясь ведущего устойчивого направления с разных сторон (обычная гомоклиническая восьмерка), то аттрактора нет, поскольку каждая из гомоклинических петель является неустойчивой на соответствующем C^1-гладком глобальном центральном инвариантном многообразии (в силу того, что $\nu > 0$). Существование аттрактора можно ожидать только в случае, когда у седла появляется гомоклиническая восьмерка-бабочка, то есть когда аттрактор является аттрактором лоренцевского типа. При этом такой аттрактор в случае системы (4.1) не является, вообще говоря, симметричным, так как сама система не обладает симметрией вида $x \to -x, y \to -y, z \to z$, характерной для системы Лоренца.[3]

[3]Однако, интересно, что саму систему Лоренца можно привести к виду (4.1), но соответствующая

5. **Область V.** Определяется следующими неравенствами: $-4AC^3+B^2C^2-18ABC+4B^3-27A^2<0, A>0, 2C^3-CB+A>0$. В этой области точка O является седло-фокусом типа (2,1) с $\nu>0$. Соответственно, здесь можно ожидать существование *спирального аттрактора*, даже симметричного, поскольку система (4.1) может допускать центральную симметрию (в случае когда нелинейности являются нечетными функциями координат).

6. **Область VI.** Задается неравенствами: $-4AC^3+B^2C^2-18ABC+4B^3-27A^2<0, A>0, 2C^3-CB+A<0$. Здесь точка O является также седло-фокусом (2,1), но уже с $\nu<0$. Как показано в [35], здесь даже при наличии гомоклинической восьмерки такого седло-фокуса структура множества траекторий в ее окрестности будет простой, т.е. ожидать существование странных гомоклинических аттракторов в этой области не стоит.

7. **Область VII.** Данная область задается неравенствами: $-4AC^3+B^2C^2-18ABC+4B^3-27A^2>0, A>0, A+CB>0$. В этой области точка O является седлом типа (2,1) с $\nu<0$. Здесь можно ожидать появление квазиаттракторов лорецевского типа (см., например, [33]), но в диссертации они не рассматриваются.

4.2 О феноменологических сценариях возникновения странных гомоклинических аттракторов в трехмерных потоках

По аналогии с описанием феноменологических сценариев для трехмерных отображений, которое дано в главе 1, мы можем также представить такие сценарии для трехмерных потоков.

Заметим, что *сценарий возникновения аттрактора Шильникова* был предложен в работе [44] (см. также главу 1 и рис. 1.1).

Сценарий возникновения симметричного аттрактора Лоренца был описан в работе [43] и схематично представлен на рис. 4.2. Аналогичный сценарий наблюдается также и в модели Шимицу-Мориока – другой известной модели, в которой существует аттрактор Лоренца – с одним только

линейная замена координат разрушает ее симметрию. Соответственно, область IV следует рассматривать как область (потенциального) существования *несимметричного аттрактора Лоренца*, содержащего состояние равновесия $O(0,0,0)$.

существенным отличием: состояния равновесия O_1 и O_2 претерпевают суперкритическую (мягкую) бифуркацию Андронова-Хопфа, и родившиеся из них устойчивые предельные циклы сливаются с седловыми циклами L_1 и L_2 и исчезают [110].

Сценарии возникновения несимметричного аттрактора Лоренца описываются аналогичным образом, но, естественно, с большим числом основных этапов, представленных схематически на рис. 4.2. Сценарий начинается с того, что имеется единственное устойчивое состояние равновесия O_1, рис. 4.2a. Равновесия O и O_2 появляются в результате седло-узловой бифуркации, рис. 4.2b. После этого одна из неустойчивых сепаратрис Γ_1 идет на O_1, а другая Γ_2 – на O_2, рис. 4.2c,d. При дальнейшем изменении параметра сначала одна из сепаратрис образует гомоклиническую петлю, а затем – другая, рис. 4.2e,f. Поскольку $\nu > 0$ из этих петель рождаются последовательно седловые предельные циклы L_1 и L_2, а Γ_1 и Γ_2 последовательно ложатся на их устойчивые многообразия,рис. 4.2 f–k. После этого образуется аттрактор Лоренца, и он становится единственным притягивающим инвариантным множеством после того, как равновесия O_1 и O_2, опять же последовательно, теряют устойчивость, рис. 4.2l.

Пример реализации такого сценария для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x-y) \\ \dot{y} = x(r-x) - y + R \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \tag{4.7}$$

из работы [111] показан на рис. 4.4, где в качестве параметра рассматривается r. Заметим, что система (4.7) отличается от системы Лоренца тем, что в нее введен новый параметр R, который разрушает симметрию. На рис. 4.4 этапы возникновения несимметричного аттракторы Лоренца показаны при $\sigma = 10, b = 8/3, R = 1$ и варьировании параметра r. Как можно заметить, они находятся в соответствии с общей схемой сценария, описанного выше. При этом основные бифуркационные значения параметра r – следующие:

- $r = r_1 \approx 2.363$ – седло-узловая бифуркация состояния равновесия;
- $r = r_2 \approx 13.431$ – появляется первая гомоклиническая петля у седлового состояния равновесия;
- $r = r_3 \approx 14.408$ – появляется вторая гомоклиническая петля у седлового состояния равновесия;

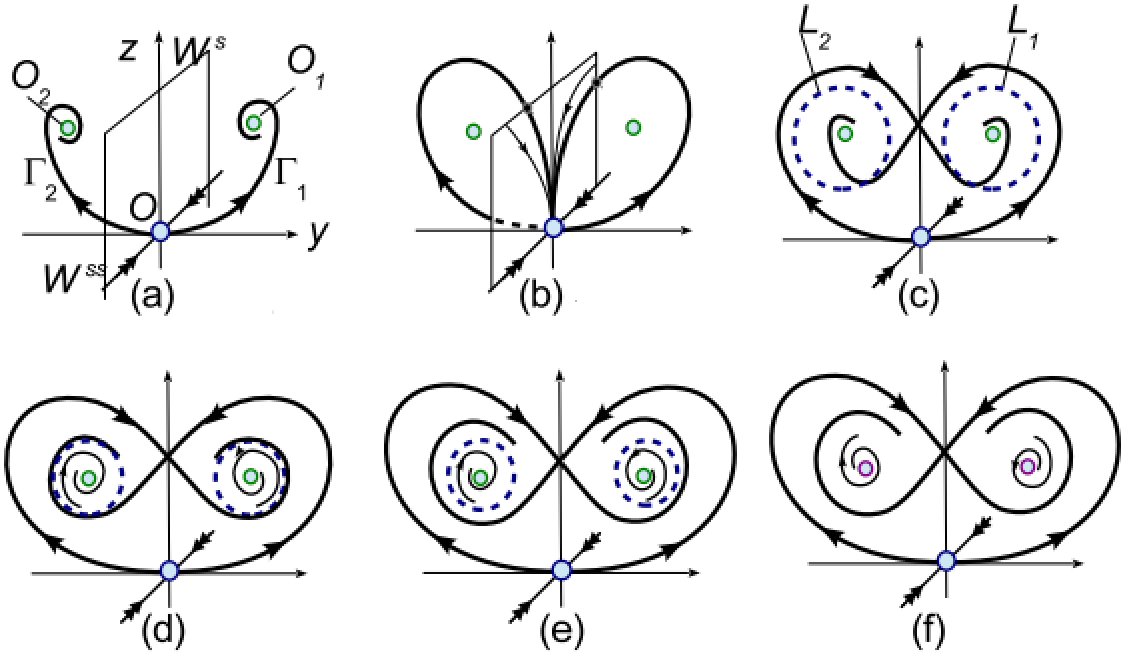


Рисунок 4.2: Основные этапы сценария возникновения аттрактора Лоренца по работе [43]. (a) В результате симметричной бифуркации типа “вилка”, первоначально устойчивое состояние равновесия становится седловым типа (2,1), и в его окрестности рождаются два устойчивых состояния равновесия O_1 и O_2; (b) Обе неустойчивые сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 входят в O, образуя гомоклиническую конфигурацию “восьмерку-бабочку”; (c) Происходит разрушение восьмерки: из нее рождаются два симметричных седловых цикла L_1 и L_2, а сепаратрисы перестраиваются: Γ_2 наматывается на O_1, а Γ_1 – на O_2; (d) Момент образования аттрактора Лоренца – когда сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 ложатся на устойчивые многообразия циклов L_1 и L_2, соответственно; (e) После этого Γ_1 и Γ_2 уже остаются в аттракторе; здесь система мультистабильна: аттрактор Лоренца сосуществует с двумя устойчивыми состояниями равновесия O_1 и O_2; (f) Равновесия O_1 и O_2 теряют устойчивость в результате субкритической (жесткой) бифуркации Андронова-Хопфа: седловые циклы L_1 и L_2 влипают в равновесия O_1 и O_2, которые становятся седло-фокусами. После этого аттрактор Лоренца становится единственным притягивающим инвариантным множеством.

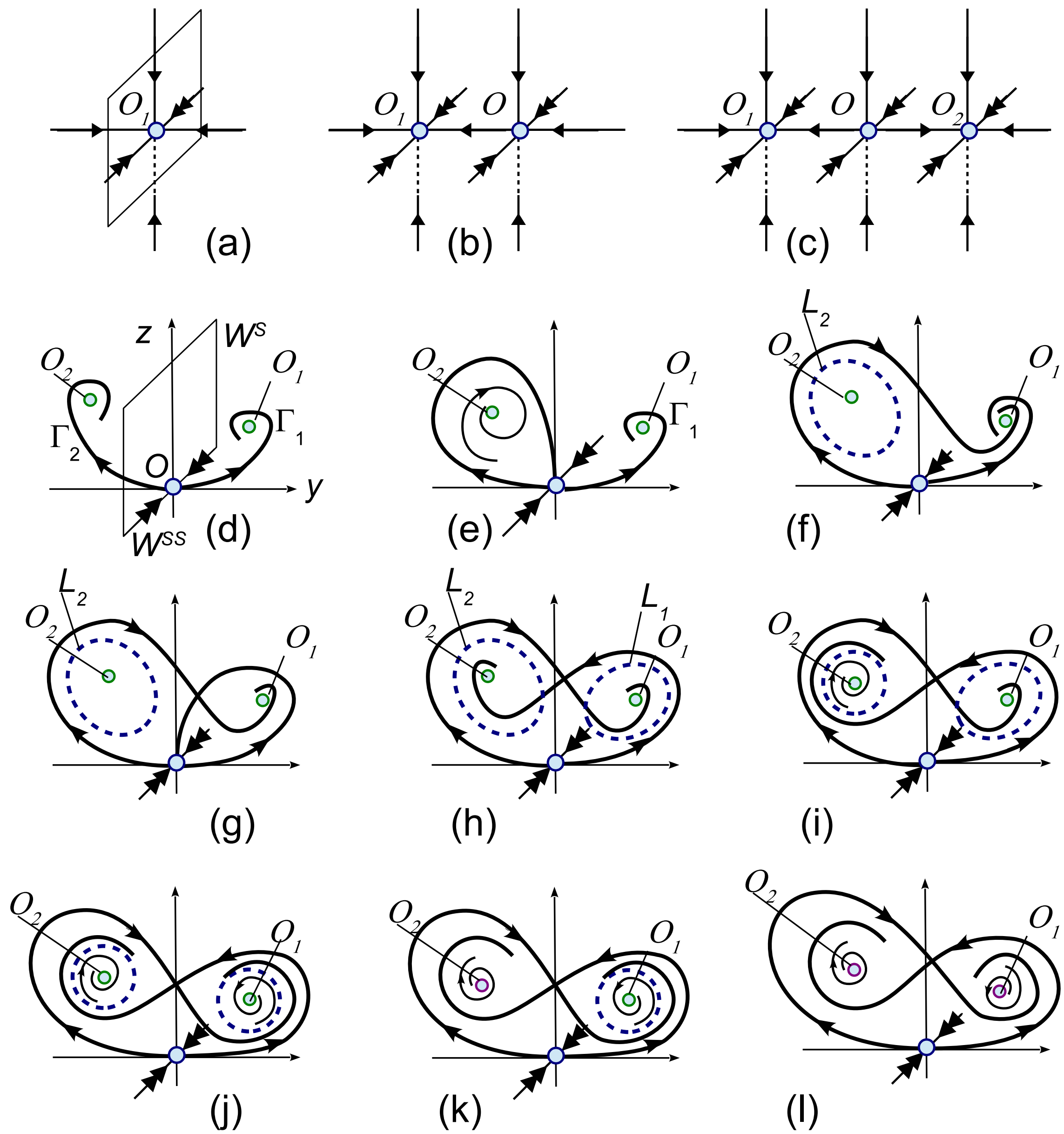


Рисунок 4.3: Основные этапы сценария возникновения несимметричного аттрактора Лоренца.

- $r = r_4 \approx 24.929$ – образование аттрактора Лоренца;

а этапы сценария – такие, как показано на рис. 4.4.

При $r < r_1$ в системе имеется единственное ассимтотически устойчивое состояние равновесия O_1. Затем при $r > r_1$ появляются еще два состояния равновесия – седло O и устойчивый узел O_2 (рис. 4.4a-c): неустойчивая сепаратриса Γ_1 идет в O_1, а Γ_2 – в O_2. При $r = r_2$ сепаратриса Γ_1 образует гомоклиническую петлю седла O (рис. 4.4d), а при $r > r_2$ она начинает наматываться на O_2 (рис. 4.4e). При $r = r_3$ уже сепаратриса Γ_1 образует петлю седла O (рис. 4.4f), а при $r > r_3$ она наматывается на O_1 (рис. 4.4g). Заметим, что при $r = 24$ равновесие O_1 уже седло-фокус, а O_2 – еще устойчивый фокус (рис. 4.4h), а при $r > r_4$ равновесие O_2 тоже становится седло-фокусом, и возникает несимметричный аттрактор Лоренца (рис. 4.4i).

Сценарий возникновения спирального аттрактора, связанного с существованием гомоклинических петель седло-фокуса (2,1), проще всего представить в симметричном случае, например, в случае системы вида (4.1) с центральной симметрией $x \to -x, y \to -y, z \to -z$.

Сначала такая система имеет асимптотически устойчивое состояние равновесие O(0,0,0). Затем, при изменении параметра, это равновесие теряет устойчивость типично в результате симметричной бифуркации вилки: точка O становится седлом типа (2,1) а в ее окрестности рождаются два симметричных устойчивых состояния равновесия O_1 и O_2. В какой-то момент седло O становится седло-фокусом типа (2,1), а также равновесия O_1 и O_2 становятся устойчивыми фокусами. Тогда неустойчивые сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 начинают накручиваться по спиралям на O_1 и O_2 соответственно. Размах этого "накручивания" может увеличиваться по разным причинам (например из равновесий O_1 и O_2 в результате мягкой бифуркации Андронова-Хопфа рождаются устойчивые предельные циклы, размеры которых увеличиваются; циклы сами могу бифурцировать различным способом, вплоть до возникновения странных аттракторов и т.п.). При этом важно, что здесь могут образовываться гомоклинические петли седло-фокуса O. В случае, когда $\nu > 0$, по теореме Шильникова [37] в окрестности петли будет иметь место сложная структура траекторий. Это еще не гарантирует возникновение спирального аттрактора, поскольку эта сложная структура может быть еще непритягивающей (как и в модели Лоренца возникновение гомоклинической восьмерки-бабочки еще не означает рождение аттракто-

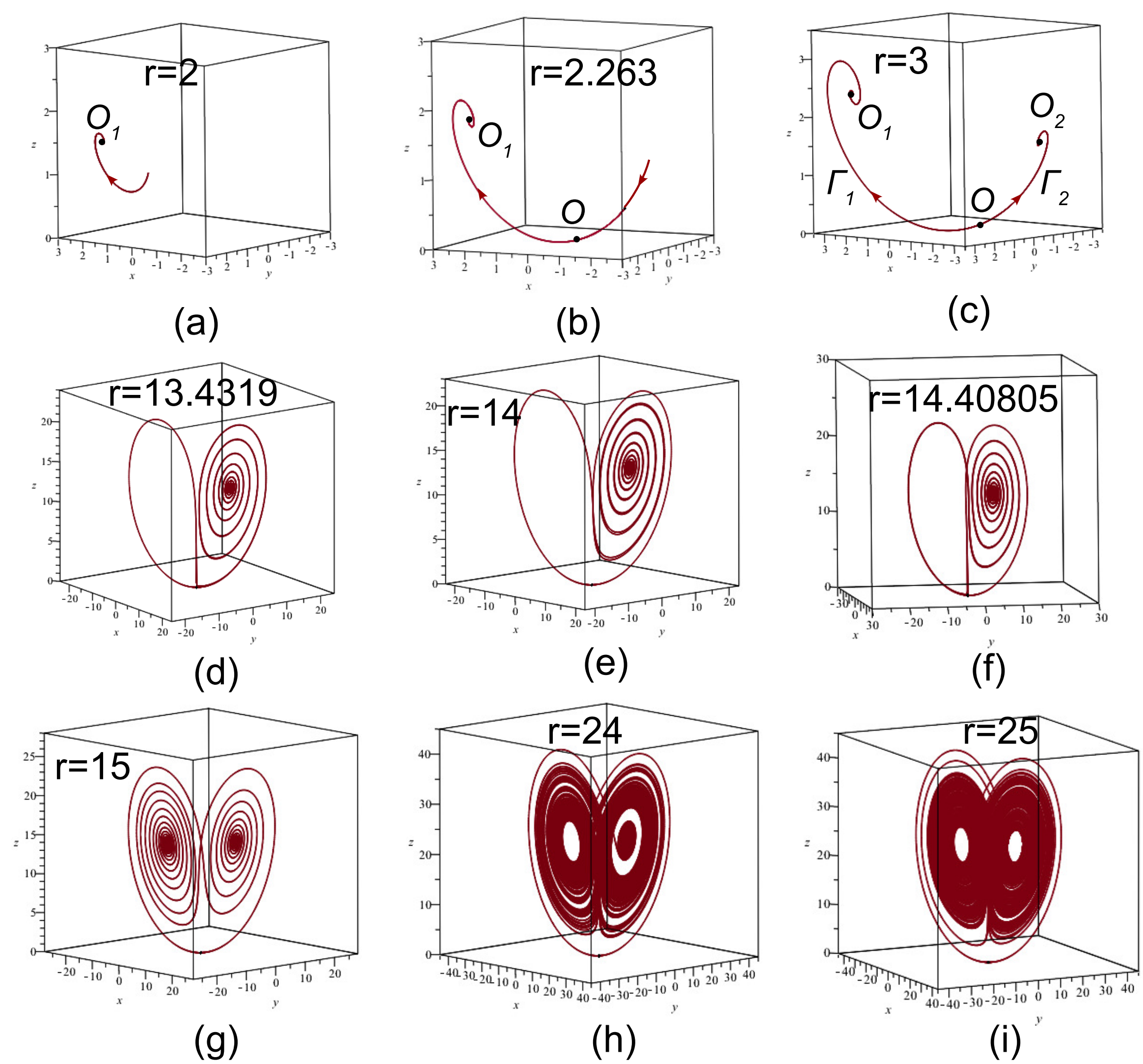


Рисунок 4.4: Визуализация феноменологического сценария возникновения несимметричного аттрактора Лоренца в системе (4.7)

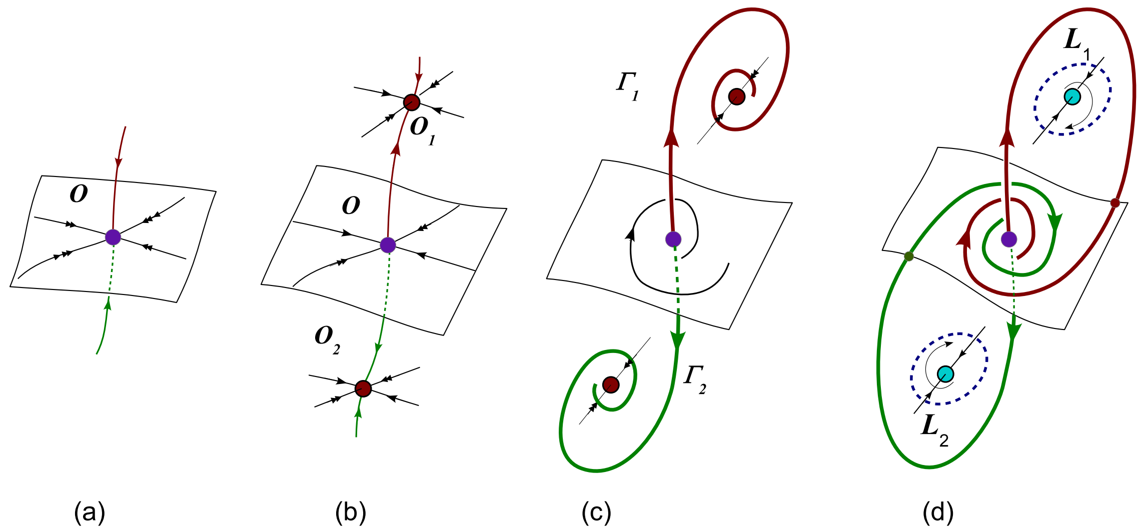


Рисунок 4.5: Основные этапы сценария возникновения спирального аттрактора.

ра), в силу того, что первоначально система была мультистабильной. [4] Но при дальнейшем изменении параметра может возникать восьмерочный аттрактор. Пример сценария возникновения спирального аттрактора можно увидеть на рис. 4.6.

В случае несимметричного спирального аттрактора структура сценария его возникновения в основных деталях такая же с учетом очевидных изменений в цепочках бифуркаций – они несимметричны (седло-узловая бифуркация $\longrightarrow$ образование одной петли $\longrightarrow$ образование второй петли и т.д.), см. рис 4.5.

4.3 Примеры странных гомоклинических аттракторов трехмерных потоков

Здесь мы рассмотрим конкретные примеры систем вида (4.1) со странными аттракторами следующих типов: аттрактор Шильникова, спиральный аттрактор и несимметричный аттрактор Лоренца. Для первых двух аттракторов известно, что они являются квазиаттракторами, тогда как несимметричный аттрактор Лоренца может быть псевдогиперболическим. Поэтому

[4] Например, в осцилляторной системе Арнеодо-Колле-Трессе с центральной симметрией [48] сложная структура, возникающая в результате петли к седло-фокусу (2,1) становится притягивающей после столкновения аттракторов Шильникова, возникающих из устойчивых фокусов O_1 и O_2 согласно сценарию Шильникова [44] с двумерным устойчивым многообразием седло-фокуса (2,1).

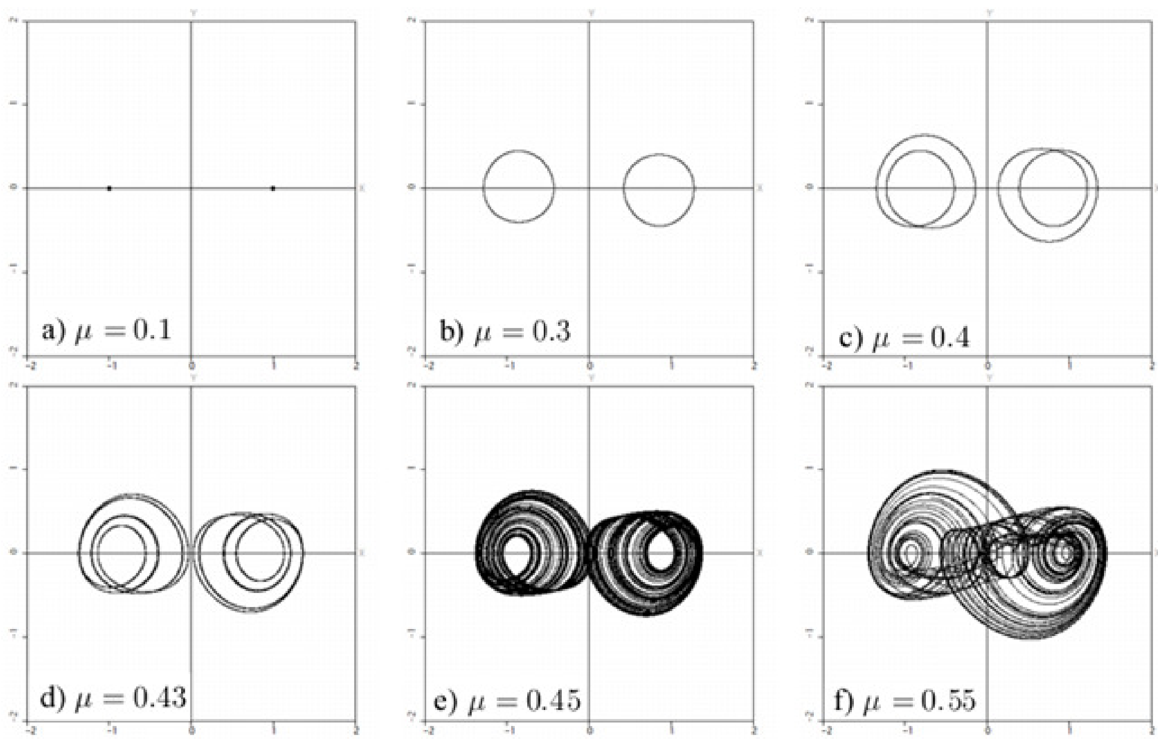


Рисунок 4.6: Пример реализации сценария возникновения спирального аттрактора в системе Арнеодо-Колле-Трессе [48] с центральной симметрией: a) В результате симметричной бифуркации типа "вилка", первоначально устойчивое состояние равновесия становится седловым типа (2,1), и в его окрестности рождаются два устойчивых состояния равновесия O_1 и O_2; b) В результате бифуркации Андронова-Хопфа состояния O_1 и O_2 становятся седло-фокусами, а в их окрестностях рождаются устойчивые предельные циклы; c)-e) Предельные циклы в окрестности седло-фокусов O_1 и O_2 претерпевают каскад бифуркаций удвоейния, образуя несвязные странные аттракторы; f) Неустойчивые многообразия образовавшихся аттракторов пересекаются с устойчивым многообразием седло-фокуса O, формируя спиральный аттрактор.

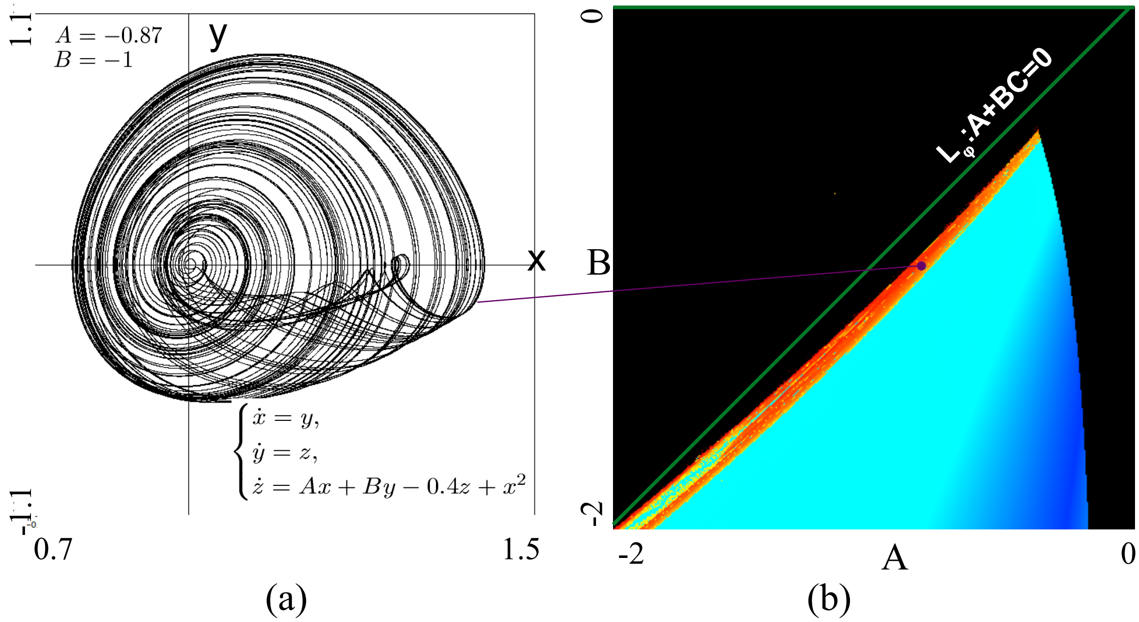


Рисунок 4.7: Пример аттрактора Шильникова и карта показателей Ляпунова для системы (4.8).

мы для него делаем также проверку на эту псевдогиперболичность с помощью LMP-метода.

4.3.1 Примеры спиральных аттракторов трехмерных потоков

На рис. 4.7a показан пример аттрактора Шильникова у системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + x^2, \end{cases} \tag{4.8}$$

при $C = -0.4, A = -0.87, B = -1$.

На рис. 4.7b на плоскости параметров A и B при $C = -0.4$ показаны диаграмма показателей Ляпунова и элементы карты седел для состояния равновесия $O(0,0,0)$ в случае системы (4.8). Заметим, что значения параметров $(A = -0.87, B = -1)$ выбраны нами в силу того, что соответствующая точка (A, B) принадлежит одновременно и области II карты седел и красной области диаграммы Ляпунова (отвечающей хаосу).

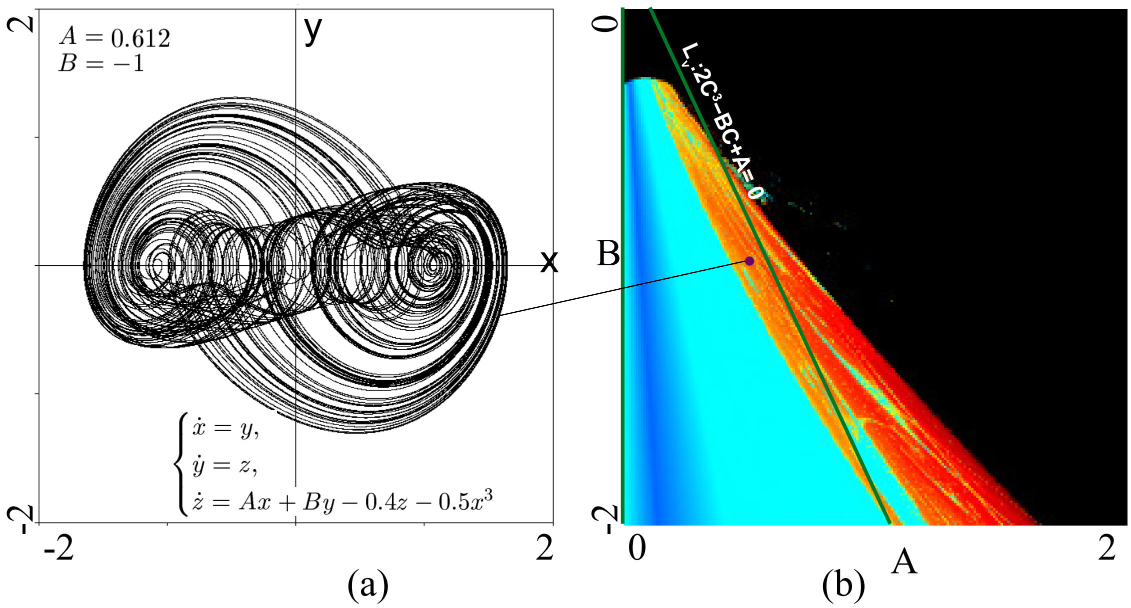


Рисунок 4.8: Пример спирального аттрактора и карта показателей Ляпунова для системы (4.9).

На рис. 4.8a показан пример спирального аттрактора у системы:

$$
\begin{cases}
\dot{x} = y, \\
\dot{y} = z, \\
\dot{z} = Ax + By + Cz - 0.5x^3,
\end{cases}
\tag{4.9}
$$

при $C = -0.4, A = -0.612, B = -1$.

На рис. 4.8b на плоскости параметров A и B при $C = -0.4$ показаны диаграмма показателей Ляпунова и элементы карты седел для состояния равновесия $O(0,0,0)$ в случае системы (4.9). Можно увидеть, что точка $(A = -0.87, B = -1)$ выбрана нами, поскольку она принадлежит одновременно и области VII карты седел и красной области диаграммы Ляпунова.

Отметим, что системы (4.8) и (4.9) были предложены в работе [50] как сравнительно простые трехмерные системы, демонстрирующие спиральный хаос.

4.3.2 Примеры несимметричных аттракторов Лоренца

Пример системы вида (4.1) с несимметричным по форме аттрактором Лоренца можно, формально, придумать, если взять саму систему Лоренца и привести ее к виду (4.1). Однако, по вполне понятным причинам, это не будет настоящий несимметричный аттрактор. Пример настоящего несимметричного аттрактора Лоренца дает система вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (0.2xy + 0.3xz + 0.5y^2 + 1.2yz + 0.7z^2) \\ \dot{y} = z + (-0.1x^2 - 0.6xy - 0.7xz + 0.3y^2 + 0.6yz + 0.4z^2) \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + (0.1x^2 + 0.5xy + 0.6xz - 0.3y^2 - 0.7yz - 0.4z^2) \end{cases} \tag{4.10}$$

Она имеет достаточно сложный вид, но правыми частями у нее являются квадратичные полиномы. Они были сконструированы нами в процессе подбора коэффициентов с целью получения в области V карты седел (которая не менялась при варьировании нелинейностей) участков хаоса с гомоклиническим аттрактором на диаграмме Ляпунова.

На рис. 4.9a для приведенной системы уравнений изображена диаграмма максимального показателя Ляпунова на плоскости параметров (A, B) при $C = -1.4$. Для удобства, на диаграмме нарисованы границы l_1 и l_2 области IV карты седел. На этой карте область, отвечающая положительному максимальному показателю Ляпунова (желто-красная) пересекается с областью IV. Для одной из точек $(A = 0.42, B = 0.58)$ общей для этих областей на рисунке 4.9b показан фазовый портрет соответствующего аттрактора, при значениях параметров $A = 0.42, B = 0.58$.

Изображенный аттрактор действительно похож на аттрактор Лоренца. Он содержит состояние равновесия $O(0,0,0)$ с собственными значениями $\lambda_1 = 0.57, \lambda_3 = -0.32, \lambda_3 = -1.64$, а его седловая величина $\nu = \lambda_1 + \lambda_2 = 0.25$ положительна, что характерно для аттракторов Лоренца.[5]

Для проверки псевдогиперболичности несимметричного аттрактора Лоренца, изображенного на рис. 4.9b, был использован численный LMP-метод. На рис. 4.10 показан LMP-граф, полученный с помощью этого метода. Здесь видно, что огибающая точек LMP-графа пересекает ось $d\varphi$ только в начале координат плоскости $(dx, d\varphi)$ – это означает, что рассматриваемый аттрактор является псевдогиперболическим (с учетом того, что соответствующие условия проверялись численно). Более того, по увеличенному фрагменту диаграммы старшего показателя Ляпунова, см. рис. 4.9c, можно сделать вывод, что в окрестности исследуемого аттрактора не возникает окон устойчивости, что свидетельствует о том, что при малых возмущениях псевдогиперболичность аттрактора сохраняется.

[5] Тот факт, что точка $O(0,0,0)$ принадлежит аттрактору, проверялся численно: было показано, что минимальное расстояние от траекторий на аттракторе до точки $O(0,0,0)$ было меньше, чем 10^{-4} – величина, которую мы принимаем как вполне подходящую, чтобы считать аттрактор гомоклиническим.

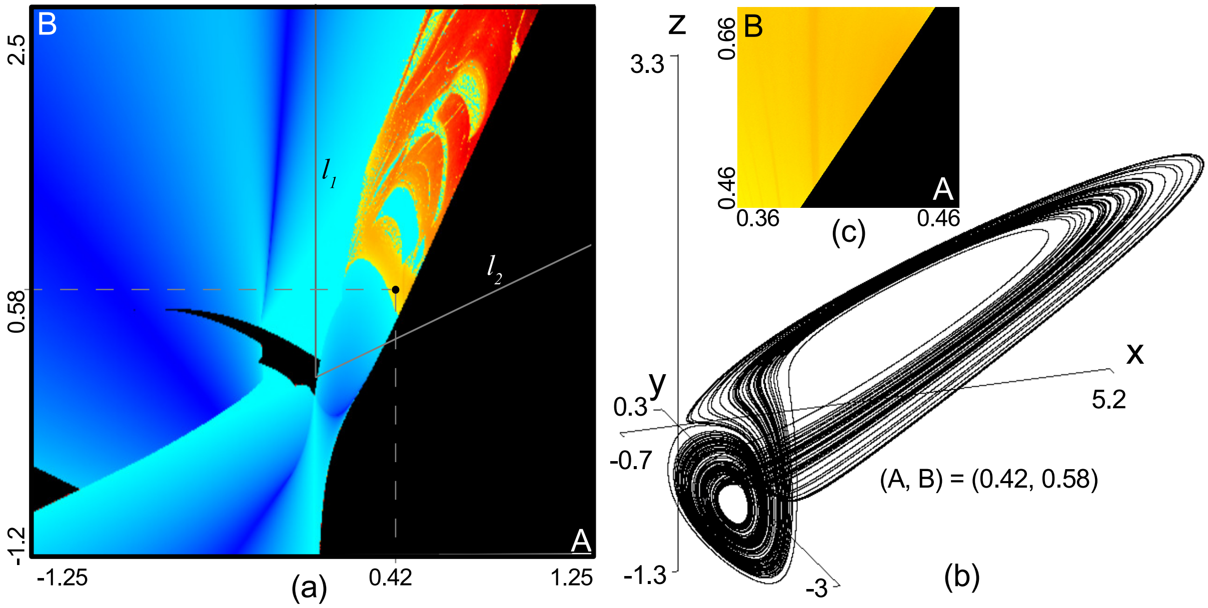


Рисунок 4.9: (a) Фрагмент диаграммы показателей Ляпунова (желто-красная область соответствует положительному старшему показателю Ляпунова) для системы (4.10) при $C = -1.4$. (b) Портрет аттрактора системы при $A = 0.42, B = 0.58, C = -1.4$. (c) Увеличенный фрагмент диаграммы показателей Ляпунова вблизи точки на плоскости параметров, соответствующей найденному аттрактору

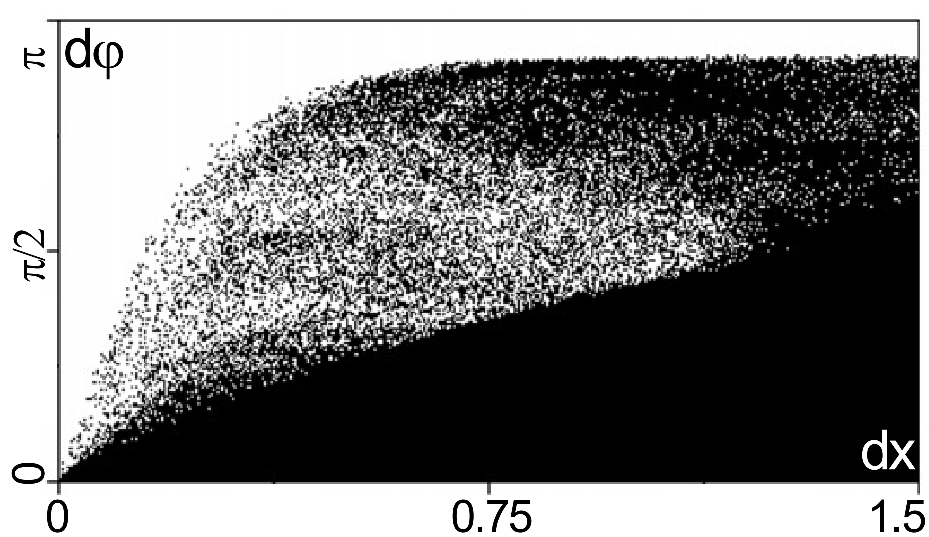


Рисунок 4.10: LMP-граф для несимметричного аттрактора Лоренца.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Для однопараметрических семейств трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов построены новые универсальные сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов. Даны примеры реализации этих сценариев в случае трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно.

2. Дана классификация дискретных неориентируемых странных гомоклинических аттракторов по типу структуры их однообходных гомоклинических траекторий. Выделены следующие классы таких аттракторов: дискретные аттракторы Лоренца, восьмерочные аттракторы, спиральные аттракторы, аттракторы Шильникова, двойные аттракторы Лоренца, двойные восьмерочные аттракторы.

3. Метод карт седел, направленный на эффективный поиск дискретных гомоклинических аттракторов заданных типов, обобщен на случай трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов.

4. Доказаны теоремы о бифуркации удвоения замкнутой инвариантной кривой в случае трехмерного неориентируемого отображения и показано их приложение к феноменологическому описанию дискретных неориентируемых аттракторов Шильникова.

5. В семействах трехмерных обобщенных неориентируемых отображений Эно найдены странные гомоклинические аттракторы различных типов, построены феноменологические сценарии их возникновения, а также предложен простой способ их классификации с помощью "примитивных" гомоклинических структур. В семействах черырехмерных обобщенных неориентируемых отображений Эно при малом значении якобиана обнаружены аналоги аттракторов, возникающих у трехмерных неориентируемых отображений.

6. Построена модификация метода численной проверки необходимых условий псевдогиперболичности странных гомоклинических аттракторов многомерных систем (диффеоморфизмов и потоков), не требующего построения уравнений в вариациях.

7. Рассмотренные в диссертации качественные методы распространены на случай трехмерных потоков, с которыми, кроме того, также проведен ряд численных экспериментов. В частности, найден новый пример системы с сильно несимметричным аттрактором Лоренца

Возможные дальнейшие перспективы развития тематики диссертационного исследования состоят в аппробации результатов исследования трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов, а также использование данных результатов для исследования систем большей размерности.

Другие возможные перспективы исследования состоят в дальнейшем улучшении метода проверки псевдогиперболичности странных аттракторов, а именно добавление в него средств для одновременной проверки непрерывности как подпространства E^{ss}, так и подпростанства E^{cu}, а также проверки углов между касательными к этим пространствам. Кроме того, перспективным видится создание инструмента, позволяющего на плоскости параметров системы строить карты псевдогиперболических аттракторов.

В заключение автор выражает благодарность и большую признательность научному руководителю Гонченко С.В. за поддержку, помощь, обсуждение результатов и научное руководство. Автор благодарит сотрудников кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского и кафедры фундаментальной математики Высшей Школы Экономики за конструктивную критику, а также лично Лермана Л.М., Морозова А.Д., Гринеса В.З., Починку О.В, Казакова А.О. Автор также благодарит Кротова Н.В и Козичеву М.С. за помощь в оформлении документов и всех, кто сделал настоящую работу автора возможной.

Список литературы

[1] Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 1967. – Т. 90. – С. 3-210.

[2] Анищенко В.С. Флуктуационные явления в физических системах //III Всесоюзная конференция, 28-29 сентября 1982. Вильнюс: Изд-во АН ЛитССР. - 1983. - С. 24.

[3] Анищенко В.С., Николаев С.М. Генератор квазипериодических колебаний. Бифуркация удвоения двумерного тора //Письма в ЖЭТФ. - 2005. - Т. 31. - вып. 19. - С. 88.

[4] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О существовании устойчивых периодических движений в модели Лоренца //Избранные научные труды. – 1960. – С. 412.

[5] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца //Труды Московского математического общества. – 1982. – Т. 44. – С. 150-212.

[6] Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел //Избранные научные труды. – 1974. – Т. 219. – №. 6. – С. 278.

[7] Афраймович В. С., Шильников Л. П. Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем //ПММ. – 1977. – Т. 41. – С. 618-627.

[8] Афраймович В. С., Шильников Л. П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность //Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький. – 1983. – С. 3-26.

[9] Быков В.В., Шильников А.Л. О границах областей существования аттрактора Лоренца //Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький. – 1989. – С. 151-159.

[10] Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой //Часть 1. – Математический сборник. – 1972. – Т. 88. – №. 4. – С. 475-492; Часть 2. – Математический сборник. – 1973. – Т. 90. – №. 1. – С. 139-156.

[11] Гонченко А. С., Козлов А. Д. О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях //Журнал Средневолжского математического общества. – 2016. – Т. 18. – №. 4. – С. 17-29.

[12] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Казаков А. О., Козлов А. Д. Математическая теория динамического хаоса и её приложения: Обзор. Часть 1. Псевдогиперболические аттракторы //Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2017. – Т. 25. – №. 2. – С. 4-36.

[13] Гонченко С. В. Об устойчивых периодических движениях в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой //Математические заметки. – 1983. – Т. 33. – №. 5. – С. 745-756.

[14] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай) //Докл. Росс. Акад. Наук. – 1993. – Т. 329. – №. 4. – С. 404-407.

[15] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре //Докл. Росс. Акад. Наук. – 1993. – Т. 330. – №. 2. – С. 144-147.

[16] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром //Труды МИАН, 1997, т.216, 76-125.

[17] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса //Итоги науки и

техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры». – 1999. – Т. 67. – С. 69-128.

[18] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О динамических свойствах диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями //Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2003. – Т. 7. – С. 92-118.

[19] Гонченко С. В., Шильников Л. П. Гомоклинические касания. //Сборник статей. - М. – 2007.

[20] Гонченко С. В., Гонченко В. С. О бифуркациях рождения замкнутых инвариантных кривых в случае двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими касаниями //Труды Математического института имени ВА Стеклова. – 2004. – Т. 244. – №. 0. – С. 87-114.

[21] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений //Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8. – №. 1. – С. 3-28.

[22] Гонченко А.С., Гонченко С.В., Казаков А.О. О некоторых новых аспектах хаотической динамики “кельтского камня” // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8. – №. 3. – С. 507-518

[23] Казаков А. О., Козлов А. Д., Коротков А. Г. О гомоклинических аттракторах в трехмерных системах с постоянной дивергенцией //Материалы XIII международной научной конференции. (Саранск, 12-16 июля 2017 г.). - Саранск: СВМО, 2017. - С. 364-369.

[24] Казаков А. О., Козлов А. Д. Несимметричный аттрактор Лоренца как пример нового псевдогиперболического аттрактора в трехмерных системах //Журнал СВМО. — 2018. — Т. 20, № 2. — С. 187–197.

[25] Кренц А.А., Молевич Н.Е. Каскад бифуркаций удвоения тора в лазере с отстройкой частоты //Квантовая электроника. - 2009. - Т. 39. - №. 8. - С. 751.

[26] Кренц А. А., Молевич Н. Е. Рождение устойчивого тора из замкнутой особой кривой и его бифуркации в лазерной системе с отстройкой частоты //Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. - 2010. - Т. 18. - №. 5. - С. 67-80.

[27] Кузнецов С. П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике //Успехи физических наук. – 2011. – Т. 181. – №. 2. – С. 121-149.

[28] Лукьянов В. И., Шильников Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами //Избранные научные труды. – 1974. – Т. 243. – №. 1. – С. 292.

[29] Овсянников И. М., Шильников Л. П. О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса //Математический сборник. – 1986. – Т. 130. – №. 4. – С. 552-570.

[30] Сатаев Е. А. Стохастические свойства сингулярно гиперболических аттракторов //Нелинейная динамика. – 2010. – Т. 6. – №. 1. – С. 187-206.

[31] Тураев Д.В., Шильников Л.П. Бифуркации квази-аттракторов тор-хаос //Математические механизмы турбулентности. – Киев. – 1986.

[32] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Пример дикого странного аттрактора //Математический сборник. – 1998. – Т. 189. – №. 2. – С. 137-160.

[33] Тураев Д. В., Шильников Л. П. Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа //Доклады Академии наук. - 2008. – Т. 418. – №. 1. – С. 23-27.

[34] Шарковский, А. Н. Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя //Украинский математический журнал. — 1964. — Т. 16, № 1. — С. 61—71.

[35] Шильников Л. П. и др. Методы качественной теории в нелинейной динамике //Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2003.

[36] Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий //Избранные научные труды. – 1963. – С. 38.

[37] Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений //ДАН СССР. – 1965. – Т. 160. – №. 3. – С. 558-561.

[38] Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло—седло в него же //Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 1170.

[39] Шильников Л. П. О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса //ДАН СССР. – 1967. – Т. 172. – №. 2. – С. 298-301.

[40] Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло //Математический сборник. – 1968. – Т. 77. – №. 3. – С. 461-472.

[41] Шильников Л. П. Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем //Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 182. – №. 1. – С. 53-56.

[42] Шильников Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус //Математический сборник. – 1970. – Т. 81. – №. 1. – С. 92-103.

[43] Шильников Л. П. Теория бифуркаций и модель Лоренца //Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркации рождения цикла и ее приложения.–М.: Мир. – 1980.

[44] Шильников Л.П. Теория бифуркаций и турбулентность //Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький. – 1986. – С. 150-163.

[45] Afraimovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors //Nonlinear Dynamics and Turbulence. Pitman, Boston. – 1982. – P. 336-339.

[46] Afraimovich V.S. Strange attractors and quaiattractors //Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, ed. by R.Z.Sagdeev, Gordon and Breach, Harwood Academic Publishers. – 1984. – V. 3 – P. 1133-1138.

[47] Aframovich V.S., Shilnikov L.P. Strange attractors and quasiattractors //Nonlinear Dynamics and Turbulence, eds Barenblatt G.I., Iooss G., Joseph D.D., Boston, Pitmen. – 1983.

[48] Coullet P., Tresser C., Arneodo A. Transition to stochasticity for a class of forced oscillators //Physics letters A. – 1979. – V. 72. – No. 4-5. – P. 268-270.

[49] Arneodo A., Coullet P., Tresser C. Occurence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations //Physics Letters A. – 1980. – V. 79. – No. 4. – P. 259-263.

[50] Arneodo A., Coullet P., Tresser C. Possible new strange attractors with spiral structure //Communications in Mathematical Physics. – 1981. – V. 79. – No. 4. – P. 573-579.

[51] Arneodo A., Coullet P., Tresser C. Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shilnikov //Journal of Statistical Physics. – 1982. – V. 27. – No. 1. – P. 171-182.

[52] Aronson D. G. et al. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: a computer-assisted study //Communications in Mathematical Physics. – 1982. – V. 83. – No. 3. – P. 303-354.

[53] Benedicks M., Carleson L. The dynamics of the Hénon map //Annals of Mathematics. – 1991. – P. 73-169.

[54] Benettin G. et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory //Meccanica. – 1980. – V. 15. – No. 1. – P. 9-20.

[55] Borisov A., Kazakov A. Strange attractors in the rock'n'roller in the plane problem //IUTAM Symposium "From Mechanical to Biological Systems - an Integrated Approach 5-10 June 2012, Izhevsk, Russia, Book of abstracts. P. 17-18.

[56] Borisov A. V. et al. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback //Regular and Chaotic Dynamics. – 2012. – V. 17. – No. 6. – P. 512-532.

[57] Belykh V. N., Chua L. O. New type of strange attractor from a geometric model of Chua's circuit //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1992. – V. 2. – No. 3. – P. 697-704.

[58] Bakhanova Y. V. et al. Spiral attractors as the root of a new type of"bursting activity"in the Rosenzweig-MacArthur model //arXiv preprint arXiv:1803.01700. – 2018.

[59] Broer H. W. et al. Unfoldings and bifurcations of quasiperiodic tori, Memoir AMS, 421 //Amer. Math. Soc., Providence, RI. – 1990.

[60] Chen G., Ueta T. Yet another chaotic attractor //International Journal of Bifurcation and chaos. – 1999. – V. 9. – No. 7. – P. 1465-1466.

[61] Chenciner A. Courbes ferme es invariantes non normalement hyperboliques au voisinage d'une bifurcation de Hopf degeneree de diffeomorphismes R^2 //Comptes rendus Acad. Sci. – 1981. – V. 292. – Ser. 1. – P. 507-510.

[62] Chua L., Komuro M., Matsumoto T. The double scroll family //IEEE transactions on circuits and systems. – 1986. – V. 33. – No. 11. – P. 1072-1118.

[63] Colli E. Infinitely many coexisting strange attractors //Annales de l'Institut Henri Poincare-Nonlinear Analysis. – 1998. – V. 15. – No. 5. – P. 539-580.

[64] Denjoy A. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore //Journal de mathématiques pures et appliquées. – 1932. – V. 11. – P. 333-376.

[65] Feigenbaum M. J. *The universal metric properties of nonlinear transformations* //Journal of Statistical Physics. – 1979. – V. 21. – No. 6. – P. 669-706.

[66] Francheskini V. // Physica D. - 1983. - V. 6D. - No. 3. - P. 285-304

[67] Gonchenko S. V., Meiss J. D., Ovsyannikov I. I. Chaotic dynamics of three-dimensional Hénon maps that originate from a homoclinic bifurcation //Regular and Chaotic Dynamics. – 2006. – V. 11. – No. 2. – P. 191-212.

[68] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Tatjer J. C. Birth of discrete Lorenz attractors at the bifurcations of 3D maps with homoclinic tangencies to saddle points //Regular and Chaotic Dynamics. – 2014. – V. 19. – No. 4. – P. 495-505.

[69] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2016. – V. 337. – P. 43-57.

[70] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. Lorenz-like attractors in a nonholonomic model of a rattleback //Nonlinearity. – 2015. – V. 28. – No. 9. – P. 3403.

[71] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone //Regular and Chaotic Dynamics. – 2013. – V. 18. – No. 5. – P. 521-538.

[72] Gonchenko A. S. et al. Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I. Pseudohyperbolic Attractors //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2018. – V. 28. – No. 11. – P. 1830036.

[73] Gonchenko A. et al. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2014. – V. 24. – No. 08. – P. 1440005.

[74] Gonchenko S. V. et al. Examples of Lorenz-like attractors in Henon-like maps //Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2013. – V 8. – No. 5. – P. 48-70.

[75] Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Tatjer J. C. Bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with non-simple quadratic homoclinic tangencies and generalized Hénon maps //Regular and Chaotic Dynamics. – 2007. – V. 12. – No. 3. – P. 233-266.

[76] Gonchenko S. S., Kazakov A. O., Turaev D. Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system //arXiv preprint arXiv:1809.07250. – 2018.

[77] Gonchenko S. V., Sten'kin O. V., Turaev D. V. Complexity of homoclinic bifurcations and Ω-moduli //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1996. – V. 6. – No. 6. – P. 969-989.

[78] Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V. Normal forms and Lorenz attractors. //Int. J. of Bifurcation and chaos. - 1993. - V.3. - P. 1123-1139.

[79] S.V.Gonchenko, L.P.Shilnikov, D.V.Turaev "On models with non-rough Poincaré homoclinic curves". //Physica D - 1993. - V. 62. - No. 1-4. - P. 1-14

[80] Gonchenko S. V., Shil'nikov L. P., Turaev D. V. Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 1996. – V. 6. – No. 1. – P. 15-31.

[81] Gonchenko S., Turaev D., Shilnikov L. Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps //Nonlinearity. – 2007. – V. 20. – No. 2. – P. 241.

[82] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions: I //Nonlinearity. – 2008. – V. 21. – No. 5. – P. 923.

[83] Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V. On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors //Regular and Chaotic Dynamics. – 2009. – V. 14. – No. 1. – P. 137.

[84] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I. On global bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms leading to Lorenz-like attractors //Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2013. – V. 8. – No. 5. – P. 71-83.

[85] Gonchenko S. V., Ovsyannikov I. I., Tatjer J. C. Birth of discrete Lorenz attractors at the bifurcations of 3D maps with homoclinic tangencies to saddle points //Regular and Chaotic Dynamics. – 2014. – V. 19. – No. 4. – P. 495-505.

[86] Gonchenko S. V., Simó C., Vieiro A. Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight //Nonlinearity. – 2013. – V. 26. – No. 3. – P. 621.

[87] Gonchenko S. V. et al. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2005. – V. 15. – No. 11. – P. 3493-3508.

[88] Grines V. et al. The topological classification of structurally stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets //Nonlinearity. – 2015. – V. 28. – No. 11. – P. 4081.

[89] Hénon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor //The Theory of Chaotic Attractors. – Springer, New York, NY, 1976. – P. 94-102.

[90] Homburg A. J. Periodic attractors, strange attractors and hyperbolic dynamics near homoclinic orbits to saddle-focus equilibria //Nonlinearity. – 2002. – V. 15. – No. 4. – P. 1029.

[91] Kaneko K. Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative systems. //World Scientific, Singapore. - 1986. - P. 264.

[92] Kuptsov P. V., Kuznetsov S. P. Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction //arXiv preprint arXiv:1805.06644. – 2018.

[93] Kuznetsov S. P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type //Physical review letters. – 2005. – V. 95. – No. 14. – P. 144101.

[94] Kuznetsov S. P., Seleznev E. P. A strange attractor of the Smale-Williams type in the chaotic dynamics of a physical system //Journal of Experimental and Theoretical Physics. – 2006. – V. 102. – No. 2. – P. 355-364.

[95] Kuznetsov S. P., Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2007. – V. 232. – No. 2. – P. 87-102.

[96] Kuznetsov S. P. Example of blue sky catastrophe accompanied by a birth of Smale-Williams attractor //Regular and Chaotic Dynamics. – 2010. – V. 15. – No. 2-3. – P. 348-353.

[97] Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow //Journal of the atmospheric sciences. – 1963. – V. 20. – No. 2. – P. 130-141.

[98] T. Menacer, R. Lozi, L.O. Chua, Hidden Bifurcations in the Multispiral Chua Attractor //International Journal of Bifurcation and Chaos. - 2016. - V. 26. - No 14.

[99] Mora L., Viana M. Abundance of strange attractors //Acta Mathematica. – 1993. – V. 171. – No. 1. – P. 1-71.

[100] Newhouse S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms //Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. – 1979. – V. 50. – No. 1. – P. 101-151.

[101] Newhouse S., Palis J., Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms //Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques. – 1983. – V. 57. – No. 1. – P. 5-71.

[102] Palis J., Viana M. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors //Annals of mathematics. – 1994. – V. 140. – No. 1. – P. 207-250.

[103] Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems //Communications in Mathematical Physics. – 1980. – V. 74. – No. 2. – P. 189-197.

[104] Rössler O. E. Different types of chaos in two simple differential equations //Zeitschrift für Naturforschung A. – 1976. – V. 31. – No. 12. – P. 1664-1670.

[105] Rössler O. E. Chemical turbulence: chaos in a simple reaction-diffusion system //Zeitschrift für Naturforschung A. – 1976. – V. 31. – No. 10. – P. 1168-1172.

[106] Ruelle D. Small random perturbations and the definition of attractors //Geometric Dynamics. – Springer, Berlin, Heidelberg, 1983. – P. 663-676.

[107] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence //Communications in mathematical physics. – 1971. – V. 20. – No. 3. – P. 167-192.

[108] Shilnikov A. L. Bifurcations and chaos in the Shimizu–Marioka system //in Methods and Qualitative Theory of Differential Equations, Gorky State University. – 1986. – P. 180-193.

[109] Shilnikov A. L., Shilnikov L. P., Turaev D. V. Normal forms and Lorenz attractors //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1993. – V. 3. – P. 1123-1123.

[110] Shilnikov A. L. On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu-Morioka model //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1993. – V. 62. – No. 1-4. – P. 338-346.

[111] Shilnikov A. L., Shilnikov L. P. On the nonsymmetrical Lorenz model //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1991. – V. 1. – No. 4. – P. 773-776.

[112] Shilnikov L.P. Mathematical problems of nonlinear dynamics: a tutorial //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 1997. – V. 7. – No. 09. – P. 1953-2001.

[113] Smale S. On gradient dynamical systems //Annals of Mathematics. – 1961. – P. 199-206.

[114] Tatjer J. C. Three-dimensional dissipative diffeomorphisms with homoclinic tangencies //Ergodic theory and Dynamical systems. – 2001. – V. 21. – No. 1. – P. 249-302.

[115] Tucker W. The Lorenz attractor exists //Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. – 1999. – V. 328. – No. 12. – P. 1197-1202.