

На правах рукописи

Мокеев Дмитрий Борисович

**УПАКОВКИ И ВЕРШИННЫЕ ПОКРЫТИЯ ПУТЕЙ
В ГРАФАХ И КЁНИГОВЫ ГРАФЫ**

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского».

Научный руководитель: **Алексеев Владимир Евгеньевич**,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», профессор
кафедры алгебры, геометрии и дискретной
математики

Официальные оппоненты: **Райгородский Андрей Михайлович**,
доктор физико-математических наук,
ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», директор Физтех-школы
прикладной математики и информатики

Лепин Виктор Васильевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
Институт математики НАН Беларуси,
ученый секретарь

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»**, факультет
компьютерных наук и информационных технологий, кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Защита состоится 19 сентября 2019 г. в 14 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23 корп. 2, ауд. 254.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского».

Автореферат разослан « » 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д212.166.20,
кандидат физико-математических
наук, доцент

Кротов Николай Владимирович

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Задачи об *упаковке* представляют собой класс задач дискретной оптимизации, целью которых является укладка как можно большего числа объектов заданного типа в «контейнер».

Математическая модель может быть представлена семейством подмножеств некоторого множества, т.е. гиперграфом, а задача состоит в нахождении наибольшего числа непересекающихся ребер этого гиперграфа. Она может быть сформулирована как задача целочисленного линейного программирования:

$$\max_{Ax \leq \mathbb{1}, x \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^m} \sum_{i=1}^m x_i, \quad (1)$$

где $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ – матрица инцидентности гиперграфа, $\mathbb{1}$ – вектор, все компоненты которого равны 1.

Каждой такой задаче можно поставить в соответствие двойственную в смысле линейного программирования задачу. Она имеет следующий вид

$$\min_{yA \geq \mathbb{1}, y \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n} \sum_{j=1}^n y_j \quad (2)$$

и является задачей о вершинном покрытии гиперграфа: требуется найти наименьшее множество вершин, покрывающее все ребра.

Задачи об упаковке и покрытии имеют огромное количество интерпретаций в различных разделах геометрии и дискретной математики. Некоторые из них считаются классическими задачами и изучены достаточно подробно, другие изучены в меньшей степени, но также представляют интерес. Большое количество публикаций посвящено сложным особенностям таких задач.

Многие задачи теории графов можно интерпретировать как задачи об упаковке и покрытии. 9 из них входят в список 21 NP-полных задач Карпа¹. Все эти задачи можно считать классическими NP-полными задачами. Следовательно, в предположении $P \neq NP$, для них не существует эффективных алгоритмов решения. То же можно сказать и про многие другие задачи об упаковке и покрытии в графах. Этот факт побуждает исследователей к рассмотрению различных частных случаев задач, допускающих полиномиальные алгоритмы решения.

¹Karp R. M.: Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. — Springer, 1972. — P. 85–103.

Говорят, что гиперграф с матрицей инцидентности A *упакован*, если обе задачи

$$\max_{Ax \leq \mathbb{1}, x \geq 0} \sum_{i=1}^m x_i \quad \min_{yA \geq \mathbb{1}, y \geq 0} \sum_{j=1}^n y_j$$

имеют целочисленные оптимальные вектора. Иными словами, гиперграф *упакован* если в задачах (1) и (2) разрыв двойственности равен 0. То есть минимум в задаче о покрытии и максимум в задаче об упаковке на упакованном гиперграфе совпадают².

Поскольку задача линейного программирования без условия целочисленности векторов принадлежит классу P, на упакованном гиперграфе обе задачи 1 и 2 решаются эффективно (точнее, имеются в виду задачи распознавания, ассоциированные с задачами (1) и (2): требуется выяснить, существует ли целочисленный вектор, на котором значение целевой функции не больше или не меньше заданной величины).

Ряд известных теорем теории графов можно перефразировать в терминологии упакованных гиперграфов. Рассмотрим несколько примеров.

1. Пусть вершины и гиперребра гиперграфа соответствуют вершинам и ребрам некоторого графа G . Тогда упаковкой будет являться паросочетание графа G , а покрытием – его вершинное покрытие. Согласно теореме Кёнига-Эгервари³.
2. Пусть G – произвольный граф. Пусть вершины гиперграфа соответствуют независимым множествам графа G , а его каждое его гиперребро соответствует вершине графа и содержит все независимые множества, содержащие эту вершину. Тогда упаковкой является клика графа G , а покрытие соответствует правильной раскраске этого графа. Такой гиперграф упакован, если граф G совершенный – это следует из определения совершенных графов⁴.
3. Пусть вершины и гиперребра гиперграфа соответствуют вершинам и порождённым циклам некоторого графа G . Тогда упаковкой является упаковка циклов, а покрытием – множество вершин графа G , разрезающих циклы. Класс графов, соответствующих упакованным гиперграфам такого типа, описали Г. Дин, Ч. Сюй и В. Цзан⁵.

Отметим, что число гиперрёбер в гиперграфе может экспоненциально зависеть от числа его вершин. Поэтому в общем случае упакованность

²см., например, Cornuéjols G.: Combinatorial optimization: Packing and covering. — SIAM, 2001.

³König D. Gráfok és mátrixok // Matematikai és Fizikai Lapok. — 1931. — Vol. 38. — P. 116–119.

⁴см., например, Емеличев В. А., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 384 с.

⁵Ding G., Xu Z., Zang W. Packing cycles in graphs, II // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 2003. — Vol. 87, no. 2. — P. 244–253

гиперграфа не всегда означает, что соответствующие задачи упаковки и покрытия решаются за полиномиальное время. Тем не менее, достижение нулевого разрыва двойственности может способствовать нахождению эффективных алгоритмов решения этих задач. Это происходит, например, в двудольных графах для задачи о вершинном покрытии или в совершенных графах для задач о независимом множестве и о раскраске графа.

Представляется перспективным выделение новых случаев эффективной разрешимости задач об упаковке и покрытии в классах графов, на которых достигается нулевой разрыв двойственности для соответствующей пары задач.

Рассмотрим следующий тип задач упаковки и покрытия на графах. Пусть вершины гиперграфа соответствуют вершинам некоторого графа G , а его рёбра – подграфам, изоморфным графам из некоторого множества $\mathcal{X}$. Тогда упаковкой является множество попарно не пересекающихся $\mathcal{X}$ -подграфов или так называемая $\mathcal{X}$ -упаковка графа G , а покрытием – множество вершин, удаление которых порождает граф, не содержащий подграфов из множества $\mathcal{X}$, то есть так называемое вершинное покрытие $\mathcal{X}$ -подграфов или просто $\mathcal{X}$ -покрытие.

Стоит заметить, что в литературе понятия $\mathcal{X}$ -упаковки и $\mathcal{X}$ -покрытия трактуются по-разному. Ряд авторов учитывают при подсчёте любые подграфы, изоморфные графам из $\mathcal{X}$ (будем называть такие $\mathcal{X}$ -упаковки и $\mathcal{X}$ -покрытия слабыми), другие – только порождённые подграфы такого типа (соответственно, сильные $\mathcal{X}$ -упаковки и $\mathcal{X}$ -покрытия).

Заметим, что от слабых $\mathcal{X}$ -упаковок и $\mathcal{X}$ -покрытий можно перейти к сильным, добавив в $\mathcal{X}$ для каждого графа $H \in \mathcal{X}$ все графы, полученные из H добавлением рёбер. Поэтому говоря об $\mathcal{X}$ -упаковках и $\mathcal{X}$ -покрытиях мы будем иметь в виду сильные $\mathcal{X}$ -упаковки и $\mathcal{X}$ -покрытия, поскольку данная трактовка охватывает больший объём задач.

Для различных $\mathcal{X}$ задачи об $\mathcal{X}$ -упаковке и $\mathcal{X}$ -покрытии имеют различный сложностной статус. Известно, например, что уже при $\mathcal{X} = \{P_2\}$ задача об $\mathcal{X}$ -покрытии NP-полна в общем случае⁶, а при $\mathcal{X} = \{P_3, C_3\}$ – NP-полна в 3-регулярных графах⁷ (здесь и далее P_k означает путь из k вершин, C_k – цикл из k вершин). Также известно, что задача о P_2 -упаковке принадлежит классу P ⁸, а если $\mathcal{X}$ содержит граф, имеющий компоненту

⁶Karp R. M.: Reducibility among combinatorial problems // Complexity of computer computations. — Springer, 1972. — P. 85–103.

⁷Brešar B., Kardoš F., Katrenič J., Semanišin G.: Minimum k -path vertex cover // Discrete Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 159, no. 12. — P. 1189–1195

⁸Edmonds J.: Paths, trees, and flowers // Canadian Journal of mathematics. — 1965. — Vol. 17, no. 3. — P. 449–467.

связности с тремя или более вершинами, задача об $\mathcal{X}$ -упаковке, напротив, NP-полна⁹.

Немало работ посвящено задачам о сильных и слабых $\mathcal{X}$ -упаковке и $\mathcal{X}$ -покрытии, где $\mathcal{X}$ состоит из одного графа P_k , где k – натуральное число, большее 1.

Задачи о покрытии путей возникают, например, при планировании дорожных маршрутов и в задачах маршрутизации в компьютерных сетях¹⁰. Кроме того, покрытия путей различной длины могут применяться в задачах разбиения графа на компоненты связности малого размера¹¹. Также P_4 -упаковки и P_4 -покрытия изучались при исследовании совершенных графов и графов Бержа¹².

Исследованиям задачи о покрытиях путей посвящён ряд работ Я. Катренича, Ф. Кардоча, М. Яковаца, А. Келманса, Ц. Ту, М. Сяо, М. Чан, М. Капелле и др. Показано, что задача о P_k -покрытии полиномиально разрешима в деревьях и NP-трудна в общем случае при $k \geq 2$ ^{13,14}.

Для различных k имеется ряд точных алгоритмов решения задач о P_k -покрытии, а также ряд приближённых алгоритмов поиска минимального P_k -покрытия, имеющих полиномиальную сложность в графах общего вида и в некоторых отдельных классах графов. Кроме того, установлены верхние и нижние оценки минимальной мощности P_k -покрытий в графах общего вида и в некоторых классах графов.

Задачам об упаковке путей также посвящён ряд работ. В отличие от задачи о P_k -покрытии, задача о P_k -упаковке эффективно решается при $k = 2$ ¹⁵. Однако при $k \geq 3$ данная задача также является NP-полной в общем случае¹⁶ и в 3-регулярных графах¹⁷. Более того, в работе Н. Деви, А. Мане,

⁹Kirkpatrick D. G., Hell P. On the completeness of a generalized matching problem // Proceedings of the tenth annual ACM symposium on Theory of computing. — ACM. 1978. — P. 240–245.

¹⁰Funke S., Nusser A., Storandt S.: On k -Path Covers and their applications // The VLDB Journal. — 2016. — Vol. 25, no. 1. — P. 103–123.

¹¹Lee E.: Partitioning a graph into small pieces with applications to path transversal // Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. — Society for Industrial, Applied Mathematics. 2017. — P. 1546–1558

¹²см., например, Hoáng C. T., Le V. B. On P_4 -transversals of perfect graphs // Discrete Mathematics. — 2000. — Vol. 216, no. 1–3. — P. 195–210.

¹³Brešar B., Kardoš F., Katrenič J., Semanišin G.: Minimum k -path vertex cover // Discrete Applied Mathematics. — 2011. — Vol. 159, no. 12. — P. 1189–1195

¹⁴Tu J., Zhou W.: A primal-dual approximation algorithm for the vertex cover P_3 problem // Theoretical Computer Science. — 2011. — Vol. 412, no. 50. — P. 7044–7048

¹⁵Edmonds J.: Paths, trees, and flowers // Canadian Journal of mathematics. — 1965. — Vol. 17, no. 3. — P. 449–467.

¹⁶Kirkpatrick D. G., Hell P.: On the completeness of a generalized matching problem // Proceedings of the tenth annual ACM symposium on Theory of computing. — ACM. 1978. — P. 240–245

¹⁷Masuyama S., Ibaraki T.: Chain packing in graphs // Algorithmica. — 1991. — Vol. 6, no. 1. — P. 826–839

С. Мишра¹⁸ показано, что при $k = 4$ данная задача является APX-полной, то есть, в предположении $P \neq NP$, для неё не существует приближённого алгоритма с произвольным коэффициентом аппроксимации.

Ш. Масуямой и Т. Ибараки, напротив, было показано, что задача о P_k -упаковке решается за линейное время в классе лесов при любом k ¹⁹. В работе А. Косовски, М. Малафейски, П. Зилински²⁰ дано описание класса графов, в котором задача о P_3 -упаковке также решается за линейное время. В работах В. Алексеева и Д. Мокеева дано описание классов графов, в которых задачи о сильной и слабой P_3 -упаковке, а также о P_4 -упаковке решаются за время $O(n^2)$. Стоит заметить, что соответствующие задачи о покрытии также решаются в этих классах за время $O(n^2)$ (в обоих случаях предполагается, что граф задан матрицей смежности). Этим классам посвящена настоящая диссертация. Алгоритм нахождения наибольшей P_3 -упаковки и наименьшего P_3 -покрытия в одном из таких классов также представлен в диссертации.

Другим исследованиям задач об упаковке путей различной длины посвящены работы А. Келманса, А. Косовски, Х. Фернау, Р. Хассина, Ч. Хоан и др. Для различных k получены оценки мощности максимальной P_k -упаковки в различных классах графов. Имеются точные алгоритмы решения задачи о P_k -упаковке для $k = 3$, а также приближённые полиномиальные алгоритмы решения этих задач для различных k .

Несмотря на двойственность задач об P_k -упаковке и P_k -покрытии, эти задачи достаточно редко рассматриваются вместе. Тем не менее, исследование классов графов, в которых достигается нулевой разрыв двойственности для этих задач (то есть гиперграф для соответствующих задач упакован) представляется актуальным, так как позволяет найти алгоритмы решения обеих задач, имеющие полиномиальную сложность в данных классах.

Автору известно несколько результатов описания классов графов, имеющих упакованный гиперграф для задач об $\mathcal{X}$ -упаковке и $\mathcal{X}$ -покрытии.

Из теоремы Кёнига следует, что в двудольных графах достигается нулевой разрыв двойственности в задачах о паросочетании (P_2 -упаковка) и о вершинном покрытии (P_2 -покрытие). В работе С. Мишра и др.²¹ опи-

¹⁸Devi N. S., Mane A. C., Mishra S.: Computational complexity of minimum P_4 vertex cover problem for regular and $K_{1,4}$ -free graphs // Discrete Applied Mathematics. — 2015. — Vol. 184. — P. 114–121.

¹⁹Masuyama S., Ibaraki T. Chain packing in graphs // Algorithmica. — 1991. — Vol. 6, no. 1. — P. 826–839

²⁰Kosowski A., Malafejski M., Zyliński P.: Tighter Bounds on the Size of a Maximum P_3 -Matching in a Cubic Graph // Graphs and Combinatorics. — 2008. — Vol. 24, no. 5. — P. 461–468

²¹S. Mishra, V. Raman, S. Saurabh, S. Sikdar, C. Subramanian: The complexity of König subgraph problems and above-guarantee vertex cover // Algorithmica. — 2011. — Vol. 61, no. 4. — P. 857–881.

сан критерий для графов, имеющих упакованный гиперграф для задач о паросочетании и вершинном покрытии.

Г. Дин, Ч. Сюй, В. Цзан²² описали наследственный класс графов, имеющих упакованный гиперграф для задач о C -упаковке и C -покрытии, где C — множество всех простых циклов.

В статье В. Алексеева и Д. Мокеева [4] введено понятие *кёнигова графа относительно $\mathcal{X}$* — это граф, любой порождённый подграф которого имеет упакованный гиперграф для задач об $\mathcal{X}$ -упаковке и $\mathcal{X}$ -покрытии. Было получено описание классов кёниговых графов относительно P_3 и $\{P_3, C_3\}$ [6]. Также в работах Д. Мокеева описано несколько классов графов, имеющих упакованный гиперграф для задач о P_4 -упаковке и P_4 -покрытии [5,7,8] и для задач о P_k -упаковке и P_k -покрытии, где $k \geq 5$ ²³.

Целью данной работы является исследование классов кёниговых графов относительно P_3 , $\{P_3, C_3\}$ и P_4 , а также разработка эффективных алгоритмов для решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на кёниговых графах относительно P_3 .

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Дать описание классов кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$, P_3 и P_4 .
2. Разработать алгоритм распознавания кёниговых графов относительно P_3 .
3. Разработать алгоритмы решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на кёниговых графах относительно P_3 .

Научная новизна: В диссертации вводится новое понятие кёнигова графа относительно данного множества графов. Получены полные описания классов кёниговых графов относительно множеств $\{P_3\}$ и $\{P_3, C_3\}$ и частичное описание класса кёниговых графов относительно множества $\{P_4\}$. Предложены полиномиальные алгоритмы решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии для класса кёниговых графов относительно $\{P_3\}$. Все эти результаты являются новыми.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при решении задач об упаковке и покрытии относительно различных множеств графов и близких к ним задач. Они могут найти применения в исследованиях, проводимых в профильных российских и международных научных группах. Они могут также применяться при разработке и чтении спецкурсов по теории графов.

²²Ding G., Xu Z., Zang W.: Packing cycles in graphs, II // Journal of Combinatorial Theory, Series B. — 2003. — Vol. 87, no. 2. — P. 244–253

²³Mokeyev D. B.: P_q -König Extended Forests and Cycles // Supplementary Proceedings of the 9th International Conference on Discrete Optimization and Operations Research and Scientific School (DOOR 2016). — 2016. — Vol. 1. — P. 86–95

Методология и методы исследования. В диссертации использованы методы теории графов, в частности, методы исследования наследственных классов графов, а также методы линейной алгебры и теории множеств.

Основные положения, выносимые на защиту: Наиболее важными из полученных результатов являются следующие.

1. Дано полное описание класса кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$. Показано, что граф принадлежит данному классу тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов определённого вида. Также показано, что любой граф данного класса можно построить из мультиграфа с петлями с использованием операции подразбиения рёбер.
2. Дано полное описание класса кёниговых графов относительно P_3 . Показано, что граф принадлежит данному классу тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов определённого вида. Также описана процедура, с помощью которой можно построить любой граф данного класса из мультиграфа.
3. Предложен алгоритм распознавания кёниговых графов относительно P_3 . Показано, что алгоритм имеет сложность $O(n^2)$, где n – число вершин графа.
4. Предложен алгоритм решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на кёниговых графах относительно P_3 . Показано, что алгоритм имеет сложность $O(n^2)$, где n – число вершин графа.
5. Дано частичное описание класса кёниговых графов относительно P_4 . Показано, что если граф принадлежит данному классу, то не содержит порождённых подграфов определённого вида. Также описана процедура, с помощью которой можно построить некоторые графы данного класса из двудольных графов.

Достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях из перечня ВАК РФ.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. 2nd-6th International Conferences on Network Analysis (Нижний Новгород, 2012–2016);
2. XVI и XVII Международные конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Ниж. обл., 2011 и Казань, 2014);
3. VIII Молодежная научная школа по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 2011);
4. XI Международный семинар «Дискретная математика и её приложения» (Москва, 2012)
5. Международная научная конференция «Дискретная математика, теория графов и их приложения» (Минск, 2013);

6. XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Респ. Крым, 2014);
7. IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Моск. обл., 2015);
8. Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 2015);
9. Одесский семинар по дискретной математике (Одесса, 2013);
10. Семинар Нижегородского математического общества (Нижний Новгород, 2018);
11. Общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике (Нижний Новгород);
12. Семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ НН (Нижний Новгород)

Личный вклад. Все основные результаты настоящей диссертации получены автором лично.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных изданиях, 8 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 8 — в тезисах докладов.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** изложены основные понятия и определения, требуемые для представления результатов работы.

Класс графов $\mathcal{X}$ называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов $\mathcal{F}^{24}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{F})$. Для наследственного класса $\mathcal{X}$ через $\text{Forb}(\mathcal{X})$ обозначается минимальное множество запрещенных порожденных подграфов. Для любого наследственного класса это множество определяется единственным образом.

Пусть $\mathcal{X}$ — множество графов, G — произвольный граф. Множество попарно непересекающихся порождённых подграфов графа G , изоморфных графам из $\mathcal{X}$, называется *упаковкой графа G относительно $\mathcal{X}$* или просто его *$\mathcal{X}$ -упаковкой*. Задача об $\mathcal{X}$ -упаковке состоит в том, чтобы найти $\mathcal{X}$ -упаковку графа наибольшего размера. Будем обозначать $\mu_{\mathcal{X}}(G)$ размер наибольшей $\mathcal{X}$ -упаковки в графе G .

²⁴см., например, Емеличев В. А., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М. : Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 384 с.

Множество C вершин графа G такое, что любой порождённый подграф G , изоморфный графу из $\mathcal{X}$ содержит хотя бы одну вершину из C , называется *вершинным покрытием G относительно $\mathcal{X}$* или просто его *$\mathcal{X}$ -покрытием*. Иными словами, $\mathcal{X}$ -покрытие графа G – это такое множество вершин C , что $G \setminus C \in \text{Free}(\mathcal{X})$. Задача об $\mathcal{X}$ -покрытии состоит в том, чтобы найти $\mathcal{X}$ -покрытие графа наименьшего размера. Будем обозначать $\beta_{\mathcal{X}}(G)$ размер наименьшего $\mathcal{X}$ -покрытия в графе G .

Граф G называется *кёниговым* относительно $\mathcal{X}$, если в любом его порождённом подграфе H достигается равенство $\mu_{\mathcal{X}}(H) = \beta_{\mathcal{X}}(H)$ [4]. Класс всех кёниговых графов относительно множества $\mathcal{X}$ обозначаем через $\mathcal{K}(\mathcal{X})$.

Если множество $\mathcal{X}$ состоит из единственного графа H , то будем говорить об H -упаковках, H -покрытиях и о кёниговых графах относительно H .

Класс $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ при любом $\mathcal{X}$ является наследственным и, следовательно, может быть описан множеством минимальных запрещённых порождённых подграфов.

Также в первой главе дано описание основных инструментов и общих принципов структурной части описания классов кёниговых графов относительно путей. Одним из таких инструментов структурной части описания является операция замены вершины графом.

Операция *замены графом H вершины x* графа G состоит в следующем:

1. Эта вершина удаляется из графа G .
2. К графу G добавляется несколько новых вершин, соединённых между собой так, что они порождают подграф, изоморфный H .
3. Каждая новая вершина соединена ребром со всеми вершинами множества $N(x)$ в исходном графе.

Общим аспектом описания классов кёниговых графов относительно путей является построение (конструирование) произвольных графов соответствующего класса с помощью замены некоторых вершин графов графами определённого вида. Такой способ описания можно назвать конструктивным.

Пусть $\mathcal{F}$ – класс графов. Будем называть граф G *$R\mathcal{F}$ -расширением* граф, полученный из G заменой некоторых вершин степени 1 и 2 графами из множества $\mathcal{F}$.

Во **второй главе** приводится полное описание класса кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$ в терминах запрещённых графов и с использованием операции подразделения рёбер. Некоторые из результатов данной главы используются также при описании класса кёниговых графов относительно P_3 . Результаты данной главы опубликованы в работах [2,6].

Раздел 2.1 посвящён доказательству следующей леммы и её следствия.

Лемма 2.1.1. Для любого дерева T справедливо $\mu_{P_3}(T) = \beta_{P_3}(T)$.

Следствие 1. Для любого дерева T справедливо $\mu_{\{P_3, C_3\}}(T) = \beta_{\{P_3, C_3\}}(T)$.

В разделе 2.2 описываются запрещённые порождённые подграфы класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.

Рассмотрим граф, получающийся из цикла C_n добавлением двух вершин, не смежных между собой, каждая из которых соединяется ребром с одной вершиной цикла. Этот граф обозначим через $A(n, k)$, где k – расстояние между вершинами цикла, смежными с добавленными вершинами (если добавленные вершины смежны с одной и той же вершиной цикла, то $k = 0$).

Доказываются следующие леммы.

Лемма 2.2.1. Графы K_4 и K_4 -е являются минимальными запрещёнными графами для $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.

Лемма 2.2.2. Граф C_n принадлежит классу $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$, если n кратно 3 и является минимальным запрещённым графом для $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$ в противном случае.

Лемма 2.2.3. Если n кратно 3, а k не кратно 3, то $A(n, k)$ является минимальным запрещённым графом для класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.

Множества графов, удовлетворяющих условиям лемм 2.2.2. и 2.2.3. названы $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{A}_3$ соответственно.

Раздел 2.3 посвящён структурному описанию класса $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$. В нём описана процедура S -2-преобразования псевдографа (графа с кратными рёбрами и петлями), позволяющая конструктивно описать любой кёнигов граф относительно $\{P_3, C_3\}$.

Доказана следующая лемма.

Лемма 2.3.1. S -2-преобразование любого псевдографа принадлежит классу $\mathcal{K}(\{P_3, C_3\})$.

Раздел 2.4 содержит основной результат данной главы. Доказана следующая теорема.

Теорема 2.4.1. Следующие утверждения эквивалентны для графа G :

- (1) G – кёнигов граф относительно $\{P_3, C_3\}$;
- (2) G не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{C}_3 \cup \mathcal{A}_3 \cup \{K_4, K_4\text{-е}\}$;
- (3) G S -2-преобразование некоторого мультиграфа.

В третьей главе приводится полное описание класса кёниговых графов относительно P_3 . Кроме того, в третьей главе приводится описа-

ние полиномиального алгоритма распознавания кёниговых графов относительно P_3 и полиномиального алгоритма решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на графах данного класса. Результаты данной главы опубликованы в работах [1,2,4,6].

В разделе 3.1 описываются особенности R - $\mathcal{Q}$ -расширений графов, где $\mathcal{Q} = \{K_n : n \in \mathbb{N}\}$. Доказана следующая лемма.

Лемма 3.1.3. *Любое R - $\mathcal{Q}$ -расширение любого леса принадлежит классу $\mathcal{K}(P_3)$.*

В разделе 3.2 описываются запрещённые порождённые подграфы класса $\mathcal{K}(P_3)$.

Назовём n - k -лассо, где $n \geq 3$ граф, полученный из графа $C_n + P_k$ добавлением ребра, соединяющего вершину степени 1 пути (или единственную его вершину в случае $k = 1$) с вершиной цикла. Получившуюся вершину степени 3 в этом графе назовём *узлом*.

Рассмотрим граф, получающийся из n -1-лассо заменой одной из вершин цикла графом K_2 . Этот граф обозначим через $B(n, k)$, где k – расстояние от узла до вершины, подвергшейся замене.

Обозначим через $D(k_1, k_2, k_3)$ граф, полученный из цикла $C_{k_1+k_2+k_3}$ заменой графами K_2 трёх вершин, делящих цикл на пути длины k_1, k_2, k_3 .

Доказаны следующие леммы.

Лемма 3.2.2. *Граф C_n принадлежит классу $\mathcal{K}(P_3)$, если n кратно 3 и является минимальным запрещённым графом для $\mathcal{K}(P_3)$ в противном случае.*

Лемма 3.2.3. *Если n кратно 3, а k не кратно 3, то $A(n, k)$ является минимальным запрещённым графом для класса $\mathcal{K}(P_3)$.*

Лемма 3.2.4. *Если n и k кратны 3, $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, то $B(n, k)$ – минимальный запрещённый граф для класса $\mathcal{K}(P_3)$.*

Лемма 3.2.5. *Если $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv 1 \pmod{3}$ и $k_i \geq 4$, $i \in 1, 2, 3$, то $D(k_1, k_2, k_3)$ – минимальный запрещённый подграф для класса $\mathcal{K}(P_3)$.*

Множества графов, удовлетворяющих условиям лемм 3.2.4 и 3.2.5. названы $\mathcal{B}_3$ и $\mathcal{D}_3$ соответственно.

Описаны также 3 минимальных запрещённых порождённых подграфа, не входящие ни в одно из перечисленных семейств. Эти графы обозначены *gem*, *dart*, $K_2 \circ O_3$.

Раздел 3.3 посвящён структурному описанию класса $\mathcal{K}(P_3)$. В нём описана процедура S_2 - R - $\mathcal{Q}$ -расширения мультиграфа (графа с кратными рёбрами), позволяющая конструктивно описать любой кёнигов граф относительно P_3 , не являющийся R - $\mathcal{Q}$ -расширением простого цикла.

Доказана следующая теорема.

Теорема 3.3.1. Следующие утверждения равносильны для связного графа G , не являющегося R - $\mathcal{Q}$ -расширением простого цикла:

- (1) G – кёнигов граф;
- (2) G не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{C}_3 \cup \{gem, dart, K_2 \circ O_3\}$;
- (3) G является S_2 - R - $\mathcal{Q}$ -расширением некоторого мультиграфа.

Также в данном разделе описан критерий, при котором R - $\mathcal{Q}$ -расширение простого цикла является кёниговым графом относительно P_3 . Доказана следующая теорема.

Теорема 3.3.2. R - $\mathcal{Q}$ -расширение цикла C_n , где n кратно 3, является кёниговым графом относительно P_3 тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{D}_3$.

Раздел 3.4 содержит обобщение описаний класса $\mathcal{K}(P_3)$.

Следующая теорема является основным результатом данной главы. Она получена как следствие лемм 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5 и теорем 3.3.1, 3.3.2.

Теорема 3.4.1. Следующие утверждения эквивалентны для графа G :

- (1) G – кёнигов граф относительно P_3 ;
- (2) G не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{C}_3 \cup \mathcal{D}_3 \cup \{gem, dart, K_2 \circ O_3\}$;
- (3) Каждая компонента связности графа G является либо S_2 - R - $\mathcal{Q}$ -расширением некоторого мультиграфа, либо R - $\mathcal{Q}$ -расширением цикла длины кратной 3, не содержащего графов из множества $\mathcal{D}_3$.

Раздел 3.5 содержит описание алгоритмов распознавания кёниговых графов относительно P_3 и решения задач о P_3 -упаковке и о P_3 -покрытии в графах класса $\mathcal{K}(P_3)$, а так же обоснование их алгоритмической сложности $O(n^2)$, где n – число вершин в графе.

В четвёртой главе приводится частичное описание класса кёниговых графов относительно P_4 . Описано несколько важных подклассов данного класса графов и найдено значительное количество минимальных запрещённых порождённых подграфов данного класса. Результаты данной главы опубликованы в работах [3,5,7,8].

Граф G назовём P_4 -связным, если для любой его пары вершин u и v существует такая последовательность порождённых 4-путей $q_0, q_1, \dots, q_p$, что $u \in q_0$, $v \in q_p$ и каждая пара порождённых 4-путей q_{i-1}, q_i , где $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, имеет хотя бы одну общую вершину.

Очевидна справедливость следующей леммы.

Лемма 4.1.1. Граф G является кёниговым относительно P_4 тогда и только тогда, когда каждая компонента P_4 -связности G – кёнигов граф.

Доказана также следующая лемма.

Лемма 4.1.2. *Граф G является кёниговым относительно P_4 тогда и только тогда, когда $\overline{G}$ кёнигов относительно P_4 .*

Раздел 4.2 посвящён особенностям описания графов класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Доказана следующая лемма.

Лемма 4.2.3. *Каждое наименьшее P_q -покрытие любого $R\text{-Free}(P_q)$ -расширения любого графа, где $q \geq 4$, состоит из целых секций.*

Также в данном разделе описывается процедура RT -расширения графа, которая является основой для описания одного из подклассов класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Доказана следующая лемма.

Лемма 4.2.6. *Любое RT -расширение любого леса принадлежит классу $\mathcal{K}(P_4)$.*

В разделе 4.3 описываются запрещённые порождённые подграфы класса $\mathcal{K}(P_4)$. Описываются несколько бесконечных семейств графов и отдельные графы, не входящие ни в одно из них.

Рассмотрим множество графов, получающихся из n -1-лассо заменой каких-нибудь двух вершин цикла графами K_2 или O_2 (возможно, различными). Это множество графов обозначим через $B_1(n, k_1, k_2)$, где k_1 и k_2 – расстояния от узла до вершин, подвергшихся замене.

Рассмотрим множество графов, получающихся из n -2-лассо заменой одной вершины цикла одним из графов K_2 или O_2 . Это множество графов обозначим через $B_2(n, k)$, где k – расстояние от узла до вершины, подвергшейся замене.

Обозначим через $D(k_1, k_2, k_3, k_4)$ множество графов, полученных из цикла $C_{k_1+k_2+k_3+k_4}$ заменой графами K_2 или O_2 четырёх вершин, делящих цикл на пути длины k_1, k_2, k_3, k_4 в порядке обхода цикла.

Доказаны следующие леммы.

Лемма 4.3.1. *Графы C_n и $\overline{C_n}$ принадлежат классу $\mathcal{K}(P_4)$, если n кратно 4 и являются минимальными запрещёнными подграфами для $\mathcal{K}(P_4)$ в противном случае.*

Лемма 4.3.2. *Если n кратно 4, а k нечётно, то $A(n, k)$ и $\overline{A(n, k)}$ являются минимальными запрещёнными подграфами для класса $\mathcal{K}(P_4)$.*

Лемма 4.3.3. *Если n и одно из k_i , где $i \in \{1, 2\}$, кратны 4, а k_{3-i} чётно, но не кратно 4, причём $1 \geq k_i \geq \frac{n}{2}$, то все графы множества $B_1(n, k_1, k_2)$ и их дополнения являются минимальными запрещёнными порождёнными подграфами для класса $\mathcal{K}(P_4)$.*

Лемма 4.3.4. Если n и одно из k кратны 4 и $1 \geq k \geq \frac{n}{2}$, то все графы множества $B_2(n, k)$ и их дополнения являются минимальными запрещёнными порожждёнными подграфами класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Лемма 4.3.5. Графы множества $D(k_1, k_2, k_3, k_4)$ и их дополнения являются минимальными запрещёнными порождёнными подграфами класса $\mathcal{K}(P_4)$, если выполняется одно из условий:

- $k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv k_4 \equiv 1 \pmod{4}$ и $k_i \geq 5$, $i \in \{1, 2, 3\}$;
- $k_1 \equiv 1 \pmod{4}$ и $k_1 \geq 5$, $k_2 \equiv k_4 \equiv 2 \pmod{4}$, $k_3 \equiv 3 \pmod{4}$

Представлено также 64 графа, не входящие в указанные семейства, которые также являются запрещёнными. Множество, состоящее из этих графов обозначено $\mathcal{E}_4$.

Раздел 4.4 посвящён структурному описанию класса $\mathcal{K}(P_4)$. В нём описана процедура *S-RT-расширения* двудольного графа, позволяющая конструктивно описать любой кёнигов граф относительно P_4 , не являющийся *RT-расширением* простого цикла.

Доказана следующая теорема.

Теорема 4.4.1. Пусть H – связный двудольный граф, отличный от простого цикла. Тогда P_4 -связное *S-RT-расширение* графа H и его дополнение являются кёниговыми графами относительно P_4 .

Также в данном разделе описан критерий, при котором *RT-расширение* простого цикла является кёниговым графом относительно P_4 . Доказана следующая теорема.

Теорема 4.4.2. *R-F₄-расширение* цикла C_n , где n кратно 4, является кёниговым графом относительно P_4 тогда и только тогда, когда не содержит порождённых подграфов из множества $\mathcal{D}_4$.

Раздел 4.5 содержит обобщение описаний класса $\mathcal{K}(P_4)$.

Обозначим $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{D}_4$ множества графов, описанные в леммах 4.3.1, 4.3.2 и 4.3.5 соответственно. Обозначим $\mathcal{B}_4$ множество графов, описанных в леммах 4.3.3 и 4.3.4.

Следующая теорема является основным результатом данной главы. Она получена как следствие лемм 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5 и теорем 4.4.1, 4.4.2

Теорема 4.5.1. Пусть SRT – множество графов, каждая компонента P_4 -связности которых является *S-RT-расширением* некоторого двудольного графа. Тогда $SRT \cap Free(\mathcal{D}_4) \subseteq \mathcal{K}(P_4) \subseteq Free(\mathcal{A}_4 \cup \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{C}_4 \cup \mathcal{D}_4 \cup \mathcal{E}_4)$

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Полностью описан класс кёниговых графов относительно $\{P_3, C_3\}$. Найдено множество всех минимальных запрещённых порождённых подграфов для данного класса. Кроме того, показано, каким образом можно построить любой граф данного класса из псевдографа с использованием операции подразбиения рёбер.
2. Полностью описан класс кёниговых графов относительно P_3 . Найдено множество всех минимальных запрещённых порождённых подграфов для данного класса. Кроме того, показано, каким образом можно построить любой граф данного класса из мультиграфа с использованием операций подразбиения рёбер и замены вершин кликами.
3. Предложены алгоритмы распознавания кёниговых графов относительно P_3 и решения задач о P_3 -упаковке и P_3 -покрытии на кёниговых графах относительно P_3 . Показано, что все перечисленные алгоритмы имеют сложность $O(n^2)$, где n – число вершин графа.
4. Дано частичное описание класса кёниговых графов относительно P_4 . Найдено множество минимальных запрещённых порождённых подграфов для данного класса, содержащее 4 бесконечных семейства и 64 отдельных графа. Кроме того, показано, каким образом можно построить некоторые графы данного класса из двудольного графа с использованием операций подразбиения рёбер и замены вершин кографами.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации и включённых в перечень международных баз цитирования (Web of Science, Scopus)

1. *Алексеев В. Е., Замараев В. А., Захарова Д. В., Малышев Д. С., Мокеев Д. Б.* Некоторые результаты о наследственных классах графов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2011. — № 6. — С. 169–173.
2. *Алексеев В. Е., Замараев В. А., Захарова Д. В., Малышев Д. С., Мокеев Д. Б., Сорочан С. В.* Некоторые результаты о наследственных классах графов II // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2012. — 6(1). — С. 115–120.
3. *Алексеев В. Е., Замараев В. А., Захарова Д. В., Малышев Д. С., Мокеев Д. Б., Сорочан С. В.* Некоторые результаты о наследственных классах графов III // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2013. — 6(1). — С. 165–172.
4. *Алексеев В. Е., Мокеев Д. Б.* Кёниговы графы относительно 3-путей // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, № 4. — С. 3–14.
5. *Мокеев Д. Б.* О кёниговых графах относительно P_4 // Дискретный анализ и исследование операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 61–79.
6. *Alekseev V. E., Mokeev D. B.* König graphs for 3-paths and 3-cycles // Discrete Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 204. — P. 1–5.
7. *Mokeev D.* König graphs for 4-paths // Models, Algorithms and Technologies for Network Analysis. Vol. 104 / ed. by M. V. Batsyn, V. A. Kalyagin, P. M. Pardalos. — Cham : Springer, 2014. — P. 93–103. — (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics). — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-09758-9_8.
8. *Mokeev D.* König Graphs for 4-Paths: Widened Cycles // Models, Algorithms and Technologies for Network Analysis. Vol. 156 / ed. by V. A. Kalyagin, P. A. Koldanov, P. M. Pardalos. — Cham : Springer, 2016. — P. 45–54. — (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics). — URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-29608-1_3.

Тезисы докладов в сборниках трудов конференций

9. *Мокеев Д. Б.* Упаковки и покрытия 3-путей // Материалы VIII Молодежной научной школы по дискретной математике и ее приложениям. Ч. 2. — 2011. — С. 19–23.

10. *Мокеев Д. Б.* Упаковки и покрытия графов относительно 3-пути // Материалы XVI Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики". — 2011. — С. 327–330.
11. *Мокеев Д. Б.* Структурные и сложностные характеристики класса Кёниговых графов относительно 3-пути // Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и её приложения», посвященного 80-летию со дня рождения академика О.Б. Лупанова. — 2012. — С. 302–305.
12. *Мокеев Д. Б.* Кёниговы графы относительно 4-пути // Международная научная конференция «Дискретная математика, теория графов и их приложения (DIMA-2013)». Тезисы докладов. — 2013. — С. 32–33.
13. *Мокеев Д. Б.* Кёниговы графы относительно 4-пути // Материалы XVII Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики". — 2014. — С. 207–209.
14. *Мокеев Д. Б.* Кёниговы графы относительно 4-пути // XXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам «КРОМШ-2014» Сборник тезисов. — 2014. — С. 108–109.
15. *Мокеев Д. Б.* О равенстве чисел P_4 -упаковки и P_4 -покрытия в графах // Труды IX международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». — 2015. — С. 166–168.
16. *Мокеев Д. Б.* О равенстве чисел P_4 -упаковки и P_4 -покрытия в графах // Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения». Тезисы докладов. — 2015. — С. 125–126.

Можеев Дмитрий Борисович

УПАКОВКИ И ВЕРШИННЫЕ ПОКРЫТИЯ ПУТЕЙ В ГРАФАХ И
КЁНИГОВЫ ГРАФЫ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____