

На правах рукописи



Радостин Андрей Викторович

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН
В СРЕДАХ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ**

01.04.06 – акустика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Нижний Новгород – 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева».

Научный консультант: доктор физико-математических наук, профессор
Куркин Андрей Александрович

Официальные оппоненты: **Громов Евгений Михайлович**,
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики НИУ ВШЭ Нижний Новгород

Землянухин Александр Исаевич,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры "Прикладная математика
и системный анализ" СГТУ, Саратов

Хохлова Вера Александровна,
доктор физико-математических наук,
доцент кафедры акустики
физического факультета МГУ, Москва

Ведущая организация: ФГБУН Тихоокеанский океанологический
институт им. В.И. Ильичева ДВО РАН

Защита состоится «18» марта 2020 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д 212.166.07 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 1, аудитория 420.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского и на сайте диссертационного совета ННГУ им. Н.И. Лобачевского по адресу <https://diss.unn.ru/965>

Автореферат разослан “__” декабря 2019 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета
Д 212.166.07,
к.ф.-м.н., доцент



Клюев Алексей Викторович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность

Уравнения состояния (или соотношения «напряжение – деформация») характеризуют реакцию твердых тел на различные нагрузочные возмущения. Для многих горных пород, металлов и искусственных материалов уравнения состояния существенно нелинейны. В рамках классической (пяти - или девяти – константной) теории упругости нелинейность является малой квадратичной или кубичной по деформации поправкой к линейному слагаемому, что позволяет сравнительно легко получать решения уравнений, описывающих нелинейные волновые процессы [Зарембо, Красильников, 1966; Наугольных, Островский, 1990]. Нелинейность таких сред обусловлена ангармоничностью межатомного потенциала и достаточно слабо выражена даже при деформациях, близких к разрушению материала, поскольку характерные значения безразмерных параметров нелинейности не превышают 10 [Зарембо, Красильников, 1966].

Распространение и взаимодействие волн в рамках квадратичной или кубичной нелинейности исследовано достаточно подробно: во многих случаях получены точные аналитические решения как для идеальной («чисто» нелинейной) среды, так и в случае учета различных линейных факторов, таких как линейная диссипация, линейная релаксация, линейная дисперсия [Руденко, Солуян, 1975; Наугольных, Островский, 1990]. Численные методы исследования таких сред также хорошо развиты: часто используются спектральные методы, поскольку нелинейное слагаемое в уравнениях заменяется сверткой в Фурье пространстве; также используются конечные разности [Пищальников и др., 1996].

Более разнообразно (и более интенсивно) нелинейные волновые процессы протекают в микронеоднородных (или, в англоязычной литературе, мезоскопических) средах, к которым, по-видимому, относятся большинство горных пород и грунтов, а также некоторые поликристаллические металлы и конструкционные материалы [Наугольных, Островский, 1990; Ostrovsky, Johnson, 2001].

Микронеоднородной средой называется среда, содержащая неоднородности или дефекты, размер которых много больше атомарного, но много меньше длины волны, при этом на длине волны находится много дефектов, а их распределение в пространстве статистически однородно, так что среду, в *среднем*, можно считать «акустически однородной» или «макрооднородной» на участках, больших по сравнению с размерами дефектов, но малых по сравнению с длиной волны [Исакович, 1979].

Для описания уравнения состояния реальных микронеоднородных сред рассмотренный выше подход в рамках классической пяти - или девяти -

константной теории упругости не применим из-за их сложной структуры и наличия различных, как правило нелинейных, микродефектов — трещин, полостей, зерен, дислокаций и т. д. Уравнения состояния микронеоднородных твердых тел отвечают типу и количеству содержащихся в них дефектов и, как правило, являются *неаналитическими* (т. е. негладкими и недифференцируемыми) [Назаров и др., 2003; Руденко, 2018]. К настоящему времени известно множество примеров: 1) необратимое движение дефектов кристаллической решетки (дислокаций) под действием акустического возмущения приводит к микропластическим деформациям, для описания которых необходимо привлекать гистерезисные (т. е. неоднозначные) зависимости напряжения от деформации [Давиденков, 1938; Granato, Lücker, 1956]; 2) наличие в структуре твердого тела щелеобразных дефектов (трещин с гладкими поверхностями) приводит к его разномодульности (или билинейности) — различию модулей упругости при сжатии и растяжении [Амбарцумян, 1982; Антонец и др., 1986]; зеренная структура материала характеризуется нелинейностью со степенью $3/2$ [Нестеренко, 1983; Назаров, 1991; Беляева и др., 1993]. При этом обычно эффективные квадратичные параметры упругой (или реактивной) нелинейности микронеоднородных твердых тел на два - три порядка превышают соответствующие параметры однородных сред и материалов [Nazarov et al, 1988; Руденко, 2006].

Кроме того, часто нелинейные акустические свойства микронеоднородных сред (в отличие от однородных) зависят от частоты акустического воздействия, т. е. нелинейность микронеоднородных сред обладает дисперсией. (Вообще говоря, частотно-зависимыми являются не только нелинейные, но и линейные акустические параметры микронеоднородных сред, а именно декремент затухания и фазовая скорость упругих волн, что также, хотя и в меньшей степени, влияет на динамику нелинейных волновых процессов) [M1; Зайцев и др., 2009]. В связи с этим характер проявления нелинейных эффектов при распространении и взаимодействии упругих волн в различных микронеоднородных средах является не только количественно, но и качественно различным, что можно использовать для их диагностики и неразрушающего контроля. Этому также способствует и то, что нелинейные акустические свойства таких сред являются более чувствительными к наличию в них дефектов, чем линейные [Зайцев и др., 2009].

Уравнения с неаналитической нелинейностью еще не достаточно хорошо изучены к настоящему времени. Можно отметить решения, полученные для квадратичной гистерезисной нелинейности [Gusev et al, 1997; Назаров и др., 2003] без учета линейных факторов, т.е. аналогов уравнения простой волны. Было, в частности, получено, что в отличие от

среды с квадратичной нелинейностью, в процессе распространения в профиле волны не образуется неоднозначностей, а генерация высших гармоник происходит одновременно всех в первом приближении, их амплитуды на малых расстояниях пропорциональны квадрату амплитуды волны на основной частоте. В случае разномодульной среды подобные уравнения также исследовались [Маслов, Мосолов, 1985; Назаров, Островский, 1990]. Было получено, что неоднозначность образуется сразу на источнике, в первом приближении происходит генерация всего спектра четных гармоник, во втором – только нечетных, и т.д.

В случае произвольной степени гистерезисной нелинейности развиты методики расчета колебаний в сосредоточенных системах на основе метода возмущений, поскольку амплитуды высших гармоник все равно оказываются на несколько порядков меньше амплитуды колебаний на основной частоте [Пальмов, 1976].

Наличие точек перехода от одной ветки неаналитической функции к другой приводит к затруднениям при численном моделировании методом конечных разностей нелинейных волновых процессов в микронеоднородных средах. Также не всегда возможно применение спектрального подхода в обычной форме.

Необходимо также отметить, что уравнения состояния микронеоднородных сред вводятся феноменологическим образом для описания результатов экспериментальных исследований различных нелинейных эффектов в различных средах, поэтому расширение спектра эффектов и общего количества исследуемых сред позволяет решать задачи классификации и идентификации этих сред.

Из всего вышеприведенного вытекает необходимость и актуальность исследований, выполненных в настоящей диссертации.

Цели диссертационной работы

- получение точных и приближенных аналитических решений уравнений, описывающих распространение упругих волн в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной степени без учета линейной диссипации;
- получение точных аналитических решений уравнений, описывающих распространение продольных акустических волн в средах с квадратичной гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией вязкого типа;
- получение точных аналитических решений уравнений, описывающих распространение продольных акустических волн в средах с разномодульной нелинейностью и различных линейных факторов: диссипацией вязкого типа, линейной и нелинейной релаксацией;

- разработка численных подходов к решению задач о распространении продольных акустических волн в средах с разномодульной и квадратичной гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией вязкого типа;
- получение новых и систематизация известных экспериментальных данных по исследованию нелинейных акустических эффектов в резонаторах из горных пород и цементного материала;
- получение новых экспериментальных результатов по исследованию нелинейных акустических эффектов в гранулированных средах.

Методы исследования и степень достоверности результатов

Для достижения поставленных целей используются теоретические методы, основанные на анализе масштабных преобразований, исследований симметрий уравнений, разделении переменных. Численные схемы разработаны на основе спектрального подхода, широко применяемого при исследованиях волновых процессов в средах с классической (квадратичной или кубичной) нелинейностью. Достоверность полученных результатов подтверждается соответствием теоретических результатов данным, полученным с помощью численного моделирования и экспериментальных исследований, а также расчетам, представленным в работах других авторов.

Научную новизну работы составляют положения, выносимые на защиту:

В диссертации разработаны подходы для описания закономерностей распространения непрерывных и импульсных упругих волн в средах с гистерезисной и разномодульной нелинейностями. Дано полное описание особенностей распространения волн в средах с целочисленными значениями гистерезисной нелинейности. Сформулированы основы диагностических методов для сред с неаналитической нелинейностью.

1. Получены и проанализированы новые точные (для целочисленных значений степени) и приближенные (для произвольных значений степени) аналитические решения для импульсных и периодических волн в средах с произвольными значениями степени гистерезисной нелинейности без учета линейной диссипации. Также, для произвольного значения степени предложено аналитическое решение в виде самоподобной волны.
2. Получены точные аналитические решения, описывающие распространение самоподобного импульса в средах с квадратичной гистерезисной нелинейностью при учете линейной диссипации вязкого типа.

3. Получены точные аналитические решения для распространения импульсных и непрерывных волн в средах с разномодульной нелинейностью при учете различных диссипативных и дисперсионных свойств среды: линейной диссипации, линейной релаксации, нелинейной релаксации.
4. Разработаны численные схемы для исследования распространения импульсных и периодических волн в средах с квадратичной гистерезисной нелинейностью, разномодульной нелинейностью при учете линейной диссипации вязкого типа.
5. Экспериментально обнаружена гистерезисная нелинейность с дробным показателем степени в образцах из известняка и цементного материала.
6. Показано, что экспериментально обнаруженные амплитудные зависимости коэффициента затухания, изменения фазовой скорости волны и амплитуды второй гармоники при исследовании самовоздействия и взаимодействия акустических волн, могут быть описаны в рамках феноменологического уравнения состояния среды, параметры которого чувствительны к состоянию среды.

Апробация работы и публикации.

Основные результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на Российских и международных конференциях и семинарах.

XVIII - XX и XXX сессии Российского Акустического Общества (2006 - 2008, 2017), Международные конференции III, IV International Conference: Frontiers of Nonlinear Physics, (Nizhny Novgorod, 2007, 2010), Международная конференция "XI Харитоновские тематические научные чтения" (г. Саров, , 2009), Всероссийская конференция ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И АКУСТИКИ СРЕД С МИКРО- И НАНОСТРУКТУРОЙ: НАНОМЕХ-2009, (НГТУ, Н. Новгород, 2009), Всероссийская (с международным участием) научная конференция "Комплексные геолого-геофизические модели древних щитов", (Апатиты, 2009), International Congress on Ultrasonics, (Chile, Santiago, 2009), XII, XV-XVII, XX, XXIII Научные конференции по радиофизике (ННГУ, Нижний Новгород, 2008, 2011 - 2013, 2016, 2019).

Полученные результаты используются в научно-исследовательских проектах различной направленности (Гранты Президента Российской Федерации, РФФИ, проекты в рамках федеральных целевых программ РФ и др.), в том числе выполняемых под руководством автора диссертации.

В диссертацию включены результаты исследований, поддержанные РФФИ: 19-05-00536, Трещины - и контакто - содержащие среды: развитие нетрадиционных подходов к описанию их акусто - упругих свойств для получения информации о структурных характеристиках из сравнения с

данными экспериментов; 15-05-05143, Новые сейсмо - акустические эффекты, обусловленные микроструктурой среды: модели и эксперименты; 12-02-31329, Исследование распространения акустических волн в средах с неклассической нелинейностью при учете диссипации, релаксации и рассеяния; 05-02-17355-а, Микроструктурно - обусловленная акустическая нелинейность твердых тел: эксперименты и модели; 05-05-64941-а, Экспериментальное исследование нелинейных волновых процессов в горных породах; 06-02-72550-ИЦНИЛ_а, Диагностические применения "неклассической" акустической нелинейности: от качественных эффектов к количественным характеристикам; 08-02-97039-р_поволжье_а, Разработка методов нелинейной акустической диагностики и неразрушающего контроля твердотельных материалов, конструкций и изделий машиностроения; 09-02-91071-ИЦНИ_а, Исследования динамики и структуры гранулированных материалов и родственных контакто - содержащих систем с использованием новых диагностических возможностей на основе нелинейно-акустического подхода; 11-02-97017-р_поволжье_а, Исследование влияния структуры мелко - зернистых бетонов на их нелинейные акустические свойства с целью создания эффективных методов диагностики и прогнозирования прочности бетонных конструкций; 11-05-01003-а, Структурно-обусловленные «неклассические» нелинейные свойства земных пород: теоретические модели и эксперимент.

Также включены результаты исследований, поддержанные Грантами Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (ИШ-2685.2018.5) и молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-4587.2006.2), а также полученные в ходе выполнения научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 5.1246.2017/4.6).

Публикации и личный вклад автора.

Основные положения диссертации представлены в 40 работах, включая: 2 монографии, 1 главу в монографии, 25 статей в журналах, включенных в список ВАК и/или входящих в мировые индексы цитирования (SCOPUS, Web of Science).

В экспериментальных работах, автор принимал участие в проведении экспериментов, обрабатывал данные и интерпретировал полученные результаты. Аналитические результаты получены автором, также при непосредственном участии автора разработаны численные схемы.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Общий объем диссертации составляет 193 страницы, в том числе 91 рисунок, библиография - 100 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** описывается основная проблематика работы, обосновывается ее актуальность, формулируются цели и задачи исследования, положения, выносимые на защиту, новизна и практическая значимость.

В **Главе 1** представлены результаты теоретических исследований распространения импульсных и периодических волн в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной степени без учета линейной диссипации. Также получено аналитическое решение и предложена численная схема для исследования волновых процессов в средах с квадратичным гистерезисом и диссипацией вязкого типа.

В **разделе 1.1** представлен обзор опубликованных результатов экспериментальных исследований, на основе которого построена диаграмма частоты встречаемости значений показателя степени гистерезисной нелинейности.

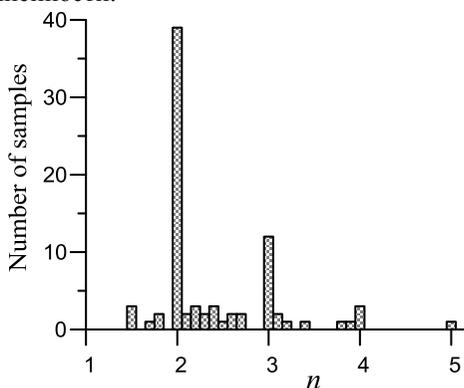


Рис. 1. Показатели степени гистерезисной нелинейности для различных материалов по результатам экспериментальных исследований.

На рис. 1 изображена диаграмма значений степеней гистерезисной нелинейности по 82 опубликованным экспериментальным свидетельствам. Хорошо видно, что квадратичная нелинейность использовалась для описания нелинейных эффектов в 39 случаях. Также в 12 случаях наблюдаемые эффекты описывались в рамках кубичной модели. Также

необходимо отметить, что имеется больше 10 значений, которые, даже, если допустить определенную погрешность в вычислении степени по результатам эксперимента, не могут быть отнесены к целочисленным.

Таким образом, решение задач о распространении акустических волн в средах с обобщенными гистерезисными уравнениями состояния является актуальной и до настоящего времени мало изученной проблемой.

В разделе 1.2 представлен обзор основных математических моделей, которые описывают степенные гистерезисные уравнения состояния.

В общем виде уравнение состояния среды представляется в следующем виде:

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})],$$

где σ - напряжение, ε - деформация, $\dot{\varepsilon}$ - скорость деформации E - модуль упругости, $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ - гистерезисная функция деформации и скорости деформации, $|f'_\varepsilon(\varepsilon, \dot{\varepsilon})| \ll 1$.

В работе используется гистерезисная функция 3-х видов.

1. Модель Давиденкова [Давиденков, 1938] для однополярных возмущений:

$$f(\varepsilon, \text{sgn } \dot{\varepsilon}) = \frac{\gamma}{n} \begin{cases} \varepsilon^n, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -(\varepsilon_m - \varepsilon)^n + \varepsilon_m^n, & \dot{\varepsilon} < 0; \end{cases} \quad (1)$$

где γ - параметр нелинейности, n - показатель степени, $\varepsilon_m = \varepsilon_m(x)$ - локальная амплитуда деформации среды, $|\gamma| \varepsilon_m \ll 1$, $|\gamma| \gg 1$;

2. Модель Давиденкова [Давиденков, 1938] для периодических возмущений:

$$f(\varepsilon, \text{sgn } \dot{\varepsilon}) = \frac{\gamma}{n} \begin{cases} (\varepsilon_m + \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_m^n, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -(\varepsilon_m - \varepsilon)^n + 2^{n-1} \varepsilon_m^n, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases} \quad (2)$$

3. Обобщенная модель Гранато-Люке с нелинейным возвратом [Granato, Lücke, 1956; Mason, 2013; Зименков, Назаров, 1993]:

$$f(\varepsilon, \text{sgn } \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{n} \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon^n, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} > 0; \\ (\gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon_m^{n-1} \varepsilon - \gamma_2 \varepsilon^n, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ -\gamma_3 \varepsilon^n, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ (-1)^n (\gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m^{n-1} \varepsilon + \gamma_4 \varepsilon^n, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (3)$$

где $|\gamma_{1,2} \varepsilon_m^{n-1}| \ll 1$, $|\gamma_{3,4} \varepsilon_m^{n-1}| \ll 1$, $|\gamma_{1-4}| \gg 1$.

В разделе 1.3 представлены результаты теоретического исследования распространения пилообразные волны в безграничной среде в рамках модели (2), для которой было получено эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \cdot \begin{cases} (\varepsilon_m + \varepsilon)^{n-1}, & \varepsilon_\tau > 0; \\ (\varepsilon_m - \varepsilon)^{n-1}, & \varepsilon_\tau < 0. \end{cases}$$

Решение этого уравнения для пилообразного начального условия может быть записано в неявном виде

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^z [\varepsilon_m(z') + \varepsilon(z, \theta)]^{n-1} dz' + \varepsilon(z, \theta) / 2, & \varepsilon_\theta > 0; \\ \frac{1}{2} \int_0^z [\varepsilon_m(z') - \varepsilon(z, \theta)]^{n-1} dz' + 1 - \varepsilon(z, \theta) / 2, & \varepsilon_\theta < 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $\theta = \tau/T$, $z = \gamma \alpha \varepsilon_0^{n-1} / (cT)$, $\varepsilon = \varepsilon / \varepsilon_0$, $\varepsilon_m = \varepsilon_m / \varepsilon_0$, $\varepsilon_m(0) = 1$. Отсюда получаем выражение для относительного изменения скорости волны

$$\frac{\Delta C(z)}{C} = \frac{d\theta(\varepsilon=0)}{dz} = \frac{1}{2} \varepsilon_m^{n-1}(z).$$

Из условия сшивки $\theta(\varepsilon_m, \varepsilon > 0) = \theta(\varepsilon_m, \varepsilon < 0) = \theta_m(z)$ получаем уравнение для зависимости амплитуды волны от пройденного расстояния:

$$\int_0^z [\varepsilon_m(z') + \varepsilon_m(z)]^{n-1} dz' - \int_0^z [\varepsilon_m(z') - \varepsilon_m(z)]^{n-1} dz' = 2[1 - \varepsilon_m(z)]. \quad (5)$$

Это нелинейное интегральное уравнение относительно $\varepsilon_m(z)$ достаточно легко решается в случае целочисленных значений n .

В частности, для $n = 3$, получаем следующее:

$$\theta = \begin{cases} -\frac{1}{4} \ln \varepsilon_m + \frac{\varepsilon}{2 \varepsilon_m} + \frac{\varepsilon^2 z}{2}, & \varepsilon > 0; \\ 1 - \frac{1}{4} \ln \varepsilon_m - \frac{\varepsilon}{2 \varepsilon_m} + \frac{\varepsilon^2 z}{2}, & \varepsilon < 0, \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\varepsilon_m^2} - 1 \right), \quad \varepsilon_m(z) = [1 + 4z]^{-1/2}, \quad \theta_m = -\frac{1}{4} \ln \varepsilon_m + \frac{5}{8} - \frac{\varepsilon_m^2}{8},$$

При этом нелинейный декремент определяется следующим образом:

$$\delta = -\frac{1}{\varepsilon_m(z)} \frac{d \varepsilon_m(z)}{dz} = 4 \varepsilon_m^2.$$

Профили волн в этом случае на различных расстояниях от источника представлены на рис. 1. Хорошо видно, что с ростом расстояния профиль волны становится нелинейным, причем часть периода при $\varepsilon_\theta > 0$

представляет собой выпуклую функцию, тогда как часть с $\epsilon_\theta > 0$ соответствует вогнутой.

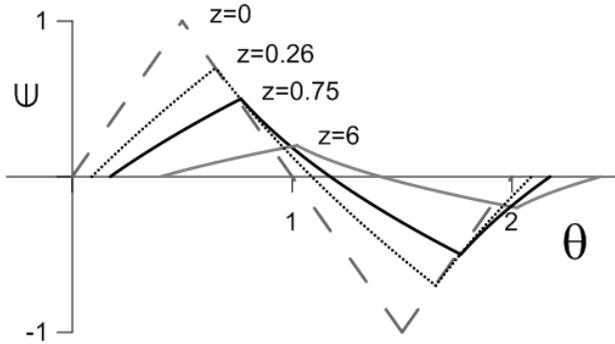


Рис. 2. Профили пилообразной волны при $n = 3$ для различных расстояний z .

На рис. 3. представлены профили волн для различных значений степени гистерезисной нелинейности ($n = 2, 3, 4, 5$) на расстоянии $z = 1$, соответствующем характерной длине нелинейного взаимодействия. Хорошо видно, что увеличение n с 3 до 5 приводит к более выпуклой форме волны, при этом амплитуды $\epsilon_m(z)$ и их фазы θ_m меняются незначительно. (Также для сравнения на этом рисунке представлена форма волны для случая $n = 3/2$, рассчитанная по формуле (6), полученной ниже.)

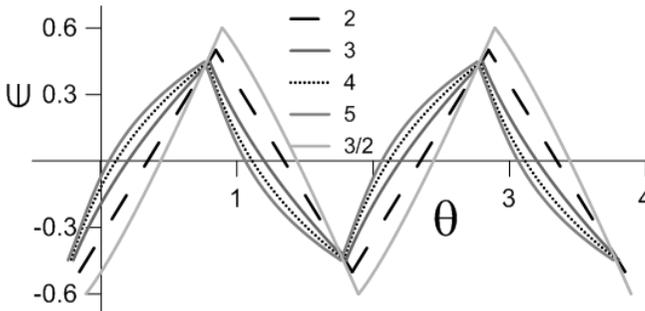


Рис. 3. Профили волн для различных значений степени гистерезисной нелинейности ($n = 3/2, 2, 3, 4, 5$) на расстоянии $z = 1$.

Было показано, что зависимость $\epsilon_m(z) = (1 + az)^{\frac{1}{1-n}}$ может быть использована как приближенное решение уравнения (5) для произвольного значения n (a - зависящий от n коэффициент, который определяется из численного решения уравнения (5), например, 0.28 для $3/2$, 0.47 для $5/3$, 2.2

для 5/2, 10 для 4, 22 для 5. Подстановка приближенного решения в выражение (4) дает решение исходной задачи для произвольных (дробных) значений степени гистерезисной нелинейности в следующем виде:

$$\theta = \begin{cases} \frac{\epsilon(z, \theta)}{2} - \frac{n-1}{2a} \left[\ln \epsilon_m - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n) \epsilon(z, \theta)^k}{kk! \Gamma(n-k)} \left(\frac{1}{\epsilon_m^k} - 1 \right) \right], & \dot{\epsilon} > 0; \\ 1 - \frac{\epsilon(z, \theta)}{2} - \frac{n-1}{2a} \left[\ln \epsilon_m - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(n) \epsilon(z, \theta)^k}{kk! \Gamma(n-k)} \left(\frac{1}{\epsilon_m^k} - 1 \right) \right], & \dot{\epsilon} < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $\Gamma(k)$ - Гамма функция.

Также в этом разделе получены более общие выражения для самоподобных волн, полностью формирующихся на расстоянии $z = 1$, фактически описывающих вид решений для произвольного начального условия (Рис. 3).

В разделе 1.4 представлены результаты теоретического исследования распространения однополярных импульсов в рамках модели (1). Были получены точные решения для целочисленных значений степени гистерезисной нелинейности, а также приближенные для произвольных значений следующего вида:

$$\epsilon_m = \frac{1}{\sqrt[n]{1+az}}, \quad \theta^* = 1 + \frac{n(1-\epsilon_m)}{2a\epsilon_m}, \quad (7)$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\epsilon(z, \theta)}{2} + \frac{\epsilon(z, \theta)^{n-1} z}{2}, & \dot{\epsilon} > 0; \\ \frac{1}{2a\epsilon} \left[(1 - \epsilon(z, \theta))^n - \left(1 - \frac{\epsilon(z, \theta)}{\epsilon_m} \right)^n \right] + 1 - \frac{\epsilon(z, \theta)}{2}, & \dot{\epsilon} < 0; \end{cases}$$

Здесь θ^* - длительность импульса, а параметр a принимает следующие значения: 0.64 для 3/2; 0.76 для 5/3; 1.3 для 5/2; 1.9 для 4 и 5.

Выражения (7) использовались для интерпретации экспериментальных результатов из работы [Yasumoto Y et al., 1974], где наблюдалось распространение импульсов, близких к однополярным, без образования ударного фронта с характерным нелинейным ограничением амплитуды в алюминиевых образцах, подвергнутых отжигу при разных температурах.

На основании выражений (7) было получено, что образцы, подвергнутые отжигу при температурах 350°C (I), 450°C (II) и 500°C (III) обладают гистерезисной нелинейностью степени 4, при этом эффективные параметры нелинейности увеличиваются в 5 и 15 раз в образцах II и III, соответственно, относительно значения параметра нелинейности образца I.

В разделе 1.5 представлены результаты теоретического и численного исследования распространения импульсных и периодических волн в средах с гистерезисными уравнениями (1) и (2) при учете диссипации вязкого типа.

Для однополярных импульсов рассматривалось безразмерное эволюционное уравнение следующего вида:

$$\frac{\partial e}{\partial z} + \left[e - \frac{1}{2} e_m(z) \right] \frac{\partial e}{\partial \tau} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2}, \quad (8)$$

где $e = \varepsilon / \varepsilon_0 \geq 0$, $e_m(z) = \varepsilon_m / \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\max}(x=0)$, T_0 - начальная длительность импульса, $\Gamma = \frac{2\gamma\varepsilon_0 C^2 T_0}{\alpha}$ - число Гольдберга для гистерезисной среды, характеризующее отношение нелинейности и диссипации, α - коэффициент вязкости, $\tau = \theta - \frac{1}{2} \int_0^z e_m(z') dz'$.

Это уравнение является аналогом уравнения Бюргерса в классической нелинейной акустике и обладает характерными теми же характерными свойствами. Во-первых, имеет место сохранение импульса, т.е.

$$\frac{d}{dz} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e(z, \tau) d\tau \right) = 0, \text{ во-вторых, профиль волны } e = e(z, \tau) \text{ - непрерывная и}$$

однозначная функция при конечных значениях Γ . Также, как и уравнение Бюргерса, имеет трансляционную симметрию $[e(z, \tau) \Leftrightarrow e(z+a, \tau+b)]$, но в отличие от него, четную симметрию отражения $[e(z, \tau) \Leftrightarrow e(z, -\tau)]$, где $a, b = \text{const}$, а знак \Leftrightarrow означает наличие симметрии [Гурбатов и др., 2008].

Далее было показано, что поскольку нелинейность уравнения (8) квадратичная по амплитуде волны, как и для уравнения Бюргерса будем искать автомодельное решение в виде [Руденко, Солуян, 1975]:

$$e(z, y) = \frac{\varepsilon(y)}{\sqrt{z+c}}, \quad (\text{где } y = \frac{\tau}{\sqrt{z+c}}, \quad \varepsilon(0) = \varepsilon_0, \quad e_m(z) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{z+c}}, \quad c -$$

положительная константа. Такое автомодельное решение описывает затухающую волну, не меняющую своей формы $\varepsilon = \varepsilon(y)$ при распространении.

Решение этого уравнения с начальным условием $\varepsilon_y(0) = 0$ имеет вид:

$$\varepsilon(y) = \frac{2\varepsilon_0 \exp\left\{-\frac{\Gamma}{4}(|y| - \varepsilon_0)^2\right\}}{\sqrt{\pi\Gamma} \varepsilon_0 \left\{\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\Gamma}}{2}(|y| - \varepsilon_0)\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\Gamma}}{2}\varepsilon_0\right)\right\} + 2 \exp\left(-\frac{\Gamma}{4}\varepsilon_0^2\right)},$$

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$ - интеграл ошибок.

Это решение описывает симметричный колоколообразный импульс, в отличие несимметричного автомодельного решения уравнения Бюргерса

[Руденко, Солуян, 1975]. Амплитуда ϵ_0 может быть определена как корень трансцендентного уравнения, следующего из закона сохранения импульса.

На рисунке 4 представлены формы самоподобного решения в зависимости от значения параметра Γ ($\Gamma \rightarrow \infty, 100, 10, 2$).

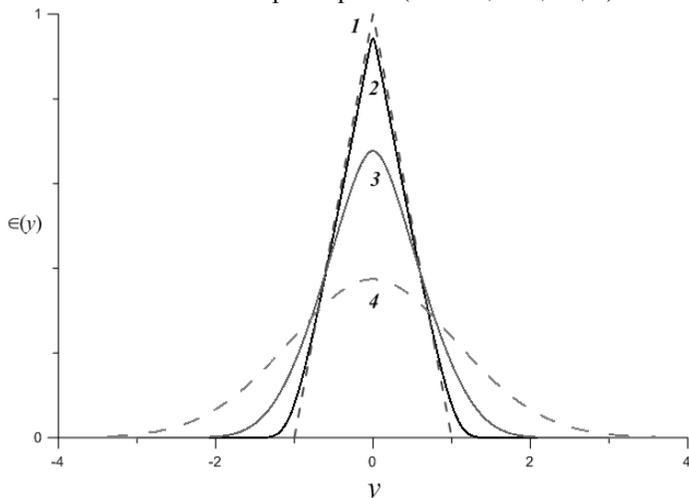


Рис. 4. Форма самоподобного решения $\epsilon(y)$ для различных значений Γ : 1 - $\epsilon(y) = 1 - |y|$, 2 - $\Gamma = 100$, 3 - $\Gamma = 10$ и 4 - $\Gamma = 2$.

При уменьшении значения параметра импульс становится более гладким, приобретая форму кривой Гаусса. При достаточно больших значениях Γ форма импульса близка к треугольной ($\epsilon(y) = 1 - |y|$, $|y| \leq 1$).

В случае граничного условия произвольной формы решение уравнения (8) может быть получено численно на основе спектрального подхода [Пищальников и др., 1996]. Свойство четной симметрии отражения позволяет существенно упростить форму решения, в частности, оно может быть представлено в виде ряда Фурье с только косинусными слагаемыми

$$e(z, \tau) = \frac{a_0(z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \cos(n\tau) \quad (a_n(z) \text{ коэффициенты Фурье}).$$

Не смотря на предположении о периодичности волны, это представление также может быть использовано для описания одиночных импульсов с характерной длительностью $T_0 \ll T$, полагая временной интервал T между импульсами как один цикл периодической последовательности таких импульсов.

Максимум импульса в сопровождающей системе координат всегда находится при $\tau = 0$, следовательно, $e_m(x) = \frac{a_0(z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \cdot 1$

Очевидно, что производная $\partial e / \partial \tau$ является нечетной функцией; а ее модуль $|\partial e / \partial \tau|$ - четная, и может быть записана как

$\left| \frac{\partial e(z, \tau)}{\partial \tau} \right| = \frac{b_0(z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z) \cos(n\tau)$, где коэффициенты $b_n(z)$ могут быть выражены через $a_n(z)$, используя определение коэффициентов ряда Фурье

$$b_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial e}{\partial \tau} \right| \cos(n\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z) \frac{[1 - (-1)^{k+n}] k^2}{k^2 - n^2}, \quad k \neq n.$$

После подстановки этих выражений в (8) получаем линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $a_n(z)$:

$$\frac{da_0}{dz} = -\frac{a_0 b_0}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [(b_0/2) - b_k], \quad (9)$$

$$\frac{da_n}{dz} = -\frac{a_0 b_n}{4} - \frac{a_n b_0}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} b_k - \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k b_{k-n} + a_{k-n} b_k) + \frac{b_n}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \frac{n^2}{\Gamma} a_n.$$

Система уравнений (9) позволяет решить уравнение (8) численно, ограничивая число гармоник N в зависимости от требуемой точности.

На рисунке 5 представлены профили импульсов для граничного условия в виде симметричного треугольного импульса для различных значений расстояния от источника z при $N = 200$ (сплошные линии) и самоподобные решения (пунктирные линии).

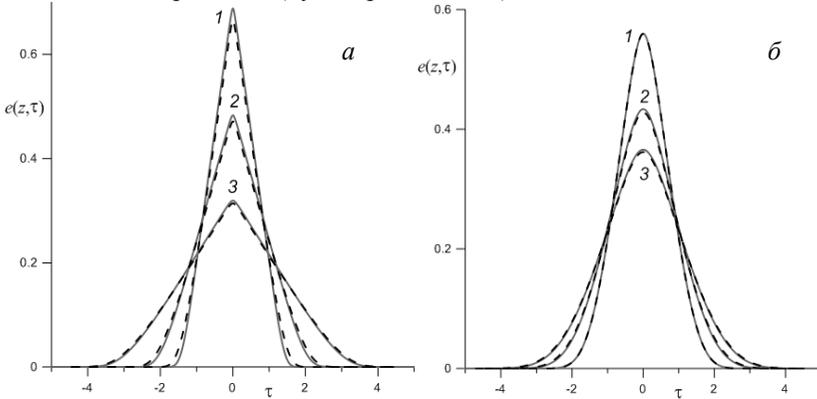


Рис. 5. Эволюция изначально треугольного импульса при $\Gamma = 100$ (а), сплошные линии – численное решение для $z = 1$ (1), 3 (2), 8 (3); пунктирные линии – самоподобное решение при $z + c = 2$ (1), 4 (2), 9 (3) и при $\Gamma = 10$ (б), сплошные линии – численное решение для $z = 1$ (1), 2 (2), 3 (3); пунктирные линии – самоподобное решение при $z + c = 1.5$ (1), 2.5 (2), 3.5 (3).

Хорошо видно, что самоподобные импульсы становятся близкими к рассчитанным численно при значениях константы c от 1 при $\Gamma=100$ до 0.2 при $\Gamma=2$. Случай $c=1$ соответствует уменьшению амплитуды изначально треугольного импульса в среде с только гистерезисной нелинейностью, тогда как случай $c \rightarrow 0$ близок к решению линейного уравнения диффузии с граничным условием в виде дельта-функции.

Аналогичным образом проведено численное моделирование распространения периодических волн в среде с квадратичной гистерезисной нелинейностью вида (2) и диссипацией вязкого типа.

В **разделе 1.6** представлены основные результаты **Главы 1**.

Во **второй главе** представлены результаты исследования волновых процессов в средах с разномодульной нелинейностью (т.е. имеющих различные модули E_1 и E_2 упругости при растяжении и сжатии) при учете различных диссипативных и дисперсионных свойств среды: линейной диссипации, линейной релаксации, дисперсии. Также рассмотрено распространение волн в квадратично-разномодульной среде и среде с нелинейностью более общего вида.

В **разделе 2.1** приведен обзор сред с разномодульными свойствами и известные результаты исследований волновых процессов. Разномодульными (или бимодульными) упругими свойствами обладает довольно широкий класс твердых тел: некоторые полимеры, композиционные и конструкционные материалы, грунты, а также твердые тела, содержащие трещины. Отмечается, что в разномодульной среде нелинейный режим распространения имеет место только для разнополярных волн, однополярные же возмущения распространяются линейно, с постоянными, но различными скоростями (зависящими от их полярности). Нелинейное искажение разнополярной, гармонической волны в идеальной разномодульной среде происходит таким образом, что на каждом периоде в ее профиле, уже на сколь угодно малом расстоянии от излучателя, образуется “перехлест” (неоднозначность) и разрыв - ударный фронт, а амплитуды, появившихся при этом в спектре волны высших гармоник, пропорциональны первой степени амплитуды исходной волны.

В **разделе 2.2** приведены результаты исследования распространения непрерывных и импульсных волн в разномодульной среде с линейной диссипацией вязкого типа. Интерес к такой задаче и ее специфика обусловлены тем, что для волны в разномодульной среде с линейной диссипацией акустическое число Рейнольдса (Re) постоянно, в отличие от среды с квадратичной упругой нелинейностью и такой же линейной диссипацией, где вследствие затухания волны, значение числа Re уменьшается и, в итоге, при $|Re| \ll 1$, ее распространение асимптотически становится линейным. Для разномодульной среды с линейной диссипацией

число Re не зависит от амплитуды волны, поэтому, если изначально $|\text{Re}| \gg 1$, то в такой среде нелинейный режим распространения волны сохраняется фактически все время ее существования.

Динамическое уравнение состояния разномодульной среды с вязкой диссипацией имеет вид:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \gamma|\varepsilon|] + \alpha\rho\dot{\varepsilon},$$

где $E = \frac{E_1 + E_2}{2}$, $\gamma = \frac{E_1 - E_2}{E_1 + E_2}$ - параметр разномодульной нелинейности,

$|\gamma| \ll 1$, $|\varepsilon| \ll 1$.

Безразмерное эволюционное уравнение для такой среды имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = -\frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \theta} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2}, \quad (10)$$

где $\varepsilon = \varepsilon / \varepsilon_0$, $\theta = \omega t$, $z = \gamma \alpha x / 2C_0$, $\Gamma = \text{Re} = \gamma C_0^2 / \alpha \omega$ - число Гольдберга для разномодульной среды, ε_0 и ω - характерные (например, начальные) амплитуда и частота акустической волны. Из этого уравнения следует, что эволюция волны в такой среде зависит только от параметра Γ , причем, в случае $|\Gamma| \gg 1$ получаем сильно-нелинейную волну, а в случае $|\Gamma| < 1$ - практически линейное ее распространение. Далее, для определенности, мы будем полагать, что $\gamma \geq 0$ и, следовательно, $\Gamma \geq 0$ и $z \geq 0$.

Поскольку нелинейность уравнения (10) четная, как и в уравнении Бюргерса, то оно обладает такими же свойствами. Кроме того, уравнение (10) имеет частное точное решение, описывающее стационарную, т.е. не зависящую от координаты z , волну типа симметричного скачка.

Далее рассмотрено самоподобное решение уравнения (10) с помощью метода разделения переменных:

$$\varepsilon(z, \theta) = Z(z)\Psi(\theta), \quad Z(z=0) = 1, \quad Z(z) > 0.$$

Самоподобное решение, как и в случае для уравнения (8), описывает затухающую волну, не меняющую своей формы $\Psi = \Psi(\theta)$ в процессе распространения. Примерами таких самоподобных волн являются стационарные волны и солитоны - в нелинейных средах и гармонические волны - в линейных средах с вязкой диссипацией. В разномодульной среде самоподобные волны распространяются с постоянной и не зависящей от их амплитуды скоростью.

При $m < \Gamma/4$ (m - константа самоподобного решения, зависящая от формы граничного условия, $\Gamma \geq 0$), решения уравнения (10), с точностью до произвольной положительной константы, имеют вид:

$$\epsilon(z, \theta) = -\exp\left(-\frac{\Gamma|\theta|}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\Gamma\sqrt{1-4m/\Gamma}}{2}\theta\right) \exp(-mz).$$

Это решение представляет собой асимметричный разнополярный импульс, его форма представлена на рис. 6а.

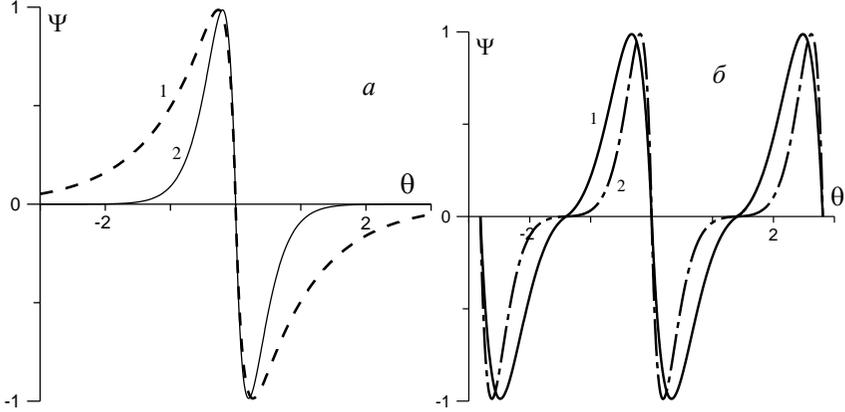


Рис. 6. Профили самоподобных импульсов (а) при $\Gamma = 10$: $m = 1$ (1); $m = 2.5$ (2) и периодических волн (б) при: $\Gamma = 5$, $m = 2.25$ (1), $\Gamma = 10$, $m = 3$ (2).

При $m > \Gamma/4$ самоподобное решение описывает периодическую по θ волну (с периодом $\theta_0 = \frac{4\pi}{\Gamma\sqrt{|1-4m/\Gamma|}}$). Каждый ее период также является

асимметричным разнополярным импульсом (Рис. 6б), определяемым выражением:

$$\epsilon(z, \theta) = -\exp\left(-\frac{\Gamma|\theta|}{2}\right) \sin\left(\frac{\Gamma\sqrt{|1-4m/\Gamma|}}{2}\theta\right) e^{-mz}, \quad -\frac{2\pi}{\Gamma\sqrt{|1-4m/\Gamma|}} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{\Gamma\sqrt{|1-4m/\Gamma|}}.$$

Для произвольного граничного условия уравнение (10) может быть решено с помощью спектрального подхода, аналогично описанному для уравнения (8). На рис. 7 показаны профили первоначально гармонических волн на различных расстояниях z при различных значениях параметра Γ . При $\Gamma \geq 1$ имеем сильное нелинейное искажение волны, а при $\Gamma < 1$ нелинейные искажения малы и волна распространяется практически линейно. Также хорошо видно, что на определенных расстояниях в зависимости от значений параметра Γ , профиль волны становится близким к форме самоподобных импульса или периодической волны.

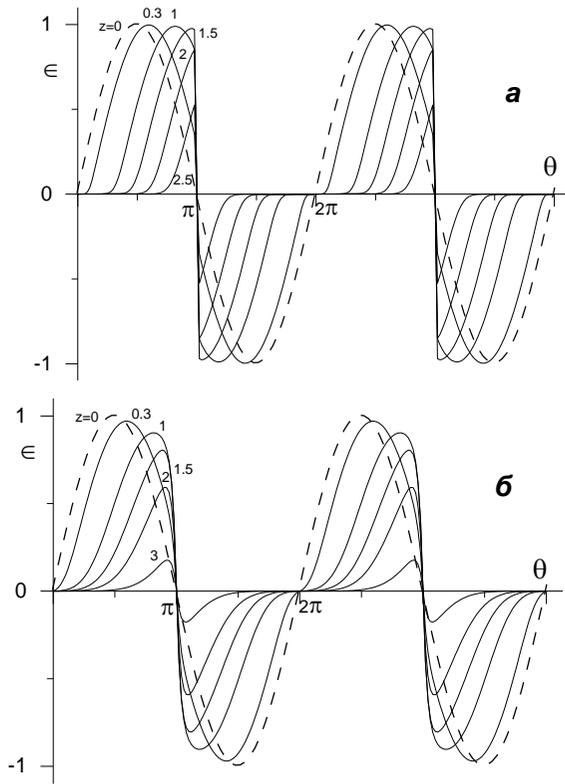


Рис. 7. Эволюция первоначально гармонических волн на различных расстояниях z при различных значениях параметра Γ : a - 100, b - 10.

В **разделе 2.3** приведены результаты теоретического исследования распространения упругих волн в разномодульной среде с релаксацией, уравнение состояния которой имеет следующий вид:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \gamma|\varepsilon|] + mC_0^2 \rho \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt',$$

где $C_0 = C/[1 + (m/2)]$ - фазовая скорость низкочастотной волны, τ_0 - время релаксации, $m > 0$ - безразмерный параметр, определяющий диссипацию и дисперсию среды. Если время релаксации τ_0 много меньше периода волны $T = 2\pi/\omega$ (ω - частота), то ее распространение происходит также, как в вязкой среде с низкочастотной скоростью $C_0 = C(\omega \rightarrow 0)$. Если же $\omega\tau_0 \gg 1$,

релаксационные процессы в среде “заморожены” и волна будет распространяться со скоростью $C_\infty = C(\omega \rightarrow \infty) > C_0$, так что

$$m = \frac{2(C_\infty - C_0)}{C_0} \ll 1 \text{ [Руденко, Солуян, 1975].}$$

Эволюционное уравнение для такой среды имеет вид:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\frac{\partial |\epsilon|}{\partial \theta} + h \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial \epsilon(\theta')}{\partial \theta'} \exp[-(\theta - \theta')] d\theta',$$

где $z = x\gamma/2C_0\tau_0$, $h = m/\gamma$ - параметр, характеризующий отношение релаксации к нелинейности.

В рамках этого уравнения получены стационарные и самоподобные решения, определены значения параметров, при которых в профиле волн обзурется неоднозначность.

В разделе 2.4 исследованы стационарные волны в разномодульном стержне конечного радиуса, что выражается в учете геометрической дисперсии продольных волн, произведена оценка параметров стержня для возможности наблюдения солитонов и периодических волн.

В разделе 2.5 представлены результаты исследования распространения упругих волн в среде с квадратично-разномодульной нелинейностью и линейной диссипацией, уравнение состояния которой имеет вид:

$$\sigma(\epsilon) = E \left(\epsilon - \frac{\gamma_1 \epsilon^2}{2(1 + \gamma_0 |\epsilon|)} \right) + \alpha \rho \dot{\epsilon},$$

где γ_1 и γ_0 - параметр нелинейности, $|\gamma_1 \epsilon| \ll 1$, $|\epsilon| \ll 1$, $|\gamma_1|/\gamma_0 \ll 1$, $\gamma_0 \geq 0$.

Нелинейность этого уравнения сочетает в себе свойства квадратичной при малых деформациях и разномодульной – при больших. Аналогично исследованиям, представленным в предыдущих разделах, исследованы стационарные решения, предложен численный метод для исследования периодических волн.

В разделе 2.6 предложено описание результатов натурального эксперимента по исследованию эффекта самовоздействия продольной сейсмоакустической волны, возбуждаемой в сыром песчаном глинистом грунте за счет трансформации звуковой волны, создаваемой в воде мощным гидроакустическим излучателем, в рамках уравнения состояния с нелинейностью следующего вида:

$$f(\epsilon) = \alpha_{1,2} \epsilon \left(\frac{\gamma_{1,2} \epsilon^2}{1 + \gamma_{1,2} \epsilon^2} \right) \operatorname{sgn} \epsilon,$$

где $0 < \alpha_{1,2} \ll 1$, $\gamma_{1,2} > 0$, $\alpha_{1,2} \gamma_{1,2} \epsilon^2 \ll 1$, а индексы 1, 2 соответствуют деформациям растяжения ($\epsilon > 0$) и сжатия ($\epsilon < 0$).

Такой эффект обусловлен нечетной упругой нелинейностью среды и проявляется в зависимости фазы $\Phi(\varepsilon_0)$ принимаемой волны от ее амплитуды (или амплитуды излучаемой волны ε_0). Анализ результатов этого эксперимента показал, что описание эффекта в рамках “классической” пяти- (или девяти-) константной теории упругости неправомерно.

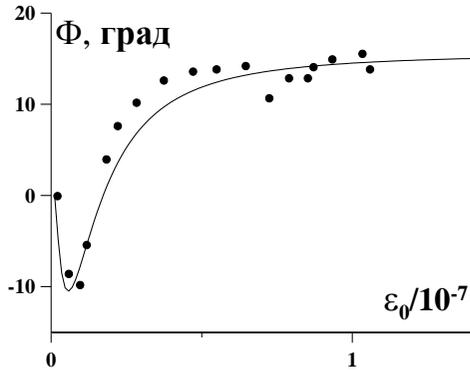


Рис. 8. Зависимость разности фаз $\Phi = \Phi(\varepsilon_0)$ от амплитуды излучаемой волны ε_0 при $r = 120$ м.

На рис. 8 показан пример (близкой к экспериментальной) расчетной зависимости, построенной при следующих значениях параметров нелинейной функции $\alpha_1 = 3.75 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_2 = 2.5 \cdot 10^{-2}$, $\gamma_1 = 0.5 \cdot 10^{18}$, $\gamma_2 = 7 \cdot 10^{18}$; видно, что расчетная кривая демонстрирует основные свойства наблюдаемой зависимости $\Phi = \Phi(\varepsilon_0)$ – положение и глубину минимума и наличие насыщения разности фаз. Из сравнения теоретических зависимостей с результатом эксперимента можно получить оценки для эффективных параметров $\Gamma_3 = (\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2) / 2$ и $\Gamma = (\alpha_1 - \alpha_2) / 2$ кубичной и разномодульной нелинейности сырого песчаного грунта в месте проведения эксперимента (на трассе распространения волны) при малых и больших амплитудах деформации ε_0 : $\Gamma_3 \cong -7.8 \cdot 10^{16}$, $\Gamma \cong 6.2 \cdot 10^{-3}$.

В разделе 2.7 представлены основные результаты Главы 2.

В третьей главе представлены результаты исследования волновых процессов в микронеоднородных средах с различными типами нелинейности (квадратичной, разномодульной, квадратичной гистерезисной).

В разделе 3.1 описана модель микронеоднородной среды (рис. 9), предложенная в работе [Зайцев и др., 2001], в виде цепочки последовательно соединенных жестких линейных пружинок и небольшого числа (приходящихся на единицу длины цепочки) относительно мягких нелинейных вязкоупругих дефектов, при этом предполагается, что размер дефекта много меньше длины акустической волны и расстояния между дефектами, на длине волны находится много дефектов, а их распределение в цепочке – статистически однородно, так что среду, в целом, можно считать “акустически однородной” или “макрооднородной” [Исакович, 1979].

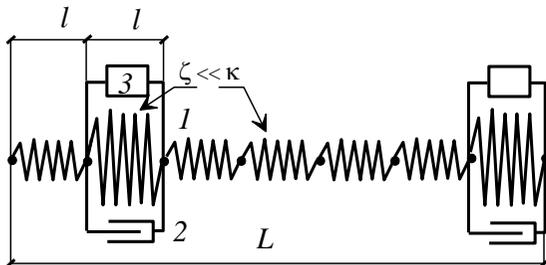


Рис. 9. Реологическая модель нелинейной микронеоднородной среды с релаксацией: 1 — линейная пружина, 2 — линейный демпфер, 3 — нелинейный элемент.

Для микронеоднородной среды, содержащей одинаковые вязкоупругие дефекты с малой ($\gamma\zeta R[R^2(\varepsilon)] \ll |R(\varepsilon)|$) квадратичной упругой нелинейностью (при малой концентрации дефектов), уравнение состояния имеет вид [Зайцев и др., 2001]:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \nu R(\varepsilon) - \nu\gamma\zeta R[R^2(\varepsilon)]], \quad (11)$$

где E и $C = (E/\rho)^{1/2}$ - модуль упругости и скорость волны для среды без дефектов (значение C соответствует также высокочастотному (ВЧ) пределу скорости волны в среде с дефектами), ν , ζ , β , γ и $\Omega = \zeta E/\beta$ - концентрация ($\nu \ll 1$), относительная упругость ($\zeta \ll 1$), коэффициент вязкости, параметр квадратичной нелинейности и релаксационная частота дефекта,

$$R(\varepsilon) = \frac{\Omega}{\zeta} \int_{-\infty}^{\tau} \varepsilon(\tau_1) \exp[-\Omega(\tau - \tau_1)] d\tau_1, \quad \varepsilon(R) = \frac{\zeta}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \zeta R.$$

В рамках этой модели эволюционное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\nu}{2C_0\Omega} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} R(V) - \frac{\nu\gamma\zeta}{2C_0^2} \frac{\partial}{\partial \eta} R[R^2(V)] = 0, \quad (12)$$

где $\eta = t - x/C_0$, $C_0 = C/(1 + m/2)$.

Для удобства анализа это уравнение может быть преобразовано в дифференциальное:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \eta} + R \right) - \frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \eta} + \frac{\gamma}{C_0} R^2 \right) = 0.$$

Полагая, что $\gamma > 0$, $\theta = \Omega \eta$, $R(\theta = \pm\infty) = \pm R_0 = \pm V_0 / \zeta$, $d^n R(\theta = \pm\infty) / d\theta^n = 0$, $n = 1, 2$, получим уравнение нелинейного осциллятора для нормированного “релаксатора” $Q(\theta) = R(\theta) / R_0$, определяющего профиль стационарной волны – симметричного скачка ($-1 \rightarrow 1$) для $Q = Q(\theta)$, движущегося со скоростью C_0 относительно неподвижной системы координат (или неподвижного в выбранной):

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \frac{dQ}{d\theta} - \mu(1 - Q^2) = 0,$$

где $\mu = \gamma V_0 / \zeta C \ll 1$.

На рис. 10 приведены результаты численного расчета профилей стационарных волн для $W = V(\theta) / V_0$ при различных значениях безразмерного параметра μ . Из этого рисунка следует, что при $\mu < 1/8$ профиль волны представляет собой монотонный перепад (как и в однородной среде [Руденко, Солуян, 1975]), а при $\mu > 1/8$ в профиле волны имеют место осцилляции.

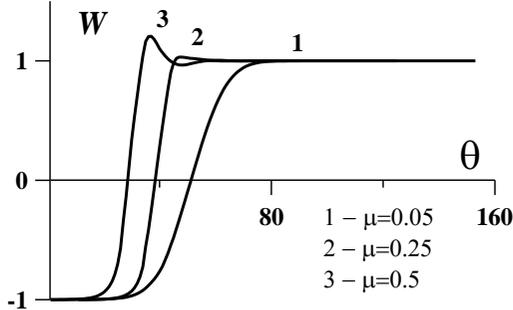


Рис. 10. Профили стационарных волн типа симметричного скачка при различных значениях параметра μ .

В НЧ пределе (при $g = \omega / \Omega \ll 1$, $\omega = 2\pi / T$), когда $R(V) \cong \zeta^{-1}(V - gV_g)$, $R^2(V) \cong \zeta^{-2}(V^2 - 2gVV_g)$, $R[R^2(V)] \cong \zeta^{-3}[V^2 - 4gVV_g]$, из (12) получаем уравнение, близкое к уравнению КдВБ [Руденко, Солуян, 1975],

отличающееся от последнего малым нелинейным слагаемым $g \frac{\partial^2 W^2}{\partial \vartheta^2}$

$$\left(g \left| \frac{\partial^2 W^2}{\partial \vartheta^2} \right| \ll \left| W \frac{\partial W}{\partial \vartheta} \right| \right):$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} - W \frac{\partial W}{\partial \vartheta} + g \frac{\partial^2 W^2}{\partial \vartheta^2} = Mg \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \vartheta^2} - g \frac{\partial^3 W}{\partial \vartheta^3} \right]. \quad (13)$$

где $W(\vartheta, z) = V(\vartheta, z)/V_0$, $Q(\vartheta, z) = R(\vartheta, z)/R_0$, $\vartheta = \omega \eta$, $z = x/x_0$, $x_0 = \zeta C_0^2 / (\gamma m \omega V_0)$, $M = \zeta C_0 / 2\gamma \mathcal{N}_0 \gg 1/2$.

В высокочастотном приближении, за исключением небольшого интервала по ϑ , где $\frac{\partial Q}{\partial \vartheta} = 0$, получаем следующее нелинейное уравнение:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \vartheta \partial z} + \frac{N}{g} \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} = \frac{Q^2}{2g^2},$$

где $Q(W) = \frac{1}{g} \int_{-\infty}^{\vartheta} W(\vartheta_1, z) \exp[-(\vartheta - \vartheta_1)/g] d\vartheta_1$, $\vartheta = \omega t$, $z = x/x_c$,

$$x_c = \zeta C^2 / \gamma m \omega V_0, \quad N = \zeta C / 2\gamma \mathcal{N}_0 \gg 1/4g.$$

Из этого уравнения следует, что в ВЧ диапазоне диссипация, дисперсия фазовой скорости и нелинейность сильно подавлены (по сравнению с НЧ диапазоном) и слабая гармоническая волна с частотой ω , распространяясь со скоростью, близкой к C , будет испытывать, в основном, только линейное затухание, декремент которого определяется выражением: $\theta_0 = \pi m \Omega / \omega$.

Приведем результаты численного моделирования искажения и эволюции гармонических волн, создаваемых на границе: $V(t, x=0) = V_0 \sin \omega t$. Используя обозначения к уравнению (13), из (12) получим безразмерные уравнения для “релаксатора” $Q = Q(\vartheta, z)$ и скорости $W = W(\vartheta, z)$ в системе координат, движущейся со скоростью C_0 :

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - Q \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} = -g \frac{\partial^2}{\partial z \partial \vartheta} \left[2Q + g \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} \right] + Mg \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \left[Q + g \frac{\partial Q}{\partial \vartheta} \right], \quad W = Q + g \frac{\partial Q}{\partial \vartheta},$$

где $Q(\vartheta, z=0) = \frac{\sin \vartheta - g \cos \vartheta}{1 + g^2}$, $M = \zeta C_0 / 2\gamma \mathcal{N}_0 \gg \frac{1 + (1 + 4g^2)^{-1/2}}{4(1 + g^2)^{1/2}}$.

При численном решении уравнений (3.13) использовался спектральный метод, предложенный в работе [Пищальников и др., 1996] для расчета взаимодействия акустических волн в недиспергирующих средах с квадратично-упругой нелинейностью. Модификация этого метода, основанная на знании ВЧ асимптотики спектра ударной волны и

вычислении конечного числа гармоник нелинейной волны, успешно применялась для описания волновых процессов в однородных нелинейных средах с релаксацией и с различными степенными зависимостями коэффициента поглощения от частоты волны. В микронеоднородной нелинейной релаксирующей среде, вследствие ВЧ диссипации (для НЧ волн) или дисперсии нелинейности (для ВЧ волн), ударной волны не образуется и спектр нелинейной волны содержит ограниченное число гармоник, так что при расчете профилей нелинейных волн можно пользоваться спектральным методом, количество взаимодействующих гармоник некоторым, не очень большим числом n , обеспечивающим устойчивость численной схемы. (В нашем случае n было не более 100).

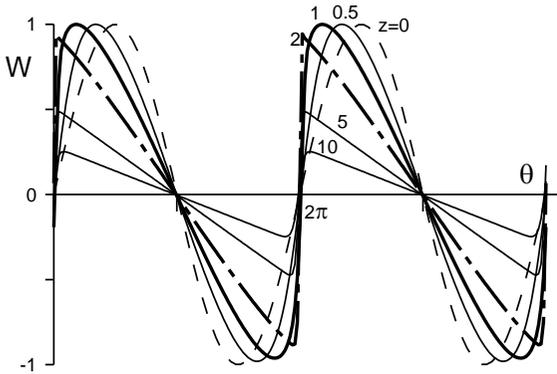


Рис. 11. Эволюция первоначально гармонических волн на различных расстояниях z при $g = 0.01$, $M = 2$.

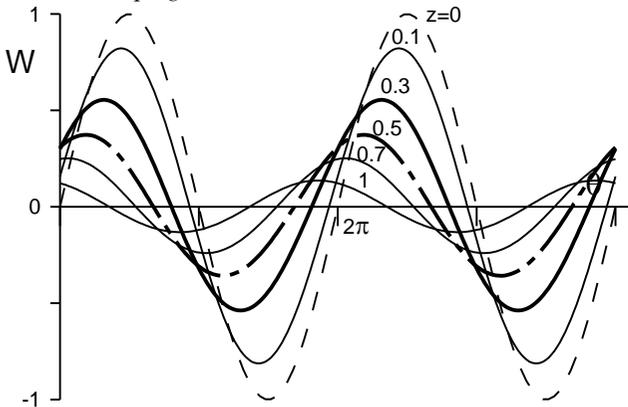


Рис. 12. Эволюция первоначально гармонических волн на различных расстояниях z при $g = 1$, $M = 4$.

На рис. 11 - 12 представлены профили первоначально гармонических волн, полученные в результате численного решения уравнений при различных значениях безразмерных параметров g , M и расстояниях z . Из рис. 11 видно, что с увеличением пройденного расстояния передний фронт НЧ волн ($g = 0.01$) вначале укручается, так что волна становится почти пилообразной, но затем, по мере затухания, волна опять становится синусоидальной (в полном соответствии с решением уравнения Бюргерса [Руденко, Солуян, 1975]). С увеличением частоты волны, укручение фронта медленнее волны с большей частотой, т.к. первая обладает меньшим линейным затуханием, чем вторая. Более высокочастотные волны ($g \geq 0.5$) распространяются почти без искажений, однако, затухание сильной и слабой волн, с частотами ω близкими к частоте Ω релаксации дефектов ($g \approx 1$), существенно различны: слабые волны затухают сильнее, чем сильные (рис. 12); на больших расстояниях обе волны превращаются в синусоидальные, однако волна с большей начальной амплитудой затухает медленнее волны с меньшей начальной амплитудой. Этот эффект связан с перекачкой энергии основной волны в высшие гармоники, затухание которых меньше и они распространяются дальше, и с последующим “возвратом” энергии этих гармоник в волну основной частоты. Поскольку в сильной волне высшие гармоники генерируются интенсивнее, чем в волне слабой, то на больших расстояниях волна с большей начальной амплитудой распространяется с меньшим эффективным затуханием.

В разделе 3.2 исследованы волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью. В этом случае эволюционное уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\nu}{2C_0 \Omega} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R(\varepsilon) + \frac{\nu \gamma \xi}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} R[|R(\varepsilon)|] = 0.$$

Волновые процессы в рамках этого уравнения во многом подобны приведенным выше для квадратичной среды, вследствие четности обеих нелинейностей и нелинейной релаксации.

В разделе 3.3 исследованы свойства микронеоднородной среды с квадратичной гистерезисной нелинейностью.

Как и в предыдущих разделах этой главы, рассмотрим реологическую модель микронеоднородной среды, состоящей из одномерной цепочки линейных упругих элементов и относительно мягких нелинейных вязкоупругих дефектов, для которых зависимость “напряжение σ - деформация ξ ” является гистерезисной:

$$\sigma(\xi, \text{sgn } \dot{\xi}) = \zeta E[\xi - f(\xi, \text{sgn } \dot{\xi})] + \alpha \dot{\xi},$$

где гистерезисные функции, представлены уравнениями (2) и (3) при $n = 2$.

При относительно малой концентрации дефектов уравнение состояния такой среды имеет вид [Nazarov et al, 2002]:

$$\sigma(\varepsilon) = E \left[\varepsilon - \int_0^{\infty} \int_0^1 R(\varepsilon) N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega - \int_0^{\infty} \int_0^1 \zeta R[f[R(\varepsilon), \text{sign} \dot{R}(\varepsilon)]] N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega \right],$$

$$\left| \int_0^{\infty} \int_0^1 \zeta R[f[R(\varepsilon), \text{sign} \dot{R}(\varepsilon)]] N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega \right| \ll \left| \int_0^{\infty} \int_0^1 R(\varepsilon) N(\zeta, \Omega) d\zeta d\Omega \right| \ll |\varepsilon|,$$

где $R(\varepsilon) = \frac{\Omega}{\zeta} \int_{-\infty}^t \varepsilon(\tau) \exp[-\Omega(t - \tau)] d\tau$, $\Omega = \zeta E / \alpha$ - релаксационная частота дефекта, $N = N(\zeta, \Omega)$ - функция распределения дефектов по параметрам ζ и Ω .

При численном счете и построении диаграмм динамических гистерезисов все дефекты считались одинаковыми [$N(\zeta, \Omega) = N_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \delta(\Omega - \Omega_0)$, $N_0 = 10^{-5}$, $\zeta_0 = 10^{-3}$, $\Omega_0 = 2\pi \cdot 10^4 \text{ c}^{-1}$], а значения нелинейных параметров полагались следующими: $\gamma = 700$, $\gamma_1 = 1000$, $\gamma_2 = 600$, $\gamma_3 = 800$, $\gamma_4 = 400$.

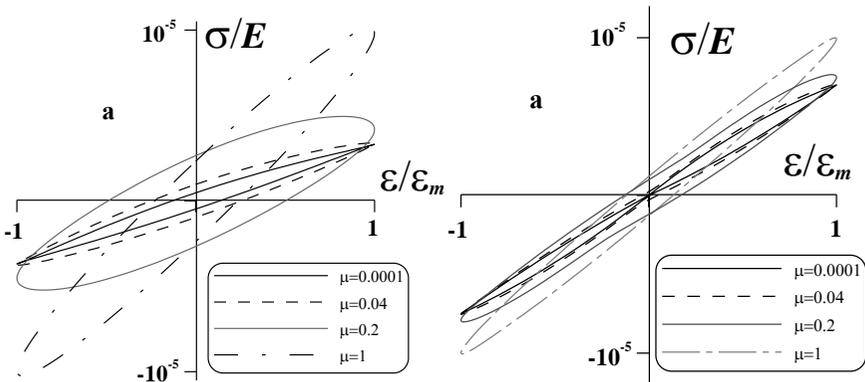


Рис. 13. Динамические гистерезисы при различных значениях μ .

На рис. 13 изображены динамические гистерезисы, построенные (как фигуры Лиссажу) при гармоническом деформировании материала ($\varepsilon(t) = \varepsilon_m \sin \omega t$, $-\infty < t < \infty$) и при различных значениях параметра $\mu = \omega / \Omega$ и $\varepsilon_m = 10^{-5}$. Из рис. 13 видно, что статические гистерезисы (при $\varepsilon / \varepsilon_m = \pm 1$) содержат изломы и заметно отличаются друг от друга. Далее, однако, при увеличении параметра μ гистерезисы “сглаживаются”, изломы исчезают, различие гистерезисов уменьшается, и визуально они становятся похожими.

В разделе 3.4 представлены основные результаты Главы 3.

В четвертой главе представлены результаты экспериментальных исследований нелинейных эффектов в различных средах, для описания которых необходимо привлекать уравнения состояния с неаналитическими нелинейностями.

В разделе 4.1 представлены экспериментальные исследования в консолидированных средах - горных породах.

В разделе 4.1.2 представлены обнаруженные проявления гистерезисной нелинейности на примере образцов из цементного камня с различным водоцементным отношением первоначального раствора (1 – 0.5, 2 – 0.6, 3 – 0.9). Эта задача имеет важное практическое применение, поскольку упомянутое водоцементное отношение определяет конечную прочность материала. Исследуемые цементные материалы (1, 2 и 3) изготавливались из водных растворов, полученных на основе минерального вяжущего вещества – цемента марки 400 и речного песка (средний размер зерен около 0.1 мм) в соотношении 1:2 (по массе). Для изготовления исследуемых образцов растворы заливались в специальные металлические формы, где выдерживались при комнатной температуре в течение 24 часов. После отверждения и изъятия из форм, образцы помещались в воду, в которой для набора прочности выдерживались в течение 28 суток. После этого образцы высушивались до приобретения ими постоянной плотности, равной $\rho_1 = 1.93 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 1.9 \text{ г/см}^3$ и $\rho_3 = 1.7 \text{ г/см}^3$, соответственно.

Для определения прочностных свойств исследуемых материалов были проведены их статические испытания на сжатие. Для этого образцы в виде кубиков с длиной ребра 2 см помещались между опорными плитами пресса, позволяющего производить их нагружение со скоростью $(0.6 \pm 0.4) \text{ МПа/с}$ до разрушения. Измеренные значения разрушающих напряжений образцов 1, 2 и 3 составляли, соответственно, $\sigma_1 \cong 25 \text{ МПа}$, $\sigma_2 \cong 20 \text{ МПа}$ и $\sigma_3 \cong 10.5 \text{ МПа}$. (Расхождение между экспериментально измеренными прочностными свойствами и определенными по расчетной диаграмме [Reichel W, Conrad D, 1976], составляет не более 5%.)

В первой серии экспериментов, проводимых по стандартной схеме [M1], исследовались НЧ эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) цементных материалов: нелинейные потери и сдвиги резонансных частот, а также генерация второй и третьей гармоник. Для этого, при помощи пьезокерамического излучателя, в каждом резонаторе возбуждались НЧ акустические колебания на частоте F , близкой к частоте F_1 первой продольной моды резонатора, и измерялись амплитудные зависимости нелинейных сдвигов резонансных частот $\Delta F_{nl} = F - F_1 < 0$ и коэффициентов затухания μ_{nl} . Анализ зависимостей амплитуды

деформации ε_m стержней 1, 2 и 3 (в резонансе) от амплитуды электрического напряжения U на излучателе накачки показал, что для первого стержня зависимость $\varepsilon_m = \varepsilon_m(U)$ практически линейна и, следовательно, нелинейных потерь в нем практически нет. Для второго и третьего стержней эти зависимости заметно нелинейны, что свидетельствует о наличии в них нелинейных потерь. Во втором и третьем стержнях нелинейные потери проявляются при $\varepsilon_m > 8 \cdot 10^{-7}$, а при $\varepsilon_m > 3 \cdot 10^{-6}$ наблюдается тенденция к их насыщению, при котором нелинейные потери вновь, как и при малых амплитудах $\varepsilon_m < 8 \cdot 10^{-7}$, становятся амплитудно-независимыми, но большими, чем при $\varepsilon_m < 8 \cdot 10^{-7}$.

На рис. 15 представлены графики зависимостей модулей относительных нелинейных сдвигов резонансных частот $|\Delta F_{nl}/F_1|$ и коэффициентов нелинейного затухания μ_{nl}/μ_1 от ε_m , где $\mu_1 = (\Omega_1 Q_1)^{-1}$, $\Omega_1 = 2\pi F_1$. Относительный коэффициент нелинейного затухания определялся по формуле: $\frac{\mu_{nl}}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_{m1}}{\varepsilon_m} \cdot \frac{U}{U_1} - 1$, описывающей отклонение наблюдаемых зависимостей $\varepsilon_m = \varepsilon_m(U)$ на рис. 14 от линейной, проведенной через начальные экспериментальные точки (U_1, ε_{m1}) , соответствующие малым амплитудам возбуждения резонатора, когда эффекты АЗВТ пренебрежимо малы и $\varepsilon_m \sim U$.

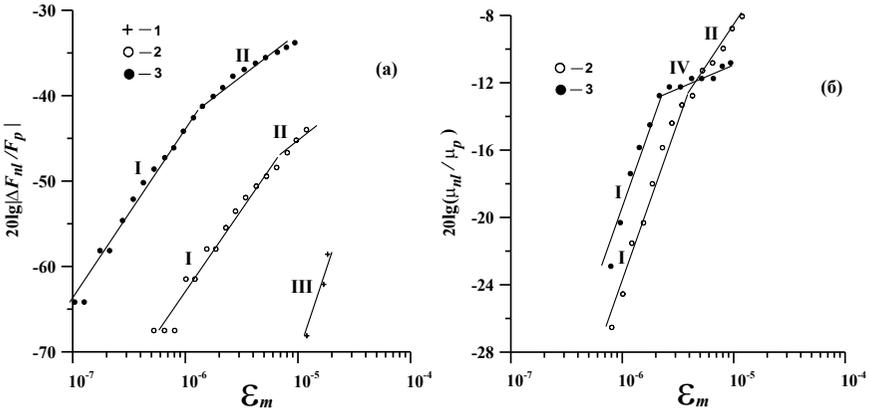


Рис. 14. Зависимости нелинейных сдвига резонансной частоты (а) и коэффициента затухания (б) от амплитуды волны (в резонансе) в резонаторах 1, 2, 3. Прямые линии соответствует зависимостям: I -

$\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m$, II - $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m^{1/2}$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m^{1/2}$, III - $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m^2$, IV - $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m^{1/7}$.

Из рис. 14 следует, что для первого стержня имеет место зависимость: $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m^2$, а нелинейные потери отсутствуют; это свидетельствует о кубичной упругой нелинейности материала. Для второго стержня имеется 2 интервала в поведении нелинейных сдвига резонансной частоты и коэффициента затухания: 1 - $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m$ (при $\varepsilon_m \leq \varepsilon_{m2}^* \cong 4 \cdot 10^{-6}$) и 2 - $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m^{1/2}$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m^{1/2}$ (при $\varepsilon_m > \varepsilon_{m2}^*$ - на стадии перехода к насыщению). Для третьего стержня имеют место аналогичные зависимости в первом диапазоне (при $\varepsilon_m \leq \varepsilon_{m3}^* \cong 2 \cdot 10^{-6}$) и $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m^{1/2}$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m^{1/7}$ (при $\varepsilon_m > \varepsilon_{m3}^*$ - на стадии перехода к насыщению). Наличие линейных зависимостей $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m$ свидетельствует о проявлении в материалах второго и третьего стержней гистерезисной степенной нелинейности с показателем степени $n = 2$, а зависимости $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m^{1/2}$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m^{1/2}$ для второго стержня соответствуют проявлениям гистерезисной нелинейности с $n = 3/2$.

При возбуждении в резонаторах интенсивных НЧ колебаний наблюдались также эффекты генерации высших - второй и третьей, гармоник частоты накачки. На рис. 15 приведен графики зависимостей амплитуды смещения $U_2(L)$ свободного торца стержня на стержней 1, 2 и 3 на частотах вторых гармоник и амплитуды деформации ε_3 на частотах третьих гармоник от амплитуды деформации ε_m на первых модах (в резонансе). Из этих рисунков видно, что для первого стержня имеют место зависимости: $U_2(L) \propto \varepsilon_m^2$, $\varepsilon_3 \propto \varepsilon_m^3$, что свидетельствует о квадратичной и кубичной упругой нелинейности материала. Для второго и третьего стержней эти зависимости близки к квадратичным. Заметим, что здесь показатель степени 2 на единицу больше значения показателя степени в зависимостях $|\Delta F_{nl}/F_1|$ и μ_{nl}/μ_1 от ε_m при $\varepsilon_m \leq \varepsilon_{m2,3}^*$.

Именно такие закономерности для нелинейных потерь, дефекта модуля упругости и амплитуд высших гармоник и должны наблюдаться для волн в средах с гистерезисной квадратичной нелинейностью.

Из рис. 14, 15 видно, что значения $|\Delta F_{nl}/F_1|$ и μ_{nl}/μ_1 (при $\varepsilon_m \leq \varepsilon_{m2,3}^*$), $U_2(L)$ и ε_3 (при $\varepsilon_m = const$) для третьего стержня заметно больше, чем для второго и первого; это свидетельствует об увеличении акустической нелинейности цементного материала при увеличении водоцементного отношения раствора, из которого он был изготовлен.

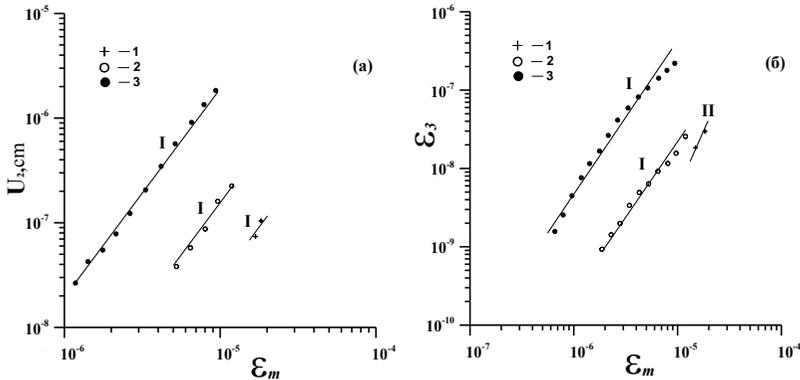


Рис. 15. Зависимости амплитуды смещения (а) на частоте второй гармоники и амплитуды деформации на частоте третьей гармоники (б) от амплитуды волны (в резонансе) для резонаторов 1, 2, 3. Прямые линии соответствуют зависимостям: I - $U_2(L) \propto \varepsilon_m^2$, $\varepsilon_3 \propto \varepsilon_m^3$; II - $\varepsilon_3 \propto \varepsilon_m^3$.

Ниже, методом возмущений будет проведено аналитическое описание и количественный анализ наблюдаемых нелинейных НЧ акустических эффектов в рамках упругой нелинейности – для первого стержня и гистерезисных нелинейностей для второго и третьего стержней. Для второго и третьего стержней, мы рассмотрим нелинейные эффекты только в первых диапазонах ($\varepsilon_m \leq \varepsilon_{m2,3}^*$), где наблюдаются линейные зависимости для $|\Delta F_{nl}/F_1|$ и μ_{nl}/μ_1 и близкие к квадратичным - для $U_2(L)$ и ε_3 . Это связано с тем, что на проявление нелинейных эффектов во втором диапазоне ($\varepsilon_m > \varepsilon_{m2,3}^*$) влияет и нелинейность первого диапазона, что сильно усложняет теоретическое описание нелинейных эффектов.

Таблица 1. Параметры нелинейности образцов из бетона

$c_{1,2,3}$	a_1	b_1	$\gamma_1 + \gamma_3$	$\gamma_2 + \gamma_4$	$\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$	$\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$	
						по амплитуде 3-й гармоники	по сдвигу рез-снй частоты и потерям
0.5					7	$4.8 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$
0.6	700	400	6100	$7.8 \cdot 10^4$	43	3600	3100
0.9	6000	860	$7.8 \cdot 10^4$	$-4 \cdot 10^4$	500	4900	5000

Из этой таблицы следует, что увеличение водоцементного отношения цементного материала с $c_2 = 0.6$ до $c_3 = 0.9$ приводит к заметному росту гистерезисной нелинейности, а именно к почти десятикратному росту коэффициентов a_1 , $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ и $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$, ответственных за нелинейный сдвиг резонансной частоты и генерацию второй и третьей гармоник НЧ волны, при этом коэффициент b_1 , определяющий нелинейные потери, возрастает всего в 2.1 раза. Следует также отметить, что уменьшение прочностных свойств второго и третьего цементных материалов (по отношению к первому) в 1.25 и в 2.5 раза, сопровождается сильным, соответственно в 6 и в 70 раз, увеличением их эффективных параметров $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ квадратичной упругой нелинейности.

В диссертации также приведены результаты экспериментальных исследований проявлений гистерезисной нелинейности и в других материалах: белый мрамор Коелга ($n = 2, 4$), известняк ($n = 5/3$), карельский гранит Питкяранта ($n = 2$), магнезит ($n = 3, 2$). Все они учтены при построении диаграммы на рис. 1.

В разделе 4.2 представлены экспериментальные исследования нелинейных эффектов в области высоких частот: распространение слабых ультразвуковых импульсов в поле мощной волны в резонаторе из гранита; самовоздействие ультразвуковых импульсов в стержне из мрамора.

Остановимся подробнее на втором исследовании. Эффекты самовоздействия (ограничения амплитуды и фазовой задержки несущей) наблюдались при исследовании распространения высокочастотных (ВЧ) акустических импульсов конечной амплитуды в поликристаллической горной породе – белом мраморе Коелга. Эксперименты проводились со стержнем из мрамора: длина стержня $L = 0.7$ м, его сечение – квадрат со стороной 1.6 см. Плотность мрамора - около 2.8 г/см³. К одному торцу стержня был приклеен пьезокерамический излучатель – для излучения ультразвуковых импульсов, а к другому - пьезоакселерометр, - для их приема. Измерения проводились при комнатной температуре. Погрешность измерения фазовой задержки импульса составляла ± 5 нс. В этих экспериментах наблюдались и исследовались эффекты нелинейного ограничения амплитуды и фазовой задержки несущей ультразвуковых импульсов, прошедших через стержень. Длительность импульсов составляла $\tau = 200$ мкс, их несущая частота f была равна 100 кГц, а частота повторения - 30 Гц. Скорость C_0 распространения ультразвуковых импульсов в стержне, определенная по их задержке, составляла около 2400 м/с, так что длина импульсов $l = C_0\tau$ м была меньше длины стержня L и импульсы в нем распространялись как в свободном пространстве. После прохождения через стержень эти импульсы принимались акселерометром и поступали на цифровой осциллограф-спектроанализатор, где

производились измерения их относительной амплитуды A_1 и фазовой задержки несущей $\Delta\tau_1$ в зависимости от амплитуды излучаемых импульсов A_0 (опять же относительной). Результаты измерений приведены на рис. 16.

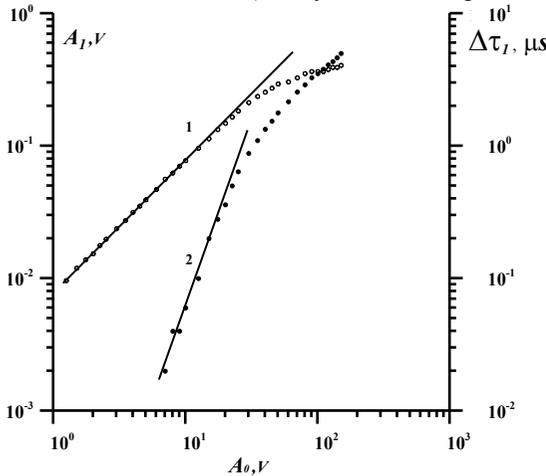


Рис. 16. Зависимость амплитуды A_1 (1) и фазовой задержки несущей $\Delta\tau_1$ (2) ультразвуковых импульсов, прошедших через стержень из мрамора, в зависимости от амплитуды A_0 излучаемых импульсов. Прямые линии соответствует зависимостям: 1 - $A_1 \sim A_0$, 2 - $\Delta\tau_1 \sim A_0^3$.

Из этого рисунка видно, что при увеличении амплитуды A_0 излучаемых импульсов наблюдались следующие эффекты и закономерности. Первая - амплитуда A_1 принимаемых импульсов монотонно увеличивается, причем вначале ($A_0 < 20$ В) - линейно, а затем - проявляется тенденция к ее ограничению. Вторая - фазовая задержка несущей $\Delta\tau_1$, в начале, при малых амплитудах, растет как A_0^3 , а затем ее рост заметно замедляется. Из экспериментально установленных зависимостей $A_1(A_0)$ и $\Delta\tau_1(A_0)$ следует, что если эффект ограничения амплитуды связан с проявлением диссипативной (неупругой) нелинейности мрамора, то фазовая задержка несущей, - с проявлением нелинейности реактивной (упругой), ответственной за уменьшение скорости распространения волны с ростом ее амплитуды.

Наблюдаемые эффекты и их амплитудные зависимости можно объяснить в рамках феноменологического уравнения состояния, содержащего реактивную $E\gamma|\varepsilon|^m \varepsilon$ и диссипативную $\alpha\rho\mu|\varepsilon|^s$ нелинейности:

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - \gamma|\varepsilon|^m \varepsilon] + \alpha\rho[1 + \mu|\varepsilon|^s] \dot{\varepsilon}, \quad (14)$$

где γ , m и μ , s - безразмерные параметры и показатели степени реактивной и диссипативной нелинейности, $\gamma|\varepsilon|^m \ll 1$, $\mu|\varepsilon|^s \ll 1$. Отметим, что именно такой вид имеет уравнение состояния для поликристаллических твердых тел, причиной диссипативной и реактивной нелинейности которых являются дислокации – одномерные дефекты их структуры. Все параметры уравнения состояния для каждого конкретного материала определяются экспериментально, т.е. из сравнения полученных экспериментальных результатов по изучению каких-либо нелинейных эффектов в этом материале с результатом аналитического расчета этих же эффектов.

Из решения волнового уравнения, соответствующего уравнению состояния (14), методом возмущений находим выражения для амплитуды $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$ и нелинейной задержки несущей $\Delta\tau_1(\varepsilon_0)$ импульса при $x = L$:

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0) = \frac{\varepsilon_0 \exp[-\eta L]}{[1 + a_1 \mu (1 - \exp[-s\eta L]) \varepsilon_0^s]^{1/s}}, \Delta\tau_1(\varepsilon_0) = \frac{\gamma b_1}{2C_0} \cdot \int_0^L \varepsilon_1^m(\varepsilon_0) dx,$$

где $\eta = \frac{\alpha \omega^2}{2C_0^3}$, $a_1 = \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma[(s+1)/2]}{s(s+2)\Gamma[s/2]}$, $b_1 = \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{(m+1)\Gamma[(m+1)/2]}{m(m+2)\Gamma[m/2]}$.

При выполнении условий $a_1 \mu [1 - \exp[-s\eta L]] \varepsilon_0^s \ll 1$, $\exp[-m\eta L] \ll 1$, $\exp[-s\eta L] \ll 1$ - получаем:

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0) \cong \varepsilon_0 \exp[-\eta L] \left[1 - \frac{a_1 \mu}{s} \varepsilon_0^s \right], \Delta\tau_1(\varepsilon_0) \cong \frac{\gamma b_1 \varepsilon_0^m}{2m\eta C_0} \left[1 - \frac{m a_1 \beta}{m+s} \varepsilon_0^s \right]. \quad (15)$$

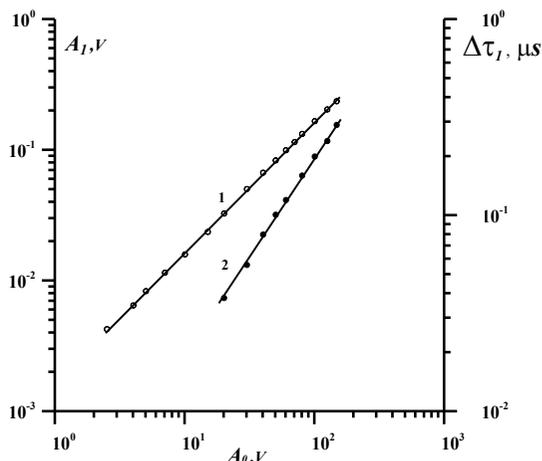


Рис. 17. Зависимость амплитуды A_1 (1) и фазовой задержки несущей $\Delta\tau_1$ (2) ультразвуковых импульсов, прошедших через стержень из гранита, в

зависимости от амплитуды A_0 излучаемых импульсов. Прямые линии соответствует зависимостям: 1 - $A_1 \sim A_0$, 2 - $\Delta\tau_1 \sim A_0$.

Далее, пользуясь стандартной процедурой с помощью двойного логарифмирования, находим показатели степеней диссипативной и реактивной нелинейностей по отклонению экспериментальных зависимостей от линейных. В этом случае $m = 3$ и $s = 2$. Примечательно, что для исследованного образца мрамора $s \neq m$; этот факт свидетельствует о различных механизмах высокочастотных реактивной и диссипативной нелинейности не только для исследованного образца мрамора, но, по-видимому, и для многих других микронеоднородных твердых тел. В качестве иллюстрации и подтверждения этого утверждения, на рис. 18 приведены зависимости $A_1(A_0)$ и $\Delta\tau_1(A_0)$, полученные в таком же эксперименте для стержня из карельского гранита Питкяранта ($L = 0.35$ м, $f = 110$ кГц). Из этих зависимостей видно, что $A_1 \sim A_0$, $\Delta\tau_1 \sim A_0$, и, следовательно, такой гранит в ультразвуковом диапазоне ($f \approx 100$ кГц) обладает вполне заметной реактивной нелинейностью с показателем степени $m = 1$, а его диссипативная нелинейность не проявляется.

Приведем теперь оценки (по порядку величины) для параметров γ и μ реактивной и диссипативной нелинейности исследуемого образца мрамора, полагая, что амплитуде напряжения на излучателе $A_0 = 10$ В соответствует амплитуда деформации $\varepsilon_0 \cong 10^{-7}$. Подставляя в (15): $\eta L \cong 2.3$, $m = 3$, $C_0 = 2400$ м/с, получаем $\gamma \approx 10^{18}$, $\mu \approx 10^{12}$.

Таким образом, экспериментальное исследование и теоретическое описание нелинейных эффектов амплитудно-фазового самовоздействия ультразвуковых импульсов конечной амплитуды в стержне из мрамора Коелга показали, что в диапазоне около 100 кГц акустическая нелинейность мрамора является аномально высокой (по сравнению с однородными средами) и содержит реактивную и диссипативную составляющие.

В разделе 4.3 представлены результаты экспериментальных и теоретических исследований нелинейных эффектов в гранулированных средах: самодетектирования ВЧ и распространения НЧ акустических импульсов в частично водонасыщенном речном песке и среде из стеклянных сферических гранул; самовоздействие низкочастотной акустической волны и генерация ее второй гармоники в сухом и водонасыщенном речном песке; амплитудная модуляция звука звуком в водонасыщенном речном песке.

Здесь мы приведем подробное описание последнего. Лабораторные эксперименты показали, что речной песок обладает диссипативной акустической нелинейностью. Диссипативная нелинейность проявляется в том, что коэффициент диссипации среды оказывается зависящим от

амплитуды акустической волны. В результате, при распространении в среде с диссипативной нелинейностью двух волн различных частот – мощной низкочастотной (НЧ) и слабой высокочастотной (ВЧ), будут наблюдаться эффекты затухания звука на звуке или “усиления” звука звуком, а при амплитудно-модулированной мощной НЧ волне, вследствие модуляции коэффициента диссипации среды, будет иметь место амплитудная модуляция слабой, пробной ВЧ волны, т.е. перенос амплитудной модуляции с мощной волны на слабую, пробную волну. Такой динамический (или модуляционный) эффект затухания звука на звуке наблюдался при проведении натурального сейсмоакустического эксперимента на поверхностных волнах в сыром песчаном грунте [Багмет и др., 1996]. (В нелинейной оптике такой эффект называется кросс-модуляцией.) С целью обнаружения этого эффекта в контролируемых и управляемых условиях нами был проведен лабораторный эксперимент по наблюдению амплитудной модуляции слабой относительно ВЧ волны под действием периодической последовательности сильных НЧ импульсов в зернистой среде - водонасыщенном речном песке. Отметим, что в обычных, однородных средах, например, в воде, в силикатном и органическом стеклах, многих металлах - стали, молибдене, титане и др., такой эффект не наблюдается.

Водонасыщенный речной песок находился в тонкостенной емкости диаметром 16 см и высотой 22 см. Эксперименты проводились при статическом давлении $P_0 \approx 6200$ Па. В песке, при помощи двух акустических излучателей: низкочастотного и высокочастотного, находящихся, соответственно, на одной оси и на глубинах $h_1 = 13$ см и $h_2 = 10.5$ см от поверхности песка, возбуждались, распространяющиеся в вертикальном направлении (снизу вверх), продольные НЧ импульсы с несущей частотой $F = 4$ кГц, длительностью $T = 10$ мс и периодом повторения $T_0 = 35$ мс, и непрерывная ВЧ волна с частотой $f = 18$ кГц. Диаметр излучателей составлял, соответственно, 8 см и 4 см. Для регистрации прошедших через песок акустических волн использовался приклеенный к центру той же пластины (на которой располагались грузы), и находящийся на оси излучателей, пьезоакселерометр. Сигналы с пьезоакселерометра, через систему фильтров поступали на двухканальный цифровой осциллоскоп-спектроанализатор, где отображались осциллограммы НЧ и ВЧ волн.

При выбранном статическом давлении скорость распространения импульсов в водонасыщенном песке была равна $C_0 = 290$ м/с. Длины $\lambda_{1,2}$ НЧ и ВЧ акустических волны в песке составляли около 8 см и 1,5 см, размер a песчинок – приблизительно 0.02 см, так что минимальное отношение $\min\{\lambda_{1,2}/a\} \approx 75$.

При экспериментальном исследовании нелинейных акустических эффектов в речном песке необходимо учитывать то обстоятельство, что подобные слабо консолидированные среды являются в той или иной степени случайными, так как качественные и количественные проявления в них нелинейных эффектов зависят от многих, вообще говоря, неконтролируемых факторов, например, от случайной упаковки большого количества песчинок, различных по форме и размерам, и наличия между ними жидкости и газа. Первый фактор можно быстро изменять несильным механическим воздействием (ударом) по стенкам емкости, содержащей песок, второй же – может медленно изменяться (за счет испарения воды и ее перераспределения между песчинками). Эти факторы в большей степени влияют на нелинейные акустические свойства зернистой среды и, в меньшей - на линейные характеристики: они почти не влияют на скорость распространения волны, но вполне заметно - на ее затухание. Поэтому, при проведении измерений нелинейных эффектов необходимо, вообще говоря, соблюдать “режим механической тишины” (по отношению к емкости с песком) и, в начале измерений контролировать повторяемость наблюдаемых эффектов. После каждого ударного воздействия на емкость, микроскопическая конфигурация слабо нагруженных песчинок, в основном определяющих акустическая нелинейность речного песка, изменяется, поэтому и его нелинейные свойства также изменяются, что может приводить к качественно различным проявлениям нелинейных эффектов в такой среде.

В проведенных и многократно повторенных экспериментах с водонасыщенным песком (после механических воздействий на емкость – несильных ударов и “долива” в нее воды) нами наблюдались эффекты амплитудной модуляции слабой непрерывной ВЧ волны под действием периодической последовательности мощных НЧ импульсов, причем наблюдалось как затухание звука на звуке, так и “усиление” звука звуком. В первом случае эти эффекты связаны с увеличением диссипации среды под действием мощной НЧ волны, а во втором, - с ее уменьшением. На рис. 18 и 19 приведены две характерные для этих случаев осциллограммы, принятых пьезоакселерометром НЧ импульса и ВЧ волны, из которых видно, что во время действия НЧ импульса амплитуда ВЧ волны изменяется, а именно, уменьшается почти в 10 раз (рис. 18) или увеличивается более чем в 2 раза (рис. 19). Затухание звука на звуке имело место после довольно продолжительного времени (более суток) после “долива” воды, а “усиление” звука звуком наблюдалось вначале, при относительно большом водонасыщении песка.

Таким образом, результаты лабораторного эксперимента по амплитудной модуляции звука звуком свидетельствуют о том, что сырой речной песок обладает диссипативной акустической нелинейностью,

зависящей от его водонасыщенности; механизм такой нелинейности, по-видимому, связан с нелинейным трением на границах контактирующих друг с другом песчинок. Наличие диссипативной нелинейности существенно расширяет “спектр” волновых процессов в подобных средах, что можно использовать для их сейсмоакустической диагностики.

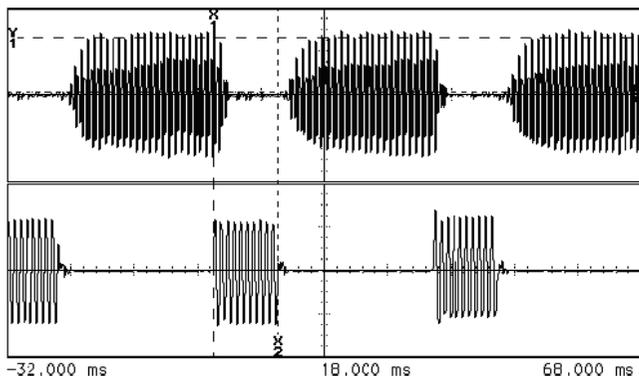


Рис. 18. Осциллограммы НЧ импульсов (внизу) и ВЧ исходно непрерывной волны, принятых пьезоакселерометром, при затухании звука на звуке.

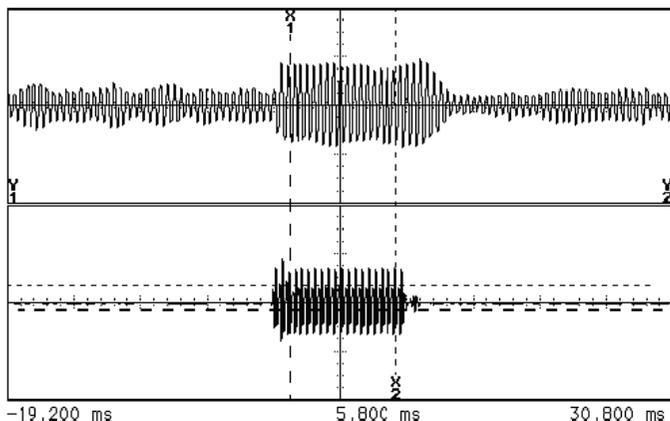


Рис. 19. Осциллограммы НЧ импульсов (внизу) и ВЧ исходно непрерывной волны, принятых пьезоакселерометром, при “усилении” звука звуком.

В разделе 4.4 представлены основные результаты Главы 4.

В **Заключении** сформулированы основные результаты диссертации:

1. Получены и проанализированы новые точные (для целочисленных значений степени) и приближенные (для произвольных значений степени) аналитические решения для импульсных и непрерывных волн в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной степени без учета линейной

диссипации. Также, для произвольного значения степени предложено аналитическое решение в виде самоподобной волны.

2. С помощью полученного аналитического решения произведена оценка степени и параметров гистерезисной нелинейности образцов из алюминия, подверженных различной степени отжига.

3. Получены точные аналитические решения для самоподобного импульса в среде с квадратичным гистерезисом и диссипацией вязкого типа.

4. Получены точные аналитические решения для распространения импульсных и непрерывных волн в разномодульных средах при учете различных диссипативных и дисперсионных свойств среды: линейной диссипации, линейной релаксации, дисперсии.

5. Разработаны численные схемы для исследования распространения волн в средах с разномодульной и гистерезисной нелинейностями при учете линейной диссипации вязкого типа.

6. Получены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие распространение одномерных акустических волн в микронеоднородных средах, содержащих одинаковые вязкоупругие дефекты с квадратичной упругой и разномодульной нелинейностями. Приведены численные решения этих уравнения для стационарных волн типа симметричного скачка и нелинейного искажения первоначально гармонических волн.

7. На основе результатов экспериментальных исследований нелинейных эффектов в консолидированных и гранулированных средах определены параметры феноменологических уравнений состояния, наиболее чувствительные к структуре и состоянию среды.

СПИСОК ЦИТИРУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зарембо ЛК, Красильников ВА. (1966). *Введение в нелинейную акустику: звуковые и ультразвуковые волны большой интенсивности*. М.: Наука.
2. Наугольных КА, Островский ЛА. (1990). *Нелинейные волновые процессы в акустике*. М.: Наука.
3. Руденко ОВ, Солуян СИ. (1975). *Теоретические основы нелинейной акустики*. М.: Наука.
4. Пищальников ЮА и др. (1996). *Акуст. Журн.*, 42 (3), 412-417.
5. Ostrovsky LA, Johnson PA. (2001). *Rivista del Nuovo Cimento*, 24 (7), 1-46.
6. Исакович МА. (1979). *УФН*, 129 (3), 531-540.
7. Назаров ВЕ и др. (2003). *Акустический журнал*, 49 (3), 405-415.
8. Руденко ОВ. (2018). *Известия вузов. ПНД*, 26 (3), 7-34.
9. Амбарцумян СА. (1982). *Разномодульная теория упругости*. М.: Наука.
10. Назаров ВЕ. (1991). *ФММ*, 71 (3), 172-178.
11. Зайцев ВЮ и др. (1999). *Акуст. журн.*, 45 (2), 235-241
12. Давиденков НН. (1938). *ЖТФ*, 8 (6), 156-161.

13. Nazarov VE et al. (1988). *Phys. Earth and Planet. Inter.*, 50 (1), 65-73.
14. Руденко ОВ. (2006). *УФН*, 176 (1), 77-95.
15. Зайцев ВЮ, Гурбатов СН, Прончатов-Рубцов НВ. (2009). *Нелинейные акустические явления в структурно-неоднородных средах*. Н. Новгород: ИПФ РАН.
16. Gusev V et al. (1997). *Physics Letters A*, 232 (1-2), 77-86.
17. Маслов ВП, Мосолов ПП. (1985). *ПММ*, 49 (3), 419.
18. Назаров ВЕ, Островский ЛА. (1990). *Акуст. Журн.*, 36 (1), 106-110.
19. Пальмов ВА. (1976). *Колебания упруго-пластических тел*. М.: Наука.
20. Yasumoto Y et al. (1974). *Acta Acust. Acust.*, 30 (5), 260-267.
21. Зайцев ВЮ и др. (2001). *Акуст. Журн.*, 47 (2), 220-226.
22. Багмет АЛ и др (1996). *ДАН*, 346 (3), 390-391.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Основные положения диссертации представлены в более чем 40 работах, включая:

2 монографии и 1 главу в монографии, 24 статьи в изданиях, рекомендованных ВАК и входящих в международные базы цитирования WoS и Scopus:

Монографии, главы в монографиях

- M1.** В.Е. Назаров, **А.В. Радостин**, *Нелинейные волновые процессы в упругих микронеоднородных средах*, Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2007.
- M2.** V. Nazarov, **A. Radostin**, *Nonlinear Acoustic Waves in Microinhomogeneous Solids*, John Wiley & Sons (2015).
- M3.** V.E. Nazarov, A.B. Kolpakov, **A.V. Radostin**, Nonlinear Acoustic Phenomena in Granite, In book “*Granite: Occurrence, Mineralogy and Origin*”, /Eds. M. Blasik, and B. Hanika, Nova Publishers, NY, P. 117-130 (2012).

Публикации в журналах, включенных в список ВАК и/или входящих в мировые индексы цитирования (SCOPUS, Web of Science)

- СВ1.** Назаров В.Е., **Радостин А.В.**, Зайцев В.Ю. Самодетектирование акустических импульсов в частично водонасыщенном речном песке// *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 3. С. 360-366.
- СВ2.** Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Численное моделирование динамических гистерезисов для микронеоднородных сред с несовершенной упругостью и релаксацией// *Акуст. журн.* 2006. Т. 52. № 4. С. 514-520.
- СВ3.** Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Акустические волны в микронеоднородных средах с квадратичной упругой нелинейностью и релаксацией // *Акуст. Журн.*, 2006, Т. 52, N6, С. 825-832.

- СВ4.** Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Экспериментальное исследование нелинейных акустических эффектов в известняке// **Акуст. журн.** 2007. Т. 53. № 2. С. 254-263.
- СВ5.** Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Распространение однополярных импульсов деформации в средах с гистерезисной нелинейностью// **Акуст. журн.** 2008. Т. 54. № 6. С. 914-919.
- СВ6.** Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Амплитудно-зависимое внутреннее трение и генерация гармоник в резонаторе из гранита// **Акуст. журн.** 2009. Т. 55. № 1. С. 82-90.
- СВ7.** Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Самовоздействие сейсмоакустической волны в сыром песчаном грунте// **Акуст. журн.** 2009. Т. 55. № 3. С. 331-334.
- СВ8.** Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Самовоздействие низкочастотной акустической волны и генерация второй гармоники в сухом и водонасыщенном речном песке// **Акуст. журн.** 2010. Т. 56. № 1. С. 82-90.
- СВ9.** Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Исследование нелинейных волновых процессов в акустическом резонаторе из мрамора// **Физическая Мезомеханика.** 2010. Т. 13. № 2. С. 41-53.
- СВ10.** V. E. Nazarov, A. B. Kolpakov, and A. V. Radostin, Propagation of Weak Ultrasonic Pulses in an Intense Low Frequency Wave Field in a Granite Resonator// **Acoustical Physics**, 2010, Vol. 56, No. 4, pp. 453-456.
- СВ11.** Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Самовоздействие ультразвуковых импульсов в стержне из мрамора// **Акуст. журн.** 2010. Т. 56. №5, С. 597-601.
- СВ12.** Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Амплитудная модуляция звука звуком в водонасыщенном речном песке// **Акуст. журн.** 2011. Т. 57. № 5. С. 596-599.
- СВ13.** V. E. Nazarov, A. B. Kolpakov, and **Radostin A. V.**, Amplitude-dependent internal friction, hysteretic nonlinearity, and nonlinear oscillations in a magnesite resonator// **J. Acoust. Soc. Am.**, 132 (1), 28-36 (2012).
- СВ14.** **A. Radostin**, V. Nazarov, S. Kiyashko, Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation// **Wave Motion**, 50 (2), 191-196 (2013).
- СВ15.** Назаров В.Е., **Радостин А.В.**, Кияшко С.Б., Самоподобные акустические волны в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией// **Изв. Вузов Радиопизика.** 2015. Т. 58. №2, С. 134-141.
- СВ16.** Назаров В. Е., Кияшко С. Б., **Радостин А. В.**, Самоподобные волны в средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией// **Нелинейная динамика**, 2015. Т. 11. № 2, с. 209-218.

- СВ.17.** Назаров В.Е., Кияшко С.Б., **Радостин А.В.** Эволюция акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией // **Иzv. Вузov Радиофизика**. 2015. Т. 58. №10, С. 811-820.
- СВ18.** Назаров В.Е., Кияшко С.Б., **Радостин А.В.** Волновые процессы в мкронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией // **Иzv. Вузov Радиофизика**. 2016. Т. 59. №3, С. 275-285.
- СВ19.** **A Radostin**, V Nazarov, S Kiyashko. (2017) Propagation of acoustic unipolar pulses and periodic waves in media with quadratic hysteretic nonlinearity and linear viscous dissipation. // **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 52, 44-51.
- СВ20.** V.E. Nazarov, S.B. Kiyashko, **A.V. Radostin**, Stationary waves in a bimodular rod of finite radius // **Wave Motion** 75 (2017) 72–76.
- СВ21.** **A. Radostin**, Acoustic Pulses in Media with Power Law Hysteretic Nonlinearity // **Acta Acustica united Acustica**, 104 (2018), 410-416.
- СВ22.** Назаров В.Е., Кияшко С.Б., **Радостин А.В.**, Акустические волны в средах с квадратично - разномодульной нелинейностью и линейной диссипацией // **Иzv. Вузov Радиофизика**. 2018. Т. 61. №6, С. 474-482.
- СВ23.** V. E. Nazarov, A. B. Kolpakov, and **Radostin A. V.**, Effect of water-to-cement ratio on acoustic nonlinearity of a cement stone // **Journal of Nondestructive Evaluation**. 2019. 38(1):24.
- СВ24.** **A Radostin**, V Nazarov, S Kiyashko, A Kurkin, Sawtooth waves in solids with power law hysteretic nonlinearity // **Wave Motion**. 2019. 91:102398.

Оглавление диссертации

Введение	3
Глава 1 Упругие волны в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной степени	11
1.1. Введение	12
1.2. Гистерезисные уравнения состояния для твердых тел с несовершенной упругостью. Феноменологические модели	13
1.3. Пилообразные волны в безграничной среде в рамках неупругого гистерезиса	19
1.4. Акустические импульсы в средах со степенной гистерезисной нелинейностью	30
1.5. Упругие волны в среде с квадратичной гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией	39
1.6. Выводы к Главе 1	50
Глава 2. Упругие волны в средах с разномодульной нелинейностью	51
2.1. Введение	51
2.2. Акустические волны в разномодульной среде с линейной диссипацией	52
2.3. Самоподобные волны в разномодульной среде с релаксацией	60
2.4. Стационарные волны в разномодульном стержне конечного радиуса	69
2.5. Акустические волны в средах с квадратично-разномодульной нелинейностью и линейной диссипацией	73
2.6. Самовоздействие продольной сейсмоакустической волны в сыром песчаном грунте	83
2.7. Выводы к Главе 2	89
Глава 3. Упругие волны в микро-неоднородных средах	90
3.1. Упругие волны в микронеоднородных средах с квадратичной нелинейностью	90
3.2. Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью	100
3.3. Численное моделирование динамических гистерезисов для микро-неоднородных сред с несовершенной упругостью	111
3.4. Выводы по Главе 3	118
Глава 4. Экспериментальные исследования нелинейных эффектов в поликристаллических твердых телах	119
4.1. Экспериментальные исследования в консолидированных средах	120
4.2. Нелинейные эффекты в области высоких частот	139
4.3. Экспериментальные исследования в зернистых средах	153
4.4. Выводы к Главе 4	183
Заключение	184
Работы автора по теме диссертации	185
Список литературы	188