Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования

«Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева»

На правах рукописи

fitter

Радостин Андрей Викторович РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ УПРУГИХ ВОЛН В СРЕДАХ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Специальность 01.04.06 - Акустика

Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

> Научный консультант, доктор физико-математических наук, профессор Куркин Андрей Александрович

Нижний Новгород 2019

Ведение	3
Глава 1 Упругие волны в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной степени	11
1.1. Введение	
1.2. Гистерезисные уравнения состояния для твердых тел	13
с несовершенной упругостью. Феноменологические модели	13
1.3. Пилообразные волны в безграничной среде в рамках неупругого гистерезиса	19
1.4. Акустические импульсы в средах со степенной гистерезисной нелинейностью	
1.5. Упругие волны в среде с квадратичной гистерезисной нелинейностью	
и линейной диссипацией	39
1.6. Выводы к Главе 1	50
Глава 2. Упругие волны в средах с разномодульной нелинейностью	51
2.1. Введение	51
2.2. Акустические волны в разномодульной среде с линейной диссипацией	52
2.3. Самоподобные волны в разномодульной среде с релаксацией	60
2.4. Стационарные волны в разномодульном стержне конечного радиуса	69
2.5. Акустические волны в средах	73
с квадратично-разномодульной нелинейностью и линейной диссипацией	73
2.6. Самовоздействие продольной сейсмоакустической волны в сыром песчаном грунте	83
2.7. Выводы к Главе 2	
Глава З. Упругие волны в микро-неоднородных средах	90
3.1. Упругие волны в микронеоднородных средах с квадратичной нелинейностью	90
3.2. Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью	100
3.3. Численное моделирование динамических гистерезисов	111
для микро-неоднородных сред с несовершенной упругостью	111
3.4. Выводы по Главе 3	118
Глава 4. Экспериментальные исследования нелинейных эффектов в поликристаллических твер	дых
телах	119
4.1. Экспериментальные исследования в консолидированных средах	120
4.2. Нелинейные эффекты в области высоких частот	
4.3. Экспериментальные исследования в зернистых средах	153
4.4. Выводы к Главе 4	183
Заключение	184
Работы автора по теме диссертации	185
Список литературы	

Ведение

Настоящая диссертация посвящена теоретическому, численному и экспериментальному исследованию распространения продольных упругих волн в различных средах, нелинейность которых обусловлена наличию структурных неоднородностей.

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Уравнения состояния (или соотношения "напряжение – деформация") характеризуют реакцию твердых тел на различные нагрузочные возмущения. Для многих горных пород, металлов и искусственных материалов уравнения состояния существенно нелинейны. В рамках классической (пяти - или девяти – константной) теории упругости нелинейность является малой квадратичной или кубичной по деформации поправкой к линейному слагаемому, что позволяет сравнительно легко получать решения уравнений, описывающих нелинейные волновые процессы [Зарембо, Красильников, 1966; Наугольных, Островский, 1990]. Нелинейность таких сред обусловлена ангармоничностью межатомного потенциала и достаточно слабо выражена даже при деформациях, близких к разрушению материала, поскольку характерные значения безразмерных параметров нелинейности не превышают 10 [Зарембо, Красильников, 1966].

Распространение и взаимодействие волн в рамках квадратичной или кубичной нелинейности исследовано достаточно подробно: во многих случаях получены точные аналитические решения как для идеальной («чисто» нелинейной) среды, так и в случае учета различных линейных факторов, таких как линейная диссипация, линейная релаксация, линейная дисперсия [Руденко, Солуян, 1975; Наугольных, Островский, 1990]. Численные методы исследования таких сред также хорошо развиты: часто используются спектральные методы, поскольку нелинейное слагаемое в уравнениях заменяется сверткой в Фурье пространстве; также используются конечные разности [Пищальников и др., 1996].

Более разнообразно (и более интенсивно) нелинейные волновые процессы протекают в микронеоднородных (или, в англоязычной литературе, мезоскопических) средах, к которым, по-видимому, относятся большинство горных пород и грунтов, а также некоторые поликристаллические металлы и конструкционные материалы [Наугольных, Островский, 1990; Ostrovsky, Johnson, 2001].

Микронеоднородной средой называется среда, содержащая неоднородности или дефекты, размер которых много больше атомарного, но много меньше длины волны, при этом на длине волны находится много дефектов, а их распределение в пространстве статистически однородно, так что среду, в *среднем*, можно считать «акустически однородной» или «макрооднородной» на участках, больших по сравнению с размерами дефектов, но малых по сравнению с длиной волны [Исакович, 1979].

Для описания уравнения состояния реальных микронеоднородных сред рассмотренный выше подход в рамках классической пяти - или девяти - константной теории упругости не применим из-за их сложной структуры и наличия различных, как правило нелинейных, микродефектов — трещин, полостей, зерен, дислокаций и т. д. Уравнения состояния микронеоднородных твердых тел отвечают типу и количеству содержащихся в них дефектов и. как правило, являются неаналитическими (т. е. негладкими и недифференцируемыми) [Назаров и др., 2003; Руденко, 2018]. К настоящему времени известно множество примеров: 1) необратимое движение дефектов кристаллической решетки (дислокаций) под действием акустического возмущения приводит к микропластическим деформациям, для описания которых необходимо привлекать гистерезисные (т. е. неоднозначные) зависимости напряжения от деформации [Давиденков, 1938; Granato, Lücke, 1956]; 2) наличие в структуре твердого тела щелеобразных дефектов (трещин с гладкими поверхностями) приводит к его разномодульности (или билинейности) — различию модулей упругости при сжатии и растяжении [Амбарцумян, 1982: Антонец и др., 1986]: зеренная структура материала характеризуется нелинейностью со степенью 3/2 [Нестеренко, 1983; Назаров, 1991; Беляева и др., 1993]. При этом обычно эффективные квадратичные параметры упругой (или реактивной) нелинейности микронеоднородных твердых тел на два - три порядка превышают соответствующие параметры однородных сред и материалов [Nazarov et al, 1988; Руденко, 2006].

Кроме того, часто нелинейные акустические свойства микронеоднородных сред (в отличие от однородных) зависят от частоты акустического воздействия, т. е. нелинейность микронеоднородных сред обладает дисперсией. (Вообще говоря, частотно-зависимыми являются не только нелинейные, но и линейные акустические параметры микронеоднородных сред, а именно декремент затухания и фазовая скорость упругих волн, что также, хотя и в меньшей степени, влияет на динамику нелинейных волновых процессов) [М1; Зайцев и др., 2009]. В связи с этим характер проявления нелинейных эффектов при распространении и взаимодействии упругих волн в различных микронеоднородных средах является не только количественно, но и качественно различным, что можно использовать для их диагностики и неразрушающего контроля. Этому также способствует и то, что нелинейные акустические свойства таких сред являются более чувствительными к наличию в них дефектов, чем линейные [Зайцев и др., 2009].

Уравнения с неаналитической нелинейностью еще не достаточно хорошо изучены к настоящему времени. Можно отметить решения, полученные для квадратичной гистерезисной нелинейности [Gusev et al, 1997; Назаров и др, 2003; Zaitsev et al, 2005] без учета линейных факторов, т.е. аналогов уравнения простой волны. Было, в частности, получено, что в отличие от среды с квадратичной нелинейностью, в процессе распространения в профиле волны не образуется неоднозначностей, а генерация высших гармоник происходит одновременно всех в первом приближении, их амплитуды на малых расстояниях пропорциональны квадрату амплитуды волны на основной частоте. В случае разномодульной среды подобные уравнения также исследовались [Маслов, Мосолов, 1985; Назаров, Островский, 1990]. Было получено, что неоднозначность образуется сразу на источнике, в первом приближении происходит генерация бесконечного числа четных гармоник, во втором – только нечетных, и т.д.

В случае произвольной степени гистерезисной нелинейности развиты методики расчета колебаний в сосредоточенных системах на основе метода возмущений, поскольку амплитуды высших гармоник все равно оказываются на несколько порядков меньше амплитуды колебаний на основной частоте [Пальмов, 1976].

Наличие точек перехода от одной ветки неаналитической функции к другой приводит к затруднениям при численном моделировании методом конечных разностей нелинейных волновых процессов в микронеоднородных средах. Также не всегда возможно применение спектрального подхода в обычной форме.

Необходимо также отметить, что уравнения состояния микронеоднородных сред вводятся феноменологическим образом для описания результатов экспериментальных исследований различных нелинейных эффектов в различных средах, поэтому расширение спектра эффектов и общего количества исследуемых сред позволяет решать задачи классификации и идентификации этих сред.

Из всего вышеприведенного вытекает необходимость и актуальность исследований, выполненных в настоящей диссертации.

Цели диссертационной работы

- получение точных и приближенных аналитических решений уравнений, описывающих распространение упругих волн в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной степени без учета линейной диссипации;
- получение точных аналитических решений уравнений, описывающих распространение продольных акустических волн в средах с квадратичной гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией вязкого типа;

- получение точных аналитических решений уравнений, описывающих распространение продольных акустических волн в средах с разномодульной нелинейностью и различных линейных факторов: диссипацией вязкого типа, линейной и нелинейной релаксацией;
- разработка численных подходов к решению задач о распространении продольных акустических волн в средах с разномодульной и квадратичной гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией вязкого типа;
- получение новых и систематизация известных экспериментальных данных по исследованию нелинейных акустических эффектов в резонаторах из горных пород и цементного материала;
- получение новых экспериментальных результатов по исследованию нелинейных акустических эффектов в гранулированных средах.

Методы исследования и степень достоверности результатов

Для достижения поставленных целей используются теоретические методы, основанные на анализе масштабных преобразований, исследований симметрий уравнений, разделении переменных. Численные схемы разработаны на основе спектрального подхода, широко применяемого при исследованиях волновых процессов в средах с классической (квадратичной или кубичной) нелинейностью. Достоверность полученных результатов подтверждается соответствием теоретических результатов данным, полученным с помощью численного моделирования и экспериментальных исследований, а также расчетам, представленным в работах других авторов.

Научную новизну работы составляют положения, выносимые на защиту:

В диссертации разработаны подходы для описания закономерностей распространения непрерывных и импульсных упругих волн в средах с гистерезисной и разномодульной нелинейностями. Дано полное описание особенностей распространения волн в средах с целочисленными значениями гистерезисной нелинейности. Сформулированы основы диагностических методов для сред с неаналитической нелинейностью.

 Получены и проанализированы новые точные (для целочисленных значений степени) и приближенные (для произвольных значений степени) аналитические решения для импульсных и периодических волн в средах с произвольными значениями степени гистерезисной нелинейности без учета линейной диссипации. Также, для произвольного значения степени предложено аналитическое решение в виде самоподобной волны.

- 2. Получены точные аналитические решения, описывающие распространение самоподобного импульса в средах с квадратичной гистерезисной нелинейностью при учете линейной диссипации вязкого типа.
- Получены точные аналитические решения для распространения импульсных и непрерывных волн в средах с разномодульной нелинейностью при учете различных диссипативных и дисперсионных свойств среды: линейной диссипации, линейной релаксации, нелинейной релаксации.
- Разработаны численные схемы для исследования распространения импульсных и периодических волн в средах с квадратичной гистерезисной нелинейностью, разномодульной нелинейностью при учете линейной диссипации вязкого типа.
- 5. Экспериментально обнаружена гистерезисная нелинейность с дробным показателем степени в образцах из известняка и цементного материала.
- 6. Показано, что экспериментально обнаруженные амплитудные зависимости коэффициента затухания, изменения фазовой скорости волны и амплитуды второй гармоники при исследовании самовоздействия и взаимодействия акустических волн, могут быть описаны в рамках феноменологического уравнения состояния среды, параметры которого чувствительны к состоянию среды.

<u>Теоретическая и практическая значимость работы</u>

Полученные точные и приближенные аналитические решения позволяют наиболее полно понять особенности протекания нелинейных волновых процессов в различных средах и позволяют тестировать численные решения для таких сред, когда точные решения получить невозможно.

Экспериментально обнаруженное появление гистерезисной нелинейности в образцах цементного материала с водоцементным отношением отличным от приемлемого создает основу для метода диагностики прочностных свойств материалов на основе цемента.

Результаты экспериментальных исследований в гранулированных материалах позволяют с помощью достаточно простых измерений определять некоторые важные характеристики среды, такие как степень упакованности и водонасыщение.

Апробация работы и публикации.

Основные результаты и положения диссертации докладывались и обсуждались на Российских и международных конференциях и семинарах.

7

XVIII - XX и XXX сессии Российского Акустического Общества (2006 - 2008, 2017), Международные конференции III, IV International Conference: Frontiers of Nonlinear Physics, (Nizhny Novgorod, 2007, 2010), Международная конференция "XI Харитоновские тематические научные чтения" (г. Саров, , 2009), Всероссийская конференция ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И АКУСТИКИ СРЕД С МИКРО- И НАНОСТРУКТУРОЙ: НАНОМЕХ-2009, (НГТУ, Н. Новгород, 2009), Всероссийская (с международным участием) научная конференция "Комплексные геолого-геофизические модели древних щитов", (Апатиты, 2009), International Congress on Ultrasonics, (Chile, Santiago, 2009), XII, XV-XVII, XX, XXIII Научные конференции по радиофизике (ННГУ, Нижний Новгород, 2008, 2011 - 2013, 2016, 2019).

Полученные результаты используются в научно-исследовательских проектах различной направленности (Гранты Президента Российской Федерации, РФФИ, проекты в рамках федеральных целевых программ РФ и др.), в том числе выполняемых под руководством автора диссертации.

В диссертацию включены результаты исследований, поддержанные РФФИ: 19-05-00536, Трещино - и контакто - содержащие среды: развитие нетрадиционных подходов к описанию их акусто - упругих свойств для получения информации о структурных характеристиках из сравнения с данными экспериментов; 15-05-05143, Новые сейсмо -акустические эффекты, обусловленные микроструктурой среды: модели и эксперименты; 12-02-31329, Исследование распространения акустических волн в средах с неклассической нелинейностью при учете диссипации, релаксации и рассеяния; 05-02-17355-а, Микроструктурно - обусловленная И модели; акустическая нелинейность твердых тел: эксперименты 05-05-64941-a, Экспериментальное исследование нелинейных волновых процессов в горных породах; 06-02-72550-НЦНИЛ а, Диагностические применения "неклассической" акустической нелинейности: от качественных эффектов к количественным характеристикам; 08-02-97039-р поволжье а, Разработка методов нелинейной акустической диагностики и неразрушающего контроля твердотельных материалов, конструкций и изделий машиностроения; 09-02-91071-НЦНИ а, Исследования динамики и структуры гранулированных материалов и родственных контакто содержащих систем с использованием новых диагностических возможностей на основе 11-02-97017-р поволжье а, нелинейно-акустического подхода; Исследование влияния структуры мелко - зернистых бетонов на их нелинейные акустические свойства с целью создания эффективных методов диагностики и прогнозирования прочности бетонных конструкций; 11-05-01003-а, Структурно-обусловленные «неклассические» нелинейные свойства земных пород: теоретические модели и эксперимент.

Также включены результаты исследований, поддержанные Грантами Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2685.2018.5) и молодых российских ученых – кандидатов наук (МК-4587.2006.2), а также полученные в ходе выполнения научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 5.1246.2017/4.6).

Публикации и личный вклад автора

Основные положения диссертации представлены в 40 работах, включая: 2 монографии, 1 главу в монографии, 24 статьи в журналах, включенных в список ВАК и/или входящих в мировые индексы цитирования (SCOPUS, Web of Science).

В экспериментальных работах, автор принимал участие в проведении экспериментов, обрабатывал данные и интерпретировал полученные результаты. Аналитические результаты получены автором, также при непосредственном участии автора разработаны численные схемы.

Автор в первую очередь выражает благодарность своей дружной семье за поддержку, родителям – за веру в мои силы, супруге Ольге и дочери Софии - за понимание. Одельно хочется поблагодарить научного руководителя кандидатской диссертации и соавтора большинства работ, доктора физико-математических наук Назарова Вениамина Евгеньевича. Также автор благодарен всем соавторам своих работ: Зайцеву В.Ю., Колпакову А.Б., Кияшко С.Б. Спасибо моим коллегам в ИПФ РАН: Слюняеву А.В., Кокориной А.В., Лисиной О.Н., Ермаковой О.С., Шишкиной О.Д., Матвееву Л.А., Матвееву А.Л. и многим другим. Также отдельно хочется поблагодарить научного консультанта – профессора Куркина Андрея Александровича за неоценимый огромный вклад в реальное воплощение данной работы как результата многолетней научной деятельности. Также автор выражает сердечную благодарность профессору Ефиму Наумовичу Пелиновскому за постоянное внимание и ценные замечания к работе.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Общий объем диссертации составляет 194 страницы, в том числе 91 рисунок, библиография - 107 наименований.

Во Введении проанализировано современное состояние исследований в области нелинейной акустики микронеоднородных сред и сформулированы цели диссертации.

В Главе 1 представлены результаты теоретических исследований распространения импульсных и периодических волн в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной

9

степени без учета линейной диссипации. Также получено аналитическое решение и предложена численная схема для исследования волновых процессов в средах с квадратичным гистерезисом и диссипацией вязкого типа.

В Главе 2 представлены результаты теоретических и численных исследований волновых процессов в разномодульных средах при учете линейной вязкости, релаксации и дисперсии.

В Главе 3 представлены результаты теоретических и численных исследований в микронеоднородных средах одинаковыми вязкоупругими включениями, обладающими различными типами нелинейности.

В **Главе 4** представлены результаты экспериментальных исследований нелинейных эффектов в различных консолидированных и гранулированных средах.

В Заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Глава 1 Упругие волны в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной степени

В данной главе представлен обзор по экспериментальным данным, моделям сред и аналитическим и численным результатам исследований нелинейных эффектов в различных твердотельных средах, описываемых в рамках гистерезисных моделей сред. Для модели гистерезиса, предложенной Н.Н. Давиденковым, аналитически исследовано распространение периодических и импульсных волн для произвольных значений показателя степени нелинейности. Для целочисленных значений получены точные выражения, для произвольных дробных – приближенные, хорошо согласующиеся с численными расчетами. Также получены решения в виде самоподобных волн. Точные решения для импульсных волн использованы для интерпретации результатов эксперимента по исследованию распространения импульсов в образцах из алюминия, подверженных различным уровням отжига. Из сравнения с экспериментом получены значения параметров и показателя степени гистерезисной нелинейности алюминия.

Также в данной главе получено точное решение в виде самоподобной волны для распространения однополярного импульса в среде с квадратичной гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией и предложен численный метод решения таких задач на основе спектрального подхода.

1.1. Введение

В последнее время особенный интерес исследователей в области акустики вызывают микронеоднодные (или мезоскопические) среды, к которым относится большинство горных пород, поликристаллические металлы, искусственные материалы и т.д. [Наугольных, Островский, 1990; M1; Guyer, Johnson, 2009; Руденко, 2018]. Нелинейные и дисперсионные свойства этих сред существенно отличаются от свойств газов, жидкостей и однородных твердых тел. В результате, даже упрощенные уравнения, аналоги уравнения Бюргерса для однородных сред, имеют гораздо более сложный вид, что сужает возможности нахождения их точных решений.

Одной из наиболее интересных задач в данной области является исследование распространения акустических волн в средах с квадратичной гистерезисной нелинейностью [Gusev et al, 1997]. Такая нелинейность примечательна квадратичной зависимостью от амплитуды волны, также как и в классическом случае, но в отличие от последней является нечетной по своим проявлениям, в частности, при распространении синусоидальной волны происходит одновременная генерация бесконечного числа нечетных гармоник в первом приближении [M1; Gusev et al, 1997].

В «чисто» нелинейном аспекте решение таких задач не представляет сложностей, что подробно описано в работах [M1; Gusev et al, 1997]. В частности, получено, что любое начальное возмущение в предельном случае принимает треугольную форму без образования разрыва в профиле волны в отличие от случая квадратичной нелинейности, однако, возникает скачок производной в окрестности максимума и минимума волны. Также для сред с квадратичной нелинейностью были получены результаты численных экспериментов [Van Den Abeele et al, 1997; Aleshin et al, 2004; Li et al, 2015].

Между тем, использование гистерезисных уравнений состояния для описания механических колебаний Многочисленные имеет достаточно давнюю историю. экспериментальные результаты, свидетельствуют о более разнообразном поведении материалов, для описания которого требуются более общие модели. Как показано в работах [M1; Guyer, Johnson, 2009; Лебедев, 1999] значение степени гистерезисной нелинейности изменяется в пределах от 1.5 до 5. На рис. 1 изображена диаграмма значений степеней гистерезисной нелинейности по 82 опубликованным экспериментальным свидетельствам. Хорошо видно, что квадратичная нелинейность использовалась для описания нелинейных эффектов в 39 случаях. Также в 12 случаях наблюдаемые эффекты описывались в рамках кубичной модели. Стоит заметить, что кубичная модель также часто применяется при

численном моделировании сейсмических волн [Pavlenko, 2001]. Также необходимо отметить, что имеется больше 10 значений, которые, даже, если допустить определенную погрешность в вычислении степени по результатам эксперимента, не могут быть отнесены к целочисленным.



Рис. 1.1. Показатели степени гистерезисной нелинейности для различных материалов по результатам экспериментальных исследований.

Таким образом, решение задач о распространении акустических волн в средах с обобщенными гистерезисными уравнениями состояния является актуальной и до настоящего времени мало изученной проблемой.

1.2. Гистерезисные уравнения состояния для твердых тел

с несовершенной упругостью. Феноменологические модели

Существует довольно много моделей и уравнений состояния сред с гистерезисной нелинейностью [Granato, Lücke, 1956; Mason, 2013; Asano, 1970; Лебедев, 1999; Давиденков, 1938]. Вообще говоря, общей причины гистерезисного поведения различных материалов, повидимому, не существует, однако установлено, что для поликристаллов гистерезис связан с отрывом дислокаций от примесных атомов. Идею о дефектах кристаллической решетки, как причине механического гистерезиса, выдвинул Прандтль еще в 1913 году [Mason, 2013], а в 1940 году Рид экспериментально доказал, что пластическая деформация влияет на амплитуднозависимое внутреннее трение металлов и объяснил это явление на основе движения дислокаций [Read, 1940]. Впервые аналитическое описание механического гистерезиса для объяснения

амплитудно-зависимого внутреннего трения материалов с, так называемой, несовершенной упругостью, было предложено Давиденковым в 1938 году [Давиденков, 1938]; само внутреннее трение связывалось с микропластической деформацией материала. (Под микропластической деформацией понимаются такая пластическая (необратимая) деформация, которая имеют место при малом уровне напряжения, существенно меньшем макроскопического предела текучести материала.) В 1956 году Гранато и Люкке на основе струнной модели дислокации Келера [Koehler, 1952] разработали физическую теорию амплитудно-зависимого внутреннего трения поликристаллов [Granato, Lücke, 1956; Mason, 2013].

В теории Гранато-Люкке предполагается, что поликристалл содержит сетку дислокаций; каждая дислокация представляется в виде струны, длина которой определяется точками пересечения сетки. При нулевом напряжении струна, кроме точек пересечения сетки, закреплена также примесными атомами. Приложение внешнего напряжения приводит к тому, что наряду с упругой деформацией твердого тела, имеет место дополнительная – за счет движения дислокаций – дислокационная деформация. В этой теории гистерезис в зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon)$ (σ - напряжение, ε - деформация, $\dot{\varepsilon}$ - скорость деформации) связывается с последовательным и лавинообразным отрывом дислокаций от слабых внутренних точек закрепления (примесных атомов) при нагрузке и последующим одновременным закреплением (на них же) при разгрузке, при этом нагрузочные ветви кривой $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon)$ - нелинейны, а разгрузочные – линейны. В несколько видоизмененной теории поглощения [Swartz, Weertman, 1961] предполагается, что движение дислокаций, оторвавшихся от примесных атомов, ограничивается не только их линейным натяжением, но и полем упругих напряжений соседних примесных атомов. Это приводит к тому, что разгрузочные ветви кривой $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon)$ также, как и нагрузочные, становятся нелинейными.

Для гистерезисных сред площадь петли гистерезиса определяет нелинейные потери, а среднее (по периоду волны) значение производной $\langle \partial \sigma(\varepsilon, \varepsilon) / \partial \varepsilon \rangle$ - дефект модуля упругости. В различных гистерезисных моделях нелинейные потери и дефект модуля различным образом зависят от амплитуды деформации волны, но часто их отношение *r* (при относительно малых амплитудах) является постоянной величиной, не зависящей от амплитуды [Granato, Lücke, 1956; Mason, 2013; Лебедев, 1999; Давиденков, 1938]. Теория Гранато-Люкке качественно (а иногда и количественно) достаточно хорошо объясняет результаты экспериментальных исследований амплитудных зависимостей нелинейных потерь и дефекта модуля упругости лишь в некоторых достаточно чистых поликристаллах, поэтому для описания нелинейных эффектов в других твердых телах с несовершенной упругостью, часто используются

феноменологические гистерезисные уравнения состояния. Здесь мы будем использовать наиболее простые зависимости $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon)$, отражающие основные и характерные особенности акустического гистерезиса, проявляющегося в некоторых металлах и горных породах, например, меди и цинке, граните, песчанике и известняке [Takahashi, 1956; Johnson et al, 1996; Лебедев, 1999; M1; Guyer, Johnson, 2009]:

- I. каждая ветвь гистерезиса является степенной функцией деформации;
- II. переход с одной ветви на другую происходит при смене знака ε и (или) $\dot{\varepsilon}$, при этом функция $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon)$ непрерывна;
- III. для бесконечно малых деформаций гистерезисная нелинейность пренебрежимо мала;
- IV. отношение *r* нелинейного декремента затухания к дефекту модуля упругости (при малых амплитудах деформации) является постоянной величиной.

В общем случае, уравнение состояния гистерезисной среды (без учета линейной диссипации) можно представить в виде:

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})], \qquad (1.1)$$

где *E* - модуль упругости, $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ - гистерезисная функция деформации и скорости деформации, $|f'_{\varepsilon}(\varepsilon, \dot{\varepsilon})| << 1.$

(Отметим, что в уравнении (1.1) необходимо учитывать и линейное диссипативное слагаемое $\eta \dot{\varepsilon}$ [24,25], однако, вследствие того, что не оно определяет характер нелинейных волновых процессов, мы, считая его достаточно малым, будем вначале им пренебрегать, при этом полученные ниже формулы будут справедливы на расстояниях $x << L_0 = 2C_0^3/\eta \omega^2$, где η - коэффициент вязкости среды, C_0 - скорость продольной волны малой амплитуды, ω - частота волны.)

В первой модели гистерезиса нелинейная функция была предложена Н.Н. Давиденковым и имеет вид:

$$f(\varepsilon, \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}) = \frac{\gamma}{n} \begin{cases} (\varepsilon_m + \varepsilon)^n - 2^{n-1} \varepsilon_m^n, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -(\varepsilon_m - \varepsilon)^n + 2^{n-1} \varepsilon_m^n, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases}$$
(1.2)

где $\varepsilon_m = \varepsilon_m(x)$ - локальная амплитуда деформации среды, $|\gamma| \varepsilon_m <<1$, $|\gamma| >>1$. В этом уравнении содержится одни независимый параметр нелинейности γ , ответственный за дефект модуля упругости и нелинейные потери.



Рис. 1.2. Гистерезисные уравнения состояния.

Из уравнения (1.2) следует, что при $\gamma \neq 0$ нулевым напряжениям (деформациям) соответствуют ненулевые деформации (напряжения). Обычно ненулевые деформации называются микропластическими, а ненулевые напряжения - остаточными. В соответствии с этим свойством гистерезис такого вида (рис. 1.2а) называется неупругим; он состоит из двух ветвей [Назаров и др., 2003].

Во второй модели гистерезиса нелинейная функция имеет вид:

$$f(\varepsilon, \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{n} \begin{cases} \gamma_1 \varepsilon^n, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} > 0; \\ (\gamma_1 + \gamma_2) \varepsilon_m^{n-1} \varepsilon - \gamma_2 \varepsilon^n, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ -\gamma_3 \varepsilon^n, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} < 0; \\ (-1)^n (\gamma_3 + \gamma_4) \varepsilon_m^{n-1} \varepsilon + \gamma_4 \varepsilon^n, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases}$$
(1.3)

где $|\gamma_{1,2}\varepsilon_m^{n-1}| << 1, |\gamma_{3,4}\varepsilon_m^{n-1}| << 1, |\gamma_{1-4}| >> 1.$

В этой модели содержится четыре параметра нелинейности γ_{1-4} , в зависимости от их соотношения уравнения (4.1), (4.3) описывают широкий класс сред: при $\gamma_1 = -\gamma_2 = -\gamma_3 = \gamma_4$ имеем уравнение со степенной нелинейностью; при $\gamma_{2,4} = 0$ получаем уравнение с линейным возвратом (как и в модели Гранато-Люкке [Granato, Lücke, 1956; Mason, 2013]). Для такой среды (при малых амплитудах волны) и декремент затухания, и дефект модуля упругости пропорциональны амплитуде волны ε_m^{n-1} , поэтому автоматически r = const. В этой модели нулевым напряжениям соответствуют нулевые деформации и наоборот, поэтому второй гистерезис (рис.1.26) мы будем называть упругим; он состоит из четырех ветвей. Такой гистерезис был предложен в работе [Зименков, Назаров, 1993] и использовался для описания

16

результатов экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов в стержневых резонаторах из поликристаллических металлов и горных пород [М1]. (Согласно терминологии Acano [Asano, 1970], подобные гистерезисы называются гистерезисами трения и отрыва, однако такая их классификация нам представляется не совсем удачной, поскольку описанный в работе [Назаров, Радостин, 2003] адгезионный гистерезис трещиноватых сред по физической сути является гистерезисом отрыва, а по форме – соответствует гистерезису трения. В связи с этим, гистерезисы трения и отрыва мы называем, соответственно, неупругим и упругим гистерезисами [Назаров и др., 2003].)

В уравнениях (1.2), (1.3) величина ε_m , в отличие от параметров γ и γ_{1-4} , не являются характеристиками среды, а определяются максимальной и минимальной ее деформациями. В первой модели гистерезиса его ветви зависимы, поэтому ε_m - это локальная амплитуда деформации ($\varepsilon_m > 0$). Во второй модели гистерезиса его положительные ($\varepsilon > 0$) и отрицательные ($\varepsilon < 0$) ветви задаются независимо, поэтому величина ε_m может иметь 2 различных значения, т.е. $\varepsilon_m^+ \neq -\varepsilon_m^-$. (Значения ε_m^+ и ε_m^- соответствуют амплитудам положительного и отрицательного полупериодов волны.) Для неупругого гистерезиса нелинейная функция неаналитична в двух точках: $\varepsilon = \varepsilon_m$ и $\varepsilon = -\varepsilon_m$, а для упругого гистерезиса - в трех: $\varepsilon = \varepsilon_m$, $\varepsilon = -\varepsilon_m$ и $\varepsilon = 0$. Отметим также, что в гистерезисных моделях положительным нелинейным потерям отвечает движение изображающей точки на диаграммах $\sigma = \sigma(\varepsilon, \varepsilon)$ по часовой стрелке. Это соответствует тому, что параметры нелинейности должна удовлетворять неравенствам: $\gamma > 0$ и $\gamma_{1,3} + \gamma_{2,4} > 0$.

Кроме этих неравенств, мы не будем накладывать никаких других условий на параметры γ , γ_{1-4} и будем считать их различными, что отражает асимметрию диаграммы деформирования твердого тела при его сжатии и растяжении. Наличие такой асимметрии подтверждается, в частности, результатами экспериментальных исследований АЗВТ в некоторых металлах и горных породах. Так, например, для поликристаллической меди (в зависимости от ее зеренной структуры, изменяющейся при отжиге) значения параметров $\gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 + \gamma_4$ изменялись, соответственно, от $6.6 \cdot 10^2$ и $1.8 \cdot 10^3$ до $1.9 \cdot 10^4$ и $1.5 \cdot 10^5$ [Назаров, 1991], для неотожженного поликристаллического цинка те же параметры составляли $6.3 \cdot 10^3$ и $2.6 \cdot 10^4$ [Назаров, 2000], а для гранита - $9.2 \cdot 10^3$ и $7 \cdot 10^3$ [Зименков, Назаров, 1993]. Столь сильные (в несколько раз)

отличия параметров $\gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 + \gamma_4$ свидетельствуют и о значительном различии параметров γ_{1-4} .

Далее, несмотря на то, что в обеих моделях гистерезисов содержатся лишь линейные и квадратичные по деформации слагаемые, нелинейная функция $f = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ является функцией общего вида, т.е. содержит как четную, так и нечетную составляющие, одинаково (в данном случае квадратично) зависящие от деформации. Это приводит к тому, что (на малых расстояниях от излучателя - где нелинейное затухание первичной волны еще не существенно) амплитуды всех ее высших гармоник (как четных, так и нечетных) пропорциональны n - й степени амплитуды деформации первичной гармонической волны. (Например, для сред с кубичной гистерезисной нелинейностью амплитуды высших гармоник (на таких же расстояниях) пропорциональны кубу амплитуды деформации первичной волны; этот отличительный признак позволяет легко определить показатель степени нелинейности гистерезисного уравнения состояния [M1].)

Приведенные гистерезисные уравнения существенно отличаются друг от друга: второе уравнение нельзя получить из первого, а первое - из второго, и, кроме того, первое уравнение, в отличие от второго, не является эволюционным. Это, в частности, проявляется в том, что в неупругом гистерезисе обе его ветви зависят от амплитуды деформации ε_m , чего не должно быть, поскольку при этом остаточное напряжение определяется амплитудой ε_m волны, а это нарушает принцип причинности - до воздействия на среду "она уже знает", какова будет амплитуда деформации и с какой скоростью в ней будет распространяться волна. Поэтому первое гистерезисное уравнение можно применять лишь для описания установившихся периодических волн, а для описания переходных процессов и распространения однополярных импульсов (или возмущений) оно не пригодно. В этом случае Н.Н. Давиденковым было также предложено уравнение состояния в следующем виде:

$$f(\varepsilon, \operatorname{sgn} \varepsilon) = \frac{\gamma}{n} \begin{cases} \varepsilon^n, & \varepsilon > 0; \\ -(\varepsilon_m - \varepsilon)^n + \varepsilon_m^n, & \varepsilon < 0; \end{cases}$$
(1.4)

В отличие от уравнения (1.3) в это уравнение состояния полностью соответствует правилу Мезинга [Masing G, 1926; Давиденков, 1938] построения гистерезисных уравнений.

1.3. Пилообразные волны в безграничной среде в рамках неупругого гистерезиса

Гистерезисные уравнения состояния (1.1)-(1.2), совместно с уравнением движения $\rho_0 U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$, позволяют исследовать нелинейные волновые процессы в средах с несовершенной упругостью. Подставляя (1.1)-(1.4) в уравнение движения и переходя к переменным $\tau = t - x/C$, x' = x, получим уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x [Руденко, Солуян, 1975; Наугольных, Островский, 1990]:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C} \frac{\partial f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -\frac{1}{2C} \frac{\partial f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})}{\partial \tau}, \qquad (1.5)$$

где $C = (E/\rho_0)^{1/2}$. При решении уравнения (1.5) мы будем пользоваться методом сращивания (или "сшивания") простых волн, отвечающих каждой ветви гистерезиса; такой метод был предложен в [Назаров, 1997] и затем развит в работах [Gusev et al, 1997; Назаров и др., 2003]. Для уравнения состояния (1.2) уравнение (1.5) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \cdot \begin{cases} (\varepsilon_m + \varepsilon)^{n-1}, & \varepsilon_\tau > 0; \\ (\varepsilon_m - \varepsilon)^{n-1}, & \varepsilon_\tau < 0. \end{cases}$$

Далее мы будем рассматривать только один период волны и решение этих уравнений для граничного условия в виде пилообразной волны

$$\varepsilon(0,t) = \frac{2\varepsilon_0}{T} \begin{cases} t, & -T/2 \le t \le T/2, \\ T-t, & T/2 \le t \le 3T/2, \end{cases}$$

которое может быть записано в неявном виде

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{0}^{z} [\epsilon_{m} (z') + \epsilon(z, \theta)]^{n-1} dz' + \epsilon(z, \theta)/2, & \epsilon_{\theta} > 0; \\ \frac{1}{2} \int_{0}^{z} [\epsilon_{m} (z') - \epsilon(z, \theta)]^{n-1} dz' + 1 - \epsilon(z, \theta)/2, & \epsilon_{\theta} < 0, \end{cases}$$
(1.6)

где $\theta = \tau/T$, $z = \gamma \varepsilon_0^{n-1}/CT$, $\in (z,\theta) = \varepsilon(z,\theta)/\varepsilon_0$, $\in_m (z) = \varepsilon_m(z)/\varepsilon_0$, $\in_m (0) = 1$. Отсюда получаем выражение для относительного изменения скорости волны

$$\frac{\Delta C(z)}{C} = \frac{d\theta(\epsilon=0)}{dz} = \frac{1}{2} \epsilon_m^{n-1}(z) \,.$$

Из условия сшивки $\theta(\in_m, \in_{\theta} > 0) = \theta(\in_m, \in_{\theta} < 0) = \theta_m(z)$ получаем уравнение для зависимости амплитуды волны от пройденного расстояния:

$$\int_{0}^{z} \left[\epsilon_{m}(z') + \epsilon_{m}(z) \right]^{n-1} dz' - \int_{0}^{z} \left[\epsilon_{m}(z') - \epsilon_{m}(z) \right]^{n-1} dz' = 2[1 - \epsilon_{m}(z)].$$
(1.7)

Это нелинейное интегральное уравнение относительно $\in_m (z)$ достаточно легко решается в случае целочисленных значений n.

1.3.1. Решения для целочисленных значений степени гистерезисной нелинейности

Решение для n = 2 соответствует известному решению в виде волны треугольной формы, полученной В. Гусевым [1]

$$\theta = \begin{cases} -\frac{1}{2} \ln \epsilon_m + \frac{\epsilon}{2\epsilon_m}, & \epsilon_\theta > 0; \\ 1 - \frac{1}{2} \ln \epsilon_m - \frac{\epsilon}{2\epsilon_m}, & \epsilon_\theta < 0. \end{cases}$$

В этом случае выражение для максимума волны $\in_m (z)$ и его фазы $\theta_m(z)$ имеют следующий вид $\in_m (z) = \frac{1}{1+z}$, $\theta_m(z) = -\frac{1}{2} \ln \in_m (z) + \frac{1}{2}$. Заметим, что \in - функция двух аргументов, $\in (z, \theta)$, а также $\in_m = \in_m (z)$ в уравнении (1.6). Далее для краткости аргументы функции приводиться не будут.

Выражения для декремента затухания $\delta(z)$ и относительного изменения скорости волны $\Delta C/C$ имеют вид

$$\delta(z) = -\frac{1}{\epsilon_m(z)} \frac{d \epsilon_m(z)}{dz} = \epsilon_m(z).$$

Для n = 3 получаем следующее

$$\theta = \begin{cases} -\frac{1}{4} \ln \epsilon_m + \frac{\epsilon}{2\epsilon_m} + \frac{\epsilon^2 z}{2}, & \epsilon_\theta > 0; \\ 1 - \frac{1}{4} \ln \epsilon_m - \frac{\epsilon}{2\epsilon_m} + \frac{\epsilon^2 z}{2}, & \epsilon_\theta < 0, \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\epsilon_m^2} - 1 \right), \ \epsilon_m \ (z) = [1 + 4z]^{-1/2} \ , \ \theta_m = -\frac{1}{4} \ln \epsilon_m + \frac{5}{8} - \frac{\epsilon_m^2}{8} \ , \ \delta = 4 \epsilon_m^2$$

Профили волн при n = 3 на различных расстояниях от источника представлены на рис. 1.3. Хорошо видно, что с ростом расстояния профиль волны становится нелинейным, причем часть периода при $\in_{\theta} > 0$ представляет собой выпуклую функцию, тогда как часть с $\in_{\theta} < 0$ соответствует вогнутой.



Рис. 1.3. Профили пилообразной волны при n = 3 для различных расстояний *z*.



$$\theta = \begin{cases} -\frac{3}{20} \ln \epsilon_m + \frac{\epsilon}{20} \left(\epsilon_m^{3/2} + \frac{9}{\epsilon_m} \right) - \frac{3\epsilon^2}{20} \left(\frac{5}{2} - \sqrt{\epsilon_m} - \frac{3}{2\epsilon_m^2} \right) - \frac{\epsilon_m^3 z}{10} + \frac{\epsilon^3 z}{2}, \quad \epsilon_\theta > 0; \\ 1 - \frac{3}{20} \ln \epsilon_m - \frac{\epsilon}{20} \left(\epsilon_m^{3/2} + \frac{9}{\epsilon_m} \right) - \frac{3\epsilon^2}{20} \left(\frac{5}{2} - \sqrt{\epsilon_m} - \frac{3}{2\epsilon_m^2} \right) - \frac{\epsilon_m^3 z}{10} - \frac{\epsilon^3 z}{2}, \quad \epsilon_\theta < 0; \end{cases}$$
$$z = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{\epsilon_m^3} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_m}} \right), \quad \theta_m = -\frac{3}{20} \ln \epsilon_m + \frac{143}{200} + \frac{4}{25} \epsilon_m^{5/2} - \frac{3\epsilon_m^2}{8}, \quad \delta = \frac{20\epsilon_m^3}{6 - \epsilon_m^{5/2}}.$$

При n = 5 можно получить

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{64} (\epsilon_m^2 - 1 - 6\ln \epsilon_m) + \frac{\epsilon}{8} \left(\epsilon_m + \frac{3}{\epsilon_m} \right) - \frac{9\epsilon^2}{32} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_m^2} - \frac{2}{3}\ln \epsilon_m \right) - \frac{\epsilon^3}{8} \left(\frac{1}{\epsilon_m} - \frac{1}{\epsilon_m^3} \right) + \frac{\epsilon^4 z}{8}, \quad \epsilon_\theta > 0; \\ 1 + \frac{1}{64} (\epsilon_m^2 - 1 - 6\ln \epsilon_m) - \frac{\epsilon}{8} \left(\epsilon_m + \frac{3}{\epsilon_m} \right) - \frac{9\epsilon^2}{32} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_m^2} - \frac{2}{3}\ln \epsilon_m \right) + \frac{\epsilon^3}{8} \left(\frac{1}{\epsilon_m} - \frac{1}{\epsilon_m^3} \right) + \frac{\epsilon^4 z}{8}, \quad \epsilon_\theta < 0; \end{cases}$$

$$z = \frac{1}{64} \left(\frac{3}{\epsilon_m^4} - \frac{2}{\epsilon_m^2} - 1 \right), \ \theta_m = \frac{3}{32} (2\epsilon_m^2 - 1) \ln \epsilon_m + \frac{395}{512} - \frac{69}{256} \epsilon_m^2 - \frac{\epsilon_m^4}{512}, \ \delta = \frac{16\epsilon_m^4}{3-\epsilon_m^2}$$

На рис. 1.4. представлены профили волн для различных значений степени гистерезисной нелинейности (n = 2, 3, 4, 5) на расстоянии z = 1, соответствующем характерной длине нелинейного взаимодействия. Хорошо видно, что увеличение n с 3 до 5 приводит к более выпуклой форме волны, при этом амплитуды $\in_m (z)$ и их фазы θ_m меняются незначительно. (Также для сравнения на этом рисунке представлена форма волны для случая n = 3/2, рассчитанная по формуле (1.10), полученной ниже.)



Рис. 1.4. Профили волн для различных значений степени гистерезисной нелинейности (n = 3/2, 2, 3, 4, 5) на расстоянии z = 1.

Как хорошо видно из вышеприведенных решения, слагаемые, пропорциональные \in_m^{1-n} являются наиболее сильной асимптотикой для всех зависимостей $z = z(\in_m)$, при $\in_m <<1$. В связи с этим мы можем предположить, что зависимость $\in_m (z)$, которая может быть использована как приближенное решение уравнения (1.7) для произвольного значения *n*, имеет вид

$$\in_m (z) = (1+az)^{\frac{1}{1-n}},$$
(1.8)

где *а* - зависящий от *n* коэффициент, который определяется из численного решения уравнения (1.7), например, 0.28 для 3/2, 0.47 для 5/3, 2.2 для 5/2, 10 для 4, 22 для 5.

1.3.2. Приближенные решения для произвольных значений степени гистерезисной нелинейности

Уравнение (1.7) может быть преобразовано в канонический вид интегрального уравнения Вольтерра второго рода после интегрирования по частям и замены $\in_m (z) = 1 - y$:

$$z(y) = \frac{n-1}{\left[2(1-y)\right]^{n-1}} \int_{0}^{y} z(t) \left[(2-y-t)^{n-2} - (y-t)^{n-2}\right] dt + \frac{2y}{\left[2(1-y)\right]^{n-1}}.$$
 (1.9)

В случае дробных степеней попытки получить точное решение не увенчались успехом, тем не менее, можно решить эту задачу численно, заменив интеграл в уравнении (1.9) левой римановой суммой аппроксимировать функцию ее значениями на левом конце интервала, поскольку значения на правом конце - неизвестны.

На рис. 1.5 представлены зависимости $\in_m (z)$ для произвольных значений *n*. В случае дробных значений зависимости, соответствующие выражению (1.8) (пунктир) хорошо согласуются с численными решениями уравнения (1.9) (сплошные линии). В худшем случае, при n = 3/2 и z = 20, амплитуда принимает значение $\in_m = 0.023$ при численном решении уравнения (1.9), тогда как из приближенной зависимости (1.8) $\in_m = 0.0237$. Таким образом, погрешность аппроксимации составляет около 3%.



Рис. 1.5. Зависимости $\in_m (z)$ для произвольных значений *n*.

Это позволяет нам использовать выражение (1.8) как приближенное решение уравнения (1.7). При подстановке в выражения (1.6) получаем решение исходной задачи для произвольных (дробных) значений степени гистерезисной нелинейности в следующем виде

$$\theta = \begin{cases} \frac{\in (z,\theta)}{2} - \frac{n-1}{2a} \left[\ln \epsilon_m - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n) \in (z,\theta)^k}{kk! \Gamma(n-k)} \left(\frac{1}{\epsilon_m^k} - 1 \right) \right], & \epsilon_\theta > 0; \\ 1 - \frac{\in (z,\theta)}{2} - \frac{n-1}{2a} \left[\ln \epsilon_m - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(n) \in (z,\theta)^k}{kk! \Gamma(n-k)} \left(\frac{1}{\epsilon_m^k} - 1 \right) \right], & \epsilon_\theta < 0, \end{cases}$$
(1.10)

где $\Gamma(k)$ - Гамма функция.

На рис. 1.6 представлены профили волны при n=3/2 на различных расстояниях *z*. Хорошо видно, что при распространении часть периода при $\in_{\theta} > 0$ представляет собой вогнутую функцию, тогда как при $\in_{\theta} < 0$ эта функция - выпуклая, в отличие от случая кубического гистерезиса (см. также рис. 1.4).



Рис. 1.6. Профили волны при n = 3/2 на различных расстояниях *z*.

1.3.3. Самоподобные решения для произвольных значений степени гистерезисной нелинейности

Для получения дальнейшего анализа из уравнения (1.2) и (1.5) получим следующее безразмерное уравнение

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \cdot \begin{cases} (\epsilon_m + \epsilon)^{n-1} - \epsilon_m^{n-1}, \ \epsilon > 0; \\ (\epsilon_m - \epsilon)^{n-1} - \epsilon_m^{n-1}, \ \epsilon < 0. \end{cases}$$
(1.11)

где все обозначения аналогичны использованным в уравнении (1.6), кроме временной переменной $\theta = \tau/T - (1/T) \int_0^z \in_m^{n-1} (z') dz'$, учитывающей сдвиг профиля волны в целом из-за гистерезисной нелинейности. Случай квадратичного гистерезиса(n = 2) был подробно рассмотрен В. Гусевым в работе [Gusev et al, 1997], поэтому сразу перейдем к случаю кубического гистерезиса (n = 3), когда уравнение (1.11) может быть записано в следующем компактном виде

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -2 \epsilon_m \left| \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta} \right| - \epsilon^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \theta}, \qquad (1.12)$$

Его решение для граничного условия $\in (0, \theta) = \sin \theta$ может быть записано в неявном виде

$$\theta = \begin{cases} \frac{\epsilon}{\epsilon_m} \arccos(\epsilon_m) + \epsilon^2 z + \arcsin(\epsilon), & \epsilon > 0, \\ \pi - \frac{\epsilon}{\epsilon_m} \arccos(\epsilon_m) + \epsilon^2 z - \arcsin(\epsilon), & \epsilon < 0. \end{cases}$$
(1.13)

При этом зависимость амплитуды от расстояния и фаза первого максимума определяются выражениями

$$z = \frac{\sqrt{1 - \epsilon_m^2}}{4 \epsilon_m} + \frac{\arccos \epsilon_m}{4 \epsilon_m^2}, \qquad (1.14)$$

$$\theta_m = \frac{\epsilon_m \sqrt{1 - \epsilon_m^2}}{4} + \frac{\arccos \epsilon_m}{4}.$$
(1.15)

На рис. 1.7 представлены профили волн (кривые 1 и 3), описываемых решением (1.13) для значений z = 0 ($\in_m = 1$), z = 0.26 ($\in_m = 0.9$) и z = 0.66 ($\in_m = 0.7$), соответственно. Как видно из этого рисунка при z > 0 форма волны приобретает пилообразный профиль, отличающийся от волн в классической кубической среде меньшим значением крутизны, но в тоже время, антисимметрия полупериодов в обеих средах аналогична [Lee-Bapty, Crighton, 1987].



Рис. 1.7. Профили волн для среды с кубическим гистерезисом для синусоидального начального условия (0, 1 и 2) при z = 0, z = 0.26 и z = 0.66, и самоподобные решения для значений амплитуды $\in_m 0.9$ (3) и 0.7 (4).

Получение точных аналитических решений для синусоидальных начальных условий в случае других значений степени *n* связано с громоздкими вычислениями и имеет сомнительную практическую ценность.

В работе [Gusev et al, 1997)] также показано, что в квадратичной гистерезисной среде реализуется самоподобное решение. Легко показать, что решения уравнения (1.11) для

произвольных значений степени *n* могут быть получены с помощью метода разделения переменных, тогда, если искать решение в виде $\in (z, \theta) = \in_m (z)v(\theta)$, получаем следующие выражения для зависимости амплитуды от расстояния

$$z = \frac{n-1}{k} \left(\frac{1}{\epsilon_m^{n-1}} - 1 \right), \ \epsilon_m = \frac{1}{\sqrt[n-1]{1 + (n-1)kz}},$$
(1.16)

и простое дифференциальное уравнение для временной части

$$kd\theta = \frac{(1\pm v)^{n-1} - 1}{v} dv.$$
(1.17)

Не трудно догадаться, что выражение (1.16) аналогично предложенному выше приближенному выражению (1.8), которое является асимптотикой точного решения для пилообразного начального условия, что отражает свойство IV гистерезисных уравнений состояния.

Для n = 3 получаем следующие выражения:

$$\theta = \frac{\pi}{4} \begin{cases} 2v + v^2/2, & \dot{\epsilon} > 0; \\ 4 - 2v + v^2/2, & \dot{\epsilon} < 0, \end{cases}$$

$$\epsilon_m = \frac{1}{\sqrt{1 + \pi z/2}}.$$
(1.18)

Профили волн, соответствующие этим выражениям представлены на рис. 1.7 для значений амплитуды $\in_m 0.9$ (3) и 0.7 (4). Хорошо видно, что при $\in_m = 0.7$, самоподобное решение практически не отличается от точного.

Аналогичным образом можно получить решение и для дробных значений, например, для *n* = 3/2.

$$\theta = \frac{\pi}{2\sqrt{2} - 2\ln(\sqrt{2} + 1)} \begin{cases} 2(\sqrt{\nu + 1} - 1) + 2\ln(2/(\sqrt{\nu + 1} + 1)), & \Leftrightarrow > 0; \\ 2\sqrt{2} - 2\ln(\sqrt{2} + 1) - 2(1 - \sqrt{1 - \nu}) + 2\ln(2/(\sqrt{1 - \nu} + 1)), & \Leftrightarrow < 0, \end{cases}$$

$$\epsilon_m = \frac{1}{\left(1 + \pi z/(2\sqrt{2} - 2\ln(\sqrt{2} + 1))\right)^2}.$$

$$(1.19)$$



Рис. 1.8. Профили самоподобных волн для сред с показателями степени 3/2, 2, 3.

На рис. 1.8 представлены профили самоподобных волн для трех значений степени гистерезисной нелинейности 3/2, 2 и 3. Как видно из рисунка, для степеней, отличных от 2, профили волн представляют собой чередование выпуклых и вогнутых участков.

Далее приведем выражения для различных значений степеней гистерезисной нелинейности.

Для n = 4 получаем следующие выражения:

$$\theta = \frac{3\pi}{20} \begin{cases} 3v + 3v^2/2 + v^3/3, & \dot{\epsilon} > 0; \\ 20/3 - 3v + 3v^2/2 - v^3/3, & \dot{\epsilon} < 0, \end{cases}$$
$$\epsilon_m = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + 9\pi \chi/20}}.$$

Для n = 5 получаем следующие выражения:

$$\theta = \frac{3\pi}{32} \begin{cases} 4v + 3v^2 + 4v^3/3 + v^4/4, & \dot{\epsilon} > 0; \\ 32/3 - 4v + 3v^2 - 4v^3/3 + v^4/4, & \dot{\epsilon} < 0, \end{cases}$$
$$\epsilon_m = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + 3\pi z/8}}.$$

Для n = 5/2 получаем следующие выражения:

$$\theta = \frac{\pi}{\frac{5\sqrt{2}}{3} - \ln(\sqrt{2}+1)} \begin{cases} \frac{(1+\nu)^{3/2} - 1}{3} + (\sqrt{\nu+1}-1) + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{\nu+1}+1}\right), & \dot{\epsilon} > 0; \\ \frac{5\sqrt{2}}{3} - \ln(\sqrt{2}+1) + \frac{(5\sqrt{2}-1)}{3} + (\sqrt{1-\nu}-1) + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{1-\nu}+1}\right), & \dot{\epsilon} < 0, \\ \epsilon_m = \frac{1}{\left(1 + 3\pi z/(10\sqrt{2}/3 - 2\ln(\sqrt{2}+1))\right)^{2/3}}. \end{cases}$$

Для поиска количественных отличий найдем спектральные разложения всех полученных решений. В случае целочисленных степеней выражения для косинусной a_m и синусной b_m компонент спектра имеют достаточно компактный вид в виде интегралов, например для n = 3:

$$\binom{a_m}{b_m} = \frac{4}{\pi(2m+1)} \int_0^1 \cos\left(\pi \frac{2m+1}{2}t\right) \begin{pmatrix} -\sin\left(\pi \frac{2m+1}{8}t^2\right) \\ \cos\left(\pi \frac{2m+1}{8}t^2\right) \end{pmatrix} dt$$

Как видно из этого выражения, спектр содержит в себе компоненты только на нечетных гармониках. В случае дробных степеней разделить четные и нечетные составляющие не представляется возможным, поэтому приведем только графическое представление амплитудного и фазового спектров (рис. 1.9 – 1.11).



Рис. 1.9. Амплитудный спектр самоподобных волн для различных значений показателя степени *n*.

Как видно из этого рисунка для всех значений показателей степени в высокочастотной части спектра имеется асимптотика $(2k+1)^{-2}$, что соответствует скачку первой производной в точках максимума и минимума волны, также все кривые упорядочены по значению степени. Поскольку для квадратичного случая известны точные выражения для спектральных составляющих (спектр сигнала треугольной формы), то всегда можно определить является ли значение степени гистерезисной нелинейности большим, равным или меньшим 2. На рис. 1.10 для большей наглядности приведены амплитудные спектры для степеней 3/2, 2 и 5/2 в области низких частот.



Рис. 1.9. Амплитудный спектр самоподобных волн для различных значений показателя степени *n*.



На рис. 1.11 приведены графики фазовых спектров самоподобных волн.

Рис. 1.11. Фазовый спектр самоподобных волн для различных значений показателя степени *n*.

На этом рисунке также видны различия. Таким образом, полученные результаты могут быть использованы для интерпретации экспериментальных данных, например, по наблюдению сейсмических волн от различных источников, для уточнения параметров гистерезисных уравнений горных пород в районе наблюдения.

1.4. Акустические импульсы в средах со степенной гистерезисной нелинейностью

Исследование распространение однополярных импульсов является одной из классических задач в области физики нелинейных волн в силу наличия закона сохранения импульса, который выражается в сохранении площади возмущения, что часто помогает получить достаточно простые выражения для зависимостей амплитуды и длительности импульса от расстояния. В связи с этим, представляет интерес изучение закономерностей распространения и эволюции однополярных импульсов деформации в средах с произвольной степенной (*n* > 1) гистерезисной нелинейностью, когда возмущения среды на переднем и заднем фронтах импульса описываются различными зависимостями напряжения от деформации. Как уже было отмечено В. Назаровым [Назаров, 1997], специфика такой задачи заключается в том, что в этих случаях "перехлест" и ударный фронт в импульсе не образуются, однако амплитуда импульса будет убывать, а его длительность – увеличиваться. Это связано с тем, что гистерезисные среды обладают нелинейными потерями, эквивалентными площади петли гистерезиса, и, кроме того, малые возмущения одной и той же величины на переднем и заднем фронтах импульса движутся с различными скоростями, что и приводит к увеличению его длительности.

Ранее распространение однополярных импульсов в средах с гистерезисной нелинейностью произвольного типа рассматривалось в работах [Назаров, 1997; Назаров, Радостин, 2008]. Однако, рассматривалось уравнение состояния (1.3), содержащее только слагаемые с максимальной степенью, что, хотя и описывает основные известные проявления гистерезисной нелинейности, но, как уже отмечалось выше, не совсем соответствует корректным принципам построения гистерезисных моделей.

В этом разделе проводится теоретическое исследование и анализ распространения однополярных акустических возмущений (или импульсов) в средах со степенной гистерезисной нелинейностью в рамках модели Давиденкова (1.4). Получены точные аналитические решения,

описывающие профиль и характеристики импульсов, для случаев целочисленных значений показателя степени *n*, а также приближенные и численные решения для дробных степеней.

1.4.1. Акустические импульсы в средах со степенной гистерезисной нелинейностью

Подставляя уравнение (1.4) в уравнение (1.5) получим следующие уравнения для переднего из заднего фронта импульса

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x} = -\frac{1}{2C} \gamma \varepsilon_1^{n-1} \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \tau} > 0,$$
$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial x} = -\frac{1}{2C} \gamma \left[(\varepsilon_m - \varepsilon_2)^{n-1} \right] \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \tau} < 0.$$

Решение этих уравнений с граничным условием $\varepsilon(0,\tau) = \frac{2\varepsilon_0}{T} \begin{cases} \tau, & 0 \le \tau \le T/2 \\ T-\tau, & T/2 \le \tau \le T \end{cases}$ имеет

вид

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{n-1} z + \frac{1}{2} e & \dot{e} > 0; \\ \frac{1}{2} \int_{0}^{z} (e_{m} (z') - e)^{n-1} dz' + 1 - e/2, & \dot{e} < 0, \end{cases}$$

 $\operatorname{rge} \theta = \tau / T, \ z = \gamma \varepsilon_0^{n-1} / (cT), \ \in \varepsilon / \varepsilon_0, \ \in_m = \varepsilon_m / \varepsilon_0, \ \in_m (0) = 1.$

Условие сшивки $\theta(\in_m, \in > 0) = \theta(\in_m, \in < 0) = \theta_m(z)$ позволяет получить уравнение, определяющее зависимость амплитуды волны от расстояния

$$\frac{1}{2} \in (z)_m^{n-1} z - \frac{1}{2} \int_0^z \left[\epsilon_m (z') - \epsilon_m (z) \right]^{n-1} dz' = 1 - \epsilon_m (z), \qquad (1.20)$$

Заметим, что уравнение (1.20) также как и полученное выше уравнение (1.7), является нелинейным интегральным относительно $\in_m (z)$, оно сравнительно легко решается в случае целых *n*.

Преобразовывая интеграл по частям и произведя замену $\in_m (z) = 1 - y$, можно получить уравнение (1.20) в канонической форме интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода

$$z(y) = \frac{n-1}{(1-y)^{n-1}} \int_{0}^{y} z(t) [y-t]^{n-2} dt + \frac{2y}{(1-y)^{n-1}},$$
(1.21)

Оно сводится к дифференциальному уравнению в следующем простом виде для n = 2

$$\frac{d}{dy}[z(y)(1-y)] = z(y) + 2,$$

для *n* > 2

$$\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}} \Big[z(y)(1-y)^{n-1} \Big] = (n-1)! z(y) \,.$$

Эти уравнения должны быть дополнены начальными условиями при *y* = 0, которые также могут быть компактно записаны в виде

$$\frac{d^{k}z(y)}{dy^{k}}\bigg|_{y=0} = \frac{2k(n-3+k)!}{(n-2)!},$$

где k = 0, 1, ..., n - 2 - порядок производной.

Так, например
$$\left. \frac{dz}{dy} \right|_{y=0} = 2, \left. \frac{d^2 z}{dy^2} \right|_{y=0} = 4(n-1), \left. \frac{d^3 z}{dy^3} \right|_{y=0} = 6(n-1)n$$
 и т.д.

В случае *n* = 2 получаем известное решение в виде треугольного импульса, полученное В. Гусевым [Gusev, 2000]

$$\begin{split} & \in_m = \frac{1}{\sqrt{1+z}}, \ \theta(\in_m) = \theta_m = \frac{\sqrt{1+z}}{2}, \ \theta(0) = \theta^* = \sqrt{1+z} \\ & \theta = \begin{cases} \frac{\in z}{2} + \frac{\epsilon}{2}, & \epsilon > 0, \\ \sqrt{1+z} - \frac{\epsilon z}{2} - \frac{\epsilon}{2}, & \epsilon < 0. \end{cases} \end{split}$$

Для *n* =3 получаем

$$\epsilon_{m} = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{3}{2}z}}, \ \theta_{m} = \frac{\epsilon_{m}^{2} z + \epsilon_{m}}{2}, \ \theta^{*} = \sqrt[3]{1 + \frac{3}{2}z}$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^{2} z}{2}, & \dot{\epsilon} > 0\\ \theta^{*} - \frac{\epsilon}{\epsilon_{m}^{2}} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^{2} z}{2}, & \dot{\epsilon} < 0 \end{cases}$$

На рис. 1.12. представлен профиль импульса для *n* = 3 на различных расстояниях от источника *z*.



Рис. 1.12. Эволюция импульса в кубичной гистерезисной среде.

Для n = 4 получаем

$$z = \frac{6}{11} \left(\frac{1}{\epsilon_m^4} - \frac{\sqrt{2}}{3\epsilon_m} \sin(\sqrt{2}\ln\epsilon_m) - \frac{1}{\epsilon_m}\cos(\sqrt{2}\ln\epsilon_m) \right),$$

$$\theta_m = \frac{\epsilon_m^3 z + \epsilon_m}{2}, \ \theta^* = \frac{\epsilon_m^2}{11} \left[\frac{12}{\epsilon_m^3} + \frac{3\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\ln\epsilon_m)}{2} - \cos(\sqrt{2}\ln\epsilon_m) \right],$$

$$\theta = \begin{cases} \frac{\epsilon_m^3 z + \epsilon_m}{2}, \ \theta^* = \frac{\epsilon_m^2}{2} + \frac{\epsilon_m^3 z}{2}, \ \theta^* = \frac{\epsilon_m$$

Для *n* = 5 мы приведем только зависимость расстояния от амплитуды ввиду чрезвычайной громоздкости выражения для профиля

$$z = \frac{12}{25} \left(\frac{1}{\epsilon_m^5} - \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{15}}{6\epsilon_m^{5/2}} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \epsilon_m\right) - \frac{5}{6\epsilon_m^{5/2}} \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2} \ln \epsilon_m\right) \right).$$

В случае дробных степеней точных решений уравнения (1.20) получить не удалось, тем не менее, можно получить приближенные решения уравнения (1.21) итерационными методами, заменяя интеграл квадратурными формулами. Заметим, также что уравнение (1.21) можно рассматривать как уравнение с дробными производными и применять соответствующие методы решения [Podlubny, 1998].

На рис. 1.13. представлены зависимости амплитуды от расстояния для произвольных значений степени. Для целочисленных значений 2 – 5 эти зависимости рассчитаны по точным

выражениям (сплошные линии), кривые для 3/2, 5/3, 5/2 – получены в результате численного решения уравнения (1.21) (сплошные линии). Кроме того, для всех зависимостей кроме 2 и 3, представлены кривые, соответствующие асимтотическим зависимостям $\in_m (z)$ следующего вида

$$\epsilon_m = \frac{1}{\sqrt[n]{1+az}}.$$
(1.22)

Значения параметра *а* в этих случаях: 0.64 для 3/2; 0.76 для 5/3; 1.3 для 5/2; 1.9 для 4 и 5. Хорошо видно, что эти приближенные зависимости согласуются с численными и точными решениями.

Таким образом, приближенное решение в случае произвольных значений показателя степени гистерезисной нелинейности *n* имеет вид

$$\theta = \begin{cases} \frac{\in (z,\theta)}{2} + \frac{\in (z,\theta)^{n-1}z}{2}, & \epsilon > 0; \\ \frac{1}{2a \in \left[\left(1 - \epsilon (z,\theta) \right)^n - \left(1 - \frac{\epsilon (z,\theta)}{\epsilon_m} \right)^n \right] + 1 - \frac{\epsilon (z,\theta)}{2}, & \epsilon < 0; \end{cases}$$
(1.23)

Заметим, что сингулярности при $\in (z, \theta) = 0$ отсутствует, для каждого конкретного значения степени n от нее можно избавиться стандартным способом. Длительности импульса определяется следующим выражением

$$\theta^* = 1 + \frac{n(1 - \epsilon_m)}{2a \epsilon_m},\tag{1.24}$$

асимптотически, при $\in_m \to 0$, она обратно пропорциональна амплитуде импульса, также как и в случаях целочисленных значений *n*.



Рис. 1.13. Зависимость амплитуды импульса от расстояния *z* для различных значений *n*.



Рис. 1.14. Эволюция импульса в гистерезисной среде при n = 5/3.

На рис. 1.14 представлена эволюция импульса в случае n = 5/3. Задний фронт импульса, рассчитанный численно показан сплошной линией, тогда как пунктирная линия соответствует приближенному решению (1.23) при a = 0.76. Хорошо видно, что приближенное решение близко к численному. Сравнение рис. 1.12 и 1.14 показывает те же отличия, отмеченные для периодических волн, а именно, выпуклость переднего фронта и выгнутость заднего при n > 2 и обратная ситуация при n < 2. Заметим, что в работе [Назаров, Радостин, 2008] оба фронта были выпуклые при n > 2 и вогнутые при n < 2.

1.4.2. Качественное описание эволюции импульсов, наблюдавшихся в работе [Yasumoto et al, 1974]

Как уже было отмечено во введении в большинстве случаев гистерезисная нелинейность проявляется косвенно в виде одинаковых степенных зависимостей изменения упругого модуля и затухания от амплитуды волны, что сравнительно легко наблюдается в стержневых резонаторах (см. Главу 4) [M1; Guyer, Johnson, 2009]. Значительно больший уровень деформации требуется для случая бегущих волн. По нашим данным опубликовано только одно экспериментальное наблюдение распространения однополярного импульса без образования ударного фронта в работе Ү. Yasumoto и со-авторов [Yasumoto et al, 1974]. В этой работе однополярные импульсы возбуждались в алюминиевых стержнях, подвергнутых различной степени отжига при температурах до 500° С. Было обнаружено, что амплитуда импульсов на приемнике уменьшалась с ростом температуры отжига по сравнению с линейным распространением в образце без отжига, при этом длительность импульса заметно

увеличивалась. Поскольку данные не калиброваны мы постараемся описать наблюдаемые явления качественно, используя изменения амплитуды и длительности импульсов относительно линейных параметров, соответствующих образцам без отжига и с отжигом при минимальной температуре 250°C.

Сначала получим выражения для амплитуды и длительности импульсов в зависимости от электростатической энергии конденсатора, которая определяла уровень входного сигнала. Из выражений (1.22) и (1.24) следует

$$\mathcal{E}_{m} = \frac{kE_{0}}{\sqrt[n]{1 + a\gamma(kE_{0})^{n-1}(x/cT)}},$$
(1.25)

$$\theta^* = 1 + \frac{n(\sqrt[n]{1 + a\gamma(kE_0)^{n-1}(x/cT)} - 1)}{2a}, \qquad (1.26)$$

где k - коэффициент, учитывающий связь между амплитудой деформации на входе и электростатической энергией, а также между амплитудой деформации на выходе и максимальным значением электрического сигнала, x, c, T параметры эксперимента. Из выражения (1.25) следует, что для малых начальных амплитуд $\varepsilon_m^* \approx k E_0^*$, далее с ростом амплитуды это выражение может быть представлено в следующем виде

$$\varepsilon_m \approx \frac{kE_0}{1 + a\gamma(kE_0)^{n-1}(x/ncT)},\tag{1.27}$$

Далее после деления $\varepsilon_m^* \approx k E_0^*$ на это уравнение и логарифмирования получаем

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_m^*}{\varepsilon_m}\frac{E_0}{E_0^*}-1\right) \approx (n-1)\ln E_0 + \ln\left(a\gamma x k^{n-1}/(ncT)\right), \qquad (1.28)$$

использование этого уравнения и экспериментальных данных позволяет определить значение степени гистерезисной нелинейности *n*. На рис. 1.15 символами показаны исходные зависимости принятых импульсов от электростатической энергии. Линии соответствуют зависимости (1.25). На рис. 1.16 показаны данные и зависимости соответствующие уравнению (1.28), наклон прямых равен 3.


Рис. 1.15. Исходные зависимости принятых импульсов от электростатической энергии (символы), линии соответствуют зависимости (1.25).



Рис. 1.16. Экспериментальные данные (символы), линии соответствуют зависимости (1.28), наклон прямых - 3.

Также можно оценить значения параметра γ . Так как другие параметры во втором слагаемом в правой части уравнения (1.28) равны, то только параметр γ чувствителен к изменению температуры отжига. Следовательно, если положить $\gamma = \gamma_0$ для случая 350° С, то $\gamma = 5\gamma_0$ и $\gamma = 15\gamma_0$ получаются для случаев 450° С и 500° С, соответственно. Малость нелинейности для случая 350° С приводит к тому, что прямая линия близка ко всем экспериментальным точкам на рис. 1.15. Рост температуры отжига приводит к росту нелинейности и в результате различия между уравнениями (1.25) и (1.26) становятся более заметными в интервале больших значений амплитуд импульса. Заметим также, что подобное поведение параметра нелинейности был обнаружено В. Назаровым в образцах из меди [Назаров, 1991а], где значение параметра нелинейности образца, отожженного при 800° С, был в 70 и 7 раз больше, чем параметры для образцов, отожженного при 600° С и не подвергнутого отжигу, соответственно.

Наклон прямых на рис. 1.16 соответствует показателю степени гистерезисной нелинейности 4. На рис. 1.17 показаны профили импульсов для случаев 64% (а) и 100% (б) от максимальных значений амплитуды импульса на излучателе. Сравнение этих рисунков с рисунками в оригинальной статье [Yasumoto et al, 1974] показывает, что предложенное теоретическое описание достаточно хорошо описывает результаты эксперимента.



Рис. 1.17. Качественный вид профилей импульсов для 64% (а) и 100% (б) от максимальной амплитуды на излучателе.

Полагая, что длительности импульса в случае отжига при 500° С практически в 2 раза превышает длительность линейного импульса, можно оценить абсолютные значения параметра нелинейности. Подстановка значений $\theta^* = 2$, n = 4, a = 1.9 в уравнение (1.24) дает $\in_m = 0.51$.

Далее, используя (1.22) и обозначения перед уравнением (1.20), а также параметры эксперимента (x = 0.25 м - длина образца, c = 5240 м/с – скорость продольной волны в алюминиевом стержне, $T = 18 \cdot 10^{-6}$ с, и $\varepsilon_0 = 10^{-4}$), получаем $\gamma \approx 2.67 \cdot 10^{12}$. Значения параметров нелинейности для образцов с отжигом при 350°C и 450°C соответственно в 15 и 5 раз меньше.

Заметим, что влияние отжига на внутреннее трение в алюминии также рассматривалось в работе В. Бетехтина и со-авторов [Бетехтин и др., 2006]. В этой работе утверждается, увеличение температуры отжига приводит к росту амплитудно-зависимого декремента из-за увеличения смещений дислокаций из положения равновесия под действием колебательных напряжений.

В Главе 4 приводятся оценки значения параметра нелинейности в гистерезисной среде с показателем степени 4 для образца белого мрамора Коелга [Назаров и др., 2010], $6.8 \cdot 10^{14}$, что на 2 порядка больше наших оценок для алюминиевого образца. Как показано в работе [Haupert et al, 2011], даже в случае квадратичной гистерезисной нелинейности значения параметра нелинейности на 1-2 порядка выше для горных пород, чем для металлов, так что полученные оценки можно считать вполне правдоподобными.

1.5. Упругие волны в среде с квадратичной гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией

В предыдущих разделах было рассмотрено распространение упругих волн в идеальных (без учета линейной диссипации) средах. В этом случае получаемые уравнения движения имели первый порядок, что существенно упрощало получение точных решений. Как будет показано в Главе 4, линейную диссипацию необходимо учитывать при описании экспериментальных результатов. Поскольку амплитуды высших гармоник всегда намного меньше амплитуды волны на основной частоте, расчеты можно производить в рамках метода возмущений. В этом разделе мы рассмотрим распространение импульсных и периодических волн в средах с квадратичной гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией вязкого типа. В этом случае уравнение состояния имеет следующий вид

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f(\varepsilon, \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon})] + \alpha \rho \dot{\varepsilon}, \qquad (1.29)$$

где α - коэффициент вязкости, а нелинейная функция имеет вид (1.2) для периодических волн и (1.4) (или (1.3) при $\dot{\varepsilon} > 0$) – для однополярных импульсов при n = 2. Также может быть получен аналог уравнения (1.5)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C} \frac{\partial f(\varepsilon, \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon})}{\partial t_1} + \frac{\alpha}{2C^3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t_1^2}, \qquad (1.30)$$

где $t_1 = t - x/C$, $C = (E/\rho)^{1/2}$. Заметим, что изменения формы волны предполагаются малыми на расстоянии длины волны $\lambda = 2\pi C/\omega$, ω - частота, таким образом, это уравнение применимо при $\pi \alpha \omega/C^2 \ll 1$ [1, 2].

1.5.1. Самоподобное решение для однополярных импульсов

Безразмерная форма эволюционного уравнения (1.30) для положительных однополярных импульсов имеет вид:

$$\frac{\partial e}{\partial z} + e \frac{\partial e}{\partial \theta} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial e}{\partial \theta} > 0, \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial e}{\partial z} + \left[e_m(z) - e \right] \frac{\partial e}{\partial \theta} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2}, \quad \frac{\partial e}{\partial \theta} < 0.$$
(1.32)

где $e = \varepsilon/\varepsilon_0 \ge 0$, $e_m(z) = \varepsilon_m/\varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_{\max}(x=0)$, $z = \gamma \varepsilon_0 x/(CT_0)$, $\theta = t_1/T_0$, T_0 - начальная длительность импульса, $\Gamma = \frac{2\gamma \varepsilon_0 C^2 T_0}{\alpha}$ - число Гольдберга для гистерезисной среды, характеризующее отношение нелинейности и диссипации [3,4].

Подстановка $\tau = \theta - \frac{1}{2} \int_0^z e_m(z') dz'$ преобразует уравнения (1.31), (1.32) к более удобному

для дальнейшего анализа виду

$$\frac{\partial e}{\partial z} + \left[e - \frac{1}{2} e_m(z) \right] \frac{\partial e}{\partial \tau} = \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2}.$$
(1.33)

Это уравнение является аналогом уравнения Бюргерса в классической нелинейной акустике и обладает характерными теми же характерными свойствами. Во-первых, имеет место

сохранение импульса, т.е.
$$\frac{d}{dz} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e(z,\tau) d\tau \right) = 0$$
, во-вторых, профиль волны $e = e(z,\tau)$ -

непрерывная и однозначная функция при конечных значениях Г. Также, как и уравнение Бюргерса, (1.33) имеет трансляционную симметрию [$e(z,\tau) \Leftrightarrow e(z+a,\tau+b)$], но в отличие от него, четную симметрию отражения [$e(z,\tau) \Leftrightarrow e(z,-\tau)$], где a, b = const, а знак \Leftrightarrow означает наличие симметрии [Гурбатов и др., 2008].

В предельном случае $\Gamma \to \infty$ для граничного условия в виде симметричного треугольного импульса ($e(0,\tau) = 1 - |\tau|, |\tau| \le 1$) решение уравнения (1.33) имеет вид

$$e(z,\tau) = \frac{\sqrt{1+z} - |\tau|}{1+z}, \ |\tau| \le \sqrt{1+z}.$$
(1.34)

Это решение описывает уменьшение амплитуды импульса и его расширение во время распространения: $e_m(z) = 1/\sqrt{1+z}$, $T(z) = 2\sqrt{1+z}$, соответственно, площадь импульса $e_m(z)T(z)/2 = 1$ (пропорциональная переносимому импульсу) сохраняется [12].

В другом предельном случае, $\Gamma \rightarrow 0$, нелинейностью уравнения (1.33) можно пренебречь и форма импульса в процессе распространения трансформируется в близкую к кривой Гаусса.

Точное аналитическое решение уравнения (1.33) в общем виде, по-видимому, не существует, тем не менее, в некоторых случаях можно попытаться найти особые решения. Поскольку нелинейность уравнения (1.33) квадратичная по амплитуде волны, как и для уравнения Бюргерса будем искать автомодельное решение в виде [Руденко, Солуян, 1975]:

$$e(z, y) = \frac{\epsilon(y)}{\sqrt{z+c}}, \qquad (1.35)$$

где $y = \frac{\tau}{\sqrt{z+c}}$, $\in (0) = \in_0$, $e_m(z) = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{z+c}}$, c - положительная константа. Автомодельное

решение в виде (1.35) описывает, затухающую волну, не меняющую своей формы $\in = \in (y)$ при распространении. Подставляя (1.35) в (1.33), интегрируя по *y*, и полагая константу интегрирования равной 0, получаем:

$$-\frac{\in y}{2} + \left[\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{\epsilon_0 \epsilon}{2}\right] \operatorname{sgn}\left(\frac{d \epsilon}{dy}\right) = \frac{1}{\Gamma} \frac{d \epsilon}{dy}.$$

Решение этого уравнения с начальным условием $\in_{v} (0) = 0$ имеет вид:

$$\epsilon(y) = \frac{2\epsilon_0 \exp\left\{-\frac{\Gamma}{4}\left(|y| - \epsilon_0\right)^2\right\}}{\sqrt{\pi\Gamma}} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\Gamma}}{2}(|y| - \epsilon_0)\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\Gamma}}{2}\epsilon_0\right) \right\} + 2\exp\left(-\frac{\Gamma}{4}\epsilon_0^2\right)},$$
(1.36)

где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} \exp(-t^{2}) dt$ - интеграл ошибок.

Решение (1.36) описывает симметричный колоколообразный импульс, в отличие несимметричного автомодельного решения уравнения Бюргерса [Руденко, Солуян, 1975].

Амплитуда ∈₀ может быть определена как корень трансцендентного уравнения, следующего из закона сохранения импульса, для импульса единичной площади оно имеет вид:

$$1 + \frac{\sqrt{\pi\Gamma}}{2} \in_0 \exp\left(\frac{\Gamma}{4} \in_0^2\right) \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\Gamma}}{2} \in_0\right) \right\} = \exp\left(\frac{\Gamma}{4}\right).$$

На рисунке (1.18) представлена зависимость амплитуды импульса \in_0 от значений числа Гольдберга. Как и следовало ожидать, \in_0 имеет значения, близкие к 1 в сильно нелинейном случае ($\Gamma >>1$), и $\in_0 <<1$ в случае преобладания диссипации.



Рис. 1.18. Зависимость амплитуды импульса \in_0 от значений числа Гольдберга Г.

На рисунке 1.19 представлены формы решения (1.36) в зависимости от значения параметра Г ($\Gamma \rightarrow \infty$, 100, 10, 2).



Рис. 1.19. Форма самоподобного решения \in (*y*) для различных значений Γ : *l* - \in (*y*) = 1−|*y*|, 2 - Γ = 100, 3 - Γ = 10 и 4 - Γ = 2.

При уменьшении значения параметра импульс становится более гладким, приобретая форму кривой Гаусса:

$$\in (y) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{\pi}} \exp\left\{-\frac{\Gamma}{4} y^2\right\}$$

При достаточно больших значениях Γ форма импульса близка к треугольной ($\in (y) = 1 - |y|, |y| \le 1$), как для решения (1.34) при z >> 1.

1.5.2. Численное моделирование распространение однополярных импульсов

В случае граничного условия произвольной формы решение уравнения (1.33) может быть получено численно на основе спектрального подхода [Пищальников и др., 1996, Radostin et al, 2013]. Свойство четной симметрии отражения позволяет существенно упростить форму решения, в частности, оно может быть представлено в виде ряда Фурье с только косинусными слагаемыми

$$e(z,\tau) = \frac{a_0(z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \cos(n\tau), \qquad (1.37)$$

где $a_n(z)$ - коэффициенты Фурье. Не смотря на предположении о периодичности волны, это представление также может быть использовано для описания одиночных импульсов с характерной длительностью $T_0 \ll T$, полагая временной интервал T между импульсами как один цикл периодической последовательности таких импульсов.

Максимум импульса в сопровождающей системе координат всегда находится при $\tau = 0$, следовательно

$$e_m(x) = \frac{a_0(z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z).$$
(1.38)

Очевидно, что производная $\partial e/\partial \tau$ является нечетной функцией; а ее модуль $|\partial e/\partial \tau|$ - четная, и может быть записана как

$$\left|\frac{\partial e(z,\tau)}{\partial \tau}\right| = \frac{b_0(z)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z) \cos(n\tau), \qquad (1.39)$$

где коэффициенты $b_n(z)$ могут быть выражены через $a_n(z)$, используя определение коэффициентов ряда Фурье

$$b_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial e}{\partial \tau} \right| \cos(n\tau) d\tau = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z) \frac{[1 - (-1)^{k+n}]k^2}{k^2 - n^2}, \ k \neq n.$$

После подстановки выражений (1.37) - (1.39) в (1.33) получаем линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $a_n(z)$:

$$\frac{da_0}{dz} = -\frac{a_0 b_0}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k [(b_0/2) - b_k],$$
(1.40)
$$b_k = a_0 b_0 - 1 \sum_{k=1}^{n-1} - 1 \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{-2}$$

$$\frac{da_n}{dz} = -\frac{a_0b_n}{4} - \frac{a_nb_0}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k}b_k - \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} (a_kb_{k-n} + a_{k-n}b_k) + \frac{b_n}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k - \frac{n^2}{\Gamma}a_n.$$

Система уравнений (1.40) позволяет решить уравнение (1.33) численно, ограничивая число гармоник N в зависимости от требуемой точности. На рисунках 1.20 – 1.22 представлены профили импульсов для граничного условия в виде симметричного треугольного импульса ($e(0, \tau) = 1 - |\tau|, |\tau| \le 1$) для различных значений расстояния от источника z при N = 200 (сплошные линии) и самоподобные решения (пунктирные линии). Хорошо видно, что самоподобные импульсы становятся близкими к рассчитанным численно при значениях константы c от 1 при $\Gamma = 100$ до 0.2 при $\Gamma = 2$. Случай c = 1 соответствует уменьшению амплитуды изначально треугольного импульса в среде с только гистерезисной нелинейностью

(1.34), тогда как случай $c \to 0$ близок к решению линейного уравнения диффузии с граничным условием в виде дельта-функции.



Рис. 1.20. Эволюция изначально треугольного импульса при $\Gamma = 100$, сплошные линии – численное решение для z = 1 (1), z = 3 (2), z = 8 (3); пунктирные линии – самоподобное решение при z + c = 2 (1), z + c = 4 (2), z + c = 9 (3).



Рис. 1.21. Эволюция изначально треугольного импульса при $\Gamma = 10$, сплошные линии – численное решение для z = 1 (1), z = 2 (2), z = 3 (3); пунктирные линии – самоподобное решение при z + c = 1.5 (1), z + c = 2.5 (2), z + c = 3.5 (3).



Рис. 1.22. Эволюция изначально треугольного импульса при $\Gamma = 2$, сплошные линии – численное решение для z = 0.5 (1), z = 1 (2), z = 2 (3); пунктирные линии – самоподобное решение при z + c = 0.7 (1), z + c = 1.2 (2), z + c = 2.2 (3).

1.5.3. Численное моделирование распространения синусоидальных волн в среде с неупругим гистерезисом

Подставляя уравнение (1.2) в уравнение (1.30), получаем эволюционное уравнение для периодических (биполярных) волн в среде с неупругим гистерезисом [Gusev, 2006]:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -e \left| \frac{\partial e}{\partial \tau} \right| + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 e}{\partial \tau^2}, \qquad (1.41)$$

где $\tau = \frac{t_1}{T} - \int_0^z e_m(z') dz'$, $T = 2\pi / \omega$.

Это уравнение имеет более простой вид по сравнению с уравнением (1.33), известны его приближенное аналитическое [Gusev et al, 1997; Gusev, 2006] и численное [Van Den Abeele et al, 1997] решения. Предложенный спектральный подход также применим.

Заметим, что уравнение (1.41) примечательно наличием свойства сохранения симметрии. В связи с этим в частном случае изначально синусоидальной волны [$\varepsilon(x=0,t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ or $e(0,\tau) = \sin \tau$], его решение может быть представлено в виде ряда Фурье со слагаемыми, содержащими только $\sin[(2n+1)\tau]$

$$e(z,\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1}(z) \sin[(2i+1)\tau],$$

где $a_{2i+1}(z)$ - коэффициенты Фурье. В этом случае модуль производной $\partial e/\partial \tau$ может быть представлен в виде: $\left|\frac{\partial e}{\partial \tau}\right| = \frac{b_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{2i} \cos(2i\tau)$, где $b_{2j} = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i+1} \left(\frac{(-1)^{i+j}}{2i+2j+1} + \frac{(-1)^{i+j}}{2i+1-2j}\right)$. В результате, как и в предыдущем разделе, получаем систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для a_{2i+1} :

$$\frac{da_{2i+1}}{dz} = -c_{2i+1} - \frac{(2i+1)^2}{\Gamma} a_{2i+1},$$
(1.42)

где
$$c_{2i+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i} a_{2k+1} b_{2i-2k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2i+1} b_{2k} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} b_{2k+2i+2}$$
.

На рис. 1.23 представлены профили изначально синусоидальных волн на различных расстояниях от источника при $\Gamma = 100$, 10 и 2 (сплошные линии сверху вниз), а также профили для известного точного решения [Gusev, 2000] (пунктирная линия). На рисунке видно хорошее соответствие численного решения при $\Gamma = 100$ точного решения без диссипации, что подтверждает пригодность предложенного численного подхода. При $\Gamma = 10$ и $\Gamma = 2$ профили

волн становятся гладкими, что согласуется с раннее полученными приближенными решениями [Gusev et al, 1997; Gusev, 2006; Van Den Abeele et al, 1997].



Рис. 1.23. Профили изначально синусоидальных волн на различных расстояниях от источника.

На рис. 1.24 представлены зависимости амплитуды волны (а) и амплитуд первых трех гармоник (b) от расстояния. Хорошо видно, что генерация гармоник и линейная диссипация приводят к уменьшению амплитуды волны на основной частоте, тогда как амплитуды третьей и пятой гармоник (как и остальных) растут линейно на малых расстояниях, достигают максимального значения и потом уменьшаются.



Рис. 1.24. Зависимости амплитуды волны на основной частоте (а) и амплитуд 3-й и 5-й гармоник (б) от расстояния *z*.

1.6. Выводы к Главе 1

- Исследованы волновые процессы в средах с произвольными значениями степени гистерезисной нелинейности без учета линейной диссипации. Получены и проанализированы новые точные (для целочисленных значений степени) и приближенные (для произвольных значений степени) аналитические решения для импульсных и непрерывных волн. Также, для произвольного значения степени предложено аналитическое решение в виде самоподобной волны.
- С помощью полученного аналитического решения произведена оценка степени и параметров гистерезисной нелинейности образцов из алюминия, подверженных различной степени отжига.
- 3. Исследованы волновые процессы в средах с квадратичной гистерезисной нелинейностью при учете линейной диссипации вязкого типа. Получены точные аналитические решения для самоподобного импульса. На основе спектрального подхода разработана численная схема расчета профилей импульсных и непрерывных волн в таких средах.

Результаты главы опубликованы в [M2, CB5, CB19, CB21, CB24].

Глава 2. Упругие волны в средах с разномодульной нелинейностью

2.1. Введение

Разномодульными (или бимодульными) упругими свойствами, т.е. различными модулями E₁ и E₂ упругости при растяжении и сжатии, обладает довольно широкий класс твердых тел: некоторые полимеры, композиционные и конструкционные материалы [Амбарцумян, 1982], грунты [Николаев, 1979], а также твердые тела, содержащие трещины [Назаров, Радостин, 2003]. Необходимо отметить, что в разномодульной среде нелинейный режим распространения имеет место только для разнополярных волн, однополярные же возмущения распространяются линейно, с постоянными, но различными скоростями (зависящими от их полярности). Как показано в работах [Назаров, Островский, 1990], нелинейное искажение гармонической волны в идеальной разномодульной среде происходит таким образом, что на каждом ее периоде, уже на сколь угодно малом расстоянии от излучателя, в волне образуется неоднозначность или "перехлест", который устраняется введением в профиль волны разрыва – ударного фронта, при этом амплитуды высших гармоник в искаженной волне пропорциональны первой степени амплитуды исходной волны [Назаров, Сутин, 1989]. Также как и в квадратичной среде [Руденко, Солуян, 1975], учет различных линейных факторов (диссипация, дисперсия, релаксация) может предотвратить образование неоднозначностей и разрывов в профиле волны и в разномодульной среде, однако амплитудные закономерности для высших гармоник волны сохранятся.

В данной главе проводится исследование распространения продольных акустических волн в средах с разномодульной нелинейностью при учете различных линейных факторов. Интерес к такой задаче и ее специфика связаны с линейной зависимостью разномодульной нелинейности от модуля деформации, что позволяет получить точные самоподобные решения нелинейного волнового уравнения для такой среды.

2.2. Акустические волны в разномодульной среде с линейной диссипацией

2.2.1. Самоподобные решения

Вначале рассмотрим распространение и эволюцию акустических волн в средах, обладающих разномодульной нелинейностью и линейной вязкой диссипацией. Интерес к такой задаче и ее специфика обусловлены тем, что для волны в разномодульной среде с линейной диссипацией акустическое число Рейнольдса (Re) постоянно, в отличие от среды с квадратичной упругой нелинейностью и такой же линейной диссипацией, где вследствие затухания волны, значение числа Re уменьшается и, в итоге, при |Re| <<1, ее распространение число Re не зависит от амплитуды волны, поэтому, если изначально |Re| >>1, то в такой среде нелинейный режим распространения волны сохраняется фактически все время ее существования.

Рассмотрим распространение продольных акустических волн в среде, динамическое уравнение состояния которой имеет вид:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \gamma |\varepsilon|] + \alpha \rho \dot{\varepsilon} . \tag{2.1}$$

Подставляя это уравнение в уравнение движения и переходя к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x = x_1$, получим уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x, аналог уравнения (1.5):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C_0} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau} + \frac{\alpha}{2C_0^3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2}.$$
(2.2)

Из этого уравнения следует, что для разномодульной среды с диссипацией акустическое число Рейнольдса Re, равное отношению нелинейного слагаемого $\frac{\gamma}{2C_0} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau}$ к линейному

диссипативному $\frac{\alpha}{2C_0^3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2}$, не зависит от амплитуды волны $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$ и определяется

выражением: $\operatorname{Re} \cong \gamma T C_0^2 / \alpha$, где T - характерная длительность фронта волны.

Уравнение (2.2) является аналогом уравнения Бюргерса для среды с квадратичной упругой нелинейностью и линейной вязкой диссипацией [Руденко, Солуян, 1975]; решения этих уравнений обладают следующими свойствами. Первое - имеет место закон сохранения импульса (или количества движения акустической волны), т.е. $\frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(x, \tau) d\tau \right) = 0$, и второе –

при $\alpha \neq 0$ форма волны определяется непрерывной и однозначной функцией $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$. Далее, как и уравнение Бюргерса, уравнение (2.2) обладает трансляционной симметрией [$\varepsilon(x, \tau) \Leftrightarrow \varepsilon(x + a, \tau + b)$] и нечетной симметрией отражения [$\varepsilon(x, \tau) \Leftrightarrow -\varepsilon(x, -\tau)$], где a, b = const, а знак \Leftrightarrow символизирует наличие симметрии. Кроме этих симметрий, уравнение (2.2) инвариантно также к масштабному преобразованию деформации

 $[\varepsilon(x,\tau) \Leftrightarrow C\varepsilon(x,\tau)]$, т.е., если функция $\varepsilon = \varepsilon(x,\tau)$ является решением уравнения (2.2), то и функция $\varepsilon = C\varepsilon(x,\tau)$, где C = const > 0, также является решением этого уравнения.

Для получения и исследования решений уравнения (2.2), приведем его к безразмерному виду:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\frac{\partial |\epsilon|}{\partial \theta} + \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \theta^2}, \qquad (2.3)$$

где $\in \varepsilon/\varepsilon_0$, $\theta = \omega \tau$, $z = \gamma \omega x/2C_0$, $\Gamma = \text{Re} = \gamma C_0^2/\alpha \omega$ - число Гольдберга для разномодульной среды, ε_0 и ω - характерные (например, начальные) амплитуда и частота акустической волны. Из этого уравнения следует, что эволюция волны в такой среде зависит только от параметра Γ , причем, в случае $|\Gamma| >> 1$ получаем сильно-нелинейную волну, а в случае $|\Gamma| < 1$ – практически линейное ее распространение. Далее, для определенности, мы будем полагать, что $\gamma \ge 0$ и, следовательно, $\Gamma \ge 0$ и $z \ge 0$.

Как и уравнение Бюргерса, уравнение (2.3) имеет частное точное решение, описывающее стационарную, т.е. не зависящую от координаты z, волну типа симметричного скачка – перехода (при $\gamma > 0$) из состояния $\in_{-} (\theta \to \infty) = -1$ в состояние $\in_{+} (\theta \to -\infty) = 1$. (При $\gamma < 0$ устойчивым будет обратный переход: из $\in_{+} (\theta \to -\infty) = 1$ в $\in_{-} (\theta \to \infty) = -1$.) Положительная $[\in_{+} (\theta) \ge 0, \ \theta \le 0]$ и отрицательная $[\in_{-} (\theta) < 0, \ \theta > 0]$ части стационарной волны определяются различными выражениями, непрерывно (вместе с нечетными производными по θ) переходящими одно в другое в точке $\theta_0 = 0, \in_0 = 0$:

$$\in_+ (\theta \le 0) = [1 - \exp(\Gamma \theta)], \in_- (\theta > 0) = -[1 - \exp(-\Gamma \theta)].$$

В краткой форме эти выражения можно представить в следующем виде:

$$\in (\theta) = -[1 - \exp(-\Gamma|\theta|)] \operatorname{sign} \theta.$$
(2.4)

Из-за неаналитичности разномодульной нелинейности уравнения (2.3), его решение для стационарной волны получилось также неаналитическим – в точке $\theta = 0$ терпят разрыв четные производные $d^{2n} \in (\theta)/d\theta^{2n}$: $d^{2n} \in_{\pm} (\theta = 0)/d\theta^{2n} = \mp \Gamma^{2n}$, n = 1, 2, 3, ...

Очевидным свойством решения (2.4) является обратная пропорциональность ширины области такого перехода параметру Γ . Здесь, как и в среде с квадратичной упругой нелинейностью [Руденко, Солуян, 1975], устойчивость стационарной волны (2.4) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и линейной диссипации: разномодульная нелинейность увеличивает крутизну фронта, а диссипация стремится ее уменьшить. Профили стационарных волн (2.4) при различных значениях параметра Γ представлены на рис. 2.1, из которого видно, что при увеличении Γ , этот переход становится более "крутым", а при $\Gamma \rightarrow \infty$, решение (2.4) сходится к разрывному: $\in (\theta) = -\operatorname{sign} \theta$.



Рис. 2.1. Профили стационарных волн типа симметричного скачка при различных значениях параметра $\delta: 1 - 10^{-2}; 2 - 10^{-1}, 3 - 1.$

Далее рассмотрим самоподобное решение уравнения (2.3) с помощью метода разделения переменных, полагая, что:

$$\in (z,\theta) = Z(z)\Psi(\theta), \ Z(z=0) = 1, \ Z(z) > 0.$$
 (2.5)

Самоподобное решение (4.5) описывает, вообще говоря, затухающую волну, не меняющую своей формы $\Psi = \Psi(\theta)$ в процессе распространения. Примерами таких

самоподобных волн являются стационарные волны и солитоны - в нелинейных средах и гармонические волны - в линейных средах с вязкой диссипацией. В разномодульной среде самоподобные волны (2.5) распространяются с постоянной и не зависящей от их амплитуды скоростью.

Подставляя (2.5) в (2.3), получаем:

$$\frac{1}{Z(z)}\frac{dZ(z)}{dz} = \frac{\delta}{\Psi(\theta)}\frac{d^2\Psi(\theta)}{d\theta^2} - \frac{1}{\Psi(\theta)}\frac{d|\Psi(\theta)|}{d\theta} = -m,$$
(2.6)

где m = const. Из физических соображений — волна не должна быть нарастающей по координате z > 0 (при $\Gamma \ge 0$), следует, что $m \ge 0$. Значение параметра m задается граничным условием, определяющим форму излучаемой самоподобной волны: $\in (z = 0, \theta) = \Psi(\theta)$.

При $m < \Gamma/4$ ($\Gamma \ge 0$), решения уравнений (2.6), с точностью до произвольной положительной константы для $\Psi(\theta)$, имеют вид:

$$Z(z) = \exp(-mz), \ \Psi(\theta) = -\exp\left(-\frac{\Gamma|\theta|}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\Gamma\sqrt{1-4m/\Gamma}}{2\delta}\theta\right),$$

и, следовательно,

$$\in (z,\theta) = -\exp\left(-\frac{\Gamma|\theta|}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\Gamma\sqrt{1-4m/\Gamma}}{2}\theta\right) \exp(-mz).$$
(2.7)

Легко видеть, что из выражения (2.7), при m = 0, следует решение для стационарной волны (2.4). При $m < \Gamma/4$, но $m \neq 0$, самоподобное решение (2.7) описывает асимметричный разнополярный импульс; при $m = \Gamma/4$ его форма имеет вид:

$$\in (z,\theta) = -\exp\left(-\frac{\Gamma|\theta|}{2}\right)\left(\frac{\Gamma\theta}{2}\right)\exp\left(-\frac{\Gamma z}{4}\right),\tag{2.8}$$

а при $\Gamma \to \infty$ импульс (4.7) содержит разрыв: $\in (z, \theta) = -\exp\left[-m|\theta|\right]$ sgn $\theta \exp(-mz)$.



Рис. 2.2. Профили "самоподобных" импульсов при $\Gamma = 10: 1 - m = 1; 2 - m = 2.5$.

При $m > \Gamma/4$ самоподобное решение описывает периодическую по θ волну (с периодом $\theta_0 = \frac{4\pi}{\Gamma \sqrt{|1 - 4m/\Gamma|}}$). Каждый ее период также является асимметричным разнополярным

импульсом, определяемым выражением:

$$\in (z,\theta) = -\exp\left(-\frac{\Gamma|\theta|}{2}\right) \sin\left(\frac{\Gamma\sqrt{|1-4m/\Gamma|}}{2}\theta\right) \exp(-mz),$$

$$-\frac{2\pi}{\Gamma\sqrt{|1-4m/\Gamma|}} \le \theta \le \frac{2\pi}{\Gamma\sqrt{|1-4m/\Gamma|}}$$
(2.9).

Для линейной диссипативной среды ($\Gamma = 0$) самоподобное решение – это линейнозатухающая гармоническая волна с частотой ω ; из выражения (2.9) при $m = \Gamma \rightarrow 0$ получаем:

$$\in (z,\theta) = \exp(-mz)\sin\theta = \exp\left(-\frac{\alpha\omega^2 x}{2C_0^3}\right)\sin\omega\tau.$$



Рис. 2.3. Профили самоподобной периодической волны при: $1 - \Gamma = 5$, m = 2.25, $2 - \Gamma = 10$, m = 3.

Профили самоподобных импульсов и периодической волны приведены на рис. 2.2, 2.3. При $\gamma < 0$ имеем: $\Gamma < 0$, z < 0, m < 0, но mz > 0 и $m\Gamma > 0$; в этом случае профили самоподобных импульсов соответствуют инвертированным импульсам.

2.2.2. Численное моделирование распространения периодических волн в разномодульной среде с линейной диссипацией

При произвольном граничном условии точного аналитического решения уравнения (2.3), по-видимому, не существует, поэтому для первоначально синусоидальной волны $[\varepsilon(x=0,t) = \varepsilon_0 \sin \omega t \quad или \in (z=0,\theta) = \sin \theta]$, мы его решим численно. Для этого учтем нечетную симметрию отражения уравнения (2.3): в недиспергирующей среде с четной нелинейностью положительный и отрицательный полупериоды первоначально асимметричной волны, в частности, синусоидальной, искажаются асимметрично. В соответствии с этим свойством, решение волнового уравнения (2.3) можно представить в виде разложения в ряд Фурье только по гармоникам $\sin(n\theta)$ - это сильно упрощает процедуру расчета нелинейного искажения волны:

$$\in (z,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z)\sin(n\theta), \qquad (2.10)$$

где $a_n(z)$ - амплитуды гармоник волны $\in (z, \theta)$.

Представляя выражение для $| \in (z, \theta) |$ также в виде ряда Фурье

$$\mid \in (z,\theta) \mid = \frac{b_0(z)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(z) \cos(k\theta),$$

находим связь коэффициентов $b_k(z)$ и $a_n(z)$:

$$b_k(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z) \sin(n\theta) \cos(k\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z) \left[\frac{1 - (-1)^{n+k}}{n^2 - k^2} \right].$$
 (2.11)

Теперь, подставляя выражения (2.10), (2.11) в уравнение (24.3), получаем линейную систему связанных обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $a_n(z)$:

$$\frac{da_n(z)}{dz} = -\frac{2n}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z) \left[\frac{[1 - (-1)^{n-k}]k}{n^2 - k^2} \right] - \frac{n^2 a_n(z)}{\Gamma},$$
(2.12)

при этом из граничного условия имеем: $a_1(z=0) = 1$, $a_{n>1}(z=0) = 0$.

Система уравнений (2.12) позволяет численно решить волновое уравнение (2.3), ограничивая число гармоник *n* в зависимости от требуемой точности решения задачи. На рис. 2.4 показаны профили первоначально гармонических волн на различных расстояниях *z* при различных параметрах Γ . При $\Gamma \ge 1$ имеем сильное нелинейное искажение волны, а при $\Gamma < 1$ нелинейные искажения малы и волна распространяется практически линейно.

Напомним, что в идеальной разномодульной среде (при $\Gamma \to \infty$), вследствие движения положительных и отрицательных полупериодов волны с относительной скоростью $\Delta C_{1,2} = (E_1/\rho)^{1/2} - (E_2/\rho)^{1/2} \cong -\gamma C_0$, в ее профиле сразу же (при сколь угодно малом расстоянии z) образуются "перехлесты" и неоднозначности (при $\gamma > 0$ вблизи точек $\theta_{2n+1} = (2n+1)\pi$, $n = 0,\pm 1,\pm 2,...$), а вблизи точек $\theta_{2n} = 2\pi n$ возникают "нулевые зоны", в которых $\in (z, \theta) \equiv 0$. (Как обычно [Руденко, Солуян, 1975], "перехлесты" и неоднозначности устраняются введением в профиль волны разрывов - здесь в точках $\theta = \theta_{2n+1}$.) При конечных параметрах Γ , "перехлестов" и неоднозначностей в волне, конечно, не образуется, а формируется плавные "ударные" фронты (при $\Gamma > 1$), ширина $\Delta \theta$ которых порядка Γ^{-1} , при этом и "нулевые зоны" из-за вязкости также "заглаживается" и исчезают. В результате, на расстояниях z > 1 на каждом периоде волны (вблизи точек $\theta = \theta_{2n+1}$) формируются разнополярные импульсы, близкие к "самоподобным" (2.7) -(2.9).



Рис. 2.4. Эволюция первоначально гармонических волн на различных расстояниях *z* при различных значениях параметра Г: *a* -100, *б* - 10, *в* - 1.

На рис. 2.5 показаны зависимости амплитуд волны основной частоты и ее высших гармоник от расстояния z. Видно, что амплитуда $a_1(z)$ первой гармоники уменьшается - за

59

счет генерации высших гармоник и линейной диссипации среды, а амплитуды второй, третьей и т.д. гармоник – вначале растут, причем, в начале распространения амплитуды четных гармоник значительно превышают амплитуды гармоник нечетных, а затем – также уменьшаются, асимптотически стремясь к нулю. Здесь, также как и в идеальной среде (без линейной диссипации), амплитуды высших гармоник пропорциональны амплитуде исходной волны, однако, в идеальной разномодульной среде волна $\in = \in (z, \theta)$ затухает до нуля на конечном расстоянии, а в среде с линейной диссипацией затухание волны (на конечном расстоянии) всегда конечно.



Рис. 2.5. Зависимости амплитуд волны основной частоты и первых трех ее высших гармоник от расстояния z при $\Gamma = 100$.

2.3. Самоподобные волны в разномодульной среде с релаксацией

2.3.1. Реологическая модель, уравнение состояния и волновое уравнение для разномодульной среды с релаксацией

Уравнение состояния разномодульной среды с релаксацией можно получить по аналогии с уравнением состояния среды с квадратичной упругой нелинейностью и такой же релаксацией [Руденко, Солуян, 1975] - в последнем нелинейное слагаемое, пропорциональное ε^2 , следует заменить на $\gamma |\varepsilon|$:

$$\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - \gamma |\varepsilon|] + mC_0^2 \rho \int_{-\infty}^t \frac{d\varepsilon(t')}{dt'} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_0}\right) dt', \qquad (2.13)$$

где $C_0 = C/[1 + (m/2)]$ - фазовая скорость низкочастотной волны, ρ - плотность, τ_0 - время релаксации, m > 0 - безразмерный параметр, определяющий диссипацию и дисперсию среды. Если время релаксации τ_0 много меньше периода волны $T = 2\pi/\omega$ (ω - частота), то ее распространение происходит также, как в вязкой среде с низкочастотной скоростью $C_0 = C(\omega \to 0)$. Если же $\omega \tau_0 >> 1$, релаксационные процессы в среде "заморожены" и волна будет распространяться со скоростью $C_{\infty} = C(\omega \to \infty) > C_0$, так что $m = \frac{2(C_{\infty} - C_0)}{C_0} << 1$ [Руденко, Солуян, 1975].

В уравнении состояния (2.13) разномодульность проявляется при нулевых напряжениях и деформациях. Заметим, однако, что вблизи нулевых деформаций ε_{th} зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ может быть гладкой (без излома), но это уже другая модель нелинейной среды, например, квадратичная или кубичная. Таким образом, в разномодульной модели среды предполагается, что для деформаций ε акустических волн выполняется условие: $|\varepsilon| >> |\varepsilon_{th}|$. Уравнение (2.13) описывает немгновенную (инерционную) зависимость σ от ε , т.е. напряжение σ в момент времени t определяется деформацией ε во все предшествующие времена. Уравнению состояния (2.13) отвечает реологическая модель разномодульной среды с релаксацией [М1] (Рис. 2.6). Модель представляет собой однородную цепочку из одинаковых масс и одинаковых звеньев, каждое из которых является параллельным соединением стандартного линейного вязко-упругого тела и нелинейного (в данном случае - разномодульного) элемента.



Рис. 2.6. Реологическая модель нелинейной среды с релаксацией: 1 – линейные пружины, 2 – демпфер, 3 – нелинейный элемент, 4 - масса.

Уравнение состояния (2.13), совместно с уравнением движения определяет нелинейные волновые процессы в такой среде. Переходя в к переменным $\tau = t - x/C_0$, $x = x_1$, получим уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C_0} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau} + \frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau'} \exp\left(-\frac{\tau - \tau'}{\tau_0}\right) d\tau'.$$
(2.14)

Вводя безразмерные переменные $\in \varepsilon/\varepsilon_0$, $\theta = \Omega \tau$, $z = x \gamma \Omega/2C_0$, получим

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\frac{\partial |\epsilon|}{\partial \theta} + h \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\theta} \frac{\partial \epsilon(\theta')}{\partial \theta'} \exp[-(\theta - \theta')] d\theta', \qquad (2.15)$$

где $\Omega = \tau_0^{-1}$ - частота релаксации, ε_0 - амплитуда волны, $h = \frac{m}{\gamma}$ - параметр, характеризующий отношение релаксации к нелинейности. Далее, для определенности, мы будем полагать, что $\gamma, h \ge 0$.

При решении волнового интегро-дифференциального уравнения (2.15) удобно перейти к эквивалентному дифференциальному уравнению. Для этого продифференцируем уравнение (4.15) по *θ* и полученный результат сложим с (2.14) [Руденко, Солуян, 1975]:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \frac{\partial |\epsilon|}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial z} + \frac{\partial |\epsilon|}{\partial \theta} \right) = h \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial \theta^2}.$$
(2.16)

2.3.2. Стационарные волны

В начале, мы исследуем стационарное решение уравнения (2.16). Приравнивая к нулю производные по z, и интегрируя (2.16) с условиями $\in (\mp \infty) = \pm 1$, $\frac{d}{d\theta}\Big|_{\mp \infty} = 0$, получим:

$$h\frac{d \in}{d\theta} - \frac{d |\epsilon|}{d\theta} + (1 - |\epsilon|) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\in (\theta) = \begin{cases} 1 - \exp\left(\frac{\theta - \theta_0}{h - 1}\right), & \in (\theta) > 0, \theta - \theta_0 \le 0; \\ \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{h + 1}\right) - 1, & \in (\theta) < 0, \theta - \theta_0 \ge 0, \end{cases}$$
(2.17)

где $\theta_0 = \text{const}$.

В случае h > 1 решение (2.17) однозначно и непрерывно, но несимметрично и имеет скачок производной при $\in (\theta) = 0$ (Рис. 2.7а):

$$\left. \frac{d \in (\theta)}{d\theta} \right|_{\epsilon \to \pm 0} = -\frac{1}{h \mp 1}.$$
(2.18)





При h = 1 на положительной ветви решения (2.17) возникает разрыв, но оно остается однозначным (Рис. 2.7 б):

$$\in (\theta) = \begin{cases} 1, & \in (\theta) > 0, \theta - \theta_0 \le 0; \\ \exp\left(-\frac{\theta - \theta_0}{2}\right) - 1, & \in (\theta) < 0, \theta - \theta_0 \ge 0. \end{cases}$$

Здесь (при $h \ge 1$), также как и в среде с квадратичной упругой нелинейностью [Руденко, Солуян, 1975], форма стационарной волны (2.17) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и релаксации: разномодульная нелинейность увеличивает крутизну фронта, а релаксационные диссипация и дисперсия стремятся ее уменьшить. При h < 1 этот баланс нарушается и решение (2.17) становится "абсурдным" и неоднозначным: его положительная ветвь – пунктирная линия на Рис. 2.7 *в*, направлена в другую (положительную по θ) сторону и не удовлетворяет условиям при $\theta = -\infty$ (так же, как и в среде с квадратичной нелинейностью и релаксацией [Руденко, Солуян, 1975]). Для устранения этого "абсурда" и неоднозначности в профиль волны необходимо ввести разрыв [Руденко, Солуян, 1975], используя правило равенства площадей, и "изменить направление" положительной ветви в доразрывной области. Форма стационарной волны при h = 0.5 показана на Рис. 2.7 *в*.

2.3.3. Самоподобные волны

При $h \ge 1$ уравнение (2.16) имеет точные самоподобные решения в виде одиночного разнополярного возмущения (импульса) и периодической волны. Поиск таких решений проведем методом разделения переменных, используя вид решения (2.5). Как показано в п. 2.2.1 в разномодульной среде самоподобные волны распространяются с постоянной и не зависящей от их амплитуды скоростью.

Подставляя (2.5) в (2.16) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для Z = Z(z) и $\Psi = \Psi(\theta)$:

$$\frac{Z'_z}{Z} = \frac{h\Psi''_{\theta\theta} - |\Psi|'_{\theta} - |\Psi|'_{\theta\theta}}{\Psi + \Psi'_{\theta}} = -k \le 0.$$

$$(2.19)$$

При таком выборе знака коэффициента k ($k \ge 0$) решение пространственного уравнения $Z(z) = \exp(-kz)$ не нарастает по координате z > 0. Значение коэффициента k задается граничным условием, определяющим форму излучаемой "самоподобной" волны: $\in (z = 0, \theta) = \Psi(\theta)$. Очевидно, что при k = 0 получим уже рассмотренное стационарное решение (2.17).

Уравнение для временной части $\Psi = \Psi(\theta)$ волны имеет вид:

$$h\Psi_{\theta\theta}^{\prime\prime} - |\Psi|_{\theta\theta}^{\prime\prime} + k\Psi_{\theta}^{\prime} - |\Psi|_{\theta}^{\prime} + k\Psi = 0.$$
(2.20)

Фактически, нелинейное уравнение (2.20) – это два линейных уравнения: одно - для положительной $\Psi_1(\theta \le 0) \ge 0$ части и другое - для отрицательной $\Psi_2(\theta \ge 0) \le 0$ части функции $\Psi = \Psi(\theta)$:

$$(h-1)\Psi_{1\theta\theta}'' + (k-1)\Psi_{1\theta}' + k\Psi_1 = 0, \qquad (2.21)$$

$$(h+1)\Psi_{2\theta\theta}'' + (k+1)\Psi_{2\theta}' + k\Psi_2 = 0.$$
(2.22)

Из этих уравнений следует, что в нулевых точках θ_0 , в которых $\Psi_{1,2}(\theta_0) = 0$, для производных $\Psi_{1,2\theta}(\theta_0)$ выполняется соотношение:

$$\frac{\Psi_{1\theta}(\theta_0)}{\Psi_{2\theta}(\theta_0)} = \frac{h+1}{h-1}.$$
(2.23)

При поиске решений уравнения (2.22) мы будем полагать, что функции, описывающие положительную $\Psi_1(\theta \le 0) \ge 0$ и отрицательные $\Psi_2(\theta \ge 0) \le 0$ части волны, удовлетворяют условию непрерывности в нулевых точках θ_0 и условию (2.23).

При
$$(k \pm 1)^2 - 4kh \ge 0$$
, когда $0 \le k \le \min[2h \pm 1 + 2\sqrt{h(h \pm 1)}]$ или
 $k \ge \max[2h \pm 1 + 2\sqrt{h(h \pm 1)}]$, корни $\lambda^+_{1,2}$ и $\lambda^-_{1,2}$ соответствующих уравнениям (2.21), (4.22)

характеристических уравнений определяются выражениями:

$$\lambda^{+}_{1,2} = \frac{-(k-1) \pm \sqrt{(k+1)^{2} - 4kh}}{2(h-1)} \ge 0, \qquad (2.23)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k+1) \pm \sqrt{(k-1)^2 - 4kh}}{2(h+1)} \le 0.$$
(2.24)

В этом случае положительная и отрицательная части самоподобного возмущения определяются выражениями (Рис. 2.8):

$$\Psi_{1}(\theta \le 0) = -C_{1} \exp\left(-\frac{k-1}{2(h-1)}\theta\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{(k+1)^{2}-4kh}}{2(h-1)}\theta\right) \ge 0, \qquad (2.25)$$

$$\Psi_{2}(\theta \ge 0) = C_{2} \exp\left(-\frac{k+1}{2(h+1)}\theta\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{(k-1)^{2}-4kh}}{2(h+1)}\theta\right) \le 0, \qquad (2.26)$$

где $C_1 = \text{const}, \ C_2 = -C_1 \sqrt{\frac{(k+1)^2 - 4kh}{(k-1)^2 - 4kh}} < 0.$

При h = 1 самоподобное возмущение, также как и стационарная волна, содержит разрыв (Рис. 2.9):

$$\Psi_{1}(\theta \leq 0) = -C_{1} \exp\left(\frac{k}{k-1}\theta\right) > 0,$$

$$\Psi_{2}(\theta \geq 0) = C_{2} \exp\left(-\frac{k+1}{4}\theta\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{(k-1)^{2}-4k}}{4}\theta\right) \leq 0,$$
 (2.27)



Рис. 2.8. Форма самоподобного импульса при h = 2, k = 0.1.



Рис. 2.9. Форма самоподобного импульса при h = 1, k = 0.1.

При $(k \pm 1)^2 - 4kh \le 0$, когда $\max[2h \pm 1 - 2\sqrt{h(h \pm 1)}] \le k \le \min[2h \pm 1 + 2\sqrt{h(h \pm 1)}]$, уравнение (2.16) имеет самоподобное периодическое решение. Здесь мы также будем полагать,

что функции, описывающие положительную $\Psi_1(\theta \le 0) \ge 0$ и отрицательные $\Psi_2(\theta \ge 0) \le 0$ части волны $\in (z, \theta) = Z(z)\Psi(\theta)$, удовлетворяют условию непрерывности в нулевых точках θ_0 и условию (2.23):

$$\Psi_1[n(\theta_1 + \theta_2)] = \Psi_2[n(\theta_1 + \theta_2)] = 0, \ \Psi_1[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = \Psi_2[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2] = 0,$$
(2.28)

$$\frac{\Psi_{1\theta}[n(\theta_1 + \theta_2)]}{\Psi_{2\theta}[n(\theta_1 + \theta_2)]} = \frac{h+1}{h-1}, \ \frac{\Psi_{1\theta}[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]}{\Psi_{2\theta}[n(\theta_1 + \theta_2) + \theta_2]} = \frac{h+1}{h-1},$$
(2.29)

где $\,\theta_{\!1,2}\,$ - периоды функций $\,\Psi_{\!1,2}(\theta)\,,\;n\!=\!0,\!\pm\!1,\!\pm\!2...\,.$

Такое периодическое решение (для одного периода волны) имеет вид (Рис. 2.11):

$$\begin{split} \Psi_{1}(\theta) &= -C_{1} \exp\left(-\frac{k-1}{2(h-1)}\theta\right) \sin\left(\frac{\sqrt{4kh-(k+1)^{2}}}{2(h-1)}\theta\right) \geq 0, \ -\pi \leq \frac{\sqrt{4kh-(k+1)^{2}}}{2(h-1)}\theta \leq 0, \ (2.30) \\ \Psi_{2}(\theta) &= C_{2} \exp\left(-\frac{k+1}{2(h+1)}\theta\right) \sin\left(\frac{\sqrt{4kh-(k-1)^{2}}}{2(h+1)}\theta\right) \leq 0, \ 0 \leq \frac{\sqrt{4kh-(k-1)^{2}}}{2(h+1)}\theta \leq \pi, \quad (2.31) \\ \text{где } \theta_{1} &= \frac{2\pi(h-1)}{\sqrt{4kh-(k+1)^{2}}}, \ \theta_{2} = \frac{2\pi(h+1)}{\sqrt{4kh-(k-1)^{2}}}, \ k(h) = h - \sqrt{h^{2}-1} \leq 1, \ C_{2} = -C_{1}\sqrt{\frac{h-1}{h+1}} < 0. \end{split}$$

Частота $\omega(h)$ периодической самоподобной волны $\Psi(\theta)$ определяется выражением:

$$\omega(h) = \frac{2\pi\Omega}{\theta_1 + \theta_2} = k(h)\Omega.$$
(2.32)

На Рис. 2.10 приведены графики зависимостей коэффициента k = k(h) от параметра h. Формы одного периода самоподобных периодических волн при h = 1.5, h = 2 и h = 3приведены на Рис. 2.11. С ростом параметра h коэффициент k и частота $\omega(h)$ уменьшаются.



Рис. 2.10. Зависимости коэффициента k = k(h) от h.



Рис. 2.11. Формы самоподобных периодических волн при h = 1.5 (1), h = 2 (2) и h = 3 (3).

2.4. Стационарные волны в разномодульном стержне конечного радиуса

Учет геометрической дисперсии продольных (вдоль оси x) упругих волн в стержне конечного радиуса [Наугольных, Островский, 1990; Samsonov, 2001], приводит к следующему одномерному волновому уравнению для деформации $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$:

$$\varepsilon_{tt} - C_0^2 \varepsilon_{xx} = -\gamma C_0^2 [|\varepsilon|]_{xx} + v^2 r_0^2 [\varepsilon_{tt} - C_{sh}^2 \varepsilon_{xx}]_{xx}, \qquad (2.33)$$

где $\varepsilon(x,t) = U_x(x,t)$, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$, C_{sh} - скорость сдвиговой волны, ν - коэффициент Пуассона, $r_0 = R/\sqrt{2}$, R - радиус стержня, $R < \Lambda/2$, Λ - длина волны.

Переходя в уравнении (2.33) к сопровождающей системе координат $\tau = t - x/C_0$, $x' = x \ge 0$ [Наугольных, Островский, 1990], получим эволюционное уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси x:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{\gamma}{2C_0} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau} + \frac{\nu^2 R^2 (1+2\nu)}{8C_0^3 (1+\nu)} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \tau^3}.$$
(2.34)

Уравнение (3) является аналогом уравнения Кортевега-де Вриза для среды с квадратичной упругой нелинейностью и дисперсией [Наугольных, Островский, 1990]. Решения уравнения (2.34)обладают следующими свойствами. Первое при $\alpha = v^2 R^2 (1+2v)/8C_0^3 (1+v) \neq 0$ форма волны определяется непрерывной (вместе с двумя ее первыми производными по τ) и однозначной функцией $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$. Далее, как и уравнение Кортевега-де Вриза, уравнение (2.34) обладает трансляционной [$\varepsilon(x,\tau) \Leftrightarrow \varepsilon(x+a,\tau+b)$] и пространственно-временной $[\varepsilon(x,\tau) \Leftrightarrow \varepsilon(-x,-\tau)]$ симметриями, а также симметрией инвертирования [$\varepsilon(x,\tau) \Leftrightarrow -\varepsilon(x,\tau), \gamma \to -\gamma$], где a,b = const, а знак \Leftrightarrow символизирует наличие симметрии [Гурбатов и др., 2008]. Кроме этих симметрий, уравнение (2.34) инвариантно также к масштабному преобразованию [$\varepsilon(x,\tau) \Leftrightarrow C\varepsilon(x,\tau)$], т.е., если функция $\varepsilon = \varepsilon(x,\tau)$ является решением уравнения (2.34), то и функция $\varepsilon = C\varepsilon(x, \tau)$, где C = const > 0, также является решением этого уравнения.

Для получения решений уравнения (2.34) приведем его к безразмерному виду:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial |e|}{\partial \theta} + \delta \frac{\partial^3 e}{\partial \theta^3}, \qquad (2.35)$$

где $e = \varepsilon/\varepsilon_0$, $\theta = \omega \tau$, $z = \gamma \omega x/2C_0$, ε_0 и ω - характерные амплитуда и частота волны, $\delta = v^2 R^2 (1+2v) \omega^2/4\gamma (1+v) C_0^2$. Коэффициент $\delta = Ur^{-1}$ - это обратный параметр Урселла $Ur = 4\gamma (1+v) C_0^2/v^2 R^2 (1+2v) \omega^2$. (Параметр Урселла равен отношению нелинейного слагаемого $\frac{\gamma}{2C_0} \frac{\partial |\varepsilon|}{\partial \tau}$ к дисперсионному $\frac{v^2 R^2 (1+2v)}{8C_0^3 (1+v)} \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial \tau^3}$ [Наугольных, Островский, 1990]; для разномодульного стержня Ur не зависит от амплитуды волны $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$, поэтому и решения уравнения (2.35) также не зависят от этой амплитуды.)

Из уравнения (2.35) следует, что эволюция волны в разномодульном стержне зависит только от коэффициента δ , причем, в случае $|\delta| <<1$ получим сильно-нелинейную волну, а в случае $|\delta| >>1$ – практически ее линейное распространение. Далее, для определенности, мы будем полагать, что $\gamma > 0$ и, следовательно, $\delta > 0$ и z > 0.

Как и уравнение Кортевега-де Вриза, нелинейное уравнение (2.35) имеет точные решения, описывающие стационарные волны, распространяющиеся без изменения формы. Для нахождения стационарных решений уравнения (2.35) будем полагать, что $e = e(\eta)$, где $\eta = \theta - kz$, k = const. При этом получим уравнение второго порядка:

$$\delta \frac{\partial^2 e}{\partial \eta^2} + ke - |e| = C, \qquad (2.36)$$

где C = const. Значение константы C, а также и других констант, возникающих при интегрировании уравнения (2.35), определяются из условий непрерывности функции $e = e(\eta)$ и ее первых двух производных $e_{\eta}(\eta)$ и $e_{\eta\eta}(\eta)$ в точках, где $e(\eta) = 0$.

Первое точное решение уравнения (2.36) соответствует уединенной волне, при этом $C = -(1+k)\sqrt{(1-k)/2}$, $k \le 1$. Это решение состоит из трех частей: $e_{+,1}(\eta) \ge 0$, $e_{-}(\eta) \le 0$ и $e_{+,2}(\eta) \ge 0$, последовательно и непрерывно (вместе с первой и второй производными по η) переходящих друг в друга в точках $\eta = \pm \eta_0$, где $e_{+,1,2}(\pm \eta_0) = 0$ и $e_{-}(\pm \eta_0) = 0$ (Рис.2.12):

$$e_{+,1}(\eta) = \frac{1+k}{\sqrt{2(1-k)}} \left[1 - \exp\left(\sqrt{\frac{1-k}{\delta}}(\eta+\eta_0)\right) \right] \ge 0; \quad \eta \le -\eta_0,$$
$$e_{-}(\eta) = -\cos\left(\sqrt{\frac{k+1}{\delta}}\eta\right) - \sqrt{\frac{1-k}{2}} \le 0; \quad |\eta| \le \eta_0,$$
(2.37)



Рис. 2.12. Формы уединенных волн $e = e(\eta)$ при $\delta = 0.1$ и различных значениях k : k = 0.9 - 1, k = 0 - 2, k = -0.9 - 3.

Такая уединенная волна в разномодульном стержне, по-существу, является солитоном [Наугольных, Островский, 1990]. Ее форма симметрична относительно прямой $\eta = 0$ и определяется параметрами δ и k. Длительность центральной (отрицательной) части солитона $\Delta = 2\eta_0$ и скорость C(k) его распространения зависят от параметров k, δ и γ , причем $\Delta \propto \sqrt{\delta}$, $C(k) = C_0/(1+\gamma k/2)$, и, следовательно, в разномодульном стержне возможны нормальные (k = 0), быстрые (-1 < k < 0) и медленные (0 < k < 1) солитоны. Профили солитонов (2.37) при $\delta = 0.1$ и различных значениях параметра k представлены на Рис. 2.12, из которого видно, что при уменьшении k длительность Δ солитона растет. (Необходимо отметить, что уравнение (2.35) рассматривалось в работе [Руденко, 2016], но как модельное, без физической основы, там же впервые было получено решение в виде (2.37). В данном исследовании мы дополнительно получим периодические решения уравнения (2.35) и проведем оценки параметров стержня, в котором в принципе могут наблюдаться волны такого рода.)

Второе точное решение уравнения (2.36) соответствует периодической волне. Это решение состоит из периодической последовательности положительных $[e_+(\eta) \ge 0]$ и отрицательных $[e_-(\eta) \le 0]$ почти синусоидальных импульсов (разной амплитуды и длительности), также непрерывно (вместе с первой и второй производными по η) переходящими друг в друга в точках, где $e_{\pm}(\eta) = 0$ (Рис. 2.13). Один период такой волны определяется выражениями:

$$e_{+}(\eta) = \sqrt{\frac{2C^{2}}{(1+k)^{2}(k-1)} + \frac{k+1}{k-1}} \cos\left(\sqrt{\frac{k-1}{\delta}}\eta\right) + \frac{C}{k-1} \ge 0,$$
$$e_{-}(\eta) = \cos\left(\sqrt{\frac{k+1}{\delta}}(\eta - \eta_{0})\right) + \frac{C}{1+k} \le 0,$$
(2.38)

где

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\delta}{k-1}} \left[\pi - \arccos \frac{1}{C} \left(\frac{2(k-1)C^2}{(1+k)^2} + k^2 - 1 \right)^{1/2} \right] - \sqrt{\frac{\delta}{1+k}} \left[\pi - \arccos \left(\frac{C}{1+k} \right) \right], \qquad k > 1$$

 $|C| < (k+1)\sqrt{(k^2-1)/(k^2+3)}$.

Скорость C(k) распространения и период $T(k,\delta,C)$ волны (2.38) определяются выражениями: $C(k) = C_0/(1 + \gamma k/2)$, $T(k,\delta,C) = 2\pi \sqrt{\delta/(k+1)} + 2\eta_0$. Положительные и отрицательные импульсы такой волны симметричны относительно их центров. Профили периодических волн (2.38) при $\delta = 0.1$, C = 0.2 и различных значениях параметра kпредставлены на Рис. 2.13.


Рис. 2.13. Формы периодических волн $e = e(\eta)$ при $\delta = 0.1$, C = 0.2 и различных значениях k: k = 1.5 - 1, k = 2 - 2, k = 5 - 3.

Из-за неаналитичности разномодульной нелинейности уравнения (2.36), его решения (2.37) и (2.38) для стационарных волн получились также неаналитическими. Их положительные и отрицательные части описываются разными функциями (непрерывно переходящими друг в друга), кроме того в точках, где $e(\eta) = 0$, терпят разрыв производные $d^n e(\eta)/d\eta^n$, n = 3,4,5...Здесь также, как и в среде с квадратичной упругой нелинейностью [Наугольных, Островский, 1990], устойчивость уединенных (2.37) и периодических волн (2.38) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и дисперсии: разномодульная нелинейность увеличивает крутизну фронтов, а дисперсия стремится ее уменьшить.

Приведем некоторые оценки для параметров распространения волн. Полагая, $\delta = 0.2$, $R = 10^{-2}$ м, $\gamma = 0.01$, $C_0 = 5 \cdot 10^3$ м/с, v = 0.25, получим характерное значение для частоты $f = \omega/2\pi$: $f = (C_0/\pi v R)\sqrt{\delta\gamma(1+v)/(1+2v)} \cong 26$ кГц. В этом случае условие $R < \Lambda/2$ выполняется с запасом $R < C_0/2f \cong 0.1$ м. Характерная длина солитона (2.37) определяется как $(\Delta/2\pi f)C_0$ и может принимать значения от 0.17 м до 0.04 м при изменениях значения параметра k от -0.8 до 0.8. Таким образом, наблюдение уединенной волны возможно в стержнях с длиной порядка метра.

В свою очередь характерная длина периодической волны (2.38) $\Lambda(k,\delta,C) = C(k)T(k,\delta,C)/2\pi f$ принимает значения от 0.035 м до 0.095 м при изменениях параметра k от 6 до 1.5 и длины стержня 1 м также достаточно для наблюдения таких волн.

2.5. Акустические волны в средах

с квадратично-разномодульной нелинейностью и линейной диссипацией

Из уравнения (2.1) видно, что разномодульность среды проявляется при сколь угодно малых положительных и отрицательных продольных напряжениях и деформациях, так что билинейная функция $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0, \sigma = 0$ испытывает излом. Однако для реальных разномодульных сред при малых σ и ε зависимость $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ должна быть гладкой, без излома. Такое свойство разномодульных сред описывает следующее квазистатическое уравнение состояния [CB7; Назаров, Кияшко, 2013]:

$$\sigma(\varepsilon) = E\left(\varepsilon - \frac{\gamma_1 \varepsilon^2}{2(1 + \gamma_0 |\varepsilon|)}\right) + \alpha \rho \dot{\varepsilon}, \qquad (2.39)$$

где γ_1 и γ_0 - параметр нелинейности, $|\gamma_1 \mathcal{E}| << 1$, $|\mathcal{E}| << 1$, $|\gamma_1| / \gamma_0 << 1$, $\gamma_0 \ge 0$.

Аналогичные уравнения состояния, содержащие множитель $(1 + \gamma_0 |\varepsilon|)^{-1}$, были предложены для объяснения эффектов самовоздействия сейсмо-акустической волны в водонасыщенном песчаном грунте [СВ7] и насыщения гистерезисных потерь В поликристаллических твердых телах [Назаров, Кияшко, 2013; 2014]. Здесь уравнение состояния (2.39) - это наиболее простая форма подобных уравнений. В частности, уравнение состояния (2.39) получается, если вместо гистерезисной нелинейности рассматривать нелинейность упругую квадратичную [Назаров, Кияшко, 2013; 2014]. Легко видеть, что при $\gamma_0 = 0$ имеем уравнение состояния с квадратичной нелинейностью: $\sigma(\varepsilon) = E[\varepsilon - (\gamma_1/2)\varepsilon^2]$, а при $\gamma_0|\varepsilon| >> 1$ - с разномодульной (за исключением малой области $|\varepsilon| << \gamma_0^{-1}$): $\sigma(\varepsilon) \cong E(\varepsilon - \gamma |\varepsilon|)$, где $\gamma = \gamma_1 / 2\gamma_0$. В соответствии с этим свойством и по аналогии с терминологией, введенной в работе [Руденко, 2016а], уравнение (2.39) мы будем называть уравнением состояния с квадратичноразномодульной нелинейностью. Для сред, описываемых уравнением состояния (2.39), нелинейный режим распространения имеет место как для разнополярных волн, так и для однополярных возмущений.

В этом разделе проводится аналитическое и численное исследование распространения продольных акустических волн в средах с квадратично-разномодульной нелинейностью и вязкой диссипацией. Получены точные аналитические решения для простых и стационарных волн и приведены численные решения для эволюции первоначально гармонических волн.

2.5.1. Основные уравнения

Нелинейное эволюционное уравнение для волн, бегущих в положительном направлении оси *x*, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{4C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\gamma_1 \varepsilon^2}{1 + \gamma_0 |\varepsilon|} \right) + \frac{\alpha}{2C_0^3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2}.$$
(2.40)

Это уравнение есть аналог уравнения Бюргерса для диссипативной среды с квадратичной нелинейностью. При $\gamma_0 = 0$ и $\gamma_0 |\varepsilon| >> 1$, когда $\frac{\gamma_1 \varepsilon^2}{1 + \gamma_0 |\varepsilon|} \cong (\gamma_1 / \gamma_0) |\varepsilon|$, уравнение

(2.40) имеет точные решения в виде простых и стационарных волн. Приведем это уравнение к безразмерному виду:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{e^2}{1+a|e|} \right) + \beta \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2}, \qquad (2.41)$$

где $e = \varepsilon/\varepsilon_0$, $\theta = \omega \tau$, $z = \gamma_1 \varepsilon_0 \omega x/4C_0$, ε_0 и ω - характерные амплитуда и частота волны, $a = \gamma_0 \varepsilon_0$, $\beta = 2\alpha \omega/\gamma_1 \varepsilon_0 C_0^2$.

2.5.2. Стационарные волны

Для получения точных решений уравнения (2.41) при $\beta \neq 0$ в виде стационарных волн будем полагать, что $e = e(\eta)$, где $\eta = \theta - kz$, k = const. При этом получим уравнение:

$$\beta \frac{\partial e}{\partial \eta} + ke - \frac{e^2}{1 + a|e|} = C, \qquad (2.42)$$

где C = const. Значение k и C, а также и других констант, возникающих при интегрировании уравнения (2.42), определяются из условий для $e(\eta)$ при $\eta = \pm \infty$, а также из условий непрерывности функции $e = e(\eta)$ и ее производной $e_{\eta}(\eta)$ в точке, где $e(\eta) = 0$.

Рассмотрим решения уравнения (2.42) при следующих условиях: а) $e(\eta \to -\infty) = 1$, $e(\eta \to \infty) = 0$, b) $e(\eta \to -\infty) = 0$, $e(\eta \to \infty) = -1$ и c) $e(\eta \to -\infty) = 1$, $e(\eta \to \infty) = -1$. В этих случаях получаем выражения для стационарных ударных волн типа однополярных (a, b) и разнополярного симметричного (c) скачков:

a)
$$\frac{e}{(1-e)^{1+a}} = \exp\left(-\frac{\eta-\eta_0}{\beta(1+a)}\right) > 0, \ C = 0, \ k = -(1+a)^{-1},$$

b) $\frac{e}{(1+e)^{1+a}} = -\exp\left(\frac{\eta-\eta_0}{\beta(1+a)}\right) < 0, \ C = 0, \ k = (1+a)^{-1},$ (2.43)
c) $\frac{(1-e)^{(1+a)^2}}{1+(1+a)e} = \exp\left(\frac{(a+2)(\eta-\eta_0)}{\beta}\right), \ e \ge 0,$
 $\frac{(1+e)^{(1+a)^2}}{1-(1+a)e} = \exp\left(-\frac{(a+2)(\eta-\eta_0)}{\beta}\right), \ e \le 0, \ C = -(1+a)^{-1}, \ k = 0,$

где $\eta_0 = const$.

На Рис. 2.14 показаны профили таких стационарных волн. Скорости их распространения

соответственно равны: $C_0 \left(1 \mp \frac{\gamma_1 \varepsilon_0}{2(1 + \gamma_0 \varepsilon_0)} \right)^{-1}$ и C_0 . При $\beta \to 0$ стационарные волны (2.43)

представляют собой резкие перепады (скачки), без "перехлестов". С ростом параметра β эти перепады становятся плавными, при этом их длительность растет. Устойчивость стационарных волн (2.43) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и линейной диссипации: нелинейность увеличивает крутизну фронта, а диссипация стремится ее уменьшить.



Рис. 2.14. Формы стационарных волн: a) 1 - *a* = 3, 2 - *a* = 10, б) 3 - *a* = 3, 4 - *a* = 10 при β = 0.1 и в) 5 - *a* = 3, 6 - *a* = 10 при β = 0.3.

2.5.3. Распространение первоначально гармонических волн

При $\beta = 0$ уравнения (2.41) имеет решение в виде простых волн. Для граничного условия $\varepsilon(x = 0, t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ [или $e(z = 0, \theta) = \sin \theta$] получаем:

$$e(z,\theta) = \sin\left(\theta - \frac{e(z,\theta)[2+a|e(z,\theta)|]}{[1+a|e(z,\theta)|]^2}z\right).$$
(2.44)

Это выражение определяет форму волны до координаты *z* ≤ *z_s* образования в ней "перехлеста" – неоднозначности. Здесь, как и для среды с квадратичной нелинейностью, независимо от

параметра $a \ge 0$, $z_s = 1/2$, или в размерных переменных $x_s = 2C_0/\gamma_1 \varepsilon_0 \omega$. Для устранения физически нереализуемых неоднозначностей необходимо ввести в профиль волны разрывы в точках $\theta = \theta_s = (1 \pm 2n)\pi$, n - целое число. На Рис. 2.15 показана эволюция нелинейных волн (2.44) при a = 0, a = 3 и a = 10. (Штриховыми линиями отмечены отсекаемые разрывами неоднозначности в профилях волн.) С ростом параметра a, вследствие уменьшения эффективной нелинейности, изменения профиля простой волны (2.44) замедляется. При $z >> z_s$, когда $a|e(z,\theta)| <<1$, $|e(z,\theta)| <<1$, волна $e = e(z,\theta)$ становится пилообразной (как и для среды с квадратичной нелинейностью); один ее период определяется выражением:

$$e(z,\theta) = \frac{\theta}{1+2z}, \quad -\pi \le \theta \le \pi.$$
(2.45)

Отметим, что в идеальной (без диссипации, $\beta = 0$) разномодульной среде (a = 0) волна $e = e(z, \theta)$ затухает до нуля на конечном расстоянии, здесь же, в квадратично-разномодульной среде (a > 0), затухание волны (на конечном расстоянии) всегда конечно.



Рис. 2.15а. Эволюция первоначально гармонической волны при $\beta = 0$ и a = 0: 1 - z = 0, 2 - z = 0.3, 3 - z = 0.5, 4 - z = 1.



Рис. 2.156. Эволюция первоначально гармонической волны при $\beta = 0$ и a = 3: 1 - z = 0, 2 - 2

z = 2, 3 - z = 4, 4 - z = 8.



Рис. 2.15в. Эволюция первоначально гармонической волны при $\beta = 0$ и a = 10: 1 - z = 0, 2 - z = 5, 3 - z = 15, 4 - z = 25.

2.5.4. Распространение первоначально гармонических волн

При $\beta \neq 0$ решение уравнения (2.41) можно получить численно. Для этого учтем нечетную симметрию отражения уравнения (2.41): в недиспергирующей среде с четной нелинейностью положительный и отрицательный полупериоды первоначально асимметричной волны, в частности, синусоидальной [$e(z=0,\theta) = \sin \theta$], искажаются асимметрично. В соответствии с этим свойством, решение волнового уравнения (2.41) представим в виде разложения в ряд Фурье по гармоникам $\sin(n\theta)$ (2.10).

Далее, представим выражения $[1 + a | e(z, \theta) |]^{-1}$, $e^2(z, \theta)$, $e^2(z, \theta)[1 + a | e(z, \theta) |]^{-1}$, $[1 + a | e(z, \theta) |]^{-2}$, sgn $[e(z, \theta)]$ и т.д., необходимые для вычисления нелинейного слагаемого уравнения (2.41), также в виде рядов Фурье:

$$\frac{1}{1+a|e(z,\theta)|} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z)\cos(n\theta),$$

$$e^2(z,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \left[-a_k(z)a_{n-k}(z)/2 \right] + \sum_{k=0}^\infty a_k(z)a_{n+k}(z) \right] \right\} \cos(n\theta) = \sum_{n=0}^\infty d_n(z)\cos(n\theta),$$

$$\frac{e^2(z,\theta)}{1+a|e(z,\theta)|} = \left(\sum_{n=0}^\infty d_n(z)\cos(n\theta) \right) \left(\sum_{n=0}^\infty c_n(z)\cos(n\theta) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{k=0}^n d_k(z)c_{n-k}(z) + \sum_{k=0}^n \left[d_k(z)c_{n+k}(z) + d_{n+k}(z)c_k(z) \right] \right) \cos(n\theta) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty d_k(z)c_k(z) + d_0(z)c_0(z) = \sum_{n=0}^\infty g_n(z)\cos(n\theta),$$

$$\left(\frac{1}{1+a|e(z,\theta)|} \right)^2 = \left(\sum_{n=0}^\infty c_n(z)\cos(n\theta) \right)^2 =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n c_k(z)c_{n-k}(z) + \sum_{k=0}^\infty c_k(z)c_{n+k}(z) \right) \cos(n\theta) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty c_k^2(z) + c_0^2(z) =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty b_n(z)\cos(n\theta),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{1+a|e(z,\theta)|} \right)^2 = -d \left(\frac{1}{1+a|e(z,\theta)|} \right)^2 \frac{\partial e(z,\theta)}{\partial z} \operatorname{sgn}[e(z,\theta)], \qquad (2.46)$$

$$\operatorname{sgn}[e(z,\theta)] = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin[(2n+1)\theta]}{2n+1},$$

$$\left(\frac{1}{1+a|e(z,\theta)|}\right)^2 \operatorname{sgn}[e(z,\theta)] = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z)\cos(n\theta)\right) \left(\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\theta]}{2n+1}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_{2k}(z)}{2n+1-2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k}(z)}{2n+1+2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2n+2+2k}(z)}{2k+1}\right) \sin[(2n+1)\theta] +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_{2k+1}(z)}{2n+1-2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}(z)}{2n+3+2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2n+3+2k}(z)}{2k+1}\right) \sin[(2n+2)\theta] =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} h_m(z)\sin(m\theta),$$

где
$$b_0(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2(z) + c_0^2(z), \ b_n(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n c_k(z)c_{n-k}(z) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z)c_{n+k}(z), \ n > 0,$$

 $d_n(z) = \left\{ -\sum_{k=0}^n \frac{a_k(z)a_{n-k}(z)}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z)a_{n+k}(z) \right\},$
 $g_0(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} d_k(z)c_k(z) + d_0(z)c_0(z),$
 $g_n(z) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n d_k(z)c_{n-k}(z) + \sum_{k=0}^n \left[d_k(z)c_{n+k}(z) + d_{n+k}(z)c_k(z) \right] \right), \ n > 0,$
 $h_{2n+1}(z) = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_{2k}(z)}{2n+1-2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k}(z)}{2n+1+2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2n+2+2k}(z)}{2k+1} \right),$
 $h_{2n+2}(z) = \frac{2}{\pi} \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_{2k+1}(z)}{2n+1-2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2k+1}(z)}{2n+3+2k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{2n+3+2k}(z)}{2k+1} \right).$

Подставляя выражения (2.10), (2.46) в уравнение (2.41), получаем систему связанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов $a_n(z)$, $c_n(z)$, $d_n(z)$, $g_n(z)$, $h_n(z)$:

$$\frac{da_n(z)}{dz} = -ng_n(z) - \beta n^2 a_n(z), \qquad (2.47)$$

$$\frac{dc_n(z)}{dz} = \frac{a}{2} \left\{ \sum_{k=0}^n \left[h_k(z) \frac{da_{n-k}(z)}{dz} \right] - \sum_{k=0}^\infty \left[h_{n+k}(z) \frac{da_k(z)}{dz} + h_k(z) \frac{da_{n+k}(z)}{dz} \right] \right\}, \quad (2.48)$$

при этом из граничного условия имеем: $a_1(z=0) = 1$, $a_{n>1}(z=0) = 0$.

Система уравнений (2.47), (2.48) позволяет численно решить волновое уравнение (2.41), при этом число гармоник *n* зависит от требуемой точности решения задачи. Здесь полагалось *n* = 200. На Рис. 2.16а и Рис. 2.17а показаны эволюция первоначально гармонических волн на

различных расстояниях z при $\beta = 0.01$. По мере распространения волна в начале искажается, ее фронты вблизи точек $\theta = (1 \pm 2n)\pi$ укручаются. Затем волна затухает, а ее форма становится близкой к пилообразной. На Рис. 2.166 и Рис. 2.176 показаны зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической волны от z при $\beta = 0.01$, a = 3 и a = 10. Видно, что амплитуда $e_1(z)$ первой гармоники уменьшается - за счет генерации высших гармоник и линейной диссипации среды, а амплитуды 2-ой, 3-ей и т.д. гармоник – вначале растут, причем, в начале распространения амплитуды четных гармоник значительно превышают амплитуды гармоник нечетных, а затем – также уменьшаются, асимптотически стремясь к нулю.



Рис. 2.16а. Эволюция первоначально гармонической волны при $\beta = 0.01$ и a = 3: 1 - z = 0, 2 - z = 2, 3 - z = 4, 4 - z = 8, 5 - z = 14, 6 - z = 22.



Рис. 2.166. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической волны от *z* при $\beta = 0.01$ и a = 3.



Рис. 2.17а. Эволюция первоначально гармонической волны при β = 0.01 и a = 10: 1 - z = 0, 2 z = 4, 3 - z = 8, 4 - z = 14, 5 - z = 22, 6 - z = 30, 7 - z = 40.



Рис. 2.176. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической волны от *z* при $\beta = 0.01$ и a = 10.

2.6. Самовоздействие продольной сейсмоакустической волны в сыром песчаном грунте

Изучение "необычных нелинейных эффектов при распространении волн в геофизических структурах" относится, к одной из пяти актуальных проблем современной нелинейной акустики. В основном, это связано "с необычно большими нелинейностями таких сред" (по сравнению с однородными) [Руденко, 2006]. В работе [Зайцев и др., 1999б] были представлены результаты натурного эксперимента по исследованию эффекта самовоздействия продольной сейсмоакустической волны, возбуждаемой в сыром песчаном глинистом грунте за счет трансформации звуковой волны, создаваемой в воде мощным гидроакустическим излучателем. Такой эффект обусловлен нечетной упругой нелинейностью среды и проявляется в зависимости фазы $\Phi(\varepsilon_0)$ принимаемой волны от ее амплитуды (или амплитуды излучаемой волны ε_0). Анализ результатов этого эксперимента показал, что описание эффекта в рамках "классической" пяти- (или девяти-) константной теории упругости неправомерно, что требует создания и привлечения других [Николаев, 1979; Николаевский, 1984], отличных от традиционного [Зарембо, Красильников, 1966], уравнений состояния, соответствующих наблюдаемой (сложной и немонотонной) амплитудной зависимости фазы $\Phi = \Phi(\varepsilon_0)$. На рис. 2.18 приведен пример такой зависимости (точки), полученной при расстоянии r между излучателем и сейсмоприемником, равном 120 м. (Частота волны F была равна 227 Гц, а ее скорость распространения составляла около 1750 м/с.)



Рис. 2.18. Зависимость разности фаз $\Phi = \Phi(\varepsilon_0)$ от амплитуды излучаемой волны ε_0 при r = 120 м.

Из этого рисунка видно, что с ростом амплитуды ε_0 излучаемой волны вначале наблюдается уменьшение фазы $\Phi(\varepsilon_0)$ (это соответствует увеличению скорости распространения волны), а затем $\Phi(\varepsilon_0)$, достигнув минимума, начинает расти (скорость волны уменьшается) и при достаточно больших амплитудах ε_0 фаза $\Phi(\varepsilon_0)$ стремится к насыщению. В работе [Зайцев и др., 19996], было показано, что обнаруженную зависимость $\Phi = \Phi(\varepsilon_0)$ качественно можно объяснить в рамках следующего феноменологического уравнения состояния среды, содержащего неаналитическую "трехмодульную" упругую нелинейность:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \alpha_1(\varepsilon - \epsilon_1), & \varepsilon > \epsilon_1; \\ 0, & -\epsilon_2 \le \varepsilon \le \epsilon_1; \\ -\alpha_2(\varepsilon + \epsilon_2), & \varepsilon < -\epsilon_2, \end{cases}$$
(2.49)

где $f(\varepsilon)$ - нелинейная функция, $|f(\varepsilon)| < |\varepsilon|$. Из сравнения расчетной и экспериментальной зависимостей были получены оценки для параметров $\alpha_{1,2}$ и $\in_{1,2}$: $\alpha_1 \approx 4.1 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_2 \approx 3 \cdot 10^{-2}$, $\epsilon_2 \approx 10^{-10} - 10^{-9}$, $\epsilon_1 \cong 2 \epsilon_2$. Несмотря на кажущуюся простоту функции $f(\varepsilon)$, вследствие ее неаналитичности в двух ненулевых точках ($\varepsilon = \pm \in_{1,2}$), расчет нелинейных волновых процессов в рамках такой "трехмодульной" нелинейности представляет значительные трудности, особенно для сферической волны, для которой ее амплитуда уменьшается с расстоянием r. Кроме того, маловероятно, чтобы такая сложная (в реологическом смысле), дисперсная, т.е. мелко-раздробленная, многофазная среда, как сырой песчаный глинистый грунт, обладала резкими переходами от малоамплитудного (линейного) модуля упругости к модулям упругости, соответствующим относительно большим ($|\varepsilon| \ge |\epsilon_{1,2}|$), пороговым и различным деформациям сжатия и растяжения - подобные переходы должны быть плавными. Такая "плавность" и, соответственно, аналитичность нелинейной функции при деформации сжатия и растяжения сырого песчаного грунта, и соответствующие зависимости при малых и больших амплитудах деформации, обеспечиваются, по-видимому, достаточно широкой функцией распределения по размерам, контактирующих и составляющих среду, песчинок - зерен, а также сырой глиной, водой и газом, находящихся в контактах между песчинками. Акустические (линейные и нелинейные) свойства подобных грунтов, зависят не столько от упругости отдельных минеральных зерен, сколько от структурных особенностей и связей с этими зернами межзеренного материала. Природа таких связей чрезвычайно сложна; она определяется комплексом действующих в грунте внешних и внутренних энергетических полей; в основе последних лежат молекулярные силы электромагнитной природы. Характер действия этих сил

зависит от поверхностей раздела фаз, химической природы твердых минеральных частиц, структуры и свойств веществ, заполняющих межзеренное пространство, концентрации жидкости и газа в грунте, его напряженного состояния и т.д. [Цытович, 1983]. Вывод нелинейного уравнения состояния сырого песчаного глинистого грунта при его динамическом деформировании, с учетом всего комплекса отмеченных выше сил (контактных - упругих, вязких – неупругих, капиллярных, адгезионных и т.д.) и особенностей его структуры, представляется чрезвычайно сложной задачей, поэтому здесь, на основе полученных экспериментальных результатов по самовоздействию продольной сферически-расходящейся сейсмоакустической волны, предлагается (или постулируется) аналогичное (и также феноменологическое, но лишенное недостатков уравнения (2.49)), уравнение состояния подобной среды. Затем, на основе предложенного уравнения состояния будет приведено корректное, в отличие от работы [Зайцев и др., 19996], решение задачи о самовоздействии сферически-расходящейся сейсмоакустической волны. Предлагаемое уравнение состояния содержит "менее неаналитическую" нелинейность, имеющую неаналитичность только в нулевой точке, т.е. при $\varepsilon = 0$:

$$f(\varepsilon) = \alpha_{1,2} \varepsilon \left(\frac{\gamma_{1,2} \varepsilon^2}{1 + \gamma_{1,2} \varepsilon^2} \right) \text{sign } \varepsilon , \qquad (2.50)$$

где $0 < \alpha_{1,2} << 1$, $\gamma_{1,2} > 0$, $\alpha_{1,2}\gamma_{1,2}\varepsilon^2 << 1$, а индексы 1, 2 соответствуют деформациям растяжения ($\varepsilon > 0$) и сжатия ($\varepsilon < 0$). Вообще говоря, эффект фазового самовоздействия волны можно описать и в рамках нелинейной функции более общего вида, а именно:

$$f(\varepsilon) = \alpha_{1,2} \varepsilon \left(\frac{\gamma_{1,2} |\varepsilon|^n}{\left[1 + \gamma_{1,2}^m |\varepsilon|^{nm} \right]^{1/m}} \right) \text{sign } \varepsilon, \qquad (2.51)$$

где $\alpha_{1,2}\gamma_{1,2} |\varepsilon|^n <<1$, а значения положительных чисел *n* и *m* могут быть различными при сжатии и растяжении среды, но мы рассмотрим наиболее простой и согласующийся с экспериментом случай, когда n = 2, m = 1. (На данной стадии все параметры уравнений (2.49) – (2.50) определяются экспериментально, т.е. из сравнения результата теоретического расчета с результатами эксперимента. В настоящее время, феноменологический этап необходим, поскольку он дает возможность угадать или реконструировать уравнение состояния среды, адекватно описывающее протекающие в ней нелинейные волновые процессы. В дальнейшем, однако, возможно будут предложены и физические модели подобных сред, в рамках которых, будут получены нелинейные уравнения состояния, аналогичные (2.49) – (2.50), при этом их

параметры будут определяться физическими характеристиками отдельных фаз грунта и его структуры.)

Из сравнения выражений (2.49) – (2.50) легко заметить, что прямые линии на графике кусочно-линейной зависимости (2.49) являются касательной - при нулевой деформации ($\varepsilon = 0$) и асимптотами - при больших деформациях ($\alpha_{1,2}\gamma_{1,2}\varepsilon^2 >>1$) для плавно-нелинейной зависимости (2.51) и, следовательно, при малых и больших амплитудах деформации (и правильном выборе параметров $\alpha_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$, *n* и *m*) результат расчета на основе нелинейной функции (2.51) также будет согласован с результатом эксперимента.

Для получения аналитической зависимости $\Phi = \Phi(\varepsilon_0)$ решим нелинейное волновое уравнение для продольных радиальных смещений $U_r(r,t) = U(r,t)$ в среде с нелинейностью (2.50). В сферической системе координат (ее центр совпадает с центром излучателя), имеем (при $r > \lambda$) следующее нелинейное волновое уравнение для U(r,t):

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{2U}{r} \right) - f \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right) \right], \qquad (2.52)$$

где $C = (E/\rho)^{1/2}$, ρ - плотность грунта, r - радиальная координата, $\varepsilon = \frac{\partial U}{\partial r}$ - радиальная компонента деформации, $\lambda = 2\pi C/\Omega$ - длина сейсмоакустической волны. (Здесь, также, как и в работе [Зайцев и др., 19996], не учитываются линейные потери в среде.) Приближенное решение уравнения (2.52) будем искать в виде расходящейся сферической волны:

$$U(r,t) = \frac{U_0 d}{r} \cos[\Omega t - Kr - \Phi(\varepsilon_0, r)], \qquad (2.53)$$

где U_0 - амплитуда смещения волны на расстоянии d от излучателя, $K = \Omega/C$, Kr > 1, $\Phi(\varepsilon_0)$ - медленно-меняющаяся по r поправка к фазе волны, обусловленная нелинейностью среды. Подставляя (2.53) в (2.52), получаем уравнение для $\Phi(\varepsilon_0)$:

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon_0)}{\partial r} = \frac{K\varepsilon_0^2 d^2}{2\pi r^2} \int_0^{\pi} \left(\frac{\alpha_1 \gamma_1 \sin^4 \Psi}{1 + A_1(r) \sin^2 \Psi} - \frac{\alpha_2 \gamma_2 \sin^4 \Psi}{1 + A_2(r) \sin^2 \Psi} \right) d\Psi, \qquad (2.54)$$

где $A_{1,2}(r) = \gamma_{1,2} \varepsilon_0^2 d^2 / r^2$, $\Psi(r,t) = \Omega t - Kr - \Phi(\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 = KU_0$ - амплитуда деформации волны на расстоянии *d* от излучателя. Его решение имеет вид:

$$\Phi(\varepsilon_{0}) = \frac{\alpha_{1}Kr}{12} \left[\left(\frac{1 - \sqrt{1 + \gamma_{1}(\varepsilon_{0}d/r)^{2}} - 4\gamma_{1}(\varepsilon_{0}d/r)^{2}}{1 + \sqrt{1 + \gamma_{1}(\varepsilon_{0}d/r)^{2}}} \right) - \frac{d}{r} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + \gamma_{1}\varepsilon_{0}^{2}} - 4\gamma_{1}\varepsilon_{0}^{2}}{1 + \sqrt{1 + \gamma_{1}\varepsilon_{0}^{2}}} \right) \right] - \frac{d}{r} \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \gamma_{1}\varepsilon_{0}^{2}} - 4\gamma_{1}\varepsilon_{0}^{2}}{1 + \sqrt{1 + \gamma_{1}\varepsilon_{0}^{2}}} \right] - \frac{d}{r} \left[\frac{1 - \sqrt{1 + \gamma_{2}\varepsilon_{0}^{2}} - 4\gamma_{2}\varepsilon_{0}^{2}}{1 + \sqrt{1 + \gamma_{2}\varepsilon_{0}^{2}} - 4\gamma_{2}\varepsilon_{0}^{2}} \right] \right], (2.55)$$

Из выражения (2.55) получаем простые асимптотики для $\Phi(\varepsilon_0)$ при малых и больших значениях параметров $\gamma_{1,2}(\varepsilon_0 d/r)^2$:

$$\Phi(\varepsilon_0) = \frac{3Kd\varepsilon_0^2}{16} (\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2) \text{ при } \gamma_{1,2} (\varepsilon_0 d / r)^2 <<1,$$
(2.56)

$$\Phi(\varepsilon_0) = \frac{K(r-d)}{4} (\alpha_1 - \alpha_2) \text{ при } \gamma_{1,2} (\varepsilon_0 d/r)^2 >> 1.$$
(2.57)

На рис. 2.28 показан пример (близкой к экспериментальной) расчетной зависимости (2.55), построенной при d = 10 м, r = 120 м и при следующих значениях параметров нелинейной функции (2.49): $\alpha_1 = 3.75 \cdot 10^{-2}$, $\alpha_2 = 2.5 \cdot 10^{-2}$, $\gamma_1 = 0.5 \cdot 10^{18}$, $\gamma_2 = 7 \cdot 10^{18}$; видно, что расчетная кривая демонстрирует основные свойства наблюдаемой зависимости $\Phi = \Phi(\varepsilon_0)$ – положение и глубину минимума и наличие насыщения разности фаз. Из сравнения выражений (2.56) и (2.57) с результатом эксперимента можно получить оценки для эффективных параметров $\Gamma_3 = (\alpha_1 \gamma_1 - \alpha_2 \gamma_2)/2$ и $\Gamma = (\alpha_1 - \alpha_2)/2$ кубичной и разномодульной нелинейности сырого песчаного грунта в месте проведения эксперимента (на трассе распространения волны) при малых и больших амплитудах деформации ε_0 : $\Gamma_3 \cong -7.8 \cdot 10^{16}$, $\Gamma \cong 6.2 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 2.19 приведено семейство зависимостей $\Phi = \Phi(\varepsilon_0)$, построенных по формуле (2.55) при тех же (что и выше) параметрах $\alpha_{1,2}$ и $\gamma_{1,2}$ для различных расстояний r: r = 20 м, r = 120 м, r = 200 м и r = 300 м. Из этого рисунка видно, что с ростом расстояния r имеет место "усиление" эффекта фазового самовоздействия сейсмоакустической волны, т.е. на небольших расстояниях r фаза волны почти не зависит от ее амплитуды ε_0 , а при больших расстояния r эта зависимость становится весьма существенной.

В заключение отметим, что источниками независимой информации о показателях степеней *m* и *n* нелинейной функции (2.51) уравнения состояния среды являются зависимости амплитуд ε_p высших гармоник (в основном, второй и третьей) от амплитуды волны основной частоты, причем из выражения (2.51) следует, что при малых $\varepsilon_0 - \varepsilon_p \sim \varepsilon_0^{n+1}$, а при больших ε_0

нелинейность грунта является разномодульной и в нем будут генерироваться только четные гармоники волны основной частоты, при этом $\varepsilon_p \sim \varepsilon_0$, p - четное.



Рис. 2.19. Зависимость разности фаз $\Phi = \Phi(\varepsilon_0)$ от амплитуды ε_0 излучаемой волны для различных расстояний *r*.

2.7. Выводы к Главе 2

- Исследованы волновые процессы в средах с разномодульной нелинейностью при учете различных диссипативных и дисперсионных свойств среды: линейной диссипации, линейной релаксации, дисперсии. С помощью метода разделения переменных получены точные аналитические решения для распространения импульсных и непрерывных волн.
- 2. На основе спектрального подхода разработаны численные схемы для исследования распространения волн в средах с разномодульной нелинейностью при учете линейной диссипации вязкого типа.
- 3. Проведены теоретические исследования процессов распространения стационарных волн в средах с квадратично-разномодульной нелинейностью и вязкой диссипацией. Получены аналитические выражения для стационарных волн; первоначально гармонических волн при отсутствии диссипации; предложена схема численного расчёта профилей первоначально гармонических волн и получены численные решения.
- Предложено уравнение состояния для описания эффекта самовоздействия акустической волны в сыром песчаном грунте, из сравнения теоретических и экспериментальных результатов найдены значения параметров уравнения состояния.

Результаты главы опубликованы в [М2, СВ7, СВ14 - СВ17, СВ20, СВ22].

Глава 3. Упругие волны в микро-неоднородных средах

3.1. Упругие волны в микронеоднородных средах с квадратичной нелинейностью

3.1.1. Основные уравнения

Результаты экспериментальных исследований нелинейных акустических эффектов в микронеоднородных средах (в частности, поликристаллических горных породах и металлах) свидетельствуют о том, что нелинейность подобных сред обладает дисперсией, т.е. является частотно-зависимой. Для объяснения этого явления в работе [Зайцев и др., 2001] была предложена реологическая модель нелинейной микронеоднородной среды с релаксацией, содержащей различного рода микродефекты (трещины, дислокации и т.д.), и получены уравнение состояния и волновое уравнение для одномерных акустических волн. Такая модель (рис. 3.1) представляет собой цепочку последовательно соединенных жестких линейных пружинок и небольшого числа (приходящихся на единицу длины цепочки) относительно мягких нелинейных вязкоупругих дефектов, при этом предполагается, что размер дефекта много меньше длины акустической волны и расстояния между дефектами, на длине волны находится много дефектов, а их распределение в цепочке – статистически однородной" [Исакович, 1979].



Рис. 3.1. Реологическая модель нелинейной микронеоднородной среды с релаксацией: *1* — линейная пружина, 2 — линейный демпфер, *3* — нелинейный элемент.

Происхождение дисперсии акустической нелинейности такой среды можно объяснить следующим образом. С ростом частоты деформирования (т.е. частоты акустической волны)

"жесткость" вязкоупругих дефектов растет, а их деформация уменьшается, но поскольку нелинейность среды обусловлена ее нелинейными дефектами, то и последняя также уменьшается. Для микронеоднородной среды, содержащей одинаковые вязкоупругие дефекты с малой ($\gamma \zeta R[R^2(\varepsilon)] << |R(\varepsilon)|$) квадратичной упругой нелинейностью (при малой концентрации дефектов), уравнение состояния имеет вид [Зайцев и др., 2001; Nazarov VE et al, 2002]:

$$\sigma(\varepsilon) = E\left[\varepsilon - \nu R(\varepsilon) - \nu \gamma \zeta R[R^2(\varepsilon)]\right], \qquad (3.1)$$

где σ и ε - напряжение, деформация среды, E и $C = (E/\rho)^{1/2}$ - модуль упругости и скорость волны для среды без дефектов (значение C соответствует также высокочастотному (ВЧ) пределу скорости волны в среде с дефектами), ρ - плотность, v, ζ , β , γ и $\Omega = \zeta E/\beta$ концентрация ($v \ll 1$), относительная упругость ($\zeta \ll 1$), коэффициент вязкости, параметр квадратичной нелинейности и релаксационная частота дефекта, $R(\varepsilon) = \frac{\Omega}{\zeta} \int_{-\infty}^{\tau} \varepsilon(\tau_1) \exp[-\Omega(\tau - \tau_1)] d\tau_1$, $\varepsilon(R) = \frac{\zeta}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \zeta R$.

Подставляя уравнение состояния (3.1), и переходя в систему координат (x' = x, $\tau = t - x/C$), движущуюся со скоростью C, получим волновое уравнение для скорости частиц среды $V = U_t$ [Зайцев и др., 2001; Nazarov VE et al, 2002]:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{v}{2C} \frac{\partial}{\partial \tau} R(V) - \frac{v\gamma\zeta}{2C^2} \frac{\partial}{\partial \tau} R[R^2(V)] = 0, \qquad (3.2)$$

где $R(V) = \frac{\Omega}{\zeta} \int_{-\infty}^{\tau} V(\tau_1) \exp[-\Omega(\tau - \tau_1)] d\tau_1, \ V(R) = \frac{\zeta}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \zeta R, \ \frac{\gamma \zeta}{C} R[R^2(V)] << |R(V)|.$

Нелинейные уравнения (3.1), (3.2) являются, соответственно, интегральным и интегродифференциальным уравнениями; они содержат линейное и нелинейное релаксационные слагаемые. Эти слагаемые обусловлены релаксацией нелинейных вязкоупругих дефектов, при этом релаксация нелинейности проявляется дважды: первый раз за счет линейной релаксации, поскольку нелинейные поправки в (3.1), (3.2) определяются линейным откликом дефектов, и второй раз - за счет релаксации самой нелинейной поправки.

В линейном приближении уравнения (3.1), (3.2) соответствуют аналогичным уравнениям для однородной среды с релаксацией, при этом фазовая скорость $C = C(\omega)$ и коэффициент поглощения $\alpha = \alpha(\omega)$ волны с частотой ω определяются следующими выражениями [Руденко, Солуян, 1975]:

$$C(\omega) = C_0 \left[1 + \frac{m}{2} \frac{(\omega/\Omega)^2}{1 + (\omega/\Omega)^2} \right], \ \alpha(\omega) = \frac{m\Omega}{2C_0} \frac{(\omega/\Omega)^2}{1 + (\omega/\Omega)^2},$$
(3.3)

где для микронеоднородной среды дисперсионный параметр $m = v / \zeta <<1$, а $C_0 = C / (1 + m / 2)$ - низкочастотный (НЧ) предел скорости волны.

Однако в квадратичном приближении микронеоднородная релаксирующая среда, кроме линейной, обладает также и нелинейной релаксацией; это приводит к зависимости ее эффективных (вообще говоря, комплексных) параметров нелинейности от частот взаимодействующих акустических волн, т.е. к дисперсии нелинейности. Для такой среды параметр квадратичной нелинейности $\Gamma_2 = \Gamma_2(\omega)$ для процесса генерации второй гармоники определяется выражением [Зайцев и др., 2001; Nazarov VE et al, 2002]:

$$\Gamma_{2}(\omega) = \frac{\nu\gamma}{\zeta^{2}} \frac{\exp[-j\Psi(\omega)]}{\left[1 + (\omega/\Omega)^{2}\right]^{1/2}}, \quad \Psi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2(\omega/\Omega)[2 - (\omega/\Omega)^{2}]}{1 - 5(\omega/\Omega)^{2}}\right), \quad (3.4)$$

из которого следует, что при $\omega/\Omega <<1 - \Gamma_2(\omega) = v\gamma/\zeta^2 = \text{const}$ (как для однородной среды), а при $\omega/\Omega >>1 - |\Gamma_2(\omega)| = (v\gamma/2\zeta^2)(\Omega/\omega)^3 <<\Gamma_2(0)$. Отмеченная дисперсия нелинейности может качественно изменить характер нелинейного искажения и эволюции акустических волн в микронеоднородной среде (по сравнению с однородной), ограничивая эффективность преобразования частоты "вверх по спектру" и, тем самым, предотвращая образование в волне разрывов.

В этом разделе проводится качественный и численный анализ волновых процессов в микронеоднородных средах с квадратичной упругой нелинейностью и релаксацией, а именно, исследуется распространение стационарных волн типа симметричного скачка и искажение первоначально гармонических волн.

3.1.2. Стационарные волны типа симметричного скачка

Для анализа формы стационарной волны – симметричного скачка ($-V_0 \rightarrow V_0$), в уравнении (3.2), перейдем в систему координат $\eta = t - x/C_0$, движущуюся со скоростью C_0 :

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{v}{2C_0 \Omega} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} R(V) - \frac{v\gamma\zeta}{2C_0^2} \frac{\partial}{\partial \eta} R[R^2(V)] = 0.$$
(3.5)

Из этого, довольно сложного интегро-дифференциального уравнения, после некоторых преобразований [Руденко, Солуян, 1975], заключающихся в умножении на Ω^{-1} и дифференцировании по η уравнения (3.5) и сложении полученного уравнения с исходным,

получим следующие более простые эволюционные уравнения для скорости $V = V(\eta, x)$ и "релаксатора" R = R(V):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial V}{\partial \eta} + V \right) - \frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\Omega} \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\gamma \zeta}{C_0} R^2(V) \right) = 0, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} + \frac{2}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \eta} + R \right) - \frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \eta} + \frac{\gamma}{C_0} R^2 \right) = 0. \quad (3.7)$$

Полагая, что $\gamma > 0$, $\theta = \Omega \eta$, $R(\theta = \pm \infty) = \pm R_0 = \pm V_0 / \zeta$, $d^n R(\theta = \pm \infty) / d\theta^n = 0$, n = 1,2, из (3.7) получим уравнение нелинейного осциллятора для нормированного "релаксатора" $Q(\theta) = R(\theta) / R_0$, определяющего профиль стационарной волны – симметричного скачка ($-1 \rightarrow 1$) для $Q = Q(\theta)$, движущегося со скоростью C_0 относительно неподвижной системы координат (или неподвижного в выбранной):

$$\frac{d^2Q}{d\theta^2} + \frac{dQ}{d\theta} - \mu(1 - Q^2) = 0, \qquad (3.8)$$

где $\mu = \gamma V_0 / \zeta C \ll 1$.

Аналитическое решение этого уравнения получить не удается, поэтому мы его исследуем качественно. Анализ фазовой плоскости показывает, что уравнение (3.8) имеет два состояния равновесия: $Q_1 = -1$ - седло и $Q_2 = 1$ - устойчивый узел (при $0 < \mu < 1/8$) или устойчивый фокус (при $\mu > 1/8$), т.е. с ростом амплитуды V_0 в профиле стационарной волны, вблизи $Q_2 = 1$, возникают осцилляции. (При $\gamma < 0$ состояния равновесия меняются местами и осцилляции возникают вблизи $Q_1 = -1$.) Важно также отметить, что в отличие от стационарной волны в однородной среде с релаксацией [Руденко, Солуян, 1975], решение уравнения (3.8) всегда непрерывно и однозначно. Математически это связано с тем, что уравнение (3.8) линейно по производным $Q_{\theta\theta}$ и Q_{θ} . Физической же причиной непрерывности и однозначности профиля скачка является нелинейная релаксация, демпфирующая упругую нелинейность микронеоднородной среды в области высоких частот ($\omega >> \Omega$) [Зайцев и др., 2001; Nazarov VE et al, 2002], что и препятствует увеличению крутизны фронта и образованию неоднозначности в профиле $Q = Q(\theta)$ и, соответственно, $V = V(\theta)$. Максимальная крутизна профиля "релаксатора" $Q_{\theta \max}$ равна μ (при Q = 0); соответственно, максимальная крутизна и характерная ширина фронта волны $V = V(\theta)$ равны μV_0 (при V = 0) и $2\mu^{-1}$. На рис. 3.2 приведены результаты численного расчета профилей стационарных волн для $W = V(\theta)/V_0$ при

различных значениях безразмерного параметра μ . Из этого рисунка следует, что при $\mu < 1/8$ профиль волны представляет собой монотонный перепад (как и в однородной среде [Руденко, Солуян, 1975]), а при $\mu > 1/8$ в профиле волны (вблизи состояния равновесия $Q_2 = 1$) имеют место осцилляции, причем с ростом параметра μ амплитуда и частота этих осцилляций также растут, а длительность фронта уменьшается и стремится к $2\mu^{-1}$.



Рис. 3.2. Профили стационарных волн типа симметричного скачка при различных значениях параметра *µ*.

3.1.3. Эволюционные уравнения для НЧ и ВЧ акустических волн

Рассмотрим в начале качественно распространение и эволюцию в такой среде низкочастотных и высокочастотных акустических волн. Пусть на входе в среду задано колебание: $V(t, x = 0) = V_0 F(t/T)$, где V_0 - амплитуда, F = F(t/T) - осциллирующая функция ($|F(t/T)| \le 1$), T - характерная длительность колебания (или его период).

В НЧ пределе (при $g = \omega/\Omega <<1$, $\omega = 2\pi/T$), когда $R(V) \cong \zeta^{-1}(V - gV_g)$, $R^2(V) \cong \zeta^{-2}(V^2 - 2gVV_g)$, $R[R^2(V)] \cong \zeta^{-3}[V^2 - 4gVV_g]$, из (3.5) получаем уравнение, близкое к уравнению КдВБ [Руденко, Солуян, 1975; Громов, Тютин, 1997], отличающееся от последнего малым нелинейным слагаемым $g \frac{\partial^2 W^2}{\partial g^2} \left(g \left| \frac{\partial^2 W^2}{\partial g^2} \right| << \left| W \frac{\partial W}{\partial g} \right| \right)$: $\frac{\partial W}{\partial z} - W \frac{\partial W}{\partial g} + g \frac{\partial^2 W^2}{\partial g^2} = Mg \left[\frac{\partial^2 W}{\partial g^2} - g \frac{\partial^3 W}{\partial g^3} \right]$, (3.9) где $W(\vartheta, z) = V(\vartheta, z)/V_0$, $Q(\vartheta, z) = R(\vartheta, z)/R_0$, $\vartheta = \omega\eta$, $z = x/x_0$, $x_0 = \zeta C_0^2/(\gamma m \omega V_0)$, $M = \zeta C_0/2\gamma V_0 >> 1/2$.

Решение этого уравнения (без слагаемого $g \frac{\partial^2 W^2}{\partial g^2}$) подробно изучено в [Руденко, Солуян, 1975]; оно, в частности, описывает несимметричное искажение и укручение фронта первоначально гармонической волны в однородной релаксирующей среде с последующим затуханием и превращением ее опять в синусоидальную. Следует ожидать, что наличие этого слагаемого существенно не изменит общую картину эволюции НЧ волн.

Для получения эволюционных уравнений в другом пределе – высокочастотном ($g = \omega/\Omega >>1$), получим сначала из (3.2) уравнение для $W = W(\mathcal{G}, z)$ в системе координат, движущейся со скоростью *C*. Используя равенства: $\frac{\partial Q(W)}{\partial \mathcal{G}} = \frac{W - Q(W)}{g}$, $\frac{\partial Q(Q^2)}{\partial \mathcal{G}} = \frac{Q^2 - Q(Q^2)}{g}$ из уравнения (3.2) находим: $\frac{\partial^2 W}{\partial \mathcal{G}\partial z} + \frac{N}{g} \frac{\partial W}{\partial \mathcal{G}} + \frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{Q(W)}{g} \frac{\partial Q(W)}{\partial \mathcal{G}} = 0$, (3.10)

где
$$Q(W) = \frac{1}{g} \int_{-\infty}^{s} W(\vartheta_1, z) \exp[-(\vartheta - \vartheta_1)/g] d\vartheta_1, \qquad \vartheta = \omega \tau, \qquad z = x/x_c, \qquad x_c = \zeta C^2 / \gamma m \omega V_0,$$

 $N = \zeta C / 2\gamma V_0 >> 1/4g.$

В высокочастотном приближении, за исключением небольшого интервала по \mathscr{G} , где $\frac{\partial Q}{\partial \mathscr{G}} = 0$, имеем: $W \cong g \frac{\partial Q}{\partial \mathscr{G}}$, $\frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial z} << \frac{\partial^2 W}{\partial \mathscr{G} \partial z}$, и из (3.10) получаем нелинейные уравнения для $Q = Q(\mathscr{G}, z)$ и $W = W(\mathscr{G}, z)$:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial g \partial z} + \frac{N}{g} \frac{\partial Q}{\partial g} = \frac{Q^2}{2g^2}, \qquad (3.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} \left[\frac{1}{W} \frac{\partial}{\partial \mathcal{G}} \left(\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{NW}{g} \right) \right] = \frac{W}{g^3}.$$
(3.12)

Из уравнений (3.3), (3.4), (3.10), (3.11) следует, что в ВЧ диапазоне диссипация, дисперсия фазовой скорости и нелинейность сильно подавлены (по сравнению с НЧ диапазоном) и слабая гармоническая волна с частотой ω , распространяясь со скоростью, близкой к *C*, будет испытывать, в основном, только линейное затухание, декремент которого определяется выражением: $\theta_0 = \pi m \Omega / \omega$. Тем не менее, сильные ВЧ волны

(1/4g << N < 1) на средних расстояниях ($z \le g/N$) могут испытывать заметные нелинейные искажения. Подробную и точную картину эволюции первоначально гармонических волн различных частот может дать численное решение уравнения (3.7).

3.1.4. Искажения и эволюция первоначально гармонических волн

Приведем результаты численного моделирования искажения и эволюции гармонических волн, создаваемых на границе x = 0: $V(t, x = 0) = V_0 \sin \omega t$. Используя обозначения к уравнению (3.9), из (3.7) получим безразмерные уравнения для "релаксатора" $Q = Q(\vartheta, z)$ и скорости $W = W(\vartheta, z)$ в системе координат, движущейся со скоростью C_0 :

$$\frac{\partial Q}{\partial z} - Q \frac{\partial Q}{\partial g} = -g \frac{\partial^2}{\partial z \partial g} \left[2Q + g \frac{\partial Q}{\partial g} \right] + Mg \frac{\partial^2}{\partial g^2} \left[Q + g \frac{\partial Q}{\partial g} \right], \quad W = Q + g \frac{\partial Q}{\partial g}, \quad (3.13)$$

где $Q(\vartheta, z = 0) = \frac{\sin \vartheta - g \cos \vartheta}{1 + g^2}, M = \zeta C_0 / 2 \gamma V_0 >> \frac{1 + (1 + 4g^2)^{-1/2}}{4(1 + g^2)^{1/2}}.$

При численном решении уравнений (3.13) использовался спектральный метод, предложенный в работе [Пищальников и др., 1996] для расчета взаимодействия акустических волн в недиспергирующих средах с квадратично-упругой нелинейностью. Модификация этого метода, основанная на знании ВЧ асимптотики спектра ударной волны и вычислении конечного числа гармоник нелинейной волны, успешно применялась для описания волновых процессов в однородных нелинейных средах с релаксацией и с различными степенными зависимостями коэффициента поглощения от частоты волны [Пищальников и др., 1996; Кащеева и др., 2000]. В микронеоднородной нелинейной релаксирующей среде, вследствие ВЧ диссипации (для НЧ волн) или дисперсии нелинейности (для ВЧ волн), ударной волны не образуется и спектр нелинейных волны содержит ограниченное число гармоник, так что при расчете профилей нелинейных волн можно пользоваться спектральным методом [Fenlon, 1971], ограничивая, как в работе [Пищальников и др., 1996], количество взаимодействующих гармоник некоторым, не очень большим числом n, обеспечивающим устойчивость численной схемы. (В нашем случае n было не более 100).

На рис. 3.3 - 3.6 представлены профили первоначально гармонических волн, полученные в результате численного решения уравнений (3.13) при различных значениях безразмерных параметров *g*, *M* и расстояниях *z*. Из рис. 3.3 видно, что с увеличением пройденного расстояния z передний фронт НЧ волн ($g = 10^{-2}$) вначале укручается, так что волна становится почти пилообразной, но затем, по мере затухания, волна опять становится синусоидальной (в полном соответствии с решением уравнения Бюргерса [Руденко, Солуян, 1975]). С увеличением частоты волны, укручение фронта уменьшается (рис. 3.4, 3.5), при этом, естественно, волна с меньшей частотой затухает медленнее волны с большей частотой, т.к. первая обладает меньшим линейным затуханием, чем вторая. Более высокочастотные волны ($g \ge 5 \cdot 10^{-1}$) распространяются почти без искажений, однако, затухание сильной и слабой волн, с частотами ω близкими к частоте Ω релаксации дефектов ($g \approx 1$), существенно различны: слабые волны затухают сильнее, чем сильные (рис. 3.6); на больших расстояниях обе волны превращаются в синусоидальные, однако волна с большей начальной амплитудой затухает медленнее волны с меньшей начальной амплитудой. Этот эффект связан с перекачкой энергии основной волны в высшие гармоники, затухание которых меньше и они распространяются дальше, и с последующим "возвратом" энергии этих гармоник в волну основной частоты. Поскольку в сильной волне высшие гармоники генерируются интенсивнее, чем в волне слабой, то на больших расстояниях волна с большей начальной амплитудой распространяется с меньшим эффективным затуханием.



Рис. 3.3. Эволюция первоначально гармонических волн на различных расстояниях *z* при $g = 10^{-2}$, M = 2.



Рис. 3.4. Эволюция первоначально гармонических волн на различных расстояниях *z* при $g = 10^{-1}$, M = 2.



Рис. 3.5. Эволюция первоначально гармонических волн на различных расстояниях z при g = 0.25, M = 2.



Рис. 3.6. Эволюция первоначально гармонических волн на различных расстояниях z при g = 1, M = 2 (a) и M = 4 (б).

3.2. Волновые процессы в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью

3.2.1. Основные уравнения

Модель микронеоднородной среды не конкретизирует вид нелинейности дефектов, поэтому для случая разномодульной нелинейности волновые уравнения получаются аналогичными уравнениям (3.2), (3.7), для системы отсчета, движущейся со скоростью C_0 , уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{v}{2C_0 \Omega} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} R(\varepsilon) + \frac{v \gamma \xi}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} R[|R(\varepsilon)|] = 0, \qquad (3.14)$$

где $\mathcal{E}(R) = \frac{\xi}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} + \xi R.$

Прежде, чем приступить к решению этого уравнения, оценим, как это принято в теории нелинейных волн [Руденко, Солуян, 1975], отношения нелинейного слагаемого к линейным:

$$\frac{\nu\gamma\xi}{2C_0} \frac{\partial (R[[R(\varepsilon)]])/\partial\tau}{\partial\varepsilon/\partialx} \approx \frac{\gamma m\Omega^2}{2(\omega^2 + \Omega^2)},$$
(3.15)

$$\operatorname{Re} = \gamma \xi \Omega \frac{\partial (R[|R(\varepsilon)|]) / \partial \tau}{\partial^2 R(\varepsilon) / \partial \tau^2} \approx \frac{\gamma \Omega^2}{\omega (\omega^2 + \Omega^2)^{1/2}}, \qquad (3.16)$$

где Re - акустическое число Рейнольдса для микронеоднородной разномодульной среды с релаксацией.

Из этих выражений видно, что для разномодульной среды эти отношения не зависят от амплитуды волны. Из выражения (3.16) также следует, что для заметного развития нелинейных процессов в микронеоднородной разномодульной среде необходимо выполнение условия: $Re = \frac{\gamma \Omega^2}{\omega (\omega^2 + \Omega^2)^{1/2}} > 1$. Таким образом, наиболее благоприятный режим, с точки зрения максимального проявления нелинейных свойств среды, будет иметь место для низкочастотных волн ($\omega << \Omega$), когда $Re = \gamma \Omega / \omega > 1$. В высокочастотном диапазоне, при $\omega \ge \Omega$, проявление нелинейных процессов будет мало заметно (поскольку Re <<1) даже на больших расстояниях x.

Из довольно сложного интегро-дифференциального уравнения (3.14), после преобразований, аналогичных для получения уравнения (3.7), получим следующие более простые эволюционные уравнения для деформации $\varepsilon = \varepsilon(x, \tau)$ и "релаксатора" $R = R(\varepsilon)$:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\tau\partial x} - \frac{m}{2C_0 \Omega} \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\tau^2} + \frac{\gamma m\xi}{2C_0} \frac{\partial|R(\varepsilon)|}{\partial\tau} = 0, \qquad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} + \frac{2}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} + R \right] - \frac{m}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 R}{\partial \tau^2} + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial R}{\partial \tau} - \gamma |R| \right] = 0.$$
(3.18)

В безразмерных переменных $Q(z,\theta) = R(x,\theta)/R_0$, $R_0 = \varepsilon_0 \mu/\xi \sqrt{1+\mu^2}$,

 $e(z,\theta) = \varepsilon(z,\theta)/\varepsilon_0, \ \theta = \omega \tau, \ \mu = \Omega/\omega, \ z = \gamma m \omega x/2C_0$ уравнения (3.17), (3.18) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[e + \frac{1}{\mu} \frac{\partial e}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{\gamma \mu} \frac{\partial^2 e}{\partial \theta^2} = -\frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \frac{\partial |Q(e)|}{\partial \theta}, \qquad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \frac{2}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + Q \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\gamma \mu^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\gamma \mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} - |Q| \right] = 0, \qquad (3.20)$$

где $e(z,\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(\frac{\partial Q(z,\theta)}{\partial \theta} + \mu Q(z,\theta) \right).$

В линейном приближении ($\gamma = 0$) уравнения (3.14), (3.17) - (3.20) соответствуют волновым уравнениям для однородной среды с релаксацией (2.14). Однако, в отличие от аналогичных уравнений для однородной среды с безынерционной квадратичной нелинейностью и релаксацией [Руденко, Солуян, 1975], эти уравнения характеризуются инерционной, т.е. частотно-зависимой, разномодульной нелинейностью. Из-за этих отличий закономерности нелинейных волновых процессов в однородной и микронеоднородной средах будут различными. Покажем это на простом примере распространения гармонической волны и генерации ее высших гармоник.

3.2.2. Генерация гармоник

Уравнение (3.20) будем решать методом возмущений, полагая, что

$$Q(z,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(z) \sin[n\theta + n\Psi_n(z)], \sum_{n=2}^{\infty} q_n^2(z) << q_1^2(z),$$
$$|Q(z,\theta)| \cong q_1(z) |\sin[\theta + \Psi_1(z)]| = q_1(z) \left[\frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(4n^2 - 1)} \cos[2n(\theta + \Psi_1(z))]\right].$$

В этом приближении в разномодульной среде генерируются только четные гармоники (потому что, нелинейность - четная), при этом все они определяются волной основной частоты.

На малых расстояниях $z \ll \gamma/\mu$, $z \ll \gamma/2p$ волна $e(z,\theta)$ содержит основную гармонику (ее амплитуда экспоненциально уменьшается) и p высших четных гармоник (их амплитуды растут пропорционально z):

$$e(z,\theta) = \exp\left(-\frac{\mu z}{\gamma(1+\mu^{2})}\right) \sin\left(\theta + \frac{z}{\gamma(1+\mu^{2})}\right) + \frac{8z}{\pi\sqrt{1+\mu^{-2}}} \sum_{n=1}^{p} \frac{2n}{(4n^{2}-1)\sqrt{1+4n^{2}\mu^{-2}}} \sin\left[2n\theta - 2n \cdot \arctan\left(\frac{1}{\mu}\right) - \arctan\left(\frac{2n}{\mu}\right)\right]. \quad (3.21)$$

Из выражения (3.21) следует, что амплитуда $\varepsilon_{2n}(x)$ деформации гармоники с номером определяется выражением: $\varepsilon_{2n}(x) \propto \gamma \varepsilon_0 nkx/(4n^2-1)N_{2n}(\omega/\Omega)$, где $k = \omega/C_0$, 2n $N_{2n}(\omega/\Omega) = [1 + (\omega/\Omega)^2]^{1/2} [1 + (2n\omega/\Omega)^2]^{1/2} \ge 1.$ (Для сравнения, в однородной среде с безынерционной квадратичной нелинейностью амплитуда первой гармоники определяется тем же выражением (3.21): $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_0 \exp[-\beta(\omega)x]$, а амплитуда второй - выражением, отличным от (3.21): $\varepsilon_2(x) \propto \Gamma \varepsilon_0^2 kx$, $\Gamma = \text{const}$ - параметр квадратичной нелинейности [Руденко, Солуян, 1975].) Таким эффективный параметр нелинейности микронеоднородной образом. разномодульной среды с релаксацией для процесса генерации гармоники с номером 2n определяется выражением: $\gamma_{eff}(\omega/\Omega) = \gamma N_{2n}^{-1}(\omega/\Omega)$, т.е. из-за релаксации с ростом частоты ω первичной волны параметр нелинейности уменьшается в $N_{2n}(\omega/\Omega)$ раз. Это свойство – дисперсия нелинейности, характерно и для других микронеоднородных сред с релаксацией. Вместе с линейными релаксационными поглощением и дисперсией, дисперсия нелинейности ограничивает крутизну фронта волны и предотвращает образования в ней неоднозначностей. Далее, в разделе 3.2.4, мы покажем это на примере стационарной волны.

На больших расстояниях, при $z >> \frac{\gamma(4+\mu^2)(1+\mu^2)}{3\mu^3}$, $\frac{16\gamma\sqrt{1+\mu^2}}{\pi} <<1$, волна $e(z,\theta)$

определяется выражением:

$$e(z,\theta) = \exp\left(-\frac{\mu z}{\gamma(1+\mu^2)}\right) \times \left\{ \sin\left(\theta + \frac{z}{\gamma(1+\mu^2)}\right) + \frac{16\gamma\sqrt{1+\mu^2}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n^2-1)^2} \sin\left[2n\left(\theta + \frac{z}{\gamma(1+\mu^2)} - \arctan\left(\frac{1}{\mu}\right)\right)\right] \right\}.$$
(3.22)

В этом случае, соотношения между амплитудами и фазами гармонических составляющих волны не зависят от расстояния. Это соответствует тому, что на больших расстояниях (при $16\gamma\sqrt{1+\mu^2}/\pi \ll 1$) первоначально гармоническая волна стремится к самоподобной, не меняющей своей формы при распространении, при этом коэффициент

затухания и скорость распространения гармоник (и волны в целом) определяются выражениями:

$$\beta(\mu) = \frac{m\Omega}{2C_0(1+\mu^2)}, \ C(\mu) = \frac{C_0}{1-m/2(1+\mu^2)}.$$
(3.23)

3.2.3. Стационарная волна

Рассмотрим стационарную волну типа симметричного скачка, когда $\varepsilon(z, \eta = \pm \infty) = \pm \varepsilon_0$, $R(z, \eta = \pm \infty) = \pm R_0 = \pm \varepsilon_0 / \xi$, $\eta = \Omega \tau$. Стационарная волна является самоподобной, т.к. ее форма не меняется при распространении. Полагая в уравнении (3.18) $R(z, \eta) = R(\eta)$, $Q(\eta) = R(\eta) / R_0$, получим уравнение для $Q(\eta)$:

$$\frac{d^2Q}{d\eta^2} + \frac{dQ}{d\eta} + \gamma(1 - |Q|) = 0, \qquad (3.24)$$

где $Q(\eta = \mp \infty) = \pm 1$, $\frac{dQ(\eta = \pm \infty)}{d\eta} = 0$, $e(\eta) = \frac{\varepsilon(\eta)}{\varepsilon_0} = \frac{\partial Q(\eta)}{\partial \eta} + Q(\eta)$.

Решение уравнения (3.24), с точностью до малых слагаемых, пропорциональных γ , имеет вид:

$$Q(\eta) = \begin{cases} 1 - \exp(\gamma \eta), & \eta \le 0, \\ -1 + \exp(-\gamma \eta), & \eta \ge 0, \end{cases} e(\eta) = \begin{cases} 1 - (1 + \gamma)\exp(\gamma \eta), & \eta \le 0, \\ -1 + (1 - \gamma)\exp(-\gamma \eta), & \eta \ge 0. \end{cases} (3.25)$$

Форма стационарной волны $e = e(\eta)$ (Рис. 3.7) обеспечивается балансом эффектов нелинейности и релаксации: нелинейность увеличивает крутизну фронта, а релаксационные диссипация и дисперсия стремятся ее уменьшить. При увеличении релаксационной частоты Ω крутизна фронта волны $e = e(\tau)$ растет и при $\Omega \rightarrow \infty$ стремится к бесконечно крутому перепаду: $e(\tau) = -\text{sgn } \tau$. Отметим, что здесь форма стационарной волны не содержит неоднозначности, в отличие от стационарной волны в однородной среде с безынерционной (частотно-независимой) нелинейностью и линейной релаксацией [Руденко, Солуян, 1975]. Это связано с нелинейной релаксацией микронеоднородной среды, приводящей к уменьшению эффектов нелинейности при увеличении крутизны фронта $de(\tau)/d\tau$ волны.



Рис. 3.7. Форма стационарной волны $e = e(\eta)$ при $\gamma = 10^{-2}$.

3.2.4. Самоподобные низкочастотные и высокочастотные волны

Кроме стационарной волны, в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией возможны и другие виды самоподобных волн. Однако, в общем виде, определение их формы – довольно сложная задача. Здесь мы приведем самоподобные решения для НЧ и ВЧ волн.

В НЧ приближении (при $\mu >>1$, $\gamma \mu^2 >>1$) имеем $Q(z,\theta) \cong e(z,\theta)$, а уравнение (3.20) упрощается и сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\partial e}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\gamma \mu} \frac{\partial e}{\partial \theta} - |e| \right] = 0.$$
(3.26)

Решение этого уравнения проведем методом разделения переменных, полагая:

$$e(z,\theta) = \Psi(\theta)Z(z), \qquad (3.27)$$

где Z(z) > 0, Z(z=0) = 1.

Подставляя (3.27) в (3.26) получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для Z = Z(z) и $\Psi = \Psi(\theta)$:

$$\frac{Z'_{z}}{Z} = \frac{(\gamma \mu)^{-1} \Psi''_{\theta \theta} - |\Psi|'_{\theta}}{\Psi} = -p \le 0, \qquad (3.28)$$

где $p = const \ge 0$.

При таком выборе знака параметра p ($p \ge 0$) решение пространственного уравнения $Z(z) = \exp(-pz)$ не нарастает по координате $z \ge 0$. Значение параметра p задается граничным условием, определяющим форму излучаемой самоподобной волны: $\in (z = 0, \theta) = \Psi(\theta)$. Очевидно, что при p = 0 получается незатухающая стационарная волна (3.25).

Для временной функции $\Psi(\theta)$ из уравнения (3.28) имеем:

$$(\gamma\mu)^{-1}\Psi_{\theta\theta}'' - |\Psi|_{\theta}' + p\Psi = 0.$$
(3.29)

Из уравнения (3.29) следуют два линейных уравнения для положительной $\Psi_1(\theta \le 0) \ge 0$ и отрицательной $\Psi_2(\theta \ge 0) \le 0$ частей временной функции $\Psi = \Psi(\theta)$:

$$(\gamma\mu)^{-1}\Psi_{1\theta\theta}'' - \Psi_{1\theta}' + p\Psi_1 = 0, \ (\gamma\mu)^{-1}\Psi_{2\theta\theta}'' + \Psi_{2\theta}' + p\Psi_2 = 0, \tag{3.30}$$

непрерывно переходящих друг в друга в точках $\theta = \theta_0$, где $\Psi_1(\theta = \theta_0) = \Psi_2(\theta = \theta_0) = 0$.

Характеристическое уравнение для уравнений (3.30) имеет вид:

$$(\lambda\mu)^{-1}\lambda^2 \mp \lambda + p = 0, \qquad (3.31)$$

а его корни $\lambda_{1,2}^{\pm}$ определяются выражениями:

$$\lambda_{1,2}^{+} = \frac{\gamma \mu [1 \pm \sqrt{1 - 4p/\gamma \mu}]}{2}, \ \lambda_{1,2}^{-} = \frac{\gamma \mu [-1 \pm \sqrt{1 - 4p/\gamma \mu}]}{2}$$

При $p \le \gamma \mu / 4$ решения уравнения (3.29) определяют одиночные разнополярные импульсы. При $p < \gamma \mu / 4$ и при $p = \gamma \mu / 4$ такие импульсы описываются выражениями:

$$\Psi(\theta) = -\exp[-(\gamma \mu/2)|\theta|]\sinh[\sqrt{1 - (4p/\gamma \mu)(\gamma \mu/2)\theta}], \qquad (3.32)$$

$$\Psi(\theta) = -(\gamma \mu \theta/2) \exp[-(\gamma \mu/2)|\theta|].$$
(3.33)

При $\gamma \mu \to \infty$ импульс (3.32) содержит разрыв: $e(z, \theta) = -\exp[-p|\theta|] \operatorname{sgn} \theta \exp(-pz)$.

При $p > \gamma \mu / 4$ решения уравнения (3.29) определяют периодическую волну с периодом $\theta^* = 4\pi / \gamma \mu \sqrt{1 - 4p / \gamma \mu}$:

$$\Psi(\theta) = -\exp[-(\gamma \mu/2)|\theta] \sin[\sqrt{(4p/\gamma \mu) - 1(\gamma \mu/2)\theta}], \qquad (3.34)$$

где $|\theta| \leq \frac{2\pi}{\gamma \mu \sqrt{(4p/\gamma \mu) - 1}}$.

Для линейной среды ($\gamma = 0$) самоподобное решение (3.34) – это линейно-затухающая гармоническая волна с частотой ω ; из выражения (3.34) при $p = 1/\gamma\mu$ получаем:

$$e(z,\theta) = \exp(-pz)\sin\theta = \exp\left(-\frac{\alpha\omega^2 x}{2C_0^3}\right)\sin\omega\tau.$$

Для определения формы самоподобных ВЧ волн, получим эволюционные уравнения в системе координат $\zeta = t - x/C$, x' = x, движущейся с высокочастотной скоростью C:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\nu}{2C} \frac{\partial}{\partial \zeta} R(\varepsilon) + \frac{\nu \gamma \xi}{2C} \frac{\partial}{\partial \zeta} R[|R(\varepsilon)|] = 0, \qquad (3.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(R + \frac{2}{\Omega}\frac{\partial R}{\partial \zeta} + \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 R}{\partial \zeta^2}\right) + \frac{\nu}{2\xi C}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{\Omega}\frac{\partial}{\partial \zeta}R + R + \gamma |R|\right) = 0.$$
(3.36)

В безразмерных переменных $Q(z,\theta) = R(x,\theta)/R_0$, $R_0 = \varepsilon_0 \mu/\xi \sqrt{1+\mu^2}$, $e(z,\theta) = \varepsilon(z,\theta)/\varepsilon_0$, $\theta = \omega\zeta$, $z = \gamma m\omega x/2C$, $\mu = \Omega/\omega$ это уравнение (29) имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(Q + \frac{2}{\mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu^2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\gamma \mu} \frac{\partial Q}{\partial \theta} + \frac{Q}{\gamma} + |Q| \right) = 0, \qquad (3.37)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} \left(z, \theta \right) - z \left(z, \theta \right) \right)$$

где $e(z,\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(\frac{\partial Q(z,\theta)}{\partial \theta} + \mu Q(z,\theta) \right).$

Здесь, при $\mu \ll 1$, имеем $e(z,\theta) \cong \frac{\partial Q(z,\theta)}{\partial \theta}$ и из (3.37) получаем линейное уравнение:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = -\frac{\mu}{\gamma} e \,. \tag{3.38}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$e(z,\theta) = \exp[-(\mu/\gamma)z]\Psi(\theta) = \exp[-(m\Omega x/2C)]\Psi(\theta), \qquad (3.39)$$

где $\Psi(\theta)$ - произвольная функция, зависящая от θ .

Таким образом, в ВЧ диапазоне ($\omega >> \Omega$), где дисперсия фазовой скорости и нелинейность среды пренебрежимо малы, а коэффициент затухания не зависит от частоты ω волны ($\mu z / \gamma = m \Omega x / 2C$), волна любой формы будет самоподобной.

3.2.5. Эволюция низкочастотных гармонических волн: численное решение

Получить точное аналитическое решение нелинейного волнового уравнения (3.19) для первоначально гармонической волны $e(z = 0, \theta) = \sin \theta$ не представляется возможным, но его

можно решить численно. Решение уравнения (3.19) будем искать спектральным методом, полагая, что:

$$e(z,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n(z)\cos n\theta + b_n(z)\sin n\theta \right] = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\sin[n\theta + \Psi_n(z)], \quad (3.40)$$

где
$$a_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(z,\theta) \cos n\theta d\theta$$
, $b_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e(z,\theta) \sin n\theta d\theta$, $a_0(z) = 0$, $e_n(z) = [a_n^2(z) + b_n^2(z)]^{1/2}$,

 $tg\Psi_n(z) = a_n(z)/b_n(z)$.

результаты численного Далее приведены расчета профилей первоначально гармонических НЧ волн (при $\text{Re} \ge 1$) на различных расстояниях z, а также показаны закономерности генерации их высших гармоник. На Рис. 3.8 показана эволюция НЧ волны при $\mu = 10^3$, $\gamma = 10^{-2}$, Re = 10. Видно, что с ростом расстояния *z* волна искажается и затухает, при этом ее нулевые точки не смещаются. Последнее связано со слабой дисперсией НЧ волн в релаксирующей среде. При *z* > 2 форма волны практически не изменяется, что свидетельствует о формировании самоподобной волны, описываемой выражением (3.34). На Рис. 3.9 приведены зависимости амплитуд $e_n(z)$ первых пяти гармоник НЧ волны от расстояния z. Видно, что амплитуда первой гармоники уменьшается, а амплитуды высших - вначале растут, достигают максимумов и затем также уменьшаются, при этом вначале генерируются четные гармоники, а затем - нечетные. При повышении частоты ($\mu = 3 \cdot 10^2$, Re = 3 и $\mu = 10^2$, Re = 1) затухание волны увеличивается (Рис. 3.10 – 3.13), а искажение волны и эффективность генерации высших гармоник уменьшаются; при z > 1 форма волны также стремится к самоподобной. Здесь амплитуды высших гармоник качественно ведут себя также, как и при $\mu = 10^3$, но их амплитуды заметно меньше (Рис. 3.11, 3.13).



Рис. 3.8. Эволюция первоначально гармонической НЧ волны при $\mu = 10^3$, $\gamma = 10^{-2}$ на различных расстояниях z: z = 0 - 1, z = 0.5 - 2, z = 1 - 3, z = 1.5 - 4, z = 2 - 5, z = 2.5 - 6, z = 3 - 7, z = 3.5 - 8.



Рис. 3.9. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической НЧ волны от расстояния z при $\mu = 10^3$, $\gamma = 10^{-2}$.


Рис. 3.10. Эволюция первоначально гармонической НЧ волны при $\mu = 3 \cdot 10^2$, $\gamma = 10^{-2}$ на различных расстояниях z: z = 0 - 1, z = 0.6 - 2, z = 1 - 3, z = 1.6 - 4, z = 2.6 - 5, z = 3.6 - 6.



Рис. 3.11. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической НЧ волны от расстояния z при $\mu = 3 \cdot 10^2$, $\gamma = 10^{-2}$.



Рис. 3.12. Эволюция первоначально гармонической НЧ волны при $\mu = 10^2$, $\gamma = 10^{-2}$ на различных расстояниях z: z = 0 - 1, z = 0.5 - 2, z = 1 - 3, z = 1.5 - 4, z = 2 - 5.



Рис. 3.13. Зависимости амплитуд первых пяти гармоник первоначально гармонической НЧ волны от расстояния z при $\mu = 10^2$, $\gamma = 10^{-2}$.

3.3. Численное моделирование динамических гистерезисов

для микро-неоднородных сред с несовершенной упругостью

3.3.1. Введение

Результаты экспериментальных исследований эффектов амплитудно-зависимого внутреннего трения (A3BT) в некоторых микронеоднородных средах (поликристаллических горных породах и металлах) показывают [Назаров, 1999; Назаров, 2000; Назаров ВЕ, Радостин AB, 2004], что эффективные параметры гистерезисной нелинейности подобных сред зависят от частоты акустической волны, и, следовательно, динамический гистерезис для каждой из этих сред отличается от гистерезиса статического. Таким образом, представляет интерес, на основе знания статической формы гистерезиса микронеоднородной среды с релаксацией, предсказать (или реконструировать) его динамическую форму и проследить за ее эволюцией при изменении частоты деформации.

В данном разделе проводится численное моделирование и сравнительный анализ динамических гистерезисов трения и отрыва в рамках модели микронеоднородной среды.

3.3.2. Динамические уравнения состояния микронеоднородных релаксирующих сред с гистерезами трения и отрыва

Как и в предыдущих разделах этой главы, рассмотрим реологическую модель микронеоднородной среды, состоящей из одномерной цепочки линейных упругих элементов и относительно мягких нелинейных вязкоупругих дефектов, для которых зависимость "напряжение *σ*- деформация *ξ*" является гистерезисной:

$$\sigma(\xi, sign\dot{\xi}, \dot{\xi}) = \zeta E \Big[\xi - f(\xi, sign\dot{\xi}) \Big] + \eta \dot{\xi} , \qquad (3.41)$$

где *E* - модуль упругости жестких элементов, ζ - относительная упругость дефекта по сравнению с упругостью жестких элементов ($0 < \zeta < 1$), η - коэффициент вязкости дефекта, $f(\xi, sign\dot{\xi})$ - нелинейная (гистерезисная) функция, $\left|f'_{\varepsilon}(\xi, sign\dot{\xi})\right| << 1$.

При относительно малой концентрации дефектов уравнение состояния такой среды имеет вид [Nazarov et al, 2002]:

$$\sigma[\varepsilon, R(\varepsilon), \operatorname{sgn} \dot{R}(\varepsilon)] = E\left[\varepsilon - \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{1} R(\varepsilon)N(\zeta, W)d\zeta dW - \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{1} \zeta R\left[f(R(\varepsilon), \operatorname{sgn} \dot{R}(\varepsilon)\right]N(\zeta, W)d\zeta dW\right], (3.42)$$

$$\left| \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{1} \zeta R \left[f\left(R(\varepsilon), sign\dot{R}(\varepsilon)\right) \right] N(\zeta, W) d\zeta dW \right| << \left| \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{1} R(\varepsilon) N(\zeta, W) d\zeta dW \right| << \left| \varepsilon \right|, (3.43)$$

где $R(\varepsilon) = \frac{W}{\zeta} \int_{-\infty}^{t} \varepsilon(\tau) e^{-W(t-\tau)} d\tau$, $W = \zeta E/\eta$ - релаксационная частота дефекта, $N = N(\zeta, W)$ –

функция распределения дефектов по параметрам ζ и W.

Здесь мы будем использовать наиболее простые формы гистерезисов, аппроксимируя каждую ветвь гистерезиса квадратичной параболой. Для этого в уравнении состояния (3.41) мы будем полагать, что дефекты с гистерезисами трения и отрыва описываются соответственно следующими неаналитическими функциями:

$$f(\xi, \operatorname{sgn} \dot{\xi}) = \alpha \xi_m \xi + \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_1 \xi^2 - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \xi_m^2, & \dot{\xi} > 0\\ -\beta_2 \xi^2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \xi_m^2, & \dot{\xi} < 0 \end{cases},$$
(3.44)

$$f(\xi, \operatorname{sgn} \dot{\xi}) = \frac{1}{2} \begin{cases} \gamma_1 \xi^2, & \xi > 0, \dot{\xi} > 0; \\ -\gamma_2 \xi^2 + (\gamma_1 + \gamma_2) \xi_m \xi, & \xi > 0, \dot{\xi} < 0; \\ -\gamma_3 \xi^2, & \xi < 0, \dot{\xi} < 0; \\ \gamma_4 \xi^2 + (\gamma_3 + \gamma_4) \xi_m \xi, & \xi < 0, \dot{\xi} > 0, \end{cases}$$
(3.45)

где ξ_m - амплитуда деформации, α , $\beta_{1,2}$ и γ_{1-4} - параметры гистерезисной нелинейности, $\alpha \xi_m <<1, \ \beta_{1,2} \xi_m <<1, \ |\gamma_{1-4}| \xi_m <<1, \ |\alpha| >>1, \ |\beta_{1,2}| >>1, \ |\gamma_{1-4}| >>1.$

Очевидно, что в низкочастотном (квазистатическом) приближении, т.е. при $\omega/W <<1$, где ω - частота акустической волны, уравнение (3.42) описывает статический (безинерционный) гистерезис, аналогичный уравнениям (1.1)-(1.4):

$$\sigma(\varepsilon, \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}) = E\left(1 - \int_{0}^{1} \frac{N(\zeta)}{\zeta} d\zeta\right) \left[\varepsilon - \frac{\int_{0}^{1} \frac{N(\zeta)}{\zeta^{2}} d\zeta}{1 - \int_{0}^{1} \frac{N(\zeta)}{\zeta} d\zeta} f(\varepsilon, \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon})\right],$$

а в высокочастотном ($\omega/W >>1$), где дефекты сильно задемпфированы и не деформируются, уравнение (3.42) становится линейным: $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon$. Получить представление о детальном поведении и эволюции гистерезисных зависимостей (3.42) в промежуточном диапазоне (на "средних частотах") можно на основе численных исследований. Далее мы представим результаты численного счета и графического представления динамических гистерезисов трения и отрыва, описываемых уравнением (3.42), с учетом, соответственно, уравнений (3.44) и (3.45).

3.3.3. Результаты численного счета и эволюция динамических гистерезисов трения и отрыва

Для проведения сравнительного анализа и эволюции динамических гистерезисов трения и отрыва зададим их исходные - статические формы (т.е. параметры нелинейности α , $\beta_{1,2}$ и γ_{1-4}) таким образом, чтобы (при одинаковых амплитудах \in_m гармонической деформации $\varepsilon(t) = \in_m \sin \omega t$, $\omega/W <<1$) оба гистерезиса обладали одинаковыми средними наклонами (или дефектами модуля упругости ΔE) и площадями (или нелинейными потерями). Для этого необходимо выполнить следующие условия [Назаров и др., 2003]:

$$\alpha = \frac{\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4}{3\pi} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{8} > 0, \ \beta_1 + \beta_2 = \frac{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4}{8} > 0.$$
(3.46)

В низкочастотном диапазоне амплитудно-зависимые дефект модуля и декремент затухания материалов с гистерезисной нелинейностью положительны, поэтому положительны и знаки параметров α и $\beta_1 + \beta_2$.

При численном счете и построении диаграмм динамических гистерезисов (3.42) все дефекты считались одинаковыми [$N(\zeta, W) = N_0 \delta(\zeta - \zeta_0) \delta(W - W_0)$, $N_0 = 10^{-5}$, $\zeta_0 = 10^{-3}$, $W_0 = 2\pi \cdot 10^4$ c⁻¹], а значения нелинейных параметров полагались равными следующим величинам: $\alpha = 1.2 \cdot 10^3$, $\beta_1 = 2.5 \cdot 10^2$, $\beta_2 = 10^2$, $\gamma_1 = 10^3$, $\gamma_2 = 6 \cdot 10^2$, $\gamma_3 = 8 \cdot 10^2$, $\gamma_4 = 4 \cdot 10^2$. (Для среды с дефектами, распределенными по параметрам ζ и W, формы и эволюция динамических гистерезисов качественно будут такими же, как и для среды с одинаковыми дефектами.)

На рис. 3.14 а,б и рис. 3.15 а,б изображены динамические гистерезисы трения и отрыва, построенные (как фигуры Лиссажу) при гармоническом деформировании материала ($\varepsilon(t) = \epsilon_m \sin \omega t$, $-\infty < t < \infty$) и при различных значениях параметра $\mu = \omega/W$, равного отношению частоты ω деформирования к релаксационной частоте W дефекта ($\epsilon_m = 10^{-5}$). Отметим, что (поскольку общие потери в материале положительны) изображающая точка на диаграммах $\sigma = \sigma[\varepsilon, R(\varepsilon), \text{sgn } \dot{R}(\varepsilon)]$ всегда движется по часовой стрелке. Из рис. 3.14, 3.15 видно, что статические гистерезисы трения (при $\varepsilon/\varepsilon_m = \pm 1$) и отрыва (при $\varepsilon/\varepsilon_m = 0;\pm 1$) содержат изломы и заметно отличаются друг от друга. Далее, однако, при увеличении параметра μ гистерезисы "сглаживаются", изломы исчезают, различие гистерезисов уменьшается и визуально они становятся похожими, а при $\mu >>1$ - гистерезисы в зависимости

 $\sigma = \sigma[\varepsilon, R(\varepsilon), \text{sgn } \dot{R}(\varepsilon)]$ асимптотически исчезают. Таким образом, прямое наблюдение (методом фигур Лиссажу) отличий динамических гистерезисов для микронеоднородных релаксирующих сред (с целью выявления механизмов их нелинейности) возможно, повидимому, только на низких частотах ($\omega << W$), где отличие этих гистерезисов наиболее сильны и заметны. Однако изучение акустических эффектов АЗВТ позволяет эти гистерезисы отличить и в более высокочастотном диапазоне ($\omega \ge W$). В работе [Назаров и др., 2003] было показано, что нелинейные характеристики акустических волн (амплитудно-зависимые потери и изменение скорости распространения, амплитудные зависимости высших гармоник) в средах с различными видами гистерезисов - различны и эти различия не зависят от частоты волны. Последнее связано с тем, что нелинейные характеристики волны определяются видом гистерезисной нелинейности, вклад которой, вследствие ее малости относительно линейных слагаемых в уравнении (3.42), также мал и на рис. 3.146, рис. 3.156 (при $\omega >> W$) практически незаметен. Отличия динамических гистерезисов можно значительно "усилить", если построить диаграммы нелинейных функций $F = F[R(\varepsilon), \text{sgn } \dot{R}(\varepsilon)]$ в уравнении состояния (3.42):

$$F[R(\varepsilon), \operatorname{sgn} \dot{R}(\varepsilon)] = -\frac{\sigma(\varepsilon, \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon})}{E} + \left[\varepsilon - \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{1} R(\varepsilon)N(\zeta, W)d\zeta dW\right] =$$
$$= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{1} \zeta R \Big[f[R(\varepsilon), \operatorname{sgn} \dot{R}(\varepsilon)] \Big] N(\zeta, W)d\zeta dW .$$
(3.46)

Такая процедура соответствует подавлению (или компенсации) линейного отклика среды, в результате чего в спектре отклика материала на гармоническое воздействие будут содержаться гармоники $n\omega$ частоты деформирования (*n* - целое число), обусловленные только гистерезисной нелинейностью, И различие динамических гистерезисных функций $F = F[R(\varepsilon), \text{sgn } \dot{R}(\varepsilon)]$ будет более заметно (рис. 3.16, рис. 3.17). Следует также иметь в виду, что на этих диаграммах направление движения изображающей точки зависит от соотношения параметров μ и $r = 2(\beta_1 + \beta_2)/3\pi\alpha$ [Назаров ВЕ, 2000]: при $\mu < \mu_1 = r^{-1} + (1 + r^{-2})^{1/2} \cong 11.8$ нелинейные потери положительны и изображающая точка движется по часовой стрелке, при $\mu = \mu_1$ нелинейные потери равны нулю и гистерезиса на диаграмме $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sgn} \dot{R}(\varepsilon)]$ нет, а при $\mu > \mu_1$ - нелинейные потери отрицательны и изображающая точка движется против часовой стрелки [Назаров, Радостин, 2004]. От соотношения параметров μ и r зависит также и средний (по периоду $T = 2\pi/\omega$) угол наклона нелинейной функции $F = F[R(\varepsilon), \text{sgn} \dot{R}(\varepsilon)]$ к оси ε : при $\mu < \mu_2 = -r + (1 + r^2)^{1/2} \cong 0.84$ - угол наклона положительный (и $\Delta E > 0$), при $\mu = \mu_2$ -

наклон равен нулю ($\Delta E = 0$), а при $\mu > \mu_2$ - угол наклона становится отрицательным ($\Delta E < 0$) [Назаров, Радостин, 2004]. Заметим, что аналогичный подход для визуализации частотной зависимости нелинейности использовался в работе [Hedberg CM, Rudenko OV, 2011].



Рис. 3.14. Динамические гистерезисы трения при различных значениях μ .



Рис. 3.15. Динамические гистерезисы отрыва при различных значениях μ .



Рис. 3.16. Диаграммы нелинейной функции $F = F[R(\varepsilon), \operatorname{sgn} \dot{R}(\varepsilon)]$ для гистерезиса трения при

различных значениях μ .



Рис. 3.17. Диаграммы нелинейной функции $F = F[R(\varepsilon), \text{sgn } \dot{R}(\varepsilon)]$ для гистерезиса отрыва при различных значениях μ .

3.4. Выводы по Главе 3

- В рамках реологической модели микронеоднородной среды, содержащей одинаковые вязко-упругие дефекты с квадратичной упругой нелинейностью, получено нелинейное дифференциальное уравнение для "релаксатора" скорости, описывающее распространение одномерных акустических волн и приведены численные решения этого уравнения для стационарных волн типа симметричного скачка и нелинейного искажения первоначально гармонических волн.
- 2. Проведено теоретическое и численное исследование распространения продольных акустических волн в микронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией. Определена форма стационарной волны, а также формы НЧ и ВЧ самоподобных волн. Приведены результаты численного решения эволюционного уравнения для первоначально гармонических НЧ волн.
- 3. В рамках реологической модели микронеоднородной среды с квадратичной гистерезисной нелинейностью и релаксацией проведены численное моделирование и сравнительный графический анализ двух основных динамических гистерезисов (трения и отрыва). Показано, что при увеличении частоты гармонического деформирования среды существенные вначале абсолютные отличия статических гистерезисов трения и отрыва постепенно "сглаживаются", а затем практически исчезают. Результаты главы опубликованы в [М1, М2, CB2, CB3, CB18].

Глава 4. Экспериментальные исследования нелинейных эффектов в поликристаллических твердых телах

Распространение и взаимодействие акустических волн в различных микронеоднородных средах приводит к целому ряду экспериментально наблюдаемых нелинейных эффектов: генерации волн комбинационных частот, амплитудно-зависимым потерям, изменению фазовой скорости волны, затуханию звука на звуке, самопросветлению среды, ограничению амплитуды волны, детектированию высокочастотных импульсов и т. д. Интенсивность этих эффектов пропорциональна амплитудам взаимодействующих волн, поэтому для экспериментального изучения и надежного установления амплитудно-частотных зависимостей нелинейных эффектов необходимо использовать интенсивные первичные волны. Это сравнительно легко получается при резонансных колебаниях в высокодобротных акустических резонаторах, где амплитуды упругих волн могут достигать более значительных величин, чем в безграничной среде. Такие эксперименты проводились со многими поликристаллическими металлами и горными породами, при этом было установлено, что подобные материалы кроме гистерезисной обладают и диссипативной нелинейностью [Зименков, Назаров, 1993; Назаров, 1999; Nazarov, Kolpakov, 2000]. Наиболее важной и отличительной особенностью гистерезисной и диссипативной нелинейностей является их различная зависимость от частоты акустического воздействия: в относительно низкочастотном диапазоне гистерезисная нелинейность с ростом частоты, как правило, уменьшается, а диссипативная растет [Зименков, Назаров, 1993; Назаров, 1999; Nazarov, Kolpakov, 2000]. Это обстоятельство, наряду с амплитудными отличиями этих нелинейностей, позволяет разделять их вклады в проявление различных эффектов и проводить эксперименты таким образом, чтобы вклад той или другой нелинейности в конкретный исследуемый эффект был определяющим.

В настоящее время высокая (или сильная) акустическая нелинейность многих микронеоднородных твердых тел, в частности поликристаллических горных пород и металлов, является надежно установленным, бесспорным и общепризнанным фактом [M1; Guyer, Johnson, 2009; Руденко, 2006; Коробов и др., 2005, Haupert et al, 2011]. Тем не менее, проведение экспериментальных и теоретических исследований нелинейных волновых процессов в подобных средах будет, по-видимому, и актуально, и необходимо всегда (или, по крайней мере, пока в наличии будут образцы еще неисследованных природных и искусственных материалов). Это связано с тем, что, во-первых, акустическая нелинейность микронеоднородных твердых тел значительно превышает нелинейность однородных материалов, во-вторых, «акустическое

поведение» таких сред (количество которых практически безгранично), как правило, индивидуально и не соответствует каноническим уравнениям «классической» нелинейной (5или 9-константной) теории упругости, и в-третьих, представление об акустической нелинейности конкретного микронеоднородного твердого тела можно получить только на основе результатов подробных экспериментальных исследований в нем нелинейных акустических эффектов. Анализ результатов таких исследований позволяет, в принципе, построить реологическую модель исследуемой среды и реконструировать ее уравнение состояния, а также определить эффективные параметры нелинейности этого уравнения, зависимость их от частот взаимодействующих волн и т. д., что, несомненно, необходимо для развития нелинейных методов диагностики.

В этой главе представлены описание и результаты экспериментальных исследований НЧ, ВЧ и комбинированных нелинейных акустических эффектов в стержневых резонаторах из поликристаллических горных пород (известняка, гранита, магнезита), искусственного материала (цементный камень с различным водоцементным отношением начального раствора), а также в зернистых средах. На основе анализа экспериментально установленных амплитудно-частотных зависимостей нелинейных эффектов будут определены уравнения состояния этих материалов и значения их параметров.

Перед проведением экспериментов с образцами отмеченных выше горных пород предварительно проводились аналогичные контрольные эксперименты со стеклянным стержнем, в котором никаких нелинейных эффектов (даже при несколько бо́льших амплитудах НЧ-волны) не наблюдалось, и, следовательно, обнаруженные и описываемые далее нелинейные эффекты и установленные их амплитудно-частотные зависимости обусловлены исключительно физической (т. е. материальной), а не геометрической нелинейностью исследуемых материалов. В случае зернистых сред в качестве контрольной среды использовалась вода.

4.1. Экспериментальные исследования в консолидированных средах

4.1.1. Схема экспериментальной установки

Блок-схема экспериментальной установки по изучению нелинейных волновых процессов в твердотельных акустических резонаторах из горных пород и цементного материала изображена на рис. 4.1. Стержневой резонатор *1* возбуждался низкочастотным пьезокерамическим излучателем 2, одна сторона которого была приклеена к массивной нагрузке *3*, а другая — к торцу стержня. К другому свободному его торцу приклеивались

120

высокочастотный пьезокерамический излучатель 4 для излучения ультразвуковых импульсов и акселерометр 5 для измерения НЧ-волны накачки. Вблизи излучателя накачки для приема ультразвуковых импульсов, прошедших через стержень, и измерения их амплитуды, приклеивался акселерометр 6, реагирующий на продольную (вдоль стержня) компоненту ускорения. Стержень являлся акустическим резонатором с жесткой (x = 0) и мягкой (x = L) границами, собственные частоты которого определяются выражением $F_p \cong (2p-1)C_0/4L$, C_0 – фазовая скорость НЧ продольной волны в стержне, *р* – номер моды. Погрешности измерения частот и амплитуд НЧ и ВЧ акустических волн составляли соответственно ± 0.5 Гц, ± 0.05 дБ и ± 0.16 дБ. Эксперименты проводились при комнатной температуре. Резонансные частоты F_p и добротности Q_p резонатора, при малой амплитуде его возбуждения, когда нелинейные эффекты не наблюдались, определялись традиционным методом, т.е. по максимуму амплитуды колебаний резонатора и ширине $\Delta F_{0.71}$ его резонансной кривой на уровне $1/\sqrt{2} \cong 0.71$: $Q_p \cong F_p / \Delta F_{0.71}$. В контрольных экспериментах со стеклянным стержнем никаких нелинейных эффектов (даже при несколько больших амплитудах НЧ и ВЧ волн) не наблюдалось, следовательно, обнаруженные ниже НЭ и установленные их амплитудные зависимости обусловлены акустической нелинейностью исследуемого образца горной породы.



Рис. 4.1. Схема экспериментальной установки: 1 – стержень, 2 – излучатель накачки, 3 – нагрузка, 4 – излучатель ВЧ импульсов, 5 и 6 - пьезоакселерометры.

В таблице 4.1 приведены характеристики различных материалов

Материал	p=1		<i>p</i> = 2		<i>p</i> = 3		C_0 ,	<i>L</i> , м	ρ,
	F_p ,	Q_p	F_p ,	Q_p	F_p ,	Q_p	м/с		кг/м ³
	кГц		кГц		кГц				
Известняк	3.75	224	11.18	223	18	228	3950	0.26	2500
Мрамор	3	196	8.45	159	13.85	141	4150	0.35	2800
Гранит	3.82	255	10.22	238	17.2	273	5300	0.35	2750
Магнезит	3.6	171	10.5	178	17.2	169	5600	0.39	3000
Цементный камень (в/ц 0.5)	2.53	97	7.3	110	12	96	3600	0.35	1930
Цементный камень (в/ц 0.6)	2.36	152	6.6	160	10.8	135	3400	0.36	1900
Цементный камень (в/ц 0.9)	1.61	124	4.62	145	7.88	143	2400	0.37	1700

Таблица 4.1. Линейные характеристики материалов, описанных в диссертации.

4.1.2. Проявления гистерезисной нелинейности

В этом разделе рассмотрим проявления гистерезисной нелинейности на примере образцов из цементного камня с различным водоцементным отношением первоначального раствора (1 – 0.5, 2 – 0.6, 3 – 0.9). Эта задача имеет важное практическое применение, поскольку упомянутое водоцементное отношение определяет конечную прочность материала [Philippidis, Aggelis, 2003; Warnemuende K, Wu H-C, 2004; Payan et al, 2010]. Исследуемые цементные материалы (1, 2 и 3) изготавливались из водных растворов, полученных на основе минерального вяжущего вещества – цемента марки 400 и речного песка (средний размер зерен около 0.1 мм) в соотношении 1:2 (по массе). Для изготовления исследуемых образцов растворы заливались в специальные металлические формы, где выдерживались при комнатной температуре в течение 24 часов. После отвердения и изъятия из форм, образцы помещались в воду, в которой для набора прочности выдерживались в течение 28 суток. После этого образцы высушивались до приобретения ими постоянной плотности, равной $\rho_1 = 1.93$ г/см³, $\rho_2 = 1.9$ г/см³ и $\rho_3 = 1.7$ г/см³, соответственно.

Для определения прочностных свойств исследуемых материалов были проведены их статические испытания на сжатие. Для этого образцы в виде кубиков с длиной ребра 2 см помещались между опорными плитами пресса, позволяющего производить их нагружение со скоростью (0.6±0.4) МПа/с до разрушения. Измеренные значения разрушающих напряжений

образцов 1, 2 и 3 составляли, соответственно, $\sigma_1 \cong 25$ МПа, $\sigma_2 \cong 20$ МПа и $\sigma_3 \cong 10.5$ МПа. (Расхождение между экспериментально измеренными прочностными свойствами и определенными по расчетной диаграмме [Reichel W, Conrad D, 1976], составляет не более 5%.)

В первой серии экспериментов исследовались НЧ эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) цементных материалов: нелинейные потери и сдвиги резонансных частот, а также генерация второй и третьей гармоник. Для этого, при помощи пьезокерамического излучателя 2, в каждом резонаторе возбуждались НЧ акустические колебания на частоте F, близкой к частоте F_1 первой продольной моды резонатора, и измерялись амплитудные зависимости нелинейных сдвигов резонансных частот $\Delta F_{nl} = F - F_1 < 0$ и коэффициентов затухания μ_{nl} . На рис. 4.2 приведены зависимости амплитуды деформации ε_m стержней 1, 2 и 3 (в резонансе) от амплитуды электрического напряжения U на излучателе накачки.



Рис. 4.2. Зависимости амплитуд волны в резонаторах 1, 2, 3 от амплитуды напряжения на излучателе накачки (в дБ относительно 1 мкВ). Прямые линии соответствуют зависимости $\varepsilon_m \sim U$.

Из рис. 4.2 следует, что для первого стержня зависимость $\varepsilon_m = \varepsilon_m(U)$ практически линейна и, следовательно, нелинейных потерь в нем практически нет. Для второго и третьего стержней эти зависимости заметно нелинейны, что свидетельствует о наличии в них нелинейных потерь. Во втором и третьем стержнях нелинейные потери проявляются при $\varepsilon_m > 8 \cdot 10^{-7}$, а при $\varepsilon_m > 3 \cdot 10^{-6}$ наблюдается тенденция к их насыщению, при котором нелинейные потери вновь, как и при малых амплитудах $\varepsilon_m < 8 \cdot 10^{-7}$, становятся амплитуднонезависимыми, но большими, чем при $\varepsilon_m < 8 \cdot 10^{-7}$. На рис. 4.3 представлены графики зависимостей модулей относительных нелинейных сдвигов резонансных частот $|\Delta F_{nl}/F_1|$ и коэффициентов нелинейного затухания μ_{nl}/μ_1 от ε_m , где $\mu_1 = (\Omega_1 Q_1)^{-1}$, $\Omega_1 = 2\pi F_1$. Относительный коэффициент нелинейного затухания определялся по формуле: $\frac{\mu_{nl}}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_{m1}}{\varepsilon_m} \cdot \frac{V}{V_1} - 1$, описывающей отклонение наблюдаемых зависимостей $\varepsilon_m = \varepsilon_m(V)$ на рис. 4.2 от линейных, проведенных через начальные экспериментальные точки (U₁, ε_{m1}), соответствующие малых амплитудам возбуждения резонаторов, когда эффекты A3BT пренебрежимо малы и $\varepsilon_m \sim U$ [7,8].



Рис. 4.3. Зависимости нелинейных сдвига резонансной частоты (а) и коэффициента затухания (б) от амплитуды волны (в резонансе) в резонаторах 1, 2, 3. Прямые линии соответствует зависимостям: I - $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m$, II - $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m^{1/2}$, $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m^{1/2}$, III - $\Delta F_{nl}/F_p \sim \varepsilon_m^2$, IV - $\mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m^{1/7}$.

Из рис. 4.3 следует, что для первого стержня имеет место зависимость: $|\Delta F_{nl}/F_1| \sim \varepsilon_m^2$, а нелинейные потери отсутствуют; это свидетельствует о кубичной упругой нелинейности материала. Для второго стержня имеется 2 интервала в поведении нелинейных сдвига резонансной частоты и коэффициента затухания: 1 - $|\Delta F_{nl}/F_1| \sim \varepsilon_m$, $\mu_{nl}/\mu_1 \sim \varepsilon_m$ (при

 $\varepsilon_m \le \varepsilon_{m2}^* \cong 4 \cdot 10^{-6}$) и 2 - $|\Delta F_{nl}/F_1| \sim \varepsilon_m^{1/2}$, $\mu_{nl}/\mu_1 \sim \varepsilon_m^{1/2}$ (при $\varepsilon_m > \varepsilon_{m2}^*$ - на стадии перехода к насыщению). Для третьего стержня имеют место аналогичные зависимости: $|\Delta F_{nl}/F_1| \sim \varepsilon_m$, $\mu_{nl}/\mu_1 \sim \varepsilon_m$ (при $\varepsilon_m \le \varepsilon_{m3}^* \cong (1-2) \cdot 10^{-6}$) и $|\Delta F_{nl}/F_1| \sim \varepsilon_m^{1/2}$, $\mu_{nl}/\mu_1 \sim \varepsilon_m^{1/7}$ (при $\varepsilon_m > \varepsilon_{m3}^*$ - на стадии перехода к насыщению). Наличие линейных зависимостей $|\Delta F_{nl}/F_1|$ и μ_{nl}/μ_1 от ε_m (при $\varepsilon_m \le \varepsilon_{m2,3}^*$) свидетельствует о проявлении в материалах второго и третьего стержней гистерезисной степенной нелинейности с показателем степени n = 2, а зависимости $|\Delta F_{nl}/F_1| \sim \varepsilon_m^{1/2}$, $\mu_{nl}/\mu_1 \sim \varepsilon_m^{1/2}$ для второго стержня соответствуют проявлениям гистерезисной нелинейности с n = 3/2.

При возбуждении в резонаторах интенсивных НЧ колебаний наблюдались также эффекты генерации высших - второй и третьей, гармоник частоты накачки. На рис. 4.4 приведены зависимости амплитуд смещений $U_2(L)$ свободных торцов стержней 1, 2 и 3 на частотах вторых гармоник, а также амплитуд деформаций стержней ε_3 на частотах третьих гармоник от амплитуды деформации ε_m волны накачки на первых модах (в резонансе). Из этих рисунков видно, что для первого стержня имеют место зависимости: $U_2(L) \sim \varepsilon_m^2$, $\varepsilon_3 \sim \varepsilon_m^3$ что свидетельствует о квадратичной и кубичной упругой нелинейности материала. Для второго и третьего стержней зависимости $U_2(L)$ и ε_3 от ε_m близки к квадратичным: $U_2(L), \varepsilon_3 \sim \varepsilon_m^2$. Заметим, что здесь показатель степени 2 на единицу больше значения показателя степени в зависимостях $|\Delta F_{nl}/F_1|$ и μ_{nl}/μ_1 от ε_m при $\varepsilon_m \leq \varepsilon_{m2,3}^*$.



Рис. 4.4. Зависимости амплитуды смещения (а) на частоте второй гармоники и амплитуды деформации на частоте третьей гармоники (б) от амплитуды волны (в резонансе) для резонаторов 1, 2, 3. Прямые линии соответствуют зависимостям: I - $U_2 \sim \varepsilon_m^2$, $\varepsilon_3 \sim \varepsilon_m^2$; II - $\varepsilon_3 \sim \varepsilon_m^3$.

Именно такие закономерности для нелинейных потерь, дефекта модуля упругости и амплитуд высших гармоник и должны наблюдаться для волн в средах с гистерезисной квадратичной нелинейностью [4-14].

Из рис. 4.3, 4.4 видно, что значения $|\Delta F_{nl}/F_1|$, μ_{nl}/μ_1 (при $\varepsilon_m \le \varepsilon_m^*$), $U_2(L)$ и ε_3 (при $\varepsilon_m = \text{const}$) для третьего стержня заметно больше, чем для второго и первого; это свидетельствует об увеличении акустической нелинейности цементного материала при увеличении водоцементного отношения раствора, из которого он был изготовлен.

Ниже, методом возмущений будет проведено аналитическое описание и количественный анализ наблюдаемых нелинейных НЧ акустических эффектов в рамках упругой нелинейности – для первого стержня и гистерезисных нелинейностей для второго и третьего стержней. Для второго и третьего стержней, мы рассмотрим нелинейные эффекты только в первых диапазонах ($\varepsilon_m \leq \varepsilon_{m1,2}^*$), где наблюдаются линейные зависимости для $|\Delta F_{nl}/F_p|$ и μ_{nl}/μ_p от ε_m и близкие к квадратичным - для $U_2(L)$ и ε_3 . Это связано с тем, что на проявление нелинейных эффектов во втором диапазоне ($\varepsilon_m > \varepsilon_{m1,2}^*$) влияет и нелинейность первого диапазона ($\varepsilon_m \leq \varepsilon_{m1,2}^*$), что сильно

усложняет теоретическое описание нелинейных эффектов при $\varepsilon_m > \varepsilon_{m1,2}^*$, поэтому аналитических зависимостей для них получить не удается.

4.1.3. Анализ эффектов АЗВТ и генерации высших гармоник.

При аналитическом описании нелинейных акустических эффектов, один из ключевых моментов связан с адекватным выбором уравнения состояния твердого тела. Это уравнение, вместе с уравнением движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ и граничными условиями на торцах резонатора: $U(x = 0, t) = A_0 \cos \Omega t$, $U_x(x = L, t) = 0$, где U = U(x, t) - смещение, $\varepsilon = U_x$, ρ - плотность материала, A_0 и Ω - амплитуда и частота колебаний излучателя накачки, описывают нелинейные эффекты в исследуемых резонаторах; их расчет проводился методом возмущений, поскольку в эксперименте выполнялись условия: $\varepsilon_2 = \partial U_2 / \partial x << \varepsilon_m$, $\varepsilon_3 << \varepsilon_m$.

Для первого стержня описание нелинейных эффектов можно провести в рамках уравнения состояния с квадратичной и кубичной упругой нелинейностью:

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - \frac{V_1}{2!}\varepsilon^2 - \frac{V_2}{3!}\varepsilon^3] + \alpha\rho\dot{\varepsilon}, \qquad (4.1)$$

где $v_{1,2}$, - параметры квадратичной и кубичной нелинейности; α - коэффициент линейной диссипации, $\alpha = C_0^2 / \Omega_p Q_p$. В этом уравнении квадратичная нелинейность ответственна за генерацию второй гармоники, а кубичная – за сдвиг резонансной частоты и генерацию третьей гармоники, причем приведенные ниже теоретические амплитудные зависимости (4.2) - (4.5) для нелинейных эффектов соответствуют экспериментально установленным: $\varepsilon_m \sim A_0$, $|\Delta F_{nl}/F_1| \sim \varepsilon_m^2$, $U_2(L) \sim \varepsilon_m^2$, $\varepsilon_3 \sim \varepsilon_m^3$.

Резонансная кривая резонатора имеет вид [4,5,7,8,10,12]:

$$\varepsilon_m = \frac{A_0 \Omega_p}{L} \frac{1}{\left[(\delta + \delta_{nl})^2 + (\mu_p + \mu_{nl})^2 \Omega_p^4 / 4 \right]^{1/2}},$$
(4.2)

при этом для первого стержня нелинейные сдвиг резонансной частоты $\delta_{nl} = 2\pi\Delta F_{nl}$ и потери μ_{nl} определяются выражениями:

$$\Delta F_{nl}/F_p = -a_1 \varepsilon_m^2, \ \mu_{nl}/\mu_p = 0, \tag{4.3}$$

где $a_1 = (3/64)\nu_2, \ \delta = \Omega - \Omega_p, \ |\delta| << \Omega_p / p.$

Для первого же стержня амплитуды смещения $U_2(L)$ на частоте второй гармоники и деформации ε_3 на частоте третьей гармоники определяются выражениями:

$$U_2(L) = \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \varepsilon_m^2 L, \qquad (4.4)$$

$$\varepsilon_{3} = \frac{\sqrt{a_{3}^{2} + b_{3}^{2}\Omega_{p}\varepsilon_{m}^{3}}}{12\left[\left(\Omega_{p}/Q_{3p-1}\right)^{2} + 4\left(\delta_{nl} - \Delta\Omega_{3p}/3\right)^{2}\right]^{1/2}}$$
(4.5)

где $a_2 = v_1/8$; $b_2 = 0$, $a_3 = 0$; $b_3 = v_2/8$; $\Delta\Omega_{3p} = 3\Omega_p - \Omega_{3p-1}$ - дисперсионная расстройка частоты $3\Omega_p$ от резонансной частоты моды с номером 3p-1, связанная с дисперсией волн в стержне и отличием граничных условий на торцах резонатора от идеальных.

Из сравнения экспериментальных результатов (рис. 4.3; рис. 4.4) и выражений (4.3) -(4.5) найдем численные значения коэффициентов a_1 , $[a_2^2 + b_2^2]^{1/2}$, $[a_3^2 + b_3^2]^{1/2}$, а по ним, и соответствующие параметры v_1 и v_2 : $a_1 \cong 1.9 \cdot 10^6$, $[a_2^2 + b_2^2]^{1/2} \cong 7$, $[a_3^2 + b_3^2]^{1/2} \cong 4.8 \cdot 10^6$, $v_1 \cong 56$, $v_2 \cong 4 \cdot 10^7$. Заметим, что значение коэффициента $[a_3^2 + b_3^2]^{1/2}$, ответственного за амплитуду ε_3 деформации на частоте третьей гармоники (4.5), можно также вычислить по определенному (по сдвигу резонансной частоты) параметру v_2 : $[a_3^2 + b_3^2]^{1/2} \cong 5 \cdot 10^6$. Как видно, определение коэффициента $[a_3^2 + b_3^2]^{1/2}$ двумя различными и независимыми способами дает близкие результаты. Это свидетельствует об адекватном выборе уравнения состояния (4.1) исследуемого образца и корректном аналитическом описании экспериментально наблюдаемых в нем НЧ эффектов АЗВТ.

Для двух других стержней (второго и третьего) описание нелинейных эффектов (в первых диапазонах) проведем в рамках уравнения состояния [6,32-35], содержащего упругий гистерезис (1.3) при n = 2.

В этом случае нелинейные сдвиг резонансной частоты $\delta_{nl} = 2\pi\Delta F_{nl}$ и потери μ_{nl} , определяются следующими выражениями:

$$\Delta F_{nl} / F_p = -a_1 \varepsilon_m, \ \mu_{nl} / \mu_p = b_1 Q_p \varepsilon_m, \tag{4.6}$$

где
$$a_1 = \frac{4}{9\pi^2}(\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4) + \frac{1}{6\pi}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), \ b_1 = \frac{2}{9\pi^2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) > 0.$$

Амплитуда смещения $U_2(L)$ на частоте второй гармоники определяется выражением (4.4), в котором следует положить $a_2 = \frac{1}{64}(\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4) + \frac{1}{24\pi}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4),$ $b_2 = \frac{1}{48\pi}(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4),$ а амплитуда деформации ε_3 на частоте третьей гармоники – выражением:

$$\varepsilon_{3} = \frac{4\sqrt{a_{3}^{2} + b_{3}^{2}\Omega_{p}\varepsilon_{m}^{2}}}{15\pi \left[(\Omega_{p}/Q_{3p-1})^{2} + 4(\delta_{nl} - \Delta\Omega_{3p}/3)^{2}\right]^{1/2}},$$
(4.7)
где $a_{3} = \frac{2}{15\pi}(\gamma_{1} - \gamma_{2} + \gamma_{3} - \gamma_{4}), \ b_{3} = \frac{1}{30\pi}(\gamma_{1} + \gamma_{2} + \gamma_{3} + \gamma_{4}).$

Из сравнения экспериментальных результатов (рис. 4.3, 4.4) и выражений (4.4), (4.6), (4.7) найдем численные значения коэффициентов a_1 , b_1 , а по ним, и соответствующие параметры: $\gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 + \gamma_4$, а также коэффициенты $\left[a_2^2 + b_2^2\right]^{1/2}$ и $\left[a_3^2 + b_3^2\right]^{1/2}$. Коэффициент $[a_3^2 + b_3^2]^{1/2}$, ответственный за амплитуду деформации третьей гармоники, можно вычислить и по значениям параметров $\gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 + \gamma_4$, определенных по нелинейным сдвигу резонансной частоты и потерям. Значения всех коэффициентов и соответствующих им параметров нелинейности приведены в Таблице 4.2. Как видно, определение коэффициента $\left[a_3^2 + b_3^2\right]^{1/2}$ двумя независимыми способами (по третьей гармонике и по нелинейным сдвигу резонансной частоты и потерям) для второго и третьего стержней дает близкие результаты. Это свидетельствует об адекватности применения рассматриваемых уравнений состояния для описания нелинейных акустических эффектов в исследуемых материалах. Из этой таблицы следует, что увеличение водоцементного отношения цементного материала с $c_2 = 0.6$ до $c_3 = 0.9$ приводит к заметному росту гистерезисной нелинейности, а именно к почти десятикратному росту коэффициентов a_1 , $[a_2^2 + b_2^2]^{1/2}$ и $[a_3^2 + b_3^2]^{1/2}$, ответственных за нелинейный сдвиг резонансной частоты и генерацию второй и третьей гармоник НЧ волны, при этом коэффициент b₁, определяющий нелинейные потери, возрастает всего в 2.1 раза. Следует также отметить, что уменьшение прочностных свойств второго и третьего цементных материалов (по отношению к первому) в 1.25 и в 2.5 раза, сопровождается сильным, соответственно в 6 и в 70 раз, увеличением их эффективных параметров $\left[a_2^2 + b_2^2\right]^{1/2}$ квадратичной упругой нелинейности.

C	a	h	$\chi \perp \chi$	<i>x</i> + <i>x</i>	[]/2		$\left[a_3^2+b_3^2\right]^{1/2}$
c _{1,2,3}	u_1	ν_1	/1 / /3	/2 / /4	$\left[a_{2}^{2}+b_{2}^{2}\right]^{/2}$	ПО	по сдвигу
						амплитуде	резонансной
						3-й	частоты и
						гармоники	потерям
0.5					7	$4.8 \cdot 10^{6}$	$5 \cdot 10^6$
0.6	700	400	6100	78000	43	3600	3100
0.9	6000	860	78000	-40000	500	4900	5000

Таблица 4.2. Параметры нелинейности образцов из бетона

Необходимо отметить следующий важный момент, связанный с тем, что гистерезисные эффекты A3BT во втором и третьем стержнях можно, вообще говоря, описывать не только упругим гистерезисом (7), но и гистерезисом неупругим [32-35], поскольку неупругий гистерезис дает такие же, как и упругий гистерезис, амплитудные зависимости эффектов A3BT и амплитуд второй и третьей гармоник. Для неупругого гистерезиса нелинейную функцию $f = f(\varepsilon, \text{sgn } \dot{\varepsilon})$] можно задать в следующем виде:

$$f(\varepsilon, \operatorname{sign} \dot{\varepsilon}) = \beta \in_{m} \varepsilon + \frac{1}{2} \begin{cases} \beta_{1} \varepsilon^{2} - (\beta_{1} + \beta_{2}) \in_{m}^{2} / 2, & \dot{\varepsilon} > 0; \\ -\beta_{2} \varepsilon^{2} + (\beta_{1} + \beta_{2}) \in_{m}^{2} / 2, & \dot{\varepsilon} < 0, \end{cases}$$
(4.8)

где β , $\beta_{1,2}$ - параметры гистерезисной нелинейности.

В этом случае зависимости $\Delta F_{nl}/F_p$, μ_{nl}/μ_p , $U_2(L)$ и ε_3 от ε_m определяются теми же выражениями (4.4), (4.6), (4.7), в которых следует положить: $a_1 = c_1 = 2\beta/(3\pi)$, $b_1 = d_1 = (8/9\pi^2)(\beta_1 + \beta_2)$, $a_2 = c_2 = -(\beta_1 - \beta_2)/16$, $a_3 = c_3 = -4(\beta_1 + \beta_2)/(15\pi)$; $b_{2,3} = d_{2,3} = 0$. Вычисления, однако, показывают, что для второго стержня, найденное по нелинейным потерям значение коэффициента, определяющего амплитуду третьей гармоники равно $[c_3^2 + d_3^2]^{1/2} = 6.6 \cdot 10^2$, что в 1.8 раза больше значения $[c_3^2 + d_3^2]^{1/2}$, определенного по ее амплитуде: $[c_3^2 + d_3^2]^{1/2} = 3.6 \cdot 10^2$. Еще большее различие в значениях аналогичных величин наблюдается для третьего стержня, для которого коэффициент $[c_3^2 + d_3^2]^{1/2} = 8 \cdot 10^2$, определенный по нелинейным потерям, более чем в 6 раз меньше коэффициента, определенного по амплитуде третьей гармоники: $[c_3^2 + d_3^2]^{1/2} = 5 \cdot 10^3$. Таким образом, вследствие таких количественных несоответствий, неупругий гистерезис не пригоден для описания НЧ нелинейных эффектов во втором и третьем стержнях. Однако, если не принимать во внимание третью гармонику, то никаких противоречий не возникает и эффекты АЗВТ и генерации второй гармоники можно одинаково хорошо описывать как упругим гистерезисом (1.3), так и гистерезисом неупругим (4.8).

4.1.4. Дробная гистерезисная нелинейность в образце из известняка

На рис. 4.5, 4.6 представлены графики зависимостей относительных модуля нелинейного сдвига резонансной частоты $\left|\Delta F_{nl}/F_{p}\right|$ и коэффициента нелинейного затухания μ_{nl}/μ_{p} , смещения $U_{2}(L)$ свободного торца стержня на частоте второй гармоники, а также амплитуды деформации стержня ε_{3} на частоте третьей гармоники от ε_{m} для образца из известняка.



Рис. 4.5. Зависимости относительных нелинейных сдвига резонансной частоты (а) и коэффициента затухания (б) от амплитуды волны накачки в резонансе. Прямые линии соответствует зависимостям: I - $|\Delta F_{nl}/F_p|, \Delta \mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m^2$, II - $|\Delta F_{nl}/F_p|, \Delta \mu_{nl}/\mu_p \sim \varepsilon_m^{2/3}$. При $\varepsilon_m \simeq 2 \cdot 10^{-5}$ показаны максимальные погрешности измерения $|\Delta F_{nl}/F_p|$ и μ_{nl}/μ_p , связанные с нестационарностью АЗВТ.



Рис. 4.6. Зависимости амплитуды смещения $U_2(L)$ свободного торца стержня на частоте второй гармоники (1) и амплитуды деформации стержня ε_3 на частоте третьей гармоники (2) от амплитуды волны накачки в резонансе ε_m . Прямые линии зависимостям: $U_2, \varepsilon_3 \propto \varepsilon_m^{5/3}$.

Описание нелинейных эффектов проведем в рамках уравнения состояния, содержащего упругий гистерезис (1.3) для n = 3 при $\varepsilon_m < \varepsilon^* \approx 10^{-7}$ и n = 5/3 при $\varepsilon_m > \varepsilon^*$, $|\gamma_i \in_m^n| <<1$. В выражении (1.3) используется одна и та же индексация параметров γ_{1-4} при $\varepsilon_m < \varepsilon^*$ и $\varepsilon_m > \varepsilon^*$, но, конечно, значения этих параметров в различных диапазонах различны.

В первом диапазоне ($\varepsilon_m < \varepsilon^*$), выражения для $\left| \Delta F_{nl} / F_p \right|$ и μ_{nl} / μ_p имеют вид [3,5]:

$$\Delta F_{nl} / F_p = -b_1 \varepsilon_m^2, \ \mu_{nl} / \mu_p = a_1 Q_p \varepsilon_m^2, \tag{4.9}$$

где $Q_p = C_0^2 / \alpha \Omega_p$, а коэффициенты a_1 , b_1 являются линейными комбинациями параметров γ_i :

$$a_{1} = \frac{1}{16\pi}(\gamma_{1} + \gamma_{2} - \gamma_{3} - \gamma_{4}) > 0, \ b_{1} = \frac{1}{32}\left[(\gamma_{1} + \gamma_{2} - \gamma_{3} - \gamma_{4}) + \frac{3}{4}(\gamma_{1} - \gamma_{2} - \gamma_{3} + \gamma_{4})\right].$$

Из сравнения экспериментальных результатов (рис. 4.5) и выражений (4.9) при p = 1можно оценить значения коэффициентов a_1 , b_1 , а по ним, и параметров $\gamma_1 - \gamma_3$, $\gamma_2 - \gamma_4$: $a_1 = 7.2 \cdot 10^9$, $b_1 = 2.2 \cdot 10^{10}$, $\gamma_1 - \gamma_3 = 4.2 \cdot 10^{11}$, $\gamma_2 - \gamma_4 = -6 \cdot 10^{10}$.

Во втором диапазоне ($\varepsilon_m > \varepsilon^*$), выражения для выражения для $|\Delta F_{nl} / F_p|$, μ_{nl} / μ_p , амплитуд смещения $U_2(L)$ и деформации ε_3 на частотах второй и третьей гармоник имеют вид:

$$\Delta F_{nl} / F_p = -b_1 \varepsilon_m^{2/3}, \ \mu_{nl} / \mu_p = a_1 Q_p \varepsilon_m^{2/3}, \tag{4.10}$$

$$U_{2}(L) = \frac{4\sqrt{3\pi}\sqrt{a_{2}^{2} + b_{2}^{2}L}}{55\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)}\varepsilon_{m}^{5/3},$$
(4.11)

$$\varepsilon_{3} = \frac{9\sqrt{3/\pi}}{56\pi} \frac{\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)\Omega_{p}\sqrt{a_{3}^{2}+b_{3}^{3}}}{\left[(\Omega_{p}/Q_{3p-1})^{2}+4(\delta_{nl}-\Delta\Omega_{p}/3)^{2}\right]^{1/2}}\varepsilon_{m}^{5/3}.$$
(4.12)

$$a_{1} = \frac{9\sqrt{3}\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)}{64\pi^{5/2}}(\gamma_{1} + \gamma_{2} - \gamma_{3} - \gamma_{4}), \ b_{1} = \frac{405\Gamma^{2}(2/3)\Gamma^{2}(5/6)}{64\pi^{5/2}}(\gamma_{1} - \gamma_{2} - \gamma_{3} + \gamma_{4}) + \pi a_{1},$$

$$a_{2} = \frac{2\sqrt{3\pi}}{11\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)}(\gamma_{1} - \gamma_{2} + \gamma_{3} - \gamma_{4}) + \frac{1}{3\pi}(\gamma_{1} + \gamma_{2} + \gamma_{3} + \gamma_{4}), \ b_{2} = -\frac{4}{33\pi}(\gamma_{1} + \gamma_{2} + \gamma_{3} + \gamma_{4})$$
$$a_{3} = \frac{1}{56\pi}(\gamma_{1} + \gamma_{2} - \gamma_{3} - \gamma_{4}), \ b_{3} = \frac{15\sqrt{3}\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)}{224\pi^{3/2}}(\gamma_{1} - \gamma_{2} - \gamma_{3} + \gamma_{4}).$$

Здесь, при получении выражений (4.10) – (4.12), нелинейностью первого диапазона пренебрегалось, поскольку амплитуда и длительность фазы (т.е. времени нахождения точки (ε,σ) на диаграмме $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sgn } \dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon})$) для первого диапазона значительно меньше соответствующих величин для второго диапазона (отношение максимальных амплитуд для второго и первого диапазонов составляет ~ 10^2 , аналогичной величине равно и отношение длительностей фаз второго и первого диапазонов). Таким образом, вкладом нелинейных эффектов за счет гистерезиса в первом диапазоне можно пренебречь, по сравнению с вкладом нелинейных эффектов за счет гистерезиса во втором диапазоне.

Из сравнения экспериментальных результатов (рис. 4.6) и выражений (4.10) при p = 1находим значения коэффициентов a_1 , b_1 , и параметров $\gamma_1 - \gamma_3$, $\gamma_2 - \gamma_4$: $a_1 = 8$, $b_1 = 40$, $\gamma_1 - \gamma_3 = 330$, $\gamma_2 - \gamma_4 = 55$. Из сравнения выражений (4.11), (4.12) для амплитуд второй и третьей гармоник (при p = 1, $\Delta\Omega_1 = 440$ c⁻¹) с измерениями, показанными на рис. 4.6, находим: $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 14$, $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 9.3$. Заметим, что значение последнего коэффициента можно также однозначно вычислить и из уже определенных (по нелинейным потерям и сдвигу частоты) параметров $\gamma_1 - \gamma_3$ и $\gamma_2 - \gamma_4$: $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 9$. Как видно, определение коэффициента $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ двумя различными и независимыми способами, дает близкие результаты, что свидетельствует об адекватном выборе гистерезисного уравнения состояния (1.3) исследуемого образца и корректном аналитическом описании экспериментально наблюдаемых в нем НЧ эффектов АЗВТ. В заключение этого раздела отметим следующий важный момент, связанный с тем, что НЧ эффекты A3BT можно, вообще говоря, описывать не только упругим гистерезисом (1.3), но и гистерезисом неупругим [18]. Для неупругого гистерезиса, состоящего из двух ветвей, нелинейную функцию $f = f(\varepsilon, \text{sgn } \dot{\varepsilon})$ (во втором диапазоне) зададим в следующем виде:

$$f(\varepsilon, \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}) = \beta \in_m^{2/3} \varepsilon + \gamma(\varepsilon + \in_m \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon})^{5/3} - 2^{2/3} \gamma \in_m^{5/3} \operatorname{sgn} \dot{\varepsilon}.$$
(4.13)

В этом уравнении всего два параметра нелинейности β и γ , причем негистерезисное слагаемое $\beta \in_m^{2/3} \varepsilon$ введено специально для увеличения числа "степеней свободы" до двух, поскольку независимых измерений - четыре, а свободный параметр (если не вводить слагаемое $\beta \in_m^{2/3} \varepsilon$) всего один - γ . В этом случае величины $\left|\Delta F_{nl}/F_p\right|$, μ_{nl}/μ_p , $U_2(L)$ и ε_3 определяются выражениями, аналогичными (4.10)–(4.12):

$$\Delta F_{nl} / F_p = -b_1 \varepsilon_m^{2/3}, \ \mu_{nl} / \mu_p = a_1 Q_p \varepsilon_m^{2/3}, \ (4.14)$$

$$U_{2}(L) = \frac{4\sqrt{3\pi}\sqrt{a_{2}^{2} + b_{2}^{2}}L}{33\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)}\varepsilon_{m}^{5/3},$$
(4.15)

$$\varepsilon_{3} = \frac{325\sqrt{3/\pi}}{504\pi} \frac{\Gamma(2/3)\Gamma(5/6)\Omega_{p}\sqrt{a_{3}^{2}+b_{3}^{2}}}{\left[(\Omega_{p}/Q_{3p-1})^{2}+4(\delta_{nl}-\Delta\Omega_{p}/3)^{2}\right]^{1/2}}\varepsilon_{m}^{5/3},$$
(4.16)

где
$$a_1 = \frac{2^{2/3} \gamma}{\pi}$$
, $b_1 = \beta + \frac{\gamma}{\pi} \left(1 + \frac{2^{2/3} 7 \Gamma(7/6)}{8 \Gamma(5/3)} (1 + 2^{1/2} + \pi^{1/2}) \right)$, $a_2 = \frac{7(5,75 + \sqrt{2}) \Gamma(7/6) \gamma}{10 \sqrt{2\pi} \Gamma(5/3)}$, $b_2 = 0$,
 $a_3 = -\frac{493 \cdot 2^{2/3} \gamma}{231\pi}$, $b_3 = \frac{\gamma}{22\pi} \left(\frac{2^{2/3} \sqrt{\pi} \Gamma(7/6)}{5 \Gamma(5/3)} (146 \sqrt{2} - 1939, 5) - \frac{495}{14} \right)$.

Как видно из выражений (4.14)-(4.16), неупругий гистерезис (4.13) дает такие же, как и упругий гистерезис (1.3) при n = 5/3, амплитудные зависимости НЧ эффектов АЗВТ, однако определенные из сравнения аналитических и экспериментальных результатов значения параметра γ противоречат друг другу. Так, если определить параметры β и γ по традиционно измеряемым эффектам АЗВТ - нелинейным сдвигу резонансной частоты и потерям, то получим (при p = 1), что $\beta = 4.1$ и $\gamma = 25.5$ (здесь противоречий пока нет!). Однако такое значение γ соответствуют следующим эффективным параметрам $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ и $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$ гистерезисной нелинейности, определяющим амплитуды второй и третьей гармоник НЧ волны накачки: $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 52.4$ и $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 380.6$. Но эти же параметры можно определить и по амплитудным зависимостям высших гармоник (рис. 4.6). Из выражений (4.15), (4.16) и рис. 4.6 получаем:

 $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} = 3.4$ и $\sqrt{a_3^2 + b_3^2} = 6350$. Как видно, значения параметров $\sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ и $\sqrt{a_3^2 + b_3^2}$, определенных по второй и третьей гармоникам оказываются, соответственно, в 15 раз меньше и в 17 раз больше значений этих же параметров, вычисленных по сдвигу резонансной частоты и нелинейным потерям. Таким образом, вследствие такого явного противоречия, неупругий гистерезис для описания НЧ эффектов АЗВТ в исследованном образце известняка не пригоден.

4.1.5. Эффекты АЗВТ и генерация высших гармоник в резонаторе из магнезита

Анализ амплитудных зависимостей $\Delta F_{nl}/F_p$ и μ_{nl}/μ_p показал, что они могут быть описаны в рамках гистерезисного уравнения состояния (1.3), в котором n = 3 - для первого диапазона ($\varepsilon_m < \varepsilon^* \approx 5 \cdot 10^{-7}$) и n = 2 - для второго.

Из сравнения экспериментальных результатов и выражений (4.9) находим коэффициенты a_1 , b_1 , а по ним, и параметры $\gamma_1 - \gamma_3$, $\gamma_2 - \gamma_4$; их значения приведены в Таблице 4.3, из которой следует, что с ростом частоты F_p значения параметров гистерезисной нелинейности магнезита заметно уменьшается, что связано с проявлением релаксационных свойств его нелинейных дефектов [Назаров, Радостин, 2004], по-видимому, дислокаций.

Таблица 4.3. Параметры нелинейности магнезита в первом диапазоне

F_p , кГц	3.6	10.5	17.2
$\frac{a_1}{b_1}$	$\frac{3.1 \cdot 10^{10}}{1.7 \cdot 10^{10}}$	$\frac{1.4 \cdot 10^{10}}{10^{10}}$	$\frac{0.8 \cdot 10^{10}}{0.3 \cdot 10^{10}}$
$\frac{\gamma_1 - \gamma_3}{\gamma_2 - \gamma_4}$	$\frac{5.2 \cdot 10^{11}}{3.3 \cdot 10^{11}}$	$\frac{2.1 \cdot 10^{11}}{2.9 \cdot 10^{11}}$	$\frac{1.6 \cdot 10^{11}}{2.3 \cdot 10^{10}}$

Во втором диапазоне из сравнения экспериментальных результатов и выражений (4.6) находим коэффициенты a_1 , b_1 , и, соответствующие коэффициентам a_1 и b_1 , параметры $\gamma_1 + \gamma_3$ и $\gamma_2 + \gamma_4$; их значения приведены в Таблице 3. Здесь также наблюдается заметное уменьшение параметров гистерезисной нелинейности с ростом частоты F_p .

F_p , kHz	3,6	10,5	17,2
$\frac{a_1}{b_1}$	$\frac{1.3 \cdot 10^4}{1.2 \cdot 10^4}$	$\frac{0.9 \cdot 10^4}{0.8 \cdot 10^4}$	$\frac{0.7\cdot 10^4}{0.6\cdot 10^4}$
$\frac{\gamma_1 + \gamma_3}{\gamma_2 + \gamma_4}$	$\frac{10^5}{2.9 \cdot 10^5}$	$\frac{0.7 \cdot 10^5}{2.9 \cdot 10^5}$	$\frac{0.6 \cdot 10^5}{2.1 \cdot 10^5}$

Таблица 4.4. Параметры нелинейности магнезита во втором диапазоне

При интенсивном резонансном возбуждении резонатора, благодаря чрезвычайно сильной нелинейности магнезита, оказалось возможным наблюдение и осциллограмм нелинейных (ангармонических) колебаний ускорения a(L,t) и скорости V(L,t) свободной границы резонатора. Обычно в экспериментах, даже с сильно-нелинейными средами, уровень высших гармоник в нелинейной волне относительно мал, а ее форма мало отличается от исходной - синусоидальной. В наших экспериментах с резонатором из магнезита нелинейные искажения волны также были не очень большими, но вполне заметными. На рис. 4.7 приведены осциллограммы резонансных колебаний ускорения a(L,t) и скорости V(L,t) свободного торца стержня, полученных при максимальной амплитуде $\varepsilon_m \cong 6 \cdot 10^{-6}$ его возбуждения на частоте первой моды. Здесь же, для сравнения, показаны синусоидальные профили электрического напряжения на пьезокерамическом излучателе 2, возбуждающем резонатор. Осциллограмма ускорения a(L,t) соответствует сигнала с акселерометра, а осциллограмма скорости V(L,t) получена из предыдущего сигнала при его прохождении через интегрирующую RC - цепочку (R = 10 кОм, C = 20нФ, $F^* = 1/2\pi RC \cong 800$ Гц).

Из этих осциллограмм видно, что колебания резонатора заметно ангармоничны, причем осциллограмма колебаний скорости V(L,t) близка к пилообразной и каждый ее период состоит из четырех линий: 1-ая – V(L,t) > 0; $\dot{V}(L,t) > 0$, 2-ая – V(L,t) > 0; $\dot{V}(L,t) < 0$, 3-я – V(L,t) < 0; $\dot{V}(L,t) < 0$ и 4-ая – V(L,t) < 0; $\dot{V}(L,t) > 0$. Все переходы между этими линиями сглажены за счет линейной диссипации резонатора. Здесь важно также обратить внимание на то, что вблизи точек, где V(L,t) = 0, в профиле скорости V(L,t) наблюдается тенденция к проявлению "излома". В работе [Назаров и др., 20036] было показано, что аналогичные пилообразные профили для бегущих волн должны наблюдаться в кольцевом резонаторе с квадратичными упругим и неупругим гистерезисами, при этом количество линий, составляющих профиль волны, должно соответствует числу ветвей, составляющих гистерезис (1.3). Аналогичная осциллограмма для скорости V(L,t) в резонаторе с неупругим гистерезисом (4.8), состоящим из двух ветвей, соответственно состояла бы из двух линий: $\dot{V}(L,t) > 0$ и $\dot{V}(L,t) < 0$, причем без излома в точках, где V(L,t) = 0.



Рис. 4.7. Осциллограммы резонансных колебаний ускорения (а) и скорости (б) свободного торца стержня, полученных при максимальной амплитуде $\varepsilon_m \cong 6 \cdot 10^{-6}$ его возбуждения на частоте первой моды.

Таким образом, качественно-визуальный анализ осциллограммы колебаний скорости V(L,t) свободного торца резонатора свидетельствует, что нелинейные акустические свойства магнезита соответствуют гистерезису упругого, а не неупругого, типа.

4.2. Нелинейные эффекты в области высоких частот

4.2.1. Распространение слабых ультразвуковых импульсов в поле мощной волны в резонаторе из гранита

В этом разделе, приводятся результаты экспериментальных и теоретических исследований нелинейных акустических эффектов, возникающих при распространении слабых высокочастотных (ВЧ) импульсов в поле мощной низкочастотной (НЧ) стоячей волны накачки в стержневом резонаторе из карельского гранита Питкяранта. Аналитическое описание обнаруженных амплитудно-частотных зависимостей эффектов затухания и фазовой задержки несущей этих импульсов под действием НЧ волны проводится в рамках уравнения состояния, содержащего гистерезисную и диссипативную нелинейности.

Эксперименты проводились с тем же, что и в работе [CB6], стержневым резонатором (с жесткой и мягкой границами), изготовленным из карельского гранита: длина стержня L=35 см, его сечение – квадрат со стороной 1.6 см. Измерения проводились при комнатной температуре по схеме, подробно описанной в п. 4.1.1. Резонансные частоты F_p для первых трех продольных мод резонатора при малой амплитуде его возбуждения, когда нелинейные НЧ эффекты не наблюдались приведены в Таблице 4.1. Погрешность измерения фазовой задержки импульса составляла ±5 нс.

В этих экспериментах, кроме возбуждения резонансной НЧ волны накачки, в стержне (со стороны мягкой границы) создавались относительно слабые ультразвуковые импульсы, при этом наблюдались и исследовались эффекты нелинейного затухания и фазовой задержки несущей импульсов, прошедших через стержень, в зависимости от амплитуды деформации ε_m мощной НЧ волны. Длительность импульсов составляла около $\tau = 60$ мкс, их несущая частота f находилась в диапазоне от 150 кГц до 1 МГц, а частота повторения была равна 26 Гц. После прохождения через стержень ВЧ импульсы принимались акселерометром, находящимся вблизи жесткой границы стержня, и поступали на цифровой осциллограф-спектроанализатор, где производились измерения их амплитуды $U(\varepsilon_m)$ и фазовой задержки несущей $\Delta \tau(\varepsilon_m)$. Скорость C распространения ВЧ импульсов в стержне, определенная по задержке (при $\varepsilon_m = 0$), составляла около $5 \cdot 10^5$ см/с, так что их длина $l = C\tau = 30$ см была меньше длины стержня L и

импульсы в нем распространялись как в свободном пространстве. При увеличении амплитуды деформации ε_m НЧ волны накачки (при $\varepsilon_m > 10^{-6} > \varepsilon^*$, т.е. во втором диапазоне [CB6]), амплитуда принимаемых ВЧ импульсов $U(\varepsilon_m)$ заметно уменьшалась, а их фазовая задержка $\Delta \tau(\varepsilon_m)$ - увеличивалась. На рис. 4.8 приведены зависимости коэффициента нелинейного затухания $\chi(\varepsilon_m) = \ln[U_0/U(\varepsilon_m)]$ (U_0 - амплитуда импульса без накачки) и фазовой задержки $\Delta \tau(\varepsilon_m)$ импульсов с частотами f = 277 кГц и f = 490 кГц от амплитуды деформации ε_m НЧ волны (в резонансе) при возбуждении резонатора на трех первых его модах.

Из этих рисунков видно, что для первых трех мод резонатора коэффициент $\chi(\varepsilon_m)$ и задержка $\Delta \tau(\varepsilon_m)$ пропорциональны амплитуде деформации ε_m НЧ волны накачки и не зависят от ее частоты F_p , т.е. $\chi(\varepsilon_m) \sim \varepsilon_m$, $\Delta \tau(\varepsilon_m) \sim \varepsilon_m$. Далее, на рис. 4.9 приведены зависимости коэффициента $\chi = \chi(\varepsilon_m)$ и задержки $\Delta \tau(\varepsilon_m)$ от частоты импульса f при возбуждении резонатора на второй моде (p = 2) при $\varepsilon_m = 10^{-5}$, из которых, несмотря на некоторый разброс экспериментальных точек (не связанный с погрешностью измерений), следует, что с ростом частоты f импульса коэффициент $\chi = \chi(\varepsilon_m)$, в основном, растет [$\chi(\varepsilon_m) \sim f$], а задержка $\Delta \tau(\varepsilon_m)$ - в начале (от 150 кГц до 300 кГц) заметно падает [$\Delta \tau(\varepsilon_m) \sim f^{-1}$], а затем (от 300 кГц до 1 мГц) - $\Delta \tau(\varepsilon_m) \approx const$. Такая зависимость $\chi(\varepsilon_m)$ и $\Delta \tau(\varepsilon_m)$ от частоты f импульса свидетельствует о частотной зависимости (т.е. о дисперсии) нелинейных акустических свойств гранита, связанной с проявлением релаксации нелинейности [Назаров, Радостин, 2004].

Заметим, что изменения амплитуды и фазы слабого ВЧ импульса в поле мощной НЧ волны возможны в резонаторе с одной только гистерезисной нелинейностью (вследствие изменения средней скорости распространения ВЧ импульса в поле мощной НЧ стоячей волны) [Назаров, 2007]. Расчеты показывают, что для резонатора с суперпозицией квадратичных упругого (1.3) и неупругого (4.8) гистерезисов [CB6], нелинейные коэффициент затухания $\chi_h(\varepsilon_m)$ и фазовая задержка $\Delta \tau_h(\varepsilon_m)$ линейно зависят от ε_m и определяются выражениями:

$$\chi_h(\varepsilon_m) = \frac{\eta \gamma_0 + (1 - \eta)\pi\beta/2}{2\pi} \varepsilon_m, \qquad (4.17)$$

$$\Delta \tau_h(\varepsilon_m) = \frac{\eta \gamma_0 + (1 - \eta)\pi \beta / 2}{2\pi^2} \frac{\varepsilon_m L}{C}, \qquad (4.18)$$

141

где γ_{1-4} и β - параметры нелинейности упругого и неупругого гистерезисов, $\gamma_0 = \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 + \frac{\pi(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)}{4}$, η и $1 - \eta$ - концентрация дефектов, отвечающих за "работу" упругого и неупругого гистерезисов.



Рис. 4.8. Зависимость коэффициента нелинейного затухания (1) и фазовой задержки (2) импульсов с частотами f = 277 кГц (а) и f = 490 кГц (б) от амплитуды деформации ε_m НЧ волны (в резонансе) при возбуждении резонатора на трех первых модах. Прямые линии соответствуют зависимостям $\chi(\varepsilon_m) \sim \varepsilon_m$, $\Delta \tau(\varepsilon_m) \sim \varepsilon_m$.



Рис. 4.9. Зависимости коэффициента нелинейного затухания (а) и фазовой задержки несущей (б) от частоты импульса f при возбуждении резонатора на второй моде (p = 2) при $\varepsilon_m = 10^{-5}$. Прямые линии соответствуют зависимостям $\chi(\varepsilon_m) \sim f_m$, $\Delta \tau(\varepsilon_m) \sim f^{-1}$, $\Delta \tau(\varepsilon_m) \approx \text{const}$.

(Напомним, что, по результатам работы [CB6], $\eta \cong 0.38$.) Здесь, однако, необходимо иметь в виду, что нелинейность микронеоднородных сред (в том числе, горных пород) обладает дисперсией, т.е. является частотно-зависимой, причем с ростом частоты Ω акустической волны

(при $\Omega > \Omega_{def}$, Ω_{def} - релаксационная частота дефектов) их гистерезисная нелинейность уменьшается [M1]. Результаты первой серии экспериментов [CB6] показали, что в НЧ диапазоне (по крайней мере, до 17 кГц) гистерезисная нелинейность исследованного образца гранита не зависит от частоты и, следовательно, $\Omega_p < \Omega_{def}$, p = 1,2,3. Но здесь, во второй серии экспериментов, частоты $\omega = 2\pi f$ ультразвуковых импульсов могли превышать Ω_3 , так что в ВЧ диапазоне ($\omega >> \Omega_3$) гистерезисная нелинейность гранита вполне могла быть (и скорее всего, была) частотно-зависимой, при этом эффективные значения ее параметров в ВЧ диапазоне должны быть меньше аналогичных НЧ параметров, определенных в статье [СВ6]. Тем не менее, приведем оценки возможных значений $\chi_h(\varepsilon_m)$ и $\Delta \tau_h(\varepsilon_m)$, связанных с гистерезисной нелинейностью гранита [СВ6], полагая ее частотно-независимой, т.е. безынерционной. Подставляя в (1), (2) значение параметров $\gamma_1 + \gamma_3 = 8.9 \cdot 10^3$, $\gamma_2 + \gamma_4 = 3.3 \cdot 10^3$, $\beta = 4.2 \cdot 10^3$, определенных по результатам первой серии НЧ экспериментов [8], находим $\gamma_0 \cong 15.2 \cdot 10^3$, $\eta \gamma_0 + (1 - \eta) \pi \beta / 2 \cong 10^4$, и при $\varepsilon_m = 10^{-5}$ получаем: $\chi_h(\varepsilon_m) = 1.6 \cdot 10^{-2}$, что почти в 14 раз меньше экспериментально измеренного значения $\chi(\varepsilon_m) \cong 2.2 \cdot 10^{-1}$ для f = 150 кГц (рис. 4.9, a). Значение же фазовой задержки оказывается равным $\Delta \tau_h(\varepsilon_m) = 350$ нс, что достаточно хорошо соответствует экспериментально измеренной величине $\Delta \tau(\varepsilon_m) \cong 500$ нс при тех же амплитуде $\varepsilon_m = 10^{-5}$ и частоте f = 150 кГц (рис.2,6). Из первого экспериментального результата зависимости $\chi = \chi(\varepsilon_m)$ (рис. 4.8, а), однозначно следует, что исследуемый образец гранита обладает диссипативной нелинейностью [Назаров, 2007]. Из второго же результата зависимости $\Delta \tau_h = \Delta \tau_h(\varepsilon_m)$ (рис. 4.8, б), следует, что нелинейная фазовая задержка несущей ВЧ импульса связана с проявлением релаксирующей гистерезисной нелинейности (или реактивной нелинейности вида $\gamma | \varepsilon | \varepsilon$ - для фазовой задержки это не принципиально) [Назаров, 2007]. Отметим, что, поскольку точное аналитическое описание наблюдаемых эффектов, с учетов релаксации всех видов нелинейности материала (гистерезисной, реактивной и диссипативной), представляет довольно сложную задачу, далее мы, для упрощения расчетов, проведем их качественный анализ в рамках феноменологического уравнения состояния, содержащего безынерционные гистерезисную [СВ6] и диссипативную нелинейности [Назаров, 2007]:

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})] + \alpha \rho [1 + \delta |\varepsilon|] \dot{\varepsilon}, \qquad (4.19)$$
где σ и ε - продольные напряжение и деформация, $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ - гистерезисная функция деформации и скорости деформации $\dot{\varepsilon}$, α - коэффициент линейной вязкости, ρ - плотность, δ - безразмерный параметр диссипативной нелинейности, $|f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})| << |\varepsilon|$, $\delta|\varepsilon| <<1$, $\alpha \delta|\dot{\varepsilon}|/C^2 <<1$, $C^2 = E/\rho$. (Необходимо, однако, помнить, что поскольку в ВЧ диапазоне гранит обладает нелинейной релаксацией, то параметры α , δ , и γ_{1-4} , β гистерезисной функции $f(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$ [8] зависят от частоты акустического импульса ω .) В этом случае, коэффициент $\chi(\varepsilon_m)$ нелинейного затухания импульса, обусловленный диссипативной нелинейностью $\alpha \rho \delta|\varepsilon|\dot{\varepsilon}$, определяется выражением [Назаров, 2007]:

$$\chi(\varepsilon_m) = \frac{2\alpha \delta \varepsilon_m \omega^2 L}{\pi^2 C^3},\tag{4.20}$$

а фазовая задержка $\Delta \tau_h(\varepsilon_m)$ - выражением (4.18).

Из сравнения этих выражений с результатами экспериментальных измерений, получаем значения эффективных параметров диссипативной и гистерезисной нелинейности гранита для частоты $f_0 = 150$ кГц ($\alpha \alpha_0^2 L/2C^3 \cong 1$): $\delta \cong 6.2 \cdot 10^4$ и $\eta \gamma_0 + (1-\eta)\pi \beta/2 \cong 1.4 \cdot 10^4$. (Значение второго параметра близко к аналогичному, определенному выше из результатов работы [CB6].) Из рис. 4.9 видно, что с ростом частоты f (в диапазоне от 150 кГц до 1 МГц), коэффициент $\chi(\varepsilon_m) \sim \alpha(f)\delta(f)f^2$ растет (в среднем) как f/f_0 , т.е. $\alpha(f)\delta(f) \sim f^{-1}$, а параметр гистерезисной нелинейности [$\eta \gamma_0(f) + (1-\eta)\pi\beta(f)/2$] сначала (от 150 кГц до 400 кГц) падает как f_0/f , а затем (от 400 кГц до 1 мГц) - $\eta \gamma_0 + (1-\eta)\pi\beta/2 \approx 8 \cdot 10^3$.

Таким образом, экспериментальные исследования нелинейных эффектов распространения слабых ВЧ импульсов в поле мощной НЧ волны накачки в стержневом резонаторе из карельского гранита показали, что в диапазоне от 150 кГц до 1 МГц акустическая нелинейность гранита является аномально высокой и частотно-зависимой; она содержит диссипативную и гистерезисную (или реактивную вида $\gamma |\varepsilon| \varepsilon$) составляющие, при этом с ростом частоты диссипативная нелинейность, ответственная за затухание звука на звуке, в основном, растет, а гистерезисная (или реактивная) нелинейность, ответственная за фазовую задержку несущей ВЧ импульса – падает.

4.2.2. Самовоздействие ультразвуковых импульсов в стержне из мрамора

В этом разделе приводятся описание и результаты экспериментальных и теоретических исследований эффектов самовоздействия (ограничения амплитуды и фазовой задержки несущей), возникающих при распространении высокочастотных (ВЧ) акустических импульсов конечной амплитуды в поликристаллической горной породе – белом мраморе Коелга. На основе установленных амплитудных зависимостей этих эффектов предлагается нелинейное уравнение состояния для исследуемого образца, и в рамках этого уравнения проводится аналитическое описание обнаруженных эффектов.

Эксперименты проводились со стержнем из мрамора: длина стержня L = 70.2 см, его сечение – квадрат со стороной 1.6 см. Плотность мрамора - около 2.8 гр/см³. К одному торцу стержня был приклеен пьезокерамический излучатель – для излучения ультразвуковых импульсов, а к другому - пьезоакселерометр, - для их приема. Измерения проводились при комнатной температуре. Погрешность измерения фазовой задержки импульса составляла ±5 нс. В этих экспериментах наблюдались и исследовались эффекты нелинейного ограничения амплитуды и фазовой задержки несущей ультразвуковых импульсов, прошедших через стержень. Длительность импульсов составляла $\tau = 200$ мкс, их несущая частота f была равна 100 кГц, а частота повторения - 30 Гц. Скорость С₀ распространения ультразвуковых импульсов в стержне, определенная по их задержке, составляла около 2.4 · 10⁵ см/с, так что длина импульсов $l = C_0 \tau = 52$ см была меньше длины стержня L и импульсы в нем распространялись как в свободном пространстве. После прохождения через стержень эти цифровой импульсы принимались акселерометром и поступали на осциллографспектроанализатор, где производились измерения их относительной амплитуды А, и фазовой задержки несущей $\Delta \tau_1$ в зависимости от амплитуды излучаемых импульсов A_0 (опять же относительной). Результаты измерений приведены на рис. 4.10.

Из этого рисунка видно, что при увеличении амплитуды A_0 излучаемых импульсов наблюдались следующие эффекты и закономерности. Первая - амплитуда A_1 принимаемых импульсов монотонно увеличивается, причем вначале ($A_0 < 20$ В) – линейно, а затем – проявляется тенденция к ее ограничению. Вторая - фазовая задержка несущей $\Delta \tau_1$, в начале, при малых амплитудах $A_0 < 20$ В, растет как A_0^3 , а затем ее рост заметно замедляется. Из экспериментально установленных зависимостей $A_1 = A_1(A_0)$ и $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_1(A_0)$ следует, что если

эффект ограничения амплитуды связан с проявлением диссипативной (неупругой) нелинейности мрамора, то фазовая задержка несущей, - с проявлением нелинейности реактивной (упругой), ответственной за уменьшение скорости распространения волны с ростом ее амплитуды [Назаров, 2007]. Очевидно, что на основе "классической" нелинейной теории упругости [Зарембо, Красильников, 1966] описать обнаруженные эффекты амплитуднофазового самовоздействия нельзя. (Напомним, что в "классической" теории упругости реактивная нелинейность является аналитической степенной функцией деформации ~ ε^r (r = 2;3), а диссипативная нелинейность - отсутствует.)



Рис. 4.10. Зависимость амплитуды A_1 (1) и фазовой задержки несущей $\Delta \tau_1$ (2) ультразвуковых импульсов, прошедших через стержень из мрамора, в зависимости от амплитуды A_0 излучаемых импульсов. Прямые линии соответствует зависимостям: 1 - $A_1 \sim A_0$, 2 - $\Delta \tau_1 \sim A_0^3$.

Наблюдаемые эффекты и их амплитудные зависимости можно объяснить в рамках феноменологического уравнения состояния, содержащего реактивную $E\gamma |\varepsilon|^n \varepsilon$ и диссипативную $\alpha \rho \beta |\varepsilon|^m \dot{\varepsilon}$ нелинейности:

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E \left[\varepsilon - \gamma |\varepsilon|^n \varepsilon \right] + \alpha \rho \left[1 + \beta |\varepsilon|^m \right] \dot{\varepsilon}, \qquad (4.21)$$

где γ , *n* и β , *m* - безразмерные параметры и показатели степени реактивной диссипативной нелинейности, $\gamma |\varepsilon|^n <<1$, $\beta |\varepsilon|^m <<1$, $\alpha \beta |\varepsilon|^{m-1} |\dot{\varepsilon}| / C_0^2 <<1$, $C_0^2 = E / \rho$. Отметим, что именно такой вид имеет уравнение состояния для поликристаллических твердых тел, причиной диссипативной и реактивной нелинейности которых являются дислокации – одномерные дефекты их структуры [Назаров, 2008]. Все параметры уравнения состояния для каждого конкретного материала определяются экспериментально, т.е. из сравнения полученных экспериментальных результатов по изучению каких-либо нелинейных эффектов в этом материале с результатом аналитического расчета этих же эффектов. Перед тем, как приступить к расчету наблюдаемых эффектов самовоздействия на основе уравнения состояния (4.21), отметим некоторые особенности этого, вообще говоря, неаналитического уравнения. Прежде всего, заметим, что при $\gamma = 0$ и $\beta = 0$ уравнение (4.21) является линейным; оно описывает деформирование линейного вязко-упругого тела Кельвина-Фойгта [Девис, 1961]. В этом случае, конечно, никаких нелинейных эффектов нет, поэтому в уравнение состояния (4.21) и введены нелинейные слагаемые $E\gamma|\varepsilon|^{n}\varepsilon$ и $\alpha\rho\beta|\varepsilon|^{m}\dot{\varepsilon}$. Первое слагаемое $E\gamma|\varepsilon|^{n}\varepsilon$ – это упругая степенная (нечетная по ε) нелинейность; она определяет нелинейную упругость твердого тела и, соответственно, наблюдаемую зависимость $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_1(A_0)$. Второе слагаемое $\alpha \rho \beta |\varepsilon|^m \dot{\varepsilon}$ - это диссипативная нелинейность (четная по є и нечетная по і функция); она отвечает за увеличение поглощения волны при увеличении ее амплитуды (при m > 0, $\beta > 0$) и определяет нелинейную зависимость $A_1 = A_1(A_0)$.

Подставляя уравнение состояния (4.21) в уравнение движения, получаем нелинейное волновое уравнение для *ε*:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ -\gamma C_0^2 |\varepsilon|^n \varepsilon + \alpha \beta |\varepsilon|^m \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right\} + \alpha \frac{\partial^3 \varepsilon}{\partial x^2 \partial t}, \qquad (4.22)$$

Это уравнение, вместе с граничным условием: $\varepsilon(x=0,t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$, описывает эффекты нелинейного распространения исходно гармонической волны с частотой ω . Поскольку

$$\varepsilon(x,\theta) = \sum_{p=1} \widetilde{\varepsilon}_p(x,\theta) = \sum_{p=1} \varepsilon_p(x) \sin\left[p\theta - \varphi_p(x)\right], \qquad (4.23)$$

где $\theta = \omega t - kx$, $k = \omega/C_0$, $\left| \sum_{p=2} \tilde{\varepsilon}_p(x,\theta) \right| << \left| \tilde{\varepsilon}_1(x,\theta) \right|$, а $\varepsilon_p(x)$ и $\varphi_p(x)$ - медленно-меняющиеся

функции координаты х.

Из решения уравнения (4.22) находим выражения для амплитуды $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$ и нелинейной задержки несущей $\Delta \tau_1(\varepsilon_0)$ импульса при x = L:

$$\varepsilon_{1}(\varepsilon_{0}) = \frac{\varepsilon_{0} \exp\left[-\eta L\right]}{\left[1 + a_{1}\beta\left(1 - \exp\left[-m\eta L\right]\right)\varepsilon_{0}^{m}\right]^{1/m}}, \ \Delta\tau_{1}(\varepsilon_{0}) = \frac{\gamma b_{1}}{2C_{0}} \cdot \int_{0}^{L} \varepsilon_{1}^{n}(\varepsilon_{0})dx, \qquad (4.24)$$

где
$$\eta = \frac{\alpha \omega^2}{2C_0^3}, \ a_1 = \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma[(m+1)/2]}{m(m+2)\Gamma[m/2]}, \ b_1 = \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{(n+1)\Gamma[(n+1)/2]}{n(n+2)\Gamma[n/2]}.$$

Из этих выражений видно, что амплитуда $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$ и нелинейная фазовая задержка $\Delta \tau_1(\varepsilon_0)$ прошедшего импульса зависят от амплитуды ε_0 излучаемого импульса и показателей степени m и n диссипативной и реактивной нелинейности, причем $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$ зависит только от m, а $\Delta \tau_1(\varepsilon_0)$ зависит и от m (через амплитуду $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$) и от n.

При $a_1 \beta [1 - \exp[-m\eta L]] \varepsilon_0^m <<1$, из выражений (4.24) имеем:

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0) \cong \varepsilon_0 \exp[-\eta L] \left[1 - \frac{a_1 \beta}{m} \left(1 - \exp[-m\eta L] \right) \varepsilon_0^m \right], \tag{4.25}$$

$$\Delta \tau_1(\varepsilon_0) \cong \varepsilon_0^n \frac{1 - \exp[-n\eta L]}{n\eta C_0} \frac{\gamma b_1}{2} \left[1 - \frac{na_1\beta}{m} \left(1 - \frac{n}{n+m} \frac{1 - \exp[-(n+m)\eta L]}{1 - \exp[-n\eta L]} \right) \varepsilon_0^m \right], \tag{4.26}$$

а при выполнении условий $\exp[-n\eta L] \ll 1$, $\exp[-m\eta L] \ll 1$ - получаем:

$$\varepsilon_1(\varepsilon_0) \cong \varepsilon_0 \exp\left[-\eta L\right] \left[1 - \frac{a_1 \beta}{m} \varepsilon_0^m\right], \tag{4.27}$$

$$\Delta \tau_1(\varepsilon_0) \cong \frac{\gamma b_1 \varepsilon_0^n}{2n \eta C_0} \left[1 - \frac{n a_1 \beta}{n+m} \varepsilon_0^m \right]. \tag{4.28}$$

Из сравнительного анализа амплитудных зависимостей выражений (4.25) - (4.28) с результатами экспериментальных измерений (полагая, что $\varepsilon_0 \sim A_0$, $\varepsilon_1 \sim A_1$) можно легко определить показатели степеней *n* и *m* реактивной и диссипативной нелинейности исследуемого образца мрамора, в частности, из выражения (4.28) сразу видно, что, при малых

амплитудах ε_0 , - n = 3. Для определения показателя m, замечаем, что при малых амплитудах ε_0^* , когда $\frac{a_1\beta}{m}\varepsilon_0^{*m} <<1$, $\frac{na_1\beta}{n+m}\varepsilon_0^{*m} <<1$, импульс затухает линейно, а его фазовая задержка растет

по степенному закону:

$$\varepsilon_1^*(L) = \varepsilon_0^* \exp[-\eta L], \qquad (4.29)$$

$$\Delta \tau_1^*(\varepsilon_0^*) \cong \varepsilon_0^{*n} \gamma b_1 \frac{1 - \exp\left[-m\eta L\right]}{2n\eta C_0}.$$
(4.30)

Поделим уравнения (4.25), (4.26) на (4.29), (4.30), соответственно, и, вводя обозначения

$$P = \varepsilon_1(L)/\varepsilon_1^*(L), \qquad R = \Delta \tau_1(\varepsilon_0)/\Delta \tau_1^*(\varepsilon_0^*), \qquad W = \varepsilon_0/\varepsilon_0^*, \qquad Z_1 = (a_1\beta\varepsilon_0^{*m}/m)[1 - \exp(-m\eta L)],$$

$$Z_2 = (na_1\beta\varepsilon_0^{*m}/m) \left[1 - \frac{n}{m+n} \frac{\exp[-(m+n)\eta L]}{1 - \exp[-n\eta L]} \right], \text{ получим (при } Z_{1,2}W^m <<1):$$

$$\ln[\ln W/P] = \ln[Z_1] + m\ln W, \qquad (4.31)$$

$$\ln[1 - (R/W^n)] = \ln[Z_2] + m\ln W.$$

Используя результаты эксперимента (рис. 4.10), построим графики зависимостей $\ln[\ln(W/P)]$ и $\ln[1 - (R/W^n)]$ при n = 3 от $\ln W$ (рис. 4.11, рис. 4.12).



Рис. 4.11. Зависимость $\ln[\ln(W/P)]$ от $\ln W$. Прямая линия соответствует m = 2.



Рис. 4.12. Зависимость $\ln[1 - (R/W^3)]$ от $\ln W$. Прямая линия соответствует m = 2.

Из обеих этих зависимостей, по их тангенсу угла наклона при малых значениях W, находим, что m = 2. Примечательно, что для исследованного образца мрамора $m \neq n$; этот факт свидетельствует о различных механизмах высокочастотных реактивной и диссипативной нелинейности не только для исследованного образца мрамора, но, по-видимому, и для многих других микронеоднородных твердых тел. В качестве иллюстрации и подтверждения этого утверждения, на рис. 4.13 приведены зависимости $A_1 = A_1(A_0)$ и $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_1(A_0)$, полученные в таком же эксперименте для стержня из карельского гранита Питкяранта (L = 35 см, f = 110кГц). Из этих зависимостей видно, что $A_1(A_0) \sim A_0$, $\Delta \tau_1(A_0) \sim A_0$, и, следовательно, такой гранит в ультразвуковом диапазоне ($f \approx 100$ кГц) обладает вполне заметной реактивной нелинейностью с показателем степени n = 1, а его диссипативная нелинейность не проявляется.



Рис. 4.13. Зависимость амплитуды A_1 (1) и фазовой задержки несущей $\Delta \tau_1$ (2) ультразвуковых импульсов, прошедших через стержень из гранита, в зависимости от амплитуды A_0 излучаемых импульсов. Прямые линии соответствует зависимостям: 1 - $A_1 \sim A_0$, 2 - $\Delta \tau_1 \sim A_0$.

Приведем теперь оценки (по порядку величины) для параметров γ и β реактивной и диссипативной нелинейности исследуемого образца мрамора, полагая, что амплитуде напряжения на излучателе $A_0 = 10$ В соответствует амплитуда деформации $\varepsilon_0 \cong 10^{-7}$. Подставляя в (4.28): $\varepsilon_0 = 10^{-7}$, $\eta L \cong 2,3$, n = 3, $C_0 \cong 2.4 \cdot 10^5$ см/с, получаем, что $\gamma \approx 10^{18}$. Аналогично, из первого выражения (4.24), находим: $\beta \approx 10^{12}$.

Таким образом, экспериментальное исследование и теоретическое описание нелинейных эффектов амплитудно-фазового самовоздействия ультразвуковых импульсов конечной амплитуды в стержне из мрамора Коелга показали, что в диапазоне около 100 кГц акустическая нелинейность мрамора является аномально высокой (по сравнению с однородными средами) и содержит реактивную и диссипативную составляющие, пропорциональные, соответственно, $\gamma |\varepsilon|^n \varepsilon$ и $\beta |\varepsilon|^m \dot{\varepsilon}$, причем n = 3, а m = 2. В этом частотном диапазоне, "аномальность" мрамора проявляется в том, что его реактивная нелинейность является неаналитической, а диссипативная – сильно отличной от нулевой. Важным результатом проведенных исследований является также установление того факта, что за проявление ВЧ реактивной и диссипативной нелинейности многих горных пород ответственны различные механизмы, аналогично тому, как за реактивную и диссипативную нелинейности твердых тел, содержащих трещины, частично заполненные жидкостью, ответственны поверхностное натяжение жидкости и ее вязкость [Nazarov, 2001].

4.3. Экспериментальные исследования в зернистых средах

4.3.1. Самодемодуляция акустических импульсов в частично водонасыщенном песке

Экспериментальным изучением линейного распространения акустических волн в речном песке и зернистых средах занимались многие исследователи [Царева, 1956; Анцыферов и др., 1964; Пархоменко, 1967; Вильчинская, 1982; Зайцев и др., 1999а, б; Jia et al, 1999; Gusev et al, 2001; Tournat et al, 2003; Гольдин и др., 1999; Колесников, Медных, 2004; Tournat et al, 2004; Jia, 2004; de Billy M, 2004; Ширгина и др., 2013]. В этих работах было установлено, что подобные среды характеризуются низкой скоростью распространения упругих волн и крайне высоким их поглощением. Последнее обстоятельство говорит о совершенной бесперспективности всякой попытки передачи сигналов высокой частоты через сыпучую среду типа ненагруженного песка. А между тем, упругая нелинейность зернистых сред столь сильна, что для наблюдения и изучения, например, эффекта самодетектирования (или самодемодуляции) высокочастотных (ВЧ) акустических импульсов фактически не требуется применения сложной аппаратуры (так необходимой для исследования нелинейных эффектов в обычных слабо-нелинейных средах). Вследствие сильной упругой нелинейности зернистой среды при возбуждении в ней ВЧ акустических импульсов происходит их детектирование и интенсивная генерация вторичных низкочастотных (НЧ) видеоимпульсов, распространяющихся с существенно меньшим затуханием по сравнению с быстро затухающими (вблизи излучателя накачки) первичными ВЧ импульсами. В результате, что при приеме относительно слабых видеоимпульсов не требуется подавлять спектральные компоненты мощных ВЧ импульсов накачки и применять аппаратуру с большим динамическим диапазоном. Следует также отметить, что форма продетектированных видеоимпульсов не зависит от фазы ВЧ импульсов накачки и определяется только знаком параметра нелинейности среды, так что при возбуждении в среде первичных ВЧ импульсов даже со случайными фазами в ней генерируются и распространяются когерентные НЧ импульсы, поэтому для их обнаружения и выделения на фоне шумов и помех можно применять когерентное накопление.

Эффект самодемодуляции ВЧ акустических импульсов в речном песке впервые наблюдался и подробно (экспериментально и теоретически) исследовался в работах [Зайцев и др., 19996; Jia et al, 1999; Gusev et al, 2001]. В этих экспериментах использовался сухой и почти полностью водонасыщенный песок, при этом для создания водонасыщенной среды песок засыпался в воду, так что его водонасыщение было близко к единице. Анализ полученных результатов показал, что при одинаковой форме продетектированных низкочастотных (НЧ) импульсов в сухом и водонасыщенном песке, а также при одинаковых зависимостях их амплитуды и скорости распространения от амплитуды первичного ВЧ импульса и от статического давления соответственно, некоторые характеристики продетектированных НЧ импульсов в этих средах, а именно зависимости амплитуд и длительностей от статического давления, качественно отличаются, что, в принципе, является диагностическим признаком, позволяющим отличить сухой песок от водонасыщенного.

Здесь приводятся описание экспериментальных и теоретических исследований эффекта самодетектирования ВЧ и распространения НЧ акустических импульсов в частично водонасыщенном речном песке. На основе проведенных исследований будет показано, что закономерности демодуляции ВЧ импульсов в такой среде качественно отличаются от герцевской, характерной как для сухого, так и для почти полностью водонасыщенного речного песка.

4.3.1.1. Схема эксперимента

Схема экспериментальной установки показана на рис. 4.14. В стеклянной трубе диаметром 19 см и высотой 20 см, в которой находился водонасыщенный речной песок. Средний размер песчинок составлял около $2 \cdot 10^{-2}$ см, пористость песка – 43%. Высокочастотные акустические импульсы с несущей частотой 180 кГц создавались при помощи излучателя 1 продольных волн, находящегося на глубине h=10 см от поверхности песка. Диаметр излучателя составлял 8 см. При помощи системы грузов 2 массой M в песке создавалось статическое давление P_0 . Грузы располагались на пластине 3 из оргстекла, находящейся на поверхности песка и перекрывающей почти все сечение емкости, так что вертикальная компонента статического давления P_0 в песке была почти постоянной по высоте и определялась выражением $P_0 \cong Mg/S >> \rho gh$, g - ускорение силы тяжести, S - площадь сечения трубы, ρ - плотность песка. Для регистрации продетектированного сигнала использовался приклеенный к центру пластины 3 и находящийся на оси излучателя акселерометр 4, реагирующий на вертикальную компоненту ускорения пластины. Сигнал с

акселерометра поступал на вход двухканального цифрового осциллоскопа 5, где регистрировалась форма и измерялись его параметры.



Рис. 4.14. Схема эксперимента: 1 - излучатель продольных волн, 2 - система грузов, 3 - пластина из оргстекла, 4 - акселерометр, реагирующий на вертикальную компоненту ускорения пластины, 5 - двухканальный цифровой осциллоскоп.

В этом эксперименте, при создании частично водонасыщенного речного песка вода заливалась в сухой песок, в результате чего, в песке (в порах между песчинками) могли оставаться воздушные пузырьки. Наличие газа в такой трехфазной среде приводит к тому, что между песчинками, вследствие образования тонких прослоек жидкости ("мостиков"), возникают силы поверхностного натяжения, с одной стороны, препятствующие проявлению "хлопающей" нелинейности герцевского типа на контактах слабоподжатых песчинок и, с другой, - способствующие проявлению капиллярной нелинейности тонких межзеренных прослоек жидкости. В результате этого нелинейные акустические свойства частично водонасыщенного песка будут качественно отличаться от нелинейных свойств как сухого песка, так и полностью водонасыщенного, где "хлопающая" нелинейность является доминирующей.

4.3.1.2. Результаты эксперимента

При возбуждении в речном песке коротких и длинных ВЧ акустических импульсов с частотой f = 180 кГц и длительностью $T_1 = 80$ мкс и $T_2 = 1300$ мкс наблюдался эффект

самодетектирования. Осциллограммы импульсов модуляции излучаемых ВЧ и принимаемых акселерометром продетектированных НЧ импульсов показаны на рис. 4.15; форма последних (также как и в сухом и полностью водонасыщенном песке [Зайцев ВЮ и др., 1999а]) близка к третьей производной по времени от огибающей ВЧ импульса накачки и, следовательно, параметрический излучатель работал в режиме Вестервельта [Новиков и др., 1981]. При увеличении в песке статического давления P_0 длительность $T = T(P_0)$ (см. обозначения на рис. 4.15а) продетектированных видеоимпульсов уменьшалась (рис. 4.16), что связано с уменьшением затухания в песке, а их скорость распространения $C = C(P_0)$ и амплитуда $A = A(P_0)$ – увеличивались (рис. 4.17, рис. 4.18), причем в диапазоне нагрузок $P_0 \ge 2 \cdot 10^3$ Па (когда давление в песке определяется, в основном, системой грузов массой $M \ge 5.6$ кг) имеют место следующие зависимости:

$$T(P_0) \sim P_0^{-1/16},$$
 (4.33)

$$C(P_0) \sim P_0^{1/6},$$
 (4.34)

$$A(P_0) \sim P_0^{1/3}.$$
(4.35)

Отметим, что здесь зависимость $C = C(P_0)$ соответствует герцевской зависимости статического давления P_0 от статической деформации сжатия \mathcal{E}_0 [Анцыферов МС и др., 1964; de Billy M, 2004]:

$$P_0 = B(\mathcal{E}_0)^{3/2}, B = \text{const.}$$
 (4.36)

Из этого выражения следует линейное уравнение состояния, т.е. связь акустических напряжения *σ* и деформации *ε* :

$$\sigma(\varepsilon, P_0) = (3/2)B^{2/3}P_0^{1/3}\varepsilon.$$
(4.37)

Далее, на рис. 4.19, приведена зависимость амплитуды A_0 продетектированных НЧ импульсов от амплитуды ε_0 коротких ВЧ импульсов накачки (при $P_0 = 10^4$ Па). Из этого рисунка видно, что в диапазоне $5 \cdot 10^{-6} \le \varepsilon_0 \le 1.2 \cdot 10^{-5}$ имеет место зависимость $A_0 \sim \varepsilon_0^n$, где $n \ge 2$, и, следовательно, акустическая нелинейность частично водонасыщенного песка при $5 \cdot 10^{-6} \le \varepsilon_0 \le 1.2 \cdot 10^{-5}$ должна быть квадратичной, а не герцевской ($n \ge 3/2$) - как для сухого и полностью водонасыщенного песка [Зайцев и др., 1999а, 6]. Причиной этого может быть проявление поверхностного натяжения граничащих с газом тонких прослоек жидкости между песчинками, что влияет, прежде всего, на свойства значительной части "слабых" контактов, для

которых статическая деформация много меньше средней и которые отвечает за акустическую нелинейность песка с герцевским показателем n = 3/2.



Рис. 4.15. Осциллограммы коротких (а) и длинных (б) модулирующих и продетектированных НЧ импульсов, принимаемых акселерометром.



Рис. 4.16. Зависимость длительности НЧ импульсов от статического давления. Прямая линия соответствует зависимости $T(P_0) \sim P_0^{-1/16}$.



Рис. 4.17. Зависимость скорости распространения НЧ импульсов от статического давления. Прямая линия соответствует зависимости $C(P_0) \sim P_0^{1/6}$.



Рис. 4.18. Зависимость амплитуды НЧ импульсов от статического давления. Прямая линия соответствует зависимости $A(P_0) \sim P_0^{1/3}$.



Рис. 4.19. Зависимость амплитуды продетектированного импульса от амплитуды деформации ВЧ импульса ($P_0 = 10^4 \text{ Па}$). Прямые линии: 1 - $A_0 \sim \varepsilon_0^2$, 2 - $A_0 \sim \varepsilon_0^{3/2}$.

Для аналитического описания процессов квадратичного детектирования ВЧ импульсов и распространения НЧ видеоимпульсов в частично водонасыщенном песке, уравнение состояния (4.37) следует дополнить квадратичной нелинейностью $\alpha(P_0)\varepsilon^2$ и линейным диссипативным слагаемым, ответственным за затухание акустических волн:

$$\sigma(\varepsilon, P_0) = (3/2)B^{2/3}P_0^{1/3}\varepsilon - \beta(P_0)\varepsilon^2 + L(P_0, \dot{\varepsilon}), \qquad (4.38)$$

где $L(P_0, \dot{\varepsilon})$ - линейный оператор; его вид определяет частотную зависимость декремента затухания акустических волн в песке.

Теперь используя уравнение состояния (4.38), опишем наблюдаемые в эксперименте процессы (в диапазоне нагрузок $P_0 \ge 2 \cdot 10^3$ Па) и определим параметры этого уравнения. Зададим граничное условие на излучателе в виде:

$$\in_1 (r, z = 0, t) = \varepsilon_0 \Pi(r/a) \Phi(t/T_0) \sin \omega t, \qquad (4.39)$$

где $\Pi(r/a) = 1$ при $r/a \le 1$ и $\Pi(r/a) = 0$ при r/a > 1, a - радиус излучателя, $\Phi(t/T_0)$ и T_0 огибающая и длительность ВЧ импульса накачки. Проводя несложные вычисления, получаем выражение для продетектированного импульса, принимаемого акселерометром, находящимся в дальней зоне на оси излучателя:

$$A(\tau, z) = -\frac{a^2 \beta(P_0) \varepsilon_0^2}{8\pi \rho C^3(P_0) z} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^z \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Omega^2 \Phi^2(\tau'/T_0) \exp\left[-2\alpha_1(P_0)\omega z'\right] \times \exp\left[-\alpha_2(P_0) |\Omega| z - j\Omega(\tau'-\tau)\right] dz' d\tau' d\Omega, \qquad (4.40)$$

где $\tau = t - z/C(P_0)$, $\alpha_{1,2}(P_0) = \theta_{1,2}(P_0)/2\pi C(P_0)$, $\alpha_{1,2}(P_0)$ и $\theta_{1,2}(P_0)$ - ВЧ и НЧ коэффициенты и декременты затухания, ρ - плотность. (Здесь мы полагаем, что декремент затухания $\theta_2(P_0)$ речного песка в НЧ диапазоне не зависит от частоты [de Billy M, 2004].)

Для огибающей импульса накачки в виде $\Phi(\tau/T_0) = [1 + (\tau/T_0)^2]^{-1/2}$ интеграл (4.40) может быть вычислен аналитически. В этом случае форма $A(\tau, z)$, амплитуда $A(P_0)$ и длительность $T(P_0)$ продетектированного НЧ импульса будут определяться выражениями ($2\beta_1(P_0)\omega z >>1$):

$$A(\tau, z) = -\frac{\pi a^2 \gamma(P_0) T_0 \varepsilon_0^2}{4\omega \theta_1(P_0) T(P_0) z} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \left\{ \frac{1}{1 + [\tau / T(P_0)]^2} \right\},$$
(4.41)

$$A(P_0) \cong \frac{3.64a^2 \gamma(P_0) T_0 \varepsilon_0^2}{\omega \theta_1(P_0) T^4(P_0) z},$$
(4.42)

$$T(P_0) = T_0 + \alpha_2(P_0)z, \qquad (4.43)$$

где $\gamma(P_0) = \alpha_2(P_0) / \rho C^2(P_0)$ - параметр квадратичной нелинейности.

Из сравнения экспериментальных (4.33) - (4.35) и аналитических (4.41) - (4.43) зависимостей можно оценить значения некоторых акустических параметров частично водонасыщенного песка. В начале, полагая, что $T_0 \cong 50$ мкс и используя выражение (4.43), определяем зависимости НЧ коэффициента $\alpha_2(P_0) = [T(P_0) - T_0]/z$ и декремента затухания $\theta_2(P_0)$: $\alpha_2(P_0) \sim (P_0/P_m)^{-1/8}$, $\theta_2(P_0) \approx \theta_m (P_0/P_m)^q$, где $P_m = 10^4$ Па, q = 1/24, $\theta_m = 1.3$ (Рис. 4.20). Отметим, что здесь декремент затухания с ростом давления P_0 , хотя и слабо, но заметно растет, в отличие от почти полностью водонасыщенного песка, для которого декремент затухания с ростом давления падает с показателем q = -1/3 [Зайцев и др., 1999a, 6].



Рис. 4.20. Зависимость $T(P_0) - T_0 = \alpha_2(P_0)z$ от статического давления P_0 . Прямая линия соответствует зависимости $\alpha_2(P_0) \sim P_0^{-1/8}$.

Далее, из выражения (4.42) можно определить зависимость безразмерного отношения $\Gamma(P_0) = \gamma(P_0)/\theta_1(P_0)$ параметра квадратичной нелинейности к ВЧ декременту затухания; это отношение является важной характеристикой среды, определяющей эффективность работа параметрического излучателя звука. На рис. 4.21 приведена зависимость $\Gamma = \Gamma(P_0)$, полученная при установленных зависимостях для $A = A(P_0)$ и $T = T(P_0)$ и при следующих параметрах: $a = 4 \text{ см}, \varepsilon_0 = 10^{-5}, \omega = 2\pi \cdot 1.8 \cdot 10^5 \text{ c}^{-1}, T_0 = 50 \text{ мкс}, C_0 \cong 3.1 \cdot 10^4 \text{ см/с}, z = 11 \text{ см}. Видно, что для частично водонасыщенного песка с ростом статического давления <math>P_0$ отношение $\Gamma = \Gamma(P_0)$ слабо, но заметно растет: $\Gamma(P_0) \sim P_0^{1/12}$.



Рис. 4.21. Зависимость параметра $\Gamma = \Gamma(P_0)$ от статического давления. Прямая линия соответствует зависимости $\Gamma(P_0) \sim P_0^{1/12}$.

В заключение отметим, что для объяснения амплитудной зависимости $A(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^{3/2}$ для демодулированного импульса в сухом и полностью водонасыщенном песке в работах [Tournat et al, 2003; Гольдин и др., 1999; Колесников, Медных, 2004] было предложено учесть роль слабых межзеренных контактов. Их доля в среде может быть сравнима и даже превышать количество средне-нагруженных контактов со статической деформацией сжатия \mathcal{E}_0 , определяющих модуль упругости зернистой среды. Как показано в [Зайцев, 1995; Tournat et al, 2004; de Richter et al, 2010], слабые контакты с поджатием $\mu \mathcal{E}_0$, характеризуемым малым параметром $\mu \ll 1$ ($\mu \approx 1$ соответствует средне-нагруженным контактам), дают пренебрежимо

малый вклад ~ $\mu^{1/2}$ <<1 в значение упругого модуля, однако именно они обеспечивают доминирующий вклад ~ $\mu^{-1/2} >> 1$ в квадратичную упругую нелинейность при малых амплитудах волны накачки $\varepsilon_0 < \mu \mathcal{E}_0$. При больших амплитудах $\varepsilon_0 > \mu \mathcal{E}_0$ такие слабые контакты начинают "хлопать" и порождать нелинейность герцевского типа. Для амплитудной зависимости демодулированного импульса от слабых контактов важна форма их функции распределение $n = n(\mu)$ при $\mu \ll 1$, при этом результирующее поведение амплитуды демодулированного импульса $[A(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^{3/2}]$ наблюдается лишь при сильной локализации распределения $n = n(\mu)$ вблизи нулевых значений. При близком к равномерному распределению $n(\mu) = \text{const}$, с ростом амплитуды накачки ε_0 доля "хлопающих" контактов возрастает, так что амплитуда демодулированного импульса растет быстрее, чем по герцевскому закону (~ $\varepsilon_0^{3/2}$) и его поведение остается близким к квадратичной зависимости [$A(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^2$]. Пока деформация $\varepsilon_0 \sim 10^{-5}$ не превышает среднюю статическую \mathcal{E}_0 , амплитуда продетектированного импульса оказывается существенно выше (например, почти на порядок при типичных для зернистых сред сравнимых количествах слабых и средне-нагруженных контактов), чем следует ожидать для квадратичной нелинейности средне-нагруженных контактов в зернистом скелете, поскольку $(\varepsilon_0 / \varepsilon_0)^{3/2} >> (\varepsilon_0 / \varepsilon_0)^2$ вплоть до $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_0$. Эти аргументы указывают, что, действительно, следует ожидать похожего характера акустической нелинейности сухого и водонасыщенного песка [Tournat et al, 2003; Гольдин и др., 1999; Колесников, Медных, 2004], так как полное насыщение жидкостью не должно существенно менять сильно локализованную при $\mu << 1$ функцию распределения слабых контактов, типичную для сухой среды. Напротив, в отличие от этих крайних случаев, частичное водонасыщение резко меняет характер акустической нелинейности зернистой среды, что может быть связано с проявлениями капиллярных эффектов, которые наиболее сильно влияют именно на самые слабые (и наиболее нелинейные) контакты, связывая их капиллярными "мостиками", препятствуя их "хлопанию" и модифицируя тем самым распределение $n = n(\mu)$, убирая его возрастание для малых поджатий ($\mu \ll 1$) и делая функцию распределения более равномерной. Таким образом, частично водонасыщенный песок при некоторых условиях должен проявлять переходное поведение от квадратичной нелинейности "закрытых" контактов к "хлопающей" герцевской нелинейности при больших амплитудах накачки. Действительно, такое переходное

поведение амплитудной зависимости для демодулированного импульса от $A(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^2 \kappa A(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^{3/2}$ наблюдалось при $\varepsilon_0 \approx 1.2 \cdot 10^{-5}$ (см. рис. 4.19).

4.3.2. Влияние процесса компакции на самодемодуляцию акустических импульсов в гранулированной среде

Эксперимент проводился со случайно упакованными стеклянными шариками с диаметром 1.4 мм, помещенными в контейнер квадратного сечения высотой 30 см и внутренними размерами 8 см х 8 см (рис. 4.22). Начальная конфигурация упаковки создавалась засыпанием шариков в контейнер, и определялась как отношение суммарного объема шариков к объему, занимаемому в контейнере. В среднем она составляла 58 ± 0.5 %. Компакция производилась посредством внешнего механического воздействия и контролировалась с помощью измерения высоты упаковки из шариков. Между воздействиями в среду подавался амплитудно-модулированный сигнал с длительностью 50 мкс, несущей частотой 100 кГц и случайной фазой. Уровень акустического воздействия соответствовал амплитуде деформации $2.5 \cdot 10^{-5}$. Сигнал излучался и принимался пьезоэлектрическими приемниками-излучателями с диаметром 4 см.



Рис. 4.22. Схема эксперимента.

На рис. 4.23 представлены осциллограммы детектированных низкочастотных импульсов после 8 и 12649 механических воздействий. Их форма близка ко второй производной по времени от огибающей импульса, что соответствует работе параметрического излучателя в режиме Вестервельта [Новиков и др., 1981]. (Это также подтверждается анализом спектра.) Небольшие отличия от точной формы объясняются достаточно большим размером приемника.



Рис. 4.23. Осциллограммы продетектированного импульса после 8 (тонкая линия) и 12649 (толстая линия) механических воздействий.

Как хорошо видно из этого рисунка рост числа механических воздействий приводит к увеличению амплитуды первого пика, при этом его длительность уменьшается. Время прихода импульса близко к постоянному и соответствует скорости в 250 м/с, как и в ненагруженном речном песке.

На рис. 4.24 представлены зависимости амплитуды первого пика и его длительности от числа механических воздействий. Хорошо видно, что поведение кривых в начале процесса компакции (от 1 до 8 воздействий) заметно отличается от поведения в интервале от 8 до 12649, что может быть связано с процессами установления стабильной конфигурации ансамбля гранулированных частиц, и начиная с 8 механических воздействий значения этих характеристик с ростом числа воздействий монотонно приближаются к постоянным, что соответствует релаксационным кривым, описывающим процесс компакции [Jaeger et al, 1996; Richard et al, 2005].



Рис. 4.24. Зависимости амплитуды первого пика продетектированного импульса и его длительности от числа механических воздействий.

Для нахождения связи параметров сигнала со степенью упакованности воспользуемся результатами измерений из работы [Inserra et al, 2008], которые получены на этой же экспериментальной установке. Для данного размера шариков и амплитуды механического воздействия зависимость упакованности от числа воздействий соответствует релаксационной функции Кольрауша - Вильямса - Уоттса в следующем виде:

$$\Phi = 0.63 - 0.05 \exp(-((n-8)/250)^{0.35}).$$

На рис. 4.25 представлены зависимости амплитуды первого пика и его длительности от степени упакованности. Видно, что эти зависимости близки к линейным.



Рис. 4.25. Зависимости амплитуды первого пика продетектированного импульса и его длительности от упакованности.

Теоретический анализ результатов эксперимента может быть проведен в рамках модели из предыдущего раздела, выражения (4.42), (4.43). На рис. 4.26 представлена зависимость параметра эффективности параметрической генерации Г от упакованности. Уменьшение значения этого параметра свидетельствует об уменьшении числа слабоподжатых контактов (а, следовательно, и нелинейности) в процессе упорядочивания ансамбля под воздействием внешних механических воздействий.



Рис. 4.26. Зависимость параметра Γ от степени упакованности.

4.3.3. Самовоздействие низкочастотной акустической волны и генерация ее второй гармоники в сухом и водонасыщенном речном песке

В этом разделе приводятся описание и результаты экспериментальных и теоретических исследований амплитудно-фазовых эффектов самовоздействия и генерации второй гармоники продольной низкочастотной акустической волны в статически нагруженном сухом и водонасыщенном речном песке.

4.3.3.1.Схема эксперимента и методика проведения измерений

При проведении этих экспериментов сухой и водонасыщенный речной песок находились в двух одинаковых (каждый в своей) тонкостенных емкостях диаметром 16 см и высотой 22 см (рис. 4.14). Средний размер *a* песчинок составлял около $2 \cdot 10^{-2}$ см, а пористость сухого песка -43 %. Сухой песок предварительно уплотнялся, при создании же водонасыщенной среды, в начале, песок засыпался в воду, а затем, по мере ее испарения, вода доливалась в песок, так что в водонасыщенном песке могли находиться пузырьки воздуха. Для получения стабильных и повторяемых результатов акустических измерений, в сухом и водонасыщенном песке при помощи системы грузов массой *M* создавалось статическое давление P_0 .

Измерения проводились в импульсном режиме при статическом давлении $P_0 \cong 6.2 \cdot 10^3$ Па. В сухом и водонасыщенном песке, при помощи излучателей продольных волн, находящихся на глубине h = 13 см от поверхности песка, возбуждались, распространяющиеся в вертикальном направлении (снизу вверх), акустические импульсы с несущей частотой F = 4кГц, длительностью T = 5 мс и скважностью N = 20. Диаметр излучателей составлял 8 см. Для регистрации прошедших через песок акустических импульсов использовался приклеенный к центру той же пластины (на которой располагались грузы) и находящийся на оси излучателя пьезоакселерометр, реагирующий на вертикальную компоненту ускорения. Сигнал с пьзоакселерометра поступал на вход цифрового осциллоскопа-спектроанализатора, где измерялись амплитуда и задержка прошедших через песок импульсов. При выбранном статическом давлении скорость распространения импульсов в сухом песке была равна $C_0 \cong 2.2 \cdot 10^4$ см/с, а водонасыщенном - $C_0 \cong 2.5 \cdot 10^4$ см/с. Длина λ акустической волны в песке составляла около 7 см, размер *а* песчинок ~ $2 \cdot 10^{-2}$ см, так что отношение $\lambda/a \approx 350$, следовательно, в этом эксперименте речной песок также можно рассматривать как микронеоднородную сплошную среду.

При экспериментальном исследовании нелинейных волновых процессов в речном песке необходимо учитывать то обстоятельство, что подобные неконсолидированные (или слабо консолидированные) среды являются в той или иной степени случайными, т.к. качественные и количественные проявления в них нелинейных эффектов зависят от многих, по-существу, неконтролируемых факторов, например, от случайной упаковки большого количества песчинок, различных по форме и размерам, и наличия между ними жидкости и газа. Первый фактор можно быстро изменять несильным механическим воздействием (ударом) по стенкам емкости, содержащей песок, второй же – может медленно изменяться (например, за счет испарения воды и ее перераспределения между песчинками). Эти факторы в большей степени влияют на нелинейные акустические свойства зернистой среды и, в меньшей - на линейные характеристики: они почти не влияют на скорость распространения волны, но вполне заметно на ее затухание. Поэтому, при проведении одной серии измерений нелинейных эффектов необходимо, вообще говоря, соблюдать "режим механической тишины" (по отношению к емкости с песком) и, в начале измерений контролировать обратимость и повторяемость наблюдаемых эффектов при увеличении и уменьшении амплитуды возбуждаемой акустической волны.

4.3.3.2. Результаты измерений

В проведенных и многократно повторенных (в разное время) экспериментах с сухим и водонасыщенным песком (после его уплотнения, механического воздействия на емкость и "долива" воды) нами наблюдались и исследовались, в основном, нелинейные эффекты ограничения амплитуды деформации ε_1 (или самопросветления среды) и фазовой задержки несущей $\Delta \tau_1$ акустических импульсов, прошедших через слой песка толщиной h = 13 см, т.е.

167

исследовались зависимости этих величин от амплитуды V₀ импульсов электрического напряжения на излучателе. Эти эффекты связаны с проявлением нечетных диссипативной и реактивной нелинейностей.

В соответствии с вышеотмеченным, вполне естественно, что закономерности нелинейных эффектов в сухом и в водонасыщенном песке и в различных сериях измерений были отличными друг от друга. Наиболее характерные результаты этих измерений приведены на рис. 4.27 - для сухого песка и на рис. 4.28 - для водонасыщенного. Из этих рисунков видно, что при увеличении амплитуды V_0 имели место следующие закономерности. Амплитуда $\varepsilon_1(V_0)$ принимаемой волны монотонно увеличивалась, причем вначале (при V₀ < 20 B) – линейно, а затем – ее рост, как правило, замедлялся (рис. 4.27, рис. 4.28 а - г). Такой эффект называется нелинейным ограничением амплитуды волны. Отметим, однако, что для водонасыщенного песка, иногда, после длительного, в течение суток, испарения воды, наблюдалось не замедление роста амплитуды $\varepsilon_1(V_0)$, а его ускорение, т.е. самопросветление среды (рис. 4.28 д). Для фазовой задержки несущей $\Delta \tau_1(V_0)$ имели место еще более разнообразные зависимости. Так, для сухого песка наблюдались как положительные, так и отрицательные (при малых амплитудах V_0) задержки $\Delta \tau_1(V_0)$, при больших же амплитудах V_0 задержки $\Delta \tau_1(V_0)$ всегда были положительными, при этом, однако, в пределах каждой серии измерений (при малых амплитудах V_0) зависимости $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_1(V_0)$ были менее нерегулярными, по сравнению с зависимостями $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(V_0)$. Такое поведение, по-видимому, связано с неустойчивой структурой слабо поджатых зерен сухого песка, изменяющейся под действием акустической волны. Более стабильной структурой контактов обладает водонасыщенный песок, в котором, из-за наличия между песчинками воды, действуют капиллярные и адгезионные силы. Соответственно, для водонасыщенного песка зависимости $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_1(V_0)$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(V_0)$ были регулярны, но также различны для различных серий измерений. В тех случаях, когда наблюдалось ограничение амплитуды волны, задержка $\Delta \tau_1(V_0)$ была положительной, причем $\Delta \tau_1(V_0) \sim V_0^d$, где $d \cong 3;5$ при малых амплитудах V_0 , и $d \cong 1/2$;1 - при больших V_0 (рис. 4.28 а - г). В тех же случаях, когда наблюдалось самопросветление среды, задержка $\Delta \tau_1(V_0)$ при малых амплитудах V_0 была отрицательной, а при больших – положительной (рис. 4.28 д).

(Интересно отметить, что аналогичные зависимости для $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_1(V_0)$, т.е. отрицательные значения $\Delta \tau_1(V_0)$ при малых амплитудах V_0 и положительные - при больших, наблюдались в натурных экспериментах при исследовании нелинейного распространения

сейсмоакустической волны в сыром песчаном грунте (п. 2.6); в этих экспериментах, однако, зависимости $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(V_0)$ были почти линейными.)

Одновременно с эффектом амплитудного самовоздействия, при больших амплитудах V_0 , наблюдалась генерация второй гармоники волны основной частоты, связанная с проявлением четной реактивной нелинейностью среды. На рис. 4.27 и 4.28 приведены и соответствующие зависимости амплитуды $\varepsilon_2(V_0)$ второй гармоники от амплитуды V_0 для сухого и водонасыщенного песка, из которых видно, что $\varepsilon_2(V_0) \sim V_0^p << \varepsilon_1(V_0)$, причем $p \cong 1;2;3;4$. Из сравнения и анализа амплитудных зависимостей уровней вторых гармоник, полученных в различных сериях измерений, следует, что для таких сред зависимости $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(V_0)$, от серии к серии, различны, однако, можно предположить, что четная реактивная нелинейность сухого и водонасыщенного песка является степенной функцией модуля деформации, при этом значение показателя этой функции – различное для различных измерений, близко к небольшому целому числу p.



Рис. 4.27 а



Рис. 4.27 б

170



Рис. 4.27 в



Рис. 4.27 г



Рис. 4.28 а



Рис. 4.28 б



Рис. 4.28 в



Рис. 4.28 г



Рис. 4.28 ∂

4.3.3.3. Аналитическое описание эффектов самовоздействия и генерации второй гармоники

Установленные в эксперименте закономерности нелинейных эффектов в речном песке (для тех случаев, когда зависимости $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_1(V_0)$ стабильны и $\Delta \tau_1(V_0) \sim V_0^d > 0$) свидетельствуют о том, что их причиной являются нечетные диссипативная $\alpha \rho \beta |\varepsilon|^m \dot{\varepsilon}$ и реактивная $E\gamma |\varepsilon|^n \varepsilon$ и четная реактивная $Eg |\varepsilon|^p$ нелинейности, а наблюдаемые эффекты можно описать в рамках следующего феноменологического уравнения состояния:

$$\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = E \left[\varepsilon - \gamma \left| \varepsilon \right|^{n} \varepsilon - g \left| \varepsilon \right|^{p} \right] + \alpha \rho \left[1 + \beta \left| \varepsilon \right|^{m} \right] \dot{\varepsilon}, \qquad (4.44)$$

где γ , n, g, p и β , m - безразмерные параметры и показатели степени реактивной и диссипативной нелинейности, $\gamma |\varepsilon|^n <<1$, $\beta |\varepsilon|^m <<1$, $g|\varepsilon|^{p-1} <<1$, $\alpha \beta |\varepsilon|^{m-1} |\dot{\varepsilon}|/C_0^2 <<1$.

Здесь задача о распространении упругой волны решается в рамках стандартного подхода, применяемого при решении подобных нелинейных задач в нелинейной акустике, при этом предполагается, что при малых деформациях (и скоростях деформации) среда ведет себя линейно и малоамплитудная волна распространяется также линейно, а по мере увеличения амплитуды волны нелинейность среды становится все более заметной и волна распространяется нелинейно. Именно такое поведение волны с ростом ее амплитуды и наблюдалось в экспериментах с речным песком, и именно это свойство и поведение среды отражает уравнение состояния (4.44).

Подставляя уравнение (4.44) в уравнение движения, получаем нелинейное волновое уравнение для ε :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2} = \frac{1}{2C_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ -\gamma |\varepsilon|^n \varepsilon - g |\varepsilon|^p + \mu |\varepsilon|^m \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \right\},\tag{4.45}$$

где $\delta = \frac{\alpha}{2C_0^3}$, $\mu = \frac{\alpha\beta}{C_0^2}$.

Используя подход из п. 4.2, из решения уравнения (4.45) находим выражения для амплитуды $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$ основной частоты, нелинейной задержки несущей $\Delta \tau(\varepsilon_0)$ и амплитуды $\varepsilon_2(\varepsilon_0)$ второй гармоники при x = L:

$$\varepsilon_{1}(\varepsilon_{0}) = \frac{\varepsilon_{0} \exp(-\eta L)}{\left[1 + a_{1}\beta[1 - \exp(-m\eta L)]\varepsilon_{0}^{m}\right]^{1/m}}, \ \Delta\tau_{1}(\varepsilon_{0}) = \frac{\gamma b_{1}}{2C_{0}} \cdot \int_{0}^{L} \varepsilon_{1}^{n}(\varepsilon_{0})dx, \qquad (4.46)$$

$$\varepsilon_2(\varepsilon_0) = 2Kga_2 \exp[-4\eta L] \cdot \int_0^L \varepsilon_1^p(\varepsilon_0) \exp[4\eta x] dx, \qquad (4.47)$$

где
$$\eta = \frac{\alpha \Omega^2}{2C_0^3}$$
, $a_1 = \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma[(m+1)/2]}{m(m+2)\Gamma(m/2)}$, $b_1 = \frac{4}{\pi^{1/2}} \frac{(n+1)\Gamma[(n+1)/2]}{n(n+2)\Gamma(n/2)}$, $a_2 = \frac{2^{3-p}\Gamma(p+1)}{p(p+2)\Gamma^2(p/2)}$.

Из этих выражений видно, что амплитуда $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$ и нелинейная фазовая задержка $\Delta \tau_1(\varepsilon_0)$ прошедшей через песок волны основной частоты и амплитуда $\varepsilon_2(\varepsilon_0)$ ее второй гармоники зависят от амплитуды ε_0 излучаемого импульса и показателей степени *m* и *n*, *p* диссипативной и реактивной нелинейности, причем, если $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$ зависит только от *m*, то $\Delta \tau_1(\varepsilon_0)$ зависит и от *m* (через амплитуду $\varepsilon_1(\varepsilon_0)$) и от *n*, а $\varepsilon_2(\varepsilon_0)$ - в основном от *p* (при малом самовоздействии, когда $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_0$), а при заметном самовоздействии - и от *p* и от *m*. Из сравнительного анализа амплитудных зависимостей выражений (4.46), (4.47) с результатами экспериментальных измерений (учитывая, что $\varepsilon_0 \sim V_0$) можно определить показатели степеней нечетных реактивной *n* и диссипативной *m* нелинейности сухого и водонасыщенного песка для каждой серии измерений. Наиболее легко (по тангенсу угла наклона зависимости $\Delta \tau_1 = \Delta \tau_1(V_0)$ в логарифмических координатах) определяется показатель *n* для сухого (рис. 4.27 г) и водонасыщенного песка, когда имеет место лишь небольшое ограничение амплитуды волны (при $\beta > 0$).

Так из рис. 4.27 г видно, что для сухого песка при $\varepsilon_1 < 10^{-5}$ - $n \cong 5$, а при $10^{-5} < \varepsilon_1 < 5 \cdot 10^{-5}$ - $n \cong 1$. Из рис. 4.28 а - г следует, что для водонасыщенного песка при малых амплитудах ε_1 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_{th} \cong 10^{-6} - 10^{-5}$ - значения ε_{th} различны для различных серий измерений) и средних ε_1 ($\varepsilon_1 > \varepsilon_{th}$), когда $\varepsilon_1 \sim \varepsilon_0$, имеют место зависимости: $\Delta \tau(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^d$ и $n \cong d$, где $d \cong 3$;1/2 - для рис. 4.28 а, г; $d \cong 3$;1 - для рис. 4.28 б; $d \cong 5$;1 - для рис. 4.28 в. При больших амплитудах ε_1 , когда эффект ограничения амплитуды вполне заметен, имеем: $\Delta \tau(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^d$, где $d \cong 1/2$;1, но, вообще говоря, $d \neq n$. Из второго выражения (4.46) можно определить параметры нечетной упругой нелинейности γ для сухого и водонасыщенного песка. Для двух серий измерений, показанных на рис. 8.27 г и рис. 8.28 г, когда эффекты ограничения амплитуды малы и $\Delta \tau_1(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_0^n$, а n = 1 и n = 3 соответственно, находим: $\gamma \equiv 5.4 \cdot 10^2$ - для сухого песка и $\gamma \cong 10^{15}$ - для водонасыщенного.

Используя результаты эксперимента, т.е. зависимости $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(V_0)$ на рис. 4.27 и рис. 4.28 и подход из п. 4.2.2, построим графики зависимостей $\ln[\ln(N/M)]$ от $\ln N$; точки $\varepsilon_1^*(L)$ на рис. 8.27, рис. 8.28 указаны стрелками. Такие графики, для двух исходных зависимостей (рис. 4.27а и рис. 4.28г), приведены на рис. 4.29; из них видно, что для этих измерений m = 3/2 - для сухого песка (1), и m = 1 - для водонасыщенного (2), при этом параметры диссипативной нелинейности составляли, соответственно, $\beta \cong 1.3 \cdot 10^8$ и $\beta \cong 1.8 \cdot 10^5$. Значения показателей m, определенных аналогично для других измерений значения m различны: для сухого песка m = 3/2 (рис. 4.27 а, в) и m = 3 (рис. 4.27 б, г), а для водонасыщенного - m = 1 (рис. 4.28 б - г) и m = 2 (рис. 4.28 а).



Рис. 4.29 Нахождение параметра *т* для сухого (1) и водонасыщенного (2) песка.

Для водонасыщенного песка, в том эксперименте, когда имело место самопросветление (рис. 4.28 д), аналогично было определено, что $m \approx 0.15$ (при этом $\beta < 0$). Из сравнения значений показателей степеней *m* и *n*, определенных в одной серии измерений, можно сделать вывод: поскольку эти значения, как правило, различны, то и механизмы нечетных реактивной и диссипативной нелинейности сухого и водонасыщенного речного песка, ответственных за проявления эффектов амплитудно-фазового самовоздействия, также различны. Упругая нелинейность таких сред связана с контактами Герца между зернами различного размера, а

диссипативная – с силами нелинейного трения на границах этих зерен: поскольку микроскопическая конфигурация слабо поджатых зерен (т.е. функция распределения контактов по начальным поджатиям) в массиве речного песка, после каждого ударного воздействия на емкость, изменяется, то каждый раз параметры акустической нелинейности таких сред принимают другие значения.

Далее, из амплитудных зависимостей для вторых гармоник $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_0)$ следует, что показатели степени p четной реактивной нелинейности, отвечающие разным сериям измерений также различны: для сухого песка - $p \cong 2$ (рис. 4.27 а), $p \cong 3$ (рис. 4.27 б, г), $p \cong 1$ (рис. 4.27 в, г), а для водонасыщенного - $p \cong 2$ (рис. 4.28 а, б), $p \cong 4$ (рис. 4.28 в), $p \cong 3$ (рис. 4.28 г), $p \cong 1$ (рис. 4.28 д). Приведем оценки параметров g квадратичной четной упругой нелинейности для сухого и водонасыщенного песка, полученные из выражения (4.47) и результатов измерений (рис. 4.27 а и рис. 4.28 а), для которых $\varepsilon_1 \sim V_0$, p = 2 и $\varepsilon_2(\varepsilon_0) \sim \varepsilon_1^2(\varepsilon_0)$. Здесь, однако, необходимо учитывать условность выражения для линейного диссипативного слагаемого $\alpha \rho \dot{\varepsilon}$ в уравнении (4.44), отвечающего вязким потерям и определяющим квадратичную зависимость коэффициента затухания волны от ее частоты.

Реально же, для речного песка, эта зависимость может быть иной, но результат (расчета параметра g) будет правильным, если знать коэффициенты $\eta_1 L = \eta(\Omega)L$ и $\eta_2 L = \eta(2\Omega)L$ линейного затухания волны на частотах Ω и 2Ω . Для исследуемых сред они определялись экспериментально:

$$\eta_1 L \cong 5 \cdot 10^{-1}, \ \eta_2 L \cong 2,8$$
 - для сухого песка;
 $\eta_1 L \cong 7 \cdot 10^{-1}, \ \eta_2 L \cong 3$ - для водонасыщенного.

В этом случае выражение (4.47) имеет вид:

$$\varepsilon_{2}(\varepsilon_{0}) = \frac{2Kga_{2}\varepsilon_{0}^{2}[\exp(-2\eta_{1}L) - \exp(-\eta_{2}L)]}{\eta_{2} - 2\eta_{1}},$$
(4.48)

из которого находим, что $g \cong 5$ - для сухого песка и $g \cong 12$ - для водонасыщенного.

4.3.4. Амплитудная модуляция звука звуком в водонасыщенном речном песке

Поиск и обнаружение "необычных" нелинейных эффектов при распространении упругих волн в геофизических структурах, к которым относится и речной песок, составляет одну из актуальных задач современной нелинейной акустики. Лабораторные эксперименты показали,

что речной песок обладает диссипативной акустической нелинейностью. Диссипативная нелинейность проявляется в том, что коэффициент диссипации среды оказывается зависящим от амплитуды акустической волны. В результате, при распространении в среде с диссипативной нелинейностью двух волн различных частот – мощной низкочастотной (НЧ) и слабой высокочастотной (ВЧ), будут наблюдаться эффекты затухания звука на звуке или "усиления" звука звуком, а при амплитудно-модулированной мощной НЧ волне, вследствие модуляции коэффициента диссипации среды, будет иметь место амплитудная модуляция слабой, пробной ВЧ волны, т.е. перенос амплитудной модуляции с мощной волны на слабую, пробную волну. Такой динамический (или модуляционный) эффект затухания звука на звуке наблюдался при проведении натурного сейсмоакустического эксперимента на поверхностных волнах в сыром песчаном грунте [Багмет и др., 1996)]. (В нелинейной оптике такой эффект называется кроссмодуляцией.) С целью обнаружения этого эффекта в контролируемых и управляемых условиях нами был проведен лабораторный эксперимент по наблюдению амплитудной модуляции слабой относительно ВЧ волны под действием периодической последовательности сильных НЧ импульсов в зернистой среде - водонасыщенном речном песке. Отметим, что в обычных, однородных средах, например, в воде, в силикатном и органическом стеклах, многих металлах стали, молибдене, титане и др., такой эффект не наблюдается.

Схема этого эксперимента аналогична схеме предыдущего и приведена на рис. 4.14. Водонасыщенный речной песок находился в тонкостенной емкости диаметром 16 см и высотой 22 см. Эксперименты проводились при статическом давлении $P_0 \cong 6.2 \cdot 10^3$ Па. В песке, при помощи двух акустических излучателей: низкочастотного и высокочастотного, находящихся, соответственно, на одной оси и на глубинах $h_1 = 13$ см и $h_2 = 10.5$ см от поверхности песка, возбуждались, распространяющиеся в вертикальном направлении (снизу вверх), продольные НЧ импульсы с несущей частотой F = 4 кГц, длительностью T = 10 мс и периодом повторения $T_0 = 35$ мс, и непрерывная ВЧ волна с частотой f = 18 кГц. Диаметр излучателей составлял, соответственно, 8 см и 4 см. Для регистрации прошедших через песок акустических волн использовался приклеенный к центру той же пластины 3 (на которой располагались грузы), и находящийся на оси излучателей, пьезоакселерометр 4. Сигналы с пьзоакселерометра, через систему фильтров поступали на двухканальный цифровой осциллоскоп-спектроанализатор 5, где отображались осциллограммы НЧ и ВЧ волн.

В этом эксперименте наблюдались эффекты амплитудной модуляции слабой непрерывной ВЧ волны под действием периодической последовательности мощных НЧ импульсов, причем наблюдалось как затухание звука на звуке, так и "усиление" звука звуком. В

179

первом случае эти эффекты связаны с увеличением диссипации среды под действием мощной НЧ волны, а во втором, - с ее уменьшением. На рис. 4.30 и 4.31 приведены две характерные для этих случаев осциллограммы, принятых пьезоакселерометром НЧ импульсов и ВЧ волны, из которых видно, что во время действия НЧ импульса амплитуда ВЧ волны изменяется, а именно, уменьшается почти в 10 раз (рис. 4.30) или увеличивается более чем в 2 раза (рис. 4.31). Затухание звука на звуке имело место после довольно продолжительного времени (более суток) после "долива" воды, а "усиление" звука звуком, как правило, наблюдалось вначале, при относительно большом водонасыщении песка. Заметим, что на рис. 4.30 и рис. 4.31 представлены, по-существу, два близких к предельным случая проявления модуляционных эффектов, а именно, большого затухания звука на звуке и большого "усиления" звука звуком, при этом в большей части наблюдений имели место "промежуточные" осциллограммы, когда амплитудная модуляция звука звуком была меньше, чем на рис. 4.30 и 4.31, а при переходе от "усиления" к затуханию модуляционных эффектов вообще не наблюдалось.



Рис. 4.30. Осциллограммы НЧ импульсов (внизу) и ВЧ исходно непрерывной волны, принятых пьезоакселерометром, при затухании звука на звуке.


Рис. 4.31. Осциллограммы НЧ импульсов (внизу) и ВЧ исходно непрерывной волны, принятых пьезоакселерометром, при "усилении" звука звуком.

Обнаруженные нелинейные эффекты можно объяснить в рамках феноменологического уравнения состояния (4.44). Расчеты показывают, что в такой среде амплитуда ВЧ волны (на расстоянии *L* от излучателя) будет промодулирована по закону:

$$U(t) = \exp\left(-\frac{\alpha\beta\omega^{2}L}{2\pi^{1/2}C_{0}^{3}}\left[\frac{\Gamma[(m+1)/2]}{\Gamma[(m+2)/2]}\right]\varepsilon_{0}^{m}\Pi(t)\right),$$
(4.49)

где ε_0 и $\Pi(t)$ - амплитуда деформации и прямоугольная функция модуляции (или огибающая) НЧ импульсов, $\omega = 2\pi f$. Из этого выражения следует, что при малых амплитудах ε_0 деформации НЧ импульсов, когда $\frac{\alpha |\beta| \omega^2 L}{2\pi^{1/2} C_0^3} \left[\frac{\Gamma[(m+1)/2]}{\Gamma[(m+2)/2]} \right] \varepsilon_0^m <<1$, среда ведет себя практически линейно и слабая ВЧ волна распространяется не испытывая влияния сильной, а по мере увеличения амплитуды ε_0 нелинейность среды становится все более заметной, ее диссипация изменяется и амплитуда ВЧ волны также изменяется: при $\beta > 0$ - U(t) < 1, а при $\beta < 0$ -U(t) > 1. Именно такое поведение слабой ВЧ волны с ростом амплитуды НЧ импульса и наблюдалось в эксперименте с водонасыщенным речным песком, и именно это свойство и поведение среды отражает уравнение состояния (4.44). Для ньютоновских сред (вода, стекло и т.д.) параметр диссипативной нелинейности $\beta = 0$ и U(t) = 1, поэтому в них подобные модуляционные эффекты не наблюдаются.

Таким образом, результаты лабораторного эксперимента по амплитудной модуляции звука звуком свидетельствуют о том, что сырой речной песок обладает диссипативной

181

акустической нелинейностью, зависящей от водонасыщенности; ее механизм связан с проявлением нелинейного динамического трения на границах контактирующих друг с другом песчинок. Наличие диссипативной нелинейности существенно расширяет "спектр" волновых процессов в подобных средах, что можно использовать для их сейсмоакустической диагностики.

4.4. Выводы к Главе 4

- Экспериментально установленные амплитудные зависимости нелинейных акустических эффектов в образцах цементного материала с различным водоцементным отношением раствора показал, что акустическая нелинейность таких материалов содержит НЧ упругую и гистерезисную и ВЧ реактивную составляющие. Установлено, что увеличение водоцементного отношения с 0.5 до 0.9 приводит к уменьшению фазовой скорости продольных НЧ волн в 1.5 раза, к уменьшению групповой скорости продольных ВЧ волн в 2 раза, а также к сильному (почти в 70 раз) росту его НЧ эффективной квадратичной нелинейности и заметному увеличению ВЧ реактивной нелинейности.
- 2. Обнаружена дробно-степенная гистерезисная нелинейность в образцах из известняка и цементного материала с водоцементным отношением 0.6.
- 3. Установлено, что акустическая нелинейность трехфазной среды (частично водонасыщенный песок) является квадратичной в значительной части диапазона амплитуд накачки, в отличие от "хлопающей" герцевской нелинейности контактов, наблюдавшейся как в сухом, так и полностью водонасыщенном речном песке. Такое отличие, обусловлено влиянием капиллярных сил в тонких межзеренных "мостиках" жидкости), которые препятствуют смещениям слабо поджатых зерен.
- 4. В результате лабораторного эксперимента по амплитудной модуляции звука звуком в водонасыщенном песке обнаружена диссипативная акустическая нелинейность, зависящая от количества воды в песке; ее механизм связан с проявлением нелинейного динамического трения на границах контактирующих друг с другом песчинок.

Результаты главы опубликованы в [М1 - М3, СВ1, СВ4, СВ6, СВ8 - СВ13, СВ23].

Заключение

Сформулируем основные результаты, полученные в диссертации:

1. Получены и проанализированы новые точные (для целочисленных значений степени) и приближенные (для произвольных значений степени) аналитические решения для импульсных и непрерывных волн в средах с гистерезисной нелинейностью произвольной степени без учета линейной диссипации. Также, для произвольного значения степени предложено аналитическое решение в виде самоподобной волны.

2. С помощью полученного аналитического решения произведена оценка степени и параметров гистерезисной нелинейности образцов из алюминия, подверженных различной степени отжига.

3. Получены точные аналитические решения для самоподобного импульса в среде с квадратичным гистерезисом и диссипацией вязкого типа.

4. Получены точные аналитические решения для распространения импульсных и непрерывных волн в разномодульных средах при учете различных диссипативных и дисперсионных свойств среды: линейной диссипации, линейной релаксации, дисперсии.

5. Разработаны численные схемы для исследования распространения волн в средах с разномодульной и гистерезисной нелинейностьями при учете линейной диссипации вязкого типа.

6. Получено нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие распространение одномерных акустических волн в микронеоднородных средах, содержащих одинаковые вязкоупругие дефекты с квадратичной упругой и разномодульной нелинейностями. Приведены численные решения этих уравнения для стационарных волн типа симметричного скачка и нелинейного искажения первоначально гармонических волн.

7. На основе результатов экспериментальных исследований нелинейных эффектов в консолидированных и гранулированных средах определены параметры феноменологических уравнений состояния, наиболее чувствительные к структуре и состоянию среды.

В заключение хотелось бы отметить что, поскольку в данной работе предмет исследований составляли нелинейные эффекты, возникающие при распространении и взаимодействии исключительно одномерных продольных упругих волн, то, безусловно, необходимо и интересно будет провести подобные исследования в аналогичных микронеоднородных средах и для сдвиговых волн, а также для комбинации продольных и сдвиговых волн, в том числе и неодномерных.

Работы автора по теме диссертации

Монографии и главы в монографиях

М1. В. Е. Назаров, **А. В. Радостин**, *Нелинейные волновые процессы в упругих микронеоднородных средах*, Нижний Новгород, ИПФ РАН, 2007, 256 с.

M2. V. Nazarov, A. Radostin, *Nonlinear Acoustic Waves in Micro-inhomogeneous Solids*, John Wiley & Sons (2015).

M3. V.E. Nazarov, A.B. Kolpakov, **A.V. Radostin**, Nonlinear Acoustic Phenomena in Granite, In book "*Granite: Occurrence, Mineralogy and Origin*", /Eds. M. Blasik, and B. Hanika, Nova Publishers, NY, P. 117-130 (2012).

<u>Публикации в журналах, включенных в список ВАК и/или входящих в</u> мировые индексы цитирования (SCOPUS, Web of Science)

СВ1. Назаров В.Е., **Радостин А.В.**, Зайцев В.Ю. Самодетектирование акустических импульсов в частично водонасыщенном речном песке// **Акуст. журн.** 2006. Т. 52. № 3. С. 360-366.

СВ2. Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Численное моделирование динамических гистерезисов для микронеоднородных сред с несовершенной упругостью и релаксацией// **Акуст. журн.** 2006. Т. 52. № 4. С. 514-520.

СВЗ. Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Акустические волны в микронеоднородных средах с квадратичной упругой нелинейностью и релаксацией // Акуст. Журн., 2006, Т. 52, N6, С. 825-832.

СВ4. Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Экспериментальное исследование нелинейных акустических эффектов в известняке// Акуст. журн. 2007. Т. 53. № 2. С. 254-263.

СВ5. Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Распространение однополярных импульсов деформации в средах с гистерезисной нелинейностью// **Акуст. журн.** 2008. Т. 54. № 6. С. 914-919.

СВ6. Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Амплитудно-зависимое внутреннее трение и генерация гармоник в резонаторе из гранита// **Акуст. журн.** 2009. Т. 55. № 1. С. 82-90.

СВ7. Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Самовоздействие сейсмоакустической волны в сыром песчаном грунте// Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 3. С. 331-334.

СВ8. Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Самовоздействие низкочастотной акустической волны и генерация второй гармонике в сухом и водонасыщенном речном песке// **Акуст. журн.** 2010. Т. 56. № 1. С. 82-90.

СВ9. Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Исследование нелинейных волновых процессов в акустическом резонаторе из мрамора// **Физическая Мезомеханика**. 2010. Т. 13. № 2. С. 41-53.

CB10. V. E. Nazarov, A. B. Kolpakov, and **A. V. Radostin**, Propagation of Weak Ultrasonic Pulses in an Intense Low Frequency Wave Field in a Granite Resonator// **Acoustical Physics**, 2010, Vol. 56, No. 4, pp. 453-456.

СВ11. Назаров В.Е., Колпаков А.Б., **Радостин А.В.** Самовоздействие ультразвуковых импульсов в стержне из мрамора// **Акуст. журн.** 2010. Т. 56. №5, С. 597-601.

СВ12. Назаров В.Е., **Радостин А.В.** Амплитудная модуляция звука звуком в водонасыщенном речном песке// **Акуст. журн.** 2011. Т. 57. № 5. С. 596-599.

CB13. V. E. Nazarov, A. B. Kolpakov, and **Radostin A. V.**, Amplitude-dependent internal friction, hysteretic nonlinearity, and nonlinear oscillations in a magnesite resonator// **J. Acoust. Soc. Am.**, 132

(1), 28-36 (2012).

CB14. A. Radostin, V. Nazarov, S. Kiyashko, Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation// **Wave Motion**, 50 (2), 191-196 (2013).

СВ15. Назаров В.Е., Радостин А.В., Кияшко С.Б., Самоподобные акустические волны в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией// Изв. Вузов Радиофизика. 2015. Т. 58. №2, С. 134-141.

СВ16. Назаров В. Е., Кияшко С. Б., Радостин А. В., Самоподобные волны в средах с разномодульной упругой нелинейностью и релаксацией// Нелинейная динамика, 2015. Т. 11. № 2, с. 209-218.

СВ.17.Назаров В.Е., Кияшко С.Б., **Радостин А.В.** Эволюция акустических волн в однородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией// **Изв. Вузов Радиофизика.** 2015. Т. 58. №10, С. 811-820.

СВ18. Назаров В.Е., , Кияшко С.Б., Радостин А.В. Волновые процессы в мкронеоднородных средах с разномодульной нелинейностью и релаксацией// Изв. Вузов Радиофизика. 2016. Т. 59. №3, С. 275-285.

CB19. A Radostin, V Nazarov, S Kiyashko. (2017) Propagation of acoustic unipolar pulses and periodic waves in media with quadratic hysteretic nonlinearity and linear viscous dissipation. // **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 52, 44-51.

CB20. V.E. Nazarov, S.B. Kiyashko, **A.V. Radostin**, Stationary waves in a bimodular rod of finite radius // **Wave Motion** 75 (2017) 72–76.

CB21. A. Radostin, Acoustic Pulses in Media with Power Law Hysteretic Nonlinearity // Acta Acust united Ac, 104 (2018), 410-416.

СВ22. Назаров В.Е., Кияшко С.Б., **Радостин А.В.**, Акустические волны в средах с квадратично - разномодульной нелинейностью и линейной диссипацией // **Изв. Вузов Радиофизика.** 2018. Т. 61. №6, С. 474-482.

CB23. V. E. Nazarov, A. B. Kolpakov, and **Radostin A. V.**, Effect of water-to-cement ratio on acoustic nonlinearity of a cement stone // **Journal of Nondestructive Evaluation**. 2019. 38(1):24.

CB24. A Radostin, V Nazarov, S Kiyashko, A Kurkin, Sawtooth waves in solids with power law hysteretic nonlinearity // Wave Motion. 2019. 91:102398.

Список литературы

1. Aleshin V, Gusev V, Zaitsev VYu. (2004). Propagation of acoustics waves of nonsimplex form in a material with hysteretic quadratic nonlinearity: analysis and numerical simulations. *Journal of Computational Acoustics*, *12* (3), 319-354.

2. Asano S. (1970). Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis. *Journal of the Physical Society of Japan , 29* (4), 952-963.

3. de Billy M. (2004). Power spectrum of shear waves in finite one dimensional granular medium. *JASA*, *116* (2), 713-716.

4. de Richter SK, Zaitsev VY, Richard P, Delannay R, Le Caër G, Tournat V. (2010). Experimental evidence of ageing and slow restoration of the weak-contact configuration in tilted 3D granular packings. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 11, P11023.

5. Fenlon FH. (1971). A recursive procedure for computing the nonlinear spectral interaction of progressive finite-amplitude waves in nondispersive fluids. *JASA*, *50* (5B), 1299-1312.

6. Granato AV, Lücke K. (1956). Theory of mechanical damping due to dislocations. *Journal of applied physics*, *27* (6), 583-593.

7. Gusev V. (2006). Profiles of initially sinusoidal waves propagating in nonlinear microinhomogeneous materials. *Ultrasonics*, 44, e1335-e1338.

8. Gusev V. (2000). Propagation of acoustic pulses in material with hysteretic nonlinearity. *JASA*, *107* (6), 3047-3058.

9. Gusev V, Glorieux C, Lauriks W, Thoen J. (1997). Nonlinear bulk and surface shear acoustic waves in materials with hysteresis and end-point memory. *Physics Letters A*, 232 (1-2), 77-86.

10. Gusev V, Musatov A, Castagnede B. (2001). Observation of nonlinear interaction of acoustic waves in granular materials: demodulation process. *Phys. Lett. A*, 283 (3-4), 216-223.

11. Guyer RA, Johnson PA. (2009). *Nonlinear mesoscopic elasticity: the complex behaviour of rocks, soil, concrete.* John Wiley & Sons.

12. Haupert S, Renaud G, Riviere J, Talmant M, Johnson PA, Laugier P. (2011). High-accuracy acoustic detection of nonclassical component of material nonlinearity. *JASA*, *130* (5), 2654-2661.

13. Hedberg CM, Rudenko OV. (2011). Dissipative and hysteresis loops as images of irreversible processes in nonlinear acoustic fields. *Journal of Applied Physics*, *110* (5), 053503.

14. Inserra C, Tournat V, Gusev V. (2008). Characterization of granular compaction by nonlinear acoustic resonance method. *Applied physics letters*, *92* (19), 191916.

15. Jaeger HM, Nagel SR, Behringer RP. (1996). Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of modern physics*, *68* (4), 1259-1273.

16. Jia X. (2004). Codalike Multiple Scattering of Elastic Waves in Dense Granular Media. *Phys. Rev. Lett.*, *93* (15), 154303(1-4).

17. Jia X, Caroli C, Velicky B. (1999). Ultrasound propagation in externally stressed granular media. *Phys. Rev. Lett.*, *82* (9), 1863-1866.

18. Johnson PA, Zinszner B, Rasolofosaon PN. (1996). Resonance and elastic nonlinear phenomena in rock. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth , 101* (B5), 11553-11564.

19. Koehler JS. (1952). *Imperfections in nearly perfect crystals*. John Whiley & Sons.

20. Lee-Bapty IP, Crighton DG. (1987). Nonlinear wave motion governed by the modified Burgers equation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences , 323* (1570), 173-209.

21. Li Y, Matar OB, Li B, Chen X. (2015). Pseudo-spectral simulation of 1D nonlinear propagation in heterogeneous elastic media. *Wave Motion*, *52*, 54-65.

22. Masing G. (1926). Eigenspannumyen und verfeshungung beim messing. *Proc. Inter. Congress for Applied Mechanics*, (ctp. 332-335).

23. Mason WP, editor. (2013). *Physical acoustics: principles and methods.* Academic press.

24. Nazarov VE. (2001). Acoustic nonlinearity of cracks partially filled with liquid: Cubic approximation. *JASA*, *109* (6), 2642-2648.

25. Nazarov VE, Kolpakov AB. (2000). Experimental investigations of nonlinear acoustic phenomena in polycrystalline zinc. *JASA*, *107* (4), 1915-1921.

26. Nazarov VE, Ostrovsky LA, Soustova IA, Sutin AM. (1988). Nonlinear acoustics of micro-inhomogeneous media. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, *50* (1), 65-73.

27. Nazarov VE, Zaitsev VYu, Beliaeva IYu. (2002). Nonlinear transformation of acoustic waves in microinhomogeneous media with relaxation. *Acta Acustica. Acustica , 88* (1), 40-49.

28. Ostrovsky LA, Johnson PA. (2001). Dynamic nonlinear elasticity in geo materials. *Rivista del Nuovo Cimento della Societa Italiana di Fisica , 24* (7), 1-46.

29. Pavlenko OV. (2001). Nonlinear seismic effects in soils: numerical simulation and study. *Bulletin of the Seismological Society of America , 91* (2), 381-396.

30. Payan C, Garnier V, Moysan J. (2010). Effect of water saturation and porosity on the nonlinear elastic response of concrete. *Cem. Concr. Res.*, 40, 473-476.

31. Philippidis NP, Aggelis DG. (2003). An acousto-ultrasonic approach for the determination of water-to cement ratio in concrete. *Cem. Concr. Res.*, *33*, 525-538.

32. Podlubny I. (1998). Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. Elsevier.

33. Radostin A, Nazarov V, Kiyashko S. (2013). Propagation of nonlinear acoustic waves in bimodular media with linear dissipation. *Wave Motion*, *50* (2), 191-196.

34. Read TA. (1940). The internal friction of single metal crystals. *Physical Review*, 58 (4), 371-380.

35. Reichel W, Conrad D. (1976). *Beton. B 1.* Berlin: Veb Varfag für Bauwesen.

36. Richard P, Nicodemi M, Delannay R, Ribiere P, Bideau D. (2005). Slow relaxation and compaction of granular systems. *Nature materials*, *4* (2), 121-128.

37. Samsonov AM. (2001). Strain solitons in solids and how to construct them. CRC Press.

38. Swartz JC, Weertman J. (1961). Modification of the Koehler-Granato-Lücke dislocation damping theory. *Journal of Applied Physics , 32*, 1860-1865.

39. Takahashi S. (1956). Internal friction and critical stress of copper alloys. *Journal of the Physical Society of Japan*, *11* (12), 1253-1261.

40. Tournat V, Castagnède B, Gusev VE, Béquin Ph. (2003). Self-demodulation acoustic signatures for nonlinear propagation in glass beads. *C. R. Mecanique*, *331*, 119-125.

41. Tournat V, Zaitsev V, Gusev V, Nazarov V, Bequin P, Castagnede B. (2004). Probing granular media by acoustic parametric emitting antenna: clapping contacts, nonlinear dilatancy and polarization anisotropy. *Phys. Rev. Lett.*, *92* (8), 085502(1-4).

42. Van Den Abeele KE, Johnson PA, Guyer RA, McCall KR. (1997). On the quasi-analytic treatment of hysteretic nonlinear response in elastic wave propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, *101* (4), 1885-1898.

43. Warnemuende K, Wu H-C. (2004). Actively modulated acoustic nondestructive evaluation of concrete. *Cem. Concr. Res.*, *34*, 563-570.

44. Yasumoto Y, Nakamura A, Takeuchi R. (1974). Developments in the use of acoustic shock pulses in the study of elastic properties of solids. *Acta Acustica united with Acustica , 30* (5), 260-267.

45. Zaitsev VY, Gusev VE, Zaytsev YV. (2005). Mutually induced variations in dissipation and elasticity for oscillations in hysteretic materials: Non-simplex interaction regimes. *Ultrasonics*, *43* (8), 699-709.

46. Амбарцумян СА. (1982). Разномодульная теория упругости. Москва: Наука.

47. Антонец ВА, Донской ДМ, Сутин АМ. (1986). Нелинейная вибродиагностика расслоений и непроклея в многослойных конструкциях. *Механика композитных материалов*, *5*, 934-937.

48. Анцыферов МС, Анцыферова НГ, Каган ЯЯ. (1964). Распространение ультразвуковых волн в сухом песке под давлением . *Изв. Акад. Наук СССР, сер. Геофиз.* (12), 1774-1781.

49. Багмет АЛ, Назаров ВЕ, Николаев АВ, Резниченко АП, Поликарпов АМ. (1996). Амплитудная модуляция "звука звуком" в грунте Земли. *ДАН , 346* (3), 390-391.

50. Беляева ИЮ, Зайцев ВЮ, Островский ЛА. (1993). Нелинейные акустоупругие свойства зернистых сред. *Акустический журнал*, *39* (1), 25-32.

51. Бетехтин ВИ, Кадомцев АГ, Кардашев БК. (2006). Упругость и неупругость микрокристаллического алюминия с различной деформационной и тепловой предысторией. *Физика твердого тела*, *48* (8), 1421-1427.

52. Вильчинская НА. (1982). Волна переупаковки песков и акустическая эмиссия. *ДАН СССР*, *262* (3), 568-572.

53. Гольдин СВ, Колесников ЮИ, Полозов СВ. (1999). Распространение акустических волн в грунтах в условиях изменяющегося сдвигового напряжения (вплоть до разрушения образцов)/, 1999, Т.2, N6, с.105-113. *Физическая мезомеханика , 2* (6), 105-113.

54. Громов ЕМ, Тютин ВВ. (1997). Стационарные волны в обобщенном уравнении КдВ-Бюргерса. *Изв. Вузов "Радиофизика" , 40* (10), 1241-2148.

55. Гурбатов С, Руденко О, Саичев А. (2008). Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике. Москва: ФИЗМАТЛИТ.

56. Давиденков НН. (1938). О рассеянии энергии при вибрациях. *ЖТФ*, 8 (6), 156-161.

57. Девис РМ. (1961). Волны напряжений в твердых телах. Москва: ИИЛ.

58. Зайцев ВЮ. (1995). Численное моделирование нелинейных упругих свойств зернистных сред с неидеальной упаковкой. *Акуст. журн.*, *41* (3), 439-445.

59. Зайцев ВЮ, Гурбатов СН, Прончатов-Рубцов НВ. (2009). *Нелинейные акустические явления в структурно-неоднородных средах*. Нижний Новгород: ИПФ РАН.

60. Зайцев ВЮ, Колпаков АБ, Назаров ВЕ. (1999). Детектирование акустических импульсов в речном песке. Теория. *Акуст.журн.*, *45* (3), 347-353.

61. Зайцев ВЮ, Колпаков АБ, Назаров ВЕ. (1999). Детектирование акустических импульсов в речном песке. Эксперимент. *Акуст. журн. , 45* (2), 235-241.

62. Зайцев ВЮ, Назаров ВЕ, Беляева ИЮ. (2001). Уравнение состояния микронеоднородных сред и частотная зависимость их упругой нелинейности. *Акустический журнал*, *47* (2), 220-226.

63. Зайцев ВЮ, Назаров ВЕ, Таланов ВИ. (1999). Экспериментальное исследование самовоздействия сейсмоакустических волн. *Акуст. журн.*, *45* (6), 799-806.

64. Зарембо ЛК, Красильников ВА. (1966). Введение в нелинейную акустику: звуковые и ультразвуковые волны большой интенсивности. Москва: Наука.

65. Зименков СВ, Назаров ВЕ. (1993). Нелинейные акустические эффекты в образцах горных пород. *Физика Земли* (1), 13-18.

66. Исакович МА. (1979). Л.И.Мандельштам и распространение звука в микронеоднородных средах. *УФН*, *129* (3), 531-540. 67. Кащеева СС, Сапожников ОА, Хохлова ВА, Аверкю МА, Крам ЛА. (2000). Нелинейное искажение и поглощение мощных акустических волн в среде со степенной зависимостью коэффициента поглощения от частоты. *Акуст. журн , 46* (2), 211-219.

68. Колесников ЮИ, Медных ДА. (2004). О некоторых особенностях распространения волн во влажном песке. *Физическая мезомеханика , 7* (1), 69-74.

69. Коробов АИ, Бражкин ЮА, Нин Ван. (2005). Экспериментальные исследования упругой нелинейности в структурно-неоднородных материалах. *Акуст. журн.*, *51* (5), 663-671.

70. Лебедев АБ. (1999). Амплитудно-зависимый дефект модуля упругости в основных моделях дислокационного гистерезиса. *Физика твердого тела , 41* (7), 1214-1222.

71. Маслов ВП, Мосолов ПП. (1985). Общая теория решений уравнения движения разномодульной упругой среды. *ПММ*, 49 (3), 419.

72. Назаров ВЕ. (2008). Волновые процессы в поликристаллах с дислокационной диссипативной и реактивной нелинейностью// 2008, T.54, N2. с.283-290. *Акуст. журн. , 54* (2), 283-290.

73. Назаров ВЕ. (1999). Амплитудно-зависимое внутреннее трение свинца. ФММ, 88 (4), 82-90.

74. Назаров ВЕ. (2007). Влияние акустической нелинейности на характер нелинейных волновых процессов в твердых телах. Обратная задача// 2007, Т.53, N4. с.666-671. *Акуст. журн. , 53* (4), 666-671.

75. Назаров ВЕ. (1991). Влияние структуры меди на ее акустическую нелинейность. *Физика металлов и металловедение , 71* (3), 172-178.

76. Назаров ВЕ. (1991). Нелинейные акустические эффекты в отожженной меди. *Акуст. журн. , 37* (1), 150-156.

77. Назаров ВЕ. (2000). Об амплитудной зависимости внутреннего трения цинка. *Акуст. журн. , 46* (2), 228-233.

78. Назаров ВЕ. (1997). Распространение однополярного импульса в среде с гистерезисной нелинейностью. *Акуст. журн.*, *43* (2), 225-229.

79. Назаров ВЕ, Кияшко СБ. (2014). Акустические волны в средах с гистерезисной нелинейностью и линейной дисперсией. *Журнал технической физики , 84* (3), 1-7.

80. Назаров ВЕ, Кияшко СБ. (2013). Амплитудно-зависимое внутреннее трение и генерация гармоник в средах с гистерезисной нелинейностью и линейной диссипацией. *Изв. ВУЗов Радиофизика*, *56* (10), 762-773.

81. Назаров ВЕ, Колпаков АБ, Радостин АВ. (2010). Исследование нелинейных волновых процессов в акустическом резонаторе из мрамора. *Физическая мезомеханика*, *13* (2), 41-53.

82. Назаров ВЕ, Островский ЛА. (1990). Упругие волны в средах с сильной акустической нелинейностью. *Акуст. Журн. , 36* (1), 106-110.

83. Назаров ВЕ, Островский ЛА, Соустова ИА, Сутин АМ. (1988). Аномальная акустическая нелинейность в металлах. *Акуст. журн.*, *34* (3), 491-499.

84. Назаров ВЕ, Радостин АВ. (2003). Адгезионный механизм гистерезисной нелинейности трещиноватых сред. *Физика Земли* (2), 85-92.

85. Назаров ВЕ, Радостин АВ. (2007). *Нелинейные волновые процессы в упругих микронеоднородных средах.* Нижний Новгород: ИПФ РАН.

86. Назаров ВЕ, Радостин АВ. (2008). Распространение однополярных импульсов деформации в средах с гистерезисной нелинейностью. *Акуст. журн. , 54* (6), 914-919.

87. Назаров ВЕ, Радостин АВ. (2009). Самовоздействие сейсмоакустической волны в сыром песчаном грунте. *Акуст. журн.*, *55* (3), 331-334.

88. Назаров ВЕ, Радостин АВ. (2004). Экспериментальное исследование эффектов амплитуднозависимого внутреннего трения в резонаторе из песчаника. *Акуст.журн.*, *50* (4), 524-532.

89. Назаров ВЕ, Радостин АВ, Островский ЛА, Соустова ИА. (2003). Волновые процессы в средах с гистерезисной нелинейностью. Часть II. *Акуст. журн. , 49* (4), 529-534.

90. Назаров ВЕ, Радостин АВ, Островский ЛА, Соустова ИА. (2003). Волновые процессы в средах с гистерезисной нелинейностью. Часть І. *Акуст. журн.*, *49* (3), 405-415.

91. Назаров ВЕ, Сутин АМ. (1989). Генерация гармоник при распространении упругих волн в твердых нелинейных средах. *Акуст. журн. , 35* (4), 711-716.

92. Наугольных КА, Островский ЛА. (1990). *Нелинейные волновые процессы в акустике*. Москва: Наука.

93. Нестеренко ВФ. Распространение нелинейных импульсов сжатия в зернистых средах. ПМТФ. 1983(5):136. (1983). *ПМТФ* (5), 136-148.

94. Николаев АВ. (1979). Сейсмические свойства рыхлых сред. *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли* (1), 72-77.

95. Николаевский ВН. (1984). Механика пористых и трещиноватых сред. Недра.

96. Новиков БК, Руденко ОВ, Тимошенко ВИ. (1981). *Нелинейная гидроакустика.* Ленинград: Судостроение.

97. Пальмов ВА. (1976). Колебания упруго-пластических тел. Москва: Наука.

98. Пархоменко ИС. (1967). О зависимости затухания упругих волн от частоты в песке. *Физика Земли* (8), 101-109.

99. Пищальников ЮА, Сапожников ОА, Хохлова ВА. (1996). Модификация спектрального подхода к описанию нелинейных акустических волн с разрывами. *Акустический журнал*, *42* (3), 412-417.

Руденко ОВ. (2018). «Экзотические» модели физики интенсивных волн: линеаризуемые уравнения, точно решаемые задачи и неаналитические нелинейности. *Известия вузов. ПНД*, 26 (3), 7-34.

101. Руденко ОВ. (2006). Гигантские нелинейности структурно-неоднородных сред и основы методов нелинейной акустической диагностики. *Успехи физических наук*, *176* (1), 77-95.

102. Руденко ОВ. (2016). Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубичной нелинейностями. *Доклады Академии наук*, *471* (1), 23-27.

103. Руденко ОВ. (2016). Модульные солитоны. Доклады Академии наук, 471 (6), 651-654.

104. Руденко ОВ, Солуян СИ. (1975). Теоретические основы нелинейной акустики. Москва: Наука.

105. Царева НВ. (1956). Распространение упругих волн в песке. *Изв. Акад. Наук СССР, сер. Геофиз.* (9), 1044-1053.

106. Цытович НА. (1983). Механика грунтов. Москва: Высшая школа.

107. Ширгина НВ, Коробов АИ, Кокшайский АИ. (2013). Влияние статических и динамических внешних воздействий на упругие нелинейные свойства модели гранулированной неконсолидированной среды. *Акуст. журн. , 59* (5), 552-560.