На правах рукописи

Талецкий Дмитрий Сергеевич

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛИЧЕСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ И НАИБОЛЬШИХ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ В НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ДЕРЕВЬЕВ

Специальность 01.01.09 —

«дискретная математика и математическая кибернетика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2019 г.

Работа выполнена на кафедре алгебры, геометрии и дискретной математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент Малышев Дмитрий Сергеевич, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики

Официальные оппоненты:

Пяткин Артем Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор РАН, доцент, федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт математики имени С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук», главный научный сотрудник – заведующий лабораторией дискретной оптимизации в исследовании операций

Дайняк Александр Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент, федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», доцент кафедры дискретной математики

Ведущая организация: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского», кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Защита состоится 19 декабря 2019 г. в 16:20 на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, корп. 2, ауд. 254.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке и на сайте федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», http://www.unn.ru/

Автореферат разослан ____________________ 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20,
кандидат физико-математических наук,
доцент Николай Владимирович Кротов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследований

Химические соединения часто рассматриваются в форме так называемых молекулярных графов, где атомам соответствуют вершины графа, а связям между ними — ребра графа. При этом рассматриваемые свойства химических соединений описываются в терминах инвариантов их молекулярных графов, такие свойства называются топологическими индексами. Иными словами, топологические индексы — некоторые инварианты графов относительно переобозначения вершин и они позволяют аналитически исследовать некоторые аспекты химической структуры вещества. Например, значение винеровского индекса, который определяется как сумма длин кратчайших путей между всеми парами вершин заданного графа, задает точки кипения алканов[1]. В работе Хосойи[2] был представлен другой топологический индекс — количество всех паросочетаний заданного графа, который сейчас известен как Z-индекс или индекс Хосойи. В той же работе было показано, что значение этого индекса коррелирует с точками кипения и другими свойствами алканов. Третий пример — индекс Меррифилда и Симмонса[3], определяемый как количество независимых множеств графа, значения которого влияют на некоторые свойства углеводородов.

Поскольку топологические индексы определяют «энергию» химических соединений, то интересна задача по выявлению графов из заданных классов с экстремальным (минимальным или максимальным) значением того или иного топологического индекса. Графы с экстремальным значением топологических индексов могут быть полезны, например, при разработке новых лекарств. В настоящей диссертационной работе рассматриваются обобщения индекса Меррифилда-Симмонса — количества максимальных и наибольших независимых множеств в графах. Далее используются сокращения «н.м.», «м.н.м.» и «н.н.м.» для терминов «независимое множество», «максимальное независимое множество», и «наибольшее независимое множество», соответственно.

На сегодняшний день получено множество результатов, посвященных перечислению всех н.м. в различных классах графов. Так, например, известны достижимые верхние оценки количества всех н.м. для класса деревьев фиксированного диаметра[4] и для класса k-регулярных графов[5].

В 1965 году Мун и Мозер в известной статье[6] отыскали максимальное количество

[1]Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points // Journal of the American Chemical Society. — 1947. — Vol. 1, No. 69, P. 17–20.

[2]Hosoya H., Topological index. A newly proposed quantity characterizing the topological nature of structural isomers of saturated hydrocarbons // Bull. Chem. Soc. Jpn. — 1971. — Vol. 44, No. 9. — P. 2332–2339.

[3]Merrifield R. E., Simmons H. E. Topological methods in chemistry // Wiley, New York. — 1989.

[4]Pedersen A. S., Vestergaard P. D. An upper bound on the number of independent sets in a tree // Ars Combinatoria. — 2007. — Vol. 84. — P. 85–96.

[5]Zito J. The structure and maximum number of maximum independent sets in trees // Journal of Graph Theory. — 1991. — Vol. 15, No 2. — P. 207–221.

[6]Moon J., Moser L. On cliques in graphs // Israel Journal of Mathematics. — 1965. — Vol. 3, No 1. — P. 23–28.

м.н.м. в классе всех n-вершинных графов (этот результат был также независимо получен Миллером и Мюллером[7]). Кроме того, ими были найдены все соответствующие экстремальные графы. Несколько лет назад стали известны значительно более простые доказательства этого результата, одно из них содержится в работе[8].

Достижимая верхняя оценка количества м.н.м. в связных графах была найдена Фюреди в 1987 году[9] для графов, содержащих 50 и более вершин. Независимо от него год спустя этот же факт в работе[10] доказали Григгс, Гринстед и Гишар и описали все соответствующие экстремальные графы. В 1993 году Лю получил достижимую верхнюю оценку количества м.н.м. для класса двудольных графов и описал все соответствующие экстремальные графы, которые оказались лесами специального вида[11]. В этом же году Гуйтер и Тужа решили аналогичную задачу для класса n-вершинных графов без треугольников[12].

В 1984 году Коэн[13] привел некоторые оценки количества м.н.м. в деревьях. Два года спустя достижимая верхняя оценка количества м.н.м. в n-вершинных деревьях была доказана Вильфом[14]. Предложенное им доказательство носило алгебраический характер и было достаточно сложным для понимания. Еще через два года Саган предложил более простое теоретико-графовое доказательство[15], а также описал все соответствующие экстремальные деревья.

Работы, посвященные перечислению н.н.м. в графах, встречаются значительно реже. В работе Зито[16] была найдена достижимая верхняя оценка числа н.н.м. в деревьях и описаны все соответствующие экстремальные деревья. Обзор[17] содержит несколько других результатов подобного рода, в частности, приведена достижимая верхняя оценка числа н.н.м. в классе всех лесов и описаны все соответствующие экстремальные графы.

Интерес к исследованию именно деревьев с экстремальным количеством н.м. (м.н.м. или н.н.м.) не случаен. Это обусловлено тем фактом, что, как правило, рассуж-

---

[7] Miller R. E., Muller D. E. The problem of maximum consistent subsets // IBM Research Report RC-240. J. T. Watson Research Center, Yorktown Heights, N.Y. — 1960.

[8] Wood D. On the number of maximal independent sets in a graph. // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science. — 2011. — Vol. 13, No. 3. — P. 17–19.

[9] Furedi Z. The number of maximal independent sets in connected graphs // J. Graph Theory. — 1987. — Vol. 11. — P. 463–470.

[10] Griggs J., Grinstead C., Guichard D. The number of maximal independent sets in a connected graph // Discrete Mathematics. — 1988. — Vol. 68, No 2–3. — P. 211–220.

[11] Liu J. Maximal independent sets in bipartite graphs // Journal of Graph Theory. — 1993. — Vol. 17, No 1. — P. 495–507.

[12] Hujter M., Tuza Z. The number of maximal independent sets in triangle-free graphs // SIAM Journal of Discrete Mathematics. — 1993. — Vol. 6, No 2. — P. 284–288.

[13] Cohen D. Counting stable sets in trees // Seminaire Lotharingien de Combinatoire, 10eme session, R. Konig, ed., Institute de Recherche Mathematique Avancee Pub., Strasbourg, France. — 1984. — P. 48–52.

[14] Wilf H. The number of maximal independent sets in a tree // SIAM Journal of Algebraic Discrete Methods. — 1986. — Vol. 7, No 1. — P. 125–130.

[15] Sagan B. E. A note on independent sets in trees // SIAM J. Discr. Math. — 1988. — Vol. 1. — P. 105–108.

[16] Zito J. The structure and maximum number of maximum independent sets in trees // Journal of Graph Theory. — 1991. — Vol. 15, No 2. — P. 207–221.

[17] Jou M. J., Chang G. The number of maximum independent sets in graphs // Journal of Graph Theory. — 2000. — Vol. 4, No 4. — P. 685–695.

дения для недревесных случаев однотипны — из некоторых соображений выявляются оптимальные графы, вычисляется на них значение рассматриваемого функционала от количества вершин и применяется метод математической индукции. Для деревьев спектр используемых методов значительно шире. Тем самым, для деревьев можно рассматривать и надеяться на решение таких задач, которые в общем случае оказываются слишком сложными. Несколько ранее открытых задач по выявлению деревьев с экстремальным количеством м.н.м. или н.н.м. решаются в данной диссертации.

На сегодняшний день известно большое количество работ, посвященных перечислению н.м., м.н.м. и н.н.м. в классах графов, заданных параметрически. В 1983 году Коршуновым и Сапоженко[18] была найдена асимптотика количества н.м. в булевом кубе размерности n. В 1988 году Вебер[19] доказал существование конечного предела корня mn-ой степени из количества всех н.м. плоской прямоугольной решетки размера $m \times n$. В 2017 году Талецкий[20] доказал существование двойного предела корня mn-ой степени из количества м.н.м. в прямоугольных, цилиндрических и тороидальных решетках размера $m \times n$. В 1983 году группой австрийских математиков в работе[21] была найдена асимптотика количества всех н.м. в полных q-арных деревьях при стремлении высоты дерева к бесконечности. Аналогичный вопрос для м.н.м. был открыт и он решается в этой диссертации.

Таким образом, выбранная тематика диссертационной работы является актуальной.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью диссертационного исследования является решение нескольких задач экстремальной и перечислительной комбинаторики, связанных с максимальными и наибольшими независимыми множествами в некоторых классах деревьев.

Задачи диссертационного исследования состоят в следующем:

1. Описать все деревья с экстремальным количеством наибольших (максимальных) независимых множеств среди деревьев с заданными ограничениями.

2. Исследовать количество максимальных независимых множеств в полных q-арных деревьях при стремлении высоты деревьев к бесконечности.

[18] Коршунов А. Д., Сапоженко А. А. О числе двоичных кодов с расстоянием 2 // Проблемы кибернетики. — 1983. — Т. 40. — С. 111–130.

[19] Weber K. On the number of stable sets in an $m \times n$ lattice // Rostocker Mathematisches Kolloquium. — 1988. — Vol. 34. — P. 28–36.

[20] Талецкий Д. С. О производящих функциях и предельных теоремах, связанных с максимальными независимыми множествами в графах-решетках // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, No. 2. — С. 105–116.

[21] Kirschenhofer P., Prodinger H., Tichy R. F. Fibonacci numbers of graphs III // Proceedings of the First International Conference on Fibonacci Numbers and Applications. — 1986. — P. 105–120.

Методы исследования

В диссертации использованы методы теории графов, комбинаторики, математического и численного анализа.

Положения диссертации, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

1. Для любых n и d выявлены все деревья с максимальным количеством наибольших независимых множеств среди n-вершинных деревьев со степенями всех вершин не более чем d.

2. Для любого n полностью описаны все деревья с наименьшим количеством максимальных независимых множеств среди n-вершинных деревьев без листьев-дубликатов.

3. Получен вид асимптотики количества максимальных независимых множеств в полных q-арных деревьях при стремлении их высоты к бесконечности.

Научная новизна

В диссертационной работе при помощи известных и оригинальных (таких, как новые преобразования и разложения деревьев) приемов решается несколько ранее открытых задач экстремальной и перечислительной комбинаторики независимых множеств в деревьях. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории графов и комбинаторике. Они также могут использоваться при разработке спецкурсов по дискретной математике.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты диссертации получены лично соискателем. Научному руководителю принадлежит общее руководство при подготовке диссертации и предложения по редактуре текста.

Апробация работы, степень достоверности результатов и публикации

Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- 7th International Conference on Network Analysis (Нижний Новгород, 2017).
- Финал второго конкурса студенческих работ по теоретической информатике и дискретной математике им. Алана Тьюринга (Санкт-Петербург, 2017).

- Международные научные конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 2018, 2019).
- Workshop on graphs, networks, and their applications (Москва, 2018, 2019).
- X Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 2018).
- Семинар международной лаборатории теоретической информатики НИУ ВШЭ (Москва, 2019).
- Семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ НН (руководитель В.А. Калягин).
- Общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике (руководители В.Н. Шевченко и Н.Ю.Золотых).

Все результаты диссертации, полученные автором, являются новыми и достоверными. Это подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях. По теме диссертации имеется 4 публикации в изданиях из перечня Министерства науки и высшего образования РФ рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени кандидата наук. Две работы в журнале «Дискретная математика» (входит в базы цитирований Web of Science и Scopus), одна работа в журнале «Дискретный анализ и исследований операций» (входит в базу цитирований Scopus) и работа в журнале «Журнал Средневолжского математического общества» (входит в базу цитирований ZentralBlatt Mathematics).

Результаты, полученные в диссертации, включены в отчеты по гранту Российского Научного Фонда No 17-11-01336.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 55 наименований. Общий объем диссертации составляет 100 страниц и включает 20 рисунков. Нумерация всех теорем и лемм ведется независимо внутри каждой главы, причем номер каждого такого утверждения состоит из трех частей, первая из которых соответствует номеру главы, вторая номеру раздела, а третья порядковому номеру внутри раздела. Номер каждого рисунка состоит из двух частей, первая из которых соответствует номеру главы, а вторая порядковому номеру внутри главы. Нумерация теорем, лемм, следствий ведется независимо.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследований, указываются цели и задачи работы, научная новизна работы, теоретическая и практическая значимость работы, методология и методы диссертационного исследования, положения, выносимые на защиту и личный вклад соискателя, объем и структура работы, достоверность результатов и апробация работы.

В разделе «**Терминология и основные обозначения**» рассмотрены понятия и термины, используемые в тексте диссертации. Приведем некоторые необходимые определения.

Деревом называется связный граф без циклов. *Четное* (соответственно, *нечетное*) *дерево* — дерево, имеющее четное (соответственно, нечетное) количество вершин. Вершина степени один дерева называется *листом*. Вершина, смежная с листом леса, называется *предлистовой* или *предлистом*. *Деревом максимальной степени* d называется дерево, степень каждой вершины которого не превосходит d. Два листа называются *листьями-дубликатами*, если они имеют общего соседа.

Дерево называется k-*гусеницей*, если все его вершины расположены на расстоянии не более чем k от некоторого его простого пути. *Полным* q-*арным деревом высоты* n называется корневое дерево, все листья которого находятся на расстоянии n от корня, степень корня равна q, а степень остальных нелистовых вершин равна $q+1$. Обозначим такое дерево через $T_{q,n}$.

Независимым множеством графа называется произвольное подмножество попарно несмежных его вершин. Независимое множество графа называется *максимальным*, если оно максимально по включению, и *наибольшим*, если оно максимально по мощности. Количество всех, максимальных и наибольших независимых множеств графа G обозначается через $i(G)$, $mi(G)$ и $xi(G)$, соответственно.

Дерево с n вершинами максимальной степени d называется (i, d, n)-*максимальным*, если оно имеет максимально возможное количество н.м. среди всех n-вершинных деревьев максимальной степени d. Аналогично относительно количества н.н.м. определяется понятие (xi, d, n)-*максимального* дерева.

В **первой** главе диссертации для любых значений n и d описываются все (xi, d, n)-максимальные деревья.

В **разделе 1.1** вводятся две новые операции на графах. В **подразделе 1.1.1** определена *операция расширения*, которая заключается в присоединении листа к каждой вершине исходного графа. Доказано, что для любого графа количество всех его н.м. равно количеству н.н.м. его расширения.

В **подразделе 1.1.2** определена *операция разрастания*, представляющая из себя присоединение 2-пути к произвольной вершине степени 2, смежной с листом. Результат

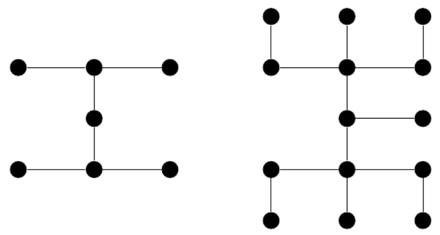

Рис. 1: Дерево и его расширение

операции разрастания не определен однозначно. Доказано, что любое разрастание дерева содержит строго больше н.н.м., чем исходное дерево.

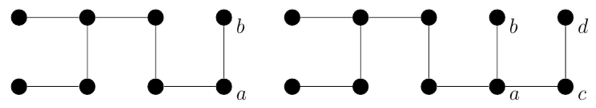

Рис. 2: Дерево и одно из его разрастаний

В **разделе 1.2** доказаны некоторые важные свойства экстремальных деревьев. В **подразделе 1.2.1** введено понятие xi_+*-неподвижной вершины* дерева — это вершина, входящая в каждое его н.н.м. Доказано, что каждое четное экстремальное дерево не содержит xi_+-неподвижных вершин, а каждое нечетное экстремальное дерево, состоящее из трех и более вершин, содержит ровно две такие вершины. В **подразделе 1.2.2** доказано, что в каждом четном экстремальном дереве любая нелистовая вершина смежна с листом. Из этого сразу вытекает тот факт, что каждое четное экстремальное дерево является расширением некоторого другого дерева.

В **разделе 1.3** полностью описывается структура экстремальных деревьев. В **подразделе 1.3.1** рассмотрен случай четных деревьев и показано, что $(xi, d, 2k)$-максимальное дерево является расширением $(i, d-1, k)$-максимального дерева.

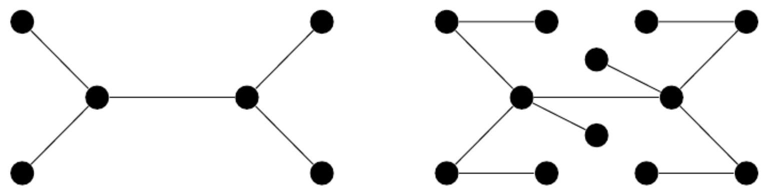

Рис. 3: $(i, 3, 6)-$максимальное дерево и $(xi, 4, 12)-$максимальное дерево

В **подразделе 1.3.2** рассмотрен случай нечетных деревьев. Показано, что каждое $(xi, d, 2k+1)$-максимальное дерево состоит из двух xi_+-неподвижных листьев, смежной с ними вершины и нескольких поддеревьев, смежных с этой вершиной. Таким образом, количество н.н.м. всего дерева равно произведению количеств н.н.м. поддеревьев. Показано, что каждое из поддеревьев является четным экстремальным деревом. Также в подразделе доказано, что среди всех лесов с заданным числом вершин и компонент наибольшее количество всех н.м. имеет лес, в котором все компоненты, кроме, быть может, одной, состоят из одной вершины. Кроме того, для всех $d \geqslant 3$ определена операция *d-наращивания*, которая переводит нетривиальную компоненту экстремального $(k-1)$-вершинного леса с $d-2$ компонентами в соответствующее $(xi, d, 2k+1)$-максимальное дерево. Поскольку результат d-наращивания определен неоднозначно, $(xi, d, 2k+1)$-максимальное дерево может быть не единственным.

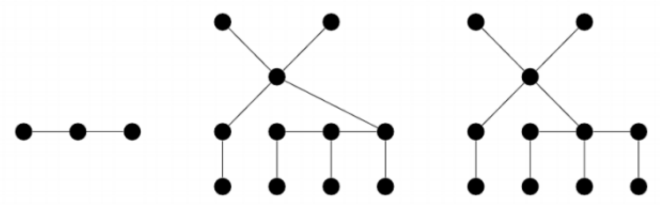

Рис. 4: Граф P_3 и два его различных 4-наращивания

В **подразделе 1.3.3** рассмотрен случай *субкубических деревьев*, т.е. деревьев со степенями всех вершин не более чем 3. Показано, что каждое четное экстремальное дерево в этом случае является расширением простого пути. Также показано, что число нечетных экстремальных субкубических деревьев растет линейно от числа вершин, а именно, существует в точности $\lfloor \frac{n-3}{4} \rfloor + 1$ таких n-вершинных деревьев при $n \geqslant 7$.

В **разделе 1.4** показано, что описанные выше рассуждения можно перенести на класс 2-гусениц. Ранее уже было доказано, что множество экстремальных субкубических деревьев совпадает с множеством экстремальных субкубических гусениц, поэтому в данном разделе описываются все экстремальные 2-гусеницы со степенями вершин не более чем 4. Показано, что структурные теоремы переносятся на этот подкласс деревьев практически без изменений. Описаны все субкубические 1-гусеницы, максимизирующие число всех н.м. и показано, что каждая четная экстремальная 2-гусеница со степенями всех вершин не более чем 4 является расширением субкубической экстремальной 1-гусеницы. Как и в предыдущем случае, четная экстремальная гусеница всегда единственна, а в нечетном случае единственность может и не иметь места.

Во **второй** главе диссертации для любого n полностью описываются деревья с наименьшим количеством м.н.м. среди n-вершинных деревьев, не содержащих листьев-дубликатов.

В **подразделе 2.1.1** определена операция соединения. *Соединением* двух деревьев называется дерево, полученное из дизъюнктного объединения исходных деревьев добавлением новой вершины степени два, смежной с предлистом первого дерева и с предлистом второго дерева. Легко видеть, что эта операция определена неоднозначно. Через $u(T_1, T_2)$ обозначим множество всевозможных соединений деревьев T_1 и T_2 Доказано, что для любого соединения $T \in u(T_1, T_2)$ верно равенство $mi(T) = mi(T_1) \cdot mi(T_2)$.

В **подразделе 2.1.2** приведены некоторые дополнительные определения, используемые в главе. Поддерево T' дерева T называется *крайним*, если ровно одна вершина поддерева T' смежна с вершинами из $V(T) \setminus V(T')$. Через R_n обозначается расширение пути P_n. Через R'_3 мы переобозначаем граф P_6. Через R'_4 мы обозначаем граф, полученный соединением конца 4-пути с вершиной степени два другого 4-пути.

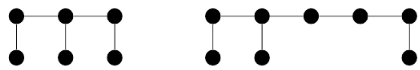

Рис. 5: Графы R_3 и R'_4

Дается определение T^**-отделимого дерева* — это дерево, являющееся соединением двух его крайних поддеревьев, одно из которых изоморфно T^*. Назовем дерево $R_1 \bigvee R_2$*-отделимым*, если оно является или R_1-отделимым, или R_2-отделимым. Для дерева T построим дерево $Z(T)$ следующим образом. Множество вершин $Z(T)$ — множество вершин T степени не менее чем три. Две вершины дерева $Z(T)$ соединены ребром, если они либо смежны в T, либо путь между ними в T состоит из нескольких вершин степени два. Назовем вершину v дерева T степени не менее чем три *крайней*, если она в дереве $Z(T)$ является листом.

В **разделе 2.2** доказано несколько важных утверждений о структуре минимальных деревьев. В **подразделе 2.2.1** доказаны три леммы, содержащие ограничения на крайние подграфы. В лемме 2.2.1 говорится об отсутствии в минимальном подграфе крайнего 5-пути и крайнего 4-пути, не смежного с предлистом. В лемме 2.2.2 утверждается, что минимальное дерево одновременно не содержит двух крайних 4-путей, двух крайних подграфов R_3, и двух крайних подграфов R_k и R_s, где $k, s \in \{2, 3, 4\}$, каждый из которых смежен с 2-путем. В лемме 2.2.3 утверждается, что минимальное дерево одновременно не содержит крайнего подграфа R_3 и крайнего подграфа R_2, смежного с 2-путем, крайнего подграфа R_2, смежного с 2-путем и крайнего 4-пути, крайнего 4-пути и крайнего подграфа R_3.

В **подразделе 2.2.2** доказано несколько утверждений, связанных с ограничениями на крайние вершины. В частности, доказано, что в минимальных деревьях, не являющихся R_1−отделимыми, отсутствуют крайние вершины степени пять и более и существует не более чем одна вершина степени четыре. При этом, если минимальное дерево содержит крайнюю вершину степени четыре, оно одновременно не содержит крайнего 4-пути, не смежного с этой вершиной, крайнего подграфа R_3 и крайнего подграфа R_2, смежного с 2-путем (лемма 2.2.7). Основным результатом подраздела является следующее утверждение.

Теорема 2.2.2. *При $n \geqslant 9$ каждое минимальное n-вершинное дерево являет-*

ся $R_1 \bigvee R_2$-отделимым.

В **разделе 2.3** описан класс $\mathcal{L}_n$ минимальных деревьев. В **подразделе 2.3.1** определены вполне разделимые деревья. Определено множество $\mathcal{R}(a, b, c, d)$, где $(c, d) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$. Множества $\mathcal{R}(1, 0, 0, 0)$ и $\mathcal{R}(0, 1, 0, 0)$ содержат только деревья R_1 и R_2 соответственно. Аналогично, множество $\mathcal{R}(0, 0, 1, 0)$ содержит только деревья R_3 и R'_3, а $\mathcal{R}(0, 0, 0, 1)$ содержит только деревья R_4 и R'_4. Множество $\mathcal{R}(a_1 + 1, b_1, c_1, d_1)$ в точности состоит из таких деревьев T, что существует дерево $T' \in \mathcal{R}(a_1, b_1, c_1, d_1)$, для которого $T \in u(T', R_1)$. Множество $\mathcal{R}(a_2, b_2+1, c_2, d_2)$ в точности состоит из таких деревьев T, что существует дерево $T' \in \mathcal{R}(a_2, b_2, c_2, d_2)$, для которого $T \in u(T', R_2)$. Элементы множества $\mathcal{R}(a, b, c, d)$, где $a+b+c+d \neq 1$, называются *вполне разделимыми* деревьями. Неформально говоря, вполне разделимые деревья «распадаются» на поддеревья из 8 и менее вершин, причем количество м.н.м. всего дерева равно произведению количеств м.н.м. поддеревьев.

В **подразделе 2.3.2** определен класс $\mathcal{L}_n$, причем при $n \geqslant 9$ имеем

$$\mathcal{L}_n = \begin{cases} \mathcal{R}(2, k-1, 0, 0), \text{ если } n = 5k; \\ \mathcal{R}(0, k-1, 1, 0), \text{ если } n = 5k+1; \\ \mathcal{R}(1, k, 0, 0), \text{ если } n = 5k+2; \\ \mathcal{R}(3, k-1, 0, 0) \cup \mathcal{R}(0, k-1, 0, 1), \text{ если } n = 5k+3; \\ \mathcal{R}(0, k+1, 0, 0), \text{ если } n = 5k+4. \end{cases}$$

Теорема 2.3.1. *Для любого n множество минимальных деревьев с n вершинами в точности совпадает с множеством $\mathcal{L}_n$.*

В **третьей** главе диссертации исследуется асимптотика количества м.н.м. в полных q-арных деревьях в зависимости от значения параметра q при стремлении их высоты n к бесконечности.

В **подразделе 3.1.1** выведено рекуррентное уравнение для количества $mi(q, n)$ м.н.м. дерева $T_{q,n}$. А именно,

$$mi(q, n) = (mi(q, n-2))^{q^2} + (mi(q, n-1))^q - (mi(q, n-1) - (mi(q, n-3))^{q^2})^q.$$

В **подразделе 3.1.2** получено частичное решение этого рекурретного уравнения. Показано, что при всех значениях q имеет место равенство $mi(q, n) = \alpha_{q,n} \cdot (\beta_q)^{q^n}$, где величина $\alpha_{q,n}$ ограничена сверху и снизу положительными константами.

В **разделе 3.2** доказано, что последовательность $\{\alpha_{2,n}\}$ имеет предел и таким образом установлена справедливость следующего факта.

Теорема 3.1.1. *Существуют константы α_2 и β_2 такие, что при $n \longrightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство $mi(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$.*

В **разделе 3.3** доказано, что при всех достаточно больших значениях параметра q последовательности $\{\alpha_{q,3k}\}$, $\{\alpha_{q,3k+1}\}$ и $\{\alpha_{q,3k+2}\}$ сходятся к трем попарно различным пределам. Таким образом, вид асимптотики в случае больших значений q зависит от остатка при делении высоты дерева на 3 и справелива следующая теорема.

Теорема 3.1.2. *Для любого достаточно большого q существуют три попарно различные константы $\alpha_q^{(1)}, \alpha_q^{(2)}, \alpha_q^{(3)}$ и константа β_q такие, что при $k \longrightarrow \infty$ имеют место асимптотические равенства:*

$$mi(T_{q,3k}) \sim \alpha_q^{(1)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}, mi(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_q^{(2)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}, mi(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_q^{(3)} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}.$$

В **разделе 3.4** численно-аналитически показывается, что при малых значениях параметра q не имеет места ни один из описанных выше случаев. В **подразделе 3.4.1** доказано, что при всех значениях $q \geqslant 3$ последовательность $\{\alpha_{q,n}\}$ расходится, а значит, теорема 3.1.1 не имеет места. В **подразделе 3.4.2** численно-аналитически показано, что при $3 \leqslant q \leqslant 10$ последовательности $\{\alpha_{q,3k}\}$, $\{\alpha_{q,3k+1}\}$ и $\{\alpha_{q,3k+2}\}$ не сходятся к трем попарно различным пределам, а значит, при этих значениях q теорема 3.1.2 также не имеет места.

В **разделе 3.5** представлены два вычислительных эксперимента. В ходе первого эксперимента исследуется вопрос об области справедливости теоремы 3.1.2. Результаты эксперимента позволяют предположить, что теорема справедлива при всех значениях q, больших 10.

В ходе второго вычислительного эксперимента вычислены приближенные значения константы β_q при различных значениях параметра q.

q	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
β_q	1.462	1.277	1.194	1.150	1.125	1.106	1.091	1.081	1.073	1.066	1.060	1.055

Таблица 3.6: Приближенное значение константы β_q

Результаты вычислений позволяют предположить, что значение β_q стремится к единице при стремлении параметра q к бесконечности.

В **заключении** подводится итог к проделанной работе и рассматриваются возможные дальнейшие перспективы исследований.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ
(все в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и включенных в перечень международных баз цитирования — Web of Science, Scopus, ZentralBlatt Mathematics)

[1] Талецкий Д. С., Малышев Д. С. О количестве максимальных независимых множеств в полных q-арных деревьях // Дискретная математика. — 2016. — Т. 28, No 4. — С. 139–149.

[2] Талецкий Д. С., Малышев Д. С. О деревьях ограниченной степени с максимальным количеством наибольших независимых множеств // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, No 2. — С. 101–123.

[3] Талецкий Д. С. О свойствах решения рекуррентного уравнения, перечисляющего максимальные независимые множества в полных деревьях // Журнал Средневолжского математического общества — 2018. — Т. 20, No 1. — С. 46–54.

[4] Талецкий Д. С., Малышев Д. С. Деревья без листьев-дубликатов с наименьшим количеством максимальных независимых множеств // Дискретная математика. — 2018. — Т. 30, No 4. — С. 115–133.

ТАЛЕЦКИЙ ДМИТРИЙ СЕРГЕЕВИЧ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать . Формат $60\times80\frac{1}{16}$. Печать офсетная. Бумага газетная.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 0,75. Тираж 100 экз. Заказ No .

Нижегородский государственный технический университет
имени Р.Е. Алексеева
Типография НГТУ, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.