

На правах рукописи

УДК 519.17

Сироткин Дмитрий Валерьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ О
НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ И О ВЕРШИННОЙ k -РАСКРАСКЕ В
НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ГРАФОВ

01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., доц. Малышев Дмитрий Сергеевич

Нижний Новгород — 2019 год

Оглавление

Введение	4
1 Локальные преобразования графов и их применения	16
1.1 Терминология и обозначения	17
1.1.1 Множества, графы, их подграфы и миноры	17
1.1.2 Степени и множества вершин	20
1.1.3 Задачи о независимом множестве и о вершинной k - раскраске	20
1.1.4 Классы графов	21
1.2 Замены в графах и их значение	21
1.3 Задача реализации и ее решение	24
1.4 Труднорешаемость задачи НМ в некоторых классах планарных графов	30
1.4.1 Новое доказательство NP-полноты задачи НМ в классе планарных графов	30
1.4.2 NP-полнота задачи НМ в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18	36
1.5 NP-полнота задачи 3-ВР для планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5, чьи грани имеют длину 3 и 4	40
2 Полиномиальная разрешимость задачи о независимом мно- жестве в одном классе субкубических планарных графов	47
2.1 Неприводимые графы и их свойства	47

2.1.1	Сжимаемые подграфы с малым отделяющим множеством	47
2.1.2	Понятие неприводимого графа и его значение	50
2.1.3	Некоторые вспомогательные результаты	51
2.2	О несуществовании неприводимых графов, содержащих доста- точно большие порожденные триоды	53
2.3	Основной результат второй главы	75
3	Вычислительная сложность задачи о вершинной 3-раскраске для некоторых наследственных классов графов	76
3.1	NP-полнота задачи 3-ВР в некоторых классах графов, порожд- денных запретами с малым количеством вершин	76
3.2	Некоторые результаты, связанные с полиномиальной сводимо- стью и полиномиальной разрешимостью задачи 3-ВР	81
3.3	Основной результат третьей главы диссертации	87
	Заключение	90
	Литература	91

Введение

1. Актуальность, степень разработанности темы исследований и формулировки основных результатов диссертации

Развитие теории сложности вычислений способствовало формированию фактических стандартов эффективной разрешимости и труднорешаемости. Под эффективной разрешимостью данной массовой задачи понимается возможность ее решения на детерминированной машине Тьюринга за время, ограниченное полиномом от длины входных данных. В то же время, имеется ряд «неподдающихся» (называемых в теории сложности вычислений NP-полными) задач, для которых на настоящее время не разработано полиномиальных алгоритмов. Справедливость известной гипотезы $P \neq NP$ означала бы, что таких алгоритмов вообще не существует.

Многие задачи теории графов, представляющие определенный теоретический и/или практический интерес, являются NP-полными. Один из возможных путей преодоления алгоритмической сложности данных задач состоит в сужении — наложении дополнительных ограничений на рассматриваемые графы. Иногда учет этого обстоятельства, т.е. принадлежности графа только определенной части множества всех графов, приводит к построению полиномиальных алгоритмов. В других случаях удается доказать NP-полноту задачи для графов из того или иного класса.

На настоящее время накоплено огромное количество фактов о полиномиальной разрешимости и о NP-полноте задач на графах в различных классах графов, причем корпус соответствующей литературы ежегодно пополняется. Упомянем электронный ресурс www.graphclasses.org, на котором представлены несколько тысяч результатов такого типа. Направляющие мотивы к получению новых сведений о сложности могут быть самыми разнообразными, но среди них можно выделить, пожалуй, наиболее распространенные — установить NP-полноту задачи для более узких классов графов и разработать по-

линомиальный алгоритм решения задачи для более широких классов. Часто одновременно имеют место мотивации обоих типов и тогда, по-существу, ставится цель найти пределы эффективной разрешимости и труднорешаемости. Например, можно рассматривать какие-нибудь скалярные параметры задач и решать проблему сложностной классификации, строя разделяющую поверхность в пространстве данных параметров. Так, например, задача k -КНФ полиномиально разрешима при $k \in \{1, 2\}$, но является NP-полной для любого $k \geq 3$ [4]. Задача ЦЛП полиномиально разрешима в классе полиэдров с целыми вершинами, но она NP-полна в классе многогранников с целыми и полуцелыми вершинами [53].

В данной диссертации будут представлены результаты о сложности задач о независимом множестве и о вершинной k -раскраске (далее, задач НМ и k -ВР). Метод, используемый для получения всех основных результатов диссертации, основан на локальных преобразованиях графов.

Известны несколько алгоритмических инструментов для редукции графов при решении задачи НМ. Например, двойное подразбиение произвольного ребра любого графа увеличивает его число независимости ровно на единицу [2]. Другой пример — удаление из графа вершины степени два и отождествление ее соседей уменьшает число независимости на единицу [2]. Если в графе замкнутая окрестность вершины a включает замкнутую окрестность вершины b , то удаление a из графа сохраняет его число независимости. Это так называемое правило смежностного поглощения. Смежностное поглощение является частным представителем сжатий В. Е. Алексеева [1], т.е. отображений множества вершин графа в себя, не являющихся автоморфизмами, при которых любые две различные несмежные вершины переходят в различные несмежные вершины. Таким образом, сжатие преобразует граф в его порожденный подграф, при этом, очевидно, сохраняется число независимости. Известно немало и других преобразований, сохраняющих число независимости или изменяющих его на константу [18, 20, 31, 32, 33, 34, 40, 41].

В работе В. Е. Алексеева и В. В. Лозина [3] была сделана попытка дать

общее определение локального преобразования графов. Там рассматривались так называемые схемы замен, определяющие заменяемый и заменяющий подграфы, а также правила преобразования множества ребер, соединяющих изменяемую часть графа с неизменяемой. Там же был приведен критерий сохранения числа независимости при применении схемы замен. Однако, в [3] уделяется достаточно мало внимания конкретным схемам замен и их приложению к анализу сложности задачи НМ в различных классах графов.

В первой главе диссертации рассматривается подкласс класса схем замен, когда множество ребер между изменяемой и неизменяемой частями графа не изменяется. Приводится достаточное условие на заменяемый подграф H_1 и заменяющий подграф H_2 , при котором разность чисел независимости результирующего графа G_2 и исходного графа G_1 равна разности чисел независимости графов H_2 и H_1 . Приводится также достаточное условие на H_2 и H_1 , при котором G_1 является k -раскрашиваемым тогда и только тогда, когда G_2 является k -раскрашиваемым. Применительно к задаче о вершинной k -раскраске, каждое рассматриваемое локальное преобразование графов определяется некоторым шаблоном — набором разбиений множества на его подмножества. В первой главе показывается, что заменяющий подграф существует для любого шаблона, а также приводится оценка на количество его вершин от параметров шаблона.

Интерес к рассматриваемым заменам обусловлен потенциальной возможностью их применения для редукции графов, что может быть полезным для исследования вычислительной сложности задач НМ и k -ВР в некоторых классах графов. В диссертации данные замены (а также близкие к ним) будут использоваться с этой целью. Так, в первой главе приводится новое доказательство известного результата (см., например, работу [28]) о NP-полноте задачи НМ в классе планарных графов. В работе [6] было показано, что задача НМ является NP-полной в классе 4-связных плоских графов с треугольными гранями (кроме, быть может, внешней) с логарифмической от количества вершин максимальной степенью вершин. В первой главе диссертационной ра-

боты данный результат улучшается и показывается, что задача НМ является NP-полной в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Этот результат получен с использованием предлагаемых в диссертации замен.

Известная теорема Брукса [22] утверждает, что граф, отличный от полного графа и от нечетного цикла, является d -раскрашиваемым, где d — максимальная из степеней вершин графа. Поэтому для любого k задача k -BP полиномиально разрешима в классе $\mathcal{D}(k)$ графов со степенями всех вершин не более чем k . Вместе с тем, задача 3-BP является NP-полной в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 4 [26]. Задача 3-BP разрешима за линейное время в классе плоских триангуляций [15]. Было бы интересным найти порог на значения длин граней планарных графов, при котором сложность задачи 3-BP меняется с полиномиальной разрешимости на NP-полноту и при этом иметь графы с невысокой максимальной степенью вершин. В первой главе диссертации доказывается NP-полнота задачи 3-BP в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5 и с гранями, ограниченными не более чем 4 ребрами каждая. Этот результат получен с использованием предлагаемых в диссертации замен.

Класс графов называется наследственным, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих запрещенных порожденных подграфов, т.е. графов, минимальных относительно удаления вершин, которые не принадлежат $\mathcal{X}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{Y})$. Если наследственный класс задается конечным множеством запрещенных порожденных подграфов, то он называется конечно определенным.

Класс графов с NP-полной задачей на графах Π будем называть Π -сложным. Класс графов с полиномиальной разрешимой задачей Π будем называть Π -простым.

Триодом $T_{i,j,k}$ называется дерево, получаемое отождествлением трех концевых вершин путей $P_{i+1}, P_{j+1}, P_{k+1}$ длины i, j, k , соответственно. Класс $\mathcal{T}$

состоит из всевозможных графов, каждая компонента связности которых является деревом с не более чем тремя листьями (т.е. триодом). В работе [16] было доказано, что любой конечно определенный класс $\mathcal{X}$, включающий $\mathcal{T}$, является НМ-сложным. Это же верно, если вместо $\mathcal{X}$ рассматривать классы $\mathcal{P} \cap \mathcal{X}, \mathcal{D}(d) \cap \mathcal{X}, \mathcal{P}(d) \cap \mathcal{X}$, где $d \geq 3$, $\mathcal{P}$ — класс планарных графов и $\mathcal{P}(d) = \mathcal{P} \cap \mathcal{D}(d)$. В той же работе [16] было выдвинуто предположение о том, что любой конечно определенный класс, не включающий $\mathcal{T}$, является НМ-простым. Для этого достаточно показать, что для любого графа $G \in \mathcal{T}$ класс $Free(\{G\})$ является НМ-простым. На настоящее время это доказано для любого графа $G \in \mathcal{T}$ с не более чем 5 вершинами. Сложностной статус задачи НМ не известен уже для класса $Free(\{P_6\})$, где P_n — простой путь с n вершинами.

Вместе с тем, было бы интересным исследовать сложность задачи НМ для классов вида $\mathcal{Y} \cap Free(\{G\})$, где $G \in \mathcal{T}$ и $\mathcal{Y}$ — собственное наследственное подмножество множества всех графов. В работе [44] было доказано, что для любых d, i класс $\mathcal{D}(d) \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ является НМ-простым. В работах [8, 45] было доказано, что для любого i класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,2,i}\})$ является НМ-простым. В работе [17] было доказано, что для любого i класс $\mathcal{P} \cap Free(\{T_{1,i,i}\})$ является НМ-простым. В работе [7] было доказано, что для любого i класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,i}\})$ является НМ-простым. В работе [46] было доказано, что класс $\mathcal{D}(3) \cap Free(\{T_{2,2,2}\})$ является НМ-простым.

Отметим, что во всех выше представленных результатах фигурировали триоды, у которых значения хотя бы двух индексов были не более чем 2. Во второй главе настоящей диссертационной работы будет доказано, что класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ является НМ-простым.

Существует множество «белых пятен» на «карте» вычислительной сложности задачи о вершинной k -раскраске в семействе наследственных классов графов. Имеется два способа для уменьшения количества этих «белых пятен». Первый — увеличение количества запрещенных порожденных подграфов, а второй — увеличение размера таких подграфов. Ограничение на размер или

количество запрещенных порожденных структур образует некоторое подсемейство семейства наследственных классов. Возможное сокращение совокупности «белых пятен» состоит в получении полной сложностной дихотомии для больших значений данной границы.

Для задачи k -ВР сложностной статус остается открытым даже для некоторых классов, определяемых одним запрещенным порожденным фрагментом. Вычислительная сложность задачи 3-ВР известна для всех классов вида $Free(\{H\})$, где $|V(H)| \leq 6$ [21]. Подобный результат был получен для задачи 4-ВР и всех классов вида $Free(\{H\})$, где $|V(H)| \leq 5$ [30]. Для каждого фиксированного k задача k -ВР разрешима за полиномиальное время в классе $Free(\{P_5\})$ [35]. Задача 3-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_7\})$ [23]. Для каждого фиксированного $k \geq 5$ задача k -ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_6\})$ [37]. Задача 4-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_7\})$ [37]. Вычислительный статус задачи k -ВР является открытым для класса $Free(\{P_8\})$ и $k = 3$, а также для класса $Free(\{P_6\})$ и $k = 4$.

В работе [39] было показано, что задача о вершинной раскраске полиномиально разрешима для класса $Free(\{H\})$, если H — порожденный подграф графа P_4 или графа $P_3 + K_1$, иначе она является NP-полной в данном классе. Однако, при запрещении двух и более порожденных подграфов полную сложностную классификацию получить уже не удастся. Некоторые результаты о сложности задачи о вершинной раскраске в наследственных классах, определяемых запретами маленького размера, представлены в работах [24, 25, 29, 37, 38, 43, 47, 49, 51, 52].

В работе [48] для задачи 3-ВР получена полная сложностная дихотомия в семействе наследственных классов, определяемых парой запрещенных порожденных подграфов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. В работе [50] был получен аналогичный результат для всех троек запретов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин.

В третьей главе диссертации рассматриваются наследственные классы, определяемые четверкой запрещенных порожденных подграфов, каждый из

которых имеет не более чем 5 вершин, а также для всех таких классов, кроме трех, устанавливается вычислительный статус задачи 3-ВР. Для двух из трех оставшихся случаев доказывается полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему.

2. Цели и задачи работы

Целями диссертационного исследования являются развитие методов построения полиномиальных алгоритмов и полиномиальных сведений для задач о независимом множестве и о вершинной k -раскраске, а также их применение для анализа вычислительной сложности актуальных подзадач данных задач.

Задачи диссертационного исследования:

1. Развить метод локальных преобразований графов для исследования вычислительной сложности задач о независимом множестве и о вершинной k -раскраске.

2. Установить сложностной статус задачи о независимом множестве в некоторых подмножествах множества планарных графов. Установить сложностной статус задачи о вершинной 3-раскраске в некоторых подклассах класса планарных графов и в некоторых наследственных классах, определяемых небольшими запрещенными порожденными структурами.

3. Научная новизна работы

В диссертации рассматриваются и исследуются некоторые локальные преобразования графов, ориентированные на редукцию данных в задачах о независимом множестве и о вершинной 3-раскраске. При помощи новых приемов алгоритмической теории графов (в. т.ч. использования локальных преобразований графов) устанавливается вычислительный статус актуальных подзадач данных задач. Все основные результаты диссертации являются новыми.

4. Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при анализе сложности задач о независимом множестве и о вершинной k -раскраске. Они могут найти применения в исследованиях, проводимых в профильных российских и международных научных группах. Они могут

также применяться при разработке и чтении курсов и спецкурсов по теории графов.

5. Методология и методы диссертационного исследования

В диссертации использованы методы теории графов, теории сложности вычислений и комбинаторного анализа.

6. Положения, выносимые на защиту и личный вклад соискателя

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

1. Рассмотрен некоторый класс замен подграфов в графах, сохраняющих k -раскрашиваемость и определяемых набором разбиений множества на подмножества. Конструктивным образом показано, что заменяющий подграф существует для любого набора разбиений множества на подмножества.

2. Доказана NP-полнота задачи о независимом множестве в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18.

3. Доказана NP-полнота задачи о вершинной 3-раскраске в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5 и с гранями, ограниченными не более чем 4 ребрами каждая.

4. Доказана полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для субкубических планарных графов, не содержащих порожденного дерева, получаемого отождествлением концов трех путей длины 3,3,2.

5. Для всех наследственных классов, кроме трех, которые определяются четверкой запрещенных порожденных подграфов, каждый с не более чем 5 вершинами, установлен сложностной статус задачи о вершинной 3-раскраске. Для двух из трех оставшихся случаев доказана полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему.

Все основные результаты диссертации получены лично соискателем. Научному руководителю принадлежит общее руководство диссертационным исследованием, предложения по редактуре текста и оптимизация некоторых доказательств.

7. Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литера-

туры, включающего 53 наименования. Общий объем диссертации составляет 96 страниц и включает 28 рисунков. Нумерация всех теорем и лемм ведется независимо внутри каждой главы, причем номер каждого такого утверждения состоит из трех частей, первая из которых соответствует номеру главы, вторая номеру раздела, а третья порядковому номеру внутри раздела. Точно также нумеруются рисунки. Нумерация теорем, лемм, следствий ведется независимо.

Во *введении* обосновывается актуальность диссертационной работы, представлены обзор литературы по теме исследований, цели и задачи работы, научная новизна диссертации, теоретическая и практическая значимость работы, методы диссертационного исследования, основные результаты диссертации, структура работы, а также представлены степень достоверности результатов работ, апробации результатов работ и публикации по теме диссертации.

Первая глава диссертации состоит из пяти частей. В первой из них приводятся некоторые понятия и обозначения теории графов. Во второй части рассматривается некоторый класс замен подграфов в графах, ориентированных на задачи о независимом множестве и о вершинной k -раскраске. Применительно к задаче о вершинной k -раскраске, каждое такое локальное преобразование графов определяется некоторым шаблоном — набором разбиений множества на его подмножества. В третьей части показывается, что заменяющий подграф существует для любого шаблона, а также приводится оценка на количество его вершин от размера шаблона. В четвертой части приводится новое доказательство NP-полноты задачи о независимом множестве в классе планарных графов, а также доказывается NP-полнота данной задачи в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Наконец, в пятой части доказывается NP-полнота задачи о вершинной 3-раскраске в классе планарных графов с максимальной степенью вершин 5, чьи грани — только треугольники и четырехугольники.

Во *второй главе* диссертации доказывается полиномиальная разреши-

мость задачи о независимом множестве для планарных графов с максимальной степенью вершин не более чем 3, не содержащих порожденного триода $T_{3,3,2}$.

В *третьей главе* рассматриваются наследственные классы, определяемые четверкой запрещенных порожденных подграфов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. Для всех таких классов, кроме трех, устанавливается вычислительный статус задачи о вершинной 3-раскраске. Для двух из трех оставшихся случаев доказывается полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему.

В *заключении* подводится итог к проделанной работе и обсуждаются перспективы дальнейшего развития тематики диссертационного исследования.

8. Степень достоверности и апробации результатов работы, публикации автора по теме диссертации

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и достоверными. Это подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях из перечня изданий Министерства науки и высшего образования РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени кандидата наук. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. 7th and 8th International Conferences on Network Analysis (Nizhny Novgorod, 2017; Moscow, 2018).
2. Финал второго конкурса студенческих работ по теоретической информатике и дискретной математике им. Алана Тьюринга (Санкт-Петербург, 2017).
3. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2018» (Москва, 2018 и 2019).
4. Workshop on graphs, networks, and their applications (Moscow, 2018 and 2019).
5. X Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва, 2018).

6. Общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике.
7. Семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ НН.
8. Семинар международной лаборатории теоретической информатики НИУ ВШЭ.
9. Научно-исследовательский семинар по математической логике МГУ.
10. Семинар кафедры дискретного анализа Ярославского государственного университета имени П.Г. Демидова.

По теме диссертации имеется 5 следующих публикаций в изданиях из перечня Министерства науки и высшего образования РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени кандидата наук:

1. Малышев Д. С., Сироткин Д. В. Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 35–60.
2. Сироткин Д. В., Малышев Д. С. Способ редукции графов и его приложения // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, № 3. — С. 114–125.
3. Сироткин Д. В. Теоремы существования и достаточности, связанные с локальными преобразованиями графов для задачи о k -раскраске // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 2. — С. 98–104.
4. Сироткин Д. В. О сложности построения 3-раскраски планарных графов с короткими гранями // Журнал Средневолжского математического общества. — 2018. — Т. 20, № 2. — С. 199–205.
5. Сироткин Д. В., Малышев Д. С. О сложности задачи о 3-раскраске для наследственных классов, определенных запретами небольшого размера

// Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 4. — С. 112–130.

Автор работы выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н., доц. Дмитрию Сергеевичу Малышеву за постоянное внимание к работе, полезные советы и замечания.

Глава 1

Локальные преобразования графов и их применения

Первая глава диссертации состоит из пяти частей. В первой из них приводятся некоторые понятия и обозначения теории графов. Во второй части рассматривается некоторый класс замен подграфов в графах, ориентированных на задачи о независимом множестве и о вершинной k -раскраске. Применительно к задаче о вершинной k -раскраске, каждое такое локальное преобразование графов определяется некоторым шаблоном — набором разбиений множества на его подмножества. В третьей части показывается, что заменяющий подграф существует для любого шаблона, а также приводится оценка на количество его вершин от размера шаблона. В четвертой части приводится новое доказательство NP-полноты задачи о независимом множестве в классе планарных графов, а также доказывается NP-полнота данной задачи в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Наконец, в пятой части доказывается NP-полнота задачи о вершинной 3-раскраске в классе планарных графов с максимальной степенью вершин 5, чьи грани — только треугольники и четырехугольники. Результаты первой главы опубликованы в работах [10, 11, 12].

1.1 Терминология и обозначения

В данном разделе определяются некоторые понятия и обозначения теории графов, которые будут использоваться на протяжении всей диссертации. Все основные понятия и факты, которые в этой и следующих главах не приводятся, можно найти, например, в учебниках [5, 14, 19, 27] по теории графов.

1.1.1 Множества, графы, их подграфы и миноры

Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел. Для множеств A и B через $A \cup B$, $A \cap B$ обозначены объединение и пересечение множеств A и B ; через $A \setminus B$ и $A \otimes B$ обозначены разность и симметрическая разность множеств A и B .

Для целых чисел $a < b$ через $\overline{a, b}$ мы обозначаем множество $\{a, a+1, \dots, b\}$.

Все рассматриваемые в диссертации графы являются абстрактными и обыкновенными одновременно, т.е. конечными непомеченными неориентированными графами без петель и кратных ребер. Множество вершин и множество ребер графа G будем обозначать через V (или $V(G)$) и E (или $E(G)$) соответственно.

Через $G_1 + G_2$ обозначается дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин. Через kG обозначается дизъюнктное объединение k копий графа G .

Для некоторых специальных графов используются следующие обозначения:

- P_n — простой путь на n вершинах,
- C_n — простой цикл на n вершинах,
- K_n — полный граф на n вершинах,
- O_n — пустой граф на n вершинах,
- $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле.

Через F_k ($k \geq 3$) обозначается граф, получаемый добавлением вершины x к простому пути $(x_1, \dots, x_k)$ и ребер $xx_1, xx_2, \dots, xx_k$. Граф *diamond* изоморфен графу F_3 . Колесом W_k ($k \geq 3$) называется граф, получаемый добавлением вершины x к простому циклу $(x_1, \dots, x_k)$ и ребер $xx_1, xx_2, \dots, xx_k$. Нечетным колесом называется произвольный граф из множества $\{W_3, W_5, W_7, \dots\}$.

Графы $F_4, W_4, diamond$ изображены на рисунке 1.1.

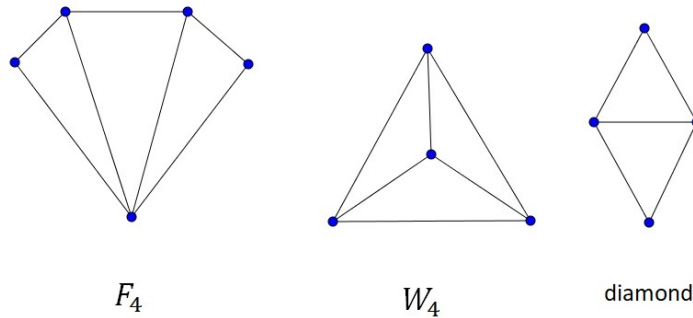


Рис. 1.1: Графы $F_4, W_4, diamond$.

Графы *bull, cricket, butterfly, crown* изображены на рисунке 1.2.

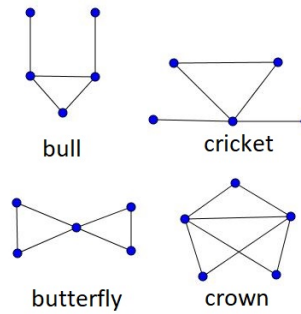


Рис. 1.2: Графы *bull, cricket, butterfly, crown*.

Графы *spindle, kite, dart, banner, house, sun* изображены на рисунке 1.3.

Триодом $T_{i,j,k}$, где $i, j, k \geq 0$, называется дерево, получаемое отождествлением концевых вершин путей $P_{i+1}, P_{j+1}, P_{k+1}$ соответственно. Триод $T_{1,2,3}$ изображен на рисунке 1.4.

Граф называется *субкубическим*, если степени всех его вершин не более чем

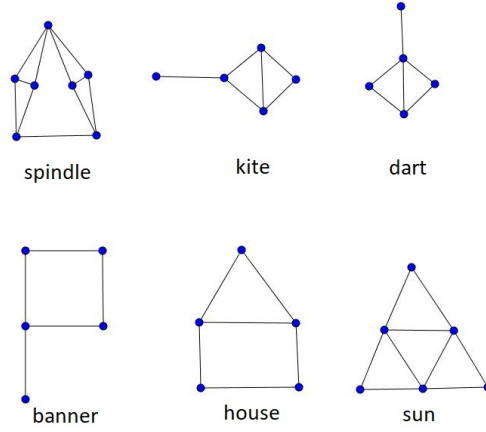


Рис. 1.3: Графы *spindle*, *kite*, *dart*, *banner*, *house*, *sun*.

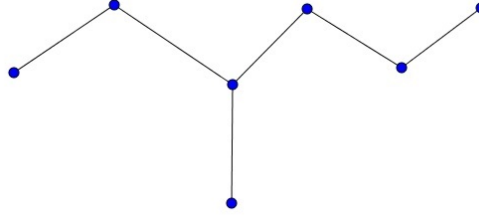


Рис. 1.4: Граф $T_{1,2,3}$.

три. Граф смежности ребер графа G называется *реберным графом* графа G .

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если выполнены включения $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Подграф некоторого графа называется *порожденным*, если любые две вершины подграфа смежны тогда и только тогда, когда эти вершины являются смежными в исходном графе. Таким образом, любой подграф получается из графа удалением вершин и ребер, а порожденный подграф удалением только вершин, имея в виду, что операция удаления вершины подразумевает удаление самой вершины и всех инцидентных ей ребер. *Минором* графа G называется такой граф H , что H получается из G удалением вершин и ребер, а также стягиванием ребер.

Предположим, что $G = (V, E)$ — граф и $V' \subseteq V$. Тогда подграф графа G , порожденный подмножеством вершин V' , будем обозначать через $G[V']$. Через $G \setminus V'$ мы обозначаем результат удаления всех вершин подмножества V' из графа G .

1.1.2 Степени и множества вершин

В работе приняты следующие обозначения: $N(x)$ — окрестность вершины x , а $\deg(x)$ — степень вершины x . Через $\Delta(G)$ обозначается максимальная из степеней вершин графа G .

1.1.3 Задачи о независимом множестве и о вершинной k -раскраске

Напомним, что *независимым множеством* (кратко, н.м.) графа называется любое множество его попарно несмежных вершин. *Наибольшее независимое множество* (кратко, н.н.м.) графа G — н.м. графа G с наибольшим количеством вершин, а его размер называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* (кратко, задача НМ) для заданных графа G и натурального числа k состоит в том, чтобы выяснить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geq k$.

Напомним, что если a и b — смежные вершины графа G такие, что $N(a) \setminus \{b\} \supseteq N(b) \setminus \{a\}$, тогда $\alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G)$. Это так называемое *правило смежностного поглощения*.

Вершинной раскраской графа G называется произвольное отображение $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ такое, что $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любых смежных вершин $v_1, v_2 \in V(G)$. Вершинная раскраска c графа G называется *k -раскраской*, если $c : V(G) \rightarrow \overline{1, k}$. Если граф G имеет k -раскраску, то он называется *k -раскрашиваемым*. *Задача о вершинной k -раскраске* (кратко, задача k -ВР) для заданного графа G состоит в том, чтобы определить, является ли он k -раскрашиваемым или нет.

Задача НМ и задача k -ВР при любом $k \geq 3$ являются классическими NP-полными задачами на графах [4]. Класс графов с NP-полной задачей НМ (соответственно, задачей k -ВР) будем называть *НМ-сложным* (соответственно, *k -ВР-сложным*). Класс графов, для которого задача НМ (соответственно, задача k -ВР) может быть решена за полиномиальное время, мы будем называть *НМ-простым* (соответственно, *k -ВР-простым*).

1.1.4 Классы графов

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Например, класс лесов является наследственным, а класс деревьев не является таковым. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих *запрещенных порожденных подграфов*, т.е. графов, минимальных относительно удаления вершин, которые не принадлежат $\mathcal{X}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{Y})$. *Сильно наследственный* класс графов — наследственный класс, замкнутый еще и относительно удаления ребер. Если $\mathcal{X}$ — сильно наследственный класс, то существует минимальное множество $\mathcal{Y}$ его запрещенных подграфов, при этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}_s(\mathcal{Y})$. Графы из классов $\text{Free}(\mathcal{Y})$ и $\text{Free}_s(\mathcal{Y})$ называются $\mathcal{Y}$ -свободными и $\mathcal{Y}_s$ -свободными соответственно.

Минорно замкнутый класс графов — такой класс, который вместе с каждым своим графом содержит все миноры этого графа. Любой минорно замкнутый класс может быть задан множеством своих запрещенных миноров. Например, класс планарных графов $\mathcal{P}$ является минорно замкнутым, множество его запрещенных миноров состоит из графов $K_{3,3}$ и K_5 по критерию Вагнера. Для класса лесов единственным запрещенным минором является цикл с тремя вершинами.

Через $\mathcal{D}(d)$ обозначено множество графов G таких, что $\Delta(G) \leq d$. Через $\mathcal{P}(3)$ обозначаем множество субкубических планарных графов. Класс $\mathcal{T}$ состоит из всевозможных графов, каждая компонента связности которых является триодом.

1.2 Замены в графах и их значение

Предположим, что G — некоторый граф, а H — некоторый его порожденный подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовем *H -отделяющим*, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$. Предположим, что граф G содержит порожденный подграф G_1

с G_1 -отделяющим множеством A , G_2 — граф, для которого $A \subseteq V(G_2)$. Замена G_1 на G_2 в графе G состоит в образовании графа с множеством вершин $(V(G) \setminus V(G_1)) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $(E(G) \setminus E(G_1)) \cup E(G_2)$.

Будем говорить, что графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, если существует такая константа c , что для любого $X \subseteq A$ выполняется равенство $\alpha(G_1 \setminus X) = \alpha(G_2 \setminus X) + c$.

Лемма 1.2.1. *Предположим, что графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$. Если граф G^* — результат замены G_1 на G_2 в графе G , то графы G^* и G являются α -подобными относительно A .*

Доказательство. Предположим, что $A = \{v_1, \dots, v_n\}$. Рассмотрим произвольное подмножество $I \subseteq \overline{1, n}$. Пусть

$$G_I = G \setminus \{v_i \mid i \in I\}, G_I^* = G^* \setminus \{v_i \mid i \in I\}.$$

Пусть S_I — наибольшее н.м. графа G_I ,

$$M_I = S_I \setminus V(G_1), X_I = \bigcup_{x \in M_I} (N(x) \cap V(G_1)),$$

где окрестность вершины x рассматривается в графе G_I . Поскольку $X_I \subseteq A$ и A — G_1 -отделяющее множество, то $\alpha(G_I) = |M_I| + \alpha(G_1 \setminus X_I)$. В графе G_I^* , если к множеству M_I добавить наибольшее н.м. графа $G_2 \setminus X_I$, то получится н.м. мощности $|M_I| + \alpha(G_2 \setminus X_I)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha(G_I^*) &\geq |M_I| + \alpha(G_2 \setminus X_I) = \alpha(G_I) - \alpha(G_1 \setminus X_I) + \alpha(G_2 \setminus X_I) = \\ &= \alpha(G_I) - \alpha(G_1) + \alpha(G_2). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается обратное неравенство. ■

Следствие 1.2.1. *Предположим, что графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$. Если граф G^* — результат замены G_1 на G_2 в графе G , то $\alpha(G^*) = \alpha(G) - \alpha(G_1) + \alpha(G_2)$.*

Для произвольного графа G и подмножества $A \subseteq V(G)$ определим $\mathfrak{M}_\alpha(G, A)$ — семейство всех таких множеств $X \subseteq A$, что для всякого $Y \subset X$ выполняется неравенство $\alpha(G \setminus X) < \alpha(G \setminus Y)$.

Лемма 1.2.2. *Предположим, что G_1 и G_2 — графы и $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$. Тогда G_1 и G_2 являются α -подобными относительно A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_\alpha(G_1, A) = \mathfrak{M}_\alpha(G_2, A)$.*

Доказательство. Очевидно, что если G_1 и G_2 являются α -подобными относительно A , то $\mathfrak{M}_\alpha(G_1, A) = \mathfrak{M}_\alpha(G_2, A)$.

Предположим, что $A = \{v_1, \dots, v_n\}$ и что $\mathfrak{M}_\alpha(G_1, A) = \mathfrak{M}_\alpha(G_2, A)$. Для каждого $i \in \overline{1, 2}$ определим функцию $f_{(G_i, A)}(\cdot) : \{0, 1\}^n \rightarrow \overline{0, n}$ следующим образом. Для булевого вектора $(x_1, \dots, x_n)$ значение $f_{(G_i, A)}(\cdot)$ на нем положим равным $\alpha(G_i) - \alpha(G_i \setminus \{v_j \mid x_j = 1\})$. Очевидно, что обе функции $f_{(G_1, A)}(\cdot)$ и $f_{(G_2, A)}(\cdot)$ являются монотонными, причем

$$f_{(G_1, A)}(0, \dots, 0) = f_{(G_2, A)}(0, \dots, 0) = 0.$$

Поэтому для каждого $i \in \overline{1, 2}$ функция $f_{(G_i, A)}(\cdot)$ однозначно определяется набором $(M_1^{(i)}, M_2^{(i)}, \dots, M_n^{(i)})$, где $M_j^{(i)}$ — множество всех нижних аргументов, на которых функция $f_{(G_i, A)}(\cdot)$ принимает значение, равное j . Для каждого $i \in \overline{1, 2}$ множество $\mathfrak{M}_\alpha(G_i, A)$ в точности состоит из всех элементов, соответствующих (нижним) аргументам, на которых меняется значение функции $f_{(G_i, A)}(\cdot)$. Отсюда и поскольку

$$\mathfrak{M}_\alpha(G_1, A) = \mathfrak{M}_\alpha(G_2, A), f_{(G_1, A)}(0, \dots, 0) = f_{(G_2, A)}(0, \dots, 0) = 0,$$

то для любого $j \in \overline{1, n}$ выполнено равенство $M_j^{(1)} = M_j^{(2)}$. Поэтому функции $f_{(G_1, A)}(\cdot)$ и $f_{(G_2, A)}(\cdot)$ совпадают. Значит, G_1 и G_2 являются α -подобными относительно A . ■

Можно говорить о k -раскраске подмножества $A \subseteq V(G)$, имея в виду частичную k -раскраску подграфа $G[A]$, а также о ее продолжении на k -раскраску всего графа G . Можно также говорить о том, что любая k -раскраска подмножества A или графа G задается некоторым разбиением A или $V(G)$ на не более чем k независимых множеств.

Будем говорить, что графы G_1 и G_2 являются (χ, k) -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, если для любых k -раскрасок c_1 и c_2 , соответ-

ственно, графов G_1 и G_2 существуют k -раскраски c'' и c' , соответственно, графов G_2 и G_1 такие, что для любой вершины $v \in A$ справедливы равенства $c_1(v) = c''(v)$ и $c_2(v) = c'(v)$.

Для заданных графа G и подмножества $A \subseteq V(G)$ определим множество $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A)$ следующим образом. Оно состоит из всевозможных разбиений A на не более чем k непустых частей, каждое из которых *не продолжается* до k -раскраски графа G . Отметим, что если некоторое разбиение подмножества A не задает k -раскраску данного подмножества, то оно заведомо не продолжается до k -раскраски графа G . Нетрудно видеть, что графы G_1 и G_2 являются (χ, k) -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G_1, A) = \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G_2, A)$.

Лемма 1.2.3. *Предположим, что графы G_1 и G_2 являются (χ, k) -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$. Если граф G^* — результат замены G_1 на G_2 в графе G , то граф G является k -раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G^* .*

1.3 Задача реализации и ее решение

Применительно к нашим заменам, также интересна следующая задача. Для задачи НМ *задача реализации* состоит для заданного подмножества $\mathcal{M} \subseteq 2^A$ в том, чтобы выяснить, существуют ли граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_\alpha(G, A) = \mathcal{M}$. Она имеет положительное решение далеко не для любого $\mathcal{M}$. Это так, например, для $A = \{a, b\}$, $\mathcal{M} = \{\{a, b\}, \{a\}\}$. Действительно, соотношения

$$\alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G) - 1, \alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G \setminus \{a, b\}) + 1,$$

$$\alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G)$$

не совместны.

Применительно к задаче k -ВР, далее будет полностью решена задача реализации. Именно, будет показано, что для любых n и $k \geq 3$ и произвольного

семейства ϱ попарно различных разбиений n -элементного множества A на не более чем k непустых частей существуют граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$.

Для заданных натуральных чисел m, n и $k \geq 3$ определим функцию шенновского типа $f_\chi(m, n, k)$. Пусть $\Gamma_{m,n,k}$ — совокупность, состоящая из всевозможных m различных разбиений множества $\overline{1, n}$ на не более чем k непустых частей. Положим $f_\chi(m, n, k) = \max_{\varrho \in \Gamma_{m,n,k}} g_\chi(\varrho)$, где

$$g_\chi(\varrho) = \min_{\{H \mid \overline{1, n} \subseteq V(H), \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H, \overline{1, n}) = \varrho\}} |V(H)|.$$

Далее будет показано, что

$$f_\chi(m, n, k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n)).$$

Пусть a — натуральное число, а b — целое неотрицательное число. Обозначим через $E_{a,b}$ граф, который получается из полного графа на вершинах $v, v_1, \dots, v_{a+b}$ и пустого графа на вершинах $u, u_1, \dots, u_b$ добавлением всевозможных ребер вида uv_i и $u_j v_{a+j}$, где $1 \leq i \leq a$ и $1 \leq j \leq b$. Вершину v назовем *верхней*, а вершины $u, u_1, \dots, u_b$ назовем *нижними*.

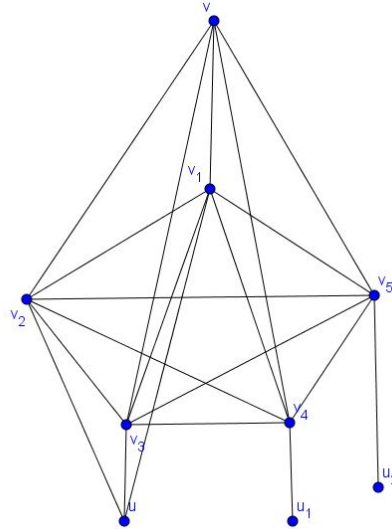


Рис. 1.5: Граф $E_{3,2}$.

Лемма 1.3.1. *Для любых $k \geq 3$ и $1 \leq a \leq k - 1$ справедливы следующие утверждения:*

а). В любой k -раскраске графа $E_{a,k-1-a}$, в которой все нижние вершины имеют один и тот же цвет, верхняя вершина имеет такой же цвет, что и нижние.

б). Любая k -раскраска верхней и всех нижних вершин графа $E_{a,k-1-a}$, в которой множество нижних вершин не одноцветно, может быть продолжена до некоторой k -раскраски всего графа.

Доказательство. Первый пункт очевиден, поскольку все вершины $v_1, \dots, v_{k-1}$ должны иметь разные цвета, каждый из которых отличен от цвета нижних вершин. Поскольку цвет вершины v отличен от цветов каждой из вершин $v_1, \dots, v_{k-1}$, то он совпадает с цветом нижних вершин.

Для доказательства второго пункта применим индукцию по параметру k . Утверждение очевидно, когда $k = 3$. Предположим, что оно справедливо для некоторого k . Докажем его справедливость для $k + 1$.

Рассмотрим отдельно случай графа $E_{k-1,1}$. Пусть c — его частичная $(k + 1)$ -раскраска, в которой $c(u) = 1, c(u_1) = 2$ и $c(v) = x$. Если $x = 1$, то можно назначить $c(v_1) = 2$ и $c(v_i) = i + 1$ для любого $i \in \overline{2, k}$. Если $x = 2$, то можно назначить $c(v_k) = 1$ и $c(v_i) = i + 2$ для любого $i \in \overline{1, k - 1}$. Если же $x \notin \{1, 2\}$, то можно считать, что $x = k + 1$, и можно назначить $c(v_1) = 2, c(v_k) = 1$ и $c(v_i) = i + 1$ для любого $i \in \overline{2, k - 1}$.

Далее мы будем считать, что в графе $E_{a,k-a}$ выполнено неравенство $2 \leq k - a \leq k - 1$. Поскольку некоторая $(k + 1)$ -раскраска c' вершин $u, u_1, \dots, u_{k-a}$ не является одноцветной и т.к. $2 \leq k - a \leq k - 1$, то существует такая вершина u_i и такой цвет $col \in \overline{1, k + 1}$, что c' не является одноцветной на $\{u, u_1, \dots, u_{k-a}\} \setminus \{u_i\}$ и $col \notin \{c'(u), c'(u_1), \dots, c'(u_{k-a})\}$. Не уменьшая общности можно считать, что $i = k - a$ и что $col = k + 1$. Удалив из графа $E_{a,k-a}$ вершины v_k и u_{k-a} , мы получим его порожденный подграф $E_{a,k-1-a}$. К нему можно применить предположение индукции. Если

$$\{c'(v), c'(u), c'(u_1), \dots, c'(u_{k-a})\} \neq \overline{1, k + 1},$$

то можно предполагать, что $c'(v) \neq k + 1$. Но тогда соответствующую

щая k -раскраска подграфа $E_{a,k-1-a}$ продолжается до $(k+1)$ -раскраски всего графа $E_{a,k-a}$ окрашиванием вершины v_k в цвет $k+1$ независимо от цвета $c'(u_{k-a})$. Остается рассмотреть случай, когда

$$a = 1, c'(u) = 1, c'(u_1) = 2, \dots, c'(u_{k-1}) = k, c'(v) = k+1.$$

Но тогда для каждого $i \in \overline{1, k}$ вершине v_i можно назначить цвет $(i+1) \bmod n$. ■

Для любых заданных натуральных чисел $k \geq 3$ и l рекурсивно определим граф $H_{k,l}$, а также его верхнюю и l нижних вершин:

i). Если $1 \leq l \leq k-1$, то граф $H_{k,l}$ изоморфен графу $E_{k-l,l-1}$, верхняя вершина графа $H_{k,l}$ совпадает с верхней вершиной графа $E_{k-l,l-1}$, множества нижних вершин графов $H_{k,l}$ и $E_{k-l,l-1}$ совпадают.

ii). Предположим, что $l \geq k$. Тогда граф $H_{k,l}$ получается из графа $H_{k, \lceil \frac{l}{k-1} \rceil}$ отождествлением каждой из его $\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor$ первых нижних вершин с верхней вершиной графа $E_{1,k-2}$ и отождествлением возможной оставшейся нижней вершины с верхней вершиной графа $E_{k-l+(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor, l-1-(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor}$. Верхние вершины графов $H_{k,l}$ и $H_{k, \lceil \frac{l}{k-1} \rceil}$ совпадают, множество нижних вершин графа $H_{k,l}$ совпадает с объединением множеств нижних вершин всех $\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor$ экземпляров графа $E_{1,k-2}$ и множества нижних вершин возможного экземпляра графа $E_{k-l+(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor, l-1-(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor}$.

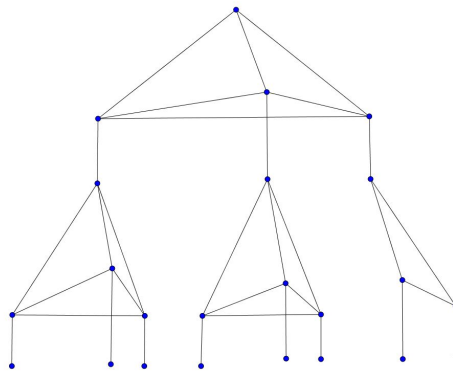


Рис. 1.6: Граф $H_{4,8}$.

Исходя из справедливости леммы 1.3.1 и правил построения графа $H_{k,l}$, индукцией по параметру l нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Лемма 1.3.2. *Для любых натуральных $k \geq 3$ и l справедливы следующие утверждения:*

а). *В любой k -раскраске графа $H_{k,l}$, в которой все нижние вершины имеют один и тот же цвет, верхняя вершина имеет такой же цвет, что и нижние.*

б). *Любая k -раскраска верхней и всех нижних вершин графа $H_{k,l}$, в которой множество нижних вершин не одноцветно, может быть продолжена до некоторой k -раскраски всего графа.*

Пусть $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$, где для любого i элемент ρ_i является разбиением одного и того же n -элементного множества A на не более чем k непустых частей $A_{i,1}, \dots, A_{i,j_i}$. Построим некоторый граф, в котором множество A будет независимым. Для любых $i \in \overline{1, m}$ и $j \in \overline{1, j_i}$ построим граф $H_{k,|A_{i,j}|}$ с множеством нижних вершин $A_{i,j}$. Если $j_i \geq 2$, то к полученному графу добавим граф K_{k+1-j_i} , все вершины которого соединим с верхними вершинами соответствующих его подграфов $H_{k,|A_{i,1}|}, \dots, H_{k,|A_{i,j_i}|}$. Полученный таким образом граф обозначим через $G(\rho)$.

Лемма 1.3.3. *Некоторая k -раскраска множества A графа $G(\rho)$ продолжается до k -раскраски всего этого графа тогда и только тогда, когда она не задается ни одним из разбиений $\rho_1, \dots, \rho_m$. Количество вершин в графе $G(\rho)$ есть $O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.*

Доказательство. Если k -раскраска с множества A задается разбиением ρ_i , то по первой части леммы 1.3.2 при любом ее продолжении на весь граф $G(\rho)$ верхние вершины соответствующих подграфов $H_{k,|A_{i,1}|}, \dots, H_{k,|A_{i,j_i}|}$ будут окрашены в попарно различные цвета. Но тогда соседние им вершины подграфа K_{k+1-j_i} нельзя окрасить в $k - j_i$ цветов. Поэтому с не продолжается до k -раскраски всего графа $G(\rho)$.

Предположим, что c' — некоторая k -раскраска множества A , которая не задается ни одним из разбиений $\rho_1, \dots, \rho_m$. Тогда по второй части леммы 1.3.2 для любого i эта раскраска может быть продолжена до k -раскраски каждого из соответствующих подграфов $H_{k,|A_{i,1}|}, \dots, H_{k,|A_{i,j_i}|}$, в которой j_i их верхних вершин окрашены в не более чем $j_i - 1$ различных цветов. Тем самым, вершины соответствующего подграфа K_{k+1-j_i} могут быть раскрашены в $k + 1 - j_i$ цветов. Поэтому, c' продолжается до k -раскраски всего графа $G(\varrho)$.

Оценим количество вершин в графе $G(\varrho)$. Очевидно, что $|V(E_{1,k-2})| = 2k - 1$ и что

$$|V(E_{k-l+(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor, l-1-(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor})| = k + l - (k - 1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor.$$

Поэтому, по правилам построения графа $H_{k,l}$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |V(H_{k,l})| &\leq |V(H_{k, \lceil \frac{l}{k-1} \rceil})| - \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor + (2k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor + k + l - (k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor \leq \\ &\leq |V(H_{k, \lceil \frac{l}{k-1} \rceil})| + (k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor + k + l \leq |V(H_{k, \lceil \frac{l}{k-1} \rceil})| + k + 2l. \end{aligned}$$

Поэтому справедливо соотношение $|V(H_{k,l})| = O(k \cdot \log_k l + l)$. Поэтому для любого i общее количество вершин в графах $H_{k,|A_{i,1}|}, \dots, H_{k,|A_{i,j_i}|}, K_{k+1-j_i}$ не превосходит

$$O(j_i \cdot k \cdot \log_k n + n) = O(k^2 \cdot \log_k n + n).$$

Тем самым, количество вершин в графе $G(\varrho)$ есть $O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$. ■

Из леммы 1.3.3 следует справедливость следующего утверждения, которое является основным результатом данного раздела диссертации.

Теорема 1.3.1. *Для любых n и $k \geq 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n -элементного множества A на не более чем k непустых частей существуют граф G и подмножество вершин $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$. При этом справедливо соотношение*

$$f_\chi(m, n, k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n)).$$

1.4 Труднорешаемость задачи НМ в некоторых классах планарных графов

1.4.1 Новое доказательство NP-полноты задачи НМ в классе планарных графов

Классическое доказательство NP-полноты задачи НМ в классе $\mathcal{P}$, предложенное в работе [28], содержит полиномиальное сведение задачи НМ к той же задаче для планарных графов и основано на следующей идее. Предположим, что G — произвольный граф. Рассмотрим изображение графа G на плоскости, в котором вершины графа G изображены точками, а ребра графа G — отрезками. Будем считать, что никакие три ребра не пересекаются в одной точке и никакое ребро не содержит никакой вершины в качестве своей внутренней точки. Очевидно, что такое изображение обязательно существует. Более того, такая укладка графа G может быть построена за время $O(|V(G)|)$ [36]. Рассмотрим в данном изображении каждое пересечение двух ребер. Количество пересечений ребер можно оценить сверху как $\binom{|E(G)|}{2}$. Для точки пересечения любых двух пересекающихся ребер ab и $a'b'$ выделим некоторую малую ее окрестность в евклидовой метрике такую, что окрестности не принадлежит никакая вершина или участок ребра, отличного от рассматриваемых пересекающихся. Удалим из графа G ребра ab и $a'b'$, а затем добавим к получившемуся графу ребра $av, ub, a'v', u'b'$ и отождествим вершины v, u, v', u' с одноименными вершинами шунта H , изображенного на следующем рисунке.

Понятно, что получившийся граф будет планарным. Для этого достаточно поместить шунт H в окрестность точки пересечения ребер ab и $a'b'$, а вершины v, u, v', u' разместить на границе данной окрестности. В работе [28] показано, что предложенное шунтирование каждой точки пересечения ребер увеличивает число независимости графа на 9. Тем самым, задача НМ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{P}$.

К сожалению, авторы работы [28] не поясняют, каким образом был получен

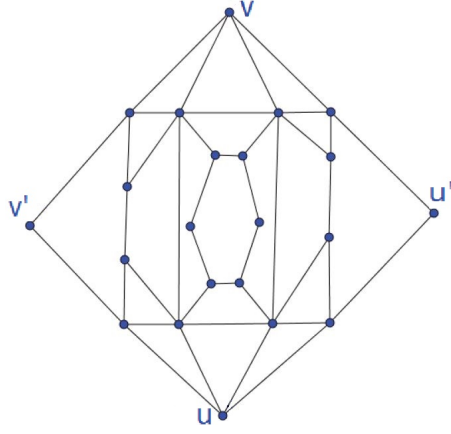


Рис. 1.7: Шунт H .

граф H . Далее, используя «хирургию» из предыдущего раздела данной работы, мы построим другой шунт H^* . Хотя граф H^* будет содержать больше вершин, чем граф H , процесс его построения, на наш взгляд, более понятен, чем в случае графа H .

Лемма 1.4.1. Пусть G_1 и G_2 — графы, изображенные на рисунке 1.8. Тогда они являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

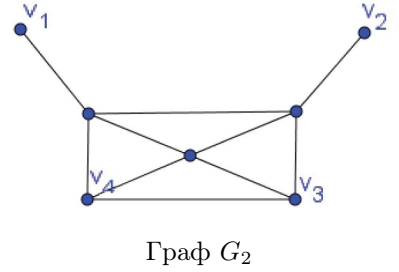
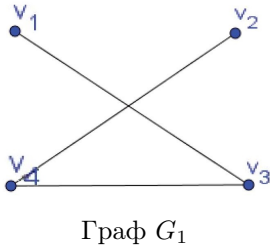


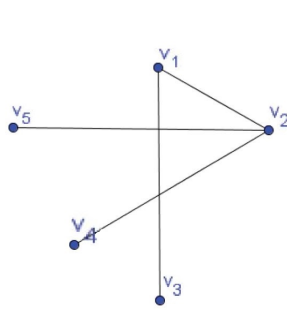
Рис. 1.8: Графы G_1 и G_2

Доказательство. Имеет место равенство

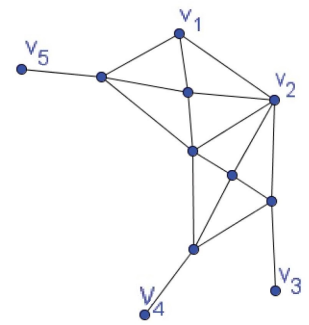
$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_\alpha(G_1, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) &= \mathfrak{M}_\alpha(G_2, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \\ &= \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\}, \end{aligned}$$

в справедливости которого можно убедиться непосредственной проверкой. Поэтому по лемме 1.2.2 графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. ■

Лемма 1.4.2. Пусть G_3 и G_4 — графы, изображенные на рисунке 1.9. Тогда они являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$.



Граф G_3



Граф G_4

Рис. 1.9: Графы G_3 и G_4

Доказательство. Рассмотрим в графе G_3 подграф, ребра которого выделены на рисунке 1.10 жирным. Этот подграф изоморфен графу G_1 . Выполним замену данного подграфа на граф G_2 (см. рисунок 1.10). В получившемся графе также рассмотрим подграф, ребра которого выделены жирным и который изоморфен G_1 , и выполним его замену на G_2 (см. рисунок 1.10). В результате получим граф, изоморфный графу G_4 . Отсюда и лемм 1.2.1 и 1.4.1 следует, что графы G_3 и G_4 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. ■

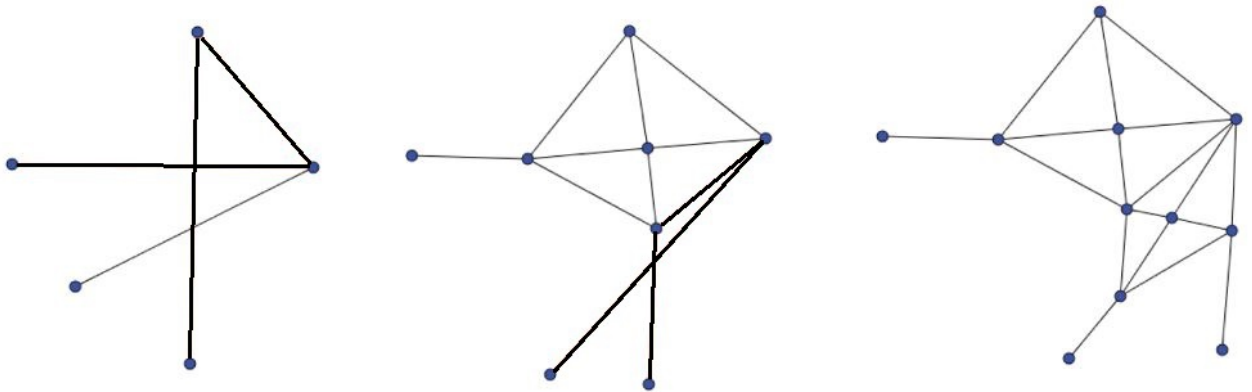


Рис. 1.10: Преобразование графа G_3 в граф G_4

Лемма 1.4.3. Пусть G_5 и G_7 — графы, изображенные на рисунках 1.11 и 1.12. Тогда они являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

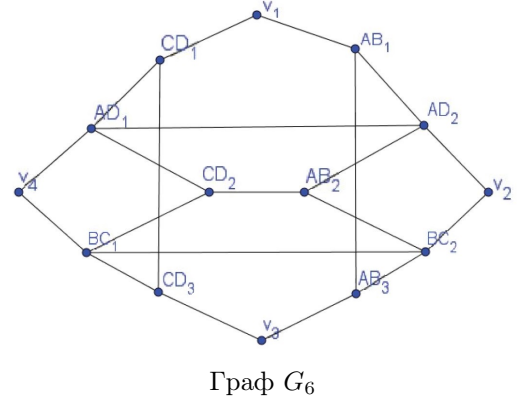
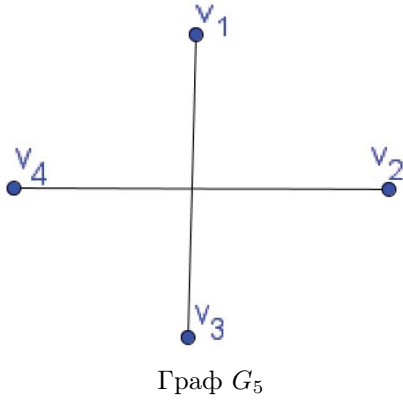


Рис. 1.11: Графы G_5 и G_6

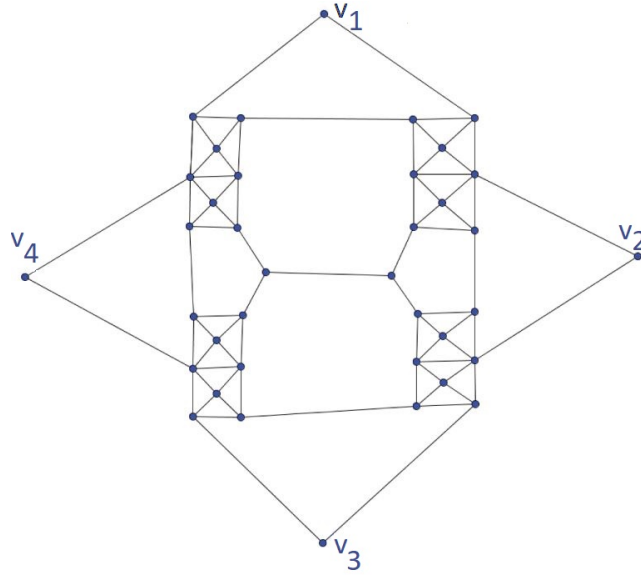


Рис. 1.12: Граф G_7

Доказательство. Нетрудно проверить, что

$$\mathfrak{M}_\alpha(G_5, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \{\{v_1, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}\}.$$

Рассмотрим граф G_6 из рисунка 1.11 и покажем, что множество $\mathfrak{M}_\alpha(G_6, \{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ такое же.

Все вершины графа G_6 можно разбить на 3 цикла:

$$(v_4, AD_1, CD_2, BC_1), (v_2, AD_2, AB_2, BC_2), (v_1, AB_1, AB_3, v_3, CD_3, CD_1).$$

Любое н.м. графа G_6 содержит не более двух вершин каждого из первых двух циклов и не более трех вершин из третьего. Предположим, что $\alpha(G_6) = 7$. Тогда любому наибольшему н.м. графа G_6 принадлежат ровно две вершины

из первых двух циклов и три из третьего. В первом цикле наибольшему н.м. графа G_6 могут принадлежать либо только вершины AD_1 и BC_1 , либо только вершины v_4 и CD_2 , а во втором — либо AD_2 и BC_2 , либо AB_2 и v_2 . Пары вершин (v_4, CD_2) и (v_2, AB_2) одновременно не могут принадлежать никакому н.м. графа G_6 , а значит, для любого наибольшего н.м. графа G_6 хотя бы одна из пар вершин (AD_1, BC_1) и (AD_2, BC_2) принадлежит ему. Из этого следует, что для любого наибольшего н.м. графа G_6 хотя бы один из двух наборов вершин (CD_1, CD_3) и (AB_1, AB_3) не принадлежит ему. Отсюда следует, что никакому наибольшему н.м. графа G_6 одновременно не могут принадлежать три вершины цикла $(v_1, AB_1, AB_3, v_3, CD_3, CD_1)$, что приводит к противоречию. Значит $\alpha(G_6) < 7$. При этом $\{v_1, v_4, AD_2, CD_2, BC_2, CD_3\}$ — н.м. графа G_6 , а значит и $\alpha(G_6) = 6$.

Рассмотрим в графе G_6 подмножества его вершин

$$\begin{aligned} &\{v_1, v_2, AB_2, AB_3, AD_1, BC_1\}, \{v_3, v_4, CD_1, CD_2, AD_2, BC_2\}, \\ &\{v_2, v_3, AB_1, AB_2, AD_1, BC_1\}, \{v_1, v_4, CD_2, CD_3, AD_2, BC_2\}. \end{aligned}$$

Каждое из них является независимым множеством графа G_6 . Тем самым, для любого $i \in \overline{1, 4}$ справедливо равенство $\alpha(G \setminus \{v_i, v_{(i+1) \bmod 4}\}) = \alpha(G)$.

При удалении из графа G_6 вершин v_2 и v_4 все оставшиеся вершины принадлежат циклу

$$(v_1, AB_1, AD_2, AB_2, BC_2, AB_3, v_3, CD_3, BC_1, CD_2, AD_1, CD_1),$$

состоящему из 12 вершин. Если $\alpha(G_6 \setminus \{v_2, v_4\}) = 6$, то вершины любого наибольшего н.м. графа $G_6 \setminus \{v_2, v_4\}$ должны чередоваться в данном цикле. Это невозможно. При этом в графе $G_6 \setminus \{v_2, v_4\}$ существует н.м. $\{v_1, AD_2, BC_2, v_3, BC_1\}$, т.е. $\alpha(G_6 \setminus \{v_2, v_4\}) = 5$.

Рассмотрим граф $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$. Предположим, что $\alpha(G_6 \setminus \{v_1, v_3\}) = 6$. Рассмотрим два подграфа графа $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$, порожденные множествами вершин

$$\{v_4, AD_1, BC_1, CD_1, CD_2, CD_3\}, \{v_2, AD_2, BC_2, AB_1, AB_2, AB_3\}.$$

Ни один из этих подграфов, очевидно, не может содержать больше трех вершин любого н.м. графа $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$. Первый из этих подграфов содержит только два трехвершинных н.м. — это $\{v_4, CD_2, CD_1\}$ и $\{v_4, CD_2, CD_3\}$, а второй из них тоже содержит только два трехвершинных н.м. — $\{v_2, AB_2, AB_1\}$ и $\{v_2, AB_2, AB_3\}$. Т.к. вершины CD_2 и AB_2 не могут одновременно присутствовать ни в каком н.м. графа $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$, то получаем противоречие с тем, что $\alpha(G_6 \setminus \{v_1, v_3\}) = 6$. При этом в графе $G_6 \setminus \{v_1, v_3\}$ существует н.м. $\{v_4, CD_2, CD_1, v_2, AB_1\}$, т.е. $\alpha(G_6 \setminus \{v_2, v_4\}) = 5$.

При удалении любых трех вершин, принадлежащих множеству $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, из графа G_6 в получившемся подграфе существует одно из следующих четырех н.м.:

$$\begin{aligned} &\{v_1, AD_1, AB_2, AB_3, CD_3\}, \{v_2, AB_1, AB_2, CD_3, AD_1\}, \\ &\{v_3, BC_1, AB_2, AB_1, CD_1\}, \{v_4, CD_2, CD_1, BC_2, AB_1\}. \end{aligned}$$

Отсюда и рассуждений из предыдущих двух абзацев следует, что число независимости получившегося подграфа равно 5.

При удалении вершин v_1, v_2, v_3, v_4 из графа G_6 множество вершин получившегося графа можно покрыть двумя циклами

$$(AD_1, CD_1, CD_3, BC_1, CD_2), (AD_2, AB_1, AB_3, BC_2, AB_2).$$

Каждому из этих циклов принадлежит не более двух вершин любого н.м. графа $G_6 \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, значит $\alpha(G_6 \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) < 5$. При этом существует н.м. $\{CD_1, BC_1, AB_1, BC_2\}$ графа $G_6 \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Из этого следует, что $\alpha(G_6 \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = 4$.

Итак,

$$\mathfrak{M}_\alpha(G_5, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \mathfrak{M}_\alpha(G_6, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}).$$

Поэтому по лемме 1.2.2 графы G_5 и G_6 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Процесс получения графа G_7 из графа G_6 представлен на рисунке 1.13. На каждом его шаге рассматривается подграф, порожденный ребрами, выделен-

ными жирным, который изоморфен графу G_3 . Такой подграф заменяется на граф G_4 .

Поэтому по леммам 1.2.1 и 1.4.2 графы G_6 и G_7 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Тем самым графы G_5 и G_7 являются α -подобными относительно $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. ■

Шунт H^* , о котором говорилось в начале этого раздела работы, совпадает с графом G_7 .

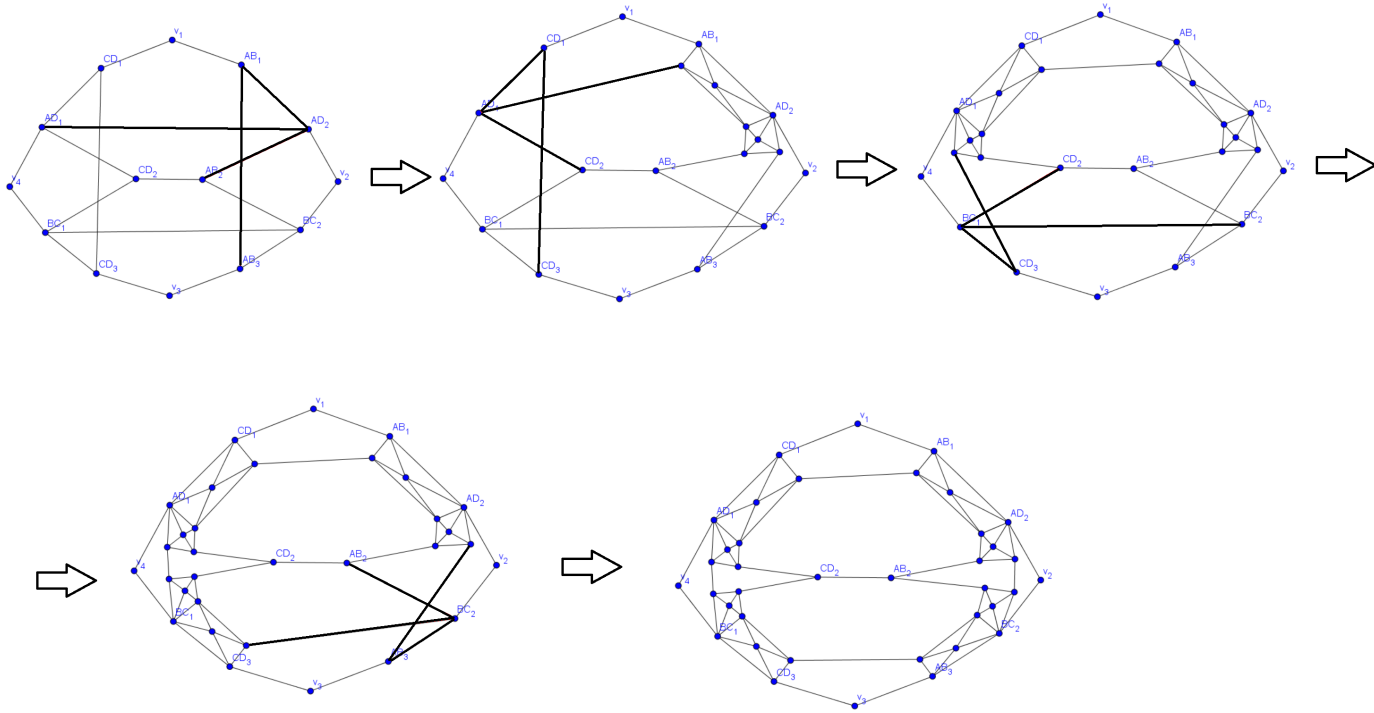


Рис. 1.13: Процесс получения графа G_7 из графа G_6

1.4.2 NP-полнота задачи НМ в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18

Напомним, что *плоской триангуляцией* называется плоский граф такой, что каждая его грань (включая и внешнюю) ограничена 3-циклом. Основным результатом данного подраздела диссертации является следующая теорема.

Теорема 1.4.1. *Задача НМ является NP-полной в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18.*

Хорошо известно, что задача НМ является NP-полной в классе $\mathcal{P}(3)$. Это следует, например, из результатов работы [28] и техники уменьшения степеней вершин графов из работы [2]. Покажем, что задача НМ в классе $\mathcal{P}(3)$ полиномиально сводится к той же задаче для плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Отсюда следует справедливость теоремы 1.4.1.

Если v — висячая вершина графа G , а u — сосед v , то по правилу смежностного поглощения справедливо равенство $\alpha(G) = \alpha(G \setminus \{u\})$. Если $G_1, \dots, G_p$ — все компоненты связности графа G , то $\alpha(G) = \sum_{i=1}^p \alpha(G_i)$. Тем самым, задача НМ в классе $\mathcal{P}(3)$ полиномиально сводится к той же задаче для связных графов из $\mathcal{P}(3)$, не содержащих висячих вершин.

Лемма 1.4.4. *Предположим, что граф O_2 образован вершинами v и u , а граф $K_{1,3}$ образован вершиной x и ее соседями y, v, u . Тогда они являются α -подобными относительно $\{v, u\}$.*

Доказательство. Справедливо равенство $\mathfrak{M}_\alpha(O_2, \{v, u\}) = \mathfrak{M}_\alpha(K_{1,3}, \{v, u\})$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Поэтому графы O_2 и $K_{1,3}$ являются α -подобными относительно $\{v, u\}$ по лемме 1.2.2. ■

Отметим, что если в укладке планарного графа некоторое ребро лежит внутри грани, то при подсчете числа ребер, ограничивающих данную грань, мы считаем это ребро два раза. Так, например, на рисунке 1.14 грани ограничены семью и восемью ребрами соответственно.

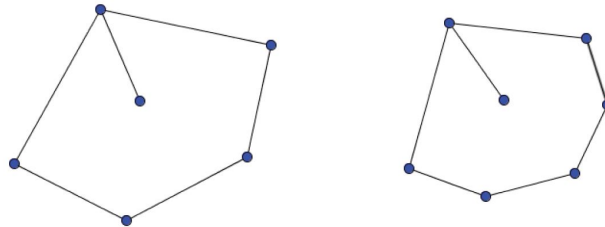


Рис. 1.14: Грани, ограниченные 7 и 8 ребрами

Далее будет реализовано полиномиальное сведение задачи НМ во множе-

стве связных графов без висячих вершин из класса $\mathcal{P}(3)$ к задаче НМ в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Оно будет представлено в виде цельного текста без разбиения рассуждений на леммы и теоремы.

Рассмотрим произвольный связный граф $G \in \mathcal{P}(3)$ без висячих вершин и его плоскую укладку. Двойное подразбиение произвольного ребра любого графа увеличивает его число независимости на единицу [2]. Поэтому можно считать, что все грани графа G , включая и внешнюю, ограничены простыми циклами. Для каждой грани рассматриваемой укладки графа G выполним описанную ниже операцию, состоящую из двух подопераций.

Подоперация 1. Эта операция применяется к грани графа G , ограниченной $n \geq 6$ ребрами. Такая грань разбивается на k меньших граней, каждая с пятью или шестью цикловыми ребрами, так, как показано на рисунке 1.15.

По следствию 1.2.1 и лемме 1.4.4 разбиение одной грани графа G увеличивает его число независимости ровно на $k - 1$.

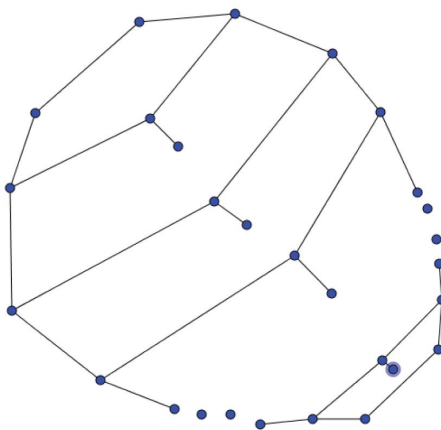


Рис. 1.15: Разбиение грани графа, подоперация 1

Подоперация 1 применяется к каждой грани графа G . В результате получится плоский граф G' , степень каждой вершины которого не превосходит 6 (поскольку каждая вершина графа G входит не более чем в три его грани). В графе G' имеются внутренние грани только следующих типов — ограниченные 3-, 4-, 5-циклами и ограниченные семью и восемью ребрами, как показано

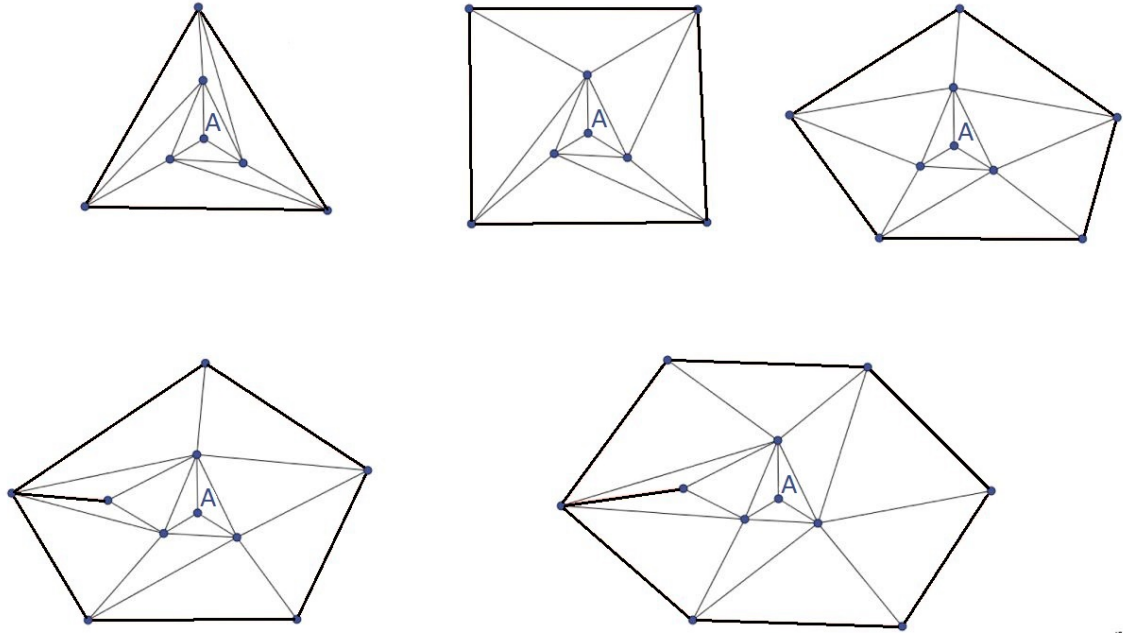


Рис. 1.16: Разбиение грани графа, подоперация 2

на рисунке 1.15.

Подоперация 2. Внутренняя грань графа G' разбивается на треугольники так, как показано на рисунке 1.16 (ребра граней графа G' выделены жирным).

После применения подоперации 2 к каждой внутренней грани графа G' мы получим граф G'' . Рассмотрим в каждом из разбиений рисунка 1.16 ту вершину, которая отмечена буквой A . Назовем ее A -вершиной. Окрестность каждой из A -вершин строго включена в объединение окрестности любого ее соседа и самого этого соседа. Отсюда и из правила смежностного поглощения следует, что множество всех A -вершин принадлежит некоторому наибольшему н.м. графа G'' . Отсюда следует, что при удалении из графа G'' любой A -вершины вместе с ее окрестностью его число независимости уменьшится ровно на 1. Таким образом, удалив все A -вершины и их окрестности, мы получим граф, изоморфный графу G' .

Из построения графа G'' следует, что если x — его вершина максимальной степени и $\deg(x) \geq 8$, то x — невисячая вершина графа G' . Если $x \in V(G)$, то эта вершина входит не более чем в три грани графа G , а значит, не более, чем в шесть граней графа G' . Поэтому при построении графа G'' в каждой

грани графа G' вершине x становятся инцидентны не более двух новых ребер. Значит, $\deg(x) \leq 18$. Если x — вершина графа G' , смежная с висячей вершиной этого графа, то вершина x принадлежит ровно двум граням графа G' . По построению графа G'' одна из данных граней содержит не более пяти ребер, инцидентных x , а другая — не более четырех таких ребер. Значит, $\deg(x) \leq 7$. Поэтому $\Delta(G'') \leq 18$.

Тем самым, задача НМ в классе $\mathcal{P}(3)$ полиномиально сводится к той же задаче в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы 1.4.1.

1.5 NP-полнота задачи 3-ВР для планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5, чьи грани имеют длину 3 и 4

Основным результатом данного раздела диссертации является следующая теорема.

Теорема 1.5.1. *Класс планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5 и с гранями, ограниченными не более чем 4 ребрами каждая, является 3-ВР-сложным.*

Хорошо известно, что класс $\mathcal{P}$ является 3-ВР-сложным. Выполним полиномиальное сведение задачи 3-ВР в классе $\mathcal{P}$ к той же задаче в рассматриваемом подклассе класса $\mathcal{P}$. Отсюда и будет следовать справедливость теоремы 1.5.1.

Пусть $d \geq 3$ — некоторое натуральное число. Рассмотрим граф H_1^d , полученный замыканием в цикл d копий графа *diamond* и добавлением в места склейки d листов (см. рисунок 1.17).

Операция H_1^d —шунтирования применяется к вершине x некоторого графа G , окрестность которой образована вершинами $y_1, \dots, y_d$, где $d \geq 3$, и состоит в удалении x из G , добавлении графа H_1^d и биективном отождествлении листьев графа H_1^d с вершинами $y_1, \dots, y_d$. Результат данной операции G'_x будет планарным графом, если таковым был граф G . Для этого мы циклически упорядочиваем вершины $y_1, \dots, y_d$ (относительно плоской укладки графа G)

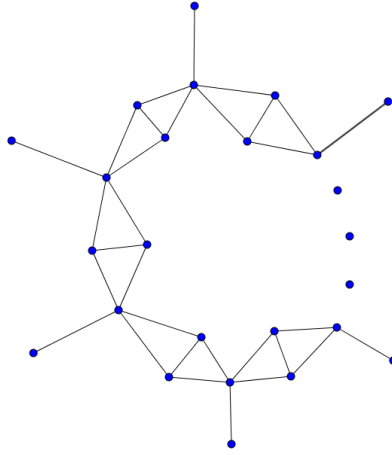


Рис. 1.17: Граф H_1^d

и в соответствующем порядке выполняем их отождествление с листьями графа H_1^d . Граф G'_x является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G . В этом нетрудно убедиться, заметив, что вершины степени 2 имеют одинаковые цвета в любой 3-раскраске графа *diamond*. Если одновременно применить операцию H_1^d —шунтирования ко всем вершинам графа без вершин степени 1 и 2, то получится граф со степенями всех вершин не более чем 5.

Рассмотрим графы H_2 и H_3 , изображенные на рисунке 1.18.

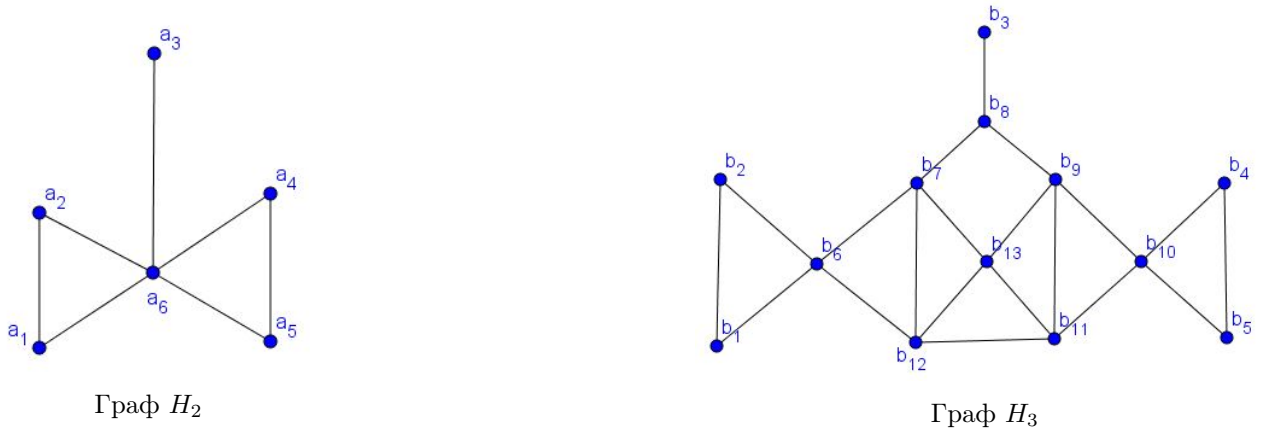


Рис. 1.18: Графы H_2 и H_3

Предположим, что граф G таков, что $\Delta(G) \leq 5$ и что G содержит порожденный подграф H_2 . Предположим, что граф G' — результат замены подгра-

фа H_2 на подграф H_3 в графе G . Тогда граф G' является планарным, если таковым является граф G .

Лемма 1.5.1. *Граф G' является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G .*

Доказательство. Предположим, что c — некоторая 3-раскраска графа G . Тогда $\{c(a_1), c(a_2)\} = \{c(a_4), c(a_5)\}$ и $c(a_6) \notin \{c(a_1), c(a_2)\}$. Продолжим имеющуюся 3-раскраску графа $G \setminus \bigcup_{j=1}^6 \{a_j\}$: $c(b_i) = c(a_i)$ для любого $i \in \overline{1, 6}$,

$$c(b_8) = c(b_{10}) = c(b_{13}) = c(b_6), c(b_7) = c(b_{11}) = c(b_1), c(b_9) = c(b_{12}) = c(b_2).$$

Очевидно, что c — 3-раскраска графа G .

Предположим, что c' — некоторая 3-раскраска графа G' . Тогда

$$\{c'(b_1), c'(b_2)\} = \{c'(b_4), c'(b_5)\}, c'(b_6) = c'(b_8) = c'(b_{10}) = c'(b_{13}),$$

$$c'(b_6) \notin \{c'(b_1), c'(b_2)\}.$$

Продолжим имеющуюся 3-раскраску графа $G' \setminus \bigcup_{j=1}^{12} \{b_j\}$: $c'(a_i) = c'(b_i)$ для любого $i \in \overline{1, 6}$. Очевидно, что c' — 3-раскраска графа G' . ■

Очевидно, что задача 3-ВР в классе $\mathcal{P}$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{P}$ без вершин степени 1 и 2 и шарниров. Каждая внешняя грань такого графа образована циклом. Рассмотрим произвольный планарный граф G без вершин степени 1 и 2 и шарниров. Выполним операцию H_1^d -шунтирования для каждой вершины G , а затем последовательно будем выполнять операцию замены H_2 на H_3 для каждого вхождения подграфа H_2 в текущий граф. Полученный граф G' будет планарным, причем он является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G .

В графе G' каждая грань длины не менее чем 5 имеет один из следующих двух типов. Грань первого типа — результат «окружения» вершин графа G в результате H_1^d -шунтирований и замен H_2 на H_3 . Грань второго типа — образ грани графа G при переходе от G к G' .

После (H_2, H_3) -замен ребра a_1a_6 и a_6a_5 переходят в пять ребер $b_1b_6, b_6b_{12}, b_{12}b_{11}, b_{11}b_{10}, b_{10}b_5$. В каждой грани этого графа ребро a_2a_6 переходит в ребра b_2b_6, b_6b_7, b_7b_8 , а ребро a_6a_4 переходит в ребра $b_8b_9, b_9b_{10}, b_{10}b_4$. Таким образом, длина грани первого типа делится на 5, длина грани второго типа делится на 7.

Для каждого цикла C , образующего грань первого типа в графе G' , зададим функцию $g_1 : V(C) \rightarrow \overline{0, 2}$. Ее значение определяется положением вершины в экземпляре подграфа H_3 , которому она принадлежит, а именно

$$g_1(b_1) = 2, g_1(b_6) = 0, g_1(b_{12}) = 1, g_1(b_{11}) = 1, g_1(b_{10}) = 1, g_1(b_5) = 2.$$

Для каждого цикла C' , образующего грань второго типа в графе G' , аналогично зададим функцию $g_2 : V(C') \rightarrow \overline{0, 2}$, а именно

$$\begin{aligned} g_2(b_3) &= 1, g_2(b_8) = 1, g_2(b_9) = 1, g_2(b_{10}) = 0, \\ g_2(b_4) &= 2, g_2(b_7) = 1, g_2(b_6) = 1, g_2(b_2) = 1. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что никакие две грани первого типа не пересекаются. Может пересекаться грань второго типа с гранью первого типа или второго типа. Однако, для любой вершины x выполнено неравенство $g_i(x) + g_j(x) \leq 5 - \deg(x)$, где индексы i и j определяются типом граней, которым принадлежит x . Мы будем проводить ребра, лежащие внутри граней первого или второго типа или во внешней грани, причем для каждой вершины x количество таких ребер не превышает значения суммы таких функций (g_1 и g_1 или g_1 и g_2) на x . Тем самым, максимальная степень вершин в результирующем графе не превосходит 5.

С каждой гранью первого или второго типов графа G' выполним следующее преобразование. К графу добавляется цикл C_n , где $n \geq 5$ — количество ребер в соответствующей грани графа G' , причем данный цикл помещается внутрь данной грани, если она является внутренней, или грань помещается внутрь цикла, если грань является внешней. Всюду далее мы будем рассматривать только случай внутренней грани. Производится нумерация вершин грани и цикла по часовой стрелке.

В случае грани первого типа все вершины грани со значением функции g_1 , равным единице или двойке, соединяются с вершиной цикла с тем же номером. Вершина со значением функции, равным двойке, дополнительно соединяется с вершиной с номером на два больше. Вершина с нулевым значением функции не соединяется с циклом.

В случае грани второго типа все вершины грани со значением функции g_2 , равным единице или двойке, соединяются с вершиной цикла с тем же номером аналогично первому случаю. Вершина со значением функции, равном двойке, дополнительно соединяется с вершиной с номером на два меньше. Вершина с нулевым значением функции не соединяется с циклом.

На рисунке 1.19 представлены фрагменты граней и циклов с значениями функций g_1 и g_2 и добавленными ребрами.

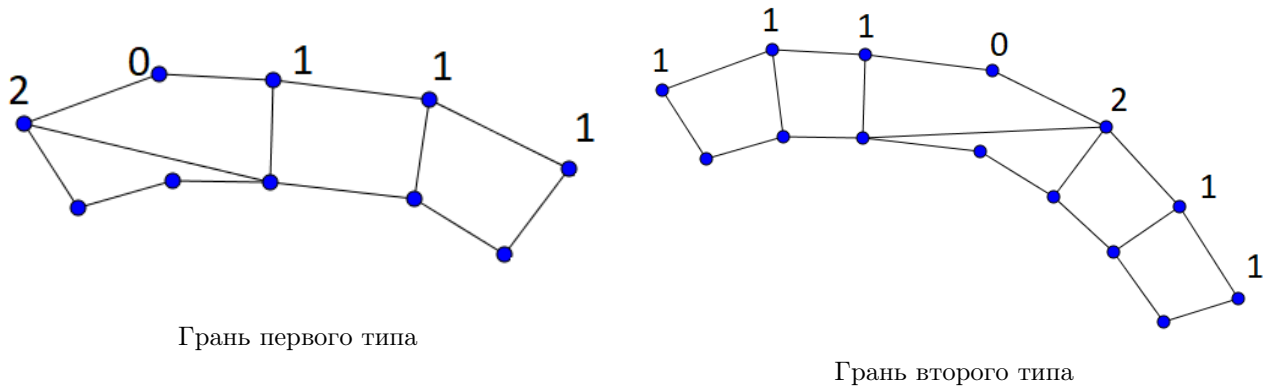


Рис. 1.19: Фрагмент результата преобразования граней первого и второго типов

Обозначим через G'' результат преобразования графа G' , описанного выше. Очевидно, что граф G'' является планарным. Также очевидно, что G' является 3-раскрасчиваемым, если таковым является граф G'' . Удалим произвольную вершину степени 2 из цикла C_n . Соседняя с ней вершина в цикле в получившемся графе имеет степень 2. Ее также можно удалить. Поэтому элиминируется весь цикл C_n . Тем самым, граф G'' является 3-раскрасчиваемым тогда и только тогда, когда таковым является и граф G' . Грань графа G'' , ограниченную циклом C_n , назовем *самой внутренней*. Ее длина не меньше пяти, она смежна только с гранями длины 4 и все вершины, принадлежащие ей, имеют степень не более чем 4.

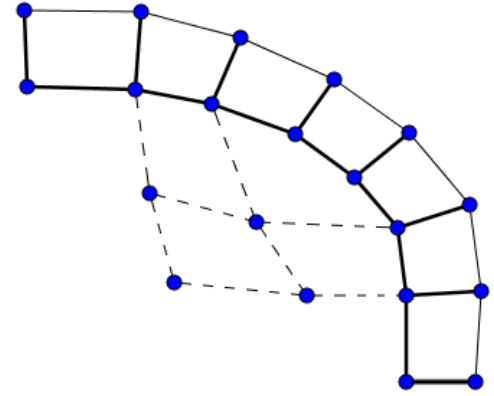
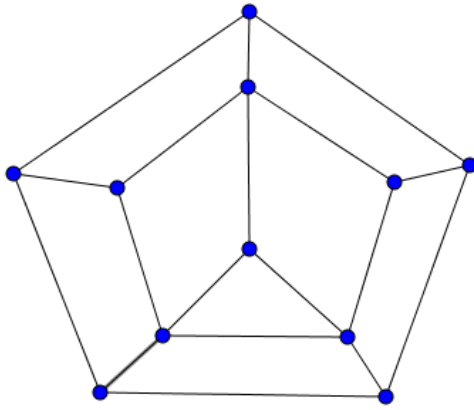


Рис. 1.20: Разбиение самых внутренних граней

Разбиение самой внутренней грани длины 5 представлено на рисунке 1.20. Проверку того, что любая 3-раскраска вершин грани продолжается на весь 11-вершинный граф разбиения, легко осуществить непосредственно. Для этого достаточно заметить, что в любой 3-раскраске вершин этой грани две вершины имеют первый цвет, две вершины имеют второй цвет, а одна вершина — третий цвет. После этого рассмотреть положение вершины третьего цвета — смежна ли она с вершиной степени 4 в графе разбиения или нет.

Покажем, как разбить самую внутреннюю грань с $n > 5$ ребрами на две грани длины $n - 1$ и 5 (если $n = 6$, то граней длины 5 ровно две штуки) и несколько граней длины 4. Каждая вершина новых граней имеет степень не более чем 4. Объявление грани длины $n - 1$ самой внутренней и выполнение данного разбиения $n - 5$ раз сводит задачу к уже рассмотренному случаю.

Создадим внутри каждой самой внутренней грани цикл C_n . Произведем нумерацию вершин грани и цикла по часовой стрелке. Соединим вершины грани с вершинами цикла C_n с тем же номером. Проведенные на этом шаге ребра выделены жирным на рисунке 1.20. Проведение данных ребер сохраняет 3-раскрасиваемость, т.к. для ее сохранения достаточно присвоить каждой вершине цикла цвет с номером на 1 большим (по модулю 3), чем цвет вершины грани, с которой она соединена. Также проведем в произвольном месте данной грани ребра, выделенные пунктиром на рисунке 1.20. Очевидно, что их добавление не меняет 3-раскрасиваемости графа. Они разбивают грань

на грани длины 4 и грани длины 5 и $n - 1$.

После выполнения всех преобразований, описанных выше, мы получим граф G''' . Он является планарным, причем G''' является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда таковым является граф G . Количество вершин G''' ограничено сверху полиномом третьей степени от числа вершин графа G . Тем самым, имеет место сведение задачи 3-ВР в классе $\mathcal{P}$ к той же задаче в классе планарных графов, степени всех вершин которых не более чем 5 и все грани имеют длину 3 и 4. Поэтому справедлива теорема 1.5.1.

Глава 2

Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов

В данной главе диссертации будет доказана полиномиальная разрешимость задачи НМ для субкубических планарных графов, не содержащих порожденного триода $T_{3,3,2}$. Этот результат опубликован в работе [9].

2.1 Неприводимые графы и их свойства

2.1.1 Сжимаемые подграфы с малым отделяющим множеством

Пару (H, A) назовем *вырожденной*, если объединение всех элементов множества $\mathfrak{M}_\alpha(H, A)$ не равно A .

Лемма 2.1.1. *Если граф G содержит порожденный подграф H с H -отделяющим множеством A , (H, A) — вырожденная пара, то $\alpha(G \setminus \{x\}) = \alpha(G)$ для некоторой вершины $x \in A$.*

Доказательство. Пусть $x \in A$ и x не принадлежит ни одному из множеств семейства $\mathfrak{M}_\alpha(H, A)$. Допустим, S — н.н.м. в графе G и $x \in S$. Множество $X = A \cap S$ не принадлежит семейству $\mathfrak{M}_\alpha(H, A)$. Но тогда суще-

существует такое $Y \subset X$, что $x \notin Y$ и

$$\alpha(H[B \cup X]) = \alpha(H[B \cup Y]) = |S \cap V(H)|.$$

Пусть Z — н.н.м. в графе $H[B \cup Y]$. Тогда $(S \setminus V(H)) \cup Z$ — н.м. в графе $G \setminus \{x\}$ мощности $\alpha(G)$. ■

В данном подразделе мы будем предполагать, что пара (H, A) не является вырожденной.

Если $A = \{v_1, v_2\}$, то имеются ровно три возможных случая:

- (I) $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1, v_2\}\}$,
- (II) $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}\}$,
- (III) $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_1, v_2\}\}$.

Соответственно, для каждого из данных трех случаев определим граф H' следующим образом:

- (I) H' — простой путь (v_1, v_3, v_2) ,
- (II) H' — полный граф на двух вершинах v_1, v_2 ,
- (III) H' — пустой граф на двух вершинах v_1 и v_2 .

В каждом из этих случаев H и H' являются α -подобными относительно A .

Лемма 2.1.2. *Предположим, что $H = (V, E)$ — связный порожденный подграф графа G , содержащий H -отделяющее множество $A = \{v_1, v_2\}$, и $|V(H)| \geq 3$. Пусть $G^*(t)$ — результат замены H на $H'(t)$ в графе G , где граф $H'(t)$ определяется правилом с номером t . Тогда для любого t граф $G^*(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{P}(3) \cap \text{Free}(\{T_{3,3,2}\})$, если граф G не содержит разделяющих клик и принадлежит тому же множеству.*

Доказательство. Очевидно, что $G^*(t) \in \mathcal{P}(3)$. Предположим, что граф $G^*(t)$ содержит порожденный триод $T_{3,3,2}$. Поскольку G не содержит разделяющих клик и $|V(H)| \geq 3$, то $v_1 v_2$ не является ребром графа G . Отсюда и ввиду связности графа H следует, что в графе H между вершинами v_1 и v_2 есть порожденный путь длины не менее чем 2. Поэтому G содержит порожденный подграф $T_{3,3,2}$ в каждом из случаев I–III по определению графа $H'(t)$. Получаем противоречие. Значит, предположение было неверным. ■

Будем называть порожденный связный подграф H некоторого графа 2 -сжимаемым, если H содержит H -отделяющее множество ровно с двумя вершинами и $|V(H)| \geq 4$.

Пусть H — граф, а v_1, v_2, v_3 — некоторые три его вершины, образующие множество A . Далее, в каждом из случаев мы определяем граф H' :

(I) если $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то H' — простой путь $(v_1, v_3, v_4, v_5, v_2)$.

(II) если $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1, v_2, v_3\}\}$, то H' — простой путь $(v_1, v_4, v_2, v_5, v_3)$.

(III) если $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2, v_3\}\}$, то H' — простой путь (v_1, v_2, v_4, v_3) .

(IV) если $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то H' — дерево с вершинами v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 и ребрами $v_1v_4, v_2v_4, v_4v_5, v_5v_3$.

(V) если $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$, то H' — граф

с вершинами $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ и ребрами $v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_5, v_5v_6, v_6v_3$.

(VI) если $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}\}$, то H' — полный граф с вершинами v_1, v_2, v_3 .

(VII) если $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_1, v_2\}\}$, то H' — простой путь $(v_1, v_4, v_5, v_3, v_2)$.

В каждом из этих случаев H и H' являются α -подобными относительно A .

Будем говорить, что порожденный подграф H некоторого графа является $(3, t)$ -сжимаемым, если H -отделяющее множество содержит ровно три вершины, причем $|V(H)| \geq 4$ (если $t = \text{VI}$), или $|V(H)| \geq 5$ (если $t = \text{III}$), или $|V(H)| \geq 6$ (если $t \in \{\text{I}, \text{II}, \text{IV}, \text{VII}\}$), или $|V(H)| \geq 7$ (если $t = \text{V}$). В дальнейшем, мы будем применять каждое из описанных семи сжатий к графам из класса $\mathcal{P}(3) \cap \text{Free}(\{T_{3,3,2}\})$ так, что результат снова будет принадлежать этому же классу (как правило, результат применения замены к графу G будет порожденным пографом графа G).

Пусть H — граф, а v_1, v_2, v_3, v_4 — некоторые четыре его вершины, образующие множество A . Далее, в каждом из случаев мы определяем граф H' :

(I) если

$$\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}\},$$

то H' — простой цикл (w_1, w_3, w_2, w_4) .

(II) если

$$\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\},$$

то H' — граф с вершинами w_1, w_2, w_3, w_4 и ребрами w_1w_2, w_3w_4 .

(III) если $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_2, v_4\}, \{v_1, v_3, v_4\}\}$, H' — граф с

вершинами $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$

и ребрами $w_1w_5, w_5w_6, w_6w_2, w_6w_7, w_7w_3, w_3w_8, w_8w_2, w_8w_4$.

(IV) если $\mathfrak{M}_\alpha(H, A) = \{\{v_2, v_4\}, \{v_1, v_3\}\}$, то H' — граф

с вершинами $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8$

и ребрами $w_1w_5, w_5w_6, w_6w_2, w_6w_7, w_7w_3, w_3w_4, w_4w_8, w_2w_8$.

В каждом из этих случаев H и H' являются α -подобными относительно A .

Будем говорить, что порожденный подграф H некоторого графа является $(4, t)$ -сжимаемым, если H -отделяющее множество содержит ровно четыре вершины, причем $|V(H)| \geq 5$ (если $t \in \{I, II\}$) или $|V(H)| \geq 9$ (если $t \in \{III, IV\}$). В дальнейшем, мы будем применять каждое из описанных четырех сжатий к графам из класса $\mathcal{P}(3) \cap \text{Free}(\{T_{3,3,2}\})$ так, что результат снова будет принадлежать этому же классу (как правило, результат применения замены к графу G будет порожденным пографом графа G).

Мы будем записывать H -отделяющее множество в виде набора (который будем называть H -отделителем), а не в виде множества. Мы предполагаем, что i -й элемент набора переходит в вершину v_i при замене.

2.1.2 Понятие неприводимого графа и его значение

Клик графа называется его полный подграф. Клика называется *разделяющей*, если ее удаление из графа увеличивает количество его компонент связности.

Связный граф G будем называть *неприводимым*, если одновременно выполнены следующие условия:

1. Граф G принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap \text{Free}(\{T_{3,3,2}\})$.
2. Граф G не содержит разделяющих клик.
3. Граф G не содержит порожденного подграфа H и H -отделяющего множества A таких, что $|V(H)| \leq 12$, $|A| \leq 4$ и (H, A) вырождена.
4. Граф G не содержит связного порожденного подграфа H_1 с не более чем 12 вершинами такого, что к G можно применить операцию замены графа H_1 на некоторый граф H_2 такой, что $|V(H_2)| < |V(H_1)|$ и результат замены принадлежит классу $\mathcal{P}(3) \cap \text{Free}(\{T_{3,3,2}\})$.

Известно, что задача НМ для любого наследственного класса графов $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче для части $\mathcal{X}$, состоящей из всевозможных связных графов из $\mathcal{X}$, не содержащих разделяющих клик [16]. Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{P}(3) \cap \text{Free}(\{T_{3,3,2}\})$. Перебором всех его подмножеств вершин с не более чем 12 вершинами и перебором всех графов с не более чем 11 вершинами, а также решением не более чем $2^4 = 16$ задач НМ для каждого из графов с не более чем 12 вершинами можно за время $O(|V(G)|^{12})$ проверить, удовлетворяет ли граф G требованиям пунктов 3 и 4. Принадлежность графа с n вершинами и m ребрами классу $\mathcal{P}(3)$ распознается за время $O(n + m)$ [36]. Принадлежность графа с n вершинами классу $\text{Free}(\{T_{3,3,2}\})$ распознается за время $O(n^9)$ перебором всех 9-элементных подмножеств вершин и проверкой порождаемости подграфа $T_{3,3,2}$ одним из таких подмножеств. Из данных фактов и леммы 2.1.2 следует, что задача НМ для графов из класса $\mathcal{P}(3) \cap \text{Free}(\{T_{3,3,2}\})$ полиномиально сводится к неприводимым графам из этого класса.

2.1.3 Некоторые вспомогательные результаты

Для рассматриваемых плоской укладки планарного графа и его порожденного цикла $(v_1, \dots, v_k)$ обозначение $D(v_1, \dots, v_k)$ означает область в укладке, ограниченную данным циклом.

Лемма 2.1.3. *Для любого порожденного 5-цикла неприводимого графа G не менее четырех вершин цикла имеют степень 3.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что в графе G существует порожденный цикл $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, в котором либо $\deg(x_3) = \deg(x_5) = 2$, либо $\deg(x_4) = \deg(x_5) = 2$. В первом случае пара

$$(G[\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}], \{x_1, x_2, x_4\}),$$

является вырожденной. Во втором случае подграф $H = G[\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}]$ с H -отделителем (x_1, x_2, x_3) является $(3, VI)$ -сжимаемым. Результат сжатия, обозначаемый через G^* , является минором графа G , т.к. он получается стягиванием ребер x_1x_5, x_4x_3 . Поэтому $G^* \in \mathcal{P}(3)$. Граф G^* не содержит порожденного триода $T_{3,3,2}$, для этого достаточно показать, что никакой порожденный триод $T_{3,3,2}$ графа G^* не содержит ребра x_1x_3 . Действительно, если такой триод $T_{3,3,2}$ в графе G^* существует, то граф G содержит порожденный триод $T_{3,3,2}$, одним из ребер которого является ребро x_1x_5 . ■

Лемма 2.1.4. *Пусть G — планарный субкубический граф, C_1^*, C_2^*, C_3^* — три попарно различных порожденных цикла графа G таких, что каждое из множеств*

$$E(C_1^*) \cap E(C_2^*), E(C_2^*) \cap E(C_3^*), E(C_1^*) \cap E(C_3^*)$$

порождает в G простой путь. Пусть существуют e_1^, e_2^*, e_3^* — три ребра графа G , в указанном порядке образующие порожденный путь, причем*

$$e_1^* \in (E(C_1^*) \cap E(C_2^*)) \setminus E(C_3^*), e_2^* \in E(C_1^*) \cap E(C_2^*) \cap E(C_3^*),$$

$$e_3^* \in (E(C_2^*) \cap E(C_3^*)) \setminus E(C_1^*).$$

Тогда для любой плоской укладки графа G справедливо одно из включений: $D(C_3^) \subset D(C_2^*)$ или $D(C_1^*) \subset D(C_2^*)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную плоскую укладку графа G . Достаточно рассматривать два случая, т.е. когда

$$D(C_2^*) \subset D(C_1^*) \text{ или } D(C_2^*) \not\subset D(C_1^*), D(C_1^*) \not\subset D(C_2^*).$$

Поскольку для любых различных i и j множество $E(C_i^*) \cap E(C_j^*)$ порождает в G простой путь и G является субкубическим планарным, то множество $D(C_i^*) \cap D(C_j^*)$ представляет собой жорданову кривую. Пусть P — простой путь, порождаемый множеством ребер $E(C_1^*) \cap E(C_2^*)$. Ясно, что $e_1^*, e_2^* \in E(P)$. Т.к. $e_3^* \notin E(C_1^*)$, то $e_3^* \notin E(P)$. Понятно, что e_2^* — концевое ребро пути P , иначе e_2^*, e_3^* и ребро P , соседнее с e_2^* и отличное от e_1^* , имеют общую вершину и принадлежат C_2^* . Напомним, что $D(C_2^*) \cap D(C_3^*)$ — жорданова кривая, частью которой являются ребра e_2^*, e_3^* и не является ребро e_1^* , причем G является субкубическим планарным. Отсюда, очевидно, следует, что $D(C_3^*) \subset D(C_2^*)$ в обоих возможных случаях, т.е. когда

$$D(C_2^*) \subset D(C_1^*) \text{ или } D(C_2^*) \not\subset D(C_1^*), D(C_1^*) \not\subset D(C_2^*).$$

■

2.2 О несуществовании неприводимых графов, содержащих достаточно большие порожденные триоды

Целью этого раздела является доказательство того, что не существует неприводимого графа, содержащего порожденный триод $T_{2,2,10}$. Предположим, что такой граф $G = (V, E)$ существует. Рассмотрим его порожденный триод $T_{2,2,10}$. Обозначим вершину триода степени три через o , вершины ветви с десятью вершинами обозначим через $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ (в порядке удаления от o), вершины других двух ветвей через b_1, b_2 и c_1, c_2 (также в порядке удаления от o).

В следующих трех леммах мы покажем, что равенство $N(b_2) \setminus \{b_1\} = N(c_2) \setminus \{c_1\}$ невозможно. При доказательстве данных лемм мы предполагаем противное и обозначаем множество $N(b_2) \setminus \{b_1\}$ через N' . Это множество не может быть пустым, иначе b_1 образует разделяющую клику графа G . Очевидно, что N' состоит либо из одной вершины x , либо из двух вершин x и y . При доказательстве следующих трех лемм мы

будем предполагать, что x и y не смежны, иначе подграф $G[\{b_2, c_2, x, y\}]$ является 2-сжимаемым. Мы также будем предполагать, что $\deg(b_1) \geq \deg(c_1)$, поскольку это предположение не уменьшает общности.

Под обозначением $[a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2]$ понимается сокращение для фразы «вершины $a, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2$ порождают триод $T_{3,3,2}$ с множеством ребер $\{ab_1, b_1b_2, b_2b_3, ac_1, c_1c_2, c_2c_3, ad_1, d_1d_2\}$ ».

Лемма 2.2.1. *Каждый элемент множества N' не смежен ни с одной вершиной множества $\{a_1, a_2, a_3\}$.*

Доказательство. Предположим, что некоторый элемент $x \in N'$ имеет соседа во множестве $\{a_1, a_2, a_3\}$. Очевидно, что этим соседом $a_{i'}$ может быть только a_1 , иначе

$$[a_{i'}, a_{i'+1}, a_{i'+2}, a_{i'+3}, a_{i'-1}, a_{i'-2}, a_{i'-3}, x, c_2],$$

где $a_0 = o, a_{-1} = b_1$.

Предположим, что множество N' состоит из x и y . Если $y b_1 \in E$, то $[a_1, a_2, a_3, a_4, x, b_2, y, o, c_1]$. Понятно, что y имеет соседа $a_{i''}$ во множестве $\{a_2, a_3, a_4\}$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, x, c_2, y, o, b_1]$. Но тогда

$$[a_{i''}, a_{i''+1}, a_{i''+2}, a_{i''+3}, a_{i''-1}, a_{i''-2}, a_{i''-3}, y, c_2].$$

Предположим теперь, что $N' = \{x\}$. Существует вершина $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{b_2, o\}$, иначе x и a_1 образуют разделяющую клику графа G . Рассмотрим сначала случай, когда $b'_1 c_1 \in E$. Очевидно, что b'_1 должна быть смежна с некоторой вершиной $a_{i'''}$ $\in \{a_2, a_3, a_4\}$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b'_1, x, c_2]$. Понятно, что $i''' \neq 2$, иначе $\{b'_1, a_2\}$ — разделяющая клика G . Тогда

$$[a_{i'''}, a_{i''' + 1}, a_{i''' + 2}, a_{i''' + 3}, b'_1, b_1, b_2, a_{i''' - 1}, a_{i''' - 2}].$$

Рассмотрим теперь случай, когда b'_1 и c_1 не смежны. Понятно, что b'_1 смежна хотя бы с одной из вершин a_2 и a_3 , иначе $[x, a_1, a_2, a_3, b_2, b_1, b'_1, c_2, c_1]$. Можно считать, что b'_1 не смежна с a_2 , иначе $\{x, a_1\}$ — разделяющая клика G (если $\deg(c_1) = 2$) или c_1 имеет соседа, не принадлежащего множеству $\{o, c_2, b'_1\}$

и смежного с a_3 , причем b'_1 и этот сосед равноправны с точки зрения рассуждений. Иными словами, можно предполагать, что $b'_1 a_3 \in E$. Предположим, что c_1 имеет соседа c'_1 , отличного от каждой из вершин o, c_2, b'_1 . Тогда либо $b'_1 c'_1 \in E$, либо $c'_1 a_2 \in E$, иначе $[x, b_2, b_1, b'_1, c_2, c_1, c'_1, a_1, a_2]$. Предположим, что $b'_1 c'_1 \in E$. Если $c'_1 a_2 \notin E$, то $[b'_1, c'_1, c_1, c_2, a_3, a_2, a_1, b_1, b_2]$. Если же $c'_1 a_2 \in E$, то $\{b'_1, a_3\}$ — разделяющая клика G . Предположим, что $b'_1 c'_1 \notin E$. Тогда c'_1 должна быть смежна с a_2 , иначе $[x, b_2, b_1, b'_1, c_2, c_1, c'_1, a_1, a_2]$. Понятно, что c'_1 должна быть смежна с некоторой вершиной a_i , где $i \in \{4, 5\}$, иначе $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, x, b_2, c'_1, c_1]$. Тогда $[a_1, a_2, c'_1, a_i, o, b_1, b'_1, x, c_2]$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\deg(c_1) = 2$. Вершина a_2 имеет соседа a'_2 , отличного от каждой из вершин a_1 и a_3 , т.к. иначе b'_1 и a_3 образуют разделяющую клику графа G . Вершины a'_2 и b'_1 не смежны, иначе $[a_3, a_4, a_5, a_6, b'_1, b_1, b_2, a_2, a_1]$. Но тогда $[x, b_2, b_1, b'_1, a_1, a_2, a'_2, c_2, c_1]$.

Во всех случаях мы получили противоречие. Значит, наше предположение о существовании вершины x было неверным. ■

Лемма 2.2.2. *Если $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$ и $c'_1 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$, то $b'_1 = c'_1$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть v — произвольная вершина из множества N' . По лемме 2.2.1, никакая из вершин $a_1, \dots, a_{10}$ не является соседом v . Не уменьшая общности, можно рассматривать только два случая: 1). $b'_1 v \notin E, c'_1 v \notin E$ и 2). $b'_1 v \notin E, c'_1 v \in E$.

Рассмотрим первый случай. Каждая из вершин b'_1 и c'_1 имеет соседа во множестве $\{a_1, a_2, a_3\}$, иначе

$$[o, c_1, c_2, v, a_1, a_2, a_3, b_1, b'_1] \text{ или } [o, b_1, b_2, v, a_1, a_2, a_3, c_1, c'_1].$$

Можно предполагать, что $b'_1 a_3 \in E$ или что

$$b'_1 a_2 \in E, c'_1 a_1 \in E, b'_1 a_3 \notin E, c'_1 a_3 \notin E.$$

В первом подслучае

$$[b_1, b_2, v, c_2, b'_1, a_3, a_4, o, a_1] \text{ (если } b'_1 a_4 \notin E, b'_1 a_1 \notin E),$$

или $[b_1, b_2, v, c_2, b'_1, a_4, a_5, o, a_1]$ (если $b'_1 a_4 \in E, b'_1 a_1 \notin E$),

или $[b_1, o, c_1, c'_1, b'_1, a_3, a_4, b_2, v]$ (если $b'_1 a_1 \in E$).

Во втором подслучае вершины b'_1 и c'_1 не смежны, иначе $[b'_1, b_1, b_2, v, a_2, a_3, a_4, c'_1, c_1]$. Тогда $[b_1, b'_1, a_2, a_3, o, c_1, c'_1, b_2, v]$.

Рассмотрим второй случай. Если $N' = \{v\}$, то подграф

$$H_1 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, c'_1, v\}]$$

с H_1 -отделителем (o, c'_1, b_1) является (3,I)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G . Предположим теперь, что $N' = \{v, u\}$. Если $uc'_1 \in E$, то подграф $G[\{b_2, c_2, v, u, c_1, c'_1\}]$ является 2-сжимаемым. Если $uc'_1 \notin E$, то либо $ub'_1 \notin E$, либо $ub'_1 \in E$. В первом из этих подслучаев имеет место противоречие по аналогии с первым случаем. Во втором случае подграф

$$H_2 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, v, u, b'_1, c'_1\}]$$

с H_2 -отделителем (b'_1, o, c'_1) является (3,II)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением u, v, b_2, c_2 из G .

Во всех случаях мы получили противоречие. Значит, наше предположение было неверным. ■

Лемма 2.2.3. *Выполняется неравенство $N(b_2) \setminus \{b_1\} \neq N(c_2) \setminus \{c_1\}$.*

Доказательство. Предположим противное. Возможны только следующие два случая:

1. $N' = \{x\}$.
2. $N' = \{x, y\}$, причем вершины x и y не смежны.

Рассмотрим первый случай. Если $\deg(x) = 2$, то существуют вершины $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$ и $c'_1 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$, иначе $\{o, b_1\}$ или $\{o, c_1\}$ является разделяющей кликой графа G . По лемме 2.2.2 выполнено соотношение $b'_1 = c'_1$. Тогда подграф $G[\{b'_1, o, b_1, c_1, b_2, c_2, x\}]$ является 2-сжимаемым.

Будем считать, что $\deg(x) = 3$. Возможны только следующие подслучаи:

1.1. $\deg(b_1) \in \{2, 3\}$, $\deg(c_1) = 2$. Тогда подграф

$$H_1 = G[\{o, b_1, c_1, b_2, c_2, x\}]$$

с H_1 -отделителем (o, b_1, x) является (3,III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G .

1.2. $\deg(b_1) = 3$, $\deg(c_1) = 3$. В этом подслучае b_1 и c_1 смежны с одной и той же вершиной $p \neq o$ по лемме 2.2.2. Понятно, что p и x не смежны, иначе $\{o\}$ — разделяющая клика G . Тогда подграф

$$H_2 = G[\{o, p, b_1, c_1, b_2, c_2, x\}]$$

с H_2 -отделителем (o, p, x) является (3,IV)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G .

Рассмотрим второй случай. Не уменьшая общности будем считать, что $\deg(x) \geq \deg(y)$. Возможны следующие три подслучая:

2.1. $\deg(b_1) = \deg(c_1) = 2$. Если $\deg(x) = 2$ и $\deg(y) = 2$, то o образует разделяющую клику G . Если $\deg(x) = 3$, то это вариант полностью эквивалентен подслучаю 1.2.

2.2. $\deg(b_1) = 3$, $\deg(c_1) = 2$. Если $\deg(x) = \deg(y) = 2$, то $\{o, b_1\}$ — разделяющая клика G . Если $\deg(x) = 3$ и $\deg(y) = 2$, то подграф

$$H_3 = G[\{o, b_1, c_1, b_2, c_2, x, y\}]$$

с H_3 -отделителем (b_1, x, o) является (3,I)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_2 и y из G .

Предположим, что $\deg(x) = \deg(y) = 3$. Из соображений симметрии можно считать, что в некоторой плоской укладке графа G вершина y лежит внутри области $D' = D(o, c_1, c_2, x, b_2, b_1)$. Понятно, что если $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$, то b'_1 смежна хотя бы с одной из вершин a_1, a_2, a_3 , иначе $[o, c_1, c_2, x, a_1, a_2, a_3, b_1, b'_1]$. Следовательно, $b'_1, a_1, \dots, a_{10}$ либо одновременно лежат внутри D' , либо одновременно лежат вне D' . Если они лежат внутри D' , то они обязаны лежать внутри области $D'' = D(o, c_1, c_2, y, b_2, b_1)$. Следовательно, сосед y , отличный от b_2 и от c_2 , обязан принадлежать D'' , иначе $\{b_1, o\}$ — разделяющая клика G .

Поэтому $\{x\}$ — разделяющая клика графа G . Если $b_1, a_1, \dots, a_{10}$ не принадлежат D' , то сосед вершины x , отличный от вершин b_2 и c_2 , должен лежать вне D' , иначе $\{b_1, o\}$ — разделяющая клика графа G . Следовательно, y образует разделяющую клику G .

2.3. $\deg(b_1) = \deg(c_1) = 3$. Вершины b_1 и c_1 смежны с общей вершиной $q \neq o$ по лемме 2.2.2. Если $qx \in E$ или $qy \in E$, то подграф $G[\{o, q, b_1, c_1, b_2, c_2, x, y\}]$ является 2-сжимаемым. Если же $\{o, q, x, y\}$ — независимое множество графа G , то подграф

$$H_4 = G[\{o, q, b_1, c_1, b_2, c_2, x, y\}]$$

с H_4 -отделителем (o, q, x, y) является $(4, I)$ -сжимаемым. Результат сжатия является минором графа G , т.к. он получается стягиванием ребер $b_1b_2, c_1c_2, b_2y, xc_2$. Следовательно, он будет субкубическим планарным графом. Нетрудно проверить, что если полученный граф содержит порожденный триод $T_{3,3,2}$, то и граф G содержит порожденный триод $T_{3,3,2}$.

Итак, во всех случаях мы получили противоречие. Следовательно, неприводимого графа G с условием $N(b_2) \setminus \{b_1\} = N(c_2) \setminus \{c_1\}$ не существует. ■

Итак, мы показали, что существует вершина графа G , не принадлежащая триоде $T_{2,2,10}$ и смежная ровно с одной из вершин b_2 и c_2 . Не уменьшая общности мы будем считать, что эта вершина смежна с b_2 . Обозначим данную вершину через d . Понятно, что d обязана быть смежна хотя бы с одной вершиной из множества $\{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\}$, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2]$.

Лемма 2.2.4. *Равенство $N(d) \cap \{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\} = \{b_1\}$ невозможно.*

Доказательство. Предположим противное. Понятно, что $\deg(b_2) = \deg(d) = 3$, иначе G содержит разделяющую клику $\{b_1, b_2\}$. Поэтому можно считать, что существуют вершины

$$b'_2 \in N(b_2) \setminus \{b_1, d\} \text{ и } d' \in N(d) \setminus \{b_1, b_2\}.$$

Если $d' = b'_2$, то подграф $G[\{b_1, b_2, d, d'\}]$ является 2-сжимаемым. Поэтому мы предполагаем, что $b'_2 \neq d$. Каждая из вершин b'_2 и d' должна быть смежна

хотя бы с одной из вершин c_1, c_2, a_1, a_2, a_3 , иначе

$$[o, a_1, a_2, a_3, b_1, d, d', c_1, c_2] \text{ или } [o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, c_1, c_2].$$

Поэтому хотя бы одна из вершин b'_2 и d' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_1, a_2, a_3 , иначе во множестве $\{b'_2, d'\}$ существует вершина (скажем, d'), имеющая во множестве $\{c_1, c_2\}$ ровно одного соседа — вершину c_2 . Значит, определено число

$$k = \max(\{i \in \overline{1, 3} \mid a_i b'_2 \in E\} \cup \{i \in \overline{1, 3} \mid a_i d' \in E\}).$$

Можно считать, что d' является соседом вершины a_k . Рассмотрим отдельно каждый из возможных случаев: $k = 1, k = 2, k = 3$.

1). Предположим, что $k = 1$. Очевидно, что $b'_2 c_1 \in E$, иначе

$$b'_2 c_2 \in E, b'_2 c_1 \notin E \text{ и } [o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b'_2, b_1, d].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & [a_1, o, c_1, c_2, d', d, b_2, a_2, a_3] \text{ (если } c_2 d' \notin E), \\ & \text{или } [d', c_2, c_1, b'_2, a_1, a_2, a_3, d, b_1] \text{ (если } c_2 d' \in E, c_2 b'_2 \notin E), \\ & \text{или } [a_1, a_2, a_3, a_4, d', c_2, b'_2, o, b_1] \text{ (если } c_2 d' \in E, c_2 b'_2 \in E). \end{aligned}$$

2). Предположим, что $k = 2$. Если $a_1 d' \in E$, то подграф

$$H = G[\{o, b_1, b_2, d, d', a_1, a_2\}]$$

с H -отделителем (o, b_2, a_2) является $(3, V)$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением a_1 из G . Будем считать, что $d' a_1 \notin E$. Вершина d' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин a_3, a_4, a_5 , иначе $[a_2, d', d, b_2, a_3, a_4, a_5, a_1, o]$. Более того, вершина d' смежна именно с a_3 , иначе

$$\begin{aligned} & [d', a_2, a_1, o, a_4, a_5, a_6, d, b_2] \text{ (если } d' a_4 \in E), \\ & \text{или } [d', a_2, a_1, o, a_5, a_6, a_7, d, b_2] \text{ (если } d' a_5 \in E). \end{aligned}$$

Если $\deg(a_1) = 2$, то

$$(G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, d'\}], \{o, b_2, a_3\})$$

является вырожденной. Рассмотрим два возможных варианта, когда $b'_2a_1 \in E$ и $b'_2a_1 \notin E$.

2.1. Предположим, что $b'_2a_1 \in E$. Тогда если $b'_2c_1 \in E$, то подграф

$$G[\{o, a_1, a_2, a_3, c_1, b_1, b_2, b'_2, d, d'\}]$$

является 2-сжимаемым. Если $b'_2c_2 \in E, b'_2c_1 \notin E$, то $\deg(c_1) = 2$. Действительно, если есть вершина $c'_1 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$, то $[a_1, o, c_1, c'_1, b'_2, b_2, d, a_2, a_3]$. Поэтому подграф

$$G[\{o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b_1, b_2, b'_2, d, d'\}]$$

является 2-сжимаемым. Если $b'_2c_1 \notin E$ и $b'_2c_2 \notin E$, то $[a_1, o, c_1, c_2, b'_2, b_2, d, a_2, a_3]$.

2.2. Предположим теперь, что $b'_2a_1 \notin E$. Тогда обязательно $b'_2c_1 \in E$, иначе

$$b'_2c_2 \in E, b'_2c_1 \notin E \text{ и } [o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b'_2, b_1, d].$$

Но тогда пара

$$(G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, d, d', c_1\}], \{a_3, a_1, c_1, b'_2\})$$

является вырожденной.

3). Предположим, что $k = 3$. По предыдущему случаю будем считать, что $d'a_2 \notin E$. Понятно, что $d'a_1 \notin E$, иначе $[d', a_3, a_4, a_5, a_1, o, c_1, d, b_2]$. Вершина d' должна быть смежна с одной из вершин a_4, a_5 , иначе $[a_3, a_2, a_1, o, d', d, b_2, a_4, a_5]$. Вершина d' должна быть смежна именно с a_4 , иначе

$$d'a_5 \in E, d'a_4 \notin E \text{ и } [d', a_5, a_6, a_7, a_3, a_2, a_1, d, b_2].$$

Рассмотрим два варианта, когда $\deg(a_2) = 2$ и когда $\deg(a_2) = 3$.

3.1. Предположим, что существует вершина $a'_2 \in N(a_2) \setminus \{a_1, a_3\}$.

3.1.1. Предположим, что $a'_2a_1 \notin E$. Тогда a'_2 должна иметь соседа во множестве $\{c_1, c_2\}$, иначе $[o, a_1, a_2, a'_2, b_1, d, d', c_1, c_2]$. Если $a'_2c_2 \in E$ и $a'_2a_5 \notin E$, то $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, o, b_1, a'_2, c_2]$. Если $a'_2c_2 \in E$ и $a'_2a_5 \in E$,

то $[a_2, a'_2, a_5, a_6, a_3, d', d, a_1, o]$. Если $a'_2c_1 \in E$ и $a'_2c_2 \notin E$, то $b'_2c_2 \in E$ и $b'_2a_1 \in E$, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, c_1, c_2]$. Тогда $[a_1, a_2, a_3, a_4, b'_2, b_2, d, o, c_1]$.

3.1.2. Предположим, что $a'_2a_1 \in E$. Тогда $\deg(a'_2) = 3$, иначе $\{a_1, a_2\}$ — разделяющая клика G . Ясно, что $b'_2c_1 \in E$, иначе

$$b'_2c_2 \in E, b'_2c_1 \notin E \text{ и } [o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, b'_2, b_1, d].$$

Пусть a''_2 — элемент множества $N(a'_2) \setminus \{a_1, a_2\}$. Если $a''_2 = b'_2$, то подграф

$$G[\{o, a_1, a_2, a_3, a_4, a'_2, b_1, b_2, d, d', c_1, b'_2\}]$$

является 2-сжимаемым. Если $a''_2 \neq b'_2$, то b'_2 и a''_2 должны быть смежными, иначе $[o, a_1, a'_2, a''_2, b_1, d, d', c_1, b'_2]$. Но тогда $[b'_2, a''_2, a'_2, a_2, b_2, d, d', c_1, o]$.

3.2. Предположим, что $\deg(a_2) = 2$. Тогда пара

$$(G[\{o, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, d, d'\}], \{a_1, o, b_2, a_4\})$$

является вырожденной. ■

Лемма 2.2.5. *Равенство $N(d) \cap \{b_1, c_1, a_1, a_2, a_3\} = \{c_1\}$ не возможно.*

Доказательство. Предположим противное. Очевидно, что $\deg(c_2) \geq 2$, иначе c_1 образует разделяющую клику G . Предположим, что вершина e — произвольный элемент множества $N(c_2) \setminus \{c_1\}$. Очевидно, что

$$N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} \neq \emptyset, \text{ иначе } [o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e, b_1, b_2].$$

Если $ea_3 \in E, ea_1 \notin E, ea_2 \notin E$, то e должна быть смежна с некоторой вершиной a_i , где $i \in \overline{4, 6}$, иначе $[a_3, a_4, a_5, a_6, a_2, a_1, o, e, c_2]$. Но тогда $[c_1, c_2, e, a_i, o, a_1, a_2, d, b_2]$. Если

$$ea_2 \in E \text{ и } ea_1 \notin E, ea_3 \notin E, eb_1 \notin E,$$

то e должна быть смежна с некоторой вершиной a_i , где $i \in \overline{4, 5}$, иначе $[a_2, a_1, o, b_1, a_3, a_4, a_5, e, c_2]$. Тогда $[e, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, c_2, c_1, d, a_2, a_1]$. Если

$$ea_1 \in E, ea_2 \notin E, ea_3 \notin E, eb_1 \notin E, eb_2 \notin E,$$

то $ea_4 \in E$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_2, e, c_2]$. Тогда $[e, a_4, a_5, a_6, c_2, c_1, d, a_1, a_2]$.

Из рассуждений, приведенных выше, следует, что возможны только следующие случаи:

- 1). $ea_1 \in E, ea_2 \in E$, 2). $ea_1 \in E, ea_3 \in E$, 3). $ea_2 \in E, ea_3 \in E$,
- 4). $ea_2 \in E, eb_1 \in E$, 5). $ea_1 \in E, eb_1 \in E$, 6). $ea_1 \in E, eb_2 \in E$,
- 7). $eb_1 \in E, ed \in E$, 8). $eb_2 \in E, ed \in E$, 9). $eb_1 \in E, eb_2 \in E$,
- 10). $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}$, 11). $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}$.

Вначале рассмотрим случаи, когда e смежна с некоторыми двумя элементами множества $\{b_1, b_2, d\}$. Понятно, что в каждом таком случае степень каждой из вершин $o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e$ равна 3, иначе порождаемый ими граф является 2-сжимаемым. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G . Очевидно, что c_2 и e либо одновременно лежат в области $D(o, b_1, b_2, d, c_1)$, либо вне ее.

Предположим, что $eb_1 \in E, eb_2 \in E$. Дополнительно предположим, что вершины c_2 и e лежат внутри $D(o, b_1, b_2, d, c_1)$. Очевидно, что элемент множества $N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$ либо принадлежит $D(c_1, o, b_1, e, c_2)$, либо принадлежит $D(c_1, c_2, e, b_2, d)$. В первом случае a_1 – a_{10} принадлежат $D(c_1, o, b_1, e, c_2)$, иначе $\{c_2\}$ — разделяющая клика G . Но тогда $\{d\}$ — разделяющая клика G . Во втором случае элемент множества $N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$ принадлежит $D(c_1, c_2, e, b_2, d)$, иначе $\{c_2\}$ — разделяющая клика G . Но тогда $\{o\}$ — разделяющая клика G . Случай, когда вершины c_2 и e лежат вне $D(o, b_1, b_2, d, c_1)$ рассматривается аналогично.

По аналогии с рассуждениями из предыдущего абзаца можно показать, что c_1 и b_2 не могут одновременно иметь степень 3, если $eb_1 \in E, ed \in E$.

Если $eb_2 \in E, ed \in E$, то подграф

$$H_1 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e\}]$$

с H_1 -отделителем (b_1, o, c_2) является (3,III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением e, b_2, d из G .

Всюду далее мы будем предполагать, что ни один элемент множества $N(c_2) \setminus \{c_1\}$ не смежен с двумя элементами множества $\{b_1, b_2, d\}$. Рассмотрим два случая, когда $N(e) \cap \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$ и когда $N(e) \cap \{b_1, b_2\} = \emptyset$.

а). Предположим, что $N(e) \cap \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$. Возможный сосед e' вершины c_2 , отличный от c_1 и e , равноправен с вершиной e . В частности, e' должна быть смежна хотя бы с одной из вершин b_1, b_2, a_1, a_2, a_3 . Соображения симметрии приводят к заключению о том, что возможны только такие варианты: i). существует вершина из $N(c_2) \setminus \{c_1\}$, которая смежна хотя бы с одной из вершин $a_1, \dots, a_{10}$, или $\deg(c_2) = 2$ и существует сосед e , смежный хотя бы с одной из вершин $a_1, \dots, a_{10}$, ii). $\deg(c_2) = 2$ и ни e , ни один сосед вершины e не смежен ни с одной из вершин $a_1 - a_{10}$, iii). $N(c_2) = \{e, e', c_1\}$ и

$$N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}, N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}.$$

Отдельно рассмотрим каждый из них.

i). Предположим, что существует вершина из $N(c_2) \setminus \{c_1\}$, которая смежна хотя бы с одной из вершин $a_1, \dots, a_{10}$, или $\deg(c_2) = 2$ и существует сосед e , смежный хотя бы с одной из вершин $a_1, \dots, a_{10}$. Тогда существует порожденный цикл C'_1 графа G , содержащий ребра a_1o, oc_1, c_1c_2 . Цикл (o, b_1, b_2, d, c_1) обозначим через C'_3 . Через C'_2 обозначим цикл (o, c_1, c_2, e, b_1) (если $eb_1 \in E$) или цикл $(o, c_1, c_2, e, b_2, b_1)$ (если $eb_2 \in E, eb_1 \notin E$). Для ребер c_2c_1, c_1o, ob_1 и циклов C'_1, C'_2, C'_3 выполнены все условия леммы 2.1.4. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G . Тогда $D(C'_3) \subset D(C'_2)$ или $D(C'_1) \subset D(C'_2)$ по лемме 2.1.4.

i.1). Предположим, что $eb_1 \in E$. Нетрудно видеть, что в любой плоской укладке графа G в каждом из случаев $D(C'_3) \subset D(C'_2)$ и $D(C'_1) \subset D(C'_2)$ вершины $a_1 - a_{10}$ и b_2, d лежат по разные стороны от C'_2 . Ребро цикла C'_1 , инцидентное c_2 или e и отличное от ec_2 и c_2c_1 , лежит по одну сторону от C'_2 вместе с вершинами $a_1 - a_{10}$. Если существует вершина $b'_2 \in N(b_2) \setminus \{b_1, d\}$, то

$$[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b'_2, c_1, c_2].$$

Поэтому $\deg(d) = 3$ по лемме 2.1.3, т.к. (o, b_1, b_2, d, c_1) — порожденный 5-

цикл графа G . Существует порожденный путь $(e, v_1, \dots, v_k, d)$ графа G , иначе $\{d\}$ — разделяющая клика графа G . Каждая из вершин a_1 – a_{10} и любая вершина этого пути лежат по разные стороны от C'_2 . Поэтому $k = 1$, иначе

$$[o, a_1, a_2, a_3, c_1, d, v_k, b_1, e].$$

Тогда подграф

$$H_2 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, v_1\}]$$

с H_2 -отделителем (o, c_2, v_1) является $(3, \Pi)$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_1, b_2, d из G .

i.2). Предположим, что $eb_2 \in E$. По случаям 1–11, либо $ea_1 \in E$, либо

$$N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}.$$

Рассмотрим вариант, когда d лежит внутри $D(C'_2)$, т.е. когда $D(C'_3) \subset D(C'_2)$. Другой вариант рассматривается аналогично. Ввиду наличия цикла C'_1 , вершины a_1 – a_{10} не принадлежат области $D(C'_2)$. Поэтому возможный элемент e' множества $N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$ не принадлежит области $D(C'_2)$, т.к.

$$N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} \neq \emptyset.$$

Возможный элемент множества $N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$ не принадлежит $D(C'_3)$ (т.е. принадлежит $D(C'_2) \setminus D(C'_3)$), иначе либо $\{d\}$ — разделяющая клика G , либо в $D(C'_3)$ лежит вершина $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$. В последнем случае

$$\text{либо } [a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b'_1, e, c_2] \text{ (если } ea_1 \in E),$$

$$\text{либо } [o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e, b_1, b'_1] \text{ (если } N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}).$$

Тем самым, если $ea_1 \in E$, то $\deg(d) = 2$, иначе $\{d\}$ — разделяющая клика G . В случае, когда $ea_1 \in E$, вершины b_1, c_2 имеют степень 3, иначе подграф

$$G[\{o, a_1, c_1, c_2, e, b_1, b_2, d\}]$$

является 2-сжимаемым. Тогда хотя бы один из двух элементов множества

$$(N(b_1) \cup N(c_2)) \setminus \{o, b_2, c_1, e\}$$

принадлежит области $D(o, c_1, c_2, e, a_1)$ и поэтому либо $\{c_2\}$, либо $\{b_1\}$ является разделяющей кликой G .

Далее мы будем рассматривать только случай, когда

$$N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}.$$

Хотя бы одна из вершин d и e имеет степень, равную 3, иначе

$$(G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e\}], \{o, b_1, c_2\})$$

является вырожденной.

Рассмотрим два случая, когда $\deg(c_2) = 2$ и когда $\deg(c_2) = 3$.

i.2.1). Предположим, что $\deg(c_2) = 2$. Понятно, что $\deg(d) = 2$, иначе $(N(d) \cup N(e)) \setminus \{c_1, c_2, b_2\}$ имеет два элемента, оба принадлежащих множеству $D(C'_2) \setminus D(C'_3)$, поскольку $\{d\}$ не является разделяющей кликой G . Тогда

$$(G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e\}], \{o, b_1, e\})$$

является вырожденной.

i.2.2). Предположим, что существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{e, c_1\}$. Тогда $e' \notin D(C'_2)$. Существует вершина $x \in N(e) \setminus \{b_2, c_2\}$, иначе либо d образует разделяющую клику G , либо

$$(G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e\}], \{o, b_1, c_2\})$$

является вырожденной.

Вершина x не может быть смежна с вершиной b_1 , иначе $\deg(d) = 2$ и подграф

$$H_3 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x\}]$$

с H_3 -отделителем (o, c_2, x) является $(3, \Pi)$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_1, b_2, d из G .

Случай, когда $N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}$ будет разобран в пункте «а.iii». Поэтому мы будем считать, что e' имеет соседа среди вершин a_1, a_2, a_3 . Тогда определены числа

$$i' = \max\{i \in \overline{1, 3} \mid a_i e' \in E\}, i'' = \min\{i \in \overline{1, 3} \mid a_i e' \in E\}.$$

Если $e' = x$ и $i' = 1$, то $\deg(b) = 2$ (иначе $\{b\}$ — разделяющая клика G) и подграф

$$G[\{o, a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d, x\}]$$

является 2-сжимаемым. Если $e' = x$ и $i' > 1$, то

$$[a_{i'}, a_{i'+1}, a_{i'+2}, a_{i'+3}, a_{i'-1}, a_{i'-2}, a_{i'-3}, x, e],$$

где $a_0 = o$ и $a_{-1} = b_1$.

Предположим, что $e' \neq x, e'b_1 \notin E$. Тогда $i' \neq i''$ по случаям 1–11. Тогда

$$[c_2, c_1, o, b_1, e', a_{i'}, a_{i'+1}, e, x] \text{ (если } a_{i'+1}x \notin E),$$

$$\text{или } [e, c_2, e', a_{i''}, x, a_{i'+1}, a_{i'+2}, b_2, b_1] \text{ (если } a_{i'+1}x \in E, a_{i'+2}x \notin E),$$

$$\text{или } [e, c_2, e', a_{i''}, x, a_{i'+2}, a_{i'+3}, b_2, b_1] \text{ (если } a_{i'+1}x \in E, a_{i'+2}x \in E).$$

Предположим теперь, что $e' \neq x, e'b_1 \in E$. Тогда $i' \in \{1, 2\}$ по случаям 1–11. В случае, когда $i' = 2$, то

$$\text{либо } [b_1, e', a_2, a_3, b_2, e, x, o, c_1] \text{ (если } a_3x \notin E),$$

$$\text{либо } [e, c_2, e', a_2, x, a_3, a_4, b_2, d] \text{ (если } a_3x \in E) \text{ и поэтому } x \notin D(C'_2), a_4x \notin E,$$

$$\text{либо } [e, c_2, e', a_2, x, a_4, a_5, b_2, d] \text{ (если } a_3x \in E, a_4x \in E).$$

Если $i' = 1$, то $\deg(b) = \deg(e) = 3$, иначе подграф

$$G[\{o, a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, e', x\}]$$

является 2-сжимаемым. Следовательно, $x \in D(C'_2) \setminus D(C'_3)$ и поэтому $\{e', a_1\}$ — разделяющая клика G .

ii). Предположим, что $\deg(c_2)=2$ и что ни e , ни один сосед вершины e не смежен ни с одной из вершин a_1 – a_{10} .

ii.1). Предположим, что $eb_1 \in E$. Тогда (o, c_1, c_2, e, b_1) — порожденный 5-цикл графа G . Поэтому, по лемме 2.1.3 имеется вершина $x \in N(e) \setminus \{c_2, b_2\}$, причем она не смежна ни с одной из вершин a_1 – a_{10} . Вершины x и d должны быть смежными, иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, e, x, c_1, d]$.

Вершины x и b_2 не смежны, иначе $\{o\}$ — разделяющая клика графа G . Тогда подграф

$$H_4 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x\}]$$

с H_4 -отделителем (o, b_2, x) является $(3, \text{II})$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e из G .

ii.2). Предположим, что $eb_2 \in E$. Тогда (c_1, c_2, e, b_2, d) — порожденный 5-цикл графа G . По лемме 2.1.3 обязаны существовать вершины $x \in N(e) \setminus \{c_2, b_2\}$ и $y \in N(d) \setminus \{c_1, b_2\}$.

ii.2.1). Предположим, что $x = y$. Вершины x и b_1 не смежны, иначе $\{o\}$ — разделяющая клика G . Тогда подграф

$$H_5 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x\}]$$

с H_5 -отделителем (x, o, b_1) является $(3, \text{VII})$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e из G .

ii.2.2). Предположим, что $x \neq y$.

ii.2.2.1). Предположим, что $N(y) \cap \{a_1, a_2\} \neq \emptyset$. Обозначим через C_1'' цикл (o, c_1, d, y, a_1) (если $a_1y \in E$) или цикл (o, c_1, d, y, a_2, a_1) (если $a_2y \in E, a_1y \notin E$). Цикл (o, b_1, b_2, d, c_1) обозначим через C_2'' . Цикл (c_1, c_2, e, b_2, d) обозначим через C_3'' . Для ребер c_1o, dc_1, b_2d и циклов C_1'', C_2'', C_3'' выполнены все условия леммы 2.1.4. Рассмотрим какую-нибудь плоскую укладку графа G . Тогда $D(C_3'') \subset D(C_2'')$ или $D(C_1'') \subset D(C_2'')$ по лемме 2.1.4. Рассмотрим вариант, когда $D(C_3'') \subset D(C_2'')$, второй вариант рассматривается аналогично. Тогда вершины c_2, e, x принадлежат области $D(o, c_1, d, b_2, b_1)$, а вершины $a_1, \dots, a_{10}$ и y не принадлежат ей. Существует вершина $b'_1 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$, принадлежащая данной области, иначе $\{e\}$ — разделяющая клика графа G . Но тогда $[d, b_2, b_1, b'_1, y, a_i, a_{i+1}, c_1, c_2]$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$.

ii.2.2.2). Предположим, что $ya_1 \notin E, ya_2 \notin E$. Если $xy \notin E$, то $[c_1, o, a_1, a_2, c_2, e, x, d, y]$. Если $xy \in E$, то подграф

$$H_6 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d, x, y\}]$$

с H_6 -отделителем (o, b_1, x, y) является $(4, \text{II})$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, b_2, d, e из G .

iii). Предположим, что $N(c_2) = \{e, e', c_1\}$ и что

$$N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_1\}, N(e') \cap \{a_1, a_2, a_3, b_1, b_2\} = \{b_2\}.$$

Будем считать, что $ee' \notin E$, иначе подграф

$$G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, e'\}]$$

является 2-сжимаемым. Заметим, что в любой плоской укладке графа G вершины d и e лежат по разные стороны от цикла $(o, b_1, b_2, e', c_2, c_1)$. Отсюда нетрудно вывести, что $\deg(d) = 2$ или $\deg(e) = 2$, иначе

$$[o, a_1, a_2, a_3, b_1, e', c_1, d, d'] \text{ или } [o, a_1, a_2, a_3, b_1, e, e'', c_1, d],$$

где

$$d' \in N(d) \setminus \{c_1, b_2\} \text{ и } e'' \in N(e) \setminus \{b_1, c_2\}.$$

Из соображений симметрии можно считать, что $\deg(e) = 3$ и $\deg(d) = 2$. Тогда подграф

$$H_7 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, e'\}]$$

с H_7 -отделителем (o, e, e') является $(3, \text{II})$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_2, d, c_1 .

b). Предположим, что $N(e) \cap \{b_1, b_2\} = \emptyset$. По случаям 1–11 вершина e смежна с двумя вершинами из $\{a_1, a_2, a_3\}$. Степень вершины c_2 равна 2, иначе возможный элемент множества $N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$ равноправен с вершиной e и имеет ровно двух соседей во множестве $\{a_1, a_2, a_3\}$. Рассмотрим все три возможных варианта на значение $N(e) \cap \{a_1, a_2, a_3\}$.

b.1). Если $ea_1 \in E, ea_2 \in E$, то пара

$$(G[\{o, a_1, a_2, c_1, c_2, e\}], \{a_2, o, c_1\})$$

является вырожденной.

b.2). Предположим, что $ea_2 \in E, ea_3 \in E$. Отдельно рассмотрим два варианта: $\deg(a_1) = 2$ и $\deg(a_1) = 3$.

b.2.1). Предположим, что $\deg(a_1) = 2$. Тогда подграф

$$H_8 = G[\{o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e\}]$$

с H_8 -отделителем (a_3, o, c_1) является (3,VI)-сжимаемым. Результат сжатия является минором графа G , т.к. он получается стягиванием ребер $a_2a_1, a_1o, c_2e, c_1c_2$. Следовательно, результат сжатия принадлежит классу $\mathcal{P}(3)$. Понятно, что результат сжатия не содержит порожденного триода $T_{3,3,2}$.

b.2.2). Предположим, что существует вершина $a'_1 \in N(a_1) \setminus \{a_2, o\}$. Тогда $N(a'_1) \cap \{b_2, d\} \neq \emptyset$, иначе $[c_1, c_2, e, a_3, o, a_1, a'_1, d, b_2]$. Рассмотрим все три возможных варианта:

b.2.2.1). Если $a'_1b_2 \in E, a'_1d \in E$, то подграф

$$G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, a'_1\}]$$

является 2-сжимаемым.

b.2.2.2). Если $a'_1b_2 \in E, a'_1d \notin E$, то подграф

$$H_9 = G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, a'_1\}]$$

с H_9 -отделителем (a_3, a'_1, b_1, d) является (4,III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e из G .

b.2.2.3). Если $a'_1d \in E, a'_1b_2 \notin E$, то

$$(G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, a'_1\}], \{a_3, a'_1, b_1, b_2\})$$

является вырожденной. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e из G .

b.3). Предположим, что $ea_1 \in E, ea_3 \in E$. Если $\deg(a_2) = 2$, то подграф

$$H_{10} = G[\{o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e\}]$$

с H_{10} -отделителем (a_3, o, c_1) является (3,VI)-сжимаемым. Результат сжатия является минором графа G , т.к. он получается стягиванием ребер $a_2a_1, a_1o, c_2e, c_1c_2$. Следовательно, результат сжатия принадлежит классу $\mathcal{P}(3)$. Понятно, что результат сжатия не содержит порожденного триода $T_{3,3,2}$.

Если существует вершина $a'_2 \in N(a_2) \setminus \{a_3, a_1\}$, то a'_2 смежна с некоторой вершиной a_i , где $i \in \overline{4, 6}$, иначе $[a_3, a_4, a_5, a_6, e, c_2, c_1, a_2, a'_2]$. Вершина a'_2 смежна с одной из вершин b_1 и b_2 , иначе $[a_1, a_2, a'_2, a_i, o, b_1, b_2, e, c_2]$. Если $a'_2 b_1 \in E$, то $[a'_2, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, b_1, b_2, d, a_2, a_1]$. Если $a'_2 b_2 \in E$, то $[a'_2, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, b_2, d, c_1, a_2, a_1]$. ■

Лемма 2.2.6. *Вершина d не может быть смежна с одной из вершин a_1, a_2, a_3 или быть одновременно смежна с вершинами b_1 и c_1 .*

Доказательство. Предположим противное. Предположим, что d смежна с b_1 . По лемме 2.2.4 вершина d должна быть смежна с одной из вершин c_1, a_1, a_2, a_3 . Если $da_i \in E$ для некоторого $i \in \overline{1, 3}$, то

$$[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, a_{i-1}, a_{i-2}, a_{i-3}, d, b_2],$$

где $a_0 = o, a_{-1} = c_1, a_{-2} = c_2$. Предположим, что $dc_1 \in E$ и $db_1 \in E$. Тогда существует вершина $b'_2 \in N(b_2) \setminus \{b_1, d\}$, иначе $\{b_1, d\}$ — разделяющая клика графа G . Если $b'_2 c_2 \in E$, то подграф

$$H_1 = G[\{o, c_1, c_2, b_1, b_2, d, b'_2\}]$$

с H_1 -отделителем (b'_2, c_2, o) является (3, III)-сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_1, b_2, d из G . Если $b'_2 c_2 \notin E$, то b'_2 и d равноправны с точки зрения рассуждений, причем $b'_2 b_1 \notin E$. Поэтому всюду далее мы будем считать, что $db_1 \notin E$. По лемме 2.2.5 всюду далее мы можем считать, что d имеет соседа среди вершин a_1, a_2, a_3 . Пусть

$$i' = \max\{i \mid a_i d \in E, i \in \overline{1, 3}\}.$$

а). Предположим, что существует вершина $e \in N(c_2) \setminus \{c_1\}$, не смежная с b_2 . Тогда e и d симметричны с точки зрения рассуждений и поэтому мы можем считать, что $ec_1 \notin E$ и что e имеет соседа $a_{i''}$, где

$$i'' = \max\{i \mid a_i e \in E, i \in \overline{1, 3}\}.$$

Из соображений симметрии мы можем считать, что $i' \geq i''$. Понятно, что $i'' \in \{1, 2\}$.

а.1). Рассмотрим случай, когда $i'' = 1$. Если $ea_4 \in E$, то $[a_4, a_5, a_6, a_7, e, c_2, c_1, a_3, a_2]$. Предположим, что $ea_4 \notin E$. Тогда $eb_1 \in E$, иначе $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_2, e, c_2]$. Если $\deg(c_2) = 2$, то пара

$$(G[\{o, a_1, b_1, c_1, c_2, e\}], \{a_1, b_1, c_1\})$$

является вырожденной. Если же существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{e, c_1\}$, то e' смежна с одной из вершин b_2, a_2, a_3 , иначе $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, e', b_1, b_2]$ или

$$N(e') \cap \{c_1, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3\} = \{c_1\}.$$

Последнее невозможно по лемме 2.2.4 и т.к. вершины d и e' являются равноправными. Тогда подграф

$$G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, d, c_1, c_2, e, e'\}]$$

содержит $K_{3,3}$ в качестве минора, для этого надо стянуть ребро c_1c_2 , а также стянуть подграф $G[\{a_2, a_3, b_2, d, e'\}]$ в вершину. Следовательно, граф G не является планарным по критерию Вагнера.

а.2). Рассмотрим случай, когда $i'' = 2$. Тогда $i' = 3$. Если $da_i \in E$, где $i \in \overline{5, 8}$, то $[d, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_3, a_2, a_1, b_2, b_1]$. Если $ea_4 \in E$, то $[a_4, a_3, d, b_2, e, c_2, c_1, a_5, a_6]$, а если $ea_5 \in E$, то $[a_5, a_6, a_7, a_8, e, c_2, c_1, a_4, a_3]$. Поэтому обязательно $da_4 \in E$, иначе $[a_3, a_2, e, c_2, d, b_2, b_1, a_4, a_5]$. Рассмотрим два варианта, когда $ea_1 \in E$ и когда $ea_1 \notin E$.

а.2.1). Предположим, что $ea_1 \notin E, ea_4 \notin E, ea_5 \notin E$. Тогда $eb_1 \in E$, иначе $[a_2, a_3, a_4, a_5, a_1, o, b_1, e, c_2]$. Если существует вершина

$$x_1 \in (N(c_1) \cup N(c_2)) \setminus \{o, c_1, c_2, e\},$$

то $x_1b_2 \notin E$, иначе подграф

$$G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, d, e, x_1\}]$$

содержит $K_{3,3}$ в качестве минора. Тогда обязательно $x_1a_1 \in E$, иначе

$$\text{либо } [b_1, o, c_1, x_1, b_2, d, a_4, e, a_2] \text{ (если } x_1c_1 \in E),$$

либо $[o, a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, x_1, b_1, b_2]$ (если $x_1c_2 \in E, x_1c_1 \notin E$).

Тогда

либо $[a_2, a_1, x_1, c_1, e, b_1, b_2, a_3, a_4]$ (если $x_1c_1 \in E$),

либо $[a_1, a_2, a_3, a_4, o, b_1, b_2, x_1, c_2]$ (если $x_1c_2 \in E$).

Поэтому $\deg(c_1) = \deg(c_2) = 2$ и имеет место противоречие с леммой 1.14, т.к. (o, c_1, c_2, e, b_1) — порожденный 5-цикл графа G .

а.2.2). Предположим, что $ea_1 \in E$. Если $\deg(c_2) = 2$, то пара

$$(G[\{o, a_1, a_2, c_1, c_2, e\}], \{a_2, o, c_1\})$$

является вырожденной. Предположим, что существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$. Тогда либо $e'b_2 \in E$, либо $e'b_1 \in E, e'c_1 \in E$ по леммам 2.2.4 и 2.2.5. Во втором случае подграф

$$G[\{o, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, c_1, c_2, e, e', d\}]$$

является 2-сжимаемым. Предположим, что $e'b_2 \in E$. Можно считать, что $e'b_1 \notin E$, иначе подграф

$$G[\{o, a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, c_1, c_2, e, e', d\}]$$

является 2-сжимаемым. Если $e'a_5 \notin E$, то $[b_2, d, a_4, a_5, e', c_2, e, b_1, o]$, а если $e'a_5 \in E$, то $[a_5, a_4, a_3, a_2, a_6, a_7, a_8, e', b_2]$.

б). Предположим, что существует вершина $e \in N(c_2) \setminus \{c_1\}$, смежная с b_2 . Если существует вершина $e' \in N(c_2) \setminus \{c_1, e\}$, то вершины d и e' равноправны. Поэтому $e'c_1 \in E, e'b_1 \in E$ по леммам 2.2.4 и 2.2.5 и предыдущим рассуждениям из пункта «а». Следовательно, подграф

$$H_2 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, e'\}]$$

с H_2 -отделителем (e, b_2, o) является $(3, \text{III})$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1, c_2, e' из G . Поэтому всюду далее мы будем считать, что $\deg(c_2) = 2$. Вершина e не может быть смежна с вершиной a_i , где $i \in \overline{3, 7}$, иначе

$$[a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}, e, c_2, c_1, a_{i-1}, a_{i-2}].$$

Далее мы будем считать, что $eb_1 \notin E$, иначе пара

$$(G[\{o, c_1, c_2, b_1, b_2, e\}], \{b_1, o, c_1\})$$

является вырожденной.

Рассмотрим все три возможных варианта на значение параметра i' .

б.1). Предположим, что $i' = 1$. Тогда

$$[a_1, a_2, a_3, a_4, o, c_1, c_2, d, b_2] \text{ (если } a_4d \notin E),$$

$$\text{или } [a_4, a_5, a_6, a_7, d, b_2, b_1, a_3, a_2] \text{ (если } a_4d \in E).$$

б.2). Предположим, что $i' = 3$. Если $da_1 \in E$, то $[d, a_3, a_4, a_5, a_1, o, c_1, b_2, e]$. Если $da_2 \in E, ea_1 \notin E$, то $[b_2, b_1, o, a_1, d, a_3, a_4, e, c_2]$. Если $da_2 \in E, ea_1 \in E$, то

$$(G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d\}], \{b_1, c_1, a_3\})$$

является вырожденной. Если $da_2 \notin E, da_1 \notin E, ea_1 \notin E$, то

$$[b_2, b_1, o, a_1, d, a_3, a_4, e, c_2] \text{ (если } a_4d \notin E),$$

$$\text{или } [b_2, b_1, o, a_1, d, a_4, a_5, e, c_2] \text{ (если } a_4d \in E).$$

Если $da_2 \notin E, da_1 \notin E, ea_1 \in E$, то (a_1, o, c_1, c_2, e) — порожденный 5-цикл графа G . Поэтому по лемме 2.1.3 вершина c_1 имеет соседа $v \notin \{o, c_2\}$. Ввиду планарности графа G , $va_2 \notin E$ и $va_4 \notin E$, иначе G содержит $K_{3,3}$ в качестве минора. Тогда

$$\text{либо } [e, c_2, c_1, v, a_1, a_2, a_3, b_2, b_1] \text{ (если } vb_1 \notin E),$$

$$\text{либо } [b_2, b_1, v, c_1, d, a_3, a_4, e, a_1] \text{ (если } vb_1 \in E, da_4 \notin E),$$

$$\text{либо } [b_2, b_1, v, c_1, d, a_4, a_5, e, a_1] \text{ (если } vb_1 \in E, da_4 \in E).$$

б.3). Предположим, что $i' = 2$. Если $ea_1 \notin E, a_4d \notin E$, то $[a_2, a_1, o, c_1, d, b_2, e, a_3, a_4]$. Если $ea_1 \notin E, a_4d \in E$, то $[d, a_2, a_1, o, a_4, a_5, a_6, b_2, e]$. Если $ea_1 \in E$, то (a_1, o, c_1, c_2, e) — порожденный 5-цикл графа G . Поэтому по лемме 2.1.3 вершина c_1 имеет соседа $u \notin \{o, c_2\}$. Ввиду планарности графа G , $ua_3 \notin E$ и $ua_4 \notin E$. Тогда

$$\text{либо } [e, c_2, c_1, u, a_1, a_2, a_3, b_2, b_1] \text{ (если } ub_1 \notin E),$$

либо $[b_2, b_1, u, c_1, d, a_3, a_4, e, a_1]$ (если $ub_1 \in E, da_4 \notin E$),

либо $[b_2, b_1, u, c_1, d, a_4, a_5, e, a_1]$ (если $ub_1 \in E, da_4 \in E$).

Рассмотрим теперь случай, когда $da_1 \in E$. Если $\deg(b_1) = \deg(c_1) = 2$, то подграф

$$H_3 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e\}]$$

с H_3 -отделителем (e, b_2, o) является $(3, \text{III})$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G . Тем самым, либо $N(b_1) \setminus \{o, b_2\} \neq \emptyset$, либо $\deg(b_2) = 2, N(c_1) \setminus \{o, c_2\} \neq \emptyset$. Отдельно рассмотрим каждый из этих случаев.

б.3.1). Предположим, что существует вершина $x_2 \in N(b_1) \setminus \{o, b_2\}$. Если $x_2c_1 \notin E, x_2e \notin E$, то

либо $[b_2, e, c_2, c_1, d, a_2, a_3, b_1, x_2]$ (если $x_2a_3 \notin E$),

либо $[b_2, b_1, x_2, a_3, e, c_2, c_1, d, a_1]$ (если $x_2a_3 \in E$).

Если $x_2c_1 \in E$ и $\deg(x_2) = 2$, то подграф

$$H_4 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_2\}]$$

с H_4 -отделителем (o, b_2, e) является $(3, \text{VII})$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением b_1 и x_2 из G .

Предположим, что $x_2c_1 \in E$ и существует вершина $y \in N(x_2) \setminus \{b_1, c_1\}$. Тогда $y \neq a_3, ya_3 \notin E$, иначе граф

$$G[\{o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, e, d, x_2, y\}]$$

содержит $K_{3,3}$ в качестве минора. Вместе с тем, $y \neq e$, иначе подграф $G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_2\}]$ является 2-сжимаемым. Вершина y должна быть смежна с e , иначе $[b_2, b_1, x_2, y, d, a_2, a_3, e, c_2]$. Вершина y смежна с вершиной $z \in N(y) \setminus \{x_2, e\}$ по лемме 2.1.3, т.к. (c_1, c_2, e, y, x_2) — порожденный 5-цикл графа G . Тогда $[e, c_2, c_1, o, b_2, d, a_2, y, z]$.

Предположим, что $x_2e \in E$. Если $\deg(x_2) = 2$, то подграф

$$H_5 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_2\}]$$

с H_5 -отделителем (o, b_2, c_1) является $(3, I)$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением вершин b_1 и x_2 из графа G . Если существует вершина $y' \in N(x_2) \setminus \{b_1, e\}$, то $y' \neq a_3$ и $y'a_3 \notin E$, иначе G не является планарным. Тогда

либо $[e, c_2, c_1, o, b_2, d, a_2, x_2, y']$ (если $y'c_1 \notin E$),

либо $[o, b_1, b_2, e, a_1, a_2, a_3, c_1, y']$ (если $y'c_1 \in E$).

b.3.2). Предположим, что $\deg(b_1) = 2$ и что существует вершина $x_3 \in N(c_1) \setminus \{o, c_2\}$. Вершина x_3 смежна с одной из вершин e и a_3 , иначе $[o, a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, e, c_1, x_3]$. Если $x_3e \in E$, то подграф

$$H_6 = G[\{o, b_1, b_2, c_1, c_2, e, x_3\}]$$

с H_6 -отделителем (o, b_2, x_3) является $(3, II)$ -сжимаемым. Результат сжатия получается удалением c_1 и c_2 из G . Если $x_3a_3 \in E$, $x_3e \notin E$, то

$[c_1, x_3, a_3, a_4, c_2, e, b_2, o, a_1]$ (если $x_3a_4 \notin E$),

или $[c_1, x_3, a_4, a_5, c_2, e, b_2, o, a_1]$ (если $x_3a_4 \in E$).

■

Отметим, что из лемм 2.2.3–2.2.6 следует, что любой неприводимый граф обязательно принадлежит классу $Free(\{T_{2,2,10}\})$.

2.3 Основной результат второй главы

Теорема 2.3.1. *Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ является НМ-простым.*

Доказательство. Из лемм 2.2.3–2.2.6 следует, что любой неприводимый граф обязательно не содержит ни одного порожденного триода $T_{2,2,10}$. Следовательно, задача НМ для графов из $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ полиномиально сводится к той же задаче для графов из $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,10}\})$. Класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{2,2,10}\})$ является НМ-простым [7]. Следовательно, класс $\mathcal{P}(3) \cap Free(\{T_{3,3,2}\})$ тоже является НМ-простым. ■

Глава 3

Вычислительная сложность задачи о вершинной 3-раскраске для некоторых наследственных классов графов

В данной главе рассматриваются наследственные классы, определяемые четверкой запрещенных порожденных подграфов, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. Для всех таких классов, кроме трех, устанавливается вычислительный статус задачи 3-ВР. Для двух из трех оставшихся случаев доказывается полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему. Результаты этой главы опубликованы в работе [13].

3.1 NP-полнота задачи 3-ВР в некоторых классах графов, порожденных запретами с малым количеством вершин

В работе [50] (см. второй раздел той работы) были рассмотрены следующие шесть классов графов:

- $\mathcal{X}_1^*$ — множество всех лесов,
- $\mathcal{X}_2^*$ — множество реберных графов субкубических лесов,
- $\mathcal{X}_3^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, kite, diamond + K_1\}$,

- $\mathcal{X}_4^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, diamond + K_1, butterfly, crown\}$,
- $\mathcal{X}_5^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, diamond + K_1, house, C_4 + K_1, F_4, W_4, dart, crown\}$,
- $\mathcal{X}_6^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, house, banner, C_4 + K_1, C_5\}$.

В [50] было показано, что каждый из классов графов $\mathcal{X}_3^* - \mathcal{X}_6^*$ является 3-ВР-сложным (см. лемму 4 из упомянутой работы). Далее мы докажем NP-полноту задачи 3-ВР еще для трех классов графов, определяемых запрещенными порожденными фрагментами, каждый из которых имеет не более чем 5 вершин. Для этого рассмотрим графы G_1, G_2, G_3 , изображенные на рисунках 3.1 и 3.2.

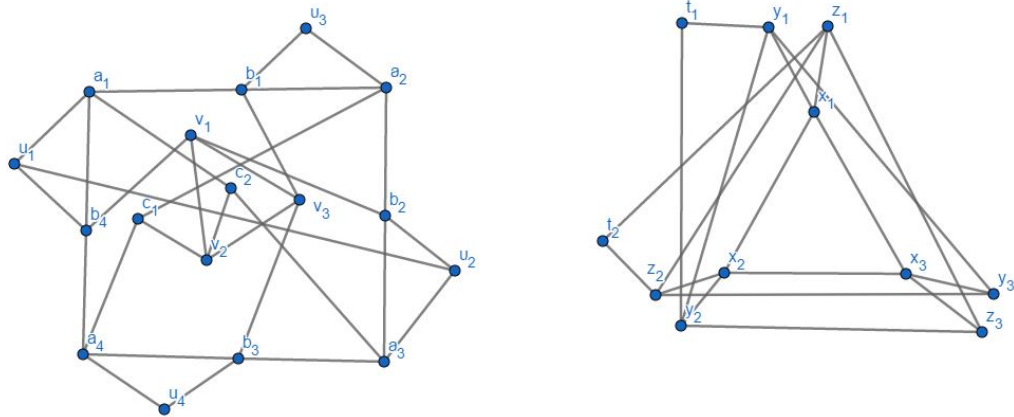


Рис. 3.1: Графы G_1 и G_2

Лемма 3.1.1. *Граф G_1 является 3-раскрашиваемым, причем в любой его 3-раскраске вершины u_3 и u_4 имеют одинаковые цвета.*

Доказательство. Покрасим вершины a_1, a_2, a_3, a_4, v_1 в первый цвет, вершины b_1, b_3, b_4, v_2, u_2 во второй цвет, а вершины $b_2, c_1, c_2, v_3, u_1, u_3, u_4$ в третий цвет. Данная раскраска является 3-раскраской графа G_1 и поэтому он является 3-раскрашиваемым.

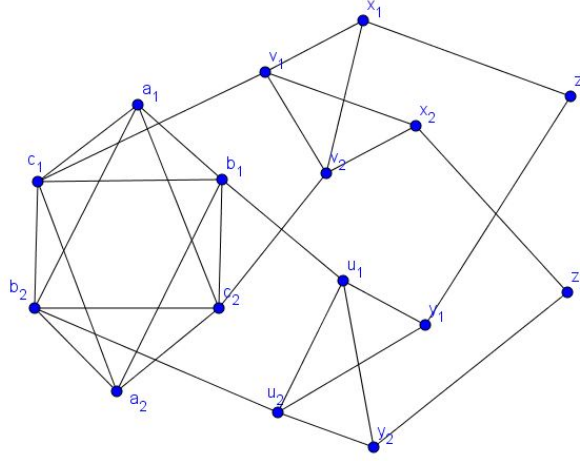


Рис. 3.2: Граф G_3

Докажем, что в любой 3-раскраске графа G_1 вершины u_3, u_4 имеют одинаковые цвета. Рассмотрим какую-нибудь 3-раскраску c графа G_1 . Предположим, что $c(c_1) = 1, c(v_3) = 2$. Тогда $c(v_2) = 3, c(v_1) = 1$. Поскольку $c(u_1) \neq c(u_2)$, то $c(c_2) \neq 1$. Поэтому $c(c_2) = 2$.

Предположим, что $c(b_1) = 1$. Тогда обязательно

$$c(a_1) = 3, c(b_4) = 2, c(a_4) = 3, c(b_3) = 1, c(a_3) = 3, c(b_2) = 2$$

и поэтому $c(u_1) = c(u_2) = 1$. Получаем противоречие.

Предположим, что $c(b_1) = 3$. Тогда обязательно

$$c(a_2) = 2, c(b_2) = 3, c(a_3) = 1, c(b_3) = 3, c(a_4) = 2, c(b_4) = 3, c(a_1) = 1$$

и поэтому $c(u_1) = c(u_2) = 2$. Получаем противоречие.

Если же $c(c_1) = c(v_3)$, то и $c(c_1) = c(v_3) = c(u_3) = c(u_4)$. ■

Лемма 3.1.2. *Граф G_2 является 3-раскрашиваемым, причем в любой его 3-раскраске вершины t_1 и t_2 имеют одинаковые цвета.*

Доказательство. Покрасим вершины x_3, y_1, z_1 в первый цвет, вершины x_1, y_2, z_2 во второй цвет, а вершины x_2, y_3, z_3, t_1, t_2 в третий цвет. Данная раскраска является 3-раскраской графа G_2 и поэтому он является 3-раскрашиваемым.

Докажем, что в любой 3-раскраске графа G_2 вершины t_1, t_2 имеют одинаковые цвета. Рассмотрим какую-нибудь его 3-раскраску c . Предположим, что существует такое i , что $c(y_i) \neq c(z_i)$. Можно считать, что $i = 1$ и что $c(y_1) = 1, c(z_1) = 2$. Ввиду наличия ребер x_1x_2, x_1x_3 ни одно из множеств $\{c(y_2), c(z_2)\}, \{c(y_3), c(z_3)\}$ не совпадает с $\{1, 2\}$. Если хотя бы одно из них будет одноцветным, то этот цвет должен быть третьим, а другое множество должно совпадать с $\{1, 2\}$, что невозможно. Если $\{c(y_2), c(z_2)\} = \{1, 3\}$, то

$$c(z_2) = 1, c(y_2) = 3 \text{ и } c(x_1) = 3, c(x_2) = 2, c(x_3) = 1$$

и поэтому каждый из трех цветов запрещен для вершины z_3 . Если $\{c(y_2), c(z_2)\} = \{2, 3\}$, то

$$c(y_2) = 2, c(z_2) = 3 \text{ и } c(x_1) = 3, c(x_2) = 1, c(x_3) = 2$$

и поэтому каждый из трех цветов запрещен для вершины y_3 . Значит, можно считать, что

$$c(y_1) = c(z_1) = 1, c(y_2) = c(z_2) = 2, c(y_3) = c(z_3) = 3.$$

Поэтому $c(t_1) = c(t_2) = 3$. ■

Лемма 3.1.3. *Граф G_3 является 3-раскрашиваемым, причем в любой его 3-раскраске вершины a_1, a_2, z_1, z_2 имеют одинаковые цвета.*

Доказательство. Покрасим вершины $a_1, a_2, v_1, u_1, z_1, z_2$ в первый цвет, вершины b_1, b_2, v_2, y_1, y_2 во второй цвет, а вершины c_1, c_2, u_2, x_1, x_2 в третий цвет. Данная раскраска является 3-раскраской графа G_3 и поэтому он является 3-раскрашиваемым.

Докажем, что в любой 3-раскраске графа G_3 вершины a_1, a_2, z_1, z_2 имеют одинаковые цвета. Действительно, нетрудно убедиться в том, что граф

$$G_3[\{a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2\}]$$

имеет единственную 3-раскраску (с точностью до перестановки цветов), в которой вершины a_1, a_2 имеют первый цвет, вершины b_1, b_2 второй цвет, а вершины c_1, c_2 третий цвет. Тогда в любой 3-раскраске графа G_3 вершины y_1, y_2

имеют второй цвет, а вершины x_1, x_2 имеют третий цвет. Поэтому вершины z_1 и z_2 имеют первый цвет. ■

Пусть G — произвольный граф, x — его вершина, чья окрестность образована вершинами v_1, v_2, v_3, v_4 . Операция G_i -шунтирования состоит в удалении вершины x из графа G , добавлении графа G_i , а также

- ребер $v_1u_3, v_2u_3, v_3u_4, v_4u_4$ (если $i = 1$),
- или ребер $v_1t_1, v_2t_1, v_3t_2, v_4t_2$ (если $i = 2$),
- или ребер $v_1a_1, v_2a_2, v_3z_1, v_4z_2$ (если $i = 3$).

По леммам 3.1.1–3.1.3 получившийся граф будет 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф G является 3-раскрашиваемым.

Определим следующие три класса графов:

- $\mathcal{X}_7^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, C_5\}$.
- $\mathcal{X}_8^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, banner, house, C_4 + K_1\}$.
- $\mathcal{X}_9^*$ — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из $\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, diamond + K_1, dart, C_4 + K_1, banner, W_4, C_5\}$.

Каждый из классов $\mathcal{X}_7^* - \mathcal{X}_9^*$ является наследственным.

Лемма 3.1.4. *Каждый из классов графов $\mathcal{X}_7^* - \mathcal{X}_9^*$ является 3-ВР-сложным.*

Доказательство. Задача 3-ВР является NP-полной в классе $\mathcal{U}$ связных графов, степень каждой вершины которых равна 4 [26]. Пусть $G \in \mathcal{U}$. Выберем $i \in \overline{1, 3}$ и одновременно применим операцию G_i -шунтирования к каждой вершине графа G . Получившийся граф обозначим через G'_i . Граф G'_i является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф G_i по леммам 3.1.1–3.1.3. Нетрудно видеть, что $G'_i \in \mathcal{X}_{i+6}^*$. Поэтому задача 3-ВР в классе $\mathcal{U}$ полиномиально сводится к той же задаче в каждом из классов $\mathcal{X}_7^* - \mathcal{X}_9^*$. Значит, каждый из классов графов $\mathcal{X}_7^* - \mathcal{X}_9^*$ является 3-ВР-сложным. ■

3.2 Некоторые результаты, связанные с полиномиальной сводимостью и полиномиальной разрешимостью задачи 3-ВР

В работе [50] было введено понятие неприводимого графа. А именно, граф G называется *неприводимым* (смысл этого термина в третьей главе отличен от содержания термина второй главы), если одновременно выполнены следующие условия:

1. граф G является связным и не содержит вершин x и y таких, что $N(y) \subseteq N(x)$
2. граф G не содержит шарниров, т.е. вершин, удаление которых увеличивает количество компонент связности графа G
3. граф G не содержит ни одного нечетного колеса в качестве порожденного подграфа
4. граф G не содержит *spindle* в качестве подграфа
5. $\Delta(G) \geq 4$ и граф G не содержит вершин степени не более чем 2

В работе [50] было показано (см. лемму 5 упомянутой работы), что для произвольного наследственного класса $\mathcal{X}$ задача 3-ВР полиномиально сводится к той же задаче для совокупности неприводимых графов из $\mathcal{X}$.

Лемма 3.2.1. *Если*

$$G \in \text{Free}(\{K_{1,4}, W_3, W_4, W_5, \text{butterfly}, \text{cricket}\}),$$

то $\Delta(G) \leq 4$. Более того, если $\deg(x) = 4$, то $G[N(x)] \in \{K_{1,3}, P_3 + K_1, P_4\}$.

Доказательство. Пусть x^* — вершина максимальной степени графа G . Предположим, что $G[N(x^*)]$ содержит компоненту связности G^* , имеющую не менее четырех вершин. Т.к. $G \in \text{Free}(\{W_3, W_4, W_5, \text{butterfly}\})$, то G^* — дерево диаметра не более чем 3. Понятно, что $\Delta(G^*) \leq 3$. Если $\Delta(G^*) = 2$, то $G^* = P_4$. Если $\Delta(G^*) = 3$ и $G^* \neq K_{1,3}$, то G^* содержит порожденный

подграф $K_2 + 2K_1$ и поэтому $G \notin \text{Free}(\{\text{cricket}\})$. Поэтому $G^* = K_{1,3}$, если $\Delta(G^*) = 3$.

Т.к. $G \in \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{cricket}\})$, то граф $G[N(x^*)]$ имеет не более трех компонент связности, причем если их ровно три, то $G[N(x^*)]$ является пустым. Если таковых компонент ровно две, то одна из них — граф K_1 , т.к. $G \in \text{Free}(\{\text{butterfly}\})$. Предположим, что $G[N(x^*)] = H + K_1$, где H является связным и $|V(H)| \geq 3$. Т.к. $G \in \text{Free}(\{K_{1,4}, W_3, \text{cricket}\})$, то по результатам предыдущего абзаца граф H должен иметь в точности три вершины, откуда следует, что $H = P_3$. ■

Лемма 3.2.2. *Задача 3-BP в классе $\text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, \text{dart}\})$ полиномиально сводится к той же задаче для класса $\text{Free}(\{K_{1,4}, W_4, \text{butterfly}, \text{cricket}, \text{dart}\})$.*

Доказательство. Очевидно, что окрестность любой вершины любого графа из $\text{Free}(\{K_{1,4}, W_4\})$ индуцирует подграф из класса $\text{Free}(\{K_3, O_4\})$. По теореме Рамсея данный подграф содержит не более 8 вершин. Пусть G — неприводимый граф из класса $\text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, \text{dart}\})$, содержащий порожденный подграф W_4 . Обозначим вершины данного подграфа через v, v_1, v_2, v_3, v_4 , где $C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ — его порожденный 4-цикл. Будем считать, что множество вершин графа G , отстоящих от v на расстоянии 3, не пусто. Иначе G содержит не более чем $1 + 8 + 8 \cdot 7 + 8 \cdot 7^2$ вершин ввиду связности данного графа.

Т.к. $G \in \text{Free}(\{\text{butterfly}, \text{cricket}\})$, то все элементы множества $N(v)$, кроме, быть может, одного, принадлежат множеству $\hat{V} = \bigcup_{j=1}^4 N(v_j)$. Докажем, что существует порожденный путь длины 3 с началом в вершине v , проходящий через $V(C)$. Предположим противное. Рассмотрим порожденный путь (v, a, b) , не проходящий через $V(C)$. По нашему предположению каждый сосед каждого элемента множества $\hat{V} \setminus N(v)$ принадлежит множеству $\hat{V} \cup \{a\}$. Если вершина $a' \notin \{v_2, v_4\}$ является общим соседом вершин v и v_1 , то a' должна быть смежна с v_3 и одновременно несмежна с каждой из

вершин v_2 и v_4 , т.к. $G \in Free(\{dart\})$. По тем же причинам каждый сосед вершины a' принадлежит множеству $\hat{V} \cup \{a\}$. Значит, вершина a — шарнир графа G . Поэтому G не является неприводимым.

Рассмотрим порожденный путь (v, a_1, b_1, c_1) , в котором $a_1 \in V(C)$ и $c_1 \notin \hat{V}$. Не умаляя общности можно считать, что $a_1 = v_1$. Т.к. граф G является неприводимым и принадлежит классу $Free(\{dart\})$, то b_1 смежна ровно с двумя вершинами цикла C , которые являются соседними. В этом легко убедиться, перебрав всевозможные случаи пересечения $N(b_1)$ и $V(C)$: одна вершина, две несмежные, две смежные, три или четыре вершины, соответственно. Можно считать, что $b_1v_2 \in E(G)$. Если b_1 имеет соседа $c' \notin \{v_1, v_2, c_1\}$, то $c' \in N(v_1) \otimes N(v_2)$, т.к. $G \in Free(\{W_3, butterfly, cricket\})$. Из соображений симметрии достаточно рассмотреть случай, когда $c' \in N(v_1) \setminus N(v_2)$. Т.к. $G \in Free(\{W_3, W_5\})$, то $c'v_4 \notin E(G)$. Тогда вершины v_1, v_2, v_4, b_1, c' порождают $dart$.

Предположим, что $b_2 \in \hat{V} \setminus (V(W_4) \cup \{b_1\})$. Вершина b_2 не может иметь ровно одного соседа на цикле C , т.к. $G \in Free(\{dart\})$. Если

$$N(b_2) \cap V(C) \in \{\{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_1, v_2\}\},$$

то $b_1b_2 \in E(G)$, т.к. $G \in Free(\{butterfly, cricket\})$. Но тогда $G \notin Free(\{W_3, W_5\})$. Предположим, что $N(b_2) \cap V(C) = \{v_1, v_3\}$. Если $b_2b_1 \in E(G)$, то v_1, v_2, v_4, b_1, b_2 порождают $dart$. Если же $b_2b_1 \notin E(G)$, то

$$\text{либо } v_1, v_2, v_4, v, b_2 \text{ (если } b_2v \notin E(G)),$$

$$\text{либо } v_1, v_4, v, b_1, b_2 \text{ порождают } dart \text{ (если } b_2v \in E(G)).$$

Случай $N(b_2) \cap V(C) = \{v_2, v_4\}$ рассматривается аналогично. Во всех остальных случаях $b_2v \notin E(G)$ и $b_1b_2 \notin E(G)$, т.к. $G \in Free(\{W_3, W_5\})$. Но тогда G содержит порожденный подграф $dart$. Тем самым, $N(b_2) \cap V(C) = \{v_3, v_4\}$. Более того, $N(v_3) \cap N(v_4) = \{b_2, v\}$, т.к. $G \in Free(\{W_3, cricket\})$. Т.к. G является $spindle_s$ -свободным, то $b_1b_2 \notin E(G)$. Если существует вершина $c_2 \in N(b_2) \setminus \{v_3, v_4\}$, то $c_2v \notin E(G)$, иначе $G \in Free_s(\{spindle\})$.

Тем самым, $c_2 \notin \hat{V} \cup N(v)$ и $\deg(b_2) = 3$, т.к. $G \in \text{Free}(\{butterfly, cricket\})$.
Значит, $\deg(b_1) = 3$, $\deg(b_2) \leq 3$ и $\deg(v) \leq 5$.

Удалим из графа G все вершины множества $V(C)$, добавим к нему вершины w_1 и w_2 , а также ребра

$$w_1w_2, w_1b_1, w_2b_1, w_1v, w_2v, w_1b_2, w_2b_2.$$

Получившийся граф обозначим через G^* . Нетрудно видеть, что граф G является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф G^* является таковым. Нетрудно видеть, что

$$G^* \in \text{Free}(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, dart\}).$$

Если $\hat{V} = V(W_4) \cup \{b_1\}$, то можно выполнить аналогичную редукцию, в которой не проводятся ребра w_1b_2, w_2b_2 . Применив преобразование необходимое количество раз, мы в итоге получим граф из $\text{Free}(\{K_{1,4}, W_4, butterfly, cricket, dart\})$. Отсюда следует справедливость утверждения данной леммы. ■

Лемма 3.2.3. *Задача 3-ВР в классе $\text{Free}(\{K_{1,4}, W_4, butterfly, cricket\})$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\text{Free}(\{K_{1,4}, W_4, butterfly, cricket, crown\})$. Этот факт также верен для классов*

$$\text{Free}(\{K_{1,4}, W_4, butterfly, cricket, dart\}) \text{ и } \text{Free}(\{K_{1,4}, W_4, butterfly, cricket, crown, dart\}).$$

Доказательство. Пусть G — неприводимый граф из класса $\text{Free}(\{K_{1,4}, W_4, butterfly, cricket\})$. Предположим, что граф G содержит порожденный подграф $crown$, вершины степени 2 которого мы обозначим через x_1, x_2, x_3 . Из леммы 3.2.1 следует, что в графе G каждая из вершин x_1, x_2, x_3 имеет степень не более чем 3. В графе G стянем рассматриваемый подграф в вершину x , а сам результат такого стягивания обозначим через G^* . Очевидно, что граф G^* является 3-раскрашиваемым тогда и

только тогда, когда таковым является G . Также очевидно, что степень вершины x в графе G^* не более чем 3. Если эта степень не превосходит двух или x — вершина степени 3 в порожденном подграфе W_4 графа G^* , то граф G^* будет 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым будет и граф $G^* \setminus \{x\} = G \setminus V(crown)$. Поэтому далее предполагается, что данный случай не реализуется и поэтому $G^* \in Free(\{W_4\})$. Тогда в графе G существуют вершины y_1, y_2, y_3 такие, что $y_i \in N(x_i) \setminus \bigcup_{j=1, j \neq i}^3 N(x_j)$ для любого $i \in \overline{1, 3}$. Понятно, в графе G^* вершины y_1, y_2, y_3 образуют окрестность вершины x . Т.к. при переходе от G к G^* степени вершин y_1, y_2, y_3 не меняются, то $G^* \in Free(\{K_{1,4}\})$. Если $G^* \notin Free(\{butterfly\})$, то в графе G^* вершина x является вершиной степени 2 порожденной копии графа *butterfly* и можно считать, что x, y_1, y_2 образуют треугольник в данном подграфе *butterfly* и что y_3 ему не принадлежит. Но тогда все вершины рассматриваемого подграфа *butterfly*, кроме x , а также вершина x_1 порождают в G подграф *cricket*. Если $G^* \notin Free(\{cricket\})$, то в графе G^* вершина x является вершиной степени 1 порожденной копии графа *cricket* (и тогда, очевидно, $G \notin Free(\{cricket\})$) или в графе G^* вершина x является вершиной степени два порожденной копии графа *cricket* (и тогда, очевидно, $G \notin Free(\{K_{1,4}\})$). Поэтому

$$G^* \in Free(\{K_{1,4}, W_4, butterfly, cricket\}).$$

Если дополнительно $G \in Free(\{dart\})$, то порожденный подграф *dart* может существовать в графе G^* только если он порожден вершинами x, y_1, y_2, y_3 и некоторой вершиной z . Можно считать, что (y_1, y_2, y_3) — порожденный путь в графе G^* и что $z \in N(y_2) \setminus (N(y_1) \cup N(y_3))$. Но тогда в графе G вершины y_1, y_2, y_3, x_2, z порождают подграф $K_{1,4}$.

Применив описанную редукцию необходимое количество раз, мы получим некоторый граф

$$H_G \in Free(\{K_{1,4}, W_4, butterfly, cricket, crown\}),$$

причем $H_G \in \text{Free}(\{\text{dart}\})$, если $G \in \text{Free}(\{\text{dart}\})$. Понятно, что граф G является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда граф H_G является таковым. Поэтому справедливо утверждение данной леммы. ■

Лемма 3.2.4. *Класс $\text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, \text{dart}\})$ является 3-ВР-простым.*

Доказательство. По леммам 3.2.2 и 3.2.3 задача 3-ВР в классе $\text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, \text{dart}\})$ полиномиально сводится к той же задаче в классе

$$\text{Free}(\{K_{1,4}, W_4, \text{butterfly}, \text{cricket}, \text{crown}, \text{dart}\}).$$

Напомним, что *2-деревом* называется любой граф, который может быть получен из K_3 , считающегося простейшим 2-деревом, по следующему правилу: добавить новую вершину к ранее полученному графу и соединить ее ребрами с двумя смежными вершинами старого графа. Нетрудно видеть, что любое 2-дерево имеет единственную 3-раскраску, причем она может быть найдена за линейное время.

Пусть G — 2-дерево из класса

$$\mathcal{X} = \text{Free}(\{K_{1,4}, W_4, \text{butterfly}, \text{cricket}, \text{crown}, \text{dart}\}).$$

Тогда $\Delta(G) \leq 4$ по лемме 3.2.1. С использованием этого факта индукцией по количеству вершин нетрудно доказать каждое из следующих трех утверждений. Если $G \notin \{K_3, \text{diamond}, F_4, \text{sun}\}$, то все его вершины, кроме x_1, x_2, y_1, y_2 , имеют степень 4. Более того, $\deg(x_1) = \deg(x_2) = 2$ и $\deg(y_1) = \deg(y_2) = 3$, причем

$$(x_1, y_1) \in E(G), (x_2, y_2) \in E(G) \text{ и}$$

$$G[\{x_1, x_2, y_1, y_2\}] = 2K_2 \text{ или } G[\{x_1, x_2, y_1, y_2\}] = P_4.$$

В 3-раскраске графа G все три цвета встречаются среди цветов вершин x_1, x_2, y_1, y_2 , причем совпадают цвета вершин x_1, x_2 , или вершин y_1, y_2 , или вершин x_1, y_2 . Последнее верно и для графов *diamond*, F_4 . В 3-раскраске графов K_3 и *sun* их вершины степени 2 получают попарно различные цвета.

Пусть G — неприводимый граф из класса $\mathcal{X}$. Максимальный по включению подграф графа G , который является 2-деревом и принадлежит $\mathcal{X}$, назовем 2_G -деревом. Из леммы 3.2.1 следует, что любые два 2_G -дерева не пересекаются по вершинам. Из нее же следует, что 2_G -деревья покрывают все вершины степени 4 в графе G и что каждая вершина, имеющая в 2_G -дереве степень 2 или 3, имеет в G степень, равную трем.

Удалим из графа G все вершины степени 3, окрестности которых порождают пустой граф. А также удалим все такие ребра ab , что $G[N(a)] = K_2 + K_1$. Нетрудно видеть, что в результате получится дизъюнктное объединение всевозможных 2_G -деревьев. Поэтому множество всех 2_G -деревьев может быть найдено за полиномиальное время.

Рассмотрим какое-нибудь 2_G -дерево и его 3-раскраску. Если в G имеется ребро, соединяющее две одноцветные вершины данного 2_G -дерева, то G не является 3-раскрашиваемым. Покажем, что если для каждого 2_G -дерева нет такого рода ребра, то граф G является 3-раскрашиваемым. Рассмотрим текущий граф G' и 3-раскраску некоторого 2_G -дерева. Удалим из G' рассматриваемое 2_G -дерево, затем добавим треугольник и для любого $i \in \overline{1,3}$ вершину треугольника с номером i соединим в точности с теми вершинами полученного графа, с которыми ранее были смежны вершины цвета i удаленного 2_G -дерева. После элиминации всех 2_G -деревьев в получившемся графе мы удаляем все вершины степени 2. Полученный граф обозначим через G^* . Граф G^* не содержит порожденной копии графа K_4 и имеет максимальную степень вершин не более чем 3. Ясно, что граф G является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является и граф G^* . По теореме Брукса граф G^* является 3-раскрашиваемым. Значит, граф G является 3-раскрашиваемым. Поэтому данная лемма имеет место. ■

3.3 Основной результат третьей главы диссертации

Введем следующие обозначения:

1. $\mathcal{X}'_1 = \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, C_4\})$.
2. $\mathcal{X}'_2 = \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, C_4 + K_1\})$.
3. $\mathcal{X}'_3 = \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, W_4\})$.

Теорема 3.3.1. Пусть $\mathcal{X}$ — класс графов, определяемый не более чем четырьмя запрещенными порожденными подграфами, каждый из которых имеет не более 5 вершин, отличный от каждого из классов графов $\mathcal{X}'_1$ – $\mathcal{X}'_3$. Тогда $\mathcal{X}$ является 3-ВР-сложным, если он включает хотя бы один из классов $\mathcal{X}^*_1$ – $\mathcal{X}^*_9$, иначе он является 3-ВР-простым. Задача 3-ВР в классе $\mathcal{X}'_1$ полиномиально эквивалентна той же задаче в классе $\mathcal{X}'_2$ и полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X}'_3$.

Доказательство. В работе [42] было доказано, что конечно определенный класс графов, включающий хотя бы один из классов графов $\mathcal{X}^*_1, \mathcal{X}^*_2$, является 3-ВР-сложным. Поэтому если $\mathcal{X}$ включает хотя бы один из классов $\mathcal{X}^*_1$ – $\mathcal{X}^*_9$, то он является 3-ВР-сложным.

Предположим, что $\mathcal{X}$ не включает ни один из классов графов $\mathcal{X}^*_1$ – $\mathcal{X}^*_9$. В работе [48] было доказано, что если $G_1 \in \mathcal{X}^*_1$ и $G_2 \in \mathcal{X}^*_2$ — произвольные графы с не более чем 5 вершинами каждый, причем

$$\{G_1, G_2\} \neq \{K_{1,4}, \text{bull}\} \text{ и } \{G_1, G_2\} \neq \{K_{1,4}, \text{butterfly}\},$$

то класс $\text{Free}(\{G_1, G_2\})$ является 3-ВР-простым. Вместе с тем, в работе [50] было доказано (см. доказательство теоремы 1 той работы), что если G — граф с не более чем 5 вершинами и класс $\text{Free}(\{K_{1,4}, \text{bull}, G\})$ не включает ни один из классов $\mathcal{X}^*_3$ – $\mathcal{X}^*_6$, то $\text{Free}(\{K_{1,4}, \text{bull}, G\})$ является 3-ВР-простым. Поэтому можно предполагать, что $\mathcal{X} = \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, G_1, G_2\})$, где $\max(|V(G_1)|, |V(G_2)|) \leq 5$ и ни один из графов G_1, G_2 не принадлежит ни одному из классов $\mathcal{X}^*_1, \mathcal{X}^*_2$. Более того, т.к. $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}^*_7$, то $G_1 = \text{cricket}$ или $G_1 = C_5$.

Нетрудно видеть, что если $H \in \text{Free}(\{H' + K_1\})$, то либо $H \in \text{Free}(\{H'\})$, либо $|V(H)| \leq |V(H')| \cdot (\Delta(H) + 1)$. Задача 3-ВР в классе $\mathcal{X}$ полиномиально

сводится к той же задаче для множества неприводимых графов из данного класса, причем по теореме Рамсея максимальная степень вершин любого неприводимого графа из $\mathcal{X}$ не превосходит 8. Значит, если $G_2 = H' + K_1$, то задача 3-ВР в классе $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $Free(\{K_{1,4}, butterfly, G_1, H'\})$. Тем самым, если $G_1 = C_5$, то $G_2 \in \{cricket, kite, diamond\}$, т.к. $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{X}_3^*$. Это невозможно, т.к. $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{X}_5^*, \mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{X}_8^*$. Предположим, что $G_1 = cricket$. Тогда

$$G_2 \in \{kite, diamond, dart, C_4, C_4 + K_1, W_4\},$$

т.к. $\mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{X}_5^*, \mathcal{X} \not\subseteq \mathcal{X}_9^*$. Классы

$$Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, kite\}) \text{ и}$$

$$Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, diamond\})$$

являются 3-ВР-простыми (см. леммы 7 и 8 из работы [50]). По лемме 3.2.4 класс $Free(\{K_{1,4}, butterfly, cricket, dart\})$ является 3-ВР-простым. Случаи, когда $G_2 \in \{C_4, C_4 + K_1, W_4\}$, не возможны.

Очевидно, что задача 3-ВР в классе $\mathcal{X}'_1$ полиномиально эквивалентна той же задаче в классе $\mathcal{X}'_2$ и задача 3-ВР в классе $\mathcal{X}'_2$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X}'_3$. ■

Заключение

В настоящей диссертационной работе были рассмотрены задачи о независимом множестве и о вершинной k -раскраске и исследовалась вычислительная сложность данных задач в некоторых классах графов. В ней также рассматривались и исследовались некоторые локальные преобразования графов, ассоциированные с данными задачами. Применительно к задаче о вершинной k -раскраске и данным преобразованиям решалась задача реализации. Была доказана NP-полнота задачи о независимом множестве в классе плоских триангуляций с максимальной степенью вершин 18. Была доказана NP-полнота задачи о вершинной 3-раскраске в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5 и с гранями, ограниченными не более чем 4 ребрами каждая. Была доказана полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве для субкубических планарных графов, не содержащих порожденного дерева, получаемого отождествлением концов трех путей длины 3,3,2. Для всех наследственных классов, кроме трех, которые определяются запрещенными порожденными подграфами, каждый с не более чем 5 вершинами, был установлен сложностной статус задачи о вершинной 3-раскраске. Для двух из трех оставшихся случаев была доказана полиномиальная эквивалентность и сводимость задачи о вершинной 3-раскраске к той же задаче для третьего.

Возможные дальнейшие перспективы развития темы диссертационного исследования состоят в разработке новых локальных преобразований графов для задач о независимом множестве и о вершинной k -раскраске и других задач на графах, а также в обобщении результатов диссертации.

Литература

- [1] Алексеев В. Е. О сжимаемых графах // Проблемы кибернетики, М.: Наука. — 1979. — Т. 36. — С. 23–31.
- [2] Алексеев В. Е. О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике, Горький: Из-во Горьковского гос. университета. — 1983. — С. 3–13.
- [3] Алексеев В. Е., Лозин В. В. О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости // Дискретный анализ и исследование операций. — 1998. — Т. 5, № 1. — С. 3–19.
- [4] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 С.
- [5] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 С.
- [6] Кобылкин К. С. Вычислительная сложность задачи вершинного покрытия в классе планарных триангуляций // Труды института математики и механики УрО РАН. — 2016. — Т. 22, № 3. — С. 153–159.
- [7] Малышев Д. С. Классы субкубических планарных графов, для которых задача о независимом множестве является полиномиально разрешимой // Дискретный анализ и исследование операций. — 2013. — Т. 20, № 3. — С. 26–44.

- [8] Малышев Д. С., Алексеев В. Е. Классы планарных графов с полиномиально разрешимой задачей о независимом множестве // Дискретный анализ и исследование операций. — 2008. — Т. 15, № 1. — С. 3–10.
- [9] Малышев Д. С., Сироткин Д. В. Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 35–60.
- [10] Сироткин Д. В. Теоремы существования и достаточности, связанные с локальными преобразованиями графов для задачи о k -раскраске // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 2. — С. 98–104.
- [11] Сироткин Д. В. О сложности построения 3-раскраски планарных графов с короткими гранями // Журнал Средневолжского математического общества. — 2018. — Т. 20, № 2. — С. 199–205.
- [12] Сироткин Д. В., Малышев Д. С. Способ редукции графов и его приложения // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, № 3. — С. 114–125.
- [13] Сироткин Д. В., Малышев Д. С. О сложности задачи вершинной 3-раскраски для наследственных классов графов, определенных запретами небольшого размера // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 4. — С. 112–130.
- [14] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1982. — 301 С.
- [15] Aichholzer O., Aurenhammer F., Hackl T., Huemer C., Pilz A., Vogtenhuber B. 3-Colorability of pseudo-triangulations // International Journal of Computational Geometry and Applications. — 2015. — V. 25, № 4. — P. 283–298.

- [16] Alekseev V. E. On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Applied Mathematics. — 2003. — V. 132, № 1–3. — P. 17–26.
- [17] Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Milanic M. The maximum independent set problem in planar graphs // Lecture Notes in Computer Science. — 2008. — V. 5162. — P. 96–107.
- [18] Alexe G., Hammer P. L., Lozin V. V., de Werra D. Struction revisited // Discrete Applied Mathematics. — 2003. — V. 132, № 1–3. — P. 27–46.
- [19] Bondy A., Murty U. Graph theory. — Springer-Verlag, Graduate texts in mathematics, V. 244, 2008. — 655 P.
- [20] Brandstadt A., Lozin V. V. A note on alpha-redundant vertices in graphs // Discrete Applied Mathematics. — 2001. — V. 108, № 3. — P. 301–308.
- [21] Broersma H. J., Golovach P. A., Paulusma D., Song J. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theoretical Computer Science — 2012. — V. 414, № 1. — P. 9–19.
- [22] Brooks R. L. On colouring the nodes of a network // Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences. — 1941. — V. 37. — P. 194–197.
- [23] Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. — 2017. — P. 1–23.
- [24] Dabrowski K., Golovach P. A., Paulusma D. Colouring of graphs with Ramsey-type forbidden subgraphs // Theoretical Computer Science. — 2014. — V. 522. — P. 34–43.
- [25] Dabrowski K., Golovach P. A., Paulusma D. Colouring vertices of triangle-free graphs without forests // Discrete Mathematics. — 2012. — V. 312, № 7. — P. 1372–1385.

- [26] Dailey D. Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete // Discrete Mathematics. — 1980. — V. 30, № 3. — P. 289–293.
- [27] Diestel R. Graph theory. — Springer-Verlag, Graduate texts in mathematics, V. 173, 2016. — 447 P.
- [28] Garey M.R., Johnson D.S., Stockmeyer L. Some simplified NP-complete graph problems // Theoretical Computer Science. — 1976. — V. 1, № 3. — P. 237–267.
- [29] Golovach P.A., Paulusma D., Ries B. Coloring graphs characterized by a forbidden subgraph // Discrete Applied Mathematics. — 2015. — V. 180. — P. 101–110.
- [30] Golovach P.A., Paulusma D., Song J. 4-coloring H -free graphs when H is small // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — V. 161, № 1–2. — P. 140–150.
- [31] Hammer P.L., Mahadev N.V.R., de Werra D. Stability in CAN-free graphs // Journal of Combinatorial Theory, Ser. B. — 1985. — V. 38, № 1. — P. 23–30.
- [32] Hammer P.L., Mahadev N.V.R., de Werra D. The struction of a graph: application to CN-free graphs // Combinatorica. — 1985. — V. 5, № 2. — P. 141–147.
- [33] Hertz A., de Werra D. On the stability number of AH-free graphs // Journal of Graph Theory. — 1993. — V. 17, № 1. — P. 53–63.
- [34] Hertz A., de Werra D. A magnetic procedure for the stability number // Graphs and Combinatorics. — 2009. — V. 25, № 5. — P. 707–716.
- [35] Hoang C., Kaminski M., Lozin V.V., Sawada J., Shu X. Deciding k -colorability of P_5 -free graphs in polynomial time // Algorithmica. — 2010. — V. 57, № 1 — P. 74–87.

- [36] Hopcroft J., Tarjan R.E. Efficient planarity testing // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1974. — V. 21, № 4. — P. 549–568.
- [37] Huang S. Improved complexity results on k -coloring P_t -free graphs // European Journal of Combinatorics. — 2016. — V. 51. — P. 336–346.
- [38] Huang C., Lazzarato D. Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P_5})$ -free graphs and similar graph classes // Discrete Applied Mathematics. — 2015. — V. 186. — P. 106–111.
- [39] Kral D., Kratochvil J., Tuza Z., Woeginger G. // Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Lecture Notes in Computer Science. — 2001. — V. 2204, — P. 254–262.
- [40] Leveque B., de Werra D. Graph transformations preserving the stability number // Electronic Notes in Discrete Mathematics. — 2009. — V. 35. — P. 3–8.
- [41] Lozin V.V. Conic reduction of graphs for the stable set problem // Discrete Mathematics. — 2000. — V. 222, № 1-3. — P. 199–211.
- [42] Lozin V.V., Kaminski M. Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycle // Contributions to Discrete Mathematics. — 2007. — V. 2, № 1. — P. 61–66.
- [43] Lozin V.V., Malyshev D.S. Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — V. 216. — P. 273–280.
- [44] Lozin V.V., Milanic M. Maximum independent sets in graphs of low degree // Proceedings of 18 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. — 2007. — P. 874–880.
- [45] Lozin V.V., Milanic M. On the maximum independent set problem in subclasses of planar graphs // Journal of Graph Algorithms and Applications. — 2010. — V. 14, № 2. — P. 269–286.

- [46] Lozin V. V., Monnot J., Ries B. On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // Journal of Discrete Algorithms. — 2015. — V. 31. — P. 104–112.
- [47] Malyshev D. S. The coloring problem for classes with two small obstructions // Optimization Letters. — 2014. — V. 8, № 8. — P. 2261–2270.
- [48] Malyshev D. S. The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs // Discrete Mathematics. — 2015. — V. 338, № 11. — P. 1860–1865.
- [49] Malyshev D. S. Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem // Journal of Combinatorial Optimization. — 2015. — V. 31, № 2. — P. 833–845.
- [50] Malyshev D. S. The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs and Combinatorics. — 2017. — V. 33, № 4. — P. 1009–1022.
- [51] Malyshev D. S. Polynomial-time approximation algorithms for the coloring problem in some cases // Journal of Combinatorial Optimization. — 2017. — V. 33, № 3. — P. 809–813.
- [52] Malyshev D. S., Lobanova O. O. Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — V. 219. — P. 158–166.
- [53] Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. — 1989. — V. 45, № 1–3. — P. 139–172.