На правах рукописи

Кочеганов Виктор Михайлович

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИИ ОБСЛУЖИВАНИЯ КОНФЛИКТНЫХ ПОТОКОВ В ТАНДЕМЕ С ЗАДЕРЖКОЙ ПО ЦИКЛИЧЕСКОМУ АЛГОРИТМУ С ПРОДЛЕНИЕМ

Специальность 01.01.09 —
«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2020

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Научный руководитель:

Зорин Андрей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», профессор кафедры программной инженерии Института информационных технологий, математики и механики

Официальные оппоненты:

Шестаков Олег Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», профессор кафедры математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», заведующий кафедрой системного анализа и автоматического управления факультета компьютерных наук и информационных технологий

Ведущая организация:

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский государственный университет»

Защита состоится 24 декабря 2020 г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке ФГАОУ ВО «Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского»

Автореферат разослан 2020 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20,
кандидат физико-математических
наук Бирюков Руслан Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теория массового обслуживания предоставляет математический аппарат для анализа систем, в которых выполняются операции по обслуживанию/«обработке» некоторых объектов при наличии случайных факторов. При этом физический смысл обслуживания и самих объектов не имеет значения, что делает область применения этой дисциплины достаточно широкой: системы связи, автоматические линии производства, системы медицинского обслуживания, системы управления транспорта и т.д. В роли объектов могут выступать, например, абоненты, машины, пакеты информации.

В связи со стремительным ростом числа машин в современных городах все больший интерес стала представлять теория управления потоками транспортных средств. Исследования в этой области насчитывают более чем полувековую историю. В конце прошлого века можно отметить работы М. Фергюсона, Х. Такаги. В последние десятилетия стоит выделить работы Л.Г. Афанасьевой, Е.В. Булинской, А.Г. Таташева, А.П. Буслаева, М.А. Федоткина, Й. Леувардена (J. Leeuwaarden), М. Буна (M. Boon).

В ранних исследованиях предполагалось, что входящие потоки в транспортных системах есть простейшие потоки Пуассона. В работах Л.Г. Афанасьевой и Е.В. Булинской рассматриваются рекуррентные входящие потоки. В то же время другими исследователями рассматривались детальные модели маневрирования автомобилей на дороге. В таких предположениях сложно изучить выходные потоки перекрестков, а следовательно, построить адекватные модели для сетей перекрестков. Разработка математического аппарата для исследования простейших сетей тандемного типа со сложными входящими потоками и длительностями обслуживания с распределениями фазового типа в работах А.Н. Дудина, В.С. Клименок, А.А. Назарова, С.П. Моисеевой и др. позволяет получать практические рекомендации для проектирования таких сетей. Однако указанные модели не вполне применимы к транспортным сетям из-за наличия красного света светофора, немгновенного перемещения машин между перекрестками. Задача об управлении транспортными потоками, формируемыми в случайной среде, рассматривались М.А. Федоткиным и А.Н. Куделиным.

Светофор возникает как инструмент разрешения конфликтности автомобильных потоков, требования которых неоднородны. Конфликтность означает, что в каждый момент времени могут обслуживаться требования не более чем из одного потока. Различные алгоритмы управления конфликтными потоками, такие как циклический с фиксированным ритмом, алгоритм с продлением по информации о длине приоритетной очереди, алгоритм с упреждением, различные адаптивные алгоритмы и другие, изучались в работах М. Фергюсона, Х. Такаги, Ю.И. Неймарка, М.А. Федоткина, Н.В. Литвак и др.

Решение оптимизационных задач в теории массового обслуживания породило понятие управляемой системы массового обслуживания, введеное в 1967 г. в работе О.И. Бронштейна и В.В. Рыкова. В обзоре 1975 г. В.В. Рыковым была проведена классификация таких систем и указана связь теории массового обслуживания с существовавшими на тот момент исследованиями в области управляемых случайных процессов. К примеру, для задачи об обслуживании клиентов на телефонной станции управление может быть применено к механизму обслуживания путем изменения количества обслуживающих операторов, а для задачи обслуживания автомобилей на перекрестке возможно управлять длительностью обслуживания требований для конкретного потока. Важные модели и результаты в теории управляемых систем массового обслуживания принадлежат Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, Г.П. Климову, А.А. Боровкову, Б.В. Башарину, В.Ф. Матвееву, В.Г. Ушакову, В.В. Рыкову, С.Г. Фоссу, В.А. Ивницкому, А.Ф. Терпугову, А.М. Горцеву, А.А. Назарову, В.М. Вишневскому, А.Д. Соловьеву, В.С. Королюку, Л. Клейнроку, Н. Джейсуолу, М.Ф. Ньютсу, О. Боксме и другим.

Для решения сформулированных выше задач применялся, как правило, классический подход. Данный подход, имея в своем арсенале мощный аппарат теории вероятностей и случайных процессов, предполагает подробнейшее описание элементов математической модели и, в частности, описание характеристик каждой заявки в отдельности. Такое «локальное» задание потоков заявок обычно осуществляется при помощи следующих математических объектов: распределение длин интервалов между поступлениями заявок, целочисленный считающий процесс, точечный процесс или случайная мера. Однако цена такого подробного описания — ограниченное количество реальных систем, для которых исследователь способен провести анализ или хотя бы построить строгую математическую модель. Так, например, при анализе потоков автотранспортных средств интервалы между моментами поступления автомобилей к стоп-линии перекрестка оказываются статистически зависимыми. Данный факт следует из пространственной неоднородности транспортных потоков: при возникновении в потоке «медленного» автомобиля за ним образуется «пачка» автомобилей движущихся следом. Описание такого рода потоков довольно сложно построить, наблюдая за каждым отдельно взятым автомобилем. Данная проблема тесно связана с недостаточной разработанностью в настоящее время теории выходящих потоков: хорошо исследованы свойства выходящего потока только для простейших систем обслуживания.

Качественно новая методика к построению математических моделей управляющих систем массового обслуживания была предложена М.А. Федоткиным и существенно доработана А.В. Зориным. Методика основана на понятии абстрактной управляющей системы, введеном А.А. Ляпуновым и С.В. Яблонским, и также носит название кибернетического подхода. Основными принципами подхода являются: 1) наблюдение за системой происходит в дискретные моменты времени; 2) управляющая система разделяется на логические блоки, между которыми определяются функциональные и стохастические связи при их взаимодействии во времени; 3) описание блоков системы должно быть нелокальным. Рассмотрение систем с позиции абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского позволяет исследовать их с единой позиции: разделяя системы на составные блоки, описывая каждый из них и вводя функционально-статистические связи между ними. Это существенно упрощает анализ уже известных систем, а также делает возможным исследование новых и более сложных. Кроме того, стало более естественным независимое рассмотрение подсистем и изучение их свойств отдельно от основной модели.

Аппарат абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского был удачно применен к анализу неклассических конфликтных управляющих систем массового обслуживания А.В. Зориным. В частности, была построена математическая модель для системы управления неординарными конфликтными потоками, формируемыми во внешней среде, в классе алгоритмов с переналадками и разделением времени, а также циклических алгоритмов с продлением. Была построена модель для системы управления неординарными рекуррентными потоками в классе циклических алгоритмов при наличии переналадок. Кроме того, отметим, что исследовать систему последовательных перекрестков с различными усложнениями стало возможным только с точки зрения абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского. Так, модель тандема перекрестков с немгновенным перемещением машин между ними была впервые предложена в работах А.В. Зорина. В моделях этих работ динамика перемещения машин от одного перекрестка к другому задается бернуллиевской случайной величиной: каждая машина с некоторой фиксированной вероятностью $0 < p < 1$ успевает доехать до следующего перекрестка и с противоположной вероятностью $1 - p$ остается «между» ними. Данная диссертационная работа продолжает исследования в этом направлении. А именно, автором диссертации с точки зрения управляющей системы Ляпунова–Яблонского построена и исследована математическая модель тандема перекрестков с немгновенным перемещением автомобилей и циклическим алгоритмом управления светофором с продлением. Поскольку многие реальные системы могут быть представлены в виде конфликтной управляющей системы Ляпунова–Яблонского, то исследования в данной области являются актуальными.

Цели и задачи работы. Целями данной работы являются: 1) построение и исследование математической модели тандема управляющих систем обслуживания по циклическому алгоритму с продлением; 2) построение, реализация и анализ имитационной модели систем, осуществляющих циклическое управление с продлением тандемом перекрестков.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

1. Построение строгой вероятностной модели тандема управляющих систем с помощью явного построения вероятностного пространства и поточечного задания необходимых для исследования случайных величин и элементов.

2. Анализ построенной вероятностной модели, получение условий существования стационарного режима в различных подсистемах тандема.

3. Разработка имитационной модели тандема, определение момента достижения системы квазистационарного режима, анализ зависимости условий стационарности от управляющих параметров.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Впервые построена вероятностная модель тандема управляющих систем с немгновенным перемещением требований между ними, управление в которых осуществляется по циклическому алгоритму и алгоритму с продлением. В этой модели требования сначала поступают в первую систему на обслуживание по циклическому алгоритму, а затем немгновенно поступают во вторую систему на обслуживание по циклическому алгоритму с продлением. Немгновенность перемещения моделируется при помощи биномиальной случайной величины с параметром p, имеющим смысл вероятности перехода требования из одной системы в другую за определенный промежуток времени.

2. Впервые применен аппарат абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского для изучения указанной выше системы. Построенная по принципам кибернетического подхода вероятностная модель позволила провести разносторонний анализ системы. В частности, была проведена классификация состояний марковской цепи, описывающей динамику системы, найдены рекуррентные соотношения для соответствующих производящих функций и были изучены эргодические свойства системы. Также, благодаря этому подходу, была построена и реализована имитационная модель для численного анализа системы.

3. Впервые применен итеративно-мажорантный метод для нахождения достаточных условий существования стационарного распределения в указанной выше модели. Благодаря итеративно-мажорантному методу были найдены условия существования стационарного режима для очередей первичных требований, а также для промежуточной очереди.

Теоретическая и практическая значимость. Научная значимость работы заключается в построении строгой вероятностной модели для качественно нового вида управляющей системы и в последовательном исследовании ее эргодических свойств. Успешно примененный в работе метод нелокального описания процессов существенно расширяет множество поддающихся исследованию реальных систем массового обслуживания. Строгая математическая модель позволяет оперировать существующим, хорошо разработанным вероятностным аппаратом для нахождения условий стационарности и нахождения оптимального управления системой. Разработанные модели дают базу для изучения более комплексных тандемных систем, систем с более сложными входными потоками и алгоритмами управления.

Практическая значимость исследования состоит в том, что изученная управляющая система является адекватным описанием реальной системы тандема перекрестков, а также других сетей, состоящих из двух узлов с перемещающимися между ними требованиями и циклическими алгоритмами обслуживания с продлением на узлах.

Методология и методы исследования. В диссертации применяется аппарат теории вероятностей, теории массового обслуживания, исследования операций, теории управляемых марковских процессов. Также применяются методы теории линейных отображений, математической статистики и теории функций комплексного переменного. При реализации имитационной модели на компьютере использовались языки программирования C++, Python.

Методология диссертации основывается на представлении стохастических систем массового обслуживания в виде абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского. Использование данной методологии позволяет разделить исследуемые системы на составные части (блоки), описать эти части математически, задать правила их функционирования и взаимодействия между собой. Для описания входных потоков было примено нелокальное описание.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Методика построения вероятностного пространства для тандема систем обслуживания по циклическому алгоритму с продлением и задержкой требований между ними.

2. Методика определения условий существования стационарного режима в системах управления неординарными пуассоновскими потоками требований с использованием циклического алгоритма и алгоритма с продлением.

3. Методика определения фазы квазистационарного режима управляющей системы обслуживания тандемного типа.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим применением используемого математического аппарата, проведением и сравнением статистических и численных исследований. Результаты работы не противоречат результатам, полученными ранее другими авторами при исследовании управляющих систем обслуживания.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях: Международная научная конференция «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения» (Минск, Республика Беларусь, 2015 г.), IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 2015 г.), 8-я международная научная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2015 (Москва, 2015 г.), Международная научная конференция «Distributed Computer and Communication Networks» DCCN 2016 (Москва, 2016 г.), XVIII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 2017 г.), XVI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ-2017 (Казань, 2017 г.), 20-я международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2017 (Москва, 2017 г.), IX Московская международная конференция по исследованию операций (Москва, 2018 г.), Четвертая международная конференция по стохастическим методам МКСМ-4 (пос. Дивноморское, г. Новороссийск), XVIII Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ-2019 (Саратов, 2019 г.).

Личный вклад автора. В совместных публикациях научному руководителю принадлежит постановка задачи и общее редактирование работ. Все исследования выполнены автором диссертации лично, все полученные результаты принадлежат автору.

Соответствие паспорту специальности. Диссертационная работа выполнена в соответствии с паспортом специальности 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика» и включает оригинальные результаты в области дискретной математики и математической кибернетики.

Исследование, приведенное в работе, соответствует следующим разделам паспорта специальности. Пункт 4 (Математическая теория исследования операций и теория игр): построена и изучена математическая модель для новой системы массового обслуживания методами теории исследования операций. Пункт 2 (Теория управляющих систем): математическая модель исследуемой системы представлена в виде абстрактной управляющей системы Ляпунова–Яблонского и построена на базе принципов кибернетического подхода.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 17 работах, 3 из них — в журналах, рекомендованных ВАК для защиты по специальности 01.01.09, 2 — в библиографической базе Scopus, 2 — в библиографической базе Web of Science, 1 — в журнале, рекомендованном ВАК для защиты по смежной специальности 05.13.01, 1 — в журнале, рекомендованном ВАК для защиты по смежной специальности 01.01.05, 13 — в библиографической базе РИНЦ, 10 — в тезисах докладов. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Содержание работы

Введение содержит обзор литературы по исследуемой тематике, обоснование актуальности работы, характеристику работы в виде целей, задач, методологии и методов исследования, описание теоретической и практической значимости, а также соответствие работы паспорту заявленной специальности.

Первая глава посвящена построению математической модели тандема управляющих систем обслуживания. В разделе 1.1 вопрос об операции управления системой ставится на содержательном уровне. Раздел 1.2 содержит построение строгой математической модели в виде конструктивно заданного вероятностного пространства и определенных на нем случайных величин и элементов.

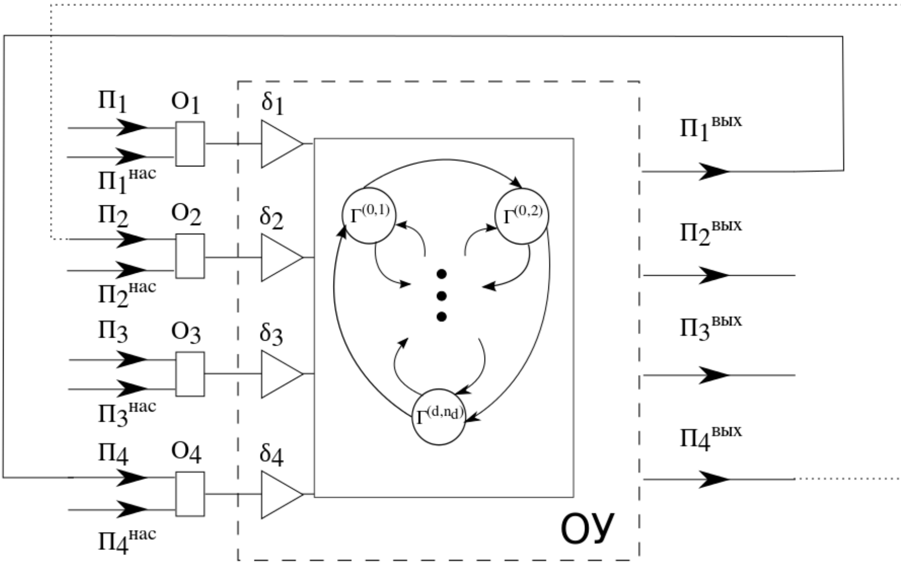

Рис. 1 — Структурная схема системы обслуживания

На первом этапе задача формулируется содержательно, в терминах теории массового обслуживания: описываются входные потоки, виды имеющихся очередей, обслуживающее устройство и т.д. А именно, в систему, осуществляющую операцию по обслуживанию одним обслуживающим устройством, поступают потоки Π_1, Π_2, Π_3 и Π_4 (см. рисунок 1). Требования потока Π_j приходят в соответствующую очередь O_j неограниченного объема, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, и дисциплиной FIFO («первым пришел — первым ушел»). Входящие потоки требований Π_1 и Π_3 являются неординарными пуассоновскими потоками с интенсивностями λ_1 и λ_3 соответственно. Распределение количества заявок в группе по потоку Π_j $(j = 1{,}3)$, представлено производящей функцией $f_j(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu^{(j)} z^\nu$, $|z| < 1 + \varepsilon$. После обслуживания по циклическому алгоритму требования потока Π_1 повторно поступают в систему для обслуживания, формируя при этом поток Π_4. Затем обслуженные требования потока Π_4 немгновенно поступают на еще одно повторное обслуживание (циклическое с продлением), создавая при этом поток Π_2. Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными и обслуживаются по циклическому алгоритму с продлением: в случае, когда количество требований по потоку Π_3 не превышает заранее заданный порог $L > 0$, продолжается обслуживание требований потока Π_2. Обслуживающее устройство в каждый момент времени может находиться в одном из множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)}\colon k = \overline{0,d}; r = \overline{1,n_k}\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, …, n_d.

Особое внимание при построении модели уделяется описанию графа переходов обслуживающего устройства. Для этого множество Γ всех состояний обслуживающего устройства разбивается на непересекающиеся подмножества C_k, $k = \overline{0;d}$, называемые циклами. Цикл C_0 состоит из состояний продления (продления обслуживания требований потока Π_2): $C_0 = \{\Gamma^{(0,1)}, \Gamma^{(0,2)}, \ldots, \Gamma^{(0,n_0)}\}$. А каждый цикл C_k, $k = \overline{1;d}$, в свою очередь, разбивается на непересекающиеся подмножества входных (C_k^{I}), выходных (C_k^{O}), нейтральных (C_k^{N}) состояний:

$$\Gamma = \Big(\bigcup_{k=1}^{d} C_k\Big) \bigcup \{\Gamma^{(0,1)}, \Gamma^{(0,2)}, \ldots, \Gamma^{(0,n_0)}\}, \quad C_k = C_k^{\mathrm{I}} \cup C_k^{\mathrm{O}} \cup C_k^{\mathrm{N}}.$$

Основываясь на этом разбиении, граф переходов задается с помощью следующего отображения:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^{\mathrm{O}};\\ \Gamma^{(k,r\oplus_k 1)}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } y > L;\\ \Gamma^{(0,h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^{\mathrm{O}} \text{ и } y \leqslant L;\\ \Gamma^{(0,h_2(r))}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leqslant L;\\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L, \end{cases} \tag{1}$$

с заданными функциями

$$h_1(\cdot)\colon \bigcup_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{O}} \to N_0, \quad h_2(\cdot)\colon N_0 \to N_0, \quad h_3(\cdot)\colon N_0 \to \bigcup_{k=1}^{d} C_k^{\mathrm{I}},$$

и $N_0 = \{1{,}2, \ldots, n_0\}$. Тогда закон изменения состояния обслуживающего устройства определяется формулой

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}). \tag{2}$$

Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в состоянии Γ_i+1 удобно ввести функцию $h_T(\cdot,\cdot)$: $T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}$, где k и r таковы, что $\Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$.

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут иметь различные законы распределения и, вообще говоря, быть зависимыми, поэтому вместо привычного способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, в работе были использованы потоки насыщения. Под потоками насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1,4}$, имеются ввиду виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j = \overline{1,3}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Более конкретно, поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1,3}$, содержит неслучайное число $\ell(k,r,j)$ требований, которые были обслужены в течение времени $T^{(k,r)}$, если обслуживающее устройство находилось в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$. Пусть, как и ранее, $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди O_4 находится $x \in \mathbb{Z}_+$ требований, поток насыщения $\Pi_4^{\text{нас}}$ определяется как поток, содержащий все x требований. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства $\Gamma^{(k,r)}$ каждое требование из очереди O_4 с вероятностью $p_{k,r}$ и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь O_2 потока Π_2. С вероятностью $1 - p_{k,r}$ требование очереди O_4 остается в ней до следующего такта. На следующем такте процесс повторяется.

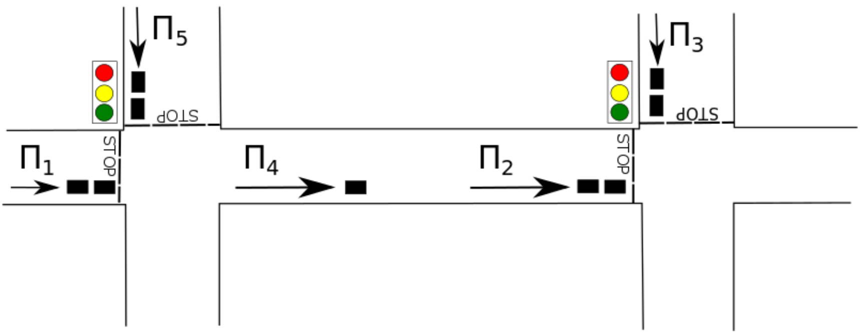

Рис. 2 — Пример: тандем перекрестков

В качестве наглядной интерпретации системы приводится тандем перекрестков (рис. 2). Предполагается, что на первый перекресток поступают автомобили из неординарного пуассоновского потока Π_1. После прохождения первого перекрестка (обслуживания) эти автомобили формируют поток Π_4 и, немгновенно проезжая расстояние между двумя перекрестками, поступают на второй перекресток, формируя входящий поток Π_2. На втором перекрестке по циклическому алгоритму с продлением обслуживаются автомобили потоков Π_2 и Π_3.

Описанная на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как абстрактная управляющая система обслуживания. При построении математической модели были выдержаны следующие базовые принципы (принципы кибернетического подхода): принцип дискретности актов функционирования управляющей системы обслуживания во времени; принцип совместного рассмотрения поблочного строения управляющей системы обслуживания и ее функционирования во времени; принцип нелокальности при описании поблочного строения управляющей системы обслуживания. Информация о блоках системы задается с помощью следующих случайных величин и элементов. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0$, τ_1, τ_2, ... моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим: 1) Γ_i, $i \geqslant 1$, из множества Γ — состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ и $\Gamma_0 \in \Gamma$ — в момент времени τ_0; 2) количество $\varkappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, требований в очереди O_j в момент времени τ_i; 3) количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$; 4) количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$; 5) количество $\overline{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geqslant 0$, реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$; $j = \overline{1,4}$.

Зависимости между блоками системы задаются следующими функциональными и вероятностными соотношениями. Функциональная зависимость

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1,2,3\}, \tag{3}$$

между величиной $\overline{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1,2,3\},$$

то из выражения (3) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1,2,3\}. \tag{4}$$

Из формулировки поставленной задачи следуют соотношения для потока Π_4:

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \tag{5}$$

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки $\nu_i = (\Gamma^{(k,r)}; x)$ вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1$, $\eta_{2,i} = a_2$, $\eta_{3,i} = a_3$, $\eta_{4,i} = a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1, \widetilde{T}) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, \widetilde{T}) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k},\tilde{r},1), x_1 + a_1\}}, \tag{6}$$

где $\widetilde{T} = h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$, а $\tilde{k}$ и $\tilde{r}$ таковы, что $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$ и $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

По своему смыслу $\psi(a_2; x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}})$ есть вероятность поступления a_2 требований по потоку Π_2 при условии, что очередь O_4 содержит x_4 требований и обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}$, так что $u = p_{k,r}$. При нарушении условия $0 \leqslant k \leqslant y$ положим $\psi(k; y, u)$ равной нулю.

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1$, $\xi_{2,i} = b_2$, $\xi_{3,i} = b_3$, $\xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении $(\Gamma^{(k,r)}; x)$ метки ν_i есть

$$\delta_{b_1,\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)} \times \delta_{b_2,\ell(\tilde{k},\tilde{r},2)} \times \delta_{b_3,\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \times \delta_{b_4,x_4}. \tag{7}$$

Основным результатом первой главы является теорема 1, содержательный смысл которой состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором вероятностном пространстве.

Теорема 1. Пусть $\gamma_0 = \Gamma^{(k_0,r_0)} \in \Gamma$ и $x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$ фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$ и случайные элементы $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$, $i \geqslant 0$, $j \in \overline{1,4}$, такие, что 1) имеют место равенства $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ и $\varkappa_0(\omega) = x^0$; 2) выполняются соотношения (2), (4), (5); 3) для любых $a \in \mathbb{Z}_+^4$, $b \in \mathbb{Z}_+^4$ и любых $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$, $\Gamma^{(k_t,r_t)} \in \Gamma$, $t = 1, 2, \ldots$, таких, что $\mathbf{P}\Big(\bigcap\limits_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\Big) > 0$, условное распределение векторов η_i и ξ_i, $i \geqslant 0$, имеет вид

$$\mathbf{P}\Big(\{\omega\colon \eta_i = a, \xi_i = b\} \,\Big|\, \bigcap_{t=0}^{i} \{\omega\colon \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\Big) = \\ = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \tag{8}$$

где функции $\varphi(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и $\zeta(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ определяются формулами (6) и (7).

Исследуемая в работе управляющая система характеризуется следующими объектами: обслуживающее устройство и очереди O_1, O_2, O_3, O_4. Случайная последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i \geqslant 0\}$ служит математическим описанием этих объектов.

Вторая глава посвящена тем результатам, которые удается получить для этой пятимерной последовательности, несмотря на ее сложность. А именно, в этой главе доказывается марковость последовательности и проводится классификация ее состояний. На основе конструктивно заданного вероятностного пространства (Теорема 1) в разделе 2.1 строго доказана марковость последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$, где $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$. Для этого вводятся вспомогательные множества $A_i(k_i; r_i; x^i) = \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}$, для $i = 0,\ 1,\ \ldots$; здесь $x^i \in \mathbb{Z}_+^4$, $k_i = \overline{0; d}$, $r_i = \overline{1; n_{k_i}}$, $i = 0,\ 1,\ \ldots$. Тогда для доказательства марковости достаточно показать справедливость равенства

$$\mathbf{P}(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \mid \cap_{t=0}^{i} A_t(k_t; r_t; x^t)) = \\ = \mathbf{P}(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \mid A_i(k_i; r_i; x^i)), \quad (9)$$

являющегося формальной записью определения марковского свойства последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$. Далее в разделе было найдено выражение для переходных вероятностей:

Теорема 4. Пусть x, $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$ и $\Gamma^{(k,r)}$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in \Gamma$. Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ вычисляются по следующей формуле:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\}) = \\ = \widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), x_3, \tilde{x}_3) \times \\ \times \sum_{(a_1,a_2)\in\mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3))\psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k},\tilde{r}}). \quad (10)$$

В выражении (10) $\widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, t, x_3, \tilde{x}_3) = (1-\delta_{\tilde{x}_3,0})\varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, t) + \delta_{\tilde{x}_3,0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3} \varphi_3(a, t)$, а множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ определено в основном тексте диссертации.

Аналогичный результат был получен для стохастической последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$: доказана ее марковость и получено выражение для ее переходных вероятностей:

Теорема 5. Пусть x_3, $\tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$ и $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$, $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} \in \Gamma$. Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ вычисляются по следующей формуле:

$$\mathbf{P}(\{\omega\colon \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}\} | \{\omega\colon \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x\}) = \\ = \widetilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), x_3, \tilde{x}_3). \quad (11)$$

В разделе 2.2 проведена классификация состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ по арифметическим свойствам переходных вероятностей и выделено множество ее существенных состояний. Данный шаг является необходимым для изучения асимптотических свойств абстрактной управляющей системы. Результатом этого шага является следующая теорема.

Теорема 6. Состояния вида $(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})},\tilde{x})$, где $\tilde{k}=\overline{0,d}$, $\tilde{r}=\overline{1,n_{\tilde{k}}}$, $\tilde{x}\in\mathbb{Z}_+^4$,

$$(\tilde{x}_1>0)\Rightarrow(\tilde{x}_4\geqslant\ell(\tilde{k},\tilde{r},1)), \tag{12}$$

$$\tilde{x}_3\geqslant\max\Big\{0,L+1-\sum_{s=1}^{\tilde{r}}\ell(k,s,3)\Big\},\ \text{если } \tilde{k}>0, \tag{13}$$

$$\tilde{x}_3\geqslant\max\Big\{0,L+1-\max_{k=\overline{1,d}}\{\sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}}\ell(\tilde{k},s,3)\}\Big\},\ \text{если } \tilde{k}=0, \tag{14}$$

и только они достижимы из состояния

$$(\Gamma^{(0,r_0)},x^0),\quad x^0=(0,0,L+1,0),\quad r_0=\overline{1,n_0},$$

и, следовательно, являются существенными.

Доказательство этой теоремы начинается с выделения наиболее очевидных существенных состояний (леммы 1–3):

$$(\Gamma^{(0,r_0)},\tilde{x}),\quad r_0=\overline{1,n_0},\tilde{x}=(0,0,L+1,0).$$

Затем это множество постепенно расширяется (леммы 4–9).

Из доказанных результатов также находятся существенные состояния для марковской цепи $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$:

Теорема 7. Множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i,\varkappa_{3,i});i\geqslant 0\}$ имеет вид $\Big(\bigcup\limits_{1\leqslant r\leqslant n_0}S^3_{0,r}\Big)\cup\Big(\bigcup\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant d\\ 1\leqslant r\leqslant n_k}}S^3_{k,r}\Big)$, где

$$S^3_{0,r}=\Big\{(\Gamma^{(0,r)},x_3)\colon\ x_3\in Z_+,\ x_3>L-\max_{k=1,2,\dots,d}\Big\{\sum_{t=1}^{n_k}\ell(k,t,3)\Big\}\Big\},1\leqslant r\leqslant n_0,$$

$$S^3_{k,r}=\Big\{(\Gamma^{(k,r)},x_3)\colon\ x_3\in Z_+,\ x_3>L-\sum_{t=1}^{r}\ell(k,t,3)\Big\},1\leqslant k\leqslant d,\quad 1\leqslant r\leqslant n_k.$$

Результаты этой главы позволяют доказать марковость и провести классификацию состояний для последовательностей, содержащих только часть из упомянутых пяти компонент (содержащих только часть очередей). Этот анализ проведен в следующих главах.

В **третьей главе** более подробно изучаются случайные последовательности, содержащие состояния только части очередей из последовательности $\{(\Gamma_i,\varkappa_i);i\geqslant 0\}$: очереди O_1, O_3 и O_4. Исключение из рассмотрения нескольких компонент пятимерной марковской цепи позволяет найти достаточное, а в некоторых случаях необходимое условия существования стационарного распределения.

Начинается глава с раздела 3.1, в котором рассматривается стохастическая последовательность $\{\varkappa_{4,i}(\omega);i=0,1,\dots\}$, не являющаяся, вообще говоря, марковской. Дело в том, что в силу определенных условий, для решения вопроса существования стационарного распределения для общей последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ достаточно доказать ограниченность отдельных ее компонент. Поэтому ограниченность последовательности $\{\varkappa_{4,i}(\omega); i = 0, 1, \ldots\}$ представляет собой важный вопрос.

Теорема 8. Для того, чтобы последовательность $\{\varkappa_{4,i}(\omega); i = 0, 1, \ldots\}$ была ограничена, достаточно выполнения неравенства $\min_{k=\overline{0,d}, r=\overline{1,n_k}} \{p_{k,r}\} > 0$.

Для нахождения условий стационарности используется хорошо зарекомендовавший себя в схожих задачах итеративно-мажорантный метод, в котором последовательность математических ожиданий отдельных компонент цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geqslant 0\}$ ограничивается числовой последовательностью более простого вида. С этой целью в разделе 3.2 выводятся рекуррентные соотношения для производящих функций последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$.

Более подробно, обозначим

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \{\gamma \in \Gamma\colon h(\gamma, x_3) = \Gamma^{(k,r)}\},$$

где $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $x_3 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда вид рекуррентных соотношений для производящих функций представлен в следующей теореме.

Теорема 10. Пусть $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} \in \Gamma$. Тогда имеют место следующие рекуррентные по $i \geqslant 0$ соотношения для производящих функций $\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\cdot,\cdot,v)$ марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$:

1) для $\Gamma^{(0,\tilde{r})} \in \Gamma$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$

$$\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(0, \tilde{r}, v) = \alpha_i(0, \tilde{r}, v); \tag{15}$$

2) для $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} \in \Gamma$, $\tilde{k} = \overline{1, d}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$

$$\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = q_{\tilde{k},\tilde{r}}(v) \times \mathfrak{M}^{(3,i)}(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1, v) + \alpha_i(\tilde{k}, \tilde{r}, v). \tag{16}$$

Поскольку математическое ожидание случайной величины связано с производящей функцией, то имея в арсенале рекуррентные соотношения для производящих функций последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$, теперь можно применить итеративно-мажорантный метод для поиска достаточного условия существования стационарного распределения $Q_{3,i}(\gamma, x)$.

Теорема 11. Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ имела стационарное распределение $Q(\gamma, x)$, $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, достаточно выполнения неравенства

$$\min_{k=\overline{1,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1. \tag{17}$$

Доказательство этого факта осуществляется от противного и здесь мы приведем лишь основную идею. Пусть при выполнении условий (17) стационарного распределения не существует. Тогда для любого состояния $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$ и независимо от начального распределения $\mathbf{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,0} =$

x), $(\Gamma^{(k,r)}, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, имеют место предельные равенства

$$\lim_{i\to\infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x) = 0, \quad (\Gamma^{(k,r)}, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+. \tag{18}$$

В разделе 3.4 в качестве необходимого условия существования стационарного распределения доказывается менее строгое условие. Оно сформулированно в следующей теореме.

Теорема 12. Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$ имела стационарное распределение $Q_3(\gamma, x)$, $(\gamma, x) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, необходимо выполнение неравенства

$$\max_{k=\overline{1,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,3)}{\lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1.$$

Раздел 3.5 содержит достаточное условие существования стационарного распределения для последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$, доказательство которого проводится при помощи итеративно-мажорантного метода аналогично результату для последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geqslant 0\}$.

Теорема 16. Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geqslant \geqslant 0\}$ имела стационарное распределение $Q_1(\gamma, x_1, x_3)$, $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$, достаточно выполнения неравенств

$$\min_{k=\overline{0,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,1)}{\lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1, \quad \min_{k=\overline{1,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,3)}{\lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1. \tag{19}$$

Четвертая глава имеет своей целью проанализировать и расширить результаты, полученные аналитически в предыдущих главах. Поэтому здесь представлено описание разработанной имитационной модели и программного комплекса для ее исследования. Для определения момента достижения системой стационарного режима подсчитываются различные статистики одновременно для двух систем: смещенной, то есть системы с ненулевым количеством требований в начале, и несмещенной, то есть системы с пустыми очередями при старте. Основным показателем качества работы системы выбрана средневзвешенная оценка времени пребывания требования в системе. В завершении главы приведены конкретные эксперименты и анализ их результатов.

До этой главы в работе исследовались свойства основных подсистем тандема: подсистемы с очередью низкоприоритетного потока, с очередями первичных входных потоков и с промежуточной очередью. Тем не менее, для всестороннего изучения системы необходимо также провести ее синтез. Другими словами, в главе 4 уделяется внимание поведению системы в целом: ее эффективности и устойчивости с течением времени. Эффективность подобных систем может оцениваться, к примеру, с помощью следующих характеристик: 1) среднее взвешенное количество ожидающих требований в очередях; 2) среднее взвешенное время нахождения в системе произвольного требования; 3) среднее взвешенное время ожидания в системе произвольного требования; 4) среднее время простоя системы. В диссертационной работе акцент сделан на среднем взвешенном времени ожидания и средем взвешенном времени пребывания произвольного требования в системе.

Как правило, более сложная реальная система обслуживания порождает большее количество деталей при создании ее математической и имитационной моделей и их дальнейшем исследовании. Поэтому в таких системах важно иметь более высокий уровень абстракции, чем уровень описания каждой заявки системы и каждого события, происходящего с ней. Наличие дополнительной абстракции (например, полученной вследствие принципа нелокальности и поблочности рассмотрения) позволяет упростить построение имитационной модели и, при необходимости, уменьшить вычислительную нагрузку алгоритма за счет уменьшения числа генерируемой информации.

Математическая модель рассматриваемой в работе абстрактной управляющей системы Ляпунова–Яблонского, построенная по принципам кибернетического подхода, существенно упростила построение и реализацию имитационной модели тандема перекрестков (рис. 2). В частности, поблочное строение системы помогло разделить программу на смысловые блоки, а принцип дискретности — выделить временные интервалы (такты), в рамках которых происходит генерирование интересующих случайных величин системы. Для смещенной и несмещенной систем в роли состояния выступали длины очередей и состояние обслуживающего устройства. В соответствии с законами распределения входных потоков Π_1 и Π_3 генерировались требования системы. Для каждого требования фиксировался момент его прихода в систему, выхода из нее и время до обслуживания.

Опишем основную идею алгоритма определения момента достижения системой квазистационарного режима. В конце каждого такта функционирования системы вычисляются значения

$$\gamma^0_{j,\cdot} = \frac{1}{\tilde{\mathcal{V}}^0_j}\sum_{\nu}\gamma^0_{j,\nu}, \quad \gamma^+_{j,\cdot} = \frac{1}{\tilde{\mathcal{V}}^+_j}\sum_{\nu}\gamma^+_{j,\nu}, \tag{20}$$

среднего времени ожидания обслуживания требований потока Π_j, $j = 1{,}3$, в несмещенной и смещенной системах соответственно. Здесь величины $\gamma^0_{j,\nu}$ и $\gamma^+_{j,\nu}$ — время ожидания требования с номером ν потока Π_j ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$; $j = 1{,}3$) несмещенной и смещенной систем соответственно. Величины $\tilde{\mathcal{V}}^0_j$ и $\tilde{\mathcal{V}}^+_j$ равны общему количеству требований, пришедших в систему за все время наблюдения, в несмещенной и смещенной системах соответственно. Для большей устойчивости алгоритма принятия решения о наступлении квазистационарного режима в несмещенной системе учитывается количество требований во входящем и выходящем потоках:

$$F^0_{\text{in},1} = \sum_n \alpha^0_{\text{in},1,n}, \quad F^0_{\text{out},4} = \sum_n \alpha^0_{\text{out},4,n}, \tag{21}$$

$$F^0_{\text{in},3} = \sum_n \alpha^0_{\text{in},3,n}, \quad F^0_{\text{out},3} = \sum_n \alpha^0_{\text{out},3,n}. \tag{22}$$

Здесь $\alpha^+_{\text{in},j,n}$ и $\alpha^0_{\text{in},j,n}$ — количество автомобилей потока Π_j, которые поступили за такт с номером n, в смещенной и несмещенной системах соответственно, $j = 1, 3$; $\alpha^+_{\text{out},j,n}$ и $\alpha^0_{\text{out},j,n}$ — количество автомобилей потока Π_j, которые закончили обслуживание на такте n для смещенной и несмещенной систем соответственно, $j = 3, 4$.

Окончательное решение о достижении системой стационарного режима будет приниматься в случае, если выполнены следующие неравенства:

$$\frac{|\gamma^0_{j,\cdot} - \gamma^+_{j,\cdot}|}{\gamma^0_{j,\cdot}} < \delta_1, \quad \frac{F^0_{\text{in},1}}{F^0_{\text{out},4}} < \delta_2, \quad \frac{F^0_{\text{in},3}}{F^0_{\text{out},3}} < \delta_3. \tag{23}$$

Значения параметров $\delta_1 < 1$, $\delta_2 > 1$ и $\delta_3 > 1$ фиксированы.

На рис. 3 представлены результаты экспериментов. По осям координат отложены значения $\widetilde{T}^{(2,1)}$ длительности обслуживания требований потока Π_3 и значения $\widetilde{T}^{(2,2)}$ длительности обслуживания требований потока Π_2. Остальные параметры системы считаются фиксированными. Желтым цветом обозначены точки, в которых было определено достижение системой стационарного режима. Темно-зеленым цветом обозначены случаи отсутствия стационарности. Кроме того на графике черным цветом изображены границы области стационарности, полученные из достаточных условий теоремы 16. Из графика видно, что желтая область выходит далеко за границы черных линий. Это свидетельствует о том, что достаточное условие, полученное в работе аналитически, не является необходимым. Ввод дополнительного режима продления по высоко приоритетному потоку при отсутвии большого числа требований по низкоприоритетному потоку позволяет существенно расширить область стационарности системы. Интуитивно данный результат ожидаем: при отсутствии требований по одному из потоков, другой поток получает дополнительный временной «запас» для обслуживания за счет продления. Также на графике изображена область, ограниченная серой линией. Эта область получена эмпирическими рассуждениями и дает «примерную» оценку области стационарности для системы с продлением. Рассуждения для вывода этой границы основаны на подсчете «среднего» количества времени, освобождающегося для обслуживания требований потока Π_2 за счет продления.

Динамика времен ожидания для конкретной системы со стационарным режимом при $\lambda_1 = 0.3$ для требований потока Π_1 приведена на рисунке 4.

В настоящей работе наибольший акцент при оценке эффективности работы системы делается на среднем взвешенном времени нахождения произвольного требования первичных потоков Π_1 и Π_3 в системе: чем больше средняя интенсивность потока требований, тем больше вес требований этого потока. Время ожидания требований первичных потоков не характеризует процессы, происходящие между двумя перекрестками, поэтому в качестве конечного критерия эффективности работы не используется. Однако для определения момента наступления стационарного режима информация о времени ожидания оказывается весьма полезной.

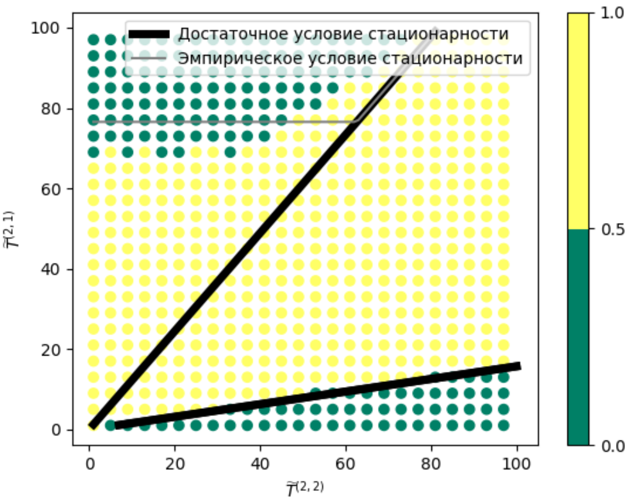

Рис. 3 — Области стационарности системы. $\lambda_3 = 0.1$, $L = 10$

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем.

1) Построена строгая математическая модель тандема с циклическим алгоритмом управления и алгоритмом с продлением. Отличительной особенностью системы также является немгновенность перемещения требований между системами.
2) Доказана марковость случайной последовательности, включающей длину низкоприоритетной очереди. Проведена классификация состояний цепи по арифметическим свойствам переходных вероятностей этой последовательности. А также найдены достаточное и необходимое условия существования стационарного распределения.
3) Проведен аналогичный анализ для случайной последовательности, включающей очереди первичных требований: доказана ее мар-

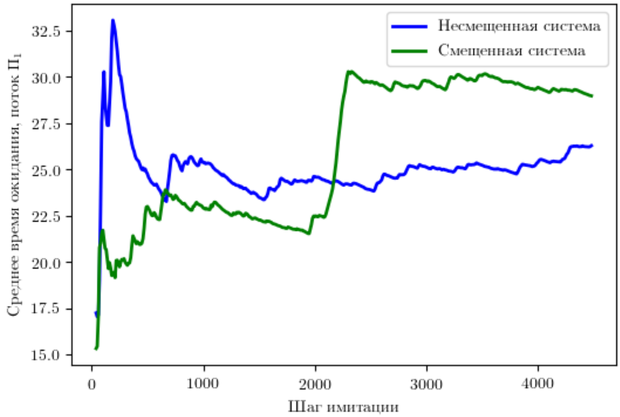

Рис. 4 — Динамика среднего времени ожидания произвольного требования потока Π_1. Система со стационарным режимом

ковость, проведена классификация состояний и найдено достаточное условие существования стационарного распределения.
4) Найдено условие ограниченности для последовательности математических ожиданий $\{(E\varkappa_{4,i}); i \geqslant 0\}$.
5) На основе имитационной модели расширены результаты, полученные теоретически.

Список публикаций по теме диссертации

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации и включенных в перечень международных баз цитирования (Web of Science, Scopus):

1. Kocheganov V.M., Zorine A.V. Low-priority queue fluctuations in tandem of queuing systems under cyclic control with prolongations // Communications in Computer and Information Science — Vol. 601. — 2016. — Pp. 268–279.
2. Kocheganov V.M., Zorine A.V. Low-priority queue and server's steady-state existence in a tandem under prolongable cyclic service // Communications in Computer and Information Science. — V. 678. — 2016. — Pp. 210–221.
3. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. — 2018. — № 2. — С. 49–74.
4. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Статистический анализ и оптимизация тандема систем массового обслуживания в классе циклических

алгоритмов с продлением // Управление Большими Системами: сборник трудов. — 2019. — № 78. — С. 122 –148.

5. Кочеганов В.М. Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2020. — Т.20 — В.2. — С. 257–265.

Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ:

6. Кочеганов В.М. Статистический анализ тандема перекрестков с циклическим алгоритмом и алгоритмом с продлением: А. с. № 2019612786, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 27 февраля 2019 г. — 2019.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК Российской Федерации для защиты по смежным специальностям:

7. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания // Вестник Волжской государственной академии водного транспорта. — 2017. — № 50. — С. 47–55.
8. Кочеганов В.М. Анализ тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением // Теория вероятностей и ее применения. — М.: Наука, 2020. — Т.65 — В.1 — С. 169–170.

Публикации в иных научных изданиях:

9. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Вероятностная модель тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Материалы Международной научной конференции. — Минск: РИВШ, 2015 — С. 94–99.
10. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Дискретная модель колебания длины низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания при циклическом алгоритме с продлением // IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем»: Москва и Подмосковье, 20–22 мая 2015 г.: Труды / Отв. ред. В.Б. Алексеев, Д.С. Романов, Б.Р. Данилов. — М: МАКС Пресс, 2015. — С. 126–129.
11. Kocheganov V.M., Zorine A.V. Low-priority queue fluctuations in tandem of queuing systems under cyclic control with prolongations // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015): материалы Восемнадцатой международной научной конференции. — М.: ИПУ РАН, 2015. — С. 136–143.
12. Kocheganov V.M., Zorine A.V. Low-priority queue and server's steady-state existence in a tandem under prolongable cyclic service // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управ-

ление, вычисление, связь (DCCN-2016): материалы Девятнадцатой международной научной конференции: в 3 томах, под общей редакцией В.М. Вишневского и К.Е. Самуйлова. — М.: РУДН, 2016. — С. 232–239.

13. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Анализ потоков первичных требований в тандеме при циклическом управлении с продлением // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2017). Материалы XVI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (29 сентября – 3 октября 2017 г.). — Т. 1. — Томск: Изд-во НТЛ. — 2017. — С.81–87.
14. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Изучение процесса управления потоками первичных требований в тандеме систем обслуживания с циклическим алгоритмом с продлением // Проблемы теоретической кибернетики: XVIII международная конференция (Пенза, 19–23 июня 2017 г.). Материалы: под редакцией Ю.И. Журавлева. — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 135–137.
15. Kocheganov V., Zorine A. Primary input flows in a tandem under prolongable cyclic service // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2017). Материалы Двадцатой международной научной конференции: под общ. ред. В.М. Вишневского. — М: ТЕХНОСФЕРА, 2017. — Pp. 517–525.
16. Kocheganov V., Zorine A. Asymptotic properties of service and control operations in tandem systems with cyclic algorithms with prolongation //IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM-2018). — Vol. 1. —2018. — Pp. 337–342
17. Кочеганов В.М. Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019). Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (26 июня – 30 июня 2019 г.). — Томск: Изд-во НТЛ, 2019. — С. 195 –200.

Кочеганов Виктор Михайлович

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИИ ОБСЛУЖИВАНИЯ КОНФЛИКТНЫХ ПОТОКОВ В ТАНДЕМЕ С ЗАДЕРЖКОЙ ПО ЦИКЛИЧЕСКОМУ АЛГОРИТМУ С ПРОДЛЕНИЕМ

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать ___.___._____. Заказ № ____________

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография ______________________________________