

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

На правах рукописи

Кочеганов Виктор Михайлович

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИИ ОБСЛУЖИВАНИЯ
КОНФЛИКТНЫХ ПОТОКОВ В ТАНДЕМЕ С
ЗАДЕРЖКОЙ ПО ЦИКЛИЧЕСКОМУ АЛГОРИТМУ С
ПРОДЛЕНИЕМ**

Специальность 01.01.09 —

«Дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, доцент
Зорин Андрей Владимирович

Нижний Новгород — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Построение вероятностной модели тандема	20
1.1 Постановка задачи на содержательном уровне	20
1.2 Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде абстрактной управляющей системы Ляпунова–Яблонского	27
Глава 2. Анализ стохастической последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i), i \geq 0\}$	42
2.1 Свойство марковости последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i), i \geq 0\}$	42
2.2 Классификация состояний управляющей системы Ляпунова–Яблонского как марковской цепи	48
Глава 3. Анализ первичных и промежуточной очередей системы	74
3.1 Условия ограниченности очереди O_4	74
3.2 Рекуррентные соотношения для производящих функций последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$	76
3.3 Достаточное условие существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$	83
3.4 Необходимое условие существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$	88
3.5 Достаточное условие существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$	94
Глава 4. Исследование системы управления тандемом с помощью имитационной модели	106
4.1 Описание имитационной модели	106
4.2 Алгоритм определения момента достижения квазистационарного режима	110
4.3 Показатели качества работы системы	112
4.4 Анализ области стационарности системы	114

Заключение	119
Список литературы	121
Приложение А. Результаты экспериментов	138

Введение

Актуальность темы исследования. С каждым годом количество задач, в которых требуется применение математических методов для выбора некоторого оптимального решения, постоянно растет. Создание автоматизированных систем практически невозможно без предварительного исследования управляемого процесса методами математического моделирования. Подобного рода проблемы попадают в сферу ответственности такой науки как исследование операций. Однако предмет изучения данной дисциплины весьма широк и в разных источниках трактуется по-разному. Например, книга Е.С. Вентцель [88] начинается со следующего объяснения термина «исследование операций»: «Под этим термином мы будем понимать применение математических, количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности». Далее в книге Е.С. Вентцель раскрывается понятие «решения» как выбор действия для достижения конкретной цели с применением того или другого математического аппарата. В качестве примера задачи исследования операций в этой книге приводится задача из теории очередей: библиотечное обслуживание. В фондах библиотеки имеется большое количество литературы разной тематики и для удовлетворения запросов абонентов нужно разработать оптимальную схему обслуживания.

В книге [38] появление научной отрасли под названием «исследование операций» связывается с созданием больших корпораций, управление которыми породило качественно новые задачи для руководства. Отдельные части компаний становятся крупнее, обрастают своими целями, нетривиальным образом коррелируемыми с общей целью компании. С этим связана проблема выделения ресурсов для того или иного подразделения компании для достижения наиболее выгодного существования всей компании в целом. Так или иначе, на сегодняшний момент существует множество литературы, в которой дается последовательное изложение современного состояния исследования операций и, в том числе, ее важной подобласти — теории очередей (см., например, книги [14; 29; 38; 55; 87; 88; 143]).

Теория массового обслуживания (теория очередей) предоставляет математический аппарат для анализа систем, в которых имеется операция по обслуживанию («обработка») некоторых объектов при наличии случайных фак-

торов. При этом тип обслуживания и самих объектов не имеет значения, что делает область применения этой дисциплины достаточно широкой: системы связи, автоматические линии производства, системы медицинского обслуживания, системы управления транспорта и т.д. В роли объектов могут выступать, например, абоненты, заявки, требования.

Математический аппарат теории очередей эволюционировал на протяжении всего 20-го века. Так, в начале 1930-х годов разработанная математическая теория случайных процессов позволила строить модели в более компактном виде, нежели в виде большого числа дифференциальных и интегральных уравнений для вероятностей или плотностей распределений, как делали до этого. Потребность в управлении и оптимизации систем массового обслуживания побудила исследователей взглянуть на построение моделей с позиций исследования операций и теории управляющих систем.

Первые исследования в области систем массового обслуживания были сделаны А.К. Эрлангом [23; 24], Ф.В. Йохансенем [42] и Ф. Поллачеком [137]. Из физических соображений ими были составлены интегральные и дифференциальные уравнения для функции распределения числа занятых линий и времени ожидания на телефонной станции. Найденные формулы создали базу для будущего развития теории. Дальнейший вклад в развитие теории очередей внесли следующие зарубежные и отечественные ученые: К. Пальм, Д.Дж. Кендалл, Д. Линдли, Л. Такач, Д.Р. Кокс, У.Л. Смит, Т.Л. Саати, Л. Клейнрок, Н.Т.Дж. Бейли, А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин, Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, С.Н. Бернштейн, Н.П. Бусленко, А.А. Боровков, В.С. Королюк, Г.П. Башарин, Г.П. Климов, Ю.В. Прохоров, А.Д. Соловьев, Б.А. Севастьянов и др. Краткое представление об истории вопроса можно составить, ознакомившись с монографиями, журнальными обзорами, например, [4; 43; 73; 76; 81; 113; 114]. Технологический прогресс конца XX века привел к развитию таких направлений, как сети массового обслуживания и тандемы систем массового обслуживания [40; 57; 82; 108]. Сегодня класс задач, к которым применимы методы теории очередей, становится еще шире: медицинское и банковское обслуживание, управление информационным и транспортным трафиками и т.п. (см., например, работы [36; 37; 56; 58; 83; 85]).

При изучении любой реальной системы математическими методами первоочередным является этап построения модели. Однако на каком бы этапе развития ни находилась та или иная теория, для получения качественно новых

результатов часто не обойтись без расширения существующего математического аппарата. При построении моделей в теории массового обслуживания таким расширением стали в 1930-х годах аксиоматизация теории вероятностей и появление теории случайных процессов (см. работу [115]). Создание аксиоматизированного понятия случайного процесса сформировало общий подход к исследованию систем массового обслуживания, который принято называть классическим (см. работу [154]). Для задания математической модели системы, исходя из содержательного смысла задачи, задаются следующие обязательные элементы: входящий поток, закон формирования очереди, емкость очереди, количество приборов обслуживания и закон обслуживания произвольного требования. Под состоянием системы при таком подходе естественно понимать количество требований в очередях. Однако для получения глубоких результатов важно, чтобы изучаемый процесс поддавался аналитике и был, например, марковским. В книге [81] представлены основные приемы выделения из заданной модели процессов с марковским свойством. Так или иначе, исходя из содержательной постановки задачи, исследователем явно выписываются уравнения для распределений вероятностей интересующего случайного (марковского) процесса.

На основе классического подхода был произведен анализ многих видов систем массового обслуживания. Во-первых, это системы с одним, несколькими, а также неограниченным числом обслуживающих приборов (см. [13; 70; 142]). Далее рассматривались как системы с пуассоновскими входными потоками требований, так и системы с более сложной структурой, например, дважды стохастические входные потоки (см. [35; 53; 86]), то есть допускающие изменение мгновенной интенсивности во времени в соответствии с заданным стохастическим процессом. В некоторых системах для требований предполагается возможность уходить на «орбиту» в случае отсутствия свободных приборов, то есть требования через случайное время после первой попытки запрашивают обслуживание снова (см. [25]).

Также известны и достаточно сложные технические системы, в которых требования неоднородны и потоки требований разных типов оказываются конфликтными. Конфликтность означает, что в каждый момент времени могут обслуживаться требования не более чем из одного потока. Примерами таких систем являются пересечение транспортных магистралей — перекрестки, взлетно-посадочные комплексы в аэропортах, локальные вычислительные сети и сети передачи данных. В конфликтных системах обслуживания обслу-

живающее устройство с необходимостью выполняет функцию управления потоками. В существующей литературе алгоритмы управления конфликтными потоками делятся на два типа: независящие от состояния системы (см. работы [11; 12; 17; 54; 68; 134]) и зависящие от нее (см. работы [27; 59; 133; 150]). В частности, в работе Ю.И. Неймарка и М.А. Федоткина [134] строится модель перекрестка, для которого длительности сигналов светофора фиксированы, и находятся вероятностные характеристики стационарного режима. В работе [133] авторы изучают алгоритм, учитывающий информацию о количестве машин в очередях в момент принятия решения. Обобщение на случай произвольного числа конфликтных потоков впервые было осуществлено в статье [161].

Тандемы систем массового обслуживания широко используются при моделировании компьютерных и коммуникационных систем, колл-центров, аварийных служб, при планировании их мощностей, производительности и последующей оптимизации работы. Тандем является простейшей сетью из нескольких приборов, в которой заявка после обслуживания одним устройством поступает в очередь на обслуживание следующим устройством. Одной из первых работ, посвященных тандемам систем массового обслуживания, является работа [57]. В ней изучается распределение времени пребывания требования в системе с двумя обслуживающими устройствами. В предположении, что промежутки времени между поступлениями заявок в систему и времена обслуживания независимы и имеют экспоненциальные законы распределения, было показано, что время ожидания требования в очереди первого прибора стохастически не зависит от его времени ожидания в очереди второго прибора. Основные результаты теории тандемов в случае простейших стационарных входных потоков и экспоненциального времени обслуживания широко представлены, например, в работах [9; 30]. Модели с неэкспоненциальным временем обслуживания рассмотрены в работах [31–33]. Более общие модели включают в себя так называемые ВМАР (Batch Markovian Arrival Process) входные потоки, особенностью которых является наличие корреляции количества пришедших требований в различные моменты времени. Такие потоки рассмотрены, например, в работах [7; 84; 110–112], где проведены аналитические расчеты условий стационарности и изучено поведение некоторых характеристик обслуживания для некоторых частных видов входных потоков и распределений времени обслуживания для двухфазных (тандемных) систем, в том числе с повторными попытками и нетерпеливыми требованиями.

В связи со стремительным ростом числа машин в современных городах, все больший интерес стала представлять теория потоков транспортных средств. Результаты ранних исследований по этой тематике собраны, например, в книгах [21; 36; 39]. Потоки машин обычно моделируются с помощью традиционных стохастических потоков событий, весьма полно изученных в классической теории массового обслуживания. Динамика, обусловленная возможностью съезда машин с трассы, рассматривается в работах [2; 3; 69]. Основным объектом изучения в этих работах является плотность потока машин как функция от расстояния, на основе которой делаются выводы о пропускной способности перекрестков.

Управление уличным движением с помощью светофоров привело к исследованиям систем массового обслуживания с переменной структурой обслуживающего устройства. Работы М.Г. Теплицкого [144; 145] содержат одни из первых исследований в этом направлении. М.А. Федоткин и Ю.И. Неймарк в своих работах [134; 149] рассматривают управление потоками автомобилей на перекрестке, используя аппарат математической кибернетики и теории массового обслуживания. В данной системе путем изменения сигнала автомата-светофора возможно управлять режимами обслуживания входных потоков. Был найден оптимальный набор параметров управления для автомата-светофора. В работе [135] анализ системы проводится с применением методов имитационного моделирования, поскольку аналитическое исследование вызывает большие сложности. В более поздних работах рассматривались, например, такие алгоритмы изменения состояния обслуживающего устройства, как циклический алгоритм (работы [52; 101; 139; 156]), алгоритм с петлей (например, работа [107]) и алгоритм с упреждением (например, работа [127]). Адаптивные алгоритмы управления конфликтными потоками рассматривались в работах [128; 130]. В контексте решения задач более специфичных для области исследования операций отметим следующие публикации: в работе [22] исследуется линейный управляющий алгоритм, в работе [34] — адаптивный алгоритм с информацией о размере очередей, в работе [20] — гибридный алгоритм (алгоритм с упреждением и алгоритм с обратной связью), в работах [16; 50; 60; 61] рассматриваются комбинации нескольких адаптивных алгоритмов.

С самых истоков становления теории массового обслуживания перед исследователями, среди прочего, стояла оптимизационная задача. Так, например, в упомянутой выше работе А.К. Эрланга ставилась задача поиска оптимально-

го (минимального) числа телефонных линий для удовлетворительного обслуживания абонентов. Как отмечалось выше, в терминах дисциплины исследования операций действие по обслуживанию требований является «операцией» над некоторыми абстрактными объектами (абонентами, заявками, требованиями), эффективность осуществления которой является одним из предметов исследования. При этом операция по обслуживанию зачастую выполняется под действием как детерминированных, так и случайных факторов. В качестве критериев эффективности операции обслуживания обычно выступают вероятность простоя обслуживаемых устройств, среднее время пребывания требования в системе, вероятность отказа устройства, средняя длина очереди, среднее количество занятых устройств и т.д. С учетом названных критериев формируется конечный функционал, оптимизация которого и является главной целью. Примерами работ, в которых задача теории массового обслуживания ставится в терминах исследования операций, являются [8; 28; 79].

С точки зрения учебной литературы, теория массового обслуживания также является неотъемлемой и устоявшейся ветвью исследования операций. Классические учебники (см. [14; 38; 55; 143] и др.) по исследованию операций включают в себя разделы про марковские цепи, случайные процессы и теорию массового обслуживания (теорию очередей). Наряду с базовыми понятиями линейного программирования и теории игр в учебниках вводится марковская цепь, определяются основные классы ее состояний и рассматриваются вопросы эргодичности. Обобщения марковской цепи строятся посредством случайных процессов: марковских или процессов рождения и гибели. Далее этот материал обычно применяется в разделе теории массового обслуживания. Инструменты для аппроксимации построенных вероятностных моделей, как правило, предоставляются в учебниках по исследованию операций в разделе с названием «имитационное моделирование» («simulation»).

Решение оптимизационных задач в теории массового обслуживания породило понятие управляемой системы массового обслуживания, введенное в 1967 г. в работе О.И. Бронштейна и В.В. Рыкова [77]. В обзоре [140] 1975 г. В.В. Рыковым была проведена классификация таких систем и указана связь теории массового обслуживания с существовавшими на тот момент исследованиями в области управляемых случайных процессов. Под управляемой системой понимается любая система, хотя бы одна из составляющих (элементов) которой допускает применение управляющих воздействий. При этом основными элемен-

тами системы являются: 1) входящий поток требований; 2) длительности и механизм обслуживания; 3) структура системы; 4) дисциплина обслуживания. К примеру, для задачи об обслуживании клиентов на телефонной станции управление может быть применено к механизму обслуживания путем изменения количества обслуживающих операторов, а для задачи обслуживания автомобилей на перекрестке возможно управлять длительностью обслуживания требований для конкретного потока. Некоторые примеры управляемых систем массового обслуживания также представлены в работах [80; 132; 141].

Для решения сформулированных выше задач применялся, как правило, классический подход. Данный подход, имея в своем арсенале мощный аппарат теории вероятностей и случайных процессов, предполагает подробнейшее описание элементов математической модели и, в частности, описание характеристик каждой заявки в отдельности. Такое «локальное» задание потоков заявок обычно осуществляется при помощи следующих математических объектов: распределение длин интервалов между поступлениями заявок, целочисленный считающий процесс, точечный процесс или случайная мера (см. работы [41; 109; 136; 154; 159]). Однако цена такого подробного описания — ограниченное количество реальных систем, для которых исследователь способен провести анализ или хотя бы построить строгую математическую модель. Так, например, при анализе потоков автотранспортных средств (см. работы [10; 151]) интервалы между моментами поступления автомобилей к стоп-линии перекрестка оказываются статистически зависимыми. Данный факт следует из пространственной неоднородности транспортных потоков: при возникновении в потоке «медленного» автомобиля за ним образуется «пачка» автомобилей движущихся следом. Описание такого рода потоков довольно сложно построить, наблюдая за каждым отдельно взятым автомобилем. Данная проблема тесно связана с недостаточной разработанностью в настоящее время теории выходящих потоков: хорошо исследованы свойства выходящего потока только для простейших систем обслуживания. В работе [76] представлена сводка методов и результатов анализа выходящих потоков некоторых систем.

В контексте тандемов управляющих систем незнание характеристик выходящего потока одной подсистемы равносильно незнанию структуры входящего потока для следующей подсистемы, что существенно затрудняет анализ исследования всего тандема в целом. Такое незнание зачастую компенсируется предположением о мгновенности перемещения требований между узлами системы,

что накладывает существенные ограничения на применимость результатов в реальных задачах. К примеру, в работах [1; 69] проводился анализ управления движением автомобилей между последовательными перекрестками. Предположение о небольшом расстоянии между перекрестками позволяло пренебречь временем движения между ними. В случае отсутствия допущения о мгновенном перемещении требований анализ системы существенно затрудняется. Так, например, в работе [65] исследуются задержки автомобилей на смежных перекрестках. Вследствие сложности построенной математической модели, для анализа системы был выбран метод имитационного моделирования.

Также при задании стохастических связей между элементами системы, которым должна подчиняться управляющая система, исследователь зачастую сталкивается со сложными задачами теории управляемых процессов. Кроме того, при анализе одновременно нескольких управляющих систем, их приходится задавать на едином унифицированном вероятностном пространстве. Все это существенно увеличивает сложность задачи.

Качественно новая методика к построению математических моделей управляющих систем массового обслуживания была предложена М.А. Федоткиным в работах [146; 154] и существенно доработана А.В. Зориным в работах [101; 105; 106] и [107]. Методика основана на понятии абстрактной управляющей системы, введенном А.А. Ляпуновым и С.В. Яблонским в работе [131], и также носит название кибернетического подхода. Основными принципами подхода являются: 1) наблюдение за системой происходит в дискретные моменты времени; 2) управляющая система разделяется на логические блоки, между которыми определяются функциональные и стохастические связи при их взаимодействии во времени; 3) описание блоков системы должно быть нелокальным. В качестве блоков управляющей системы выделяют следующие: входные полюса, внешняя память, блок по переработке внешней памяти, внутренняя память, блок по переработке внутренней памяти, выходные полюса и внешняя среда. Некоторые из перечисленных блоков могут быть опущены при исследовании вследствие их вырожденности. Так, например, в работе [157] случайная среда имеет всего одно состояние, а в работе [105] — несколько, поэтому блок со случайной средой во второй работе учитывается, а в первой — нет. Рассмотрение систем с позиции абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского позволяет исследовать их с единой позиции: разделяя системы на составные блоки, описывая каждый из них и вводя функционально-статистические связи между

ними. Это существенно упрощает анализ уже известных систем, а также делает возможным исследование новых и более сложных. Кроме того, стало более естественным независимое рассмотрение подсистем и изучение их свойств отдельно от основной модели. Так, в работах [26; 147] исследуется процесс формирования автомобильных «пачек» на дорогах как независимая система массового обслуживания. А в работах [139; 148] изучались выходящие потоки систем массового обслуживания с циклическим алгоритмом управления входными пуассоновскими потоками и потоками Гнеденко–Коваленко.

Аппарат абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского был удачно применен к анализу неклассических конфликтных управляющих систем массового обслуживания А.В. Зориным в работах [89–100; 102; 103]. В частности, была построена математическая модель для системы управления неординарными конфликтными потоками, формируемыми во внешней среде, в классе алгоритмов с переналадками и разделением времени, а также циклических алгоритмов с продлением. Была построена модель для системы управления неординарными рекуррентными потоками в классе циклических алгоритмов при наличии переналадок. Кроме того, отметим, что исследовать систему последовательных перекрестков с различными усложнениями стало возможным только с точки зрения абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского. Так, модель тандема перекрестков с немгновенным перемещением машин между ними была впервые предложена в работах [66; 67; 97]. В рассматриваемых там моделях динамика перемещения машин от одного перекрестка к другому задается бернулиевской случайной величиной: каждая машина с некоторой фиксированной вероятностью $0 < p < 1$ успевает доехать до следующего перекрестка и с противоположной вероятностью $1 - p$ остается «между» ними. В работах автора [44–49; 116; 118–126] с точки зрения управляющей системы Ляпунова–Яблонского построена и исследована математическая модель тандема перекрестков с немгновенным перемещением автомобилей и циклическим алгоритмом управления светофором с продлением. Поскольку многие реальные системы могут быть представлены в виде конфликтной управляющей системы Ляпунова–Яблонского, то исследования в данной области являются актуальными.

Аппарат абстрактных управляющих систем также облегчает асимптотический анализ поведения систем обслуживания. К более ранним работам, в которых исследовалось предельное поведение операционных характеристик (число требований в системе, время ожидания и т.п.) классическими методами, можно

отнести работы [19; 62; 63; 71; 72; 74; 75]. Также представляют большой интерес работы, в которых определяются условия существования стационарного распределения, например, [15; 18; 51; 64]. Основными известными методами здесь принято считать прямое решение уравнений стационарности, применение теоремы эргодичности Мустафы, применение критерия Найквиста-Михайлова. Отличительными особенностями этих методов является отсутствие универсальной последовательности действий при применении их к разным типам исследуемых систем. Существенно новым методом в этом вопросе является итеративно-мажорантный метод, впервые примененный М.А. Федоткиным в контексте абстрактных управляющих систем обслуживания (см. [152; 153]). Отличительными особенностями метода являются относительно легкая проверяемость получаемых условий и алгоритмизованность. Данная методология была успешно применена в задаче исследования перекрестка с приоритетными потоками [138], в задаче изучения системы со случайной внешней средой [105], в задаче адаптивного управления потоками [129] и др. Более глубоко метод был доработан в диссертации А.В. Зорина [106].

Кроме преимуществ при получении аналитических результатов, аппарат управляющих систем Ляпунова–Яблонского дает существенные преимущества при построении имитационных моделей разнообразных систем обслуживания и их численном анализе (см. [104]). Обращаясь к истории вопроса, как правило, для имитации использовался метод дискретных событий, описанный, например, в работах [5; 6; 155; 158]. За наблюдаемые события обычно выбирались изменение состояний обслуживающего устройства, приход в систему или уход из нее каждого отдельного требования и т.д. Генерируемое при этом множество возможных событий формирует исчерпывающее и зачастую избыточное описание процесса обслуживания в системе. Такое локальное описание приводит к потреблению большого количества ресурсов и длительному времени работы при программной реализации построенной имитационной модели. В противовес локальному, нелокальное описание позволяет избежать генерирования больших объемов данных и их длительной обработки. За наблюдаемые события могут браться, к примеру, лишь моменты смены состояний обслуживающих устройств, поэтому нет необходимости анализировать каждое требование отдельно. Благодаря, в частности, нелокальному описанию элементов системы удается построить достоверные оценки интересующих параметров управляющих систем на основе большего числа экспериментов.

Цели и задачи работы. Целями данной работы являются: 1) построение и исследование математической модели тандема управляющих систем обслуживания по циклическому алгоритму с продлением; 2) построение, реализация и анализ имитационной модели систем, осуществляющих циклическое управление с продлением тандемом перекрестков.

Для достижения поставленных целей решаются следующие задачи:

1. Построение строгой вероятностной модели тандема управляющих систем с помощью явного построения вероятностного пространства и поточечного задания необходимых для исследования случайных величин и элементов.

2. Анализ построенной вероятностной модели, получение условий существования стационарного режима в различных подсистемах тандема.

3. Разработка имитационной модели тандема, определение момента достижения системы квазистационарного режима, анализ зависимости условий стационарности от управляющих параметров.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Впервые построена вероятностная модель тандема управляющих систем с немгновенным перемещением требований между ними, управление в которых осуществляется по циклическому алгоритму и алгоритму с продлением. В этой модели требования сначала поступают в первую систему на обслуживание по циклическому алгоритму, а затем немгновенно поступают во вторую систему на обслуживание по циклическому алгоритму с продлением. Немгновенность перемещения моделируется при помощи биномиальной случайной величины с параметром p , имеющим смысл вероятности перехода требования из одной системы в другую за определенный промежуток времени.

2. Впервые применен аппарат абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского для изучения указанной выше системы. Построенная по принципам кибернетического подхода вероятностная модель позволила провести разносторонний анализ системы. В частности, была проведена классификация состояний марковской цепи, описывающей динамику системы, найдены рекуррентные соотношения для соответствующих производящих функций и были изучены эргодические свойства системы. Также, благодаря этому подходу, была построена и реализована имитационная модель для численного анализа системы.

3. Впервые применен итеративно-мажорантный метод для нахождения достаточных условий существования стационарного распределения в указанной выше модели. Благодаря итеративно-мажорантному методу были найдены условия существования стационарного режима для очередей первичных требований, а также для промежуточной очереди.

Теоретическая и практическая значимость. Научная значимость работы заключается в построении строгой вероятностной модели для качественно нового вида управляющей системы и в последовательном исследовании ее эргодических свойств. Успешно примененный в работе метод нелокального описания процессов существенно расширяет множество поддающихся исследованию реальных систем массового обслуживания. Строгая математическая модель позволяет оперировать существующим, хорошо разработанным вероятностным аппаратом для нахождения условий стационарности и нахождения оптимального управления системой. Разработанные модели дают базу для изучения более комплексных тандемных систем, систем с более сложными входными потоками и алгоритмами управления.

Практическая значимость исследования состоит в том, что изученная управляющая система является адекватным описанием реальной системы тандема перекрестков, а также других сетей, состоящих из двух узлов с перемещающимися между ними требованиями и циклическими алгоритмами обслуживания с продлением на узлах.

Методология и методы исследования. В диссертации применяется аппарат теории вероятностей, теории массового обслуживания, исследования операций, теории управляемых марковских процессов. Также применяются методы теории линейных отображений, математической статистики и теории функций комплексного переменного. При реализации имитационной модели на компьютере использовались языки программирования C++, Python.

Методология диссертации основывается на представлении стохастических систем массового обслуживания в виде абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского. Использование данной методологии позволяет разделить исследуемые системы на составные части (блоки), описать эти части математически, задать правила их функционирования и взаимодействия между собой. Для описания входных потоков было применено нелокальное описание.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Методика построения вероятностного пространства для тандема систем обслуживания по циклическому алгоритму с продлением и задержкой требований между ними.

2. Методика определения условий существования стационарного режима в системах управления неординарными пуассоновскими потоками требований с использованием циклического алгоритма и алгоритма с продлением.

3. Методика определения фазы квазистационарного режима управляющей системы обслуживания тандемного типа.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обеспечивается строгим применением используемого математического аппарата, проведением и сравнением статистических и численных исследований. Результаты работы находятся в соответствии с результатами, полученными ранее другими авторами при исследовании управляющих систем обслуживания.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих конференциях.

1. Международная научная конференция «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения» (Минск, Республика Беларусь, 2015 г.).
2. IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 2015 г.).
3. 8-я международная научная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2015 (Москва, 2015 г.).
4. Международная научная конференция «Distributed Computer and Communication Networks» DCCN 2016 (Москва, 2016 г.).
5. XVIII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 2017 г.).
6. XVI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ-2017 (Казань, 2017 г.).
7. 20-я международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2017 (Москва, 2017 г.).

8. IX Московская международная конференция по исследованию операций (Москва, 2018 г.).
9. Четвертая международная конференция по стохастическим методам МКСМ-4 (пос. Дивноморское, г. Новороссийск).
10. XVIII Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ-2019 (Саратов, 2019 г.).

Личный вклад автора. В совместных публикациях научному руководителю принадлежит постановка задачи и общее редактирование работ. Все исследования выполнены автором диссертации лично, все полученные результаты принадлежат автору.

Соответствие паспорту специальности. Диссертационная работа выполнена в соответствии с паспортом специальности 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика» и включает оригинальные результаты в области дискретной математики и математической кибернетики.

Исследование, приведенное в работе, соответствует следующим разделам паспорта специальности:

- пункт 4 (Математическая теория исследования операций и теория игр) — построена и изучена математическая модель для новой системы массового обслуживания методами теории исследования операций;
- пункт 2 (Теория управляющих систем) — математическая модель исследуемой системы представлена в виде абстрактной управляющей системы Ляпунова–Яблонского и построена на базе принципов кибернетического подхода.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 17 работах, 5 из них — в журналах, рекомендованных ВАК ([118;119;123;125;126]), 2 — в библиографической базе Scopus, 2 — в библиографической базе Web of Science, 13 — в библиографической базе РИНЦ ([45–48; 116; 118; 119; 121–126]), 10 — в тезисах докладов ([44; 46; 48; 49; 116; 118; 120–122; 124]). Получено 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [117].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 143 страницы, включая 18 рисунков. Список литературы содержит 161 наименование.

В разделе 1.1 главы 1 задача управления системой ставится на содержательном уровне. На первом этапе задача формулируется в терминах теории массового обслуживания: описываются входные потоки, вид имеющихся очередей, обслуживающее устройство и т.п. Особое внимание уделяется описанию графа переходов обслуживающего устройства, имеющей нетривиальный характер. В качестве наглядной интерпретации системы приводится тандем перекрестков. Далее (раздел 1.2) глава 1 продолжается построением строгой математической модели системы. Данный этап является основополагающим для всего дальнейшего анализа. При построении модели существенно используется понятийный аппарат абстрактных управляющих систем Ляпунова–Яблонского с соблюдением основных принципов: наблюдение за системой совершается в дискретные моменты времени, строятся функциональные и вероятностные соотношения между блоками функционирования системы, а также описание блоков системы производится нелокально.

Исследуемая в работе система характеризуется следующими объектами: одно обслуживающее устройство, которое находится в момент времени $i \geq 0$ в состоянии Γ_i , и четыре очереди, количество требований в которых определяется числами $\varkappa_{1,i}$, $\varkappa_{2,i}$, $\varkappa_{3,i}$ и $\varkappa_{4,i}$, $i \geq 0$. Последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i}); i \geq 0\}$ служит математическим описанием этих объектов. Глава 2 посвящена доказательству марковости этой последовательности, а также классификации ее состояний по арифметическим свойствам переходных вероятностей. Эти результаты позволят в следующей главе доказать марковость и провести классификацию состояний для последовательностей, содержащих только часть из упомянутых пяти компонент.

В главе 3 более подробно изучаются случайные последовательности, содержащие только часть очередей из последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$. Исключение из рассмотрения нескольких компонент пятимерной марковской цепи позволяет найти достаточные, а в особом случае и необходимое условие существования стационарного распределения. Для нахождения условий стационарности используется хорошо зарекомендовавший себя итеративно-мажорантный метод, в котором последовательность математических ожиданий компонент цепи ограничивается последовательностью более простого вида. Ограниченность математических ожиданий вследствие особенностей цепи влечет существование стационарного распределения.

Глава 4 имеет своими целями как подтвердить результаты, полученные аналитически в предыдущих главах, так и расширить их. Для этого была разработана имитационная модель и написана программа для ее исследования. Для определения момента достижения системой стационарного режима подсчитываются различные статистики одновременно двух систем: смещенной, то есть системы с ненулевым количеством требований, и несмещенной, то есть системы с пустыми очередями. Основным показателем качества работы системы выбрана средневзвешенная оценка времени пребывания требования в системе. В завершении главы приведены конкретные эксперименты и анализ их результатов.

Глава 1. Построение вероятностной модели тандема

В разделе 1.1 вопрос об операции управления системой ставится на содержательном уровне. На первом этапе задача формулируется в терминах теории массового обслуживания: описываются входные потоки, виды имеющихся очередей, обслуживающее устройство и т.п. Особое внимание уделяется описанию графа переходов обслуживающего устройства, имеющий нетривиальный характер. В качестве наглядной интерпретации системы приводится тандем перекрестков.

Раздел 1.2 содержит построение строгой математической модели для управляющей системы, которая была представлена в разделе 1.1. Данный этап является основополагающим для всего дальнейшего анализа. При построении модели существенно используется кибернетический подход и его основные принципы: наблюдение за системой совершается в дискретные моменты времени, строятся функциональные и вероятностные соотношения между блоками функционирования системы, а также описание блоков системы производится нелокально.

1.1 Постановка задачи на содержательном уровне

Рассмотрим систему массового обслуживания следующего вида (Рис. 1.1). В систему, осуществляющую операцию по обслуживанию одним обслуживающим устройством, поступают потоки Π_1 , Π_2 , Π_3 и Π_4 . Требования потока Π_j приходят в соответствующую очередь O_j неограниченного объема, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Дисциплина очереди O_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, поддерживается при помощи устройства δ_j и имеет тип «первым пришел — первым ушел» (FIFO). Другими словами, на обслуживание поступает требование, пришедшее раньше остальных. Дисциплина очереди O_4 будет описана ниже. Будем предполагать, что внешняя среда, формирующая входные потоки Π_1 и Π_3 , имеет только одно состояние, то есть вероятностная структура потоков не меняется с течением времени. Входящие потоки требований Π_1 и Π_3 являются неординарными пуассоновскими потоками, то есть ординарными, стационарными и без последствия потоками

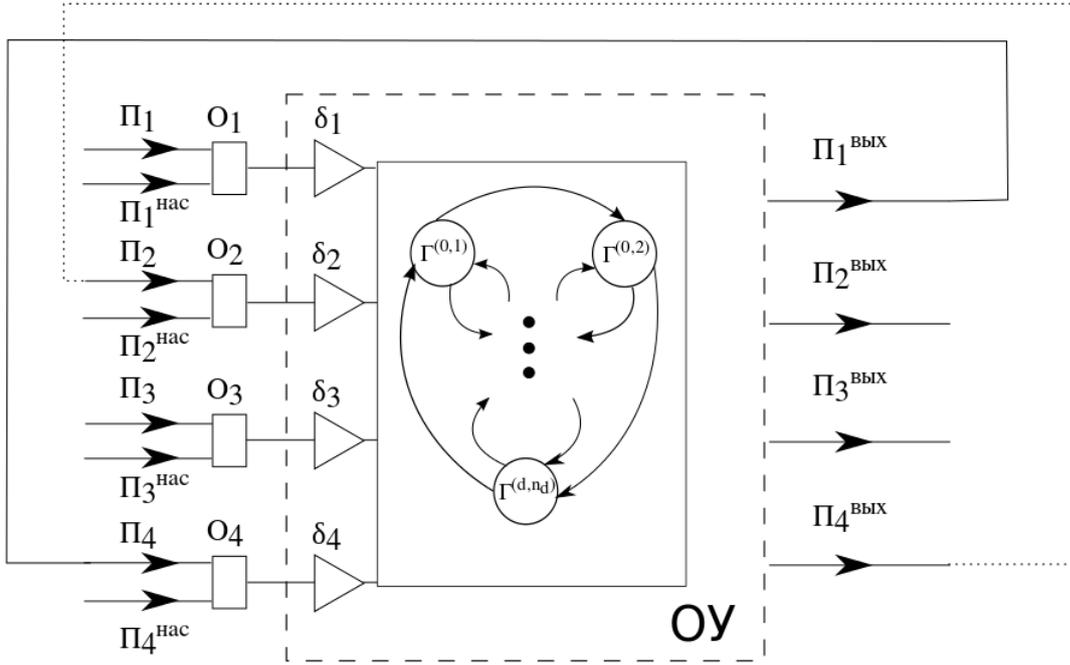


Рисунок 1.1 — Структурная схема системы обслуживания

групп требований. Соответствующие простейшие потоки для Π_1 и Π_3 имеют интенсивности λ_1 и λ_3 . При помощи следующей производящей функции зададим распределение количества заявок в группе по потоку Π_j :

$$f_j(z) = \sum_{v=1}^{\infty} p_v^{(j)} z^v, \quad j \in \{1, 3\}. \quad (1.1)$$

Функцию $f_j(\cdot)$, $j \in \{1, 3\}$, будем предполагать аналитической при всех $z \in \mathbb{C}$ таких, что $|z| < (1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Величина $p_v^{(j)}$ задает вероятность того, что по потоку Π_j число требований в группе равно v . После обслуживания требования потока Π_1 повторно поступают в систему для обслуживания, формируя при этом поток Π_4 . Затем, обслуженные требования потока Π_4 поступают на еще одно повторное обслуживание, создавая при этом поток Π_2 . Потоки Π_2 и Π_3 являются конфликтными, что означает запрет на одновременное обслуживание требований этих потоков и, следовательно, исследование системы не может быть сведено к задаче с меньшим числом потоков.

Входящие потоки требований Π_1 и Π_3 , формируемые внешней средой, и соответствующие им очереди O_1 и O_3 будем называть первичными. Потоки требований Π_2 и Π_4 , формируемые в результате обслуживания требований потока Π_1 , как и соответствующие им очереди O_2 и O_4 будем называть промежуточными.

Обслуживающее устройство в каждый момент времени может находиться в одном из множества состояний $\Gamma = \{\Gamma^{(k,r)} : k = \overline{0, d}; r = \overline{1, n_k}\}$ с заданными натуральными числами d, n_0, n_1, \dots, n_d . В каждом состоянии $\Gamma^{(k,r)}$ обслуживающее устройство находится в течение времени $T^{(k,r)}$. Выделим из множества Γ подмножества $\Gamma^I, \Gamma^{II}, \Gamma^{III}$ и Γ^{IV} следующим образом. В состоянии $\gamma \in \Gamma^I$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_2 и O_4 . В состоянии $\gamma \in \Gamma^{II}$ обслуживаются только требования из очередей O_2 и O_4 . В состоянии $\gamma \in \Gamma^{III}$ обслуживаются только требования из очередей O_1, O_3 и O_4 . В состоянии $\gamma \in \Gamma^{IV}$ обслуживаются только требования из очередей O_3 и O_4 . Тогда множество Γ есть объединение $\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II} \cup \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$ непересекающихся подмножеств. Также в дальнейшем нам понадобятся множества ${}^1\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{III}, {}^2\Gamma = \Gamma^I \cup \Gamma^{II}, {}^3\Gamma = \Gamma^{III} \cup \Gamma^{IV}$.

Смена состояний обслуживающего устройства осуществляется по следующему правилу. Множество состояний $C_k = \{\Gamma^{(k,r)} : r = \overline{1, n_k}\}$ будем называть k -м циклом, $k = \overline{1, d}$ (Рис. 1.2). Состояние вида $\Gamma^{(0,r)}$ будем называть состоянием продления, $r = \overline{1, n_0}$. Положим $r \oplus_k 1 = r + 1$ для $r = \overline{1, n_k - 1}$ и $r \oplus_k 1 = 1$ при $r = n_k, k = \overline{0, d}$. В цикле C_k выделим подмножества C_k^O выходных, C_k^I входных и $C_k^N = C_k \setminus (C_k^O \cup C_k^I)$ нейтральных состояний. Тогда после состояния $\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O$ обслуживающее устройство переходит в состояние $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$ того же цикла C_k . При $\Gamma^{(k,r)}$, принадлежащем множеству C_k^O , прибор переходит в состояние $\Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}$, если число требований в очереди O_3 в момент переключения больше заданного порога L . В противном случае, то есть если число требований в очереди O_3 меньше либо равно L , новое состояние прибора будет состоянием продления $\Gamma^{(0,r_1)}$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k,r)})$ и $h_1(\cdot)$ — заданное отображение множества $\bigcup_{k=1}^d C_k^O$ во множество $\{1, 2, \dots, n_0\}$. После состояния $\Gamma^{(0,r)}$ выбирается состояние того же вида $\Gamma^{(0,r_2)}$, если число требований в очереди O_3 меньше или равно L , где $r_2 = h_2(r)$ и $h_2(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \dots, n_0\}$ на себя; в противном случае включается входное состояние $\Gamma^{(k,r_3)} \in C_k^I$, где $\Gamma^{(k,r_3)} = h_3(r)$ и $h_3(\cdot)$ — заданное отображение множества $\{1, 2, \dots, n_0\}$ на множество $\bigcup_{k=1}^d C_k^I$. Считается, что все состояния продления $\Gamma^{(0,r)}$ принадлежат множеству ${}^2\Gamma$, а также верны соотношения $C_k^O \subset {}^2\Gamma$ и $C_k^I \subset {}^3\Gamma$. Также будем предполагать, что все циклы имеют ровно одно входное и одно выходное состояние. И последним предположением является то, что все вершины продления образуют один цикл, то есть можем положить $h_2(r) = r \oplus_0 1$.

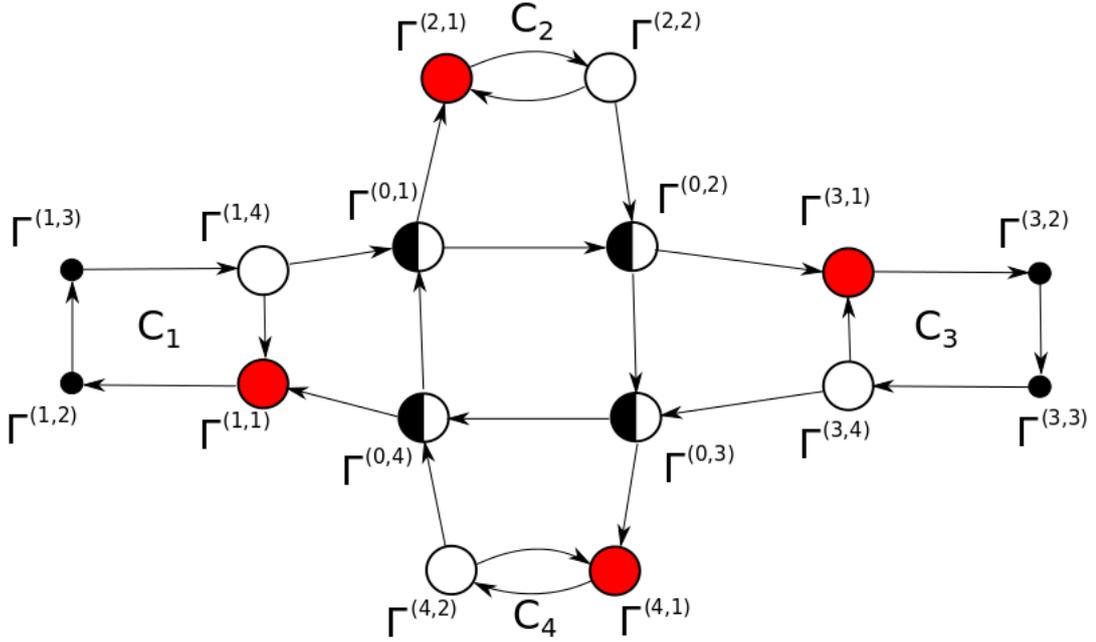


Рисунок 1.2 — Класс графов переходов. Незакрашенные вершины являются выходными вершинами, большие закрашенные вершины — входные, небольшие закрашенные — нейтральные, наполовину закрашенным вершинам соответствуют состояния продления

Таким образом, смена состояний обслуживающего устройства задается соотношением:

$$h(\Gamma^{(k,r)}, y) = \begin{cases} \Gamma^{(k,r \oplus_k 1)}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k \setminus C_k^O) \\ & \text{или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } y > L); \\ \Gamma^{(0, h_1(\Gamma^{(k,r)}))}, & \text{если } \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \text{ и } y \leq L; \\ \Gamma^{(0, r \oplus_0 1)}, & \text{если } k = 0 \text{ и } y \leq L; \\ h_3(r), & \text{если } k = 0 \text{ и } y > L. \end{cases} \quad (1.2)$$

Рассмотрим введенные обозначения для входных, выходных и нейтральных состояний на примере рис. 1.2. Входными состояниями обслуживающего устройства являются $\Gamma^{(1,1)} \in C_1^I$, $\Gamma^{(2,1)} \in C_2^I$, $\Gamma^{(3,1)} \in C_3^I$ и $\Gamma^{(4,1)} \in C_4^I$, выходные состояния — $\Gamma^{(1,4)} \in C_1^O$, $\Gamma^{(2,2)} \in C_2^O$, $\Gamma^{(3,4)} \in C_3^O$ и $\Gamma^{(4,2)} \in C_4^O$, нейтральные состояния — $\Gamma^{(1,2)}$, $\Gamma^{(1,3)} \in C_1^N$ и $\Gamma^{(3,2)}$, $\Gamma^{(3,3)} \in C_3^N$. Состояния продления на графе представлены вершинами $\Gamma^{(0,1)}$, $\Gamma^{(0,2)}$, $\Gamma^{(0,3)}$ и $\Gamma^{(0,4)}$. Далее, отображение $h_1(\cdot)$ на графе задано таким образом, что оно переводит, например, выходное состояние $\Gamma^{(1,4)}$ в число 1 — номер состояния продления $\Gamma^{(0,1)}$, то есть $h_1(\Gamma^{(1,4)}) = 1$. Аналогично, например, $h_2(1) = 2$ и $h_2(3) = 4$. Примером отображения $h_3(\cdot)$ является $h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}$.

Предполагается, что длительности обслуживания различных требований могут иметь различные законы распределения и, вообще говоря, быть зависимыми, поэтому вместо привычного способа, состоящего в указании функции распределения длительности обслуживания произвольного требования, будут использованы потоки насыщения. Потоками насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1, 4}$, назовем виртуальные выходные потоки при условии максимального использования ресурсов обслуживающего устройства, а для $j = \overline{1, 3}$ еще и при условии максимальной загрузки соответствующих очередей. Более конкретно, поток насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$, $j = \overline{1, 3}$, содержит неслучайное число $\ell(k, r, j)$ требований, которые были обслужены в течение времени $T^{(k, r)}$, если обслуживающее устройство находилось в состоянии $\Gamma^{(k, r)}$. Пусть \mathbb{Z}_+ — множество целых неотрицательных чисел. Тогда, при условии, что в очереди O_4 находится $x \in \mathbb{Z}_+$ требований, поток насыщения $\Pi_4^{\text{нас}}$ определим как поток, содержащий все x требований. Наконец, при состоянии обслуживающего устройства $\Gamma^{(k, r)}$ каждое требование из очереди O_4 с вероятностью $p_{k, r}$ и независимо от других завершает обслуживание и отправляется в очередь O_2 потока Π_2 . С вероятностью $1 - p_{k, r}$ требование очереди O_4 остается в ней до следующего такта. На следующем такте процесс повторяется.

В качестве наглядной физической интерпретации можно привести тандем из двух перекрестков (рис. 1.3). В качестве потоков требований, формируемых

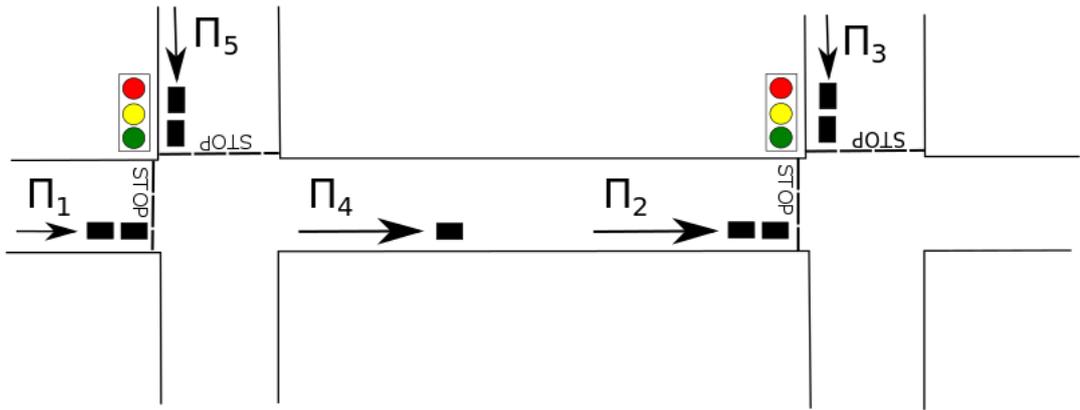


Рисунок 1.3 — Пример: тандем перекрестков

внешней средой, выступают потоки прибывающих на перекрестки машин: конфликтные потоки Π_1 , Π_5 на первом перекрестке, а также поток Π_3 на втором. Каждая машина из потока Π_1 , проезжая первый перекресток, становится в очередь O_4 потока Π_4 и затем с некой вероятностью ($p_{k, r}$ для состояния $\Gamma^{(k, r)}$) обслу-

живающего устройства) доезжает до следующего перекрестка, или же не успевает это сделать и остается в очереди O_4 до следующего такта обслуживания. В случае, если машина из очереди O_4 успевает доехать до второго перекрестка, она становится в очередь O_2 и ждет своей очереди для его прохождения.

Предполагается, что светофор на первом перекрестке имеет лишь два состояния $\{g_{1,1}, g_{1,2}\}$: в состоянии $g_{1,1}$ машины потока Π_1 пропускаются фиксированное количество времени $\tilde{T}^{(1,1)}$ («зеленый» свет для Π_1); в состоянии $g_{1,2}$ — простаивают в течение времени $\tilde{T}^{(1,2)}$ («красный» свет для Π_1). Светофор на втором перекрестке обслуживает по алгоритму с продлением: дополнительно к состоянию обслуживания потока Π_3 (состояние $g_{2,1}$), также имеется два состояния обслуживания потока Π_2 (состояния $g_{2,2}, g_{2,3}$). Первое из них включается всегда после завершения обслуживания потока Π_3 , а второе включается, если после очередного такта обслуживания потока Π_2 длина очереди O_3 не превосходит уровня L . Длительности пребывания светофора на втором перекрестке в каждом из состояний суть $\tilde{T}^{(2,1)}$, $\tilde{T}^{(2,2)}$ и $\tilde{T}^{(2,3)}$.

Рассматривая тандем из двух перекрестков как единую систему массового обслуживания и предполагая наблюдение за ней только в (дискретные) моменты переключения состояния хотя бы одного из светофоров, может быть показано, что количество различных состояний у полученной системы конечно. Действительно, положим, например, за состояние объединенной системы вектор $(g^{(1)}, g^{(2)}, s, t)$, где $g^{(1)} \in \{g_{1,1}, g_{1,2}\}$ — состояние 1-го перекрестка, $g^{(2)} \in \{g_{2,1}, g_{2,2}, g_{2,3}\}$ — состояние 2-го перекрестка, $s \in \{0, 1, 2\}$ — номер последнего сменившего состояние перекрестка (принимает значение 0 в случае, если сменили состояние оба перекрестка) и $t \in \{0, 1, 2, \dots, T\}$ — количество времени, оставшееся у продолжающего обслуживание с прошлого такта перекрестка (принимает значение 0, если принимает значение 0 величина s). Здесь T — максимальная длительность нахождения каждого из светофоров в одном состоянии. Тогда количество различных состояний не трудно посчитать и оно не будет превышать величины $2 \times 3 \times 3 \times T$.

В завершении построения примера отметим, что при прохождении перекрестков машины предполагаются движущимися только в прямом направлении, то есть перемешивания конфликтных потоков не допускается. Таким образом, поток Π_5 не представляет интереса для дальнейшего исследования системы и может быть отброшен и, следовательно, построенный пример целиком удовлетворяет структурной схеме на рис. 1.1.

Теперь продемонстрируем на конкретном числовом примере выделение циклов и состояний продления. Пусть изменение состояний перекрестков и время пребывания (в секундах, для определенности) в каждом из состояний задается графами на рис. 1.4. За начальное состояние объединенной системы примем

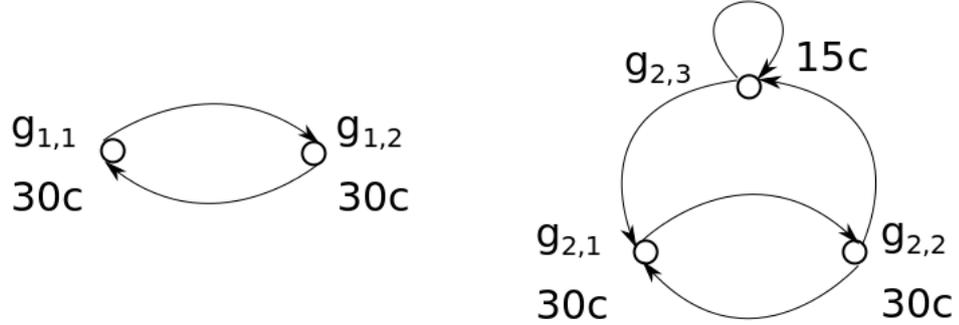


Рисунок 1.4 — Числовой пример тандема перекрестков. Левый граф соответствует первому перекрестку, правый — второму

$\Gamma_0 = (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, то есть первый перекресток находится в состоянии $g_{1,1}$, второй — в состоянии $g_{2,1}$, и оба только начали свою работу в своем состоянии (этот факт моделируется равенствами $s = 0$ и $t = 0$). Следующая смена состояний случится у обоих перекрестков одновременно и приведет к следующему состоянию $(g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0)$. Далее смена состояний произойдет также у первого и второго перекрестков, однако второй перекресток может перейти как в состояние $g_{2,1}$, так и в состояние продления $g_{2,3}$. Таким образом, следующим состоянием тандема будет либо опять $(g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0)$, либо $(g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0)$. Продолжая рассуждения аналогичным образом, получим следующий список всех возможных состояний системы:

$$\begin{aligned}
 (g_{1,1}, g_{2,1}, 0, 0) &= \Gamma^{(1,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,2}, 0, 0) &= \Gamma^{(1,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,3}, 0, 0) &= \Gamma^{(0,1)}, \\
 (g_{1,1}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,2)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 0, 0) &= \Gamma^{(0,3)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,4)}, \\
 (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 2) &= \Gamma^{(4,1)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 1) &= \Gamma^{(4,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 2) &= \Gamma^{(4,3)}, \\
 (g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 1) &= \Gamma^{(4,4)}, & (g_{1,2}, g_{2,3}, 15, 2) &= \Gamma^{(0,5)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 0, 0) &= \Gamma^{(3,1)}, \\
 (g_{1,1}, g_{2,2}, 0, 0) &= \Gamma^{(3,2)}, & (g_{1,1}, g_{2,1}, 15, 2) &= \Gamma^{(2,1)}, & (g_{1,2}, g_{2,1}, 15, 1) &= \Gamma^{(2,2)}, \\
 (g_{1,2}, g_{2,2}, 15, 2) &= \Gamma^{(2,3)}, & (g_{1,1}, g_{2,2}, 15, 1) &= \Gamma^{(2,4)}.
 \end{aligned}$$

В соответствии с приведенными выше обозначениями, множества C_1, C_2, C_3, C_4 , а также множество состояний продления строятся однозначным образом. Множествами входных состояний будут $C_1^I = \{\Gamma^{(1,1)}\}$, $C_2^I = \{\Gamma^{(2,1)}\}$, $C_3^I = \{\Gamma^{(3,1)}\}$

и $C_4^I = \{\Gamma^{(4,1)}\}$. Множествами выходных состояний будут $C_1^O = \{\Gamma^{(1,2)}\}$, $C_2^O = \{\Gamma^{(2,4)}\}$, $C_3^O = \{\Gamma^{(3,2)}\}$ и $C_4^O = \{\Gamma^{(4,4)}\}$. Функции $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ и $h_3(\cdot)$ задаются поточечно:

$$h_1(\Gamma^{(1,2)}) = 1, \quad h_1(\Gamma^{(2,4)}) = 2, \quad h_1(\Gamma^{(3,2)}) = 3, \quad h_1(\Gamma^{(4,4)}) = 5,$$

$$h_2(1) = 2, \quad h_2(2) = 3, \quad h_2(3) = 4, \quad h_2(4) = 1, \quad h_2(5) = 1,$$

$$h_3(1) = \Gamma^{(2,1)}, \quad h_3(2) = \Gamma^{(3,1)}, \quad h_3(3) = \Gamma^{(4,1)}, \quad h_3(4) = \Gamma^{(1,1)}, \quad h_3(5) = \Gamma^{(1,1)}.$$

Этим завершается построение числового примера.

1.2 Представление рассматриваемой системы обслуживания в виде абстрактной управляющей системы Ляпунова–Яблонского

Описанная в предыдущем разделе на содержательном уровне система массового обслуживания должна рассматриваться как абстрактная управляющая система обслуживания (см. [97]). Схема управляющей системы представлена на рис. 1.1. Схема состоит из следующих блоков: 1) входные полюса первого типа — входные потоки $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4$; 2) входные полюса второго типа — потоки насыщения $\Pi_1^{\text{нас}}, \Pi_2^{\text{нас}}, \Pi_3^{\text{нас}}, \Pi_4^{\text{нас}}$; 3) выходные полюса $\Pi_1^{\text{вых}}, \Pi_2^{\text{вых}}, \Pi_3^{\text{вых}}, \Pi_4^{\text{вых}}$; 4) внутренняя память — обслуживающее устройство (ОУ); 5) устройство по переработке информации внутренней памяти — граф смены состояний; 6) внешняя память — очереди O_1, O_2, O_3, O_4 ; 7) устройство по переработке информации внешней памяти — устройства по поддержанию дисциплины очереди $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$; 8) внешняя среда с одним состоянием. Координатой блока является номер этого блока на схеме.

Зададим информацию о блоках с помощью следующих случайных величин и элементов, указав, в том числе, множества их возможных значений. В качестве дискретной временной шкалы выберем последовательность $\tau_0 = 0, \tau_1, \tau_2, \dots$ моментов смены состояния обслуживающего устройства. Обозначим:

- $\Gamma_i, i \geq 1$, из множества Γ — состояние обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_{i-1}; \tau_i]$ и $\Gamma_0 \in \Gamma$ — в момент времени τ_0 ;
- количество $\kappa_{j,i} \in \mathbb{Z}_+, i \geq 0$, требований в очереди O_j в момент времени τ_i ;

- количество $\eta_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geq 0$, требований, поступивших в очередь O_j по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$;
- количество $\xi_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geq 0$, требований по потоку насыщения $\Pi_j^{\text{нас}}$ в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$;
- количество $\bar{\xi}_{j,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geq 0$, реально обслуженных требований по потоку Π_j в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$; $j = \overline{1, 4}$.

Закон изменения состояния обслуживающего устройства будем предполагать заданным соотношением

$$\Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}), \quad (1.3)$$

где отображение $h(\cdot, \cdot)$ определено в (1.2). Для определения длительности T_{i+1} состояния обслуживающего устройства в течение времени $(\tau_i; \tau_{i+1}]$ удобно ввести функцию $h_T(\cdot, \cdot)$:

$$T_{i+1} = h_T(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}) = T^{(k,r)}, \quad \text{где } k \text{ и } r \text{ таковы, что } \Gamma^{(k,r)} = \Gamma_{i+1} = h(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}).$$

Функциональная зависимость

$$\bar{\xi}_{j,i} = \min\{\varkappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.4)$$

между величиной $\bar{\xi}_{j,i}$ и величинами $\varkappa_{j,i}$, $\eta_{j,i}$, $\xi_{j,i}$ реализует стратегию механизма обслуживания требований. Далее, поскольку

$$\varkappa_{j,i+1} = \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \bar{\xi}_{j,i}, \quad j \in \{1, 2, 3\},$$

то из выражения (1.4) следует соотношение

$$\varkappa_{j,i+1} = \max\{0, \varkappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.5)$$

Из формулировки поставленной задачи (см. также структурную схему на рис. 1.1) следуют соотношения для потока Π_4 :

$$\eta_{4,i} = \min\{\xi_{1,i}, \varkappa_{1,i} + \eta_{1,i}\}, \quad \varkappa_{4,i+1} = \varkappa_{4,i} + \eta_{4,i} - \eta_{2,i}, \quad \xi_{4,i} = \varkappa_{4,i}. \quad (1.6)$$

Нелокальное описание входных потоков и потоков насыщения состоит в указании некоторых свойств условных распределений выделенных дискретных компонент $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i}, \eta_{4,i})$ и $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i}, \xi_{4,i})$ маркированных точечных процессов $\{(\tau_i, \nu_i, \eta_i); i \geq 0\}$ и $\{(\tau_i, \nu_i, \xi_i); i \geq 0\}$ при фиксированных

значениях метки $\mathbf{v}_i = (\Gamma_i; \boldsymbol{\varkappa}_i)$, где $\boldsymbol{\varkappa}_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$. Введем функции $\varphi_1(\cdot, \cdot)$ и $\varphi_3(\cdot, \cdot)$ из разложений

$$\sum_{\mathbf{v}=0}^{\infty} z^{\mathbf{v}} \varphi_j(\mathbf{v}, t) = \exp\{\lambda_j t (f_j(z) - 1)\},$$

где $f_j(z)$ определены выражением (1.1), $j \in \{1, 3\}$. Функция $\varphi_j(\mathbf{v}, t)$ по своему смыслу есть вероятность поступления $\mathbf{v} = 0, 1, \dots$ требований по потоку Π_j за промежуток времени от 0 до $t \geq 0$. Положим $\varphi_j(\mathbf{v}, t)$ равной нулю при $\mathbf{v} < 0$. Функцию $\psi(\cdot, \cdot, \cdot)$ зададим формулой

$$\psi(k; y, u) = C_y^k u^k (1 - u)^{y-k}.$$

По своему смыслу $\psi(k; y, u)$ есть вероятность поступления k требований по потоку Π_2 при условии, что очередь O_4 содержит y требований и обслуживающее устройство находится в состоянии $\Gamma^{(k,r)}$, так что $u = p_{k,r}$. При нарушении условия $0 \leq k \leq y$ положим $\psi(k; y, u)$ равной нулю.

Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_+^4$ и $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Тогда из постановки задачи на содержательном уровне следует, что при фиксированном значении метки $\mathbf{v}_i = (\Gamma^{(k,r)}; x)$ вероятность $\varphi(a, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\eta_{1,i} = a_1, \eta_{2,i} = a_2, \eta_{3,i} = a_3, \eta_{4,i} = a_4$ есть

$$\varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}}, \quad (1.7)$$

где \tilde{k} и \tilde{r} таковы, что $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$ и $\delta_{i,j}$ есть символ Кронекера:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Пусть $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{Z}_+^4$. Из содержательной постановки задачи также следует, что вероятность $\zeta(b, k, r, x)$ одновременного выполнения равенств $\xi_{1,i} = b_1, \xi_{2,i} = b_2, \xi_{3,i} = b_3, \xi_{4,i} = b_4$ при фиксированном значении $(\Gamma^{(k,r)}; x)$ метки \mathbf{v}_i есть

$$\delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \times \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \times \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \times \delta_{b_4, x_4}. \quad (1.8)$$

Из формулы (1.8) следует для $j \in \{1, 2, 3\}$, что вероятность события $\xi_{j,i} = 0$ равна 1 в случае $h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \notin {}^j\Gamma$ и что вероятность события $\xi_{j,i} = \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, j)$ равна 1, если $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in {}^j\Gamma$.

Содержательный смысл следующей теоремы состоит в том, что сформулированные выше функциональные связи и вероятностные свойства введенных объектов непротиворечивы и могут быть реализованы на некотором вероятностном пространстве.

Теорема 1. Пусть $\gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)} \in \Gamma$ и $x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}) \in \mathbb{Z}_+^4$ фиксированы. Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ и заданные на нем случайные величины $\eta_{j,i} = \eta_{j,i}(\omega)$, $\xi_{j,i} = \xi_{j,i}(\omega)$, $\varkappa_{j,i} = \varkappa_{j,i}(\omega)$ и случайные элементы $\Gamma_i = \Gamma_i(\omega)$, $i \geq 0$, $j \in \overline{1,4}$, такие, что 1) имеют место равенства $\Gamma_0(\omega) = \gamma_0$ и $\varkappa_0(\omega) = x^0$; 2) выполняются соотношения (1.3), (1.5), (1.6); 3) для любых $a \in \mathbb{Z}_+^4$, $b \in \mathbb{Z}_+^4$ и любых $x^t = (x_{1,t}, x_{2,t}, x_{3,t}, x_{4,t}) \in \mathbb{Z}_+^4$, $\Gamma^{(k_t, r_t)} \in \Gamma$, $t = 1, 2, \dots$, таких, что $\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) > 0$, условное распределение векторов η_i и ξ_i , $i \geq 0$, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \mid \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \\ = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где функции $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ и $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ определяются формулами (1.7) и (1.8).

Доказательство. Для построения вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ воспользуемся теоремой Ионеску Тулча (см. [160], с. 348).

Введем последовательность измеримых пространств $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$, $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, \dots , где $\Omega_i = \mathbb{Z}_+^3$, $\omega_i = (\omega_{1,i}, \omega_{2,i}, \omega_{3,i}) \in \Omega_i$, а σ -алгебра $\mathcal{F}_i = 2^{\Omega_i}$ есть множество всех подмножеств множества Ω_i . Пусть $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x_{3,0})$. Зададим на измеримом пространстве $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$ вероятностную меру $P_0(\cdot)$ ее значениями на одноточечных множествах:

$$\begin{aligned} P_0(\{(a_1, a_2, a_3)\}) = \\ = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})) \times \psi(a_2, x_{2,0}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_0, r_0)})). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для $j \in \{1, 2, 3\}$ определим величины

$$\tilde{\Gamma}_0(\omega_0) = \gamma_0, \quad \tilde{\varkappa}_{j,0}(\omega_0) = x_{j,0}, \quad \tilde{\xi}_{j,0}(\omega_0) = l(\tilde{k}, \tilde{r}, j), \quad \tilde{\eta}_{j,0}(\omega_0) = \omega_{j,0}, \quad (1.11)$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\varkappa}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \quad \tilde{\xi}_{4,0}(\omega_0) = x_{4,0}, \\ \tilde{\eta}_{4,0}(\omega_0) = \min\{\tilde{\xi}_{1,0}(\omega_0), \tilde{\varkappa}_{1,0}(\omega_0) + \tilde{\eta}_{1,0}(\omega_0)\} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Теперь предположим, что заданы вероятностные меры

$$P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \cdot)$$

на измеримых пространствах $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$, $i = \overline{0, n}$, и фиксирован набор $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$. Положим для $j \in \{1, 2, 3\}$ и $i = \overline{0, n}$

$$\tilde{\Gamma}_{i+1} = \Gamma^{(k^*, r^*)} = h(\tilde{\Gamma}_i, \tilde{\varkappa}_{3,i}), \quad \tilde{\varkappa}_{j,i+1} = \max\{0, \tilde{\varkappa}_{j,i} + \tilde{\eta}_{j,i} - \tilde{\xi}_{j,i}\}, \quad (1.13)$$

$$\tilde{\varkappa}_{4,i+1} = \tilde{\varkappa}_{4,i} + \tilde{\eta}_{4,i} - \tilde{\eta}_{2,i}, \quad \tilde{\xi}_{j,i+1} = l(k^*, r^*, j), \quad \tilde{\eta}_{j,i+1} = \omega_{j,i+1}, \quad (1.14)$$

$$\tilde{\eta}_{4,i+1} = \min\{\tilde{\xi}_{1,i+1}, \tilde{\varkappa}_{1,i+1} + \tilde{\eta}_{1,i+1}\}, \quad \tilde{\xi}_{4,i+1} = \tilde{\varkappa}_{4,i+1}. \quad (1.15)$$

Заметим, что значения $\tilde{\Gamma}_i$, $\tilde{\xi}_{j,i}$, $\tilde{\eta}_{j,i}$, $\tilde{\varkappa}_{j,i}$, найденные по формулам (1.13)–(1.15) по наборам $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n)$ и $(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_i)$, $n \geq i$, совпадают. Определим на измеримом пространстве $(\Omega_{n+1}, \mathcal{F}_{n+1})$ вероятностную меру $P_{n+1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \cdot)$ ее значениями на одноточечных множествах $\{(a_1, a_2, a_3)\}$, $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}_+^3$:

$$\begin{aligned} P(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n; \{(a_1, a_2, a_3)\}) &= \\ &= \varphi_1(a_1, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\varkappa}_{3,n})) \times \psi(a_2, \tilde{\varkappa}_{4,n}, p_{k^*, r^*}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\tilde{\Gamma}_n, \tilde{\varkappa}_{3,n})). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Тогда (в соответствии с теоремой Ионеску Тулчи) для декартова произведения $\Omega = \prod_{i=0}^{\infty} \Omega_i$ пространств элементарных исходов и произведения σ -алгебр $\mathcal{F} = \bigotimes_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i$ на (Ω, \mathcal{F}) будет существовать единственная вероятностная мера $\mathbf{P}(\cdot)$ такая, что для любого $i \geq 0$ верно равенство

$$\mathbf{P}(\{\omega : \omega_0 \in A_0, \omega_1 \in A_1, \dots, \omega_i \in A_i\}) = P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i), \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} P_i(A_0 \times A_1 \times \dots \times A_i) &= \\ &= \int_{A_0} P_0(d\omega_0) \int_{A_1} P_1(\omega_0; d\omega_1) \dots \int_{A_i} P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; d\omega_i), \end{aligned} \quad (1.18)$$

для любого A_i из \mathcal{F}_i . Итак, вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ построено.

Теперь введем на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ следующие случайные величины и элементы, $i \geq 0$, $j = \overline{1, 4}$:

$$\Gamma_i(\omega) = \tilde{\Gamma}_i, \quad \varkappa_{j,i}(\omega) = \tilde{\varkappa}_{j,i}, \quad \xi_{j,i}(\omega) = \tilde{\xi}_{j,i}, \quad \eta_{j,i}(\omega) = \tilde{\eta}_{j,i}.$$

и докажем, что они удовлетворяют условиям теоремы. Для сокращения записи зависимость от ω в обозначении случайных элементов и случайных величин далее будем опускать. Из формулы (1.13) следует, что случайные элементы Γ_i удовлетворяют соотношению (1.3), а случайные величины $\varkappa_{j,i}$ для $j \in \{1, 2, 3\}$ удовлетворяют соотношению (1.5). Из формулы (1.14) заключаем, что $\varkappa_{4,i}$ удовлетворяет соотношению (1.6). Далее, из условий (1.12) и (1.15) следует справедливость соотношений (1.6) для величин $\eta_{4,i}$ и $\xi_{4,i}$.

Перейдем к доказательству равенства (1.9). Для этого найдем явное выражение для условной вероятности

$$\mathbf{P}(\{\omega : \eta_i = a, \xi_i = b\} \mid \bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}).$$

Пусть $\Gamma^{(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i)} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x^i)$. Запишем по определению условной вероятности, предполагая, что $\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) > 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\{\omega : \eta_i = a, \xi_i = b\} \mid \bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) &= \\ &= \mathbf{P}\left(\{\omega : \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) \times \\ &\quad \times \left(\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right)\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Далее из соотношений (1.17), (1.18) и того факта, что значения Γ_i и \varkappa_i зависят только от $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}$, но не от ω_i , (этот факт следует из формул (1.11) – (1.14)), получим выражение для второго сомножителя последнего выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) &= \\ &= \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1} : \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t=0, \dots, i}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Преобразуем множество

$$\{\omega : \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \{\omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\},$$

учитывая соотношения (1.11) – (1.15):

$$\begin{aligned} & \left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \cap \left\{ \omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} = \left\{ \omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \\ & \cap \left\{ \omega : \eta_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3} \right\} \cap \left\{ \omega : \xi_{j,i} = b_j, j = \overline{1, 3} \right\} \cap \left\{ \omega : \xi_{4,i} = b_4 \right\} \cap \\ & \cap \left\{ \omega : \eta_{4,i} = a_4 \right\} = \left\{ \omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \\ & \cap \left\{ \omega : \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3} \right\} \cap \left\{ \omega : b_j = \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j), j = \overline{1, 3} \right\} \cap \\ & \cap \left\{ \omega : b_4 = x_{4,i} \right\} \cap \left\{ \omega : a_4 = \min \left\{ \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1 \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда для первого множителя из правой части выражения (1.19) имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \cap \bigcap_{t=0}^i \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \\ & = \mathbf{P} \left(\left\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \right\} \cap \left\{ \omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \right. \\ & \left. \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min \{ \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1 \}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \\ & \times \mathbf{P} \left(\left\{ \omega : \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3} \right\} \cap \left\{ \omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \right. \\ & \left. \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right). \quad (1.21) \end{aligned}$$

И по аналогии со вторым множителем в выражении (1.20) преобразуем последний сомножитель правой части равенства (1.21):

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left\{ \omega : \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \right. \\ & \left. \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t=0, \dots, i}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times \\ & \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times P_i(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}; \{(a_1, a_2, a_3)\}) \end{aligned}$$

и, учитывая выражение (1.16), получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\left\{ \omega : \omega_{j,i} = a_j, j = \overline{1, 3}; \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \right\} \cap \right. \\ & \left. \bigcap_{t=0}^{i-1} \left\{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \right\} \right) = \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i, \tilde{r}_i}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ t=0, \dots, i}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \\ & \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}). \quad (1.22) \end{aligned}$$

Подставляя выражение (1.22) в правую часть равенств (1.21), а затем выражения (1.21) и (1.20) в равенство (1.19), получим:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \} \left| \bigcap_{t=0}^i \{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \} \right. \right) = \\ & = \delta_{b_4, x_{4,i}} \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \prod_{j=1}^3 \delta_{b_j, \ell(\tilde{k}_i, \tilde{r}_i, j)} \times \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\ & \quad \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{\tilde{k}_i, \tilde{r}_i}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma_i, x_{3,i})) \times \\ & \times \sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \times \\ & \times \left(\sum_{\substack{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-1}: \\ \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t, \\ \forall 0 \leq t \leq i-1}} P_0(\omega_0) \times P_1(\omega_0; \{\omega_1\}) \times \dots \times P_{i-1}(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{i-2}; \{\omega_{i-1}\}) \right)^{-1} \end{aligned}$$

и после сокращения одинаковых сумм получаем требуемое равенство (1.9). \square

Следствие 1.2.1. В условиях предыдущей теоремы верно равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left(\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \} \left| \bigcap_{t=0}^i \{ \omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t \} \right. \right) = \\ & = \mathbf{P} \left(\{ \omega : \eta_i = a, \xi_i = b \} \left| \{ \omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i \} \right. \right). \quad (1.23) \end{aligned}$$

Доказательство. Действительно, из формулы (1.9) следует, что вероятность, стоящая в левой части равенства (1.23), равна величине $\varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i)$, зависящей только от значения $(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x^i)$ пары (Γ_i, \varkappa_i) и не зависящей от значений остальных пар (Γ_t, \varkappa_t) , $0 \leq t \leq i-1$.

Используя формулу полной вероятности, получим для правой части равенства (1.23):

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \mid \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}\right) = \\
& = \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{\Gamma_t \in \Gamma, \varkappa_t \in Z_+^4} \mathbf{P}\left(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \mid \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) \times \\
& \quad \times \mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^{i-1} \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \times \\
& \times \sum_{t=0}^{i-1} \sum_{\Gamma_t \in \Gamma, \varkappa_t \in Z_+^4} \mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^{i-1} \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}\right) = \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i).
\end{aligned}$$

Поскольку левая часть выражения (1.23) равна правой, то следствие доказано. \square

Введем для $y_0, y, \tilde{y} \in \mathbb{Z}_+$ и $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$ функции

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}(k, r, y_0, y, \tilde{y}) &= (1 - \delta_{\tilde{y}, 0}) \Psi(\tilde{y} + \ell(k, r, 2) - y, y_0, p_{k, r}) + \delta_{\tilde{y}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k, r, 2) - y} \Psi(a, y_0, p_{k, r}), \\
\tilde{\Phi}_1(k, r, t, y, \tilde{y}) &= (1 - \delta_{\tilde{y}, 0}) \varphi_1(\tilde{y} + \ell(k, r, 1) - y, t) + \delta_{\tilde{y}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k, r, 1) - y} \varphi_1(a, t), \\
\tilde{\Phi}_3(k, r, t, y, \tilde{y}) &= (1 - \delta_{\tilde{y}, 0}) \varphi_3(\tilde{y} + \ell(k, r, 3) - y, t) + \delta_{\tilde{y}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k, r, 3) - y} \varphi_3(a, t).
\end{aligned} \tag{1.24}$$

причем k и r таковы, что $\Gamma^{(k, r)} \in \Gamma$.

Следствие 1.2.2. Пусть $\Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3, i})$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда в условиях теоремы 1 верно равенство

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2, i+1} = x_{2, i+1}\} \mid \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\
= \tilde{\Psi}(k_{i+1}, r_{i+1}, x_{4, i}, x_{2, i}, x_{2, i+1}), \tag{1.25}
\end{aligned}$$

Доказательство. Запишем по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2, i+1} = x_{2, i+1}\} \mid \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\
& = \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \mid \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) \times
\end{aligned}$$

$$\times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} \cap \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}).$$

Поскольку для величин $\varkappa_{2,i+1}$, η_i и ξ_i история до момента времени τ_i значения не имеет (см. формулы (1.5) и (1.23)), то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}) \end{aligned}$$

и, учитывая формулу (1.9), продолжим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}). \end{aligned}$$

Функциональная зависимость (1.5) позволяет упростить последнюю вероятность:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - b_2\}}. \end{aligned}$$

Учтем выражения функций $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ и $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ из определений (1.7) и (1.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \times \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \times \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \times \\ &\quad \times \delta_{a_4, \min\{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \delta_{b_1, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1)} \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} \delta_{b_4, x_{4,i}} \cdot \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - b_2\}} \end{aligned}$$

и перегруппируем множители:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a_2, b_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - b_2\}} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \times \\ & \times \sum_{a_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1), x_{1,i} + a_1\}} \sum_{b_1 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_1, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1)} \sum_{b_3 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_3, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)} \sum_{b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_4, x_{4,i}}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) &= 1, & \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) &= 1, \\ \sum_{a_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1), x_{1,i} + a_1\}} &= 1, & \sum_{b_1 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_1, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1)} &= 1, \\ \sum_{b_3 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_3, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)} &= 1, & \sum_{b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_4, x_{4,i}} &= 1, \end{aligned}$$

то искомая вероятность упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega : \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a_2, b_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - b_2\}} = \\ &= \sum_{a_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)\}}. \end{aligned}$$

В случае, когда $x_{2,i+1}$ больше 0, величина $\delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)\}}$ отлична от нуля только при

$$x_{2,i+1} = x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2),$$

то есть при

$$a_2 = x_{2,i+1} - x_{2,i} + \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2).$$

В случае, когда $x_{2,i+1}$ равно 0, величина $\delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)\}}$ отлична от нуля только при

$$a_2 \leq \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2) - x_{2,i}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega : \varkappa_{2,i+1} = x_{2,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega : \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \delta_{x_{2,i+1}, \max\{0, x_{2,i} + a_2 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)\}} = \\ &= (1 - \delta_{x_{2,i+1}, 0}) \psi(x_{2,i+1} - x_{2,i} + \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2), x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) + \end{aligned}$$

$$+ \delta_{x_{2,i+1},0} \sum_{a=0}^{\ell(k_{i+1},r_{i+1},2)-x_{2,i}} \Psi(a, x_{4,i}, p_{k_{i+1},r_{i+1}}) = \tilde{\Psi}(k_{i+1}, r_{i+1}, x_{4,i}, x_{2,i}, x_{2,i+1})$$

и равенство (1.25) доказано. \square

Следствие 1.2.3. Пусть $\Gamma^{(k_{i+1},r_{i+1})} = h(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i})$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда в условиях теоремы 1 верно равенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\ = \tilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Доказательство. Запишем по формуле полной вероятности с учетом формул (1.9) и (1.23):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \times \\ \times \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i,r_i)}, \varkappa_i = x^i\}). \end{aligned}$$

Из условия (1.5) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\ = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - b_3\}} \end{aligned}$$

и, раскрывая по определению $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ и $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t,r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\ = \sum_{a_3, b_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i})) \delta_{b_3, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)} \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - b_3\}} \times \\ \times \sum_{a_2 \in \mathbb{Z}_+} \Psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_{3,i})) \sum_{a_4 \in \mathbb{Z}_+} \times \\ \times \delta_{a_4, \min\{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \sum_{b_1 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_1, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1)} \sum_{b_2 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} \times \\ \times \sum_{b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_4, x_{4,i}} = \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i,r_i)}, x_3)) \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)\}}. \end{aligned}$$

По аналогии с предыдущей леммой

$$\begin{aligned} \sum_{a_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) &= 1, & \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) &= 1, \\ \sum_{a_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1), x_{1,i} + a_4\}} &= 1, & \sum_{b_1 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_1, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1)} &= 1, \\ \sum_{b_2 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} &= 1, & \sum_{b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_4, x_{4,i}} &= 1 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_3)) \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)\}}. \end{aligned}$$

Результат леммы получаем после следующих преобразований:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)\}} = \\ &= (1 - \delta_{x_{3,i+1}, 0}) \varphi_3(x_{3,i+1} - x_{3,i} + \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3), h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) + \delta_{x_{3,i+1}, 0} \times \\ &\times \sum_{a=0}^{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3) - x_{3,i}} \varphi_3(a, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) = \tilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}). \quad \square \end{aligned}$$

Следствие 1.2.4. Пусть $\Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})$, $i = 0, 1, \dots$. Тогда в условиях теоремы 1 для $i \geq 0$ верны равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \tilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}) \times \\ &\times \tilde{\varphi}_1(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{1,i}, x_{1,i+1}). \quad (1.27) \end{aligned}$$

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущего следствия. А именно, записывая по формуле полной вероятности с учетом формул (1.9) и (1.23), имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) &= \\ &= \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \times \\ &\times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b, \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}). \end{aligned}$$

Из условий (1.5) опять следует

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\ & = \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k_i, r_i, x^i) \zeta(b, k_i, r_i, x^i) \delta_{x_{1,i+1}, \max\{0, x_{1,i} + a_1 - b_1\}} \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - b_3\}} \end{aligned}$$

и, раскрывая $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ и $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$, получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\ & = \sum_{a_3, b_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \delta_{b_3, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)} \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - b_3\}} \times \\ & \times \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})) \delta_{b_1, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1)} \delta_{x_{1,i+1}, \max\{0, x_{1,i} + a_1 - b_1\}} \times \\ & \times \sum_{a_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) \times \sum_{a_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1), x_{1,i} + a_1\}} \times \\ & \times \sum_{b_2 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} \times \sum_{b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_4, x_{4,i}}. \end{aligned}$$

Сократим выражение, учитывая

$$\begin{aligned} \sum_{a_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_{4,i}, p_{k_{i+1}, r_{i+1}}) &= 1, & \sum_{a_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1), x_{1,i} + a_1\}} &= 1, \\ \sum_{b_2 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_2, \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 2)} &= 1, & \sum_{b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{b_4, x_{4,i}} &= 1. \end{aligned}$$

И после упрощения сумм в предыдущем выражении, получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \bigcap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\ & = \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_3)) \delta_{x_{3,i+1}, \max\{0, x_{3,i} + a_3 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 3)\}} \times \\ & \times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_1)) \delta_{x_{1,i+1}, \max\{0, x_{1,i} + a_1 - \ell(k_{i+1}, r_{i+1}, 1)\}} = \\ & = \tilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}) \times \\ & \times \tilde{\varphi}_1(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{1,i}, x_{1,i+1}). \end{aligned}$$

Следствие доказано. □

Таким образом, кибернетический подход позволил построить математическую модель управляющей системы обслуживания в виде последовательности случайных величин и случайных элементов, конструктивно заданных на некотором вероятностном пространстве. Выберем для дальнейшего исследования состояния обслуживающего устройства и длины всех очередей.

Глава 2. Анализ стохастической последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i), i \geq 0\}$

Исследуемая в работе управляющая система характеризуется следующими объектами: обслуживающее устройство и четыре очереди. Последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ служит математическим описанием этих объектов, где $\varkappa_i = (\varkappa_{1,i}, \varkappa_{2,i}, \varkappa_{3,i}, \varkappa_{4,i})$. Глава 2 посвящена тем результатам, которые удастся получить для этой пятимерной последовательности, несмотря на ее сложность: доказана марковость этой последовательности, а также проведена классификация ее состояний по арифметическим свойствам переходных вероятностей. Эти результаты позволят далее в работе доказать марковость и провести классификацию состояний для последовательностей, содержащих только часть из упомянутых пяти компонент.

2.1 Свойство марковости последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i), i \geq 0\}$

Пусть $a, b, x^i \in \mathbb{Z}_+^4$, $k_i = \overline{0, d}$, $r_i = \overline{1, n_{k_i}}$, $i = 0, 1, \dots$. Введем следующие события:

$$A_i(k_i; r_i; x^i) = \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_i = x^i\}, \quad B_i(a; b) = \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\}, \quad (2.1)$$

для $i = 0, 1, \dots$. В этих обозначениях равенство (1.23) перепишется следующим образом:

$$\mathbf{P}(B_i(a; b) | \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)) = \mathbf{P}(B_i(a; b) | A_i(k_i; r_i; x^i)). \quad (2.2)$$

Сформулируем и докажем теорему о марковости последовательности

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}.$$

Теорема 2. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k, r)} \in \Gamma$ и $\varkappa_0 = x^0 \in \mathbb{Z}_+^4$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right.\right) &= \\ &= \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| A_i(k_i; r_i; x^i)\right.\right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

для $x^t \in \mathbb{Z}_+^4$ и k_t, r_t таких, что $\Gamma^{(k_t, r_t)} \in \Gamma$ и $\mathbf{P}\left(\bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right) > 0$.

Рассмотрим сначала левую часть равенства (2.3). По формуле полной вероятности получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right.\right) &= \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}_+^4, \\ b \in \mathbb{Z}_+^4}} \mathbf{P}\left(B_i(a; b) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right.\right) \times \\ &\times \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right.\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из равенства (2.2) следует, что вероятность $\mathbf{P}\left(B_i(a; b) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right.\right)$ не зависит от значений $k_t, r_t, x^t, t = \overline{0, i-1}$. Далее, из соотношений (1.3), (1.5) и (1.6) можно заметить, что случайный элемент Γ_{i+1} и случайный вектор \varkappa_{i+1} функционально выражаются через $\Gamma_i, \varkappa_i, \eta_i$ и ξ_i , поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \left| B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right.\right) &= \\ &= \mathbf{P}\left(\tilde{A}_{i+1} \left| B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right.\right), \end{aligned}$$

при $\mathbf{P}(B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)) > 0$, где

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{i+1} = \{\omega : \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})} = h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{j,i+1} = \max\{0, x_{j,i} + a_j - b_j\}, j = \overline{1, 3}, \\ x_{4,i+1} = x_{4,i} + a_4 - a_2\}. \end{aligned}$$

Ясно, что событие \tilde{A}_{i+1} при наступлении событий $B_i(a; b)$ и $A_i(k_i; r_i; x^i)$ является либо достоверным, либо невозможным событием. Таким образом, подставляя выражения

$$\mathbf{P}\left(B_i(a; b) \left| \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right.\right) = \mathbf{P}\left(B_i(a; b) \left| A_i(k_i; r_i; x^i)\right.\right)$$

и

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \mid B_i(a; b) \cap \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right) = \\ = \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \mid B_i(a; b) \cap A_i(k_i; r_i; x^i)\right) \end{aligned}$$

в выражение (2.4), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \mid \bigcap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)\right) = \\ = \sum_{a \in \mathbb{Z}_+^4, b \in \mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}\left(B_i(a; b) \mid A_i(k_i; r_i; x^i)\right) \times \\ \times \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \mid B_i(a; b) \cap A_i(k_i; r_i; x^i)\right). \quad (2.5) \end{aligned}$$

По формуле полной вероятности раскроем правую часть равенства (2.3):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \mid A_i(k_i; r_i; x^i)\right) = \\ = \sum_{a \in \mathbb{Z}_+^4, b \in \mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}\left(B_i(a; b) \mid A_i(k_i; r_i; x^i)\right) \times \\ \times \mathbf{P}\left(A_{i+1}(k_{i+1}; r_{i+1}; x^{i+1}) \mid B_i(a; b) \cap A_i(k_i; r_i; x^i)\right). \quad (2.6) \end{aligned}$$

Таким образом, из равенств (2.5) и (2.6) следует равенство (2.3). \square

Естественным теперь поставить вопрос о том, какие из компонент марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ также образуют марковскую цепь. Из формулы (1.3) видно, что состояние прибора Γ_i влияет на то, каким будет следующее состояние Γ_{i+1} и, следовательно, каким будет его продолжительность. Продолжительность нахождения прибора в конкретном состоянии влияет на то, какое количество требований успеет поступить по очередям O_1, O_2, O_3 и O_4 . Также из формулы (1.3) следует, что Γ_{i+1} зависит также от состояния $\varkappa_{3,i}$ очереди O_3 . Оказывается, что в смысле марковского свойства последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ является самодостаточной.

По аналогии с предыдущим утверждением, докажем марковость последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$, описывающую динамику изменения состояния обслуживающего устройства и низкоприоритетной очереди O_3 .

Теорема 3. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $\varkappa_{3,0} = x_{3,0} \in \mathbb{Z}_+$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Доказательство. Для доказательства необходимо проверить равенство:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_{3,t} = x_{3,t}\}) = \\ & = \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}\}) \quad (2.7) \end{aligned}$$

Действительно, поскольку Γ_{i+1} функционально выражается через Γ_i и $\varkappa_{3,i}$ (см. условие (1.3)), то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\ & = \delta_{\Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})} \times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) \end{aligned}$$

для $\Gamma^{(k_i, r_i)} \in \Gamma$, $x_{3,i} \in \mathbb{Z}_+$, $i \geq 0$. Учитывая равенство (1.26), убеждаемся, что вероятность

$$\mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\})$$

равна

$$\delta_{\Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})} \times \tilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1})$$

и зависит только от значений пар $(\Gamma_i, \varkappa_{3,i})$ и $(\Gamma_{i+1}, \varkappa_{3,i+1})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_t = x^t\}) = \\ & = \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}\}) = \\ & = \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i \{\omega: \Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_{3,t} = x_{3,t}\}), \end{aligned}$$

что доказывает марковость последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$. \square

Убедившись в марковости последовательностей $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ и $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$, приведем формулы для вычисления их одношаговых переходных вероятностей. Для этого введем множество $\mathbb{A}_{\text{trans}} = \mathbb{A}_{\text{trans}}(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r})$, $x, \tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$ и $\Gamma^{(k,r)}, \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in \Gamma$, и определим его следующим образом:

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) = \mathbb{A}_{\text{trans}}^0(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}), \quad (2.8)$$

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}^0(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\} + x_4 - \tilde{x}_4\}, \quad (2.9)$$

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}^1(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: \tilde{x}_1 = \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}\}, \quad (2.10)$$

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}^2(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r}) = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: \tilde{x}_2 = \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}\}. \quad (2.11)$$

Множества $\mathbb{A}_{\text{trans}}^0(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r})$, $\mathbb{A}_{\text{trans}}^1(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r})$ и $\mathbb{A}_{\text{trans}}^2(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r})$ состоят из тех пар (a_1, a_2) количеств требований в очередях O_1 и O_2 , которые могут иметь место

в нашей абстрактной управляющей системе Ляпунова–Яблонского в соответствии с уравнениями (1.3), (1.5), (1.6), (1.9). А именно, содержательный смысл множества $\mathbb{A}_{\text{trans}}^0(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r})$ состоит в том, что оно учитывает количество требований в очереди O_4 на текущем и следующем тактах: x_4 и \tilde{x}_4 , — а также учитывает знание количества требований, находившихся и пришедших в очередь O_1 . Множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}^1(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r})$ учитывает изменение количества требований в очереди O_1 : x_1 и \tilde{x}_1 . И наконец, множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}^2(x, \tilde{x}, \tilde{k}, \tilde{r})$ контролирует изменение количества требований x_2 и \tilde{x}_2 в очереди O_2 на последовательных тактах функционирования системы.

Теорема 4. Пусть $x, \tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$ и $\Gamma^{(k,r)}, \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in \Gamma$. Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ вычисляются по следующей формуле:

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\}) = \\ & = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), x_3, \tilde{x}_3) \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Доказательство. В случае если $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$, искомая вероятность упростится следующим образом:

$$\mathbf{P}(A_{i+1}(\tilde{k}, \tilde{r}, \tilde{x}) | A_i(k, r, x)) = \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | A_i(k, r, x)).$$

Здесь используются те же обозначения для множеств $A_i(k, r, x)$, что и в выражении (2.2).

По аналогии с выводом формул (1.25) и (1.26), для доказательства воспользуемся формулой полной вероятности:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | A_i(k, r, x)) &= \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \mathbf{P}(\{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\} | A_i(k, r, x)) \times \\ &\times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | A_i(k, r, x) \cap \{\omega: \eta_i = a, \xi_i = b\}). \end{aligned}$$

Учтем формулы (1.9) и (1.23):

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\}) &= \sum_{a, b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k, r, x) \zeta(b, k, r, x) \times \\ &\times \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\} | \{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x, \eta_i = a, \xi_i = b\}). \end{aligned}$$

Из условий (1.5) и (1.6) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\}|\{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\}) &= \sum_{a,b \in \mathbb{Z}_+^4} \varphi(a, k, r, x) \zeta(b, k, r, x) \times \\ &\times \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - b_1\}} \times \delta_{\tilde{x}_3, \max\{0, x_3 + a_3 - b_3\}} \times \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - b_2\}} \times \delta_{\tilde{x}_4, x_4 + a_4 - a_2} \end{aligned}$$

Раскроем функции $\varphi(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ и $\zeta(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ и перегруппируем множители:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\}|\{\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\}) &= \\ &= \sum_{a_1, b_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{b_1, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - b_1\}} \times \\ &\times \sum_{a_3, b_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{b_3, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \delta_{\tilde{x}_3, \max\{0, x_3 + a_3 - b_3\}} \times \\ &\times \sum_{a_2, b_2 \in \mathbb{Z}_+} \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \delta_{b_2, \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)} \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - b_2\}} \times \\ &\times \sum_{a_4, b_4 \in \mathbb{Z}_+} \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}} \delta_{b_4, x_4} \delta_{\tilde{x}_4, x_4 + a_4 - a_2}. \end{aligned}$$

Поскольку произведение $\delta_{\tilde{x}_4, x_4 + a_4 - a_2} \times \delta_{a_4, \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\}}$ отлично от нуля, если и только если $a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1), x_1 + a_1\} + x_4 - \tilde{x}_4$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\}|\{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\}) &= \\ &= \sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{\tilde{x}_3, \max\{0, x_3 + a_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} \times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \times \\ &\times \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}}. \end{aligned}$$

Из определений (1.24) видно, что

$$\sum_{a_3 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_3(a_3, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \delta_{\tilde{x}_3, \max\{0, x_3 + a_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), \tilde{x}_3),$$

значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \varkappa_{i+1} = \tilde{x}\}|\{\omega: \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_i = x\}) &= \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), \tilde{x}_3) \times \\ &\times \sum_{a_1 \in \mathbb{Z}_+} \varphi_1(a_1, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3)) \psi(a_2, x_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) \times \\ &\times \delta_{\tilde{x}_1, \max\{0, x_1 + a_1 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} \delta_{\tilde{x}_2, \max\{0, x_2 + a_2 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 2)\}}. \end{aligned}$$

что есть в точности (2.12). □

Таким образом, в нашем арсенале теперь есть вид переходных вероятностей цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$ и, следовательно, можем постараться найти множество ее существенных состояний. Сформулируем аналогичный результат для цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$.

Теорема 5. Пусть $x_3, \tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$ и $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} = h(\Gamma^{(k,r)}, x_3) \in \Gamma$. Тогда переходные вероятности однородной счетной марковской цепи

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$$

вычисляются по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}\} | \{\omega : \Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x\}) = \\ = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, h_T(\Gamma^{(k,r)}, x_3), x_3, \tilde{x}_3). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Доказательство. Доказательство следует из равенства (1.26). \square

2.2 Классификация состояний управляющей системы Ляпунова–Яблонского как марковской цепи

Теперь найдем множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$, которая описывает динамику исследуемой в работе управляющей системы. Мы последовательно рассмотрим состояния разного вида и определим сообщающиеся подклассы.

На первом этапе докажем, что состояния вида

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \tilde{x} = (0, 0, L + 1, 0),$$

являются существенными (леммы 1, 2, 3). Лемма 1, в частности, говорит о том, что из состояний продления с произвольным количеством требований в очередях O_1 , O_2 и O_4 можно перейти с ненулевой вероятностью также в состояние продления, но с пустыми очередями O_1 , O_2 и O_4 .

Лемма 1. Состояния вида

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, (0, 0, \tilde{x}_3, 0)), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \tilde{x}_3 \geq x_{3,0},$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}, x^0 \in \mathbb{Z}_+^4, x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0}), x_{3,0} \leq L.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что существует такое натуральное число N , что

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = (0, 0, \tilde{x}_3, 0)\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Докажем сначала, что вероятность каждого шага в цепочке

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0) \rightarrow (\Gamma^{(0,r_0 \oplus 01)}, x^1) \rightarrow (\Gamma^{(0,r_0 \oplus 02)}, x^2) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(0,r_0 \oplus 0N_2)}, x^{N_2})$$

для любого $N_2 > 0$ положительна. Вектора x^j , $j > 1$, определим ниже.

Пусть система стартовала в состоянии $(\Gamma_0, \varkappa_0) = (\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$. Из формул (1.2) и (1.3) следует, что

$$\Gamma_1 = h(\Gamma_0, \varkappa_{3,0}) = h(\Gamma^{(0,r_0)}, x_{3,0}) = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 01)}.$$

Положим

$$x^1 = (x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, x_{4,1}) = (\max \{0, x_{1,0} - \ell(0, r_0 \oplus 01, 1)\}; \\ \max \{0, x_{2,0} + x_{4,0} - \ell(0, r_0 \oplus 01, 2)\}; x_{3,0}; \min \{x_{1,0}, \ell(0, r_0 \oplus 01, 1)\}).$$

Тогда, учитывая формулу (2.12), имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0 \oplus 01)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) = \\ = \tilde{\varphi}_3(0, r_0 \oplus 01, T^{(0,r_0 \oplus 01)}, x_{3,0}, x_{3,0}) \times \\ \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_0 \oplus 01)}) \psi(a_2, x_{4,0}, p_{0,r_0 \oplus 01}), \quad (2.14)$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, x_{4,0})$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\mathbb{A}_{\text{trans}} = \mathbb{A}_{\text{trans}}(x^0, x^1, 0, r_0 \oplus 01) = \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \min \{\ell(0, r_0 \oplus 01, 1), x_{1,0} + a_1\} + x_{4,0} - x_{4,1}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_{1,1} = \max \{0, x_{1,0} + a_1 - \ell(0, r_0 \oplus 01, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_{2,1} = \max \{0, x_{2,0} + a_2 - \ell(0, r_0 \oplus 01, 2)\}\}.$$

Действительно, при $x_{4,1} = \min \{x_{1,0}, \ell(0, r_0 \oplus 1, 1)\}$ и $a_1 = 0$ условие для a_2 во множестве $\mathbb{A}_{\text{trans}}^0$ примет вид:

$$\begin{aligned} a_2 &= \min \{\ell(0, r_0 \oplus 1, 1), x_{1,0} + a_1\} + x_{4,0} - \min \{x_{1,0}, \ell(0, r_0 \oplus 1, 1)\} = \\ &= x_{4,0} + \min \{\ell(0, r_0 \oplus 1, 1), x_{1,0} + a_1\} - \min \{x_{1,0}, \ell(0, r_0 \oplus 1, 1)\} = x_{4,0}. \end{aligned}$$

При $x_{1,1} = \max \{0, x_{1,0} - \ell(0, r_0 \oplus 1, 1)\}$, $a_1 = 0$ условие для a_2 во множестве $\mathbb{A}_{\text{trans}}^1$ примет вид:

$$\max \{0, x_{1,0} - \ell(0, r_0 \oplus 1, 1)\} = \max \{0, x_{1,0} + a_1 - \ell(0, r_0 \oplus 1, 1)\}.$$

И при $x_{2,1} = \max \{0, x_{2,0} + x_{4,0} - \ell(0, r_0 \oplus 1, 2)\}$ условие для a_2 во множестве $\mathbb{A}_{\text{trans}}^2$ примет вид:

$$\max \{0, x_{2,0} + x_{4,0} - \ell(0, r_0 \oplus 1, 2)\} = \max \{0, x_{2,0} + a_2 - \ell(0, r_0 \oplus 1, 2)\}.$$

Следовательно, множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^0, x^1, 0, r_0 \oplus 1)$ не пусто. Из определения (1.24) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(0, r_0 \oplus 1, T^{(0, r_0 \oplus 1)}, x_{3,0}, x_{3,0}) &= \\ &= (1 - \delta_{x_{3,1}, 0}) \varphi_3(x_{3,0} + \ell(0, r_0 \oplus 1, 3) - x_{3,0}, T^{(0, r_0 \oplus 1)}) + \\ &\quad + \delta_{x_{3,1}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(0, r_0 \oplus 1, 3) - x_{3,0}} \varphi_3(a, T^{(0, r_0 \oplus 1)}) \geq \\ &\geq (1 - \delta_{x_{3,1}, 0}) \varphi_3(x_{3,0} + \ell(0, r_0 \oplus 1, 3) - x_{3,0}, T^{(0, r_0 \oplus 1)}) + \\ &\quad + \delta_{x_{3,1}, 0} \varphi_3(0, T^{(0, r_0 \oplus 1)}) > 0. \end{aligned}$$

Поскольку $1 > p_{0, r_0 \oplus 1} > 0$, то

$$\psi(x_{4,0}, x_{4,0}, p_{0, r_0 \oplus 1}) = C_{x_{4,0}}^{x_{4,0}} p_{0, r_0 \oplus 1}^{x_{4,0}} > 0, \quad \varphi_1(0, T^{(0, r_0 \oplus 1)}) > 0.$$

Следовательно, выражение (2.14) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus 1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) &\geq \\ &\geq \tilde{\varphi}_3(0, r_0 \oplus 1, T^{(0, r_0 \oplus 1)}, x_{3,0}, x_{3,0}) \times \varphi_1(0, T^{(0, r_0 \oplus 1)}) \psi(x_{4,0}, x_{4,0}, p_{0, r_0 \oplus 1}) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность за один такт перейти из состояния $(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0)$ в состояние $(\Gamma^{(0, r_0 \oplus 1)}, x^1)$ положительна.

Поскольку никаких ограничений на вектор $x^0 \in \mathbb{Z}_+^4$, кроме $x_{3,0} \leq L$, наложено не было, то аналогичными рассуждениями (положив $x^0 = x^1$ и $x^1 = x^2$) можем получить

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_2 = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 2)}, \varkappa_2 = x^2\} | \{\omega : \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\}) > 0,$$

для

$$x^2 = (\max \{0, x_{1,1} - \ell(0, r_0 \oplus_0 2, 1)\}; \\ \max \{0, x_{2,1} + x_{4,1} - \ell(0, r_0 \oplus_0 2, 2)\}; x_{3,0}; \min \{x_{1,1}, \ell(0, r_0 \oplus_0 2, 1)\}).$$

В общем случае

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_{j+1} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 j+1)}, \varkappa_{j+1} = x^{j+1}\} | \{\omega : \Gamma_j = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 j)}, \varkappa_j = x^j\}) > 0,$$

для

$$x^{j+1} = (\max \{0, x_{1,j} - \ell(0, r_0 \oplus_0 j + 1, 1)\}; \\ \max \{0, x_{2,j} + x_{4,j} - \ell(0, r_0 \oplus_0 j + 1, 2)\}; x_{3,0}; \min \{x_{1,j}, \ell(0, r_0 \oplus_0 j + 1, 1)\}),$$

для $j = 1, 2, \dots, N_2$. Число N_2 будет определено ниже.

Так как для каждой очереди O_s , $s = 1, 2, 4$, найдется состояние продления, в котором она обслуживается (состояния продления образуют цикл), т. е. $\ell(0, r_0 \oplus_0 j, s) > 0$, то для некоторого $N_1 > 0$ количество требований x_{1,N_1} , x_{2,N_1} и x_{4,N_1} в соответствующих очередях O_1 , O_2 и O_4 станет равным нулю, т.е.

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 N_1)}, \varkappa_{N_1} = x^{N_1}\} | \\ \{\omega : \Gamma_{N_1-1} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 (N_1-1))}, \varkappa_{N_1-1} = x^{N_1-1}\}) > 0,$$

для $x^{N_1} = (0; 0; x_{3,0}; 0)$. Поскольку все состояния продления образуют цикл, то существует такое число $N_2 > N_1$, что $r_0 \oplus_0 N_2 = \tilde{r} \oplus_0 1$ и

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\} | \\ \{\omega : \Gamma_{N_2-1} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 (N_2-1))}, \varkappa_{N_2-1} = x^{N_2-1}\}) > 0,$$

где $x^{N_2} = (0, 0, x_{3,0}, 0)$. Для завершения доказательства теперь необходимо рассмотреть переход

$$(\Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 N_2)}, x^{N_2}) \rightarrow (\Gamma^{(0,\tilde{r})}, x^{N_2+1}),$$

то есть оценить вероятность перехода

$$\mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\} | \{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\}),$$

где

$$(\Gamma_{N_2+1}, \varkappa_{N_2+1}) = (\Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 N_2)}, x^{N_2+1}) = (\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, \tilde{x}_3, 0))$$

есть конечное состояние. Опять учитывая формулу (2.12), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\} | \{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\}) = \\ = \tilde{\varphi}_3(0, \tilde{r}, T^{(0,\tilde{r})}, x_{3,0}, \tilde{x}_3) \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,\tilde{r})}) \psi(a_2, 0, p_{0,\tilde{r}}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{trans}} &= \mathbb{A}_{\text{trans}}(x^{N_2}, x^{N_2+1}, 0, \tilde{r}) = \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: a_2 = \min\{\ell(0, \tilde{r}, 1), a_1\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: 0 = \max\{0, a_1 - \ell(0, \tilde{r}, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: 0 = \max\{0, a_2 - \ell(0, \tilde{r}, 2)\}\}. \end{aligned}$$

Из определений (1.24) находим

$$\tilde{\varphi}_3(0, \tilde{r}, T^{(0,\tilde{r})}, x_{3,0}, \tilde{x}_3) \geq (1 - \delta_{\tilde{x}_3,0}) \varphi_3(\tilde{x}_3 + 0 - x_{3,0}, T^{(0,\tilde{r})}) + \delta_{\tilde{x}_3,0} \varphi_3(0, T^{(0,\tilde{r})}) > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\} | \{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 N_2)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\}) \geq \\ \geq \tilde{\varphi}_3(0, \tilde{r}, T^{(0,\tilde{r})}, x_{3,0}, \tilde{x}_3) \times \varphi_1(0, T^{(0,\tilde{r})}) \psi(0, 0, p_{0,\tilde{r}}) > 0. \end{aligned}$$

Положим $N = N_2 + 1$ и соберем все воедино:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = x^N\} | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) = \\ = \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\} | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geq \\ \geq \mathbf{P}(C | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C = \\ = \left\{ \omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1} \right\} \cap \left\{ \omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0,\tilde{r} \oplus_0 1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2} \right\} \cap \dots \\ \dots \cap \left\{ \omega: \Gamma_2 = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 2)}, \varkappa_2 = x^2 \right\} \cap \left\{ \omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(0,r_0 \oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1 \right\}. \end{aligned}$$

Наконец, из теоремы умножения и марковского свойства заключаем, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\left\{\omega: \Gamma_N = \Gamma^{(0, \tilde{r})}, \varkappa_N = x^N\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\right\}\right) \geq \\ & \geq \mathbf{P}\left(\left\{\omega: \Gamma_{N_2+1} = \Gamma^{(0, \tilde{r})}, \varkappa_{N_2+1} = x^{N_2+1}\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\right\}\right) \times \\ & \times \mathbf{P}\left(\left\{\omega: \Gamma_{N_2} = \Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 1)}, \varkappa_{N_2} = x^{N_2}\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_{N_2-1} = \Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 2)}, \varkappa_{N_2-1} = x^{N_2-1}\right\}\right) \times \\ & \times \dots \times \mathbf{P}\left(\left\{\omega: \Gamma_2 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus_0 2)}, \varkappa_2 = x^2\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\right\}\right) \times \\ & \times \mathbf{P}\left(\left\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(0, r_0 \oplus_0 1)}, \varkappa_1 = x^1\right\} \middle| \left\{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\right\}\right) > 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Таким образом, каждый переход в цепочке переходов

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(0, r_0)}, x^0) & \rightarrow (\Gamma^{(0, r_0 \oplus_0 1)}, x^1) \rightarrow (\Gamma^{(0, r_0 \oplus_0 2)}, x^2) \rightarrow \dots \\ & \dots \rightarrow (\Gamma^{(0, r_0 \oplus_0 N_2)}, x^{N_2}) \rightarrow (\Gamma^{(0, \tilde{r})}, x^{N_2+1}) \end{aligned}$$

от начального до конечного состояний имеет ненулевую вероятность. \square

В лемме 2 покажем, как из произвольного состояния цикла $k_0 > 0$ перейти в состояние продления с заданным количеством требований $0, 0, L + 1, 0$ в очередях O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно.

Лемма 2. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \tilde{x} = (0, 0, L + 1, 0),$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0), \quad k_0 > 0, r_0 = \overline{1, n_{k_0}}, x^0 \in \mathbb{Z}_+^4.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что существует такое натуральное число N , что

$$\mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_N = \Gamma^{(0, \tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\} | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Как и в предыдущей лемме рассмотрим сначала последовательность состояний в рамках одного цикла с индексом k_0 :

$$(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0) \rightarrow (\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x^1) \rightarrow (\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 2)}, x^2) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} N_1)}, x^{N_1}),$$

где $x^0 = (x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, x_{4,0})$ и число $N_1 \geq 0$ определено ниже. Пусть

$$\begin{aligned} x^{j+1} &= \\ &= \left(\max \left\{ 0, x_{1,j} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} j + 1, 1) \right\}; \max \left\{ 0, x_{2,j} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} j + 1, 2) \right\}; \right. \\ &\quad \left. \max \left\{ 0, x_{3,j} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} j + 1, 3) \right\}; x_{4,j} + \min \left\{ x_{1,j}, \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} j + 1, 1) \right\} \right), \end{aligned}$$

$j = \overline{0, N_1 - 1}$. Пусть далее N_1 — это первый номер, при котором одновременно выполнено два условия: 1) обслуживающее устройство находится в выходном состоянии, то есть $r_0 \oplus_{k_0} N_1 = n_{k_0}$, и 2) количество требований в очереди O_3 не превышает порог L , то есть $x_{3,N_1} \leq L$. Такое N_1 всегда существует, так как пока $x_{3,j} > L$ и $r_0 \oplus_{k_0} s \neq n_0$, обслуживающее устройство будет находиться в цикле k_0 и периодически обслуживать третью очередь. То есть $\ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} s, 1) > 0$ для некоторого $s \in \{1, 2, \dots, n_{k_0}\}$. Для доказательства существования N_1 также важно учесть, что в рассматриваемых нами графах переходов в каждом цикле $k_0 > 0$ существует выходное состояние и притом только одно. Заметим, что в случае $x_{3,0} \leq L$ и $r_0 = n_{k_0}$ можно положить $N_1 = 0$, поэтому далее будем предполагать это условие не выполненным.

Учитывая формулу (2.12) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_1 = \Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) &= \\ &= \tilde{\varphi}_3(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x_{3,0}, \max \{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}) \times \\ &\quad \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) \psi(a_2, x_{4,0}, p_{k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^0, x^1, k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1) = \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2,$$

и

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \min \{ \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 1), x_{1,0} + a_1 \} + x_{4,0} - \\ &\quad - x_{4,0} - \min \{ x_{1,0}, \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 1) \} \}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \max \{ 0, x_{1,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 1) \} = \\ &\quad = \max \{ 0, x_{1,0} + a_1 - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 1) \} \}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \max \{ 0, x_{2,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 2) \} = \\ &\quad = \max \{ 0, x_{2,0} + a_2 - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 2) \} \}. \end{aligned}$$

Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}) = \\ = (1 - \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0}) \times \\ \times \varphi_3(\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\} + \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3) - x_{3,0}, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) + \\ + \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3) - x_{3,0}} \varphi_3(a, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}), \end{aligned}$$

а после приведения подобных слагаемых, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}) = \\ = (1 - \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0}) \times \varphi_3(0, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) + \\ + \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3) - x_{3,0}} \varphi_3(a, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) \geq \\ \geq (1 - \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0}) \times \varphi_3(0, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) + \\ + \delta_{\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, 3)\}, 0} \varphi_3(0, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) = \varphi_3(0, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) > 0. \end{aligned}$$

Поскольку $1 > p_{k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1} > 0$, то

$$\psi(0, x_{4,0}, p_{k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1}) = C_{x_{4,0}}^0 (1 - p_{k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1})^{x_{4,0}} > 0, \quad \varphi_1(0, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) > 0.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_1 = \Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geq \\ \geq \tilde{\varphi}_3(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x_{3,0}, x_{3,1}) \varphi_1(0, T^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}) \psi(0, x_{4,0}, p_{k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1}) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность за один такт перейти из состояния $(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0)$ в состояние $(\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} 1)}, x^1)$ положительна.

Аналогичные рассуждения верны и для произвольного $j = \overline{1, N_1 - 1}$ при переходе из состояния $(\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} j)}, x^j)$ в состояние $(\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus_{k_0} (j+1))}, x^{j+1})$, поскольку в качестве x^0 был взят произвольный вектор из \mathbb{Z}_+^4 , а в качестве $\Gamma^{(k_0, r_0)}$ — произвольное состояние цикла из Γ , $k_0 > 0$. Единственным предположением было лишь невозможность выхода из цикла на следующем такте: $x_{0,j} > L$.

Теперь рассмотрим переход из выходного состояния $(\Gamma_{N_1}, \varkappa_{N_1}) = (\Gamma^{(k_0, n_{k_0}}), x^{N_1})$, $x_{3, N_1} \leq L$, цикла k_0 в состояние продления $(\Gamma_{N_1+1}, \varkappa_{N_1+1}) = (\Gamma^{(0, r_1)}, x^{N_1+1})$, где $r_1 = h_1(\Gamma^{(k_0, n_{k_0}}), x_{3, N_1})$ и

$$\begin{aligned} x^{N_1+1} = (\max\{0, x_{1, N_1} - \ell(0, r_1, 1)\}; \max\{0, x_{2, N_1} - \ell(0, r_1, 2)\}; x_{3, N_1}; \\ x_{4, N_1} + \min\{x_{1, N_1}, \ell(0, r_1, 1)\}). \end{aligned}$$

Из формулы (2.12) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{N_1+1} = \Gamma^{(0,r_1)}, \varkappa_{N_1+1} = x^{N_1+1}\} | \{\omega: \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(k_0, n_{k_0})}, \varkappa_{N_1} = x^{N_1}\}) &= \\ &= \tilde{\varphi}_3(0, r_1, T^{(0,r_1)}, x_{3,N_1}, x_{3,N_1}) \times \\ &\quad \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_1)}) \psi(a_2, x_{4,N_1}, p_{0,r_1}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{trans}}(x^{N_1}, x^{N_1+1}, 0, r_1) &= \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: a_2 = \min\{\ell(0, r_1, 1), x_{1,N_1} + a_1\} + x_{4,N_1} - x_{4,N_1+1}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: x_{1,N_1+1} = \max\{0, x_{1,N_1} + a_1 - \ell(0, r_1, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: x_{2,N_1+1} = \max\{0, x_{2,N_1} + a_2 - \ell(0, r_1, 2)\}\}. \end{aligned}$$

Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(0, r_1, T^{(0,r_1)}, x_{3,N_1}, x_{3,N_1}) &= \\ &= (1 - \delta_{x_{3,N_1+1}, 0}) \times \varphi_3(x_{3,N_1+1} + \ell(0, r_1, 3) - x_{3,N_1}, T^{(0,r_1)}) + \delta_{x_{3,N_1+1}, 0} \varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) = \\ &= (1 - \delta_{x_{3,N_1+1}, 0}) \times \varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) + \delta_{x_{3,N_1+1}, 0} \varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) = \varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) > 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{N_1+1} = \Gamma^{(0,r_1)}, \varkappa_{N_1+1} = x^{N_1+1}\} | \{\omega: \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(k_0, n_{k_0})}, \varkappa_{N_1} = x^{N_1}\}) &\geq \\ &\geq \varphi_3(0, T^{(0,r_1)}) \times \varphi_1(0, T^{(0,r_1)}) \psi(0, x_{4,N_1}, p_{0,r_1}) > 0, \end{aligned}$$

и вероятность перейти из состояния $(\Gamma^{(k_0, n_{k_0})}, x^{N_1})$ в состояние $(\Gamma^{(0,r_1)}, x^{N_1+1})$ за один такт положительна.

Таким образом, вероятность перейти из состояния $(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0)$, $k_0 > 0$, $x^0 \in \mathbb{Z}_+^4$, в состояние

$$(\Gamma^{(0,r_1)}, x^{N_1+1}), \quad r_1 = h_1(\Gamma^{(k_0, n_{k_0})}, x_{3,N_1}) \in \{1, 2, \dots, n_0\},$$

за $(N_1 + 1)$ шагов положительна. По предыдущей лемме существует такое число шагов $N_2 \geq 0$, за которое можно перейти из состояния вида $(\Gamma^{(0,r_1)}, x^{N_1+1})$ в состояние $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, L + 1, 0))$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$. Полагая $N = N_1 + 1 + N_2$, получаем утверждение леммы. \square

Лемма 3 заключает о том, что состояния вида $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, (0, 0, L + 1, 0))$ являются существенными. Наличие некоторого множества существенных состояний позволит в дальнейшем найти все оставшиеся существенные состояния.

Лемма 3. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \tilde{x} = (0, 0, L + 1, 0),$$

достижимы из любых состояний системы, то есть из состояний вида

$$(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0), \quad k_0 = \overline{0, d}, r_0 = \overline{1, n_{k_0}}, x^0 \in \mathbb{Z}_+^4.$$

Таким образом, состояния $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$ являются существенными.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что существует такое натуральное число N , что

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

В леммах (1) и (2) решен вопрос для всех начальных состояний, кроме состояний вида $(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0)$, $x_{3,0} > L$. Но нетрудно проверить, что на следующем такте (после состояния $(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0)$) с ненулевой вероятностью из этого состояния можно перейти в состояние цикла вида $(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x^1)$, где $\Gamma^{(k_1, r_1)} = h_3(r_0)$, $k_1 > 0$, и

$$x^1 = (\max\{0, x_{1,0} - \ell(k_1, r_1, 1)\}; \max\{0, x_{2,0} - \ell(k_1, r_1, 2)\}; \\ \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_1, r_1, 3)\}; x_{4,0} + \min\{x_{1,0}, \ell(k_1, r_1, 1)\}).$$

Действительно, из формулы (2.12) имеем

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_1 = \Gamma^{(k_1, r_1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) = \\ = \tilde{\varphi}_3(k_1, r_1, T^{(k_1, r_1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_1, r_1, 3)\}) \times \\ \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(k_1, r_1)}) \psi(a_2, x_{4,0}, p_{k_1, r_1}),$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^0, x^1, k_1, r_1) = \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \min\{\ell(k_1, r_1, 1), x_{1,0} + a_1\} + x_{4,0} - x_{4,1}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_{1,1} = \max\{0, x_{1,0} + a_1 - \ell(k_1, r_1, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_{2,1} = \max\{0, x_{2,0} + a_2 - \ell(k_1, r_1, 2)\}\}.$$

Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(k_1, r_1, T^{(k_1, r_1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(k_1, r_1, 3)\}) &= (1 - \delta_{x_{3,1}, 0}) \times \\ &\times \varphi_3(\max\{0, x_{3,0} - \ell(k_1, r_1, 3)\} + \ell(k_1, r_1, 3) - x_{3,0}, T^{(k_1, r_1)}) + \\ &+ \delta_{x_{3,1}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(k_1, r_1, 3) - x_{3,0}} \varphi_3(a, T^{(k_1, r_1)}) > 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_1 = \Gamma^{(k_1, r_1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(k_0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) &\geq \\ &\geq \tilde{\varphi}_3(k_1, r_1, T^{(k_1, r_1)}, x_{3,0}, x_{3,1}) \times \varphi_1(0, T^{(k_1, r_1)}) \psi(0, x_{4,0}, p_{k_1, r_1}) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность за один такт перейти из состояния $(\Gamma^{(k_0, r_0)}, x^0)$ в состояние $(\Gamma^{(k_0, r_0 \oplus k_0 1)}, x^1)$ положительна. Далее, по лемме (2) за N_1 шагов можно перейти в искомое конечное состояние $(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, (0, 0, L+1, 0))$. Полагая $N = N_1 + 1$, получаем утверждение леммы. \square

В леммах 4, 5, 6 определяются состояния, сообщающиеся с существенными состояниями $(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0)$, $x_0 = (0, 0, L+1, 0)$, $r_0 = \overline{1, n_0}$. Таким способом определится все множество существенных состояний. В частности, лемма 4 касается состояний циклов.

Лемма 4. *Состояния вида*

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{x} = (0, 0, \tilde{x}_3, 0), \quad \tilde{x}_3 \geq \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, \\ \tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}, \quad \tilde{k} > 0, \quad \Gamma^{(\tilde{k}, 1)} = h_3(r_0), \end{aligned}$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x_0 = (0, 0, L+1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что существует такое натуральное число N , что

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_N = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Поскольку $h(\Gamma^{(0,r_0)}, L+1) = \Gamma^{(\tilde{k},1)}$, то $\Gamma_1 = \Gamma^{(\tilde{k},1)}$. Докажем, что вероятность перехода за один такт из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$ в состояние $(\Gamma^{(\tilde{k},1)}, x^1)$, $x^1 = (0, 0, \max\{0, L+1 - \ell(\tilde{k}, 1, 3)\}, 0)$, положительна. Действительно, из формулы (2.12) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_1 = \Gamma^{(\tilde{k},1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) &= \\ &= \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, 1, T^{(\tilde{k},1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(\tilde{k}, 1, 3)\}) \times \\ &\quad \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(\tilde{k},1)}) \psi(a_2, x_{4,0}, p_{\tilde{k},1}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{trans}}(x^0, x^1, \tilde{k}, 1) &= \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, 1, 1), x_{1,0} + a_1\} + x_{4,0} - x_{4,1}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_{1,1} = \max\{0, x_{1,0} + a_1 - \ell(k_1, r_1, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_{2,1} = \max\{0, x_{2,0} + a_2 - \ell(k_1, r_1, 2)\}\}. \end{aligned}$$

При $x_{1,0} = x_{4,0} = x_{4,1} = 0$ множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}^0$ преобразуется следующим образом:

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}^0 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, 1, 1), a_1\}\}.$$

При $x_{1,0} = x_{1,1} = 0$ множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}^1$ преобразуется следующим образом:

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}^1 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : 0 = \max\{0, a_1 - \ell(k_1, r_1, 1)\}\}.$$

И при $x_{2,1} = x_{2,0} = 0$ множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}^2$ преобразуется следующим образом:

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}^2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : 0 = \max\{0, a_2 - \ell(k_1, r_1, 2)\}\}.$$

Тем самым элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$ принадлежит множеству $\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^0, x^1, \tilde{k}, 1)$. Далее, из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, 1, T^{(\tilde{k},1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(\tilde{k}, 1, 3)\}) &= (1 - \delta_{x_{3,1},0}) \times \\ &\quad \times \varphi_3(\max\{0, x_{3,0} - \ell(\tilde{k}, 1, 3)\} + \ell(\tilde{k}, 1, 3) - x_{3,0}, T^{(\tilde{k},1)}) + \\ &\quad \quad \quad + \delta_{x_{3,1},0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},1,3) - x_{3,0}} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},1)}) > 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_1 = \Gamma^{(\tilde{k},1)}, \varkappa_1 = x^1\} | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) \geq \\ & \geq \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, 1, T^{(\tilde{k},1)}, x_{3,0}, \max\{0, x_{3,0} - \ell(\tilde{k}, 1, 3)\}) \times \varphi_1(0, T^{(\tilde{k},1)}) \psi(0, x_{4,0}, p_{\tilde{k},1}) > 0, \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим переход из состояния x^j в состояние x^{j+1} , $j = \overline{1, \tilde{r} - 2}$, где

$$x^j = (0, 0, \max\{0, L + 1 - \sum_{s=1}^j \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, 0).$$

Из формулы (2.12) имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{j+1} = \Gamma^{(\tilde{k},j+1)}, \varkappa_{j+1} = x^{j+1}\} | \{\omega: \Gamma_j = \Gamma^{(\tilde{k},j)}, \varkappa_j = x^j\}) = \\ & = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, j+1, T^{(\tilde{k},j+1)}, x_{3,j}, \max\{0, x_{3,j} - \ell(\tilde{k}, j+1, 3)\}) \times \\ & \quad \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(\tilde{k},j+1)}) \psi(a_2, x_{4,j}, p_{\tilde{k},j+1}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}_{\text{trans}}(x^j, x^{j+1}, \tilde{k}, j+1) = \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ & \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: a_2 = \min\{\ell(\tilde{k}, j+1, 1), x_{1,j} + a_1\} + x_{4,j} - x_{4,j+1}\}, \\ & \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: x_{1,j+1} = \max\{0, x_{1,j} + a_1 - \ell(\tilde{k}, j+1, 1)\}\}, \\ & \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2: x_{2,j+1} = \max\{0, x_{2,j} + a_2 - \ell(\tilde{k}, j+1, 2)\}\}, \end{aligned}$$

Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, j+1, T^{(\tilde{k},j+1)}, x_{3,j}, \max\{0, x_{3,j} - \ell(\tilde{k}, j+1, 3)\}) = (1 - \delta_{x_{3,j+1}, 0}) \times \\ & \quad \times \varphi_3(\max\{0, x_{3,j} - \ell(\tilde{k}, j+1, 3)\} + \ell(\tilde{k}, j+1, 3) - x_{3,j}, T^{(\tilde{k},j+1)}) + \\ & \quad + \delta_{x_{3,j+1}, 0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, j+1, 3) - x_{3,j}} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},j+1)}) > 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{j+1} = \Gamma^{(\tilde{k},j+1)}, \varkappa_{j+1} = x^{j+1}\} | \{\omega: \Gamma_j = \Gamma^{(\tilde{k},j)}, \varkappa_j = x^j\}) \geq \\ & \geq \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, j+1, T^{(\tilde{k},j+1)}, x_{3,j}, \max\{0, x_{3,j} - \ell(\tilde{k}, j+1, 3)\}) \times \\ & \quad \times \varphi_1(0, T^{(\tilde{k},j+1)}) \psi(0, x_{4,j}, p_{\tilde{k},j+1}) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, все переходы в цепочке

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0) \rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k},1)}, x^1) \rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k},2)}, x^1) \rightarrow \dots \rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}-1)}, x^{\tilde{r}-1})$$

имеют ненулевую вероятность. В завершении доказательства осталось рассмотреть переход в конечное состояние:

$$(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}-1)}, x^{\tilde{r}-1}) \rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \text{если } \tilde{r} > 1, \quad (2.15)$$

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0) \rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \text{если } \tilde{r} = 1. \quad (2.16)$$

В случае (2.15), то есть $\tilde{r} > 1$, из формулы (2.12) опять имеем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_{\tilde{r}} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \varkappa_{\tilde{r}} = \tilde{x}\} | \{\omega : \Gamma_{\tilde{r}-1} = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r}-1)}, \varkappa_{\tilde{r}-1} = x^{\tilde{r}-1}\}) = \\ & = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}, x_{3,\tilde{r}-1}, \tilde{x}_3) \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \psi(a_2, x_{4,\tilde{r}-1}, p_{\tilde{k},\tilde{r}}) = \\ & = \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}-1} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, \tilde{x}_3) \times \\ & \quad \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) \psi(a_2, 0, p_{\tilde{k},\tilde{r}}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$. Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}-1} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, \tilde{x}_3) = (1 - \delta_{\tilde{x}_3,0}) \times \\ & \quad \times \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}-1} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) + \\ & \quad + \delta_{\tilde{x}_3,0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3) - \tilde{x}_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) > 0, \end{aligned}$$

поскольку $\tilde{x}_3 \geq \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}$ и

$$\begin{aligned} & \tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}-1} \ell(\tilde{k}, s, 3)\} \geq \\ & \geq \tilde{x}_3 - \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\} \geq 0. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{\tilde{r}} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \varkappa_{\tilde{r}} = \tilde{x}\} | \{\omega: \Gamma_{\tilde{r}-1} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r}-1)}, \varkappa_{\tilde{r}-1} = x^{\tilde{r}-1}\}) &\geq \\ &\geq \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}-1} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, \tilde{x}_3) \times \\ &\quad \times \varphi_1(0, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) \psi(0, 0, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) > 0. \end{aligned}$$

В другом случае (2.16), то есть $\tilde{r} = 1$, из формулы (2.12) и того факта, что $h(\Gamma^{(0, r_0)}, L+1) = \Gamma^{(\tilde{k}, 1)}$, следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{\tilde{r}} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \varkappa_{\tilde{r}} = \tilde{x}\} | \{\omega: \Gamma_0 = \Gamma^{(0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) &= \\ &= \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, x_{3,0}, \tilde{x}_3) \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) \psi(a_2, x_{4,0}, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) = \\ &= \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}-1} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, \tilde{x}_3) \times \\ &\quad \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) \psi(a_2, 0, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) > 0, \end{aligned}$$

так как последняя вероятность уже рассмотрена выше.

Следовательно, все переходы в цепочке

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(0, r_0)}, x^0) &\rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k}, 1)}, x^1) \rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k}, 2)}, x^1) \rightarrow \dots \\ &\dots \rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r}-1)}, x^{\tilde{r}-1}) \rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} > 1, \end{aligned}$$

и переход

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0) \rightarrow (\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{r} = 1,$$

имеют ненулевую вероятность и лемма доказана. □

Лемма 5. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{x} = (0, 0, \tilde{x}_3, 0), \tilde{x}_3 \geq \max\{0, L+1 - \sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, \quad (2.17)$$

где $\tilde{k} = \overline{1, d}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$, достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x_0 = (0, 0, L+1, 0), r_0 = \overline{1, n_0}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что существует такое натуральное число N , что

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_N = \Gamma^{(0,\tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(0,r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Действительно, по лемме 3 существует такое натуральное число N_1 , что за N_1 шагов из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$ можно перейти в состояние $(\Gamma^{(0,r_1)}, x^1)$, $\Gamma^{(\tilde{k},1)} = h_3(r_1)$, $x^1 = (0, 0, L + 1, 0)$. По лемме 4 существует такое число шагов N_2 , за которое можно перейти далее в состояние $(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}, x^2)$,

$$x^2 = (0, 0, \max\{0, L + 1 - \sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3)\}, 0).$$

Теперь достаточно показать, что из состояния $(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})}, x^2)$ можно перейти за один шаг в состояние $(\Gamma^{(0,r_3)}, x^3)$, $r_3 = h_1(\Gamma^{(\tilde{k},n_{\tilde{k}})})$, $x^3 = x^2$, поскольку по лемме 1 за конечное число N_3 шагов из последнего можно перейти в состояние $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$.

Итак, из формулы (2.12) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{N_1+N_2+1}(0, r_3, x^3) | A_{N_1+N_2}(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}, x^2)) &= \tilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0,r_3)}, x_{3,2}, x_{3,3}) \times \\ &\times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_3)}) \psi(a_2, x_{4,2}, p_{0,r_3}) = \\ &= \tilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0,r_3)}, x_{3,2}, x_{3,2}) \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_3)}) \psi(a_2, 0, p_{0,r_3}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{trans}}(x^2, x^3, 0, r_3) &= \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \min\{\ell(0, r_3, 1), x_{1,2} + a_1\} + x_{4,2} - x_{4,3}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_{1,3} = \max\{0, x_{1,2} + a_1 - \ell(0, r_3, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_{2,3} = \max\{0, x_{2,2} + a_2 - \ell(0, r_3, 2)\}\}. \end{aligned}$$

Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0,r_3)}, x_{3,2}, x_{3,2}) &= \\ &= (1 - \delta_{x_{3,2}, 0}) \times \varphi_3(x_{3,2} - x_{3,2}, T^{(0,r_3)}) + \delta_{x_{3,2}, 0} \varphi_3(0, T^{(0,r_3)}), \end{aligned}$$

и после упрощений получим:

$$\tilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0, r_3)}, x_{3,2}, x_{3,2}) = \varphi_3(0, T^{(0, r_3)}) > 0.$$

Значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_{N_1+N_2+1} = \Gamma^{(0, r_3)}, \varkappa_{N_1+N_2+1} = x^3\} | \{\omega : \Gamma_{N_1+N_2} = \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, \varkappa_{N_1+N_2} = x^2\}) &\geq \\ &\geq \tilde{\varphi}_3(0, r_3, T^{(0, r_3)}, x_{3,2}, x_{3,2}) \times \varphi_1(0, T^{(0, r_3)}) \psi(0, 0, p_{0, r_3}) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, полагая $N = N_1 + N_2 + 1 + N_3$, получаем утверждение леммы. \square

Взяв в выражении (2.17) в качестве \tilde{k} такое, которое максимизирует сумму $\sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3)$, получим лемму 6.

Лемма 6. *Состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}),$$

где

$$\tilde{x} = (0, 0, \tilde{x}_3, 0), \tilde{x}_3 \geq \max\{0, L + 1 - \max_{k=\overline{1, d}} \{\sum_{s=1}^{n_k} \ell(k, s, 3)\}\}, \tilde{r} = \overline{1, n_0},$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x^0 = (0, 0, L + 1, 0), r_0 = \overline{1, n_0}.$$

Лемма 7. *Если состояния вида*

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, (0, 0, \min\{L, \tilde{x}_3\}, 0)), \quad \tilde{r} = \overline{1, n_0}, \tilde{x}_3 \geq 0,$$

достижимы из начальных состояний вида

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x^0 = (0, 0, L + 1, 0), r_0 = \overline{1, n_0},$$

то тогда из начальных состояний достижимы и состояния вида

$$(\Gamma^{(0, \tilde{r})}, \tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \{y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in Z_+^4 : y_3 = \tilde{x}_3; (y_1 > 0) \rightarrow (y_4 \geq \ell(0, \tilde{r}, 1))\}.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что существует такое число N шагов, что

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_N = \Gamma^{(0, \tilde{r})}, \varkappa_N = \tilde{x}\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0.$$

Опираясь на рассуждения предыдущих лемм, доказательство проведем в три этапа.

Первый этап. Из сделанных предположений следует существование такого натурального числа N_1 , что

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0, r_0 \oplus_0 N_1)}, \varkappa_{N_1} = (0, 0, x_3, 0)\} | \{\omega : \Gamma_0 = \Gamma^{(0, r_0)}, \varkappa_0 = x^0\}) > 0,$$

где $x_3 = \min\{L, \tilde{x}_3\}$ и $r_0 \oplus_0 N_1 = \tilde{r}$.

Второй этап. Докажем, что за N_2 шагов возможен переход

$$\begin{aligned} & (\Gamma^{(0, r_1)}, (0, 0, \min\{L, \tilde{x}_3\}, 0)) \rightarrow \\ & \rightarrow (\Gamma^{(0, r_2)}, (x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1), 0, x_3, \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1))), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \tilde{r}, \quad r_2 = \tilde{r} \oplus_0 N_2, \quad r_3 = r_2 \oplus_0 2 = \tilde{r}, \\ x_4 &= \tilde{x}_4 - (1 - \delta_{\tilde{x}_1, 0})\ell(0, \tilde{r}, 1) + \ell(0, r_3, 2), \end{aligned}$$

причем N_2 таково, что

$$\sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1) < x_4 + \tilde{x}_2 \leq \sum_{s=1}^{N_2+1} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1).$$

Введем последовательность векторов

$$\begin{aligned} x^1 &= (0, 0, x_3, 0), \\ x^2 &= (x_4 + \tilde{x}_2 - \ell(0, r_1 \oplus_0 1, 1), 0, x_3, \ell(0, r_1 \oplus_0 1, 1)), \\ x^3 &= (x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^2 \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1), 0, x_3, \sum_{s=1}^2 \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1)), \\ &\dots, \\ x^{N_2+1} &= (x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1), 0, x_3, \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1)). \end{aligned}$$

и рассмотрим переход

$$(\Gamma^{(0,r_1)}, x^1) \rightarrow (\Gamma^{(0,r_1 \oplus_0 1)}, x^2).$$

Из формулы (2.12) и того факта, что $h(\Gamma^{(0,r_1)}, \min\{L, \tilde{x}_3\}) = \Gamma^{(0,r_1 \oplus_0 1)}$, следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{N_1+1} = \Gamma^{(0,r_1 \oplus_0 1)}, \varkappa_{N_1+1} = x^2\} | \{\omega: \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0,r_1)}, \varkappa_{N_1} = x^1\}) &= \\ &= \tilde{\varphi}_3(0, r_1 \oplus_0 1, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}, \min\{L, \tilde{x}_3\}, x_3) \times \\ &\quad \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}) \psi(a_2, 0, p_{0,r_1 \oplus_0 1}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (x_4 + \tilde{x}_2, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{trans}}(x^1, x^2, 0, r_1 \oplus_0 1) &= \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \min\{\ell(0, r_1 \oplus_0 1, 1), a_1\} - \ell(0, r_1 \oplus_0 1, 1)\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_4 + \tilde{x}_2 - \ell(0, r_1 \oplus_0 1, 1) = \max\{0, a_1 - \ell(0, r_1 \oplus_0 1, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : 0 = \max\{0, a_2 - \ell(0, r_1 \oplus_0 1, 2)\}\}. \end{aligned}$$

Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(0, r_1 \oplus_0 1, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}, x_{3,1}, x_{3,2}) &= \\ &= \tilde{\varphi}_3(0, r_1 \oplus_0 1, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}, \min\{L, \tilde{x}_3\}, \min\{L, \tilde{x}_3\}) = \\ &= (1 - \delta_{x_3,0}) \times \varphi_3(\min\{L, \tilde{x}_3\} - \min\{L, \tilde{x}_3\}, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}) + \delta_{x_3,0} \varphi_3(0, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}) = \\ &= (1 - \delta_{x_3,0}) \times \varphi_3(0, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}) + \delta_{x_3,0} \varphi_3(0, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}) = \varphi_3(0, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}) > 0. \end{aligned}$$

И поскольку

$$\varphi_1(x_4 + \tilde{x}_2, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}) > 0, \quad \psi(0, 0, p_{0,r_1 \oplus_0 1}) > 0,$$

то,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\omega: \Gamma_{N_1+1} = \Gamma^{(0,r_1 \oplus_0 1)}, \varkappa_{N_1+1} = x^2\} | \{\omega: \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0,r_1)}, \varkappa_{N_1} = x^1\}) &\geq \\ &\geq \tilde{\varphi}_3(0, r_1 \oplus_0 1, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}, x_{3,1}, x_{3,2}) \times \varphi_1(x_4 + \tilde{x}_2, T^{(0,r_1 \oplus_0 1)}) \psi(0, 0, p_{0,r_1 \oplus_0 1}) > 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим переход

$$(\Gamma^{(0,r_1 \oplus_0 j)}, x^{j+1}) \rightarrow (\Gamma^{(0,r_1 \oplus_0 j+1)}, x^{j+2}), \quad j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Из формулы (2.12) и того факта, что $h(\Gamma^{(0,r_1 \oplus_0 j)}, x_3) = \Gamma^{(0,r_1 \oplus_0 j+1)}$, следует

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(A_{N_1+j+1}(0, r_1 \oplus_0 j + 1, x^{j+2}) | A_{N_1+j}(0, r_1 \oplus_0 j, x^{j+1})) = \\ & = \tilde{\varphi}_3(0, r_1 \oplus_0 j + 1, T^{(0,r_1 \oplus_0 j+1)}, \min\{L, \tilde{x}_3\}, \min\{L, \tilde{x}_3\}) \times \\ & \quad \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_1 \oplus_0 j+1)}) \psi(a_2, \sum_{s=1}^j \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1), p_{0,r_1 \oplus_0 j+1}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{trans}}(x^{j+1}, x^{j+2}, 0, r_1 \oplus_0 j + 1) &= \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \\ &= \min\{\ell(0, r_1 \oplus_0 j + 1, 1), x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^j \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1) + a_1\} - \\ & - \ell(0, r_1 \oplus_0 j + 1, 1)\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^{j+1} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1) = \\ &= \max\{0, x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^j \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1) + a_1 - \ell(0, r_1 \oplus_0 j + 1, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : 0 = \max\{0, a_2 - \ell(0, r_1 \oplus_0 j + 1, 2)\}\}. \end{aligned}$$

Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} & \tilde{\varphi}_3(0, r_1 \oplus_0 j + 1, T^{(0,r_1 \oplus_0 j+1)}, x_{3,j+1}, x_{3,j+2}) = \\ & = \tilde{\varphi}_3(0, r_1 \oplus_0 j + 1, T^{(0,r_1 \oplus_0 j+1)}, \min\{L, \tilde{x}_3\}, \min\{L, \tilde{x}_3\}) = \\ & = (1 - \delta_{\min\{L, \tilde{x}_3\}, 0}) \times \varphi_3(\min\{L, \tilde{x}_3\} - \min\{L, \tilde{x}_3\}, T^{(0,0,r_1 \oplus_0 j+1)}) + \\ & + \delta_{\min\{L, \tilde{x}_3\}, 0} \varphi_3(0, T^{(0,r_1 \oplus_0 j+1)}) = (1 - \delta_{\min\{L, \tilde{x}_3\}, 0}) \times \varphi_3(0, T^{(0,0,r_1 \oplus_0 j+1)}) + \\ & + \delta_{\min\{L, \tilde{x}_3\}, 0} \varphi_3(0, T^{(0,r_1 \oplus_0 j+1)}) = \varphi_3(0, T^{(0,0,r_1 \oplus_0 j+1)}) > 0. \end{aligned}$$

И поскольку

$$\varphi_1(0, T^{(0,r_1 \oplus_0 j+1)}) > 0, \quad \psi(0, \sum_{s=1}^j \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1), p_{0,r_1 \oplus_0 j+1}) > 0,$$

то

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(A_{N_1+j+1}(0, r_1 \oplus_0 j + 1, x^{j+2}) | A_{N_1+j}(0, r_1 \oplus_0 j, x^{j+1})) \geq \\ & \geq \tilde{\varphi}_3(0, r_1 \oplus_0 j + 1, T^{(0, r_1 \oplus_0 j+1)}, x_{3,j+1}, x_{3,j+2}) \varphi_1(0, T^{(0, r_1 \oplus_0 j+1)}) \times \\ & \times \psi(0, \sum_{s=1}^j \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1), p_{0, r_1 \oplus_0 j+1}) > 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}(\{\omega : \Gamma_{N_1+N_2} = \Gamma^{(0, r_2)}, \varkappa_{N_1+N_2} = x^{N_2+1}\} | \{\omega : \Gamma_{N_1} = \Gamma^{(0, r_1)}, \varkappa_{N_1} = x^1\}) > 0.$$

На заключительном, третьем этапе докажем, что вероятности

$$\mathbf{P}(A_{N_1+N_2+1}(0, r_2 \oplus_0 1, x^{N_2+2}) | A_{N_1+N_2}(0, r_2, x^{N_2+1})),$$

и

$$\mathbf{P}(A_{N_1+N_2+2}(0, r_2 \oplus_0 2, x^{N_2+3}) | A_{N_1+N_2+1}(0, r_2 \oplus_0 1, x^{N_2+2}))$$

положительны. Здесь

$$x^{N_2+2} = (0, 0, x_3, \tilde{x}_2 + x_4), \quad x^{N_2+3} = \tilde{x}.$$

Итак, рассмотрим переход

$$(\Gamma^{(0, r_2)}, x^{N_2+1}) \rightarrow (\Gamma^{(0, r_2 \oplus_0 1)}, x^{N_2+2}).$$

Из формулы (2.12) и того факта, что $h(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3) = \Gamma^{(0, r_2 \oplus_0 1)}$, следует

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(A_{N_1+N_2+1}(0, r_2 \oplus_0 1, x^{N_2+2}) | A_{N_1+N_2}(0, r_2, x^{N_2+1})) = \\ & = \tilde{\varphi}_3(0, r_2 \oplus_0 1, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}, \min\{L, \tilde{x}_3\}, \min\{L, \tilde{x}_3\}) \times \\ & \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}) \psi(a_2, \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1), p_{0, r_2 \oplus_0 1}). \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент $(a_1, a_2) = (0, 0)$, поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\mathbb{A}_{\text{trans}}(x^{N_2+1}, x^{N_2+2}, 0, r_2 \oplus_0 1) = \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2,$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \\
&= \min \{ \ell(0, r_2 \oplus_0 1, 1), x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1) + a_1 \} + \\
&+ \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1) - \tilde{x}_2 - x_4 \}, \\
\mathbb{A}_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : 0 = \\
&= \max \{ 0, x_4 + \tilde{x}_2 - \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1) + a_1 - \ell(0, r_2 \oplus_0 1, 1) \} \}, \\
\mathbb{A}_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : 0 = \max \{ 0, a_2 - \ell(0, r_2 \oplus_0 1, 2) \} \}.
\end{aligned}$$

Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}_3(0, r_2 \oplus_0 1, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}, x_{3, N_2+1}, x_{3, N_2+2}) &= \\
&= \tilde{\varphi}_3(0, r_2 \oplus_0 1, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}, \min\{L, \tilde{x}_3\}, \min\{L, \tilde{x}_3\}) = \\
&= (1 - \delta_{\min\{L, \tilde{x}_3\}, 0}) \times \varphi_3(\min\{L, \tilde{x}_3\} - \min\{L, \tilde{x}_3\}, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}) + \\
&+ \delta_{\min\{L, \tilde{x}_3\}, 0} \varphi_3(0, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}) = (1 - \delta_{\min\{L, \tilde{x}_3\}, 0}) \times \varphi_3(0, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}) + \\
&+ \delta_{\min\{L, \tilde{x}_3\}, 0} \varphi_3(0, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}) = \varphi_3(0, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}) > 0.
\end{aligned}$$

И поскольку

$$\varphi_1(0, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}) > 0, \quad \psi(0, \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1), p_{0, r_2 \oplus_0 1}) > 0,$$

то

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(A_{N_1+N_2+1}(0, r_2 \oplus_0 1, x^{N_2+2}) | A_{N_1+N_2}(0, r_2, x^{N_2+1})) &\geq \\
&\geq \tilde{\varphi}_3(0, r_2 \oplus_0 1, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}, x_{3, N_2+1}, x_{3, N_2+2}) \varphi_1(0, T^{(0, r_2 \oplus_0 1)}) \times \\
&\quad \times \psi(0, \sum_{s=1}^{N_2} \ell(0, r_1 \oplus_0 s, 1), p_{0, r_2 \oplus_0 1}) > 0.
\end{aligned}$$

В завершении доказательства, рассмотрим переход

$$(\Gamma^{(0, r_2 \oplus_0 1)}, x^{N_2+2}) \rightarrow (\Gamma^{(0, r_2 \oplus_0 2)}, x^{N_2+3}).$$

Из формулы (2.12) и того факта, что $h(\Gamma^{(0,r_2\oplus_0^1)}, x_3) = \Gamma^{(0,r_2\oplus_0^2)}$, следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{N_1+N_2+2}(0, r_2 \oplus_0 2, x^{N_2+3}) | A_{N_1+N_2+1}(0, r_2 \oplus_0 1, x^{N_2+2})) &= \\ &= \tilde{\varphi}_3(0, r_2 \oplus_0 2, T^{(0,r_2\oplus_0^2)}, \min\{L, \tilde{x}_3\}, \tilde{x}_3) \times \\ &\quad \times \sum_{(a_1, a_2) \in \mathbb{A}_{\text{trans}}} \varphi_1(a_1, T^{(0,r_2\oplus_0^2)}) \psi(a_2, \tilde{x}_2 + x_4, p_{0,r_2\oplus_0^2}), \end{aligned}$$

где множество $\mathbb{A}_{\text{trans}}$ не пусто и содержит, как минимум, один элемент

$$(a_1, a_2) = (\tilde{x}_1 + (1 - \delta_{\tilde{x}_1,0})\ell(0, r_2 \oplus_0 2, 1), \tilde{x}_2 + \ell(0, r_2 \oplus_0 2, 2)),$$

поскольку из соотношений (2.8)–(2.11) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{\text{trans}}(x^{N_2+2}, x^{N_2+3}, 0, r_2 \oplus_0 2) &= \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 \cap \mathbb{A}_{\text{trans}}^2, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^0 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : a_2 = \\ &\quad = \min\{\ell(0, r_2 \oplus_0 2, 1), a_1\} + \tilde{x}_2 - (1 - \delta_{\tilde{x}_1,0})\ell(0, r_2 \oplus_0 2, 1) + \ell(0, r_2 \oplus_0 2, 2)\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^1 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \tilde{x}_1 = \max\{0, a_1 - \ell(0, r_2 \oplus_0 2, 1)\}\}, \\ \mathbb{A}_{\text{trans}}^2 &= \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \tilde{x}_2 = \max\{0, a_2 - \ell(0, r_2 \oplus_0 2, 2)\}\}. \end{aligned}$$

Из определений (1.24) находим

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_3(0, r_2 \oplus_0 2, T^{(0,r_2\oplus_0^2)}, x_{3,N_2+2}, x_{3,N_2+3}) &= \tilde{\varphi}_3(0, r_2 \oplus_0 2, T^{(0,r_2\oplus_0^2)}, \min\{L, \tilde{x}_3\}, \tilde{x}_3) = \\ &= (1 - \delta_{\tilde{x}_3,0}) \times \varphi_3(\tilde{x} - \min\{L, \tilde{x}_3\}, T^{(0,0,r_2\oplus_0^2)}) + \delta_{\tilde{x}_3,0} \varphi_3(0, T^{(0,r_2\oplus_0^2)}) > 0. \end{aligned}$$

И поскольку

$$\varphi_1(\tilde{x}_1 + (1 - \delta_{\tilde{x}_1,0})\ell(0, r_2 \oplus_0 2, 1), T^{(0,r_2\oplus_0^2)}) > 0,$$

и

$$\psi(\tilde{x}_2 + \ell(0, r_2 \oplus_0 2, 2), \tilde{x}_2 + \tilde{x}_4 - (1 - \delta_{\tilde{x}_1,0})\ell(0, r_2 \oplus_0 2, 1) + \ell(0, r_2 \oplus_0 2, 2), p_{0,r_2\oplus_0^2}) > 0,$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_{N_1+N_2+2}(0, r_2 \oplus_0 2, x^{N_2+3}) | A_{N_1+N_2+1}(0, r_2 \oplus_0 1, x^{N_2+2})) &\geq \\ &\geq \tilde{\varphi}_3(0, r_2 \oplus_0 2, T^{(0,r_2\oplus_0^2)}, x_{3,N_2+2}, x_{3,N_2+3}) \times \\ &\quad \times \varphi_1(\tilde{x}_1 + (1 - \delta_{\tilde{x}_1,0})\ell(0, r_2 \oplus_0 2, 1), T^{(0,r_2\oplus_0^2)}) \times \\ &\quad \times \psi(\tilde{x}_2 + \ell(0, r_2 \oplus_0 2, 2), \tilde{x}_2 + \tilde{x}_4 - (1 - \delta_{\tilde{x}_1,0})\ell(0, r_2 \oplus_0 2, 1) + \ell(0, r_2 \oplus_0 2, 2), p_{0,r_2\oplus_0^2}) > 0. \end{aligned}$$

Этим заканчивается доказательство леммы. □

Лемма 8. Состояния вида $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$, где \tilde{x} таково, что $\tilde{x}_1 \geq 0$, $\tilde{x}_2 \geq 0$, а также

$$\tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \max_{k=1,\bar{d}} \left\{ \sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3) \right\} \right\},$$

и

$$\tilde{x}_4 \geq 0(x_1 > 0) \Rightarrow (x_4 \geq \ell(0, \tilde{r}, 1)),$$

достижимы из состояний вида

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0), x^0 = (0, 0, L + 1, 0), \Gamma^{(0,r_0)} \in \Gamma.$$

Доказательство. Из леммы (6) следует, что состояния вида $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$, где

$$\tilde{x} = (0, 0, \tilde{x}_3, 0), \tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \max_{k=1,\bar{d}} \left\{ \sum_{s=1}^{n_k} \ell(k, s, 3) \right\} \right\}, \tilde{r} = \overline{1, n_0},$$

достижимы из начального состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$.

Это, в свою очередь, по лемме (7) влечет достижимость конечных состояний $(\Gamma^{(0,\tilde{r})}, \tilde{x})$. \square

Лемма 9. Состояния вида

$$(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0), \quad x_0 = (0, 0, L + 1, 0), r_0 = \overline{1, n_0},$$

достижимы из состояний вида $(\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}, \tilde{x})$, где $\tilde{k} = \overline{1, \bar{d}}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$ и \tilde{x} таково, что

$$\tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3) \right\},$$

и

$$(\tilde{x}_1 > 0) \Rightarrow (\tilde{x}_4 \geq \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)).$$

Доказательство. Действительно, из состояния $(\Gamma^{(0,r_0)}, x^0)$ за конечное число N_1 шагов можно перейти в состояние $(\Gamma^{(0,r_1)}, x^1)$, $h_3(r_1) = \Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})}$,

$$\begin{aligned} x_{1,1} &= 0, & x_{3,1} &= \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 3) + \tilde{x}_3 \geq L + 1, \\ x_{2,1} &= \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(\tilde{k}, s, 2) + \tilde{x}_2, & x_{4,1} &= \tilde{x}_4 - (1 - \delta_{\tilde{x}_1,0}) \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1). \end{aligned}$$

На следующем такте цепь попадает в состояние цикла и далее за \tilde{r} шагов попадает в конечное состояние. Полагая $N = N_1 + \tilde{r}$, получаем утверждение леммы. \square

Из доказанных лемм 3–9 следует теорема.

Теорема 6. *Состояния вида $(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, \tilde{x})$, где $\tilde{k} = \overline{0, d}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$, $\tilde{x} \in \mathbb{Z}_+^4$,*

$$(\tilde{x}_1 > 0) \Rightarrow (\tilde{x}_4 \geq \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)), \quad (2.18)$$

$$\tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \sum_{s=1}^{\tilde{r}} \ell(k, s, 3) \right\}, \text{ если } \tilde{k} > 0, \quad (2.19)$$

$$\tilde{x}_3 \geq \max \left\{ 0, L + 1 - \max_{k=\overline{1, d}} \left\{ \sum_{s=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, s, 3) \right\} \right\}, \text{ если } \tilde{k} = 0, \quad (2.20)$$

и только они достижимы из состояния

$$(\Gamma^{(0, r_0)}, x^0), \quad x^0 = (0, 0, L + 1, 0), \quad r_0 = \overline{1, n_0},$$

и, следовательно, являются существенными.

Доказательство. Существенность состояний уже доказана в леммах 3–9, поэтому осталось доказать отсутствие других существенных состояний.

Покажем сначала, что состояния $(\Gamma^{(k, r)}, x)$, $\Gamma^{(k, r)} \in \Gamma$, $x \in Z_+^4$, для которых

$$\ell(k, r, 1) > 0, \quad x_1 > 0, \quad x_4 < \ell(k, r, 1),$$

являются несущественными. Действительно, пусть $\varkappa_{1, i+1} = x_1 > 0$, тогда из равенства (1.5) следует

$$\begin{aligned} \varkappa_{1, i+1} = \max\{0; \varkappa_{1, i} + \eta_{1, i} - \xi_{1, i}\} > 0 &\implies \\ \implies \varkappa_{1, i} + \eta_{1, i} - \xi_{1, i} > 0 &\implies \varkappa_{1, i} + \eta_{1, i} > \xi_{1, i}. \end{aligned}$$

С другой стороны $\varkappa_{4, i+1} < \ell(k, r, 1)$ и учитывая (1.6) имеем

$$\varkappa_{4, i+1} = \varkappa_{4, i} + \eta_{4, i} - \eta_{2, i} = \varkappa_{4, i} + \min\{\xi_{1, i}; \varkappa_{1, i} + \eta_{1, i}\} - \eta_{2, i} < \ell(k, r, 1) = \xi_{1, i},$$

то есть

$$\varkappa_{4, i} + \min\{\xi_{1, i}; \varkappa_{1, i} + \eta_{1, i}\} - \eta_{2, i} < \xi_{1, i} \implies \varkappa_{4, i} + \xi_{1, i} - \eta_{2, i} < \xi_{1, i} \implies \varkappa_{4, i} < \eta_{2, i}.$$

Однако это противоречит теореме (1), поскольку вероятность того, что по второму потоку поступит больше требований, чем находилось на начало такта в очереди O_4 , равна нулю.

Рассмотрим теперь вопрос о несущественности состояний вида $(\Gamma^{(k,r)}, x)$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, $x \in Z_+^4$, для которых

$$x_3 < L + 1 - \sum_{s=1}^r \ell(k, s, 3).$$

Пусть $\varkappa_{3,i+r} = x_3 < L + 1 - \sum_{s=1}^r \ell(k, s, 3)$. тогда из равенств (1.5) следует цепочка неравенств:

$$\varkappa_{3,i+r} \geq \varkappa_{3,i+r-1} - \xi_{3,i+r-1} \geq \varkappa_{3,i+r-2} - \xi_{3,i+r-1} - \xi_{3,i+r-2} \geq \varkappa_{3,i} - \sum_{s=1}^r \ell(k, s, 3).$$

То есть $\varkappa_{3,i} < L + 1$. То есть при переходе от шага i к шагу $i + 1$ количество требований в очереди O_3 не превышает порога L и должно включиться состояние продления. Однако мы исходили из предположения, что следующие r состояний соответствуют циклу с номером k . Приходим к противоречию и, следовательно, прийти в состояние с $x_3 < L + 1 - \sum_{s=1}^r \ell(k, s, 3)$ невозможно. \square

Пусть

$$S_{0,r}^3 = \left\{ (\Gamma^{(0,r)}, x_3) : x_3 \in Z_+, x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \left\{ \sum_{t=1}^{n_k} \ell(k, t, 3) \right\} \right\}, \quad 1 \leq r \leq n_0,$$

$$S_{k,r}^3 = \left\{ (\Gamma^{(k,r)}, x_3) : x_3 \in Z_+, x_3 > L - \sum_{t=1}^r \ell(k, t, 3) \right\}, \quad 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq r \leq n_k.$$

Из доказанных лемм 3–9 также следует другая теорема.

Теорема 7. *Множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имеет вид*

$$S^3 = \left(\bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}^3 \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}^3 \right). \quad (2.21)$$

Таким образом, теорема 6 описывает множество существенных состояний для основной марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$, а теорема 7 — для марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$.

Глава 3. Анализ первичных и промежуточной очередей системы

В главе 3 более подробно изучаются случайные последовательности, содержащие состояния только части очередей из последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$: очереди O_1 , O_3 и O_4 . Исключение из рассмотрения нескольких компонент пятимерной марковской цепи позволяет найти достаточное, а в некоторых случаях необходимое условия существования стационарного распределения. Для нахождения условий стационарности используется хорошо зарекомендовавший себя в схожих задачах итеративно-мажорантный метод, в котором последовательность математических ожиданий компонент цепи ограничивается числовой последовательностью более простого вида. Полученные таким способом условия имеют наглядную форму и их легко проверить.

3.1 Условия ограниченности очереди O_4

Требования промежуточной очереди O_4 формируются в результате обслуживания требований потока Π_1 . Теорема 8 устанавливает достаточное условие ограниченности этой очереди. Данный факт приближает нас к решению вопроса об условиях существования стационарного распределения всей марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_i); i \geq 0\}$.

Теорема 8. *Для того, чтобы последовательность*

$$\{\varkappa_{4,i}(\omega); i = 0, 1, \dots\},$$

была ограничена, достаточно выполнения неравенства

$$\min_{k=0, d, r=1, n_k} \{p_{k,r}\} > 0.$$

Доказательство. Пусть $(\gamma, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+$ и $\Gamma^{(\bar{k}, \bar{r})} = h(\gamma, x_3)$. Учитывая выражения (1.6), получим

$$\begin{aligned} E[\varkappa_{4,i+1} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4, \Gamma_i = \gamma] = \\ = E[w_4 - \eta_{2,i} + \min \{\xi_{1,i}, w_1 + \eta_{1,i}\} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4, \Gamma_i = \gamma] \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq E[w_4 - \eta_{2,i} + \xi_{1,i} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4, \Gamma_i = \gamma] = \\
&= E[w_4 - \eta_{2,i} + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4, \Gamma_i = \gamma] = \\
&= w_4 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - E[\eta_{2,i} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4, \Gamma_i = \gamma].
\end{aligned}$$

Из соотношений (1.9) следует

$$\begin{aligned}
E[\eta_{2,i} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4, \Gamma_i = \gamma] &= \\
&= \sum_{a=0}^{w_4} a \psi(a; w_4, p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) = \sum_{a=0}^{w_4} a C_{w_4}^a p_{\tilde{k}, \tilde{r}}^a (1 - p_{\tilde{k}, \tilde{r}})^{w_4-a} = w_4 p_{\tilde{k}, \tilde{r}}.
\end{aligned}$$

Таким образом, верна оценка

$$E[\varkappa_{4,i+1} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4, \Gamma_i = \gamma] \leq w_4(1 - p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1).$$

Далее по формуле полного математического ожидания:

$$\begin{aligned}
E[\varkappa_{4,i+1}] &= \\
&= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{w_4=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} E[\varkappa_{4,i+1} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4, \Gamma_i = \gamma] \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4) \leq \\
&\leq \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{w_4=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} (w_4(1 - p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)) \times \\
&\quad \times \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4).
\end{aligned}$$

Избавимся в последнем выражении от суммирования по w_1 , а также вынесем суммирование по w_4 :

$$\begin{aligned}
E[\varkappa_{4,i+1}] &\leq \\
&\leq \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{w_4=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} (w_4(1 - p_{\tilde{k}, \tilde{r}}) + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)) \times \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4) \leq \\
&\leq \sum_{w_4=0}^{\infty} (w_4(1 - \min_{\substack{\tilde{k}=0, d, \\ \tilde{r}=1, n_{\tilde{k}}}} \{p_{\tilde{k}, \tilde{r}}\}) + \max_{\substack{\tilde{k}=0, d, \\ \tilde{r}=1, n_{\tilde{k}}}} \{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}) \times \\
&\quad \times \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = w_3, \varkappa_{4,i} = w_4),
\end{aligned}$$

и после упрощений получим

$$\begin{aligned}
E[\varkappa_{4,i+1}] &\leq \\
&\leq \left(1 - \min_{\substack{\tilde{k}=\overline{0,d}, \\ \tilde{r}=\overline{1,n_{\tilde{k}}}}} \{p_{\tilde{k},\tilde{r}}\}\right) \sum_{w_4=0}^{\infty} w_4 \mathbf{P}(\varkappa_{4,i} = w_4) + \max_{\substack{\tilde{k}=\overline{0,d}, \\ \tilde{r}=\overline{1,n_{\tilde{k}}}}} \{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\} \sum_{w_4=0}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_{4,i} = w_4) = \\
&= \left(1 - \min_{\substack{\tilde{k}=\overline{0,d}, \\ \tilde{r}=\overline{1,n_{\tilde{k}}}}} \{p_{\tilde{k},\tilde{r}}\}\right) E[\varkappa_{4,i}] + \max_{\substack{\tilde{k}=\overline{0,d}, \\ \tilde{r}=\overline{1,n_{\tilde{k}}}}} \{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}.
\end{aligned}$$

Последовательность $\{M_i; i \geq 0\}$, где

$$M_0 = E[\varkappa_{4,0}], \quad M_{i+1} = \left(1 - \min_{\substack{\tilde{k}=\overline{0,d}, \\ \tilde{r}=\overline{1,n_{\tilde{k}}}}} \{p_{\tilde{k},\tilde{r}}\}\right) M_i + \max_{\substack{\tilde{k}=\overline{0,d}, \\ \tilde{r}=\overline{1,n_{\tilde{k}}}}} \{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\},$$

ограничивает сверху последовательность $E[\varkappa_{4,i+1}]$ и в условиях теоремы ограничена. Это означает, что размер $\varkappa_{4,i}$ очереди O_4 также ограничен равномерно по всем $i \geq 0$. Что и следовало доказать. \square

3.2 Рекуррентные соотношения для производящих функций последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$

В теореме 3 доказано, что последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ является марковской цепью. В этом разделе приведены результаты анализа ее переходных вероятностей и частичных производящих функций.

Пусть $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $x_3 \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \{\gamma \in \Gamma : h(\gamma, x_3) = \Gamma^{(k,r)}\}.$$

Тогда из определения (1.2) находим явный вид множества $\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3)$ для различных $\Gamma^{(k,r)}$ и x_3 :

$$\mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3) = \begin{cases} \{\Gamma^{(k_1,r_1)}, \Gamma^{(0,r \ominus_0 1)}\}, & \text{если } (k = 0 \ \& \ x_3 \leq L); \\ \{\Gamma^{(k,r \ominus_k 1)}, \Gamma^{(0,r_2)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^I \ \& \ x_3 > L); \\ \{\Gamma^{(k,r \ominus_k 1)}\}, & \text{если } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O) \ \text{или} \ (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^N); \\ \emptyset, & \text{если } (k = 0 \ \& \ x_3 > L) \\ & \text{или } (\Gamma^{(k,r)} \in C_k^I \ \& \ x_3 \leq L), \end{cases} \quad (3.1)$$

где k_1, r_1 таковы, что $h_1(\Gamma^{(k_1, r_1)}) = r$, и r_2 таково, что $h_3(r_2) = \Gamma^{(k, r)}$. Обозначим для $\gamma \in \Gamma$ и $x_3 \in \mathbb{Z}_+$

$$Q_{3,i}(\gamma, x) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3). \quad (3.2)$$

Для вывода рекуррентных соотношений для частичных производящих функций марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ полезными будут рекуррентные соотношения для вероятностей $\{Q_{3,i}(\gamma, x)\}_{i \geq 0, \gamma \in \Gamma, x \in \mathbb{Z}_+}$. Этому посвящена теорема 9.

Теорема 9. Пусть $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in \Gamma$ и $\tilde{x}_3 \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для переходных вероятностей $\{Q_{3,i}(\cdot, \cdot)\}$, $i \geq 0$, марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} Q_{3,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_3) &= \\ &= (1 - \delta_{\tilde{x}_3, 0}) \sum_{x_3=0}^{\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) + \\ &\quad + \delta_{\tilde{x}_3, 0} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}). \quad (3.3) \end{aligned}$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$\begin{aligned} Q_{3,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_3) &= \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3) = \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3) \times \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma}, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3) = \\ &= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \delta_{\tilde{\gamma}, h(\gamma, x_3)} \times \mathbf{P}(\varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3). \end{aligned}$$

Тогда из определения $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)$ следует, что

$$Q_{3,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_3) = \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \mathbf{P}(\varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \gamma, \varkappa_{3,i} = x_3),$$

и, учитывая равенство (1.26), продолжаем цепочку выкладок:

$$\begin{aligned}
Q_{3,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_3) &= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, x_3, \tilde{x}_3) = \\
&= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times [(1 - \delta_{\tilde{x}_3, 0}) \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) + \\
&\hspace{20em} + \delta_{\tilde{x}_3, 0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})].
\end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_3(x, t) = 0$ для $x < 0$,

$$\begin{aligned}
Q_{3,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_3) &= \\
&= (1 - \delta_{\tilde{x}_3, 0}) \sum_{x_3=0}^{\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) + \\
&\hspace{10em} + \delta_{\tilde{x}_3, 0} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}),
\end{aligned}$$

□

Пусть k и r таковы, что $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Введем производящую функцию

$$\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v) = \sum_{w=0}^{\infty} Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r)}, w) v^w,$$

и вспомогательные функции

$$q_{k,r}(v) = v^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v^w,$$

Также для чисел k_1 , r_1 и r_2 , удовлетворяющих соотношениям $h_1(\Gamma^{(k_1, r_1)}) = \tilde{r}$ и $h_3(r_2) = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}$, определим функции

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_i(\tilde{k}, \tilde{r}, v) &= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) - \\
&\quad - \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w; \quad (3.4)
\end{aligned}$$

для $\Gamma^{(0, \tilde{r})} \in \Gamma$:

$$\alpha_i(0, \tilde{r}, v) = \tilde{\alpha}_i(0, \tilde{r}, v) + q_{0, \tilde{r}}(v) \times \sum_{x_3=0}^L \left[Q_{3,i}(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_{01})}, x_3) \right] v^{x_3}; \quad (3.5)$$

для $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I$:

$$\begin{aligned} \alpha_i(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = \tilde{\alpha}_i(\tilde{k}, \tilde{r}, v) - q_{\tilde{k}, \tilde{r}}(v) \sum_{x_3=0}^L \left[Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}1})}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3) \right] v^{x_3} + \\ + q_{\tilde{k}, \tilde{r}}(v) \sum_{x_3 \geq 0} Q_{3,i}(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3) v^{x_3}; \end{aligned} \quad (3.6)$$

для $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N$:

$$\alpha_i(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = \tilde{\alpha}_i(\tilde{k}, \tilde{r}, v). \quad (3.7)$$

Важным этапом на пути нахождения условий существования стационарного распределения марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ является нахождение рекуррентных соотношений, которым подчиняются частичные производящие функции.

Теорема 10. Пусть $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in \Gamma$. Тогда имеют место следующие рекуррентные по $i \geq 0$ соотношения для производящих функций марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$:

1. для $\Gamma^{(0, \tilde{r})} \in \Gamma$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$

$$\mathfrak{M}^{(3, i+1)}(0, \tilde{r}, v) = \alpha_i(0, \tilde{r}, v); \quad (3.8)$$

2. для $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in \Gamma$, $\tilde{k} = \overline{1, d}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$

$$\mathfrak{M}^{(3, i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = q_{\tilde{k}, \tilde{r}}(v) \times \mathfrak{M}^{(3, i)}(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1, v) + \alpha_i(\tilde{k}, \tilde{r}, v). \quad (3.9)$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся рекуррентными соотношениями (3.3):

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(3, i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = \\ = \sum_{w=0}^{\infty} Q_{3, i+1}(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, w) v^w = Q_{3, i+1}(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, 0) + \sum_{w=1}^{\infty} Q_{3, i+1}(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, w) v^w = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) + \\
&+ \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{w+\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(w + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

После изменения порядка суммирования по x_3 и w второе слагаемое распадается еще на два слагаемых

$$\begin{aligned}
&\sum_{w=1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{w+\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(w + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w = \\
&= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(w + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w + \\
&+ \sum_{x_3=\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)+1}^{\infty} \sum_{w=x_3-\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(w + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Сначала преобразуем первое слагаемое в правой части выражения (3.11):

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=1}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(w + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w = \\
&= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{w=1}^{\infty} \varphi_3(w + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w = \\
&= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)+1-x_3}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Аналогично для второго слагаемого выражения (3.11):

$$\begin{aligned}
&\sum_{x_3=\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)+1}^{\infty} \sum_{w=x_3-\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \times \varphi_3(w + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w = \\
&= \sum_{x_3=\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)+1}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w - \\
&\quad - \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Подставляя упрощенные выражения (3.12) и (3.13) в равенство (3.11), и затем равенство (3.11) в последнее равенство (3.10), получим:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) &= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) + \\
&+ \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) + 1 - x_3}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w + \\
&+ \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w - \\
&\quad - \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Сгруппируем второе и четвертое слагаемые в равенстве (3.14):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) &= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) + \\
&+ \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \left[\sum_{w=\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) + 1 - x_3}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w \right] + q_{\tilde{k}, \tilde{r}}(v) \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3}
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^{(3,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) &= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) - \\
&\quad - \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3 - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) v^w +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_{\tilde{k}, \tilde{r}}(v) \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3} = \\
& = \tilde{\alpha}_i(\tilde{k}, \tilde{r}, v) + q_{\tilde{k}, \tilde{r}}(v) \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3}. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Рассмотрим более подробно сумму $\sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3}$ в зависимости от $\tilde{\gamma}$. В случае, если $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(0, \tilde{r})}$, то из определения $\mathbb{H}_{-1}(\cdot, \cdot)$ следует, что $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3) = \{\Gamma^{(k_1, r_1)}, \Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 1)}\}$ для $x_3 \leq L$ и $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3) = \emptyset$ для $x_3 > L$. Здесь пара (k_1, r_1) такая, что $h_1(\Gamma^{(k_1, r_1)}) = \tilde{r}$. Тогда сумма примет вид

$$\sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3} = \sum_{x_3=0}^L \left[Q_{3,i}(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 1)}, x_3) \right] v^{x_3}. \quad (3.16)$$

В случае, если $\tilde{\gamma} \in C_{\tilde{k}}^I$, из определения $\mathbb{H}_{-1}(\cdot, \cdot)$ находим, что $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3) = \emptyset$ для $x_3 \leq L$ и $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3) = \{\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}, \Gamma^{(0, r_2)}\}$ для $x_3 > L$. Здесь r_2 таково, что $h_3(r_2) = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})}$. Сумма принимает вид

$$\begin{aligned}
\sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3} & = \sum_{x_3=L+1}^{\infty} \left[Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3) \right] v^{x_3} = \\
& = \sum_{x_3=0}^{\infty} \left[Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3) \right] v^{x_3} - \\
& \quad - \sum_{x_3=0}^L \left[Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3) \right] v^{x_3}. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

И, наконец, если $\tilde{\gamma} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N$, то $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3) = \{\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}\}$ для всех $x_3 \geq 0$. Тогда сумма будет выглядеть следующим образом:

$$\sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3} = \sum_{x_3=0}^{\infty} Q_{3,i}(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}, x_3) v^{x_3}. \quad (3.18)$$

Подставляя найденные выражения (3.16), (3.17) и (3.18) в правую часть равенств (3.15), получаем утверждение теоремы. \square

3.3 Достаточное условие существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$

Получение достаточных условий будет проведено с использованием итеративно-мажорантного подхода (см. работы [152; 153]). В основе этого подхода лежит изучение динамики одномерных сечений многомерной счетной марковской цепи.

Лемма 10. Для величин $\alpha_i(k, r, v)$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, некоторого фиксированного $0 < \varepsilon_0 < 1$, существуют конечные постоянные $M(k, r)$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, не зависящие от v и i , такие, что верны следующие неравенства равномерно для всех $i \geq 0$ и $1 - \varepsilon_0 < v < 1 + \varepsilon_0$:

$$|\alpha_i(k, r, v)| \leq M(k, r). \quad (3.19)$$

Доказательство. Начнем с оценки величины $\tilde{\alpha}_i(k, r, v)$, входящей в выражение для всех величин $\alpha_i(k, r, v)$. Из определения величин $\tilde{\alpha}_i(k, r, v)$ имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{\alpha}_i(k, r, v)| &\leq \left| \sum_{x_3=0}^{\ell(k,r,3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(k,r,3)-x_3} \varphi_3(a, T^{(k,r)}) \right| + \\ &+ \left| \sum_{x_3=0}^{\ell(k,r,3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3)} Q_{3,i}(\gamma, x_3) v^{x_3-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\ell(k,r,3)-x_3} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v^w \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{x_3=0}^{\ell(k,r,3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3)} \sum_{a=0}^{\ell(k,r,3)-x_3} \varphi_3(a, T^{(k,r)}) \right| + \\ &+ \left| \sum_{x_3=0}^{\ell(k,r,3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\Gamma^{(k,r)}, x_3)} v^{x_3-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\ell(k,r,3)-x_3} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v^w \right|, \end{aligned}$$

где правая часть последнего неравенства ограничена и не зависит от i . Поскольку все суммы состоят из конечного числа ограниченных слагаемых, то

$$|\tilde{\alpha}_i(k, r, v)| \leq \tilde{M}(k, r)$$

для некоторой конечной величины $\tilde{M}(k, r)$.

Теперь рассмотрим оставшиеся величины. Для $\Gamma^{(0,r)} \in \Gamma$, $r = \overline{1, n_0}$:

$$|\alpha_i(0, r, v)| = |\tilde{\alpha}_i(0, r, v) + q_{0,r}(v) \times \sum_{x_3=0}^L \left[Q_{3,i}(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0, r \ominus 0^1)}, x_3) \right] v^{x_3}|.$$

Поскольку $\tilde{\alpha}_i(0, r, v)$ ограничена, а приведенная сумма состоит из конечного числа ограниченных слагаемых, то для ограниченности $|\alpha_i(0, r, v)|$ достаточно показать ограниченность $|q_{0,r}(v)|$. Учитывая определение $\varphi_3(\cdot, \cdot)$, имеем

$$\begin{aligned} |q_{k,r}(v)| &= |v^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v^w| = |v^{-\ell(k,r,3)} \exp(\lambda_3 T^{(k,r)}(f_3(v) - 1))| \leq \\ &\leq (1 - \varepsilon_0)^{-\ell(k,r,3)} \exp(\lambda_3 T^{(k,r)}(f_3(1 + \varepsilon_0) - 1)), \end{aligned}$$

где последнее выражение, очевидно, ограничено, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Следовательно,

$$|\alpha_i(0, r, v)| \leq M(0, r).$$

Для $\Gamma^{(k,r)} \in C_k^I$ имеем:

$$\begin{aligned} |\alpha_i(k, r, v)| &= |\tilde{\alpha}_i(k, r, v) - q_{k,r}(v) \sum_{x_3=0}^L [Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r \ominus_k 1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)}, x_3)] v^{x_3} + \\ &\quad + q_{k,r}(v) \sum_{x_3 \geq 0} Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r)}, x_3) v^{x_3}| = |\tilde{\alpha}_i(k, r, v) - \\ &\quad - q_{k,r}(v) \sum_{x_3=0}^L [Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r \ominus_k 1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)}, x_3)] v^{x_3} + q_{k,r}(v) \times \mathfrak{M}^{(3,i)}(0, r, v)|. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathfrak{M}^{(3,i)}(0, r, v) = \alpha_{i-1}(0, r, v)$, то

$$\begin{aligned} |\alpha_i(k, r, v)| &= |\tilde{\alpha}_i(k, r, v) q_{k,r}(v) \sum_{x_3=0}^L [Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r \ominus_k 1)}, x_3) + Q_{3,i}(\Gamma^{(0,r_2)}, x_3)] v^{x_3} + \\ &\quad + q_{k,r}(v) \times \alpha_{i-1}(0, r, v)|, \end{aligned}$$

где все слагаемые ограничены в силу уже доказанного. Значит,

$$|\alpha_i(k, r, v)| \leq M(k, r), \quad \Gamma^{(k,r)} \in C_k^I.$$

В выражении $|\alpha_i(k, r, v)|$ для $\Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \cup C_k^N$ все величины также ограничены, следовательно,

$$|\alpha_i(k, r, v)| \leq M(k, r), \quad \Gamma^{(k,r)} \in C_k^O \cup C_k^N.$$

Этим завершается доказательство. □

Пусть S^3 определено в (2.21). Найденные рекуррентные соотношения для производящих функций позволяют сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 11. *Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имела стационарное распределение $Q(\gamma, x)$, $(\gamma, x) \in S^3 \subset \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, достаточно выполнения неравенства*

$$\min_{k=1, d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f'_3(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1. \quad (3.20)$$

Доказательство. Предположим обратное, а именно, что при выполнении условия (3.20) марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ не имеет стационарного распределения. Тогда для любого состояния $(\gamma, x) \in S^3 \subset \Gamma \times \mathbb{Z}_+$ и независимо от начального распределения $\mathbf{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,0} = x)$, $(\Gamma^{(k,r)}, x) \in S^3 \subset \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, имеют место предельные равенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x) = 0, \quad (\Gamma^{(k,r)}, x) \in S^3 \subset \Gamma \times \mathbb{Z}_+. \quad (3.21)$$

Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть все возможные случаи, предполагая апериодичность рассматриваемой цепи (см. рассуждения [160, гл. 3, § 3-4]):

- 1) все состояния цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ невозвратные, тогда предельные соотношения выполняются в силу [160, с. 541, лемма 2];
- 2) существует хотя бы одно возвратное состояние, тогда все состояния возвратные (поскольку все состояния сообщающиеся); и пусть все состояния нулевые, тогда предельное соотношение также выполняется [160, с. 541, лемма 3];
- 3) все состояния возвратные и существует хотя бы одно положительное, тогда все состояния положительные и пределы

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x) > 0$$

являются стационарными вероятностями (см. рассуждения [160, с. 549, теорема 1]), что противоречит предположению.

Для периодической цепи приведенные рассуждения достаточно провести для циклических подклассов. Отметим также, что сообщаемость состояний S^3 следует из способа доказательства лемм 3–9.

Выберем это начальное распределение так, что при некотором $v_0 > 1$ будет выполнено неравенство $\mathfrak{M}^{(3,0)}(k, r, v_0) < \infty$ для всех $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Это ограничение, в силу теоремы (10), обеспечивает при любом конечном $i \geq 0$ существование функций

$$\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v), \quad \frac{d}{dv} \left[\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v) \right], \quad \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma, \quad (3.22)$$

по крайней мере в некоторой окрестности точки $v = 1$.

В силу равенств (3.21) для любого натурального N найдется некоторое число \mathfrak{I} , что для всех $i > \mathfrak{I}$ будет

$$1 > (1 + N) \sum_{x=0}^N \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{3,i} = x)$$

и, значит, $1 > (1 + N) \sum_{x=0}^N \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = x)$. Тогда

$$\begin{aligned} E[\varkappa_{3,i}] &= \sum_{x=0}^{\infty} x \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = x) = \sum_{x=0}^N x \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = x) + \sum_{x=N+1}^{\infty} x \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = x) \geq \\ &\geq \sum_{x=N+1}^{\infty} x \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = x) \geq \sum_{x=N+1}^{\infty} (N+1) \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = x) \geq (N+1) \sum_{x=N+1}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = x) = \\ &= (N+1) \left(1 - \sum_{x=0}^N \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = x) \right) \geq (N+1) \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = N. \end{aligned}$$

Следовательно, $E[\varkappa_{3,i}]$ неограниченно возрастает при $i \rightarrow \infty$.

Другое рассуждение, однако, приводит к противоположному результату. Действительно, при $\min_{k=1, \bar{d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1$ имеем для $k = \overline{1, \bar{d}}$:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v) \right) \Big|_{v=1} &= \left(\prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v^w \right) \Big|_{v=1} = \\ &= \left(\prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k,r,3)} \exp(\lambda_3 T^{(k,r)} (f_3(v) - 1)) \right) \Big|_{v=1} = \\ &= \left(v^{-\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k,r,3)} \exp(\lambda_3 (f_3(v) - 1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}) \right) \Big|_{v=1} = \\ &= \lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)} - \sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3) < 0. \quad (3.23) \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{M}_+^{(3,0)}(k, r, v) = \mathfrak{M}^{(3,0)}(k, r, v)$. Введем последовательности $\left\{ \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v); i \geq 0 \right\}$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, с помощью рекуррентного отображения

1) для $\Gamma^{(0,r)} \in \Gamma$

$$\mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(0, r, v) = M(0, r);$$

2) для $\Gamma^{(k,r)} \in C_k, k = 1, 2, \dots, d,$

$$\mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k, r, v) = q_{k,r}(v) \times \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r \ominus_k 1, v) + M(k, r)$$

в некоторой окрестности точки $v = 1$. Последовательности $\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v); i \geq 0\}$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, будут мажорантными для последовательностей $\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v); i \geq 0\}$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, рекуррентного отображения из теоремы 10, то есть

$$\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v) \leq \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v).$$

Из приведенного рекуррентного отображения для мажорантной последовательности видно, что компонента $\mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k, r, v)$ зависит только от величины $\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r \ominus_k 1, v)$ того же цикла $C_k, k = \overline{1, d}$, и не зависит от величин других циклов. И поскольку числа $M(k, r), \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, конечны и не зависят от v и i , для сходимости всего мажорантного отображения $\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v); i \geq 0\}, \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, достаточно сходимости для каждого $k = \overline{1, d}$ подблока $\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v); i \geq 0\}, r = \overline{1, n_k}$.

Пусть $k = \overline{1, d}$ фиксировано. В матричном виде рекуррентное отображение для блока $\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v); i \geq 0\}, r = \overline{1, n_k}$, будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k, 1, v) \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k, 2, v) \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k, 3, v) \\ \dots \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i+1)}(k, n_k, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & q_{k,1}(v) \\ q_{k,2}(v) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q_{k,3}(v) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_{k,n_k}(v) & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, 1, v) \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, 2, v) \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, 3, v) \\ \dots \\ \mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, n_k, v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M(k, 1) \\ M(k, 2) \\ M(k, 3) \\ \dots \\ M(k, n_k) \end{bmatrix}.$$

Тогда характеристический многочлен для этого отображения легко подсчитывается и имеет вид

$$x^{n_k} - \prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v),$$

и приравнявая его к нулю, находим, что норма всех собственных чисел одинакова и равна $(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v))^{1/n_k}$. В точке $v = 1$ модуль собственного числа $|(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v))^{1/n_k}|$ равен 1, а его производная

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n_k} \left(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v) \right)^{1/n_k-1} \times \left(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v) \right)' \right) \Big|_{v=1} &= \\ &= \frac{1}{n_k} \left(\lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)} - \sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3) \right), \end{aligned}$$

в соответствии с условием (3.23), отрицательна.

Следовательно, в некоторой правой окрестности $v \in (1, 1 + \varepsilon_1)$, $\varepsilon_1 > 0$, точки $v = 1$ модуль всех собственных чисел $(\prod_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v))^{1/n_k}$, $k = \overline{1, d}$, будет меньше 1 и, значит, мажорантная последовательность сходится. Этот факт, в свою очередь, влечет сходимость исходной последовательности $\{\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v); i \geq 0\}$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, для $v \in [1, 1 + \varepsilon_1)$.

Последовательности $\{\mathfrak{M}_+^{(3,i)}(k, r, v_1); i \geq 0\}$, $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$, сходятся при $v_1 \in [1, 1 + \varepsilon_1)$ и, следовательно, их сумма $\sum_{k,r} \mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v)$ при любом $i \geq 0$ является аналитической, ограниченной функцией. И поскольку

$$\sum_{k,r} \mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v) = \sum_{k,r} \sum_{w=0}^{\infty} Q_{3,i}(\Gamma^{(k,r)}, w) v^w = \sum_{w=0}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_{3,i} = w) v^w, \quad (3.24)$$

теперь без труда получается, что числовая последовательность

$$\left\{ \sum_{k,r} \frac{d}{dv} \left(\mathfrak{M}^{(3,i)}(k, r, v) \right) \Big|_{v=1} = E[\varkappa_{3,i}]; i \geq 0 \right\}$$

в силу интегральной формулы Коши равномерно по i ограничена некоторой постоянной величиной. Поэтому принятое предположение не будет справедливым. Доказательство этим завершается. \square

3.4 Необходимое условие существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$

В этом разделе нас будет интересовать необходимое условие существования стационарного распределения марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$.

Теорема 12. Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имела стационарное распределение $Q_3(\gamma, x)$, $(\gamma, x) \in S^3 \subset \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, необходимо выполнение неравенства

$$\max_{k=\overline{1,d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f_3'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1.$$

Доказательство. Допустим, что стационарное распределение марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ существует. Тогда, выбрав это распределение в качестве начального $Q_3(\gamma, w)$, $(\gamma, w) \in S^3 \subset \Gamma \times \mathbb{Z}_+$, мы обеспечим существование пределов

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Q_{3,i}(\gamma, w) = Q_3(\gamma, w),$$

равных стационарным вероятностям соответствующих состояний.

Определив частичные производящие функции стационарного распределения

$$\mathfrak{M}^{(3)}(k, r, v) = \sum_{w=0}^{\infty} Q_3(\gamma, w) v^w,$$

можем переписать соотношения (3.8) и (3.9) в новом виде:

1) для $\Gamma^{(0,\tilde{r})} \in \Gamma$, $\tilde{r} = \overline{1, n_0}$

$$\mathfrak{M}^{(3)}(0, \tilde{r}, v) = \alpha(0, \tilde{r}, v); \quad (3.25)$$

2) для $\Gamma^{(\tilde{k},\tilde{r})} \in \Gamma$, $\tilde{k} = \overline{1, d}$, $\tilde{r} = \overline{1, n_{\tilde{k}}}$

$$\mathfrak{M}^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = q_{\tilde{k},\tilde{r}}(v) \times \mathfrak{M}^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1, v) + \alpha(\tilde{k}, \tilde{r}, v), \quad (3.26)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) &= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) - \\ &- \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k},\tilde{r})}) v^{w-(\ell(\tilde{k},\tilde{r},3)-x_3)}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

для $\Gamma^{(0,\tilde{r})} \in \Gamma$

$$\alpha(0, \tilde{r}, v) = \tilde{\alpha}(0, \tilde{r}, v) + q_{0,\tilde{r}}(v) \times \sum_{x_3=0}^L \left[Q_3(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0,\tilde{r} \ominus_{01})}, x_3) \right] v^{x_3}, \quad (3.28)$$

для $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^{\mathbb{I}}$

$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{k}, \tilde{r}, v) &= \tilde{\alpha}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) - q_{\tilde{k}, \tilde{r}}(v) \sum_{x_3=0}^L \left[Q_3(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3) \right] v^{x_3} + \\ &+ q_{\tilde{k}, \tilde{r}}(v) \mathfrak{M}^{(3)}(0, r_2, v), \end{aligned} \quad (3.29)$$

и для $\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^{\mathbb{O}} \cup C_{\tilde{k}}^{\mathbb{N}}$

$$\alpha(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = \tilde{\alpha}(\tilde{k}, \tilde{r}, v). \quad (3.30)$$

Разложим функцию $q_{k,r}(v)$ по формуле Тейлора по степеням $(v - 1)$

$$\begin{aligned} q_{k,r}(v) &= v^{-\ell(k,r,3)} \exp(\lambda_3 T^{(k,r)}(f_3(v) - 1)) = \\ &= 1 + (\lambda_3 T^{(k,r)} f_3'(1) - \ell(k, r, 3))(v - 1) + O((v - 1)^2). \end{aligned}$$

Просуммируем соотношения (3.25) и (3.26)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^d \sum_{r=1}^{n_k} \mathfrak{M}^{(3)}(k, r, v) &= \\ &= \sum_{r=1}^{n_0} \alpha(0, r, v) + \sum_{k=1}^d \sum_{r=1}^{n_k} [q_{k,r}(v) \mathfrak{M}^{(3)}(k, r \ominus_k 1, v) + \alpha(k, r, v)] = \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{r=1}^{n_k} q_{k,r}(v) \mathfrak{M}^{(3)}(k, r \ominus_k 1, v) + \sum_{k=1}^d \sum_{r=1}^{n_k} \alpha(k, r, v) + \sum_{r=1}^{n_0} \alpha(0, r, v). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Разложим по формуле Тейлора слагаемые $\sum_{k=1}^d \sum_{r=1}^{n_k} \alpha(k, r, v)$ и $\sum_{r=1}^{n_0} \alpha(0, r, v)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) &= \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(1 - v^{w - (\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3)}) = \\ &= -(v - 1) \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(w - (\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3)) + \\ &+ O((v - 1)^2). \end{aligned}$$

В частности, для $k = 0$ величина $\ell(k, r, 3)$ равна нулю, поэтому $\tilde{\alpha}(0, r, v) = O((v - 1)^2)$. Теперь непосредственно получим для состояний продления

$$\begin{aligned} \sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} \alpha(0, \tilde{r}, v) &= \\ &= \sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} q_{0, \tilde{r}}(v) \times \sum_{x_3=0}^L [Q_3(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 1)}, x_3)] v^{x_3} + O((v - 1)^2) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} (1 + (\lambda_3 T^{(0, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(0, \tilde{r}, 3))(v - 1)) \times \\
&\quad \times \sum_{x_3=0}^L \left[Q_3(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus 01)}, x_3) \right] v^{x_3} + O((v - 1)^2),
\end{aligned}$$

ДЛЯ ВХОДНЫХ СОСТОЯНИЙ

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I} \alpha(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = \\
&= \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I} q_{\tilde{k}, \tilde{r}}(v) \left[\mathfrak{M}^{(3)}(0, r_2, v) - \sum_{x_3=0}^L (Q_3(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus \tilde{k}1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3)) v^{x_3} \right] + \\
&+ \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I} \tilde{\alpha}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I} (1 + (\lambda_3 T^{(\tilde{k}, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3))(v - 1)) \times \\
&\quad \times \left[\mathfrak{M}^{(3)}(0, r_2, v) - \sum_{x_3=0}^L (Q_3(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus \tilde{k}1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3)) v^{x_3} \right] - \\
&\quad - (v - 1) \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \times \\
&\quad \times \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(w - (\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3)) + O((v - 1)^2),
\end{aligned}$$

И ДЛЯ ВЫХОДНЫХ СОСТОЯНИЙ

$$\begin{aligned}
&\sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N} \alpha(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N} \tilde{\alpha}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) = \\
&= -(v - 1) \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \times \\
&\quad \times \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(w - (\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3)) + O((v - 1)^2).
\end{aligned}$$

Подставим получившиеся соотношения в выражение (3.31). Поскольку любому входному состоянию системы соответствует одно и только одно состояние

продления и наоборот, то выражение (3.31) примет вид:

$$\begin{aligned}
0 &= O((v-1)^2) + (v-1) \sum_{\tilde{k}=1}^d \sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}} (\lambda_3 T^{(\tilde{k}, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)) \mathfrak{M}^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1, v) + \\
&+ (v-1) \sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} (\lambda_3 T^{(0, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(0, \tilde{r}, 3)) \times \sum_{x_3=0}^L \left[Q_3(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 1)}, x_3) \right] v^{x_3} + \\
&\quad + (v-1) \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I} (\lambda_3 T^{(\tilde{k}, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)) \times \\
&\quad \times \left[\mathfrak{M}^{(3)}(0, r_2, v) - \sum_{x_3=0}^L (Q_3(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3)) v^{x_3} \right] - \\
&\quad - (v-1) \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \times \\
&\quad \times \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(w - (\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3)). \quad (3.32)
\end{aligned}$$

Разделим обе части равенства на $(v-1)$, устремим v к единице и сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I} (\lambda_3 T^{(\tilde{k}, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)) \times \\
&\times \left[\mathfrak{M}^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1, 1) - \sum_{x_3=0}^L Q_3(\Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1)}, x_3) + \mathfrak{M}^{(3)}(0, r_2, 1) - \sum_{x_3=0}^L Q_3(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3) \right] + \\
&\quad + \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N} (\lambda_3 T^{(\tilde{k}, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)) \mathfrak{M}^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r} \ominus_{\tilde{k}} 1, 1) + \\
&\quad + \sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} \lambda_3 T^{(0, \tilde{r})} f'_3(1) \times \sum_{x_3=0}^L \left[Q_3(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 1)}, x_3) \right] + \\
&\quad + \sum_{\substack{\tilde{k}, \tilde{r}: \\ \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N}} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3 - w). \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Подставим в (3.25) и (3.26) значение $v = 1$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}^{(3)}(0, r, 1) &= \sum_{x_3=0}^L \left(Q(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, r \ominus_0 1)}, x_3) \right), \\ \mathfrak{M}^{(3)}(k, r, 1) &= \mathfrak{M}^{(3)}(k, r \ominus_k 1, 1) + \mathfrak{M}^{(3)}(0, r_2, 1) - \\ &\quad - \sum_{x_3=0}^L \left(Q_3(\Gamma^{(k, r \ominus_k 1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, r_2)}, x_3) \right), \quad \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I, \\ \mathfrak{M}^{(3)}(k, r, 1) &= \mathfrak{M}^{(3)}(k, r \ominus_k 1, 1), \quad \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N.\end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что

$$\mathfrak{M}^{(3)}(k, n_k, 1) = \mathfrak{M}^{(3)}(k, n_k \ominus_k 1, 1) = \dots = \mathfrak{M}^{(3)}(k, 1, 1) = M_k.$$

Упростим с помощью получившихся равенств выражение (3.33):

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^I} (\lambda_3 T^{(\tilde{k}, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)) \times M_{\tilde{k}} + \\ &\quad + \sum_{\tilde{k}, \tilde{r}: \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N} (\lambda_3 T^{(\tilde{k}, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)) M_{\tilde{k}} + \\ &\quad + \sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} \lambda_3 T^{(0, \tilde{r})} f'_3(1) \times \sum_{x_3=0}^L \left[Q_3(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 1)}, x_3) \right] + \\ &+ \sum_{\substack{\tilde{k}, \tilde{r}: \\ \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N}} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) (\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3 - w).\end{aligned}\tag{3.34}$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{\tilde{k}=1}^d \left(M_{\tilde{k}} \times \sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}} (\lambda_3 T^{(\tilde{k}, \tilde{r})} f'_3(1) - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)) \right) + \\ &\quad + \sum_{\tilde{r}=1}^{n_0} \lambda_3 T^{(0, \tilde{r})} f'_3(1) \times \sum_{x_3=0}^L \left[Q_3(\Gamma^{(k_1, r_1)}, x_3) + Q_3(\Gamma^{(0, \tilde{r} \ominus_0 1)}, x_3) \right] + \\ &+ \sum_{\substack{\tilde{k}, \tilde{r}: \\ \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in C_{\tilde{k}}^O \cup C_{\tilde{k}}^N}} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_3(\gamma, x_3) \sum_{w=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(w, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) (\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3 - w).\end{aligned}\tag{3.35}$$

Предположение, что для любых $\tilde{k} = \overline{1, d}$ выражение

$$\sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}} \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) / \lambda_3 f'_3(1) \sum_{\tilde{r}=1}^{n_{\tilde{k}}} T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}$$

меньше либо равно 1, приводит к невозможному выводу $Q_3(\Gamma^{(0,1)}, 0) = 0$. Что и требовалось доказать. □

3.5 Достаточное условие существования стационарного распределения последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$

Теперь добавим состояние $\varkappa_{1,i}$ очереди O_1 в качестве дополнительной компоненты состояния марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$. Докажем марковость получившейся последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$.

Теорема 13. Пусть $\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$ и $(\varkappa_{1,0}, \varkappa_{3,0}) = (x_{1,0}, x_{3,0}) \in \mathbb{Z}_+^2$ фиксированы. Тогда последовательность $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ является однородной счетной цепью Маркова.

Доказательство. Действительно, поскольку Γ_{i+1} функционально выражается через Γ_i и $\varkappa_{3,i}$ (см. (1.3)), то

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)) &= \\ &= \delta_{\Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})} \times \\ &\times \mathbf{P}(\{\varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)), \end{aligned}$$

для $\Gamma^{(k_i, r_i)} \in \Gamma$, $(x_{1,i}, x_{3,i}) \in \mathbb{Z}_+^2$, $i \geq 0$. Множество $A_t(k_t; r_t; x^t)$ определено в (2.1). Учитывая равенство (1.27), убеждаемся, что вероятность

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)) &= \\ &= \delta_{\Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, h(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i})} \times \tilde{\varphi}_3(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{3,i}, x_{3,i+1}) \times \\ &\times \tilde{\varphi}_1(k_{i+1}, r_{i+1}, h_T(\Gamma^{(k_i, r_i)}, x_{3,i}), x_{1,i}, x_{1,i+1}) \end{aligned}$$

зависит только от значений $(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i})$ и $(\Gamma_{i+1}, \varkappa_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \cap_{t=0}^i A_t(k_t; r_t; x^t)) &= \\ &= \mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \\ &\quad | \{\Gamma_i = \Gamma^{(k_i, r_i)}, \varkappa_{1,i} = x_{1,i}, \varkappa_{3,i} = x_{3,i}\}) = \\ &= \mathbf{P}(\{\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k_{i+1}, r_{i+1})}, \varkappa_{1,i+1} = x_{1,i+1}, \varkappa_{3,i+1} = x_{3,i+1}\} | \\ &\quad | \cap_{t=0}^i \{\Gamma_t = \Gamma^{(k_t, r_t)}, \varkappa_{1,t} = x_{1,t}, \varkappa_{3,t} = x_{3,t}\}), \end{aligned}$$

что доказывает марковость последовательности $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$. \square

Обозначим для $\gamma \in \Gamma$ и $(x_1, x_3) \in \mathbb{Z}_+^2$

$$Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3). \quad (3.36)$$

Как и ранее, для нахождения рекуррентных соотношений для частичных производящих функций марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$, важно найти рекуррентные соотношения для вероятностей $Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3)$.

Теорема 14. Пусть $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in \Gamma$ и $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_3) \in \mathbb{Z}_+^2$. Тогда для переходных вероятностей $\{Q_{1,i}(\cdot, \cdot, \cdot)\}_{i \geq 0}$ марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, 0, 0) &= \sum_{x_1=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times \\ &\quad \times \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) \times \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - x_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}), \\ Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, 0, \tilde{x}_3) &= \sum_{x_1=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \sum_{x_3=0}^{\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times \\ &\quad \times \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) \times \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - x_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}), \quad \tilde{x}_3 > 0, \\ Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_1, 0) &= \sum_{x_1=0}^{\tilde{x}_1 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \sum_{x_3=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times \\ &\quad \times \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) \times \varphi_1(\tilde{x}_1 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - x_1, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}), \quad \tilde{x}_1 > 0, \end{aligned}$$

$$Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = \sum_{x_1=0}^{\tilde{x}_1+\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} \sum_{x_3=0}^{\tilde{x}_3+\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times \\ \times \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) \times \varphi_1(\tilde{x}_1 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - x_1, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}), \quad \tilde{x}_1 > 0, \tilde{x}_3 > 0.$$

Доказательство. По формуле полной вероятности имеем

$$Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma}, \varkappa_{1,i+1} = \tilde{x}_1, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3) = \\ = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbf{P}(\Gamma_i = \gamma, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \times \\ \times \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \tilde{\gamma}, \varkappa_{1,i+1} = \tilde{x}_1, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \gamma, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) = \\ = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times \delta_{\tilde{\gamma}, h(\gamma, x_3)} \times \\ \times \mathbf{P}(\varkappa_{1,i+1} = \tilde{x}_1, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \gamma, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3).$$

Тогда из определения $\mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)$ следует, что

$$Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times \\ \times \mathbf{P}(\varkappa_{1,i+1} = \tilde{x}_1, \varkappa_{3,i+1} = \tilde{x}_3 | \Gamma_i = \gamma, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3)$$

и, учитывая (1.27), продолжаем цепочку выкладок

$$Q_{1,i+1}(\tilde{\gamma}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_3) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times \tilde{\varphi}_3(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, x_3, \tilde{x}_3) \times \\ \times \tilde{\varphi}_1(\tilde{k}, \tilde{r}, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}, x_1, \tilde{x}_1) = \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\gamma, x_1, x_3) \times \\ \times [(1 - \delta_{\tilde{x}_3, 0}) \varphi_3(\tilde{x}_3 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) + \delta_{\tilde{x}_3, 0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - x_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})] \times \\ \times [(1 - \delta_{\tilde{x}_1, 0}) \varphi_1(\tilde{x}_1 + \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - x_1, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) + \delta_{\tilde{x}_1, 0} \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - x_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})].$$

Поскольку $\varphi_i(x, t) = 0$ для $x < 0$, $i = 1, 2$, получаем утверждение теоремы. \square

Пусть

$$S_{0,r}^1 = \left\{ (\Gamma^{(0,r)}, x_1, x_3) : (x_1, x_3) \in Z_+^2, x_3 > L - \max_{k=1,2,\dots,d} \left\{ \sum_{t=1}^{n_k} \ell(k, t, 3) \right\} \right\},$$

$$1 \leq r \leq n_0,$$

$$S_{k,r}^1 = \left\{ (\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) : (x_1, x_3) \in Z_+^2, x_3 > L - \sum_{t=1}^r \ell(k, t, 3) \right\},$$

$$1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq r \leq n_k.$$

Из теоремы 6 следует

Теорема 15. *Множество существенных состояний марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имеет вид*

$$S^1 = \left(\bigcup_{1 \leq r \leq n_0} S_{0,r}^1 \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{1 \leq k \leq d \\ 1 \leq r \leq n_k}} S_{k,r}^1 \right).$$

Все состояния S^1 образуют один класс сообщающихся состояний.

Пусть k и r таковы, что $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Введем частичные производящие функции

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, v_3) = \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) v_1^{w_1} v_3^{w_3},$$

и вспомогательные функции

$$q^{(1)}(k, r, v_1) = v_1^{-\ell(k,r,1)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_1(w, T^{(k,r)}) v_1^w;$$

$$q^{(3)}(k, r, v_3) = v_3^{-\ell(k,r,3)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_3(w, T^{(k,r)}) v_3^w.$$

Лемма 11. *Пусть $\tilde{\gamma} = \Gamma^{(\tilde{k}, \tilde{r})} \in \Gamma$. Тогда верно следующее соотношение:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1, v_3) &= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, w_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\ &\times [v_1^{w_1} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1) + I(\tilde{\gamma} \in \Gamma^I) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - w_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) (1 - v_1^{w_1 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)})] \times \\ &\times [v_3^{w_3} q^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_3) + I(\tilde{\gamma} \in \Gamma^{III}) \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - w_3} \varphi_3(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})}) (1 - v_3^{w_3 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)})]. \end{aligned}$$

Доказательство. При доказательстве теоремы 3.8 были использованы рекуррентные соотношения для стационарных вероятностей $\{Q_{3,i}(\gamma, x)\}_{i \geq 0, \gamma \in \Gamma, x \in \mathbb{Z}_+}$. Здесь воспользуемся другой техникой и запишем по формуле повторного математического ожидания:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^{(1,i+1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1, v_3) &= \\
&= E[v_1^{\varkappa_{1,i+1}} v_3^{\varkappa_{3,i+1}} I(\Gamma_{i+1} = \tilde{\Gamma})] = \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\
&\quad \times E[v_1^{\varkappa_{1,i+1}} v_3^{\varkappa_{3,i+1}} I(\Gamma_{i+1} = \tilde{\Gamma}) | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma] = \\
&= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\
&\quad \times E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} v_3^{\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma] = \\
&= \sum_{w_1=0}^{\infty} \sum_{w_3=0}^{\infty} \sum_{\gamma \in \mathbb{H}_{-1}(\tilde{\gamma}, x_3)} Q_{1,i}(\Gamma^{(k,r)}, w_1, w_3) \times \\
&\quad \times E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma] \times \\
&\quad \times E[v_3^{\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma]. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

В случае $\tilde{\gamma} \notin \Gamma^I$ очередь O_1 не обслуживается и, следовательно, $\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) = 0$. Поэтому

$$\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\} = w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1).$$

Аналогично при $\tilde{\gamma} \notin \Gamma^{III}$ очередь O_3 не обслуживается и $\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) = 0$. Откуда получаем

$$\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\} = w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3).$$

Рассмотрим случай $\tilde{\gamma} \in \Gamma^I$. Распишем

$$\begin{aligned}
E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma] &= \\
&= E[v_1^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma] + \\
&+ E[v_1^{\max\{0, w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)\}} - v_1^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma] = \\
&= v_1^{w_1} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_1) + \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1) - w_1} \varphi_1(a, T^{(\tilde{k}, \tilde{r})})(1 - v_1^{w_1 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 1)}). \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Аналогично получим для $\tilde{\gamma} \in \Gamma^{\text{III}}$:

$$\begin{aligned} E[v_3^{\max\{0, w_3 + \eta_{3,i} - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)\}} | \varkappa_{1,i} = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma] = \\ = v_3^{w_1} q^{(3)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v_3) + \sum_{a=0}^{\ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3) - w_3} \varphi_3(a, T(\tilde{k}, \tilde{r})) (1 - v_3^{w_3 + a - \ell(\tilde{k}, \tilde{r}, 3)}). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Подставляя полученные выражения (3.38), (3.39) в выражение (3.37), получаем утверждение леммы. \square

Из этой леммы следует существование величин $\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, v_3)$ хотя бы в некоторой окрестности точки $(v_1, v_3) = (1, 1)$, для $i > 0$, $k = \overline{0, d}$, $r = \overline{1, n_k}$.

Ранее в работе уже доказана ограниченность производящих функций

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, 1, v_3) = E[v_3^{\varkappa_{3,i}} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)})]$$

по $i \geq 0$ для всех $v_3 \in [1, 1 + \varepsilon_3]$, при некотором $0 < \varepsilon_3 < \varepsilon$. Цель следующей леммы — доказать аналогичный результат для величин $\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1)$, $i \geq 0$.

Лемма 12. *Если*

$$\min_{k=0, \overline{d}} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T(k, r)} > 1,$$

то числовая последовательность $\{\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v, 1); i \geq 0\}$ ограничена при $v \in [1, 1 + \varepsilon_1]$, для некоторого $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ определено в (1.1).

Доказательство. Введем случайные последовательности $\{\varkappa_1^{(1)}(i); i \geq 0\}$ и $\{\varkappa_1^{(2)}(i); i \geq 0\}$ следующим образом. Положим для $i = 0$: $\varkappa_1^{(1)}(0) = 0$ и $\varkappa_1^{(2)}(0) = \varkappa_{1,0}$. Далее введем рекуррентные соотношения:

$$\varkappa_1^{(1)}(i+1) = \begin{cases} \max\{0, \varkappa_1^{(1)}(i) + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, k > 0, r = \overline{1, n_k}; \\ \varkappa_1^{(1)}(i), & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1, n_0}; \end{cases}$$

$$\varkappa_1^{(2)}(i+1) = \begin{cases} \varkappa_1^{(2)}(i), & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k,r)}, k > 0, r = \overline{1, n_k}; \\ \max\{0, \varkappa_1^{(2)}(i) + \eta_{1,i} - \xi_{1,i}\}, & \text{если } \Gamma_{i+1} = \Gamma^{(0,r)}, r = \overline{1, n_0}. \end{cases}$$

Тогда последовательность $\varkappa_{1,i}^+ = \varkappa_1^{(1)}(i) + \varkappa_1^{(2)}(i)$ является мажорирующей для последовательности $\varkappa_{1,i}$, т.е. $\varkappa_{1,i}(\omega) \leq \varkappa_{1,i}^+(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$. Доказательство этого факта несложно и проводится по индукции. Заметим, что из него следует для $v \geq 1$ неравенство

$$E[v^{\varkappa_{1,i}}] \leq E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} v^{\varkappa_1^{(2)}(i)}]. \quad (3.40)$$

Выберем из последовательностей $\{\varkappa_1^{(1)}(i); i \geq 0\}$ и $\{\varkappa_1^{(2)}(i); i \geq 0\}$ подпоследовательности, включающие члены со случайными номерами $\theta_i^{(1)}$ и $\theta_i^{(2)}$ соответственно, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \theta_0^{(1)} &= 0; & \theta_{i+1}^{(1)} &= \theta_i^{(1)} + \min \{s > 0: \Gamma_{\theta_i^{(1)}+s} = \Gamma^{(k, n_k)}, k > 0\}; \\ \theta_0^{(2)} &= 0; & \theta_{i+1}^{(2)} &= \theta_i^{(2)} + \min \{s > 0: \Gamma_{\theta_i^{(2)}+s} = \Gamma^{(0, r)}, r = \overline{1, n_0}\}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Также нам понадобятся следующие обозначения:

$$\hat{\varkappa}_{1,i}^{(1)} = \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}), \quad \hat{\varkappa}_{1,i}^{(2)} = \varkappa_1^{(2)}(\theta_i^{(2)}). \quad (3.42)$$

Пусть $k > 0$, $r \in \{2, 3, \dots, n_k\}$. В введенных обозначениях рассмотрим выражение для $E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k, r)})]$:

$$\begin{aligned} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k, r)})] &= \\ &= \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{w_3 \geq 0} \sum_{\gamma \in \Gamma} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+1)} I(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(k, r)}, \varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \gamma)] = \\ &= \sum_{w_1 \geq 0} \sum_{w_3 \geq 0} E[v^{w_1 + \eta_{1,i} - \ell(k, r, 1)} I(\varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \varkappa_{3,i} = w_3, \Gamma_i = \Gamma^{(k, r-1)})] + \tilde{C}_1 = \\ &= \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(\varkappa_1^{(1)}(i) = w_1, \Gamma_i = \Gamma^{(k, r-1)}) q^{(1)}(k, r, v) + \tilde{C}_1 = \\ &= q^{(1)}(k, r, v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k, r-1)})] + \tilde{C}_1. \end{aligned}$$

И далее по индукции:

$$E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i+n_k-1)} I(\Gamma_{i+n_k-1} = \Gamma^{(k, n_k)})] = \prod_{r=2}^{n_k} q^{(1)}(k, r, v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(i)} I(\Gamma_i = \Gamma^{(k, 1)})].$$

Для $w_1, w_3 \in Z_+$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $C \subset [0, +\infty)$ введем множества

$$\begin{aligned} A_i^{(1)}(w_1, w_3, \gamma) &= \{\omega: \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}) = w_1; \varkappa_{3, \theta_i^{(1)}} = w_3, \Gamma_{\theta_i^{(1)}} = \gamma\}; \\ A_i^{(1)}(w_1, C, \gamma) &= \bigcup_{w_3 \in C} A_i^{(1)}(w_1, w_3, \gamma); \quad B_i^{(1)}(\gamma) = \{\omega: \Gamma_{\theta_i^{(1)}} = \gamma\}; \\ C_i^{(1)}(\gamma_1, w_1, w_3, \gamma_2) &= B_{i+1}^{(1)}(\gamma_1) \cap A_i^{(1)}(w_1, w_3, \gamma_2). \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{k} > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
& E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}} I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}} = \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})] = \\
& = E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}} I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] = E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\theta_{i+1}^{(1)})} I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] = \\
& = \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)} I(B_{i+1}^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] + \tilde{C}_1 = \\
& = \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 \leq L}} \sum_{k=1}^d E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)} I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, w_3, \Gamma^{(k, n_k)}))] + \\
& + \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 > L}} E[v^{\varkappa_1^{(1)}(\tau)} I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, w_3, \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] + \tilde{C}_1,
\end{aligned}$$

где мы обозначили для краткости $\tau = \theta_{i+1}^{(1)} - n_{\tilde{k}} + 1$. Далее поскольку

$$\varkappa_1^{(1)}(\tau) = \max \{0; \varkappa_1^{(1)}(\theta_i^{(1)}) + \eta_{1,\tau} - \ell(1, \tilde{k}, 1)\},$$

то продолжим цепочку рассуждений:

$$\begin{aligned}
& E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}} I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}} = \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})] = \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 \leq L}} \sum_{k=1}^d v^{w_1} v^{-\ell(1, \tilde{k}, 1)} \times \\
& \times E[v^{\eta_{1,\tau}} I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, w_3, \Gamma^{(k, n_k)}))] + \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v) \times \\
& \times \sum_{\substack{w_1 \geq 0, \\ w_3 > L}} v^{w_1} v^{-\ell(1, \tilde{k}, 1)} E[v^{\eta_{1,\tau}} I(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, w_3, \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))})] + \tilde{C}_2 = \\
& = Q_1(v, \tilde{k}) \left(\sum_{w_1 \geq 0} \sum_{k=1}^d v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, [0; L], \Gamma^{(k, n_k)})) + \right. \\
& \left. + \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, (L; \infty), \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}}))}) \right) + \tilde{C}_2, \quad (3.43)
\end{aligned}$$

где $Q_1(v, \tilde{k}) = \prod_{\tilde{r}=2}^{n_{\tilde{k}}} q^{(1)}(\tilde{k}, \tilde{r}, v)$. Просуммируем по \tilde{k} получившийся в (3.43) результат:

$$\sum_{\tilde{k}=1}^d E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}} I(\Gamma_{\theta_{i+1}^{(1)}} = \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})] = E[v^{\hat{\varkappa}_{1,i+1}^{(1)}}] =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\tilde{k}=1}^d Q_1(v, \tilde{k}) \left(\sum_{w_1 \geq 0} \sum_{k=1}^d v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, [0; L], \Gamma^{(k, n_k)})) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, (L; \infty), \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})) \right) + \tilde{C}_3 \leq \\
&\leq \max_{\tilde{k}=1, d} \{Q_1(v, \tilde{k})\} \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \left(\sum_{\tilde{k}=1}^d \sum_{k=1}^d \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, [0; L], \Gamma^{(k, n_k)})) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\tilde{k}=1}^d \mathbf{P}(C_i^{(1)}(\Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})}, w_1, (L; \infty), \Gamma^{(\tilde{k}, n_{\tilde{k}})})) \right) + \tilde{C}_3 = \\
&= \max_{\tilde{k}=1, d} \{Q_1(v, \tilde{k})\} \sum_{w_1 \geq 0} v^{w_1} \mathbf{P}(\hat{z}_{1,i}^{(1)} = w_1) + \tilde{C}_3 = \max_{\tilde{k}=1, d} \{Q_1(v, \tilde{k})\} E[v^{\hat{z}_{1,i}^{(1)}}] + \tilde{C}_3.
\end{aligned}$$

Для $\hat{z}_{1,i}^{(2)}$ можно провести похожие рассуждения и в итоге получить оценки:

$$E[v^{\hat{z}_{1,i+1}^{(1)}}] \leq \max_{\tilde{k}=1, d} \{Q_1(v, \tilde{k})\} E[v^{\hat{z}_{1,i}^{(1)}}] + \tilde{C}_3; \quad (3.44)$$

$$E[v^{\hat{z}_{1,i+n_0}^{(2)}}] \leq Q_1(v, 0) E[v^{\hat{z}_{1,i}^{(2)}}] + \tilde{C}_4, \quad (3.45)$$

где $r = \overline{1, n_0}$. Для $k = \overline{0, d}$ верны равенства $Q_1(1, k) = 1$. Предположив выполненным условие $\min_{k=0, d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k, r)}} > 1$, получим, что величины

$$\begin{aligned}
(Q_1(v, k))' \Big|_{v=1} &= \left(\prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k, r, 1)} \sum_{w=0}^{\infty} \varphi_1(w, T^{(k, r)}) v^w \right)' \Big|_{v=1} = \\
&= \left(\prod_{r=1}^{n_k} v^{-\ell(k, r, 1)} \exp(\lambda_1 T^{(k, r)} (f_1(v) - 1)) \right)' \Big|_{v=1} = \\
&= \left(v^{-\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)} \exp(\lambda_1 (f_1(v) - 1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k, r)}) \right)' \Big|_{v=1} = \\
&= \lambda_1 f_1'(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k, r)} - \sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1), \quad (3.46)
\end{aligned}$$

определяющие знак производной, отрицательны. Поэтому $|Q_1(v, k)| < 1$ для всех $k = \overline{1, d}$ хотя бы при некотором $\varepsilon_1 > 0$ в правой окрестности $1 \leq v \leq (1 + \varepsilon_1)^{1/2}$ точки $v = 1$. Этот факт, в свою очередь, обеспечивает ограниченность в этой же окрестности величин $E[v^{\hat{z}_{1,i}^{(1)}}]$ и $E[v^{\hat{z}_{1,i}^{(2)}}]$ равномерно по i .

Далее из определений (3.41) и (3.42) следует, что для любого $i \geq 0$ существуют такие j_1 и j_2 , что

$$\varkappa_1^{(1)}(i) \leq \hat{\varkappa}_{1,j_1}^{(1)}, \quad \varkappa_1^{(2)}(i) \leq \hat{\varkappa}_{1,j_2}^{(2)}.$$

Следовательно, из (3.40) и неравенства Коши-Буняковского заключаем, что

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v,1) \leq (E[v^{2\varkappa_1^{(1)}(i)}]E[v^{2\varkappa_1^{(2)}(i)}])^{1/2} \leq (E[v^{2\hat{\varkappa}_{1,j_1}^{(1)}}]E[v^{2\hat{\varkappa}_{1,j_2}^{(2)}}])^{1/2}$$

и, значит, для любого v хотя бы из окрестности $[1, 1 + \varepsilon_1]$ исходная последовательность $\{\mathfrak{M}^{(1,i)}(k,r,v,1); i \geq 0\}$ ограничена равномерно по i . □

Важным результатом проведенного анализа является достаточное условие существования стационарного режима последовательности

$$\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}.$$

Теорема 16. *Для того, чтобы марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ имела стационарное распределение $Q_1(\gamma, x_1, x_3)$, $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$, достаточно выполнения неравенств*

$$\min_{k=0,d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 1)}{\lambda_1 f'_1(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1, \quad \min_{k=1,d} \frac{\sum_{r=1}^{n_k} \ell(k, r, 3)}{\lambda_3 f'_3(1) \sum_{r=1}^{n_k} T^{(k,r)}} > 1. \quad (3.47)$$

Доказательство. Предположим обратное, а именно, что при выполнении условия (3.47) марковская цепь $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ не имеет стационарного распределения. Тогда для любого состояния $(\gamma, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2$ и независимо от начального распределения

$$\mathbf{P}(\Gamma_0 = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,0} = x_1, \varkappa_{3,0} = x_3), \quad (\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2,$$

имеют место предельные равенства

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) = 0, \quad (\Gamma^{(k,r)}, x_1, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{Z}_+^2. \quad (3.48)$$

Как и для цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ для доказательства этого факта рассмотрим возможные случаи, предполагая апериодичность рассматриваемой цепи (см. рассуждения [160, гл. 3, § 3-4]):

1. все состояния цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{1,i}, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$ невозвратные, тогда предельные соотношения выполняются в силу [160, с. 541, лемма 2];
2. существует хотя бы одно возвратное состояние, тогда все состояния возвратные (поскольку все состояния сообщающиеся); и пусть все состояния нулевые, тогда предельное соотношение также выполняется [160, с. 541, лемма 3];
3. все состояния возвратные и существует хотя бы одно положительное, тогда все состояния положительные и пределы

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) > 0$$

являются стационарными вероятностями (см. рассуждения [160, с. 549, теорема 1]), что противоречит предположению.

Для периодической цепи приведенные рассуждения достаточно провести для циклических подклассов.

Выберем начальное распределение так, что при некоторых $v_1 > 1$, $v_3 > 1$ будут выполнены неравенства $\mathfrak{M}^{(1,0)}(k, r, v_1, 1) < \infty$, $\mathfrak{M}^{(1,0)}(k, r, 1, v_3) < \infty$ для всех $\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma$. Это ограничение, в силу леммы (12) и полученных ранее результатов касательно марковской цепи $\{(\Gamma_i, \varkappa_{3,i}); i \geq 0\}$, обеспечивает при любом конечном $i \geq 0$ существование функций

$$\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1), \quad \mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, 1, v_3), \quad (3.49)$$

$$\frac{d}{dv_1} \left[\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1) \right], \quad \frac{d}{dv_3} \left[\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, 1, v_3) \right], \quad (3.50)$$

по крайней мере в некоторой окрестности точек $v_1 = 1$, $v_3 = 1$.

В силу равенств (3.48) для любого натурального N найдется некоторое число \mathfrak{J} , что для всех $i > \mathfrak{J}$ будет выполнено условие

$$1 > (1 + N) \sum_{x_1=0}^N \sum_{x_3=0}^N \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(k,r)}, \varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3)$$

и, значит,

$$1 > (1 + N) \sum_{x_1=0}^N \sum_{x_3=0}^N \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
E[\varkappa_{3,i} + \varkappa_{1,i}] &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} (x_1 + x_3) \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \geq \\
&\geq \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=N+1}^{\infty} x_3 \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) + \sum_{x_1=N+1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} x_1 \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \geq \\
&\geq \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=N+1}^{\infty} (N+1) \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) + \sum_{x_1=N+1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} (N+1) \times \\
&\times \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \geq (N+1) \left[\sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_3=N+1}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) + \right. \\
&+ \left. \sum_{x_1=N+1}^{\infty} \sum_{x_3=0}^{\infty} \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} = x_1, \varkappa_{3,i} = x_3) \right] \geq (N+1)(1 - \mathbf{P}(\varkappa_{1,i} \leq N, \varkappa_{3,i} \leq N)) \geq \\
&\geq (N+1) \left(1 - \frac{1}{N+1} \right) = N.
\end{aligned}$$

Следовательно, $E[\varkappa_{3,i} + \varkappa_{1,i}]$ неограниченно возрастает при $i \rightarrow \infty$.

Другое рассуждение, однако, приводит к противоположному результату. Действительно, последовательность $\{E[\varkappa_{3,i}]; i \geq 0\}$ ограничена и нетрудно проверить, что

$$E[\varkappa_{1,i}] = \sum_{\Gamma^{(k,r)} \in \Gamma} \frac{d}{dv_1} \left(\mathfrak{M}^{(1,i)}(k, r, v_1, 1) \right) \Big|_{v_1=1},$$

где величина справа в силу интегральной формулы Коши и леммы 12 равномерно по i ограничена некоторой постоянной величиной. Поэтому принятое предположение не будет справедливым. Доказательство этим завершается. \square

Вследствие сложности рассматриваемой системы, дальнейший анализ марковской цепи, в состояние которой входят все четыре очереди (O_1, O_2, O_3 и O_4), был проведен численно, а его результаты будут представлены в следующей главе.

Глава 4. Исследование системы управления тандемом с помощью имитационной модели

Глава 4 имеет своей целью проанализировать и расширить результаты, полученные аналитически в предыдущих главах. С этой целью была разработана имитационная модель и написана программа для ее исследования. Для определения момента достижения системой стационарного режима подсчитываются различные статистики одновременно для двух систем: смещенной, то есть системы с ненулевым количеством требований в начале, и несмещенной, то есть системы с пустыми очередями при старте. Основным показателем качества работы системы выбрана средневзвешенная оценка времени пребывания требования в системе. В завершении главы приведены конкретные эксперименты и анализ их результатов.

4.1 Описание имитационной модели

Комплексные системы, состоящие из нескольких схожих или различных подсистем, могут рассматриваться с точки зрения понятия «сложная система». Общее определение «сложной системы» было введено в работе [78] на основе изучения большого количества реальных систем и их математических моделей. Для анализа подобных систем ранее использовался весьма широкий математический аппарат: конечные автоматы, дифференциальные уравнения, динамические системы и теория массового обслуживания. Поэтому введение единого общего понятия представлялось актуальным и было осуществлено именно в работе [78]. Тандем управляющих систем обслуживания является одним из примеров таких «сложных систем».

До этой главы в работе исследовались свойства основных подсистем тандема: подсистемы с очередью низкоприоритетного потока, с очередями первичных входных потоков и с промежуточной очередью. Тем не менее, для всестороннего изучения системы необходимо также провести ее синтез. Другими словами, здесь и далее нас будет интересовать поведение системы в целом: ее эффективность и устойчивость с течением времени. Эффективность подобных

систем может оцениваться, к примеру, с помощью одной из следующих характеристик: 1) среднее взвешенное количество ожидающих требований в очередях; 2) среднее взвешенное время нахождения в системе произвольного требования; 3) среднее взвешенное время ожидания в системе произвольного требования; 4) среднее время простоя системы и др. В данном разделе акцент будет сделан на среднем взвешенном времени ожидания и среднем взвешенном времени пребывания произвольного требования в системе.

Математическая модель рассматриваемой в работе абстрактной управляющей системы Ляпунова–Яблонского, построенная по принципам кибернетического подхода, существенно упростила построение и реализацию имитационной модели тандема перекрестков (рис. 1.3). В частности, нелокальное описание блоков системы помогло избежать формирования большого количества данных и, как следствие, их последующей обработки. Время имитации при этом должно существенно сократиться. Для рассматриваемой в работе системы в роли состояния выступали длины очередей и состояние обслуживающего устройства. В соответствии с законами распределения входных потоков Π_1 и Π_3 генерировались требования системы. Для каждого требования в ходе моделирования фиксировался момент его прихода в систему, выхода из нее и время до обслуживания.

Альтернативным подходом к изложенному в этой работе является метод дискретных событий, подробно описанный в работах [5;6] и использовавшийся, например, в работах [155;158]. В противовес нелокальному описанию системы, в роли наблюдаемых событий, как правило, выбирались вход в систему или выход из нее конкретного требования, момент смены обслуживающим устройством его состояния и т.д. В результате формируется исчерпывающее множество событий системы и создается полное описание всего процесса обслуживания. Поскольку для получения оценки основных характеристик работы системы такой объем информации является избыточным, то представляется целесообразным и зачастую необходимым отказаться от большей ее части.

В настоящей работе наибольший акцент при оценке эффективности работы системы делается на среднее взвешенное время нахождения произвольного требования первичных потоков Π_1 и Π_3 в системе: чем больше средняя интенсивность потока требований, тем больше вес требований этого потока. Время ожидания требований первичных потоков не характеризует процессов, происходящих между двумя перекрестками, поэтому в качестве конечного критерия

эффективности работы не используется. Размер каждой очереди O_j , $j = \overline{1,4}$, сложно преобразовать в единую характеристику, поскольку очереди имеют качественно разную природу. Однако для определения момента наступления стационарного режима данная информация оказывается весьма полезной.

Опишем основные этапы работы программы. Изначально фиксируются параметры, определяющие входные потоки: λ_j , $p_v^{(j)} > 0$ ($j = 1,3$, $v = 1, 2, \dots$); параметры перекрестков: μ_1 , μ_2 , μ_3 , μ_4 , μ_{prolong} ; управляющие параметры алгоритма: $\tilde{T}^{(1,1)}$, $\tilde{T}^{(1,2)}$, $\tilde{T}^{(2,1)}$, $\tilde{T}^{(2,2)}$, $\tilde{T}^{(2,3)}$, L . Здесь величины μ_1 , μ_2 и μ_3 описывают интенсивности обслуживания требований потоков Π_1 , Π_2 и Π_3 соответственно: $\ell(k,r,j) = [\mu_j T^{(k,r)}]$, если поток Π_j обслуживается и $\ell(k,r,j) = 0$ если не обслуживается. А величина μ_{prolong} определяет интенсивность обслуживания требований потока Π_2 при продлении. Величина μ_4 определяет вероятность $p_{k,r}$ для состояния $\Gamma^{(k,r)}$ продолжительностью $T^{(k,r)}$ по формуле $p_{k,r} = 1 - \exp\{-T^{(k,r)}\mu_4\}$.

Следующим шагом работы программы является объединение множеств состояний двух перекрестков и создание общего множества состояний для одной управляющей системы. При построении математической модели этот шаг был описан достаточно детально (стр. 26). На выходе этого этапа также получаем граф переходов для обслуживающего устройства.

Имитация управляющей системы производится при двух различных начальных состояниях. Первым начальным условием является полное отсутствие автомобилей в очередях к началу наблюдения за светофорами. В качестве второго условия выбирается случайное количество автомобилей для каждой очереди. В случае отсутствия требований в начальный момент времени, систему будем называть, следуя работе [158], несмещенной и указывать индекс «0» при рассмотрении соответствующих ей величин. В случае непустых очередей систему будем называть смещенной и соответствующие ей величины обозначать индексом «+». Далее, для того, чтобы определить факт достижения системой стационарного режима используется информация о «близости» состояний смещенной и несмещенной систем. Непосредственный подсчет статистик, характеризующих качество работы управляющей системы, производится в стационарном режиме смещенной системы, после завершения переходных процессов. При записи величин, подсчитанных для стационарного режима, будем опускать индексы «0» и «+».

Для изучения воздействия управляющих параметров ($\tilde{T}^{(1,1)}$, $\tilde{T}^{(1,2)}$, $\tilde{T}^{(2,1)}$, $\tilde{T}^{(2,2)}$, $\tilde{T}^{(2,3)}$, L) на эффективность работы системы, изложенная выше процедура

имитации выполняется для заранее заданной сетки значений этих параметров. Сетка значений параметров выбиралась достаточно подробной для большей репрезентативности результатов. С другой стороны, множество значений не было избыточным для сокращения времени работы программы.

Основной текст программы написан на языке «C++» с использованием многофункционального расширяемого текстового редактора «GNU Emacs 26.1» и компилятора «GNU C++» («g++») версии 7.3. Для визуализации результатов имитационного моделирования использовался язык «Python» версии 3.6. Программа включает в себя следующие компоненты.

- Блок *оптимизации*: 1) в соответствии с конфигурационным файлом формирует сетку управляющих параметров, с которыми будет запускаться имитационное моделирование; 2) для фиксированного набора параметров инициирует запуск имитации.
- Блок *проверки стационарности* системы: 1) производит заданное количество итераций работы алгоритма для смещенной и несмещенной систем; 2) на каждой итерации проверяет близость характеристик смещенной и несмещенной систем и 3) фиксирует факт вступления систем в квазистационарный режим.
- Блок *проведения итерации* системы: 1) осуществляет переключение состояний устройства и подсчет статистики их посещений; 2) осуществляет переключение состояний очередей и сбор статистик, связанных с размерами очередей; 3) с помощью генератора псевдослучайных чисел формирует значения величин, определяющих новые требования потоков Π_1 и Π_3 , а также принимает решение об уже обслуженных требованиях.
- Блок *оценки эффективности работы* системы: 1) агрегирует характеристики эффективности, подсчитанные для несмещенной системы во время нахождения в стационарном режиме; 2) проводит запись полученных результатов в файл и вывод необходимой информации на экран.
- Блок *отрисовки результатов*: при помощи дополнительных модулей «mpl_toolkits», «matplotlib» языка «Python» формирует png-изображение, содержащее график результатов работы программы для различных управляющих параметров.

Опишем используемые в модели величины. Зафиксируем индекс $j \in \{1, 3\}$, соответствующий номеру потока, и индекс $n = 1, 2, \dots$, соответствующий очередному такту работы управляющей системы.

При моделировании наблюдаются значения следующих величин: t_n — продолжительность такта с номером n ; $\gamma_{j,\nu}^+$ и $\gamma_{j,\nu}^0$ — для смещенной и несмещенной систем соответственно время ожидания автомобиля ν потока Π_j , $\nu = 0, 1, \dots$; $\alpha_{in,j,n}^+$ и $\alpha_{in,j,n}^0$ — количество автомобилей потока Π_j , которые поступили за такт с номером n , в смещенной и несмещенной системах соответственно; $\alpha_{out,j,n}^+$ и $\alpha_{out,j,n}^0$ — количество автомобилей потока Π_j , которые закончили обслуживание на такте n для смещенной и несмещенной систем соответственно; $\zeta_{j,\nu}$ — время, которое автомобиль с номером ν потока Π_j провел с момента его прихода в систему и до момента его выхода; $\beta_{j,n}$ — количество автомобилей, которые находятся в очереди O_j , если очередь O_j только что начала обслуживаться, и $\beta_{j,n}$ положим равной 0, если обслуживаться начала любая другая очередь. Отметим, что время $\zeta_{1,\nu}$ нахождения в системе автомобиля потока Π_1 в том числе включает в себя время нахождения в системе его в качестве автомобиля потока Π_2 и потока Π_4 . При совершении очередного события в системе происходит его обработка и изменение соответствующих отслеживаемых величин. В случае, если в течение определенного количества тактов (авторами экспериментально подобрано значение 100000) не наступил квазистационарный режим, то процесс имитации заканчивается. Однако, если система входит в квазистационарный режим, то в течение фиксированного количества тактов (авторами также экспериментально подобрано значение 100000) происходит подсчет характеристик эффективности функционирования системы.

4.2 Алгоритм определения момента достижения квазистационарного режима

Как правило, под стационарным режимом на содержательном уровне понимают такой режим функционирования системы, устанавливающийся с течением времени, при котором выделенные ее характеристики в среднем остаются неизменными. В прошлом разделе были определены смещенная и несмещенная системы, а также введены соответствующие величины, вычисление кото-

рых поможет в определении момента достижения квазистационарного режима. Идея алгоритма определения момента достижения такого режима заключается в следующем. Наблюдаем одновременно за динамикой смещенной и несмещенной систем и вычисляем для каждой из них некоторые усредненные величины. Момент, когда эти величины станут достаточно близки, считаем моментом окончания переходных процессов.

Детали алгоритма будем сопровождать результатами экспериментов, проведенных со следующими наборами параметров:

- $\lambda_1 \in \{\mathbf{0.3}, \mathbf{0.4}\}$, $p_1^{(1)} = 0.4$, $p_2^{(1)} = 0.4$, $p_3^{(1)} = 0.2$, $p_v^{(1)} = 0$, $v > 3$;
- $(\tilde{T}^{(1,1)}, \tilde{T}^{(1,2)}) = (30, 30)$, $\mu_1 = 1.2$, $\mu_2 = 1.3$;
- $\lambda_3 = 0.1$, $p_1^{(3)} = 0.4$, $p_2^{(3)} = 0.3$, $p_3^{(3)} = 0.3$, $p_v^{(3)} = 0$, $v > 3$;
- $\mu_4 = 0.08$.

Здесь представлены два набора параметров, которые отличаются лишь значением параметра λ_1 , выделенного жирным шрифтом. Причем случай при $\lambda_1 = 0.3$ соответствует системе, для которой программно был зафиксирован квазистационарный режим, а случай при $\lambda_1 = 0.4$ — системе, для которой квазистационарный режим обнаружен не был. Подобные системы, которые включают в себя входные потоки пачек из не более трех требований, рассмотрены, например, в работе [26].

Перейдем к формализации алгоритма. Зафиксируем параметры метода: $\delta_1 < 1$, $\delta_2 > 1$ и $\delta_3 > 1$. В конце каждого такта будем вычислять значения

$$\gamma_{j,\cdot}^0 = \frac{1}{\tilde{\gamma}_j^0} \sum_v \gamma_{j,v}^0, \quad \gamma_{j,\cdot}^+ = \frac{1}{\tilde{\gamma}_j^+} \sum_v \gamma_{j,v}^+, \quad (4.1)$$

среднего времени ожидания обслуживания требований потока Π_j , $j = 1, 3$, в несмещенной и смещенной системах соответственно. Динамика времен ожидания для конкретной системы со стационарным режимом при $\lambda_1 = 0.3$ приведена на рисунках A.1 (для требований потока Π_1) и A.2 (для требований потока Π_3).

Для большей устойчивости алгоритма принятия решения о наступлении квазистационарного режима в несмещенной системе будем следить за количеством требований во входящем и выходящем потоках:

$$F_{\text{in},1}^0 = \sum_n \alpha_{\text{in},1,n}^0, \quad F_{\text{out},4}^0 = \sum_n \alpha_{\text{out},4,n}^0, \quad (4.2)$$

$$F_{\text{in},3}^0 = \sum_n \alpha_{\text{in},3,n}^0, \quad F_{\text{out},3}^0 = \sum_n \alpha_{\text{out},3,n}^0. \quad (4.3)$$

Для системы в квазистационарном режиме ожидается, что среднее число требований, пришедших в систему в единицу времени, $F_{in,1}^0$ и $F_{in,3}^0$, не будет существенно превышать среднее число требований, $F_{out,4}^0$ и $F_{out,3}^0$ соответственно, покинувших систему за единицу времени. Поскольку при поступлении в систему требования потока Π_1 проходят дополнительные этапы обслуживания — в качестве требований потока Π_2 и Π_4 , — то количество требований потока Π_1 , покинувших систему, целесообразно считать по выходному потоку Π_4^{out} . Динамика соответствующих величин представлена на рисунках [A.3](#) и [A.4](#).

Окончательное решение о достижении системой стационарного режима будет приниматься в случае, если выполнены следующие неравенства:

$$\frac{|\gamma_{j,\cdot}^0 - \gamma_{j,\cdot}^+|}{\gamma_{j,\cdot}^0} < \delta_1, \quad \frac{F_{in,1}^0}{F_{out,4}^0} < \delta_2, \quad \frac{F_{in,3}^0}{F_{out,3}^0} < \delta_3. \quad (4.4)$$

Рассмотрим систему, в которой некоторые очереди неограниченно возрастают и, следовательно, стационарный режим достигнут быть не может. Проанализируем динамику среднего времени ожидания произвольного требования в смещенной и несмещенной системах (рис. [A.5](#)). Как видно из рисунка, величины $\gamma_{j,\cdot}^0$ и $\gamma_{j,\cdot}^+$ неограниченно возрастают, причем с похожей скоростью. Поэтому величина $\frac{|\gamma_{j,\cdot}^0 - \gamma_{j,\cdot}^+|}{\gamma_{j,\cdot}^0}$ будет небольшой за счет большого знаменателя и относительно небольшого числителя.

Для учета подобных случаев при фиксации факта наличия или отсутствия стационарного режима использовались средние количества входящих и выходящих требований в единицу времени по потокам Π_1 и Π_3 . Динамика соответствующих величин $F_{in,1}^0$ и $F_{out,4}^0$ для потока Π_1 представлена на рисунке [A.6](#). Из графика видно, что количество $F_{in,1}^0$ входящих требований в единицу времени заметно превышает количество $F_{out,4}^0$ выходящих требований в единицу времени, поэтому неравенство $\frac{F_{in,1}^0}{F_{out,4}^0} < \delta_2$ не сможет быть выполнено.

4.3 Показатели качества работы системы

Как было сказано ранее, важнейшими характеристиками работы системы являются размер очередей и средние времена нахождения требований в системе. Здесь, как и в предыдущем пункте, в качестве примера будем рассматри-

вать запуски программ с теми же двумя наборами параметров, отличающиеся лишь параметром Λ_1 . Для системы со стационарным режимом динамика длин очередей второго перекрестка O_2 и O_3 представлена на рисунке 4.1. Динамика длины очереди первого перекрестка O_1 и длины промежуточной очереди O_4 представлены на рисунке 4.2.

Как видно из графиков, длины очередей колеблются между нулем и некоторым конечным числом, что «подсказывает» о существовании в такой системе стационарного режима.

С другой стороны, при наблюдении за длинами очередей в системе без стационарного режима, величина некоторых очередей может неограниченно возрастать (см. рис. 4.3).

После того, как стационарный режим в системе достигнут, можно приступить к оценке основных показателей качества функционирования системы. С этой целью продолжается процесс имитации, но только для несмещенной системы. Необходимо получить оценку для математического ожидания времени пребывания произвольного требования потока Π_j , $j \in \{1, 3\}$. Такую оценку можно построить по наблюдениям за каждым обслуженным требованием выделенной реализации потока Π_j . Для каждого $j = 1, 3$ предлагается следующая оценка для математического ожидания времени пребывания требований по потоку Π_j :

$$\hat{E}\gamma_j = \frac{1}{\bar{\nu}_j} \sum_{\nu} \zeta_{j,\nu}.$$

Динамика среднего времени пребывания в системе для рассматриваемого примера изображена на рисунке 4.4. Кроме того, имеет смысл получить оценки, характеризующие работу системы не по отдельному потоку, а для системы в целом. Для этого предлагается строить средние взвешенные оценки, где в качестве веса отдельному потоку приписывается интенсивность поступления его требований, т.е. величина, равная $\lambda_j \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(j)}$. Итак, имеем результирующую оценку целевой функции всей системы

$$\hat{E}\gamma = \frac{\sum_{j \in \{1,3\}} (\lambda_j \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(j)}) \hat{E}\gamma_j}{\sum_{j \in \{1,3\}} \lambda_j \sum_{\nu \geq 1} \nu p_{\nu}^{(j)}}.$$

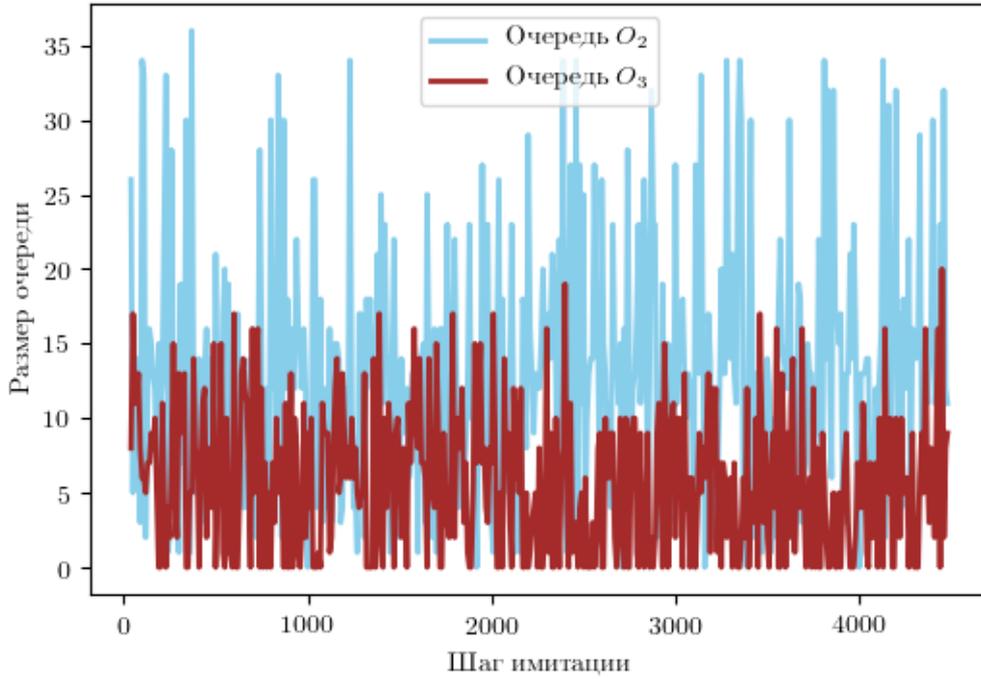


Рисунок 4.1 — Динамика длин очередей O_2 и O_3 второго перекрестка.
Система со стационарным режимом

4.4 Анализ области стационарности системы

Для анализа функционирования тандема перекрестков были зафиксированы следующие параметры:

- $\lambda_1 = 0.35$, $p_1^{(1)} = 0.4$, $p_2^{(1)} = 0.4$, $p_3^{(1)} = 0.2$, $p_v^{(1)} = 0$, $\nu > 3$;
- $(\tilde{T}^{(1,1)}, \tilde{T}^{(1,2)}) = (20, 10)$, $\mu_1 = 1.2$;
- $\lambda_3 = \{0.1, 0.2\}$, $p_1^{(3)} = 0.4$, $p_2^{(3)} = 0.3$, $p_3^{(3)} = 0.3$, $p_v^{(3)} = 0$, $\nu > 3$;
- $\mu_4 = 0.001$.

Данные наборы параметров уже упоминались выше. Здесь представлены два набора параметров, отличающихся лишь интенсивностью λ_3 поступления групп требований по потоку Π_3 . Для алгоритма управления перекрестками фиксируем длительность $\tilde{T}^{(2,3)} = 10$ продления зеленого сигнала светофора для потока Π_2 и порог $L = 10$ продления.

При фиксированном наборе параметров ($\lambda_3 = 0.1$ либо $\lambda_3 = 0.2$) проводилась серия экспериментов, в которых перебирались значения для длительности обслуживания $\tilde{T}^{(2,1)} = \{1, 5, 9, \dots, 97\}$ требований потока Π_3 и длительности обслуживания $\tilde{T}^{(2,2)} = \{1, 5, 9, \dots, 97\}$ потока Π_2 .

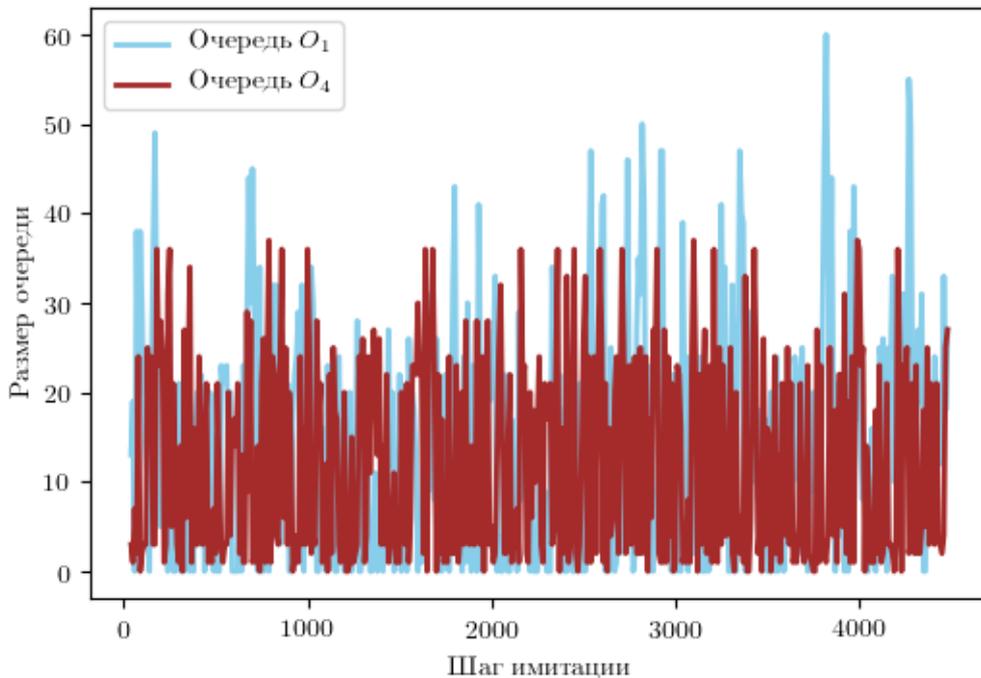


Рисунок 4.2 — Динамика длины очереди первого перекрестка O_1 и длины промежуточной очереди O_4 . Система со стационарным режимом

На рис. A.7 представлены результаты экспериментов. По осям координат отложены значения $\tilde{T}^{(2,1)}$ длительности обслуживания требований потока Π_3 и значения $\tilde{T}^{(2,2)}$ длительности обслуживания требований потока Π_2 . Желтым цветом обозначены точки, в которых было определено достижение системой стационарного режима. Темно-зеленым цветом обозначены случаи отсутствия стационарности. Кроме того на графике черным цветом изображены границы области стационарности, полученная из достаточных условий теоремы 16.

Из графика видно, что желтая область выходит далеко за границы черных линий. Это свидетельствует о том, что достаточное условие, полученное в работе аналитически, не является необходимым. Ввод дополнительного режима продления по высоко приоритетному потоку при отсутствии большого числа требований по низкоприоритетному потоку позволяет существенно расширить область стационарности системы. Интуитивно данный результат ожидаем: при отсутствии требований по одному из потоков, другой поток получает дополнительный временной «запас» для обслуживания за счет продления.

Также на графике изображена область, ограниченная серой линией. Эта область получена эмпирическими рассуждениями и дает «примерную» оценку области стационарности для системы с продлением. Рассуждения для вывода

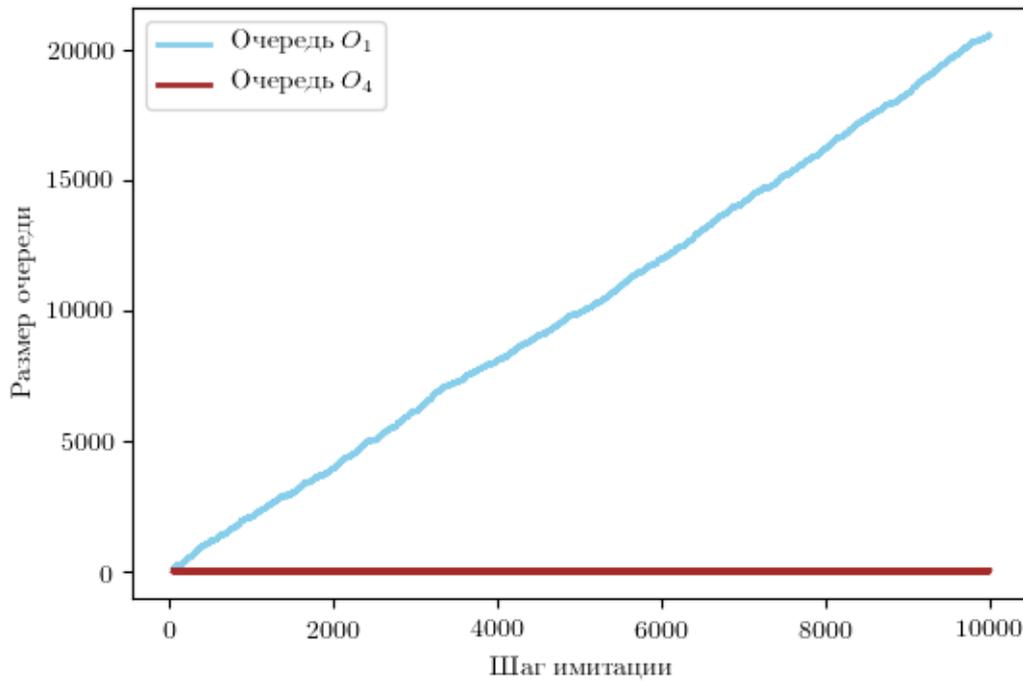


Рисунок 4.3 — Динамика длины очереди первого перекрестка O_1 и длины промежуточной очереди O_4 . Система без стационарного режима

этой границы основаны на подсчете «среднего» количества времени, освобождающегося для обслуживания требований потока Π_2 за счет продления.

Более детально результаты эксперимента представлены на рис. А.8. На этом рисунке каждому эксперименту соответствует посчитанная оценка средневзвешенной длительности ожидания одного требования. Чем более темным является цвет точки — тем лучше. Кроме присутствовавших на предыдущем рисунке границ, здесь присутствуют линии равных загрузок для случая циклического управления (синий цвет) и для случая циклического управления с продлением (голубой цвет). В работах [148] и [158] было отмечено, что оптимальные значение параметров с точки зрения средневзвешенного времени пребывания находится вблизи ломаной равных загрузок. При условии отсутствия продления ($\tilde{T}^{(2,3)} = 0$), под загрузкой системы, например, по потоку Π_1 естественно понимать величину

$$\frac{(\tilde{T}^{(2,1)} + \tilde{T}^{(2,2)})\lambda_1 \sum_{v \geq 1} \nu p_v^{(1)}}{[\mu_2 \tilde{T}^{(2,2)}]}. \quad (4.5)$$

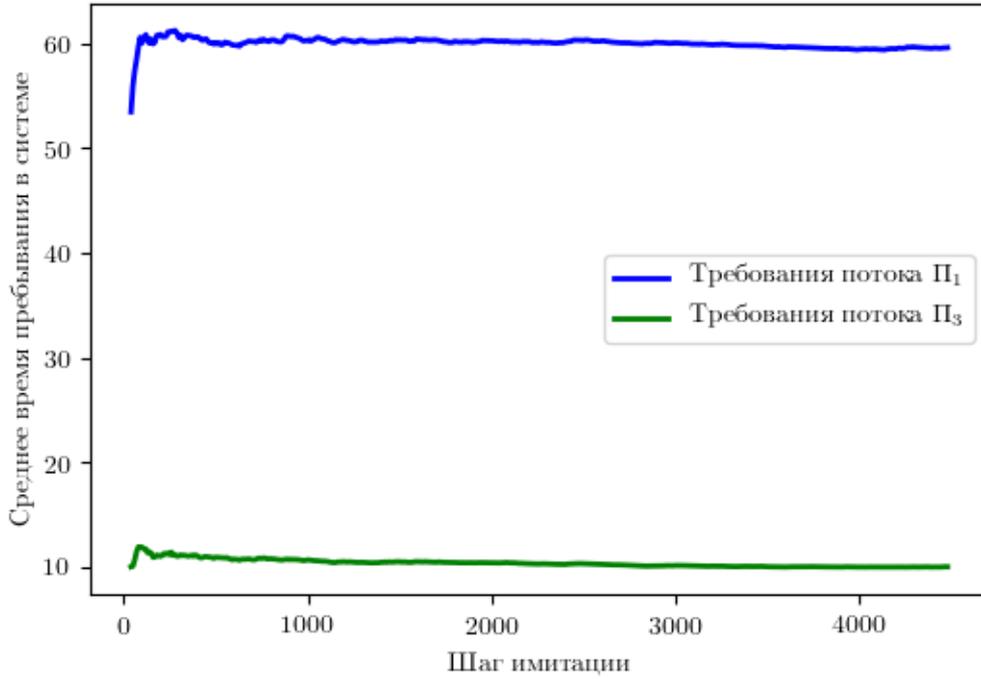


Рисунок 4.4 — Динамика среднего времени пребывания требований в системе.
Система со стационарным режимом

Тогда ломаную равных загрузок определим из условия равенства загрузки системы по потокам Π_1 и Π_3 :

$$\frac{(\tilde{T}^{(2,1)} + \tilde{T}^{(2,2)})\lambda_1 \sum_{v \geq 1} v p_v^{(1)}}{[\mu_2 \tilde{T}^{(2,2)}]} = \frac{(\tilde{T}^{(2,1)} + \tilde{T}^{(2,2)})\lambda_3 \sum_{v \geq 1} v p_v^{(3)}}{[\mu_3 \tilde{T}^{(2,1)}]} \quad (4.6)$$

График этой кривой изображен на рисунке A.8 синим цветом.

Далее встает вопрос о том, что считать загрузкой системы в случае присутствия продления по низкоприоритетному потоку Π_3 . В данной работе под загрузкой будем понимать отношение общего числа пришедших требований по потоку (Π_1 или Π_3) к общему числу обслуженных требований по этому потоку. Аналитически посчитать эти величины сложно, поэтому на графике представлена кривая равных загрузок, посчитанная на основе экспериментальных данных. Как видно из рисунка, такая кривая лучше «следует» за оптимальными значениями параметров, нежели кривая равных загрузок для циклического алгоритма.

Поясним, что значит кривая равных загрузок лучше «следует» за оптимальными значениями параметров. Поставим задачу при фиксированном значении времени обслуживания потока Π_2 (величина $\tilde{T}^{(2,2)}$ на рис. A.8) найти такое значение времени обслуживания потока Π_3 (величина $\tilde{T}^{(2,1)}$ на рис. A.8),

при котором достигается минимум средневзвешенного времени пребывания требования в системе. Фиолетовая линия на рис. A.8 демонстрирует динамику этих значений при изменении времен $\tilde{T}^{(2,2)}$. Видно, что «в среднем» голубая линия лучше аппроксимирует фиолетовую кривую, чем синяя. Особенно в окрестности прямой $\tilde{T}^{(2,2)} = 0$.

Завершая анализ экспериментальных данных, отметим следующее.

- При увеличении интенсивности потока Π_2 (или, что то же самое, интенсивности потока Π_1), область стационарности сужается (см. рис. A.10).
- С увеличением порога L продления, область стационарности увеличивается (см. рис. A.9).

Заключение

В приведенной работе был рассмотрен тандем управляющих систем, управление в которых осуществляется по циклическому алгоритму и алгоритму с продлением. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Построена строгая математическая модель тандема с циклическим алгоритмом управления и алгоритмом с продлением. Отличительной особенностью системы также является немгновенность перемещения требований между системами.
2. Доказана марковость случайной последовательности, включающей длину низкоприоритетной очереди. Проведена классификация состояний цепи по арифметическим свойствам переходных вероятностей этой последовательности. А также найдены достаточное и необходимое условия существования стационарного распределения.
3. Проведен аналогичный анализ для случайной последовательности, включающей очереди первичных требований: доказана ее марковость, проведена классификация состояний и найдено достаточное условие существования стационарного распределения.
4. Найдено условие ограниченности для последовательности математических ожиданий $\{(E\mathcal{N}_{4,i}); i \geq 0\}$.
5. На основе имитационной модели расширены результаты, полученные теоретически.

Для дальнейшего исследования можно выделить следующие направления и задачи.

1. Найти необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения для марковской цепи, включающей в себя состояние обслуживающего устройства и четыре очереди и описывающей всю систему целиком.
2. Провести более глубокое изучение вида кривой равных загрузок для определения оптимальных значений параметров системы с точки зрения средневзвешенного времени пребывания требования.
3. Расширить класс рассматриваемых графов переходов для обслуживающего устройства.

4. Рассмотреть систему с бóльшим числом входных потоков, что соответствует, например, нескольким подряд идущим перекресткам. В идеале нужно придти к модели, содержащей произвольное число таких перекрестков.

Список литературы

1. Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Stochastic models of transport flows // *Communications in statistics — Theory and methods.* — 2011. — Vol. 40. — Pp. 2830–2846.
2. Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Asymptotic analysis of traffic lights performance under heavy traffic assumption // *Methodology and Computing in Applied Probability, Springer.* — 2013. — Vol. 15, no. 4. — Pp. 935–950.
3. Afanasyeva L.G., Bulinskaya E.V. Estimation of transport systems capacity // *Springer-Verlag Berlin, Heidelberg.* — 2013. — Pp. 63–77.
4. Asmussen S. Applied probability and queues. — 2nd edition. — N.Y.: Springer, 2003. — 438 pp.
5. Asmussen S., Glynn P.W. Stochastic simulation: algorithms and analysis. — New York: Springer, 2007. — 476 pp.
6. Averill M. L., Kelton W. D. Simulation Modeling and Analysis. — McGraw-Hill, 2000. — 760 pp.
7. The $BMAP/G/1/N \rightarrow PH/1/M$ system with losses / V.I. Klimenok, L. Breuer, G.V. Tsarenkov, A.N. Dudin // *Performance Evaluation.* — 2005. — Vol. 61. — Pp. 17–40.
8. Bailey N. T. J. Operational research in hospital planning and design // *Operat. Res. Quart.* — 1957. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 149–157.
9. Balsamo S., Persone V.D.N., Inverardi P. A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction // *Performance Evaluation.* — 2003. — Vol. 51. — Pp. 269–288.
10. Bartlett M. S. The spectral analysis of point processes // *Journal of Royal statistical society, Ser. B.* — 1963. — Vol. 25, no. 2. — Pp. 264–296.
11. Boon M.A.A., et al. Pollaczek contour integrals for the fixed-cycle traffic-light queue // *Queueing Systems.* — 2019. — Vol. 91, no. 1–2. — Pp. 89–111.

12. *Boon M.A.A., van Leeuwaarden J.S.H.* Networks of fixed-cycle intersections // *Transportation Research Part B: Methodological*. — 2018. — Vol. 117. — Pp. 254–271.
13. *Brumelle S.L.* Mathematics of operations research. — 1978. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 10–16.
14. *Carter M.W. Price C.C.* Operations research: a practical introduction. — Boca Raton: CRC Press, 2001. — 416 pp.
15. *Choudhury G. L., Whitt W.* Computing transient and steady-state distributions in polling models by numerical transform inversion // *IEEE International Conference on Communications, Seattle, WA*. — 1995. — Pp. 803–809.
16. *Cotton M., Mason L. G.* Adaptive isarithmic flow control in fast packet switching networks // *IEEE Trans. on Communications*. — 1995. — Vol. 43. — Pp. 1580–1590.
17. *Darroch J. N.* On the traffic-light queue // *Ann. Math. Statistics*. — 1964. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 380–388.
18. *Davis J. H.* Encirclement conditions for stability and instability of feedback systems with delays // *International Journal of Control*. — 1972. — Vol. 15, no. 4. — Pp. 793–799.
19. *Davis J. L., Massey B., Whitt W.* Sensitivity to the service-time distribution in the nonstationary Erlang loss model // *Management Science*. — 1995. — Vol. 41, no. 6. — Pp. 1107–1116.
20. *Day C. M., Bullock, D. M, Nichols A. P., Brennan Jr. T. M., Chou Ch.-Sh.* Integrated adaptive and traffic responsive algorithms // *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. — 2012. — Vol. 48. — Pp. 3451–3460.
21. *Drew D.R.* Traffic Stream Theory and Control. — New York:: McGraw-Hill, 1968. — P. 467.
22. *Dunne M. C., Potts R. B.* Algorithm for traffic control // *Jr. Oper. Res.* — 1964. — no. 12. — Pp. 870–871.

23. *Erlang A. K.* The theory of probabilities and telephone conversations // *Nyt Tidsskrift for Matematik*. — 1909. — Vol. 20. — Pp. 33–39.
24. *Erlang A. K.* Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges // *Elektroteknikerens*. — 1917. — Vol. 13. — Pp. 5–13.
25. *Falin G., Templeton G.C.* Retrial queues. — London: CRC Press, 1997. — 320 pp.
26. *Fedotkin M. A., Rachinskaya M. A.* Parameters estimator of the probabilistic model of moving batches traffic flow // *Distributed computer and communication networks. 17th international conference, DCCN 2013, Moscow, Russia, October 7-10, 2013. Revised Selected Papers*. — 2014. — Pp. 154–168.
27. *Ferguson M.J., Aminetzah Y.J.* Exact results for nonsymmetric token ring systems // *IEEE Transactions on Communications*. — 1985. — Vol. 33, no. 3. — Pp. 223–231.
28. *Flagle C. D.* Operations research in the health services // *Operat. Res.* — 1962. — Vol. 10, no. 5. — Pp. 591–603.
29. *Gass S. I. M. C. Fu.* Encyclopedia of operations research and management science. — 3rd ed. edition. — Springer, 2013. — 1641 pp.
30. *Gnedenko B.W., Konig D.* Handbuch der Bedienungstheorie. — Berlin: Akademie Verlag, 1983. — 519 pp.
31. *Gomez-Corral A.* On a tandem G-network with blocking // *Advances in Applied Probability*. — 2002. — Vol. 34, no. 3. — Pp. 626–661.
32. *Gomez-Corral A.* A matrix-geometric approximation for tandem queues with blocking and repeated attempts // *Operations Research Letters*. — 2002. — Vol. 30. — Pp. 360–374.
33. *Gomez-Corral A.* A tandem queue with blocking and Markovian arrival process // *Queueing Systems*. — 2002. — Vol. 41. — Pp. 343–370.
34. *Gordon R. L.* A technique for control of traffic at critical intersections // *Transp. Sci.* — 1969. — Vol. 3, no. 4. — Pp. 279–288.

35. *Grandell J.* Doubly stochastic Poisson processes. Lecture Notes in Mathematics. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 240. — 234 pp.
36. *Haight F.A.* Mathematical theories of traffic flow. — New York: Academic press, 1963. — 241 pp.
37. *Heidemann D., Wegmann H.* Queueing at unsignalized intersections // *Transportation research part B: methodological*. — 1997. — Vol. 31, no. 3. — Pp. 239–263.
38. *Hillier F.S. Lieberman G.J.* Introduction to operations research. — 9th ed. edition. — McGraw-Hill, 2010. — 1047 pp.
39. *Inose H., Hamada T.* Road Traffic Control. — University of Tokyo Press, 1975. — P. 331.
40. *Jackson J.R.* Networks of waiting lines // *Operations research*. — 1957. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 518–521.
41. *Jagerman D. L., Melamed B., Willinger W.* Stochastic modeling of traffic process // *In: Frontiers in queueing: models and applications in science and engineering, edited by J.H. Dshalalov*. — 1997. — Pp. 271–320.
42. *Johannsen F. W.* Waiting times and number of calls // *P.O. Elec. Engrs. J.* — 1907. — reprinted October, 1910, and January, 1911.
43. *Kalashnikov V.V.* Mathematical methods in queueing theory. — Dordrecht: Kluwer, 1994. — 377 pp.
44. *Kochegarov V.M., Zorine A.V.* Low-priority queue Fluctuations in Tandem of Queueing Systems Under Cyclic Control with Prolongations // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015). Материалы Восемнадцатой международной научной конференции*. — М.: ИПУ РАН, 2015. — С. 136–143.
45. *Kochegarov V.M., Zorine A.V.* Low-priority queue and server's steady-state existence in a tandem under prolongable cyclic service // *Communications in Computer and Information Science*. — Vol. 678. — 2016. — Pp. 210–221.

46. Kochegarov V.M., Zorine A.V. Low-priority queue and server's steady-state existence in a tandem under prolongable cyclic service // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016)*. Материалы Девятнадцатой международной научной конференции: в 3 томах, под общей редакцией В. М. Вишневого и К. Е. Самуйлова. — М.: РУДН, 2016. — С. 232–239.
47. Kochegarov V.M., Zorine A.V. Low-priority queue fluctuations in tandem of queuing systems under cyclic control with prolongations // *Communications in Computer and Information Science*. — Vol. 601. — 2016. — Pp. 268–279.
48. Kochegarov V.M., Zorine A.V. Primary input flows in a tandem under prolongable cyclic service // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2017)*. Материалы Двадцатой международной научной конференции, под общ. ред. В.М. Вишневого. — М.: ТЕХНОСФЕРА, 2017. — Pp. 517–525.
49. Kochegarov V., Zorine A. Asymptotic properties of service and control operations in tandem systems with cyclic algorithms with prolongation // *IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM-2018)*. — Vol. 1. — 2018. — Pp. 337–342.
50. Kokkonis G., Psannis K. E., Roumeliotis M. Network adaptive flow control algorithm for haptic data over the internet – NAFCAH // *Genetic and Evolutionary Computing*. — Cham: Springer International Publishing, 2016. — Pp. 93–102.
51. Loynes R. M. The stability of a queue with nonindependent inter-arrival and service times // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1962. — Vol. 58, no. 3. — Pp. 497–520.
52. Nazarov A.A., Paul S.V. A cyclic queueing system with priority customers and T-strategy of service // *Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2016)*. Материалы Девятнадцатой международной научной конференции: в 3 томах, под общей редакцией В. М. Вишневого и К. Е. Самуйлова. — М.: РУДН, 2016. — С. 136–143.

53. *Neuts M. F.* A queue subject to extraneous phase change // *Advances in applied probability*. — 1971. — Vol. 3, no. 1. — Pp. 78–119.
54. *Oblakova A., et al.* Exact expected delay and distribution for the fixed-cycle traffic-light model and similar systems in explicit form // *Memorandum Faculty of Mathematical Sciences University of Twente*. — 2016. — Vol. 2056.
55. *R.P. Murthy.* Operations research. — New Age International Publishers, 2007. — 705 pp.
56. *Raghavan N.R.S., Viswanadham N.* Generalized queueing network analysis of integrated supply chains // *International journal of production research*. — 2001. — Vol. 39, no. 2. — Pp. 205–224.
57. *Reich E.* Waiting times when queues are in tandem // *The annals of mathematical statistics*. — 1957. — Vol. 28, no. 3. — Pp. 768–773.
58. Stability of single-wavelength optical buffers / W. Rogiest, E. Morozov, D. Fiems et al. // *European transactions on telecommunications*. — 2010. — Vol. 21, no. 3. — Pp. 202–212.
59. *Takagi H.* Mean message waiting times in symmetric multiqueue systems with cyclic service // *Performance Evaluation*. — 1985. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 271–277.
60. *Vasilakos A., Moschonas C. A., Paximadis C. T.* Adaptive window flow control and learning algorithms for adaptive routing in data networks. — 1990. — Vol. 18. — Pp. 265–266.
61. *Vazquez-Abad F. J., Mason L. G.* Decentralized adaptive flow control of high-speed connectionless data networks // *Jr. Oper. Res.* — 1999. — Vol. 47, no. 6. — Pp. 928–942.
62. *Whitt W.* Weak convergence theorems for priority queues: preemptive-resume discipline // *J. Appl. Prob.* — 1971. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 74–94.
63. *Whitt W.* On the heavy-traffic limit theorem for $GI|G|\infty$ queues // *Adv. Appl. Prob.* — 1982. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 171–190.

64. Whitt W. The steady-state distribution of the $M_t|M|_\infty$ queue with a sinusoidal arrival rate function // *Oper. Res. Lett.* — 2014. — Vol. 42. — Pp. 311–318.
65. Yamada K., Lam T.N. Simulation analysis of two adjacent traffic signals // *Proceedings of the 17th winter simulation conference.* — 1985. — Pp. 454–464.
66. Zorin A.V. Stability of a tandem of queueing systems with Bernoulli noninstantaneous transfer of customers // *Theory of probability and mathematical statistics.* — 2012. — Vol. 84. — Pp. 173–188.
67. Zorine A.V. Stability of a tandem queueing system with delayed Bernoulli transition of customers // *Abstracts of international conference «Modern stochastics: theory and applications II» Dedicated to the anniversaries of prominent Ukrainian scientists: Anatolij Skorokhod, Volodymyr Korolyuk and Igor Kovalenko, September 7–11, 2010, Kyiv, Ukrain.* — 2010. — P. 76.
68. van Leeuwen J. S. H. Delay analysis for the fixed-cycle traffic-light queue // *Transportation science.* — 2006. — Vol. 40, no. 2. — Pp. 189–199.
69. Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В. Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей // *Труды Московского физико-технического института (государственного университета).* — 2010. — Т. 2, № 4. — С. 6–21.
70. Афанасьева Л.Г., Ткаченко А. Многоканальные системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком // *Теория вероятностей и её применения.* — 2013. — Т. 58, № 2. — С. 210–234.
71. Афанасьева Л. Г., Баштова Е. Е. Предельные теоремы для систем обслуживания с дважды стохастическим пуассоновским потоком (условия высокой загрузки) // *Пробл. передачи информ.* — 2008. — Т. 44, № 4. — С. 72–91.
72. Афанасьева Л. Г., Белорусов Т. Н. Предельные теоремы для систем с нетерпеливыми клиентами в условиях высокой загрузки // *Теория вероятн. и ее примен.* — 2011. — Т. 56(4). — С. 788–796.
73. Боровков А.А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1972. — 368 с.

74. *Боровков А. А.* Некоторые предельные теоремы теории массового обслуживания. I // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1964. — Т. 9, № 4. — С. 608–625.
75. *Боровков А. А.* Асимптотические методы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1980. — 381 с.
76. *Бочаров П.П., Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. — М.: Издательство РУДН, 1995. — 529 с.
77. *Бронштейн О. И., Рыков В. В.* Об оптимальных дисциплинах обслуживания в управляющих системах // *Управление производством: Тр. III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (техническая кибернетика).* — 1967. — С. 215–224.
78. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем. — М.: Наука, 1978. — 399 с.
79. *Бусленко Н. П., Черенков А. П.* Применение методов теории массового обслуживания при исследовании операций // *Итоги науки. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.* — 1968, 1970. — С. 69–110.
80. *Вербицкий С.Н., Рыков В.В.* Численное исследование оптимальных политик управления скоростью обслуживания // *Автомат. и телемех.* — 1998. — № 11. — С. 59–70.
81. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. — 6-е изд. изд. — М.: Издательство ЛКИ, 2013. — 400 с.
82. *Гуркова В. М., Заварзин А. С., Осипов О. А.* Задача распределения нагрузки в сети массового обслуживания с делением и слиянием требований // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019). Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (26 июня – 30 июня 2019 г.).* — Томск: Изд-во НТЛ, 2019. — С. 149–152.
83. Двухфазная модель с неограниченными очередями для расчёта характеристик и оптимизации речевых порталов самообслуживания / *М.П. Фархадов, Н.В. Петухова, Д.В. Ефросинин, О.В. Семенова* // *Проблемы управления.* — 2010. — № 6. — С. 53–57.

84. Двухфазная система $ВМАР|G|1|N \rightarrow РН|1|M - 1$ с блокировкой / Л. Бройер, А.Н. Дудин, В.И. Клименок, Царенков Г.В. // *Автомат. и телемех.* — 2004. — № 1. — С. 117–130.
85. Дудин С.А. Модель функционирования колл-центра как система $МАР/РН/N/R - N$ с нетерпеливыми запросами // *Проблемы передачи информации.* — 2011. — Т. 47, № 4. — С. 68–83.
86. Дудин А.Н., Клименок В.И. Расчёт характеристик однолинейной системы обслуживания, функционирующей в марковской синхронной случайной среде // *Автоматика и телемеханика.* — 1997. — по. 1. — Рр. 74–84.
87. Е.А. Елтаренко. Исследование операций (системы массового обслуживания, теория игр, модели управления запасами). — М.: МИФИ, 2007. — 157 с.
88. Е.С. Венцель. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. — М.: Наука, 1988. — 208 с.
89. Зорин А.В. О существовании стационарного распределения для процессов с разделением времени в случайной среде // *Массовое обслуживание. Поток, системы, сети: Материалы международной научной конференции «Современные математические модели анализа и оптимизации телекоммуникационных сетей».* — 2003. — Т. 17. — С. 274–278.
90. Зорин А.В. О стационарном режиме системы разделения времени с ветвящимися потоками вторичных требований, формируемыми в случайной среде // *Вестник Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Математика.* — 2006. — Т. 1, № 4. — С. 38–48.
91. Зорин А.В. Обслуживание конфликтных потоков по алгоритму с продлением в случайной среде // *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения: сб. науч. ст. Междунар. науч. конф., Минск, 15–19 сент. 2008 г.* — 2008. — С. 115–122.
92. Зорин А.В. Дискретные модели алгоритмического управления конфликтными потоками // *Восьмая международная конференция «Дискретные*

модели в теории управляющих систем»: Москва, 6–9 апреля 2009 г. Электронный сборник материалов конференции. Отв. ред. В.Б. Алексеев, В.А. Захаров. — 2009. — С. 84–88.

93. Зорин А.В. Имитационное моделирование процессов обслуживания с разделением времени и переналадками // *Труды VIII Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '09. Москва, 26–29 января 2009 г. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. — 2009. — С. 1105–1137.*
94. Зорин А.В. Два сообщающихся перекрёстка как дискретная управляющая система // *Материалы X Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, МГУ, 1–6 февраля 2010 г.). Под ред. О.М. Касим-Заде. — 2010. — С. 108–111.*
95. Зорин А.В. Модель сообщающихся перекрёстков при циклическом алгоритме управления // *Теория вероятностей, математическая статистика и их приложения: сб. науч. ст. (материалы Междунар. конф. Минск, 22–25 февр. 2010 г.). — 2010. — Т. 3. — С. 114–119.*
96. Зорин А.В. Кибернетический подход к построению и анализу математической модели тандема двух перекрёстков // *Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20–25 июня 2011 г.). Под ред. Ю.И. Журавлева. — 2011. — С. 179–183.*
97. Зорин А.В. Устойчивость тандема систем обслуживания с бернуллиевским немгновенным перемещением требований // *Теория вероятностей и математическая статистика. — 2011. — Т. 84. — С. 163–176.*
98. Зорин А.В. Stochastic model for communicating retrial queueing systems with cyclic control in random environment // *International conference «Modern stochastics: theory and applications III». Kyiv, September 10–14, 2012. Conference materials. — 2012. — P. 70.*
99. Зорин А.В. Стохастическая модель сообщающихся систем массового обслуживания с повторными вызовами и циклическим управлением в случай-

- ной среде // *Кибернетика и системный анализ*. — 2013. — Т. 49, № 6. — С. 100–109.
100. Зорин А.В. On ergodicity conditions in a polling model with Markov modulated input and state-dependent routing // *Queueing systems*. — 2014. — Vol. 76, no. 2. — Pp. 223–241.
101. Зорин А.В. Кибернетическая модель циклического управления конфликтными потоками с последствием // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. — 2014. — Т. 156, № 3. — С. 66–75.
102. Зорин А.В. Кибернетическая модель циклического управления конфликтными потоками с последствием // *Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVII международной конференции (Казань, 16–20 июня 2014 г.). Под редакцией Ю.И. Журавлева*. — 2014. — С. 112–114.
103. Зорин А.В. Кибернетическая модель циклического управления конфликтными потоками с последствием // *Учёные записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. — 2014. — Т. 156, № 3. — С. 66–75.
104. Зорин А.В., Федоткин М.А. Методы Монте-Карло для параллельных вычислений: Учебное пособие. — М.: Издательство Московского университета, 2013. — 192 с.
105. Зорин А. В. Итеративно-мажорантный метод доказательства предельных теорем для процесса обслуживания конфликтных потоков в случайной среде // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. — 2008. — № 3. — С. 155–159.
106. Зорин А. В. Теория конфликтных систем обслуживания при их функционально-статистическом задании: дис. ... д. физ.-мат. наук: 01.01.05. — Москва, 2016. — 351 с.
107. Зорин А. В. Исследование операций обслуживания конфликтных потоков Пуассона по алгоритму с петлей // *Проблемы теоретической кибернетики: XVIII международная конференция (Пенза, 19–23 июня 2017 г.) : Материалы : Под редакцией Ю. И. Журавлева*. — 2017. — С. 100–103.

108. *Ивницкий В.А.* Теория сетей массового обслуживания. — М.: Изд-во Физико-математической литературы, 2004. — 772 с.
109. *Кабанов Ю. М., Липцер Р.Ш.* Мартингальные методы в теории точечных процессов // *Труды школы семинара по теории случайных процессов (Друскининкай, 1974)*, ч. II Под ред. А. Н. Ширяева. — 1975. — С. 269–354.
110. *Клименок В.И., Савко Р. Ч.* Двухфазная система с повторными попытками и нетерпеливостью запросов // *Автомат. и телемех.* — 2015. — № 8. — С. 78–93.
111. *Клименок В.И., Тарамин О.С.* Двухфазная система обслуживания с групповым марковским потоком и повторными вызовами // *Автомат. и телемех.* — 2010. — № 1. — С. 3–17.
112. *Клименок В.И., Тарамин О.С.* Двухфазная система $GI/PH/1 \rightarrow /PH/1/0GI/PH/1 \rightarrow /PH/1/0$ с потерями // *Автомат. и телемех.* — 2011. — № 5. — С. 113–126.
113. *Коваленко И.Н.* Теория массового обслуживания // *Итоги науки. Серия Теория вероятностей.* — 1963. — С. 73–125. — М.: ВИНТИ.
114. *Кокс Д.Р., Смит У.Л.* Теория очередей. — М.: Мир, 1966. — 218 с.
115. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. — М.: Наука, 1974. — 120 с.
116. *Кочеганов В.М.* Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019). Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (26 июня – 30 июня 2019 г.)*. — Томск: Изд-во НТЛ, 2019. — С. 195–200.
117. *Кочеганов В.М.* Статистический анализ тандема перекрестков с циклическим алгоритмом и алгоритмом с продлением: А. с. № 2019612786, дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 27 февраля 2019 г. — 2019.

118. Кочеганов В.М. Анализ тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением // *Теория вероятностей и ее приложения*. — Т. 65. — М.: Наука, 2020. — С. 169–170.
119. Кочеганов В.М. Классификация состояний марковской цепи в модели тандема с циклическим управлением с продлением // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика*. — 2020. — Т. 20, № 2. — С. 257–265.
120. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Вероятностная модель тандема систем массового обслуживания с циклическим управлением с продлением // *Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Материалы Международной научной конференции*. — Минск: РИВШ, 2015. — С. 94–99.
121. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Дискретная модель колебания длины низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания при циклическом алгоритме с продлением // *IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем»: Москва и Подмосковье, 20-22 мая 2015 г.: Труды / Отв. ред. В.Б. Алексеев, Д.С. Романов, Б.Р. Данилов*. — М: МАКС Пресс, 2015. — С. 126–129.
122. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Анализ потоков первичных требований в тандеме при циклическом управлении с продлением // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017). Материалы XVI Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (29 сентября - 3 октября 2017 г.)*. — Т. 1. — Томск: Изд-во НТЛ, 2017. — С. 81–87.
123. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Достаточное условие существования стационарного режима низкоприоритетной очереди в тандеме систем массового обслуживания // *Вестник Волжской государственной академии водного транспорта*. — 2017. — № 50. — С. 47–55.
124. Кочеганов В.М., Зорин А.В. Изучение процесса управления потоками первичных требований в тандеме систем обслуживания с циклическим алгоритмом с продлением // *Проблемы теоретической кибернетики: XVIII международная конференция (Пенза, 19-23 июня 2017г.)*. Материалы: Под редакцией Ю.И. Журавлева. — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 135–137.

125. *Кочеганов В.М., Зорин А.В.* Достаточное условие существования стационарного режима очередей первичных требований в тандеме систем массового обслуживания // *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика.* — 2018. — № 2. — С. 49–74.
126. *Кочеганов В.М., Зорин А.В.* Статистический анализ и оптимизация тандема систем массового обслуживания в классе циклических алгоритмов с продлением // *Управление Большими Системами: сборник трудов.* — 2019. — № 78. — С. 122–148.
127. *Кувыкина Е. В.* Исследование систем управления конфликтными потоками Бартлетта в классе однородных алгоритмов с упреждением // *Горький: ГГУ.* — 1990. — 56 с. — Деп. в ВИНТИ, № 2972-В90.
128. *Куделин А. Н., Федоткин М. А.* Управление конфликтными потоками в случайной среде по информации о наличии очереди // *Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Н. Новгород.* — 1996. — 22 с. — Деп. в ВИНТИ, № 1717-В96.
129. *Литвак Н. В.* Адаптивное управление конфликтными потоками: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.17. — Нижний Новгород, 1998. — 237 с.
130. *Литвак Н. В., Федоткин М. А.* Вероятностная модель адаптивного управления конфликтными потоками // *Автомат. и телемех.* — 2000. — № 5. — С. 67–76.
131. *Ляпунов А. А., Яблонский С. В.* Теоретические проблемы кибернетики // *Проблемы кибернетики.* — 1963. — № 9. — С. 5–22.
132. *Мотов А.И.* Критерий оптимального управления ресурсами сети массового обслуживания с гибкой структурой // *Экономика и менеджмент систем управления.* — 2015. — Т. 17, № 3. — С. 71–77.
133. *Неймарк Ю. И., Преображенская А. М., Федоткин М. А.* Работа автомата с обратной связью, управляющего уличным движением на перекрестке // *Изв. АН СССР, Техническая кибернетика.* — 1968. — № 5. — С. 129–141.
134. *Неймарк Ю. И., Федоткин М. А.* О работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке // *Автомат. и телемех.* — 1966. — Т. 27, № 3. — С. 78–87.

135. *Неймарк Ю. И., Я.Л. Шварц.* Управление движением на транспортном узле с упреждающей информацией о потоках автомашин // *Автоматика и телемеханика.* — 1985. — № 3. — С. 89–97.
136. *Очереди и точечные процессы / П. Франкен, Д. Кёниг, У. Арндт, Ф. Шмидт.* — Киев: Наукова думка, 1984. — 284 с.
137. *Поллачек Ф.* Стохастические системы обслуживания. — М.: Наука, 1966. — 244 с.
138. *Пройдакова Е. В.* Необходимые условия существования стационарного распределения выходных потоков в системе с приоритетным направлением // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.* — 2007. — № 1. — С. 167–172.
139. *Пройдакова Е. В., Федоткин М. А.* Управление выходными потоками в системе с циклическим обслуживанием и переналадками // *Автомат. и телемех.* — 2008. — № 6. — С. 96–107.
140. *Рыков В. В.* Управляемые системы массового обслуживания // *Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.* — 1975. — Т. 12. — С. 43–153.
141. *Солодянников Ю.В.* Управление и наблюдение для динамических сетей массового обслуживания // *Автомат. и телемех.* — 2014. — № 3. — С. 14–45.
142. *Таташев А.Г.* Система массового обслуживания с переменной интенсивностью входного потока // *Автоматика и телемеханика.* — 1995. — № 12. — С. 78–84.
143. *Таха Х.А.* Введение в исследование операций. — 7-е изд. изд. — М.: Вильямс, 2005. — 901 с.
144. *Теплицкий М. Г.* Об одной системе массового обслуживания с управляемым режимом работы прибора // *Автоматика и вычисл. техн.* — 1968. — № 2. — С. 36–42.

145. *Теплицкий М. Г.* Об управляемых полумарковских процессах с конечным числом состояний и управлений // *Автомат. и телемех.* — 1969. — № 10. — С. 45–53.
146. *Федоткин М.А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // *Математические вопросы кибернетики. Вып. 7: Сборник статей, под ред. С.В. Яблонского.* — 1998. — С. 333–344.
147. *Федоткин М.А.* Модели в теории вероятностей. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 608 с.
148. *Федоткин М.А., Федоткин А.М.* Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко – Коваленко // *Автоматика и телемеханика.* — 2009. — № 12. — С. 92–108.
149. *Федоткин М. А.* Управление уличным движением на перекрестке автоматом с фиксированным ритмом переключения при периодическом случайном потоке прибывающих машин // *Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.* — 1969. — № 3. — С. 66–76.
150. *Федоткин М. А.* О существовании эргодического распределения в системе с переменной структурой обслуживания конфликтных потоков // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1976. — Т. 21, № 4. — С. 792–801.
151. *Федоткин М. А.* Неполное описание потоков неоднородных требований. — 1981. — 113–118 с.
152. *Федоткин М. А.* Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой, I // *Литовский математический сборник.* — 1988. — Т. 28, № 4. — С. 784–794.
153. *Федоткин М. А.* Оптимальное управление конфликтными потоками и маркированные точечные процессы с выделенной дискретной компонентой, II // *Литовский математический сборник.* — 1989. — Т. 29, № 1. — С. 148–159.
154. *Федоткин М. А.* Процессы обслуживания и управляющие системы // *Математические вопросы кибернетики.* — 1996. — Т. 6. — С. 51–70.

155. Федоткин А. М. Моделирование и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными потоками Гнеденко–Коваленко: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Нижний Новгород, 2010. — 150 с.
156. Федоткин А. М., Голышева Н. М., Сутягина Н. И. Циклическое управление конфликтными потоками Гнеденко–Коваленко // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. — 2014. — № 4(1). — С. 382–387.
157. Федоткин М. А., Рачинская М. А. Изучение математической модели трафика автомобилей на основе подхода Ляпунова–Яблонского // *Сборник научных статей XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики»*. — Н. Новгород: ННГУ, 2011. — С. 508–512.
158. Федоткин М. А., Рачинская М. А. Имитационная модель циклического управления конфликтными неординарными пуассоновскими потоками // *Вестник Волжской государственной академии водного транспорта*. — 2016. — № 47. — С. 43–51.
159. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания. — Под ред., с предисл. и закл. ст. Б. В. Гнеденко. Изд. 3-е. изд. — М.: Едиториал УРСС, 2009. — 240 с.
160. Ширяев А. Н. Вероятность. — М.: Наука, 1980. — 576 с.
161. Якушев Ю. Ф. Об оптимальном обслуживании конфликтных потоков // *Теория вероятн. и ее примен.* — 1990. — Т. 35, № 1. — С. 161–167.

Приложение А

Результаты экспериментов

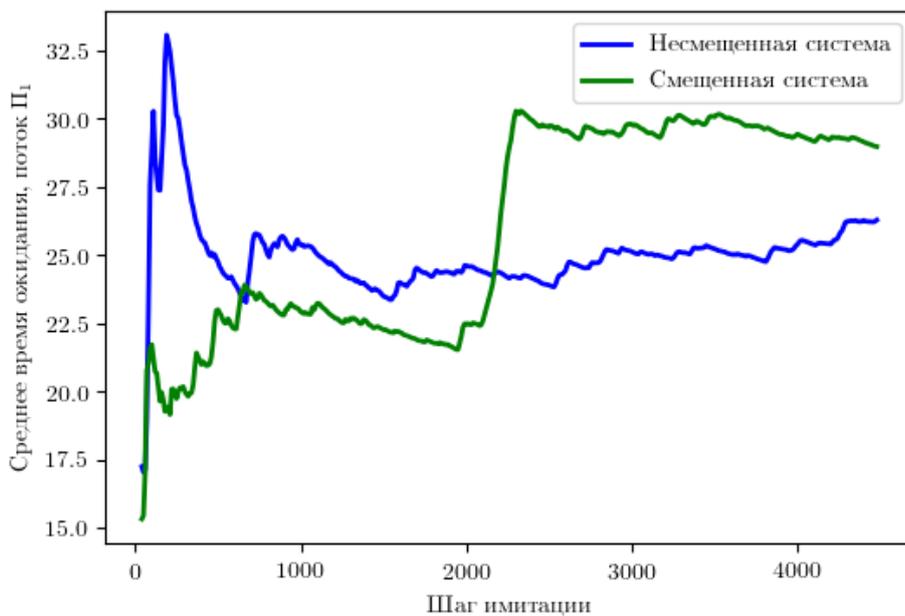


Рисунок А.1 — Динамика среднего времени ожидания произвольного требования потока Π_1 . Система со стационарным режимом

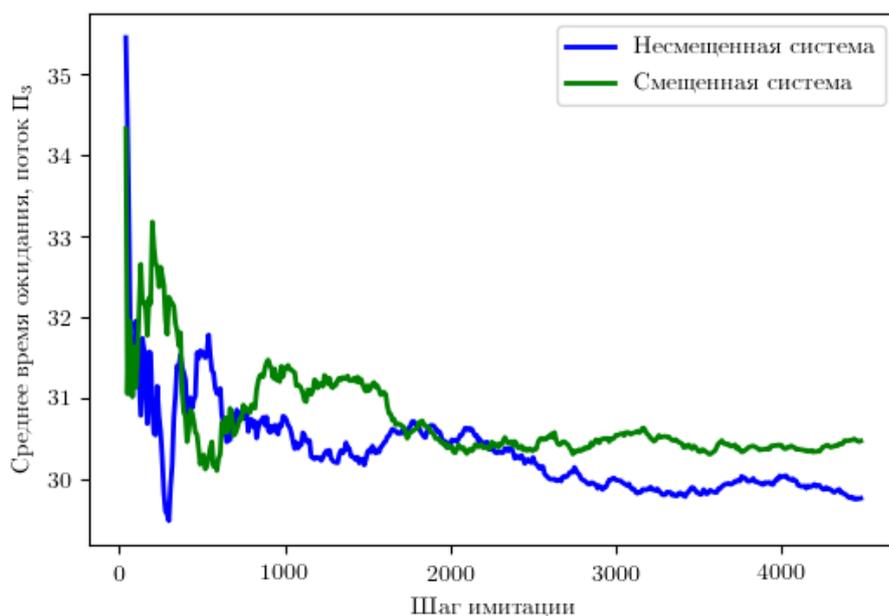


Рисунок А.2 — Динамика среднего времени ожидания произвольного требования потока Π_3 . Система со стационарным режимом

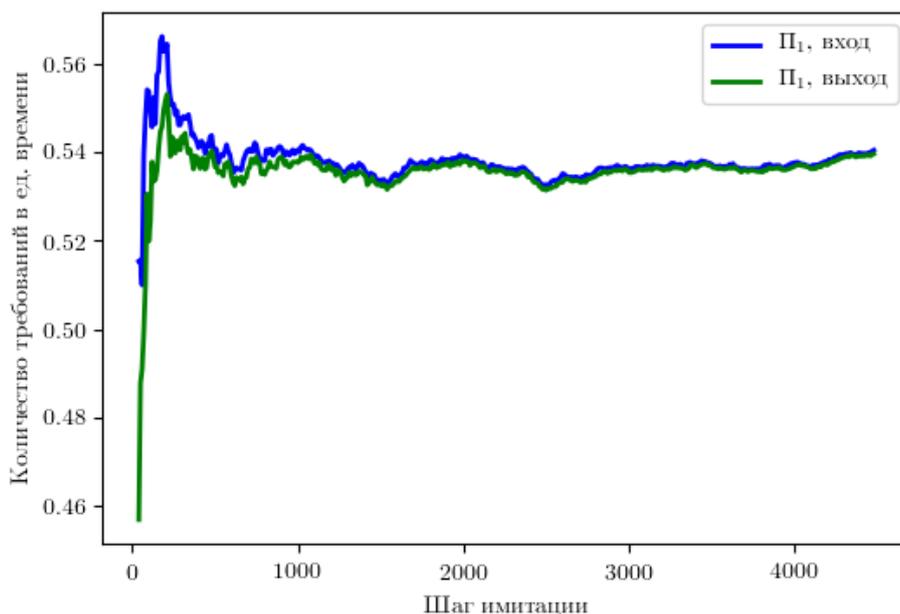


Рисунок А.3 — Динамика среднего числа поступивших и ушедших требований потока Π_1 за единицу времени. Система со стационарным режимом

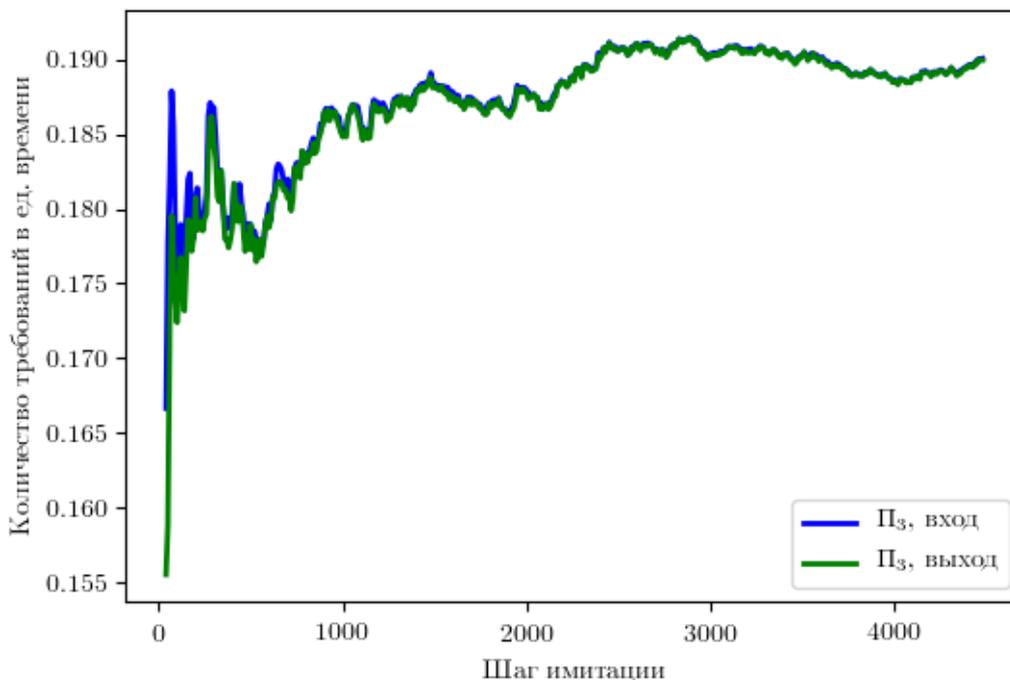


Рисунок А.4 — Динамика среднего числа поступивших и ушедших требований потока Π_3 за единицу времени. Система со стационарным режимом

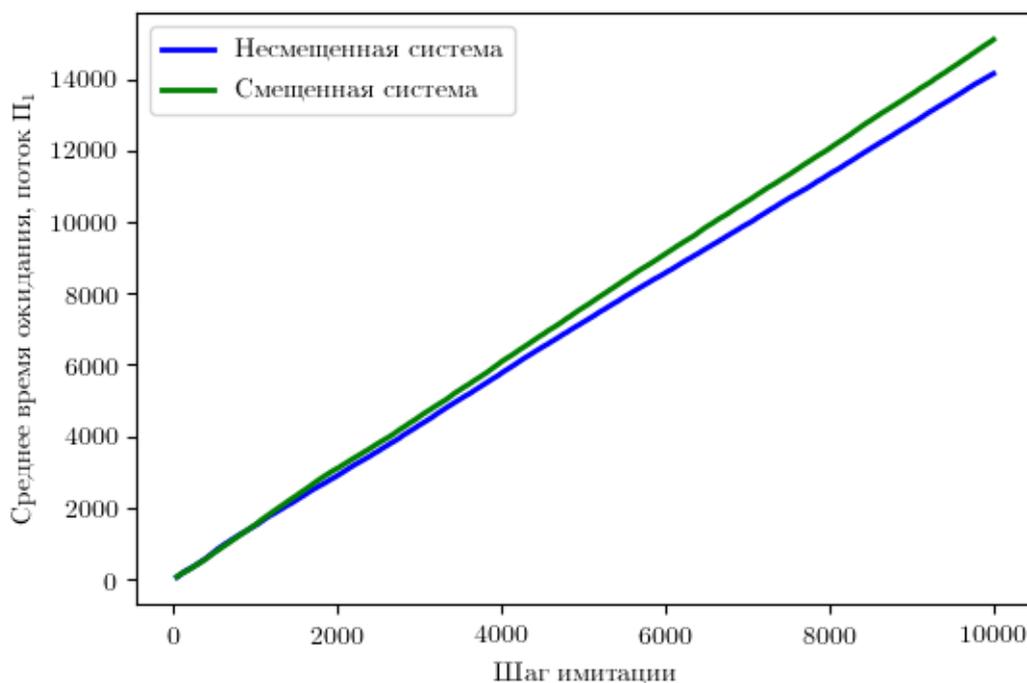


Рисунок А.5 — Динамика среднего времени ожидания произвольного требования потока Π_1 . Система без стационарного режима

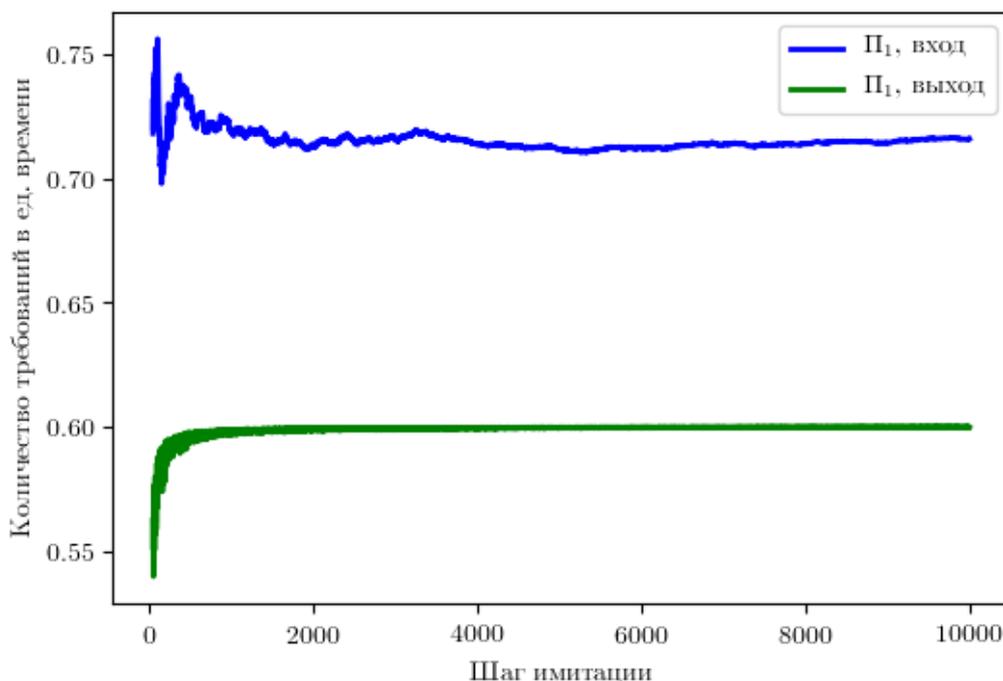


Рисунок А.6 — Динамика среднего числа поступивших и ушедших требований потока Π_3 за единицу времени. Система со стационарным режимом

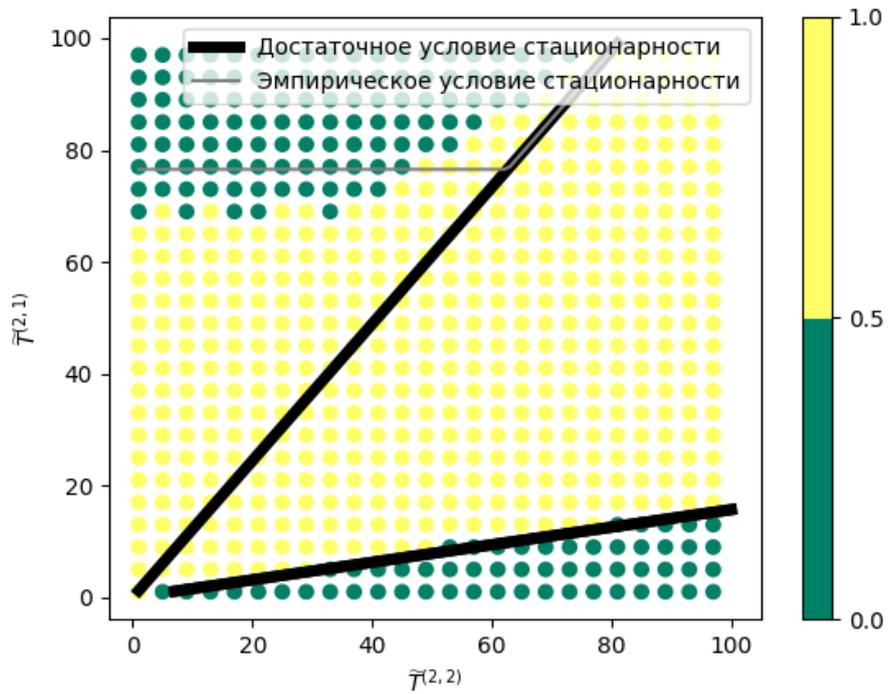


Рисунок А.7 — Области стационарности системы. $\lambda_3 = 0.1$, $L = 10$

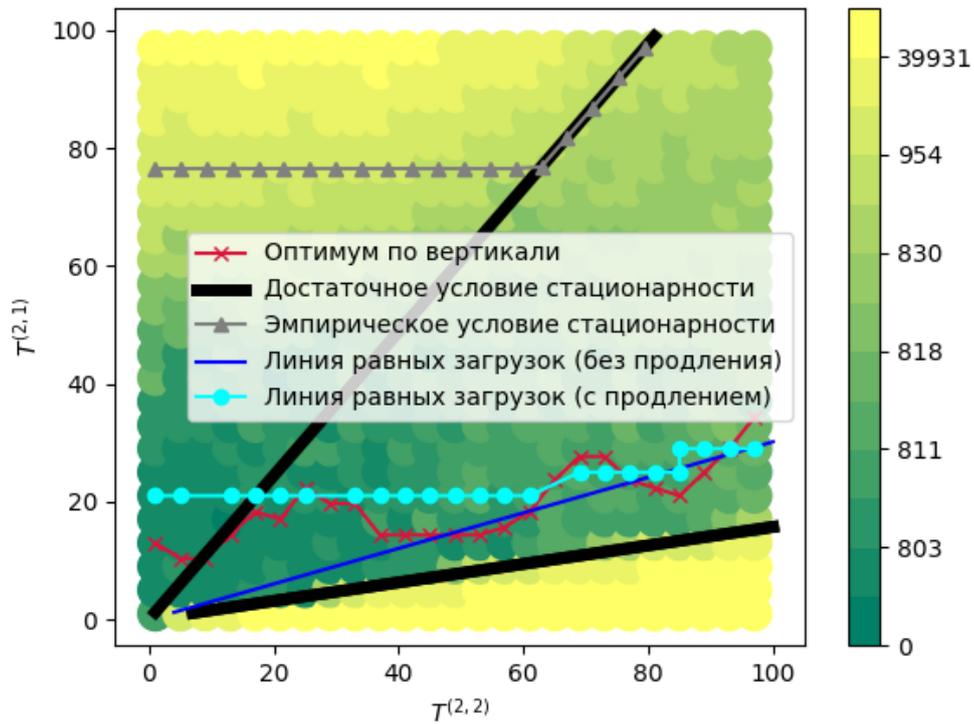


Рисунок А.8 — Поиск оптимальных параметров системы

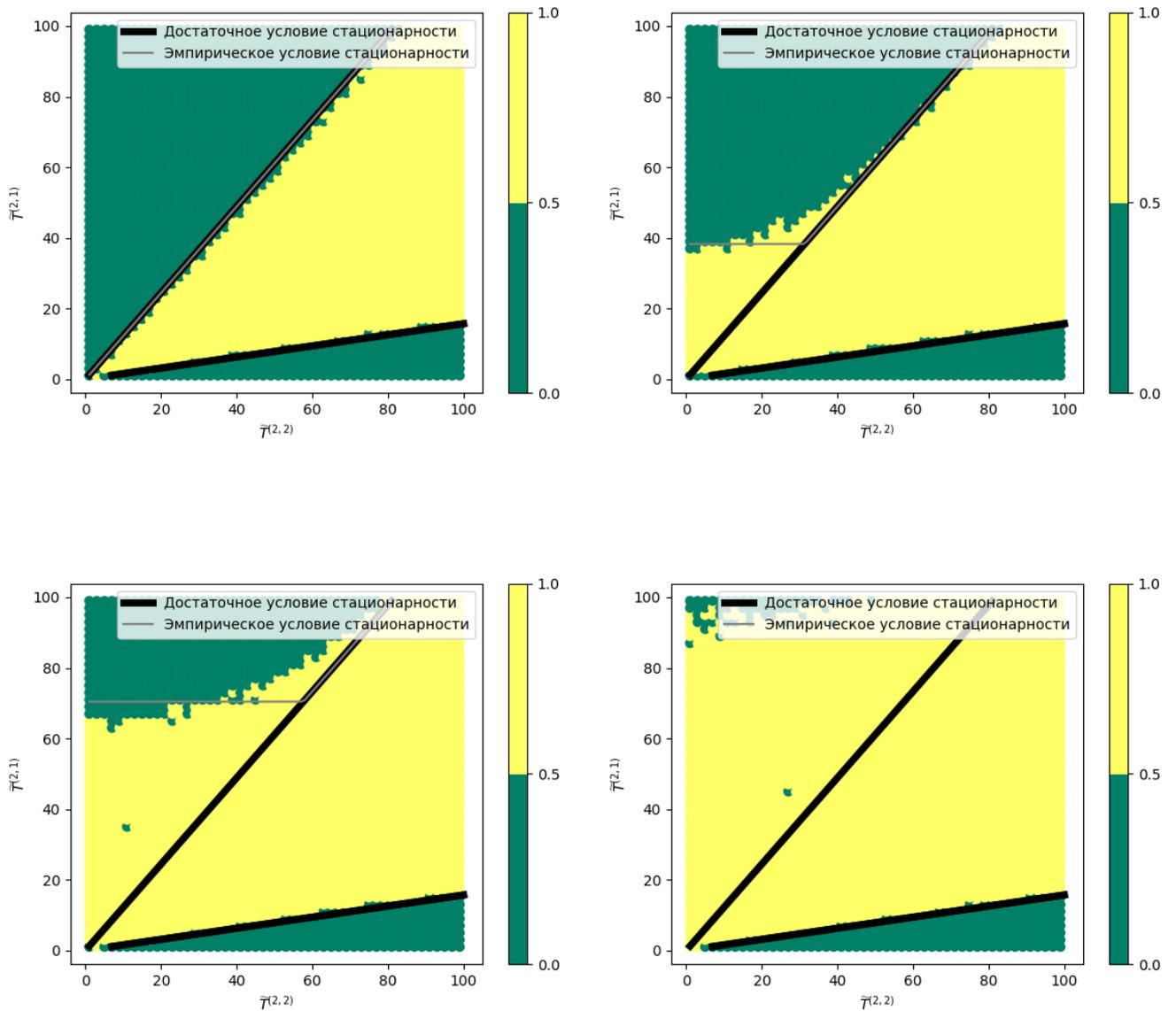


Рисунок А.9 — Области стационарности для разных значений L .

Слева-направо, сверху-вниз $L = -1; 5; 10; 15$

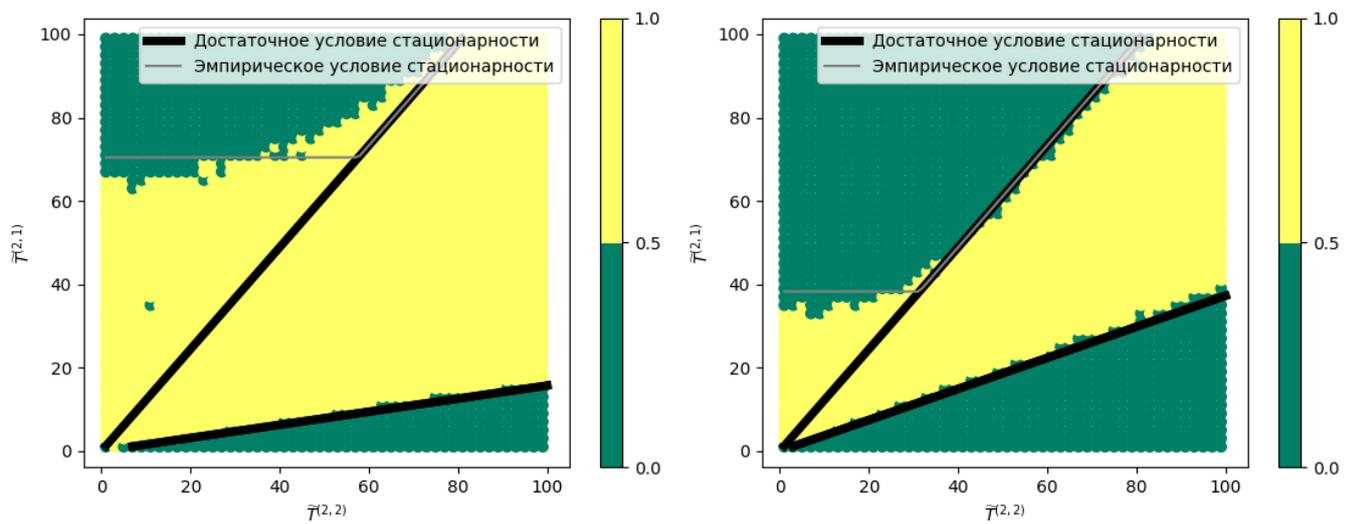


Рисунок А.10 — Области стационарности для разных значений λ_1 . Слева $\lambda_1 = 0.1$, справа $\lambda_1 = 0.2$