

На правах рукописи

Морозов Кирилл Евгеньевич

О транзиторных и квазипериодических системах

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2020

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Научный руководитель: **Гонченко Сергей Владимирович**
д.ф.-м.н., ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»,
ведущий научный сотрудник лаборатории динамического хаоса

Официальные оппоненты: **Асташова Ирина Викторовна**,
д.ф.-м.н., ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова»,
профессор кафедры дифференциальных уравнений

Куликов Анатолий Николаевич,
д.ф.-м.н., ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»,
профессор кафедры дифференциальных уравнений

Ведущая организация: **ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», Лаборатория мехатроники и робототехники Физтех-школы прикладной математики и информатики**

Защита состоится «24» декабря 2020 г. в 18 часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» по адресу: 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Автореферат разослан « » 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.166.20,
к.ф.-м.н.

Бирюков Руслан Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность исследования. Работа посвящена качественному исследованию поведения решений двумерных неавтономных динамических систем. В диссертации рассматриваются два класса таких систем. Первый класс (транзиторные системы) содержит потоки, уравнения которых явно зависят от времени лишь на конечном промежутке. Второй класс состоит из неконсервативных квазипериодических по времени потоков, близких к двумерным автономным гамильтоновым. Изучаемые динамические системы играют фундаментальную роль в теории колебаний и ее приложениях.

Понятие транзиторной системы было введено в 2011 году Дж. Мейссом и Б. Мосовски для обозначения динамических систем, неавтономных на конечном промежутке времени¹. Такие системы являются моделями для изучения переходных процессов и их влияния на установление динамики, т.к. описывают объекты, подвергающиеся переходу между двумя стационарными режимами. Автономные векторные поля, определяющие систему вне промежутка неавтономности, называют прошлым и будущим векторными полями. В случае систем, сохраняющих фазовый объем, рассмотрение транзиторной динамики связано с задачей вычисления транспорта между «когерентными структурами» прошлого и будущего векторных полей. Так, в вышеуказанной работе предлагается техника определения транспорта, основанная на знании гетероклинических орбит к седловым решениям автономных полей. В диссертации же рассматриваются неконсервативные системы, в которых автономные прошлое и будущее векторные поля могут иметь предельные циклы (т.е. возможно существование автоколебательных движений). В этом случае также можно говорить о транспорте, имея ввиду смену динамического режима для траекторий (например, переход от колебаний к вращениям для маятниковых систем).

В данной диссертационной работе рассматриваются три конкретные транзиторные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющие широкое прикладное значение: уравнение типа Дуффинга, уравнение маятникового типа и транзиторный аналог системы ФитцХью–Нагумо. Задача о транзиторном сдвиге в уравнении типа Дуффинга возникает при изучении явления панельного флаттера, представляющего собой нарастающие по амплитуде колебания панели, возбуждаемые набегающим потоком жидкости или газа. Возможной причиной нелинейного панельного флаттера является резонанс собственных частот соответствующей краевой задачи (А.Н. Куликов). Уравнения маятникового типа являются математической моделью для описания многих физических явлений как из области механики (колебания подвешенных грузов и др.), так и из

¹ Mosovsky, B. A. Transport in Transitory Dynamical Systems / B. A. Mosovsky, J. D. Meiss // SIAM J. Appl. Dyn. Sys. 2011. Vol. 10, no. 1. P. 35–65.

других областей. Например, подобным уравнением описывается динамика джозефсоновского контакта. Система ФитцХью-Нагумо является одной из простейших динамических систем, моделирующих активность нервной клетки. Транзиторный сдвиг в вышеуказанных динамических системах может быть обусловлен как внешним воздействием, так и изменением внутренних параметров. Существует множество иных прикладных задач, в которых естественным образом возникают транзиторные системы. Это, например, задача о резонансном ускорителе, о вращающемся двойном вихре, о ламинарном потоке через трубу с конечным числом изгибов между двумя прямыми участками и другие.

Второе направление следует рассматривать как обобщение теории квазиконсервативных систем с периодической зависимостью от времени. Оно связано с исследованием влияния "малых" квазипериодических по времени неконсервативных возмущений на поведение решений двумерных гамильтоновых систем. Предполагается, что в фазовом пространстве невозмущенной системы существует кольцевая область, заполненная замкнутыми фазовыми траекториями, отделенная от сепаратрис и состояний равновесия, причем собственная частота движения на этих кривых изменяется монотонно. Исследуется динамика в указанной области. Одно из основных затруднений при изучении поведения решений таких систем связано с появлением резонансов, когда собственная частота соизмерима с частотами возмущения. В диссертации выводятся и исследуются усредненные системы, определяющие динамику в окрестностях резонансных уровней энергии невозмущенной системы. Также отдельно рассматриваются вопросы о глобальной динамике и связанный с этим вопрос о поведении решений в окрестности невозмущенной сепаратрисы. Несмотря на большое число работ, посвященных изучению малых неконсервативных периодических по времени возмущений, случай квазипериодической зависимости до сих пор не был рассмотрен в полной мере. Так, не был проведен анализ структуры невырожденных резонансных зон и, в частности, не были установлены условия существования квазипериодических решений в этих зонах, не была решена задача о синхронизации квазипериодических колебаний и глобальном поведении решений.

Степень разработанности темы.

Круг вопросов, исследуемых в настоящей работе, относится к качественной теории неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, основания которой заложены А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым. Исторически первыми рассматривались системы с периодической зависимостью от времени. Так, в своей классической монографии Пуанкаре исследует вопросы, связанные с существованием периодических решений у таких систем. Там же Пуанкаре рассматривает системы, близкие к интегрируемым, и применяет для их исследования "метод малого параметра".

Кроме того, в монографии также рассматриваются линейные системы с периодическими по времени коэффициентами.

Ляпунов, решая общую задачу устойчивости нулевого решения системы n автономных уравнений, также затрагивает случай систем с периодической зависимостью от времени, в некоторой степени вдохновляясь идеями Пуанкаре. В связи с изучением устойчивости по линейному приближению, он ставит вопрос о приведении линейной системы с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами. Развитую в этом отношении теорию также связывают с именем Г. Флоке. Говоря о системах, зависящих от времени периодическим образом, следует также отметить работы В.А. Плисса, касающиеся изучения структуры и устойчивости интегральных многообразий таких систем, а также условий их грубости². Говоря о других исследованиях неавтономных систем, упомянем работы Л.М. Лермана³, посвященные вопросам классификации некоторых неавтономных потоков. Также существует много работ, посвященных исследованию свойств решений конкретных уравнений, в правые части которых явно входит независимая переменная.

Исследование транзитных и квазипериодических систем приводит к задаче построения бифуркационных диаграмм для нелинейных двумерных автономных систем, что представляет собой отдельную задачу. При этом применяются методы качественной теории дифференциальных уравнений, развитые А.А. Андроновым, Н.Н. Баутиным, Е.А. Леонтович. Среди таких систем важную роль играют автоколебательные (по терминологии А.А. Андропова), т.е. такие, у которых на фазовой плоскости существуют предельные циклы Пуанкаре. Автоколебательные системы являются принципиально нелинейными и неконсервативными, и имеют широкое распространение в механике, физике, химии, биологии, радиотехнике, электронике и других областях естествознания. До сих пор отсутствуют общие методы, позволяющие решить вопрос о существовании предельных циклов, их числе и месте расположения. При изучении квазиконсервативных систем, полезным оказывается метод усреднения. Первые подобные идеи возникают в работах Гаусса и Лагранжа по исследованию возмущенных движений планет, однако некоторое законченное оформление они получили лишь у Б. Ван дер Поля в виде "метода медленно меняющихся амплитуд". Этот метод был разработан для исследования автоколебательных режимов в ламповом генераторе. Математически строго метод был обоснован Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси. Дальнейшее

² Плисс, В. А. Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений / В. А. Плисс. М.: Наука, 1977. 304 с.

³ Лерман, Л. М. О классификации грубых неавтономных динамических систем 2-го порядка с конечным числом ячеек / Л. М. Лерман, Л. П. Шильников // ДАН СССР. 1973. Т. 209, № 3. С. 544—547; Lerman, L. M. Nonautonomous gradient-like vector fields on the circle: classification, structural stability and autonomization / L. M. Lerman, E. V. Gubina // Discr. Cont. Dynam. Systems-S. 2020. Vol. 13, no. 4. P. 1341—1367.

развитие метода усреднения связано с именами Н.М. Крылова⁴, Н.Н. Боголюбова⁵, Ю.А. Митропольского⁶ и других.

Для систем, близких к двумерным гамильтоновым, метод усреднения сводит задачу о предельных циклах к более простой задаче изучения поведения порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина, простым нулям которой отвечают уровни энергии невозмущенной системы, в окрестности которых рождаются грубые предельные циклы (теорема Пуанкаре-Понтрягина-Андронов). Многие системы были исследованы этим методом (Н.Н. Баутин, В.Н. Белых, А.Д. Морозов и др.).

Центральное место в исследовании нелинейных неавтономных систем занимает изучение резонансов (Морозов, Шильников). Изучение резонансных явлений также берет свое начало от классических работ А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова. Отметим также работы В.М. Волосова и Б.И. Моргунова, Дж. Гукенхеймера и Ф. Холмса, С. Уиггинса, Е.А. Гребеникова, Ю.А. Рябова, Р.А. Страбла и др. Теория нелинейного резонанса для двухчастотных систем с $3/2$ степенями свободы наиболее полно изложена в монографии А.Д. Морозова⁷.

Исторически первыми изучались резонансы в гамильтоновых системах. Эти исследования стимулировались задачами небесной механики, которые с древних времен привлекали внимание математиков. Наиболее интересные результаты по исследованию таких систем были получены А. Пуанкаре, Дж.Д. Биркгофом. В середине XX века А.Н. Колмогоровым и В.И. Арнольдом была разработана теория малых возмущений интегрируемых гамильтоновых систем и доказана теорема о сохранении условно-периодических движений. Ю.К. Мозером была решена задача о сохранении инвариантных кривых для двумерных симплектических отображений. Этот круг вопросов получил название КАМ-теории. Задача о сохранении инвариантных многообразий в сингулярно возмущенных гамильтоновых системах изучалась, например, в работах Л. М. Лермана, В. Гелфрака. Вопросы интегрируемости гамильтоновых систем изучались в работах В.В. Козлова, А.В. Борисова, В.П. Веселова, М. Эно и К. Хейлеса, Б.В. Чирикова, Г.М. Заславского и др.

Как выяснилось, основная причина неинтегрируемости систем заключается в существовании гомоклинических (двоякоасимптотических) траекторий. Начало изучению таких траекторий было положено в работах

⁴ Крылов, Н. М. Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов. М.:Изд-во АН СССР, 1937. 365 с.

⁵ Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. Москва: Госиздательство физико-математической литературы, 1958. 408 с.

⁶ Митропольский, Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. Киев: Наукова Думка, 1971. 440 с.

⁷ Морозов, А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах / А. Д. Морозов. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 424 с.

А. Пуанкаре и Дж.Д. Биркгофа. Дальнейшее развитие это направление получило в работах С. Смейла. Описание структуры окрестности грубой гомоклинической кривой седлового периодического и квазипериодического движения дано Л.П. Шильниковым⁸. Им было установлено, что в малой окрестности гомоклинического решения существует нетривиальное гиперболическое множество, траектории которого описываются на языке символической динамики с конечным числом символов. Тот факт, что такие множества существуют для гладких отображений был доказан С. Смейлом⁹. Упомянем также работы Л.М. Лермана, касающиеся структуры и бифуркаций гомоклинических решений в гамильтоновых системах. Н.К. Гаврилов и Л.П. Шильников¹⁰ впервые доказали возможность рождения нетривиального гиперболического множества до момента гомоклинического касания инвариантных многообразий седловой периодической траектории. В работах С.В. Гонченко, Д.В. Тураева и Л.П. Шильникова¹¹ было доказано, что модели нелинейной динамики с гомоклиническими касаниями не поддаются полному анализу с помощью конечно-параметрических семейств, поскольку бифуркации систем с негрубой гомоклиникой могут допускать бесконечное вырождение.

В теории нелинейных колебаний важную роль играют автономные квазиконсервативные уравнения вида

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon f_1(x, \dot{x}). \quad (1)$$

Здесь $f(x), f_1(x, \dot{x})$ — некие гладкие функции своих аргументов, $0 < \varepsilon \ll 1$ — малый параметр. Многие эталонные уравнения теории колебаний имеют такую форму (уравнения маятникового типа, уравнение Дуффинга-Ван дер Поля и другие). К ним приводят многочисленные прикладные задачи: колебания в механических и электрических системах (в частности, колебания продольно изогнутого упругого стержня под осевой нагрузкой, колебания изогнутой консольной балки в неоднородном поле двух постоянных магнитов, задача о прогибе упруго-пластичной арки с шарниром, некоторые задачи динамики плазмы и др.). Задача о бифуркациях таких векторных полей на плоскости представляет самостоятельный интерес.

⁸ Шильников, Л. П. Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа / Л. П. Шильников // Матем. сб. 1967. Т. 74, № 3. С. 378—397.

⁹ Smale, S. Differentiable dynamical systems / S. Smale // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, no. 6. P. 747—817.

¹⁰ Гаврилов, Н. К. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой / Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников // Матем. сб. 1973. Т. 90, № 1. С. 139—157.

¹¹ Гонченко, С. В. Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре / С. В. Гонченко, Д. В. Тураев, Л. П. Шильников // Докл. РАН. 1993. Т. 330, № 2. С. 144—147.

Наряду с уравнением (1) в теории колебаний фундаментальную роль играет соответствующее неавтономное уравнение

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon f_2(x, \dot{x}, t), \quad (2)$$

где функция $f_2(x, \dot{x}, t)$ – непрерывно зависит от времени.

Уравнениям вида (2) в случае периодической зависимости от времени посвящено большое количество исследований. Так, квазилинейные системы (т.е. при $f(x) = x$) были изучены в 30-х годах XX века А.А. Андроновым и А.А. Виттом. Более общий случай периодического неконсервативного возмущения двумерной гамильтоновой системы был изучен лишь во второй половине XX века. Эти исследования вошли, например, в книги¹². Задачу об определении условий существования грубых гомоклинических решений к седловому периодическому для систем, близких к гамильтоновым, правая часть которых периодически зависит от времени, решил В. К. Мельников¹³. Он получил выражение для функции, названной функцией Мельникова, знакопеременность которой означает существование трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий седлового решения (которые в невозмущенном случае совпадают). В дальнейшем применимость формулы Мельникова была расширена на более общий класс возмущений, в частности, на системы с квазипериодической зависимостью от времени.

В диссертации мы рассматриваем уравнение вида (2) в случае, когда $f_2(x, \dot{x}, t)$ зависит от времени квазипериодически, а также случай транзиторной зависимости (т.е. аperiodической зависимости от времени, сосредоточенной на конечном промежутке).

Основные результаты диссертации изложены в работах диссертанта [1-13].

Целью данной работы является исследование динамических режимов в двумерных неавтономных потоках (транзиторных и квазипериодических), получение новых результатов, составляющих качественную теорию таких систем. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Определить области начальных условий, соответствующие смене динамических режимов в транзиторных уравнениях (задача о транзиторном сдвиге), возникающих:
 - а) при изучении явления флаттера панели (транзиторное уравнение Дуффинга-Ван дер Поля);

¹² Morozov, A. D. Quasi-conservative systems: cycles, resonances and chaos / A. D. Morozov. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1998. 340 p.; Морозов, А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах / А. Д. Морозов. Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. 424 с.

¹³ Мельников, В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях / В. К. Мельников // Тр. Моск. мат. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3–52.

б) в теории джозефсоновского контакта (транзиторное уравнение маятникового типа);

в) при изучении нервного взаимодействия (транзиторная система ФитцХью-Нагумо).

Для этого необходимо также построить качественные фазовые портреты автономных векторных полей, определяющих систему вне промежутка неавтономности, в зависимости от возможных значений параметров.

2. Определить условия существования и устойчивости m -частотных и $(m+1)$ -частотных (возникающих при параметрическом резонансе) квазипериодических движений (инвариантных торов в расширенном фазовом пространстве) в системах, близких к двумерным гамильтоновым, при малых неконсервативных m -частотных квазипериодических возмущениях.
3. Установить основные бифуркации в невырожденных резонансных зонах (в частности, решить задачу о синхронизации квазипериодических колебаний) и решить задачу о глобальном поведении решений в системах, близких к двумерным гамильтоновым, при малых неконсервативных m -частотных квазипериодических возмущениях в области, заполненной замкнутыми фазовыми траекториями невозмущенной системы. Определить условия существования нерегулярного притягивающего множества в окрестности невозмущенной сепаратрисы.

Научная новизна: Все основные результаты диссертации являются новыми.

1. Впервые рассматриваются неконсервативные транзиторные системы. До этого изучались лишь транзиторные системы, сохраняющие фазовый объем. Для трех прикладных систем, изучаемых в диссертации, численно построено отображение перехода и определены области начальных условий, соответствующие смене динамического режима. Приведен пример, когда формулы, задающие отображение перехода, удастся выписать явно.
2. Впервые проведен общий анализ структуры невырожденных резонансных зон систем с квазипериодической зависимостью от времени, близких к двумерным гамильтоновым. В частности, установлены условия существования и устойчивости m -частотных и $(m+1)$ -частотных резонансных квазипериодических решений. Показано, что последние возникают при параметрическом резонансе.
3. Впервые изучены бифуркации в резонансной зоне при прохождении через нее инвариантного тора в квазипериодическом случае (задача о синхронизации колебаний).
4. Впервые проведен анализ глобального поведения решений систем с квазипериодической зависимостью от времени, близких к

двумерным гамильтоновым, в кольцевых областях, заполненных замкнутыми фазовыми кривыми невозмущенной системы, а также в окрестности невозмущенной сепаратрисы.

Значение основных результатов диссертации. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты касаются неавтономных потоков и могут быть полезны при исследовании конкретных моделей. Результаты диссертации являются вкладом в теорию двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, могут использоваться в научной деятельности и при чтении спецкурсов по неавтономным дифференциальным уравнениям.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем. Существенную роль играют асимптотические методы, в частности, метод усреднения Крылова-Боголюбова. Также в работе используются численные алгоритмы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (программная реализация написана на языке Matlab).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Найдены бифуркационные множества параметров и построены бифуркационные диаграммы для автономных "прошлого" и "будущего" векторных полей в задаче о транзиторном сдвиге для а) транзиторной системы типа Дуффинга-Ван дер Поля; б) транзиторного уравнения маятникового типа; в) транзиторной системы ФитцХью-Нагумо. Построены качественные фазовые портреты в областях с качественно различным поведением. Указаны области начальных условий, которые соответствуют смене динамического режима для решений. Для численного построения этих областей разработана компьютерная программа.
2. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены условия существования и устойчивости m -частотных квазипериодических решений в резонансных случаях, когда собственная частота невозмущенной системы и частоты квазипериодического возмущения соизмеримы.
3. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены условия существования и устойчивости $(m+1)$ -частотных квазипериодических решений в резонансных случаях, когда собственная частота невозмущенной системы и частоты квазипериодического возмущения соизмеримы. Указано, что такие решения возникают при параметрическом резонансе.
4. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены условия существования и устойчивости $(m +$

- 1)–частотного квазипериодического решения в нерезонансном случае.
5. Установлены бифуркации в резонансных зонах, происходящие при изменении расстройки между резонансным уровнем энергии невозмущенной системы и уровнем, в окрестности которого рождается грубый предельный цикл возмущенной автономной системы (решена задача о синхронизации квазипериодических колебаний).
 6. Проведено исследование глобального поведения решений в замкнутых областях, заполненных замкнутыми фазовыми траекториями невозмущенной системы (в частности, установлена конечность расщепляемых резонансов) и в окрестностях невозмущенных сепаратрис (определены условия существования квазиаттрактора). Исследование иллюстрируется на примере квазипериодического уравнения типа Дуффинга–Ван дер Поля.

Достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на XVII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых учёных и студентов МИКМУС, Москва (2015); на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань (2015); на Международной конференции по математической теории управления и механике, Суздаль, (2015, 2018, 2020), на Международной конференции "Dynamics, Bifurcations and Chaos" (2016, 2017, 2018, 2019), Н. Новгород; на Всероссийской конференции "Нелинейные колебания механических систем" Н. Новгород (2016); на Международной конференции "Shilnikov Workshop" Н. Новгород (2017, 2018, 2019); на XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа (2019), на Международной конференции Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ Долгопрудный (2019), на XIV Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск (2019), на XXIII Нижегородской сессии молодых ученых (технические, естественные, математические науки) (2018), на Международной научной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, Москва (2019).

Был сделан доклад на Нижегородском математическом обществе (2015), а также доклады на научных семинарах «Нелинейная динамика: теория и приложения» (семинары им. Л.П. Шильникова) Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (руководитель: д.ф.-м.н. С.В. Гонченко). Также результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры ДУМЧА ИТММ ННГУ им. Лобачевского.

Результаты диссертации вошли в составную часть результатов работ, выполненных при финансовой поддержке Министерства образования и науки (проектная часть госзадания, № 0729-2020-0036), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00306 и № 20-31-90039), Российского научного фонда (проект № 19-11-00280). В 2015-2017 годах проведенные исследования были поддержаны стипендией имени Н.И. Лобачевского, в 2019 - стипендией им. Г.А. Разуваева.

Личный вклад. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно с А.Д. Морозовым, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, А.Д. Морозову принадлежат постановки задач и участие в обсуждении результатов. В работах, выполненных совместно с А.Д. Морозовым и Т.Н. Драгуновым, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, А.Д. Морозову принадлежит постановка задачи, Т.Н. Драгунову принадлежит обсуждение работы и оформление результатов.

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 13 научных работах в изданиях, индексируемых РИНЦ. Из них 8 работ опубликовано в рецензируемых периодических научных журналах из списка ВАК РФ, индексируемых Web of Science и/или Scopus. Всего по теме диссертации автором опубликовано 19 работ (включая тезисы конференций).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 108 страниц, включая 31 рисунок и 0 таблиц. Список литературы содержит 106 наименований.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность исследования, проведен краткий обзор литературы по рассматриваемым в диссертации вопросам, сформулирована цель, задачи и основные результаты диссертации, указана научная новизна и практическая значимость работы.

Первая глава посвящена изучению транзиторных динамических систем и состоит из четырех параграфов.

В **параграфе 1.1** содержится введение в теорию транзиторных систем, даются основные сведения о таких системах. Приведем необходимые определения.

Определение. 1. *Транзиторной динамической системой с временем перехода τ называется система, автономная везде за исключением некоторого промежутка длины $\tau > 0$.*

Пусть, для определенности, зависимость от времени сосредоточена на промежутке $[0, \tau]$. Тогда уравнения транзиторной системы можно представить в виде

$$\dot{z} = V(z, t), \quad V(z, t) = \begin{cases} P(z), & t \leq 0; \\ v(z, t), & 0 < t < \tau \\ F(z), & t \geq \tau, \end{cases} \quad (3)$$

где P суть прошлое векторное поле, F – будущее векторное поле. При $t \in [0, \tau]$ $v(z, t)$ – некоторая непрерывная функция времени для каждого $z \in M$, $\lim_{t \rightarrow +0} v(z, t) = P(z)$, $\lim_{t \rightarrow \tau - 0} v(z, t) = F(z)$.

В данной работе мы вводим полное векторное поле как выпуклую комбинацию прошлого и будущего векторных полей:

$$V(z, t) = (1 - f(t))P(z) + f(t)F(z). \quad (4)$$

Здесь $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ – гладкая функция, удовлетворяющая условиям: $f(t) \equiv 0, t \leq 0$ и $f(t) \equiv 1, t \geq \tau$. Такую функцию называем функцией перехода. Для определенности, при $t \in (0; \tau)$, мы выбираем в качестве $f(t)$ кубический сплайн:

$$f(t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \left(3 - 2\left(\frac{t}{\tau}\right)\right), \quad 0 < t < \tau. \quad (5)$$

Нас интересует влияние "транзиторного сдвига" на поведение решений. Поскольку уравнение (3) зависит от времени лишь на отрезке, то влияние неавтономности может быть описано в терминах отображения перехода $T : M \rightarrow M$, которое задается формулой $T(z) = \varphi_{\tau, 0}(z)$, где $\varphi_{\tau, 0}(z)$ отображает точку $z \in M$ из ее положения при $t = 0$ в ее положение при $t = \tau$ по решениям системы (3).

Теорема. 1. Пусть система $\dot{z} = (1 - f(t))P(z) + f(t)F(z)$ имеет решение на промежутке неавтономности $[0, \tau]$ с начальным условием $z(0) = z_0$, функция $f(t)$ – непрерывна на $[0, \tau]$, а P и F принадлежат классу C^1 в окрестности z_0 . Тогда отображение перехода T непрерывно в точке z_0 .

При известных условиях отображение перехода является диффеоморфизмом.

Обратимся к случаю, когда прошлое и будущее векторные поля являются гамильтоновыми. Из формулы (4) следует, что полное векторное поле будет гамильтоновым с функцией Гамильтона $H_V(z, t) = (1 - f(t))H_P(z, t) + f(t)H_F(z, t)$. В этом случае, влияние неавтономности описывается с помощью понятия транспорта.

Определение. 2. Под транспортом в транзиторной гамильтоновой системе вида (3) будем понимать переход точек фазового пространства из некоторой ячейки прошлого векторного поля в ячейку будущего векторного поля под действием транзиторного потока. Под мерой транспорта между ячейками будем понимать меру области начальных условий ($t = 0$), соответствующих указанному переходу.

Например, в уравнениях маятникового типа важную для приложений роль играет транспорт "от колебаний к вращениям".

В диссертации рассматриваются двумерные неконсервативные системы. В этом случае можно поставить вопрос о смене предельного режима для решений, другими словами, вопрос о транспорте между областями притяжения аттракторов прошлого и будущего векторных полей. Наме- тим общую схему исследования конкретных транзиторных динамических систем: 1) исследовать прошлое и будущее векторные поля, т.е. определить их особые траектории, определяющие разбиение на ячейки; 2) построить отображения перехода T_τ и определить области начальных условий, соответствующие смене динамики, путем наложения прообразов инвариантных множеств будущего векторного поля на фазовый портрет прошлого векторного поля.

В параграфе 1.2 исследуется задача о транзиторном сдвиге в задаче о флаттере панели.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon(p - x^2)y,\end{aligned}\tag{6}$$

к которой приводит задача об обтекании упругой пластины потоком некоторого газа (Холмс Ф.¹⁴ и др.). Эта задача представляет интерес в связи с изучением явления "панельного флаттера" – колебаний пластины с нарастающей амплитудой, которые возбуждаются набегающим потоком жидкости или газа. Параметр ε определяет неконсервативность задачи и является малым параметром, а p – определяет диссипацию.

Многие задачи о колебаниях тонких пластин и балок приводят к уравнениям вида (6). Например, колебания балки под нагрузкой и колебания трубы при протекании жидкости, колебания пластины в электромагнитном поле и другие.

В нашей задаче $M = \mathbb{R}^2$, $z = (x, y)$ и мы вводим транзиторный сдвиг следующим образом:

$$\begin{aligned}P(x, y) &= (y, -x + x^3 + \varepsilon(p - x^2)y) \\ F(x, y) &= (y - \omega, -x + x^3 + \varepsilon(p - x^2)y),\end{aligned}\tag{7}$$

¹⁴ Holmes, P. J. Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis / P. J. Holmes // J. Sound Vibration. 1977. Vol. 53, no. 4. P. 471–503.

где ω – некоторая положительная постоянная.

Система (6), которая определяет прошлое векторное поле, ранее исследовалась (Ф. Холмс, Морозов А.Д., Костромина О.С. и др.). Система имеет седло $O(0,0)$, а также: 1) при $p < p_* \approx 0.7764$ два устойчивых фокуса $O^\pm(\pm 1,0)$, предельные циклы отсутствуют; 2) при $p_* < p < 0.8$ два устойчивых фокуса $O^\pm(\pm 1,0)$ и два предельных цикла вне "восьмерки" (внешний цикл, который обозначим через L , устойчивый, а внутренний – неустойчивый); 3) при $0.8 < p < 1$ два устойчивых фокуса $O^\pm(\pm 1,0)$, один устойчивый предельный цикл L вне "восьмерки" и два неустойчивых предельных цикла внутри "восьмерки"; 4) при $p > 1$ два неустойчивых фокуса $O^\pm(\pm 1,0)$ и один устойчивый предельный цикл L вне "восьмерки".

Обратимся к системе, которая определяет будущее векторное поле:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = x - x^3 + \varepsilon(p - x^2)y. \end{cases} \quad (8)$$

Эта система, в отличие от (6), не обладает симметрией и ранее не была исследована. Состояния равновесия лежат на прямой $y = 1$. Координата x состояния равновесия определяется из уравнения $x - x^3 + \varepsilon(p - x^2) = 0$, которое при малых ε имеет три вещественных корня, близких к $x = 0$ и $x = \pm 1$. Обозначим эти состояния равновесия через $\tilde{O}$ и $\tilde{O}^\pm$, соответственно.

Устойчивый предельный цикл системы (8) обозначим через $\tilde{L}$.

Теорема. 2. *Существует $\varepsilon_* > 0$ такое, что системы (6) и (8) топологически эквивалентны при $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$.*

При транзиторном сдвиге возможна смена аттрактора: $O^\pm \rightarrow \tilde{L}$, т.е. если при отсутствии транзиторного сдвига устанавливается стационарный режим, который соответствует состоянию равновесия $O^\pm$ (пластина прогнута вверх или вниз), то при наличии транзиторного сдвига может устанавливаться автоколебательный режим, который отвечает устойчивому предельному циклу будущего векторного поля. Такая смена режима приводит к дестабилизации панели. Также возможна смена режимов $L \rightarrow \tilde{O}^\pm$, что соответствует стабилизации колебаний. Мы указали области начальных условий, которые соответствуют смене установившегося режима, в зависимости от значений параметров.

Результаты **параграфа 1.2** изложены в работе диссертанта [1].

В **параграфе 1.3** рассматриваются уравнения маятникового типа, которые являются неавтономными лишь на некотором отрезке времени. Именно, рассмотрим две задачи о транзиторном сдвиге: 1) в уравнении Джозефсона; 2) в уравнении, описывающем колебания груза, подвешенного на тросах.

Автономное уравнение Джозефсона имеет вид

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[\alpha + (\beta + \cos x)\dot{x}], \quad (9)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, α, β – параметры, переменная x определяет разность фаз волновых функций по каждую из сторон джозефсоновского перехода¹⁵. Задачи фазовой синхронизации частоты также приводят к исследованию подобных уравнений. Фазовым пространством уравнения (9) является цилиндр ($x \bmod 2\pi, \dot{x} \in R^1$).

Колебания груза прямоугольной формы, подвешенного на тросах, описываются уравнением¹⁶

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon(\beta + \cos nx)\dot{x}, \quad n \in N. \quad (10)$$

Параметр β характеризует асимметрию груза.

В диссертации мы рассматриваем неавтономное уравнение с непериодической "транзиторной" зависимостью от времени:

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(\beta + \cos nx)\dot{x} + \alpha f(t)], \quad (11)$$

где $\alpha > 0$, $f(t)$ – кубический сплайн. При $n = 1$ такой вид зависимости от времени соответствует появлению постоянной составляющей в переменном токе, протекающем через контакт Джозефсона. Для задачи о колебаниях тела на тросах транзиторный сдвиг соответствует появлению некоторой внешней силы, которая нарастает в течении некоторого отрезка времени, а затем сохраняет постоянное значение. Прошрое векторное поле (при $t < 0$) определяется уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(\beta + \cos nx)\dot{x}], \quad (12)$$

а будущее векторное поле (для $t > \tau > 0$) – уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[\alpha + (\beta + \cos nx)\dot{x}]. \quad (13)$$

В диссертации рассматриваются случаи $n = 1$ и $n = 2$. При $n = 2$ уравнение (12) не было изучено. Метод исследования связан с построением порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина. Простым нулям этой функции соответствуют уровни энергии невозмущенной системы, от которых рождаются грубые предельные циклы при малом ε . В диссертации построены все фазовые портреты системы (13) в зависимости от параметров α, β . Разбиение плоскости параметров симметрично относительно оси β . Бифуркационные кривые разбивают полуплоскость $\beta \geq 0$ на 11 областей с качественно различными грубыми фазовыми портретами. Прошлomu векторному полю соответствует значение $\alpha = 0$. Точки, отвечающие прошлomu

¹⁵ Belykh, V. N. Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case / V. N. Belykh, N. F. Pedersen, O. H. Sorensen // Physical Review B Condensed Matter. 1977. Vol. 16, no. 11. P. 4853–4859.

¹⁶ Leech, C. M. Limit cycle stability of aerodynamically induced yaw oscillations / C. M. Leech // Int.J.Mech.Sci. 1979. Vol. 21, no. 9. P. 517–525.

и будущему векторным полям расположены на одной вертикальной прямой. Как уже указывалось, транзиторный сдвиг может привести к смене динамического режима. Так, при $n = 2$, если $-1 < \beta < 0$, то существует такое $\alpha_*(\beta) > 0$, что в исходной системе при $\alpha > \alpha_*$ имеется ненулевой транспорт от колебаний (стягиваемый ПЦ) к вращениям (ПЦ, охватывающий фазовый цилиндр). Интересно отметить, что в этом случае область начальных условий, соответствующая указанному транспорту, сразу является некомпактной, т.е. при $\alpha < \alpha_*$ мера транспорта равна 0, а при $\alpha \geq \alpha_*$ – бесконечности.

В диссертации определены области начальных условий соответствующие возможным видам транспорта для возможных комбинаций прошлого и будущего векторных полей.

Результаты **параграфа 1.3** изложены в работе диссертанта [2].

В **параграфе 1.4** изучается поведение решений транзиторного аналога системы ФитцХью-Нагумо. Автономная система ФитцХью-Нагумо является простейшей моделью для описания динамики нейрона и имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I_{ext}; \\ T\dot{y} = x - by + a. \end{cases} \quad (14)$$

В системе (14) x определяет мембранный потенциал клетки, y – переменная восстановления, I_{ext} – параметр, определяющий внешнее воздействие (синаптические токи), a, b, T – положительные параметры, которые определяются внутренней структурой системы.

Перепишем систему (14) в более удобном виде

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I; \\ \dot{y} = \varepsilon(x - by); \end{cases} \quad (15)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{T}$, $I = I_{ext} - a/b$.

Параметр I характеризует внешнее воздействие, и может существенно изменяться, и, тем самым, влиять на поведение решений. Это мотивирует нас рассмотреть неавтономный аналог системы ФитцХью-Нагумо.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I(t); \\ \dot{y} = \varepsilon(x - by); \end{cases} \quad (16)$$

Конкретный вид $I(t)$ при $t \in [0; \tau]$ зависит от формы внешнего воздействия. Например, положим

$$I(t) = I_0(1 - f(t)) + I_1f(t), \quad (17)$$

I_0, I_1 – некоторые постоянные.

Сначала изучается поведение траекторий автономных прошлого и будущего векторных полей при различных значениях параметров и строится разбиение плоскости параметров b, I на области с топологически разными фазовыми портретами при фиксированном ε . В диссертации построено разбиение плоскости параметров (b, I) на 14 областей с разными топологическими структурами.

Справедлива

Теорема. 3. 1) При $\varepsilon \geq 1$ в результате бифуркации Андронна-Хопфа из сложного фокуса рождается единственный устойчивый предельный цикл.

2) При $0 < \varepsilon < 1$ существуют две точки плоскости параметров, соответствующие бифуркации Баутина (обобщенной бифуркации Андронна-Хопфа): $(b_*, I_*^\pm) = (\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon}, \pm \frac{4}{3}(1-\varepsilon)^{3/4})$.

Точка Баутина на бифуркационной кривой является точкой, из которой выходит линия двойного цикла, которую можно построить численно. Кроме локальных бифуркаций, могут происходить бифуркации петель сепаратрис седла, при переа замыкании которых рождаются или исчезают предельные циклы. При фиксированном ε линии на плоскости параметров, соответствующие петлям сепаратрис были построены численно с высокой точностью.

Неавтономная система (16) определена в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Так как в результате транзитного сдвига изменяется величина параметра I , то пары параметров (b, I) , соответствующие прошлому и будущему векторным полям, имеют вид (b, I_0) и (b, I_1) . Используя построенные бифуркационные диаграммы, с помощью отображения перехода определим области начальных условий соответствующих смене динамического режима, подобно тому как это было сделано в пп 1.2–1.3. Указаны значения параметров, при которых неавтономность не влияет на качественное поведение решений.

Результаты параграфа 1.4 изложены в работе диссертанта [5].

Вторая глава посвящена исследованию квазипериодических неконсервативных возмущений двумерных нелинейных гамильтоновых систем и состоит из четырех параграфов.

В параграфе 2.1 формулируется постановка задачи, приводятся необходимые теоретические сведения.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, \omega_1 t, \dots, \omega_m t), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, \omega_1 t, \dots, \omega_m t). \end{cases} \quad (18)$$

Здесь функции f и g – непрерывные и квазипериодические по t с частотами $\omega_1, \dots, \omega_m$. Кроме того, f, g , предполагаются достаточно гладкими по переменным x и y в некоторой области $G \subset \mathbb{R}^2$ (либо $G \subset S^1 \times \mathbb{R}^1$), $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый положительный параметр. Предположим, что невозмущенная система нелинейная и имеет в области G ячейку D ($D \subset G$), заполненную замкнутыми фазовыми кривыми $H(x, y) = h$, $h \in [h_-, h_+]$. Рассмотрим область $D_0 \subset D$, также заполненную замкнутыми фазовыми кривыми, и полученную исключением из D достаточно малой окрестности сепаратрисы и состояния равновесия. Таким образом, область D_0 – это связная область, гомеоморфную кольцу. Далее мы отдельно изучим поведение решений в окрестности невозмущенной сепаратрисы. Предположим также, что возмущение является неконсервативным, т.е. что выполнено условие

$$g'_x + f'_y \neq 0. \quad (19)$$

Система (18) в области D после перехода к переменным действие I – угол θ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon F_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m) \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon F_2(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m) \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= f(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \dots, \theta_n) x'_\theta - g(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \dots, \theta_n) y'_\theta \\ F_2 &= -f(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \dots, \theta_n) x'_I + g(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \dots, \theta_n) y'_I, \end{aligned} \quad (21)$$

функции $x(I, \theta), y(I, \theta)$ определяют замену переменных, $\omega(I)$ – частота движения на замкнутых фазовых кривых. Предположим, что функция $\omega(I)$ является строго монотонной при $I \in (I_-, I_+)$.

Система (20) определена на прямом произведении отрезка $K = [I_-(h_-), I_+(h_+)]$ и $(m+1)$ -мерного тора, где h_-, h_+ определяют границы области D . Основная проблема при изучении таких систем связана с резонансами, с существованием квазипериодических резонансных решений и инвариантных торов.

В параграфе 2.2 изучается поведение решений в окрестностях резонансных уровней, в частности, определяются условия существования резонансных квазипериодических решений.

При $\varepsilon = 0$ $(m+2)$ -мерное фазовое пространство системы (20) распадается на $(m+1)$ -мерные торы T^{m+1} , движение на которых условно периодическое с частотами $\omega, \omega_1, \dots, \omega_m$. При $\varepsilon \neq 0$ инвариантные торы разрушаются из-за неконсервативности возмущения и/или наличия целочисленной комбинации частот $\omega, \omega_1, \dots, \omega_m$:

$$n\omega(I) - (\mathbf{k}, \Omega) = 0, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m), \quad \Omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \quad (22)$$

Если при некоторых значениях $\mathbf{k}, n$ соотношению (22) удовлетворяет $I = I_{n\mathbf{k}} \in [I_-, I_+]$, то уровень $I = I_{n\mathbf{k}}$ (замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h_{n\mathbf{k}}$ невозмущенной системы) будем называть резонансным.

Перейдем к исследованию поведения решений в окрестностях $U_\mu = \{(I, \theta) : I_{n\mathbf{k}} - C\mu < I < I_{n\mathbf{k}} + C\mu, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0, \mu = \sqrt{\varepsilon}\}$ индивидуальных резонансных уровней $I = I_{n\mathbf{k}}$. Делая в (20) замену

$$\theta = v + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \quad I = I_{n\mathbf{k}} + \mu u, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}. \quad (23)$$

и усредняя полученную систему придем к

$$\begin{aligned} u' &= A(v, I_{n\mathbf{k}}) + \mu P(v, I_{n\mathbf{k}})u \\ v' &= b_1 u + \mu(b_2 u^2 + Q(v, I_{n\mathbf{k}})), \end{aligned} \quad (24)$$

где штрих означает производную по медленному времени $\tau = \mu t$,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} F_1(I_{n\mathbf{k}}, v + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m, \\ P &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial}{\partial I} F_1(I_{n\mathbf{k}}, v + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m, \\ Q &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} F_2(I_{n\mathbf{k}}, v + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m \\ b_1 &= \frac{d\omega(I_{n\mathbf{k}})}{dI}, \quad b_2 = 0.5 \frac{d^2\omega(I_{n\mathbf{k}})}{dI^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Система (24) приводится с точностью до членов $O(\mu^2)$ к виду

$$\begin{aligned} u' &= A(v, I_{n\mathbf{k}}) + \mu \sigma u \\ v' &= b_1 u + \mu b_2 u^2, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\sigma = P + \frac{dQ}{dv} = \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} (g'_x + f'_y) d\theta_1 \dots d\theta_m. \quad (27)$$

Здесь $x = x(I_{n\mathbf{k}}, v + (\sum_{j=1}^m k_j \theta_j)/n)$, $y = y(I_{n\mathbf{k}}, v + (\sum_{j=1}^m k_j \theta_j)/n)$. Функции $A(v, I_{n\mathbf{k}}), \sigma(v, I_{n\mathbf{k}})$ достаточно гладкие и периодические с наименьшим периодом $2\pi/n$.

Представим функцию $A(v, I_{n\mathbf{k}})$ в виде

$$A(v, I_{n\mathbf{k}}) = \tilde{A}(v, I_{n\mathbf{k}}) + B(I_{n\mathbf{k}}),$$

где $B(I_{n\mathbf{k}}) = \frac{p}{2\pi} \int_0^{2\pi/p} A(v, I_{n\mathbf{k}}) dv$ – среднее значение функции $A(v, I_{n\mathbf{k}})$.

Определение. Уровень $I = I_{n\mathbf{k}}$ невозмущенной системы назовем:

проходимым, если $\max|\tilde{A}(v)| < |B|$, $B \neq 0$;

частично проходимым, если $\max|\tilde{A}(v)| > |B|$, $B \neq 0$;

непроходимым, если $B = 0$, $\tilde{A}(v, I_{n\mathbf{k}}) \neq 0$.

Частично проходимые и непроходимые уровни $I = I_{n\mathbf{k}}$ будем называть *расщепляемыми*.

Справедлива

Теорема. 4. Пусть $\max|\tilde{A}(v)| > |B|$ и $|\sigma(v)| > \sigma_0 > 0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (26) имеет простое состояние равновесия $(v_0, 0)$, а в исходной системе существует квазипериодическое решение $x_{n\mathbf{k}}(t), y_{n\mathbf{k}}(t)$ с частотами $\omega_1/n, \dots, \omega_m/n$. Это решение будет асимптотически устойчивым при $b_1 A'(v_0) > 0, \sigma < 0$ и неустойчивым (седловым) при $b_1 A'(v_0) < 0$. Соответственно, у системы (20) существует m -мерный устойчивый (седловой) инвариантный тор T^m .

Результаты параграфа 2.2 изложены в работе диссертанта [3].

В параграфе 2.3 изучается воздействие квазипериодического возмущения на автоколебательную систему и исследуются бифуркации в резонансных зонах при изменении частоты автоколебаний автономной системы.

В 1930 году А.А. Андронов и А.А. Витт на примере квазилинейного уравнения Ван дер Поля с периодическим по времени возмущением рассмотрели задачу о синхронизации колебаний. Иначе говоря, они установили, что происходит с предельным циклом при гармоническом воздействии. Далее Морозов А.Д. и Шильников Л.П. рассмотрели более общую задачу о синхронизации в системах, близких к двумерным нелинейным гамильтновым. Было установлено, что если в квазилинейном случае интервал синхронизации по параметру мал вместе с возмущением, то в существенно нелинейном случае он порядка $O(1)$. Задача о воздействии квазипериодических возмущений на системы с предельными циклами не была рассмотрена. В диссертации восполняется этот пробел.

В связи с этим наряду с системой (18) рассмотрим автономную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon \bar{g}(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon \bar{f}(x, y), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\bar{g}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(x, y, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m$$

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(x, y, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m.$$

Предположим, что система (28) имеет грубый предельный цикл при всех достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$. Это означает, что порождающая функция Пуанкаре-Понтрягина $B(h)$ имеет простой нуль. Если предельный цикл совпадает с резонансным уровнем $I = I_{n\mathbf{k}}$, тогда $B(I_{n\mathbf{k}}) = 0$, $B_1 = B'(I_{n\mathbf{k}}) \neq 0$.

Введем в (26) расстройку γ , определяющую отклонение невырожденного резонансного уровня $I = I_{n\mathbf{k}}$ от уровня $I = I_0$, в окрестности которого у автономной системы (28) существует грубый предельный цикл. Рассмотрим переход при изменении γ от точного резонанса к нерезонансному случаю. Для этого рассмотрим систему на цилиндре

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \tilde{A}(v, I_{n\mathbf{k}}) + \mu(\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})u + \gamma) \\ \frac{dv}{d\tau} &= bu + \mu b_1 u^2, \end{aligned} \quad (29)$$

получающуюся из (26) при $B(I_{n\mathbf{k}}) \approx (dB(I_0)/dI)(I_{n\mathbf{k}} - I_0) = \mu\gamma$. Справедлива

Теорема. 5. Пусть $\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})$ – знакоопределенная функция; для определенности положим $\varepsilon\sigma < 0$. Тогда найдется такое $\gamma_{n\mathbf{k}} = |\gamma^\pm| + O(\mu)$, что: 1) при $\gamma > \gamma_{n\mathbf{k}}$ у системы (29) существует устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр $\{v \bmod 2\pi, u\}$; 2) при $\gamma = \gamma_{n\mathbf{k}}$ предельный цикл "влипает" в сепаратрисный контур Γ_n^+ , составленный из n седел и внешних сепаратрис, идущих из седла в седло, остальные неустойчивые сепаратрисы седел стремятся при $t \rightarrow \infty$ к устойчивым фокусам; 3) при $-\gamma_{n\mathbf{k}} < \gamma < \gamma_{n\mathbf{k}}$ предельные циклы, охватывающие фазовый цилиндр, отсутствуют; 4) при $\gamma = -\gamma_{n\mathbf{k}}$ образуется контур Γ_n^- , составленный из n седел и внешних сепаратрис и отличающийся от Γ_n^+ направлением обхода фазового цилиндра и расположением на нем; 5) при $\gamma < -\gamma_{n\mathbf{k}}$ существует устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр.

Этот результат иллюстрируется на примере системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - x^3 + \varepsilon[(1 - p_1 x^2)y + p_2 F(t)], \end{aligned} \quad (30)$$

эквивалентной уравнению Дюффинга-Ван дер Поля. Здесь $p_1 > 0, p_2$ – параметры, $F(t) = \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{5}$.

Результаты параграфа 2.3 изложены в работе диссертанта [4].

В параграфе 2.4 исследуются вопросы, касающиеся глобального поведения решений в области D , заполненной замкнутыми фазовыми

траекториями. Также рассматривается поведение решений в окрестности невозмущенной сепаратрис (расщепление сепаратрисных многообразий).

Глобальное поведение решений в ячейке D определяется теоремой 4, а также теоремами:

Теорема. 6. *При достаточно малых $\varepsilon > 0$ грубому предельному циклу в автономной системе (28) с частотой ω_0 , удовлетворяющей условию $|\sum_{j=0}^m k_j \omega_j| \geq C/(\sum_{j=0}^m |k_j|)^{m+2}$ для всех $(k_0, k_1, \dots, k_m) \in \mathbf{Z}^{m+1} \setminus \{0\}$, где C – некоторая положительная постоянная, соответствует в исходной системе при $B_1 \neq 0$ квазипериодическое решение с частотами $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_m$. В системе (20) этому решению соответствует $(m+1)$ -мерный тор, асимптотически устойчивый при $B_1 < 0$.*

Теорема. 7. *Число расщепляемых резонансных уровней конечно.*

В диссертации был рассмотрен вопрос о расщеплении сепаратрисных многообразий. Получен аналог функции Мельникова, которая определяет расщепление многообразий:

$$\Delta_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x_0(\tau-t), y_0(\tau-t), \tau) \dot{x}_0(\tau-t) - g(x_0(\tau-t), y_0(\tau-t), \tau) \dot{y}_0(\tau-t)] d\tau, \quad (31)$$

$x_0(\tau), y_0(\tau)$ – решение невозмущенной системы на сепаратрисе. Так как функции f, g квазипериодические по t , то и функция $\Delta_0(t)$ также будет квазипериодической по t .

Знакопеременность функции $\Delta_0(t)$ означает существование двоякоасимптотических (гомоклинических) решений, удовлетворяющих условию $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_\varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y_\varepsilon(t) = 0$. Исследование поведения решений в некоторой расширенной окрестности двоякоасимптотического решения проводилось Л.П. Шильниковым в¹⁷ и связано с существованием нетривиального гиперболического множества ("нерегулярной динамики"). В некоторых случаях окрестность сепаратрисы является притягивающей. Тогда приходим к нерегулярному аттрактору, для которого используют термин "квазиаттрактор". Появление такого квазиаттрактора, а также численный анализ его свойств, проводится в диссертации на примере уравнения Дуффинга с восьмеркой седла.

Результаты **параграфа 2.4** изложены в работе диссертанта [6; 8].

В **параграфе 2.5** изучается явление параметрического резонанса. Установлено, что при таком резонансе в системе возникают $m + 1$ -мерные резонансные инвариантные торы нового типа.

Мы будем рассматривать возмущения, содержащие слагаемые вида

$$a(t)f_1(x, y), \quad (32)$$

¹⁷ Шильников, Л. П. Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа / Л. П. Шильников // Матем. сб. 1967. Т. 74, № 3. С. 378–397.

где $a(t)$ – квазипериодическая функция. Такие системы, по аналогии со случаем периодической функции $a(t)$, мы называем параметрическими. Мы предполагаем, что функция $f_1(x, y)$ является нелинейной.

В случае, если дивергенция векторного поля системы (26) не зависит от v , то усредненная система не может иметь стягиваемых предельных циклов на цилиндре. Справедлива следующая

Лемма. 1. *Если дивергенция векторного поля системы (26) зависит от v , то дивергенция векторного поля исходной системы (18) содержит слагаемые, которые зависят как от времени t , так и от одной или обеих координат.*

Часто справедливо и обратное утверждение: наличие указанных слагаемых приводит к знакопеременной дивергенции векторного поля (26). В этом случае на фазовой плоскости усредненной системы могут возникать предельные циклы, которым соответствуют резонансные квазипериодические решения нового типа. Более точно, справедлива

Теорема. 8. *Допустим, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ усредненная система (26) имеет грубый предельный цикл (с частотой колебаний Ω). Тогда в системе (20) существует $(m+1)$ -мерный инвариантный тор T_* с частотами $(\Omega, \omega_1, \dots, \omega_m)$, который будет устойчивым, если устойчив предельный цикл.*

Результаты **параграфа 2.5** изложены в работе диссертанта [7].

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Найдены бифуркационные множества параметров и построены бифуркационные диаграммы для автономных "прошлого" и "будущего" векторных полей в задаче о транзиторном сдвиге для а) транзиторной системы типа Дуффинга-Ван дер Поля; б) транзиторного уравнения маятникового типа; в) транзиторной системы ФитцХью-Нагумо. Построены качественные фазовые портреты в областях с качественно различным поведением. Указаны области начальных условий, которые соответствуют смене динамического режима для решений. Для численного построения этих областей разработана компьютерная программа.
2. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены общие условия существования и устойчивости m -частотных квазипериодических решений в резонансных случаях, когда собственная частота невозмущенной системы и частоты квазипериодического возмущения соизмеримы.

3. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены общие условия существования и устойчивости $(m + 1)$ -частотных квазипериодических решений в резонансных случаях, когда собственная частота невозмущенной системы и частоты квазипериодического возмущения соизмеримы. Указано, что такие решения возникают при параметрическом резонансе.
4. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены общие условия существования и устойчивости $(m + 1)$ -частотного квазипериодического решения в нерезонансном случае.
5. Установлены бифуркации в резонансных зонах, происходящие при изменении расстройки между резонансным уровнем энергии невозмущенной системы и уровнем, в окрестности которого рождается предельный цикл возмущенной автономной системы (решена задача о синхронизации квазипериодических колебаний).
6. Проведено исследование глобального поведения решений в замкнутых областях, заполненных замкнутыми фазовыми траекториями невозмущенной системы (в частности, установлена конечность расщепляемых резонансов) и в окрестностях невозмущенных сепаратрис (определены условия существования квазиаттрактора). Исследование иллюстрируется на примере квазипериодического уравнения типа Дуффинга–Ван дер Поля.

В **приложении А** приведена теорема Пуанкаре–Понтрягина о рождении предельного цикла из замкнутой фазовой траектории гамильтоновой системы при малом неконсервативном возмущении. В **приложении Б** приведен программный код для построения отображения перехода и нахождения образов инвариантных множеств (сепаратрис и предельных циклов) прошлого векторного поля исследуемых систем, подготовленный с помощью пакета Matlab.

Автор выражает благодарность и большую признательность доктору физико–математических наук, Гонченко Сергею Владимировичу, за научное руководство, а также автору совместных работ, доктору физико–математических наук, Морозову Альберту Дмитриевичу за внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях, рекомендованных ВАК РФ и входящих в международные базы цитирования Web of Science, Scopus, zbMATH

1. *Морозов, А. Д.* Транзиторный сдвиг в задаче о флаттере / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов // Нелинейная динамика. — 2015. — Т. 11, № 3. — С. 447—457. — (Scopus, zbMATH).
2. *Морозов, А. Д.* Транзиторный сдвиг в уравнениях маятникового типа / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов // Нелинейная динамика. — 2016. — Т. 2, № 4. — С. 577—589. — (Scopus, zbMATH).
3. *Morozov, A. D.* Quasiperiodic Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems / A. D. Morozov, K. E. Morozov // Differential Equations. — 2017. — Vol. 52, no. 12. — P. 1—10. — (WoS, Scopus, zbMATH).
4. *Morozov, A. D.* On Synchronization of Quasiperiodic Oscillations / A. D. Morozov, K. E. Morozov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2018. — Vol. 14, no. 3. — P. 367—376. — (Scopus, zbMATH).
5. *Morozov, K. E.* Transitory Shift in the FitzHugh – Nagumo Model / K. E. Morozov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2018. — Vol. 14, no. 2. — P. 169—177. — (Scopus, zbMATH).
6. *Morozov, A. D.* Global Dynamics of Systems Close to Hamiltonian Ones Under Nonconservative Quasi-periodic Perturbation / A. D. Morozov, K. E. Morozov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2019. — Vol. 15, no. 2. — P. 187—198. — (Scopus, zbMATH).
7. *Morozov, A. D.* On Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Hamiltonian Systems / A. D. Morozov, K. E. Morozov // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2020. — Vol. 16, no. 2. — P. 369—378. — (Scopus, zbMATH).
8. *Морозов, А. Д.* О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов, Т. Н. Драгунов // Журнал СВМО. — 2020. — Т. 22, № 2. — С. 164—76. — (zbMATH).

В сборниках трудов конференций, включенных в базу цитирования РИНЦ

9. *Морозов, А. Д.* Флаттер в транзиторных режимах / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов // Труды XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — 2015. — С. 2632—2634.

10. *Морозов, К. Е.* О свойствах транзиторных систем / К. Е. Морозов // Труды XVII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых учёных и студентов. — 2015. — С. 457—460.
11. *Морозов, К. Е.* Квазипериодические возмущения двумерных гамильтоновых систем / К. Е. Морозов // XXIII Нижегородская сессия молодых ученых (технические, естественные, математические науки). Материалы докладов. — 2018. — С. 205—206.
12. *Морозов, А. Д.* О квазипериодических параметрических возмущениях гамильтоновых систем / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов // Труды XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — 2019. — С. 117—118.
13. *Морозов, А. Д.* О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов, Т. Драгунов // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании. Материалы XIV Международной научной конференции. — 2019. — С. 64—65.

Морозов Кирилл Евгеньевич

О транзитных и квазипериодических системах

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____