

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

На правах рукописи

Морозов Кирилл Евгеньевич

О транзиторных и квазипериодических системах

Специальность 01.01.02 —

«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное
управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
научно-исследовательской лаборатории "Динамического хаоса" ФГАОУ ВО
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»
Гонченко Сергей Владимирович

Нижегород — 2020

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Транзиторные системы	15
1.1 Основные понятия	15
1.2 Отображение перехода	17
1.3 Транзиторный сдвиг в уравнении типа Дуффинга	20
1.3.1 Консервативный случай ($\varepsilon = 0$)	21
1.3.2 Неконсервативный случай ($\varepsilon \neq 0$)	24
1.4 Транзиторный сдвиг в уравнениях маятникового типа	29
1.4.1 Фазовые портреты	30
1.4.2 Влияние транзиторного сдвига на поведение решений	36
1.5 Транзиторный сдвиг в системе ФитцХью-Нагумо	43
1.5.1 Исследование автономной системы	45
1.5.2 Исследование неавтономной системы	49
Глава 2. Квазипериодические возмущения гамильтоновых систем	53
2.1 Введение. Вспомогательные преобразования	53
2.2 Резонансные квазипериодические решения	55
2.3 Синхронизация квазипериодических колебаний	59
2.4 О глобальном поведении решений	63
2.4.1 Пример 1. Квазипериодическое уравнение типа Дуффинга-Ван дер Поля	69
2.5 Квазипериодические параметрические возмущения	75
2.5.1 Пример 2. Параметрическое возмущение	78
Заключение	82
Список литературы	85

Приложение А. О рождении предельных циклов из замкнутой траектории гамильтоновой системы при автономном неконсервативном возмущении . . .	95
Приложение Б. Листинг программы для нахождения образов траекторий прошлого векторного поля под действием отображения перехода	96

Введение

Работа посвящена качественному исследованию поведения решений двумерных неавтономных динамических систем. В диссертации рассматриваются два класса таких систем: транзиторные и квазипериодические. Транзиторными называют такие динамические системы, уравнения которых явно зависят от времени лишь на конечном промежутке. Второй класс состоит из неконсервативных квазипериодических по времени потоков, близких к двумерным автономным гамильтоновым. Изучаемые динамические системы играют фундаментальную роль в теории колебаний и ее приложениях.

Понятие транзиторной системы было введено в 2011 году Дж. Мейссом и Б. Мосовски для обозначения динамических систем, неавтономных на конечном промежутке времени [31]. Такие системы являются моделями для изучения переходных процессов и их влияния на установление динамики, т.к. описывают объекты, подвергающиеся переходу между двумя стационарными режимами. Автономные векторные поля, определяющие динамику вне промежутка неавтономности, называют прошлым и будущим векторными полями. В случае систем, сохраняющих фазовый объем, рассмотрение транзиторной динамики связано с задачей вычисления транспорта между «когерентными структурами» прошлого и будущего векторных полей. Так, в вышеуказанной работе предлагается техника определения транспорта, основанная на знании гетероклинических орбит к седловым решениям автономных полей. В диссертации же рассматриваются неконсервативные системы, в которых автономные прошлое и будущее векторные поля могут иметь предельные циклы (т.е. возможно существование автоколебательных движений). В этом случае также можно говорить о транспорте, имея ввиду смену динамического режима для траекторий (например, переход от колебаний к вращениям для маятниковых систем). Тогда представляет интерес вопрос о количественной характеристике возможности смены режимов.

В данной диссертационной работе рассматриваются три конкретные транзиторные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющие широкое прикладное значение: уравнение типа Дуффинга, уравнение маятникового типа и транзиторный аналог системы ФитцХью–Нагумо. Задача о транзиторном сдвиге в уравнении типа Дуффинга возникает, например, при

изучении явления панельного флаттера, представляющего собой нарастающие по амплитуде колебания панели, возбуждаемые набегающим потоком жидкости или газа [66; 90]. Возможной причиной нелинейного панельного флаттера является резонанс собственных частот соответствующей краевой задачи (А.Н. Куликов [75; 76]). Уравнения маятникового типа являются математической моделью для описания многих физических явлений как из области механики (колебания подвешенных грузов и др.), так и из других областей. Например, подобным уравнением описывается динамика джозефсоновского контакта [3; 4]. Система ФитцХью-Нагумо является одной из простейших динамических систем, моделирующих активность нервной клетки [13]. Транзиторный сдвиг в вышеуказанных примерах может быть обусловлен как внешним воздействием, так и изменением внутренних параметров. Существует множество иных прикладных задач, в которых естественным образом возникают транзиторные системы. Это, например, задача о резонансном ускорителе, о вращающемся двойном вихре, о ламинарном потоке через трубу с конечным числом изгибов между двумя прямыми участками и другие [31; 32].

Второе направление следует рассматривать как обобщение теории квази-консервативных систем с периодической зависимостью от времени. Оно связано с исследованием влияния "малых" квазипериодических по времени неконсервативных возмущений на поведение решений двумерных гамильтоновых систем. Предполагается, что в фазовом пространстве невозмущенной системы существует кольцевая область, заполненная замкнутыми фазовыми траекториями, отделенная от сепаратрис и состояний равновесия, причем собственная частота движения на этих кривых изменяется монотонно. Исследуется динамика в указанной области. Одно из основных затруднений при изучении поведения решений таких систем связано с появлением резонансов, когда собственная частота соизмерима с частотами возмущения. В диссертации выводятся и исследуются усредненные системы, определяющие динамику в окрестностях резонансных уровней энергии невозмущенной системы. Также отдельно рассматриваются вопросы о глобальной динамике и связанный с этим вопрос о поведении решений в окрестности невозмущенной сепаратрисы. Несмотря на большое число работ, посвященных изучению малых неконсервативных периодических по времени возмущений, случай квазипериодической зависимости от времени до сих пор не был рассмотрен в полной мере. Так, не был проведен анализ структуры невырожденных резонансных зон и, в частности, не были

установлены общие условия существования квазипериодических решений в этих зонах, не была решена задача о синхронизации квазипериодических колебаний и глобальном поведении решений.

Круг вопросов, исследуемых в настоящей работе, относится к качественной теории неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений, основания которой заложены А. Пуанкаре и А. М. Ляпуновым. Исторически первыми рассматривались системы с периодической зависимостью от времени. Так, в своей классической монографии [102] Пуанкаре исследует вопросы, связанные с существованием периодических решений у таких систем. Там же Пуанкаре рассматривает системы, близкие к интегрируемым, и применяет для их исследования "метод малого параметра". Кроме того, в монографии также рассматриваются линейные системы с периодическими по времени коэффициентами.

Ляпунов, решая общую задачу устойчивости нулевого решения системы n автономных уравнений, также затрагивает случай систем с периодической зависимостью от времени, в некоторой степени вдохновляясь идеями Пуанкаре [79]. В связи с изучением устойчивости по линейному приближению, он ставит вопрос о приведении линейной системы с периодическими коэффициентами к системе с постоянными коэффициентами. Развитую в этом отношении теорию также связывают с именем Г. Флоке [67]. Говоря о системах, зависящих от времени периодическим образом, следует также отметить работы В.А. Плисса, касающиеся изучения структуры и устойчивости интегральных многообразий таких систем, а также условий их грубости [99]. В частности, Плиссу принадлежит доказательство необходимости условия гипотезы С. Смейла о грубости для двумерной периодической по времени системы [100]. Говоря об исследовании других неавтономных дифференциальных уравнений, упомянем работы Л.М. Лермана [21; 78], посвященные вопросам классификации решений некоторых классов неавтономных потоков. Также существует много работ, посвященных исследованию свойств решений конкретных уравнений, в правые части которых явно входит независимая переменная. Отметим, например, работы И.В. Астаповой [1; 2; 49], посвященные изучению свойств решений обобщенного уравнения Эмдена–Фаулера.

Исследование транзиторных и квазипериодических систем приводит к задаче построения бифуркационных диаграмм для нелинейных двумерных автономных систем, что представляет собой отдельную задачу. При этом приме-

няются методы качественной теории дифференциальных уравнений, развитые А.А. Андроновым, Н.Н. Баутиным, Е.А. Леонтович [50; 53]. Среди таких систем важную роль играют автоколебательные (по терминологии А.А.Андропова), т.е. такие, у которых на фазовой плоскости существуют предельные циклы Пуанкаре. Автоколебательные системы являются принципиально нелинейными и неконсервативными, и имеют широкое распространение в механике, физике, химии, биологии, радиотехнике, электронике и других областях естествознания. До сих пор отсутствуют общие методы, позволяющие решить вопрос о существовании предельных циклов, их числе и месте расположения. При изучении квазиконсервативных систем, полезным оказывается метод усреднения. Первые подобные идеи возникают в работах Гаусса и Лагранжа по исследованию возмущенных движений планет, однако некоторое законченное оформление они получили лишь у Б. Ван дер Поля [41] в виде "метода медленно меняющихся амплитуд". Этот метод был разработан для исследования автоколебательных режимов в ламповом генераторе. Математически строго метод был обоснован Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси [80]. Дальнейшее развитие метода усреднения связано с именами Н.М. Крылова [74], Н.Н. Боголюбова [55], Ю.А. Митропольского [82], А.А. Андропова, А.А. Витта [45] и других. Для систем, близких к двумерным гамильтоновым, метод усреднения сводит задачу о предельных циклах к более простой задаче изучения поведения порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина, простым нулям которой отвечают уровни энергии невозмущенной системы, в окрестности которых рождаются грубые предельные циклы (теорема Пуанкаре-Понтрягина-Андропова). Многие системы были исследованы этим методом (Н.Н. Баутин [51], В.Н. Белых [3], А.Д. Морозов [86; 87] и др.).

Центральное место в исследовании нелинейных неавтономных (в частности, квазипериодических по времени) систем занимает исследование резонансов (Морозов, Шильников [95; 96]) . Изучение резонансных явлений также берет свое начало от классических работ А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова. Отметим здесь также работы В.М. Волосова и Б.И. Моргунова [57], Дж. Гукенхаймера и Ф. Холмса [66], С. Уиггинса [43], Е.А. Гребеникова, Ю.А. Рябова [62—64], Р.А. Страбла [39; 40] и др. Теория нелинейного резонанса для двухчастотных систем с $3/2$ степенями свободы наиболее полно изложена в монографиях А.Д. Морозова [24; 88].

Исторически первыми изучались резонансы в гамильтоновых системах. Эти исследования стимулировались задачами небесной механики, которые с древних времен привлекали внимание математиков. Наиболее интересные результаты по исследованию таких систем были получены А. Пуанкаре, Дж.Д. Биркгофом [54]. В середине XX века А.Н. Колмогоровым [72] и В.И. Арнольдом [47] была разработана теория малых возмущений интегрируемых гамильтоновых систем и доказана теорема о сохранении условно-периодических движений. Ю.К. Мозером [85] была решена задача о сохранении инвариантных кривых для двумерных симплектических отображений. Этот круг вопросов получил название КАМ-теории. Задача о сохранении инвариантных многообразий в сингулярно возмущенных гамильтоновых системах изучалась, например, в работах Л. М. Лермана, В. Гелфрака [20]. Вопросы интегрируемости гамильтоновых систем изучались в работах В.В. Козлова [71], В.П. Веселова [56], М. Эно и К. Хейлеса [9], Б.В. Чирикова, Г.М. Заславского [69] и др.

Как выяснилось, основная причина неинтегрируемости систем заключается в существовании гомоклинических (двойкоасимптотических) траекторий. Начало изучению таких траекторий было положено в работах А. Пуанкаре и Дж.Д. Биркгофа. Дальнейшее развитие это направление получило в работах С. Смейла [104]. Описание структуры окрестности грубой гомоклинической кривой седлового периодического и квазипериодического движения дано Л.П. Шильниковым [77; 105; 106]. Им было установлено, что в малой окрестности гомоклинического решения существует нетривиальное гиперболическое множество, траектории которого описываются на языке символической динамики с конечным числом символов. Тот факт, что такие множества существуют для гладких отображений был доказан С. Смейлом [38]. Упомянем здесь также работы Л.М. Лермана, касающиеся структуры и бифуркаций гомоклинических решений в гамильтоновых системах [17–19]. Н.К. Гаврилов и Л.П. Шильников [58; 59] впервые доказали возможность рождения нетривиального гиперболического множества до момента гомоклинического касания инвариантных многообразий седловой периодической траектории. В работах С.В. Гонченко, Д.В. Тураева и Л.П. Шильникова [7; 60; 61] было доказано, что модели нелинейной динамики с гомоклиническими касаниями не поддаются полному анализу с помощью конечно-параметрических семейств, поскольку

бифуркации систем с негрубой гомоклиникой могут допускать бесконечное вырождение.

В теории нелинейных колебаний важную роль играют автономные квази-консервативные уравнения вида

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon f_1(x, \dot{x}). \quad (1)$$

Здесь $f(x)$, $f_1(x, \dot{x})$ – некие гладкие функции своих аргументов, $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый параметр. Многие эталонные уравнения теории колебаний имеют такую форму (уравнения маятникового типа, уравнение Дуффинга-Ван дер Поля и другие). К ним приводят многочисленные прикладные задачи: колебания в механических и электрических системах, в частности, колебания продольно изогнутого упругого стержня под осевой нагрузкой; колебания изогнутой консольной балки в неоднородном поле двух постоянных магнитов; задача о прогибе упруго-пластичной арки с шарниром, вызванном колебаниями; некоторые задачи динамики плазмы и др [11; 12; 24; 66]. Задача о бифуркациях таких векторных полей на плоскости представляет самостоятельный интерес [48].

Наряду с уравнением (1) в теории колебаний фундаментальную роль играет соответствующее неавтономное уравнение

$$\ddot{x} + f(x) = \varepsilon f_2(x, \dot{x}, t), \quad (2)$$

где функция $f_2(x, \dot{x}, t)$ – непрерывно зависит от времени.

Уравнениям вида (2) в случае периодической зависимости от времени посвящено большое количество исследований. Так, квазилинейные системы (т.е. при $f(x) = x$) были изучены в 30-х годах XX века А.А. Андроным и А.А. Виттом [44]. Более общий случай периодического неконсервативного возмущения двумерной гамильтоновой система был изучен лишь во второй половине XX века. Эти исследования вошли, например, в книги [24; 88]. Задачу об определении условий существования грубых гомоклинических решений к седловому периодическому для квазиконсервативных систем, правая часть которых периодически зависит от времени, решил В. К. Мельников [81]. Он получил выражение для функции, названной функцией Мельникова, знакопеременность которой означает существование трансверсального пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий седлового решения (которые в невозмущенном случае совпадают). В дальнейшем применимость формулы Мельникова была расширена на более общий класс возмущений, в частности, на системы с квазипериодической зависимостью от времени (см., например, Сандерс [36]).

В диссертации мы рассматриваем уравнение вида (2) в случае, когда $f_2(x, \dot{x}, t)$ зависит от времени квазипериодически, а также случай транзиторной зависимости (т.е. аperiodической зависимости от времени, сосредоточенной на конечном промежутке).

Основные результаты диссертации изложены в работах диссертанта [26—30; 89—94; 97; 98].

Целью данной работы является исследование динамических режимов в двумерных неавтономных потоках (транзиторных и квазипериодических), получение новых результатов, составляющих качественную теорию таких систем. Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Определить области начальных условий, соответствующие смене динамических режимов в транзиторных уравнениях (задача о транзиторном сдвиге), возникающих:
 - а) при изучении явления флаттера панели (транзиторное уравнение Дуффинга-Ван дер Поля);
 - б) в теории джозефсоновского контакта (транзиторное уравнение маятника типа);
 - в) при изучении нервного взаимодействия (транзиторная система ФитцХью-Нагумо).
 Для этого необходимо также построить качественные фазовые портреты автономных векторных полей, определяющих систему вне промежутка неавтономности, в зависимости от возможных значений параметров.
2. Определить условия существования и устойчивости m -частотных и $(m + 1)$ -частотных (возникающих при параметрическом резонансе) квазипериодических резонансных движений (инвариантных торов в расширенном фазовом пространстве) в системах, близких к двумерным гамильтоновым, при малых неконсервативных m -частотных квазипериодических возмущениях.
3. Установить основные бифуркации в невырожденных резонансных зонах (в частности, решить задачу о синхронизации квазипериодических колебаний) и решить задачу о глобальном поведении решений в системах, близких к двумерным гамильтоновым, при малых неконсервативных m -частотных квазипериодических возмущениях в области,

заполненной замкнутыми фазовыми траекториями невозмущенной системы. Определить условия существования нерегулярного притягивающего множества в окрестности невозмущенной сепаратрисы.

Научная новизна: Все основные результаты диссертации являются новыми.

1. Впервые рассматриваются неконсервативные транзиторные системы и для них обобщается понятие "транспорта". До этого изучались лишь транзиторные системы, сохраняющие фазовый объем. Для трех прикладных систем, изучаемых в диссертации, численно построено отображение перехода. Приведен пример, когда формулы, задающие отображение перехода, удастся выписать явно.
2. Впервые проведен общий анализ структуры невырожденных резонансных зон систем с квазипериодической зависимостью от времени, близких к двумерным гамильтоновым. В частности, установлены условия существования и устойчивости m -частотных и $(m + 1)$ -частотных резонансных квазипериодических решений. Показано, что последние возникают при параметрическом резонансе.
3. Впервые изучены бифуркации в резонансной зоне при прохождении через нее инвариантного тора в квазипериодическом случае (задача о синхронизации колебаний).
4. Впервые проведен анализ глобального поведения решений систем с квазипериодической зависимостью от времени, близких к двумерным гамильтоновым, в кольцевых областях, заполненных замкнутыми фазовыми кривыми невозмущенной системы, а также в окрестности невозмущенной сепаратрисы.

Значение основных результатов диссертации. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты касаются неавтономных потоков и могут быть полезны при исследовании конкретных моделей. Результаты диссертации являются вкладом в теорию двумерных неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, могут использоваться в научной деятельности и при составлении спецкурсов по неавтономным дифференциальным уравнениям.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы качественной теории и теории бифуркаций динамических систем. Существенную роль играют асимптотические методы, основанные на процедуре

усреднения. Также в работе используются численные алгоритмы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (программная реализация написана на языке Matlab).

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Найдены бифуркационные множества параметров и построены бифуркационные диаграммы для автономных "прошлого" и "будущего" векторных полей в задаче о транзиторном сдвиге для а) транзиторной системы типа Дуффинга-Ван дер Поля; б) транзиторного уравнения маятникового типа; в) транзиторной системы ФитцХью-Нагумо. Построены качественные фазовые портреты в областях с качественно различным поведением. Указаны области начальных условий, которые соответствуют смене динамического режима для решений. Для численного построения этих областей разработана компьютерная программа.
2. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены общие условия существования и устойчивости m -частотных квазипериодических решений в резонансных случаях, когда собственная частота невозмущенной системы и частоты квазипериодического возмущения соизмеримы.
3. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены общие условия существования и устойчивости $(m + 1)$ -частотных квазипериодических решений в резонансных случаях, когда собственная частота невозмущенной системы и частоты квазипериодического возмущения соизмеримы. Указано, что такие решения возникают при параметрическом резонансе.
4. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены общие условия существования и устойчивости $(m + 1)$ -частотного квазипериодического решения в нерезонансном случае.
5. Установлены бифуркации в резонансных зонах, происходящие при изменении расстройки между резонансным уровнем энергии невозмущенной системы и уровнем, в окрестности которого рождается предельный цикл возмущенной автономной системы (решена задача о синхронизации квазипериодических колебаний).

6. Проведено исследование глобального поведения решений в замкнутых областях, заполненных замкнутыми фазовыми траекториями невозмущенной системы (в частности, установлена конечность расщепляемых резонансов) и в окрестностях невозмущенных сепаратрис (определены условия существования квазиаттрактора). Исследование иллюстрируется на примере квазипериодического уравнения типа Дуффинга–Вандер Поля.

Достоверность полученных результатов подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на XVII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых учёных и студентов МИКМУС, Москва (2015); на XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань (2015); на Международной конференции по математической теории управления и механике, Суздаль, (2015, 2018, 2020), на Международной конференции "Dynamics, Bifurcations and Chaos" (2016, 2017, 2018, 2019), Н. Новгород; на Всероссийской конференции "Нелинейные колебания механических систем" Н. Новгород (2016); на Международной конференции "Shilnikov Workshop" Н. Новгород (2017, 2018, 2019); на XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа (2019), на Международной конференции Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ Долгопрудный (2019), на XIV Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Саранск (2019), на XXIII Нижегородской сессии молодых ученых (технические, естественные, математические науки) (2018), на Международной научной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика В. А. Садовниченко, Москва (2019).

Был сделан доклад на Нижегородском математическом обществе (2015), а также доклады на научных семинарах «Нелинейная динамика: теория и приложения» (семинары им. Л.П. Шильникова) Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (руководитель: д.ф.-м.н. С.В. Гонченко). Также результаты диссертации докладывались на семинаре кафедры ДУМЧА ИТММ ННГУ им. Лобачевского.

Результаты диссертации вошли в составную часть результатов работ, выполненных при финансовой поддержке Министерства образования и науки (проектная часть госзадания, № 0729-2020-0036), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 18-01-00306 и № 20-31-90039), Российского научного фонда (проект № 19-11-00280). В 2015-2017 годах проведенные исследования были поддержаны стипендией имени Н.И. Лобачевского, в 2019 - стипендией им. Г.А. Разуваева.

Личный вклад. Все основные результаты диссертационной работы являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно с А.Д. Морозовым, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, А.Д. Морозову принадлежат постановки задач и участие в обсуждении результатов. В работах, выполненных совместно с А.Д. Морозовым и Т.Н. Драгуновым, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, А.Д. Морозову принадлежит постановка задачи, Т.Н. Драгунову принадлежит выполнение технической части и оформление результатов.

Публикации. Основные результаты диссертации отражены в 13 научных работах в изданиях, индексируемых РИНЦ. Из них 7 работ опубликовано в рецензируемых периодических научных журналах из списка ВАК РФ, индексируемых Web of Science и/или Scopus. Всего по теме диссертации автором опубликовано 19 работ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 108 страниц, включая 31 рисунок и 0 таблиц. Список литературы содержит 106 наименований.

Глава 1. Транзиторные системы

1.1 Основные понятия

Определим класс транзиторных систем.

Определение. 1. *Транзиторной динамической системой с временем перехода τ называется система, которая автономна везде за исключением некоторого интервала ограниченной длины $\tau > 0$.*

Пусть, для определенности, зависимость от времени сосредоточена на промежутке $[0, \tau]$. Тогда уравнения транзиторной системы можно представить в виде

$$\dot{z} = V(z, t), \quad V(z, t) = \begin{cases} P(z), & t \leq 0; \\ v(z, t), & 0 < t < \tau \\ F(z), & t \geq \tau, \end{cases} \quad (1.1)$$

где P суть прошлое векторное поле, F – будущее векторное поле. На промежутке перехода $[0, \tau]$ $V(z, t)$ – некоторая непрерывная функция времени для каждого $z \in M$, $\lim_{t \rightarrow +0} v(z, t) = P(z)$, $\lim_{t \rightarrow \tau-0} v(z, t) = F(z)$. Автономные системы $\dot{z} = P(z)$ и $\dot{z} = F(z)$ определены на одном и том же фазовом пространстве M . Кроме того, предполагаем, что V непрерывно дифференцируема по фазовым переменным, так же как и функции P, F .

Заметим, что для теории неавтономных апериодических систем также представляет интерес случай, когда интервал неавтономности является бесконечным (так называемые асимптотически автономные системы, см., например, [23; 78]). С другой стороны, $\tau = 0$ соответствует разрыву правой части (явление удара).

Неавтономная система (1.1) определена в расширенном фазовом пространстве $M \times \mathbb{R}$. Будем считать, что V задает поток $\varphi_{t_1, t_0} : M \rightarrow M$ для любых $t_1, t_0 \in \mathbb{R}$, где φ_{t_1, t_0} отображает точку из положения при $t = t_0$ в положение при $t = t_1$. Тогда каждая точка $(z, t) \in M \times \mathbb{R}$ имеет орбиту

$$\gamma(z, t) = \{(\varphi_{t_1, t}(z), t_1) : t_1 \in \mathbb{R}\} \subset M \times \mathbb{R}.$$

Определение. 2. Если Υ – любое инвариантное множество прошлого векторного поля P , то множество $\{(z, t) : z \in \Upsilon, t \leq 0\} \subset M \times \mathbb{R}$ в расширенном фазовом пространстве называют отрицательно-инвариантным множеством для V . Аналогично, если Υ – любое инвариантное множество будущего векторного поля F , то $\{(z, t) : z \in \Upsilon, t > \tau\} \subset M \times \mathbb{R}$ называют положительно-инвариантным множеством в расширенном фазовом пространстве для V .

Например, состояния равновесия и периодические орбиты и F являются проекциями на M отрицательно-инвариантных и положительно-инвариантных множеств для V соответственно.

Заметим, что инвариантные множества V в расширенном фазовом пространстве, соответствующие неустойчивым сепаратрисам седловых решений P (инвариантные множества V , соответствующие устойчивым сепаратрисам седловых решений F) являются неустойчивыми (устойчивыми) многообразиями и для решений V , соответствующих указанному седловому. При этом сечение этих многообразий плоскостями $t = \text{const} < 0$ ($t = \text{const} > \tau$) дает упомянутые сепаратрисы. Устойчивые многообразия седел P и неустойчивые седел F не имеют влияния на динамику V в расширенном фазовом пространстве в силу транзитного перехода. Поэтому решения исходной системы, соответствующие седловому для P и F , в общем случае не являются гиперболическими для полного векторного поля. Назовем их соответственно отрицательно-гиперболическими и положительно-гиперболическими.

Определение. 3. Решение (1.1) назовем отрицательно-гиперболическим (положительно-гиперболическим), если при $t < 0$ оно гиперболично относительно P (при $t > \tau$ – относительно F).

В данной работе мы вводим полное векторное поле как выпуклую комбинацию прошлого и будущего векторных полей:

$$V(z, t) = (1 - f(t))P(z) + f(t)F(z).$$

Здесь $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ суть гладкая функция перехода, удовлетворяющая условию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > \tau, \end{cases}$$

где τ – время перехода. Нетрудно построить функцию перехода любой степени гладкости. Например, в рассматриваемых в диссертации примерах динамических систем, мы по обыкновению выбираем в качестве функции перехода кубический сплайн

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \left(3 - 2\left(\frac{t}{\tau}\right)\right), & 0 \leq t \leq \tau; \\ 1, & t > \tau. \end{cases}$$

1.2 Отображение перехода

Поскольку уравнение (1.1) зависит от времени лишь на отрезке, то влияние неавтономности может быть описано в терминах отображения перехода $T : M \rightarrow M$, которое задается формулой

$$T(z) = \varphi_{\tau,0}(z),$$

где $\varphi_{\tau,0}(z)$ отображает точку фазового пространства M из положения при $t = 0$ в положение при $t = \tau$ по решениям системы (1.1) ($\varphi_{t,0}(z)$ – решение (1), при $t = 0$ равное z).

Следовательно, инвариантное множество Υ для векторного поля P становится множеством $T(\Upsilon)$ в момент времени τ , а затем преобразуется под действием F . Если динамика прошлого P и будущего F векторных полей известна, то, для описания динамики транзиторной системы мы должны охарактеризовать отображение T . При $\tau = 0$ (явление удара) T – тождественное преобразование M .

В двумерном случае структура прошлого и будущего векторных полей определяется сепаратрисами седел и предельными циклами (ПЦ). Поэтому, используя (1.1), мы должны найти образы сепаратрис и предельных циклов прошлого векторного поля при изменении $t \in [0, \tau]$. Дальнейшая динамика будет определяться будущим автономным векторным полем.

Теорема. 1. Пусть система $\dot{z} = (1 - f(t))P(z) + F(z)$ имеет решение на промежутке неавтономности $[0, \tau]$ с начальным условием $z(0) = z_0$, функция

$f(t)$ - непрерывна на $[0, \tau]$, а P и F принадлежат классу C^1 в окрестности z_0 . Тогда отображение перехода T непрерывно в точке z_0 .

Доказательство. 1. Справедливость данного утверждения вытекает из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий. $T(z_0)$ ставит в соответствие точке $z = z_0$ значение решения задачи Коши для уравнения $\dot{z} = (1 - f(t))P(z) + F(z)$ с начальным условием $z(0) = z_0$ в момент времени $t = \tau$. При выполнении условий теоремы, справедлива теорема о непрерывной зависимости решений от начальных условий. Если $z(t)$ - решение с начальным условием $z(0) = z_0$, а $\tilde{z}(t)$ - решение с начальным условием $\tilde{z}(0) = z$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|z(t) - \tilde{z}(t)| < \varepsilon$ для всех $t \in [0, \tau]$ как только $|z_0 - z| < \delta$. В частности, $|z(\tau) - \tilde{z}(\tau)| = |T(z_0) - T(z)| < \varepsilon$, если $|z_0 - z| < \delta$. Последнее означает непрерывность T в точке z_0 .

Для гладкости отображения перехода некоторой степени требуется гладкость функции перехода той же степени и гладкость автономных полей степени, на единицу большей. Доказательство проводится аналогично.

Важной характеристикой отображения перехода в гамильтоновом случае (т.е. когда прошлое и будущее векторные поля являются гамильтоновыми¹) является транспорт.

Этот термин используется в прикладных работах по гамильтоновым системам без его определения (см., например, [68]). Поэтому мы дадим определение транспорта для нашего случая.

Определение. 4. Под транспортом в транзиторной гамильтоновой системе вида (1.1) будем понимать переход точек фазового пространства из некоторой ячейки прошлого векторного поля в ячейку будущего векторного поля под действием транзиторного потока. Под мерой транспорта между ячейками будем понимать меру области начальных условий ($t = 0$), соответствующих указанному переходу.

Для определения транспорта естественно рассматривать седловые состояния равновесия систем $\dot{z} = P(z)$ и $\dot{z} = F(z)$ и их сепаратрисы, поскольку этими множествами определяются границы ячеек гамильтоновых систем.

¹В этом случае, в силу задания V , полное векторное поле будет гамильтоновым с функцией Гамильтона $H_V(z, t) = (1 - f(t))H_P(z, t) + f(t)H_F(z, t)$

Из определения (4) и консервативности следует, что мера транспорта между ячейками G прошлого векторного поля и D будущего векторного поля численно равна мере области $T(G) \cap D$. Часто удобно ввести в рассмотрение относительную величину, равную $R = \frac{S(T(G) \cap D)}{S(T(G))}$ (S обозначает меру области). Например, такая численная характеристика используется для оценки транспорта в транзиторных гамильтоновых системах [31]. Заметим, что эту величину также можно переписать в виде $\frac{S(T^{-1}(T(G) \cap D))}{S(G)}$ (в силу теоремы Лиувилля о сохранении фазового объема в гамильтоновых системах).

Понятие транспорта переносится на неконсервативные системы. Если G – компактная область притяжения аттрактора прошлого векторного поля, D – область притяжения аттрактора будущего векторного поля, то $\frac{S(T^{-1}(T(G) \cap D))}{S(G)}$ определяет множество начальных условий из G , которые соответствуют решениям, под действием транзиторного сдвига переходящим в область притяжения D аттрактора будущего векторного поля. Но в неконсервативном случае, величины $\frac{S(T^{-1}(T(G) \cap D))}{S(G)}$ и $\frac{S(T(G) \cap D)}{S(T(G))}$, вообще говоря, различны. Для характеристики смены аттрактора будем использовать величину $\frac{S(T^{-1}(T(G) \cap D))}{S(G)}$.

Таким образом, можно сформулировать схему исследования конкретных транзиторных динамических систем:

- 1) исследовать прошлое и будущее векторные поля;
- 2) построить отображение перехода T_τ и определить влияние неавтономности на динамику, т.е. найти множество начальных условий, соответствующих смене динамического режима.

1.3 Транзиторный сдвиг в уравнении типа Дуффинга

Здесь мы рассмотрим транзиторный сдвиг для системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 + \varepsilon(p - x^2)y, \end{aligned} \tag{1.2}$$

к которой приводит задача об обтекании упругой пластины потоком некоторого газа [11; 66]. Эта задача представляет интерес в связи с изучением явления "панельного флаттера" – колебаний пластины с нарастающей амплитудой, которые возбуждаются набегающим потоком жидкости или газа. Система (1.2) получается из соответствующего уравнения в [11], которое зависит от многих параметров, заменой переменных, времени и нормировкой. В результате остаётся два существенных для динамики параметра: p и ε . Параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ определяет неконсервативность задачи и предполагается малым, p определяет чистую диссипацию. Изменение параметра p позволяет получить автоколебательные режимы.

Многие задачи о колебаниях тонких пластин и балок приводят к уравнениям вида (1.2). Например, колебания балки под нагрузкой и колебания трубы при протекании жидкости [11], колебания пластины в электромагнитном поле [12], и другие.

Мы решаем здесь две задачи: 1) находим при $\varepsilon = 0$ величину (меру) транспорта между гамильтоновыми структурами в системе, подвергающейся транзиторному сдвигу и описывающей задачу о флаттере; 2) изучаем влияние транзиторного сдвига на установление динамического режима при учете неконсервативности задачи ($\varepsilon \neq 0$).

В нашей задаче $M = \mathbb{R}^2$, $z = (x, y)$ и мы вводим транзиторный сдвиг следующим образом:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (y, -x + x^3 + \varepsilon(p - x^2)y) \\ F(x, y) &= (y - \omega, -x + x^3 + \varepsilon(p - x^2)y), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где ω – некоторая положительная постоянная. Полное векторное поле определим как выпуклую комбинацию из прошлого и будущего векторных полей: $V(z, t) = (1 - f(t))P(z) + f(t)F(z)$, где $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ – функция перехода,

удовлетворяющая следующему условию

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > \tau, \end{cases}$$

где τ – время перехода, а P и F определены в (1.3). Мы полагаем $f(t)$ монотонной неубывающей и гладкой. Например, мы берем в качестве $f(t)$ кубический сплайн (см. раздел 1.1).

1.3.1 Консервативный случай ($\varepsilon = 0$)

Согласно (1.3), прошлое векторное поле определяется гамильтонианом

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4,$$

а будущее векторное поле – гамильтонианом

$$H_1(x, y) = \frac{1}{2}(y - \omega)^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\omega^2.$$

На Рисунке 1.1 показаны фазовые портреты для систем.

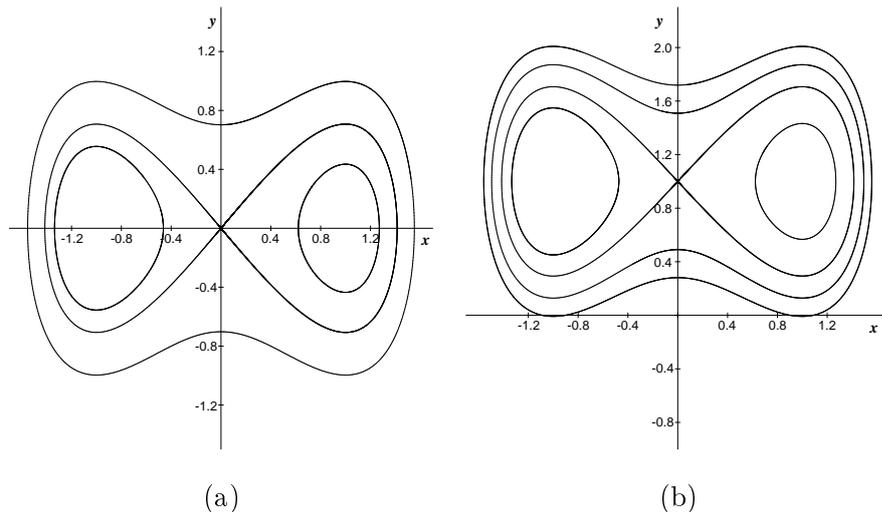


Рисунок 1.1 — Фазовые портреты для прошлого (a) и будущего (b) гамильтоновых векторных полей.

Здесь мы считаем, что переход между прошлым и будущим автономными состояниями осуществляется в течении времени $t \in (0, \tau)$. Положим для

определенности $\omega = 1$. Тогда в нашей системе остается один параметр – время перехода τ . Введем теперь полный гамильтониан, как комбинацию прошлого и будущего гамильтонианов

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}(y - f(t))^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}f^2(t), \quad (1.4)$$

где

$$f(t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \left(3 - 2\left(\frac{t}{\tau}\right)\right), \quad 0 < t < \tau.$$

Построим численно образы сепаратрис прошлого векторного поля с помощью отображения T . При численном интегрировании используем формулы Рунге-Кутты 4-го порядка точности. В начальный момент $t = 0$ берем некоторую точку на сепаратрисе седла прошлого векторного поля, уравнение которых имеет вид

$$y^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = 0.$$

Далее численно интегрируем систему с функцией Гамильтона (1.4) до момента $t = \tau$. В результате мы получаем образы сепаратрис прошлого векторного поля (красным цветом) и образы сепаратрис будущего векторного поля (синим цветом) при действии отображения T для $\tau = 1$ (а) и $\tau = 3$ (б).

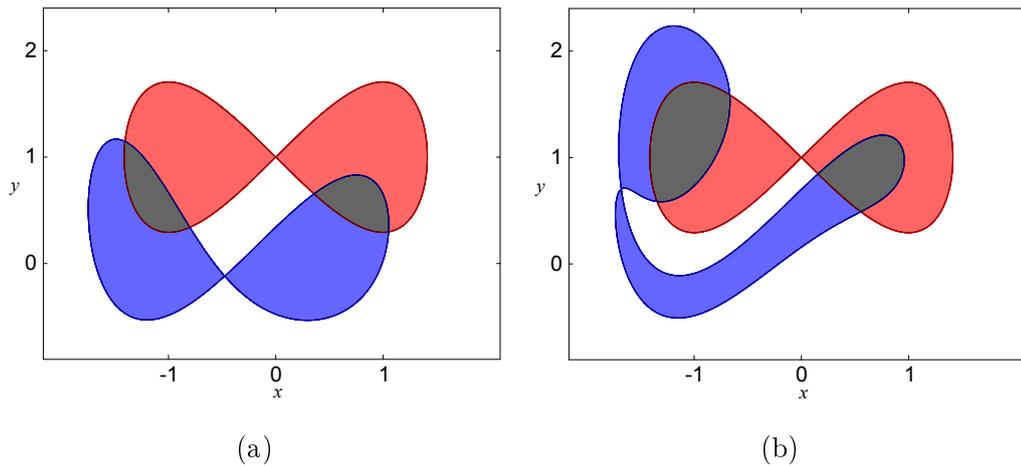


Рисунок 1.2 — Сепаратрисы будущего гамильтониана и образ сепаратрис прошлого гамильтониана в момент времени $\tau = 1$ (а) и $\tau = 3$ (б).

Обозначим через D_F и D_P области внутри ”восьмерки” будущего и прошлого векторного поля соответственно, а через $T(D_P)$ – образ области D_P ;

через $S(D_F)$, $S(T(D_P))$ – их площади. Отношение

$$R = \frac{S(D_F \cap T(D_P))}{S(T(D_P))}, \quad (1.5)$$

определяет меру транспорта. Проблема оценки транспорта сводится к вычислению площадей областей $D_F \cap T(D_P)$ (на Рисунке 1.2 обозначены серым цветом). Оказывается эту, вообще численно трудоемкую задачу, можно существенно упростить (по этому поводу см. [31])

Заметим, что $R(\tau) \rightarrow R_0$ при $\tau \rightarrow 0$, где величина R_0 определяется пересечением площадей, ограничивающих соответствующие ”восьмерки” (образ сепаратрис прошлого векторного поля совпадает с сепаратрисами этого векторного поля, см. Рисунок 1.1). С другой стороны, вычисления показывают, что $R(\tau) \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Транзиторный сдвиг можно вводить различными способами. Конкретный вид неавтономности зависит от особенности задачи. Например, положим

$$\ddot{x} - x + x^3 = \omega f(t).$$

Такой вид зависимости от времени соответствует аperiodическому возмущению, которое действует в течении конечного интервала времени $(0, \tau)$ произвольным образом, а вне указанного интервала сохраняет постоянное значение (при $t < 0$ возмущение отсутствует, а при $t > \tau$ его величина определяется ω).

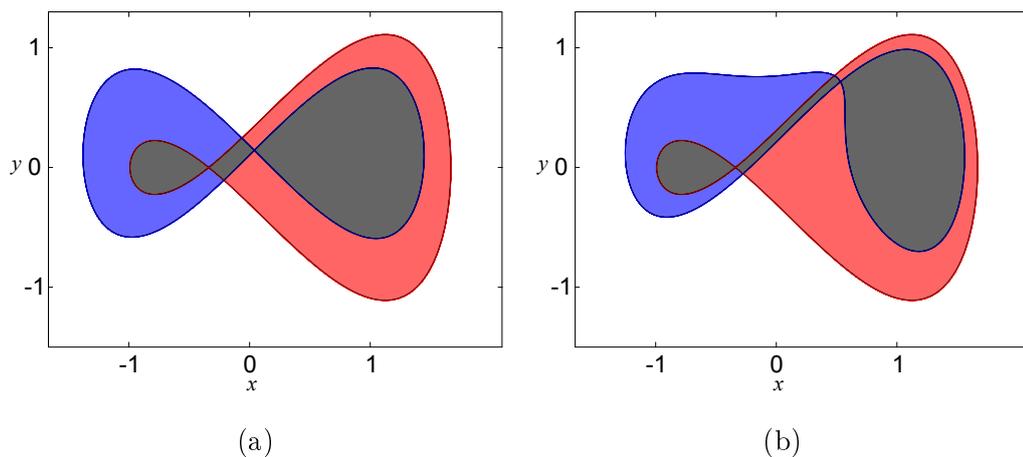


Рисунок 1.3 — Сепаратрисы будущего гамильтониана и образ сепаратрис прошлого гамильтониана в момент времени $\tau = 1$ (a) и $\tau = 3$ (b) для $\omega = 0.3$.

Нас интересуют такие ω , для которых в системе после сдвига наблюдается качественно та же картина поведения фазовых кривых. Это будет выполнено,

если уравнение $\ddot{x} - x + x^3 = \omega$ имеет три вещественных корня, т.е. если $\omega^2 < \frac{4}{27}$. Полный гамильтониан тогда выглядит следующим образом

$$H(x,y,t) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

На Рисунке 1.3 показаны образы сепаратрис прошлого векторного поля и сепаратрисы будущего векторного поля. Здесь области закрашены также, как и в предыдущем примере. Мера транспорта оценивается отношением (1.5).

1.3.2 Неконсервативный случай ($\varepsilon \neq 0$)

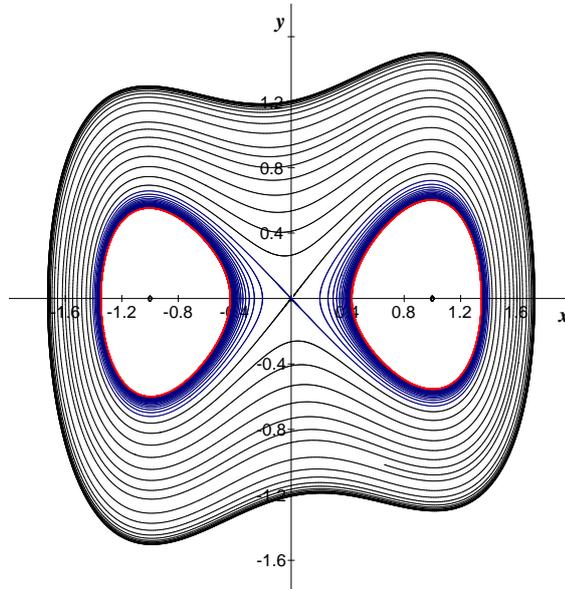


Рисунок 1.4 — Фазовый портрет системы (1.2) при $p = 0.9$.

Рассмотрим систему (1.2), которая определяет прошлое векторное поле. Она инвариантна относительно преобразования $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$, что приводит к симметрии фазовых портретов. Система (1.2) ранее исследовалась (см., например, [11; 66]², [73], [25]). В ней могут существовать предельные циклы. Система имеет седло $O(0,0)$, а также, согласно [73]:

1. при $p < p_* \approx 0.7764$ два устойчивых фокуса $O^\pm(\pm 1, 0)$, предельные циклы отсутствуют;

²Исследование, представленное в работах [11; 66], нельзя признать достаточно полным.

2. при $p_* < p < 0.8$ два устойчивых фокуса $O^\pm(\pm 1, 0)$ и два предельных цикла вне "восьмерки" (внешний цикл, который обозначим через L , устойчивый, а внутренний – неустойчивый);
3. при $0.8 < p < 1$ два устойчивых фокуса $O^\pm(\pm 1, 0)$, один устойчивый предельный цикл L вне "восьмерки" и два неустойчивых предельных цикла внутри "восьмерки";
4. при $p > 1$ два неустойчивых фокуса $O^\pm(\pm 1, 0)$ и один устойчивый предельный цикл L вне "восьмерки".

Фазовый портрет системы (1.2) при $p = 0.9$ представлен на Рисунке 1.4.

Обратимся к системе, которая определяет будущее векторное поле (положим для определенности $\omega = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x} = y - 1 \\ \dot{y} = x - x^3 + \varepsilon(p - x^2)y. \end{cases} \quad (1.6)$$

Эта система, в отличие от (1.2), не обладает симметрией. Состояния равновесия лежат на прямой $y = 1$. Координата x состояния равновесия определяется из уравнения $x - x^3 + \varepsilon(p - x^2) = 0$, которое при малых ε имеет три вещественных корня, близких к $x = 0$ и $x = \pm 1$. Обозначим эти состояния равновесия через \tilde{O} и \tilde{O}^\pm , соответственно. Устойчивый предельный цикл системы (1.6) обозначим через \tilde{L} .

Утверждение. 1. *Существует такое $\varepsilon_* > 0$, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$ системы (1.2) и (1.6) топологически эквивалентны.*

Для доказательства введем $u = y - 1$. В переменных x, u система (1.6) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = u \\ \dot{u} = x - x^3 + \varepsilon(p - x^2) + \varepsilon(p - x^2)u. \end{cases}$$

Первое пропорциональное ε слагаемое суть малое консервативное, откуда и следует утверждение.

В отличие от консервативного случая, сепаратрисы седла $O(0, 0)$ определяют границы областей притяжения аттракторов. Понятие транспорта здесь можно мыслить себе следующим образом. При транзиторном сдвиге возможна смена аттрактора: $O^\pm \rightarrow \tilde{L}$, т.е. если при отсутствии транзиторного сдвига

устанавливается стационарный режим, который соответствует состоянию равновесия O^\pm , то при наличии транзиторного сдвига может устанавливаться автоколебательный режим, который отвечает устойчивому предельному циклу будущего векторного поля. С точки зрения описания колебаний панели, такая смена режима приводит к их дестабилизации. Также возможна смена режимов $L \rightarrow \tilde{O}^\pm$, что соответствует, обратно, стабилизации колебаний. Мы укажем области начальных условий, которые соответствуют смене установившегося режима.

Рассмотрим 4 случая, соответствующие всем возможным топологическим структурам фазовых портретов системы (1.2).

Случай 1: $p < p_*$. В этом случае устойчивые предельные циклы в системах (1.2), (1.6) отсутствуют и устанавливается стационарный режим, отвечающий устойчивому состоянию равновесия \tilde{O}^+ или \tilde{O}^- (пластина прогнута либо вверх, либо вниз).

Более сложная ситуация имеет место, когда в системе (1.2) существуют устойчивые предельные циклы.

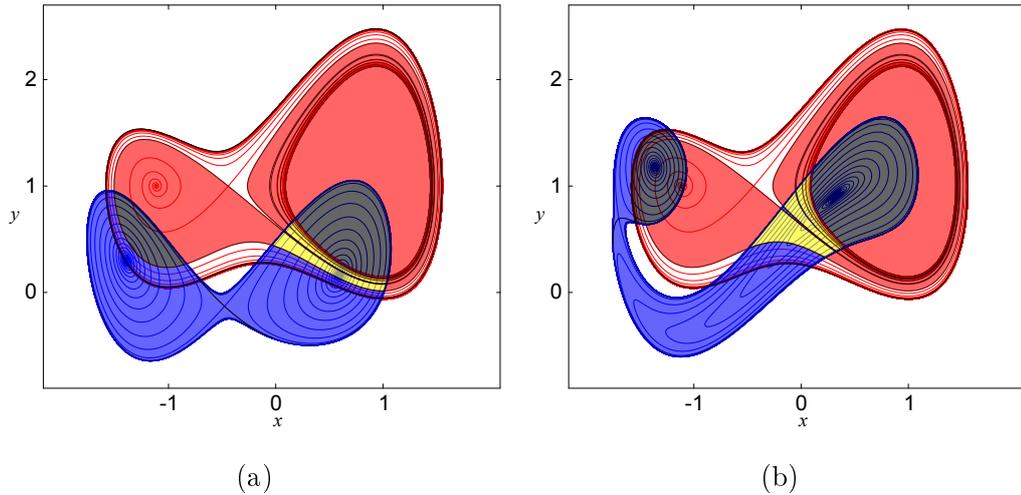


Рисунок 1.5 — Образ сепаратрис прошлого векторного поля и сепаратрисы будущего векторного поля ($p = 0.79, \varepsilon = 0.6$) при $\tau = 1$ (a) и $\tau = 3$ (b).

Случай 2: $p \in (p_*, 0.8)$. Для определенности положим $p = 0.79$. У системы (1.6) существуют два устойчивых состояния равновесия типа фокус \tilde{O}^\pm и одно седло \tilde{O} . При малых ε существуют два предельных цикла вне невозмущенной "восьмерки" (внешний - устойчивый) и один неустойчивый предельный цикл, охватывающий состояние равновесия \tilde{O}^+ . При увеличении ε внутренний неустойчивый предельный цикл вне восьмерки разрушается. Это разрушение

связано с бифуркацией возникновения верхней большой петли сепаратрисы³. Именно этот случай мы и рассмотрим далее.

Используя компьютер, найдем $T(W^u)$ и $T(W^s)$ (W^u - неустойчивое многообразие седла O системы (1.2), W^s - устойчивое). Результат представлен на Рисунке 1.5. Через D обозначим область притяжения фокусов O^\pm системы (1.2), определяющей прошлое векторное поле. Через G обозначим область притяжения "большого" предельного цикла \tilde{L} будущего векторного поля. Синим цветом выделена область $G \cap T(D)$. Тогда мы можем ввести меру смены режима (дестабилизации) $O^\pm \rightarrow \tilde{L}$ (вероятность для наугад выбранной начальной точки из области притяжения фокусов O^\pm сменить динамический режим) определяется величиной

$$P = \frac{S(T^{-1}(G \cap T(D)))}{S(D)},$$

где через S обозначены площади соответствующих областей. Нижняя и верхняя желтые области на Рисунке 1.5 соответствуют траекториям, для которых $O^+ \rightarrow \tilde{O}^-$. Щель между желтыми областями определяет траектории, для которых $O^+ \rightarrow \tilde{L}$.

Можно определить меру смены режима $L \rightarrow \tilde{O}^\pm$ (стабилизация), однако здесь возникает затруднение, связанное с тем, что бассейн притяжения ПЦ прошлого векторного поля является некомпактным множеством. В данном случае требуются некие дополнительные ограничения на множество допустимых начальных условий, например, может быть известно, что начальная точка находится "внутри" устойчивого ПЦ.

Случай 3: $0.8 < p < 1$. Положим для определенности $p = 0.9$. В этом случае в системе и до, и после перехода существуют три аттрактора: два устойчивых состояния равновесия и устойчивый предельный цикл. Области притяжения состояний равновесия отделены от области притяжения ПЦ неустойчивым предельным циклом. На Рисунке 1.6 показан (красным цветом) фазовый портрет системы (1.6). Выделены черным цветом два неустойчивых предельных цикла внутри "восьмерки" и внешний устойчивый предельный цикл.

Через D^\pm обозначим области притяжения фокусов $O^\pm(\pm 1, 0)$ системы, определяемой прошлым векторным полем. Через D_τ^\pm обозначим образы областей D^\pm при действии отображения T : $D_\tau^\pm = T(D^\pm)$. Области D_τ^\pm разбиваются

³Бифуркации подобных петель сепаратрисы рассмотрены в [73].

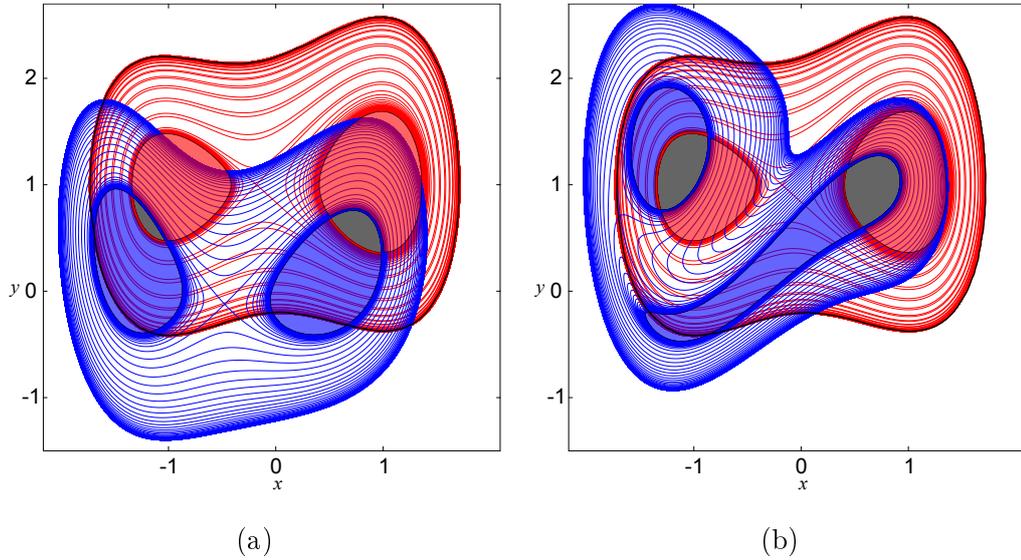


Рисунок 1.6 — Образ сепаратрис прошлого векторного поля и сепаратрисы будущего векторного поля ($p = 0.9, \varepsilon = 0.2$) при $\tau = 1$ (a) и $\tau = 3$ (b).

неустойчивыми предельными циклами будущего векторного поля на две подобласти каждая $D_k^\pm, k = 1, 2$. Траектории с начальными точками из прообразов областей D_1^\pm , обозначенных серым цветом, стремятся при $t \rightarrow \infty$ к устойчивым состояниям равновесия \tilde{O}^\pm . Для начальных точек из прообразов областей D_2^\pm , обозначенных синим цветом, траектории стремятся к \tilde{L} (смена установившегося режима, соответствующая дестабилизации панели). Итак, если начальная точка выбрана до перехода в области D^\pm притяжения фокусов O^\pm , то для соответствующей ей траектории может устанавливаться как стационарный режим, так и периодический.

Для численной характеристики возможной смены режима может использоваться следующая величина

$$P_1^\pm = \frac{S(T^{-1}(D_1^\pm))}{S(D^\pm)},$$

которая характеризует вероятность перехода $O^\pm \rightarrow \tilde{O}^\pm$, т.е. установления для случайно выбранной начальной точки из D^\pm стационарного режима \tilde{O}^\pm . Здесь через $S(\cdot)$ обозначены площади соответствующих областей. Аналогично, введем величину, характеризующую возможность перехода $O^\pm \rightarrow \tilde{L}$

$$P_2^\pm = \frac{S(T^{-1}(D_2^\pm))}{S(D^\pm)}.$$

Если же начальная точка выбрана до перехода в области притяжения устойчивого предельного цикла, то для соответствующей ей траектории может произойти смена установившегося режима.

Область притяжения устойчивых фокусов разбивается образом устойчивого ПЦ прошлого векторного поля. Обозначим через D_0^\pm части областей притяжения состояний равновесия \tilde{O}^\pm соответственно, расположенные "внутри" данного образа, а через D_L образ области притяжения устойчивого цикла L изнутри. Области D_0^\pm определяют переход $L \rightarrow \tilde{O}^\pm$. Используя площади соответствующих областей, найдем вероятность перехода $L \rightarrow \tilde{O}^\pm$:

$$P_3^\pm = \frac{S(T^{-1}(D_0^\pm))}{S(D_L)}.$$

Методика вычисления криволинейных площадей приведена в [31].

Случай 4: $p > 1$. В этом случае единственным аттрактором является устойчивый предельный цикл, охватывающий все состояния равновесия. Транзиторный сдвиг существенной роли не играет.

1.4 Транзиторный сдвиг в уравнениях маятникового типа

В этой части диссертации мы рассматриваем уравнения маятникового типа, которые являются неавтономными лишь на некотором отрезке времени. Именно, рассмотрим две задачи о транзиторном сдвиге: 1) в уравнении Джозефсона; 2) в уравнении, описывающем колебания груза, подвешенного на тросах.

Автономное уравнение Джозефсона имеет вид [3; 35]

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[a + (b + c \cos x)\dot{x}],$$

где ε, a, b, c – некоторые параметры, переменная x – разность фаз волновых функций по каждую из сторон джозефсоновского перехода⁴. Здесь мы предполагаем, что параметр ε является малым. Задачи фазовой синхронизации частоты также приводят к исследованию подобных уравнений (см., например, [103]). Преобразуем уравнение при $c \neq 0$ к виду

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[\alpha + (\beta + \cos x)\dot{x}],$$

⁴В [3] приводится также неавтономное (периодическое по времени) уравнение.

где $\varepsilon = \varepsilon/c$, $\alpha = a/c$, $\beta = b/c$. Фазовым пространством уравнения является цилиндр $(x \bmod 2\pi, \dot{x} \in R^1)$.

Колебания груза прямоугольной формы, подвешенного на тросах [16], описываются уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon(\beta + \cos nx)\dot{x}, \quad n \in N.$$

Параметр β характеризует асимметрию груза. В [16] изучается случай $\beta = 0$ и при исследовании уравнения использовалось гармоническое приближение для невозмущенного решения.

Если в работах [3]-[88] рассматриваются автономные или периодические по времени модели, то в диссертации мы рассматриваем неавтономное уравнение с неперIODической "транзиторной" зависимостью от времени:

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(\beta + \cos nx)\dot{x} + \alpha f(t)], \quad (1.7)$$

где $\alpha > 0$, $f(t)$ определена выше и на промежутке неавтономности является кубическим сплайном. Такой вид зависимости от времени соответствует появлению постоянной составляющей в переменном токе через джозевсоновский контакт. Для задачи о колебаниях тела на тросах транзиторный сдвиг соответствует появлению некоторой внешней силы, которая нарастает в течении некоторого отрезка времени, а затем сохраняет постоянное значение. Прошрое векторное поле (при $t < 0$) определяется уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(\beta + \cos nx)\dot{x}], \quad (1.8)$$

а будущее векторное поле (для $t > \tau > 0$) – уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[\alpha + (\beta + \cos nx)\dot{x}]. \quad (1.9)$$

1.4.1 Фазовые портреты

Здесь мы изучим фазовые портреты автономных прошлого и будущего векторных полей, которые определяются (1.8), (1.9). Ограничимся рассмотрением случаев $n = 1$ и $n = 2$. Прежде напомним, что уравнение $\ddot{x} + \sin x = 0$ имеет интеграл энергии

$$\dot{x}^2/2 - \cos x = h,$$

который определяет фазовые кривые на цилиндре $(x \bmod 2\pi, \dot{x})$. При $h \in (-1, 1)$ фазовые кривые не охватывают цилиндр (область колебательных движений), а при $h > 1$ – охватывают цилиндр (область вращательных движений).

Прошрое векторное поле задается уравнением (1.8). Это уравнение при малых ε было исследовано в [86] (подробнее см. в [88]). При $n = 1$ эта задача была также рассмотрена в [35].

При $\beta = \beta_* = (-1)^n / (4n^2 - 1)$ у уравнения (1.8) в области колебательных движений существует $n - 1$ грубых предельных циклов (ПЦ) и один цикл на границе колебательной и вращательной областей ($h = 1$) [88].

Приведем разбиение прямой параметра β на области с различной топологией фазового пространства, если $n = 1$ или $n = 2$. При $n = 1$ и $\beta < -1$ единственным глобально устойчивым аттрактором является фокус, предельных циклов нет. При $\beta = -1$ фокус становится негрубым и от него рождается устойчивый предельный цикл (бифуркация Андронова-Хопфа), который при $\beta = -1/3$ влипают в сепаратрисный контур. При этом в области вращательных движений ПЦ отсутствуют. При $-1/3 < \beta < 0$ существуют два устойчивых симметричных (на верхнем и нижнем полуцилиндрах) предельных цикла в области вращательных движений, которые при $\beta = 0$ уходят на бесконечность. При $\beta > 0$ предельные циклы у прошлого векторного поля отсутствуют [88]. Таким образом, прямая параметра β при $n = 1$ разбивается бифуркационными значениями $\beta_1 = -1, \beta_2 = \beta_* = -1/3, \beta_3 = 0$ на 4 интервала. Фазовые портреты для каждого из этих интервалов показаны на Рисунке 1.7 при $\varepsilon = 0.2$, где красным цветом отмечены предельные циклы.

Обратимся к случаю $n = 2$. В этом случае прямая параметра β разбивается бифуркационными значениями $\beta_1 = -1, \beta_2 = 0, \beta_3 = \beta_* = 1/15, \beta_4 \approx 0.091$ на 5 интервалов. Если $\beta < -1$, то, как и при $n = 1$, у прошлого векторного поля нет предельных циклов, а единственным притягивающим множеством является фокус. При $\beta = -1$ состояние равновесия $(0, 0)$ является негрубым фокусом, от которого при дальнейшем увеличении β рождается устойчивый предельный цикл (бифуркация Андронова-Хопфа). При $\beta = 0$ из бесконечности рождаются два неустойчивых симметричных ПЦ в области вращательных движений. При $\beta = 1/15 \approx 0.0667$ они влипают в сепаратрисы, т.е. существует один устойчивый предельный цикл в области колебательных движений и неустойчивый сепаратрисный контур [88]. При $\beta = \beta_4$ образуется двукратный ПЦ в области колебательных движений, который исчезает при дальнейшем увеличении

β . При $\beta > \beta_4$ предельные циклы у прошлого векторного поля отсутствуют. Фазовые портреты на каждом из 5 интервалов показаны на Рисунке 1.8, где красным цветом показаны устойчивый ПЦ, а синим – неустойчивые.

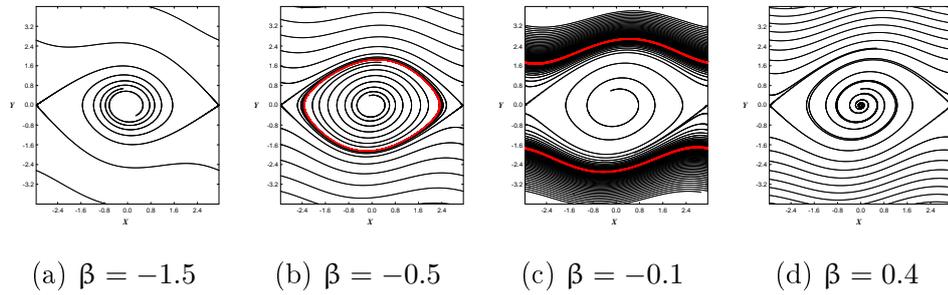


Рисунок 1.7 — Фазовые портреты для прошлого векторного поля при $n = 1$.

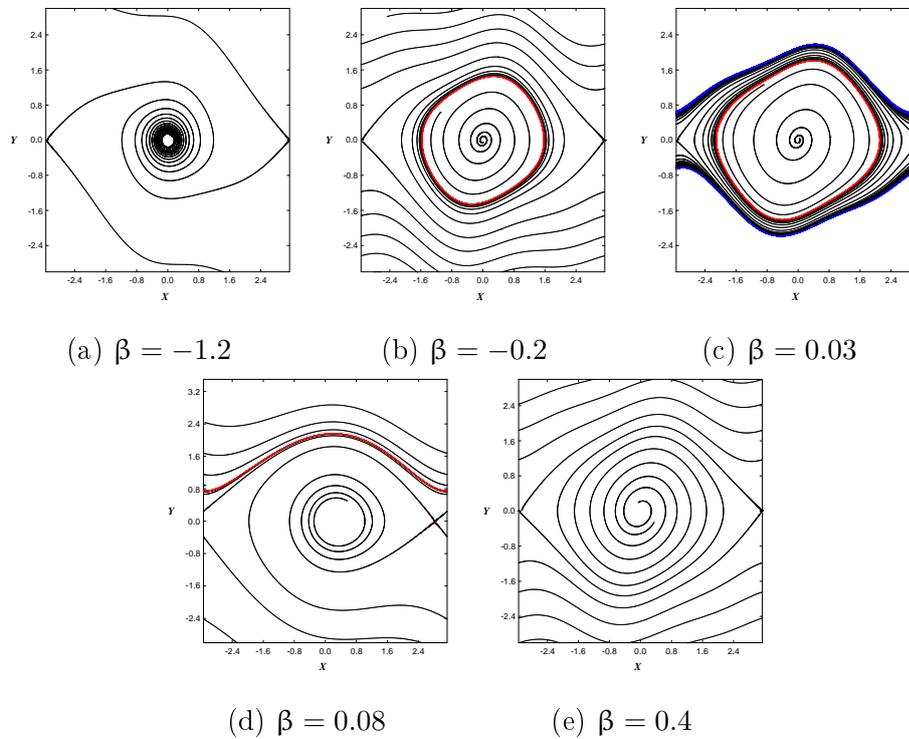


Рисунок 1.8 — Фазовые портреты для прошлого векторного поля при $n = 2$.

Обратимся теперь к изучению автономного будущего векторного поля F , которое описывается уравнением (1.9). Прежде всего отметим, что в уравнении (1.9) замена параметра $\alpha \rightarrow -\alpha$ равносильна замене $x \rightarrow -x, t \rightarrow -t$. Поэтому разбиение плоскости параметров на области с различной структурой фазового пространства симметрично относительно оси β .

Дальнейшее исследование уравнения (1.9) приводит к изучению порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина [88]

$$B_0(h) = \alpha A(h) + \beta F_0(h) + F_n(h),$$

где $A(h)$ определяется постоянной составляющей в возмущении, $F_0(h)$ определяется членом \dot{x} , а $F_n(h)$ – членом $\dot{x} \cos nx$. Простые нули порождающей функции $B_0(h)$ определяют грубые предельные циклы в уравнении (1.9). Ограничимся случаями $n = 1$ и $n = 2$. Имеем

$$A(h) = \begin{cases} 0, & h \in (-1,1); \\ \pm 2\pi, & h > 1; \end{cases}$$

$$F_0(h) = \begin{cases} 16[(\rho - 1)\mathbf{K} + \mathbf{E}], & h \in (-1,1); \\ \frac{8}{\sqrt{\rho}}\mathbf{E}, & h > 1; \end{cases}$$

$$F_1(h) = \begin{cases} \frac{16}{3}[(1 - \rho)\mathbf{K} + (2\rho - 1)\mathbf{E}], & h \in (-1,1); \\ \frac{8}{3\rho\sqrt{\rho}}[-2(1 - \rho)\mathbf{K} + (2 - \rho)\mathbf{E}], & h > 1; \end{cases}$$

$$F_2(h) = \begin{cases} \frac{16}{15}[(1 - \rho)(1 - 8\rho)\mathbf{K} + (-16\rho^2 + 16\rho - 1)\mathbf{E}], & h \in (-1,1); \\ \frac{8}{15\rho^2\sqrt{\rho}}[8(1 - \rho)(2 - \rho)\mathbf{K} + (-\rho^2 + 16\rho - 16)\mathbf{E}], & h > 1; \end{cases}$$

где $\rho = k^2$, $k = \sqrt{(1+h)/2}$ при $h \in (-1,1)$ и $k = \sqrt{2/(1+h)}$ при $h > 1$ – модуль полных эллиптических интегралов \mathbf{K}, \mathbf{E} .

Фазовые портреты уравнения (1.9) при $n = 1$ были построены в работе [35]. Однако, уравнение в [35] иначе зависит от параметров. Поэтому мы приводим на Рисунке 1.9 разбиение плоскости параметров (β, α) , а на Рисунке 1.11(а) – качественные фазовые портреты для нашего случая.

При $n = 2$ уравнение (1.9), определяющее будущее векторное поле, ранее не было исследовано. Поэтому исследуем порождающую функцию

$$B_0(h) = \alpha A(h) + \beta F_0(h) + F_2(h).$$

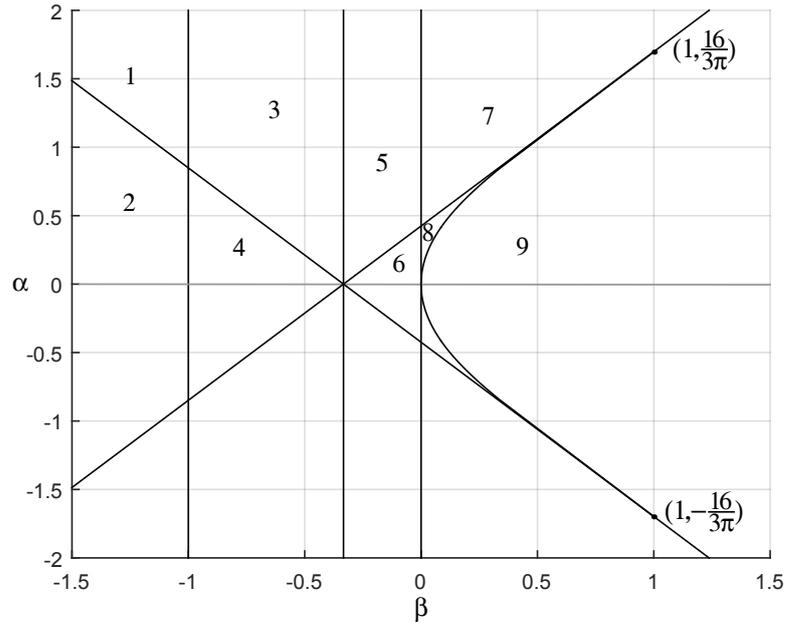


Рисунок 1.9 — Разбиение плоскости параметров (β, α) на области с разными фазовыми портретами уравнения (1.9) при $n = 1$.

При $\alpha \neq 0$ основные бифуркации можно установить, используя приведенные выше выражения.

1) Из условия $\lim_{h \rightarrow 1+0} B_0(h) = 0$ находим бифуркационные прямые

$$\alpha = \pm(4/\pi)(1/15 - \beta).$$

существования сепаратрисного контура.

2) Из системы $B_0(\rho) = 0, B'_0(\rho) = 0$ находим линию двойных циклов в области вращательных движений.

3) Так как порождающая функция $B_0(h)$ в области колебательных движений не зависит от α , а в области вращательных движение $A(h)$ – постоянная, то бифуркационным значениям $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ параметра β для прошлого векторного поля будут соответствовать вертикальные прямые в плоскости (β, α) .

На Рисунке 1.10 приведено разбиение плоскости параметров (β, α) на области с разной топологией фазовых портретов для будущего векторного поля при $n = 2$, а на 1.11(b) – качественные фазовые портреты.

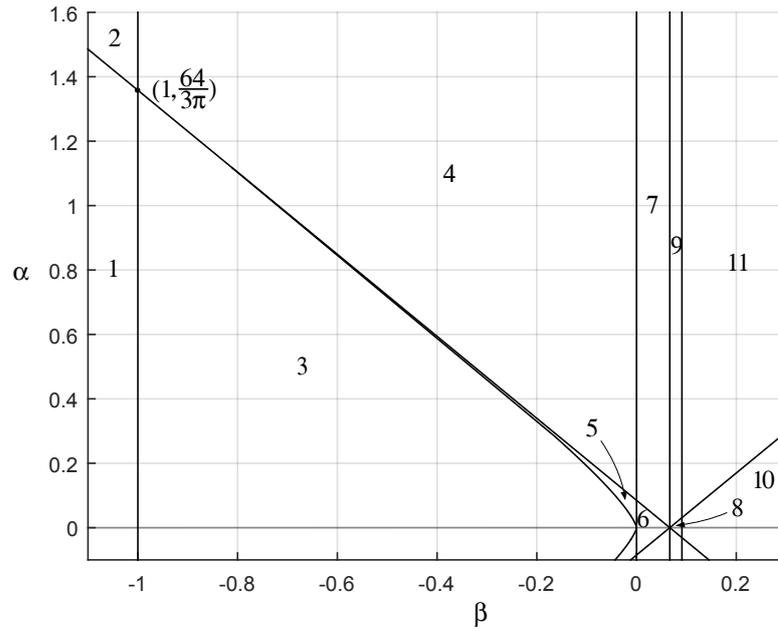


Рисунок 1.10 — Разбиение плоскости параметров (β, α) на области с разными фазовыми портретами уравнения (1.9) при $n = 2$.

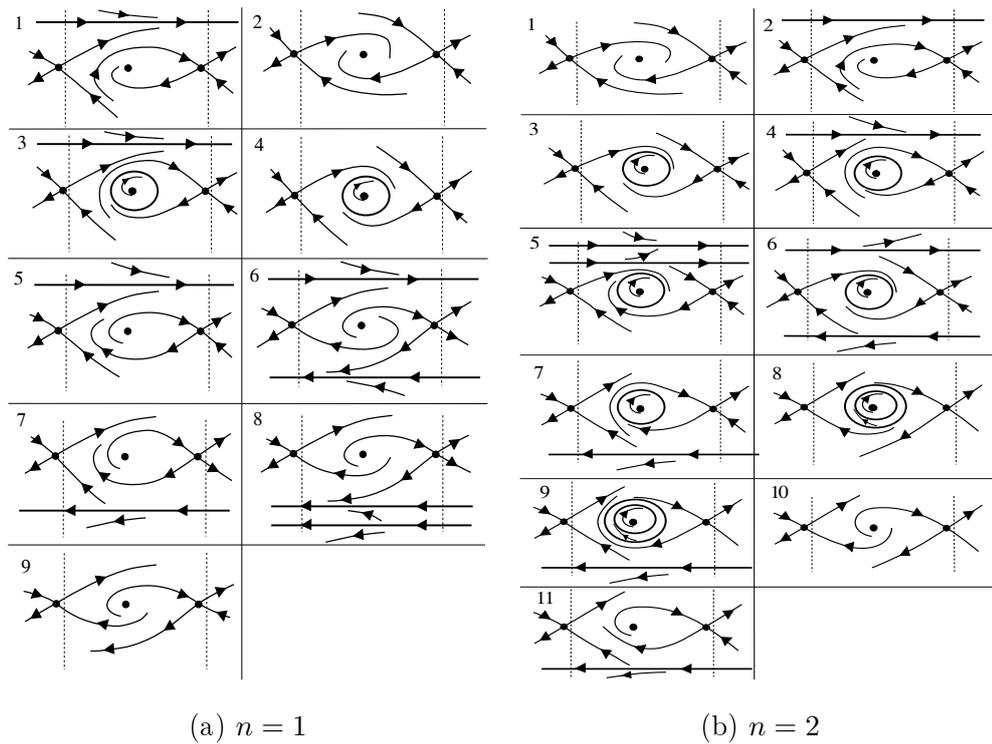


Рисунок 1.11 — Качественные фазовые портреты уравнения (1.9) при различных значениях параметров.

1.4.2 Влияние транзиторного сдвига на поведение решений

Здесь мы рассмотрим вопрос о влиянии транзиторного сдвига на поведение решений. До сдвига поведение решений определяется автономным прошлым векторным полем, после сдвига – будущим. Как отмечалось выше, транзиторный сдвиг может привести к смене динамического режима для траекторий. Это означает, что траектории, находившиеся в области притяжения определенного аттрактора прошлого векторного поля, и стремившиеся к нему при $t < 0$, после сдвига могут попадать в области притяжения аттракторов будущего векторного поля иного типа.

Начнем с более простого консервативного случая, когда транзиторная система описывается уравнением

$$\ddot{x} + \sin x = \gamma f(t), \quad (1.10)$$

где $f(t)$ – функция перехода, которая на промежутке $0 < t < \tau$ суть кубический сплайн, $\gamma = \varepsilon a > 0$ – величина сдвига. Прошрое векторное поле определяется уравнением $\ddot{x} + \sin x = 0$. Такое неавтономное возмущение можно трактовать как неперiodически нарастающее до определенного уровня внешнее воздействие. Отметим, что в связи с рассмотрением задачи о захвате частиц резонансным ускорителем, в работе [31] рассматривался транзиторный сдвиг по скорости для аналогичного уравнения.

Естественно рассмотреть ограниченную величину сдвига для того, чтобы уравнение (1.10) при $t > \tau$ имело состояния равновесия. Поэтому полагаем $\gamma < 1$. На рисунках (1.12) синим закрашен образ компактной области D , соот-

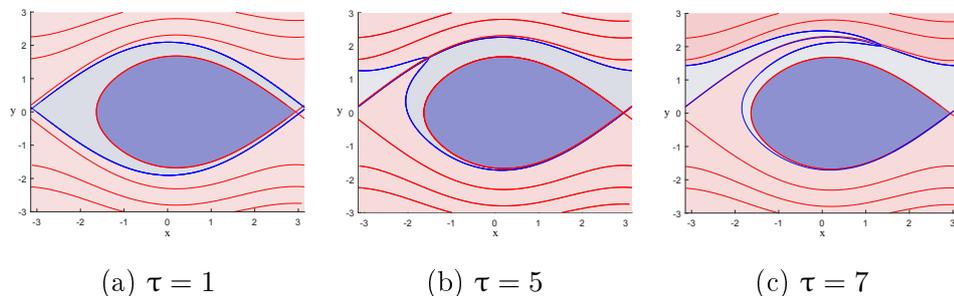


Рисунок 1.12 — Образы сепаратрис при отображении перехода при $\gamma = 0.2$

ветствующей колебательным движениям, не охватывающим фазовый цилиндр. Обозначим этот образ через D_τ . D_τ разбивается сепаратрисой будущего векторного поля на две подобласти D_τ^1 и D_τ^2 , закрашенных соответственно темно-синим

и светло-синим цветом. Траектории из области D_τ^1 после перехода также совершают колебательные движения, не охватывающие фазовый цилиндр (т.е. сохраняют качественное поведение), а траектории из области D_τ^2 после перехода выходят в область инфинитных движений.

В качестве величины (меры) транспорта от колебаний к вращениям можно выбрать отношение (в силу консервативности)

$$R = \frac{S(D_\tau^2)}{S(D_\tau^1)},$$

где S означает площадь соответствующих областей. Траектории, соответствующие областям, закрашенным красным цветом, и до, и после перехода совершают вращательные движения, охватывающие цилиндр. Отличие в том, что после перехода траектории "уходят" по цилиндру на бесконечность. Для вычисления указанного отношения можно использовать формулу из [31], опирающуюся на знание гетероклинических траекторий.

Перейдем к рассмотрению неконсервативного случая, т.е. к исследованию уравнения (1.7). Начнем со случая $n = 1$.

Как мы установили, для прошлого векторного поля возможны 4 грубые топологические структуры.

1. Пусть $\beta < -1$. В зависимости от величины α будущее векторное поле может обладать структурой, соответствующей области 1 или области 2 пространства параметров (Рисунок 1.9). Сдвиг, при котором точка (β, α) попадает в область 2, не приводит к смене режима (т.к. и для прошлого, и для будущего векторного поля существует единственное глобально устойчивое состояние равновесия), а сдвиг, отвечающий переходу в область 1 на бифуркационной диаграмме, приводит к смене режима для части траекторий: состояние равновесия \rightarrow вращательный режим, т.е. траектории, находившиеся до перехода в области притяжения состояния равновесия, после перехода могут попасть на устойчивый ПЦ во вращательной области. В этом случае только сепаратрисы будущего векторного поля разделяют области, определяющие такую смену режима. Для определения границ множеств начальных условий, соответствующих этим областям, нужно найти прообразы указанных сепаратрис прошлого векторного поля. На Рисунке 1.13(a) красным цветом показаны сепаратрисы и предельный цикл будущего векторного поля, а синим - образы сепаратрис прошлого векторного поля под действием отображения перехода. Голубым цветом закрашены области, которым соответствуют траектории, стремящиеся к

состоянию равновесия (для таких траекторий не происходит смены режима). Розовым закрашены области, которым соответствуют траектории, после перехода стремящиеся к устойчивому ПЦ в области вращений (для этих траекторий происходит смена режима под действием транзитного сдвига).

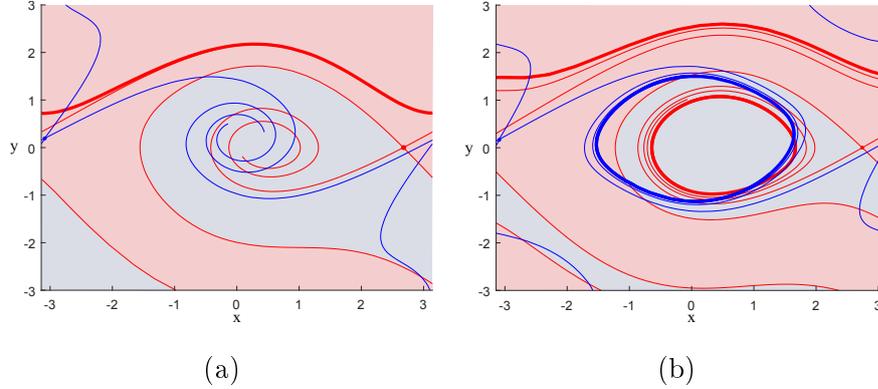


Рисунок 1.13 — (a) $\beta = -1.2, \alpha = 1.5, \varepsilon = 0.3, \tau = 1$; (b) $\beta = -0.75, \alpha = 1.3, \varepsilon = 0.3, \tau = 1$.

2. Пусть $-1 < \beta < -1/3$. В зависимости от величины α будущее векторное поле может обладать структурой, соответствующей области 3 или области 4 плоскости параметров. Сдвиг, при котором точка (β, α) попадает в область 4, не приводит к смене режима (устанавливается автоколебательный режим), а сдвиг, отвечающий переходу из области 4 в область 3 на бифуркационной диаграмме, приводит к смене режима для части траекторий: устойчивый ПЦ в колебательной области \rightarrow устойчивый ПЦ в области вращений. Поскольку единственным глобально устойчивым аттрактором для прошлого векторного поля является устойчивый ПЦ в колебательной области, то, как и при $\beta < -1$, области, определяющие смену режима разделяются сепаратрисами будущего векторного поля и для определения границ множеств начальных условий, соответствующих смене режиме, нужно найти их прообразы при отображении перехода. На Рисунке 1.13(b) показан образ предельного цикла и сепаратрис прошлого векторного поля (синий) и сепаратрисы и предельный цикл будущего векторного поля (красный). Голубым цветом закрашены области, которым соответствуют траектории, стремящиеся к ПЦ в области колебательных движений. Розовым отмечены области, которым соответствуют траектории, стремящиеся после перехода к устойчивому ПЦ во вращательной области, т.е. для этих траекторий произошла смена режима под действием транзитного сдвига.

3. Пусть $-1/3 < \beta < 0$. В зависимости от величины α будущее векторное поле может обладать структурой, соответствующей области 5 или области 6 пространства параметров. Если точка (β, α) принадлежит области 5, то устанавливается периодическое решение во вращательной области на верхнем полуцилиндре ($\dot{x} > 0$) (Рисунок 1.14(a)). В этом случае образ области притяжения ПЦ на нижнем полуцилиндре (на Рисунке 1.14(a) закрашена розовым цветом) соответствует смене нижнего ПЦ на верхний (вращение в обратную сторону). Области начальных условий соответствующих смене направления вращения (смены динамического режима здесь не происходит) определяются сепаратрисами прошлого векторного поля и, следовательно, не зависят от отображения перехода (вида неавтономности).

Если же точка (β, α) принадлежит области 6, то у будущего векторного поля существуют устойчивые (несимметричные) ПЦ на верхнем и нижнем полуцилиндрах (Рисунок 1.14(b)).

В этом случае, траектории могут менять притягивающее множество: ПЦ на нижнем полуцилиндре \rightarrow ПЦ на верхнем полуцилиндре и наоборот (на Рисунке 1.14(b) розовым закрашены области, соответствующие смене аттрактора).

В данном случае транзиторный сдвиг не приводит к смене режима. Для траекторий устанавливается вращательный режим (как и для автономного уравнения (1.8) при $-1/3 < \beta < 0$). Однако, границы областей начальных условий, соответствующих смене направления вращения, составлены как из сепаратрис седла прошлого векторного поля, так и из прообразов сепаратрис седла будущего векторного поля.

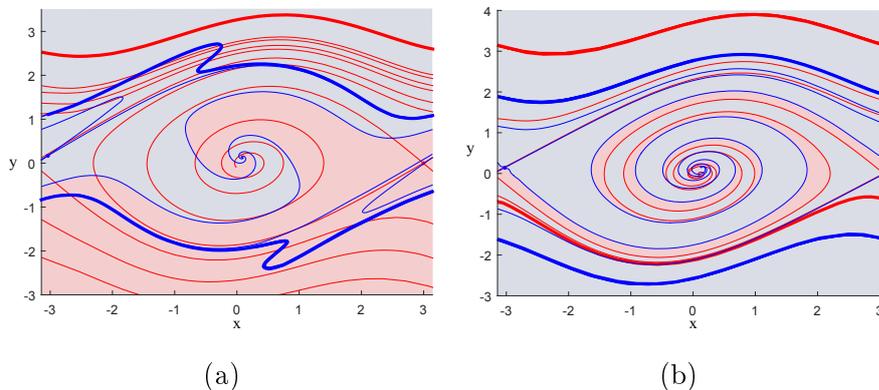


Рисунок 1.14 — (a) $\beta = -0.1, \alpha = 0.5, \varepsilon = 0.3, \tau = 3$; (b) $\beta = -0.1, \alpha = 0.2, \varepsilon = 0.4, \tau = 3$.

4. Пусть $\beta > 0$. У системы, определяемой прошлым векторным полем нет притягивающих множеств, поэтому поведение траекторий полностью определяется будущим векторным полем. Для $\beta < 1$ соответствующая точка может попасть в области 7, 8, 9. Для (β, α) из области 9 и 7 отсутствуют устойчивые режимы. В этом случае транзиторный сдвиг не приводит к смене режима. Наконец, при (β, α) из области 8 транзиторный сдвиг приводит к появлению устойчивого ПЦ во вращательной области на нижнем полуцилиндре и все ограниченные траектории при $t \rightarrow \infty$ стремятся к нему. Границы областей, соответствующих смене режима, определяются в этом случае инвариантными множествами (ПЦ и сепаратрисами седла) будущего векторного поля.

Таким образом, справедливо

Утверждение. 2. *Границы областей, при переходе в которые (под действием отображения перехода) имеет место смена динамического режима, определяются только инвариантными множествами (сепаратрисами и предельными циклами) будущего векторного поля и не зависят от образов инвариантных множеств прошлого векторного поля. Для нахождения границ областей начальных условий, соответствующих указанной смене, нужно найти прообразы сепаратрис и ПЦ будущего векторного поля при отображении перехода.*

Сейчас рассмотрим случай $n = 2$.

Как мы установили, для прошлого векторного поля возможны 5 грубых топологических структур (Рисунок 1.8).

1. Пусть $\beta < -1$. Этот случай аналогичен случаю $\beta < -1$ при $n = 1$. Если (β, α) принадлежит области 2, то может происходить смена режима: устойчивое состояние равновесия $O(0,0) \rightarrow$ устойчивый ПЦ на верхнем полуцилиндре. Области начальных условий, определяющие такую смену, разделяются прообразами сепаратрис будущего поля.

2. Пусть $-1 < \beta < 0$. В этом случае точка (α, β) может принадлежать областям 3, 4 или 5 плоскости параметров. Поскольку у прошлого векторного поля имеется единственный глобально устойчивый предельный цикл в области колебательных движений, то, также как при $n = 1$, области начальных условий единственной возможной смены режима: ПЦ в колебательной области \rightarrow ПЦ во вращательной области (транспорт от колебаний к вращениям) определяются

прообразами инвариантных множества будущего векторного поля: прообразом ПЦ в случае области 5 и сепаратрис в случае области 6.

3. Пусть $0 < \beta < 1/15$. У прошлого векторного поля существует единственный устойчивый ПЦ в колебательной области и два симметричных неустойчивых ПЦ во вращательной области. Для будущего векторного поля возможны структуры фазового пространства, соответствующие областям 6 и 7 плоскости (β, α) . Единственным аттрактором при $t > \tau$ является ПЦ в колебательной области, область притяжения которого определяется инвариантными множествами (сепаратрисами и предельными циклами) будущего векторного поля (см. Рисунок 1.11(b), случай 6, 7).

В этом случае траектории могут менять качественное поведение. Пусть, например, (β, α) принадлежит области 7 (Рисунок 1.15).

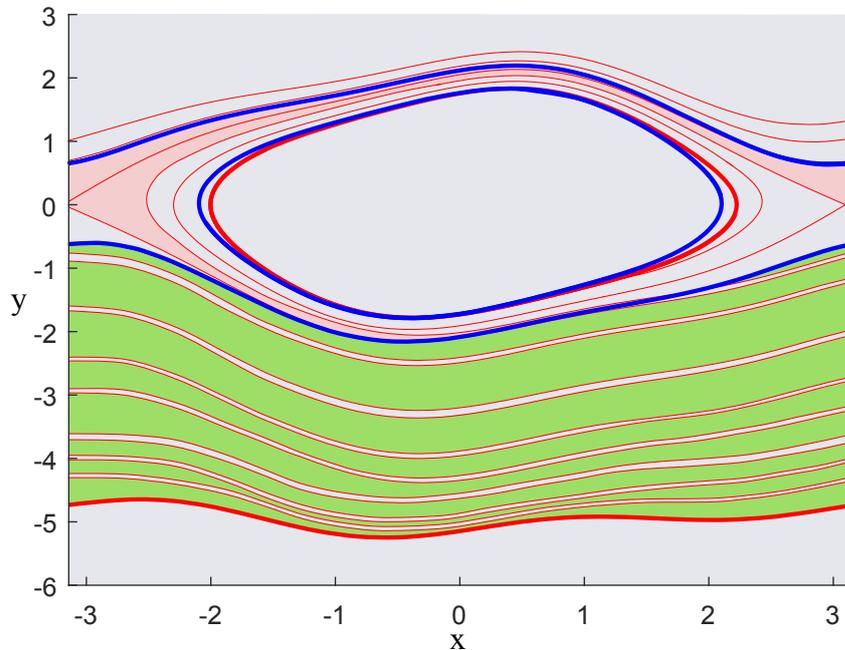


Рисунок 1.15 — $\beta = 0.03, \alpha = 0.15, \varepsilon = 0.3, \tau = 1$.

Часть траекторий, при $t < 0$ стремившихся к ПЦ в колебательной области, при $t > \tau$ уходят на бесконечность (розовые области на Рисунок 1.15). Может быть и иная ситуация: часть траекторий, при $t < 0$ находившихся в "области притяжения бесконечности", при $t > \tau$ попадает в область притяжения устойчивого цикла в колебательной области (зеленый цвет на Рисунок. 1.15).

Голубой цвет на Рисунок 1.15 соответствует областям, при переходе в которые траектории не меняют качественного поведения.

Здесь есть существенное отличие от случая $n = 1$: границы областей, соответствующих переходу к колебательному режиму или, наоборот, переходу к

инфинитным движениям, определяются инвариантными многообразиями как будущего, так и прошлого векторного поля (и, очевидно, отображением перехода, которое зависит от времени перехода τ и вида функции $f(t)$).

4. Пусть $1/15 < \beta < \beta_4$. У прошлого векторного поля существуют два ПЦ в колебательной области, внешний – неустойчивый, т.е. часть траекторий с ростом времени стремится к циклу, часть к бесконечности. При $t > \tau$ единственным аттрактором является ПЦ в колебательной области. При этом, как и в случае 3, часть траекторий, стремившихся при $t < 0$ к ПЦ, могут при $t > \tau$ уходить на бесконечность. И, наоборот, часть траектории, находившихся в области притяжения бесконечности, могут перейти в область притяжения ПЦ в колебательной области. Границы областей, соответствующих таким сменам режима, определяются особыми траекториями как прошлого, так и будущего векторного поля. В силу компактности бассейна притяжения устойчивого предельного цикла можно определить меру транспорта от колебаний к инфинитным движениям.

5. Пусть $\beta > \beta_4 \approx 0.091$. В этом случае отсутствуют аттракторы и транзиторный сдвиг влияет лишь на характер стремления траекторий к бесконечности.

1.5 Транзиторный сдвиг в системе ФитцХью-Нагумо

Существует большое число математических моделей, описывающих динамику единичного нейрона. Наиболее известными среди них являются модели типа Ходжкина-Хаксли, получившие распространение благодаря адекватности и биологической правдоподобности. Система уравнений Ходжкина-Хаксли [10] для единичного нейрона состоит из четырех нелинейных дифференциальных уравнений, поэтому этот класс моделей неудобен для численного моделирования нейронных сетей, которые состоят из большого числа связанных клеток. Часто рассматривают упрощения модели Ходжкина-Хаксли (см., например, [10]-[13]). Наиболее популярной и распространенной моделью является модель ФитцХью-Нагумо. Модель была предложена Р. ФитцХью [6] в 1961 г. и имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I_{ext}; \\ T\dot{y} = x - by + a. \end{cases} \quad (1.11)$$

В системе (1.11) x суть безразмерная переменная, соответствующая мембранному потенциалу клетки, y – переменная, определяющая ток восстановления, I_{ext} – параметр, определяющий внешнее воздействие (синаптические токи), a, b, T – положительные параметры.

Значения параметров a, b, T определяются внутренней структурой системы. Например, значения, полученные при изучении генерации спайков в аксоне гигантского кальмара, приблизительно равны $a = 0.7$, $b = 0.8$, $T = 1/0.08$ [6], [13].

Перепишем систему (1.11) в более удобном виде с сохранением обозначений.

Сделаем линейную замену $y \rightarrow y + a/b$:

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I; \\ \dot{y} = \varepsilon(x - by); \end{cases} \quad (1.12)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{T}$, $I = I_{ext} - a/b$.

Система (1.12) явно от времени не зависит и, как следствие, описывает установившиеся режимы. Параметры b и ε являются внутренними характеристиками рассматриваемого биологического объекта и изменениями этих

параметров на небольших промежутках времени часто можно пренебречь. Параметр I характеризует внешнее воздействие, и может существенно изменяться, и, тем самым, влиять на поведение решений. Это мотивирует нас рассмотреть неавтономный аналог системы ФитцХью-Нагумо.

$$\begin{cases} \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I(t); \\ \dot{y} = \varepsilon(x - by); \end{cases} \quad (1.13)$$

Предположим, что функция $I(t)$ зависит от t лишь на конечном числе временных промежутков. В частности, можно считать, что $I(t)$ явно зависит от времени на одном промежутке $[0; \tau]$, вне которого функция постоянна. Кроме того, будем предполагать функцию $I(t)$ непрерывной. Конкретный вид $I(t)$ при $t \in [0; \tau]$ зависит от формы внешнего воздействия. Например, $I(t)$ может иметь вид

$$I(t) = I_0(1 - f(t)) + I_1f(t),$$

где $f(t)$ – функция перехода, I_0, I_1 – некоторые постоянные, определяющие начальное и конечное значения внешнего воздействия.

При $t < 0$ уравнения (1.13) описывают прошлое векторное поле G_P на плоскости ($I(t) \equiv I_0, t < 0$), а при $t > \tau$ – будущее векторное поле G_F ($I(t) \equiv I_1, t > \tau$). Нас интересует влияние неавтономности на установление динамики.

Сначала изучим поведение траекторий автономных прошлого и будущего векторных полей при различных значениях параметров. Эти поля описываются системой (1.12) (автономная система ФитцХью-Нагумо). Исследованию (1.12) посвящено много литературы (см., например, [13; 33; 34]), имеются учебные пособия [101]. В данных работах изучается асимптотическое поведение решений системы (1.12) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы построим разбиение плоскости параметров I, b на области с топологически разными фазовыми портретами прошлого и будущего векторных полей при фиксированном ε . Этого не было сделано до сих пор. После этого исследуем неавтономную систему.

1.5.1 Исследование автономной системы

В данном разделе фиксируем значение ε и исследуем поведение системы (1.12) при изменении параметров (b, I) . Заметим, что в системе (1.12) замена $I \rightarrow -I$ равносильна замене $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$. Это приводит к симметрии разбиения плоскости (b, I) на области с различной структурой фазового пространства относительно оси $I = 0$. В дальнейшем будем считать, что $I \geq 0$.

Состояния равновесия (x_0, y_0) системы (1.12) лежат на прямой $x - by = 0$ и координата x_0 определяется из уравнения

$$x^3 + 3\frac{1-b}{b}x - 3I = 0.$$

Если $Q = (\frac{1-b}{b})^3 + \frac{9}{4}I^2 > 0$, то система (1.12) имеет одно состояние равновесия, если $Q < 0$, то три. Переход от одного состояния равновесия к трем происходит через седло-узловую бифуркацию, управляющим параметром в нормальной форме на центральном многообразии является Q .

Матрица линеаризации в окрестности (x_0, y_0) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 - x_0^2 & -1 \\ \varepsilon & -b\varepsilon \end{pmatrix}$$

Тогда характеристическое уравнение для (x_0, y_0) принимает вид

$$\lambda^2 - \delta\lambda + \Delta = 0,$$

где $\delta = \text{tr}(A) = 1 - x_0^2 - b\varepsilon$, $\Delta = \det(A) = \varepsilon(1 - b(1 - x_0^2))$.

Заметим, что в случае одного состояния равновесия $\Delta = \varepsilon/b((1-b)/b + x_0^2) > 0$. Действительно, легко видеть, что Δ может обращаться в нуль только при $Q = 0$. В области $Q > 0$ Δ не меняет знак, и, следовательно, положительно. Таким образом, если система (1.12) имеет одно грубое состояние равновесия, то оно является фокусом (узлом), смена устойчивости которого происходит, когда δ меняет знак (через бифуркацию Андронова-Хопфа). Бифуркация Андронова-Хопфа происходит и в случае трех состояний равновесия в окрестности одного из фокусов.

Необходимые условия бифуркации Андронова-Хопфа определяются соотношениями $\delta = 0, \Delta > 0$.

Вычислим первую ляпуновскую величину. Для этого в исходной системе (??) сделаем линейную замену, перенося исследуемое состояние равновесия (x_0, y_0) в начало координат:

$$\begin{cases} x_{new} = x - x_0; \\ y_{new} = y - y_0. \end{cases}$$

Тогда, после преобразований, получим

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - x_0^2)x - y - x_0x^2 - x^3/3; \\ \dot{y} = \varepsilon x - \varepsilon by. \end{cases} \quad (1.14)$$

Теперь, применяя формулу Баутина [52], имеем после преобразований

$$L_1 = \frac{\pi\varepsilon}{4\Delta^{3/2}}(2b - \varepsilon b^2 - 1);$$

Определим теперь, при каких значениях параметров (b, I) величина L_1 обращается в нуль. Имеем систему

$$1 - x_0^2 = \varepsilon b; \quad (1.15)$$

$$\varepsilon b^2 < 1; \quad (1.16)$$

$$2b - 1 = \varepsilon b^2; \quad (1.17)$$

$$I = \frac{x_0^3}{3} + \frac{1 - b}{b}x_0; \quad (1.18)$$

Условия (1.15), (1.16) – условия сложного фокуса, (1.17) – условие обращения в ноль первой ляпуновской величины, (1.18) – уравнение для координаты состояния равновесия. Из (1.16), (1.17) следует, что $b < 1$. Далее, из (1.17) также следует, что $\varepsilon < 1$. Разрешая (1.17) относительно b в этом предположении, получаем:

$$b_* = \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon}}{\varepsilon};$$

Используя теперь (1.15) и (1.18), исключаем x_0 и находим значение $I_* > 0$:

$$I_* = 4/3(1 - \varepsilon)^{3/4};$$

Вычислим теперь вторую ляпуновскую величину L_2 . Для этого сделаем сначала в системе (1.14) замену

$$x \rightarrow x; y \rightarrow \frac{y - (1 - x_0^2)x}{\sqrt{\Delta}};$$

и произведем нормировку времени $t' = \sqrt{\Delta}t$. Имеем

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - \frac{x_0}{\sqrt{\Delta}}x^2 - \frac{1}{3\sqrt{\Delta}}x^3; \\ \dot{y} = x + \frac{(1-x_0^2)x_0}{\Delta}x^2 + \frac{1-x_0^2}{3\Delta}x^3; \end{cases}$$

Тогда получаем для L_2 следующее выражение

$$L_2 = \frac{\pi}{72\Delta^{5/2}}(-16(1-x_0^2)^2x_0^2 + 3\Delta(1-x_0^2)) = \frac{\pi}{72\Delta^{5/2}}(16(b\varepsilon)^3 - 16(b\varepsilon)^2 + 3\Delta(b\varepsilon)).$$

Подставляя в эту формулу выражения для Δ и b_* получаем

$$L_2(\varepsilon) = \frac{\pi}{72\Delta^{5/2}}(16(1 - \sqrt{1 - \varepsilon})^3 - 16(1 - \sqrt{1 - \varepsilon})^2 + 6\sqrt{1 - \varepsilon}(1 - \sqrt{1 - \varepsilon})^2).$$

Обозначая $1 - \sqrt{1 - \varepsilon} = t, 0 < t < 1$, имеем

$$L_2(t) = \frac{\pi}{72\Delta^{5/2}}(10t^3 - 10t^2) = \frac{10\pi}{72\Delta^{5/2}}(t^2(t - 1)).$$

Отсюда видно, что, при $0 < t < 1$, $L_2 < 0$. Поэтому, при $L_1 = 0$ из сложного фокуса родится не более двух предельных циклов, причем при рождении двух циклов внутренний неустойчивый, а внешний устойчивый.

Таким образом, справедливо

Утверждение. 3. 1) При $\varepsilon \geq 1$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа из сложного фокуса родится единственный устойчивый предельный цикл (первая ляпуновская величина $L_1 \neq 0$).

2) При $0 < \varepsilon < 1$ существуют две точки на плоскости параметров b, I , соответствующие бифуркации Баутина (обобщенной бифуркации Андронова-Хопфа): $(b_*, I_*^\pm) = (\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon}}{\varepsilon}, \pm\frac{4}{3}(1-\varepsilon)^{3/4})$.

Точка Баутина на кривой, соответствующей бифуркации Андронова-Хопфа, является точкой, из которой выходит линия "двойного цикла" (линия, точки которой определяют параметры, при которых в системе есть сложный ПЦ, который при изменении параметров распадается на два грубых, либо исчезает), которую можно построить численно. При $\varepsilon = 1$ кривая вырождается, и исчезает при $\varepsilon > 1$.

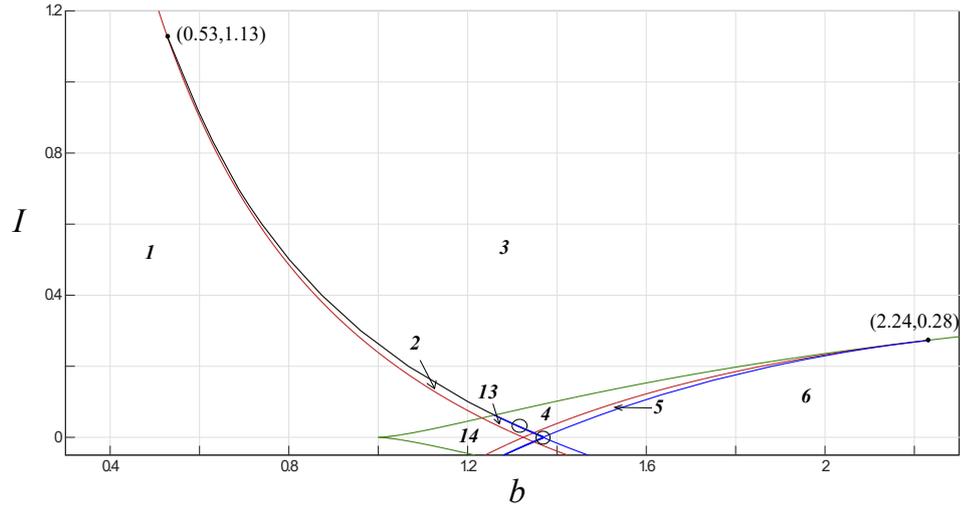


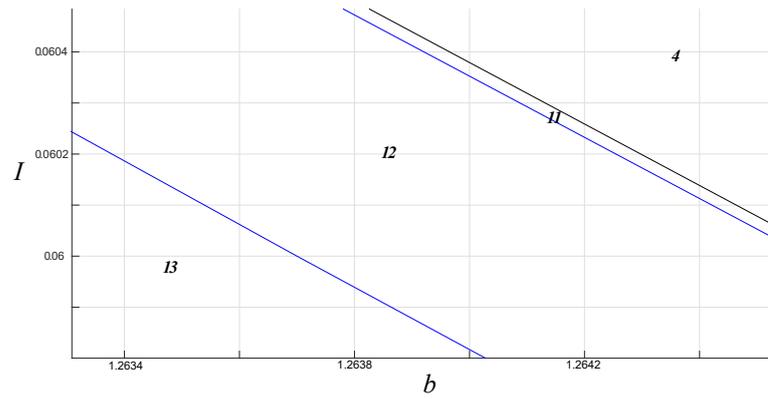
Рисунок 1.16 — Разбиение плоскости параметров (1.12) для $\varepsilon = 0.2$.

Кроме локальных бифуркаций в области $Q < 0$ (т.е. в области параметров, для которых существует три состояния равновесия), могут происходить бифуркации петель сепаратрис седла, при перезамыкании которых рождаются или исчезают предельные циклы. При фиксированном ε линии на плоскости параметров, соответствующие петлям сепаратрис могут быть построены численно с высокой точностью.

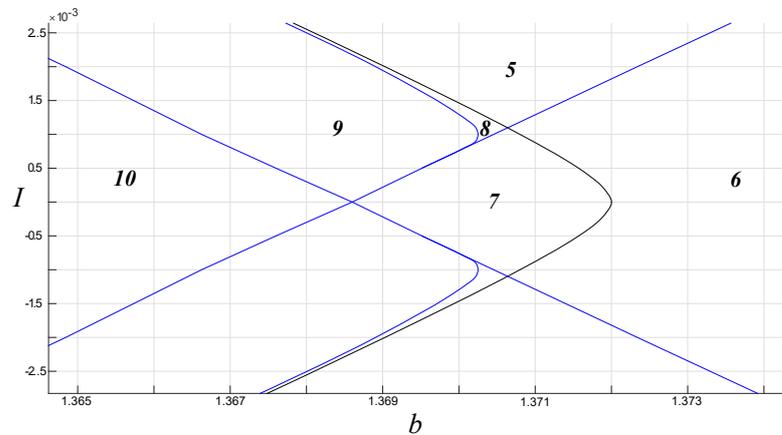
В качестве примера на Рисунке 1.16 представлена полная бифуркационная диаграмма системы (1.12) при $\varepsilon = 0.2$. Красные линии соответствуют бифуркации Андронова-Хопфа, черные – бифуркации двойного цикла, зеленые – седло-узловой бифуркации, синие – глобальным бифуркациям петель сепаратрис. Линии, соответствующие перезамыканиям петель сепаратрис седла расположены на расстоянии, достигающем порядка 10^{-4} , однако точность вычислений позволяет их разделять. На Рисунке 1.17 приведены увеличенные фрагменты выделенных областей этой диаграммы. В области $Q > 0$ (одно состояние равновесия) вид диаграммы качественно сохраняется при $\varepsilon \in (0,1)$. На Рисунке 1.18 представлены качественные фазовые портреты в каждой из области плоскости параметров. Неустойчивые предельные циклы закрашены красным цветом, устойчивые – синим.

Систему (1.12) можно записать в виде

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y + I; \\ \dot{y} = (x - by). \end{cases}$$



(a)



(b)

Рисунок 1.17 — Увеличенные фрагменты плоскости параметров.

Если ε предполагается малым, то фазовое пространство системы распадается на области быстрых и медленных движений. Этот предельный случай хорошо изучен, при его исследовании используются методы [84] (см. также [6; 13]).

1.5.2 Исследование неавтономной системы

Неавтономная система (1.13) определена в расширенном фазовом пространстве \mathbb{R}^3 . Динамическая система для прошлого векторного поля G_P определена в полупространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_-$, а для будущего векторного поля G_F — в полупространстве $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \tau(t > \tau)$. Если Λ любое инвариантное множество прошлого векторного поля G_P , то множество $\{(x; y; t) : (x, y) \in \Lambda, t \leq$

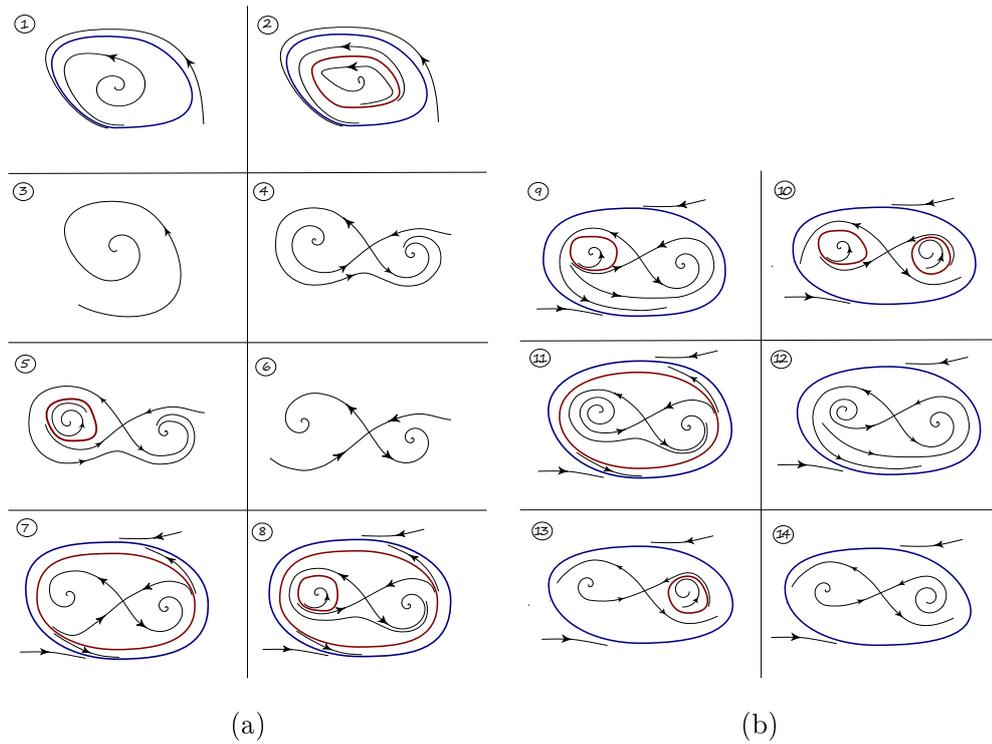


Рисунок 1.18 — Качественные фазовые портреты системы (1.12) при $\varepsilon = 0.2$

$0\}$ назовем отрицательно-инвариантным множеством в расширенном фазовом пространстве. Если же Λ любое инвариантное множество будущего векторного поля G_F , то $(x; y; t) : (x, y) \in \Lambda, t \geq \tau$ назовем положительно-инвариантным множеством в расширенном фазовом пространстве. Аналогично определяются отрицательно-гиперболические и положительно-гиперболические множества.

Так как в результате транзитивного сдвига изменяется величина параметра I , то пары параметров (b, I) , соответствующие прошлому и будущему векторным поля, имеют вид (b, I_0) и (b, I_1) .

Пусть $\varepsilon = 0.2$ — фиксированно. Предположим, что $I_0 = 0$. Сначала рассмотрим $b \in (0, 1)$. Из анализа бифуркационной диаграммы (см. Рисунок 1.16) и фазовых портретов (см. Рисунок 1.18) следует, что G_P имеет структуру фазового пространства, соответствующую области 1 плоскости параметров, а G_F может иметь три топологически различных структуры фазового пространства в зависимости от значения параметров: 1) устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивое состояние равновесия (область 1); 2) устойчивое состояние равновесия и устойчивый предельный цикл, области притяжения которых разделены неустойчивым предельным циклом (область 2); 3) единственное глобально устойчивое состояние равновесия (область 3 плоскости параметров).

В случае 1) для всех решений происходит смена автоколебательного режима на стационарный. Это отвечает прекращению спайковой активности. В случае 2) для некоторых решений режим сохраняется, для других же происходит смена качественного поведения (автоколебательный режим меняется на стационарный). В этом случае, области начальных условий, соответствующих смене (сохранению) режима определяются прообразом неустойчивого предельного цикла будущего векторного поля. Область 2 на плоскости параметров соответствует периоду возбуждения/погашения активности. С уменьшением ε ширина его стремится к нулю. При относительно небольшом изменении внешнего тока внутренний неустойчивый ПЦ стягивается к СР. Для биологической модели характерен именно жесткий режим возбуждения автоколебаний. В случае 3) качественное поведение всех решений сохраняется (для всех решений устанавливается автоколебательный режим, неавтономность не влияет на качественное поведение решений). В этом случае изменения внешнего синаптического тока недостаточны для погашения колебаний.

В случае трех состояний равновесия ($b > 1$) возможных комбинаций топологических структур прошлого и будущего векторных полей больше. Однако, некоторые из этих комбинаций могут приводить к качественно одинаковым изменениям поведения решений. Из анализа бифуркационной диаграммы следует, что поле G_P может иметь структуру фазового пространства, соответствующую области 14 (траектории G_P стремятся к глобально устойчивому предельному циклу), областям 7 и 10 (траектории G_P стремятся к устойчивому предельному циклу или к одному из двух устойчивых состояний равновесия), области 6 (траектории G_P стремятся к одному из двух устойчивых состояний равновесия). В первом из этих случаев у будущего векторного поля может появиться одно устойчивое состояние равновесия, то есть возможна смена автоколебательного режима на стационарный (например, при переходе в область 3 для всех траекторий, при $t < 0$ стремившихся к предельному циклу). Области начальных условий, соответствующие смене режима определяются прообразами инвариантных множеств будущего векторного поля. Во втором случае возможна смена автоколебательного режима на стационарный (например, при переходе из области 10 в область 3, см. Рисунок 1.19). Кроме того, под действием транзитного сдвига может происходить смена "левого" фокуса на "правому", и наоборот), что не приводит к смене динамического режима. В третьем случае будущее вектор-

ное поле не может иметь устойчивых предельных циклов. Транзитивный сдвиг не приводит к смене установившейся.

На Рисунке 1.19 синим цветом изображены образы предельных циклов прошлого векторного поля при отображении перехода T (прошлое векторное поле имеет структуру фазового пространства, соответствующее области 10 плоскости параметров, будущее – области 3). Для областей, закрасенных зеленым цветом, происходит сохранение стационарного режима. Незакрашенная область соответствует смене автоколебательного режима на стационарный.

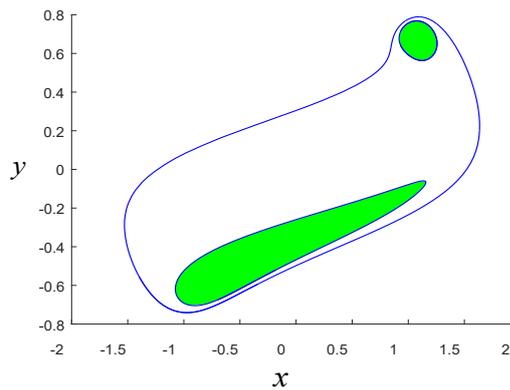


Рисунок 1.19 — Образ предельных циклов прошлого векторного поля при отображении перехода ($I_0 = 0, I_1 = 0.5, b = 1.363, \varepsilon = 0.2, \tau = 1$)

Глава 2. Квазипериодические возмущения гамильтоновых систем

2.1 Введение. Вспомогательные преобразования

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} + \varepsilon g(x,y,\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} + \varepsilon f(x,y,\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_m t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ – малый положительный параметр, а функция Гамильтона H и функции g, f , определяющие возмущение, являются достаточно гладкими (или аналитическими) и равномерно ограниченными вместе с частными производными до второго порядка включительно в области $G \subset \mathbb{R}^2$, либо в $G \subset \mathbb{R}^1 \times S^1$; кроме этого функции g, f по крайней мере непрерывны и квазипериодичны по t равномерно относительно $(x,y) \in G$ с независимыми частотами $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ над кольцом целых чисел. Функции g, f , у которых частотный базис конечный, называются квазипериодическими.

Предполагаем, что система (2.1) при $\varepsilon = 0$ имеет область $D \subset G$, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми $H(x,y) = h$, $h \in [h_-, h_+]$ и отделенную от сепаратрис и состояний равновесия. Таким образом, область D – это связная область, гомеоморфная кольцу.

Заметим, что исследование глобального поведения решений системы (2.1) включает в себя рассмотрение поведения решений в области D , а также в окрестности невозмущенных сепаратрис и центров.

Предполагаем, что возмущение является неконсервативным, т.е. выполнено условие

$$g'_x + f'_y \neq 0. \quad (2.2)$$

Задача о существовании квазипериодических и почти периодических решений в системах, близких к гамильтоновым, рассматривалась в нерезонансном случае в [83](с. 210). Имеется много работ, в которых рассматривались конкретные квазипериодические по времени системы типа Дуффинга, маятникового типа и др. Так, вопросы существования квазипериодических и почти периодических решений в уравнении Дуффинга с одним седловым состоянием

равновесия рассматривались в [5], [22]. Вопросы существования сложной динамики в уравнениях типа Дуффинга при квазипериодических возмущениях рассматривались, например, в работах [14; 15]. В работе [65] изучался вопрос о хаотической динамике маятника при квазипериодическом воздействии. В отличие от указанных работ, мы рассмотрим задачу о поведении решений системы общего вида (2.1) в области D и окрестности невозмущенной сепаратрисы.

Система (2.1) в области D после перехода к переменным действие I - угол θ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon F_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m) \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon F_2(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m) \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{cases} F_1 = f(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \dots, \theta_n) x'_\theta - g(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \dots, \theta_n) y'_\theta \\ F_2 = -f(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \dots, \theta_n) x'_I + g(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \dots, \theta_n) y'_I \end{cases}$$

функции $x(I, \theta), y(I, \theta)$ определяют замену переменных, $\omega(I)$ – частота движения на замкнутых фазовых кривых. Предположим, что функция $\omega(I)$ суть монотонная функция при $I \in (I_-, I_+)$. Это предположение будет играть существенную роль в дальнейшем.

Система (2.3) определена на прямом произведении промежутка $K = [I_-(h_-), I_+(h_+)]$ и $(m + 1)$ -мерного тора, где значения h_-, h_+ определяют границы области D .

Исследование систем вида (2.1) является развитием теории периодических возмущений двумерных гамильтоновых систем. Отличие заключается в том, что функции, определяющие возмущение, являются квазипериодическими функциями времени с конечным частотным базисом. Это приводит к тому, что размерность соответствующей автономной системы в расширенном фазовом пространстве становится равной $m + 2$, где m – число частот в возмущении. Для таких систем исследуется поведение решений в окрестностях индивидуальных уровней энергии (как резонансных, так и нерезонансных). Даются условия существования резонансных квазипериодических решений и их устойчивости, исследуется задача о синхронизации квазипериодических колебаний, устанавливается роль параметрических членов в возмущении. Решается вопрос о глобальной динамике в областях, отделенных от сепаратрис невозмущенной системы. Также изучается поведение решений в окрестностях сепаратрис.

В исследовании системы (2.1) важную роль играет автономной система, полученная из исходной формальной операцией усреднения по частотам возмущения, т.е. система вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y} + \varepsilon \bar{g}(x, y) \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x} + \varepsilon \bar{f}(x, y), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{g}(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(x, y, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m \\ \bar{f}(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(x, y, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m. \end{aligned}$$

Прежде всего установим поведение решений в окрестностях индивидуальных резонансных уровней энергии.

2.2 Резонансные квазипериодические решения

При $\varepsilon = 0$ $(m+2)$ -мерное фазовое пространство системы (2.3) расслаивается на инвариантные $(m+1)$ -мерные торы T^{m+1} , движение на которых условно периодическое с частотами $\omega, \omega_1, \dots, \omega_m$. При $\varepsilon \neq 0$ эти торы разрушаются из-за неконсервативности возмущения и наличия целочисленной комбинации частот $\omega, \omega_1, \dots, \omega_m$:

$$n\omega(I) - (\mathbf{k}, \Omega) = 0, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_m), \quad \Omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \quad (2.5)$$

Соотношение (2.5) называют резонансным соотношением. Если при некоторых n, \mathbf{k} этому соотношению удовлетворяет вещественное значение $I = I_{n\mathbf{k}}$ из интервала (I_-, I_+) , то уровень $I = I_{n\mathbf{k}}$ (замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h_{n\mathbf{k}}$ невозмущенной системы) будем называть резонансным. В случае монотонной собственной частоты невозмущенной системы, каждому набору целых чисел n, k_1, \dots, k_m может соответствовать только один резонансный уровень. В общем случае их может быть больше.

Итак, фиксируем некоторый индивидуальный резонансный уровень невозмущенной системы $I = I_{n\mathbf{k}}$, соответствующий набору $(n, k_1, k_2, \dots, k_m)$, и

исследуем поведение решений возмущенной системы в его окрестности $U_\mu = \{(I, \theta) : I_{nk} - C\mu < I < I_{nk} + C\mu, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0, \mu = \sqrt{\varepsilon}\}$. Сделаем в (2.3) замену

$$\theta = v + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \quad I = I_{nk} + \mu u, \quad \mu = \sqrt{\varepsilon}.$$

В результате система (2.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \mu F_1 \left(I_{nk}, \psi + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_m \right) + \\ &+ \mu^2 \frac{\partial}{\partial I} F_1 \left(I_{nk}, \psi + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_m \right) W + O(\mu^3) \\ \dot{\psi} &= \mu b_1 W + \mu^2 F_2(I_{nk}, \psi + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_m) + O(\mu^3) \\ \dot{\theta}_j &= \omega_j, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где функции $F_1, F_2, \frac{\partial F_1}{\partial I}$ периодичны по $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ с наименьшим периодом $2\pi n$. Заметим, что в силу монотонности $\omega(I)$, справедливо условие $b_1 = \omega'(I_{nk}) \neq 0$ (условие невырожденности резонанса). В системе (2.6) переменные разделены на медленные W, ψ и быстрые $\theta_1, \dots, \theta_m$. Эту систему можно представить в стандартной форме метода усреднения и применить теорему Боголюбова [55] (с. 379, см. также [57]). Действительно, подставляя $\theta_j = \omega_j t$ в первые два уравнения системы (2.6), получим

$$\dot{\eta} = \mu F(\eta, \omega_1 t, \dots, \omega_m t; \mu),$$

где $\eta = (W, \psi)$, $F = (F_1 + \mu \frac{\partial F_1}{\partial I} W + O(\mu^2), b_1 W + \mu F_2 + O(\mu^2))$. Тогда усредненная система запишется в виде

$$\dot{\xi} = \mu F_0(\xi; \mu),$$

где $\xi = (u, v)$,

$$\begin{aligned} F_0 &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(\xi, \omega_1 t, \dots, \omega_m t; \mu) dt = \\ &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} F(\xi, \theta_1, \dots, \theta_m; \mu) d\theta_1 \dots d\theta_m \end{aligned}$$

в силу несоизмерности частот.

Двумерная усредненная система принимает вид

$$\begin{aligned} u' &= A(v, I_{n\mathbf{k}}) + \mu P_0(v, I_{n\mathbf{k}})u \\ v' &= b_1 u + \mu(b_2 u^2 + Q_0(v, I_{n\mathbf{k}})), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где штрих означает производную по медленному времени $\tau = \mu t$,

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} F_1(I_{n\mathbf{k}}, v + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m, \\ P &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial}{\partial I} F_1(I_{n\mathbf{k}}, v + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m, \\ Q &= \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} F_2(I_{n\mathbf{k}}, v + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m k_j \theta_j, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta_1 \dots d\theta_m \\ b_1 &= \frac{d\omega(I_{n\mathbf{k}})}{dI}, \quad b_2 = \frac{d^2\omega(I_{n\mathbf{k}})}{2dI^2}. \end{aligned} \right.$$

Аналогично случаю периодических возмущений система (2.7) приводится с точностью до членов $O(\mu^2)$ к виду (см. [96],[88] (с. 225))

$$\begin{aligned} u' &= A(v, I_{n\mathbf{k}}) + \mu \sigma(v, I_{n\mathbf{k}})u \\ v' &= b_1 u + \mu b_2 u^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\sigma = P_0 + \frac{dQ_0}{dv} = \frac{1}{(2\pi n)^m} \int_0^{2\pi n} \dots \int_0^{2\pi n} (g'_x + f'_y) d\theta_1 \dots d\theta_m.$$

Здесь $x = x(I_{n\mathbf{k}}, v + (\sum_{j=1}^m k_j \theta_j)/n)$, $y = y(I_{n\mathbf{k}}, v + (\sum_{j=1}^m k_j \theta_j)/n)$.

Лемма. *Функции $A(v, I_{n\mathbf{k}})$, $\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})$ достаточно гладкие и периодические с наименьшим периодом $2\pi/n$.*

Для доказательства нужно разложить указанные функции в ряд Фурье. Фазовым пространством системы (2.8) является цилиндр $\{u, v \bmod (2\pi/n)\}$.

Простому устойчивому состоянию равновесия усредненной системы (2.8) соответствует устойчивое квазипериодическое резонансное решение $x_{n\mathbf{k}}(t), y_{n\mathbf{k}}(t)$ с периодами $2\pi n/\omega_1, \dots, 2\pi n/\omega_m$ [55] (с. 379), а, следовательно, m -мерный устойчивый инвариантный тор в системе (2.3). Такие торы будем называть резонансными торами. Предположим дополнительно, что существует число σ_0 такое, что $|\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})| \geq \sigma_0 > 0$. В этом случае простые состояния равновесия усредненной системы (2.8) будут грубыми (т.е. вещественные части корней характеристического уравнения отличны от нуля). Тогда справедлива

Теорема 1. Пусть система (2.8) имеет простое состояние равновесия $(v_0, 0)$ и $|\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})| \geq \sigma_0 > 0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ в исходной системе (2.1) существует квазипериодическое решение $x_{n\mathbf{k}}(t), y_{n\mathbf{k}}(t)$ с частотами $\omega_1/n, \dots, \omega_m/n$. Это решение будет асимптотически устойчивым при $b_1 A'(v_0) > 0, \sigma(v_0, I_{n\mathbf{k}}) < 0$ и неустойчивым (седловым) при $b_1 A'(v_0) < 0$. Соответственно, у системы (2.3) существует m -мерный устойчивый (седловой) инвариантный тор T^m .

Представим функцию $A(v, I_{n\mathbf{k}})$ в виде¹

$$A(v, I_{n\mathbf{k}}) = \tilde{A}(v, I_{n\mathbf{k}}) + B_0(I_{n\mathbf{k}}),$$

где $B(I_{n\mathbf{k}}) = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} A(v, I_{n\mathbf{k}}) dv$ – среднее значение функции $A(v, I_{n\mathbf{k}})$.

Рассмотрим сначала случай $\max|\tilde{A}(v, I_{n\mathbf{k}})| < |B_0(I_{n\mathbf{k}})|$. Если это условие выполнено, то можно указать значение μ , настолько малое, что усредненная система (2.8) не будет иметь состояний равновесия. Фазовый портрет показан на Рис. 2.1 (слева). В этом случае, решения исходной системы, проходящие в начальный момент времени через указанную резонансную окрестность, покинут ее с течением времени. Такой тип резонанса естественно назвать **проходимым**.

Пусть $\max|\tilde{A}(v, I_{n\mathbf{k}})| > |B_0(I_{n\mathbf{k}})|, B_0(I_{n\mathbf{k}}) \neq 0$. В силу гладкости и периодичности функции $A(v, I_{n\mathbf{k}})$, можно указать значение μ , настолько малое, что у системы (2.8) существуют по крайней мере два состояния равновесия, лежащих на оси v . Пусть $A'(v_0) \neq 0$, где v_0 – координата состояния равновесия. В этом случае состояние равновесия $(v_0, 0)$ называется простым. Корни характеристического уравнения системы (2.8) для этого состояния равновесия равны $(\mu\sigma \pm \sqrt{\mu^2\sigma^2 - 4b_1 A'(v_0)})/2$. Заметим, что $b_1 A'(v_0) > 0$ для фокуса и $b_1 A'(v_0) < 0$ для седла. При $\sigma(v_0, I_{n\mathbf{k}}) < 0$ одно из этих состояний равновесия будет устойчивым фокусом.

Так как, по предположению функция $\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})$ сохраняет знак, то усредненная система (2.8) не имеет предельных циклов в области колебательных движений (критерий Бендиксона). В этом случае, при малом μ , фазовый портрет выглядит как на рисунке 2.1. Поскольку решения с начальными условиями в резонансной окрестности могут стремиться к устойчивому квазипериодическому режиму, а могут покидать с течением времени указанную окрестность, такой резонанс назовем частично-проходимым.

¹Пример вычисления функции $A(v, I_{n\mathbf{k}})$ приведен ниже.

В случае $B_0(I_{nk}) = 0$, $\tilde{A}(v, I_{nk}) \neq 0$, при сделанных предположениях и достаточно малых μ , фазовый портрет системы (2.8) имеет вид как на Рис. 2.1 (справа). Если фокус усредненной системы устойчив, то решения исходной системы с начальными условиями из рассматриваемой окрестности резонансного уровня стремятся к устойчивому m -частотному квазипериодическому режиму (частоты кратны частотам возмущения, см. Теорема 1.).

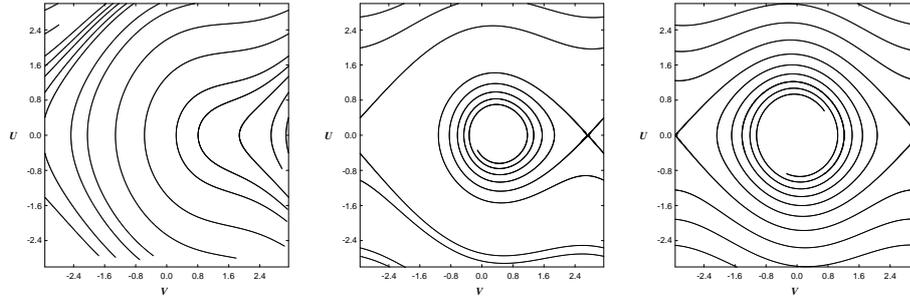


Рисунок 2.1 — Фазовые портреты системы (2.8) при знакоопределенной функции $\sigma_0(v, I_{nk})$.

Итак, дадим следующее определение.

Определение. Уровень $I = I_{nk}$ невозмущенной системы назовем:

- проходимым, если $\max|\tilde{A}(v, I_{nk})| < |B_0(I_{nk})|$, $B_0(I_{nk}) \neq 0$;
- частично проходимым, если $\max|\tilde{A}(v, I_{nk})| > |B_0|$, $B \neq 0$;
- непроходимым, если $B_0 = 0$, $\tilde{A}(v, I_{nk}) \neq 0$.

Частично проходимые и непроходимые уровни $I = I_{nk}$ будем называть *расщепляемыми*.

2.3 Синхронизация квазипериодических колебаний

В 1930 году А.А. Андронов и А.А. Витт на примере квазилинейного уравнения Ван дер Поля с периодическим по времени возмущением рассмотрели задачу о синхронизации колебаний [44]. Иначе говоря, они установили, что происходит с устойчивым периодическим режимом при внешнем гармоническом воздействии. Далее Морозов А.Д. и Шильников Л.П. [95] рассмотрели более общую задачу о синхронизации в системах, близких к двумерным нелинейным гамильтновым. Было установлено, что если в квазилинейном случае интервал

синхронизации по параметру мал вместе с возмущением, то в существенно нелинейном случае он является величиной порядка $O(1)$. Задача о воздействии квазипериодических возмущений на системы с предельными циклами не была рассмотрена. В диссертации восполняется этот пробел. В последнее время физики установили эффект синхронизации квазипериодических колебаний для автоколебательных систем, возникающих в радиофизике (см., например, [46]).

Итак, предположим, что автономная система (2.4) имеет грубый предельный цикл. Это означает, что порождающая функция Пуанкаре-Понтрягина $B_0(h)$ имеет простой нуль $h = h_0$. Изучим поведение решений в окрестности индивидуального резонансного уровня $H(x, y) = h_{n\mathbf{k}}$ в случае, когда этот уровень близок к уровню $h = h_0$.

Введем в (2.8) расстройку γ , определяющую отклонение невырожденного резонансного уровня $I = I_{n\mathbf{k}}$ от уровня $I = I_0$, в окрестности которого у автономной системы (2.4) существует грубый предельный цикл:

$$I_{n\mathbf{k}} = I_0 + \mu\gamma.$$

Следуя [88], рассмотрим бифуркации, происходящие при вариации γ , когда уровень $h = h_0$ переходит от точного резонанса к нерезонансному случаю. Для этого рассмотрим систему на цилиндре

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \tilde{A}(v, I_{n\mathbf{k}}) + \mu(\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})u + B_1(I_{n\mathbf{k}})\gamma) \\ \frac{dv}{d\tau} &= bu + \mu b_1 u^2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

получающуюся из (2.8) при

$$B_0(I_{n\mathbf{k}}) \approx \frac{dB_0}{dI}(I_0)(I_{n\mathbf{k}} - I_0) = B_1(I_{n\mathbf{k}})\mu\gamma.$$

Наряду с (2.8) рассмотрим консервативную систему

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \tilde{A}(v, I_{n\mathbf{k}}) \\ \frac{dv}{d\tau} &= bu. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Сепаратрисы седла системы (2.10), охватывающие фазовый цилиндр $(v \bmod 2\pi, u)$, назовем внешними сепаратрисами.

Установим взаимное расположение внешних сепаратрис при учете членов $O(\mu)$. Воспользуемся формулой для определения расстояния $\Delta_\mu = \mu\Delta_1 + O(\mu^2)$

между соответствующими сепаратрисами системы (2.9), полученной Мельниковым [81].

В качестве невозмущенной системы рассмотрим (2.10) и сделаем в (2.9) следующую замену переменных

$$v = \xi + v_0 - \mu\gamma/\tilde{A}'(v_0), u = \eta,$$

где v_0 – координата седла системы (2.10). В результате система (2.9) с точностью до членов $O(\mu^2)$ преобразуется к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\eta}{d\tau} &= \tilde{A}(\xi + v_0) + \mu[\gamma + \sigma(\xi + v_0)\eta - \gamma\tilde{A}'(\xi + v_0)/\tilde{A}'(v_0)] \\ \frac{d\xi}{d\tau} &= b\eta + \mu b_1\eta^2. \end{aligned} \right\}$$

Очевидно, $\xi = \eta = 0$ является седлом этой системы. Поэтому, согласно [81], имеем

$$\Delta_1 = - \int_{-\infty}^{\infty} b_1\eta^2 \frac{d\eta}{d\tau} d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sigma(\xi + v_0)\eta + \gamma - \gamma \frac{\tilde{A}'(\xi + v_0)}{\tilde{A}'(v_0)} \right] \frac{d\xi}{d\tau} d\tau. \quad (2.11)$$

Здесь $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$ – решение системы (2.10) на сепаратрисе. Из интеграла системы (2.10) получаем следующую связь между η и ξ :

$$\eta = \pm \left[\frac{2}{b}(V(\xi, v_0) - V(0, v_0)) \right]^{1/2}, \quad V(\xi, v_0) = \int \tilde{A}(\xi + v_0) d\xi.$$

Подставляя эти выражения в (2.11), находим

$$\Delta_1^{\pm} = \frac{2\pi\gamma}{n} \pm \int_0^{2\pi/p} \sigma(\xi + v_0) \left[\frac{2}{b}(V(\xi, v_0) - V(0, v_0)) \right]^{1/2} d\xi.$$

Согласно [88], справедливы следующие свойства.

Свойство 1. В случае знакоопределенной функции $\sigma(v, I_{nk})$ при точном резонансе, когда $\gamma = 0$, внешние сепаратрисы расщеплены, т.е. $\Delta_{\mu} \neq 0$.

Свойство 2. В случае знакоопределенной функции $\sigma(v, I_{nk})$ у системы (2.9) с $\gamma = 0$ отсутствуют предельные циклы, как охватывающие, так и неохватывающие фазовый цилиндр.

Из условий $\Delta_1^{\pm} = 0$ находим бифуркационные значения расстройки $\gamma = \gamma^{\pm}$, соответствующие наличию у системы (2.9) (в рассматриваемом приближении) сепаратрисы, идущей из седла в седло. Знак плюс отвечает области $\eta > 0$,

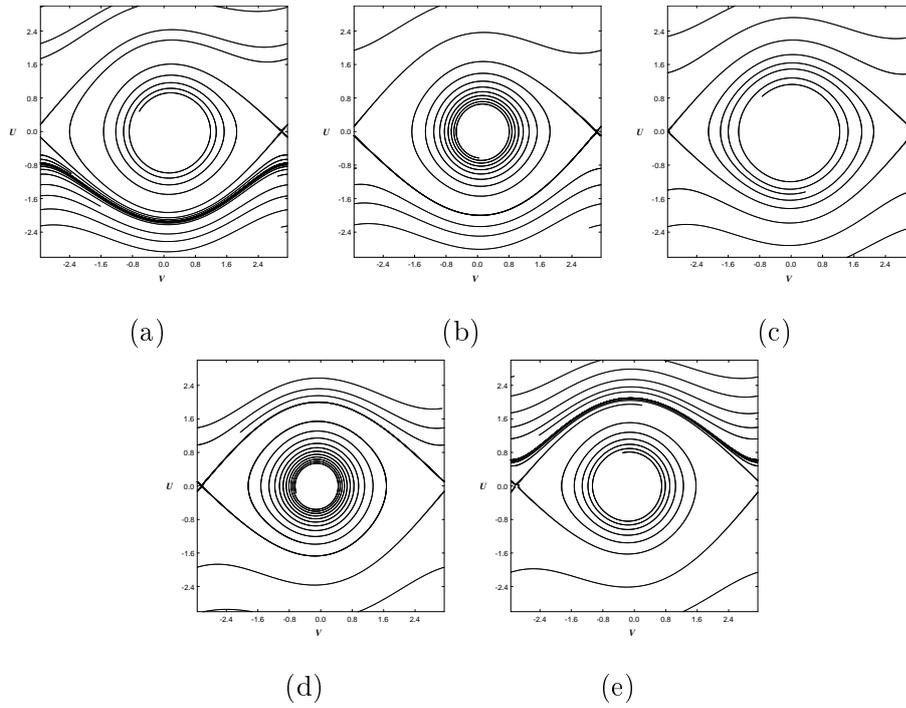


Рисунок 2.2 — Фазовые портреты системы (2.9) при разных значениях расстройки γ .

а минус — $\eta < 0$. При изменении γ от γ^\pm в системе (2.9) рождается предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр. Отсюда вытекает

Теорема 2. Пусть $\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})$ — знакоопределенная функция; для определенности положим $\varepsilon\sigma < 0$. Тогда найдется такое $\gamma_{n\mathbf{k}} = |\gamma^\pm| + O(\mu)$, что: 1) при $\gamma > \gamma_{n\mathbf{k}}$ у системы (2.9) существует устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр $\{v \bmod 2\pi, u\}$; 2) при $\gamma = \gamma_{n\mathbf{k}}$ предельный цикл "влипает" в сепаратрисный контур Γ_n^+ , составленный из n седел и внешних сепаратрис, идущих из седла в седло, остальные неустойчивые сепаратрисы седел стремятся при $t \rightarrow \infty$ к устойчивым фокусам; 3) при $-\gamma_{n\mathbf{k}} < \gamma < \gamma_{n\mathbf{k}}$ предельные циклы, охватывающие фазовый цилиндр, отсутствуют; 4) при $\gamma = -\gamma_{n\mathbf{k}}$ образуется контур Γ_n^- , составленный из n седел и внешних сепаратрис и отличающийся от Γ_n^+ направлением обхода фазового цилиндра и расположением на нем; 5) при $\gamma < -\gamma_{n\mathbf{k}}$ существует устойчивый предельный цикл, охватывающий фазовый цилиндр.

Рис. 2.2 иллюстрирует этот результат на фазовом цилиндре $\{u, v \bmod (2\pi/n)\}$.

Эта теорема определяет "прохождение" $(m + 1)$ -мерного тора через резонанс. Действительно, предельному циклу системы (2.9), охватывающему фазовый цилиндр соответствует $(m + 1)$ -мерный тор в системе (2.3), а про-

стым состояниям равновесия – m -мерный тор (квазипериодическое решение с частотами $\omega_1/n, \omega_2/n, \dots, \omega_m/n$).

2.4 О глобальном поведении решений

Для определения глобального поведения решений мы должны знать поведение решений в окрестности любого индивидуального уровня из ячейки D . Мы установили поведение решений в окрестности индивидуальных резонансных уровней. Установим поведение решений в окрестности индивидуальных нерезонансных уровней. Далее, зная поведение решений в окрестности любого индивидуального уровня, попытаемся "сшить" общую картину поведения решений в ячейке D .

Заметим, что если все уровни $I = \text{const}$ являются проходимыми, то качественное поведение решений системы (2.1) аналогично поведению решений автономной системы (2.4).

Итак, установим поведение решений в окрестности индивидуальных нерезонансных уровней.

Обозначим через $\omega_* = \omega(I_*)$ частоту на уровне $I = I_*$. Предположим, что частоты $\omega_*, \omega_1, \dots, \omega_m$ несоизмеримы. В этом случае будем говорить о нерезонансном уровне.

Установим поведение решений в окрестностях $U_\mu = \{(I, \theta) : I_* - C\mu < I < I_* + C\mu, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0, \mu = \sqrt{\varepsilon}\}$ индивидуальных нерезонансных уровней $I = I_*$.

Делая в системе (2.3) замену $I = I_* + \mu W$, приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \mu F_1(I_*, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m) + \mu^2 [\partial F_1(\cdot) / \partial I] W + O(\mu^3) \\ \dot{\theta} &= \omega(I_*) + \mu b_1 W + \mu^2 (b_2 W^2 + F_2(I_*, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m)) + O(\mu^3) \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m, \end{aligned}$$

где $b_1 = \omega'(I_*)$, $b_2 = \frac{1}{2}\omega''(I_*)$. Сделаем теперь замену

$$u = W + i\mu \sum_{|k| \neq 0} \frac{F_{1k}(I_*)}{(\bar{k}, \bar{\omega})} e^{i(\bar{k}, \bar{\theta})} + i\mu^2 \sum_{|k| \neq 0} [F'_{1k}(I_*) - b_1 W k_0 \frac{F_{1k}(I_*)}{(\bar{k}, \bar{\omega})}] \frac{e^{i(\bar{k}, \bar{\theta})}}{(\bar{k}, \bar{\omega})},$$

где F_{1k} – коэффициенты Фурье для функции $F_1(I_*, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m)$, $\bar{k} = (k_0, k_1, \dots, k_m)$, $\bar{\theta} = (\theta, \theta_1, \dots, \theta_m)$, $\bar{\omega} = (\omega(I_*), \omega_1, \dots, \omega_m)$. В результате система примет вид

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \mu B_0(I_*) + \mu^2 B_1(I_*)u + O(\mu^3) \\ \dot{\theta} &= \omega(I_*) + \mu b_1 u + \mu^2 Q(u, \theta) + O(\mu^3) \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, m,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}B_0 = F_{10} &= \frac{1}{(2\pi)^{m+1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F_1(I_*, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m) d\theta d\theta_1 \dots d\theta_m \\ B_1 = dB_0/dI &= \frac{1}{(2\pi)^{m+1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_1(I_*, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m)}{\partial I} d\theta d\theta_1 \dots d\theta_m.\end{aligned}$$

Пренебрегая членами порядка $O(\mu^3)$, мы получим уравнение

$$\dot{u} = \mu B_0(I_*) + \mu^2 B_1(I_*)u, \quad (2.12)$$

которое совпадает с усредненным уравнением. В замене, связанной с переходом к усредненной системе, могут появиться малые знаменатели $(\bar{k}, \bar{\omega})$. Это приводит к необходимости наложения ограничения на частоты для обеспечения сходимости ряда в замене. Например будет достаточно, если выполнено следующее диофантово условие

$$(\bar{k}, \bar{\omega}) \geq C / \left(\sum_{j=0}^m |k_j| \right)^{m+1}, \quad (2.13)$$

для всех $(k_0, k_1, \dots, k_m) \in \mathbf{Z}^{m+1} \setminus \{0\}$, C – положительная постоянная².

Если $B_0(I_*) \neq 0$, тогда уровень $I = I_*$ проходимый. Если $B_0(I_*) = 0$, $B_1(I_*) \neq 0$, тогда простое состояние равновесия $u = 0$ в (2.15) соответствует в системе (2.1) квазипериодическому решению с частотами $\omega(I_*), \omega_1, \dots, \omega_m$ ($(m+1)$ -мерному инвариантному тору в (2.3)). Итак, справедлива теорема

Теорема 3. *Предположим, что автономная система (2.4) имеет грубый предельный цикл, порожденный нерезонансным уровнем $I = I_*$ для достаточно малых $\varepsilon > 0$ (т.е. $B_0(I_*) = 0$, $B_1(I_*) \neq 0$) и условие (2.16) выполняется. Тогда система (2.1) имеет квазипериодическое решение с частотами $\omega(I_*), \omega_1, \dots, \omega_m$, соответствующее $(m+1)$ -мерному инвариантному тору в системе (2.3). Этот тор асимптотически устойчивый при $B_1(I_*) < 0$.*

²Также требуется достаточная гладкость $F_1(I_*, \theta, \theta_1, \dots, \theta_m)$ относительно $\theta, \theta_1, \dots, \theta_m$.

Предположим, что уравнение $B_0(I) = 0$ имеет на интервале $K = [I_-(h_-), I_+(h_+)]$ не более, чем конечное число простых корней $I_p, p = 1, \dots, p_{max}$. Это предположение является естественным при выполнении условия (2.2) и означает, что возмущенная автономная система (2.4) имеет не более, чем конечное число предельных циклов. Обозначим через $R_p = (I_p - \xi, I_p + \xi)$ окрестности корней I_p , где ξ – некоторая достаточно малая величина. На множестве $K \setminus \bigcup_{p=1}^{p_{max}} R_p$ функция $|B_0(I)|$ ограничена снизу некоторой величиной $B_* > 0$. Рассмотрим уравнение

$$A(v, I_{nk}) = \tilde{A}(v, I_{nk}) + B_0(I_{nk}) = 0, \quad (2.14)$$

которое определяет координату v состояний равновесия усредненной системы (2.8). Можно доказать, что это уравнение имеет вещественное решение $v = v_0$ лишь для не более, чем конечного множества резонансных уровней $I = I_{nk}, I_{nk} \in K$. Мы продемонстрируем это на примере. Такое свойство нулей уравнения (2.17) указывает на конечность множества частично проходимых резонансов.

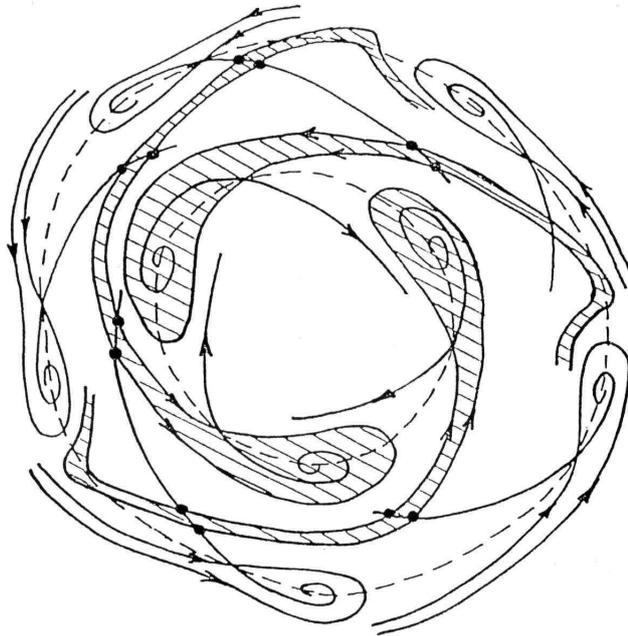


Рисунок 2.3 — Фазовые портреты системы (2.8) в плоскости (x, y) для двух частично проходимых резонансов при $\sigma = const < 0$.

Итак, справедлива теорема

Теорема 4. *Число частично проходимых резонансных уровней ограничено.*

Множество непроходимых резонансов конечно по предположению. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ окрестности $U_{\sqrt{\varepsilon}}$ расщепляемых уровней не перекрываются. Дополнительное множество уровней соответствует проходным уровням. Таким образом, зная поведение решений в окрестностях расщепляемых уровней, мы можем представить поведение решений в области $D \times T^m$. Однако, сепаратрисные инвариантные многообразия, соответствующие седлам усредненной системы (2.8), лежащим на разных расщепляемых резонансных уровнях, могут пересекаться. Это приводит к существованию гетероклинических решений и сложной структуре областей притяжения устойчивых резонансных торов (см. рис. 21, где жирными точками отмечены гетероклинические точки). На рис. 21 показаны траектории системы (2.8) в плоскости (x, y) для двух частично проходимых резонансов с $n = 3$ и $n = 5$. Заштрихованы области притяжения устойчивых фокусов для $n = 3$. Сепаратрисы частично проходимых резонансов продолжены в окрестность соседнего резонанса.

Расщепление сепаратрисных многообразий

Предположим, что невозмущенная гамильтонова система имеет простое состояние равновесия типа седло (x_s, y_s) . Не ограничивая общности предположим $x_s = 0, y_s = 0$. Запишем систему в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^2 \times T^m$ с координатами $(x, y, \theta_1, \dots, \theta_m)$. Тогда при $\varepsilon = 0$ она имеет седловое квазипериодическое решение с частотами $\omega_1, \dots, \omega_m$. Обозначим устойчивое и неустойчивое интегральные многообразия седла $(0, 0)$ системы (2.1) при $\varepsilon = 0$ через W_0^s, W_0^u . Известно, что при малом $\varepsilon \neq 0$, седловое квазипериодическое решение сохраняется и его сепаратрисные многообразия близки к невозмущенным, но уже могут пересекаться, не совпадая. Задача состоит в определении расстояния между сепаратрисными многообразиями W_ε^s и W_ε^u и нахождении условий существования гомоклинических решений. Эта задача может быть решена в первом приближении с помощью формулы Мельникова, которая была получена для периодических по времени возмущений в [81]. Сандерс [35] расширил применение формулы Мельникова на достаточно гладкие системы, в частности, на квазипериодический случай. Ниже мы кратко приведем его

рассуждения. В [42] приводится также обобщение этой формулы на случай квазипериодических возмущений, а в [42] – общая дискуссия о конструировании дискретных отображений. Приводятся геометрические иллюстрации. Существование квазипериодических решений и интегральных многообразий рассматривается в книге Хейла [8].

Итак, определим расстояние Δ между многообразиями W_ε^s и W_ε^u системы (2.1), записанной в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R}^2 \times T^m$.

Мы предположим

$$f(0,0,\theta_1,\dots,\theta_m) = g(0,0,\theta_1,\dots,\theta_m) = 0$$

для всех t , тем самым фиксируя седловое квазипериодическое решение.

Следуя [35], для достаточно малых ε мы имеем

$$\sup \|W_0^s - W_\varepsilon^s\| = O(\varepsilon),$$

$$\sup \|W_0^u - W_\varepsilon^u\| = O(\varepsilon).$$

Тогда существуют решения $x_\varepsilon^{s,u}, y_\varepsilon^{s,u}$ системы (2.1) такие, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_\varepsilon^s(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} x_\varepsilon^u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_\varepsilon^s(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} y_\varepsilon^u(t) = 0.$$

Для каждого $x_0^{s,u}, y_0^{s,u} \in W_0^{s,u}$ мы можем найти $x_\varepsilon^s, y_\varepsilon^s, x_\varepsilon^u, y_\varepsilon^u$ так, что

$$\sup_{\tau \in [t, \infty]} \|x_0^{s,u}(\tau) - x_\varepsilon^s(\tau)\| = O(\varepsilon(1 - e^{-mt})), \quad \sup_{\tau \in [t, \infty]} \|y_0^{s,u}(\tau) - y_\varepsilon^s(\tau)\| = O(\varepsilon(1 - e^{-mt}))$$

$$\sup_{\tau \in [-\infty, t]} \|x_0^{s,u}(\tau) - x_\varepsilon^u(\tau)\| = O(\varepsilon(1 + e^{-mt})), \quad \sup_{\tau \in [-\infty, t]} \|y_0^{s,u}(\tau) - y_\varepsilon^u(\tau)\| = O(\varepsilon(1 + e^{-mt}))$$

для некоторого $m > 0$ (m определяется только невозмущенной системой) и для всех $t \in \mathbb{R}$ [35]. Рассмотрим некоторую секущую расширенного фазового пространства $\theta_1 = \theta_{10}, \dots, \theta_m = \theta_{m0}$. Выберем точку $x_0(t_0), y_0(t_0)$ гомоклинической петли невозмущенного уравнения. Пусть $x_\varepsilon^{s,u}, y_\varepsilon^{s,u}$ – координаты пересечения нормали к петле в точке $x_0(t_0), y_0(t_0)$ с проекциями многообразий W_ε^s и W_ε^u на указанную секущую. Тогда расстояние в точке $x_0(t_0), y_0(t_0), \theta_{10}, \dots, \theta_{m0}$ между сепаратрисными многообразиями, очевидно, пропорционально величине

$$\Delta(t_0, \theta_{10}, \dots, \theta_{m0}, \varepsilon) = \frac{\partial H(x_0, y_0)}{\partial y} (y_\varepsilon^u - y_\varepsilon^s) + \frac{\partial H(x_0, y_0)}{\partial x} (x_\varepsilon^u - x_\varepsilon^s).$$

Раскладывая Δ в ряд Маклорена по степеням ε и принимая во внимание, что невозмущенные многообразия совпадают, имеем

$$\Delta(t_0, \theta_{10}, \dots, \theta_{m0}, \varepsilon) = \varepsilon \Delta_0(t_0, \theta_{10}, \dots, \theta_{m0}) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\Delta_0 = \frac{\partial \Delta}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial H(x_0, y_0)}{\partial y} \left(\frac{\partial y_\varepsilon^u}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial y_\varepsilon^s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \frac{\partial H(x_0, y_0)}{\partial x} \left(\frac{\partial x_\varepsilon^u}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{\partial x_\varepsilon^s}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right).$$

В данное выражение входит решение возмущенного уравнения, поэтому его применение затруднительно. В связи с этим, рассматривают функцию

$$\Delta_0(t + t_0, \theta_{10}, \dots, \theta_{m0}, \varepsilon).$$

Сгруппируем члены, соответствующие неустойчивому многообразию в первое слагаемое, а устойчивому – во второе. Дифференцируя теперь каждое слагаемое в этой сумме по t , в силу системы (2.1), после преобразований имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H(x_0(t), y_0(t))}{\partial y} \frac{\partial y_\varepsilon^{u,s}(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial H(x_0(t), y_0(t))}{\partial x} \frac{\partial x_\varepsilon^{u,s}(t)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \right) = \\ & = \frac{\partial H(x_0(t), y_0(t))}{\partial y} f(x_0(t), y_0(t), \theta_{10}, \dots, \theta_{m0}) + \frac{\partial H(x_0(t), y_0(t))}{\partial x} g(x_0(t), y_0(t), \theta_{10}, \dots, \theta_{m0}). \end{aligned}$$

Здесь $x_0 = x_0(t + t_0), y_0 = y_0(t + t_0)$. Интегрируя теперь по переменной t первое выражение от $-\infty$ до 0 , а второе от 0 до ∞ , а затем вычитая одно из другого, окончательно получим

$$\begin{aligned} \Delta_0(t_0, \theta_{10}, \dots, \theta_{m0}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial H(x_0(t), y_0(t))}{\partial x} g(x_0(t), y_0(t), \theta_1(t - t_0), \dots, \theta_m(t - t_0)) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial H(x_0(t), y_0(t))}{\partial y} f(x_0(t), y_0(t), \theta_1(t - t_0), \dots, \theta_m(t - t_0)) \right] dt, \end{aligned}$$

$x_0(t), y_0(t)$ – решение невозмущенной системы на сепаратрисе, $\theta_i(t - t_0) = \omega_i(t - t_0) + \theta_{i0}, i = 1, \dots, m$. Так как функции f, g квазипериодические по времени, то и функция $\Delta_0(t_0)$ также будет квазипериодической по t_0 . Отметим, что Δ_0 зависит от m параметров $\theta_{10}, \dots, \theta_{m0}$, определяемых гармониками квазипериодического возмущения, что приводит к разнообразию при геометрической интерпретации пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий [42].

Наличие простого нуля у функции $\Delta_0(t_0)$ означает, что при достаточно малых ε W_ε^s и W_ε^u трансверсально пересекаются, что, в свою очередь, означает существование двоякоасимптотических (гомоклинических) решений, удовлетворяющих условию $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_\varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y_\varepsilon(t) = 0$. Исследование

поведения решений в некоторой расширенной окрестности двоякоасимптотического решения проводилось в [106], где было установлено существование нетривиального гиперболического множества в окрестности гомоклинической орбиты. В некоторых случаях окрестность сепаратрисы является притягивающей. Тогда приходим к нерегулярному аттрактору, для которого используют термины "квазиаттрактор" или "странный аттрактор". Подобную ситуацию мы рассмотрим на примере уравнения (2.21).

2.4.1 Пример 1. Квазипериодическое уравнение типа Дуффинга-Ван дер Поля

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = \varepsilon[(p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 \sin t \sin \nu t], \quad (2.15)$$

$\nu = \sqrt{5}$. Если $\alpha = -1$, тогда невозмущенное уравнение имеет три состояния равновесия – седло и два центра. Сепаратрисы седла образуют две гомоклинические петли ("восьмерка" седла), которые разбивают фазовое пространство на три области, заполненные замкнутыми траекториями. Если $\alpha = 1$, то существует одно состояние равновесия типа центр, окруженное замкнутыми фазовыми кривыми и, соответственно, одна такая область. Для удобства, когда мы изучаем глобальное поведение решений (2.15) в D , мы полагаем $\alpha = 1$ (поведение решений в каждой из трех ячеек для $\alpha = -1$ может быть изучено аналогично). Для $\alpha = -1$ мы будем исследовать только окрестность невозмущенных сепаратрис.

Итак, пусть сначала $\alpha = 1$.

Автономное уравнение

Невозмущенное уравнение ($\varepsilon = 0$) допускает первый интеграл

$$H(x, y) = \dot{x}^2/2 + x^2/2 + x^4/4 = h, h > 0$$

и имеет решение

$$x(\theta, I) = x_1 \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\theta/\pi), \theta = \omega t,$$

где $\omega = \pi(1+4h)^{1/4}/(2\mathbf{K})$ есть собственная частота, x_1 – положительный корень уравнения $x^2/2 + x^4/4 = h$, $\operatorname{cn}(u)$ – эллиптическая функция Якоби, \mathbf{K} – полный эллиптический интеграл первого рода, $k = k(h)$ – его модуль. Рассмотрим кольцевую область фазовой плоскости $\{(x, y) : H(x, y) = h, 0 < h_- < h < h_+ < \infty\}$.

Возмущенная автономная система (2.4) в нашем случае принимает вид ($p_2 = 0$)

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x - x^3 + \varepsilon[(p_1 - x^2)y] \quad (2.16)$$

и имеет единственный предельный цикл при $p_1 > 0$. Это следует из анализа порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина, которая имеет следующий вид (с точностью до положительного множителя $4/(3\pi(1 - 2\rho)^{5/2})$)

$$B_0(\rho) = p_1[(1 - \rho)(1 - 2\rho)\mathbf{K} - (1 - 2\rho)^2\mathbf{E}] - \frac{2}{5}[(\rho - 1)(2 - \rho)\mathbf{K} + 2(\rho^2 - \rho + 1)\mathbf{E}],$$

где \mathbf{E} – полный эллиптический интеграл второго рода, $\rho = k^2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4h}}{2\sqrt{1+4h}}$.

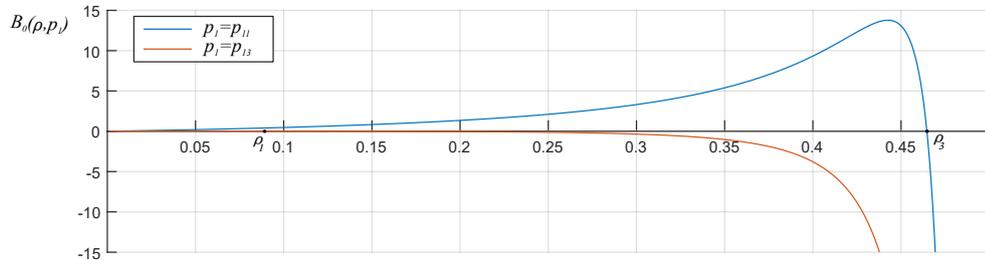


Рисунок 2.4 – $B_0(\rho; p_{11})$ и $B_0(\rho; p_{12})$ ($p_{11} < p_{12}$).

Пусть $\rho_* \in (0, 1/2)$ – единственный простой нуль функции $B_0(\rho)$. Нетрудно видеть, что $p_1 \rightarrow \infty$ при $\rho_* \rightarrow 0$ и $p_1 \rightarrow +0$ при $\rho_* \rightarrow 1/2$. Как известно ρ_* определяет уровень энергии невозмущенной системы, от которого рождается грубый предельный цикл в уравнении (2.16). Если $B'(\rho_*) < 0$ и $\varepsilon > 0$, то цикл устойчивый. Знак $B'(\rho_*)$ совпадает со знаком $\sigma(\rho_*)$, где

$$\sigma(\rho) = p_1 - \frac{2}{(1 - 2\rho)\mathbf{K}}[\mathbf{E} - (1 - \rho)\mathbf{K}]. \quad (2.17)$$

На рис. 2.4 показана функция $B_0(\rho; p_1)$ для двух значений p_1 : $p_{11} < p_{12}$. Простые корни уравнения $B_0(\rho; p_1) = 0$ соответствуют грубым предельным циклам в (2.16) [88].

Неавтономное уравнение

Поведение решений в окрестности индивидуального резонансного уровня описывается усредненной системой (2.8), где

$$A(v, I_{nk}) = B_0 + \frac{p_2}{4\pi^2 n^2} \int_0^{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin \theta_1 \sin \theta_2 x'_\theta (v + (k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2)/n) d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \begin{cases} B_0 + p_2 \sqrt{2} (k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2) \frac{a^{n/2}}{1+a^n} \sin nv & \text{if } n \text{ is odd, } k_1 = \pm 1, k_2 = 1, \\ B_0 & \text{if } n \text{ is even or } k_1 \neq \pm 1, k_2 \neq 1. \end{cases}$$

$\sigma(I_{nk})$ определяется формулой (2.17).

Из условия $\omega = (\pm 1 + \sqrt{5})/n$ и $\omega > 1$ находим, что возможны только три "расщепляемых" резонансных уровня $H(x, y) = h_{311}$, $H(x, y) = h_{1,-1,1}$, $H(x, y) = h_{111}$ ($h_{311} < h_{1,-1,1} < h_{111}$). Таким образом, мы имеем уравнение

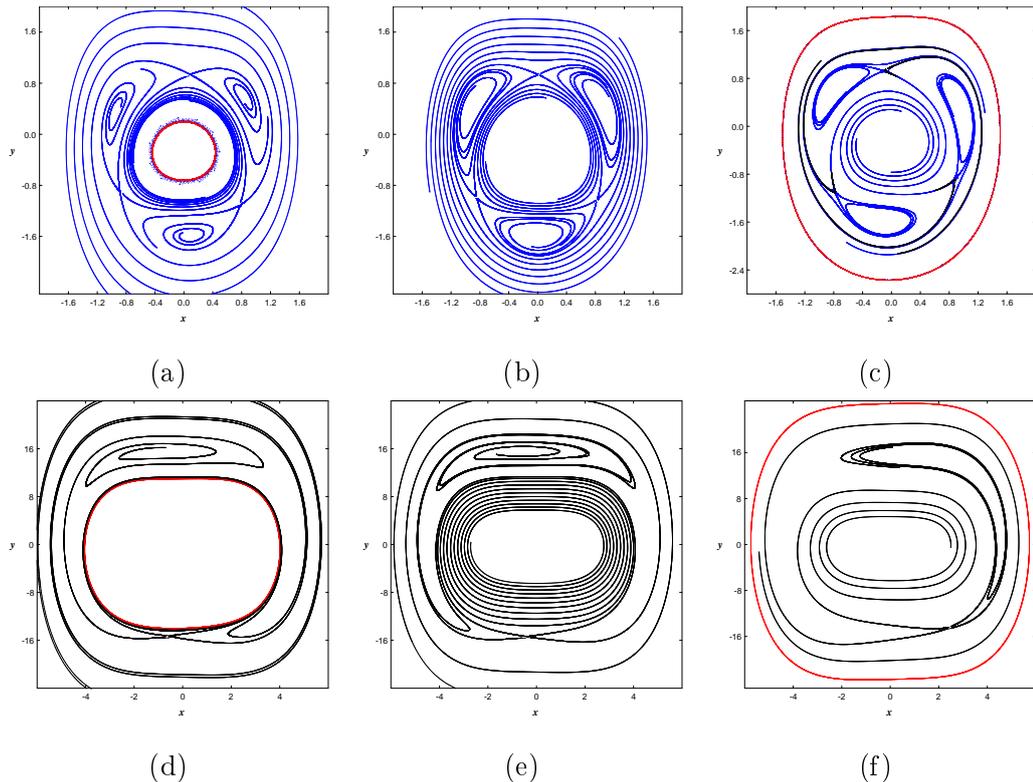


Рисунок 2.5 — Фазовые портреты (2.8) в плоскости (x, y) в окрестностях уровней $H(x, y) = h_{311}$: (a), (b), (c) $H(x, y) = h_{111}$: (d), (e), (f).

$u' = B_0 + \mu \sigma u$ для почти всех индивидуальных уровней, кроме вышеупомянутых. Если $B_0(I_0) \neq 0$, тогда уровень $I = I_0$ проходимый, т.е. решения покидают его окрестность за конечное время. Если $B_0(I_0) = 0$ и $\sigma(I_0) < 0$ (автономная система (2.16) имеет устойчивый предельный цикл в окрестности уровня

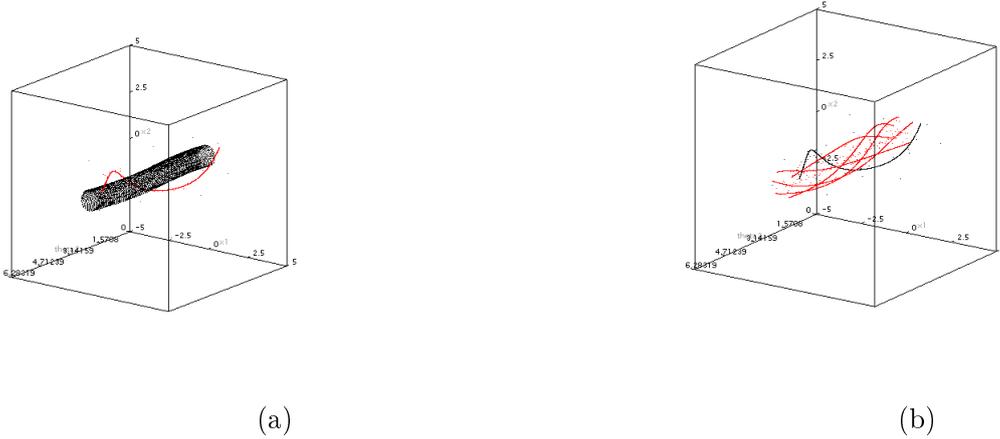


Рисунок 2.6 — Траектории трехмерного отображения секущей $\theta_1 = const$ (отображения Пуанкаре) для системы (2.1), записанной в расширенном фазовом пространстве.

$I = I_0$), тогда $u = 0$ является устойчивым состоянием равновесия. Это означает, что существует 3-мерный устойчивый тор в системе (2.3) (см. Теорема 3). При изменении p_1 можно наблюдать бифуркации, происходящие при прохождении этого тора через резонанс. На рис. 2.5 показаны фазовые портреты усредненной системы для резонансов с $n = 3$ и $n = 1, k_1 = 1$. Наблюдаем устойчивый предельный цикл усредненной системы для $\varepsilon = 0.1, p_1 = 0.005, n = 3$ (Рис. 2.5(a)). Цикл соответствует 3-мерному тору в исходной системе (2.3). При увеличении p_1 цикл попадает в окрестность резонансного уровня $I = I_{311}$ ($H(x, y) = h_{311}$). Прохождение через резонансную зону мы описали в параграфе 2.3. На рис. 2.5(b) отсутствуют циклы и колебания синхронизируются для частот $\omega_1/3, \omega_2/3$. Далее, при дальнейшем увеличении p_1 цикл выходит вне резонанса (рис. 2.5(c)), где $p_1 = 0.06$). Цикл растет с ростом p_1 и приближается к резонансному уровню $H(x, y) = h_{1,-1,1}$. Далее цикл проходит через резонансную зону и, наконец, через резонансную зону $H(x, y) = h_{111}$ (см. рис. 2.5(d-f)). Динамика усредненной системы в окрестности $H(x, y) = h_{1,-1,1}$ подобна динамике в окрестности уровня $H(x, y) = h_{111}$. На Рис. 2.6 показаны траектории трехмерного отображения Пуанкаре секущей $\theta_1 = const$. Рис. 2.6 (a) и (b) соответствуют Рис. 2.5 (a) и (b) соответственно.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = \varepsilon[(p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 \sin t \sin \nu t],$$

$\nu = \sqrt{5}$ при $\alpha = -1$ и исследуем поведение решений в окрестности невозмущенных сепаратрис.

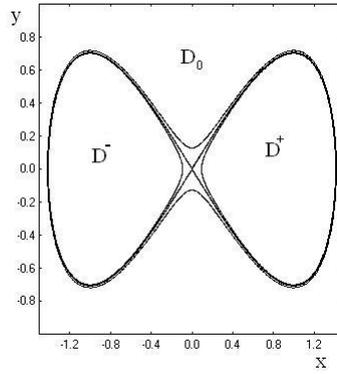


Рисунок 2.7 — Сепаратрисы и близкие к ним траектории системы (2.17) при $\alpha = -1$ и $\varepsilon = 0$.

Седло невозмущенной системы лежит в начале координат. Для фиксации седлового решения при $\varepsilon \neq 0$ сделаем замену $x = \xi + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2)$. Тогда с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ мы получаем следующее уравнение

$$\ddot{\xi} - \xi + \xi^3 = \varepsilon[(p_1 - \xi^2)\dot{\xi} - 3\xi^2 x_1(t)],$$

где

$$x_1(t) = \frac{p_2}{2} \left[\frac{\cos(1 - \nu)t}{1 + (1 - \nu)^2} + \frac{\cos(1 + \nu)t}{1 + (1 + \nu)^2} \right].$$

Положим $\theta_{10} = \theta_{20} = 0$, тогда

$$\Delta_\varepsilon(t_0) = \varepsilon \Delta_0(t_0) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\Delta_0(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [(p_1 - \xi_s^2(t - t_0))\dot{\xi}_s(t - t_0) - 3\xi_s^2(t - t_0)x_1(t)] \dot{\xi}_s(t - t_0) dt.$$

Здесь

$$\xi_s(t) = \pm \sqrt{2} / \cosh t, \quad \dot{\xi}_s(t) = \mp \sqrt{2} \sinh(t) // \cosh^2 t$$

решение на сепаратрисе невозмущенного уравнения. Знак "+" соответствует правой сепаратрисной петле, знак "-" — левой петле.

Приведем результат вычисления выражения для функции Мельникова

$$\Delta_0(t_0) = 5p_1 - 4 + p_2 \frac{\pi\sqrt{2}}{2} [B_1 \sin(1 + \nu)t_0 + B_2 \sin(1 - \nu)t_0], \quad (2.18)$$

где

$$B_{1,2} = \frac{(1 \pm \nu)}{\cosh((1 \pm \nu)\pi/2)}.$$

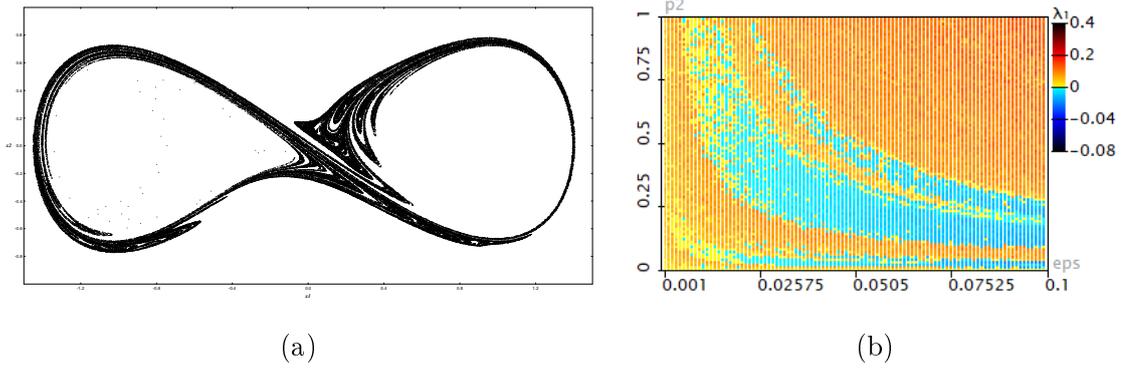


Рисунок 2.8 — Нерегулярное отталкивающее множество (а) и карта старшего показателя Ляпунова на плоскости (ε, p_2) (b).

Отметим, что функция Мельникова квазипериодическая, также как и возмущение. Из (2.18) следует, что при $|p_1| < (3/8)\sqrt{2\pi}|p_2|\sqrt{B_1^2 + B_2^2}$ функция $\Delta_0(t_0)$ знакопеременная и, поэтому, $W_\varepsilon^s \cap W_\varepsilon^u \neq \emptyset$. Это означает существование гомоклинических (по терминологии Пуанкаре) решений к седловому решению при достаточно малом ε . Они соответствуют гомоклиническим орбитам отображения Пуанкаре. Структура окрестности таких орбит была изучена Шильниковым Л.П. [106], в частности, было установлено, что в их окрестности существует нетривиальное гиперболическое множество.

Неустойчивый предельный цикл автономной возмущенной системы, полученной из исходной формальной процедурой усреднения ($p_2 = 0$), сливается с сепаратрисами и формирует неустойчивую сепаратрисную петлю при $p_1 = 4/5$. В этом случае свободный член в функции Δ_0 исчезает и появляется нерегулярное отталкивающее множество (репеллер)³. Такое множество показано на рис. 2.8(a) для $\varepsilon = 0.1, p_1 = 0.8, p_2 = 0.8$ (дробная часть ляпуновской размерности равна ≈ 0.826). На рис. 2.8(b) показан старший ляпуновский показатель λ_1 в плоскости (ε, p_2) для $p_1 = 0.8$. Представлены области с $\lambda_1 < 0$, которые соответствуют регулярному асимптотическому поведению ($t \rightarrow -\infty$) в окрестности невозмущенных сепаратрис (неустойчивые квазипериодические решения).

³Заменив $t \rightarrow -t$ можно сделать это множество устойчивым (так называемый "квазиаттрактор" [88]).

2.5 Квазипериодические параметрические возмущения

Рассмотрим системы вида (2.1), в которых возмущение содержит слагаемые вида

$$a(t)g_1(x, \dot{x})$$

где $a(t)$ – квазипериодическая функция. Такие возмущения, по аналогии с периодическим случаем, мы будем называть параметрическими. Более того, мы предполагаем, что данные параметрические слагаемые являются нелинейными по фазовым переменным. Исследование иллюстрируется на примере:

$$\ddot{x} + x + x^3 = \varepsilon((1 - p_1x^2)\dot{x} + p_2(1 + x\dot{x})a(t)), \quad (2.19)$$

где p_i – постоянные, $a(t) = \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t$ (ω_1 и ω_2 предполагаются несоизмеримыми, например, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{5}$). Слагаемое, пропорциональное p_2 , является неавтономным нелинейным. По введенной терминологии такое слагаемое будем называть параметрическим. Определим влияние таких слагаемых на топологию резонансной зоны. При отсутствии параметрических членов уравнение такого вида рассматривалось в предыдущем разделе. Заметим, что линейные системы с квазипериодическими коэффициентами исследовались в работе [37].

Как и ранее, мы предполагаем выполненным следующее условие

$$\partial g / \partial x + \partial f / \partial y \neq 0,$$

которое означает неконсервативность системы (2.1).

При исследовании (2.19) мы опираемся на пп. 2.3, где установлено существование резонансных инвариантных m -мерных торов и нерезонансных $(m + 1)$ -мерных "колмогоровских" торов. В данном разделе мы устанавливаем влияние параметрических членов на топологию резонансной зоны. Оказывается, что они приводят к существованию $(m + 1)$ -мерных инвариантных торов нового типа, которые отличны от колмогоровских, и порождены грубыми предельными циклами в колебательной области усредненной в окрестности резонансного индивидуального уровня энергии системы (2.8).

Используя формулу для дивергенции системы (2.8), нетрудно установить справедливость следующего утверждения.

Лемма. Если дивергенция векторного поля системы (2.8) зависит от v , то дивергенция векторного поля исходной системы (2.1) содержит слагаемые, которые зависят как от времени t , так и от одной или обеих координат.

Во многих случаях верно обратное, например для (2.19). Отсюда следует, что для явной зависимости функции $\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})$ от v , необходимо наличие в возмущении параметрических членов.

Обратимся к исследованию системы (2.8) в этом случае. Поскольку система (2.8) по виду аналогична усредненной системе, полученной в случае периодических возмущений, то воспользуемся результатами из [24; 88; 95]. Справедливы представления

$$\begin{aligned} A_0(v; I_{n\mathbf{k}}) &= A_*(v; I_{n\mathbf{k}}) + B_0(I_{n\mathbf{k}}), & B_0 &= \langle A_0 \rangle_v, \\ \sigma(v; I_{n\mathbf{k}}) &= \sigma_*(v; I_{n\mathbf{k}}) + B_1(I_{n\mathbf{k}}), & B_1 &= \langle \sigma \rangle_v, \end{aligned}$$

где $B_0(I_{n\mathbf{k}})$ – значение порождающей функции $B_0(I)$ для автономной системы (2.4), а B_1 – ее производная [95]. Предположим, что выполнено условие

$$0 < |B_1(I_{n\mathbf{k}})| < \max_v |\sigma_*(v, I_{n\mathbf{k}})|. \quad (2.20)$$

Тогда функция $\sigma(v, I_{n\mathbf{k}})$ знакопеременная и система (2.8) может иметь предельные циклы, которые охватывают фазовый цилиндр.

Пусть также функция $A_0(v; I_{n\mathbf{k}})$ имеет простые нули (так называемый случай "общего положения"), т.е. выполнено условие

$$|B_0(I_{n\mathbf{k}})| < \max_v |A_*(v, I_{n\mathbf{k}})|.$$

Тогда, как уже отмечалось, система (2.8) имеет простые состояния равновесия для достаточно малого ε .

Из второй теоремы Боголюбова [55, стр. 382] можно заключить, что верно следующее утверждение⁴

Теорема 5. Предположим, что усредненная система (2.8) имеет грубый предельный цикл с частотой Ω_0 . Тогда в системе (2.1) существует квазипериодическое решение $x_{n\mathbf{k}}(t), y_{n\mathbf{k}}(t)$ с частотами $(\Omega_0\sqrt{\varepsilon}, \omega_1, \dots, \omega_m)$, если ε достаточно мало. Соответственно в системе (2.3) существует $(m + 1)$ -мерный тор T_* , который устойчивый, если предельный цикл устойчивый.

⁴Формально результат Боголюбова применим к системам $\dot{x} = \varepsilon X(t, x)$, но обобщается на системы вида $\dot{x} = \varepsilon X(t, x, \varepsilon)$ (см. [55, р.386]). При этом, если система первого приближения имеет нулевые вещественные части характеристических показателей, то следует рассматривать приближение более высокого порядка. Эта ситуация имеет место в нашем случае.

Тор T_* мы называем неколмогоровским, ибо для него нет порождающей замкнутой траектории в невозмущенной системе.

Мы будем различать случаи:

- a) $B(I_{nk}) \neq 0$;
- b) $B(I_{nk}) = 0$.

В первом случае система (2.4) не имеет предельного цикла в окрестности уровня $H(x,y) = h_{nk}$, а во втором случае единственный такой цикл существует, если $B_1(I_{nk}) \neq 0$.

Случай А. Возможное качественное поведение фазовых кривых системы (2.8) при $B(I_{nk}) \neq 0$ показано на рис. 2.9. Простые состояния равновесия

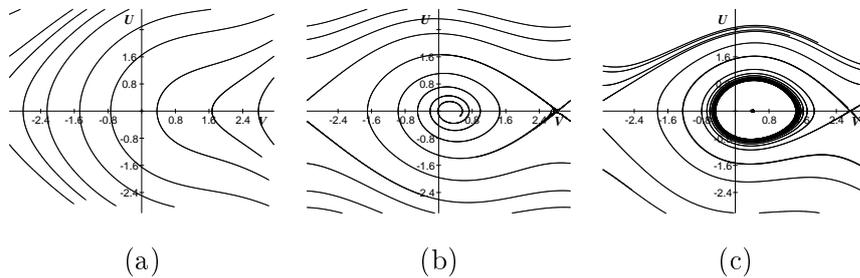


Рисунок 2.9 —

системы (2.8) (рис. 2.9(b,c)) соответствуют квазипериодическим решениям системы (2.1). Отметим, что если (2.8) не имеет состояний равновесия, тогда не существует квазипериодических решений для достаточно малых μ в окрестности резонансного уровня $I = I_{nk}$ и он является проходимым (рис. 2.9(a)). Если (2.20) выполняется, тогда в системе (2.8) может существовать предельный цикл (рис. 2.9(c)). Для определения этого цикла необходимо построить порождающую функцию Пуанкаре-Понтрягина для усредненной системы (детали см. в [24; 88]).

Случай В. В системе (2.8) существуют состояния равновесия и мы имеем третий тип резонансной зоны – непроходимую резонансную зону. Рисунок 2.10 показывает возможные фазовые портреты системы (2.8) в этом случае.

Бифуркации, связанные с рождением и исчезновением предельного цикла у усредненной системы (2.8), также как в случае А, приводят к анализу порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина. Однако, в отличие от случая А, здесь возможно существование предельных циклов как в колебательной, так и во вращательной областях, для которых нет порождающих предельных циклов в автономной системе (2.4).

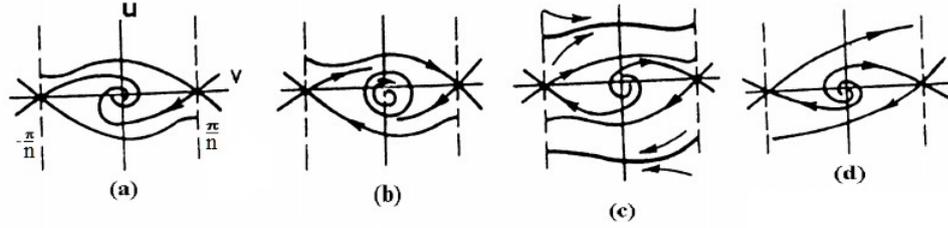


Рисунок 2.10 —

2.5.1 Пример 2. Параметрическое возмущение

Исследуем систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x - x^3 + \varepsilon((p_1 - x^2)y + p_2(1 + xy)a(t)),\end{aligned}$$

эквивалентную уравнению Дюффинга-Ван дер Поля. Невозмущенная система ($\varepsilon = 0$) допускает первый интеграл $H(x, y) = y^2/2 + x^2/2 + x^4 = h, h > 0$. Обозначим, как и раньше, через D кольцевую область фазовой плоскости: $0 < h^0 \leq h \leq h^+ < \infty$.

Напомним, что решение невозмущенного уравнения имеет вид

$$x(\theta, I) = x_1 \operatorname{cn} 2\mathbf{K}\theta/\pi, \theta = \omega t,$$

где $\omega = \pi(1 + 4h)^{1/4}/(2\mathbf{K})$ — частота движения на замкнутых фазовых траекториях $h = h(I)$, x_1 — положительный корень уравнения $x^2/2 + x^4/4 = h$, cni — эллиптический косинус Якоби, \mathbf{K} — полный эллиптический интеграл 1-ого рода, $k = k(h)$ — его модуль

Автономная система ($p_2 = 0$)

$$\dot{x} = y, \dot{y} = -x - x^3 + \varepsilon[(p_1 - x^2)y]$$

имеет единственный устойчивый предельный цикл, если $p_1 > 0$. Это следует из анализа порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина, которая с точностью до положительного множителя $4/(3\pi(1 - 2\rho)^{5/2})$ имеет вид [88]

$$\begin{aligned}B_0(\rho) &= p_1[(1 - \rho)(1 - 2\rho)\mathbf{K} - (1 - 2\rho)^2\mathbf{E}] + \\ &+ \frac{2}{5}[(\rho - 1)(2 - \rho)\mathbf{K} + 2(\rho^2 - \rho + 1)\mathbf{E}],\end{aligned}$$

где \mathbf{E} – полный эллиптический интеграл 2-ого рода, $\rho = k^2 = \frac{-1+\sqrt{1+4h}}{2\sqrt{1+4h}}$. Так как $B_0(\rho)$ зависит от параметра p_1 , то имеем однопараметрическое семейство функций. Можно доказать, что при каждом значении параметра p_1 данная функция имеет единственный простой нуль, который, как известно [88], определяет уровень энергии в невозмущенной системе, от которого родится предельный цикл при достаточно малых ε . Обозначим этот нуль порождающей функции через $\rho_* \in (0, 1/2)$. Если $p_1 \rightarrow \infty$, то $\rho_* \rightarrow 0$, если $p_1 \rightarrow +0$, то $\rho_* \rightarrow 1/2$. При $\sigma = B'(\rho_*) < 0$ и $\varepsilon > 0$ предельный цикл будет устойчивым. Вычисление σ дает

$$\sigma = p_1 - \frac{2}{(1-2\rho)\mathbf{K}}[\mathbf{E} - (1-\rho)\mathbf{K}]. \quad (2.21)$$

Теперь обратимся к неавтономной системе. Вычисления дают следующие выражения для $A(v, I_{n\mathbf{k}})$, $\sigma(v; I_{n\mathbf{k}})$:

$$A(v, I_{n\mathbf{k}}) = B(I_{n\mathbf{k}}) + p_2 \begin{cases} -k_1 C_1 \cos nv + C_2 \sin nv, & k_1 = k_2 = 1, n \text{ is odd} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\sigma = B_1(I_{n\mathbf{k}}) - p_2 \begin{cases} C_3 \cos(nv), & k_1 = k_2 = 1, n \text{ is odd} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}.$$

где $C_1 = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos(n\theta)x(\theta)x'^2(\theta)d\theta$, $C_2 = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin(n\theta)x'(\theta)d\theta$,
 $C_3 = \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \cos(n\theta)x(\theta)d\theta$,

$$B_1 = \frac{1}{4\pi^2 n^2} \int_0^{2\pi n} \int_0^{2\pi n} [1 - p_1 x^2(v + (\theta_1 + \theta_2)/n)] d\theta_1 d\theta_2.$$

Перепишывая систему (2.8) в виде уравнения, получим, что поведение решений в окрестностях расщепляемых индивидуальных резонансных уровней

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} - b_1 [B(I_{n\mathbf{k}}) - p_2 C_1 \cos nv + p_2 C_2 \sin nv] = \mu (B_1(I_{n\mathbf{k}}) - p_2 C_3 \cos nv) \frac{dv}{d\tau}. \quad (2.22)$$

Для целых значений n , отличных от 1 и 3, мы имеем $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Тогда, если $B(I_{n\mathbf{k}}) \neq 0$, то имеем проходимые резонансы.

Перепишем уравнение (2.22) в виде

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + P_1 + P_2 \sin nv + P_3 \cos nv = (P_4 + P_5 \cos nv) \frac{dv}{d\tau}, \quad (2.23)$$

где $P_1 = -b_1 B(I_{n\mathbf{k}})$, $P_2 = -b_1 p_2 C_2$, $P_3 = b_1 p_2 C_1$, $P_4 = \mu B_1(I_{n\mathbf{k}})$, $P_5 = -\mu p_2 C_3$. На рис. 2.11 показан фазовый портрет уравнения (2.23) при $n = 3$, $P_1 =$

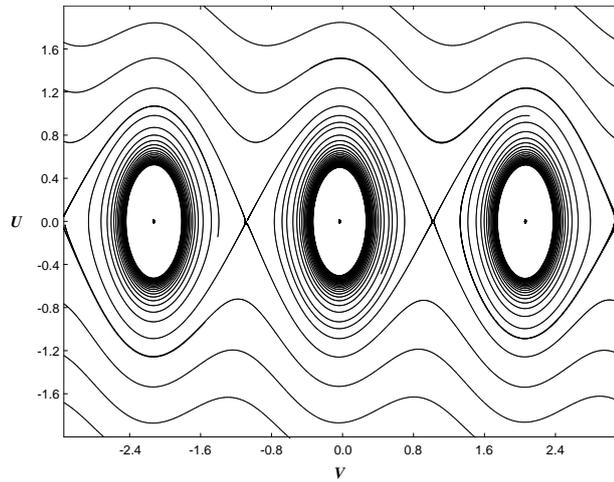


Рисунок 2.11 —

$0, P_2 = 1, P_3 = 0.2, P_4 = -0.1, P_5 = 0.15$, полученный с помощью программы WInSet [70]. Заметим, что значение $P_1 = 0$ соответствует $p_1 \approx 18$ в исходной системе, значение p_2 также может быть найдено из представленных выше выражений. При изменении параметров нетрудно построить фазовые портреты, аналогичные представленным на рис. 2.10. В случае А, когда $B(I_{nk}) \neq 0$, исследование порождающего уравнения для усредненной системы связано с трудностями ввиду отсутствия явного выражения для решения невозмущенного уравнения.

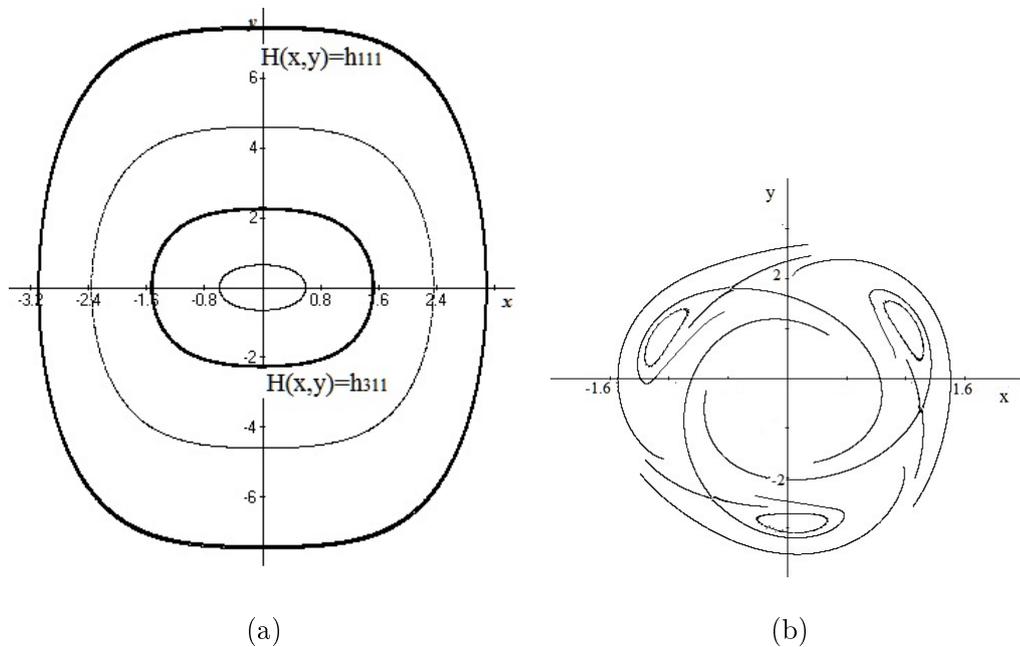


Рисунок 2.12 —

На рис. 2.12(а) показан фазовый портрет невозмущенного уравнения Дюффинга. Выделены резонансные уровни $H(x, \dot{x}) = h_{111}, H(x, \dot{x}) = h_{311}$. На рис.

2.12(b) показан качественный фазовый портрет усредненной системы (2.22) в окрестности $H(x,y) = h_{311}$, этот рисунок соответствует рисунку 2.11.

Заключение

В данной диссертационной работе изучаются непрерывные двумерные динамические системы, уравнения которых зависят явно от времени. Рассматриваются два класса систем, различаемые по характеру зависимости от времени: транзиторные и квазипериодические.

Неавтономным на конечном промежутке (транзиторным) системам посвящена первая глава диссертации. Их исследование является новой тематикой, слабо освещенной в математической литературе. Лишь небольшое число работ посвящено изучению предельного случая, так называемых асимптотически автономных систем, когда время перехода стремится к бесконечности. В то же время, многие реальные объекты подвергаются каким-либо перестройкам и изучение их влияния на поведение этих объектов представляет интерес. В работе рассмотрены примеры неконсервативных систем, актуальные для приложений, в которых может возникать подобный транзиторный сдвиг. Для этих систем исследуются автономные векторные поля, определяющие динамику вне промежутка неавтономности, а затем определяются области начальных условий, соответствующие смене динамического режима.

Вторая глава диссертации посвящена неконсервативным квазипериодическим возмущениям двумерных гамильтоновых систем. Это исследование является обобщением теории периодических возмущений, рассмотрение которых приводит к трехмерным автономным системам и, соответственно, к двумерным отображениям секущей. Это значительно облегчает исследование. Мы показали, что изучение резонансов в случае m -частотных возмущений ($m > 1$) можно свести к исследованию двумерных усредненных систем на цилиндре. Это позволило решить поставленные в диссертационной работе задачи. Несмотря на наличие работ, где рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, в правые части которых входят квазипериодические функции времени, задача о поведении решений квазипериодических систем, близких к консервативным до сих пор не была в полной мере исследована. Указанные работы посвящены лишь частным вопросам или исследованию конкретных систем. В общей постановке задача решена в диссертации.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Найдены бифуркационные множества параметров и построены бифуркационные диаграммы для автономных "прошлого" и "будущего" векторных полей в задаче о транзиторном сдвиге для а) транзиторной системы типа Дуффинга-Ван дер Поля; б) транзиторного уравнения маятникового типа; в) транзиторной системы ФитцХью-Нагумо. Построены качественные фазовые портреты в областях с качественно различным поведением. Указаны области начальных условий, которые соответствуют смене динамического режима для решений. Для численного построения этих областей разработана компьютерная программа.
2. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены общие условия существования и устойчивости m -частотных квазипериодических решений в резонансных случаях, когда собственная частота невозмущенной системы и частоты квазипериодического возмущения соизмеримы.
3. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены общие условия существования и устойчивости $(m + 1)$ -частотных квазипериодических решений в резонансных случаях, когда собственная частота невозмущенной системы и частоты квазипериодического возмущения соизмеримы. Указано, что такие решения возникают при параметрическом резонансе.
4. Для двумерных нелинейных систем, близких к гамильтоновым, при малых квазипериодических m -частотных возмущениях установлены общие условия существования и устойчивости $(m + 1)$ -частотного квазипериодического решения в нерезонансном случае.
5. Установлены бифуркации в резонансных зонах, происходящие при изменении расстройки между резонансным уровнем энергии невозмущенной системы и уровнем, в окрестности которого рождается предельный цикл возмущенной автономной системы (решена задача о синхронизации квазипериодических колебаний).
6. Проведено исследование глобального поведения решений в замкнутых областях, заполненных замкнутыми фазовыми траекториями невозмущенной системы (в частности, установлена конечность расщепляемых резонансов) и в окрестностях невозмущенных сепаратрис (определены

условия существования квазиаттрактора). Исследование иллюстрируется на примере квазипериодического уравнения типа Дуффинга–Ван дер Поля.

Автор выражает благодарность и большую признательность Гонченко Сергею Владимировичу за научное руководство.

Список литературы

1. *Astashova, I. V.* Asymptotic Behavior of Singular Solutions of Emden-Fowler Type Equations / I. V. Astashova // Differential Equations. — 2019. — Vol. 55, no. 5. — P. 581—590.
2. *Astashova, I. V.* Asymptotic Classification of Solutions of Singular 4th-Order Emden–Fowler Equations with a Constant Negative Potential / I. V. Astashova // Journal of Mathematical Sciences. — 2018. — Vol. 234, no. 4. — P. 385—396.
3. *Belykh, V. N.* Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case / V. N. Belykh, N. F. Pedersen, O. H. Sorensen // Physical Review B Condensed Matter. — 1977. — Vol. 16, no. 11. — P. 4853—4859.
4. *Belykh, V. N.* Shunted-Josephson-junction model. I. The nonautonomous case / V. N. Belykh, N. F. Pedersen, O. H. Sorensen // Physical Review B Condensed Matter. — 1977. — Vol. 16, no. 11. — P. 4860—4871.
5. *Berger, M. S.* Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equations / M. S. Berger, Y. Y. Chen // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 1992. — Vol. 19, no. 3. — P. 249—257.
6. *Fitzhugh, R.* Impulses and Physiological States in Theoretical Models of Nerve Membrane / R. Fitzhugh // Biophysical journal. — 1961. — Vol. 1, no. 6. — P. 445—466.
7. *Gonchenko, S. V.* On models with non-rough Poincare homoclinic curves / S. V. Gonchenko, D. V. Turaev, L. P. Shilnikov // Physica D. — 1993. — Vol. 62, no. 1. — P. 1—14.
8. *Hale, J. K.* Oscillations in nonlinear systems / J. K. Hale. — Dover Publications, 2015. — 192 p.
9. *Henon, M.* The applicability of the third integral of motion. Some numerical experiments / M. Henon, C. Heiles // Astron. J. — 1964. — Vol. 69. — P. 73—79.
10. *Hodgkin, A. L.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / A. L. Hodgkin, A. F. Huxley // The Journal of physiology. — 1952. — Vol. 117, no. 4. — P. 500—544.

11. *Holmes, P. J.* Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations: A finite dimensional analysis / P. J. Holmes // J. Sound Vibration. — 1977. — Vol. 53, no. 4. — P. 471—503.
12. *Holmes, P. J.* Revisiting a magneto-elastic strange attractor / P. J. Holmes, J. I. Tam // Journal of Sound and Vibration. — 2014. — Vol. 333, no. 6. — P. 1767—1780.
13. *Izhikevich, E. M.* Dynamical systems in neuroscience: the geometry of excitability and bursting / E. M. Izhikevich. — London: The MIT press, 2007. — 487 p.
14. *Jing, Z.* Complex dynamics in three-well duffing system with two external forcing / Z. Jing, J. Huang, J. Deng // Chaos, Solitons and Fractals. — 2007. — Vol. 33. — P. 795—812.
15. *Jing, Z.* Complex dynamics in Duffing–Van der Pol equation / Z. Jing, Z. Yang, T. Jiang // Chaos, Solitons and Fractals. — 2006. — Vol. 27. — P. 722—747.
16. *Leech, C. M.* Limit cycle stability of aerodynamically induced yaw oscillations / C. M. Leech // Int.J.Mech.Sci. — 1979. — Vol. 21, no. 9. — P. 517—525.
17. *Lerman, L. M.* Homo- and heteroclinic orbits, hyperbolic subsets in a one-parameter unfolding of a Hamiltonian system with two saddle-foci / L. M. Lerman // Regular and Chaotic Dynamics. — 1997. — Vol. 2, no. 4. — P. 447—457.
18. *Lerman, L. M.* Complex dynamics and bifurcations in a Hamiltonian system having atransversal homoclinic orbit to a saddle-focus / L. M. Lerman // Chaos: Int.J. Nonlin. Sci. — 1991. — Vol. 1. — P. 174—180.
19. *Lerman, L. M.* Dynamical Phenomena near a Saddle-Focus Homoclinic Connection in a Hamiltonian System / L. M. Lerman // J. Stat. Physics. — 2000. — Vol. 15. — P. 447—457.
20. *Lerman, L. M.* Almost invariant elliptic manifold in a singularly perturbed Hamiltonian system / L. M. Lerman, V. Gelfreich // Nonlinearity. — 2002. — Vol. 15. — P. 139—155.

21. *Lerman, L. M.* Nonautonomous gradient-like vector fields on the circle: classification, structural stability and autonomization / L. M. Lerman, E. V. Gubina // *Discr. Cont. Dynam. Systems-S.* — 2020. — Vol. 13, no. 4. — P. 1341–1367.
22. *Liu, B.* Quasiperiodic solutions of Duffing's Equations / B. Liu, J. You // *Nonlinear Analysis.* — 1998. — Vol. 33, no. 6. — P. 545–655.
23. *Markus, L.* Asymptotically autonomous differential systems / L. Markus // *Ann. Math. Stud.* — 1956. — Vol. 36. — P. 17–29.
24. *Morozov, A. D.* Quasi-conservative systems: cycles, resonances and chaos / A. D. Morozov. — World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1998. — 340 p.
25. *Morozov, A. D.* On Periodic Perturbations of Asymmetric Duffing-Van-der-Pol Equation / A. D. Morozov, O. S. Kostromina // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* — 2014. — Vol. 24, no. 5. — P. 5–16.
26. *Morozov, A. D.* Global Dynamics of Systems Close to Hamiltonian Ones Under Nonconservative Quasi-periodic Perturbation / A. D. Morozov, K. E. Morozov // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* — 2019. — Vol. 15, no. 2. — P. 187–198.
27. *Morozov, A. D.* On Quasi-Periodic Parametric Perturbations of Hamiltonian Systems / A. D. Morozov, K. E. Morozov // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* — 2020. — Vol. 16, no. 2. — P. 369–378.
28. *Morozov, A. D.* On Synchronization of Quasiperiodic Oscillations / A. D. Morozov, K. E. Morozov // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* — 2018. — Vol. 14, no. 3. — P. 367–376.
29. *Morozov, A. D.* Quasiperiodic Perturbations of Two-Dimensional Hamiltonian Systems / A. D. Morozov, K. E. Morozov // *Differential Equations.* — 2017. — Vol. 52, no. 12. — P. 1–10.
30. *Morozov, K. E.* Transitory Shift in the FitzHugh – Nagumo Model / K. E. Morozov // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics.* — 2018. — Vol. 14, no. 2. — P. 169–177.
31. *Mosovsky, B. A.* Transport in Transitory Dynamical Systems / B. A. Mosovsky, J. D. Meiss // *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.* — 2011. — Vol. 10, no. 1. — P. 35–65.

32. *Mosovsky, B. A.* Transport in Transitory, Three-Dimensional, Liouville Flows / B. A. Mosovsky, J. D. Meiss // SIAM J. Appl. Dyn. Sys. — 2012. — Vol. 11, no. 4. — P. 1785—1816.
33. *Ringqvist, M.* On Dynamical Behaviour of FitzHugh-Nagumo Systems / M. Ringqvist // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. — 2009. — Vol. 71, no. 8. — P. 2667—2687.
34. *Rocsoreanu, C.* The FitzHugh-Nagumo Model: Bifurcation and Dynamics / C. Rocsoreanu, A. Georgescu, N. Giurgiteanu. — Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000. — 238 p.
35. *Sanders, J. A.* Limit cycles in the Josephson equation / J. A. Sanders // SIAM J. MATH. ANAL. — 1986. — Vol. 17, no. 3. — P. 495—511.
36. *Sanders, J. A.* Melnikov's Method and Averaging / J. A. Sanders // Celestial Mech. — 1982. — Vol. 28, no. 1. — P. 171—181.
37. *Shtokalo, I. Z.* Criteria of the stability and unstability of linear differential equations with quasiperiodic coefficients / I. Z. Shtokalo // Matematicheski sbornik. — 1946. — Vol. 19, no. 2. — P. 263—286.
38. *Smale, S.* Differentiable dynamical systems / S. Smale // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967. — Vol. 73, no. 6. — P. 747—817.
39. *Struble, R. A.* Oscillations of a pendulum under parametric excitation / R. A. Struble // Quart Appl. Math. — 1963. — Vol. 21. — P. 121—131.
40. *Struble, R. A.* Resonant oscillations of the Duffing equation / R. A. Struble // Contributions to Diff. Eq. — 1964. — Vol. 2. — P. 485—489.
41. *van der Pol, B.* Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance / B. van der Pol // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. — 1927. — T. 3, № 13. — С. 65—80.
42. *Wiggins, S.* Chaotic Transport in Dynamical Systems / S. Wiggins. — Springer-Verlag: New York, 1992. — 301 p.
43. *Wiggins, S.* Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos / S. Wiggins. — Springer-Berlin, 1990. — 843 p.
44. *Андронов, А. А.* К теории захватывания Ван дер Поля / А. А. Андронов, А. А. Витт // Собрание трудов Андропова А. А. — М.: Изд. АН СССР, 1956. — С. 51—64.

45. *Андронов, А. А.* Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Хайкин. — Москва : Наука, 1981. — 916 с.
46. *Анищенко, В. С.* Стохастические колебания в радиофизических системах. Ч 1. / В. С. Анищенко. — Саратов: Изд-во СГУ, 1985. — 180 с.
47. *Арнольд, В. И.* Доказательство теоремы Колмогорова о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона / В. И. Арнольд // УМН. — 1963. — Т. 18, № 5. — С. 13—40.
48. *Арнольд, В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
49. *Асташова, И. В.* О существовании решений с нестепенным поведением уравнения Эмдена–Фаулера высокого порядка / И. В. Асташова, М. Ю. Васильев // Дифференциальные уравнения. — 2019. — Т. 55, № 6. — С. 896—897.
50. *Баутин, Н. Н.* Качественное исследование одной нелинейной системы / Н. Н. Баутин // ПММ. — 1975. — Т. 39, № 4. — С. 633—641.
51. *Баутин, Н. Н.* Об аппроксимации и грубости пространства параметров динамической системы / Н. Н. Баутин // ПММ. — 1969. — Т. 33, № 6. — С. 969—988.
52. *Баутин, Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости / Н. Н. Баутин. — М.: Наука, 1984. — 176 с.
53. *Баутин, Н.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М: Наука, 1990. — 483 с.
54. *Биркгоф, Д. Д.* Динамические системы / Д. Д. Биркгоф. — Москва-Ижевск, 2001. — 407 с.
55. *Боголюбов, Н. Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — Москва: Госиздательство физико-математической литературы, 1958. — 408 с.
56. *Веселов, А. П.* Интегрируемые отображения / А. П. Веселов // УМН. — 1962. — Т. 17, № 6. — С. 3—126.

57. *Волосов, В. М.* Методы осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. — М.: Изд-во МГУ, 1971. — 507 с.
58. *Гаврилов, Н. К.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой I / Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников // Матем. сб. — 1972. — Т. 88, № 4. — С. 475—492.
59. *Гаврилов, Н. К.* О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой II / Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников // Матем. сб. — 1973. — Т. 90, № 1. — С. 139—157.
60. *Гонченко, С. В.* Динамические явления в многомерных системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре / С. В. Гонченко, Д. В. Тураев, Л. П. Шильников // Докл. РАН. — 1993. — Т. 330, № 2. — С. 144—147.
61. *Гонченко, С. В.* О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре / С. В. Гонченко, Д. В. Тураев, Л. П. Шильников // ДАН СССР. — 1991. — Т. 320, № 2. — С. 269—272.
62. *Гребенников, Е. А.* Метод усреднения в прикладных задачах / Е. А. Гребенников. — М.: Наука, 1986. — 256 с.
63. *Гребенников, Е. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем / Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов. — М.: Наука, 1979. — 431 с.
64. *Гребенников, Е. А.* Резонансы и малые знаменатели в небесной механике / Е. А. Гребенников, Ю. А. Рябов. — М.: Наука, 1976. — 126 с.
65. *Грищенко, А. Д.* Динамика маятника с квазипериодическим возбуждением / А. Д. Грищенко, Д. М. Ваврив // Журнал технической физики. — 1997. — Т. 67, № 10. — С. 1—7.
66. *Гукенхеймер, Д.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. — 560 с.
67. *Демидович, Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — 480 с.
68. *Заславский, Г. М.* Физика хаоса в гамильтоновых системах / Г. М. Заславский. — Москва-Ижевск:РХД, 2004. — 286 с.

69. *Заславский, Г. М.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний / Г. М. Заславский, Б. В. Чириков // УФН. — 1971. — Т. 105, № 1. — С. 3—39.
70. Инвариантные множества динамических систем в Windows / А. Д. Морозов [и др.]. — М.: Изд-во «УРСС», 1998. — 240 с.
71. *Козлов, В. В.* Симметрии, топологии и резонансы в гамильтоновой механике / В. В. Козлов. — Ижевск: Изд-во Удмуртского университета, 1995. — 429 с.
72. *Колмогоров, А. Н.* О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона / А. Н. Колмогоров // ДАН СССР. — 1954. — Т. 98. — С. 527—520.
73. *Костромина, О. С.* О предельных циклах в асимметричном уравнении Дюффинга–Ван дер Поля / О. С. Костромина, А. Д. Морозов // Вестник ННГУ им. Лобачевского, серия Математика. — 2012. — № 1. — С. 115—121.
74. *Крылов, Н. М.* Введение в нелинейную механику / Н. М. Крылов. — М.: Изд-во АН СССР, 1937. — 365 с.
75. *Куликов, А. Н.* Нелинейный панельный флаттер. Резонансы собственных частот одна из возможных причин жесткого возбуждения колебаний / А. Н. Куликов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2011. — Т. 4, № 2. — С. 193—194.
76. *Куликов, А. Н.* Резонанс 1:3 – одна из возможных причин нелинейного панельного флаттера / А. Н. Куликов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 7. — С. 1266—1279.
77. Л. П. Шильников. Избранные научные труды / под ред. В. С. Афраймович [и др.]. — Нижний Новгород: изд-во ННГУ им. Лобачевского, 2017. — 429 с.
78. *Лерман, Л. М.* О классификации грубых неавтономных динамических систем 2-го порядка с конечным числом ячеек / Л. М. Лерман, Л. П. Шильников // ДАН СССР. — 1973. — Т. 209, № 3. — С. 544—547.
79. *Ляпунов, А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.: Л.: Гостехиздат, 1950. — 473 с.

80. *Мандельштам, Л. И.* Полное собрание трудов. Т.2. / Л. И. Мандельштам. — М.:Изд-во АН СССР, 1947. — 396 с.
81. *Мельников, В. К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях / В. К. Мельников // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1963. — Т. 12. — С. 3—52.
82. *Митропольский, Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. — Киев: Наукова Думка, 1971. — 440 с.
83. *Митропольский, Ю. А.* Интегральные многообразия в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова. — М.:Наука, 1973. — 513 с.
84. *Мищенко, Е. Ф.* Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е. Ф. Мищенко, Р. Н. Х. — М.:Наука, 1975. — 248 с.
85. *Мозер, Ю. К.* Об инвариантных кривых сохраняющего площадь отображения кольца в себя / Ю. К. Мозер // Сб. переводов Математика. — 1963. — Т. 6, № 5. — С. 51—67.
86. *Морозов, А. Д.* О предельных циклах и хаосе в уравнениях маятникового типа / А. Д. Морозов // ПММ. — 1989. — Т. 53, № 5. — С. 721—730.
87. *Морозов, А. Д.* О резонансах и хаосе в параметрических системах / А. Д. Морозов // ПММ. — 1994. — Т. 58, № 3. — С. 41—51.
88. *Морозов, А. Д.* Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах / А. Д. Морозов. — Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 424 с.
89. *Морозов, А. Д.* О квазипериодических параметрических возмущениях гамильтоновых систем / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов // Труды XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — 2019. — С. 117—118.
90. *Морозов, А. Д.* Транзиторный сдвиг в задаче о флаттере / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов // Нелинейная динамика. — 2015. — Т. 11, № 3. — С. 447—457.
91. *Морозов, А. Д.* Транзиторный сдвиг в уравнениях маятникового типа / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов // Нелинейная динамика. — 2016. — Т. 2, № 4. — С. 577—589.

92. *Морозов, А. Д.* Флаттер в транзиторных режимах / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов // Труды XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. — 2015. — С. 2632—2634.
93. *Морозов, А. Д.* О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов, Т. Н. Драгунов // Журнал СВМО. — 2020. — Т. 22, № 2. — С. 164—76.
94. *Морозов, А. Д.* О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении / А. Д. Морозов, К. Е. Морозов, Т. Драгунов // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании. Материалы XIV Международной научной конференции. — 2019. — С. 64—65.
95. *Морозов, А. Д.* К математической теории синхронизации колебаний / А. Д. Морозов, Л. П. Шильников // ДАН СССР. — 1975. — Т. 223, № 6. — С. 1340—1343.
96. *Морозов, А. Д.* О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым / А. Д. Морозов, Л. П. Шильников // ПММ. — 1983. — Т. 47, № 3. — С. 385—394.
97. *Морозов, К. Е.* Квазипериодические возмущения двумерных гамильтоновых систем / К. Е. Морозов // XXIII Нижегородская сессия молодых ученых (технические, естественные, математические науки). Материалы докладов. — 2018. — С. 205—206.
98. *Морозов, К. Е.* О свойствах транзиторных систем / К. Е. Морозов // Труды XVII Международной инновационно-ориентированной конференции молодых учёных и студентов. — 2015. — С. 457—460.
99. *Плисс, В. А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений / В. А. Плисс. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
100. *Плисс, В. А.* Об одной гипотезе Смейла / В. А. Плисс // Дифференц. уравнения. — 1972. — Т. 8, № 2. — С. 268—282.
101. *Прокин, И. С.* Математическое моделирование нейродинамических систем: учебно-методическое пособие / И. С. Прокин, А. Ю. Симонов, В. Б. Казанцев. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, 2012. — 41 с.

102. *Пуанкаре, А.* Избранные труды в 3 томах. Том 1. Новые методы небесной механики. Т. 1 / А. Пуанкаре. — М.: Наука., 1971. — 772 с.
103. Системы фазовой синхронизации / под ред. В. В. Шахгильдян, Л. Н. Белюстиной. — М.: Радио и связь, 1982. — 289 с.
104. *Смейл, С.* Дифференцируемые динамические системы / С. Смейл // УМН. — 1970. — Т. 25, № 1. — С. 113—185.
105. *Шильников, Л. П.* К вопросу о структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора / Л. П. Шильников // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 180, № 2. — С. 286—289.
106. *Шильников, Л. П.* Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа / Л. П. Шильников // Матем. сб. — 1967. — Т. 74, № 3. — С. 378—397.

Приложение А

О рождении предельных циклов из замкнутой траектории гамильтоновой системы при автономном неконсервативном возмущении

Обратимся к автономной системе (2.4). Переходя в области D от переменных (x, y) к переменным (I, θ) придем к системе

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon[f_0(\cdot)X_\theta + g_0(\cdot)Y_\theta] \equiv \varepsilon P(I, \theta) \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon[-f_0(\cdot)X_I + g_0(\cdot)Y_I] \equiv \omega(I) + \varepsilon Q(I, \theta). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Делая в системе (A.1) замену

$$I = u - \frac{\varepsilon i}{\omega} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} B_k(u) e^{ik\theta}, \quad (\text{A.2})$$

где B_k – суть коэффициенты Фурье разложения периодической по θ функции $P(u, \theta)$ в ряд Фурье:

$$P(u, \theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k(u) e^{ik\theta}, \quad (\text{A.3})$$

придем к системе

$$\dot{u} = \varepsilon B_0(u) + O(\varepsilon^2), \quad \dot{\theta} = \omega(u) + O(\varepsilon), \quad (\text{A.4})$$

где

$$B_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(u, \theta) d\theta, \quad (\text{A.5})$$

невыписанные члены порядка ε и ε^2 зависят как от u , так и от θ .

Простому состоянию равновесия усредненной системы $u = u_0$

$$\dot{u} = \varepsilon B(u)$$

($B(u_0) = 0, B_1(u_0) = B'(u_0) \neq 0$) соответствует грубый предельный цикл в системе (2.4), рождающийся в малой окрестности уровня энергии невозмущенной системы, определяемого значением действия $I_0 = I(u_0)$ если только $\varepsilon > 0$ достаточно мало (теорема Пуанкаре-Понтрягина-Андронов). Согласно [88] имеем $B_1 \sim \sigma$.

Приложение Б

Листинг программы для нахождения образов траекторий прошлого векторного поля под действием отображения перехода

Здесь приведены исходные коды на языке Matlab программы для нахождения образов траекторий прошлого векторного поля под действием отображения перехода для трех изучаемых в диссертации транзиторных систем: типа Дуффинга – ван дер Поля, маятникового типа, транзиторная система ФитцХью–Нагумо. Программа позволяет автоматически находить образы сепаратрис седла прошлого векторного поля в случае систем типа Дуффинга – ван дер Поля и маятникового типа (длина сепаратрисных усов регулируется). Также программа позволяет найти образ при отображении перехода траектории прошлого векторного поля с произвольно заданными начальными условиями (допускается ручной ввод начальных условий, также по клику мышки). Интерфейс программы позволяет изменять параметры исследуемых систем и точность численного счета. В качестве дополнительного инструмента предусмотрена возможность построения фазовых портретов автономных векторных полей. Программа разработана с использованием средств GUI.

Листинг Б.1 Главная функция программы

```

function dynamic
    % Открытие графической формы
    H=open('tranzdyn.fig');
    handles=guihandles(H);
5   set(H,'HandleVisibility','on');
    % Определяем глобальные переменные
    global eps;
    global p;
    global a;
10   global n;
    global w;
    global tau;
    % Вывод обозначений параметров
    axes(handles.axes2)
15   text('Interpreter','tex','String','\tau')
    axes(handles.axes3)
    text('Interpreter','tex','String','\epsilon')
```

```

    % Назначение функций обработки событий
20  set(handles.pushbutton1, 'Callback',{@pshb1,handles});
    set(handles.pushbutton2, 'Callback',{@pshb2,handles});
    set(handles.pushbutton5, 'Callback',{@pshb5,handles});
    set(handles.pushbutton9, 'Callback',{@pshb9,handles});
    set(handles.pushbutton10, 'Callback',{@pshb10,handles});
    set(handles.pushbutton11, 'Callback',{@pshb11,handles});
25  set(handles.pushbutton13, 'Callback',{@pshb13,handles});
    set(handles.radiobutton1, 'Callback',{@rdb1,handles});
    set(handles.radiobutton2, 'Callback',{@rdb2,handles});
    set(handles.radiobutton5, 'Callback',{@rdb5,handles});
    set(handles.axes4, 'ButtonDownFcn',{@ axes4btnclk ( handles
30  )} );
    set(handles.axes5, 'ButtonDownFcn',{@ axes5btnclk ( handles
    )} );
    set(gcf, 'WindowButtonMotionFcn',{@MouseMoving ( handles )})
;
    %Установка размеров поля вывода граф. инф. по умолчанию
    axes(handles.axes4);
    axis('auto');
35  hold on;
    axes(handles.axes5);
    axis('auto');
    hold on;
end

```

Листинг Б.2 Функция обработки нажатия по пустой области координатной плоскости

```

function axes5btnclk(hObject, eventdata, handles)
    % глобальные переменные
    global eps;
    global w;
5   global p;
    global a;
    global n;
    global I;
    global beta;
10  % считывание параметров
    tolStr = get(handles.edit22, 'String');
    tol = str2num(tolStr);
    timeStr = get(handles.edit14, 'String');
    time = str2num(timeStr);
15  epsStr = get(handles.edit3, 'String');

```

```

eps = str2num(epsStr);
wStr = get(handles.edit3, 'String');
w = str2num(wStr);
% определение номера системы
20 k=0;
if get(handles.radiobutton1, 'Value')==0
    if get(handles.radiobutton2, 'Value')==0
        k = 2;
    else
25     k = 1;
    end
end
% считывание параметров системы
switch k
30 case 0
    pStr = get(handles.edit6, 'String');
    p = str2num(pStr);
case 1
    aStr = get(handles.edit7, 'String');
35     a = str2num(aStr);
    nStr = get(handles.edit13, 'String');
    n = str2num(nStr);
case 2
    betaStr = get(handles.edit20, 'String');
40     beta = str2num(betaStr);
    IStr = get(handles.edit21, 'String');
    I = str2num(IStr);
end
axes(handles.axes5);
45 % получение координат точки
C = get(gca, 'CurrentPoint');
x = C(1,1);
y = C(1,2);
% рисование траектории
50 switch k
case 0
    [T, Z] = ode23t(@DufVdpFuture, [0 time], [x y], odeset('
    RelTol', tol));
    plot(Z(:,1), Z(:,2), 'r');
case 1
55     [T, Z] = ode23t(@JosephsonFuture, [0 time], [x y], odeset('
    RelTol', tol));
    PlotOnCyl(Z(:,1), Z(:,2), 'r', 'linewidth', 1);

```

```

    case 2
        [T, Z] = ode23t(@FitzHughFuture, [0 time] ,[x y],odeset('
        RelTol',tol));
        plot(Z(:,1),Z(:,2),'r');
60    end
end

```

Листинг Б.3 Функция обработки позиции переключателя Duffing-Van der Pol

```

function rdb1(src,evt,handles)
    % деактивация неиспользуемых кнопок
    set(handles.edit6,'Enable','on');
    set(handles.edit7,'Enable','off');
5    set(handles.edit13,'Enable','off');
    % очистка осей
    axes(handles.axes5)
    cla(handles.axes5)
    axis('auto')
10    axes(handles.axes4)
    cla(handles.axes4)
    axis('auto')
end

```

Листинг Б.4 Функция обработки нажатия кнопки построения сепаратрис
прошлого векторного поля Build past sep-x

```

function pshb11(src,evt,handles)
    global eps;
    global p;
    global a;
5    global n;
    global m;
    % считывание общих параметров
    timePastStStr = get(handles.edit8,'String');
    timePastUnstStr = get(handles.edit9,'String');
10    timePast(1) = str2num(timePastStStr);
    timePast(2) = str2num(timePastUnstStr);
    epsStr = get(handles.edit3,'String');
    eps = str2num(epsStr);
    % определение номера системы
15    k = 0;
    if get(handles.radiobutton1,'Value')==0
        k=1;
    end
    % считывание параметров системы

```

```

20  switch k
    case 0
        pStr = get(handles.edit6, 'String');
        p = str2num(pStr);
    case 1
25     aStr = get(handles.edit7, 'String');
        a = str2num(aStr);
        nStr = get(handles.edit13, 'String');
        n = str2num(nStr);
    end
30  tolStr = get(handles.edit22, 'String');
    tol = str2num(tolStr);
    % отображение сепаратрис
    switch k
    case 0
35     [T, Z1] = ode23t(@DufVdpPast, [0 timePast(2)] , [tol 0],
        odeset('RelTol',tol));
        [T, Z2] = ode23t(@DufVdpPast, [0 -timePast(1)] , [-tol 0],
        odeset('RelTol',tol));
        [T, Z3] = ode23t(@DufVdpPast, [0 -timePast(1)] , [tol 0],
        odeset('RelTol',tol));
        [T, Z4] = ode23t(@DufVdpPast, [0 timePast(2)] , [-tol 0],
        odeset('RelTol',tol));
40     plot(Z1(:,1),Z1(:,2), 'b');
        plot(Z2(:,1),Z2(:,2), 'b');
        plot(Z3(:,1),Z3(:,2), 'b');
        plot(Z4(:,1),Z4(:,2), 'b');
    case 1
45     [T, Z1] = ode23t(@JosephsonPast, [0 timePast(2)] , [fzero(
        @EqStatesPastJosephson,pi)+0.01 0],odeset('RelTol',tol));
        [T, Z2] = ode23t(@JosephsonPast, [0 -timePast(1)] , [fzero(
        @EqStatesPastJosephson,pi)-0.01 0],odeset('RelTol',tol));
        [T, Z3] = ode23t(@JosephsonPast, [0 -timePast(1)] , [fzero(
        @EqStatesPastJosephson,pi)+0.01 0],odeset('RelTol',tol));
        [T, Z4] = ode23t(@JosephsonPast, [0 timePast(2)] , [fzero(
        @EqStatesPastJosephson,pi)-0.01 0],odeset('RelTol',tol));
50     PlotOnCyl(Z1(:,1),Z1(:,2), 'b', 'linewidth',0.01);
        PlotOnCyl(Z2(:,1),Z2(:,2), 'b', 'linewidth',0.01);
        PlotOnCyl(Z3(:,1),Z3(:,2), 'b', 'linewidth',0.01);
        PlotOnCyl(Z4(:,1),Z4(:,2), 'b', 'linewidth',0.01);
    end
end

```

Листинг Б.5 Функция обработки нажатия кнопки Save past plot

```
function pshb2(src, evt, handles)
    axes(handles.axes4)
    export_fig(handles.axes4, 'past.pdf');
end
```

Листинг Б.6 Функция обработки движения мыши

```
function MouseMoving(hObject, eventdata, handles)
    % Подфункция для события WindowButtonMotionFcn
    % получаем координаты текущей точки осей координат
    if get(handles.radiobutton3, 'Value')==1
5      % считывание координат
        axes(handles.axes4)
        C = get(gca, 'CurrentPoint');
        x = C(1,1);
        y = C(1,2);
10     ax=gca;
        % заполнение полей
        set(handles.edit15, 'String', num2str(x));
        set(handles.edit16, 'String', num2str(y));
    else
15     % считывание координат
        axes(handles.axes5)
        C = get(gca, 'CurrentPoint');
        x = C(1,1);
        y = C(1,2);
20     ax=gca;
        % заполнение полей
        set(handles.edit15, 'String', num2str(x));
        set(handles.edit16, 'String', num2str(y));
    end
25 end
```

Листинг Б.7 Функция обработки нажатия кнопки Build

```
function pshb9(src, evt, handles)
    global eps;
    global w;
    global p;
5    global a;
    global n;
    global I;
    global beta;
    % считывание общих параметров
```

```

10 tolStr = get(handles.edit22, 'String');
   tol = str2num(tolStr);
   timeStr = get(handles.edit14, 'String');
   time = str2num(timeStr);
   epsStr = get(handles.edit3, 'String');
15 eps = str2num(epsStr);
   wStr = get(handles.edit3, 'String');
   w = str2num(wStr);
   % определение номера системы
   k=0;
20 if get(handles.radiobutton1, 'Value')==0
     if get(handles.radiobutton2, 'Value')==0
         k = 2;
     else
         k = 1;
25     end
   end
   % считывание параметров системы
   switch k
   case 0
30     pStr = get(handles.edit6, 'String');
        p = str2num(pStr);
   case 1
        aStr = get(handles.edit7, 'String');
        a = str2num(aStr);
35     nStr = get(handles.edit13, 'String');
        n = str2num(nStr);
   case 2
        betaStr = get(handles.edit20, 'String');
        beta = str2num(betaStr);
40     IStr = get(handles.edit21, 'String');
        I = str2num(IStr);
   end
   % выбор системы
   switch k
45   case 0
       % если выбрано ПВП
       if get(handles.radiobutton3, 'Value')==1
           [T, Z] = ode23t(@DufVdpPast, [0 time], [str2num(get(handles.
               edit15, 'String')) str2num(get(handles.edit16, 'String'))],
               odeset('RelTol', tol));           plot(Z(:,1), Z(:,2), 'b');
           % если нужно найти образ траектории
50       if get(handles.checkbox1, 'Value')==1

```

```

        X1 = zeros(length(Z(:,1)),2);
        for i = 1:1:length(Z(:,1))
            [T, Y] = ode23t(@DufVdpTrans, [0 tau] , [Z(i,1),Z(i,2)],
odeset('RelTol',tol));
            X1(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
55         X1(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);
        end
        axes(handles.axes5)
        hold on;
        plot(X1(:,1),X1(:,2),'b');
60     end
    else
        % если выбрано БВП
        axes(handles.axes5);
        [T, Z] = ode23t(@DufVdpFuture, [0 time] ,[str2num(get(
handles.edit15,'String')) str2num(get(handles.edit16,'String'
))] ,odeset('RelTol',tol));
65     plot(Z(:,1),Z(:,2),'r');
    end
    case 1
    if get(handles.radiobutton3,'Value')==1
        [T, Z] = ode23t(@JosephsonPast, [0 time] , [str2num(get(
handles.edit15,'String')) str2num(get(handles.edit16,'String'
))] ,odeset('RelTol',tol));
70     PlotOnCyl(Z(:,1),Z(:,2),'b','linewidth',1);
        if get(handles.checkbox1,'Value')==1
            X1 = zeros(length(Z(:,1)),2);
            for i = 1:1:length(Z(:,1))
                [T, Y] = ode23t(@JosephsonTrans, [0 tau] , [Z(i,1),Z(i
,2)],odeset('RelTol',tol));
75                 X1(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
                X1(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);
            end
            axes(handles.axes5)
            hold on;
80     PlotOnCyl(X1(:,1),X1(:,2),'b','linewidth',1);
        end
    else
        axes(handles.axes5)
        [T, Z] = ode23t(@JosephsonFuture, [0 time] ,[str2num(get(
handles.edit15,'String')) str2num(get(handles.edit16,'String'
))] ,odeset('RelTol',tol));
85     PlotOnCyl(Z(:,1),Z(:,2),'r','linewidth',1);

```

```

end
case 2
if get(handles.radiobutton3,'Value')==1
    [T, Z] = ode23t(@FitzHughPast, [0 time] , [str2num(get(
handles.edit15,'String')) str2num(get(handles.edit16,'String'
))] ,odeset('RelTol',tol));
90    plot(Z(:,1),Z(:,2),'b','linewidth',1);
    if get(handles.checkbox1,'Value')==1
        X1 = zeros(length(Z(:,1)),2);
        for i = 1:1:length(Z(:,1))
            [T, Y] = ode23t(@FitzHughTrans, [0 tau] , [Z(i,1),Z(i,2)
],odeset('RelTol',tol));
95            X1(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
            X1(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);
        end
        axes(handles.axes5)
        plot(X1(:,1),X1(:,2),'b','linewidth',1);
100    end
    else
        axes(handles.axes5)
        [T, Z] = ode23t(@FitzHughFuture, [0 time] ,[str2num(get(
handles.edit15,'String')) str2num(get(handles.edit16,'String'
))] ,odeset('RelTol',tol));
        plot(Z(:,1),Z(:,2),'r','linewidth',1);
105    end
    end
end
end
end

```

Листинг Б.8 Функция обработки нажатия клавиши Find an image

```

function pshb1(src,evt,handles)
    %чтение входных данных
    global eps;
    global p;
5    global a;
    global n;
    global w;
    global tau;
    timePastStStr = get(handles.edit8,'String');
10    timePastUnstStr = get(handles.edit9,'String');
    timePast(1) = str2num(timePastStStr);
    timePast(2) = str2num(timePastUnstStr);
    wStr = get(handles.edit1,'String');
    tauStr = get(handles.edit2,'String');

```

```

15 epsStr = get(handles.edit3, 'String');
   w = str2num(wStr);
   tau = str2num(tauStr);
   eps = str2num(epsStr);
20 tolStr = get(handles.edit22, 'String');
   tol = str2num(tolStr);
   k=0;
   if get(handles.radiobutton1, 'Value')==0
       k=1;
   end
25 switch k
   case 0
       pStr = get(handles.edit6, 'String');
       p = str2num(pStr);
   case 1
30   aStr = get(handles.edit7, 'String');
       a = str2num(aStr);
       nStr = get(handles.edit13, 'String');
       n = str2num(nStr);
   end
35 switch k
   case 0
       [T, Z1] = ode23t(@DufVdpPast, [0 timePast(2)] , [tol 0],
       odeset('RelTol',tol));
       [T, Z2] = ode23t(@DufVdpPast, [0 -timePast(1)] , [-tol 0],
       odeset('RelTol',tol));
       [T, Z3] = ode23t(@DufVdpPast, [0 -timePast(1)] , [tol 0],
       odeset('RelTol',tol));
40   [T, Z4] = ode23t(@DufVdpPast, [0 timePast(2)] , [-tol 0],
       odeset('RelTol',tol));
       X1 = zeros(length(Z1(:,1)),2);
       for i = 1:1:length(Z1(:,1))
           [T, Y] = ode23t(@DufVdpTrans, [0 tau] , [Z1(i,1),Z1(i,2)],
           odeset('RelTol',tol));
           X1(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
45   X1(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);
       end
       X2 = zeros(length(Z2(:,1)),2);
       for i = 1:1:length(Z2(:,1))
           [T, Y] = ode23t(@DufVdpTrans, [0 tau] , [Z2(i,1),Z2(i,2)],
           odeset('RelTol',tol));
50   X2(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
       X2(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);

```

```

end
X3 = zeros(length(Z3(:,1)),2);
for i = 1:1:length(Z3(:,1))
55 [T, Y] = ode23t(@DufVdpTrans, [0 tau] , [Z3(i,1),Z3(i,2)],
odeset('RelTol',tol));
X3(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
X3(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);
end
X4 = zeros(length(Z4(:,1)),2);
60 for i = 1:1:length(Z4(:,1))
[T, Y] = ode23t(@DufVdpTrans, [0 tau] , [Z4(i,1),Z4(i,2)],
odeset('RelTol',tol));
X4(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
X4(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);
end
65 axes(handles.axes5)
hold on;
plot(X1(:,1),X1(:,2),'b');
plot(X2(:,1),X2(:,2),'b');
plot(X3(:,1),X3(:,2),'b');
70 plot(X4(:,1),X4(:,2),'b');
case 1
[T, Z1] = ode23t(@JosephsonPast, [0 timePast(2)] , [fzero(
@EqStatesPastJosephson,pi)+0.01 0],odeset('RelTol',tol));
[T, Z2] = ode23t(@JosephsonPast, [0 -timePast(1)] , [fzero(
@EqStatesPastJosephson,pi)-0.01 0],odeset('RelTol',tol));
[T, Z3] = ode23t(@JosephsonPast, [0 -timePast(1)] , [fzero(
@EqStatesPastJosephson,pi)+0.01 0],odeset('RelTol',tol));
75 [T, Z4] = ode23t(@JosephsonPast, [0 timePast(2)] , [fzero(
@EqStatesPastJosephson,pi)-0.01 0],odeset('RelTol',tol));
X1 = zeros(length(Z1(:,1)),2);
for i = 1:1:length(Z1(:,1))
[T, Y] = ode23t(@JosephsonTrans, [0 tau] , [Z1(i,1),Z1(i
,2)],odeset('RelTol',tol));
80 X1(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
X1(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);
end
X2 = zeros(length(Z2(:,1)),2);
for i = 1:1:length(Z2(:,1))
[T, Y] = ode23t(@JosephsonTrans, [0 tau] , [Z2(i,1),Z2(i
,2)],odeset('RelTol',tol));
85 X2(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
X2(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);

```

```

    end
    X3 = zeros(length(Z3(:,1)),2);
    for i = 1:1:length(Z3(:,1))
90      [T, Y] = ode23t(@JosephsonTrans, [0 tau] , [Z3(i,1),Z3(i
,2)],odeset('RelTol',tol));
      X3(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
      X3(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);
    end
    X4 = zeros(length(Z4(:,1)),2);
95    for i = 1:1:length(Z4(:,1))
      [T, Y] = ode23t(@JosephsonTrans, [0 tau] , [Z4(i,1),Z4(i
,2)],odeset('RelTol',tol));
      X4(i,1)=Y(length(Y(:,1)),1);
      X4(i,2)=Y(length(Y(:,1)),2);
    end
100    axes(handles.axes5)
    hold on;
    PlotOnCyl(X1(:,1),X1(:,2),'b','linewidth',0.01);
    PlotOnCyl(X2(:,1),X2(:,2),'b','linewidth',0.01);
    PlotOnCyl(X3(:,1),X3(:,2),'b','linewidth',0.01);
105    PlotOnCyl(X4(:,1),X4(:,2),'b','linewidth',0.01);
    end
end

```

Листинг Б.9 Функция, задающая прошлое векторное поле для системы Джозефсона

```

function dz = JosephsonPast(T,Z)
    global eps;
    global a;
    global b;
5    global n;
    global m;
    dz = zeros(2,1);
    dz(1) = Z(2);
    dz(2) = -sin(Z(1))+ eps.*(a+b*cos(n*Z(1)))*Z(2);
10 end

```

Листинг Б.10 Функция, задающая правые части системы Джозефсона на промежутке неавтономности

```

function dz = JosephsonTrans(T,Z)
    global eps;
    global a;
    global b;

```

```

5 | global n;
   | global w;
   | global tau;
   | global m;
   | dz = zeros(2,1);
10 | dz(1) = Z(2);
   | dz(2) = -sin(Z(1))+eps.*(m*(T/tau)^2*(3-2*(T/tau))+(a+b*cos(n*
   |   Z(1)))*Z(2));
   | end

```

Листинг Б.11 Функция, задающая будущее векторное поле для системы Джозефсона

```

function dz = JosephsonFuture(T,Z)
   | global eps;
   | global a;
   | global b;
5 | global n;
   | global w;
   | global m;
   | dz = zeros(2,1);
   | dz(1) = Z(2);
10 | dz(2) = -sin(Z(1))+eps.*(m+(a+b*cos(n*Z(1)))*Z(2));
   | end

```