

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»  
(НИИМ Нижегородского университета)

*На правах рукописи*



АБУЗЯРОВ КОНСТАНТИН МУСТАФОВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЗРЫВНОГО  
НАГРУЖЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор  
Кочетков Анатолий Васильевич

Нижний Новгород – 2020

## Оглавление

Введение .....	4
Глава 1. Состояние вопроса. Обзор научной литературы по численному моделированию взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций .....	11
1.1. Численные методы моделирования взрывных процессов в газовых средах в эйлеровых переменных .....	12
1.2. Численные методы для моделирования динамических процессов в упругопластических телах в эйлеровых переменных .....	15
1.3. Контактные алгоритмы «газ – упругое тело» для моделирования взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций на эйлеровых сетках.....	17
1.4. Выводы из обзора .....	19
Глава 2. Определяющая система уравнений для численного моделирования взрывных процессов в сплошной среде .....	21
2.1. Решение задачи о распаде разрыва для произвольного уравнения состояния газа путем приведения его к двучленному виду. ....	27
2.2. Решение линеаризованной задачи о распаде разрыва с учетом сдвиговых напряжений. ....	39
2.3. Модифицированная схема Годунова для моделирования быстропротекающих волновых процессов в газах.....	42
2.4. Модифицированная схема Годунова для моделирования быстропротекающих волновых процессов в деформируемых твердых телах .....	46
2.5 Реализация контакта на границе «газ – упругая среда» .....	47
2.6 Уточнение контактного алгоритма на границе «газ – упругое тело» .....	48
2.7 Алгоритм получения монотонных решений .....	49
2.8 Адаптация уравнения состояния типа JWL для расчета расширения продуктов детонации в воздухе для схемы С.К. Годунова.....	50
2.9 Адаптация лучевой модели распространения пространственной детонации к схеме С.К. Годунова.....	51
2.10 Алгоритм расчета совместного движения продуктов взрыва и упругопластической конструкции в эйлеровых переменных с выделением пространственной границы контакта .....	54
2.11. Выводы по главе .....	57
Глава 3. Решение тестовых задач, подтверждающих работоспособность методики .....	58
3.1. Влияние уточнения решения задачи распада разрыва на границе упругого тела .....	58
3.2. Моделирование вынужденных осесимметричных колебаний упругого диска .....	61
3.3. Удар алюминиевой пластины по алюминиевому полупространству (Тест Уилкинса ) .....	64
3.4. Распространение детонации с уравнением состояния типа JWL.....	66

3.5. Выводы по главе .....	68
Глава 4. Результаты решения задач взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций. ....	69
4.1. Расчет нагрузок от взрыва твердого ВВ на жесткую цилиндрическую оболочку .....	69
4.2. Внутреннее импульсное нагружение стальных труб при взрыве шарового заряда конденсированного ВВ .....	73
4.3. Разгон деформируемых тел продуктами взрыва.....	78
4.3.1. Разгон тел кубической формы. ....	78
4.3.2. Разгон тел цилиндрической формы. ....	82
4.3.3. Верификация трехмерной численной методики на основе сравнения скоростей и остаточных форм, полученных по двумерной методике.....	84
4.3.4. Влияние начальной геометрии и характера деформирования на разгон тел одинаковой массы. ....	85
4.4. Выводы по главе .....	88
Заключение .....	90
Список литературы .....	92

## Введение

### Актуальность темы исследования

В настоящее время численное моделирование различных задач взрывного нагружения упругопластических конструкций является востребованными и актуальными в науке и технике. Это проблемы безопасности объектов ядерной энергетики, нефтегазового комплекса, различного рода защитных конструкций, а так же взрывная обработка поверхностей, гидровзрывная штамповка, сварка и резка взрывом. Экспериментальное изучение этих процессов связано со значительными трудностями. Необходимо учитывать процессы инициирования и распространения детонации во взрывчатых веществах (ВВ) с генерацией ударных волн расширяющимися продуктами детонации (ПД) и последующим взаимодействием с упругопластическими конструкциями, испытывающими значительные перемещения. Решение таких задач возможно только численно и требует значительных вычислительных ресурсов. Более того в настоящее время вычислительный эксперимент является неотъемлемой частью исследования взрывных процессов и позволяет выявить тонкие эффекты, обнаружить которые в натурном эксперименте без привлечения средств математического моделирования затруднительно или практически невозможно. Как правило, конструкции и среды, передающие взрывную нагрузку, имеют различные механические и термодинамические свойства, и для описания процессов взрывного нагружения необходимо выделять границы контактирующих сред и использовать явные численные схемы. Однако подход, связанный с непрерывным примыканием криволинейной сетки, покрывающей передающую среду, к аналогичной сетке, покрывающей конструкцию, и отслеживающий движение контактных границ с соответствующими перестройками сетки внутри однородной области, широко используемый в решении двумерных задач, оказался практически непригоден для решения трехмерных задач этого класса. Актуальным является разработка и развитие методических средств и многосеточных алгоритмов, направленных на решение этих трехмерных задач. Основные проблемы связаны с построением начальной трехмерной сетки и ее последующим перестроением с привязкой к поверхностям контакта в процессе счета. В работе развиваются средства математического моделирования с использованием трех видов сеток. Первая сетка состоит из наборов непрерывных треугольников для границ каждой среды (в формате STL), задающие поверхности взаимодействующих сред, вторая сетка - основная декартова неподвижная сетка из прямоугольных параллелепипедов, третий вид сеток - локальные подвижные регулярные декартовы сетки, привязанные к каждому треугольнику поверхности среды и вложенные в основные декартовы.

### **Степень разработанности темы**

В настоящее время для решения трехмерных задач взрывного нагружения упругопластических конструкций в основном используется подход, разделяющий задачу на две: первая – расчет нагрузок на неподвижную конструкцию в эйлеровых координатах, вторая – расчет деформирования упругопластической конструкции под действием этих нагрузок. То есть пренебрегается взаимовлиянием изменения положения конструкции и положения среды, передающей взрывную нагрузку. Соответственно используются различные эйлеровы методы и программы для расчета распространения детонации и расширения продуктов взрыва и лагранжевы переменные для расчета упругопластических течений. Для расчета нагрузок на конструкции сложной формы при решении трехмерных задач применяется в основном два подхода. Первый и достаточно грубый, заключается в том, что в области, примыкающей к поверхности конструкции, строится регулярная сетка, из которой исключаются “дробные” ячейки, секущиеся поверхностью конструкции. Фактически получается поверхность непрерывного контакта одной зубчатой поверхности с другой. Для повышения точности здесь применяется более подробное разбиение регулярной сетки вблизи границы раздела сред. Второй подход, более точный и сложный, подразумевает гладкую поверхность контакта, обрезание этой поверхностью регулярных сеток контактирующих сред и вычисление параметров в этих обрезанных ячейках с использованием различных подходов или использование дополнительных наложенных сеток, связанных с поверхностью контакта, и различными формами сопряжения решений основной и наложенной сеток. Полученные нагрузки используются для расчета деформирования упругопластической конструкции.

Использование различных численных методов для газа и упругопластических течений, имеющих отличающиеся пространственные и временные шаблоны, различные аппроксимационные ошибки и критерии устойчивости, создает проблемы при определении контактных сил. Кроме того перечисленные методики имеют общий существенный недостаток - требуют сложных трехмерных сеточных генераторов.

### **Цель и задачи диссертационной работы**

- Целью диссертационной работы является разработка трехмерной численной методики для моделирования процессов взрывного нагружения упругопластических конструкций в эйлеровых переменных. Для достижения поставленной цели были рассмотрены следующие задачи:

- использование единой численной методики на основе схемы С.К. Годунова повышенной точности в эйлерово-лагранжевых переменных для решения трехмерных задач взрывного нагружения упругопластических конструкций;
- разработка алгоритма контактного взаимодействия продуктов взрыва с упругопластической средой повышенной точности;
- разработка численной методики расчета процесса распространения детонации на основе принципа Гюйгенса для трехмерного случая;
- решение тестовых задач, демонстрирующих работоспособность и эффективность разработанной численной методики;
- решение трехмерных задач взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций. (труба, оболочка, разгон тел продуктами детонации)

### **Научная новизна**

Разработана единая численная методика на базе модифицированной схемы С.К. Годунова для решения трехмерных задач (взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций) взаимодействия ударно-волновых газодинамических течений с упругопластическими элементами конструкций.

Для решения проблемы контактного взаимодействия газ – упругая среда использовано решение задачи распада разрыва повышенной точности с экстраполяцией параметров среды для упругой границы.

Для выделения и сопровождения контактных границ продукты детонации - упругопластическое тело применен многосеточный подход “Химера” с использованием трех видов пространственных сеток с взаимной линейной интерполяцией параметров сред.

Для моделирования процесса распространения детонации в конденсированном ВВ в рамках схемы С.К. Годунова обобщена на трехмерный случай модель распространения детонации, основанная на принципе Гюйгенса, с использованием для продуктов детонации уравнения состояния типа JWL.

### **Теоретическая значимость работы**

Разработана методика, которая позволяет проводить трехмерные численные исследования взрывного нагружения упругопластических конструкций, подверженных значительным формоизменениям, в связанной постановке с отслеживанием контактных границ, без сложных трехмерных сеточных генераторов, при иницировании ВВ произвольной формы. Инициация возможна в нескольких зонах ВВ в различные моменты времени.

### **Практическая значимость работы**

Проведенные в диссертационной работе исследования, полученные результаты, а также разработанная численная методика расчета трехмерных задач взрывного нагружения упругопластических конструкций, могут быть использованы:

- при расчете деформирования трехмерных упругопластических конструкций, испытывающих большие формоизменения, под действием взрывных нагрузок от зарядов произвольной формы;
- при определении взрывных нагрузок от зарядов произвольной формы на жесткие трехмерные конструкции для дальнейшего использования в качестве начально краевых условий в прочностных пакетах прикладных программ;
- разработанные алгоритмы можно использовать как компоненты в различных вычислительных комплексах при решении прикладных задач.

### **Методология и методы диссертационного исследования**

Численная методика решения трехмерных задач взаимодействия газовых сред с упругопластическими элементами конструкций построена на базе единой схемы С.К. Годунова повышенной точности, реализующая в процессе расчета эйлерово-лагранжевый подход на подвижных локальных сетках с точным решением задачи распада разрыва на контактной границе «газ - упругое тело». Используются три вида сеток с интерполяцией параметров из одних в другие. Первая сетка состоит из наборов непрерывных треугольников для границ каждой среды (в формате STL), задающих поверхности взаимодействующих сред, вторая сетка - основная декартова неподвижная сетка из прямоугольных параллелепипедов, третий вид сеток - локальные подвижные регулярные декартовы сетки, привязанные к каждому треугольнику поверхности среды. Верификация разработанной численной методики проводилась с использованием результатов расчетов по известным программным комплексам.

### **Положения, выносимые на защиту:**

- численная методика для решения трехмерных задач взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций в эйлеровых переменных на основе единой схемы С.К. Годунова повышенной точности;
- алгоритм контактного взаимодействия газа с упругой средой повышенной точности с экстраполяцией параметров упругой среды;
- алгоритм расчета процесса распространения детонации на основе принципа Гюйгенса для трехмерных областей для схемы С.К. Годунова с уравнением состояния типа JWL;

- результаты численных исследований нелинейного взаимодействия продуктов детонации с пространственными упругопластическими элементами конструкций в зависимости от областей инициирования детонации и положения заряда.

**Достоверность** разработанных математических моделей подтверждается сравнениями численных результатов с результатами, полученными по другим методикам, и экспериментальными данными.

#### **Апробация работы**

Результаты диссертационной работы докладывались на 11 международных, 6 всероссийских конференциях:

- X и XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Нижний Новгород, 2011, Казань 2015г.);
- IV Всероссийская научно-техническая конференция «Фундаментальные основы баллистического проектирования» (Санкт-Петербург, 23-28 июня 2014г.);
- XIX, XX международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. (ВМСППС'2015г, ВМСППС'2017) (Алушта, Крым 2015, 2017);
- XI Международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (Алушта, Крым 25-31 мая 2016г.);
- XI и XII Международная научно-практическая конференция STAR Russian Conference (Нижний Новгород, 2016, 2017);
- XVI Международная конференция «Супервычисления и математическое моделирование» (Саров 3-7 октября 2016);
- V и VI Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (Москва, 2016, 2017);
- Всероссийская научная конференция «Проблемы прочности, динамики, ресурса» НИИ механики Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, 2015, 2016, 2017);
- VI Международная молодежная научная конференция «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики 2017», посвященная

55-ти летию физико-технического факультета Томского государственного университета (Томск, 27–29 ноября 2017г.)

- 36я Международная научная конференция Евразийского Научного Объединения Современные концепции научных исследований, (Москва, февраль 2018)
- XII Международная конференция по Прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018) (24-31 мая 2018 г. на базе МАИ «Алушта» в Республике Крым).

В целом работа докладывалась на научном семинаре по динамике и прочности НИИМ ННГУ (Нижний Новгород, октябрь 2020).

### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 17 работ [1-17], в том числе 5 из них в изданиях, входящих в Перечень ВАК Минобрнауки России [1-5].

### **Личный вклад автора**

- разработка методики численного моделирования трехмерных процессов взаимодействия продуктов детонации с упругопластическими деформируемыми элементами конструкций на базе модифицированной схемы С.К. Годунова повышенной точности в эйлерово-лагранжевых переменных [4, 6-9];
- разработка и верификация алгоритма контактного взаимодействия продуктов взрыва с упругой средой повышенной точности для модифицированной схемы С.К. Годунова [1,4];
- разработка и верификация численной методики расчета процесса распространения детонации на основе принципа Гюйгенса в рамках схемы С.К. Годунова для трехмерного случая с уравнением состояния ПД типа JWL;
- численное исследование и анализ результатов процессов внутреннего взрывного нагружения жестких и упругопластических элементов конструкций (труб и оболочек) в зависимости от области инициирования и положения заряда [1-3, 10-17];

В совместных работах Кочеткову А.В. принадлежит постановка задач, общее руководство исследованиями, анализ и обсуждение результатов; Абузяров М.Х., Крылов С.В. оказали помощь в проведении численных расчетов поставленных задач.

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы; содержит 78 рисунков, библиографический список из 142 наименования – всего 103 страницы.

### **Диссертационная работа выполнена при поддержке**

Гранта Правительства Российской Федерации (договор №14.У26.31.0031), грантов РФФИ (№16-08-00458, 19-08-00320, 19-58-53005).

### **Благодарности**

Автор выражает благодарность (коллективу лаб.№9 НИИМ ННГУ) Абузярову М.Х., Крылову С.В., Глазовой Е.Г., Чекмареву Д.Т..

## **Глава 1. Состояние вопроса. Обзор научной литературы по численному моделированию взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций**

Исследование процессов взрывного нагружения элементов конструкций является актуальной задачей во многих областях науки и техники. Экспериментальное изучение этих процессов представляет значительные трудности. В связи с этим особую значимость приобретает теоретическое изучение, а с развитием вычислительной техники, численное моделирование этих процессов, как при планировании экспериментальных работ, так и как самостоятельный инструмент исследования. Численное моделирование процессов взрывного нагружения конструкций является одной из наиболее сложных задач механики сплошных сред. Она включает в себя моделирование процессов инициирования и распространения детонации с последующим расширением продуктов детонации в окружающую среду с генерацией ударных волн и взаимодействием с элементами конструкций - FSI (Fluid Structure Interaction) до времен порядка собственных колебаний или разрушения конструкций. При этом необходимо моделировать быстропротекающие волновые процессы как в твердых телах (твердые ВВ и упругопластические конструкции), так и в жидкостях и газах (продукты детонации и различные окружающие среды), сопровождающиеся большими формоизменениями, с учетом взаимодействия и фазовых превращений различных сред. Очевидно, что при моделировании динамического взаимодействия сред со столь различными термодинамическими свойствами необходимо выделять и отслеживать их границы, вводить некоторые упрощающие предположения о характере протекающих процессов.

Обобщающие экспериментальные и теоретические материалы по взрывным технологиям и свойствам материалов при взрывных нагружениях содержатся в монографиях Зельдовича Я.Б., Райзера Ю.П. [18], Орленко Л.П., Баума Ф.А. и др. [19], Андреева С. Г. Бойко М. М., Селиванова В. В. [20], Селиванова В. В., Кобылкина И. Ф., Новикова С. А. [21], Ионова В.Н., Селиванова В.В. [22], Ахмадеева Н.Х.[23], Mader С.Л.[24], Райнхарта Д., Пирсона Д.[25] и многих других отечественных и зарубежных авторов.

Одной из наиболее известных и ранних работ по численному моделированию взрывного нагружения упругопластической конструкции является статья Уилкинса [26, с.212]. Автором рассмотрена двумерная задача нагружения медной пластины при мгновенной детонации заряда в постоянном объеме, примыкающем к пластине. Задача рассматривалась в переменных Лагранжа, использовалась единая разностная схема, как для гидродинамического, так и упругопластического течения. Используемая методика оказалась удачной и в дальнейшем получила широкое

распространение для моделирования гидрогазодинамических и упругопластических течений. Актуальными с точки зрения ряда важных технологических приложений являются задачи о внутреннем взрывном нагружении упругопластических толстостенных оболочек. Численному моделированию таких задач и анализу происходящих при этом явлений посвящено большое количество работ разных авторов в осесимметричной (Левитан Ю.Л. [28], Костин В.В., Резцов А.С., Сурак С.Т., Фортов В.Е. [29], Абузьяров М.Х. [30-31]) и трехмерной (Герасимов А.В., Глазырин В.П., Толкачев В.Ф., Орлов М.Ю. [27], [85], Fairlie G.E. [32], Marinko Ugrcic [33], Greg Fairlie, Jon Glanville, Xiangyang Quan [34]) постановках.

### **1.1. Численные методы моделирования взрывных процессов в газовых средах в эйлеровых переменных**

Численное моделирование взрыва зарядов конденсированных ВВ в газовой среде включает задачи об инициировании детонации, задачи распространения детонации по ВВ и задачи взаимодействия расширяющихся ПД с окружающей средой с генерацией ударных волн. В практических расчетах сложный процесс инициирования и распространения детонации с переменной скоростью обычно заменяют установившейся детонацией, для которой скорость детонационной волны постоянна, пренебрегая начальным участком, где горение ВВ переходит в детонацию (Саламахин Т.М., Шакин А.А. [36]), или вообще процесс детонации не рассматривается, а начальное распределение параметров в продуктах взрыва задается постоянным (Уилкинс М.Л. [26], Г. Броуд [37]). Среди существующих численных методов решения задач о взрыве выделяют три основных метода. Это метод характеристик, методы конечных разностей и конечных объемов, использующие лагранжевы и эйлерово-лагранжевы подходы. Характеристика этих методов дана в обзорах Чушкина П.И. и Шуршалова Л.В. [38], Охитина В.Н. и др. [39]. Наиболее эффективным для исследования структуры ударных волн является метод характеристик [26, с.264], но он громоздок и сложен в реализации и практически не применим для реальных задач, за исключением одномерных течений. Пример расчета детонации методом характеристик приведен в статье Ричардсона [26, с.292]. Использование чисто лагранжевых подходов также вызывает значительные трудности, связанные с сильным расширением ПВ и сжатием окружающей среды. Эти подходы применимы на начальной стадии процесса взрыва, в дальнейшем, по мере расширения ПВ, требуется постоянная перестройка расчетных сеток ([26, 33], Руденко В.В. [41]).

Широкое распространение для моделирования газодинамики взрывов получили конечно-разностные схемы, использующие совместные эйлерово-лагранжевые подходы без

привязки линий расчетной сетки к границам раздела контактирующих сред. Это схемы Харлоу Ф.Х. [26, с.316], Ноха В.Ф. [26, с.128], метод “крупных частиц” Белоцерковского О.М. [42] и метод [43] для течений неоднородной среды, предложенный Бахрахом С.М., Спиридоновым В.Ф., Шаниным А.А. Также для расчета взрывных задач получили распространение методы конечного объема FVM (finite volume methods), являющимися, по сути, близкими по своему устройству к схеме [44], предложенной в 1959 г. С.К. Годуновым, также сочетающими возможности эйлерово-лагранжевых подходов на подвижных сетках [45].

Численный метод, использованный в [43] показал свою эффективность, и на его основе были разработаны комплексы двумерных ЛЭГАК (Шанин А. А., Янилкин Ю. В. [46,47]) и трехмерных ЛЭГАК-3D [48-50] программ, позволяющие моделировать взрывные процессы с использованием лагранжевых, эйлерово-лагранжевых так и эйлеровых подходов с возможностью моделирования процессов взрывчатого превращения ВВ как с учетом кинетики выгорания, так и установившейся детонации ([50,51], Бондаренко Ю. А. [52]). С физической точки зрения модель неустановившейся детонации с кинетикой выгорания наиболее полная и точная, но требует расчетных ячеек порядка  $10^{-4}$ - $10^{-5}$  метра, что практически невозможно при моделировании реальных процессов. При расчетах взрывного воздействия на реальные конструкции, как правило, применяется модель идеальной установившейся детонации с навязыванием скорости фронту детонационной волны из известных решений (Янилкин Ю. В. [53], Бахрах С. М., Краснов В. Н., Цыкин С. В., Шавердов С. А. [54]), использующих принцип Гюйгенса (лучевая модель детонации). К недостаткам разностной методики [43] можно отнести неконсервативность, первый порядок аппроксимации и необходимость введения искусственной вязкости в области ударных волн и сильных разрывов.

Близкая к [43] методика MMALE (Multi Material Arbitrary Lagrang Euler) используется для расчета взрывов в пакете ANSYS LS DYNA (Hallquist J. O., Schwer L. [55,56]) с моделью горения Тарвера [57].

Широкое распространение для расчета взрывных процессов получила конечноразностная схема С.К. Годунова [44] и ее многочисленные модификации, например, в широко известном коммерческом коде ANSYS AUTODYN [59] и в современных разработках, таких как ALE3D Ливерморской лаборатории США [60], EUROPLEXUS и OURANOS европейского сообщества [61,62,63]. В [63] показано, что даже оригинальная схема С.К. Годунова первого порядка точности в коде OURANOS обеспечивает более корректные результаты на взрывных задачах по сравнению с LS DYNA с использованием методики MMALE. В работах Туник Ю.В. [64,65], Афолина Н.Е., Громов В.Г., Левин В.А., Мануйлович И.С., Марков В.В., Смехов Г.Д., Хмелевский А.Н. [66], О.Б. Бочарова, М.Г. Лебедев, И. В. Попов, В. В. Ситник, И. В. Фрязинов [67] по моделированию

процессов детонационного горения водорода в соплах также применялась схема С.К. Годунова первого порядка как наиболее надежный инструмент расчета детонации и ударных волн.

Оригинальная схема С.К. Годунова (классическая [44]), основанная на использовании точного решения задачи распада разрыва для интегрирования законов сохранения, при моделировании быстропротекающих процессов, включая взрывные, допускает использование лагранжевых, эйлерово-лагранжевых и эйлеровых подходов. Применение решения задачи распада разрыва дает возможность выделять ударные фронты и контактные разрывы и привязывать к ним расчетные сетки. Схема монотонна на разрывных решениях. По сути этот метод близок к методу характеристик в эйлеровых или эйлерово-лагранжевых переменных. Схема была модифицирована на моделирование различных физических процессов, и этот вид конечноразностных схем был выделен в отдельный класс схем конечного объема (FVM). Основным недостатком схемы Годунова – значительная нерегулируемая схемная вязкость, обусловленная первым порядком аппроксимации. Соответственно были предприняты многочисленные попытки повысить точность схемы. Наиболее известные для задач гидрогазодинамики это модификации отечественных ученых Колгана В.П. [68], Крайко А.Н., Копченова В.И., Тилляевой Н.И., Щербакова А.С. [69,70], Родионова А.В. [71], Моисеева Н.Я. [72], зарубежных исследователей – Ван Лира [73], Колеллы, Вудворда [74]. Если в оригинальной схеме было кусочно-постоянное распределение параметров в расчетных ячейках, то эти модификации используют различные варианты (линейные или параболические) распределения параметров, привлекая дополнительные ячейки и увеличивая расчетный шаблон, корректируя таким образом параметры на гранях расчетной ячейки, участвующие в задаче распада разрыва. В схемах [71] и [72] изменения вносятся также в шаг корректор. Вариант Ван Лира [73] оказался наиболее востребован для взрывных задач как с использованием авторских методик [75-79], так и в наиболее распространенных коммерческих пакетах ANSYS AUTODYN, ALE3D, EUROPLEXUS, OURANOS и др. Основное неудобство модификации [73] – увеличенный разностный шаблон, в трехмерном случае это  $5*5*5$ , что создает проблемы при использовании неструктурированных разностных сеток и реализации граничных условий.

В работах Абузярова М.Х., Баженова В.Г., Кочеткова А.В. [80-82] был предложен метод повышения точности схемы С.К. Годунова, не требующий увеличения разностного шаблона, монотонный в области разрывных решений, допускающий использование лагранжевых и эйлерово-лагранжевых подходов. Повышение порядка аппроксимации до второго достигается на компактном  $3*3*3$  шаблоне за счет сближения областей влияния дифференциальной и разностной задач на неравномерной подвижной сетке, в том числе и на границе расчетной области. Изменения необходимы только на шаге предиктор при подготовке параметров для решения задачи распада

разрыва. Монотонность на разрывных решениях достигается переходом в этой области к задаче распада разрыва схемы первого порядка. Для решения взрывных задач и распространения детонации используется модель идеальной установившейся детонации с точным решением распространения детонационного фронта с навязанной скоростью от точки инициирования. Энерговыведение, вызванное детонацией, учитывается введением в уравнение энергии дополнительного источникового члена. В [30,31,83] приведена численная реализация этой модели в схеме С.К. Годунова для двумерного случая. Развитие этой численной методики для трехмерного варианта на основе метода С.К. Годунова приведено в работе автора [2]. Для описания процессов в продуктах детонации и воздухе используется уравнение состояния идеального газа с переменным показателем адиабаты, вычисляемым из уравнения состояния типа JWL [19]. Граница между воздухом и продуктами детонации не выделяется в силу близости их термодинамических свойств. Данная методика для моделирования трехмерных взрывных процессов была использована в работах [2-17]. Развитие этой численной методики для трехмерного варианта на основе метода С.К. Годунова приведено в работе [14], где численно моделировались трехмерные процессы взрыва сферических зарядов в цилиндрической камере с жесткими стенками при инициировании детонации в различных точках заряда.

## **1.2. Численные методы для моделирования динамических процессов в упругопластических телах в эйлеровых переменных**

Для описания динамических процессов в упругопластических элементах конструкций, к которым относятся процессы взрывного нагружения, традиционно применяют Лагранжев подход, выражающий все характерные функции деформируемого тела (плотность, напряжение, деформация и т.д.) как функции материальных координат. Этот подход используется в методе конечных элементов [84-89] (Люкшин Б.А., Герасимов А.В., Джонсон К., Голованов А.И., Бережной Д.В., Капустин С.А. и др.), в численном методе типа Уилкинса [26, с.212], [90-94] (Кукуджанов В.Н., Фомин В.М., Гулидов А.И., Садырин А.И., Волков И.А.), в вариационно-разностном методе [95] (Баженов В.Г., Кибец А.И., Чекмарев Д.Т. и др.). Он обладает большей точностью, чем Эйлеров подход, более экономичен в вычислительном плане. Для решения задач данного класса в пакетах прикладных программ, таких как ЛОГОС, ДИНАМИКА-2D, ДИНАМИКА-3D, ANSYS, AUTODYN, LS DYNA, ALE3D, EUROPLEXUS и др. используются методы типа Уилкинса. Но при значительных перемещениях и формоизменениях элементов

конструкций под действием взрывных нагрузок лагранжевые расчетные сетки могут претерпевать сильные искажения, что затрудняет или делает невозможным продолжение счета. Соответственно, для решения подобных задач по мере увеличения вычислительных возможностей и совершенствования численных методов, стали применяться методики, использующие совместные эйлерово-лагранжевы и эйлеровы подходы, ранее используемые для моделирования разрывных течений в газах, в частности, схема распада разрыва С.К. Годунова [44], как одна из наиболее эффективных. Однако в отличие от ударных волн в газе, нелинейный механизм, сдерживающий размазывание разрывов, в упругопластических средах отсутствует, и при длительном расчете на основе схемы первого порядка аппроксимации наблюдается практически полное выглаживание скачков. В [44] выписана схема решения плоской динамической задачи теории упругости в декартовых координатах. Решения, полученные на ее основе для задач, связанных с распространением упругих волн, как в плоской геометрии, так и в криволинейных системах координат [96-100] (Чебан В. Г., Руссу И. В., Римский В. К., Магомедов К. М., Холодов А. С. и др.) показали значительное затухание амплитуд волн и колебаний, обусловленное численной вязкостью схемы. Благодаря простоте реализации граничных условий, схема первого порядка [44] получила распространение при расчетах начальной стадии ударно-волновых процессов [101-104] (Демидов В.Н., Корнеев А.И., Афанасьев С.Б., Козлов Е.А., Абузяров М.Х., Баженов В.Г., Котов В.Л., Gavrilyuk S.L., Favrie N., Saurel R.) и др. Модификации метода С.К. Годунова путем построения решений задачи распада разрыва для различных моделей пластичности и типов симметрии в работах Афанасьева С.Б.[105-108], Miller G., Colella P. [109-110], Barton P.T., Drikakis D., Romenski E., Titarev V.A. [111], Меньшов И.С. [112, 113] и др., больше представляют академический интерес, чем прикладное значение, и не нашли практического применения. В статье В.Н. Кукуджанова “Метод расщепления упругопластических уравнений” [114], показано, как получить методом расщепления по физическим процессам решение со вторым порядком точности для упругопластических уравнений. С учетом [114], Абузяровым М.Х. и Aiso H. в [115,116] была предложена простая и эффективная модификация схемы С.К. Годунова для упругопластических уравнений, требующая изменений только на шаге предиктор (на этапе расчета задачи распада разрыва), имеющая второй порядок аппроксимации по времени и пространству в Лагранжевых и Эйлеровых переменных на компактном  $3*3*3$  шаблоне на неравномерной подвижной сетке для гладких решений и монотонная на разрывных. Модификации [80-82,115,116] нашли применение в двумерной методике UPSGOD-2D для решения задач взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций, показанных в работах Абузярова М.Х., Барабанова В.Н., Кочеткова А.В., Крылова С.В. [30,31,117-119]. На границе «газ-упругопластическое тело» в UPSGOD-2D используется точное решение задачи распада разрыва,

полученное сращиванием решения для отражения потока идеального газа от жесткой подвижной стенки и свободной границы для упругого тела. В [1] это решение было уточнено автором работы для повышения точности на границе упругого тела. Модификации [1,80-82,113,114] легли в основу численных методик для расчета трехмерных задач взрывного нагружения элементов конструкций в эйлеровых переменных [2-17,120,121].

### **1.3. Контактные алгоритмы «газ – упругое тело» для моделирования взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций на эйлеровых сетках**

Обзоры контактных алгоритмов, используемых для численного решения задач ударно-волнового нагружения сплошных сред можно найти в [121-127]. Условно эти алгоритмы можно разбивать на лагранжевые, произвольные эйлерово-лагранжевые (ALE, Arbitrary Lagrangian-Eulerian) и эйлеровые. При небольших деформациях и перемещениях упругопластических элементов конструкций возможно решение задач взрывного нагружения в несвязанной постановке. На первом этапе рассчитывается нагружение жесткой неподвижной конструкции, далее полученная нагрузка используется как динамическое граничное условие для расчета упругопластической конструкции, например, [141] Зельдович Я.Б.

Для задач с подвижными контактными границами лагранжевые методы являются наиболее эффективными, так как контактные границы при этом совпадают с границами разностных сеток и отсутствуют конвективные члены. Но при сильных деформациях частиц среды лагранжевая сетка сильно искажается, приходится генерировать новую сетку с интерполяцией параметров решения со старой сетки на новую. Это приводит к потере точности и сильному усложнению алгоритма расчета даже в одномерном случае.

При использовании произвольных лагранжево-эйлеровых методов, когда контактные границы совпадают с границами раздела сред, проблемы, связанные с деформацией сеток меньше, так как внутри расчетных областей можно оптимизировать построение сеток. При этом необходимо вводить дополнительные уравнения движения узлов сетки, что практически очень сложно в трехмерном случае при больших деформациях контактных границ. Если лагранжевы методы считаются оптимальными в задачах с относительно малыми деформациями самих сред, то произвольные эйлерово-лагранжевые методы оптимальны при относительно небольших деформациях контактных границ задачи, которые сопровождаются расчетными сетками и эффективны в двумерном случае.

Для расчета движения контактных границ в случае больших перемещений границ раздела сред в трехмерном случае используются многосеточные эйлеровые методы со стационарными декартовыми или криволинейными сетками различных типов. Методы расчета контактных границ здесь подразделяют на два типа в зависимости от того, как трактуется в них граница раздела различных сред. К первому типу относят методы, в которых контактная граница рассматривается как выделенная бесконечно тонкая поверхность, по разные стороны которой находятся разные среды. В англоязычной литературе такие методы называются *sharp interface methods (SIM)*. Этот метод требует специальных процедур отслеживания контактных поверхностей внутри расчетных ячеек для расчета “дробных” ячеек, являющихся кусками основной ячейки сетки, разделенных контактной поверхностью, что приводит к сильному осложнению алгоритмов, дополнительным ограничениям на шаг интегрирования и падению точности (BenBon D.J.[122], Glimm J., Li X.L., Liu Y.-J., Xu Z.-L., Zhao N. [128]). Ко второму типу относят методы, в которых контактная граница представляется не разрывной поверхностью, а переходным слоем, в котором характеристики неоднородной среды (смеси контактирующих сред) плавно переходят от параметров одной среды к параметрам другой. В англоязычной литературе такие методы называются *diffusive interface methods (DIM)*.

Методы DIM с размыванием контактной границы являются менее точными по сравнению с SIM, но они более просты в применении, легко обобщаются на трехмерный случай. Но при расчетах переходных зон с неопределенной средой, сложно подобрать адекватное уравнение состояния для описания этой среды, что может приводить к нефизическим осцилляциям решения даже в случае использования схем первого порядка точности (Abgrall R., Karni S. [129]).

Идеология фиктивной жидкости GFM (Ghost Fluid Method), предложенная в [130] (Garimella R.P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, S. Osher) позволяет в рамках подхода SIM избежать проблемы расчета “дробных” ячеек. Согласно этой идеологии поверх ячеек с реальной средой на “другой стороне” контактной границы вводится слой фиктивных ячеек, заполненных фиктивной жидкостью, термодинамически подобной жидкости “с этой стороны”. Различные варианты SIM + GFM были предложены в работах Аганина А. А., Abgrall R., Karni S., B. Howell, G. Ball, P.T. Barton, D. Drikakis, S. Schoch, K. Nordin-Bates, N. Nikiforakis, Ю. Н. Дерюгина, А. В. Саразова, Р. Н. Жучкова, И.С. Меньшова, М.А. Корнева [125,129-133, 138, 139]. Алгоритмы оказались достаточно сложными в реализации и не получили широкого распространения.

В работах автора [2,3] была предложена модификация GFM, позволяющая использовать SIM для точного определения и сопровождения положения контактной поверхности разнородных сред, и удобная для трехмерной реализации. Эта модификация использует три вида пространственных сеток. Первый вид сеток необходим для SIM части, это сетки в виде наборов

треугольников (STL файлов), задают поверхности контактирующих объектов и служат для отслеживания этих поверхностей в процессе их движения. Вторые сетки – это базовые неподвижные декартовы сетки, вложенные в каждую среду (в каждый STL файл). Третий вид сеток необходим для модифицированного GFM. Это локальные ортогональные подвижные сетки размером  $3*3*3$  для каждой контактирующей среды. Они привязаны к каждому треугольнику первого вида сеток, причем при расчете контакта среды “1” со средой “2” к локальной сетке среды “1” пристраивается сетка в среду “2” с размерами ячеек среды “1”, в итоге получаем ортогональную  $3*3*6$  сетку. Соответственно при расчете контакта среды “2” со средой “1” сетка пристраивается к локальной сетке среды “2”. В эти локальные сетки параметры течения интерполируются из каждой среды в свою часть локальной сетки. В отличие от [130] в этих локальных сетках не только рассчитывается задача распада разрыва на границе раздела, в том числе между газовой средой и упругим телом по уточненной методике [1], но и происходит интегрирование центральных граничных ячеек локальной сетки. Решение задачи распада разрыва используется для определения скоростей и подвижки узлов поверхностной сетки (STL файла) каждого объекта. Интегрирование в базовой сетке каждой среды происходит по стандартной эйлеровой процедуре. Параметры в базовых и локальных сетках каждой среды взаимно интерполируются. Такой подход позволяет избежать не только размазывания контактных разрывов, но и значительно упростить этап подготовки задачи к счету, так как не требует сложных трехмерных сеточных генераторов, достаточно задания поверхностей рассчитываемых объектов в виде STL файлов. Предложенная методика показала свою работоспособность для моделирования различных процессов взрывного нагружения элементов конструкций в эйлеровых сетках [2-17].

#### **1.4. Выводы из обзора**

1) Вопросам численного моделирования процессов взрывного нагружения упругопластических конструкций посвящено большое количество литературы. В существующих численных методиках для трехмерного моделирования процессов детонации и расширения продуктов взрыва используются в основном эйлеровые подходы, а для динамики упругопластических конструкций - лагранжевые. Нагрузки со стороны продуктов взрыва на упругопластические конструкции часто рассчитываются или в приближении недеформируемой конструкции или без учета влияния деформирования и перемещения конструкции на продукты взрыва. В трехмерном случае при необходимости решения в связанной постановке использование лагранжева подхода, как для газовой, так и упругопластической среды, при больших деформациях и перемещениях, например при взрывном нагружении упругопластических конструкций, требует

перестройки деформированной расчетной области, что значительно усложняет расчеты, так как лагранжевые расчетные сетки могут претерпевать сильные искажения, что затрудняет или делает невозможным продолжение счета.

2) В ряде используемых программных комплексах (ALE3D, EUROPLEXUS, OURANOS и др.) в качестве решателя для газодинамической части применяется модификация схемы С.К. Годунова на эйлеровых сетках, для упругопластической – лагранжева схема типа Уилкинса. Для моделирования процессов контактного взаимодействия разнородных сред и конструкций используются многосеточные алгоритмы типа GFM. В трехмерном случае моделирование процессов с большими деформациями и перемещениями остается значительной проблемой, что связано также и со сложностью выделения границы взаимодействия и её отслеживания.

3) В последние годы появились работы, использующие для численного решения трехмерных задач этого класса многосеточные эйлеровые подходы и модификации схемы С.К. Годунова, как для газодинамической, так и упругопластической частей задачи [127, 2-17]. В контактных алгоритмах применяется эйлеров подход типа GFM и используется точное решение задачи распада разрыва «газ - упругое тело» в [1-17] или приближенное «газ – упругопластическое тело» в [127]. Примеры решенных задач показывают эффективность эйлеровых методик для численного моделирования трехмерных задач взрывного нагружения упругопластических конструкций и актуальность их дальнейшего развития. Использование единой схемы существенно упрощает моделирование без потери качественной картины решения.

## Глава 2. Определяющая система уравнений для численного моделирования взрывных процессов в сплошной среде

Для моделирования взрывных процессов в сплошной среде, к которым относятся процессы взрывного нагружения упругопластических конструкций, используются уравнения в форме законов сохранения массы, импульса и энергии для произвольного подвижного объема, описывающие деформирование сплошной среды в приближении модели сжимаемого упругопластического тела [142]. Эти уравнения могут быть использованы для изучения, как гладких так и разрывных решений. В декартовой системе координат в дифференциальной форме они имеют следующий вид [114] и [140]:

$$\rho_{,t} + (\rho u_i)_{,x_i} = 0 \quad (2.1)$$

$$(\rho u_i)_{,t} + (\rho u_i u_j - \sigma_{ij})_{,x_j} = 0 \quad (2.2)$$

$$e_{,t} + (e u_j - u_i \sigma_{ij})_{,x_j} = 0 \quad (2.3)$$

$$D S_{ij} / Dt + \lambda_i S_{ij} = 2 \mu e_{ij} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho), \quad (2.5)$$

Обозначения:  $t$  - время,  $x_{i(i=1,2,3)}$  - пространственные координаты,  $u_i$  - компоненты вектора скорости по осям  $x_i$  соответственно,  $\rho$  - плотность,  $e = \rho(\varepsilon + u_i u_i / 2)$  - полная энергия единицы объема,  $\varepsilon$  - внутренняя энергия единицы массы, заданная уравнением состояния (2.5),  $\|\sigma_{ij}\|$  - тензор напряжений, который представляется в виде шаровой и девиаторной частей  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + S_{ij}$ ,  $p = -1/3 \sigma_{ii}$ ,  $\|e_{ij}\|$  - девиатор тензора скоростей деформаций  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3 \varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ , где  $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$ , индексы после запятой относятся к соответствующему дифференцированию (по времени или соответствующему направлению). Символом  $D/Dt$  обозначена производная Яуманна, учитывающая поворот тензора напряжений в Эйлеровых переменных.  $D S_{ij} / Dt = S_{ij,t} + u_k \partial S_{ij} / \partial x_k - S_{ik} \omega_{jk} - S_{jk} \omega_{ik}$ , где  $\omega_{ij} = 1/2(u_{i,j} - u_{j,i})$ ,  $\mu$  - модуль сдвига материала, В качестве критерия перехода из упругого в пластическое состояние используется условие текучести Мизеса  $S_{ij} S_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_s^2$ ,  $\sigma_s$  - предел текучести при одноосном растяжении. Параметр  $\lambda_i$  должен оставаться положительным в ходе пластической деформации,

при выполнении условия текучести Мизеса  $\lambda_t = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} / \sigma_s^2$ . Пластическое течение описывается путем сохранения девиатора на поверхности текучести [114].

В случае отсутствия сдвиговых напряжений система (2.1)-(2.5) очевидным образом переходит в уравнения Эйлера для движения сжимаемой жидкости или газа, для интегрирования которых может использоваться классическая схема С.К. Годунова [45,45] или ее модификации, развитые для этих уравнений.

Для моделирования динамики сжимаемой упругопластической среды используется метод расщепления упругопластических уравнений, предложенный В.Н. Кукуджановым [114]. Эта схема расщепления основана на замене на малом отрезке времени аддитивного матрично-дифференциального оператора по пространственным переменным в уравнении (2.4) на мультипликативный, состоящий из двух множителей – упругого и пластического: «... решение упругопластической задачи получается из решения упругой задачи простым умножением на коэффициент корректировки, что означает нормировку вектора напряжения и приведение его на поверхность текучести в пространстве напряжений...» ([114], стр.103). Этот метод позволяет значительно упростить процесс расчета упругопластических течений и сводит расчет пластического поведения к коррекции упругого решения с сохранением второго порядка аппроксимации. В рамках схемы Годунова это означает, что достаточно интегрирования упругих уравнений (упругая задача распада разрыва, расчет и интегрирование упругих потоков и компонент девиатора тензора напряжений) с дальнейшей коррекцией напряжений на этапе корректор в зависимости от используемой модели пластичности. Для случая идеальной пластичности корректировка совпадает с предложенной Уилкинсом [26]  $S_{ij} = S_{ij} / \sqrt{\lambda_t}$ , где

$$\lambda_t = \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} / \sigma_s^2.$$

Соответственно система уравнений (2.1)-(2.5) для упругого случая  $\lambda_t = 0$  в развернутой форме примет следующий вид:

$$\rho_{,t} + (\rho u_1)_{,1} + (\rho u_2)_{,2} + (\rho u_3)_{,3} = 0 \quad (2.6)$$

$$(\rho u_1)_{,t} + (\rho u_1 u_1 + p - S_{11})_{,1} + (\rho u_1 u_2 - S_{12})_{,2} + (\rho u_1 u_3 - S_{13})_{,3} = 0 \quad (2.7)$$

$$(\rho u_2)_{,t} + (\rho u_2 u_1 - S_{12})_{,1} + (\rho u_2 u_2 + p - S_{22})_{,2} + (\rho u_2 u_3 - S_{23})_{,3} = 0 \quad (2.8)$$

$$(\rho u_3)_{,t} + (\rho u_3 u_1 - S_{13})_{,1} + (\rho u_3 u_2 - S_{23})_{,2} + (\rho u_3 u_3 + p - S_{33})_{,3} = 0 \quad (2.9)$$

$$e_{,t} + ((e + p - S_{11})u_1 - u_2 S_{12} - u_3 S_{13})_{,1} + ((e + p - S_{22})u_2 - u_1 S_{12} - u_3 S_{23})_{,2} + ((e + p - S_{33})u_3 - u_1 S_{13} - u_2 S_{23})_{,3} = 0 \quad (2.10)$$

$$S_{11,t} + u_1 S_{11,1} + u_2 S_{11,2} + u_3 S_{11,3} - S_{12}(u_{1,2} - u_{2,1}) - S_{13}(u_{1,3} - u_{3,1}) - 4/3 \mu u_{1,1} + 2/3 \mu (u_{2,2} + u_{3,3}) = 0 \quad (2.11)$$

$$S_{22,t} + u_1 S_{22,1} + u_2 S_{22,2} + u_3 S_{22,3} - S_{12}(u_{2,1} - u_{1,2}) - S_{23}(u_{2,3} - u_{3,2}) - 4/3 \mu u_{2,2} + 2/3 \mu (u_{1,1} + u_{3,3}) = 0 \quad (2.12)$$

$$S_{33,t} + u_1 S_{33,1} + u_2 S_{33,2} + u_3 S_{33,3} - S_{13}(u_{3,1} - u_{1,3}) - S_{23}(u_{3,2} - u_{2,3}) - 4/3 \mu u_{3,3} + 2/3 \mu (u_{1,1} + u_{2,2}) = 0 \quad (2.13)$$

$$S_{12,t} + u_1 S_{12,1} + u_2 S_{12,2} + u_3 S_{12,3} + 0.5(S_{11} - S_{22})(u_{1,2} - u_{2,1}) - 0.5 S_{13}(u_{2,3} - u_{3,2}) - 0.5 S_{23}(u_{1,3} - u_{3,1}) - \mu(u_{1,2} + u_{2,1}) = 0 \quad (2.14)$$

$$S_{13,t} + u_1 S_{13,1} + u_2 S_{13,2} + u_3 S_{13,3} + 0.5(S_{11} - S_{33})(u_{1,3} - u_{3,1}) - 0.5 S_{12}(u_{3,2} - u_{2,3}) - 0.5 S_{23}(u_{1,2} - u_{2,1}) - \mu(u_{1,3} + u_{3,1}) = 0 \quad (2.15)$$

$$S_{23,t} + u_1 S_{23,1} + u_2 S_{23,2} + u_3 S_{23,3} + 0.5(S_{22} - S_{33})(u_{2,3} - u_{3,2}) - 0.5 S_{13}(u_{2,1} - u_{1,2}) - 0.5 S_{12}(u_{3,1} - u_{1,3}) - \mu(u_{2,3} + u_{3,2}) = 0 \quad (2.16)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(p, \rho), \quad (2.17)$$

Проинтегрируем систему 2.6-2.16 для неподвижного параллелепипеда (рис.1), ограниченного отрезками  $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$  на временном отрезке  $\Delta t$

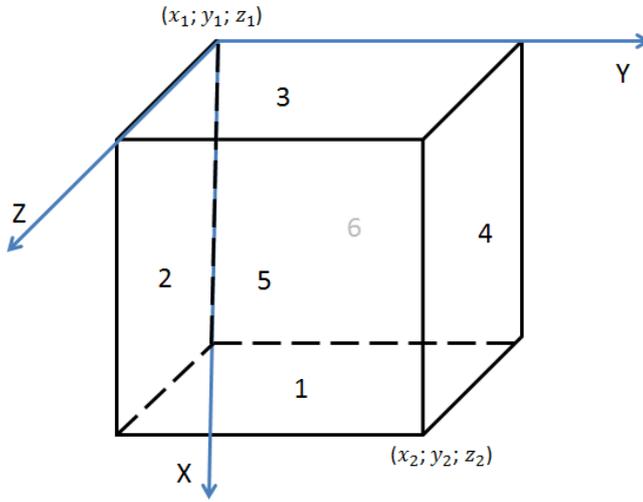


Рис. 1: единичный прямоугольный параллелепипед с указанием номеров граней

в соответствии с [45]. После деления на объем  $(x_2 - x_1) * (y_2 - y_1) * (z_2 - z_1) * \Delta t$  для (2.6)–(2.16) получим:

$$\begin{aligned} \rho^t &= \rho_t + \\ &+ ((\rho u_1)_1 - (\rho u_1)_3) \Delta t / (x_2 - x_1) \\ &+ ((\rho u_2)_4 - (\rho u_2)_2) \Delta t / (y_2 - y_1) \\ &+ ((\rho u_3)_5 - (\rho u_3)_6) \Delta t / (z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} (\rho u_1)^t &= (\rho u_1)_t + \\ &+ ((\rho u_1^2 + p - S_{11})_1 - (\rho u_1^2 + p - S_{11})_3) \Delta t / (x_2 - x_1) + \\ &+ ((\rho u_1 u_2 - S_{12})_4 - (\rho u_1 u_2 - S_{12})_2) \Delta t / (y_2 - y_1) \\ &+ ((\rho u_1 u_3 - S_{13})_5 - (\rho u_1 u_3 - S_{13})_6) \Delta t / (z_2 - z_1) \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
(\rho u_2)^t &= (\rho u_2)_t + \\
&+ ((\rho u_2 u_1 - S_{12})_1 - (\rho u_2 u_1 - S_{12})_3) \Delta t / (x_2 - x_1) + \\
&+ ((\rho u_2^2 + p - S_{22})_4 - (\rho u_2^2 + p - S_{22})_2) \Delta t / (y_2 - y_1) \quad (2.20) \\
&+ ((\rho u_2 u_3 - S_{23})_5 - (\rho u_2 u_3 - S_{23})_6) \Delta t / (z_2 - z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\rho u_3)^t &= (\rho u_3)_t + \\
&+ ((\rho u_3 u_1 - S_{13})_1 - (\rho u_3 u_1 - S_{13})_3) \Delta t / (x_2 - x_1) + \\
&+ ((\rho u_3 u_2 - S_{23})_4 - (\rho u_3 u_2 - S_{23})_2) \Delta t / (y_2 - y_1) \quad (2.21) \\
&+ ((\rho u_3^2 + p - S_{33})_5 - (\rho u_3^2 + p - S_{33})_6) \Delta t / (z_2 - z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(e)^t &= (e)_t + \\
&+ \left( \begin{aligned} &((e + p - S_{11})u_1 - S_{12}u_2 - S_{13}u_3)_1 \\ &- ((e + p - S_{11})u_1 - S_{12}u_2 - S_{13}u_3)_3 \end{aligned} \right) \Delta t / (x_2 - x_1) \\
&+ \left( \begin{aligned} &((e + p - S_{22})u_2 - S_{12}u_1 - S_{23}u_3)_4 \\ &- ((e + p - S_{22})u_2 - S_{12}u_1 - S_{23}u_3)_2 \end{aligned} \right) \Delta t / (y_2 - y_1) + \quad (2.22) \\
&+ \left( \begin{aligned} &((e + p - S_{33})u_3 - S_{13}u_1 - S_{23}u_2)_5 \\ &- ((e + p - S_{33})u_3 - S_{13}u_1 - S_{23}u_2)_6 \end{aligned} \right) \Delta t / (z_2 - z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S_{11})^t &= (S_{11})_t \\
&+ \left( \begin{aligned} &((S_{11} - \frac{4}{3}\mu)u_1 - \hat{S}_{11}u_1 + \hat{S}_{12}u_2 + \hat{S}_{13}u_3)_1 \\ &- ((S_{11} - \frac{4}{3}\mu)u_1 - \hat{S}_{11}u_1 + \hat{S}_{12}u_2 + \hat{S}_{13}u_3)_3 \end{aligned} \right) \Delta t / (x_2 - x_1) \\
&+ \left( \begin{aligned} &(u_2(S_{11} + \frac{2}{3}\mu) - \hat{S}_{11}u_2 - \hat{S}_{12}u_1)_4 \\ &- (u_2(S_{11} + \frac{2}{3}\mu) - \hat{S}_{11}u_2 - \hat{S}_{12}u_1)_2 \end{aligned} \right) \Delta t / (y_2 - y_1) \quad (2.23) \\
&+ \left( \begin{aligned} &(u_3(S_{11} + \frac{2}{3}\mu) - \hat{S}_{11}u_3 - \hat{S}_{13}u_1)_5 \\ &- (u_3(S_{11} + \frac{2}{3}\mu) - \hat{S}_{11}u_3 - \hat{S}_{13}u_1)_6 \end{aligned} \right) \Delta t / (z_2 - z_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{S}_{22})^t = (\mathbf{S}_{22})_t \\
& + \left( \begin{array}{l} ((\mathbf{S}_{22} - \hat{\mathbf{S}}_{22} + \frac{2}{3}\mu)u_1 - \hat{\mathbf{S}}_{12}u_2)_1 \\ - ((\mathbf{S}_{22} - \hat{\mathbf{S}}_{22} + \frac{2}{3}\mu)u_1 - \hat{\mathbf{S}}_{12}u_2)_3 \end{array} \right) \Delta t / (x_2 - x_1) \\
& + \left( \begin{array}{l} (\hat{\mathbf{S}}_{12}u_1 + (\mathbf{S}_{22} - \hat{\mathbf{S}}_{22} - \frac{4}{3}\mu)u_2 + \hat{\mathbf{S}}_{23}u_3)_4 \\ - (\hat{\mathbf{S}}_{12}u_1 + (\mathbf{S}_{22} - \hat{\mathbf{S}}_{22} - \frac{4}{3}\mu)u_2 + \hat{\mathbf{S}}_{23}u_3)_2 \end{array} \right) \Delta t / (y_2 - y_1) \\
& + \left( \begin{array}{l} (-\hat{\mathbf{S}}_{23}u_2 + (\mathbf{S}_{22} - \hat{\mathbf{S}}_{22} + \frac{2}{3}\mu)u_3)_5 \\ - (-\hat{\mathbf{S}}_{23}u_2 + (\mathbf{S}_{22} - \hat{\mathbf{S}}_{22} + \frac{2}{3}\mu)u_3)_6 \end{array} \right) \Delta t / (z_2 - z_1)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{S}_{33})^t = (\mathbf{S}_{33})_t \\
& + \left( \begin{array}{l} ((\mathbf{S}_{33} - \hat{\mathbf{S}}_{33} + \frac{2}{3}\mu)u_1 - \hat{\mathbf{S}}_{13}u_3)_1 \\ - ((\mathbf{S}_{33} - \hat{\mathbf{S}}_{33} + \frac{2}{3}\mu)u_1 - \hat{\mathbf{S}}_{13}u_3)_3 \end{array} \right) \Delta t / (x_2 - x_1) \\
& + \left( \begin{array}{l} ((\mathbf{S}_{33} - \hat{\mathbf{S}}_{33} + \frac{2}{3}\mu)u_2 - \hat{\mathbf{S}}_{23}u_3)_4 \\ - ((\mathbf{S}_{33} - \hat{\mathbf{S}}_{33} + \frac{2}{3}\mu)u_2 - \hat{\mathbf{S}}_{23}u_3)_2 \end{array} \right) \Delta t / (y_2 - y_1) \\
& + \left( \begin{array}{l} (\hat{\mathbf{S}}_{13}u_1 + \hat{\mathbf{S}}_{23}u_2 + u_3(\mathbf{S}_{33} - \hat{\mathbf{S}}_{33} - \frac{4}{3}\mu)u_3)_5 \\ - (\hat{\mathbf{S}}_{13}u_1 + \hat{\mathbf{S}}_{23}u_2 + u_3(\mathbf{S}_{33} - \hat{\mathbf{S}}_{33} - \frac{4}{3}\mu)u_3)_6 \end{array} \right) \Delta t / (z_2 - z_1)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
& (\mathbf{S}_{12})^t = (\mathbf{S}_{12})_t \\
& + \left( \begin{array}{l} ((\mathbf{S}_{12} - \hat{\mathbf{S}}_{12})u_1 + (-\mu - \hat{\mathbf{S}}_{11}0.5 + \hat{\mathbf{S}}_{22}0.5)u_2 + \hat{\mathbf{S}}_{23}0.5u_3)_1 \\ - ((\mathbf{S}_{12} - \hat{\mathbf{S}}_{12})u_1 + (-\mu - \hat{\mathbf{S}}_{11}0.5 + \hat{\mathbf{S}}_{22}0.5)u_2 + \hat{\mathbf{S}}_{23}0.5u_3)_3 \end{array} \right) * \Delta t / (x_2 - x_1) \\
& + \left( \begin{array}{l} ((-\mu + \hat{\mathbf{S}}_{11}0.5 - \hat{\mathbf{S}}_{22}0.5)u_1 + (\mathbf{S}_{12} - \hat{\mathbf{S}}_{12})u_2 + \hat{\mathbf{S}}_{13}0.5u_3)_4 \\ - ((-\mu + \hat{\mathbf{S}}_{11}0.5 - \hat{\mathbf{S}}_{22}0.5)u_1 + (\mathbf{S}_{12} - \hat{\mathbf{S}}_{12})u_2 + \hat{\mathbf{S}}_{13}0.5u_3)_2 \end{array} \right) * \Delta t / (y_2 - y_1) \\
& + \left( \begin{array}{l} (-\hat{\mathbf{S}}_{23}0.5u_1 - \hat{\mathbf{S}}_{13}0.5u_2 + (\mathbf{S}_{12} - \hat{\mathbf{S}}_{12})u_3)_5 \\ - (-\hat{\mathbf{S}}_{23}0.5u_1 - \hat{\mathbf{S}}_{13}0.5u_2 + (\mathbf{S}_{12} - \hat{\mathbf{S}}_{12})u_3)_6 \end{array} \right) * \Delta t / (z_2 - z_1)
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S}_{13})^t &= (\mathbf{S}_{13})_t \\
&+ \left[ \begin{aligned} &((\mathbf{S}_{13} - \hat{\mathbf{S}}_{13})u_1 + \hat{\mathbf{S}}_{23} 0.5u_2 + (-\mu - \hat{\mathbf{S}}_{11} 0.5 + \hat{\mathbf{S}}_{33} 0.5)u_3)_1 - \\ &((\mathbf{S}_{13} - \hat{\mathbf{S}}_{13})u_1 + \hat{\mathbf{S}}_{23} 0.5u_2 + (-\mu - \hat{\mathbf{S}}_{11} 0.5 + \hat{\mathbf{S}}_{33} 0.5)u_3)_3 \end{aligned} \right] * \Delta t / (x_2 - x_1) \\
&+ \left[ \begin{aligned} &(-\hat{\mathbf{S}}_{23} 0.5u_1 + (\mathbf{S}_{13} - \hat{\mathbf{S}}_{13})u_2 - \hat{\mathbf{S}}_{12} 0.5u_3)_4 \\ &- (-\hat{\mathbf{S}}_{23} 0.5u_1 + (\mathbf{S}_{13} - \hat{\mathbf{S}}_{13})u_2 - \hat{\mathbf{S}}_{12} 0.5u_3)_2 \end{aligned} \right] * \Delta t / (y_2 - y_1) \\
&+ \left[ \begin{aligned} &((-\mu + \hat{\mathbf{S}}_{11} 0.5 - \hat{\mathbf{S}}_{33} 0.5)u_1 + \hat{\mathbf{S}}_{12} 0.5u_2 + (-\hat{\mathbf{S}}_{13} + \mathbf{S}_{13})u_3)_5 \\ &- ((-\mu + \hat{\mathbf{S}}_{11} 0.5 - \hat{\mathbf{S}}_{33} 0.5)u_1 + \hat{\mathbf{S}}_{12} 0.5u_2 + (-\hat{\mathbf{S}}_{13} + \mathbf{S}_{13})u_3)_6 \end{aligned} \right] * \Delta t / (z_2 - z_1)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{S}_{23})^t &= (\mathbf{S}_{23})_t \\
&+ \left[ \begin{aligned} &((\mathbf{S}_{23} - \hat{\mathbf{S}}_{23})u_1 - \hat{\mathbf{S}}_{13} 0.5u_2 - \hat{\mathbf{S}}_{12} 0.5u_3)_1 \\ &- ((\mathbf{S}_{23} - \hat{\mathbf{S}}_{23})u_1 - \hat{\mathbf{S}}_{13} 0.5u_2 - \hat{\mathbf{S}}_{12} 0.5u_3)_3 \end{aligned} \right] * \Delta t / (x_2 - x_1) \\
&+ \left[ \begin{aligned} &(\hat{\mathbf{S}}_{13} 0.5u_1 + (\mathbf{S}_{23} - \hat{\mathbf{S}}_{23})u_2 + (-\mu - \hat{\mathbf{S}}_{22} 0.5 + \hat{\mathbf{S}}_{33} 0.5)u_3)_4 \\ &- (\hat{\mathbf{S}}_{13} 0.5u_1 + (\mathbf{S}_{23} - \hat{\mathbf{S}}_{23})u_2 + (-\mu - \hat{\mathbf{S}}_{22} 0.5 + \hat{\mathbf{S}}_{33} 0.5)u_3)_2 \end{aligned} \right] * \Delta t / (y_2 - y_1) \\
&+ \left[ \begin{aligned} &(\hat{\mathbf{S}}_{12} 0.5u_1 + (-\mu + \hat{\mathbf{S}}_{22} 0.5 - \hat{\mathbf{S}}_{33} 0.5)u_2 + (-\hat{\mathbf{S}}_{23} + \mathbf{S}_{23})u_3)_5 \\ &- (\hat{\mathbf{S}}_{12} 0.5u_1 + (-\mu + \hat{\mathbf{S}}_{22} 0.5 - \hat{\mathbf{S}}_{33} 0.5)u_2 + (-\hat{\mathbf{S}}_{23} + \mathbf{S}_{23})u_3)_6 \end{aligned} \right] * \Delta t / (z_2 - z_1)
\end{aligned} \tag{2.28},$$

где нижние временные индексы соответствуют величинам на нижнем временном слое, верхние соответственно на новом. Индексы 1 и 3 в потоковых величинах относятся к граням, перпендикулярным оси X соответственно в точках  $x_2$  и  $x_1$ , индексы 2 и 4 к граням, перпендикулярным оси Y соответственно в точках  $y_1$  и  $y_2$ , и индексы 5 и 6 к граням, перпендикулярным оси Z соответственно в точках  $z_2$  и  $z_1$ , потоки вычисляются через параметры течения на гранях, определенные из соответствующих задач распада разрыва. Величины с крышечками берутся из соответствующих центров ячеек с нижнего слоя или могут вычисляться с привлечением параметров с верхнего слоя (неявный алгоритм) как  $\hat{S}_{ij} = (1 - \alpha)S_{ij} + \alpha S_{ij}^t$ , где  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Опыт решения различных двумерных и трехмерных задач показал, что использование различных алгоритмов расчета этих величин дает практически одинаковый результат. Поэтому предпочтителен и выгоден с точки зрения трудоемкости вычислений вариант использования величин с нижнего слоя, то есть  $\alpha = 0$ .

### О граничных условиях.

При использовании (2.21)-(2.28) для граничных ячеек необходимы параметры течения на гранях, примыкающих к границам. Пример параметров, применяемых для расчета основных типов граничных условий [45, 115, 116] :

1. «жесткая стенка» – нормальная скорость задается равной скорости стенки;
2. «жесткая заделка» – на границе задаются 3 компоненты скорости;
3. «Р-граница» или свободная граница – на границе задаются нормальные напряжения и нулевые касательные напряжения;
4. «Р- граница с трением» – на границе задаются нормальные напряжения и связанные по закону Кулона с нормальным касательные напряжения.

Для реализации граничных условий используются соответствующие решения задачи распада разрыва, для газов нелинейное из [45] и линеаризованное для упругих уравнений [115,116]. Для расчета контакта на границе «газ – упругое тело» используется точное решение задачи распада разрыва [31], которое строится как комбинация решения задачи распада разрыва для газа при отражении от жесткой подвижной стенки и решения задачи распада разрыва для упругого тела, нагружаемого давлением.

Решение (2.18)-(2.21) с соответствующими начальными и краевыми условиями при условии стандартной процедуры расчета задачи распада разрыва [44, 45] имеет первый порядок аппроксимации по времени и пространству, использование модифицированной процедуры распада разрыва, единой как для газодинамических так и упругопластических течений [80-82,115,116], повышает аппроксимацию до второго порядка на гладких решениях, с сохранением монотонности на разрывных (см п.2.7).

### 2.1. Решение задачи о распаде разрыва для произвольного уравнения состояния газа путем приведения его к двучленному виду.

Решение задачи распада разрыва для произвольного уравнения состояния газа является трудоемкой задачей и требует значительных вычислительных ресурсов. В [45] приведено решение задачи распада разрыва для уравнения состояния двучленного вида, используемого в данной работе, к которому произвольное уравнение приводится следующим образом. Пусть состояние газа описывается уравнением, заданным в форме

$$p = p(\rho, \varepsilon) \quad (2.1.1)$$

Предполагается, что уравнение состояния удовлетворяет условиям Бете-Вейля.

Считая функцию (2.1.1) гладкой в окрестности точки  $\overline{\rho}, \overline{\varepsilon}, \overline{p}$  представим ее в виде линейной части формулы Тейлора

$$p = \overline{p} + \left( \frac{\partial \overline{p}}{\partial \rho} \right) (\rho - \overline{\rho}) + \left( \frac{\partial \overline{p}}{\partial \varepsilon} \right) (\varepsilon - \overline{\varepsilon}). \quad (2.1.2)$$

Представляя двучленное уравнение состояния (2.1.1), записанное в форме

$$p = \rho \varepsilon (\chi - 1) + (\rho - \rho_0) \hat{A}_0^2 \quad (2.1.3)$$

в окрестности точки в виде (2.1.2), получим

$$p = \overline{p} + \left\{ \overline{\varepsilon} (\overline{\chi} - 1) + \overline{\hat{A}_0^2} \right\} (\rho - \overline{\rho}) + \left\{ \overline{\rho} (\overline{\chi} - 1) \right\} (\varepsilon - \overline{\varepsilon}). \quad (2.1.4)$$

Сравнивая (2.1.4) и (2.1.2), получим

$$\varepsilon (\chi - 1) + \hat{A}_0^2 = \left( \frac{\partial \overline{p}}{\partial \rho} \right), \quad (2.1.5)$$

$$\rho (\chi - 1) = \left( \frac{\partial \overline{p}}{\partial \varepsilon} \right). \quad (2.1.6)$$

Из (2.1.6) имеем

$$\chi = 1 + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \overline{p}}{\partial \varepsilon} \right), \quad (2.1.7)$$

а из (2.1.5) с учетом (2.1.7)

$$\hat{A}_0^2 = \frac{1}{\rho} \left( \overline{\rho} \left( \frac{\partial \overline{p}}{\partial \rho} \right) - \overline{\varepsilon} \left( \frac{\partial \overline{p}}{\partial \varepsilon} \right) \right). \quad (2.1.8)$$

Из (2.1.3)

$$\overline{p} = \overline{\rho} \overline{\varepsilon} (\overline{\chi} - 1) + (\overline{\rho} - \rho_0) \hat{A}_0^2 \quad (2.1.9)$$

Подставляя в (2.1.9) (2.1.7) и (2.1.8), получим

$$\rho_0 \hat{A}_0^2 = \overline{\rho} \left( \frac{\partial \overline{p}}{\partial \rho} \right) - \overline{p}, \quad (2.1.10)$$

$$B = \frac{\rho_0 \hat{A}_0^2}{\chi}. \quad (2.1.11)$$

Формулы (2.1.7), (2.1.8), (2.1.10), (2.1.11) дают выражения для  $\hat{A}_0^2, \rho_0, \chi, B$ , являющихся аналогами констант  $A_0^2, \rho_0, \chi, B$  для двучленного уравнения состояния (2.1.1)

Обобщая формулы (2.1.7), (2.1.8), (2.1.10), (2.1.11) на случай, когда уравнения состояния слева и справа различны

$$p_I = p_I(\rho_I, \varepsilon_I), \quad (2.1.12)$$

$$p_{II} = p_{II}(\rho_{II}, \varepsilon_{II}), \quad (2.1.13)$$

получим

$$\hat{\chi}_I = 1 + \frac{1}{\rho_I} \left( \frac{\partial \overline{p_I}}{\partial \varepsilon_I} \right), \quad (2.1.14)$$

$$\hat{\rho}_{0I} \hat{A}_{0I}^2 = \overline{\rho_I} \left( \frac{\partial \overline{p_I}}{\partial \rho_I} \right) - \overline{p_I}, \quad (2.1.15)$$

$$\hat{B}_I = \frac{\hat{\rho}_{0I} \hat{A}_{0I}^2}{\hat{\chi}_I}, \quad (2.1.16)$$

$$\hat{\chi}_{II} = 1 + \frac{1}{\rho_{II}} \left( \frac{\partial \overline{p_{II}}}{\partial \varepsilon_{II}} \right), \quad (2.1.17)$$

$$\hat{\rho}_{0II} \hat{A}_{0II}^2 = \overline{\rho_{II}} \left( \frac{\partial \overline{p_{II}}}{\partial \rho_{II}} \right) - \overline{p_{II}}, \quad (2.1.18)$$

$$\hat{B}_{II} = \frac{\hat{\rho}_{0II} \hat{A}_{0II}^2}{\hat{\chi}_{II}}. \quad (2.1.19)$$

Величины  $\hat{\chi}_I, \hat{B}_I, \hat{\chi}_{II}, \hat{B}_{II}$ , найденные с помощью (2.1.14), (2.1.16), (2.1.17), (2.1.19), в силу уравнений состояния (2.1.12) и (2.1.13), вместе с известными  $\overline{p_I}, \overline{\rho_I}, \overline{u_I}, \overline{p_{II}}, \overline{\rho_{II}}, \overline{u_{II}}$  являются входными параметрами задачи о распаде разрыва для двучленного уравнения состояния.

Отметим, что сама по себе линейзация уравнения состояния и дальнейшее приведение его к двучленному виду «вслепую» может привести к значительным ошибкам в расчете задачи распада разрыва. Применение линейзации, вообще говоря, оправдано для волн определенной интенсивности и для определенного интервала изменения термодинамических параметров. Поэтому для корректного математического моделирования рассматриваемых одномерных течений требуется дополнительное изучение свойств заданного уравнения состояния.

Пусть имеется среда, в которой справедливо уравнение в двучленной форме (2.1.3):

$$\varepsilon = \frac{p + \chi B}{(\chi - 1)\rho} - \frac{A_0^2}{\chi - 1},$$

где  $\chi$  - показатель адиабаты,  $B, A_0$  - некоторые постоянные величины и

$$B = \frac{1}{\chi} \rho_0 A_0^2 \quad (2.1.20)$$

В частности, для идеального газа  $A_0 = 0$ .

Пусть при  $t = 0$  среда характеризуется параметрами  $p_I, \rho_I, u_I, p_{II}, \rho_{II}, u_{II}$ , слева с индексом  $I$ , справа с индексом  $II$ . Будем рассматривать случай, когда постоянные  $\chi, \rho_0, A_0$  в уравнении состояния различны слева и справа от границы  $x = 0$

$$\begin{aligned} \chi_I, \rho_{0I}, A_{0I}, & \quad x < 0, \\ \chi_{II}, \rho_{0II}, A_{0II}, & \quad x > 0. \end{aligned} \quad (2.1.21)$$

Структура (2.1.1), (2.1.21) распадается на несколько разрывов, которые с течением времени будут отходить друг от друга.

Различают два вида разрывов: контактный разрыв – когда нет потока массы через линию разрыва (газ не течет) и ударные волны – когда поток массы через границу есть (газ течет). Основное качественное различие двух указанных типов разрывов состоит в том, что контактный разрыв разделяет области, каждая из которых состоит все время из одних и тех же частиц газа, а ударная волна распространяется по частицам газа. Таким образом, на контактном разрыве скорость и давление постоянны, а величины  $\rho$  и  $\varepsilon$  могут претерпевать разрыв. В случае ударной волны все газодинамические переменные терпят разрыв. Схематически автомодельную картину возникающего течения (автомодельность следует из предположения единственности решения [45]) на плоскости  $(x, t)$  можно изобразить одной из пяти возможных конфигураций (рис. 2). Четыре первых содержат контактный разрыв (КР), отмеченный штриховой линией, на котором испытывает скачок плотность, а давление и скорость непрерывны. Их одинаковые постоянные значения в областях слева и справа от контактного разрыва обозначим через  $P$  и  $U$ , а различные значения плотности и внутренней энергии для левой  $R_I, E_I$  и  $R_{II}, E_{II}$  – для правой области. Эти области отделены от невозмущенных областей с параметрами  $(p_I, \rho_I, u_I)$  – слева и  $(p_{II}, \rho_{II}, u_{II})$  – справа, либо ударной волной (УВ) (левой и правой), либо волной разрежения (ВР). Последняя конфигурация представляет предельный случай, когда в результате распада разрыва образуется область вакуума, в которой плотность падает до значения  $R = 0$  в двух волнах разрежения, примыкающих к области вакуума справа и слева.

Из условий динамической совместности на ударных волнах [45]:

$$\begin{aligned} [\rho]D - [\rho u] &= 0, \\ [\rho u]D - [p + \rho u^2] &= 0, \end{aligned}$$

$$[\rho(\varepsilon + u^2/2)]D - [\rho u(\varepsilon + u^2/2) + pu] = 0,$$

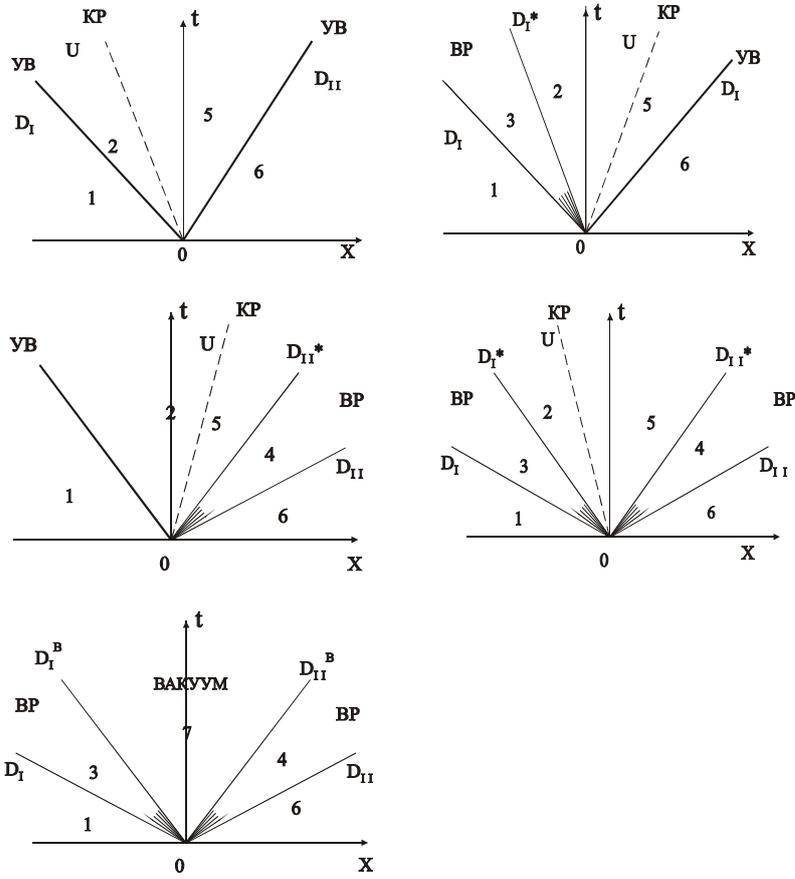


Рис.2. Конфигурации, возникающие при распаде разрыва.

где  $D = \frac{dx}{dt}$  - скорость перемещения фронта ударной волны,  $[f] = f_2 - f_1$  - разрыв величины на фронте ( 1 – перед линией разрыва, 2 – за линией разрыва), можно получить равенство.

$$E - \varepsilon - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) (p + P) = 0. \tag{2.1.22}$$

В нем  $(p, \rho, \varepsilon)$  - величины перед ударной волной,  $(P, R, E)$  - за фронтом ударной волны.

Исключая из (2.12)  $\varepsilon$  и  $E$  с помощью (2.9), можно получить адиабату Гюгонио (ударную адиабату)

$$R = \rho \frac{(\chi + 1)(P + B) + (\chi - 1)(p + B)}{(\chi - 1)(P + B) + (\chi + 1)(p + B)} \tag{2.1.23}$$

В формулах (2.1.22) и (2.1.23) все величины кроме  $P$  надо брать с индексом  $I$  для левой ударной волны и с индексом  $II$  – для правой.

Введя в рассмотрение «массовую» скорость для левой ударной волны:

$$a_l = \rho_l(u_l - D_l) = R_l(u - D_l),$$

из условий динамической совместимости, записанных для левой ударной волны, получим:

$$U - u_l + \frac{P - p_l}{a_l} = 0, \quad (2.1.24)$$

$$a_l = \sqrt{\rho_l \left[ \frac{\chi_l + 1}{2} (P + B_l) + \frac{\chi_l - 1}{2} (p_l + B_l) \right]}. \quad (2.1.25)$$

Аналогично для правой ударной волны

$$U - u_{II} + \frac{P - p_{II}}{a_{II}} = 0, \quad (2.1.26)$$

$$a_{II} = \sqrt{\rho_{II} \left[ \frac{\chi_{II} + 1}{2} (P + B_{II}) + \frac{\chi_{II} - 1}{2} (p_{II} + B_{II}) \right]}. \quad (2.1.27)$$

В случае волны разрежения используем условие непрерывности римановых инвариантов[45]

$$[u] \pm \frac{2}{\chi - 1} [c] = 0, \quad [G(S)] = 0, \quad (2.1.28)$$

где  $c$  – скорость звука

$$c = \sqrt{\chi \frac{p + B}{\rho}}, \quad G(S) = \frac{\chi(p + B)}{\rho^\chi}.$$

Квадратными скобками здесь обозначена разность постоянных значений соответствующих величин в областях, примыкающих к волне разрежения слева и справа. Знак «+» берется для левой волны разрежения, «-» - для правой.  $G_S$  - функция энтропии, в волнах разрежения  $G_S = const$  и представляет собой адиабату Пуассона.

Соотношения (2.1.28) для левой и правой волн разрежения записываются соответственно в виде

$$U - u_l - \frac{2}{\chi_l - 1} c_l \left[ 1 - \left( \frac{P + B_l}{p_l + B_l} \right)^{\frac{\chi_l - 1}{2\chi_l}} \right] = 0, \quad (2.1.29)$$

$$U - u_{II} + \frac{2}{\chi_{II} - 1} c_{II} \left[ 1 - \left( \frac{P + B_{II}}{p_{II} + B_{II}} \right)^{\frac{\chi_{II} - 1}{2\chi_{II}}} \right] = 0. \quad (2.1.30)$$

Соотношениям (2.1.29) и (2.1.30) можно придать ту же форму, что и в случае ударных волн (2.1.24), (2.1.26), если ввести условные «массовые» скорости, соответственно для левой и правой волн:

$$a_I = \frac{\chi_I - 1}{2\chi_I} \rho_I c_I \frac{1 - \frac{P + B_I}{p_I + B_I}}{1 - \left( \frac{P + B_I}{p_I + B_I} \right)^{\frac{\chi_I - 1}{2\chi_I}}}, \quad (2.1.31)$$

$$a_{II} = \frac{\chi_{II} - 1}{2\chi_{II}} \rho_{II} c_{II} \frac{1 - \frac{P + B_{II}}{p_{II} + B_{II}}}{1 - \left( \frac{P + B_{II}}{p_{II} + B_{II}} \right)^{\frac{\chi_{II} - 1}{2\chi_{II}}}}. \quad (2.1.32)$$

Исключая из (2.1.24), (2.1.26) скорость контактного разрыва  $U$ , приходим к уравнению для давления  $P$

$$F(P) = f(P, p_I, \rho_I) + f(P, p_{II}, \rho_{II}) = u_I - u_{II}, \quad (2.1.33)$$

где

$$f(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} \frac{P - p_k}{\rho_k c_k \sqrt{\frac{\chi_k + 1}{2\chi_k} \pi_k + \frac{\chi_k - 1}{2\chi_k}}}, & P \geq p_k, \\ \frac{2}{\chi_k - 1} c_k \left( \pi_k^{\frac{\chi_k - 1}{2\chi_k}} - 1 \right), & P < p_k, \end{cases}$$

$$\pi_k = \frac{P + B_k}{p_k + B_k}, \quad c_k = \sqrt{\chi_k \frac{p_k + B_k}{\rho_k}}, \quad k = I, II. \quad (2.1.34)$$

Решение уравнения (2.1.33) осуществляем с помощью метода Ньютона, обеспечивающего быструю сходимость итерационного процесса. Первая и вторая производные функции  $f(P, p_k, \rho_k)$  по  $P$  имеют вид

$$f'(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} \frac{(\chi_k + 1)\pi_k + 3\chi_k - 1}{4\chi_k \rho_k c_k \sqrt{\left( \frac{\chi_k + 1}{2\chi_k} \pi_k + \frac{\chi_k - 1}{2\chi_k} \right)^3}}, & P \geq p_k, \\ \frac{1}{\chi_k (P + B_k)} c_k \pi_k^{\frac{\chi_k - 1}{2\chi_k}}, & P < p_k, \end{cases} \quad (2.1.35)$$

$$f''(P, p_k, \rho_k) = \begin{cases} -\frac{(\chi_k + 1)[(\chi_k + 1)\pi_k + (7\chi_k - 1)]}{16\chi_k \rho_k^2 c_k^3 \sqrt{\left(\frac{\chi_k + 1}{2\chi_k}\pi_k + \frac{\chi_k - 1}{2\chi_k}\right)^5}}, & P \geq p_k, \\ -\frac{(\chi_k + 1)}{2\chi_k^2(P + B_k)} c_k \pi_k^{\frac{\chi_k - 1}{2\chi_k}}, & P < p_k, \end{cases} \quad (2.1.36)$$

При всех  $P > \max(-B_I, -B_{II})$  будем иметь

$$f''(P, p_k, \rho_k) > 0, \quad f''(P, p_k, \rho_k) < 0, \quad (2.1.37)$$

т.е. левая часть уравнения (2.1.33) является монотонно возрастающей, выпуклой вверх функцией от  $P$ . Так как при  $P = p_k$  из (2.1.35) следует, что

$$\lim_{P \rightarrow p_k - 0} f'(P, p_k, \rho_k) = \lim_{P \rightarrow p_k + 0} f'(P, p_k, \rho_k) = \frac{1}{\rho_k c_k},$$

то ее первая производная непрерывна. В общем случае, когда  $p_I = p_{II} \neq -B_k$ , график функции  $F(P)$  схематично показан на рис. 3.

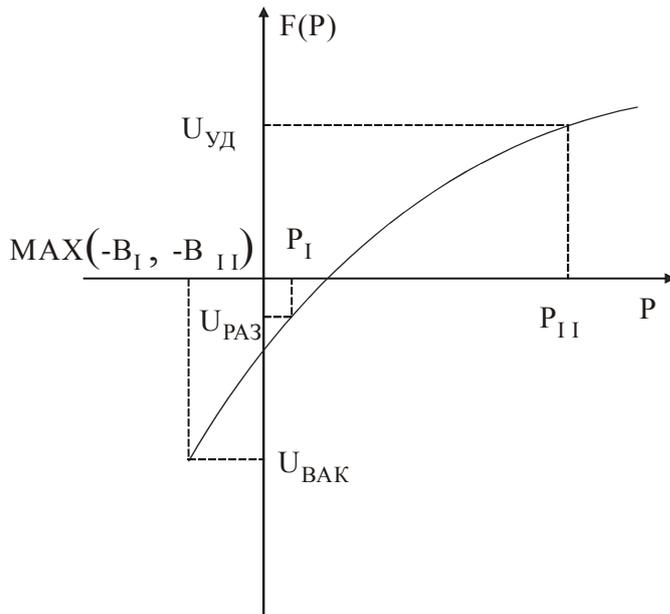


Рис.3 График функции  $F(P)$ .

Для упрощения изложения примем  $p_I \leq p_{II}$ . Это не является ограничением общности, т.к. в противном случае можно изменить направление отсчета на оси  $X$ , т.е. знаки у скоростей  $u_I, u_{II}$  и поменять местами индексы  $I, II$  для исходных параметров, а после проведения расчетов проделать обратную операцию

Значения функции  $F(P)$  в точках  $\max(-B_I, -B_{II}), p_I, p_{II}$  позволяют еще до решения уравнения (2.1.33) определить, какая из вышеперечисленных конфигураций возникает при распаде разрыва. Эти значения таковы

$$F(p_{II}) = U_{y\delta} = \frac{p_{II} - p_I}{\sqrt{\rho_I \left[ \frac{\chi_I + 1}{2} (p_{II} + B_I) + \frac{\chi_I - 1}{2} (p_I + B_I) \right]}}$$

$$F(p_I) = U_{paz} = -\frac{2c_{II}}{\chi_{II} - 1} \left[ 1 - \left( \frac{p_I + B_{II}}{p_{II} + B} \right)^{\frac{\chi_{II} - 1}{2}} \right],$$

$$f(\max(-B_I, -B_{II})) = U_{вак} = \frac{-2c_I}{\chi_I - 1} - \frac{2c_{II}}{\chi_{II} - 1}.$$

Как видно из графика  $F(P)$ , в зависимости от величины  $u_I - u_{II}$  возможны следующие ситуации:

$u_I - u_{II} > U_{y\delta}$ . Тогда  $p_I < p_{II} < P$ . Вправо и влево распространяются ударные волны.

$U_{paz} < u_I - u_{II} < U_{y\delta}$ . Тогда  $p_I < P < p_{II}$ . Влево – ударная волна, вправо – волна разрежения.

$U_{вак} < u_I - u_{II} < U_{paz}$ . Тогда  $\max(-B_I, -B_{II}) < P < p_I$ . Возникают две волны разрежения.

$u_I - u_{II} < U_{вак}$ . Возникает область вакуума, в которой  $R_I = 0$ ,  $R_{II} = 0$ ,  $P = \max(-B_I, -B_{II})$ .

Если выполнено одно из неравенств

$$|u_I - u_{II} - U_{y\delta}| < \delta, |u_I - u_{II} - U_{paz}| < \delta,$$

$$|u_I - u_{II} - U_{вак}| < \delta$$

где  $\delta$  – предусмотренная мера точности, то  $P$  приближенно равно соответственно  $p_{II}, p_I, \max(-B_I, -B_{II})$ .

Таким образом, уравнение (2.1.33) всегда имеет единственный корень, если выполнено условие

$$u_I - u_{II} \geq U_{вак} = -\frac{2}{\chi_I - 1} c_I - \frac{2}{\chi_{II} - 1} c_{II}.$$

Итерационное значение корня уравнения (2.1.33) выражается следующим образом:

$$P^{(i)} = P^{(i-1)} - \frac{f(P^{(i-1)}, p_I, \rho_I) + f(P^{(i-1)}, p_{II}, \rho_{II}) - (u_I - u_{II})}{f'(P^{(i-1)}, p_I, \rho_I) + f'(P^{(i-1)}, p_{II}, \rho_{II})}, \quad (2.1.38)$$

где  $I$  – номер итерации, а  $f$  и  $f'$  определены выражениями (2.1.34) и (2.1.35).

Из (2.1.37) следует, что  $F(P)$  выпукла вверх, поэтому начальное приближение  $P^{(0)}$  выбирается из условия

$$F(P^{(0)}) < u_I - u_{II}. \quad (2.1.39)$$

В этом случае последовательные приближения сходятся к искомому корню снизу, монотонно возрастая. В качестве одного из возможных алгоритмов расчета начального приближения  $P^{(0)}$  в [2] рекомендуется «звуковой распад разрыва». Вместо нелинейного уравнения (2.1.33) рассматривается результат его линеаризации

$$\frac{P - p_I}{\rho_I c_I} + \frac{P - p_{II}}{\rho_{II} c_{II}} = u_I - u_{II},$$

из которого определяется

$$P^{(0)} = \frac{p_I \rho_{II} c_{II} + p_{II} \rho_I c_I + (u_I - u_{II}) \rho_I c_I \rho_{II} c_{II}}{\rho_I c_I + \rho_{II} c_{II}}. \quad (2.1.40)$$

Можно доказать, что формула (2.1.40) удовлетворяет условию (2.1.39).

Хорошие результаты, особенно в случае двух ударных волн, дает замена уравнения (2.1.33), имеющего в этом случае вид

$$\frac{P - p_I}{\sqrt{\rho_I \left( \frac{\chi_I + 1}{2} P + \frac{\chi_I - 1}{2} p_I + \chi_I B_I \right)}} + \frac{P - p_{II}}{\sqrt{\rho_{II} \left( \frac{\chi_{II} + 1}{2} P + \frac{\chi_{II} - 1}{2} p_{II} + \chi_{II} B_{II} \right)}} = u_I - u_{II}, \quad (*)$$

на «приближенное» уравнение

$$\frac{P - p_I}{\sqrt{\theta_I \rho_I (P + B_I)}} + \frac{P - p_{II}}{\sqrt{\theta_{II} \rho_{II} (P + B_{II})}} = u_I - u_{II},$$

где  $\theta_I, \theta_{II}$  - некоторые постоянные. Оно в свою очередь сводится к квадратному уравнению для  $P$ , и в качестве приближенного решения (\*) следует брать его больший корень. Что касается величин  $\theta_I, \theta_{II}$ , то можно рекомендовать  $\theta_I = \theta_{II} \approx (\chi + 1)/2$ , если ожидается  $P \gg p_{II} > p_I$ , или  $\theta_I = \theta_{II} = \chi$ , если  $P \approx p_{II} \approx p_I$ , и т.п.

После того, как найдено давление распада, скорость контактного разрыва определяется выражением

$$U = \frac{a_I u_I + a_{II} u_{II} + p_I - p_{II}}{a_I + a_{II}}, \quad (2.1.41)$$

где  $a_I, a_{II}$  - «массовые» скорости, вычисленные на последней итерации.

Скорости левой и правой ударных волн находятся соответственно по формулам

$$D_I = u_I - \frac{a_I}{\rho_I}, \quad (2.1.42)$$

$$D_{II} = u_{II} + \frac{a_{II}}{\rho_{II}}. \quad (2.1.43)$$

Для левой волны разрежения скорости крайних характеристик, ее ограничивающих, вычисляются по формулам

$$D_I = u_I - c_I, \quad (2.1.44)$$

$$D_I^* = U - c_I^*, \quad (2.1.45)$$

$$c_I^* = c_I + \frac{\chi_I + 1}{2}(u_I - U), \quad (2.1.46)$$

а плотность слева от контактного разрыва

$$R_I = \chi_I \frac{P + B_I}{(c_I^*)^2}. \quad (2.1.47)$$

Аналогично для правой волны разрежения

$$D_{II} = u_{II} + c_{II}, \quad (2.1.48)$$

$$D_{II}^* = U + c_{II}^*, \quad (2.1.49)$$

$$c_{II}^* = c_{II} - \frac{\chi_{II} + 1}{2}(u_{II} - U), \quad (2.1.50)$$

$$R_{II} = \chi_{II} \frac{P + B_{II}}{(c_{II}^*)^2}. \quad (2.1.51)$$

Отметим, что при

$$\begin{aligned} \chi_I &= \chi_{II} = \chi, \\ \rho_{0I} &= \rho_{0II} = \rho_0, \\ A_{0I} &= A_{0II} = A_0 \end{aligned} \quad (2.1.52)$$

Для конфигурации из двух волн разрежения давление на контактном разрыве находится безитерационно по формуле

$$P = (p_I + B) \left[ \frac{u_I - u_{II} - U_{\text{вак}}}{U_{\text{раз}} - U_{\text{вак}}} \right]^{\frac{2\chi}{\chi-1}} - B. \quad (2.1.53)$$

Для конфигурации разлета приведем два соотношения, дающие скорости свободных границ [I] (рис. 2)

$$D_I^B = u_I + \frac{2}{\chi_I - 1} c_I,$$

$$D_{II}^B = u_{II} - \frac{2}{\chi_{II} - 1} c_{II}.$$

Применение изложенных соотношений на этапе предиктор схемы Годунова для расчета газодинамических задач приводит к схеме первого порядка точности.

## 2.2. Решение линеаризованной задачи о распаде разрыва с учетом сдвиговых напряжений.

Для решения уравнений динамики упругопластической среды по схеме Годунова используется задача распада разрыва в упругом (линеаризованном) приближении.

Обозначим  $c^2 = (\partial p / \partial \rho)_s$ ;  $f = \frac{1}{\rho(\partial \varepsilon / \partial p)_\rho}$ , в итоге после линеаризации уравнения энергии в системе

уравнений (2.6)-(2.17) и исключив члены, содержащие производные по  $Y$  и  $Z$  (производится расщепление по пространственным переменным), получаем одномерную систему уравнений:

$$\rho_{,t} + \rho u_{1,1} + \rho_1 u_1 = 0 \quad (2.2.1)$$

$$u_{1,t} + u_1 u_{1,1} + (p - S_{11})_{,1} / \rho = 0 \quad (2.2.2)$$

$$u_{2,t} + u_1 u_{2,1} - S_{12,1} / \rho = 0 \quad (2.2.3)$$

$$u_{3,t} + u_1 u_{3,1} - S_{13,1} / \rho = 0 \quad (2.2.4)$$

$$p_{,t} + u_1 p_{,1} + (\rho c^2 - f S_{11}) u_{1,1} + f(-u_{2,1} S_{12} - u_{3,1} S_{13}) = 0 \quad (2.2.5)$$

$$S_{11,t} + u_1 S_{11,1} + S_{12} u_{2,1} + S_{13} u_{3,1} - 4/3 \mu u_{1,1} = 0 \quad (2.2.6)$$

$$S_{22,t} + u_1 S_{22,1} - S_{12} u_{2,1} + 2/3 \mu u_{1,1} = 0 \quad (2.2.7)$$

$$S_{33,t} + u_1 S_{33,1} - S_{13} u_{3,1} + 2/3 \mu u_{1,1} = 0 \quad (2.2.8)$$

$$S_{12,t} + u_1 S_{12,1} - 0.5(S_{11} - S_{22}) u_{2,1} + 0.5 S_{23} u_{3,1} - \mu u_{2,1} = 0 \quad (2.2.9)$$

$$S_{13,t} + u_1 S_{13,1} - 0.5(S_{11} - S_{33}) u_{3,1} + 0.5 S_{23} u_{2,1} - \mu u_{3,1} = 0 \quad (2.2.10)$$

$$S_{23,t} + u_1 S_{23,1} - 0.5 S_{13} u_{2,1} - 0.5 S_{12} u_{3,1} = 0 \quad (2.2.11)$$

В матричном виде уравнения (2.2.1-2.2.11) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \\ S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 & 1/\rho & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 \\ \rho c^2 - f S_{11} & -f S_{12} & -f S_{13} & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 \mu & S_{12} & S_{13} & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 \mu & -S_{12} & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 \mu & 0 & -S_{13} & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(S_{22} - S_{11}) - \mu & 0.5 S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 S_{23} & 0.5(S_{33} - S_{11}) - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 S_{13} & -0.5 S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix} * \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p \\ S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{или } \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.2.12)$$

где  $U = [\rho, u_1, u_2, u_3, p, S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}]$

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & 0 & 0 & 1/\rho & -1/\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/\rho & 0 \\ 0 & \rho c^2 - fS_{11} & -fS_{12} & -fS_{13} & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3\mu & S_{12} & S_{13} & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3\mu & -S_{12} & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3\mu & 0 & -S_{13} & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5(S_{22} - S_{11}) - \mu & 0.5S_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5S_{23} & 0.5(S_{33} - S_{11}) - \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5S_{13} & -0.5S_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix}$$

В случае постоянных коэффициентов матрицы А (линеаризованный случай) система гиперболична и может быть записана в виде 11 уравнений переноса (в инвариантной форме) [115,116]

$$\frac{\partial R_i}{\partial t} + c_i \frac{\partial R_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, \dots, 11, \quad (2.2.13)$$

где  $R_i$  инварианты Римана, постоянные на соответствующей характеристической скорости  $c_i$ ,

$$c_1 = u + a; c_2 = u - a; c_3 = u + \beta_y; c_4 = u - \beta_y; c_5 = u + \beta_z; c_6 = u - \beta_z; c_7 = c_8 = c_9 = c_{10} = c_{11} = u;$$

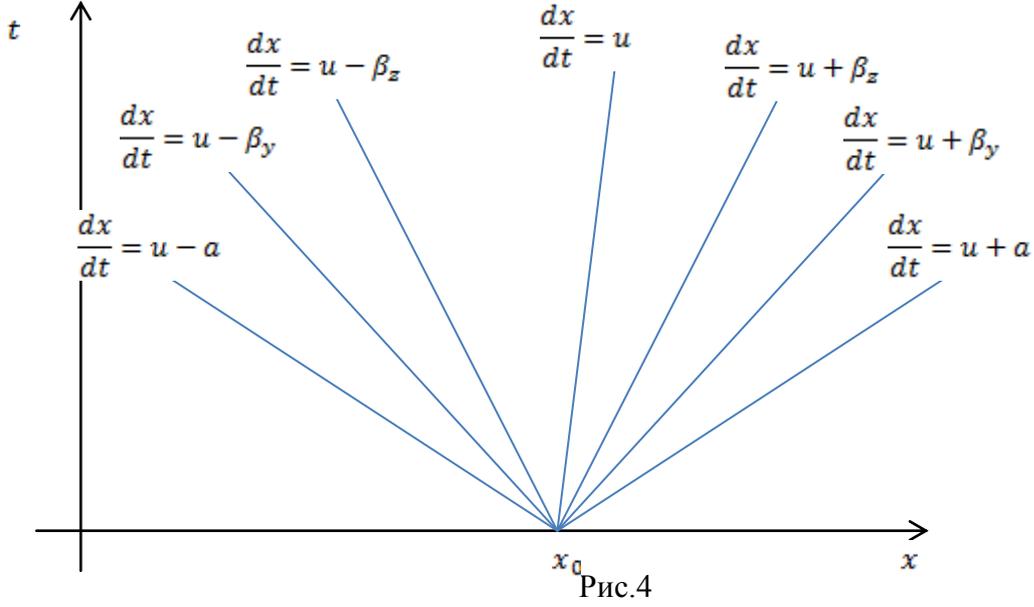
Где

$$a^2 = c^2 + \frac{4/3\mu - fS_{11}}{\rho},$$

$$\beta_y = \sqrt{\frac{\mu + 3/4S_{11}}{\rho} - 0.5\sqrt{\frac{0.25*(S_{22} - S_{33})^2 + S_{23}^2}{\rho^2}}},$$

$$\beta_z = \sqrt{\frac{\mu + 3/4S_{11}}{\rho} + 0.5\sqrt{\frac{0.25*(S_{22} - S_{33})^2 + S_{23}^2}{\rho^2}}}.$$

В плоскости  $(x, t)$  траектории разрывов (характеристики) изображаются лучами, исходящими из точки  $x = x_0$ , и делят полуплоскость  $t > 0$  на 8 зон (рис.4), аналогично газодинамическому распаду разрыва (рис.2).



Соотношения на этих характеристиках  $R_l, l = \overline{1,11}$  имеют следующий вид

$$R_1 = [\rho a]u_1 - \left[ a(1+f) \frac{S_{12}(a^2 - b_3^2) - S_{13} * 0.5S_{23} / \rho}{(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0.25S_{23}^2 / \rho^2} \right] u_2 - \left[ a(1+f) \frac{S_{13}(a^2 - b_2^2) - S_{12} * 0.5S_{23} / \rho}{(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0.25S_{23}^2 / \rho^2} \right] u_3 +$$

$$+ p - S_{11} + \left[ (1+f) \frac{\rho S_{12}(a^2 - b_3^2) - S_{13} * 0.5S_{23}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0.25S_{23}^2} \right] S_{12} + \left[ (1+f) \frac{\rho S_{13}(a^2 - b_2^2) - S_{12} * 0.5S_{23}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0.25S_{23}^2} \right] S_{13}$$

Где  $b_2^2 = \frac{\mu + 0.5(S_{11} - S_{22})}{\rho}$ ;  $b_3^2 = \frac{\mu + 0.5(S_{11} - S_{33})}{\rho}$

$$R_2 = [-\rho a]u_1 + \left[ \rho a(1+f) \frac{\rho S_{12}(a^2 - b_3^2) - S_{13} * 0.5S_{23}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0.25S_{23}^2} \right] u_2 + \left[ \rho a(1+f) \frac{\rho S_{13}(a^2 - b_2^2) - S_{12} * 0.5S_{23}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0.25S_{23}^2} \right] u_3 +$$

$$+ p - S_{11} + \left[ (1+f) \frac{\rho S_{12}(a^2 - b_3^2) - S_{13} * 0.5S_{23}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0.25S_{23}^2} \right] S_{12} + \left[ (1+f) \frac{\rho S_{13}(a^2 - b_2^2) - S_{12} * 0.5S_{23}}{\rho^2(a^2 - b_2^2)(a^2 - b_3^2) - 0.25S_{23}^2} \right] S_{13}$$

$$R_3 = [\beta_y \rho]u_2 - [\beta_y \rho C]u_3 - S_{12} + [C]S_{13}$$

$$R_4 = -[\beta_y \rho]u_2 + [\beta_y \rho C]u_3 - S_{12} + [C]S_{13}$$

$$R_5 = [\beta_z \rho C]u_2 - [\beta_z \rho]u_3 - [C]S_{12} + S_{13}$$

Где  $C = \sqrt{1 - \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4S_{23}^2}{(S_{22} - S_{33})^2}}}}$ ;  $0 \leq C \leq 1$

$$R_6 = -[\beta_z \rho C]u_2 + [\beta_z \rho]u_3 - CS_{12} + S_{13}$$

$$R_7 = [a^2]\rho - p + S_{11} + \left[ \frac{(1+f)(S_{12}\rho b_3^2 + 0.5S_{23}S_{13})}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{12} + \left[ \frac{(1+f)(\rho b_2^2 S_{13} + 0.5S_{23}S_{12})}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{13}$$

$$R_8 = \left[ 4/3 \frac{\mu}{\rho} \right] \rho + S_{11} + \left[ \frac{S_{12}\rho b_3^2 + 0.5S_{23}S_{13}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{12} + \left[ \frac{\rho b_2^2 S_{13} + 0.5S_{23}S_{12}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{13}$$

$$R_9 = \left[ -2/3 \frac{\mu}{\rho} \right] \rho + S_{22} + \left[ \frac{-S_{12}\rho b_3^2}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{12} + \left[ \frac{-0.5S_{23}S_{12}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{13}$$

$$R_{10} = \left[ -2/3 \frac{\mu}{\rho} \right] \rho + S_{33} + \left[ \frac{-0.5S_{23}S_{13}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{12} + \left[ \frac{-\rho b_2^2 S_{13}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{13}$$

$$R_{11} = \left[ \frac{-0.5S_{13}\rho b_3^2 - 0.25S_{23}S_{12}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{12} + \left[ \frac{-0.5\rho b_2^2 S_{12} - 0.25S_{23}S_{13}}{\rho b_2^2 \rho b_3^2 - 0.25S_{23}^2} \right] S_{13} + S_{23}$$

Здесь величины в квадратных скобках представляют собой коэффициенты линеаризации, определяемые по усредненным параметрам в ячейках. Для зоны, где ищется решение (где находится соответствующая грань ячейки) определяются соответствующие инварианты и по ним определяются примитивные параметры, необходимые для вычисления потоков. Например, для зоны, примыкающей к контактному разрыву слева это будут инварианты

$$R = R_1^1, R_2^2, R_3^1, R_4^2, R_5^1, R_6^2, R_7^1, R_8^1, R_9^1, R_{10}^1, R_{11}^1,$$

а для примыкающей справа -

$$R = R_1^2, R_2^1, R_3^2, R_4^1, R_5^2, R_6^1, R_7^2, R_8^2, R_9^2, R_{10}^2, R_{11}^2,$$

где верхние индексы "1" относятся к левой ячейке, а "2" к правой.

### 2.3. Модифицированная схема Годунова для моделирования быстропротекающих волновых процессов в газах.

В классической схеме Годунова [44] для решения системы (2.1)-(2.5) применяется расщепление по пространственным переменным. Для каждой грани в нормальном направлении

решается одномерная задача распада разрыва для давлений, девиаторов тензора напряжений, плотностей и скоростей, определенных в центрах соседних ячеек.

В модифицированной схеме [115], позволяющей проводить расчеты со вторым порядком точности, эта одномерная задача решается между параметрами, предварительно интерполированными из центров ячеек в координаты границ области влияния течения на решение задачи распада разрыва для граничного ребра для половины временного шага интегрирования (рис.5,6). Фактически сближается область влияния дифференциальной и разностной задач. В случае жидкостей и газов интерполируются примитивные параметры – давления, плотности, скорости. Предполагается на временном слое линейное распределение параметров течения между центрами ячеек, то есть отсутствие разрыва на границе ячеек. Здесь и далее параметры с целыми значениями индексов будем относить к центрам ячеек, целый индекс внизу будет означать значение параметра на нижнем временном слое, наверху - соответственно на верхнем слое, полуцелые индексы будут относиться к координатам границ ячеек и “распадным” (на промежуточном слое) значениям параметров на этих границах. В декартовых координатах для ячейки с центром в точке  $(x_i, y_j, z_k)$  и границами по оси  $x$   $(x_{i-1/2}, y_j, z_k)$ ,  $(x_{i+1/2}, y_j, z_k)$  для временного слоя  $t_n$  это будет следующее распределение параметров течения в виде векторной функции  $U(p, \rho, u, v, w)$  вдоль оси  $x$

$$\text{при } x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad U(x, y_j, z_k) = U(x_{i-1}, y_j, z_k) + \frac{U(x_i, y_j, z_k) - U(x_{i-1}, y_j, z_k)}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) \quad \text{и}$$

$$\text{при } x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad U(x, y_j, z_k) = U(x_i, y_j, z_k) + \frac{U(x_{i+1}, y_j, z_k) - U(x_i, y_j, z_k)}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i) \quad (2.6),$$

(см. Рис.5). Шаг сетки вдоль оси  $x$   $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ . Аналогично для направлений  $y, z$ .

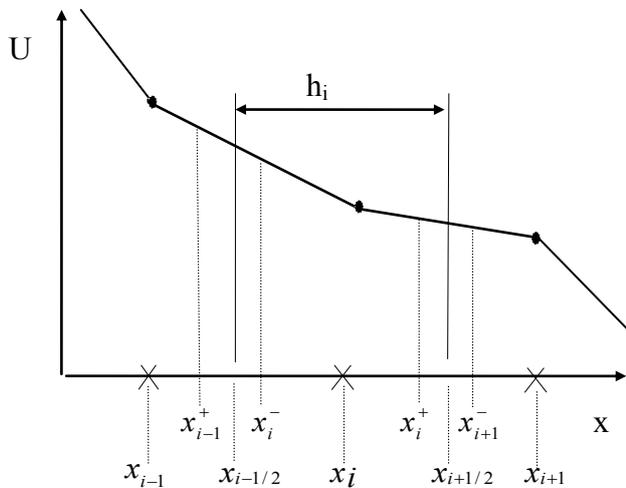


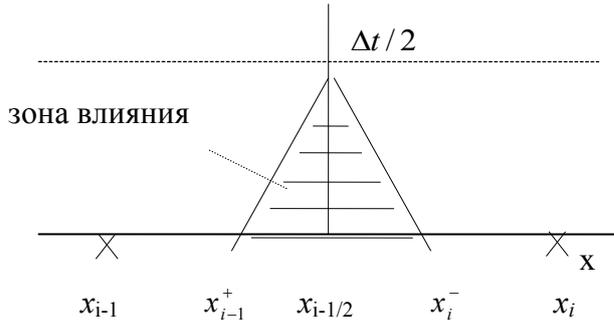
Рис.5

Задача распада разрыва для ячейки с центром в точке  $(x_i, y_j, z_k)$  рассчитывается для грани  $(x_{i-1/2}, y_j, z_k)$  между параметрами  $U(x_{i-1}^+, y_j, z_k)$  и  $U(x_i^-, y_j, z_k)$ , и для грани  $(x_{i+1/2}, y_j, z_k)$  между параметрами  $U(x_i^+, y_j, z_k)$  и  $U(x_{i+1}^-, y_j, z_k)$ . Координаты точек  $(x_{i-1}^+, y_j, z_k)$ ,  $(x_i^-, y_j, z_k)$  и  $(x_i^+, y_j, z_k)$ ,  $(x_{i+1}^-, y_j, z_k)$  варьируются. Аналогично для других граней. Первое дифференциальное приближение линеаризованной системы 2.1-2.5 в зависимости от координат варьируемых точек позволяет осуществить выбор этих точек, обеспечивающий второй порядок аппроксимации в области гладких решений и монотонность на разрывных.

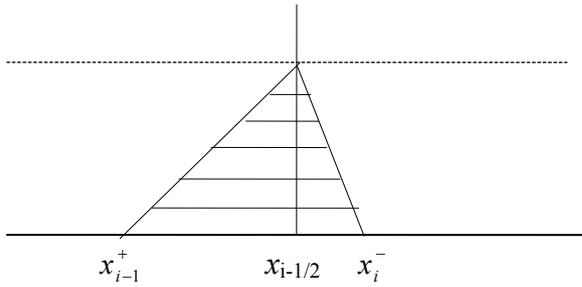
В случае уравнений Эйлера эти координаты имеют очевидный физический смысл. Они ограничивают область влияния на решение задачи распада разрыва для грани интегрируемой ячейки на момент  $\Delta t / 2$ . То есть на момент  $\Delta t / 2$ , когда определяются потоки через соответствующую грань из решения задачи распада разрыва, возмущения могут быть только из области, ограниченной крайними характеристиками, приходящими на эту грань. Размер области влияния для всех случаев составляет  $c_0 \Delta t$  и совпадает с областью влияния дифференциальной задачи. На рис.6 приведена геометрическая интерпретация поведения характеристик для грани ячейки с координатой  $x = x_{i-1/2}$  (частные случаи):

1. акустический случай - область влияния  $c_0 \Delta t$  и соответственно точки интерполяции симметричны относительно ребра;
2. дозвуковой случай, смещение  $c_0 \Delta t$  вверх по потоку;
3. сверхзвуковой случай, смещение  $c_0 \Delta t$  вверх по потоку в одну ячейку;
4. неравномерная сетка, смещение  $c_0 \Delta t$  в сторону большей ячейки
5. подвижное ребро, точки интерполяции и область влияния  $c_0 \Delta t$  определяются относительно положения грани в момент  $\Delta t / 2$ .

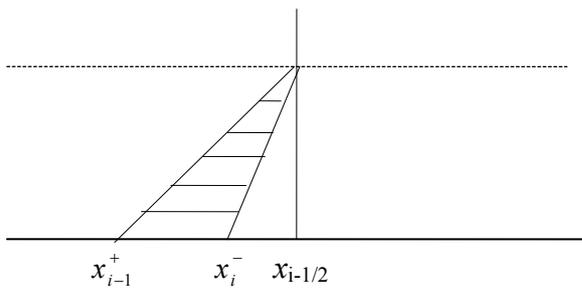
В схеме 1 порядка эта область не зависит от времени равна размеру ячейки  $h_i$ ,  $h_i > c_0 \Delta t$ .



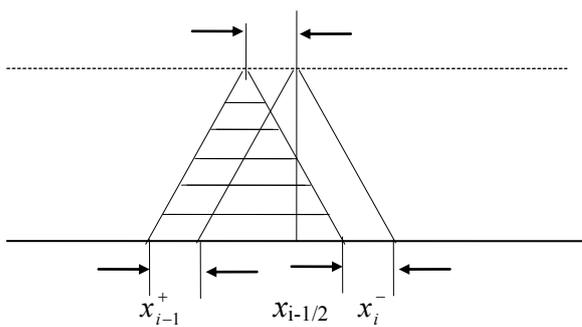
акустика  
 $u_0 \ll c_0$   
 $x_{i-1}^+ = -c_0 * t / 2$   
 $x_i^- = c_0 * t / 2$



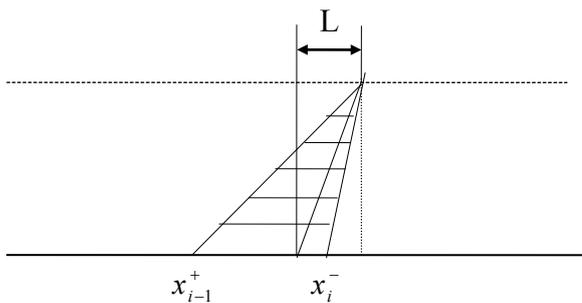
Дозвуковое течение  
 $u_0 < c_0$   
 $x_{i-1}^+ = (-u_0 - c_0) * t / 2$   
 $x_i^- = (-u_0 + c_0) * t / 2$



Сверхзвуковое течение  
 $u_0 > c_0$   
 $x_{i-1}^+ = (-u_0 - c_0) * t / 2$   
 $x_i^- = (-u_0 + c_0) * t / 2$



Неравномерная сетка,  
 || - сдвиг к большей ячейке  
 $\Delta = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) - (x_{i-1/2} - x_{i-3/2})$   
 $x_{i-1}^+ = (-u_0 - c_0) * t / 2 + \Delta / 4$   
 $x_i^- = (-u_0 + c_0) * t / 2 + \Delta / 4$



Подвижная неравномерная сетка,  $L = W * t / 2$   
 $W$  скорость  $x_{i-1/2}$  ребра  
 $x_{i-1}^+ = W * t / 2 + (-u_0 - c_0) * t / 2 + \Delta / 4$   
 $x_i^- = W * t / 2 + (-u_0 + c_0) * t / 2 + \Delta / 4$

Рис. 6

Построенная таким образом схема имеет второй порядок точности на подвижных и неподвижных Эйлеровых сетках на гладких решениях и монотонна на разрывных и, сохраняя достоинства классической схемы, не требует увеличения разностного шаблона при, практически, тех же вычислительных затратах. Таким образом, по сравнению с классической схемой [44], модифицированная схема имеет второй порядок точности, в зависимости от выбора координат точек, параметры в которых участвуют в решении задачи распада разрыва на каждой грани разностной ячейки. Этот же принцип (решение задачи распада разрыва на момент времени  $\Delta t/2$ ) используется при реализации различного типа граничных условий. Этап численного интегрирования уравнений (этап корректор) остается неизменным и совпадает с классической схемой [44,45]. Для многомерных задач необходимо так же учитывать касательные компоненты параметров.

Решение по схеме второго порядка точности будет испытывать дисперсионные колебания на разрывах. Чтобы обеспечить монотонность, необходимо строить решение гибридным образом – в областях гладкости по соотношениям, обеспечивающим второй порядок точности, а на разрывах по соотношениям первого порядка. Методика построения гибридного решения указана далее в п.2.7.

#### **2.4. Модифицированная схема Годунова для моделирования быстропротекающих волновых процессов в деформируемых твердых телах**

Для численного интегрирования уравнений (2.1) - (2.5) по схеме С.К. Годунова на шаге предиктор необходимо решение задачи распада разрыва. В [114] Кукуджановым В.Н. было показано, что для моделирования упругопластических уравнений со вторым порядком точности достаточно решения упругих уравнений со вторым порядком аппроксимации и соответственно упругого решения задачи распада разрыва с использованием линеаризованных уравнений (2.1)-(2.5). При этом учет пластического поведения среды происходит на этапе корректор и сводится к «посадке» девиаторов на поверхность текучести.

В отличие от уравнений газовой динамики в данном случае из центров ячеек интерполируются инварианты Римана [114]. Координаты точек интерполяции определяются как границы областей влияния соответствующих инвариантов на положение грани в момент времени  $\Delta t/2$ , где  $w$  скорость грани (обозначена пунктиром на рис.7), следующим образом:

$$x_n = \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2} - (c_n - w) \frac{\Delta t}{2}, \quad n = 1, \dots, 11 \quad ,$$

где  $c_1 = u + a$ ;  $c_2 = u - a$ ;  $c_3 = u + \beta_y$ ;  $c_4 = u - \beta_y$ ;  $c_5 = u + \beta_z$ ;  $c_6 = u - \beta_z$ ;  $c_7 = c_8 = c_9 = c_{10} = c_{11} = u$ ;

Обозначим интерполированные инварианты индексом '  $m$  ', соответственно

$$R_n^m = R_n^{i-1} + \frac{R_n^i - R_n^{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x_n - x_{i-1}), \quad n = 1, \dots, 11.$$

Полученные значения инвариантов используются для определения «распадных» и «поточковых» значений, в зависимости от того, в какую зону попадает грань ячейки (рис.4). Этап численного интегрирования уравнений (этап корректор) остается неизменным [44,45].

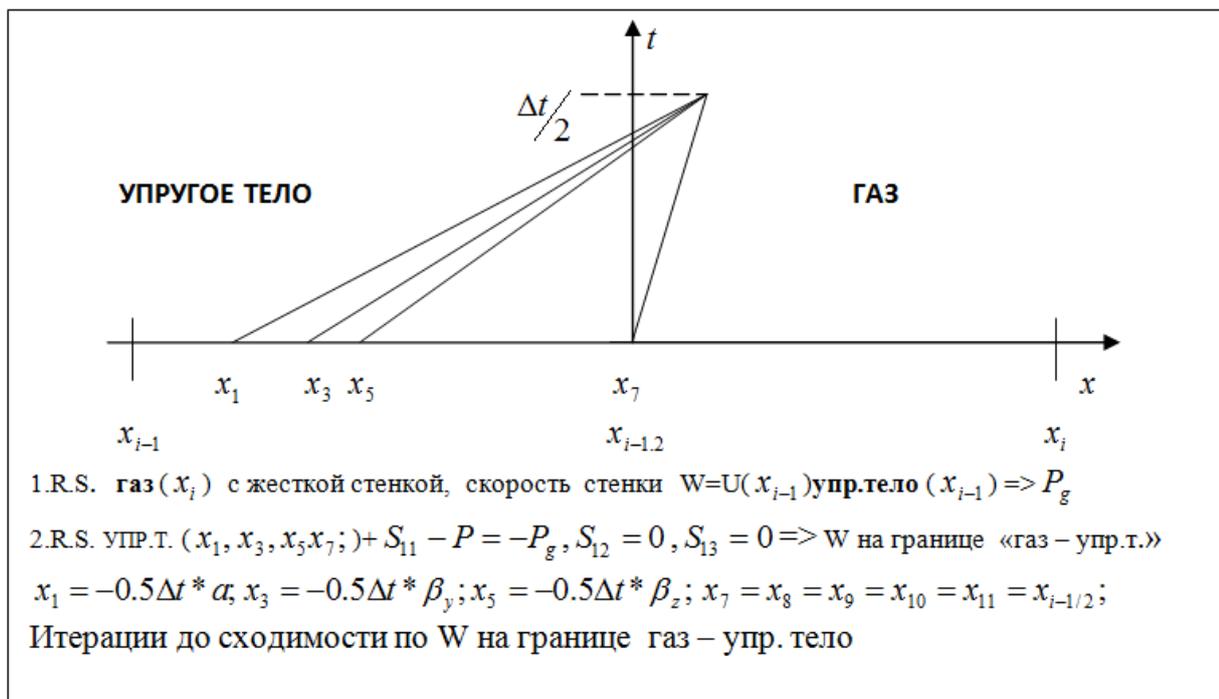


Рис.7

Это же решение используется для реализации основных граничных условий. Для условия ‘жесткая стенка’ задаются симметричные параметры с противоположной нормальной скоростью. Для условия “жесткая заделка” задаются 3 компоненты скорости на границе. Для “Р-границы” – задаются нормальные напряжения и нулевые касательные напряжения и для “Р-границы с трением” – задаются нормальные напряжения и касательные напряжения, связанные по закону Кулона с нормальными. Свободные границы являются частным случаем «Р-границ».

## 2.5 Реализация контакта на границе «газ – упругая среда»

Контактные условия между газом и упругопластической средой реализуются на этапе «предиктор» схемы Годунова, то есть на этапе решения задачи распада разрыва. Со стороны упругопластической среды используются линеаризованные характеристические уравнения из 2.2,

а со стороны газа нелинейные соотношения на ударных волнах и волнах разрежения из 2.1. В результате необходимо решить в общем случае нелинейную задачу распада разрыва.

В этом случае на границе «газ – упругое тело» используется точное решение задачи распада разрыва [31], которое строится как комбинация решения одномерной задачи распада разрыва для отражения газа от жесткой подвижной стенки и решения задачи распада разрыва для упругого тела, нагружаемого давлением.

Разработан итерационный алгоритм, который в общем случае выглядит следующим образом:

1. для параметров центра граничной ячейки газа рассчитывается задача распада разрыва из пункта 2.1 с границей типа «жесткая стенка», нормальная скорость которой равна скорости в центре примыкающей ячейки упругого тела, в результате получаем давление на границе «газ – упругое тело»;
2. для параметров центра граничной ячейки упругого тела рассчитывается задача распада разрыва из пункта 2.2 с границей типа “Р-граница”, которое равно давлению на границе из пункта 1, определяется новая нормальная скорость на границе газ - упругая среда, далее эта скорость используется в пункте 1 как нормальная скорость стенки. Процесс продолжается до сходимости по этой нормальной скорости. Как, правило, достаточно 3-4 итераций до сходимости с относительной точностью 0.01-0.001.

## 2.6 Уточнение контактного алгоритма на границе «газ – упругое тело»

Вычислительная практика показала, что контактный алгоритм из 2.5 вносит значительную схемную вязкость в численную схему для упругопластических уравнений. Автором было предложено уточнение этого алгоритма с использованием дополнительных ячеек упругой среды. Предлагается линейно экстраполировать инварианты Римана из граничной и предграничной ячеек упругого тела на области влияния границы упругого тела в соответствующие координаты (рис. 7 точки 1,3,5,7). Обозначим экстраполируемые значения инвариантов индексом ‘ $m$ ’. Координаты областей влияния определяются в соответствии с формулами рисунка 7. Соответственно

инвариант  $R_1^m$  (продольный) будет  $R_1^m = R_1^{i-1} + \frac{R_1^{i-1} - R_1^{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}}(x_1 - x_{i-1})$ ,  $R_3^m$  и  $R_5^m$  (тангенциальные)

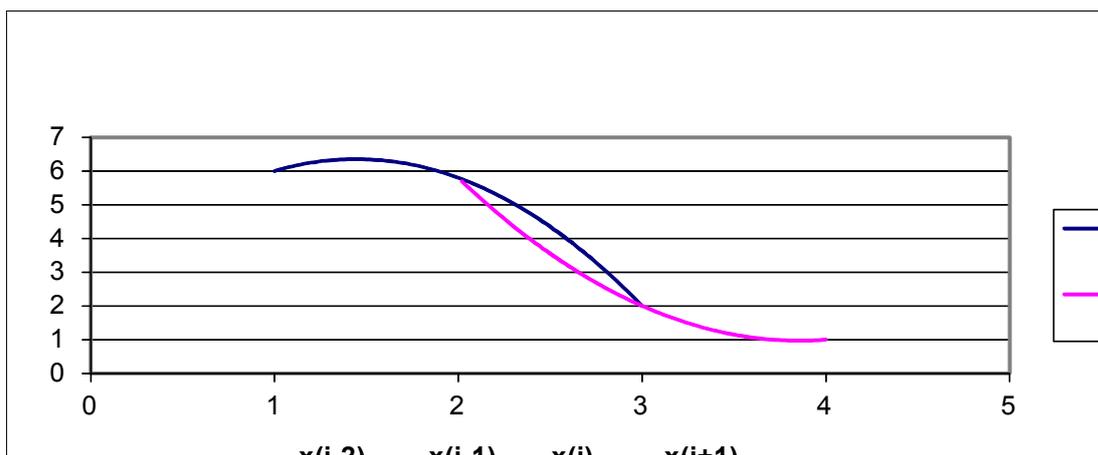
будут  $R_3^m = R_3^{i-1} + \frac{R_3^{i-1} - R_3^{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}}(x_3 - x_{i-1})$ ,  $R_5^m = R_5^{i-1} + \frac{R_5^{i-1} - R_5^{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}}(x_5 - x_{i-1})$ . Соответственно

инварианты  $R_7^m, R_8^m, R_9^m, R_{10}^m, R_{11}^m$  определяются как  $R_k^m = R_k^{i-1} + \frac{R_k^{i-1} - R_k^{i-2}}{x_{i-1} - x_{i-2}}(x_k - x_{i-1})$ , где

$k=7,8,9,10,11$ . Вместо недостающих инвариантов  $R_2^m, R_4^m, R_6^m$  берутся соответствующие граничные условия, например для контакта без трения  $S_{11} - P = -P_g, S_{12} = 0, S_{13} = 0$ , где  $P_g$  давление для газа из решения задачи распада разрыва с жесткой стенкой для газа. Параметры для расчета задачи распада разрыва газа с жесткой подвижной стенкой при этом необходимо брать из центра газовой ячейки (без экстраполяции со стороны газа). Полученный алгоритм оказался устойчивым и, практически, устранил влияние схемной вязкости с границы упругого тела.

## 2.7 Алгоритм получения монотонных решений

Модификация схемы С.К. Годунова, изложенная в п. 2.1, 2.2 имеет второй порядок аппроксимации по пространству и времени на компактном шаблоне  $3 \times 3 \times 3$  оригинальной схемы на неравномерной подвижной сетке как в эйлеровых так и лагранжевых переменных и как все схемы второго порядка немонотонна на разрывных решениях. Монотонность данной модификации достигается путем перехода на решение задачи распада разрыва схемы с первым порядком точности в области возможной немонотонности. Для этого точки интерполяции, определенные для схемы второго порядка, смещаются в центры соответствующих ячеек. Критерии оценки области перехода для газов изложены в [136]. Для упругопластических течений в отличие от задач газовой динамики, где необходимо анализировать поля давлений и плотностей, для получения монотонных решений достаточно анализа поля нормальных напряжений [115]. Например, при расчете задачи распада разрыва на ребре  $x_{i-1/2}$  строится левый квадратичный сплайн по давлениям  $p_{i-2}, p_{i-1}, p_i$  и правый по давлениям  $p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$ . Если левый сплайн имеет максимум, и этот максимум расположен между центрами ячеек с координатами  $x_{i-2}$  и  $x_i$ , или правый сплайн имеет максимум, расположенный между центрами ячеек с координатами  $x_{i-1}$  и  $x_{i+1}$ , то для решения задачи распада разрыва берутся параметры из центров ячеек и решение задачи распада разрыва как в классической схеме Годунова.



## 2.8 Адаптация уравнения состояния типа JWL для расчета расширения продуктов детонации в воздухе для схемы С.К. Годунова

Процедура расчета задачи распада разрыва, используемая на шаге предиктор схемы С.К. Годунова в случае произвольного уравнения состояния трудоемка и носит итерационный характер. Достаточно быстрое точное решение существует для двучленного уравнения состояния (обобщенное уравнение состояния идеального газа) [45]. В общем случае это уравнение состояния содержит три константы; опыт моделирования быстропротекающих газодинамических процессов показал, что наиболее устойчивым и точным является сведение интересующего уравнения состояния к уравнению состояния с переменным показателем адиабаты, зависящим от параметров течения, и нулевым значением остальных констант. Для описания процессов газодинамики продуктов взрыва широкое применение нашло уравнение состояния типа JWL [19]:

$$p = A\left(1 - \frac{\omega\rho}{R_1\rho_0}\right) \exp\left(-R_1 \frac{\rho_0}{\rho}\right) + B\left(1 - \frac{\omega}{R_2 V}\right) \exp\left(-R_2 \frac{\rho_0}{\rho}\right) + \frac{\omega\rho}{\rho_0} E \quad (2.8.1)$$

Обозначения:  $p$  - давление,  $\rho$  - плотность,  $E$  - внутренняя энергия единицы объема,  $\rho_0$  - начальная плотность ВВ,  $A, B, C, R_1, R_2, \omega$  эмпирические(подгоночные) константы.

Изоэнтропа соответственно:  $p = A \exp\left(-R_1 \frac{\rho_0}{\rho}\right) + B \exp\left(-R_2 \frac{\rho_0}{\rho}\right) + C \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1+\omega}$  (2.8.2)

Из изоэнтропы газа  $p / \rho^\gamma = const$   $dp / p = \gamma d\rho / \rho + \ln(\rho) d\gamma$ , пренебрегая малым членом  $\ln(\rho) d\gamma$ , получаем  $\gamma = dp / d\rho * \rho / p$  или

$$\gamma(\rho) = \frac{\frac{\rho_0}{\rho} R_1 A \exp\left(-R_1 \frac{\rho_0}{\rho}\right) + R_2 \frac{\rho_0}{\rho} B \exp\left(-R_2 \frac{\rho_0}{\rho}\right) + C(1+\omega) \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1+\omega}}{A \exp\left(-R_1 \frac{\rho_0}{\rho}\right) + B \exp\left(-R_2 \frac{\rho_0}{\rho}\right) + C \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1+\omega}} \quad (2.8.3)$$

Задав дополнительно для данного взрывчатого вещества начальную плотность ВВ, скорость распространения детонационной волны и давление в точке Чепмена-Жуге:  $\rho_0, D$  и  $P_H$ , определяем

теплотворную способность ВВ как  $Q = \frac{P_H}{2\rho_0(\rho_0 D^2 / P_H - 2)}$ .

Тестирование показало, что эти зависимости показателя адиабаты воспроизводят распределение Чепмена-Жуге за фронтом детонационной волны в гидродинамической модели распространения установившейся детонации. При малых плотностях  $\gamma(\rho) \Rightarrow (1+\omega)$ , для различных ВВ это от 1.2 до 1.35, что близко к показателю адиабаты воздуха 1.4, причем при сжатии показатель адиабаты

воздуха уменьшается, что собственно и обеспечивает моделирование расширения продуктов детонации в воздух с удовлетворительной точностью в Эйлеровой постановке.

При моделировании задач с распространением детонации и расширением продуктов детонации в воздух сложно выделить подвижную контактную границу «продукты детонации – воздух». Начальная плотность продуктов детонации обычно превосходит плотность воздуха более чем на три порядка и при их расширении разностные сетки, привязанные к контактным границам, претерпевают сильные деформации. Как правило, в области с воздухом происходит сильное сжатие с соответствующим уменьшением шага интегрирования и невозможностью продолжения дальнейшего счета. Опыт эксплуатации одномерных и двумерных программных комплексов, разработанных в НИИ Механики ННГУ [80,81,31 и др.] показал, что решение, полученное по единому для ПД и воздуха уравнению состояния типа JWЛ, и решение, рассчитанное с точным выделением контактных границ, практически совпадают при массах заряда ВВ, сопоставимых с массой окружающего воздуха (до 15-20 радиусов цилиндрического или сферического заряда). Это обосновывает применение в двумерных и трехмерных расчетах единого уравнения состояния для продуктов детонации и воздуха и сквозной счет расширения продуктов взрыва в воздух без выделения контактных границ «продукты детонации – воздух». В работе в основном используется ТГ36/64, для ряда других ВВ параметры приведены ниже в таблице.

Таблица 1.

ВВ	$\rho_0, \text{г/см}^3$	$D, \text{км/с}$	$p_H, \text{ГПа}$	$R_1$	$R_2$	$\omega$	A, ГПа	B, ГПа	C, ГПа
ТГ36/64	1.717	7.98	29.5	4.2	1.1	0.34	524.2	7.678	1.082
ТГ50/50	1.670	7.61	25.8	4.94	1.35	0.28	708.6	13.165	1.058
Октоген	1.891	9.11	42.0	4.2	1.0	0.30	778.3	7.071	0.643
ТЭН	1.770	8.30	33.5	4.4	1.2	0.25	617.0	16.926	0.699

## 2.9 Адаптация лучевой модели распространения пространственной детонации к схеме С.К. Годунова.

Для численного моделирования процесса распространения детонации используется гидродинамическая модель детонации, согласно которой детонационная волна является ударной волной, за фронтом которой происходят химические реакции горения, сопровождающиеся выделением энергии и поддерживающие распространение этой ударной волны [18,24]. Реально толщина детонационной волны достигает 200-300 и более свободных пробегов молекул, то есть может быть порядка миллиметров, и для моделирования распространения детонации с учетом химических реакций необходимы разностные сетки с разрешением 10-100 ячеек на миллиметр, что, практически, нереально для задач взаимодействия с элементами конструкций [52].

Для практических расчетов используется лучевая модель распространения детонации или в иностранной литературе “time dependent” или “time burn” [24]. Эта модель не рассматривает процессы инициирования взрывчатого вещества (ВВ), связанные с горением на фронте

детонационной волны и является обобщением мгновенной модели детонации, когда во всем объеме ВВ горение происходит мгновенно и устанавливаются одни и те же параметры (бесконечная скорость детонации). В лучевой модели это мгновенное горение происходит на фронте детонационной волны, который считается бесконечно тонким. При численном моделировании на основе схемы Годунова данное приближение распространения детонации сводится к добавлению в стандартно проинтегрированную ячейку, центра которой достигла детонационная волна, энергии сгорания ВВ, содержащегося в данной ячейке. Такая ячейка считается прдетонирующей, скорость детонационной волны при этом может быть переменной.

Задача распространения детонации в лучевой модели сводится к задаче геометрической оптики о распространении волнового фронта в соответствии с принципом Гюйгенса (каждая точка среды, до которой дошла волна, сама становится независимым источником излучения сферической волны). Эта модель распространения детонации позволяет моделировать процессы взрывного нагружения различных сред без учета процессов горения на достаточно грубых сетках и при этом учитывать зависимость процесса от времени и области инициирования заряда.

Алгоритм распространения трехмерной детонации в рамках схемы Годунова на компактном шаблоне  $3 \times 3 \times 3$  организован следующим образом (рис.8, 9):

1. Вся область, занятая ВВ (все ячейки, содержащие ВВ), интегрируется по стандартной схеме Годунова без учета детонации.

2. Рассматривается окружение интегрируемой ячейки на шаблоне  $3 \times 3 \times 3$  после интегрирования по схеме Годунова, интересующая ячейка находится в центре куба, ее номер (2,2,2) в локальном базисе  $3 \times 3 \times 3$ . Только это окружение может инициировать (передать детонацию) искомую ячейку. Ячейка считается прдетонирующей, если детонационная волна достигла ее центра. Интегрируемая ячейка (2,2,2) может иметь следующее окружение:

- 2.1. одна или несколько из шести граней ячейки (2,2,2) является границей
- 2.2. одна или несколько ячеек из шаблона  $3 \times 3 \times 3$  не являются ВВ
- 2.3. одна или несколько ячеек из шаблона  $3 \times 3 \times 3$  является непрдетонирующим ВВ
- 2.4. одна или несколько ячеек из шаблона  $3 \times 3 \times 3$  являются прдетонирующим ВВ.

Интересует случай 2.4 – распространение детонационной волны от прдетонирующих ячеек в центр ячейки (2,2,2).

3. Рассчитывается возможное время прихода детонационной волны в центр ячейки (2,2,2) из каждой прдетонирующей ячейки из окружения  $3 \times 3 \times 3$ :

3.1 проводится анализ прдетонирующего соседа (ячейка А на рис.8,9) из шаблона  $3 \times 3 \times 3$ , определяется источник детонации для этой ячейки А ( координаты, откуда пришла детонационная

волна в центр А, например это центр ячейки С на рис.8,9) и определяется грань интегрируемой ячейкой (2,2,2), через которую вошел луч в центр этой ячейки, на рис.8,9 это грань ячейки В;

3.2 если эта ячейка В совпадает с ячейкой А, то отрезок ІС и является лучом, по которому пришла детонационная волна в ячейку І. Соответственно момент инициирования будет определяться как длина этого отрезка ІС, деленная на скорость детонации.

3.3 если ячейка В не совпадает с ячейкой А, но ячейка В является прдетонировавшей, то центром инициации для А также будет С, соответственно момент инициирования для А будет также определяться как длина этого отрезка ІС, деленная на скорость детонации.

3.4 если ячейка В не является ВВ, является непрдетонировавшим ВВ или эта ячейка уже находится за границей области, то время инициирования будет определяться как время инициирования ячейки А плюс длина отрезка ІА, деленная на скорость детонации (рис.9).

4.Выбирается минимальное время прихода детонационной волны, если это время меньше времени решения задачи (времени интегрирования), ячейка (2,2,2) считается прдетонировавшей и к ее полной энергии единицы объема прибавляется энергия сгорания ВВ данной ячейки  $\Delta e = \rho_{ВВ} Q$ , где Q – калорийность (теплотворная способность) ВВ, определяется направление на источник детонации и фиксируется время инициирования этого источника.

В итоге для данного алгоритма необходимо дополнительно хранить для каждой ячейки ВВ время инициирования детонации этой ячейки, направление на источник инициирования и время инициирования источника.

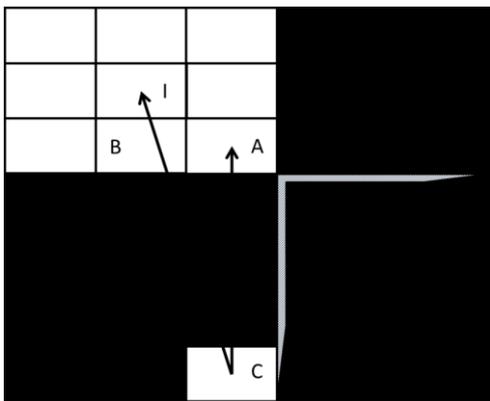


Рис. 8

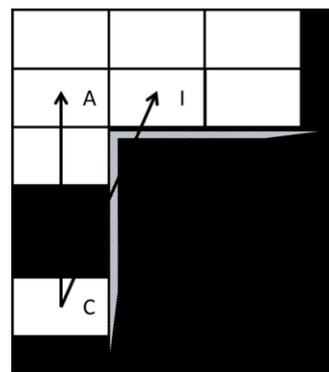


Рис.9

Алгоритм допускает задание нескольких областей инициации установившейся детонации в заряде, произвольного количества зарядов различной формы и инициации различных зарядов в различные моменты времени.

## 2.10 Алгоритм расчета совместного движения продуктов взрыва и упругопластической конструкции в эйлеровых переменных с выделением пространственной границы контакта

Метод расчета взаимодействия среды с конструкцией в Эйлеровых переменных можно отнести к многосеточным алгоритмам типа “Химера” и GFM (Ghost Fluid Method) с SIM (Sharp Interface Method) [126-130]. То есть к алгоритмам с использованием нескольких наложенных сеток, с локальными сетками для каждой среды и с точным выделением контактных поверхностей тел. Здесь используется три вида расчетных сеток [2,3]. Первая сетка состоит из наборов непрерывных треугольников для границ каждой среды (в стандартном формате STL), задающих поверхности взаимодействующих сред, на рис.10,11 это синее и красное тела. Вторая сетка - основная декартова неподвижная сетка из прямоугольных параллелепипедов по каждому телу. Третий вид сеток - локальные подвижные регулярные декартовы сетки размером  $3*3*3$  (отмечены желтым и зеленым на рис.10,11), привязанные к каждому треугольнику поверхности среды. Алгоритм состоит из последовательности шести следующих шагов.

1. Расчетные области (конструкции и газовые среды) задаются в виде поверхностей из наборов треугольников с необходимой геометрической точностью, на рис.10,11 это тела, отмеченные красным и синим цветом. Удобно использовать для задания этих поверхностей файлы STL формата, содержащие координаты внешних нормалей и вершин треугольников. Эти файлы могут быть получены САД-средствами, например, такими как КОМПАС или SolidWork.

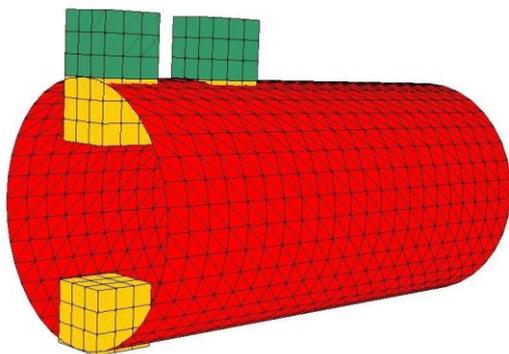


Рис.10

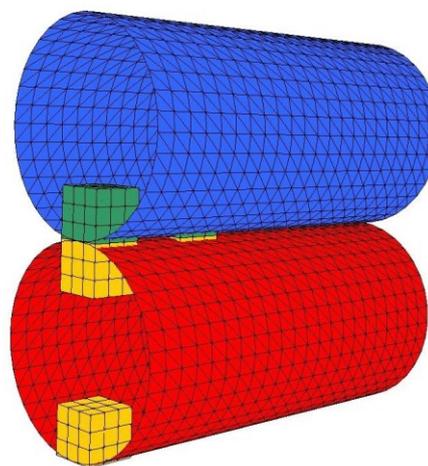


Рис.11

2. Каждая расчетная область с криволинейными границами заключается в окаймляющий прямоугольный параллелепипед и покрывается регулярной декартовой сеткой. Задаются только размеры ячеек декартовой сетки. На рис.12 изображено плоское сечение такого параллелепипеда, черным отмечена граница STL-файла. Получаем четыре вида ячеек для данной расчетной области, первый вид - ячейки, секущиеся треугольниками поверхности или граничные ячейки, второй вид -

ячейки снаружи поверхности, третий вид - ячейки внутри поверхности, для интегрирования которых с заданной аппроксимацией хватает разностного шаблона из целых ячеек (в нашем случае это компактный шаблон  $3 \times 3 \times 3$ ), четвертый вид - ячейки, для интегрирования которых не хватает разностного шаблона из целых ячеек, находящихся внутри поверхности. Параметры в ячейках третьего вида определяются на новом временном слое в неподвижном декартовом базисе для каждой среды (продукты взрыва или упругопластическое тело) в соответствии с п.2.2 и 2.3.

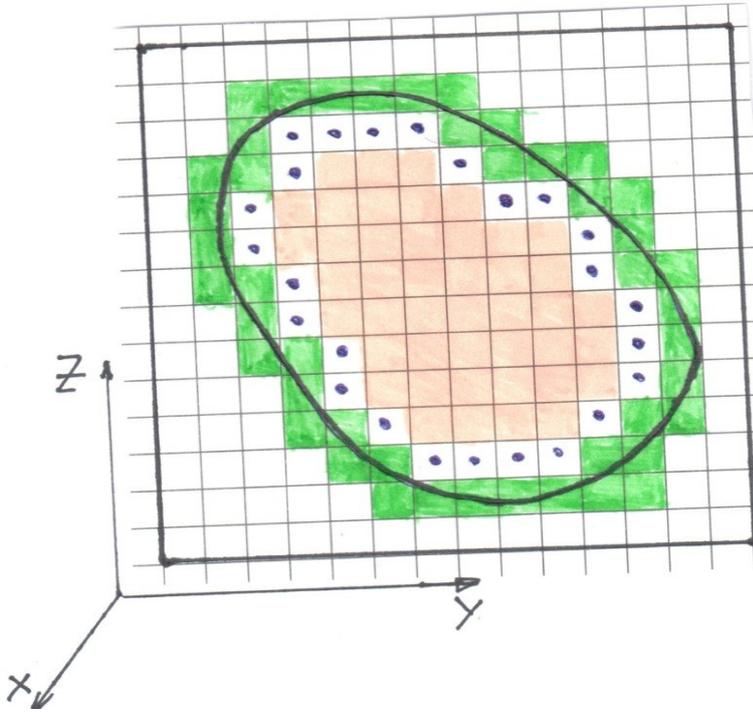


Рис.12

3. На каждом треугольнике поверхности строится локальная декартова сетка  $3 \times 3 \times 3$  внутри объема от этой поверхности, с плоскостями, параллельными плоскости соответствующего треугольника, на рис. 10,11 кубики желтого и зеленого цвета. Размеры ячеек этой локальной 3D сетки берутся близкими к размерам декартовой глобальной сетки. В случае контакта треугольника с другой подобластью (близость с каким-либо ее треугольником) локальная сетка симметрично достраивается наружу от плоскости треугольника еще на  $3 \times 3 \times 3$  ячеек (рис.11). Данного шаблона  $3 \times 3 \times 6$  (рис.13) достаточно для интегрирования четырех центральных ячеек (отмечены крестиками на рис.14,15) со вторым порядком точности по модифицированной схеме Годунова. Значения параметров локальной сетки определяются интерполяцией параметров из основной и предыдущей локальных сеток. Рассчитывается задача распада разрыва на границе “упругая среда - упругая среда”, “газ - газ”, “газ - упругая среда” (Riemann’s problem –RP). Результатом решения RP являются скорости и силы на половинном временном слое в центре треугольника, фактически это и есть расчет взаимодействия среды с конструкцией. С нормальной скоростью двигаем контактную границу на новый временной слой, получаем новую локальную сетку (рис. 15). Проводим стандартное интегрирование параметров в подвижных сетках для ячеек, отмеченных на рис.14, получаем параметры вблизи границ (граничный слой) на новом временном слое на сетке из рис. 15. При таком движении локальной сетки 3D подвижные объемы, необходимые для вычисления потоков и интегрирования, вычисляются точно. В итоге получили на новом временном слое параметры среды (продуктов взрыва или упругопластического тела) для центров

локальных базисов каждого треугольника поверхности. Назовем эти параметры параметрами граничного облака.

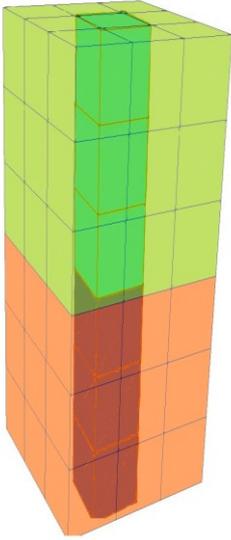


Рис.13

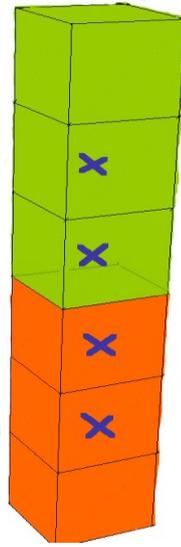


рис.14

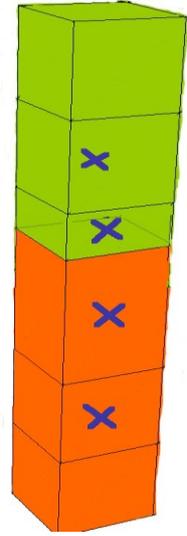


рис.15

4. Используя скорости в центре каждого треугольника, полученные из RP на шаге 3, вычисляем с соответствующими весами скорости в вершинах треугольников STL файла и двигаем их на новый временной слой. Получаем положение поверхности тела на новом временном слое (новый STL-файл), на рис. 16 новое положение тела отмечено красной кривой.

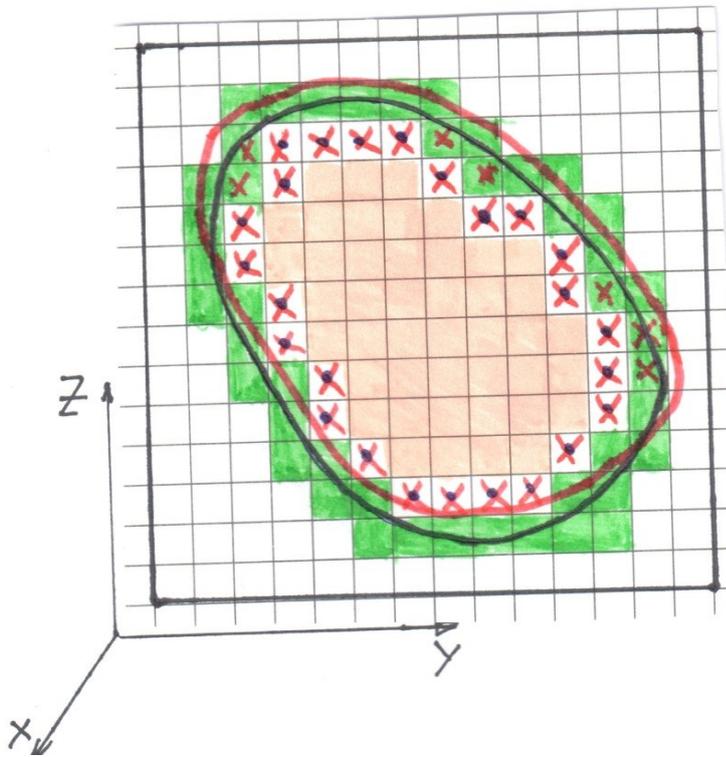


Рис.16

5. Определяем типы ячеек внутри нового положения STL поверхности и в ячейки 4 типа (их могло стать больше или меньше за счет подвижки поверхности тел) интерполируем параметры из ячеек вида 3 и ячеек граничного облака.
6. Далее производим перестройку базисного параллелепипеда в соответствии с новым STL-файлом (сдвигаем на необходимое количество ячеек, чтобы расчетная область осталась внутри параллелепипеда), таким образом завершив расчетный шаг.

### 2.11. Выводы по главе

В главе предложена методика численного моделирования взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций, позволяющая моделировать эти процессы от этапа распространения детонации по ВВ, разлета ПВ в газ, воздействия газа на элементы конструкций, до процессов упругопластического деформирования элементов конструкции и их совместного движения со следующими возможностями:

1. расчетные объекты (ВВ, окружающий газ и элементы конструкции задаются) в виде поверхностей из непрерывного набора треугольников (STL-файлов), задание которых возможно с помощью САД систем (SOLID WORK, AUTOCAD, КОМПАС и др.) или использовать готовые STL-файлы из имеющихся библиотек, эти же поверхности используются для сопровождения объектов в процессе расчета;
2. алгоритм распространения детонационных волн допускает задание нескольких областей инициации установившейся детонации в заряде, произвольного количества зарядов различной формы и инициации различных зарядов в различные моменты времени;
3. возможно задание уравнения состояния ВВ в виде JWL, широко используемое в различных работах и программных продуктах;
4. для моделирования, как газодинамических, так и упругопластических сред использована единая модификация схемы С.К. Годунова, имеющая второй порядок аппроксимации на гладких решениях и монотонная на разрывных с применением расщепления по пространственным и физическим процессам (детонация, пластическое поведение материала);
5. взаимодействие газодинамических сред с упругопластическими рассчитывается с использованием точного решения в общем случае нелинейной одномерной задачи распада разрыва «газ – упругая среда».

### Глава 3. Решение тестовых задач, подтверждающих работоспособность методики

#### 3.1. Влияние уточнения решения задачи распада разрыва на границе упругого тела

##### Постановка задачи

Рассматривается двумерная задача деформирования пластины OABC под действием импульсной нагрузки (рис.17). При  $t > 0$  на границу AB начинает действовать давление  $P=1$  МПа, на границу BC  $P=0.1$  МПа, на границе OA скорости  $U_r = 0$ ,  $U_z = 0$  (условия жесткой заделки).

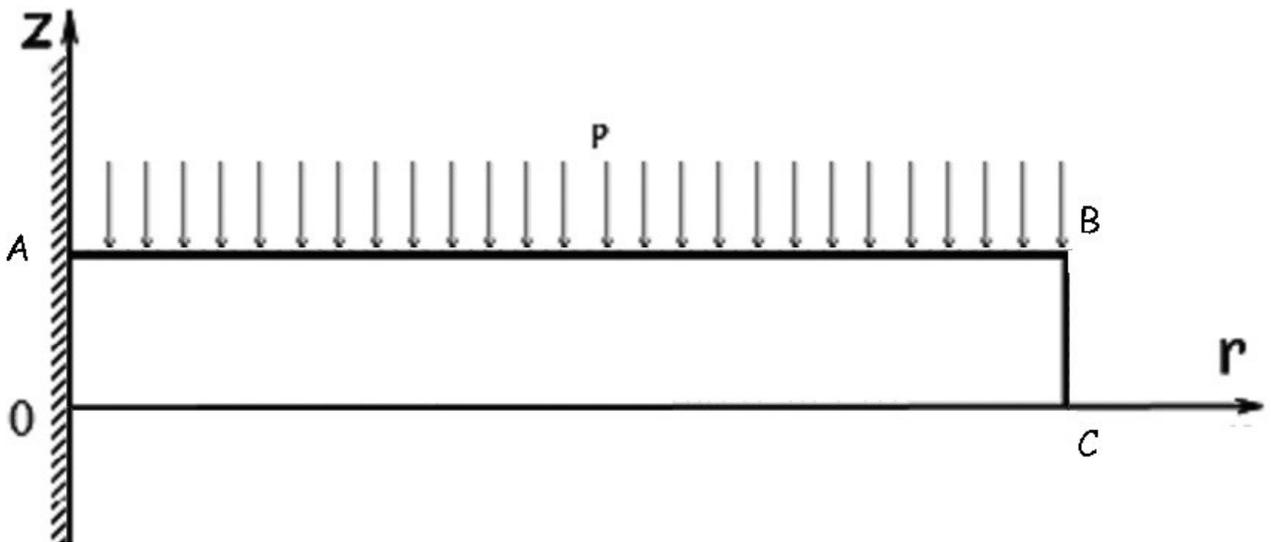


Рис.17

На рис.18 приведены результаты расчетов, проведенных по схеме Годунова с числом Куранта 0.5. Изображены скорости балки вдоль оси  $Z$  в точке B в зависимости от времени для расчетной сетки  $50 \times 5$ , потребовавшие 50000 расчетных шагов. Красная кривая соответствует решению без уточнения на границе, зеленая – с уточненной реализацией граничных условий в соответствии с пунктом 2.6. Синяя кривая (без затухания) соответствует решению, полученному по LS DYNA при дискретизации  $50 \times 5$  с числом Куранта 0.5.

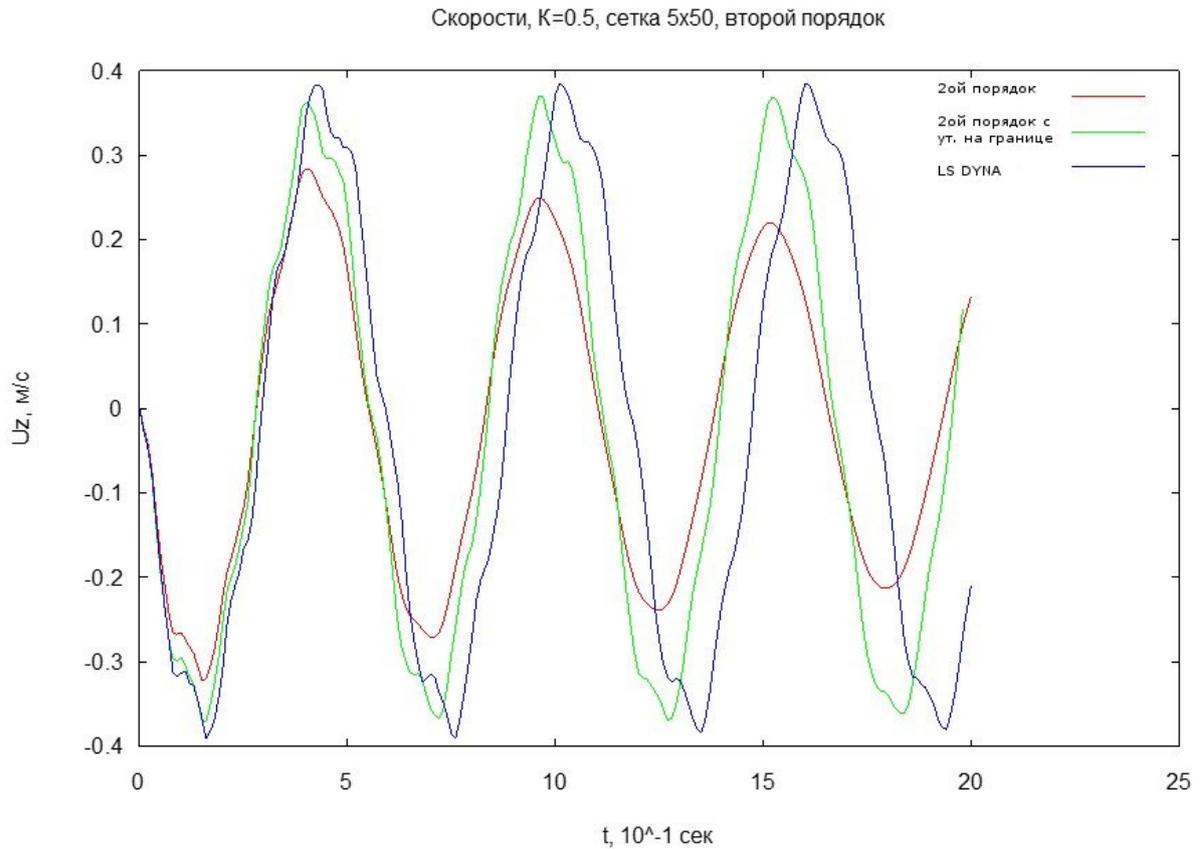


Рис.18

На рис.19 приведены результаты расчетов, проведенных по схеме Годунова соответственно с числом Куранта 0.01, 0.1, 0.5. Изображены скорости балки вдоль оси  $Z$  в точке В в зависимости от времени для расчетной сетки  $50 \times 5$ . Результаты, полученные с уточнением решения задачи распада разрыва на границе близки к решению по LS DYNA (обозначено как «точное» эталонное решение) и слабо зависят от числа Куранта.

Таким образом, показано, что уточненная реализация краевых условий существенно улучшает качество численного решения. В противном случае наблюдается существенное влияние схемной вязкости, характерное для схемы первого порядка точности.

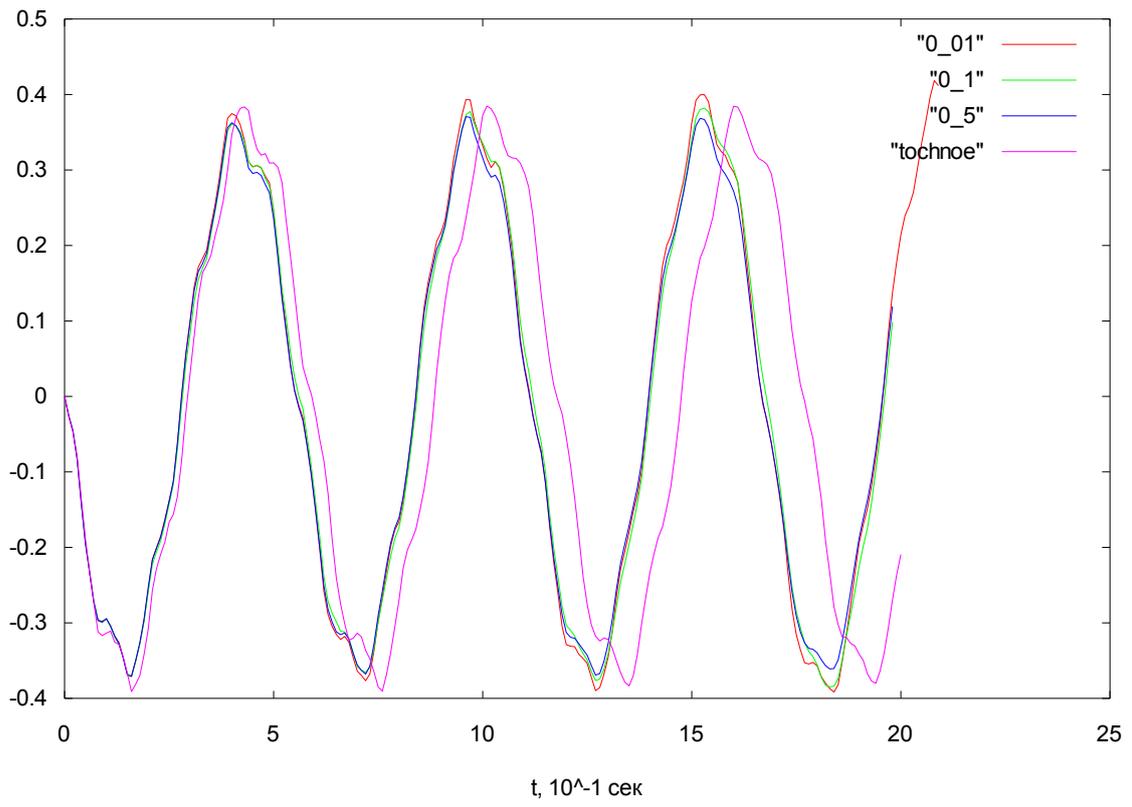
Скорости,  $K=0.01, 0.1, 0.5$ , сетка  $5 \times 50$ 

Рис.19

### 3.2. Моделирование вынужденных осесимметричных колебаний упругого диска

Стальной диск толщиной  $H = 1.5$  см, радиусом  $R = 14.85$  см (рис.20) нагружается давлением. Свойства материала:  $\rho_0 = 7.8 \frac{г}{см^3}$ ,  $E = 210 ГПа$ , коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ . Граничные условия: жесткое закрепление по контуру пластины, на одной свободной поверхности задавалось постоянное давление  $p = 0.17 ГПа$  в первом случае и  $p = 1.7 МПа$  во втором случае, на другой поверхности –  $p = 0$ . Размер ячейки 0.1 см, результаты сравнивались с численным решением по LS-DYNA.

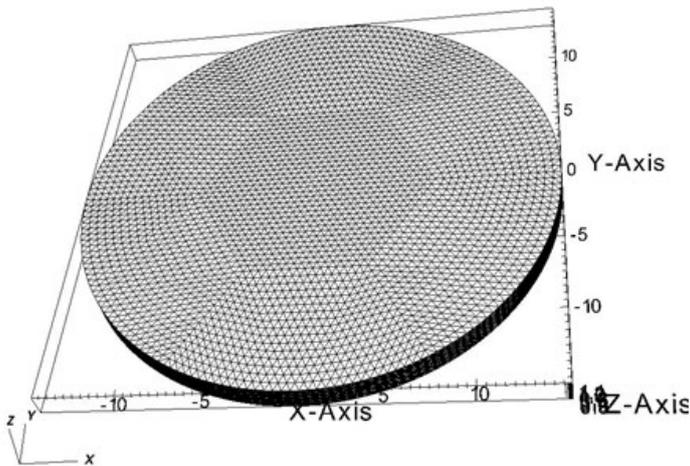


Рис.20. диск STL-файл

На рисунках 21, 22, 23, 24 показаны результаты численных исследований. Решение по модифицированной схеме Годунова в целом соответствует решению по LS DYNA. Расхождение несколько увеличивается с течением времени, что объясняется остаточной схемной вязкостью, так как расчеты проводятся фактически по гибридной схеме.

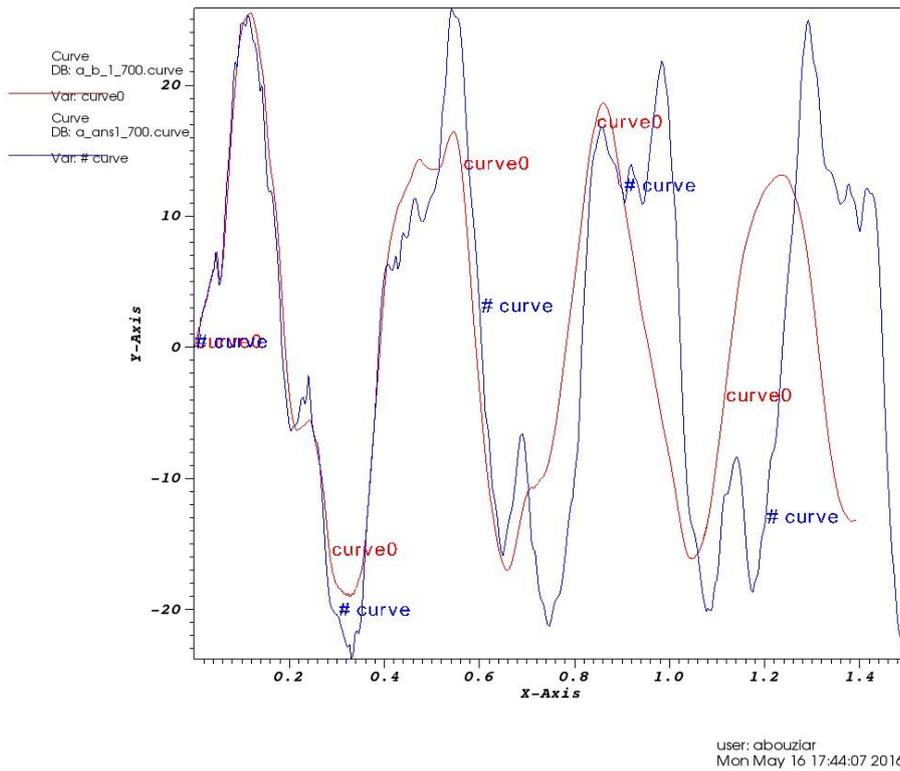


Рис. 21. Скорость в центральной верхней точке диска в зависимости от времени, давление нагружения 170 МПа

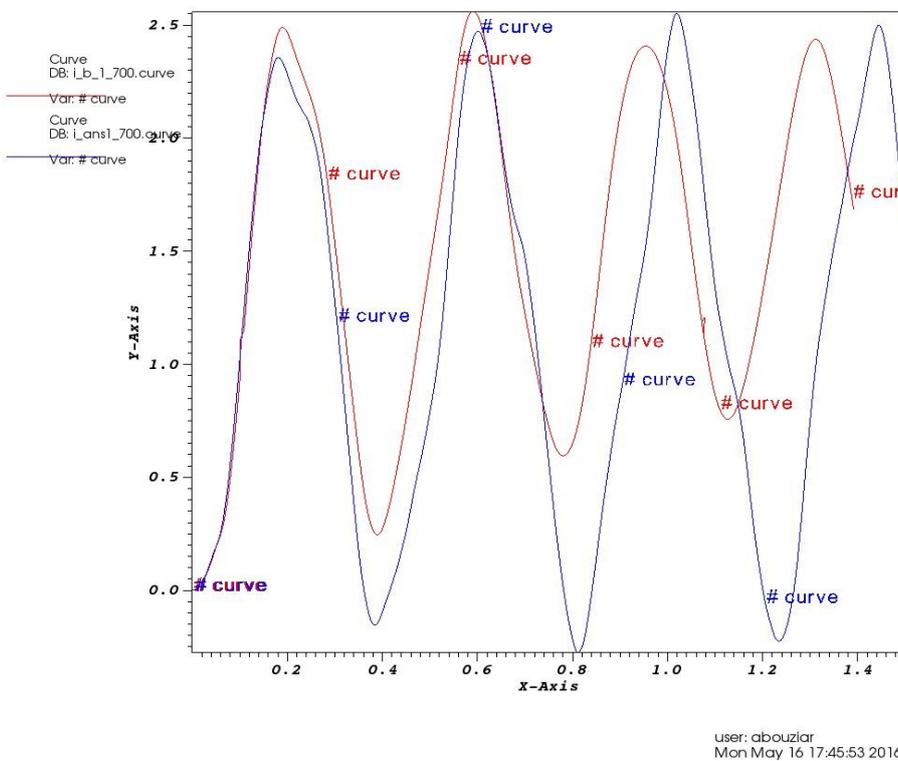


Рис. 22. Перемещение центральной верхней точки диска от времени, давление 170 МПа

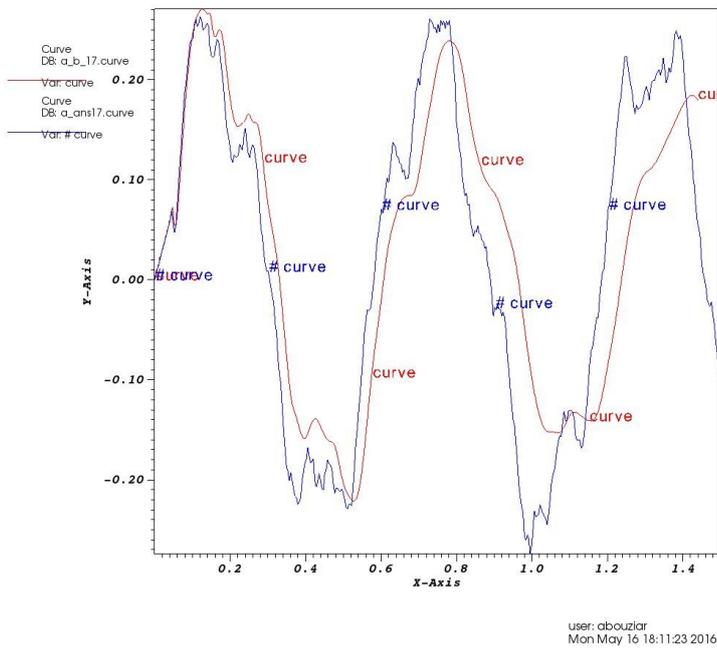


Рис.23. Скорость полюса от времени, давление 1.7 МПа

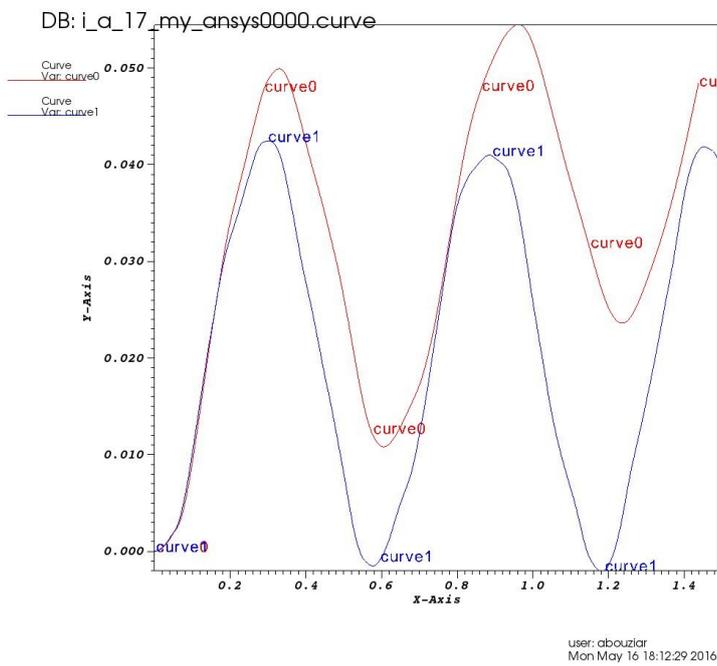


Рис. 24. Перемещение полюса от времени 1.7 МПа

### 3.3. Удар алюминиевой пластины по алюминиевому полупространству (Тест Уилкинса )

Рассматривается задача высокоскоростного удара пластины о покоящееся полупространство [26]. Материал пластины и преграды - алюминий, толщина пластины 5мм, левая поверхность пластины свободна, внешнее давление 0.1 МПа, рис.25.

Для алюминия используется следующее уравнение состояния:

$$P(\rho) = 72 * (\rho / \rho_0 - 1) + 172 * (\rho / \rho_0 - 1)^2 + 40 * (\rho / \rho_0 - 1)^3$$
, где  $P(\rho)$  гидростатическое давление в ГПа,  $\rho_0 = 2700 \text{ кг / м}^3$ , модуль сдвига  $\mu = 24.8 \text{ ГПа}$ , предел текучести  $\sigma_s = 0.2976 \text{ ГПа}$ . Расчеты проводились для скоростей соударения 0.8 км/с и 2 км/с на двумерной равномерной разностной сетке 10x500 ячеек (10 ячеек на миллиметр в начальный момент). Эффективное число Куранта было около 0.35.

На рис.26 показано распределение нормальных напряжений в пластине и полупространстве в различные моменты времени. Сплошной линией показано решение по схеме С.К. Годунова второго порядка точности, пунктиром – первого порядка точности, штрихпунктиром – по схеме Уилкинса, имеющей второй порядок точности [26]. Кривые, отмеченные сплошными линиями и штрихпунктирными практически совпали.



Рис.25

скорость 0.8 км/с, время 1 мкс

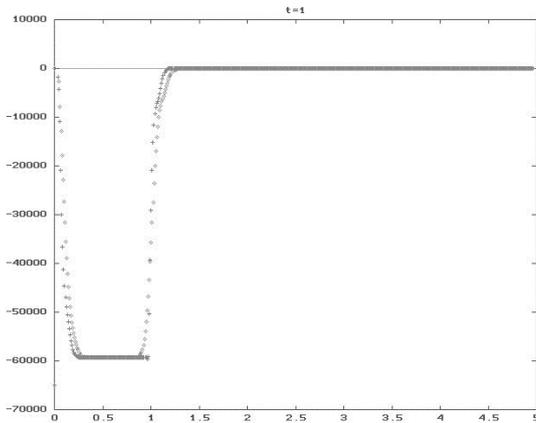


Рис.26. Распределение напряжений, 1 мкс

скорость 0.8 км/с, время 5 мкс

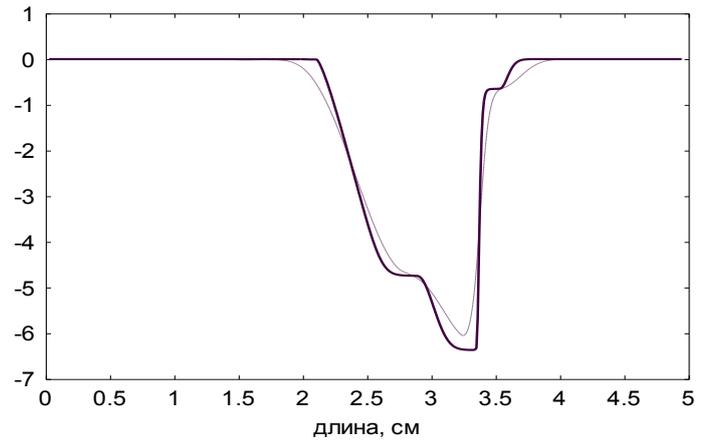
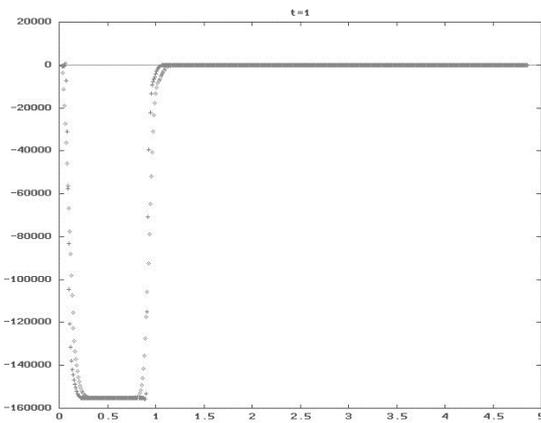
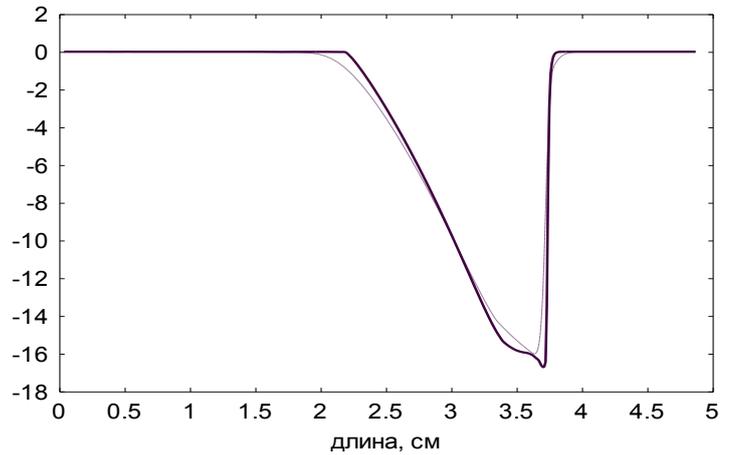


Рис.27. Распределение напряжений, 5 мкс



скорость 2 км/с, время 1 мкс

скорость 2 км/с, время 5 мкс



Наблюдается хорошее совпадение решения по схеме второго порядка точности с решением Уилкинса. Решение по схеме первого порядка точности недостаточно точно описывает амплитуды волновых фронтов и контактных разрывов.

### 3.4. Распространение детонации с уравнением состояния типа JWL

В целях верификации алгоритмов распространения детонационных волн решена задача распространения сферической детонационной волны в ТГ36/64 с уравнением состояния типа JWL. Решение задачи проводилось с первым и вторым порядками точности с помощью разработанной методики. Область, занятая непродетонировавшим ВВ, моделировалась как газ с уравнением состояния ПВ, так и как твердое деформируемое тело. Расчетная область, занятая ВВ, имела размеры 240x240x240 см. Распространение детонации начиналось из нескольких ячеек в центре декартовой системы координат. Область покрывалась сеткой из 120x120x120 кубических ячеек (сторона кубика 2 см). Параметры ТГ36/64 –  $\rho_0 = 1,717 \text{ г/см}^3$ ,  $p_H = 295 \text{ кбар}$ ,  $\rho_H = 2,3515 \text{ г/см}^3$ ,  $D = 7980 \text{ м/с}$ , где  $\rho_0$  – начальная плотность,  $p_H, \rho_H$  – давление и плотность в точке Чепмена-Жуге,  $D$  – скорость детонации, эмпирические параметры уравнения состояния JWL (таблица 1)  $A = 524,2 \text{ ГПа}$ ,  $B = 7,678 \text{ ГПа}$ ,  $C = 1,082 \text{ ГПа}$ ,  $R_1 = 4,2$ ,  $R_2 = 1,10$ ,  $\omega = 0,34$ .

Расчеты, проведенные с моделированием ВВ как газ и как твердое тело, как и ожидалось, совпали. На рис. 28-30 приведены распределения давления, плотности и скорости в сферической волне, приведенные к значениям на ударном фронте  $p_H, \rho_H$  и  $D$  в зависимости от безразмерной пространственной координаты  $R/R_0$  в момент времени  $t = 0,125 \text{ мс}$ , где  $R_0 = 100 \text{ см} = D \cdot t$ .

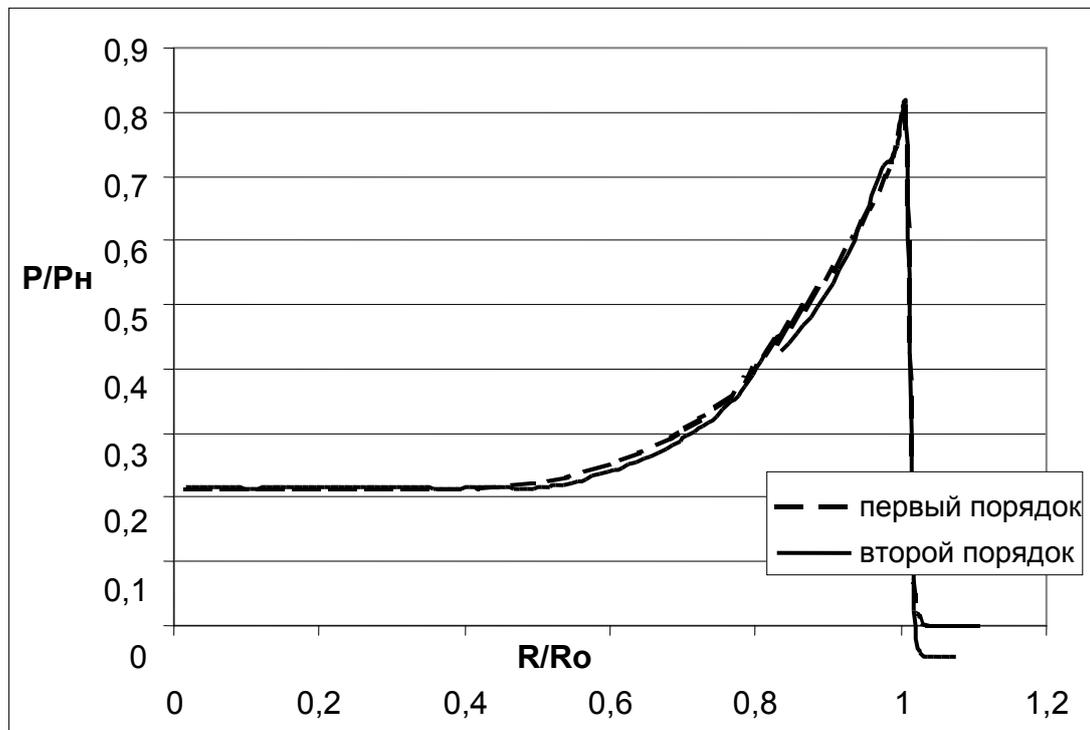


Рис. 28.

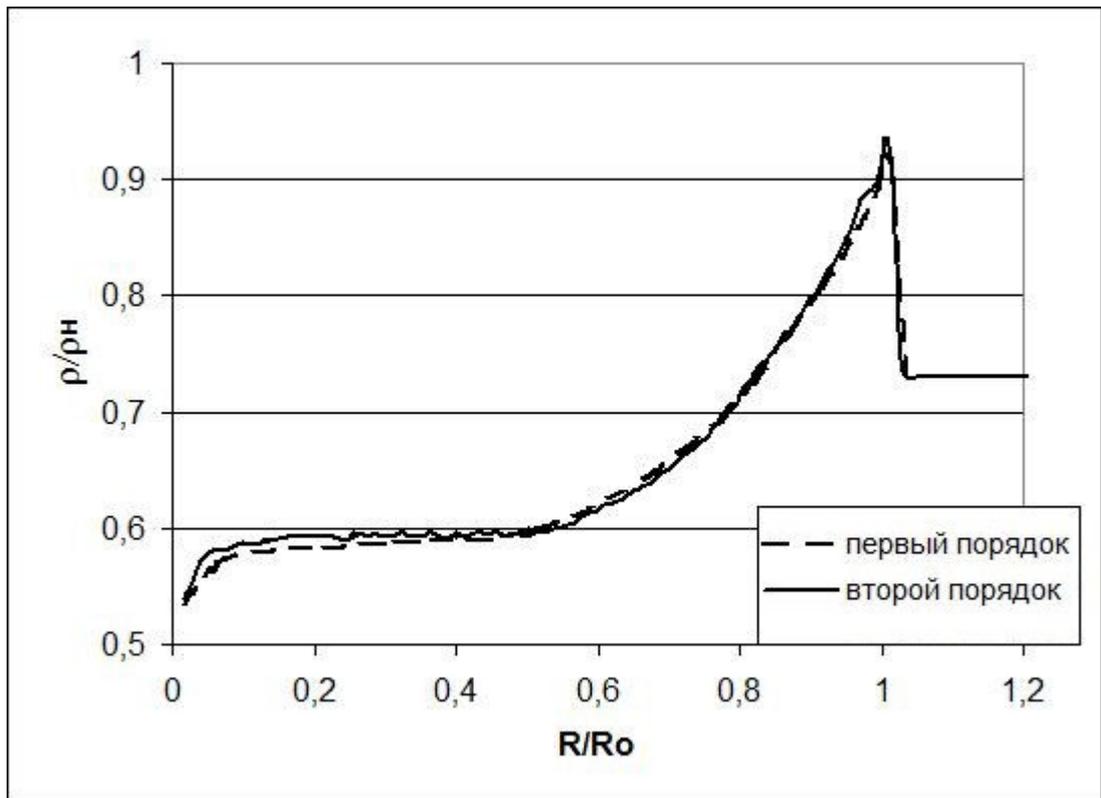


Рис. 29.

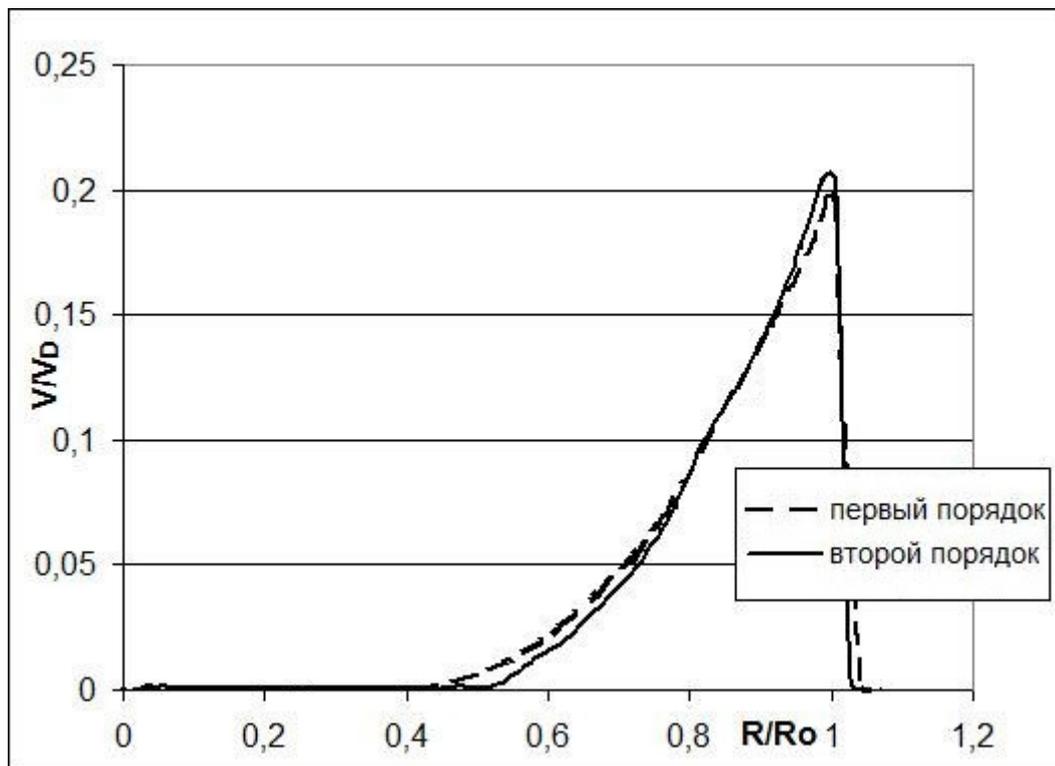


Рис. 30.

Разработанные алгоритмы расчета детонации позволяют получать достоверные распределения параметров при взрыве конденсированных ВВ [19]. Решения, полученные по схемам первого порядка точности и модифицированной очень близки.

### **3.5. Выводы по главе**

На решении известных тестовых задач показано, что разработанные методики и алгоритмы позволяют моделировать процессы взрывного нагружения деформируемых конструкций в эйлеровых переменных с точностью, сопоставимой с решениями, получаемых с помощью программных продуктов, использующих лагранжевые и эйлерово-лагранжевые подходы.

## Глава 4. Результаты решения задач взрывного нагружения упругопластических элементов конструкций.

В данном разделе приводится постановка задач и приводятся результаты численных исследований взаимодействия ударных волн от взрывов зарядов ВВ с элементами конструкций.

### 4.1. Расчет нагрузок от взрыва твердого ВВ на жесткую цилиндрическую оболочку

Моделировалось взрывное нагружение замкнутой абсолютно жесткой цилиндрической камеры с внутренним диаметром  $D=1.6$  м и высотой  $H=3.2$  м (рис.31). Поверхность цилиндра и плоских жестких торцев в 3D случае аппроксимировалась STL-файлом, состоящим из почти 100000 треугольников со сторонами от 0.02 до 0.04м. Основная сетка состоит из 432000 ( $60*60*120$ ) кубических ячеек со стороной 0.03м. Сферический заряд диаметром 0.2м. Центр заряда находится в плоскости симметрии цилиндра на оси симметрии (осесимметричная задача). Процесс детонации не рассматривается, высокие параметры задаются одинаковыми по всей области ВВ:

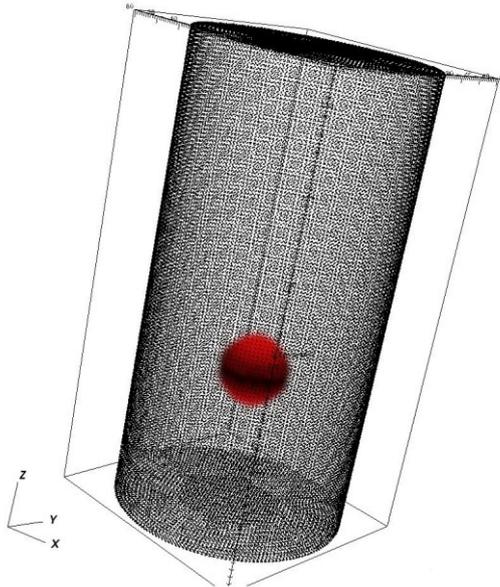


Рис.31

давление –  $10^4$  МПа, плотность -  $1600 \text{ кг/м}^3$ , скорость равна 0 и в ПВ и в окружающем воздухе, эффективный показатель адиабаты 3.0; в окружающем воздухе: давление - 0.1 МПа, плотность -  $1.28 \text{ кг/м}^3$ , показатель адиабаты также взят 3.0.

На рис. 32 приведены осциллограммы давления, рассчитанные в трехмерной постановке (штриховая линия) и в двумерной осесимметричной постановке (отмечено точками), которые

фактически совпали. В левой части рисунка приведено давление на поверхности цилиндра в ближайшей к заряду точке, а в правой части рисунка соответственно давление на оси симметрии на крышке цилиндра. Давление на торцевую крышку существенно превышает давление на боковую поверхность цилиндра, что объясняется эффектами взаимодействия распространяющихся и отраженных ударных волн и кумулятивными явлениями.

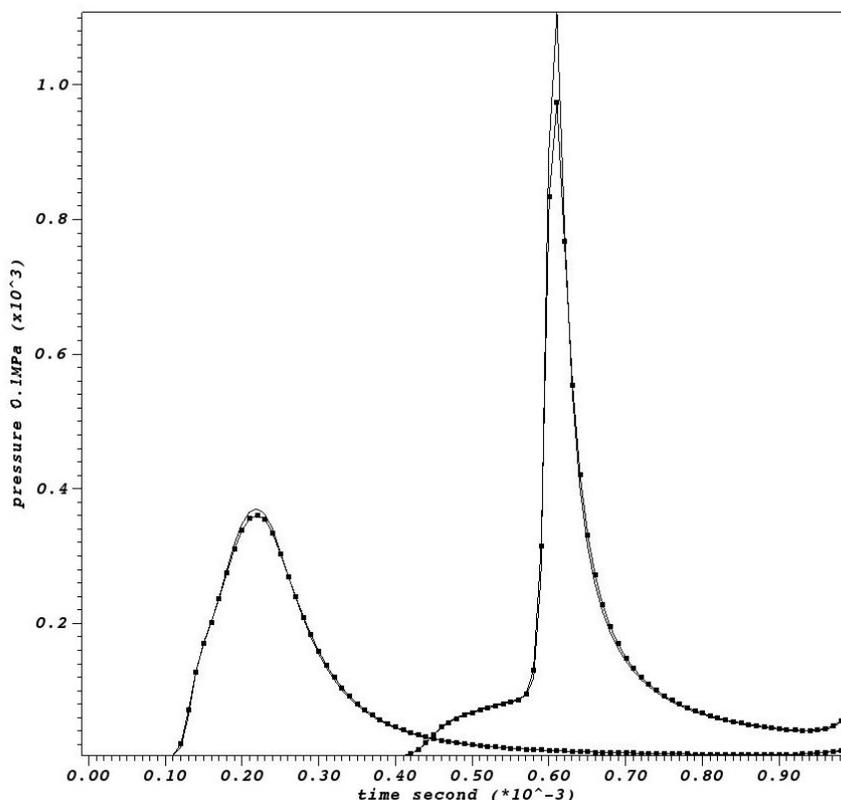


Рис.32

Результаты расчетов в осесимметричной постановке по трехмерной методике совпадают с расчетами по двумерной методике (UPSGOD 2D), что подтверждает достоверность расчетов.

Данная задача была решена так же в более сложной постановке с использованием модели лучевой детонации, решения получены для двух вариантов – при инициации в центре заряда (осесимметричная задача) и при инициации на боковой поверхности заряда (трехмерная задача). Расчет велся при размере ячейки 1.6 см, т.е. примерно 13 ячеек на радиус ВВ. Опыт расчетов по двумерной методике говорит о том, что приемлемая точность достигается при дискретности в 10 ячеек на радиус ВВ. Расчет длился около 4х часов на 8-и процессорной ЭВМ. На задание поверхности цилиндрической оболочки использовано примерно шестьсот тысяч треугольников, размеры стороны треугольника близки к размеру ячейки. На рис. 33,34 изображено распределение давления в расчетной области на момент полной детонации заряда. Уже здесь наблюдается существенная разница. Наблюдается значительная зависимость распределения давления в

продуктах детонации от точки инициирования ВВ (причем чем сильнее ВВ, тем сильнее зависимость). Красным цвет на рисунке соответствует 42 ГПа, как в точке Чепмена-Жуге.

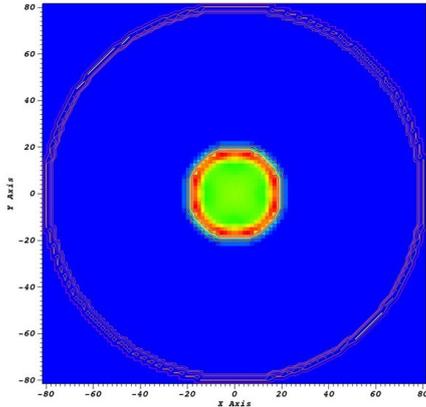


Рис. 33

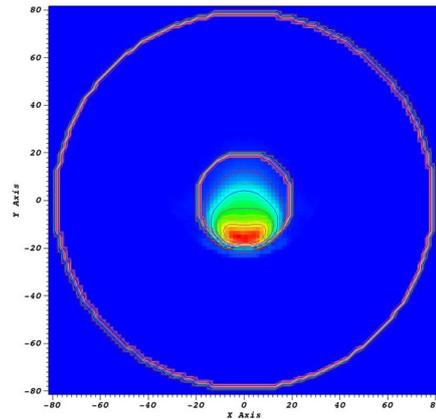


рис.34

На рис.35 изображена осциллограмма давления на точки 1 и 2. Красным цветом показана осциллограмма при инициации в центре заряда. Зеленым и синим – осциллограмма в точках 1 (ближняя к точке инициации) и 2 (противоположная точке 1) при инициации на боковой поверхности заряда. Наблюдается большая разница в амплитуде. Вместо 150 МПа при инициации в центре, имеем 300 МПа в точке 2 и около 60 МПа в точке 1 при инициации сбоку.

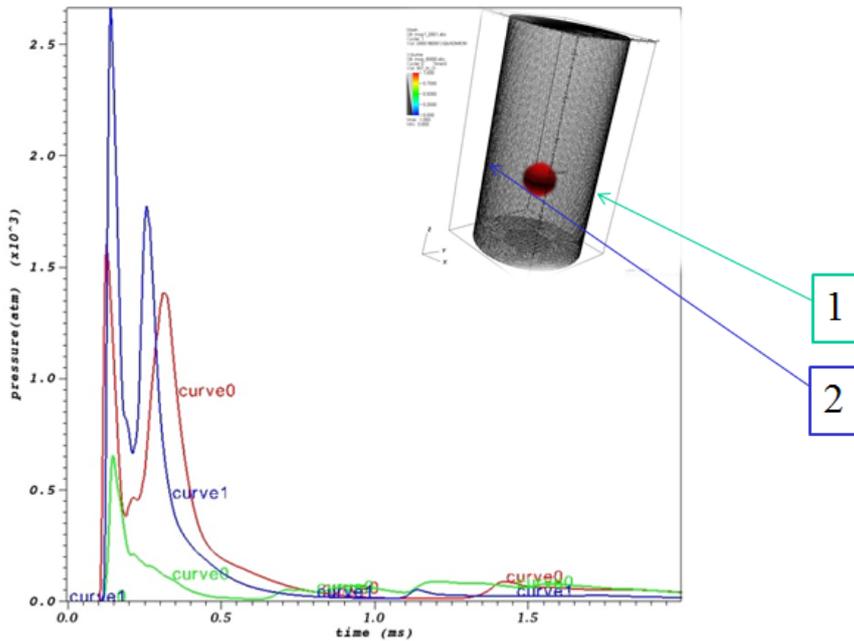


Рис.35

На рис.36 изображена осциллограмма давления в точке 3 (дно цилиндра). Красным цветом показана осциллограмма при центральной инициации. Зеленым цветом – осциллограмма при боковой инициации. Кумулятивные эффекты более выражены при инициации в центре заряда.

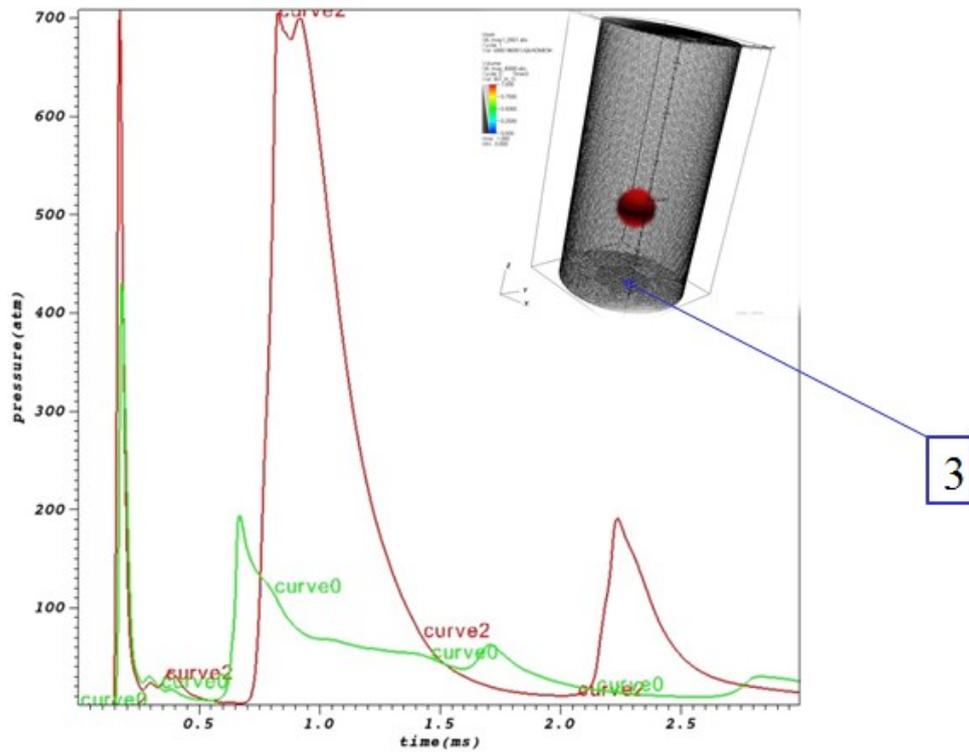


Рис.36

На рис.37 изображена осциллограмма давления в точке 4 (верхняя крышка цилиндра). Красным цветом выделена осциллограмма при центральной инициации, зеленым – при инициации сбоку. Наблюдается небольшой всплеск давления в левой части (0.5мс) в обоих случаях и существенная разница в дальнейшем.

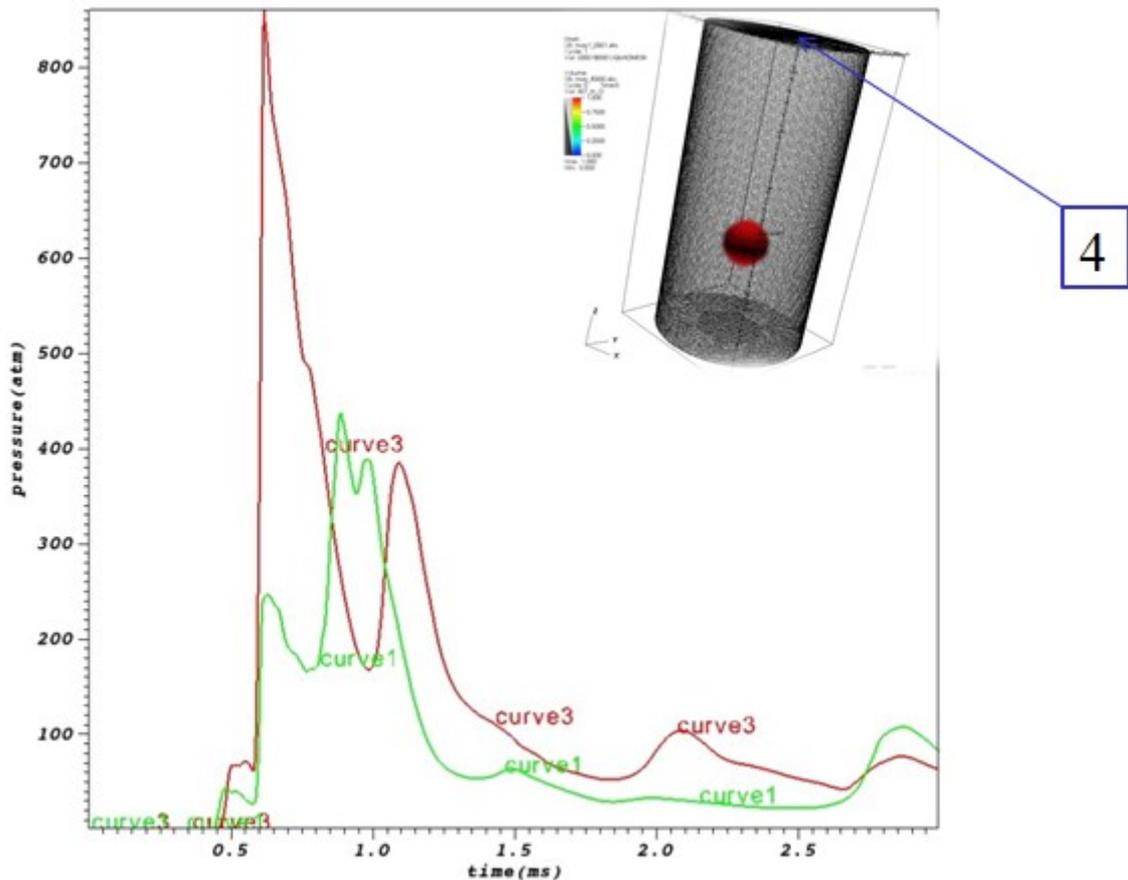


Рис.37

Таким образом процессы взрывного нагружения цилиндрической оболочки отличаются высокой степенью сложности и существенно зависят от точек инициирования заряда ВВ.

#### 4.2. Внутреннее импульсное нагружение стальных труб при взрыве шарового заряда конденсированного ВВ

Разработанная методика была использована для исследования процесса деформации отрезка стальной толстостенной трубы при внутреннем взрыве. Продукты взрыва при этом могут свободно разлетаться вдоль оси трубы и вытекать из нее. Был обчислен один из экспериментов, приведенных в [137], допускающих моделирование в осесимметричной постановке. Целями численных исследований были:

1. верификация трехмерной методики при сравнении решений с результатами расчетов по двумерной методике [31];
2. сравнение расчетов с экспериментом;
3. изучение влияния области инициирования заряда ВВ на процесс деформирования.

На рис. 38 приведена постановка задачи (эксперимент №11 из [137]). Красным цветом обозначен шаровой заряд ВВ из сплава тротила с гексогеном ТГ50/50, радиусом 0.03 м, плотностью  $1.67 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , черным цветом показана труба из стали 3 длиной 0.2 м, внутренним радиусом 0.0315 м и толщиной стенки 0.008 м. Заряд фактически перекрывал внутреннее сечение трубы. Центр заряда расположен на оси симметрии трубы в плоскости ее симметрии. В экспериментах заряд инициировался в центре симметрии. В этом случае все процессы были осесимметричными. Расчеты проводились по трехмерным и двумерным осесимметричным методикам с инициацией детонации в центре симметрии. Кроме того, трехмерные расчеты были произведены с инициацией детонации в точке на поверхности заряда в плоскости симметрии. Отчет времени принимался с момента инициации. Для ВВ параметры уравнения состояния типа JWL взяты из [17]. Для стали принято: плотность -  $7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , модуль объемного сжатия -  $1.75 \cdot 10^5 \text{ ГПа}$ , модуль сдвига -  $8.077 \cdot 10^4 \text{ ГПа}$ , модуль упрочнения -  $2.40 \cdot 10^2 \text{ ГПа}$ , предел текучести -  $3.40 \cdot 10^2 \text{ ГПа}$ . В начальный момент времени поверхности объектов были покрыты сеткой из 700 тысяч треугольников, основная сетка по продуктам детонации, воздуху и трубе со стороны 0.06см состояла из 6 миллионов ячеек. Решение получено на супер-ЭВМ “Лобачевский” ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

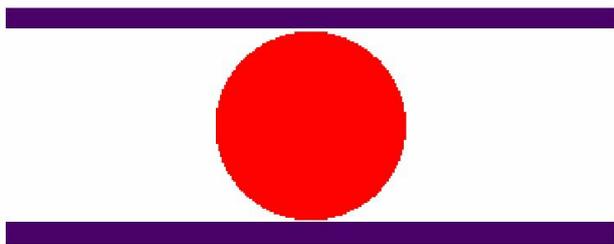


рис.38

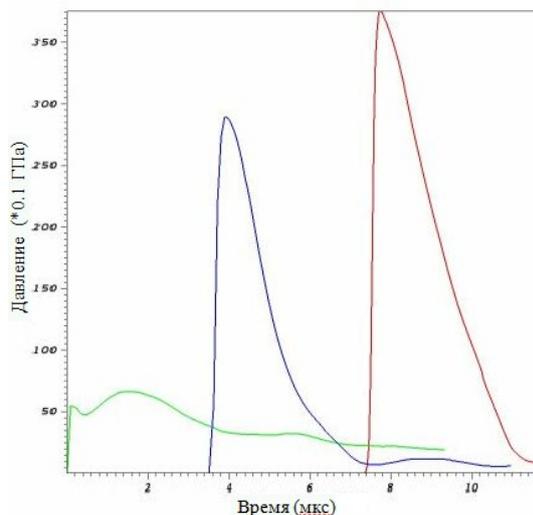


рис.39

На рисунке 39 приведены зависимости давления от времени на внутреннюю поверхность трубы в плоскости симметрии, синим цветом отмечено давление в случае инициации заряда в центре симметрии, зеленым и красным - давление при инициации на поверхности заряда, зеленым в точке поверхности трубы, ближайшей к области инициации, красным – в диаметрально противоположенной точке. На рис. 40 и 41 приведены радиальные скорости и смещения внешней поверхности трубы в плоскости симметрии в зависимости от времени. Синим цветом отмечена

скорость и смещение при инициации детонации в центре заряда, зеленым и красным - при инициации на поверхности, соответственно в ближайшей к точке инициации и диаметрально противоположенной точках трубы.

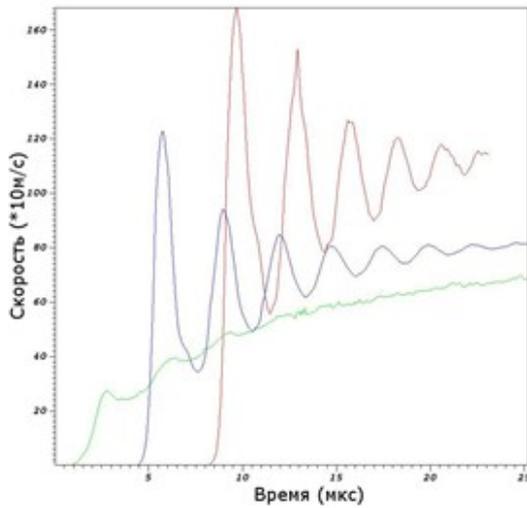


рис.40

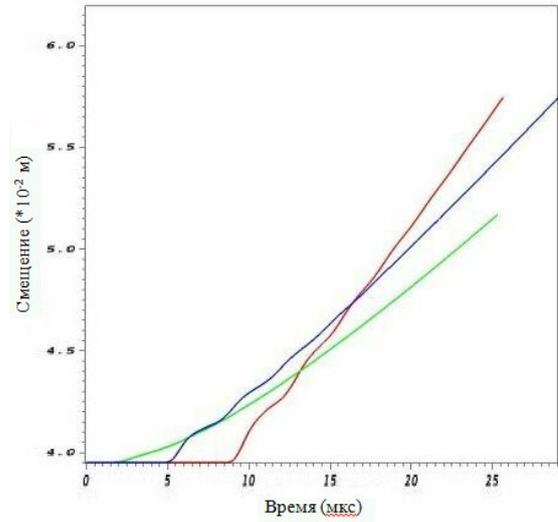


рис.41

На рисунках 42 приведено распределение давления для трехмерной задачи в моменты времени при выходе детонационной волны на поверхность заряда, противоположную области инициирования. На рисунке 43 распределение давления в газе после отражения ударной волны от поверхности трубы в сечении, проходящем через ось трубы и точку инициирования при инициации детонации на поверхности заряда. На всех рисунках максимальные давления соответствуют областям красного цвета. Видно, что течение носит существенно не осесимметричный характер.

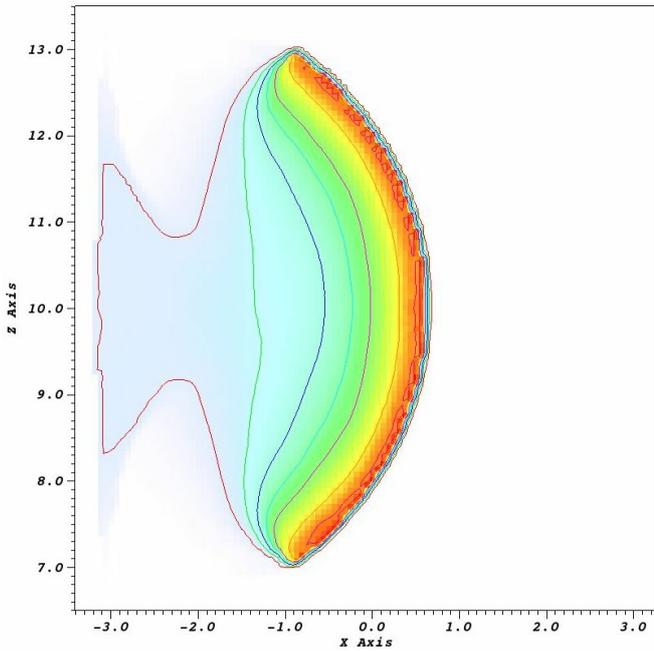


рис.42

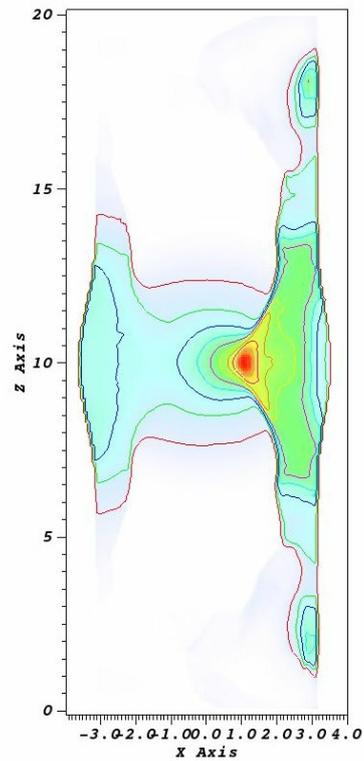


рис.43

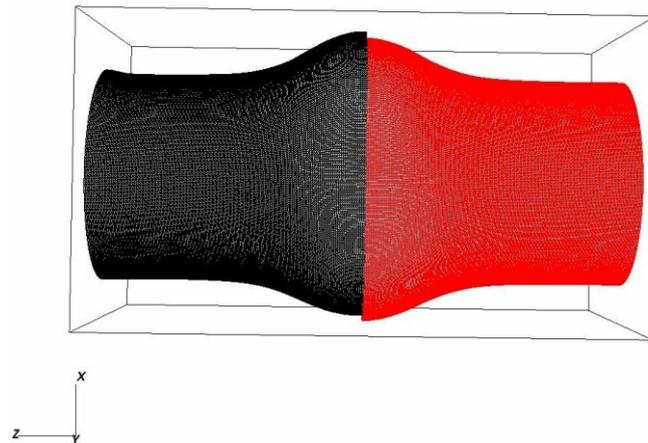


рис. 44

На рисунке 44 приведены формы трубы на момент времени 25 микросекунд в сечении, проходящем через ось симметрии и точку инициации. В левой части рисунка 44 находится половина трубы до плоскости симметрии с инициацией на поверхности заряда, а в правой красным цветом изображена половина трубы при инициации в центре (осесимметричный случай). Очевидно, что на этот момент времени наиболее удаленная часть трубы при инициации на поверхности смещается сильнее, чем в осесимметричном случае, а ближняя значительно меньше.

Приведенные численные результаты показывают сложный нелинейный характер процессов разлета продуктов детонации и их взаимодействия с деформируемой конструкцией. В случае инициации в центре заряда происходит осесимметричное отражение продуктов детонации от стенки трубы, формирование высокоскоростных кольцевых струй, направленных наружу. Скорость струи на оси симметрии от 1.2 до двух радиусов заряда (до прихода на ось симметрии отраженных волн от стенок трубы) около 6 км/с, что близко к экспериментальным значениям 5.73 км/с (точность определения скорости в эксперименте 5-10%). Максимальные расчетные скорости в осевом направлении при этом вблизи стенок трубы достигают 18 км/с. Максимальные значения давления наблюдаются в плоскости симметрии трубы, что вызывает интенсивное деформирование центральной части трубы. Расчетное начало процесса деформирования после прихода детонационной волны к оболочке 5 мкс совпадает с экспериментальным. Конец отбора энергии трубой от продуктов детонации и переход к инерционной фазе движения происходит при достижении в центральной части трубы 10% окружной деформации и скорости в радиальном направлении 800 м/с, что также совпадает с экспериментальными данными. На момент времени 25 мкс расчетные деформации центральной части трубы также достигают экспериментально замеренных 40%. В случае инициации заряда на поверхности в плоскости симметрии процесс нагружения и деформирования трубы качественно меняется. Процессы перестают быть осесимметричными. Вблизи области инициирования процесс деформирования трубы начинается одновременно с инициированием. За фронтом детонационной волны формируется кумулятивный ударный фронт, направленный в противоположную от точки инициирования область. Соответственно труба в этой области получает более мощный импульс чем при инициировании в центре заряда и набирает скорость до 1150 м/с. Таким образом влияние области инициирования на процесс нагружения и деформирования конструкции является значительным. Деформирование трубы носит существенно трехмерный характер, отличающийся от осесимметричной задачи.

	Скорость струи на оси симметрии	Начало процесса деформирования стенки	Скорость трубы в радиальном направлении	$(R-R_0)/R_0$ при $t=25\text{мкс}$
Эксперимент Цыпкин В.И., Иванов А.Г., Минеев В.Н., Шитов А.Т. [137]	6 км/с	5 мкс	800 м/с	40%
Результат моделирования	5.73 км/с	5 мкс	800 м/с	40%

### 4.3. Разгон деформируемых тел продуктами взрыва

Цель моделирования – выявить эффекты влияния процессов взаимодействия продуктов взрыва с деформируемыми упругопластическими телами.

#### 4.3.1. Разгон тел кубической формы.

Тела имеют форму кубиков со стороной  $10^{-2}$  м, рис.46, материал сталь, плотность  $7.8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент объемного сжатия  $1.75 \cdot 10^5$  МПа, модуль сдвига  $8.0779 \cdot 10^4$  МПа, предел текучести 340 МПа, модуль упрочнения 250 МПа, масса  $7.8 \cdot 10^{-3}$  кг. STL файл каждого кубика состоит из 768 треугольников со сторонами от  $0.12 \cdot 10^{-2}$  до  $0.17 \cdot 10^{-2}$  м. Шаг основной сетки по кубикам  $0.07 \cdot 10^{-2}$  м.

Твердое ВВ ТГ36/64 [17], начальная плотность  $1.717 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, скорость детонации  $7.98 \cdot 10^3$  м/с, давление в точке Жуге  $2.95 \cdot 10^4$  МПа, параметры для уравнения состояния типа JWL: R1=4.2, R2=1.1, W=0.34, A= $5.242 \cdot 10^4$  МПа, B= $7.678 \cdot 10^3$  МПа, C= $1.082 \cdot 10^3$  МПа. Заряд сферической формы, расположен с центром на оси и плоскости симметрии. Масса заряда 0.2445 кг, радиус  $3.24 \cdot 10^{-2}$  м, начальная детонация задавалась в области радиусом меньше  $10^{-2}$  м. По заряду и соответственно воздуху основная сетка задавалась со стороной кубической ячейки  $0.2 \cdot 10^{-2}$  м.

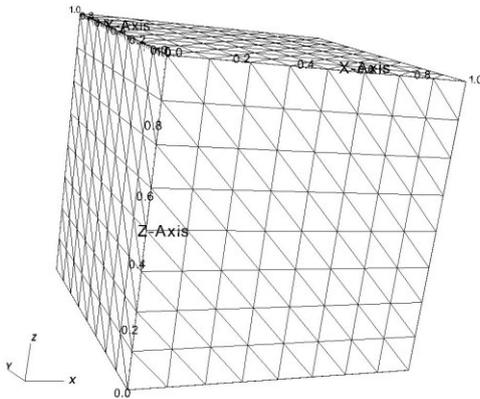


Рис. 46

Количество тел и их расположение может быть любым. Рассматривался процесс разгона трех одинаковых тел, расположенных в наиболее характерных точках. Схема расположения тел и заряда в начальный момент приведена на рис.47, осколки отмечены красным, заряд светло синим.

На рис.48 приведена разностная сетка вблизи заряда. Сетка достаточно грубая и заметно, что заряд не совсем сферической формы, что незначительно сказывается при моделировании.

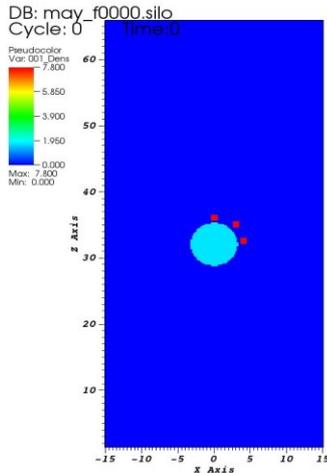


Рис. 47

user: abouziar  
Fri Oct 27 11:59:45 2017

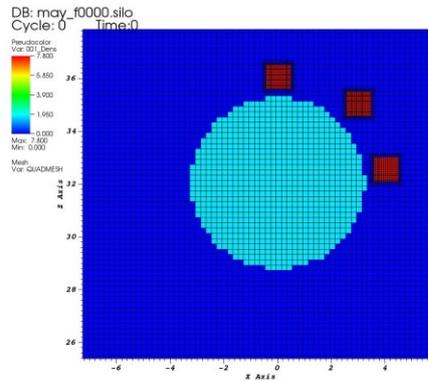


Рис. 48

user: abouziar  
Fri Oct 27 12:04:12 2017

На рис.49,50 показаны характерные моменты разгона тел продуктами детонации (здесь и ниже приведена плотность). Тела сильно деформируются, потоки продуктов детонации движутся существенно быстрее, формируются струи между телами, в которых частицы газа обгоняют тела.

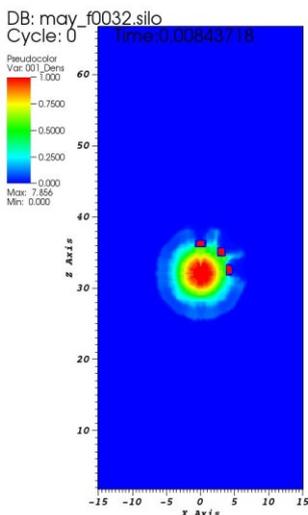


Рис. 49

user: abouziar  
Fri Oct 27 12:02:00 2017

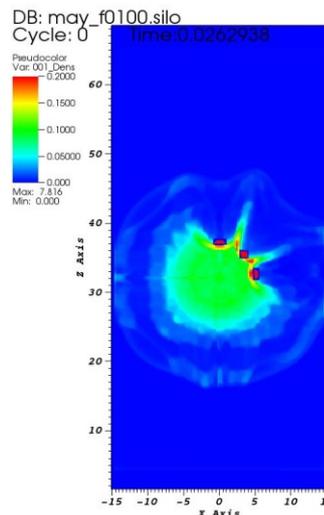


Рис. 50

user: abouziar  
Fri Oct 27 12:08:25 2017

На рис.51 показана более подробная картина, здесь заметно увеличение плотности продуктов детонации между телами (кумуляция). На рис. 52 показаны поверхности тел (STL-файлы) на

начальный момент и на момент времени 45 мкс, очевидно сильное влияние начального положения и ориентации тел относительно заряда. На рисунке изображена часть расчетной области.

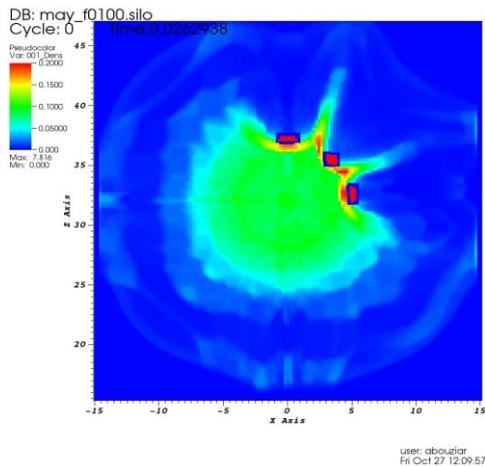


Рис. 51

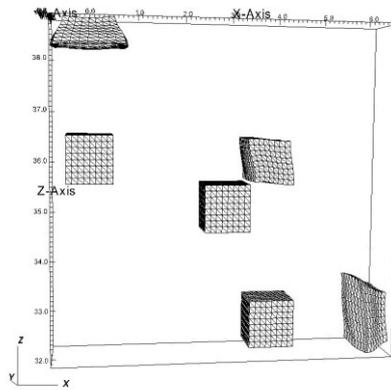


Рис. 52

На рис.53 показаны поверхности тел (STL-файлы) на начальный момент и моменты времени 13 и 45 мкс, на 13 мкс тела практически приобрели остаточную форму незначительно изменив положение (наложение геометрии в начальный момент времени и при  $t=13$  мкс).

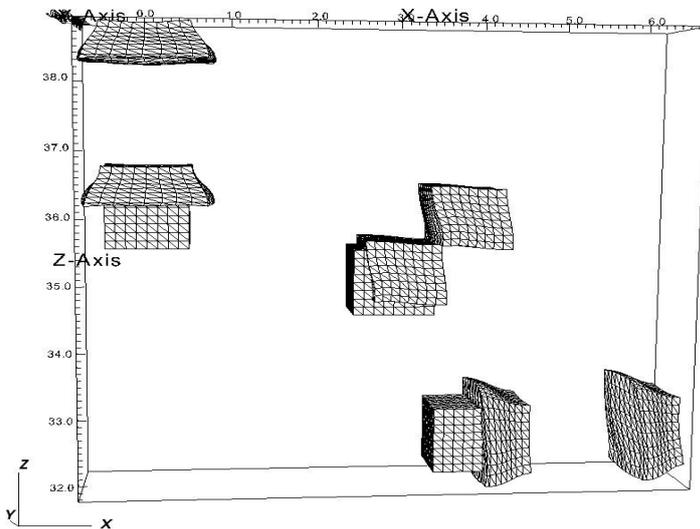


Рис. 53

На рис. 54 и 55 приведены более подробно остаточные формы деформированного кубика, летящего вдоль оси симметрии, в верхней части образовалась впадина, в нижней - выпуклость, толщина вдоль оси симметрии сократилась почти вдвое.

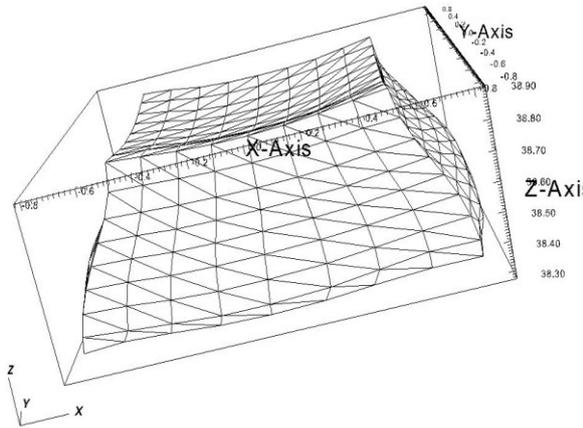


Рис. 54

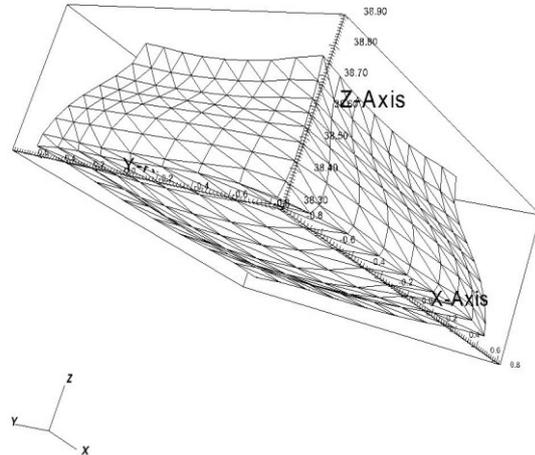


Рис. 55

На рис. 56 и 57 изображены остаточные формы тела, в начальный момент расположенного под углом 45 градусов к оси симметрии, соответственно вид спереди (с оси симметрии) и с хвостовой части. Видно, что остаточные формы образуются несимметрично.

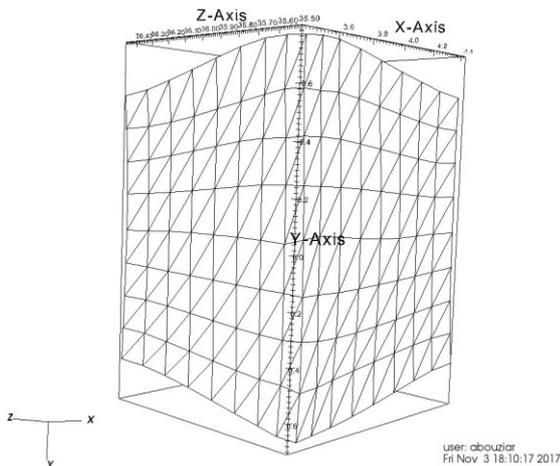


Рис. 56

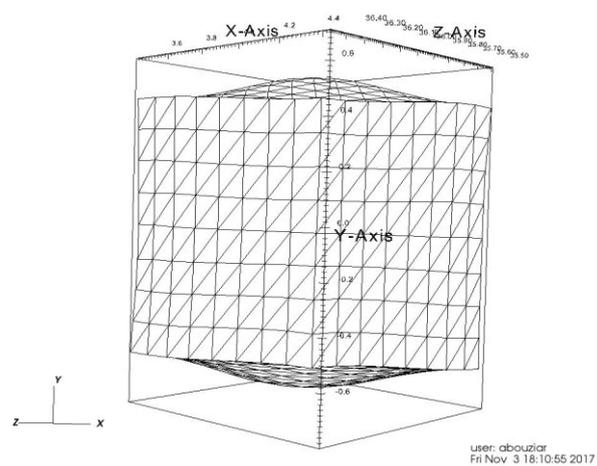


Рис. 57

На рис. 58 приведены скорости тела, расположенного вдоль оси симметрии. Кривая, отмеченная пунктиром, соответствует скорости на днище в ближайшей к заряду точке, вторая кривая, отмеченная сплошной линией, соответствует скорости на верхней границе кубика. На рис. 59 эти

кривые приведены в более подробном масштабе, чтобы более детально рассмотреть процесс разгона тела. Очевидно, что процесс носит волновой характер.

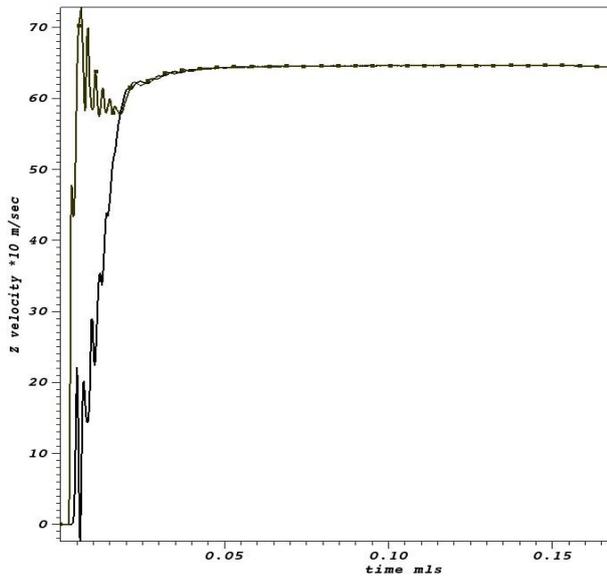


Рис.58

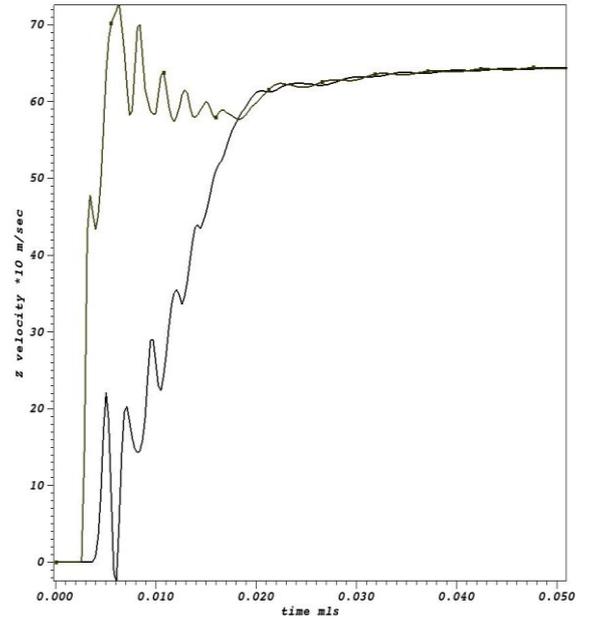


Рис.59

На рис. 60 приведены скорости центров масс тела вдоль оси симметрии ( $V_z$ ) и скорости тела в радиальном направлении ( $V_x$ , отмечены точками). Отличие в скоростях обусловлено численными ошибками, связанными с несимметричностью геометрической формы заряда и тем, что положение нижнего тела не находится точно в плоскости симметрии, а выше на толщину кубика.

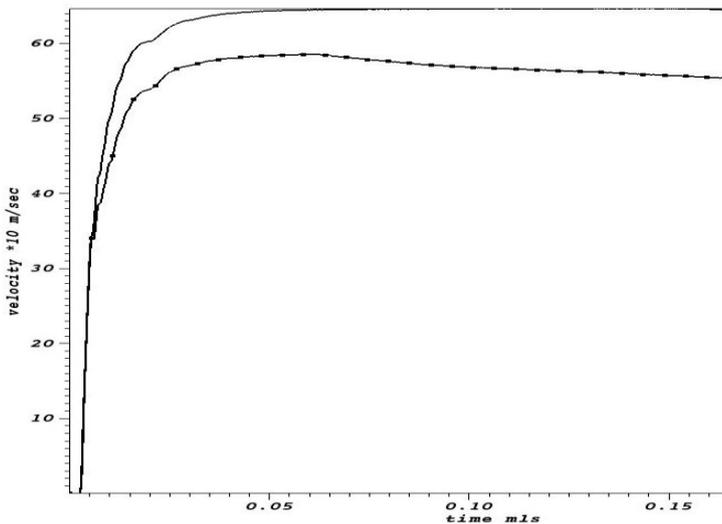


Рис. 60

#### 4.3.2. Разгон тел цилиндрической формы.

Рассматривается разгон тел цилиндрической формы. Заряд тот же, что и в пункте 4.3.1. Тела имеют форму цилиндров диаметром  $10^{-2}$  м, высотой  $1.273 \cdot 10^{-2}$  м, массой  $7.8 \cdot 10^{-3}$  кг (та же масса, что и для тел кубической формы). STL-файл каждого цилиндра состоит из 1222 треугольников со сторонами от  $0.12 \cdot 10^{-2}$  до  $0.17 \cdot 10^{-2}$  м. Шаг основной сетки по тот же что и в 4.3.1.

На рис. 61 приведены поверхности разгоняемых тел (STL-файлы) на начальный момент времени. На рис. 62 и 63 поверхность цилиндра, разгоняемого вдоль оси симметрии, наблюдается впадина на противоположной от заряда поверхности цилиндрического тела и выпуклость ближней к заряду поверхности.

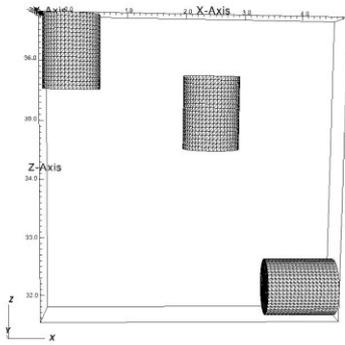


Рис.61

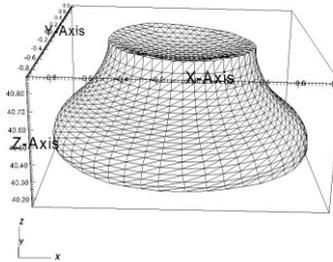


Рис.62

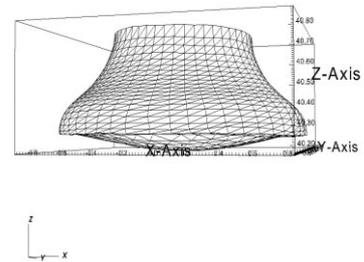


Рис.63

На рис. 64, 65 и 66 приведены формы цилиндра, рамположенного под углом 45 градусов к оси симметрии, соответственно вид сбоку (y-), сверху (z+) и снизу (z-).

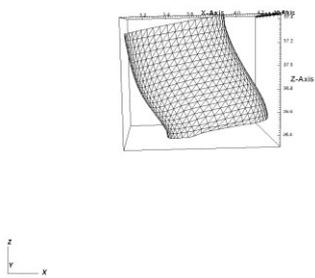


Рис.64

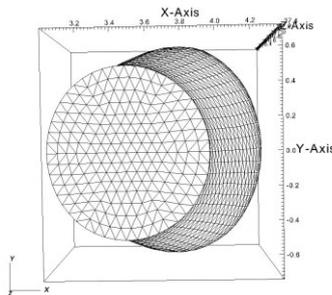


Рис.65

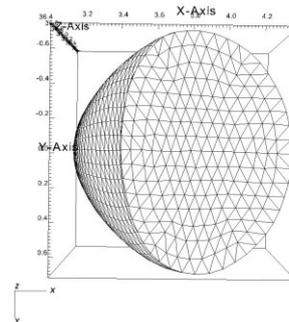


Рис.66

На рис. 67 приведены скорости вдоль оси симметрии на днище в ближайшей к заряду точке для тела кубической формы (отмечено квадратами) и цилиндра. Эти же кривые более подробно приведены на рис.68. Видно, что оба тела в начальный момент испытывают близкое ускорение.

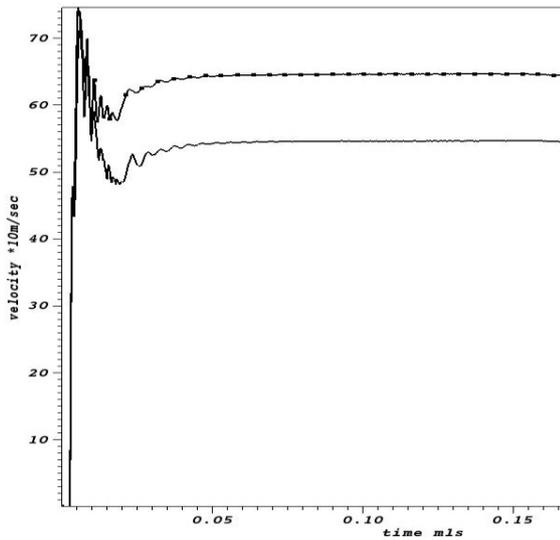


Рис.67

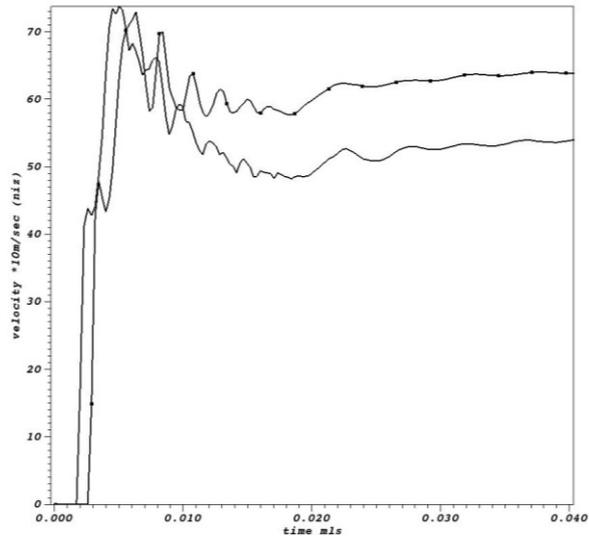


Рис.68

На рис. 69 приведены скорости вдоль оси симметрии на вершинах ( в дальней от заряда точке) для тела кубической формы (отмечено квадратами) и цилиндра. Эти же кривые более подробно приведены на рис.70. Ускорение вершин кубика и цилиндра в начальный момент различно.

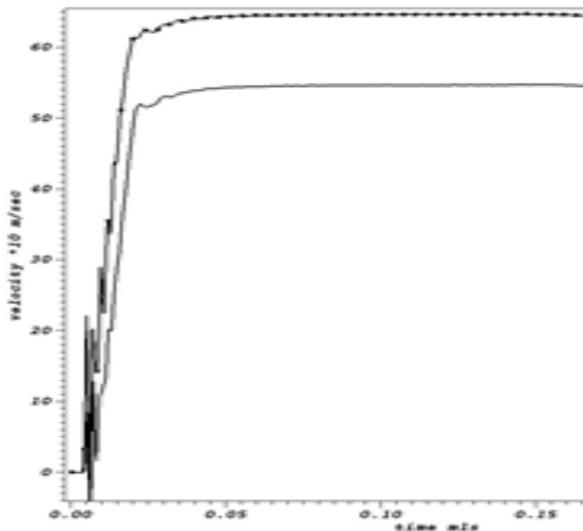


Рис.69

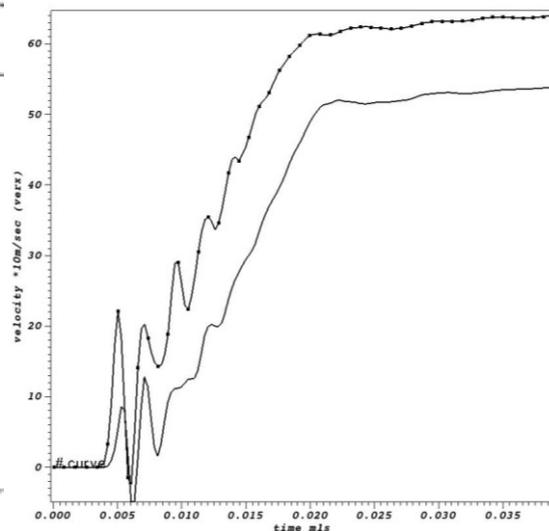


Рис.70

#### 4.3.3. Верификация трехмерной численной методики на основе сравнения скоростей и остаточных форм, полученных по двумерной методике.

Для сравнения была решена задача о разгоне цилиндрического тела вдоль оси симметрии под действием взрыва сферического заряда ВВ при помощи программного комплекса UPSGOD-

2D [31] в двумерной постановке. Механические характеристики, геометрические размеры цилиндра и заряда ВВ аналогичны вышеприведенным в п.4.3.1 и п.4.3.2. Полученные результаты сравнения иллюстрируют рис.71-72. На рис.71 изображены временные зависимости скорости перемещения в трех точках цилиндрического тела, расположенных на его оси симметрии. Сплошной линией отмечены результаты трехмерных расчетов, пунктиром – осесимметричный случай. Остаточные формы тела в центральном его сечении приведены на рис.72.

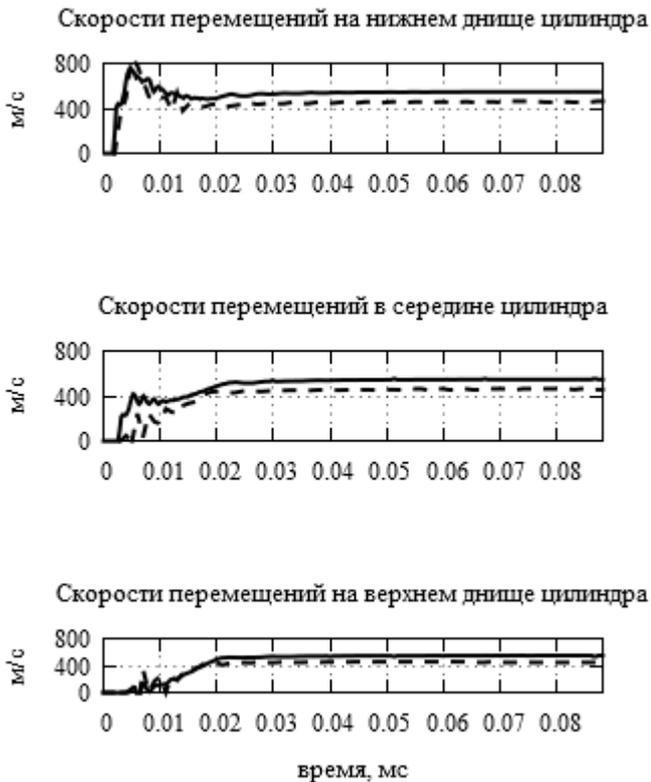
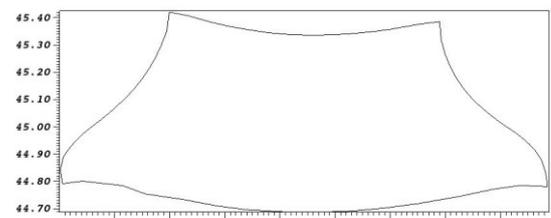
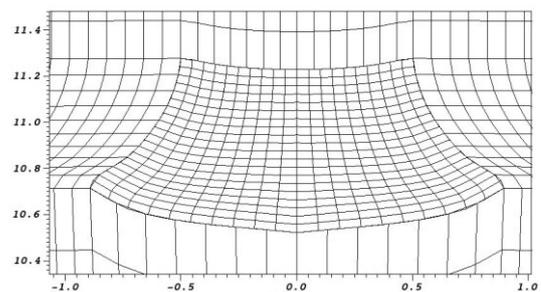


Рис.71



3D случай



2D случай

Рис.72

В целом наблюдается удовлетворительное количественное и качественное соответствие представленных данных. Имеющиеся различия могут быть отнесены помимо различных алгоритмов (размерности задач и способов описания движения контактных границ), так и за счет различных сеточных аппроксимаций в проведенных вычислениях. Физические поля (в частности скорости) в двумерных расчетах относятся к центрам ячеек разностных сеток, а в пространственных вычислениях используются распадные значения на соответствующих гранях.

**4.3.4. Влияние начальной геометрии и характера деформирования на разгон тел одинаковой массы.**

Рассматривался разгон деформируемых тел в форме кубиков из стали. Постановка задачи и материалы ВВ и стали идентичны пункту 4.3.1. Размеры ячеек по ВВ, воздуху и стали совпадают с аналогичными из пункта 4.3.1. Расчеты проводились как с учетом упругопластического поведения материала кубика, так и только в упругой постановке. На рисунках 73 приведены скорости центра масс от времени этого кубика (цифра 1) и кубика, в начальный момент расположенного ребром на поверхности заряда (цифра 2), это средний кубик на рис.53, остаточные формы на рис. 74. Сплошными линиями отмечены упругопластические тела, пунктирными – упругие (расчет без учета пластических свойств). Скорости, рассчитанные в упругой постановке значительно (до 30%) меньше скоростей, рассчитанных с учетом пластического характера деформирования. Также существенно влияние начальной ориентации кубиков относительно поверхности заряда на процессы деформирования и разгона.

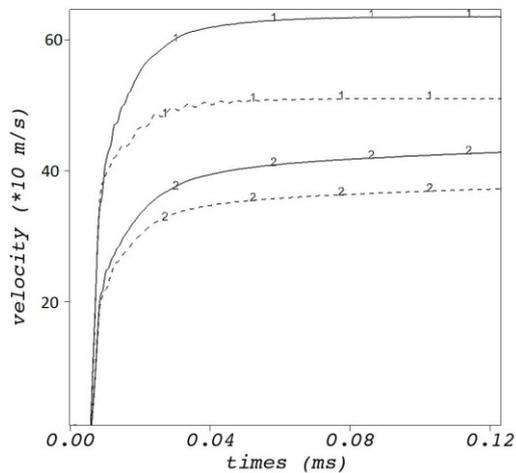


Рис.73

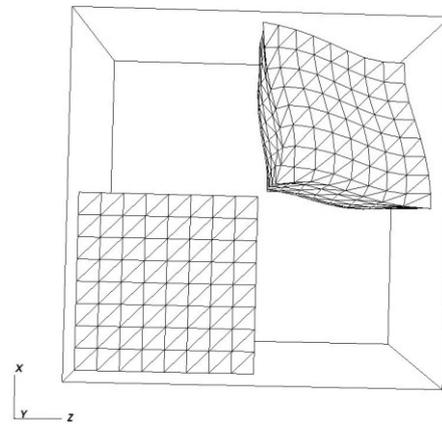


Рис.74

Рассматривался также разгон этим зарядом тел различной формы, но одинаковой массы 0.92 грамм из той же стали. Это тетраэдры со стороной 1см, диски диаметром 1см, высотой 0.15 см и кубики со стороной 0.49 см, расположенные в тех же точках на поверхности заряда.

На рис.75 приведены зависимости скоростей центров масс от времени для диска (кривая 1), тетраэдра (кривая 2) и кубика (кривая 3), разгоняемых вдоль вертикальной оси. Сплошной и пунктирной линиями отмечены расчеты в упругопластической и упругой постановках. Очевидна существенная зависимость скорости, как от начальной геометрии разгоняемых тел, так и от учета необратимого деформирования в процессе разгона. Как было отмечено и выше, упругопластические тела различной формы так-же приобретают большую скорость, чем упругие. Это вызвано увеличением площади нагружаемой поверхности рассмотренных тел вследствие пластического деформирования и соответственно увеличением контактных сил при разгоне. На рис. 76,77,78 изображены остаточные формы этих тел.

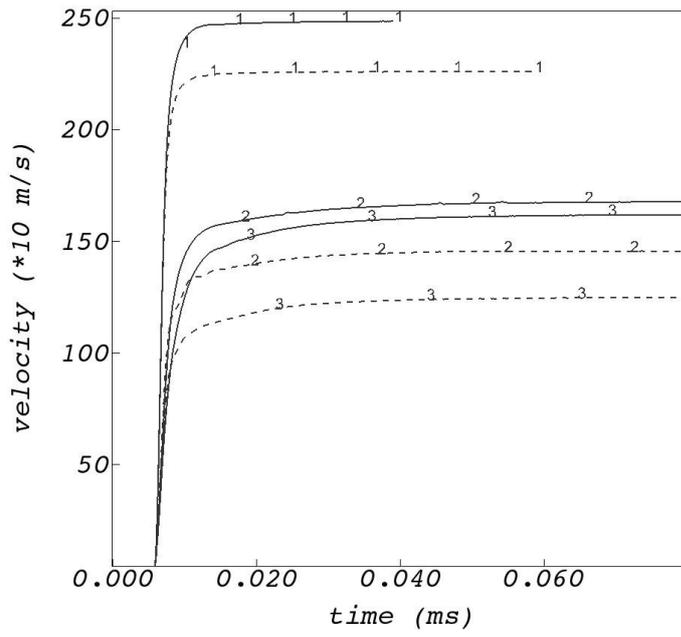


Рис.75

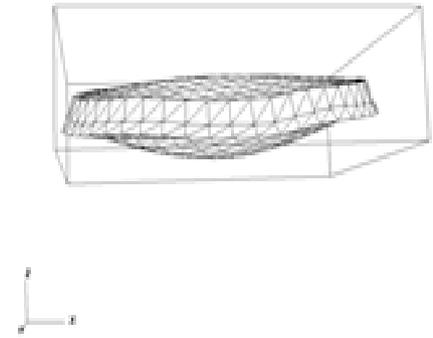


Рис.76

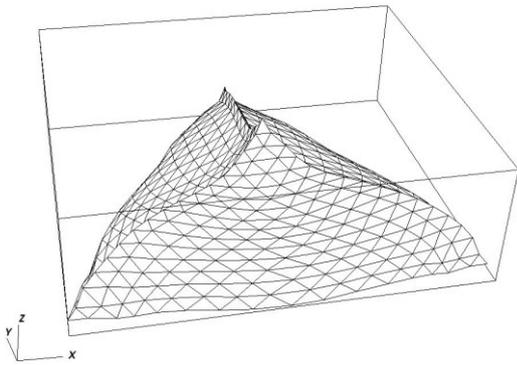


Рис.77

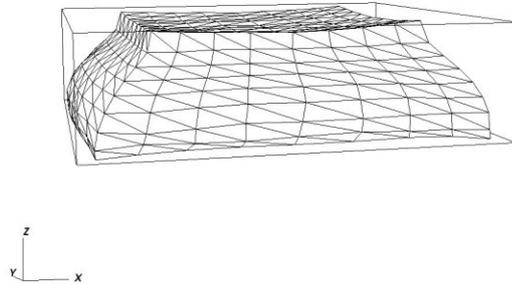


Рис.78

#### 4.4. Выводы по главе

Решены задачи внутреннего и внешнего взрывного нагружения различных трехмерных элементов конструкций. Выявлено, что положение области инициирования детонации существенно влияет на процесс расширения продуктов детонации с формированием ударных фронтов и последующим воздействием на конструкции. Максимальные нагрузки при несимметричной инициации сферических зарядов наблюдаются в направлении распространения детонационной волны от точки инициации.

Результаты расчетов взрывного нагружения толстой стальной трубы, допускающей осесимметричную постановку, по общей трехмерной методике практически совпали с результатами расчетов по ранее разработанной осесимметричной методике, что подтверждает работоспособность трехмерной методики. Соответствие численных и экспериментальных результатов свидетельствует о достоверности используемых численных моделей и разработанной трехмерной методики расчета процессов распространения детонации, расширения продуктов взрыва в воздух, контактного взаимодействия и деформирования упругопластических элементов конструкций. На характер газодинамического течения и деформирования элементов конструкции при близком положении заряда к конструкции существенно влияет положение области инициирования заряда.

При моделировании процессов разгона продуктами взрыва деформируемых тел кубической и цилиндрической формы одинаковой массы, установленных на сферический заряд ВВ, инициируемый в центре, выявлены следующие закономерности:

1. процесс разгона тел продуктами взрыва длится порядка 15 мкс (сопоставимо с временем обтекания тел продуктами детонации) и происходит на расстоянии до 1.5 радиуса ВВ, в это время тела получают максимальные остаточные деформации, поперечные размеры тел при этом увеличиваются до двух раз;
2. начальная геометрия и положение тел по отношению к детонационной волне существенно влияют на скорость и деформирование тел, тело в форме куба ускоряется до скорости на 20% больше, чем в форме цилиндра той же массы;
3. скорость продуктов детонации достигает максимума и устанавливается при разлете до 2 радиусов заряда и для рассмотренных ВВ достигает 6.2 км/с, что, практически, на порядок превосходит скорость тел;
4. возможно образование кумулятивных струй в процессе обтекания нескольких тел продуктами детонации;

5. остаточные пластические деформации оказывают существенное влияние на процесс разгона тел, за счет увеличения поперечного сечения тел возможно увеличение скорости разгона до 30%;
6. сравнение расчетов разгона цилиндрического тела с результатами, полученными по двумерному комплексу UPSGOD, показало работоспособность и достаточную точность разработанной методики решения трехмерных задач.

## Заключение

Разработана численная методика решения трехмерных задач взрывного нагружения элементов упругопластических конструкций. Методика позволяет моделировать процессы распространения детонации в твердых ВВ при их инициировании в произвольных областях и в различные моменты времени. Учитываются большие перемещения и деформации элементов конструкций. Точно выделяется граница «газ – упругопластическое тело». В силу близости термодинамических свойств, граница «продукты детонации – воздух» не выделяется, для воздуха используется то же JWL уравнение состояния продуктов детонации. Для задания геометрии рассчитываемых объектов и трехмерных разностных сеток достаточно задать поверхности этих объектов в виде непрерывного набора треугольников (стандартных STL-файлов) с помощью распространенных CAD-систем типа SOLID WORK, AUTOCAD или КОМПАС и размера кубической ячейки разностной сетки, на которой происходит интегрирование уравнений.

Для описания процессов распространения детонации, динамики газодинамических и упругопластических сред используются уравнения динамики сплошных сред. Для численного интегрирования этих уравнения применяется единая модифицированная схема С.К. Годунова повышенной точности на эйлеровых неподвижных и эйлерово-лагранжевых сетках с использованием многосеточных алгоритмов. Одна из сеток состоит из наборов непрерывных треугольников для границ каждой среды (в формате STL), задающих поверхности взаимодействующих сред, вторая сетка - основная декартова неподвижная сетка из прямоугольных параллелепипедов, третий вид сеток - локальные подвижные регулярные декартовы сетки, привязанные к каждому треугольнику поверхности среды. Для доопределения параметров на различных сетках используется процедура интерполяции.

В рамках численной методики:

- разработан алгоритм, уточняющий численное решение задачи распада разрыва «газ – упругое тело» и повышающий аппроксимацию схемы на границе до второго порядка точности без потери монотонности и устойчивости;
- разработан алгоритм расчета процедуры распада разрыва в продуктах детонации, описываемых уравнением состояния типа JWL с приведением этого уравнения к уравнению состояния идеального газа с переменным показателем адиабаты;
- разработан алгоритм моделирования трехмерных процессов распространения детонации в твердом ВВ с известной установившейся скоростью детонации на основе принципа Гюйгенса (лучевая модель распространения детонации).

Решение тестовых задач показало эффективность разработанной методики решения трехмерных задач взрывного нагружения деформируемых конструкций в эйлеровых переменных с точностью, сопоставимой с решениями, получаемых с помощью программных продуктов, использующих лагранжевые и эйлерово-лагранжевые подходы.

Получены результаты численных исследования взаимодействия взрывных волн с жесткими и упругопластическими элементами конструкций.

- На задаче взрыва в конечном цилиндрическом объеме показана существенная нелинейность процессов, приводящая к тому, что нагрузка на стенки оболочки формируется в результате многократных отражений и взаимодействий ударных волн. Показано значительное влияние положения области инициирования заряда ВВ на процесс формирования ударных волн.
- На задаче взрыва в деформируемой открытой с торцов трубе шарового заряда, почти полностью заполняющего сечение трубы, показана существенная разница в протекании газодинамических и деформационных процессах при различных областях инициации. При осесимметричной инициации полученные данные практически совпадают с экспериментальными, что показывает достоверность нелинейного численного решения.
- При моделировании процессов взрывного разгона деформируемых тел сферическим зарядом, выявлены зависимости скорости разлета от начальной геометрии тел, от положения тел по отношению к поверхности заряда, а также характера деформирования тел.

Разработанные алгоритмы и методики могут быть распространены на задачи моделирования быстропротекающих процессов взаимодействия не только газ – упругопластическое тело, но и газ – жидкость, жидкость – упругопластическое тело, упругопластическое тело – упругопластическое тело при больших деформациях и перемещениях в эйлеровых переменных. Представляется перспективным разработка программного продукта, аналогичного или превосходящего по возможностям LS DYNA, ALE3D, EUROPLEXUS и т.д. с более удобным интерфейсом пользователя, по сути исключаящим этап генерации сложных трехмерных сеток, связанных с границами расчетных подобластей.

## Список литературы

1. Абузяров К.М. О задаче распада разрыва для расчета контактного взаимодействия жидкость - упругое тело. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4-4. С. 1338-1339. (материалы X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики проходил в Нижнем Новгороде 24-30 августа 2011 года).
2. Абузяров К.М., Абузяров М.Х., Зефирова С.В. Численная методика определения взрывных нагрузок в эйлеровых переменных на пространственные конструкции при детонации твердых взрывчатых веществ. Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76. № 4. С. 326-334.
3. Abuziarov K.M., Abuziarov M.H., Kochetkov A.V. 3D FLUID STRUCTURE INTERACTION PROBLEM SOLVING METHOD IN EULER VARIABLES BASED ON THE MODIFIED GODUNOV SCHEME. Materials Physics and Mechanics. 2016. Т. 28. № 1-2. С. 1-5
4. Абузяров К.М. Метод распада разрывов в трехмерной динамике упругопластических сред Проблемы прочности и пластичности, 2020 №82 (3) С. 5-17
5. Абузяров К.М., Абузяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В., Маслов Е.Е., Романов В.И.. Численное моделирование трехмерных процессов разгона упругопластических тел взрывом. Проблемы прочности и пластичности, Изд-во ННГУ 2018 №80 (2), С. 255-266. (Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ №16-08-00458а, №17-308-50008 мол\_нр). [http://www.unn.ru/pages/e-library/ppp/18149146\\_2018\\_-80-2\\_unicode/8.PDF](http://www.unn.ru/pages/e-library/ppp/18149146_2018_-80-2_unicode/8.PDF)
6. Абузяров К.М., Абузяров М.Х., Глазова Е.Г., Зефирова С.Ф., Кочетков А.В., Крылов С.В., Литвинчук С.Ю. 3D комплекс для определения взрывных нагрузок при детонации твердых ВВ на подвижные жесткие тела в эйлеровых переменных. Сборник материалов IV Всероссийской научно-технической конференции «Фундаментальные основы баллистического проектирования», Санкт-Петербург, 23-28 июня 2014, С126-127.
7. Абузяров К.М., Абузяров М.Х. 3D-комплекс для решения нелинейных задач взаимодействия газожидкостных сред с деформируемыми твердыми телами. XIX Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2015), Алушта, Крым, 23-21 мая 2015. Сборник материалов, С. 32-34.
8. Абузяров К.М., Абузяров М.Х. Решение трехмерных контактных нелинейных задач динамики сплошных сред в эйлеровых переменных на основе метода С.К. Годунова. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа 2015г., С.9 (Эл.версия С.56-58).

9. Абузьяров К.М., Абузьяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Методы и коды решения трехмерных контактных задач в эйлеровых переменных. Тезисы докладов XI Международной научно-практической конференции STAR Russian Conference 2016, Нижний Новгород, 17-18 мая 2016, С.22.
10. Абузьяров К.М., Абузьяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Численное моделирование взрывных нагрузок в зависимости от области инициирования заряда. В сборнике: Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). Алушта, Крым, 25-31 мая 2016. Изд. МАИ, С. 118-119.
11. Абузьяров К.М., Абузьяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. 3D Численное моделирование ударно-волнового нагружения упругопластических конструкций в эйлеровых переменных. Тезисы докладов XVI Международной конференции «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 3-7 октября 2016, С.14
12. Абузьяров К.М., Абузьяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Численное моделирование взрывного нагружения упругопластических конструкций в эйлеровых переменных. Тезисы докладов V международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, 17-19 октября 2016. С. 10-11.
13. Абузьяров К.М., Абузьяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Методика численного решения трехмерных нелинейных задач нестационарной аэроупругости. Тезисы докладов XII Международной научно-практической конференции STAR Russian Conference 2017, Нижний Новгород, мая 2017, С.17.
14. Абузьяров К.М., Абузьяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Численное моделирование метания твердых деформируемых тел продуктами детонации. В сборнике: Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным системам (ВМСППС'2017), Алушта, Крым, 24-31 мая 2017. С. 172-173.
15. Абузьяров К.М., Абузьяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Численное моделирование пространственного динамического деформирования оболочечных конструкций при внутреннем взрывном нагружении. В книге: Тезисы докладов VI Международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической

природы» Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). Москва, 08-10 ноября 2017 г., изд. ООО "ТР-принт" (Москва), С. 9-10.

16. Abuziarov K.M., Abuziarov M.H., Kochetkov A.V. Modeling of three-dimensional processes of internal shockwave loading of thick-walled elastoplastic shells. 36th International Scientific Conference of Eurasian Scientific Association (February 2018). Modern concepts of scientific research // Scientific articles collection of the 36th International Scientific Conference of Eurasian Scientific Association (Moscow, February 2017). - Moscow : ESA, 2018, С.1-4.
17. Абузяров К.М., Абузяров М.Х., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В. Численное моделирование трехмерных процессов взаимодействия упругопластических тел с продуктами детонации в Эйлеровых переменных (Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 16-08-00458а, 17-308-50008 молн\_нр). В сборнике: Материалы XII Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), Алушта, Крым, 24-31 мая 2018. С. 305-307.
18. Зельдович Я.Б. Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / – М.: «Наука»,. 1966. – 686 с.
19. Физика взрыва. Под ред. Л.П. Орленко. М.: Физматлит, 2002. 832 с.
20. А Андреев С. Г., Бойко М. М., Селиванов В. В. ; ред. Селиванов В. В. - М. : Физматлит, 2013. - 751 с.
21. Селиванов В. В., Кобылкин И. Ф., Новиков С. А. Взрывные технологии : учебник для вузов / - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. - 518 с.
22. Ионов В.Н., Селиванов В.В. Динамика разрушения деформируемого тела.// М., Машиностроение, 1987, 272с.
23. Ахмадеев Н.Х. Динамическое разрушение твердых тел в волнах напряжений. УФА, БФАН СССР, 1988,- 168с.
24. *Mader C.L.* Numerical modeling of detonations, University of California Press, Berkeley, CA, 1979.
25. Райнхарт Д., Пирсон Д. Поведение материалов при импульсных нагрузках. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
26. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений //Вычислительные методы в гидродинамике / М.: Мир, 1967. С. 212-263.
27. Герасимов А.В. Численное моделирование откольных разрушений в толстостенных оболочках при различных схемах нагружения// ПМТФ, 1996, т.37, №3,с.151-159.
28. Левитан Ю.Л. Моисеенко Б.Д. Численное моделирование разрушения упругих оболочек детонационной волной, М., 1990, (Препр./АН СССР, ИПМ, №5).

29. Костин В.В., Резцов А.С., Сурак С.Т., Фортов В.Е., Численное моделирование взрывного разрушения толстостенных цилиндров. Минск, 1990. (Препр. /АН БССР, Ин-т тепло и массообмена.).
30. Абузяров М.Х., Крылов С.В., Цветкова Е.В. Моделирование упругопластического взаимодействия с помощью программного комплекса UPSGOD. Проблемы прочности и пластичности. 2013. Вып. 75(1). С. 25–32.
31. Абузяров М.Х. Численное моделирование детонации и воздействия газокумулятивных зарядов на преграды./ Абузяров М.Х., Кочетков А.В., Крылов С.В., Цветкова Е.В. // Выч. Мех. Сплош. Сред.-2008,-т.1,-№2, с.5-15
32. G E Fairlie, C O Marriott, N J Robertson, I H Levingstone, N K Birnbaum Computer modelling of full size fragmenting amiable warheads using AUTODYN-3D // Ballistics '98, International Symposium on Ballistics, South Africa, 23-27 March 1998/
33. Marinko Ugrcic Numerical Simulation of the Fragmentation Process of High Explosive Projectiles // Scientific Technical Review, 2013, Vol.63, No.2, pp.47-57 47.
34. Greg Fairlie, Jon Glanville, Xiangyang Quan Analysis of fragment generation from structures under extreme blast loads using Euler-Lagrange // 16th Technical Dymat Meeting October 27-28, 2005 Royal Military Academy, Belgium. pp.55-70.
35. А Ильющин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во МГУ, 1990, 310 с.
36. Саламахин Т.М., Шакин А.А. Ударные волны, возникающие при взрыве в воздухе зарядов конденсированных взрывчатых веществ. М.: изд. ВИА, 1964.
37. Расчеты взрывов на ЭВМ : газодинамика взрывов : пер. с англ. / Г. Броуд ; [под ред. В.Н. Николаевского]. М. : Мир, 1976. 272 с.
38. Чушкин П.И., Шуршалов Л.В. Численные решения задач о взрыве в газе. В кн.: Итоги науки и техн. Сер. Мех. жидк. и газа. Т. 16, М., ВИНТИ, 1981, с.3-75
39. Бабкин А.В., Колпаков В.И., Охитин В.Н., Селиванов В.В. Прикладная механика сплошных сред, Том 3, Численные методы в задачах физики быстропротекающих процессов. 2006, Москва из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006, с.521.
40. Marinko Ugrcic Numerical Simulation of the Fragmentation Process of High Explosive Projectiles // Scientific Technical Review, 2013, Vol.63, No.2, pp.47-57 47.
41. В.В. Руденко, М.В. Шабуров, Е.Е. Мешков Программный комплекс master professional – интегрированная среда визуального компьютерного моделирования процессов физики сплошных сред. Научная сессия МИФИ-2009. том 1 с.8.

42. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Нестационарный метод «крупных частиц» для газодинамических расчетов. –Журн. Вычисл. Математики и мат. Физики, 1971, 11, №1, С. 182-207.
43. Бахрах С.М., Спиридонов В.Ф., Шанин А.А. Метод расчета газодинамических течений неоднородной среды в лагранжево-эйлеровых переменных.//ДАН, 1984, т. 276, №4,с.829-833.
44. С. К. Годунов, “Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики”, Матем. сб., 47(89):3 (1959), 271–306.
45. Численное решение многомерных задач газовой динамики / Под ред. С.К. Годунова. М.: Наука, 1976.
46. Комплекс программ ЭГАК. Газодинамические разностные схемы в эйлеровых переменных. /Шанин А. А., Янилкин Ю. В. //Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1993. Вып.1.. С. 24-30.
47. Комплекс программ ЭГАК. Лагранжево-эйлерова методика расчета двумерных газодинамических течений многокомпонентной среды. /Дарова Н. С., Дибиров О. А., Жарова Г. В., Шанин А. А., Янилкин Ю. В. //Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 1994. Вып.2. С. 51-58.
48. Комплекс программ ЛЭГАК для расчета нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы реализации комплекса на многопроцессорных эвм с распределенной памятью. /П.А. Авдеев, М.В. Артамонов, С.М. Бахрах, С.В. Величко, Н.А. Володина, Н.М. Воробьева, С.П. Егоршин, Е.Н. Есаева, А.Д. Ковалева, М.В. Лучинин, С.Н. Проневич, В.Ф. Спиридонов, И.Ю. Тарадай, А.Н. Тарасова, Е.В. Шувалова. //Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов 2001. Вып.3. С. 14-18.
49. Комплекс программ ЭГАК++ для моделирования на адаптивно-встраивающейся дробной счетной сетке./ Ю.В. Янилкин, С.П. Беляев, А.В. Городничев, Е.Г. Воронов, А.Р. Гужова, Л.И. Дегтяренко, Г.В. Жарова, П.А. Кучерова, А.Л. Стадник, Н.А. Ховрин.// Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов 2003. Вып.1. С. 20-28.
50. Методика ЛЭГАК-3D расчета трехмерных нестационарных течений многокомпонентной сплошной среды и принципы ее реализации на многопроцессорных ЭВМ с распределенной памятью./ С. М. Бахрах, С. В. Величко, В. Ф. Спиридонов, П. А. Авдеев, М. В. Артамонов, Е. А. Бакулина, И. Ю. Безрукова, В. В. Борляев, Н. А. Володина, А. О. Наумов, Н. Э. Огнева, Т. В. Резвова, А. А. Резяпов, С. В. Стародубов, И. Ю. Тарадай, А. П. Тихонова, К. В. Циберев, А.

- А. Шанин, М. О. Ширшова, Е. В. Шувалова. //Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов 2004. Вып.4. С. 41-50.
51. Исследование влияния счетных параметров при численном моделировании процесса взрывчатого превращения ВВ по кинетике МК в методике ЛЭГАК. /Н. А. Володина, И. Ю. Мышкина, В. Ф. Спиридонов.//Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов 2010. Вып.2. С. 3-14.
  52. Бондаренко Ю. А. Свойства решений при счете нормальной детонации навязыванием энерговыделения с заданной скоростью фронта / / Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2009. Вып. 1. С.3-18.
  53. Методы численного моделирования детонации и горения вв в эйлеровых газодинамических расчетах./ Ю. В. Янилкин, И. И. Карпенко, Е. С. Гаврилова, Л. И. Дегтяренко, Е. А. Маврина, О. О. Топорова. //Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2011. Вып.3. С. 16-28.
  54. Бахрах С. М., Краснов В. Н., Цыкин С. В., Шавердов С. А. Расчетное исследование перехода горения тэна во взрыв в рамках модели с выделенным фронтом горения // ФГВ. 1996. Т. 32, № 32. С. 96-107.
  55. J. O. Hallquist. LS-DYNA Theory Manual. LSTC, Livermore Software Technology Corporation. 7374 Las Positas Road; Livermore CA 94551 (USA), Aug. 2015.
  56. L. Schwer, "A Brief Introduction to coupling Load Blast Enhanced with Multi-Material ALE: The best of both worlds for air blast simulation", 9th LS-DYNA Forum, Bamberg, 2010.
  57. L. Gilson, J. Van Roey, C. Gueders, J. Gallant, L. Rabet, "A simple coupling of ALE domain with empirical blast load function in LS-DYNA", DYMAT 2012 conference, Freiburg,
  58. E. Lee, C. Tarver, Phenomenological model of shock initiation in heterogeneous explosives, Phys. Fluids 23 (1980) 2362.
  59. AUTODYN-2D & 3D User Documentation, Century Dynamics, 2005.
  60. E. Pierazzo, 14 colleagues Validation of numerical codes for impact and explosion cratering: Impacts on strengthless and metal targets./ Meteorit. Planet. Sci., 43 (2008), pp. 1917-1938.
  61. EUROPLEXUS User's Manual, on-line version: <http://europlexus.jrc.ec.europa.eu>.
  62. <https://ec.europa.eu/jrc/en/scientific-tool/europlexus-simulation-software>
  63. Experiments and Simulations of Explosives: Shock Wave Propagation around a Convex Structure /N. Van Dorselaer, S. Eveillard, S. Trélat 15th International LS-DYNA Users Conference June 10-12, 2018
  64. Туник Ю.В. Детонационное горение водорода в сопле Лавалия с центральным коаксиальным цилиндром // Изв. РАН. МЖГ. 2014. №5. С.142-148.

65. Туник Ю.В. Численное моделирование детонационного горения водородовоздушных смесей в сопле Лавая // Изв. РАН. МЖГ. 2010. №2. С.107-114.
66. Афолина Н.Е., Громов В.Г., Левин В.А., Мануйлович И.С., Марков В.В., Смехов Г.Д., Хмелевский А.Н. Исследование запуска кольцевого сопла в натурной и виртуальной импульсной аэродинамической установке // Изв. РАН. МЖГ. 2016. № 2. С. 158-165.
67. О.Б. Бочарова, М.Г. Лебедев, И. В. Попов, В. В. Ситник, И. В. Фрязинов, "Отражение ударной волны от оси симметрии в неравномерном потоке с образованием циркуляционной зоны", *Матем. моделирование*, 25:8 (2013), 33–50; *Math. Models Comput. Simul.*, 6:2 (2014), 142–154
68. Колган В.П., Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972, Т. 3. № 6. 68 - 77.
69. Копченков В.И., Крайко А.Н. Монотонная разностная схема второго порядка для гиперболических систем с двумя независимыми переменными //Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. № 4. 848 - 859.
70. Крайко А.Н., Тилляева Н.И., Щербаков А. Сравнение интегральных характеристик и формы профилированных контуров сопел Лавая с "плавным" и "внезапным" сужением // Изв. АН СССР. МЖГ. - 1986. - № 4. - 129-137.
71. Родионов А.В. Повышение порядка аппроксимации схемы К. Годунова // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 12. 1853 - 1860.
72. Моисеев Н.Я. Об одном способе повышения точности решений в разностных схемах, построенных на основе метода К.Годунова //ВАНТ, серия: Методики и программы числ. решения задач мат. физики 1988, вып. 1.-С. 38-45.
73. Van Leer, B. "Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method". *J. Comput. Phys.* 1979. V.32.P. 101–136.
74. Colella P. and Woodward P. The Piecewise Parabolic method for Gas-Dynamical Simulations.// *J. Comp. Phys.* 1984. V.54. P. 174 - 202.
75. Ofengeim, D. K., & Drikakis, D. (1997). Simulation of blast wave propagation over a cylinder. *Shock Waves*,7, 305–317
76. A. Benselama, M.-P. William-Louis, M. Francois, A 1D–3D mixed method for the numerical simulation of blast waves in confined geometries, *J. Comput. Phys.*228 (2009) 6796–6810.
77. Adel M. Benselama, Mame J.-P. William-Louis, François Monnoyer, Christophe Proust. A numerical study of the evolution of the blast wave shape in tunnels *Journal of Hazardous Materials*, Volume 181, Issues 1–3, 2010, pp. 609-616

78. A hybrid formulation for the numerical simulation of condensed phase explosives L.Michael, N.Nikiforakis. *Journal of Computational Physics* 316(2016)193–217
79. A multi-physics methodology for the simulation of the two-way interaction of reactive flow and elastoplastic structural response. L.Michael, N. Nikiforakis. *J. Comput. Phys.* 367 (2018) 1–27.
80. Абузьяров М.Х., Баженов В.Г., Кочетков А.В. О новом эффективном подходе к повышению точности схемы Годунова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения. Всес. межвуз. сб. Горьк..1987. С.43-49.
81. Абузьяров М.Х., Баженов В.Г., Кочетков А.В. О монотонизации схемы Годунова второго порядка точности введением схемной вязкости // ПППП. Исследование и оптимизация конструкций: Всесоюз. межвуз. сб. / Горький: Изд-во ГГУ. 1987. С. 85-90.
82. Абузьяров М.Х. О повышении точности схемы Годунова для решения задач гидрогазодинамики // XIII конференция молодых ученых Московского физико-технического ин-ститута, т.2. с.30-37, 1988.
83. Моделирование взаимодействия ударных волн с деформируемыми газонепроницаемыми преградами / М.Х. Абузьяров, Е.Г. Глазова, А.В. Кочетков, С.В. Крылов, В.И. Романов, М.А. Сырунин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2010. Вып. 72. С. 120-129.
84. Люкшин Б.А., Герасимов А.В., Крестулева Р.А., Люкшин П.А. Моделирование физико-механических процессов в неоднородных конструкциях. –Новосибирск.: Изд-во СО РАН, 2001. 272 с.
85. Теоретические и экспериментальные исследования высокоскоростного взаимодействия тел. / Под ред. А.В. Герасимова. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 572с.
86. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989.
87. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел.- Казань, ДАС, 2001, 301 с.
88. Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г. Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций. Монография. – Н. Новгород: Издательство Нижегородского государственного университета, 1999. 226 с.
89. Капустин С.А. Метод конечных элементов в задачах механики деформируемых тел. Учебное пособие. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 180 с.
90. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред. //Успехи механики. 1985. Т. 8. №4. С. 21-65.
91. Абросимов Н.А., Баженов В.Г., Кибец А.И., Садырин А.И., Чекмарев Д.Т. Нелинейные задачи динамики конструкций// Математическое моделирование. 2000. Т. 12. N. 6. С. 47-50.

92. Фомин В.М., Ческидов П.А. Упругопластическая модель пористой среды, насыщенной газом // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. ИТПМ. 1982. С. 33–39.
93. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2008. – 424 с.
94. Фомин В.М., Гулидов А.И., Садырин А.И. и др. Высокоскоростное взаимодействие тел // Новосибирск: Изд-во СО РАН. 1999. 600 с.
95. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций //Изв. РАН МТТ, 2001, №5, С. 156-173.
96. Чебан В. Г., Руссу И. В. Численные методы решения задач динамической теории упругости. Кишинев: Штинница, 1976.
97. Чебан В. Г., Руссу И. В. Численный метод решения задачи об упругом ударе тонкой прямоугольной пластины о жесткую преграду // Прикладная математика и программирование. Кишинев, 1974. Вып. 4.
98. Римский В. К. Сравнительная характеристика численных методов решения контактных задач динамической теории упругости // Математические методы в механике. Кишинев, 1980. С. 98–110.
99. Навал И. К., Римский В. К. Численный анализ распространения упругих волн в кусочно-однородном слое // Математические методы в механике. Кишинев, 1980. С. 69–76.
100. Магомедов К. М., Холодов А. С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
101. Демидов В.Н., Корнеев А.И. Численный метод расчета упругопластических течений с использованием подвижных разностных сеток. Томск, 1983. Деп. в ВИНТИ 1983, № 2924-83.
102. Афанасьев СБ., Козлов Е.А. Алгоритм решения двумерных волновых упругопластических задач методом Годунова // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация исследований. Горький: ГГУ, 1987. С. 91-100.
103. Метод распада разрывов в динамике упругопластических сред / М.Х. Абузьяров, В.Г. Баженов, В.Л. Котов и др. // ЖВМ и МФ. 2000. Т. 40, №6. С. 940–953.
104. S.L. Gavriluk, N. Favrie, R. Saurel, Modelling wave dynamics of compressible elastic materials, J. Comput. Phys. 227(5) (2008) 2941–2969.
105. Афанасьев С.Б., К решению одномерной задачи о распаде разрыва в упругопластической среде // ПППП. Методы решения задач упругости и пластичности. Всесоюз. Межвуз. сб.. Горький: ГГУ, 1979. С. 107-114.

- 106.Афанасьев С.Б., Баженов В.Г. О построении разрывных решений одномерных уравнений динамики упругопластических сред // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Горький: ГГУ, 1980. С.76-83.
- 107.Афанасьев С.Б., Баженов В.Г. О численном решении одномерных нестационарных задач упругопластического деформирования сплошных сред методом Годунова // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности. Горький: ГГУ: 1985.С. 59-65.
- 108.Афанасьев С.Б., Автомодельное решение задачи о распаде разрыва в упругопластической среде // Прикл. пробл. прочности и пластичности. Методы решения. Горький: ГГУ, 1990. С. 40-46.
- 109.G. Miller, P. Colella, A high-order Eulerian Godunov method for elastic–plastic flow in solids, J. Comput. Phys. 167(1) (2001) 131–176.
- 110.H. Miller, An iterative Riemann solver for systems of hyperbolic conservation laws, with application to hyperelastic solid mechanics, J. Comput. Phys. 193(1) (2004) 198–225
- 111.P.T. Barton, D. Drikakis, E. Romenski, V.A. Titarev, Exact and approximate solutions of Riemann problems in non-linear elasticity, J. Comput. Phys. 228(18) (2009) 7046–7068.
112. I. Menshov, P. Zakharov, "On the composite Riemann problem for multi-material fluid flows", Int. J. Numer. Meth. Fluids, 76:2 (2014), 109-127 crossref MathSciNet
113. И. С. Меньшов, А. В. Мищенко, А. А. Сережкин Численное моделирование упругопластических течений методом Годунова на подвижных эйлеровых сетках // Мат. МОД., 25 (2013), 89-108
- 114.Кукуджанов В.Н. Метод расщепления упругопластических уравнений // МТТ. 2004. №1. С. 98–108.
- 115.Abouziarov M., Aiso H., Takahashi T. An application of conservative scheme to structure problems // Series from Research Institute of Mathematics of Kyoto University. Mathematical Analysis in Fluid and Gas Dynamics. 2004. № 1353. P. 192-201.
- 116.Abouziarov, H. Aiso, An application of retroactive characteristic method to conservative scheme for structure problems (elastic-plastic flows).//Hyperbolic Problems, Theories, Numerics, Applications. Tenth International Conference in Osaka. September 2004, Copiright 2006 by Yokohama Publishers,Inc. p. 223-230.
- 117.Абузьяров М.Х., Барабанов В.Н., Кочетков А.В. Моделирование взрывных воздействий на деформируемые тонкостенные преграды. // Проблемы прочности и пластичности. Н.Новгород. Изд-во ННГУ. Вып. 73. 2011. С.69-76.

- 118.Абузьяров М.Х., Барабанов В.Н., Кочетков А.В., Крылов С.В. Моделирование взрывных воздействий на деформируемые тонкостенные проводники //Сборник трудов XIII Международной семинар «Супервычисления и математическое моделирование». Саров, 2011.
- 119.Абузьяров М.Х., Барабанов В.Н., Кочетков А.В., Крылов С.В. Моделирование взрывных воздействий на деформируемые тонкостенные проводники //XIII Международной семинар «Супервычисления и математическое моделирование». Тезисы доклада. Саров, 2011. С.14-15.
- 120.Абузьяров М.Х., Зефирова С.В., Кочетков А.В., Крылов С.В. О перспективном 3D комплексе для решения задач динамики сплошных сред в эйлеровых переменных на базе модифицированной схемы Годунова // XII Международной семинар «Супервычисления и математическое моделирование», Саров, 11-15 октября 2010, Сборник тезисов докладов. С.8-9.
- 121.М.Х.Абузьяров, Е.Г.Глазова, С.В.Зефирова, А.В.Кочетков, С.В.Крылов. О 3D программном комплексе для решения задач динамики сплошных сред с большими формоизменениями // STAR 2011 Международная научная конференция «Компьютерные технологии решение прикладных задач тепломассопереноса и прочности». Н.Новгород, 17-18 мая 2011г. С.17-18.
- 122.Вендон D.J. Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes // Comput. Method. Appl. M. - 1992. - V. 99, No 2-3. - P. 235-394.
- 123.Mair H. U. Review: hydrocodes for structural response to underwater explosions // Shock Vib. - 1999. - V. 6, No 2. - P. 81-96.
- 124.Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Изв. РАН. МТТ. - 2005. - № 1. - С. 45-87.
- 125.А. А. Аганин, Т.С. Гусева Численное моделирование контактного взаимодействия сжимаемых сред на эйлеровых сетках // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2012, т.154, кн.4, с.74-99.
- 126.Garimella R., Dyadechko V., Swartz B., Shashkov M. Interface reconstruction in multi-fluid, multi-phase flow simulations // Proc. 14th Int. Meshing Roundtable. - Springer, 2005. - P. 19-32.
- 127.A multi-physics methodology for the simulation of reactive flow and elastoplastic structural response. L.Michael, N.Nikiforakis//Journal of Computational Physics 367(2018)1–27.
- 128.Glimm J., Li X.L., Liu Y.-J., Xu Z.-L., Zhao N. Conservative front tracking with improved accuracy // SIAM J. Num. Analysis. - 2003. - V. 41, No 5. - P. 1926-1947.
- 129.Abgrall R., Karni S. Computations of compressible multifluids // J. Comput. Phys. - 2001. - V. 169, No 2. - P. 594-623.
- 130.Garimella R.P. Fedkiw, T. Aslam, B. Merriman, S. Osher, A non-oscillatory Eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method), J.Comput. Phys. 152(2) (1999) 457–492.

131. B. Howell, G. Ball, A free-Lagrange augmented Godunov method for the simulation of elastic-plastic solids, *J. Comput. Phys.* 175 (1) (2002) 128-167.
132. P.T. Barton, D. Drikakis, An Eulerian method for multi-component problems in non-linear elasticity with sliding interfaces, *J. Comput. Phys.* 229 (15) (2010) 5518-5540.
133. S. Schoch, K. Nordin-Bates, N. Nikiforakis, An Eulerian algorithm for coupled simulations of elastoplastic-solids and condensed-phase explosives, *J. Comput. Phys.* 252 (2013) 163-194.
134. S.K. Sambasivan, H. Udaykumar, Ghost fluid method for strong shock interactions. Part 1: fluid-fluid interfaces, *AIM J.* 47 (12) (2009) 2907-2922.
135. L. Michael, N. Nikiforakis, A hybrid formulation for the numerical simulation of condensed phase explosives, *J. Comput. Phys.* 316 (2016) 193-217.
136. Abouziarov M. On accuracy increasing of Godunov's method for nonlinear problems of continuum mechanics. // *Godunov's method for gas dynamics: Current Applications and Future Developments, A Symposium Honoring S.K. Godunov, May 1-2, 1997, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan*
137. Цыпкин В.И., Иванов А.Г., Минеев В.Н., Шитов А.Т. Влияние масштаба, геометрии и заполняющей среды на прочность стальных сосудов при внутреннем взрывном нагружении. // *Атомная энергия, Том 41, вып.5, ноябрь 1976, С. 303-308.*
138. Особенности построения методики расчёта на сетках типа «Химера» для неструктурированных сеток // *Мат. Моделирование. 2017. том 29:2, 106-118.*
139. Метод свободной границы для численного решения уравнений газовой динамики в областях с изменяющейся геометрией. *Матем. моделирование, 2014, том 26, номер 5, 99–112.*
140. Седов Л.И. МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ТОМ 1 М.: Наука, 1970 г.
141. Взрывные явления. Оценка и последствия // в 2 т., под редакцией Зельдовича Я.Б., Москва, «МИР» 1986
142. Годунов С.К. Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978 г.