МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»
(НИИМ Нижегородского университета)

На правах рукописи

Петраков Егор Владимирович

ОПТИМАЛЬНОЕ ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

01.02.06 - Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор,
Баландин Дмитрий Владимирович

Нижний Новгород – 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4

ГЛАВА 1. ОБЗОР ПРОБЛЕМ И МЕТОДОВ ГАШЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ 9

1.1 Методы виброзащиты 11

1.2 Виброизоляция 14

1.3 Динамический гаситель колебаний 20

1.4 Связывающие методы гашения колебаний многоэтажных сооружений 24

1.5 Компактные методы гашения колебаний распределенных систем 25

1.6 Общие характеристики активного и пассивного управления 27

1.7 Использование теории управления в задачах гашения 29

1.8 Исполнительные и измерительные устройства активной виброзащиты 33

1.9 Итоги главы 1 36

ГЛАВА 2. ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИСТЕМ 37

2.1 Постановка задачи двухкритериального гашения для одномассового объекта при неопределенном возмущении 37

2.2 Общая постановка задачи многокритериального гашения для много-массовой системы при неопределенном возмущении 41

2.3 Использование теории управления и линейных матричных неравенств в задачах гашения колебания 45

2.4 Обобщенная $H2$ −норма и $H\infty$ − норма для задач гашения колебаний 49

2.5 Двухкритериальная задача гашения в терминах обобщенной $H2$ − нормы .. 57

2.6 Процессы гашения колебаний сосредоточенных систем 61

2.7 Программа ЭВМ для расчета оптимального гибридного динамического гасителя колебаний 65

2.8 Двухкритериальная задача гашения многоэтажного сооружения 68

2.9 Итоги главы 2 73

ГЛАВА 3. ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ 74

3.1 Колебания распределенных систем 74

3.2 Виброизоляция балки 79

3.3 Задача гашения методом связной виброизоляции 82

3.4 Распределенный динамический гаситель колебаний для балки 89

3.5 Пьезоэлектрические материалы в задачах гашения колебаний 91

3.6 Использование изгибных пьезоэлектрических слоев как распределенных динамических гасителей колебаний 93

3.7 Задача гашения колебаний балки изгибным пьезоэлектрическим слоем с различной формой электродов 97

3.8 Итоги главы 3 102

Заключение 103

Список литературы 104

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Опыт строительства и эксплуатации высотных сооружений, мостов и путепроводов свидетельствует о необходимости применения различных устройств и систем виброзащиты. Наибольший интерес представляют системы, обеспечивающие гашение колебаний при действии ветровых, сейсмических и технологических нагрузок. Актуальность проблемы возрастает в связи с увеличением размеров конструкции, повышением быстроходности и скоростных характеристик машин, ужесточением санитарных и технологических норм к допустимым уровням колебаний. В современных конструктивных решениях нельзя повысить виброзащиту, только изменив геометрию и материалы объекта, так как конструкция может быть более прочной, но при этом не обязательно экономически эффективной, потому что и масса, и инерционная нагрузка могут увеличиться еще больше. Существует потребность в новых эффективных методах виброзащиты.

Степень разработанности темы

В шестидесятых годах прошлого столетия возникло новое направление в исследовании виброзащиты. Одним из основателей этого направления был М.З. Коловский, который начал широко использовать методы теории управления для исследования виброзащитных систем. При большом многообразии используемых в настоящее время виброизоляционных устройств можно выделить три крупных класса таких устройств: пассивные, полуактивные и активные. Пассивные средства виброзащиты более привлекательны из-за простоты технической реализации, большей надежности и отсутствия дополнительных энергозатрат, однако существенным их недостатком являются весьма ограниченные возможности виброзащиты в широком диапазоне внешних нагрузок. Активные системы имеют гораздо больше возможностей по защите конструкций от вредных динамических воздействий. Однако при этом они становятся существенно более сложными устройствами и, следовательно, более дорогими, а зачастую и менее надежными. В свете сказанного на практике приходится искать определенный компромисс между стоимостью и надежностью, с одной стороны, и качеством виброзащиты, с другой стороны.

В настоящее время усилия ученых направлены на создание систем активного и полуактивного гашения колебаний, на что указывает увеличивающееся число публикаций специалистов зарубежных стран. Российский опыт создания систем активного или полуактивного гашения колебаний высотных сооружений отсутствует. Поэтому тема диссертационной работы является актуальной и своевременной.

Работа опирается на труды известных авторов в области динамического гашения и гашения колебаний механических систем: А.Ю. Ишлинского, М.З. Коловского, С.П. Тимошенко, Б.Г. Коренева, Л.М. Резникова, Н.Н. Болотника, Б.А. Гордеева, В.И. Ерофеева, А.Н. Крылова, Д.В. Баландина, М.М. Когана, B.F. Spencer и др.

Цель работы

Разработка методов, алгоритмов и программного обеспечения для решения задач оптимального гашения колебаний сосредоточенных и распределенных систем по различным критериям при действующих возмущениях из заданного класса.

Задачи работы

На основе сформулированной выше цели рассматривались следующие задачи:

1. Постановка задачи гашения колебаний распределенных систем как многокритериальной задачи управления по состоянию линейного стационарного динамического объекта.
2. Решение поставленной задачи при помощи обобщенной H_2 -нормы и техники линейных-матричных неравенств.
3. Поиск оптимальных по Парето множеств решений для задач гашения распределенных и сосредоточенных нагрузок.
4. Анализ эффективности пассивной и активной виброизоляции.
5. Исследование возможных вариантов реализации активных систем гашения и применения на практике.

Научная новизна

1. Поставлена и решена задача о предельных возможностях виброзащиты в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами для класса внешних воздействий.
2. Решена двухкритериальная задача гашения колебаний консольной балки с помощью безмассового активного динамического гасителя.
3. Решена двухкритериальная задача оптимального гашения колебаний систем с распределенными параметрами с помощью пьезоэлектрических актюаторов.

Теоретическая значимость

С использованием двухкритериального подхода и теории H_2-оптимизации разработана методика оценивания предельных возможностей гашения колебаний механических систем с распределенными и сосредоточенными параметрами.

Практическая значимость

Результаты диссертационной работы могут быть использованы при проектировании виброзащитных систем, используемых в строительных конструкциях, транспортных средствах и высокоточных производствах.

Методология и методы диссертационного исследования

- Используются методы теоретической механики и теории колебаний; модель Бернулли-Эйлера, метод нормальных форм, функция Крылова
- Для описания поведения пьезоэлектрических материалов используется уравнения Мэзона
- Методы теории управления, техника линейных матричных неравенств
- В задачах двухкритериальной оптимизации используется свертка Гермейера
- Расчеты выполнены в ПП Matlab

Основные положения, выносимые на защиту

1. Поставлена задача гашения колебаний распределенных систем как многокритериальная задача управления по состоянию линейного стационарного динамического объекта.

2. Приведено решение поставленной задачи при помощи обобщенной H_2-нормы и техники линейных-матричных неравенств.
3. Представлены оптимальные по Парето множества решений для задач гашения колебаний распределенных и сосредоточенных систем.
4. Приведено сравнение эффективности пассивной и активной виброизоляции.
5. Проведено исследование возможных вариантов реализации активных систем гашения и применения на практике.

Степень достоверности результатов

Использование корректных математических методов теории колебаний и теории управления для анализа математических моделей и синтеза законов управления.

Апробация полученных результатов

Основные результаты были представлены на следующих научных мероприятиях:

1. XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Казань, 20-24 августа, 2015 г.
2. VII Всероссийский конкурс молодых ученых «Итоги диссертационных исследований» Миасс, 8-11 октября, 2015 г.
3. Всероссийская конференция молодых ученых-механиков, Сочи, 5-15 сентября, 2017 г.
4. X Всероссийская конференция «Нелинейные колебания механических систем» им. Ю.И. Неймарка, Нижний Новгород, 26-29 сентября 2016 г.
5. Международная научная конференция “Проблемы прочности, динамики и ресурса”, Нижний Новгород, 25 – 29 ноября 2019 г.

Публикации

Основные результаты исследований диссертации опубликованы в 10 публикациях 3 из них [27, 28, 36] опубликованы в ведущих научных журналах (ВАК) и 1 статья [43] – в журналах, индексируемых в международных базах цитирования Scopus и Web of Science, в прочих изданиях опубликованы 5 публикаций [1, 13, 25, 26, 35].

Зарегистрирована программа для ЭВМ [7] охранный документ № 2018612922 «Библиотека программ, для расчета гибридного динамического гасителя колебаний»

Личный вклад автора

Разработка математических моделей [27,28], алгоритмов [36], программного обеспечения [36], численное моделирование и анализ результатов [27, 28, 36, 43] принадлежит автору.

В совместных работах научному руководителю Дмитрию Владимировичу Баландину принадлежит постановка задачи и идея использования обобщенной H_2 −нормы [36].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, содержит 109 страницы, 47 рисунков, 97 литературных источников.

Диссертационная работа выполнена при поддержке:

Результаты разделов 1.5 и 3.5 выполнены при поддержке гранта федеральной целевой программы (№ 14.578.21.0246), раздел 2.4 выполнен при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (№ 16-01-00606), результаты раздела 2.7 и зарегистрированная программа для ЭВМ (охранный документ № 2018612922) выполнены при поддержке гранта федеральной целевой программы (№14.578.21.0110), результаты раздела 3.3 выполнены при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (№18-41-520002). Результаты разделов 3.6 и 3.7 выполнены при поддержке Государственного задания Минобрнауки России (№ 0729-2020-0054).

ГЛАВА 1. ОБЗОР ПРОБЛЕМ И МЕТОДОВ ГАШЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ

Проблема уменьшения или гашения колебаний является следствием научного технического прогресса. Актуальность проблемы непрерывно возрастает в связи с увеличением размеров конструкции, повышением быстроходности и скоростных характеристик машин, ужесточением санитарных и технологических норм к допустимым уровням колебаний. Несмотря на предложенное значительное число технических решений, направленных на снижение колебаний, известно более 100 запатентованных конструкций виброзащиты синтеза систем, обеспечивающих эффективную виброзащиту и обладающих ограниченными габаритами. При этом поиск методов гашения остается актуальной задачей до сих пор, аналогично обстоит ситуация и с алгоритмами гашения.

В современных конструктивных решениях нельзя повысить виброзащиту, только изменив геометрию и материалы объекта, так как конструкция может быть более прочной, но при этом не обязательно экономически эффективной, потому что и масса, и инерционная нагрузка могут увеличиться еще больше.

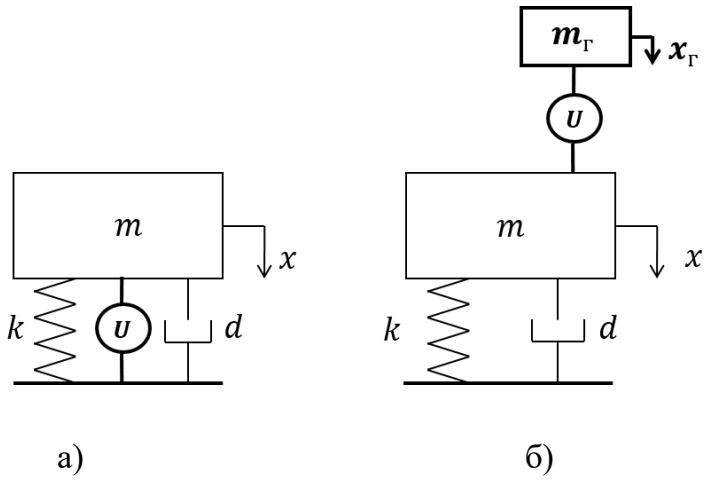


Рисунок 1.1 - Схематичное обозначение: а) виброизоляции объекта, б) приложение динамического гасителя колебаний к объекту

Существует два принципиально различных подхода к виброзащите: виброизоляция и динамическое гашение колебаний. В первом случае защищаемый объект изолируется от виброактивного источника посредством специальных устройств, называемых изоляторами (рис.1.1 (а)). Во втором случае к

виброактивному источнику прикладываются дополнительные силовые воздействия с целью уменьшения амплитуды его колебаний (рис. 1.1 (б)). Ниже приводится более полное подробное описание этих подходов.

Рост интеграции виброизоляции и динамических гасителей колебаний в защищаемых конструкций не уменьшает потребность в новых эффективных методах виброзащиты не только для глобальных объектов, как здания, например, но и для малогабаритных объектов, как, например, элементы высокоточного производства. В прошлом десятилетии появились новые и интересные методы гашения: связные методы виброзащиты зданий (рис. 1.2 (б)) и распределенные динамические гасители (рис. 1.2 (а)), про которые мы более подробно поговорим в конце главы.

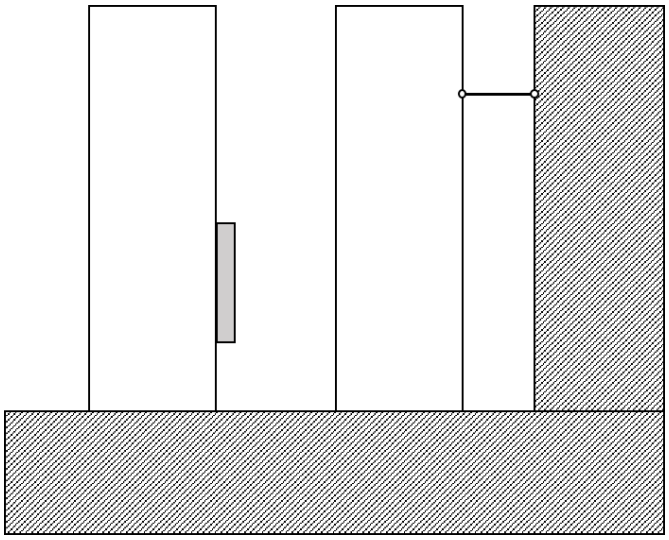


Рисунок 1.2 - Схематичное обозначение: а) рассматриваемого объекта, б) приложенного распределенного гасителя, в) связанного с соседним зданием

Кроме выбора метода виброзащиты для защищаемого объекта возникает вопрос о выборе активного или пассивного метода управления, то есть функционирующих либо за счет дополнительных источников энергии, либо за счет механической энергии самой системы, существуют так же полуактивные (гибридные), но в этой работе эта тема подниматься не будет. Пассивные методы управления более привлекательны из-за простоты технической реализации и отсутствия дополнительных энергозатрат, однако существенным их недостатком является ограниченные возможности виброзащиты в широком диапазоне частот.

Существенное повышение эффективности виброзащиты возможно за счет применения систем активного управления (САУ). Использование дополнительной энергии дает возможность реализации более сложных законов управления, вследствие чего достигаются лучшие результаты. На первый план здесь выходят задачи синтеза активного управления.

Использование активных, полуактивных и пассивных методов гашения получило большой толчок в последние 20-25 лет. Одним из первых понятий полуактивного управления в механических системах было предложено в [63], где была представлена идея стабилизировать генератор с одной степенью свободы, перемещающейся на неровной площадке. Алгоритм “Skyhook”, разработанный автором [73], является сегодня одним из наиболее широко используемых в системах управления подвески для транспортных средств. Идея была первоначально разработана, чтобы улучшить комфорт пассажиров. Управляемые гасители, используются также для сейсмической изоляции [76,77]. В [56], авторы предложили управлять демпфированием и параметрами жесткости. В [75], авторы предложили использовать меняющуюся жесткость, при помощи пьезоэлектрических элементов актюатора, чтобы управлять упругой балкой на подвижном основании. А в [80] был предложен электромеханический актюатор переменной жесткости для человекоподобных роботов. Электромагнитный синхронизированный гаситель выключателя был разработан в [61], чтобы увеличить особенности демпфирования упругой балки, подвергающихся динамическим грузам. В новых публикациях мы можем найти решения, обеспечивающих снижение вибрации и энергии для автономного управления [94].

В случае использования активного управления задача гашения становится задачей теории управления, таким образом необходимо выбрать оптимальное управление исходя из постановки задачи и приложенного возмущения.

1.1 Методы виброзащиты

Для понимания особенностей методов виброзащиты рассматривается произвольная механическая система (рис. 1.3), с приложенными динамическими нагрузками $F_i(t),\ i = \overline{1,s}$ в точках $B_i,\ i = \overline{1,s}$. Кинематические изменения системы

представляют собой перемещения некоторых точек A_i, $i = \overline{1,n}$, зависящие от времени $\varepsilon_i(t), i = \overline{1,n}$.

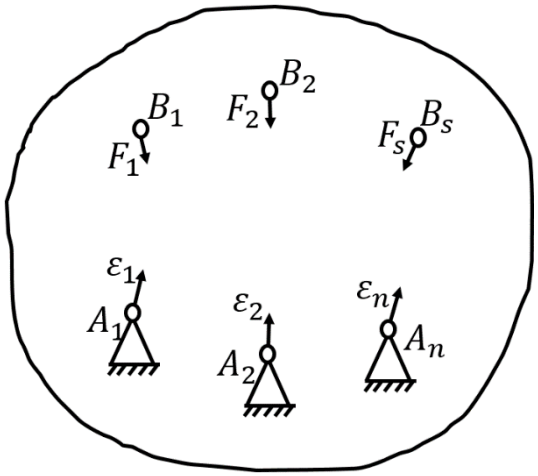


Рисунок 1.3- Механическая система

Если перемещение материальных точек системы вызванные динамическими нагрузками носят колебательный характер, то говорят, что в этой системе возникает вибрационное поле перемещений. Аналогично при этом обозначается так же поля скоростей, ускорений, усилий и т.д. и т.п. Во многих областях техники существует необходимость в снижении интенсивности вибрационных полей, т. е. в уменьшении амплитудных или средних значений тех или иных характерных параметров поля. Устройства, предназначенные для снижения интенсивности вибрационных полей, называются виброзащитными системами.

Существуют два основных метода виброзащиты. Первый метод состоит в следующем: к защищаемому объекту (рис. 1.3) присоединяются другие механические системы (рис. 1.4), параметры которых выбираются так, чтобы минимизировать вибрационное поле перемещений основной системы. Такой способ виброзащиты называется динамическим гашением, а присоединяемые системы — динамическими гасителями.

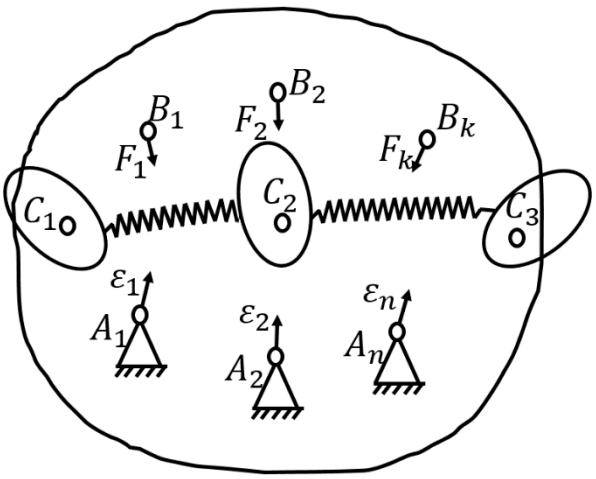
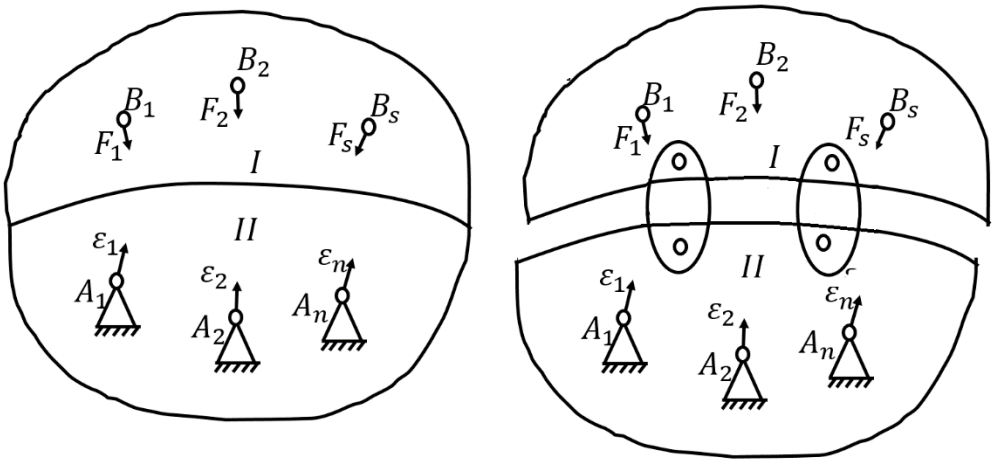


Рисунок 1.4- Механическая система с присоединенными динамическими гасителями колебаний

Второй метод заключается в разделении исходной системы на две части (рис. 1.5, а) и в соединении этих частей дополнительными механическими системами (рис. 1.5, б). Этот метод называется виброизоляцией или амортизацией, а устройства, соединяющие две части системы — виброизоляторами или амортизаторами. Обычно при разделении системы одна из ее частей оказывается «свободным» телом, не соединяющимся с какими-либо другими системами (часть I на рис. 1.5, а); эту часть принято называть амортизируемым или защищаемым объектом, а вторую, связанную с другими телами, — основанием или несущим телом.



а) б)

Рисунок 1.5- Механическая система с виброизоляторами

Если динамические нагрузки приложены к основанию, то целью амортизации является защита амортизирующего объекта, если же воздействия приложены непосредственно к объекту, то амортизаторы обеспечивают защиту основания. До недавнего времени было принято в первом случае говорить о “пассивной” амортизации, а во втором – об “активной”. Однако в последние годы, как было сказано выше, эти термины используются совсем в ином смысле; поэтому в дальнейшем мы будем говорить об амортизации основания или амортизации объекта (и соответственно об амортизаторах основания или амортизаторах объекта), указывая тем самым какая часть механической системы защищается от динамических нагрузок.

Помимо перечисленных методов, виброзащита может осуществляться за счет непосредственно уменьшения динамических нагрузок или изменение конструкции защищаемого объекта или основания, но данные способы не связаны с использованием специальных виброзащитных устройств в дальнейшем нам не интересны. [17]

1.2 Виброизоляция

Идея виброизоляции была реализована еще в средневековье. Так, при строительстве среднеазиатских минаретов в фундаменты укладывались специальные «камышовые пояса» или подушки из сыпучего материала. Однако теория виброизоляции получила развитие только в последние 20-25 лет [32]. Первые работы в этой области были направлены на снижение инерционных сейсмических нагрузок путем снижения периода основного тона колебаний сооружения. Рассмотрение нормативных графиков коэффициентов динамичности, приведенных в нормах различных стран, показывает, что амплитуды спектральных кривых по мере увеличения периода собственных колебаний убывают. Это обстоятельство послужило причиной многочисленных предложений, обеспечивающих низкочастотную настройку сооружений вообще, и к применению разнообразных систем их виброизоляции в особенности.

Спектр применения методов виброизоляции очень широк – от высокоточного производства, до использования в основании небоскребов, наиболее известным

применением является использования устройств виброизоляции (амортизаторов, пружин и демпферов) в автомобилях для уменьшения амплитуды колебаний кузова из-за неровностей профиля дороги. Получается, что механическая система, состоящая из тела, установленного на основании, может служить моделью для широкого класса инженерных задач, включая устройства на машинах, судах, самолетах, космических аппаратах, автомобилях, мотоциклах, локомотивах и др. Теперь рассмотрим модель виброизоляции для гашения колебаний одномассового объекта, уравнение энергии и диссипативная функция Рэлея имеет вид:

$$E = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + k_0x^2 + K_0x^2);\ R = \frac{1}{2}(d_0\dot{x}^2 + D_0\dot{x}^2) \qquad (1.1)$$

где $K_0, D_0 -$ жесткость и вязкость виброизоляции.

Математическая модель виброизоляции одномассового объекта:

$$\ddot{\overline{x}} + (D + d)\dot{\overline{x}} + (K + k)\overline{x} = ve^{iwt} \qquad (1.2)$$

где $K + k = \frac{K_0+k_0}{m}$, $D + d = \frac{D_0+d_0}{m}$ $-$ безразмерная жесткость и вязкость виброизоляции. Амплитуда защищаемого объекта вычисляется как:

$$X = \frac{v}{-w^2 + iw(d + D) + k + K}$$

Для наглядности влияния методов виброзащиты сравним амплитудно-частотные характеристики незащищенного объекта, объекта при приложении виброизоляции и приложении к объекту динамического гасителя колебаний (рис. 1.6) становятся очевидны различия результатов в случае использования методов: виброизоляция уменьшает амплитуду колебаний, а ДГК производит отстройку защищаемого объекта с резонансной частоты, тем самым минимизируя амплитуду на заданной частоте. Об эффективности методов не идет речь, так как методы решают от части различные задачи.

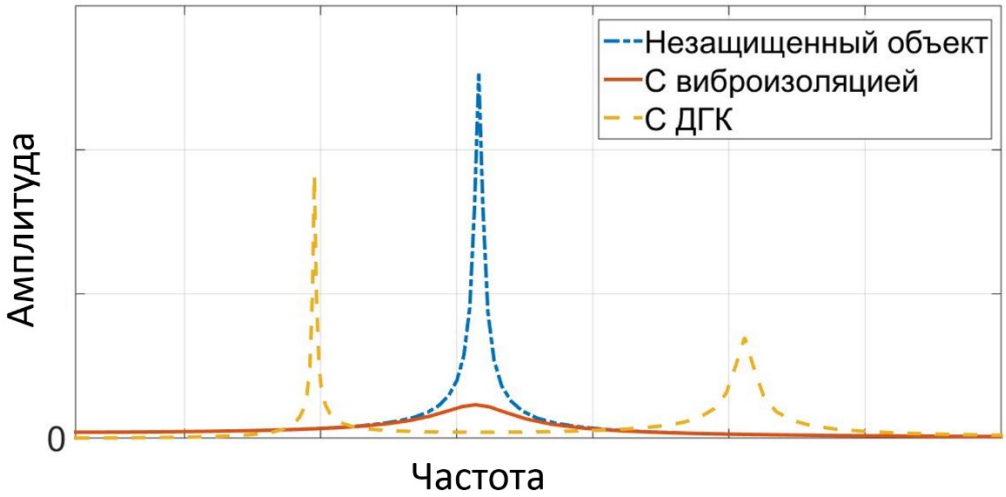


Рисунок 1.6 – Амплитудно-частотная характеристика системы при различных методах гашения

Как правило, виброизолирующее устройство располагается между фундаментом здания и его первым этажом. Сами системы виброизоляции представлены различными конструкциями опор, которые по сути дела имеют заданную величину жесткости и демпфирования. Зачастую, эти величины подбираются из соображения ослабления резонанса на первой моде собственных частот колебания здания. Подавляющее большинство конструкций пассивного типа, т.е. работают за счет механической энергии самой системы. Такое положение дел можно объяснить ключевой особенностью систем виброизоляции, а именно необходимостью принимать на себя весь вес здания, что может достигать несколько сотен тысяч тонн. Такие высокие статические нагрузки предъявляют серьезные требования к качеству эластичных материалов, поскольку под большим давлением многие из них могут менять свои свойства.

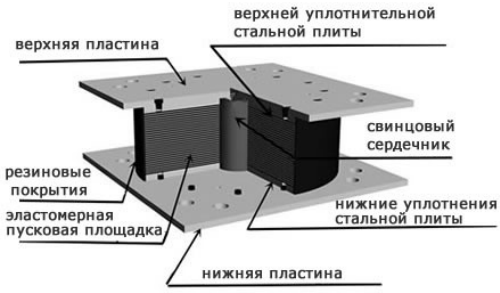


Рисунок 1.7 - Резинометаллическая опора, реализованная китайской компанией Dacheng

В России для зданий, построенных в сейсмоопасных районах, в последнее время большую популярность приобрели т.н. резинометаллические опоры (HDRB) [69, 92](рис. 1.7). В качестве последних примеров можно привести результаты работы ЦНИИСК (Центральный научно-исследовательский институт строительных конструкций имени В.А. Кучеренко) на объектах города Сочи, построенных к зимней Олимпиаде 2014 года. На сегодняшний день в нашей стране более 600 строительных объектов построено с применением принципов виброизоляции, что является третьим по численности результатом после Японии и Китая в мире. Совсем свежие технические идеи и их реализация в устройствах пассивной, активной и полуактивной виброизоляции описаны в работах [50, 51, 55, 81, 84]. Еще одна интересная техническая идея состоит в соединении двух и более близко расположенных различной высоты зданий виброизоляторами [12, 57, 87].

В качестве примеров успешной реализации систем виброзащиты строительных конструкций укажем систему сейсмоизоляции атомной станция в Кёберге, Южная Африка (Рис. 1.8) и Армянской АЭС. Несколько заданий со скользящим поясом построено в г. Фрунзе. Проведенные натурные испытания подтвердили работоспособность данных систем.

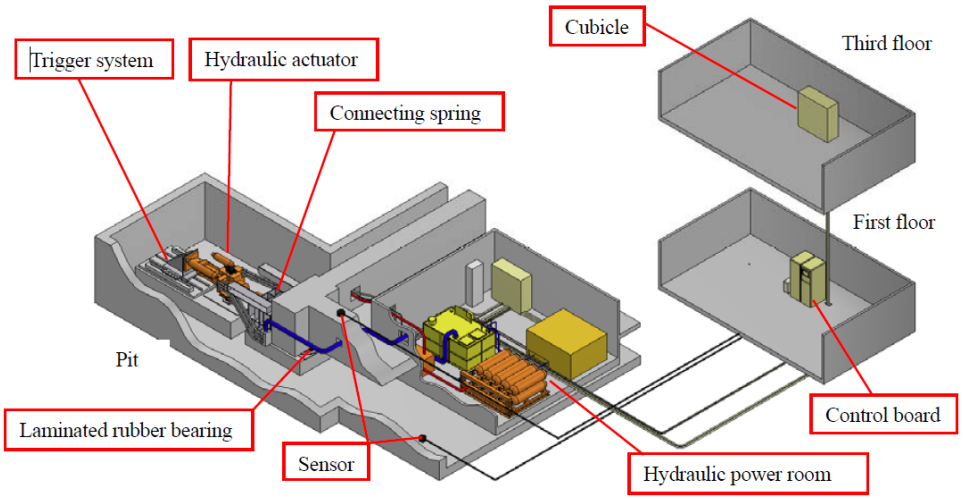
Рисунок 1.8 – Сейсмоизолированная атомная станция в Кёберге (Южная Африка)

В шестидесятые годы прошлого столетия возникло новое направление в исследовании противоударной и вибрационной изоляции, трактующее изоляторы как управляющие устройства, генерирующие силу между основанием и защищаемым объектом. Одним из основателей этого направления был М.З. Коловский [17], который начал широко использовать методы теории управления для

исследования виброзащитных систем. При большом многообразии используемых в настоящее время виброизоляционных устройств можно выделить три крупных класса таких устройств: пассивные, полуактивные и активные.

И если пассивные виброизоляторы используются достаточно давно, то активная виброизоляция впервые была введена в эксплуатацию в 2010 году производства Японии - Laputa 2D, разработанная Obayashi. Эта система работает по принципу гибридной виброизоляции, т.е. применяется гидравлический исполнительный механизм с гидроцилиндрами и пассивными резинометаллическими изоляторами. По приведенным характеристикам система может снижать колебательную активность здания относительно фундамента в 50 раз, достигается это благодаря системе активного управления: сенсоры измеряют смещение первого этажа относительно основания, после чего информация поступает на компьютер, которая через 1/1000 секунды рассчитывает необходимое усилие, вырабатывающееся гидроцилиндрами уже через 0.1 секунды [95, 96].

а)



б)

Рисунок 1.9 -Место приложения к а) зданию гибридной системы гашения б) Laputa 2D

На данный момент известны разнообразные способы борьбы с вредными колебаниями конструкций, такие как: балансировка, уравновешивание машин, являющихся источниками динамических нагрузок, изменение прочностных и инерционных параметров системы для отстройки от резонансов, повышение демпфирующих свойств конструкции при помощи использования материалов и конструкций с высокой поглощающей способностью, например, специальных покрытий, применение виброизоляции и разнообразных гасителей колебаний. Каждый из упомянутых способов имеет, естественно, свою рациональную область применения. Гасители в этом перечне занимают особое место потому что их использование может быть предложено не только на стадии проектирования и создания конструкций, но и в случае, когда неудовлетворительные динамические качества конструкции выявлены уже в процессе ее эксплуатации. Так же достоинством гасителей является то, что при сравнительно малых затратах дополнительного материала они позволяют относительно просто получить нужный эффект уменьшения уровня колебаний. [18]

1.3 Динамический гаситель колебаний

Динамическим гасителем колебаний (ДГК) называют устройство, в котором возникает сила инерции, уменьшающая уровень колебаний защищаемой конструкции. В литературе встречаются и другие названия ДГК, например ’’антивибратор”, ’’динамический демпфер”, ’’виброгаситель”, ’’поглотитель колебаний”, ’’амортизатор”, в зарубежной литературе его называют “mass damper”, “tuned mass damper”, “vibration absorber” и т.п. Чаще всего ДГК выполняется в виде дополнительной массы, присоединенной с помощью упругого и демпфирующего элементов к защищаемой конструкции или непосредственно к неуравновешенной машине — источнику колебаний. Широко применяются также гасители, масса которых движется по криволинейной поверхности или подвешена как маятник. Масса гасителя представляет собой твердое тело, к которому могут присоединяться съемные грузы, упругую конструкцию или контейнер, заполненный отдельными грузами, сыпучими материалами, жидкостью. В качестве упругих элементов используются стальные пружины, резиновые элементы, упругие стержни или пластины; для рассеяния энергии применяются материалы с повышенными диссипативными свойствами (резина, различные виды пластмассы), отрезки стальных канатов, демпферы сухого трения, гидравлические, пневматические и магнитные демпферы. Гасители среди методов гашения занимают особое место потому что их использование может быть предложено не только на стадии проектирования и создания конструкций, но и в случае, когда неудовлетворительные динамические качества конструкции выявлены уже в процессе ее эксплуатации. Чаще всего цель использования ДГК – отстройка от собственных частот защищаемого объекта. В рассматриваемой задачи ДГК выполняется в виде дополнительной массы, присоединенной с помощью упругого и демпфирующего элементов к защищаемому объекту, но на практике так же применяются гасители, масса которых движется по криволинейной поверхности или подвешена как маятник. [18]

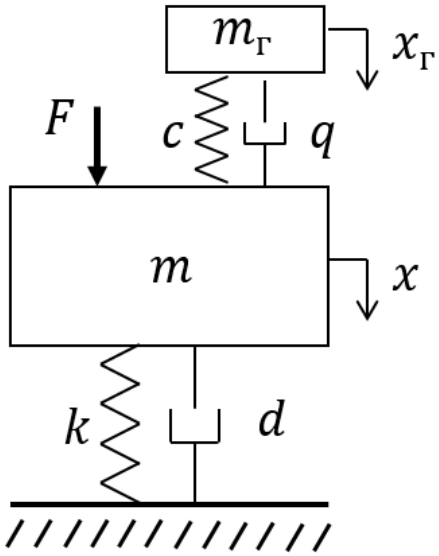


Рисунок 1.10 – Приложение динамического гасителя колебания

Пусть на тело массой m и упруго-вязкими параметрами k_0 и d_0 действует гармоническая сила (рис. 1.10). Для того, чтобы произвести отстройку с собственной частоты тела прикрепляется динамический гаситель колебаний с массой $m_г$ и искомыми параметрами жесткости и вязкости c_0 и q_0.

Энергия данной системы и диссипативная функция Рэлея описываются как:

$$E = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 + m_г\dot{x}_г^2 + k_0x^2 + c_0(x_г - x)^2);\ R = \frac{1}{2}(d_0\dot{x}^2 + q_0(\dot{x}_г - \dot{x})^2) \quad (1.3)$$

где $x, x_г, \dot{x}, \dot{x}_г$ – перемещение и скорость защищаемого объекта и гасителя

Математическая модель системы, находящейся под воздействием гармонической силы, с приложенным динамическим гасителем имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\overline{x}} + d\dot{\overline{x}} + k\overline{x} + q\left(\dot{\overline{x}} - \dot{\overline{x}}_г\right) + c(\overline{x} - \overline{x}_г) = ve^{iwt} \\ \mu\ddot{\overline{x}}_г - q\left(\dot{\overline{x}} - \dot{\overline{x}}_г\right) - c(\overline{x} - \overline{x}_г) = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

где $\overline{x}, \overline{x}_г, \dot{\overline{x}}, \dot{\overline{x}}_г, \ddot{\overline{x}}, \ddot{\overline{x}}_г$ –перемещение, скорость и ускорение защищаемого объекта и гасителя в безразмерных переменных, $\mu = \frac{m_г}{m}, d = \frac{d_0}{m},\ k = \frac{k_0}{m}, c = \frac{c_0}{m},\ q = \frac{q_0}{m}, v = \frac{F}{m}$ – параметры системы, w – вынужденная частота системы.

Установившееся частное решение ищется в форме:

$$x = Xe^{iwt}, \qquad x_{\text{г}} = Ye^{iwt}$$

Определитель системы линейных уравнений (1.4):

$$\Delta = \mu w^4 - (q + \mu d + \mu q)w^3 i - (c + k\mu + c\mu + dq)w^2 + (kq + cd)wi + kc =$$
$$= \Delta_0 - dqw^2 - (q + \mu d + \mu q)w^3 i + (kq + cd)wi$$

Амплитуды колебаний равны:

$$X = \frac{v(-\mu w^2 + c + qwi)}{\Delta}, \qquad Y = \frac{(c + qwi)v}{\Delta}$$

Из вида Δ очевидно, что знаменатель амплитуды не обращается в ноль, тем самым ограничивая амплитуду конечным значением. Но без учета трения $\Delta = \Delta_0$, то есть знаменатель обращается в ноль в конкретных значениях, тем самым создавая асимптоты для функций амплитуд при собственной частоте. Аналитически искать значение амплитуд системы с учетом трения крайне тяжело, а для случая системы состоящей из нескольких тел практически невозможно.

Аналогично виброизоляции гасители делятся на пассивные, полуактивные и активные динамические гасители колебаний. До сих пор нет окончательной ясности в выборе наилучшего метода использования динамического гасителя. Например, авторы статьи [48] предлагают использовать для сильных резонансных колебаний вместо активного гашения полуактивный или пассивный гасители. Объясняя это тем, что активный гаситель, с ограниченным выходом энергии, подавляет колебательную энергию первичной системы, а возмущения могут быть переданы и рассеяны по пассивному или полуактивному гасителю, при этом активные гасители полагаются на внешнюю энергию для подавления колебаний, для них трудно побороть сильные колебания из-за ограниченного энергетического источника. Кроме того, проблема устойчивости крайне важна для активных методов управления. Если приложение активного гашения не корректно, то активные силы управления могут возбудить, а не подавить колебания. При этом надо помнить, что из-за узкой пропускной способности эффективной частоты, традиционные пассивные гасители колебаний испытывают недостаток в допустимой упругости и адаптируемости. Однако, авторы [79] считают, что пассивные системы гашения

колебаний несовершенны, главным образом из-за технологических ограничений, например, полезной мощности или допустимого веса, а в свою очередь активное гашение колебаний, реализованное актюаторами куда более эффективно. Тем не менее, строгие ограничения препятствовали применению таких актюаторов в некоторых технических случаях. Эти ограничения касаются их высокого потребления энергии и их чувствительности к сбоям.

В последние годы активные методы управления сделали большой прорыв. Особенно, различные актюаторы из умных материалов были выдвинуты для управления колебаний, такие как пьезоматериалы, материалы с памятью формы и магнитно-реологические эластомеры и т.д. Ярчайшим примером самого крупного пассивного динамического гасителя может являться устройство, установленное в 509 метровом здании Тайбэй 101 в Тайване (рис. 1.11), построенное в 2004 году, спроектированное фирмами Thornton-Tomasetti Engineers вместе с Evergreen Consulting Engineering. Диаметр гасителя равен 5,5 метров, а вес достигает 660 тонн, относительная масса гасителя $8.5 \cdot 10^{-4}$. Гаситель обеспечивает прочность и устойчивость зданий при порывах ветра до 240 км/ч, а также при сейсмических возмущениях 6,8 баллов. Помимо этого, еще два гасителя, каждый весом 6 тонн находятся на вершине шпиля, для смягчения ветровых воздействий.[97]

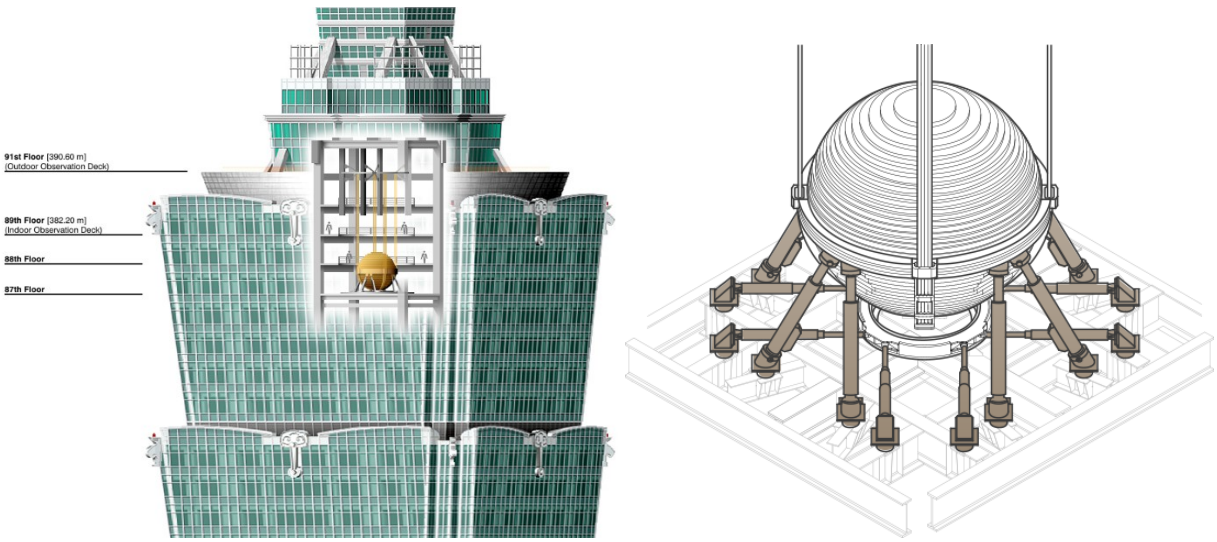


Рисунок 1.11 - Пассивный динамический гаситель в башне Taipei 101

1.4 Связывающие методы гашения колебаний многоэтажных сооружений

Существуют особые связывающие методы гашений для рядом стоящих зданий. Поскольку пространство в больших городах ограниченно, то здания расположены друг близко к другу. Для сокращения сейсмических откликов соседних зданий их соединяют гасителями, как например строительный комплекс Linked Hybrid в Пекине (рис.1.12)[47]. Исследователи предлагают различные типы устройств для соединения соседних зданий такие как пассивные гасители [46, 84, 86, 91] полуактивные гасители [53, 54, 85] и активные гасители [89, 90]. Сейчас это признанный факт, что сейсмические отклики соседних зданий могут быть снижены при помощи соединения гасителями. В частности, вязкоупругие гасители теперь широко применяются для соединения соседних зданий. В целом, демпфирование соседних зданий может быть увеличено путем соединения их вместе с вязкоупругими гасителями. Следовательно, сейсмические отклики соседних зданий могут быть уменьшены [58].

Рисунок 1.12 - Башни Linked Hybrid в Пекине

Исследования вязкоупругого гашения соединенных зданий, подвергнутых случайным возмущениям, указывают, что при больших возмущениях соединяющие гасители могут неблагоприятно увеличить отклики соседних зданий [67]. Другие исследования показывают, что соединение гасителями может уменьшить отклик только, при больших различиях между частотами связных зданий. Например,

отклики 5-этажного здания уменьшаются при связи с 25-этажным зданием вязкоупругими гасителями [93]. Далее, некоторые исследования сосредоточились на оптимизации свойств вязкоупругих гасителей дабы минимизировать энергию, которая будет рассеяна зданиями. Прикладной пример в их исследовании показывает, что среднеквадратичный отклик может быть сильно уменьшен, когда здания соединены вязкоупругими гасителями с оптимальными свойствами [60]. Чтобы минимизировать колебания соседних зданий, вязкоупругие гасители были предложены для установки на нескольких этажах (рис.1.13), а не только на одном [70]. Кроме того, в другом исследовании предлагается, чтобы здание, с фиксированным основанием и здание с виброизолированным основанием, связать вязкоупругими гасителями и этим уменьшить смещение в слое виброизоляции [10].

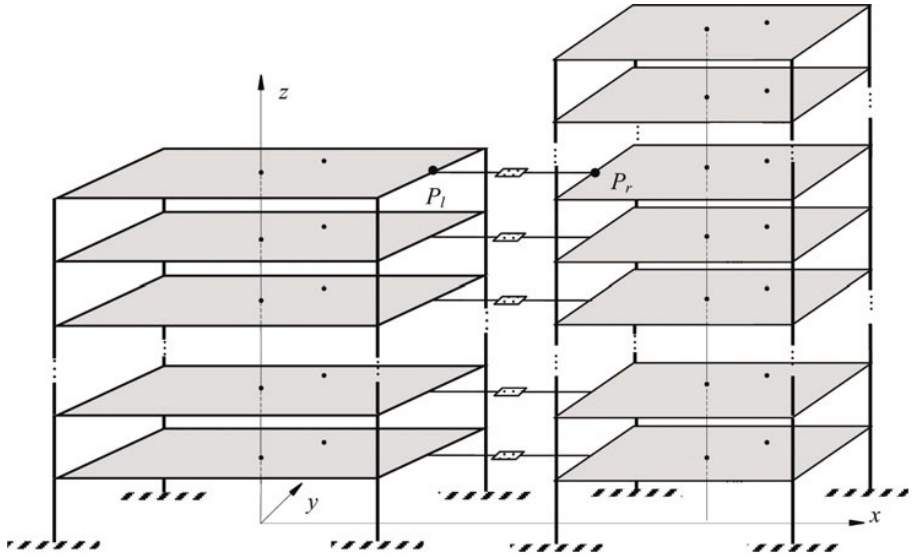


Рисунок 1.13 - Схематичное изображение зданий, связанных гасителями

1.5 Компактные методы гашения колебаний распределенных систем

Для создания сил, гасящих вредные колебания единственного защищаемого объекта, не связанного с остальными, важен выбор оптимального исполнительного устройства, который будет удовлетворять различным требованиям в нужной мере, например, таким как компактность или масштаб генерирования сил. Известные компоненты исполнительных устройств (электромагнитные устройства, пневматические приводы, роторы и линейные двигатели [10] и т.д.) могут быть эффективно использованы в задачах гашения колебаний. В отличие от упомянутых

устройств, современные технические материалы, которые часто называются как умные (смарт-материалы), имеют ряд преимуществ, так как они могут быть легкими и что еще более важно, могут быть беспрепятственно структурно интегрированы в уже спроектированную систему без изменений инерциальных характеристик системы. Умные материалы - это материалы, у которых есть одно или несколько свойств, которые могут быть значительно изменены управляемым способом при помощи внешних возмущений, таких как напряжение, температура, влажность, pH, электрические или магнитные поля. Есть много типов умных материалов, некоторые из которых уже распространены. Для решения поставленной задачи из-за возможности генерации сил предпочтительнее представляются пьезоэлектрические материалы. Среди множества видов пьезоэлектрических устройств особый интерес вызывают изгибные пьезоактюаторы, применение которых рассматривается в данной статье для гашения колебаний.

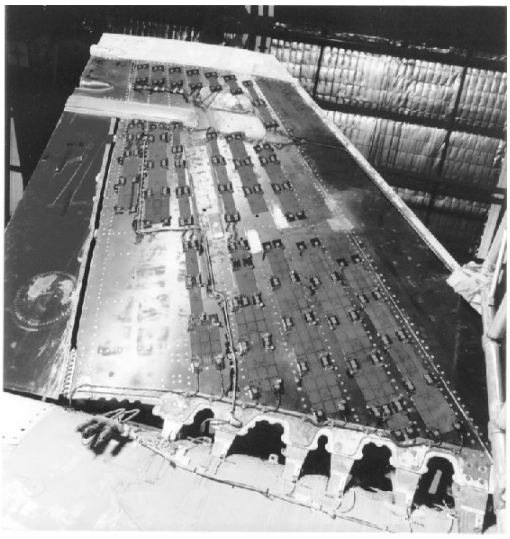


Рисунок 1.14 - Крыло палубного самолета FA-18

Ярким примером подобной интеграции является композитное аэроупругое крыло, оборудованное тонкими пьезоэлектрическими пластинами в структуре крыла, позволяющими подавить нежелательные колебания, без добавления значительной массы и не изменяя формы крыла. Подобный метод гашения используется в крыле палубного самолета FA-18, оснащенного пьезоэлектрическими пластинами для вертикальной стабилизации [71] (рис.1.14).

Таким образом существуют два новых метода гашений, которые не являются классическими, но являются следствием классических подходов и развития технологий.

1.6 Общие характеристики активного и пассивного управления

Ранее нами были приведены, в большей части, пассивные (рис. 1.7, 1.8, 1.11, 1.12), чем активные решения (рис. 1.9, 1.14) гашения высокоэтажных сооружений, что соответствует количественному превосходству использования пассивных над активными решениями. Пассивные средства виброзащиты более привлекательны из-за простоты технической реализации, большей надежности и отсутствия дополнительных энергозатрат, однако существенным их недостатком являются весьма ограниченные возможности виброзащиты в широком диапазоне внешних нагрузок. Активные системы имеют гораздо больше возможностей по защите конструкций от вредных динамических воздействий. Однако при этом они становятся существенно более сложными устройствами и, следовательно, более дорогими, а зачастую и менее надежными. В свете сказанного на практике приходится искать определенный компромисс между стоимостью и надежностью, с одной стороны, и качеством виброзащиты, с другой стороны. С учетом развития технологий и ростом рынка недорогих электронных компонентов происходит снижение цен на элементы активного управления. Вероятнее всего, что это послужит росту активных решений, так как подобные решения станут дешевле, чем пассивные для того же уровня производительности.

Рассмотрим объект высокоточного производства, который деформируется в результате тепловых нагрузок, приложенных к поверхности объекта. Один из способов предотвратить это - использовать обшивку из термостойкого композитного материала. Данный способ уменьшения температурного воздействия на объект является пассивным методом. Альтернативным способом является использование системы исполнительных механизмов (актюаторов) и датчиков, соединенных контуром обратной связи. А такой способ является активным методом термической защиты. В этом случае мы используем главное достоинство обратной связи, которое заключается в снижении значений выхода к изменениям параметров и ослаблении

влияния помех в полосе пропускания системы управления. Активные методы управления не всегда дороже пассивных методов с сопоставимыми характеристиками, более того активные методы имеют куда более широкий спектр возможностей, которых не могут предложить пассивные структуры.[76]

Двадцать лет назад считалось, что атмосферная турбулентность будет представлять собой важное ограничение разрешающей способности наземных телескопов; это было одной из главных причин разработки космической обсерватории Хаббл. Недавно было продемонстрировано, что можно в реальном масштабе времени корректировать возмущения, создаваемые атмосферной турбулентностью на оптическом волновом фронте, исходящем от небесных объектов; это позволяет нам улучшить конечное разрешение телескопа на один порядок до предела, накладываемого дифракцией. Данным раздел физической оптики, изучающий методы устранения нерегулярных искажений, возникающих при распространении света в неоднородной среде, занимается адаптивная оптика [22], являющаяся молодым течением оптики и использующая теорию управления для управляемых оптических элементов. Данный пример использования активного управления в оптике – адаптивной оптики показывает толчок в развитии астрономии.

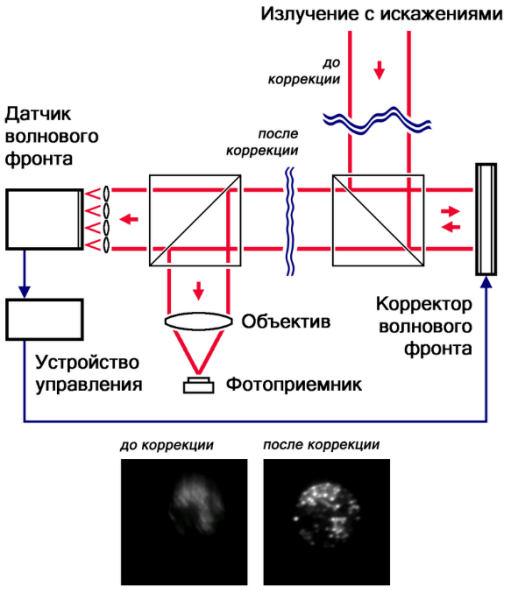


Рисунок 1.15 - Общая схема адаптивной оптической системы

В этой работе нами не будут рассматриваться задачи оптической стабилизации, особый интерес для нас представляет использование теории управления для задач гашения колебаний, хотя эти два типа задач имеют достаточно большую общую часть в рамках модели управления. Стоит понимать, что управление с обратной связью может компенсировать внешние помехи только в ограниченной полосе частот, которая называется полосой пропускания системы управления при этом за пределами полосы пропускания помехи фактически усиливаются системой управления, для задач гашения подобный факт может привести к трагическим последствиям.

1.7 Использование теории управления в задачах гашения

С середины XX века вместе с развитием кибернетики развивается использование теории управления в задачах механики. Классический подход опирается на решение матричного уравнения Риккати на основе которого и находится матрица коэффициентов регулятора обратной связи [16, 31]. Разнообразие появившихся с тех пор постановок задач и соответствующая литература необъятны; рассмотрим лишь некоторые отдельные аспекты этой классической задачи и приведем ключевые работы, не претендуя на полноту библиографии. В нашем же случае интересны задачи асимптотической устойчивости линейных стационарных динамических систем вида (1.5).

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B\theta x = A_c x, \qquad x(0) = x_0 \tag{1.5}$$

где $A -$ матрица системы, $B -$ вектор управления, $\theta -$ регулятор обратной связи системы, $x -$ состояние системы.

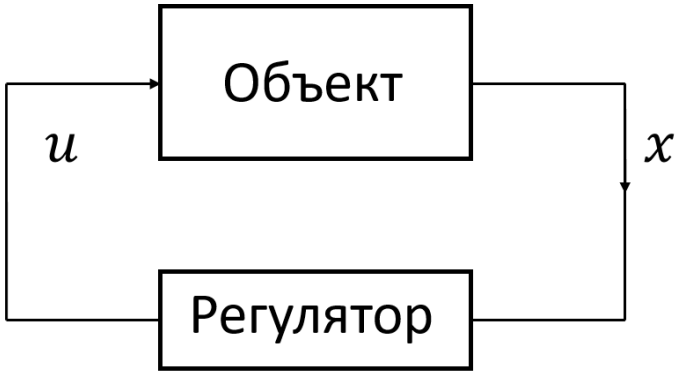


Рисунок 1.16 - Система управления замкнутого объекта

Теория автоматического управления - молодая наука, находящаяся в процессе интенсивного развития. При этом существенно меняются взгляды на предмет и основные проблемы данной дисциплины, ровно как и используемый математический аппарат. Долгое время самым популярным методом решения задач управления являлось решение уравнения Риккати:

$$XA + A^T X - XBS^{-1}B^T X + R = 0 \tag{1.6}$$

где $X = X^T > 0 -$ матрица Ляпунова, $\theta = -S^{-1}B^T X -$ оптимальный регулятор, $J = x_0^T \theta x_0$ – значение функционала, $x \neq 0$, $R, S -$ вспомогательные (весовые) матрицы уравнения Риккати. Необходимо найти такой θ, чтобы функционал J имел минимальные значения:

$$J(\theta) = \int_0^\infty (x^T R x + u^T S u)\, dt \to \min \tag{1.7}$$

Для того, чтобы функционал J был конечен необходимо и достаточно, чтобы система (1.5), замкнутая обратной связью, была устойчива. Данный регулятор θ, удовлетворяющий условию (1.7), является линейно-квадратичным регулятором (LQR).

Задача о линейно-квадратичном регуляторе (Linear Quadratic Regulator, LQR) была поставлена и решена в 1960 г. А.М. Летовым [20] для стационарных линейных объектов и Р.Е. Калманом [62] в нестационарном случае, в решениях постановки (1.5) в рамках задачи линейного квадратичного управления написано множество статей [4, 39, 83]. Другой же подход заключается в иной постановке и использовании не уравнений, а неравенств исходя из условий устойчивости. Устойчивость системы должна удовлетворять неравенству Ляпунова, поэтому для функции Ляпунова $V(x) = x^T X x$ выполняется условие:

$$\dot{V}(x) = x^T (A_c X + X A_c) x < 0$$

Неравенство Ляпунова для системы (1.5) преобразуется:

$$YA^T + AY - 2BS^{-1}B^T < 0 \tag{1.8}$$

где $Y = X^{-1}$, таким образом мы перешли от уравнения Риккати (1.6) к линейному матричному неравенству (1.8) упростив выражение матрицей R. Помимо этого решение уравнения Риккати накладывает дополнительные ограничения на решение поэтому в дальнейшем нами будут использоваться линейные матричные неравенства. Как известно [41], построение стабилизирующей статической линейной обратной связи по состоянию для линейных систем может быть осуществлено путем переформулировки задачи к виду линейных матричных неравенств (LMI) с последующей проверкой их разрешимости. Согласно теореме Ляпунова выполняется следующее матричное неравенство:

$$XA_{\mathrm{c}} + A_{\mathrm{c}}^{T}X < 0 \tag{1.9}$$

где $X = X^T > 0 -$ матрица Ляпунова, а $A_c = A + B\theta -$ заданная матрица асимптотически устойчивой системы. Данную запись можно привести к виду:

$$YA^T + AY + ZB^T + BZ < 0, \;\; Y > 0 \tag{1.10}$$

где $Y = X^{-1}$ $Z = \theta Y$. Теперь перед нами стоит задача нахождения матриц Z, Y, удовлетворяющих (1.10). Но для того, чтобы понимать какую искать обратную связь рассмотрим критерий (1.7). Данный тип критерия является интегральным и наилучшим образом подходит для задач, где исследуемая функция выхода не имеет скачков, но для задач гашения, когда защищаемый объект может попасть в резонанс данный критерий может оказаться губительным. Поэтому об особенностях критерия более подробно будет сказано во второй главе.

При построении линейно-квадратичного регулятора (LQR) существует зависимость только от начальных условий возмущения относительно внешних воздействий. Подобное условие делает решаемый класс задач поиска LQR решения ограниченным только начальными условиями, хотя на практике такая постановка не часто встречается. Куда чаще к защищаемому объекту прикладывается внешнее возмущение v, ограниченное L_2 −классом.

$$v\colon [0, \infty] \to R, \quad \|v\| = \left(\int_0^{\infty} v^2(t)dt \right)^{1/2} < \infty$$

Рассмотрим защищаемый объект с регулятором обратной связи и внешним возмущением v:

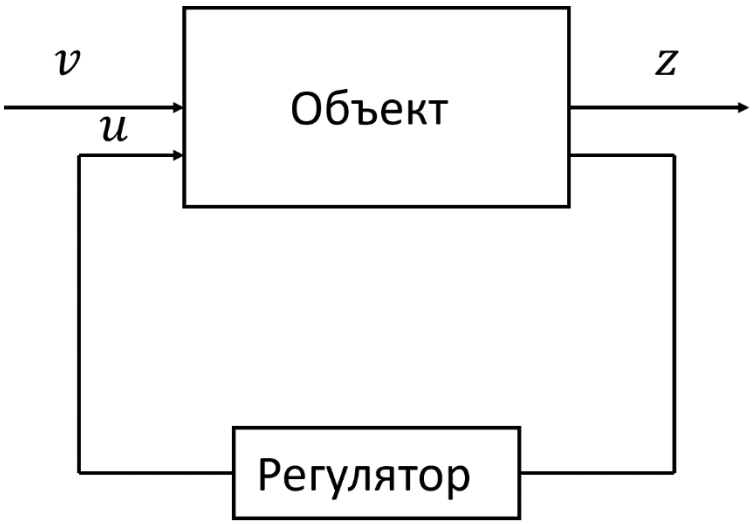


Рисунок 1.17 - Система управления с одним выходом при действии внешнего возмущения

Такая система (рис. 1.17) в рамках задачи теории управления имеет матричный вид:

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + B_u u + B_v v \\ z = Cx + Du \\ u = \theta x \end{gathered} \tag{1.11}$$

где z −выход системы, матрицы $C, D -$ матрицы выхода системы. Об эффективности обратной связи для такой системы корректнее говорить относительно значений внешнего возмущения. Поэтому используем популярный, на данный момент, критерий H_∞, в котором выход системы соотносится с внешним возмущением.

$$\|H\|_\infty = \sup_{\|v\| \neq 0} \left(\frac{\int_0^\infty |z(t)|^2 dt}{\int_0^\infty |v(t)|^2 dt} \right)^{1/2} = \left(\max_{\omega \in (0,\infty)} \lambda_{max}(H(i\omega)H(i\omega)^*) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Из соотношения для H_∞ очевидно, данный критерий является экстремальным в отличии от критерия LQR, и в случае приложения гармонической нагрузки обратная связь для H_∞ будет искаться для случая резонансной частоты. Поэтому при

работе с ДГК наибольший интерес представляет H_∞, более полно и подробно использование H_∞ описано в п. 2.4.

1.8 Исполнительные и измерительные устройства активной виброзащиты

В качестве функциональной схемы виброзащиты некоторой конструкции (например, высотное здание, мост или башенный кран), подверженной внешним нагрузкам (например, природным или техногенным) удобно рассмотреть схему, представленную на рисунке 1.18.

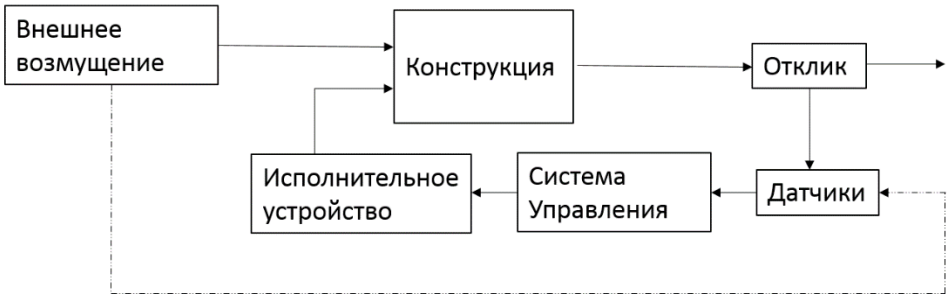


Рисунок 1.18 - Схема виброзащиты

Согласно приведенной схеме на конструкцию действуют внешние возмущения, приводящие ее, как правило, в колебательное движение, с учетом измеренных характеристик, управляющее устройство формирует по принципу обратной связи дополнительные силовые воздействия на конструкцию, снижающие в конечном счете уровень ее колебаний. По такому принципу организовано большинство известных систем виброзащиты или систем гашения колебаний конструкций и механизмов.

При практической реализации активной системы помимо сложностей в выборе обратной связи существуют сложности, зависящие от практической реализации системы автоматического управления. Активная система состоит из набора исполнительных механизмов и датчиков. Есть много известных традиционных компонентов приведения в действие, таких как электромагнитные устройства, пневматические приводы, роторы и линейные двигатели и т.д., которые могут быть эффективно использованы в гашении колебаниями. В отличии от ранее упомянутых устройств, современные технические материалы, которые часто

упоминаются как интеллектуальные или умные, имеют преимущество того, чтобы быть легкими и что еще более важно они могут быть беспрепятственно структурно интегрированы в уже спроектированную систему.

Со структурной точки зрения поведение классических материалов может быть достаточно описано их упругими постоянными: упругая постоянная связывает напряжение и деформацию, тепловая константа связывает температуру и деформацию. В умных материалах, связь также существует между одним или двумя (или еще больше) свойствами: электрический заряд, деформация, магнитная связь, температура, химическая и световая связи. Связи также очевидны между материальными уравнениями, описывающими поведение этих материалов. Есть много типов умного материала, некоторые из которых уже распространены. Некоторые примеры:

- Пьезоэлектрические материалы - материалы, которые производят электрическое напряжение, когда приложено механическое. Так как этот эффект также применяется обратным способом, электрическое напряжение через образец произведет механическое напряжение в образце. Соответственно разработанные структуры, сделанные из этих материалов, могут так же сгенерировать изгиб, растяжение или сжатие, когда приложено электрическое напряжение.
- Сплавы с памятью формы и полимеры памяти формы - материалы, в которых большая деформация может быть вызвана и восстановлена через изменения температуры или изменения напряжения (псевдоэластичность). Большая деформация заканчивается из-за мартенситного изменения фазы.
- Магнитострикционное изменение материала в форме под влиянием магнитного поля также показывает изменение в их намагничивании под влиянием механического напряжения.
- Магнитные сплавы с памятью формы - материалы, которые изменяют их форму в ответ на существенное изменение в магнитном поле.
- pH чувствительные полимеры - материалы, которые увеличиваются (сворачиваются), когда pH окружающих носителей изменяется.

- Галохромные материалы - обычно используемые материалы, которые изменяют их цвет в результате изменяющейся кислотности. Одно предложенное приложение для красок, которые могут изменить цвет, чтобы указать коррозию в металле под ними.
- Хромогенные системы изменяют цвет в ответ на электрические, оптические или тепловые изменения. Они включают электрохромные материалы, которые изменяют их цвет или непрозрачность на приложении напряжения (например, жидкокристаллические дисплеи), термохромовое изменение материалов в цвете в зависимости от их температуры и фотохромовые материалы, какое изменение раскрашивает реакцию на свет — например, легкие чувствительные солнцезащитные очки, которые темнеют, когда представлено яркому солнечному свету.
- Диэлектрические эластомеры (DES) являются умными материальными системами, которые производят большие деформации (до 300%) под влиянием внешнего электрического поля. [97]

Среди всех выше рассмотренных материалов из-за возможности генерации сил и наиболее исследованного математического аппарата наибольший интерес представляют пьезоэлектрические материалы подробно описанные в п. 3.5 и использованные в п. 3.6 и 3.7.

1.9 Итоги главы 1

В первой обзорной главе были рассмотрены как классические, так и новые методы виброзащиты, которые несмотря на частные случаи их использования являются актуальной темой исследования и инженерно-технологических доработок. Широкий спектр возможностей гашения колебаний увеличивается благодаря существованию пассивных, активных и полуактивных системы виброзащиты. Так как активные методы базируются на поиске оптимальной обратной связи для рассматриваемой системы, то проблема гашений связана с развитием теории автоматического управления. Более того, как и задачи теории автоматического управления задача гашения зависит от выбора исполнительных и измерительных устройств. Поэтому выбор оптимального метода виброзащиты зависит от многих факторов.

ГЛАВА 2. ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИСТЕМ

В основном, задачу гашения колебаний рассматривают как задачу уменьшения уровня возмущения при приложении различных типов нагрузок. Приложение необходимых нагрузок зависит от метода гашения колебаний. Методы, в свою очередь, подразделяются на действующие за счет внутренней и внешней энергии системы, как было более подробно описано в 1 главе. В основном рассматривается два способа описания поведения системы – распределенный и сосредоточенный типы. Ранее, большинство исследований проводились для сосредоточенных систем, состоящих из связной цепочки материальных точек, в данной работе исследования проводятся как для сосредоточенных, так и для распределенных систем. Эта глава посвящена сосредоточенным системам. Для наибольшей наглядности методов виброзащиты рассмотрим использование динамического гасителя колебаний и метода виброизоляции в рамках приложения.

2.1 Постановка задачи двухкритериального гашения для одномассового объекта при неопределенном возмущении

Рассмотрим объект, представляющий собой жесткое тело, которое может перемещаться по линии движения основания. Предполагается, что основание движется по прямой. Описываемая система управляется дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{x} = -m\ddot{y} + f(x, \dot{x})$$

где $m -$ масса объекта, $x -$ перемещение объекта относительно основания, y - координата основания в инерциальной (неподвижной) системе отсчета и $f -$ сила взаимодействия между телом и основанием. Точки над буквами обозначают производные по времени t. Сила f зависит от упругих и диссипативных свойств соединения между объектом и основанием и, как правило, является функцией относительного смещения и относительной скорости $\dot{x}$ объекта. Если объект жестко связан с основанием, т. е. соединение не допускает относительных перемещений, то уравнение (2.1) подразумевает $f = m\ddot{y}$, и на объект действует: сила, равная, помимо знака, силе инерции, обусловленной движением основания. Эта сила может быть настолько велика, что функциональное свойство объекта будет затруднено. В

дальнейшем мы обойдем такое жесткое соединение тела с основанием в пользу амортизатора, специальных демпфирующих устройств, которые отделяют объект от основания и производят усилие управления для уменьшения нагрузки защищаемого объекта, в сравнении с жестким креплением.

В технике используются различные изоляторы, от сравнительно простых пружин и демпферов автомобилей и мотоциклов до достаточно сложных систем, управляемых компьютерами. Движение объекта, связанного с основанием с помощью изолятора (рис. 2.1) определяется уравнением:

$$m\ddot{x} = -m\ddot{y} + u(\dot{x}, x, t) \tag{2.1}$$

где $u(\dot{x}, x, t)$, изолирующая характеристика, является управляющей функцией, которая в общем случае зависит от переменных состояния, $\dot{x}, x$ и времени t.

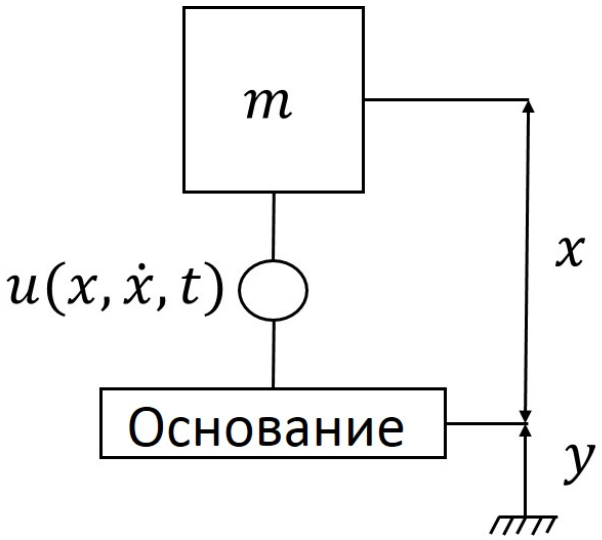


Рисунок 2.1 – Виброизоляция защищаемого объекта

Учитывая основные принципы эффективности изоляторов, изложенные Ишлинским [16], рассмотрим классическую постановку задачи виброизоляции. Пусть на тело, соединенного с основанием пружинно-демпфирующими устройствами, действует сила в некоторый момент времени (2.1). Сила взаимодействия между телом и основанием описывается линейно: $u = kx + d\dot{x}$. То есть нужно подобрать коэффициенты упруго-демпфирующих устройств

(k, d) таким образом, чтобы минимизировать возможное максимальное перемещение при различных параметрах k и d.

$$J_1(k, d) = \max_{t \in [0, \infty)} |x(t, k, d)| \to min$$

Решением данной задачи будет увеличение (k, d), что приведет к минимизации критерия J_1. Теперь, рассмотрим случай при котором значение силы, генерируемой виброизолирующими устройствами постоянно:

$$J_2(k, d) = \max_{t \in [0, \infty)} |kx(t, k, d) + d\dot{x}(t, k, d)| = u_0$$

Рассмотрим решение при различных значениях $u_0 = [u_0^1, u_0^2, u_0^3, u_0^4, u_0^5]$

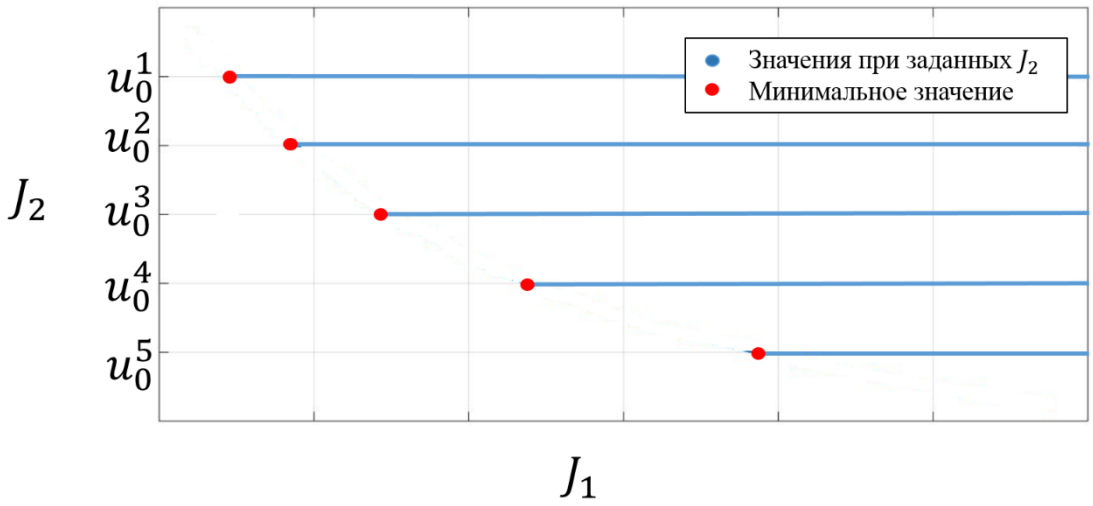


Рисунок 2.2 - Значение функционала J_1 при различных J_2

Задача качественно меняется в случае попытки ограничений относительно критерия управления (силы, генерируемой виброизолирующими устройствами). Данная задача является наиболее практической, так как зачастую существует проблема ограничения управления.

$$J_2(k, d) = \max_{t \in [0, \infty)} |kx(t, k, d) + d\dot{x}(t, k, d)| \leq u_0$$

То есть задача, приведена к виду: $J_1(k, d) \to min,\ J_2(k, d) \leq u_0$

Решение данной задачи будет являться множество решений относительно двух критериев, изображенное на рис. 2.3.

Для того чтобы найти оптимальное решение относительно двух критериев нужно определить единственным образом зависимость между (J_1, J_2). То есть наиболее оптимальное решение данной задачи достигается при решении двухкритериальной задачи:

$$J_1(k, d) \to min$$
$$J_2(k, d) \to min$$

Данный результат получен путем поиска оптимальных значений (k, d), при которых наилучшим образом минимизируется.

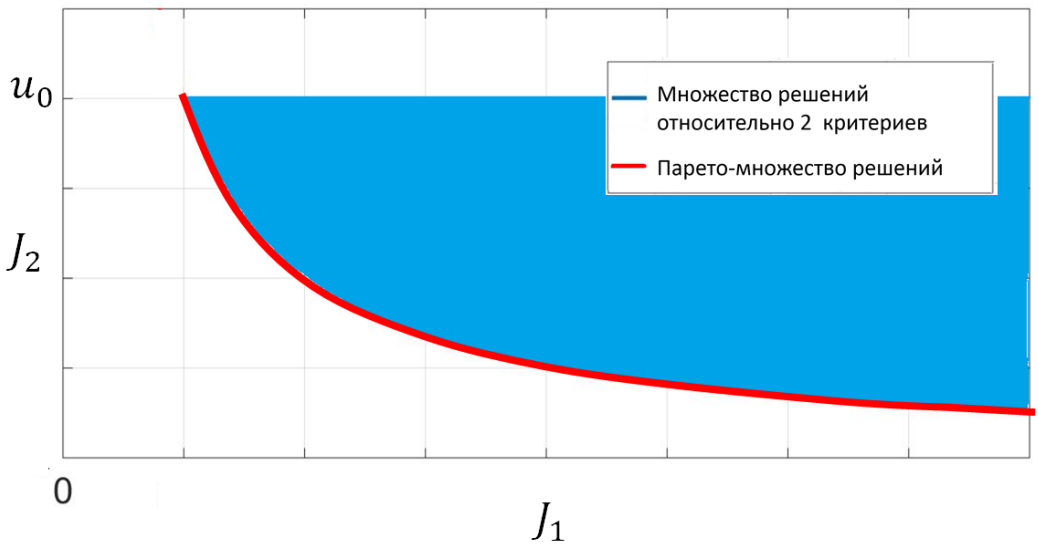


Рисунок 2.3 - Парето-множество решений относительно критерия перемещения и управления

В полученном множестве решений кривая, ограничивающая множество решений слева, является оптимальным множеством по Парето для полученных решений, то есть изменение значений одного критерия, не может быть улучшено без ухудшения другого. Таким образом полученное Парето-множество является решением двухкритериальной задачи гашения одномассового объекта. Соотношение между J_1 и J_2 в случае линейного управления и воздействия единичного импульса было выведено в книге Д.В. Баландина и др.[1, 42] и выражается соотношением $J_2 = \frac{0.521}{J_1}$.

Теперь рассмотрим задачу оптимальной изоляции для случая, когда приложенное внешнее возмущение известно не полностью. Предполагается, что возмущение относится к определенному классу возможных возмущений. Для учета неопределенности информации о внешнем возмущении используется подход теории игр. Задача оптимальной изоляции рассматривается как “игра с природой”. Необходимо выбрать закон управления для амортизатора (характеристику амортизатора). Этот закон управления должен использовать только имеющуюся (неполную) информацию о внешнем возмущении природы, которое должно произвести худшую помеху в ответ на закон управления, предложенный проектировщиком.

Запишем математическую модель поведения системы:

$$m\ddot{x} + u(\dot{x}, x, t) = 0, \qquad x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0 \tag{2.2}$$

Таким образом критерии гашения для данной постановки примут вид:

$$J_1 = \max_{v \in W} \max_{t} |x(t, k, d)| \to min$$
$$J_2 = \max_{v \in W} \max_{t} |kx(t, k, d) + d\dot{x}(t, k, d)| \to min$$

Соотношение между этими функционалами имеет зависимость аналогичную рис. 2.3, но в данном случае описывается как $J_2 = \frac{0.521}{J_1} m v_0^2$.

Таким образом, мы перешли от частной задачи гашения методом виброизоляции к частной задаче двухкритериальной оптимизации при неопределенном внешнем воздействии.

2.2 Общая постановка задачи многокритериального гашения для много-массовой системы при неопределенном возмущении

Предположим, что динамической моделью амортизирующего объекта (или основания) (рис. 2.4) является голономная стационарная механическая система состоящая из $N -$ тел с $3N -$ степенями свободы, положение которой определяется $3N -$ мерным вектором обобщенных координат q. Система совершает малые колебания вблизи устойчивого положения равновесия $q = 0$ под действием

обобщенных вынуждающих сил, образующих вектор $F(t)$. Силы сопротивления, возникающие при колебаниях, пропорциональны скоростям материальных точек; при этом предполагается, что система обладает полной диссипацией, т.е. что любое движение сопровождается рассеянием энергии. При этих предположениях движение системы описывается некоторым уравнением Лагранжа второго рода. Для простоты примем замену $n = 3N$.

Рассматривается механическая система материальных точек, связанных между собой упруго-вязкими связями (рисунок 2.4):

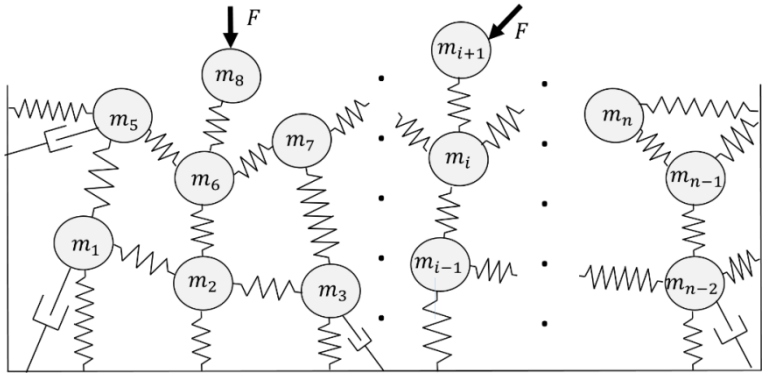


Рисунок 2.4 – Механическая система

Уравнение движения данной системы имеет вид:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = BF \tag{2.3}$$

где $q = (q_1..q_n)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1..\dot{q}_n)$, $\ddot{q} = (\ddot{q}_1..\ddot{q}_n)$ – вектора кинематических характеристик материальных точек с массой m_i, $i = \overline{1, N}$, M – квадратичная массовая матрица $(n \times n)$, K, D – квадратичные положительно-полуопределенные матрицы $(n \times n)$ коэффициентов жесткости и демпфирования тел, соответственно, F –векторное поле нагрузок, в основном про данное значение будет сказано далее, B – вектор приложения нагрузок для твердых тел. Кинетическая, диссипативная и потенциальная энергия записываются как:

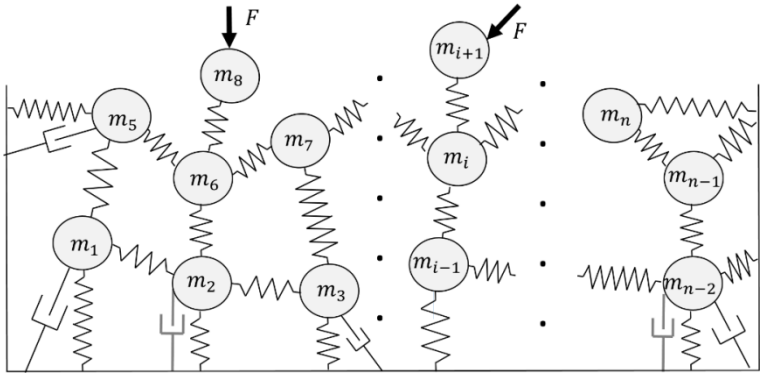
$$T = \frac{1}{2}M\dot{q} \cdot \dot{q} \quad \Phi = \frac{1}{2}D\dot{q} \cdot \dot{q} \quad \Pi = \frac{1}{2}Cq \cdot q$$

Собственные частоты данной системы находятся из решения системы уравнений:

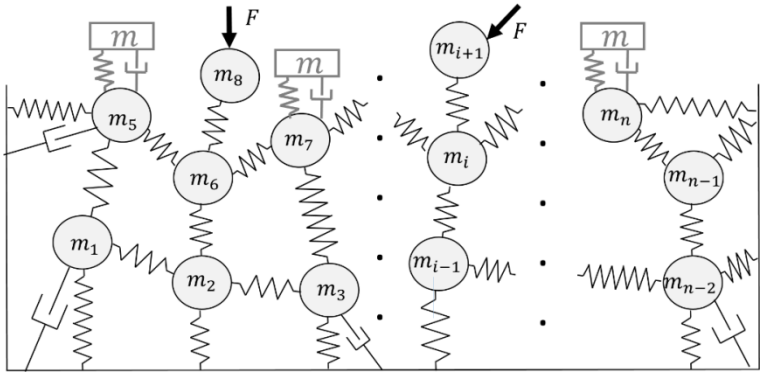
$$\det(K - M\omega^2) = 0$$

где $\omega = [\omega_1 \dots \omega_n] -$ спектр собственных частот системы. [17]

При приложении виброизоляции и ДГК к некоторым телам (рис 2.5 (а, б)) система дифференциальных уравнений описывающих систему (2.3) при приложении примет вид (2.4):



а)



б)

Рисунок 2.5 – Механическая система с: а) виброизоляцией и с б) приложенным динамическим гасителем

При приложении виброизоляции и ДГК к некоторым телам (рис 2.5 (а, б)) система дифференциальных уравнений описывающих систему примет вид:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Kq = BF + QU \tag{2.4}$$

где U −вектор управляющих воздействий на систему, Q − вектор управления для заданных точек. Для случая использования ДГК размерность системы увеличится на

число приложенных динамических гасителей с учетом трех координат для каждой, следовательно, число собственных частот тоже увеличится.

В рассматриваемой многокритериальной задаче оптимизации вводятся взаимно конкурирующие критерии. В качестве характерного показателя решения задачи, по значению которого оценивается оптимальность найденного решения будут взяты Парето-критерии. Искомое нами решение представляет собой состояние рассматриваемой системы, при котором значение каждого частного критерия, характеризующего систему, не может быть улучшено без ухудшения других. Предложенные нами критерии представляют собой линейные комбинации кинематических характеристик и управления. Возьмем $k-$ критериев гашения которые между собой являются конкурирующими:

$$J_i(U) = \max_{F\in\mathcal{F}} \max_{t\in[0,\infty)} \left|\widetilde{K}q(t) + \widetilde{D}\dot{q}(t) + \tilde{Q}U(t)\right| \to min, \qquad i = \overline{1,k} \qquad (2.5)$$

где $\widetilde{K}, \widetilde{D}, \tilde{Q}-$ вспомогательные матрицы для описания линейной комбинации отклика системы – критерия гашения. Для понимания критериев оптимизации в тематике гашения возьмем наихудший результат перемещения материальной точки при наихудшем возмущении:

$$J_1(U) = \max_{F\in\mathcal{F}} \max_{t\in[0,\infty)} |p^T q(U,t)| \to min$$

$p-$ вектор, описывающий перемещение необходимых нам точек системы. Управление, действующее на систему:

$$J_2(U) = \max_{F\in\mathcal{F}} \max_{t\in[0,\infty)} |U(t)| \to min$$

И воздействие на основание в случае приложения управления:

$$J_3(U) = \max_{F\in\mathcal{F}} \max_{t\in[0,\infty)} |Kq(t) + D\dot{q}(t)| \to min$$

Решение такой задачи методом перебора не является корректным. Но куда более громоздкой будет многокритериальная задача гашения. Таким образом, для многосвязных механических систем необходим более эффективный и менее затратный поиск оптимальных параметров чем метод перебора.

Действия любого виброзащитного устройства (гасителя или изолятора) может быть сведено к формированию дополнительных динамических воздействий, обеспечивающих необходимое изменение вибрационного поля. В этом смысле задача виброзащиты может рассматриваться как задача управления движением защищаемой механической системы, а динамические воздействия, вызывающие соответствующие изменение параметров - как “управления” оказывается удобной для постановки и решения разнообразных задач виброзащиты; она позволяет использовать аппарат теории автоматического управления для анализа и синтеза виброзащитных систем.

2.3 Использование теории управления и линейных матричных неравенств в задачах гашения колебания

Динамические воздействия, формируемые виброзащитным устройством, могут быть, в принципе, как силовыми, так и кинематическими, однако кинематические управления встречаются значительно реже, чем силовые, и в дальнейшем рассматриваться не будут. Для использования методов теории автоматического управления необходимо привести уравнение (2.5) к безразмерному виду, для этого примем, что $q = sq'$, $\dot{q} = \frac{s}{T}\dot{q}'$ и $\ddot{q} = \frac{s}{T^2}\ddot{q}'$, где $q', \dot{q}', \ddot{q}' -$ безразмерные переменные s и $T -$ размерные коэффициенты по длине и времени.

$$\ddot{q}' + D'\dot{q}' + K'q' = B'v + Q'U \qquad (2.6)$$

где $K' = M^{-1}Kb^2$, $D' = M^{-1}Db$, $B' = M^{-1}\frac{b^2}{a}F_0, Q' = M^{-1}\frac{b^2}{a}u_0 -$ безразмерные матрицы жесткости демпфирования и возмущения F_0 и u_0 коэффициенты масштабирования. В дальнейшем для простоты примем обозначения q', $\dot{q}'$, $\ddot{q}'$ соответственно равными q, $\dot{q}$, $\ddot{q}$, а матрицы K', D', B' примем равными K, D, B. Поиск оптимальной обратной связи и тем более решение многокритериальной задачи имеет ряд сложностей, которые требуют определенного внимания, поэтому ниже приведены своего рода базовые задачи теории управления.

Задача №1

Для того, чтобы использовать методы теории управления, рассмотрим задачу с простейшим объектом и приложенным возмущением. Основная цель этой задачи показать как вычисляются критерии $H_\infty -$ норма и обобщенная $H_{g2} -$ норма на простейшем примере.

Рисунок 2.6 – Объект с внешним возмущением

Рассмотрим объект, представленный на рисунке 2.4 как линейный стационарный динамический объект (рис.2.6) который описывается дифференциальным уравнением вида:

$$\begin{gathered} \dot{x} = Ax + Bv \\ z = Cx \end{gathered} \tag{2.7}$$

где $x = (q, \dot{q}) \in R^n$ – вектор состояния системы, A, B – матрица системы и вектор возмущения системы соответственно, $v \in R^{n_v}$ – возмущение, принадлежащее некоторому классу возмущений.

$$A = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & E_{n\times n} \\ -K & -D \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 0_{n\times 1} \\ B \end{bmatrix} \; C = [p_{1\times n} \quad 0_{1\times n}]$$

где $0_{i\times j}, E_{i\times j}$– нулевая матрица и матрица единиц размерностью $i \times j$, $p_{1\times n} -$ вектор, описывающий интересующий нас отклик системы.

Применение линейных матричных неравенств (linear Matrix Inequality (LMI)) в теории выпуклой оптимизации и ее приложениях, в частности теории оптимизации началось не так давно. К настоящему моменту эта техника доведена до эффективных численных процедур. Бурное распространение этой области выпуклой оптимизации во многом обязано как раз эффективности алгоритмов решения. Во многом это заслуга авторов алгоритмов и теоретического доказательства Ю. Нестерова и А. Немировского. Более подробно о истории становления техники LMI как в выпуклой

оптимизации, так и в теории управления описано в [49], активно развивает это направление в теоретическом и в прикладном аспекте.

Использование LMI в теории управления, видимо, надо вести от работ А.М. Ляпунова, его известная теорема об устойчивости динамической системы сводятся к поиску решения уравнения следующего вида:

$$A^T X + XA = -Q$$

где $A -$ матрица системы, $X -$ неизвестная матрица, $Q -$ любая симметрическая положительно-определенная матрица. Именно требование существования решения при любой наперед заданной матрице Q, дает возможным переписать уравнение как неравенство:

$$A^T X + XA < 0$$

где линейность обусловлена видом неравенства. В поисковых алгоритмах используется несколько другая запись неравенств, а именно:

$$A^T X + XA = F(x) = F_0 + F_1 x_1 + \cdots + F_n x_n$$

где $x_i -$ неизвестные элементы матрицы $X, F_i -$ симметричные матрицы коэффициентов при x_i. Такая форма запись LMI идентична стандартной записи задач линейного программирования, действительно линейное программирование является подклассом задач полуопределенного программирования, где соответствующие матрицы F_i вырождаются до скаляров.

Решение линейного матричного неравенства является любая матрица, удовлетворяющая неравенству (в нашем случае X), то есть такая точка в пространстве, которая находится во внутренней части выпуклой фигуры, задаваемой соответствующими неравенствами.

Теперь снова вернемся к задаче №1 (2.7) для объекта изображенного на рисунке 2.6. Пусть для рассматриваемого возмущения выполняется условие: что $\|v\|_2 = \left(\int_0^\infty |v(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$, то есть рассматриваемое возмущение принадлежит

классу L_2. Для математического описания динамической системы введем передаточную функцию (2.8).

$$H(\omega) = C(\omega I - A)^{-1}B \tag{2.8}$$

Передаточная функция $H(s) -$ дифференциальный оператор, выражающий связь между входом и выходом линейной стационарной системы (рис. 2.6). Используем пространство RL_2 передаточных матриц $S(H)$ для которых выполняется условие:

$$\|H\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} tr[H^T(-j\omega)H(j\omega)]d\omega < \infty \tag{2.9}$$

Для того, чтобы в дальнейшем перейти к поиску оптимального решения необходимо ввести понятие спектральной нормы для матрицы (2.9) индуцированной евклидовой нормой второго порядка. Класс таких передаточных функций называется $H_2 -$ классом.

$$\begin{aligned} &A^T P_0 + P_0 A + C^T C = 0 \quad \text{где} \quad P_0 = \int_0^{\infty} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \\ &AP_r + P_r A^T + BB^T = 0 \quad \text{где} \quad P_r = \int_0^{\infty} e^{At} BB^T e^{A^T t} dt \end{aligned} \tag{2.10}$$

тогда искомая $H_2 -$ норма находится следующим образом:

$$\begin{aligned} \|H\|_2^2 = tr(B^T P_0 B) \\ \|H\|_2^2 = tr(CP_r C^T) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для дальнейшей работы с линейными матричными неравенствами введем понятие γ – уровень гашения возмущения, который едва превышает норму, в данном случае $H_2 -$ норму. Условия использования нормы зависят от матриц описывающих передаточную функцию. Помимо условий того, что матрица $A -$ гурвицева, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия наблюдаемости и управляемости: [4, 35]

Теперь из уравнений (2.10) и (2.11) перейдем к линейным матричным неравенствам как показано в книге Баландина и Когана, где приводится и

доказывается утверждение, что для гурвицевой матрицы A следующие выражения эквивалентны:

1. $\|H\|_2 < \gamma$

Существуют такие матрицы $X = X^T > 0$ и $S = S^T$, что

2. $\begin{pmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \begin{pmatrix} X & C^T \\ C & S \end{pmatrix} < 0, \quad tr(S) < \gamma$

Существуют такие матрицы $Y = Y^T > 0$ и $R = R^T$, что

3. $\begin{pmatrix} AY + YA^T & YC^T \\ CY & -\gamma I \end{pmatrix} < 0, \begin{pmatrix} Y & B \\ B^T & R \end{pmatrix} < 0, \quad tr(R) < \gamma$

Таким образом мы перешли от задачи гашения к задаче теории управления с применением линейных матричных неравенств для евклидовой нормы передаточной матрицы или как принято говорить в теории управления - критерия H_2 нормы.

2.4 Обобщенная H_2 −норма и H_∞ − норма для задач гашения колебаний

В случае использования линейных матричных неравенств существует множество критериев, наиболее часто в задачах гашения используются два типа критериев качества: интегральный и экстремальный (прямой) (табл. 2.1). То есть в обоих случаях одним числом оценивается или же интегральное значение функции или процесса на искомом промежутке или же экстремальное значение. Стоит отметить, что приложение этих типов абсолютно разное, например, для импульсного или единичного воздействия на систему наиболее корректно будет использование критерия прямого типа, а для непрерывного, или, например, устоявшегося, процесса использовать интегральный тип.

Среди экстремальных типов гашения существует наиболее известная и популярная H_∞ − норма [13, 87]. Зародившись в начале 80-х годов 20-го века, математическая теория H_∞ −оптимизации к настоящему времени достигла поры зрелости. Традиционно в рамках этой теории рассматривается задача подавления неизмеримых внешних возмущений, которые являются исчезающими функциями времени (конечной энергии). Приведем использование H_∞ − нормы для рассматриваемой вспомогательной задачи №1 (2.7).

$$\|H\|_\infty = \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{\|z\|}{\|v\|} = \left(\max_{\omega\in(0,\infty)} \lambda_{max}(H(i\omega)H(i\omega)^*)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.12}$$

Введем понятие уровня гашения возмущения при использовании H_∞ – нормы в объекте и назовем величиной $\gamma_* = \|H\|_\infty$. [3]

Стоит отметить, что:

$$\gamma_* = \inf_\gamma \left\{\gamma: \frac{\|z\|}{\|v\|} < \gamma, \forall v, \|v\| \neq 0\right\}$$

Таким образом: $H(i\omega)H(i\omega)^* < \gamma^2 I$

Используя лемму Калмана-Якубовича-Попова для граммиана управляемости [30] получаем линейное матричное неравенство для рассматриваемого линейного стационарного объекта вида:

$$X = X^T > 0; \qquad \begin{pmatrix} A^T X + XA & XB \\ B^T X & -\gamma I \end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma}\begin{pmatrix} C^T \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & 0 \end{pmatrix} < 0$$

Применяя дополнение Шура для рассматриваемой системы:

$$X > 0; \qquad F(\gamma, X) = \begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & 0 \\ C & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{2.13}$$

Получаем линейное матричное неравенство для H_∞ – нормы. Стоит отметить, метод H_∞ – нормы примечателен своей строгой математической базой, оптимизационным характером и применимостью как к классическому, так и робастному управлению, но постановка задачи в рамках H_∞ – нормы строго математическая и мало связана с практическими проблемами, встающими перед инженером-проектировщиком.

Однако, стоит понимать, что результат гашения полученный при помощи H_∞ – нормы является результатом гашения при наибольшем резонансе системы, что следует из определения. Поэтому обратная связь, полученная при помощи $H_\infty -$ нормы является результатом решения для наихудшей ситуации, то есть управление в данном случае имеет наибольшие значения, которые, зачастую, практически не реализуемы.

Особый интерес представляет обобщенная $H_2 -$ норма для <u>вспомогательной задачи №1.</u> Обобщенная $H_2 -$ норма передаточной матрицы $S(H)$ определяется через индуцированную норму оператора, генерированного системой (2.7), при действующих на вход возмущениях $L_2 -$ класса [3]. Эта характеристика системы равна максимальному отношению максимального по времени значения евклидовой или ∞-нормы выхода к $L_2 -$ норме возмущения, и представлена в виде:

$$\sup_{v \in L_2} \frac{\sup_{t \geq 0} |z(t)|_r}{\|v\|_2} = \begin{cases} \lambda_{max}^{1/2}\big(S(H)\big), r = 2 \\ d_{max}^{1/2}\big(S(H)\big), r = \infty \end{cases} = f_r^{\frac{1}{2}}\big(S(H)\big) = f_r^{\frac{1}{2}}(CYC^T)$$

$Y -$ симметричная и положительно определенная матрица, которая удовлетворяет неравенству (2.14)

$$AY + YA^T + BB^T \leq 0 \tag{2.14}$$

Применим более широкое понимание обобщенной $H_2 -$ нормы передаточной матрицы, дающее вспомогательную возможность разбиение вектора системы на некоторое количество составляющих его векторов, меньшей размерности, и включающее определенное ранее понятие обобщенной $H_2 -$ нормы как частный случай. А именно, пусть выход системы (2.7) представлен в виде векторов разных размерностей, тем самым для получения обобщенной $H_2 -$ нормы необходимо взять бесконечную норму от каждого вектора по выходу, таким образом обобщенная $H_2 -$ норма определяется как:

$$\|H\|_{g2} = \sup_v \frac{\|z\|_{g\infty}}{\|v\|_2} = \sup_v \frac{\sup_{t \geq 0} |z|_{g\infty}}{\|v\|_2} = \lambda_{gmax}^{\frac{1}{2}}(CYC^T) \tag{2.15}$$

где $\lambda_{gmax} -$ максимальное собственное число среди блочных симметричных матриц произведения CYC^T. Обратим внимание на норму $\|\cdot\|_{g\infty}$, данная норма представляет собой обобщенную $\infty -$ норму для вектор-функции $z(t)$. Такая норма вычисляется как максимум среди точных верхних границ норм второго порядка вектор-функций: $\|a\|_{g\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \left\| \sup_{t \geq 0} a_i(t) \right\|_2$. Аналогично переходу (2.10) и (2.11) осуществим переход (2.12) и (2.13) к линейным матричным неравенствам:

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T & B \\ B^T & -I \end{pmatrix} < 0 \quad \begin{pmatrix} Y & C^T \\ C & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geq 0 \tag{2.16}$$

Где $Y = X^{-1} = Y^T \geq 0$ решение (2.16)

После того, как были описаны алгоритмы использования линейных матричных неравенств для устойчивой системы с приложенным внешним возмущением и одним выходом, стоит рассмотреть задачу управления с обратной связью по состоянию системы.

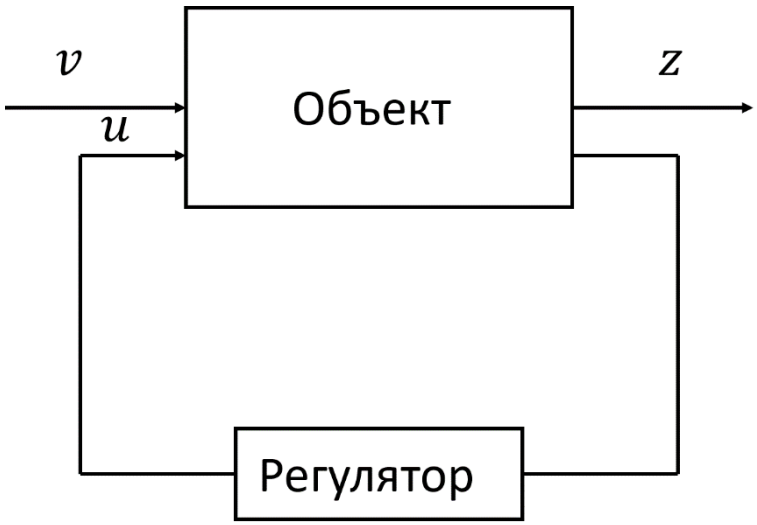


Рисунок 2.7 - Система управления с одним выходом при действии внешнего возмущения

Ознакомившись с использованием критериев для задачи №1 перейдем к задаче №2, где реализуем однокритериальную оптимизацию по состоянию системы.

Задача №2

Рассмотрим систему, находящуюся по действием внешнего возмущения, управления по полному состоянию системы и с одним выходом по состоянию в рамках обобщенной $H_2/H_\infty -$ норм.

Пусть к системе, рассматриваемой нами в вспомогательной задаче №1 приложен регулятор полного состояния системы (рис. 2.7) $u = \theta x$, искомые выходными параметры системы остаются прежними:

$$\begin{gathered}\dot{x} = Ax + B_u u + B_v v \\ z = Cx + Du \\ u = \theta x\end{gathered} \tag{2.17}$$

В ходе поставленной задачи нужно уменьшить отклик системы z, но для различных норм искомые функционалы будут разные как мы убедились в (2.12) и (2.15) соответственно и линейные матричные неравенства для искомых функционалов будут меняться. Тогда критерии гашения, сформированные в зависимости от норм.

H_∞ −Норма:

$$J_{H_\infty}(u) = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2} = \gamma$$

Обобщенная H_{g2} −норма:

$$J_{H_{g2}}(u) = \sup_{\|v\| \neq 0} \frac{\|z\|_{g\infty}}{\|v\|_2} = \lambda_{gmax}^{\frac{1}{2}}((C + D\theta)Y(C + D\theta)^T)$$

Преобразование линейных матричных неравенств для задачи №2 аналогично задаче №1, но с условием существования регулятора по состоянию системы, но матрица A будет заменена матричным выражением $A_c = A + B_u\theta$, а вектор C будет заменен векторным выражением $C_c = C + D\theta$, поэтому для данной постановки линейные матричные неравенства (2.13) и (2.16) преобразуются в (2.18) и (2.19).

H_∞ − Норма:

$$\begin{pmatrix} YA^T + AY + Z^T B_u^T + B_u Z & XB_v & C^T \\ B_v^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0 \tag{2.18}$$

где $Y = X^{-1}, Z = \theta Y$

Обобщенная H_2 − норма:

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0 \begin{pmatrix} Y & C^T \\ C & \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0 \tag{2.19}$$

При решении данной задачи матрица $Y = X^{-1}$ и значение γ берется единственным образом для обоих норм, а при поиске оптимальных решений для задач с большим числом выходов ситуация для $H_\infty -$ нормы меняется, а для обобщенной $H_2 -$ нормы остается прежней, что будет показано в задаче №3.

Пусть отклик системы в задаче №2 не является для нас информативным, так как мы хотим проследить изменение кинематических характеристик и параметров управления отдельно, для этого рассмотрим новую постановку где искомые отклики будут отдельно (2.20).

Задача №3

Теперь рассмотрим обобщенную $H_2/H_\infty -$ нормы для системы с управлением и двумя выходами (рис 2.8), управление в данной задаче осуществляется по состоянию.

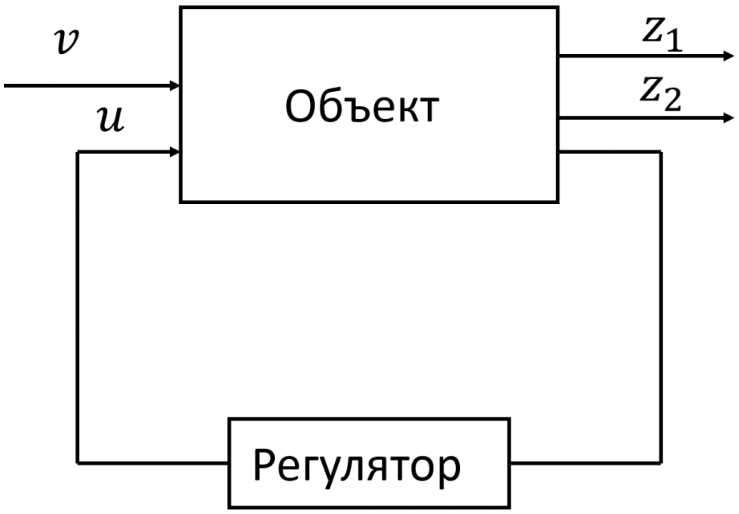


Рисунок 2.8 - Система управления с двумя выходами при действии внешнего возмущения

Пусть на выход данной системы подаются два значения взаимно конкурирующие между собой, такие как критерий управления и критерий относительно кинематических характеристик.

$$\begin{gathered}\dot{x} = Ax + B_u u + B_v v \\ z_1 = Cx \\ z_2 = Du \\ u = \theta x\end{gathered} \tag{2.20}$$

Для случая задач с двумя выходами использование H_∞ достаточно громоздко и не вполне корректно, так как выход при использовании неравенств H_∞ зависит от функции Ляпунова и уровня возмущений системы γ, тем самым придется решать две задачи с разными матрицами Ляпунова, что может послужить результатом не вполне корректных результатов. Критерии в свою очередь запишутся как:

$$J_{1_{H_\infty}}(u) = \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{\|z_1\|_2}{\|v\|_2} = \gamma_1$$

$$J_{2_{H_\infty}}(\theta) = \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{\|z_2\|_2}{\|v\|_2} = \gamma_2$$

А линейные матричные неравенства исходя из этого преобразуются в следующие:

$$\begin{pmatrix} A_c^T X_1 + X_1 A_c & X_1 B_v & C^T \\ B_v^T X_1 & -\gamma_1 I & 0 \\ C & 0 & -\gamma_1 I \end{pmatrix} < 0 \begin{pmatrix} A_c^T X_2 + X_2 A_c & X_2 B_v & \theta^T D^T \\ B_v^T X_2 & -\gamma_2 I & 0 \\ D\theta & 0 & -\gamma_2 I \end{pmatrix} < 0$$

При использовании обобщенной H_2 нормы ситуация противоположная, то есть матрица Ляпунова при двух выходах остаются постоянной как и уровень γ, и значения нормы не зависят от γ.

где $Z = \theta Y$. Критерии находятся как:

$$J_{1_{H_{g2}}}(u) = \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{\max\{\sup_{t\geq 0} |x(t)|\}}{\|v\|_2} = \lambda_{gmax}^{\frac{1}{2}}(CYC^T)$$

$$J_{2_{H_{g2}}}(u) = \sup_{\|v\|\neq 0} \frac{\sup_{t\geq 0} |u(t)|}{\|v\|_2} = \lambda_{gmax}^{\frac{1}{2}}(D\theta Y\theta^T D^T)$$

Линейные матричные неравенства для данной постановки примут вид:

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0 \begin{pmatrix} Y & C^T \\ C & \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0 \begin{pmatrix} Y & Z^T D^T \\ DZ & \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0$$

Оптимальность использования H_∞ − нормы для задачи №3 с двумя выходами является задачей невыпуклого оптимизации. Стоит понимать, что решение задачи оптимизации для двух выходов необходимо рассматривать как двухкритериальную задачу оптимизации.

В традиционном подходе исследования гашения колебаний предполагается наличие единственного критерия оценки качества гашения. Однако расширение области исследования гашения привело к тому, что существенным условием практического применения гашения оказывается наличие нескольких критериев оценки гашения, в данном случае рассматриваются два.

Реальные задачи управления всегда многокритериальны и это в полной мере относится к уменьшению влияния внешнего возмущения на различные выходы управляемого объекта. Одними из первых работ, в которых методы многокритериальной оптимизации применялись к синтезу оптимального по Парето управления, были статья [68] о линейно-квадратичном гауссовском управлении и статья [66], где множество оптимальных по Парето регуляторов в задаче со многими H_2-критериями было характеризовано в терминах решений уравнений Риккати, используя параметризацию Youla и скалярную многоцелевую функцию в виде линейной свертки критериев.

При практической реализации обратной связи к регуляторам предъявляются разнообразные инженерные требования, например, к степени устойчивости, декременту затухания системы, величине перерегулирования и прочими. Одним из наиболее значимых практических требований является ограниченность ресурса управления, поэтому при синтезе естественно накладывать те или иные ограничения на величину управляющего воздействия, [34] поэтому в рассматриваемой задаче на выходе системы берется ресурс управления. Второй же выход является максимальное значение вибрационного поля перемещений. Оба значения обратнозависимы, т.к. при уменьшении перемещения растет ресурс управления, а при снижении управления увеличивается смещение, таким образом данная задача сводится к двухкритериальной задаче.

2.5 Двухкритериальная задача гашения в терминах обобщенной $H_2 -$ нормы

И так, в рамках исследования вводится два функционала: первый функционал представляет собой максимальное перемещение, а второй является уровнем управляемой силы, полученной методом обратной связи.

$$(J_1(z_1(\theta)); J_2(z_2(\theta))) \to min$$

В обычной (однокритериальной или скалярной) оптимизации имеется одна целевая функция, определенная на некотором множестве возможных решений (вариантов) X. В многокритериальной оптимизации присутствуют сразу несколько таких числовых функций $f_1, f_2 .. f_m$, образующих векторный критерий f и заданных на непустом абстрактном множестве X, в нашем случае два критерия J_1 и J_2.

Соответственно, для получения результатов используется свертка для двух созданных критериев в один функционал. В дальнейшем будет представлен выбор свертки и выбор методов нахождения значения функционалов. Необходимо ввести общий функционал, который объединял бы в себе два выходных значения. Данный функционал должен представляет собой свертку.

$$J_\alpha(J_1(\theta_\alpha); J_2(\theta_\alpha)) \to min, \qquad \alpha \in (0,1)$$

Итогом должен являться функционал, содержащий оптимальное по Парето множество значений при различных значениях α, относительно двух критериев.[21, 25]

Существует множество сверток, метод линейной свертки критериев, пожалуй, является самым известным и распространенным при решении прикладных многокритериальных задач оптимизации. Он заключается в назначении тем или иным способом коэффициентов в линейной свертке (линейной комбинации) исходных критериев и последующей ее экстремизации на множестве допустимых вариантов. Согласно этому методу найденное таким способом решение считается «наилучшим». Кроме того, в линейной свертке сохраняются многие полезные свойства исходных критериев, такие, как линейность, выпуклость, вогнутость, непрерывность, дифференцируемость и др. По своему смыслу линейная свертка

представляет собой среднее взвешенное исходных критериев и именно с этих позиций многим ее использование представляется обоснованным.[24]

Решение многокритериальных задач на основе линейной свертки критериев состоит в назначении тем или иным способом неотрицательных (а чаще положительных) коэффициентов, в сумме дающих единицу (хотя это не обязательно), и последующей минимизации линейной комбинации критериев $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$на множестве X.

$$J_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i J_i, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \varsigma$$

где $\alpha_i -$ коэффициенты свертки, $\varsigma -$ некоторая постоянная.

Для двухкритериальной задачи линейная свертка примет вид, при $\varsigma = 1$:

$$J_\alpha = \alpha J_1(\theta_\alpha) + (1-\alpha) J_2(\theta_\alpha) \to min, \qquad \alpha \in (0,1)$$

Для <u>задачи №3</u> в рамках H_∞ нормы линейные матричные неравенства примут вид:

$$\begin{pmatrix} A_c^T X_1 + X_1 A_c & X_1 B_v & C^T \\ B_v^T X_1 & -\alpha\gamma_1 I & 0 \\ C & 0 & -\alpha\gamma_1 I \end{pmatrix} < 0 \begin{pmatrix} A_c^T X_2 + X_2 A_c & X_2 B_v & \theta^T D^T \\ B_v^T X_2 & -(1-\alpha)\gamma_2 I & 0 \\ D\theta & 0 & -(1-\alpha)\gamma_2 I \end{pmatrix} < 0$$

Существует так же свертка, предложенная Ю.Б. Гермейером для минимизации [11]:

$$J_\alpha(\theta) = \max\left\{\frac{J_k(\theta)}{\alpha_k}\right\}, k = \overline{1,n} \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \varsigma$$

Тогда функционал для рассматриваемой задачи при $\varsigma = 1$ использование свертки Гермейера имеет вид:

$$J_\alpha = \max\left\{\frac{J_1(\theta_\alpha)}{\alpha}; \frac{J_2(\theta_\alpha)}{1-\alpha}\right\}, \alpha \in (0;1)$$

Для обобщенной H_2 нормы берется свертка Гермейера, тогда линейные матричные неравенства запишутся как:

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0 \begin{pmatrix} Y & C_\alpha^T \\ C_\alpha & \alpha^2 \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0 \begin{pmatrix} Y & Z^T D_\alpha^T \\ D_\alpha Z & (1-\alpha)^2 \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0 \qquad (2.18)$$

Несмотря на то, что за последние десятилетия достигнут прогресс в решении задач оптимального управления с такими критериями как H_∞- и H_2-нормы, имеющими ясные физические интерпретации в виде уровней гашения детерминированных или стохастических возмущений из различных классов, рассмотрение многокритериальных задач с этими критериями вызывает значительные трудности. Эти трудности, в первую очередь, связаны со сложностью характеризации множества Парето и нахождения соответствующей скалярной многоцелевой функции, которая бы определяла это множество. Кроме того, задача осложняется тем, что каждый из критериев характеризуется своей квадратической функцией Ляпунова с матрицей, являющейся решением уравнения Риккати или линейных матричных неравенств, а скалярная оптимизация многоцелевой функции в виде той или иной свертки приводит, в общем случае, к билинейной системе неравенств относительно матриц этих функций Ляпунова и матрицы обратной связи регулятора. Для решения такой системы, как правило, вводилось дополнительное условие о равенстве между собой всех функций Ляпунова, что вносило консерватизм в рассматриваемую задачу [45, 59, 65, 78]. При этом без ответа оставался главный вопрос, в какой мере получаемые законы управления отличаются от оптимальных по Парето.

В недавних работах [2, 5, 44, 50] по многокритериальной оптимизации с критериями в виде H_∞- и γ_0-норм в детерминированной и стохастической постановках были найдены субоптимальные по Парето законы управления, относительные потери которых по сравнению с оптимальными по Парето не превышают $1 - \frac{\sqrt{N}}{N}$, где N - число критериев. Поэтому в рамках исследования и будет использоваться обобщенная H_2 норма.

Оценка эффективности виброзащиты объектов играет чрезвычайно важную роль в процессах проектирования и верификации системы управления. В виду объективной сложности экспериментального подтверждения результатов расчета и моделирования на первое место выходят методы исследования моделей на реально

снятых акселерограммах [72]. При этом сравниваются между собой множество критериев качества, например, такие как максимально достигаемое смещение этажей, максимальный уровень ускорения, энергии диссипации и др. Некоторые из критериев приведены в таблице 2.1. В качестве итоговой оценки может быть принята совокупность критериев, характеризующих деформации конструкции, её механические свойства, развиваемые усилия в цепи обратной связи, а также параметры, влияющие на итоговую стоимость системы управления.

Прямой показатель	
Обычный	Нормированный
Смещение этажа:	
$J_1 = \max\left\{\frac{\max\limits_{t,i}\lvert x_i(t)\rvert}{x^{max}}\right\}$	$J_5 = \max\left\{\frac{\max\limits_{t,i}\lVert x_i(t)\rVert}{\lVert x^{max}\rVert}\right\}$
Максимальное ускорение:	
$J_2 = \max\left\{\frac{\max\limits_{t,i}\lvert \ddot{x}_i(t)\rvert}{\ddot{x}^{max}}\right\}$	$J_6 = \max\left\{\frac{\max\limits_{t,i}\lVert \ddot{x}_i(t)\rVert}{\lVert \ddot{x}^{max}\rVert}\right\}$
Воздействие на фундамент:	
$J_3 = \max\left\{\frac{\max\limits_{t}\lvert \sum_i m_i\ddot{x}_i(t)\rvert}{F_b^{max}}\right\}$	$J_7 = \max\left\{\frac{\max\limits_{t}\lVert \sum_i m_i\ddot{x}_i(t)\rVert}{\lVert F_b^{max}\rVert}\right\}$
Максимальное относительное:	
$J_4 = \max\left\{\frac{\max\limits_{t,i}\frac{\lvert d_i(t)\rvert}{h_i}}{\delta^{max}}\right\}$	$J_8 = \max\left\{\frac{\max\limits_{t,i}\frac{\lVert d_i(t)\rVert}{h_i}}{\lVert \delta^{max}\rVert}\right\}$
Затраты на управление	
Обычный	Нормированный
Мощность управления:	
$J_{13} = max\left\{\frac{\max\limits_{t}\sum_i P_i(t)}{\dot{x}^{max}W}\right\}$	$J_{16} = max\left\{\frac{\sum_i \frac{1}{t_f}\int_0^{t_f} P_i(t)}{\dot{x}^{max}W}\right\}$
Сила управления:	

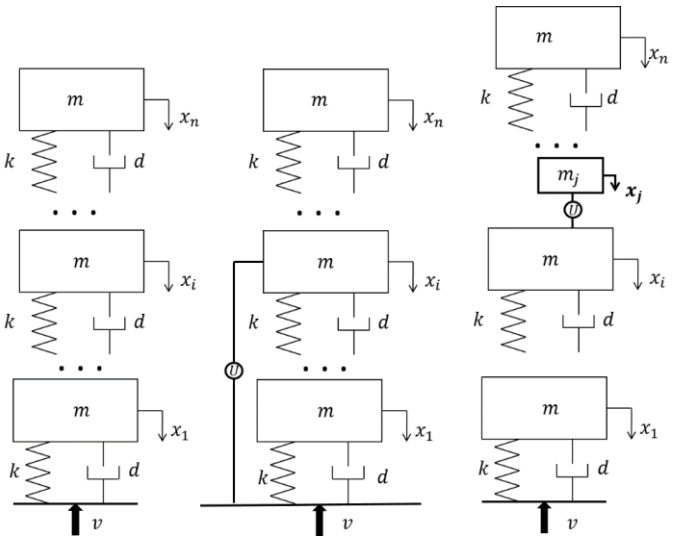
$$J_{14} = \max\left\{\frac{\max\lvert f_i(t)\rvert}{W}\right\}$$
Ход:
$$J_{15} = max\left\{\frac{\max\limits_{t,i}\lvert y_i(t)\rvert}{x^{max}}\right\}$$

Таблица 2.1 – Критерии гашения

2.6 Процессы гашения колебаний сосредоточенных систем

Помимо классических методов гашения: виброизоляции и приложения динамического гасителя колебаний существуют и другие методы борьбы с вредными колебаниями. Из-за ограниченного пространства в центрах больших городов помимо приложения динамического гасителя колебаний (Рис. 2.9 (б)) и виброизоляции к первому этажу существует метод соединений соседних зданий при помощи вязко-упругих связей – метод связывания.

Так как наиболее часто задачи гашения колебания защищаемого объекта рассматривались для механической сосредоточенной системы с одной степенью свободы, моделирующую колебания, одного или некоторого числа материальных точек, соединенных между собой упругими и вязкими связями, то для наибольшей наглядности методов гашения воспользуемся уже известными математическими моделями. Рассмотрим систему, находящуюся под действием внешней нагрузки и предположим, что масса основания во много раз превышает массу всей системы. К данной системе и применяются два метода гашения: динамический гаситель и виброизоляция. В данных задачах многоэтажное сооружение рассматривается как одномерная цепочка упруго и вязко связанных материальных точек на которую действует класс возмущений (рис. 2.9 (а)).[6, 25]



а) б) в)

Рисунок 2.9 - Схематичное обозначение системы сосредоточенных масс: а) без приложений виброзащиты; б) с виброизоляцией в) с динамическим гасителем колебаний

Где $x_i,\ i = \overline{1,n}$ – координаты i-ой материальной точки относительно основания. k, d – коэффициенты упругой и вязкой связи, т.е. коэффициенты жесткости и демпфирования, соответственно, m – масса материальной точки, V – внешнее возмущение на основание механической системы.

Для того чтобы объединить все параметры системы, проводится процедура обезразмеривания параметров

$$x = x_0\bar{x}, \qquad t = \sqrt{\frac{m}{k}}\bar{t}, \qquad b = \frac{d}{\sqrt{mk}}, \qquad V = V^* v$$

Где $x_0 -$ максимальная амплитуда колебаний объекта, $V^* -$ некоторая заданная положительная величина, масштаб возмущающей силы, b – безразмерный коэффициент вязкости системы сосредоточенных параметров. Откликом каждой материальной точки на внешнее возмущение является решением системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{\chi} + bQ\dot{\chi} + Q\chi = B_v v \tag{2.19}$$

Где $\chi = (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_i \dots \overline{x}_n)^T$ – вектор состояния, $v -$ возмущение $[1xn]$, $B_v -$ вектор приложения возмущений.

Так как система уравнений обладает одинаковыми условиями взаимодействия для всех строк кроме первой и последней разумно ввести некоторую вспомогательную матрицу следующего вида:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdots & \cdots & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Данная запись удобна и компактна относительно количества коэффициентов, так как в этой записи нет параметров $m, k, d,$ а только b, система (2.19) является безразмерной.

При реализации метода виброизоляции (рис. 2.9 (б)) в математическую модель (2.19) добавляются векторы:

$$\ddot{\chi} + bQ\dot{\chi} + Q\chi = B_v v + B_u U \tag{2.20}$$

где U - управление при виброизоляции, зависящие от коэффициентов упруго-вязкой связи.

При реализации динамического гасителя колебаний (рис. 2.9 (в)) размерность системы (2.20) увеличивается на количество приложенных гасителей, что и является основной причиной смещения резонансной частоты. Приложение к i-му этажу ДГК добавляет между i и $i + 1$ этажом еще одну переменную.

$$\ddot{\chi}' + bQ'\dot{\chi}' + Q'\chi' = B_v{}'v' + B_u{}'U' \tag{2.21}$$

где U – управление динамическим гасителем колебаний, зависящие от параметров упруго-вязкой связи и массы гасителя, а $'$ - обозначает добавление элементов и изменение размерности матриц и векторов из системы (2.19).

Данные модели (2.19), (2.20) и (2.21) наиболее часто используются для описания поведения многоэтажного сооружения под действием внешнего возмущения и моделирования виброзащиты от сейсмических воздействий.

Для данной задачи поиск оптимальных параметров гашения, хотя бы для трех этажей, аналитическим способом является крайне громоздким, более того тяжело осуществимым, а решение методом перебора не всегда может дать наиболее оптимальные решения. Рассмотрим данные задачи гашения как задачи управления и поиска оптимальной обратной связи. Так как идея гашения заключается в том, что действие любого виброзащитного устройства (гасителя или амортизатора) может быть сведена к формированию дополнительных динамических нагрузок, которые и обеспечивают необходимое изменение вибрационного поля перемещений, то в этом смысле задача виброзащиты может рассматриваться как задача управления движением защищаемой механической системы, а динамические воздействия, вызывающие соответствующие изменения параметров – как управления. Такая интерпретация роли виброзащитного устройства оказывается удобной для постановки и решения разнообразных задач виброзащиты; она позволяет использовать аппарат теории автоматического управления для анализа и синтеза виброзащитных систем. [17]

Так как с развитием техники все более остро стоит проблема защиты людей, машин и приборов от вибрационных и ударных воздействий, то традиционные методы виброзащиты, связанные с использованием пассивных элементов, инерционных, упругих и диссипативных, во многих случаях оказываются неэффективными. Они не могут в полной мере обеспечить выполнение сложных и, как правило, противоречивых требований, предъявляемых к виброзащитным устройствам. В связи с этим в последнее время все чаще применяются так называемые активные системы, являющиеся, по существу, системами автоматического управления движением амортизируемых тел, обладающими обычно независимыми источниками энергии.

Появление активных систем требует существенного пересмотра методов анализа и синтеза виброзащитных устройств. Естественно, что в первую очередь

речь должна идти об использовании методов теории автоматического управления, постановке такой задачи и методы решения в рамках теории управления были изложены выше в п. 2.3 ведь при использовании активных методов виброзащиты (активной виброизоляции и активного динамического гасителя колебаний) данная задача является задачей теории управления и поиска оптимальных параметров обратной связи.

2.7 Программа для ЭВМ расчета оптимального гибридного динамического гасителя колебаний

В ходе работы была зарегистрирована программа для ЭВМ охранный документ № 2018612922 «Библиотека программ, для расчета гибридного динамического гасителя колебаний», выполненная в процессе выполнения НИОКР «Разработка алгоритма обратной связи по измеряемому выходу на основе информации от микроволнового датчика смещения для активного управления колебаниями зданий» в рамках соглашения о предоставлении субсидии №14.578.21.0110 от 27.10.2015 между Министерством образования и науки Российской Федерации и ННГУ по теме «Исследование и разработка комплекса научно-технических решений микроволнового зондирования для активного управления колебаниями зданий и сооружений» [7].

Данная программа вычисляет оптимальное множество решений относительно двух критериев в случае приложенной гибридной системы виброгашения, реализованной при помощи техники линейных матричных неравенств.

Тип реализующей ЭВМ: IBM PC-совмест. ПК

Язык программирования: Python 3.7 (64-bit)

Вид и версия операционной системы: Windows XP / Vista / 7 / 8 / 10

Объём программы: 3836 байт.

<u>Листинг программы</u>

```
from scipy.optimize import minimize
from optimize_object import *
import warnings
```

```
import matplotlib.pyplot as plt

warnings.filterwarnings("ignore")

"""""
The problem of damping the oscillations
"""""

def main():
    # u = ax1 + bx1'
    Model = OptimizeObjectDumpingGermeir(floors=10, ThetaLen=3,
alphaArray=np.linspace(0.1, 0.9, 25), ufloor=3)

    get_pareto(Model)

def get_pareto(Model):
    # np.random.seed(100)
    J1 = []
    J2 = []

    # Optimization
    bnds = np.array([np.array([-100000.0, -0.1])] * Model.ThetaLen)
    for i in range(2, Model.ThetaLen):
        bnds[i][1] = 10000.

    startPoint = [-120] * Model.ThetaLen
    for i in range(1, Model.ThetaLen):
        startPoint[i] = 10

    print("Numerical Results:")
    # print("J1Alpha \t\t\t J2Alpha \t\t\t J1 \t\t\t J2 \t\t\t Theta")
    for value in Model.alphaArray:
        J2Alpha = np.amax(Model.alphaArray) - value +
np.amin(Model.alphaArray)

        x0 = startPoint
        cons = (
            {'type': 'ineq',
             'fun': lambda X: get_J_output(X, Model, Model.C1)},
            {'type': 'ineq',
             'fun': lambda X: get_J_output(X, Model, Model.C2)},
            {'type': 'ineq',
             'fun': lambda X: stable_cons_output(X, Model)}
        )

        while True:
            try:
                res = minimize(lambda X: germeir(X, Model, value),
np.array(x0),
                               bounds=bnds, method='SLSQP',
options={'disp': True}, constraints=cons, tol=10e-8)
                break
            except:
                startPoint[1] += 10

        Theta = res.x
        J1_temp = get_J_output(Theta, Model, Model.C1)
```

```
        J2_temp = get_J_output(Theta, Model, Model.C2)
        J1.append(J1_temp)
        J2.append(J2_temp)
        # print(str(value) + "\t" + str(J2Alpha) + "\t" + str(J1_temp)
+ "\t" + str(J2_temp) + "\t" + str(Theta))
        print(str(J1_temp) + "\t" + str(J2_temp) + "\t" + str(Theta))
    J1, J2 = sort_J1_J2(J1, J2)

    plt.plot(J1, J2, label='$u = \Theta_1x_1 + \Theta_2x_2, \Theta <
0$')
    plt.ylabel('$J_2$')
    plt.xlabel('$J_1$')
    plt.legend(loc='upper center', bbox_to_anchor=(0.5, -0.15),
ncol=2)
    plt.show()

    return J1, J2


def germeir(X, Model, J1Alpha):
    """
    :type Model: OptimizeObjectGermeir
    """

    J1_value = get_J_output(X, Model, Model.C1)
    J2_value = get_J_output(X, Model, Model.C2)

    if np.isinf(J1_value) or np.isnan(J1_value):
        J1_value = 0
    if np.isinf(J2_value) or np.isnan(J2_value):
        J2_value = 0

    J2Alpha = np.amax(Model.alphaArray) - J1Alpha +
np.amin(Model.alphaArray)

    return max(J1_value / J1Alpha, J2_value / J2Alpha)


def sort_J1_J2(J1, J2):
    data = np.column_stack((J1, J2))
    data = data.view(np.ndarray)
    data = data[np.lexsort((data[:, 0],))]
    return data[:, 0], data[:, 1]


def get_Ac(X, Model):
    X = np.reshape(X, (1, Model.ThetaLen))
    theta = np.matmul(X, Model.Cy)
    Ac = Model.A + np.matmul(Model.Bu, theta)
    return Ac


def stable_cons_output(X, Model):
    X = np.reshape(X, (1, Model.ThetaLen))
    Ac = get_Ac(X, Model)
    vals = np.linalg.eigvals(Ac)
    maxReal = -np.inf
```

```
    for eig in np.array(vals):
        maxReal = max(maxReal, np.real(eig))

    return -maxReal


def get_J_output(X, Model, C):
    X = np.reshape(X, (1, Model.ThetaLen))
    Ac = get_Ac(X, Model)

    Y = sp.linalg.solve_sylvester(Ac, Ac.transpose(), np.matmul(-
Model.Bv, np.array(Model.Bv).transpose()))

    lines = C.shape[0]
    temp_array_J2_values = []
    for i in range(lines):
        Ctemp = np.array(np.reshape(C[i], (1, 2 * Model.floors + 2)))
        Aa = Ctemp.dot(Y).dot(Ctemp.transpose())
        temp_array_J2_values.append(Aa)

    return np.sqrt(np.amax(temp_array_J2_values))


if __name__ == '__main__':
    main()
```

Данная программа будет использована в п. 2.8 для расчетов оптимальных множеств решений.

2.8 Двухкритериальная задача гашения многоэтажного сооружения

Так как в больших городах ограничена возможность строительства в связи с нехваткой места, то центры мегаполисов зачастую застраивают высотными зданиями, что подвергает их риску вибрационных откликов в случае даже слабых сейсмических толчков. Поэтому использование методов виброзащиты для высокоэтажных сооружений является коммерчески и практически более выгодным решением, чем уменьшать высоту сооружений или чинить в случае вредных вибраций. Помимо классических методов виброизоляции (рис. 2.9 б) и приложения динамического гасителя колебаний (рис. 2.9 в) существует метод соединения соседних зданий при помощи вязко-упругих связей, в дальнейшем мы будем называть этот подход к гашению методом связывания.

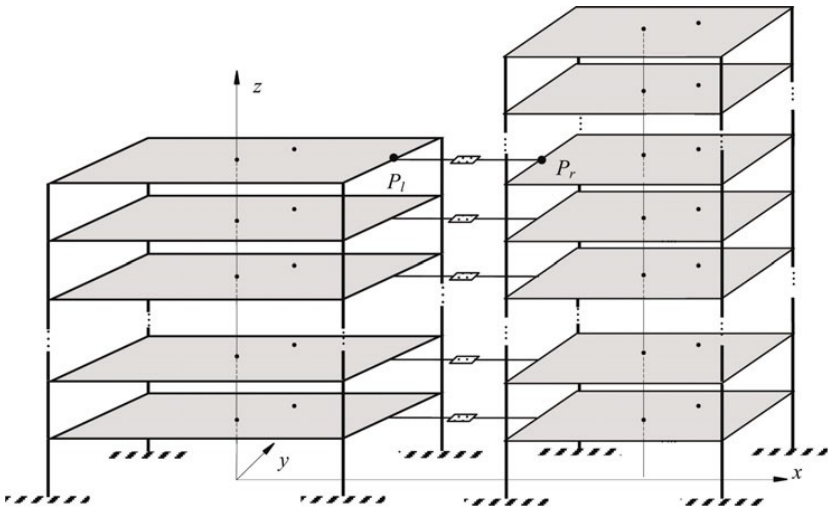


Рисунок 2.10 - Схематичное изображение зданий, соединенных методом связывания

Рассмотрим проблему оптимальной виброизоляции многомассовой конструкции, которую можно рассматривать, например, как задачу сейсмоизоляции высотного здания. Механическая система, моделирующая колебания высотного здания при сейсмическом воздействии на фундамент, представляет собой цепочку материальных точек (этажи здания), связанных последовательно диссипативными и упругими элементами (рис. 2.11), при этом рассматривается случаи гашения где защищаемое здание связано с соседним зданием с некоторыми условиями.

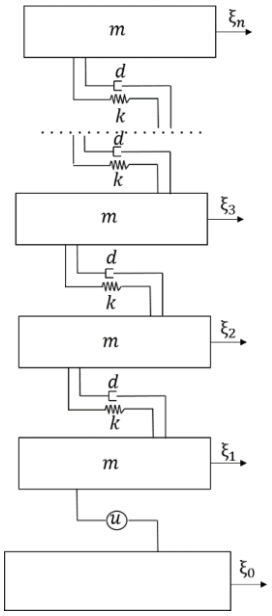


Рисунок 2.11 – Схема виброизоляции многомассовой конструкции

После приведения к безразмерному виду (п. 2.6) математическая модель такой системы имеет следующий вид

$$\ddot{\xi} + \beta K\dot{\xi} + K\xi = pv(t) + qu, \qquad \xi(0) = 0, \qquad \dot{\xi}(0) = 0$$

где $\xi = col(\xi_1, \dots \xi_m) -$ координаты материальных точек относительно основания, $v(t)$ – внешнее воздействие, с точностью до знака совпадающее с ускорением основания, u – управляющее воздействие, развиваемое методами связи; β-положительный параметр, характеризующий диссипативные свойства механической системы, положительно определенная симметрическая матрица K и векторы p и q задаются аналогично (п. 2.6) следующим образом:

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & \cdots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdots & \cdots & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathrm{q} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Приведем представленную систему к канонической форме управляемой системы:

$$\dot{x} = Ax + B_u u + B_v v$$

полагая $x = (\xi^T \ \dot{\xi}^T)$

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -K & -\beta K \end{pmatrix}, B_v = \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ p \end{pmatrix}, B_u = \begin{pmatrix} 0_{n\times 1} \\ q \end{pmatrix}$$

Функционалы, характеризующие качество виброизоляции многомассовой упругой системы, выберем в следующем виде

$$J_1(u) = \sup_{v\in L_2} \frac{\sup\limits_{t\geq 0}|x_1(t)|}{\|v\|_2}, \qquad J_2(u) = \sup_{v\in L_2} \frac{max\{\sup\limits_{t\geq 0}|x_2(t) - x_1(t)|, \dots, \sup\limits_{t\geq 0}|x_n(t) - x_{n-1}(t)|\}}{\|v\|_2}$$

Первый функционал характеризует смещение первого этажа относительно основания, а второй определяет деформацию многомассовой системы. Задача управления будет состоять в нахождении параметров обратной связи θ управления (виброизолятора), минимизирующего по Парето указанные функционалы. Заметим,

что рассматриваемые функционалы обладают следующим свойством: выбор параметров обратной связи, приводящий к уменьшению одного из них, например, максимального смещения первого этажа относительно основания влечет увеличение значения другого функционала, определяющего максимальную деформацию системы (высотного здания). Таким образом, естественный подход к задаче виброизоляции заключается в поиске компромисса между значениями максимального смещения объекта относительно основания и максимальной деформации самого упругого объекта, что приводит к двухкритериальной задаче оптимального управления.[6]

Приведем результаты решения двухкритериальной задачи для $n = 10$, $\beta = 0.1$. Сначала рассмотрим случай, который назовем «идеальное связывание», когда измерению доступно полное состояние управляемой системы, т.е. в формировании обратной связи участвуют как координаты, так и скорости всех материальных точек механической системы, например связывание 10 этажей соседних зданий. На рисунке 2.12 кривая 1 (сплошная линия) представляет множество оптимальных по Парето значений функционалов $\{J_1, J_2\}$ для указанного случая. Очевидно, что на практике вряд ли доступно измерению полное состояние механической системы, тем не менее, полученное решение позволяет получить оценку снизу для оптимальных значений функционалов. Рассмотрим далее случай, когда обратная связь формируется на основе лишь текущего значения переменной x_1 и скорости ее изменения $\dot{x}_1$ (переменная x_{11}). Фактически, данный случай соответствует пассивной виброизоляции 1 этажа с упругим и демпфирующим элементами. На рисунке 2.12 кривая 2 (штриховая линия), расположенная выше «предельной» кривой 1 соответствует Парето оптимальным значениям функционалов в классе пассивной виброизоляции. Еще две кривые 3 (пунктирная линия) и 4 (штрих-пунктирная линия), представленные на рисунке 2.12 отвечают случаям, когда помимо пассивной виброизоляции используется связь со вторым этажом соседнего здания (кривая 3) и еще дополнительно связаны с третьим этажом (кривая 4). Анализ приведенных на рисунке 4.2 кривых показывает, что методы связи (кривые 3 и 4) не намного лучше пассивного (кривая 2), но все эти три решения заметно уступают «идеальное связыванию» (кривая 1).[31]

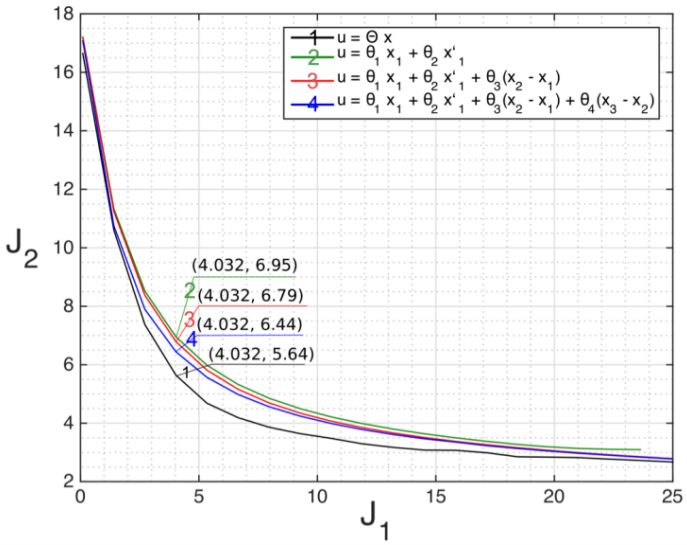


Рисунок 2.12 – Парето фронты при различных типах виброизоляторов

Таким образом, изучена двухкритериальная задача оптимальной виброзащиты упругого многомассового объекта. В качестве критериев выбраны обобщенные операторные H_2-нормы системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику защищаемого от внешних воздействий объекта. Схема решения многокритериальной задачи оптимального управления основана на применении свертки Гермейера и на технике линейных матричных неравенств. В двухкритериальной задаче оптимальной виброизоляции высотного здания от сейсмических воздействий на плоскости критериев построено множество Парето, а также проведено сравнение «идеального» Парето оптимального связывания с более простыми методами виброзащиты.[43]

2.9 Итоги главы 2

Во второй главе были сформулированы основные задачи гашения, в том числе и многокритериальные, были приведены наиболее важные критерии, такие как: смещение относительно основания и значение управления. Была приведена методика решения задач гашения при помощи обобщенной $H_{g2}-$ нормы, реализованная в рамках линейных матричных неравенств.

В ходе второй главы была решена задача гашения для высотного сооружения, связанного с соседним зданием, при этом его мы считаем абсолютно жестким телом. Математическая модель данного сооружения рассматривалась как цепочка материальных точек, связанных вязкоупругими связями, одна из точек связана с основанием. В качестве критериев использовались максимальные отклонения относительно этажей и приложенное управление. В ходе решения было получено, что наилучшее управление, которое может быть приложено к защищаемому сооружению – это полное управление, а далее оптимальность управлений идет по нисходящей в зависимости от числа связей с абсолютно жестким зданием.

ГЛАВА 3. ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

В главе 2 была рассмотрена аппроксимация многоэтажных сооружений как системы сосредоточенных тел, обладающих конечным числом степеней свободы. Такой метод наиболее удобен для геометрически сложных объектов. Но при этом некоторые системы необходимо исследовать в более строгой постановке, не используя дискретизацию аналитической модели. В такой постановке массовые и деформационные характеристики рассматриваются как непрерывные функции. Для того чтобы указать положение каждой точки тела, требуется ввести бесконечное число координат перемещений, поэтому система обладает бесконечным числом степеней свободы [31]. Из-за распределения массы упругое тело имеет бесконечное число собственных форм колебаний, поэтому его динамические перемещения можно рассматривать как сумму перемещений по каждой из нормальных форм колебаний. Поэтому и гашение колебаний таких систем представляет собой уменьшение динамических перемещений, зависящих от формы колебаний.

3.1 Колебания распределенных систем

Для распределенных систем рассматриваются три вида колебаний: продольные, крутильные и поперечные колебания. Продольные и крутильные колебания описываются дифференциальным уравнением второго порядка, а поперечные колебания – четвертого порядка. Рассмотрим на примере продольных колебаний основные методы исследования колебаний распределенных систем. Чаще всего математическая модель продольных колебаний равномерно-распределенной изотропной балки описывается при помощи одномерного волнового уравнения [8]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{F}{\rho A}, \qquad a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

где $u(x,t)$ –продольные перемещения, $E, \rho -$ модуль упругости и плотность материала соответственно, $A -$ площадь поперечного сечения, $F -$ внешняя осевая нагрузка приложенная к торцу балки. В данной модели не учитывается то, что со временем, колебания будут затухать, поэтому рассмотрим модель с учетом внутреннего трения стержня. Для учета внутреннего трения воспользуемся линейной моделью Кельвина – Фойгта:

$$\sigma = E\left(\varepsilon + \nu\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right) \tag{3.1}$$

где ν –внутреннее трение материала, σ, ε, E – нормальное напряжение, осевая деформация и модуль упругости рассматриваемого объекта. Теперь запишем безразмерную модель продольных колебаний с учетом трения для равномерно-распределенной изотропной балки:

$$\ddot{u} - \mu C\dot{u} - Cu = \digamma$$

где $\mu = \frac{a\nu}{l}$ – безразмерный параметр демпфирования системы, $C = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – дифференциальный оператор второй степени, $\digamma = \frac{Fl}{EA}$ – безразмерный параметр осевой нагрузки.

Существует связь между продольными колебаниями распределенных и сосредоточенных систем. Как было сказано выше сосредоточенные системы являются дискретизацией аналитической функции. В п. 2.7 мы рассматривали 10-этажное сооружение как последовательную связь 10 материальных точек, но данная задача являлась модельной, так как ее основная задача была в том, чтобы показать возможные методы гашения и сравнить их относительно двух критериев. А сейчас исследуется необходимое число материальных точек для сходимости собственных частот продольных колебаний равномерно-распределенной изотропной балки и системы сосредоточенных одинаковых масс, связанных по цепочке вязко - упругой связью, аналогичную системам рассмотренных в п. 2.6.

Приведем график сравнения амплитудно-частотных характеристик для сосредоточенной и распределенной систем:

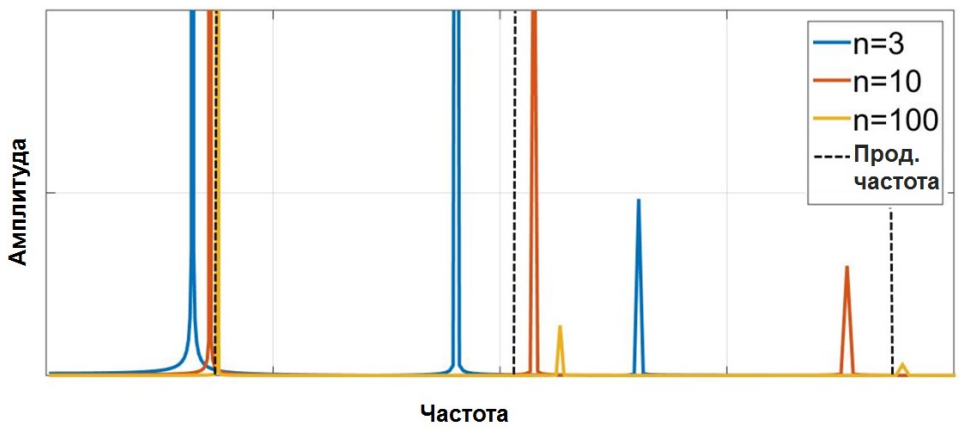


Рисунок 3.1 – АЧХ распределенной и сосредоточенной системы при увеличении числа масс

Таким образом использование сосредоточенных систем в качестве описания поведения продольных колебаний невозможно без вычислительных машин, но при использовании балансировки, приложения динамического гасителя с массой модель сосредоточенных систем наиболее просто позволит описать поведение конструкции.

Крутильные колебания во многом аналогичны продольным, поэтому рассматривать их отдельно не имеет смысла. Продольные и крутильные колебания представляют собой некоторый практический интерес и достаточно подробно описаны в [8, 9, 14, 28, 33], но для нас наибольший интерес представляет более сложный и проблемный тип колебаний – поперечные колебания.

Для описания поперечных колебаний балки существуют три основных модели: Бернулли – Эйлера, Релея, Тимошенко. В классической теории Я.Бернулли и Л.Эйлера предполагается, что:

1) поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные оси стержня до деформации и во время изгиба остаются плоскими и перпендикулярными деформированной оси стержня;
2) нормальные напряжения на площадках, параллельных оси пренебрежимо малы, т.е. продольные сечения сопротивляются изгибу независимо, не оказывая друг на друга влияния;
3) инерцией вращения элемента стержня при изгибе пренебрегается.

В теории Релея учитывается инерция вращения элемента, балки при изгибе, что приводит к изменению выражения для кинетической энергии стержня, а в теории Тимошенко, кроме этого, предполагается, что поперечные сечения остаются плоскими, но не перпендикулярными деформированной оси стержня. Математическое описание моделей Бернулли – Эйлера, Релея, Тимошенко представлено ниже соответственно:

$$\begin{gathered} \rho A\ddot{\omega} + EI\omega^{IV} = 0 \\ \rho A\ddot{\omega} - \rho I\ddot{\omega}'' + EI\omega^{IV} = 0 \\ \begin{cases} \rho A\ddot{\omega} - \alpha GA(\omega'' - \varphi') = 0 \\ \rho I\ddot{\varphi} - IE\varphi'' + \alpha GA(\varphi - \omega') = 0 \end{cases} \end{gathered} \tag{3.2}$$

где $\omega(x,t), \varphi(x,t) -$ прогиб балки, $\rho, A, I, E, G -$ плотность, площадь поперечного сечения, момент инерции сечения балки, модуль упругости и модуль сдвига соответственно.

Ставя своей задачей определение только нормальных напряжений изгиба, в основу теории достаточно положить гипотезу о том, что плоские до деформации поперечные сечения балки остаются после деформации плоскими и перпендикулярными деформированной оси [14]. Теория изгиба, построенная на гипотезе плоских сечений, была в основном завершена уже Л. Эйлером и носит название теории Бернулли — Эйлера или технической теории изгиба. Точная теория изгиба, построенная Сен-Венаном для того случая, когда балка загружена сосредоточенными силами, а также немногочисленные строгие решения задачи об изгибе распределенной нагрузкой приводят к заключению, что, хотя гипотеза Бернулли не вполне верна, все же основанные на ней расчеты оказываются весьма точными. [28]

С учетом гипотез Бернулли-Эйлера функция Гамильтона для поперечных колебаний балки запишется так:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\rho A\left(\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{t}}\right)^2 - EI\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)^2\right)dx \tag{3.3}$$

Тогда линейная модель Бернулли-Эйлера примет классический вид:

$$\rho A\ddot{\omega} + EI\omega^{IV} = 0$$

Стоит отметить так же, что движение в механических колебательных системах в зависимости от принимаемых допущений может описываться линейными, квазилинейными и нелинейными дифференциальными уравнениями, каждое из которых требует своих подходов и методов исследования. Наиболее развита теория линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, позволяющая получать точные решения в аналитическом виде.

В классической теории функции плотности, упругости, момента инерции и площади поперечного сечения непрерывны, с учетом внутреннего трения (3.1) линейная безразмерная модель для поперечных колебаний балки имеет вид:

$$\ddot{\omega} + \beta K\dot{\omega} + K\omega = 0 \tag{3.4}$$

где $K = \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ – дифференциальный оператор четвертой степени, $\beta = \frac{a}{l^2}\vartheta$ – безразмерный коэффициент демпфирования системы с распределенными параметрами. Решение уравнение с частными производными (3.4) ищется методом Фурье:

$$\omega(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)T_i(t)$$

где $X(x)$ и $T(t)$ – функции, описывающие форму собственных колебаний (главные или нормальная функции) и зависимость колебаний от времени соответственно. Для описания функции формы значительное удобство представляет собой использование введенных А.Н. Крыловым комбинаций функций [9]:

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^{4} C_j K_j(\lambda_i x) = C_1\big(\cos(\lambda_i x) + ch(\lambda_i x)\big) + C_2\big(\sin(\lambda_i x) + sh(\lambda_i x)\big)$$
$$+ C_3\big(-\cos(\lambda_i x) + ch(\lambda_i x)\big) + C_4(-\sin(\lambda_i x) + sh(\lambda_i x))$$

где λ_i – собственное число уравнения, при помощи метода нормальных форм и разложения Фурье выражение (3.4) преобразуется к виду:

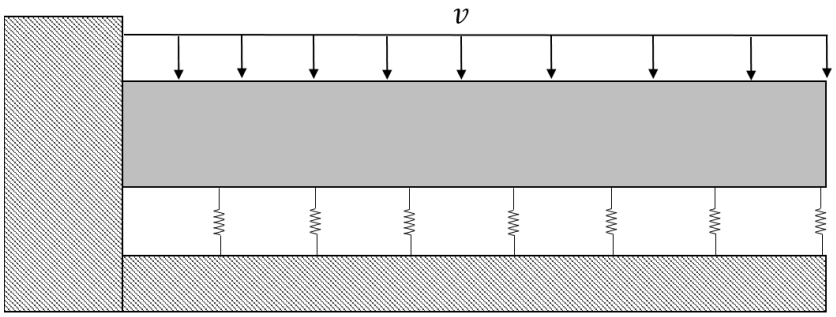
$$\ddot{T}_i + \beta\lambda_i^4\dot{T}_i + \lambda_i^4 T_i = 0 \qquad (3.5)$$

при решении в безразмерных переменных значения λ_i являются аналогом параметра k для размерных задач, а значение длины балки в безразмерных переменных единица.

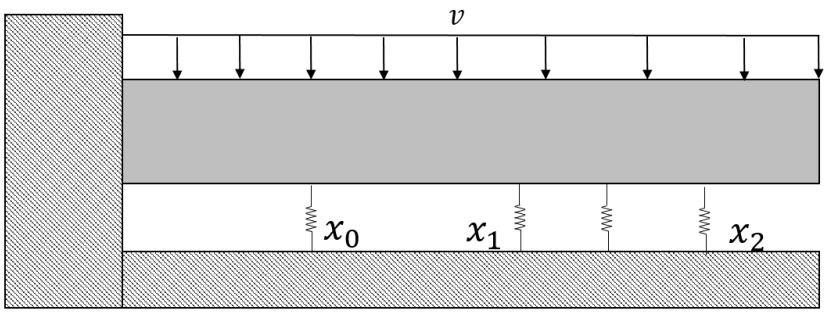
3.2 Виброизоляция балки

Виброизоляция вдоль всей длины становится актуальной в связи с увеличением высоты городских построек и увеличивающимся ветровым воздействием на здания. Ветровое воздействие является существенным негативным фактором, влияющим на высотные здания. Его влияние настолько велико, что одними лишь конструктивными мероприятиями по увеличению размеров несущих элементов и класса бетона проблему не решить. Как следствие, последние этажи, которые являются наиболее приоритетными при операциях с недвижимостью, отводятся под размещение многотонных маятников-демпферов (п. 2.6). Процент полезных площадей падает, поскольку технические помещения занимают вместо стандартных 1,5% около 10% помещений [30]. В дальнейшем мы рассмотрим связь соседних зданий при помощи вязко-упругих связей, помимо классической виброизоляции и приложения динамического гасителя колебаний данный подход не является таким распространенным и является достаточно новым и перспективным.

Задача приложенной пассивной виброизоляции для балки по всей длине сводится к модельной задаче балки, лежащей на упругом основании. Данная задача обширно применятся в машиностроении и других областях техники в эксплуатационном режиме.



а)



б)

Рисунок 3.2 - Консольная балка: а) на упругом основании б) с упругой связью в одной точке и на интервале

Стоит отметить, что в инженерной практике часто встречаются постановки задач с балочными элементами, лежащими на упругом основании: шпалы, железнодорожные пути, ленточные фундаменты зданий, фундаменты плотин, опирающиеся на грунты, трубопроводы, уложенные на грунт или внутрь его и др. Кроме того, к таким конструкциям относятся также и рельсы, у которых число опор бесконечно велико, а расстояние между ними мало по сравнению с длиной. Примем следующие допущения для расчета балки на упругом основании:

1) между опорной поверхностью балки и основанием имеется неразрывная связь, вследствие чего в основании могут возникнуть растягивающие усилия;
2) упругое основание по всей длине балки однородно и ширина постели балки постоянная;
3) упругая связь основания и балки описывается гипотезой Фусса – Винклера, то есть реакция упругого основания в каждой точке пропорциональна прогибу балки: $F_{\text{упр.осн.}} = -K_s\,\omega$.

Для случая расчета вязко-упругой связи балки с основанием примем:

4) Демпфирующая реакция вязко-упругого основания описывается линейным законом: $F_{\text{упр.осн.}} = -D_s\,\dot{\omega}$

Для балки (рис. 3.2 (а)) лежащей на упругом основании аналогично (3.3) выводится уравнение поперечных колебаний балки из функции Гамильтона:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\rho A\left(\frac{\partial\omega}{\partial \mathrm{t}}\right)^2 - EI\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)^2 - K_s\omega^2\right)dx$$

При рассмотрении балки с упругой связью функция формы имеет прежний вид, а собственная частота балки меняется в зависимости от коэффициента K_s, таким образом математическая модель балки лежащей на упругом основании запишется как:

$$EI\frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} = K_s\omega$$

В случае использования метода связывания как метода гашения необходимо учесть вязкость связей с основанием так как в основном именно демпфирующие свойства вязкости уменьшают отклик. Так же стоит понимать, что задача интересна только в случае приложении внешнего возмущения. Если бы ветровые нагрузки были статичными, то проектирование здания не представляло каких-то чрезмерных трудностей для конструкторов и инженеров. Теперь рассматривается постановка, в которой учитывается демпфирование балки и упругой связи. Воспользуемся процедурой обезразмеривания:

$$\ddot{T}_i + (\beta\lambda_i^4 + D_s')\dot{T}_i + (\lambda_i^4 + K_s')T_i = \int_0^1 X_i dx\, v(t) \qquad (3.6)$$

где $K_s' = \frac{l^4 K_s}{EI}$, $D_s' = \frac{\mathrm{l}^2\mathrm{D_s}}{a(\rho A)}$ – безразмерные коэффициенты упругости демпфирования связи балки с основанием, $v(t)$ – внешнее возмущение принадлежащее классу L_2.

Математическая модель (3.6) описывает виброизоляцию балки вдоль всей длины, но на практике такая постановка является не всегда выполнимой и коммерчески выгодной, поэтому стоит рассмотреть связь балки с основанием на интервале или же в некоторой точке (рис. 3.2 (б)). Для описания балки связанной с основанием в точке и на интервале воспользуемся обобщенными функциями Дирака и Хевисайда. Тогда математическая модель, а так же уравнение в главных

координатах, балки связанной с основанием в точке x_0 и на интервале $[x_1, x_2]$, примет вид:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial^5\omega}{\partial x^4\,\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial^4\omega}{\partial x^4} = -(K_s'\omega + D_s'\ \dot{\omega})(\delta(x - x_0) + H(x_1, x_2)) + v(t)$$

$$\ddot{T}_i + \left(\beta\lambda_i^4 + (X_i^2(x_0) + \int_{x_1}^{x_2} X_i^2\,dx)D_s'\right)\dot{T}_i + \left(\lambda_i^4 + (X_i^2(x_0) + \int_{x_1}^{x_2} X_i^2\,dx)K_s'\right)T_i = \int_0^1 X_i dx\, v(t)$$

где x_0 и (x_1, x_2) – точка и участок упруго-вязкой связи основания с балкой, $\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, x \neq x_0 \\ 1, x = x_0 \end{cases}$ и $H(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, x < x_1, x > x_2 \\ 1, x \in [x_1, x_2] \end{cases}$ – дельта-функция Дирака и функция Хевисайда [14, 16].

В дальнейшем при переходе к безразмерным координатам договоримся не ставить штрихи у переменных, чтобы не загромождать всю формулу штрихами, но стоит иметь в виду, что при обезразмеривании переменные меняют свое значение.

3.3 Задача гашения методом связной виброизоляции

Поскольку пространство в больших городах ограничено, здания, расположенные близко друг к другу, связывают устройствами гашения [46, 47, 53, 54, 84, 85, 86, 89] тем самым уменьшая отклики зданий на сейсмические воздействия. Для рядом стоящих зданий существуют связные методы виброзащиты. Ярким примером таких зданий являются Тройные Башни в Токио [40, 64]. Устройства гашения могут располагаться как вдоль всей высоты здания, так и на отдельных участках или в точках.

До сих пор нет окончательной ясности в вопросе выбора наилучшего типа гашения. Авторы статьи [48] предлагают использовать для сильных резонансных колебаний вместо активного гашения полуактивное или пассивное гашение, так как для активных методов гашения крайне важна проблема устойчивости. Если метод активного гашения используется некорректно, то активные силы управления могут усилить колебания. Авторы [79] считают, что пассивные системы гашения колебаний неприемлемы из-за низкой эффективности или превышения допустимого веса, а активное гашение колебаний, реализуемое актюаторами, более эффективно.

Таким образом вопрос выбора активного или пассивного гашения остается открытым.

В качестве модели данной задачи рассматривается консольная балка, лежащая на упругом основании, подверженная некоторому возмущению. Исследуется активное (рис. 3.3 (а, в)) и пассивное (рис. 3.3 (б, г)) гашение колебаний консольной балки, связанной с основанием пассивными и активными методами с равномерно распределенным управлением по всей длине (рис. 3.3 (а, б)) и управлением на интервале (этаже) (рис. 3.3 (в, г)).

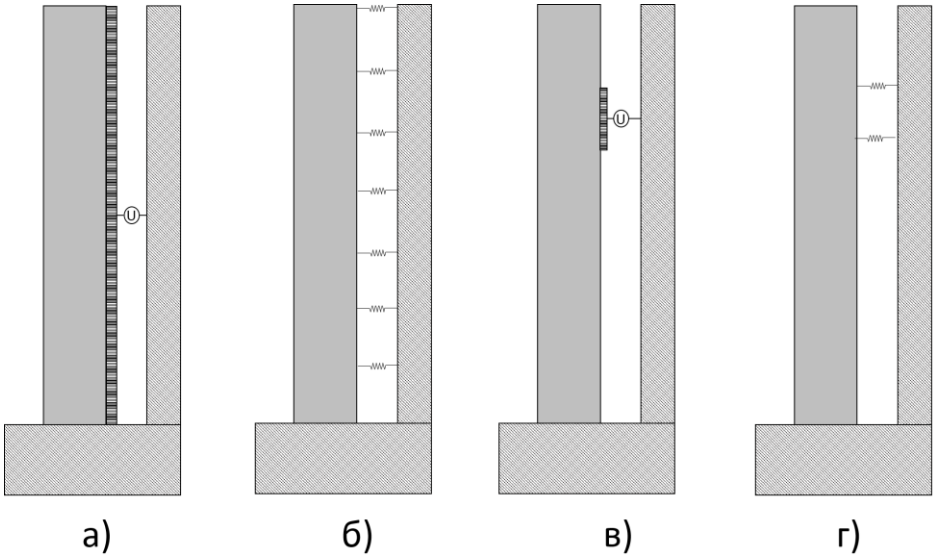


Рисунок 3.3 – Методы приложения гашений: а), б) активное и пассивное гашения вдоль всей длины, в), г) активное и пассивное гашения на интервале

Как и ранее полагается, что масса и размеры основания настолько превышают массу и размеры балки, что влияние балки на основание пренебрежимо мало. Осуществляется оценка величин двух критериев, обеспечивающих оптимальное гашение колебаний (уровня управляющей силы и величины максимального прогиба балки). [26]

Модель динамической системы для рассматриваемой системы имеет вид:

$$\ddot{\omega} + \beta K\dot{\omega} + K\omega = -u + v(t) \tag{3.7}$$

где $K = \frac{\partial^4}{\partial x^4}$ – дифференциальный оператор четвертой степени, $v(t)$ – внешнеее возмущение.

Если для управления используется датчик, установленный в точке x_1, то управление записывается в виде:

$$u = \theta^{(1)}\omega(x_1) + \theta^{(2)}\dot{\omega}(x_1)$$

где $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}$ – коэффициенты обратной связи при перемещении и скорости.

Для решения задачи управления используются первые m мод собственных колебаний балки и для них записывается уравнение движения в матричном виде:

$$\dot{T} = \begin{pmatrix} 0_{mxm} & I_{mxm} \\ -\Lambda^4 & -\beta\Lambda^4 \end{pmatrix} T + B_u\theta^{(0)}T + B_v v(t) \tag{3.8}$$

где $T = \left(T_1 \dots T_m, \dot{T}_1 \dots \dot{T}_m\right)^T$ – вектор состояния, $\Lambda = diag(\lambda_1 \dots \lambda_m)$ – диагональная матрица собственных чисел, B_u и B_v – векторы управления и возмущения. Для управления распределенной системой имеем $B_u = B_v$.

Задача сводится к задаче теории управления – поиску регулятора статической линейной обратной связи по состоянию:

$$\begin{gathered} \dot{T} = AT + B_u u + B_v v \\ z_1 = CT \\ z_2 = Du \\ u = \theta^{(0)}T \end{gathered} \tag{3.9}$$

z_1, z_2, C и D – измеряемые выходы по состоянию для обоих критериев и соответствующие матрицы выходов.

Задача гашения колебаний консольной балки на упругом основании сводится к двухкритериальной задаче: на выходе системы рассматриваются уровень управляющей силы и максимальный прогиб балки (для консольной балки это прогиб на свободном конце). Обе величины обратнозависимы при увеличении уровня управляющей силы прогиб уменьшается, при снижении уровня управляющей силы прогиб увеличивается. Необходимо минимизировать оба критерия, для чего используется свертка для двух созданных критериев в один функционал:

$$J_\alpha(J_1(\theta_\alpha, \alpha); J_2(\theta_\alpha, (1-\alpha))) \to min,\ \alpha \in (0,1)\ .$$

Классический подход к синтезу линейных обратных связей в пространстве состояний связан с каноническим представлением управляемого объекта и построением модального управления, обеспечивающего заданные собственные значения (моды) матрицы замкнутой системы. Построение модального управления сводится к нахождению характеристического полинома матрицы A, выбору канонического базиса и решению системы линейных уравнений. Вместе с тем возможен альтернативный путь синтеза стабилизирующих регуляторов, основанный на применении теории линейных матричных неравенств и эффективных алгоритмов их решения, реализованных в пакете MATLAB [4].

Для линейных матричных неравенств оптимальные по Парето законы управления синтезируются с использованием свертки Гермейера [3]:

$$J_\alpha(\theta) = \max\left\{\frac{J_1(\theta)}{\alpha}; \frac{J_2(\theta)}{1-\alpha}\right\}, \quad \alpha \in (0,1) \tag{3.10}$$

Векторы выхода динамической системы (3.9) преобразуются к виду: $C_\alpha = \frac{C}{\alpha}$, $D_\alpha = \frac{D}{1-\alpha}$. Для минимизации функционала J_α и описания критериев используется обобщенная H_2 – норма, значения критериев, минимизирующих функционал (3.10), находятся из выражений:

$$J_1 = \left\|H_{z_1 v}\right\|_{g_2} = \sup_{v \in L_2} \frac{\|z_1(t)\|_{g\infty}}{\|v\|_2} = \sup_{v \in L_2} \frac{sup_{t \geq 0}|z_1(t)|_{g\infty}}{\|v\|_2} = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}} S\left(H_{z_1 v}\right) = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}}(CYC^T)$$

$$J_2 = \left\|H_{z_2 v}\right\|_{g_2} = \sup_{v \in L_2} \frac{\|z_2(t)\|_{g\infty}}{\|v\|_2} = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}}(D\theta Y\theta^T D^T)$$

Анализ решения системы уравнений в главных координатах с использованием пакета программ MATLAB показывает, что кривые для 4-10 мод совпадают с кривыми для 2 и 3. Поиск оптимальной обратной связи относительно двух критериев осуществляется при помощи теории линейных матричных неравенств и эффективных алгоритмов их решения, реализованных в пакете MATLAB, подробно описанный в п. 2.5.

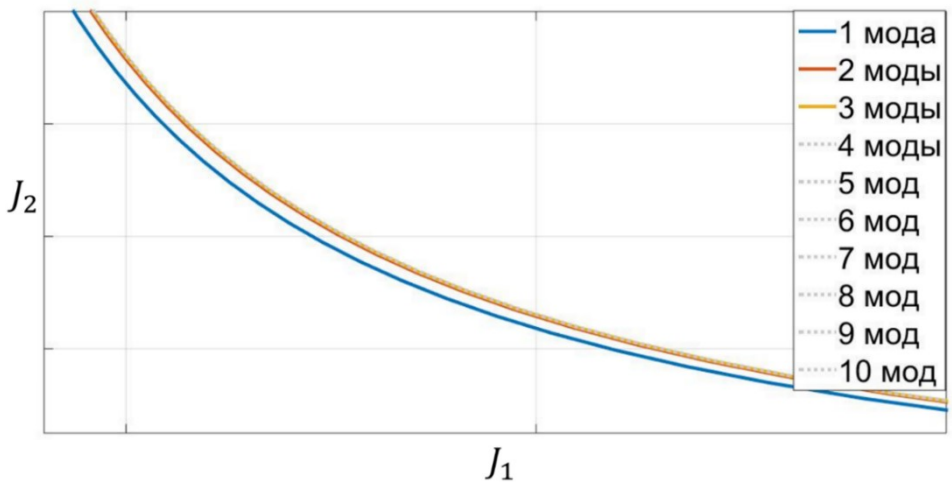


Рисунок 3.4 - Парето множество решений относительно двух критериев для различного числа мод

Трех первых мод вполне достаточно для описания множества решений и при дальнейших исследованиях рассматривается функционал только для трех первых мод.

Наличие управляющей нагрузки на интервале в математической модели описывается выражением:

$$\ddot{\omega} + \beta K\dot{\omega} + K\omega = -uH(x_1, x_2) + v(t)$$

где (x_1, x_2) – интервал приложения управляющей нагрузки.

Задача с распределенным управлением особенно интересна с практической точки зрения, когда для гашения колебаний используются динамические активные способы, приложенные к соседним этажам зданий [18].

Пусть рассматриваемая балка имеет 10 одинаковых интервалов (в постановке задаче аналог 10 этажей). Сравним активное гашение по всей длине и на интервалах.

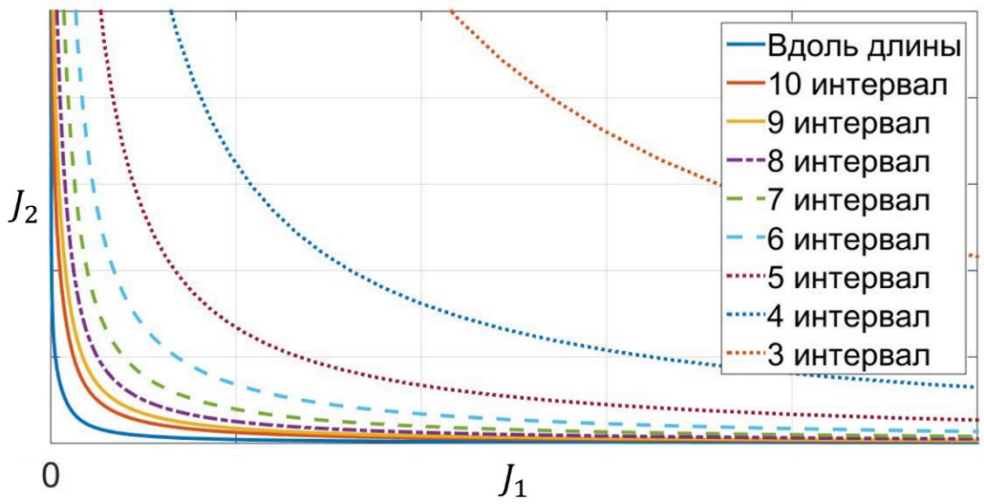


Рисунок 3.5 – Парето множество решений для активного гашения вдоль всей длины и на интервале

Эффективность приложения высоты интервала оказалась прямо пропорциональна высоте приложения, что и следовало ожидать, но необходимо отметить, что при возмущении величина амплитуды также прямо пропорциональна высоте. Поэтому для сохранности креплений связных зданий желательно устанавливать их как можно ниже. Поэтому в данном случае мы выберем 8 интервал (этаж) как наиболее эффективный и удаленный от свободного конца гаситель (рисунок 3.6).

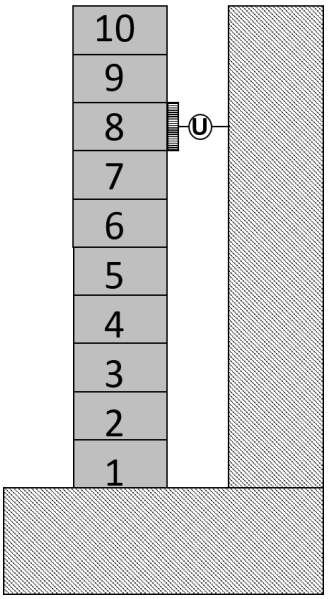


Рисунок 3.6 – Приложенное активное гашение к 8 интервалу

Методом линейных матричных неравенств найдено оптимальные активное гашение колебаний для консольной балки, с вязко-упругой связью с вертикальной неподвижной платформой, теперь найдем оптимальное пассивное управление описывающееся уравнением:

$$\ddot{\omega} + \mathrm{C}\dot{\omega} + \mathrm{K}\omega \ = -K_s'\omega - D_s'\,\dot{\omega}$$

где $K_s' = \frac{l^4 K_s}{EI}$, $D_s' = \frac{\mathrm{l}^2 \mathrm{D_s}}{\rho A}$ – безразмерные коэффициенты жесткости и демпфирования связи. Соотношения между критериями J_1 и J_2, минимизирующие функционал $J_\alpha(\Theta)$ для различных методов гашения, приведены на рис.3.7, решение найдено при помощи пакета MATLAB.

Теперь сравним пассивное и активное гашение:

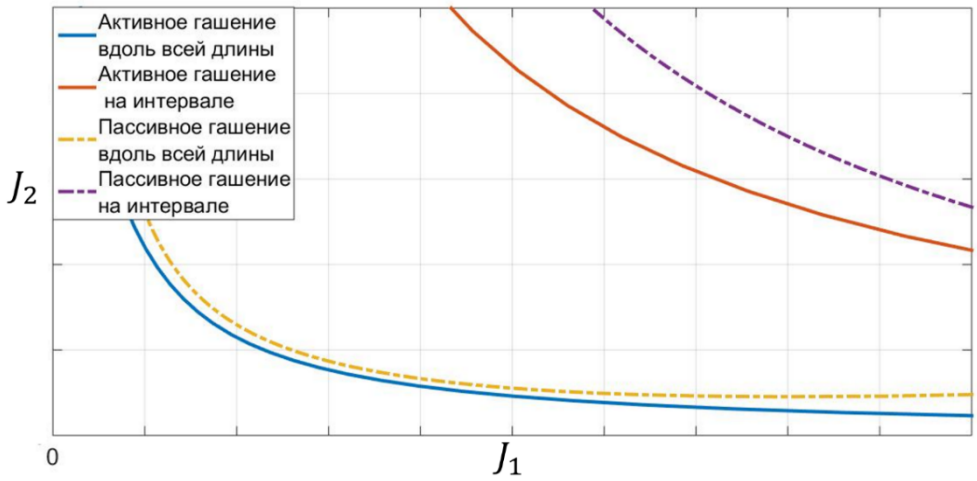


Рисунок 3.7 – Парето множества активных и пассивных методов гашения

Анализ рисунка 3.7 показывает, что наилучший результат получается при использовании равномерно-распределенного гашения вдоль всей длины. Причем разница между результатом применения пассивного и активного гашения незначительна. Активное и пассивное гашение на 8 интервале представляют собой наиболее простые методы приложения виброзащиты, но наименее эффективные, по сравнению с распределенными гасителями колебаний.

Далее приводится оценка эффективности гашения колебаний балки при наличии некоторого внешнего воздействия, принадлежащего классу L_2, и описываемого уравнением вида:

$$\ddot{\omega} + C\dot{\omega} + K\omega = v(t)$$

Виброграммы вынужденных колебаний и результатов активного гашения колебаний для распределенного и интервального управления имеют вид, приведенный на рисунке 3.8.

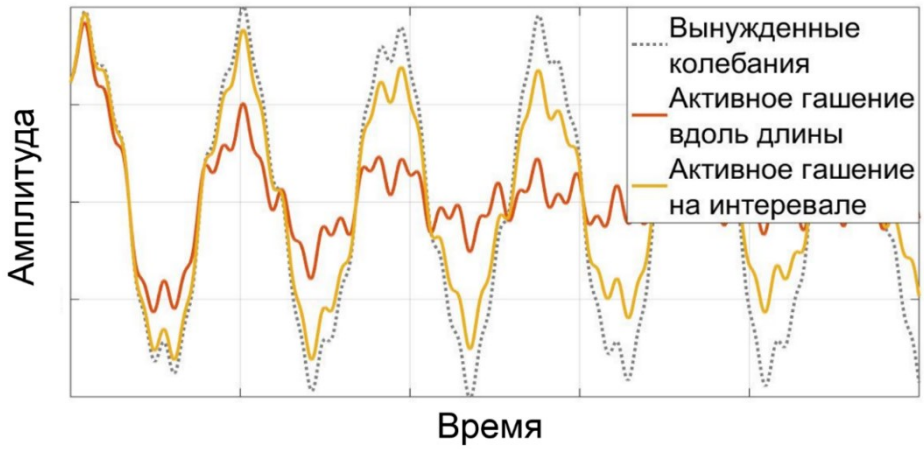


Рисунок 3.8 – Виброграмма колебаний при активном гашении

Анализ виброграмм показывает, что имеет место эффект от использования как интервального так и распределенного гашения колебаний. Следует отметить, что разница между результатом применения таких гашений значительна.

Следует отметить, что с учетом разницы технологических, энергетических и финансовых затрат на активные и пассивные системы выбор той или иной из них с учетом эффективности остается открытым.[27]

3.4 Распределенный динамический гаситель колебаний для балки

Рассмотрим распределенный динамический гаситель для рассредоточенной системы, причем массовые и инерциальные характеристики не учитываются ввиду того, что на практике прикладываются тонкие слои, например, пьезоэлектрические, чье влияние на данные характеристики системы не существенно.

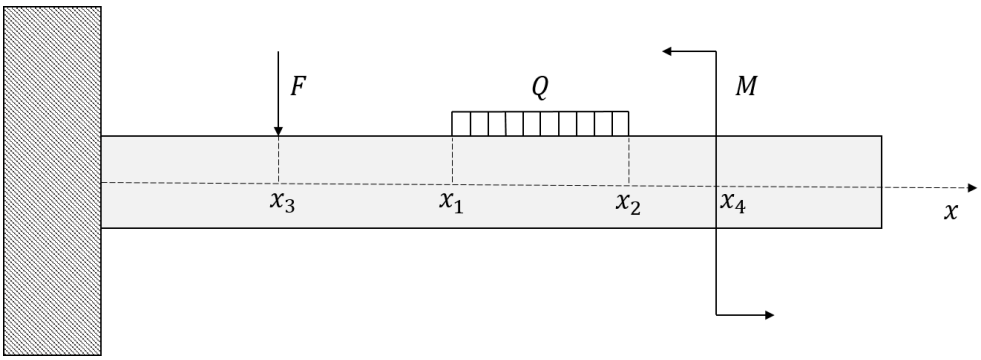


Рисунок 3.9 - Балка, нагруженная поперечными силами и изгибающим моментом

Потенциальная энергия приложенных нагрузок имеет следующий вид:

$$\Pi = \int_0^l (QH(x_1, x_2) + F\delta(x - x_3) + M\delta'(x - x_4))\omega dx$$

где $Q -$ распределенная нагрузка на интервале (x_1, x_2) , $F -$ сосредоточенная сила в точке x_3, $M -$ изгибающий момент в точке x_4.

Используя принцип Гамильтона получим математическую модель балки, находящейся под действием распределенной нагрузки Q на интервале $[x_1; x_2]$, сосредоточенной силы F в точке x_3, изгибающего момента M в точке x_4 .

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + a^2\left(\frac{\vartheta\, \partial^5 \omega}{\partial x^4\, \partial \mathrm{t}} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4}\right) = \frac{1}{\rho A}\ \left(Q\big(H(x_1, x_2)\big) + F\delta(x - x_3) + M\delta'(x - x_4)\right) \quad (3.8)$$

Используя метод Фурье и метод нормальных форм уравнение, описывающее поведение консольной балки под действием поперечной силы, равномерно распределенной нагрузки и изгибающего момента преобразуется к уравнению в безразмерных главных координатах (3.9).

$$\ddot{T}_i + \lambda_i^4 \beta_i \dot{T}_i + \lambda_i^4 T_i = \left(Q' \int_{x_1}^{x_2} (X_i dx + F' X_i(x_3) - M' X_i'(x_4))\, dx\right) \quad (3.9)$$

где $[x_1, x_2, x_3, x_4] -$ безразмерные координаты приложения сил, $Q' = \frac{l^3 Q}{EJ}$,$F' = \frac{l^2 F}{EJ}$, $M' = \frac{lM}{EJ} -$ безразмерные нагрузки.

3.5 Пьезоэлектрические материалы в задачах гашения колебаний

Пьезоэлектрический эффект был открыт в 1880 году Жаком и Пьером Кюри. Они заметили, что в некоторых кристаллах при механическом воздействии на них появляется электрическая поляризация, причем степень ее пропорциональна величине воздействия. Позже был открыт обратный пьезоэлектрический эффект — деформирование материалов, помещенных в электрическое поле. Эти явления еще называют прямым и обратным пьезоэлектрическим эффектом. Следует отметить, что пьезоэлектрический материал анизотропен, при этом кристаллическая решетка материала, обладающего пьезоэлектрическим эффектом, не имеет центра симметрии. Воздействие (сжимающее или растягивающее), приложенное к такому кристаллу, приводит к поляризации после разделения положительных и отрицательных зарядов, имеющихся в каждой отдельной элементарной частице. Эффект практически линейный, то есть степень поляризации прямо пропорциональна величине прилагаемого усилия, но направление поляризации зависимо, так как усилие сжатия или растяжения генерируют электрические поля, а, следовательно, и напряжение, противоположной полярности. Соответственно, при помещении кристалла в электрическое поле упругая деформация вызовет увеличение или уменьшение его длины в соответствии с величиной и направлением полярности поля. Для пьезоэлектрических материалов существует верхний температурный предел – температура Кюри, при достижении которой свойства материала начинают изменяться.

Наиболее популярные пьезоэлектрические материалы это - Цирконат-титанат свинца (PZT), который является керамикой и полимер поливинилиденфторид (PVDF).

Для описания поведения пьезоэлектрических материалов существует уравнение Мэзона [10]

$$\begin{gathered}[S] = [s]\{T\} + [d]\{E\} \\ [D] = [d]^T\{T\} + [\varepsilon]\{E\}\end{gathered} \tag{3.10}$$

$\{S\}, \{T\}$ – векторы деформации и напряжения, соответственно, $[s]$ – матрица упругой податливости, $[d]$ – тензор пьезоэлектрических констант, $[\varepsilon]$ –

диэлектрические константы, $\{E\}$ - вектор напряженности электрического поля, $[D]$ - вектор электрической индукции. В уравнении (3.10) первая строчка описывает обратный эффект, а вторая прямой. Так как переменные взаимосвязаны попарно, то любая пара механической и электрической переменных может быть выбрана в качестве независимой.

В полном виде выражения (3.10) имеют матричный вид (3.11) для обратного эффекта и (3.12) для прямого:

Актюатор:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.11)$$

Датчик:

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \qquad (3.12)$$

Предполагая, что устройство поляризовано вдоль оси 3, и пьезоэлектрический материал рассматривается как трансверсально-изотропный материал, что справедливо для пьезоэлектрических керамик.

Рассматривая уравнение актюатора, стоит заметить, что при приложении электрического поля E_3 поляризация направлена вдоль оси 3, расширение наблюдается вдоль этого же направления; его амплитуда регулируется пьезоэлектрическим коэффициентом d_{33}. Аналогично наблюдается сжатие вдоль направлений 1 и 2 перпендикулярно электрическому полю, амплитуда которого контролируется соответственно d_{31} и d_{32} (сжатие, т. к. d_{31} и d_{32} отрицательные). Так же уравнение актюатора указывает, что электрическое поле E_1,

перпендикулярное к направлению поляризации 3, создает сдвиговую деформацию S_{13}, контролируемую пьезоэлектрической постоянной d_{15} (аналогично, сдвиговая деформация S_{23} возникает, если приложено электрическое поле E_2; оно управляется d_{24}). Интересной особенностью данного типа возбуждения является то, что d_{15} является наибольшим из всех пьезоэлектрических коэффициентов. Различные режимы работы, связанные с пьезоэлектрическими коэффициентами d_{33}, d_{31} и d_{15}, проиллюстрированы на рис. 3.10.

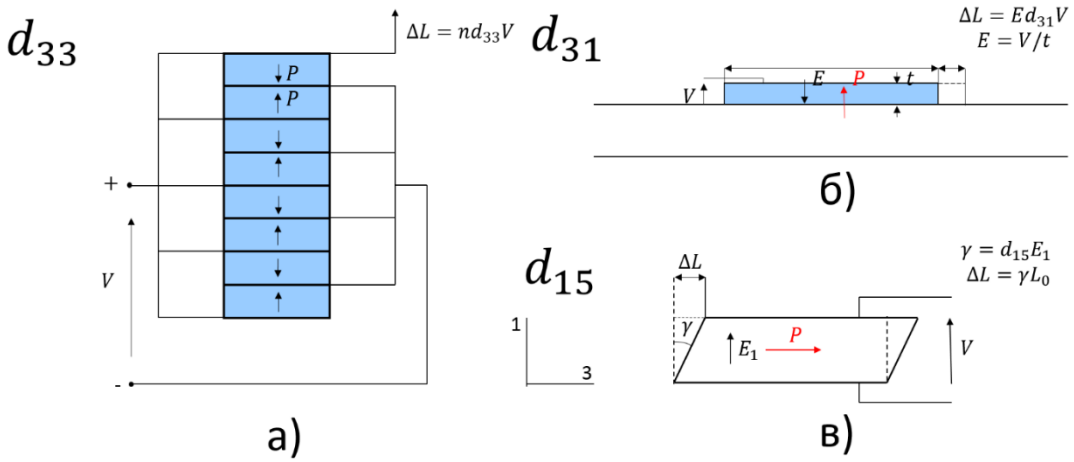


Рисунок 3.10 – Пьезоэлектрические актюаторы различных форм: а) осевые пьезостеки; б) изгибные пьезослои; в) ленточные пьезослои

3.6 Использование изгибных пьезоэлектрических слоев как распределенных динамических гасителей колебаний

Пьезоэлектрический слой представляет собой пьезокерамическую пластину с прикрепленными к ней с обеих сторон электродными обкладками (рис. 3.11), через которые осуществляется управление при помощи изменения разности потенциалов между ними. Пьезокерамический материал, который не покрыт электродной обкладкой с обеих сторон, бесполезно использовать как активный материал.

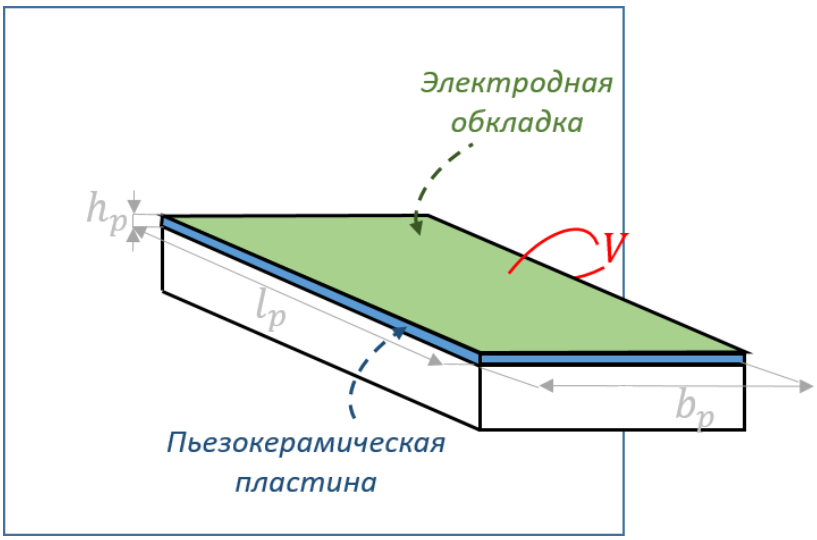


Рисунок 3.11 - Консольная балка с пьезоэлектрическим слоем вдоль всей её длины

Электрическая энергия пьезоэлектрического элемента находится из выражения:

$$W_e = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(\{E\}^T[\varepsilon]\{E\} + 2\{S\}[e]\{E\} - \{S\}^2[c]\{S\})d\Omega$$

Для случая пьезоэлектрической пластины, поляризованной вдоль оси z работающей на чистый изгиб $(S_1 = -z\omega'')$ приложенной к балке на интервале $[x_1, x_2]$ запишется как:

$$W_e^* = \frac{1}{2}\int_0^l\int_A(\varepsilon_{33}E_3^2 - 2\omega'' zH(x_1^0, x_2^0)e_{31}E_3 - c_{11}(\omega'')^2)dAdx \qquad (3.13)$$

где c_{11} – модуль упругости пьезокерамики, $e_{31} = d_{31}c_{11}$, [65] $H(x_1^0, x_2^0)$ – функция Хевисайда, описывающая место расположение пьезоэлектрического слоя. Применяя принцип наименьшего действия Гамильтона для рассматриваемой балки выводится следующее уравнение:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l\frac{1}{2}(\rho A\delta\dot{\omega}^2 - 2e_{31}z_m b_p(x)H(x_1^0, x_2^0)V\delta\omega'' + EI\delta\omega''^2)dxdt = 0 \qquad (3.14)$$

где $V = E_3 h_p$ – напряжение, подаваемое на пьезослой, h_p – высота пьезослоя, $b_p(x)$ –ширина электродной обкладки, в дальнейшем будут рассматриватся случаи изменения ширины, поэтому принимается $b_p^0 = \max(b_p(x))$, так же $b_p(x) = b_p^0\overline{b_p(x)}$, $\overline{b_p(x)}$ – безразмерная функция изменения ширины

электродной обкладки вдоль длины. Таким образом безразмерная модель поперечных колебаний балки с учетом трения и приложенным пьезоэлектрическим слоем с электродной обкладкой произвольной формы на интервале примет следующий вид:

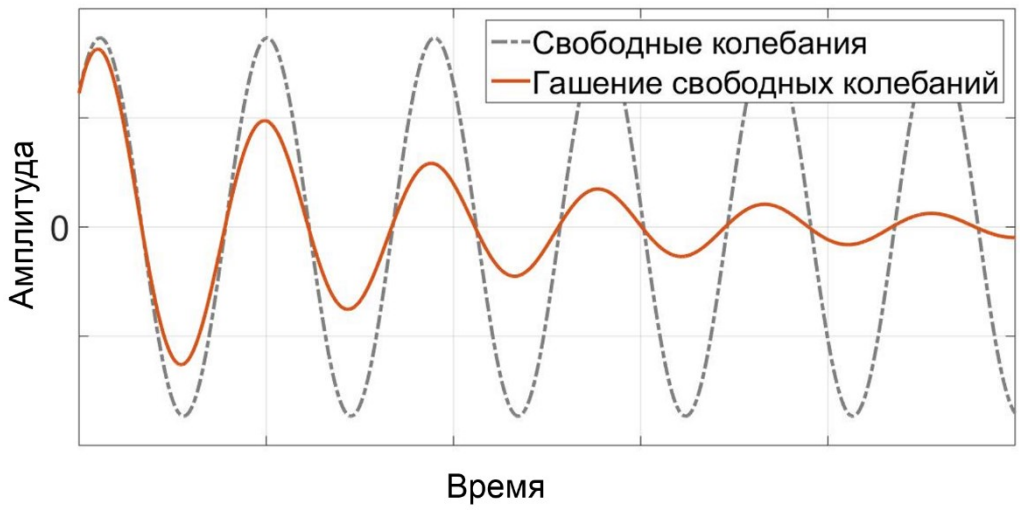
$$\ddot{\omega} + \beta K\dot{\omega} + K\omega = \gamma(\overline{b_p(x)}H(x_1, x_2))''U \tag{3.15}$$

где $\gamma = lb_p^0 z_m e_{31} V_0/EI -$ безразмерный коэффициент влияния пьезоэлектрического слоя, $(x_1, x_2) = \frac{(x_1^0, x_2^0)}{l} -$ безразмерный интервал приложения, $U -$ безразмерное напряжение, подаваемое на пьезоэлектрический слой, являющиеся управлением.

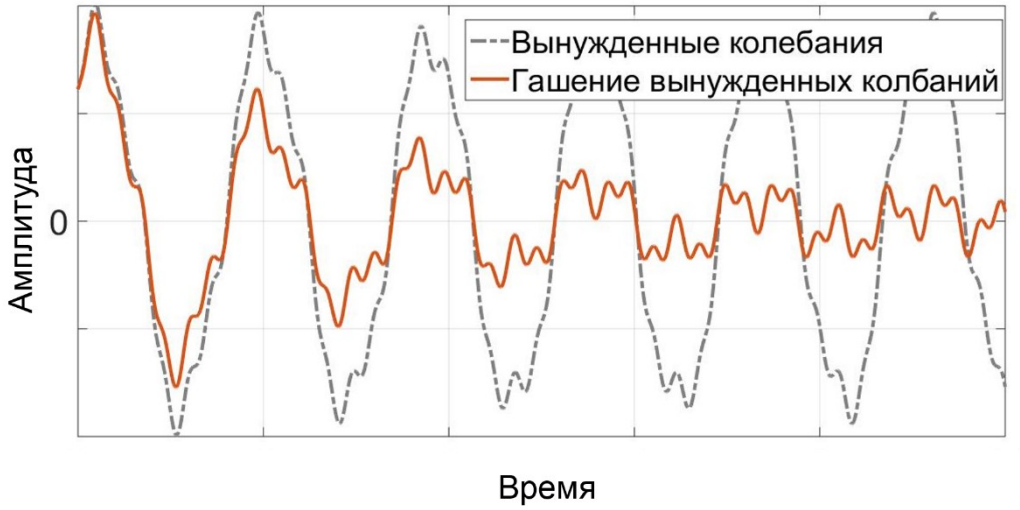
$$U = \sum_{i=1}^{m} \theta_i^{(1)} T_i + \theta_i^{(2)} \dot{T}_i \tag{3.16}$$

где $\theta_i^{(1)}, \theta_i^{(2)}$ – коэффициенты обратной связи при перемещении и скорости соответственно, $m -$ число первых рассматриваемых мод.

Количественная оценка гашения конструкции обычно основывается на результатах решения двух задач: первая из них связана с рассмотрением свободных колебаний, где диссипация системы проявляется в затухании колебаний, а скорость затухания количественно оценивает диссипативные свойства системы, а вторая задача связана с рассмотрением вынужденных установившихся колебаний [23]. Так же гашение колебаний системы проявляется в ограничении резонансных амплитуд. На рис. 3.12 приведены виброграммы для пьезоэлектрического слоя с электродной обкладкой распределенными вдоль всей длины балки (рис. 3.11).



а)



б)

Рисунок 3.12 – Виброграммы: а) свободных и б) вынужденных колебаний системы

Из выше приведенных виброграмм собственных и вынужденных колебаний балки, с пьезоэлектрическим слоем, распределенным вдоль всей длины очевидно воздействие управления. Но выбор такой обратной связи при минимальных затратах управления не является тривиальной задачей и очевидно, что она является более сложной задачей, чем задача однокритериальной оптимизации.

3.7 Задача гашения колебаний балки изгибным пьезоэлектрическим слоем с различной формой электродов

Проведем сравнительный анализ действия пьезоэлектрических слоев с одинаковыми пьезокерамическими пластинами, но с электродными обкладками разной формы. Расположение пьезоэлектрического слоя выбирается из условий наиболее эффективного управления колебаниями. Эффективность гашения рассматривается относительно двух критериев: управляющего напряжения, подаваемого на пьезоэлектрический слой, и прогиба балки на конце. То есть необходимо найти Парето – множество решений относительно двух критериев, при этом максимальное значение управляющего напряжения не превышает наибольшего допустимого значения напряжения для пьезоэлектрических слоев.

Вводимые критерии эффективности использования пьезоэлектрического слоя вводятся в рамках обобщенной H_2- нормы:

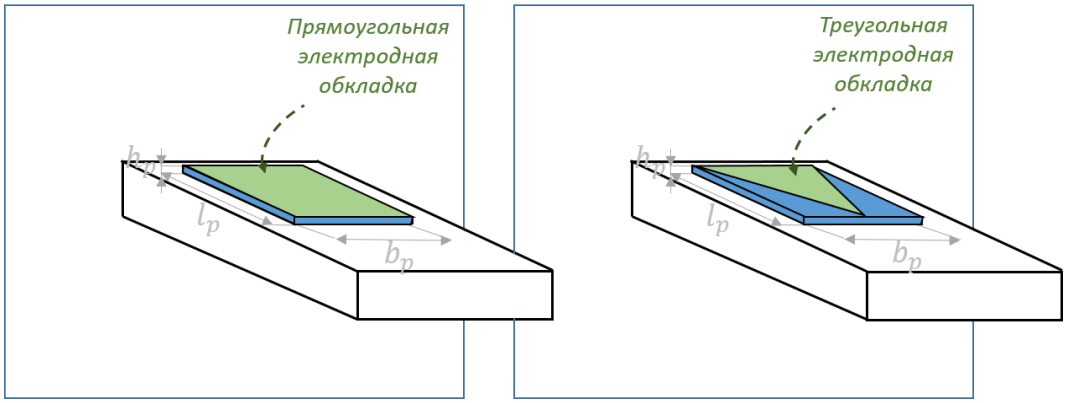
$$J_1 = \left\|H_{z_1 v}\right\|_{g_2} = \sup_{v \in L_2} \frac{sup_{t \geq 0}|z_1(t)|_{g_\infty}}{\|v\|_2} = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}}(CYC^T)$$
$$J_2 = \left\|H_{z_2 v}\right\|_{g_2} = \sup_{v \in L_2} \frac{\|z_2(t)\|_{g_\infty}}{\|v\|_2} = \lambda_{max}^{\frac{1}{2}}(D\theta Y\theta^T D^T) \quad (3.17)$$

Для решения двухкритериальной задачи минимизации воспользуемся функционалом, объединяющим оба критерия, реализованным при помощи сверткой Гермейера, так как решение в рамках свертки Гермейера для обобщенной H_2- нормы дает оптимальные решения:

$$J_\alpha(\theta) = \max\left\{\frac{J_1(\theta)}{\alpha}; \frac{J_2(\theta)}{1-\alpha}\right\}, \quad \alpha \in (0,1) \quad (3.18)$$

и решение будет находится при помощи аппарата линейных матричных неравенств, описанных в п 2.4 и 2.5.

Рассмотрим частные случаи приложения пьезоэлектрических слоев, используя модель активного гашения колебаний пьезоэлектрического слоя при произвольной форме электродной обкладки (3.15).



а) б)

Рисунок 3.13 – Приложение пьезоэлетрических слоев с различной формой электродных обкладок: а) прямоугольной, б) треугольной

Для пьезоэлектрического слоя с электродной обкладкой, основываясь на полученных результатах с помощью (3.15), можно вывести уравнение в главных координатах:

$$\ddot{\omega} + \beta K\dot{\omega} + K\omega = \gamma(-\delta'(x - x_1) + \delta'(x - x_2))U \tag{3.19}$$

После открытия пьезоэлектрического эффекта при исследовании электрических свойств твердых диэлектриков кристаллической структуры Пьер Кюри сформулировал достаточно общий принцип, который теперь называется принципом Кюри. Смысл его состоит в том, что явление обладает всеми признаками симметрии, которыми обладает причина, их породившая; асимметрия явления предопределена асимметрией причины. Если учесть, что пьезоэлектрический материал является самоуравновешивающимся, то возникает вопрос о поведении пьезоэлемента для случая поперечной ассиметрии. Например, каково будет поведение и влияние пьезоэлектрического слоя при изменении формы электродных обкладок и, следовательно, генерируемых механических нагрузок. От формы поверхностных электродных обкладок зависит характер механической нагрузки, представленной пьезоэлектрическим слоем. Поэтому рассмотрим пьезоэлектрический слой, покрытый треугольной электродной обкладкой с двух сторон.

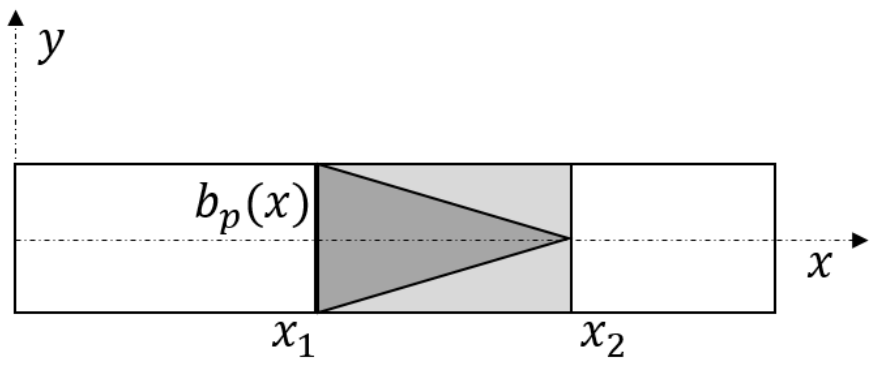


Рисунок 3.14 - Пьезоэлектрический слой с треугольной электродной обкладкой

Уравнения поперечных колебаний балки с треугольной накладкой запишутся так:

$$\ddot{\omega} + \beta K\dot{\omega} + K\omega = \gamma(-\delta'(x - x_1) - \frac{l}{l_p}\delta(x - x_1) + \frac{l}{l_p}\delta(x - x_2))U \qquad (3.17)$$

Таким образом, пьезоэлектрические слои в зависимости от формы обкладок при подаче напряжения можно описать как механические нагрузки, находящиеся под управлением внешнего источника энергии с ограниченным ресурсом:

$$\begin{gathered}\ddot{T}_i + \beta\lambda_i^4\dot{T}_i + \lambda_i^4 T_i = -M_p X_i'(1)U + v(t)\\ \ddot{T}_i + \beta\lambda_i^4\dot{T}_i + \lambda_i^4 T_i = -M_p\big(X_i'(x_2) - X_i'(x_1)\big)U + v(t)\\ \ddot{T}_i + \beta\lambda_i^4\dot{T}_i + \lambda_i^4 T_i = -(F_p\big(X_i(x_2) - X_i(x_1)\big) - M_p X_i'(x_1))U + v(t)\end{gathered} \qquad (3.18)$$

где первое уравнение описывает поведение пьезоэлектрического слоя, равномерно распределенного вдоль всей длины балки (рис. 3.15 (а)), своего рода наиболее эффективный и предельный случай, второе и третье уравнения описывают поведение пьезослоя с прямоугольной и треугольной обкладками соответственно (рис. 3.15 (б, в)).

На рис.3.16 приведены оптимальные множества решений относительно критериев (3.17).

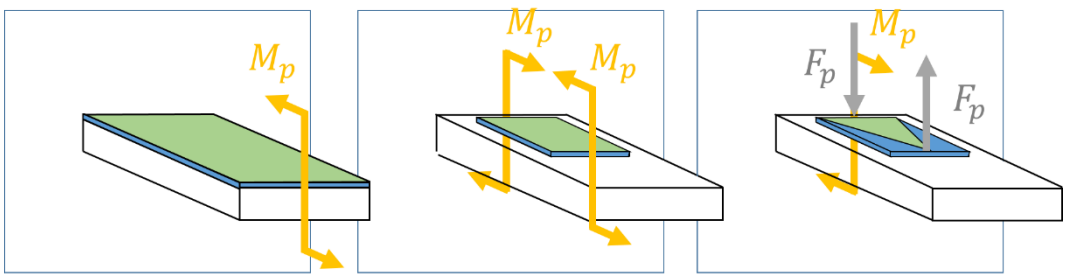


Рисунок 3.15 - Механические нагрузки пьезослоев с различными обкладками: а) распределенной вдоль всей длины; б) прямоугольной и в) треугольной форм электродных обкладок

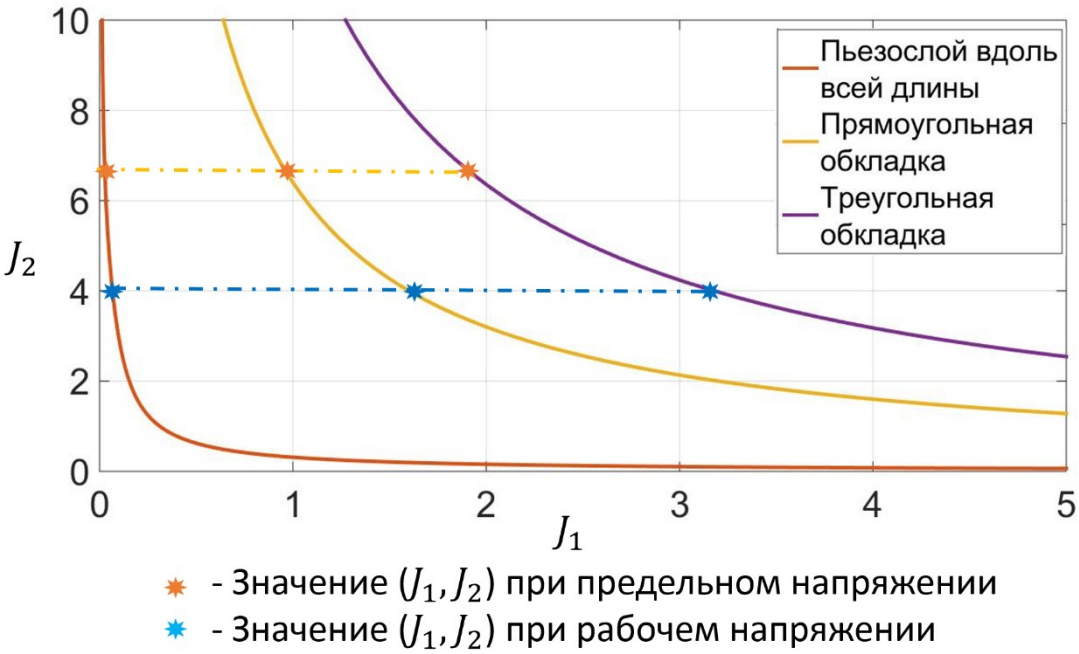
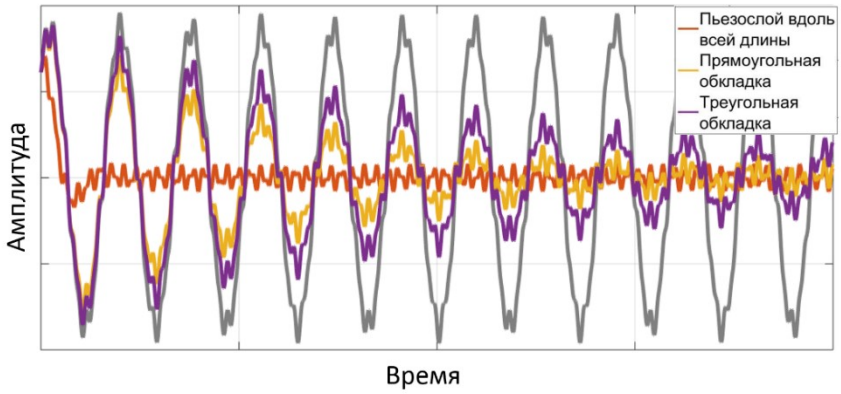


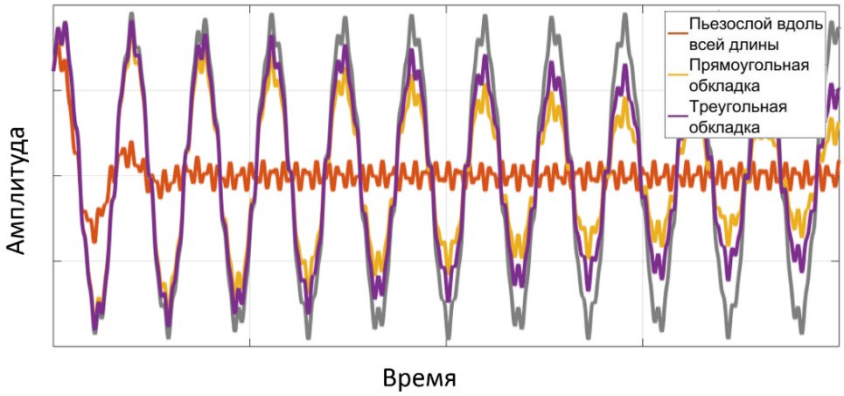
Рисунок 3.16 - Оптимальные множества решений

Судя по приведенным оптимальным Парето – множествам, эффективность пьезослоя с прямоугольной обкладкой выше, чем у треугольного при обоих режимах эксплуатации. Казалось бы, что возможно говорить о не эффективном использовании пьезослоя с треугольной обкладкой для задач активного гашения консольной балки, но далее приводится виброграмма для обоих случаев эксплуатации относительно вынужденных колебаний системы (рис. 3.17).

В ходе решения задачи гашения консольной балки пьезоэлектрическим слоем было получено, что наибольшая площадь наложения пьезослоя дает наилучший результат гашения при приложении в определенно выбранной точке.



а)



б)

Рисунок 3.17 – Виброграммы: а) при предельном и б) при рабочем напряжениях

Из виброграммы очевидно, что при рабочем напряжении (рисунок 3.17 а) разница между виброграммами для различных обкладок минимальна, но при предельном напряжении отличия виброграмм (рис. 3.17 б) уже более ощутимо, но все равно не значительно. Стоит отметить, что длина пьезоэлектрических слоев была в 5 раз меньше длины балки, а толщина слоев меньше на порядок и расчеты приводились для значения коэффициента $\gamma = 0.0516$. То есть при использовании тонких пьезослоев существует возможность ощутимо уменьшить амплитуду колебаний в случае внешнего воздействия на консольную металлическую балку как для случая предельного напряжения пьезоэлектрического слоя так и для рабочего напряжения.[36]

3.8 Итоги главы 3

В третьей главе были поставлены и решены двухкритериальные задачи гашения распределенных систем, среди которых были: задача гашения активной и пассивной виброизоляции как вдоль всей длины, так и на отдельных интервалах, а также приведены задачи гашения пьезоэлектрическим материалом, расположенным как вдоль всей длины, так и на отдельных интервалах с различными формами пьезоэлектрических слоев.

Для постановки двухкритериальных задач гашения были введены следующие критерии: максимальное отклонение балки, максимальное активное управление для задачи виброизоляции и подаваемое напряжение на пьезослой. При решении задач виброизоляции, при помощи обобщенной H_{g2}-нормы, анализ результатов показал, что распределенная нагрузка на интервале представляет собой наиболее простой метод приложения виброзащиты, но наименее эффективный, по сравнению с равномерно-распределенным виброгашением вдоль всей длины, причем разница между результатом применения пассивного и активного распределенного виброгашения незначительна. Следует отметить, что с учетом разницы технологических, энергетических и финансовых затрат на активные и пассивные системы выбор той или иной из них с учетом эффективности остается открытым.

Анализ результатов двухкритериальной задачи гашения пьезослоем показал, что равномерный пьезослой вдоль всей длины является единственным эффективным методом гашения среди рассмотренных пьезослоев при рабочем напряжении, при предельном напряжении эффективность приложенных пьезослоев на интервале более значительна, причем прямоугольной электродной обкладки выше чем у треугольной.

Заключение

Исследованы системы активного и пассивного гашения колебаний сосредоточенных и распределенных систем. Поставлены многокритериальные задачи оптимального гашения механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. Разработана методика расчета активной виброизоляции (связывания) и распределенного динамического гасителя колебаний с использованием пьезоэлектрических слоев с использованием теории обобщенной H_2- оптимизации. Разработан алгоритм и реализована программа для ЭВМ численного решения задач оптимального управления механических систем с сосредоточенными параметрами в двухкритериальной постановке. Приведены Парето-оптимальные множества решений для задач виброзащиты, поставленные для механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами. Проведен анализ результатов систем с активными и пассивными методами виброизоляции, предложен подход использованию пьезоэлектрических слоев с различной формой электродных обкладок.

Результаты, полученные в ходе диссертационного исследования могут быть использованы при проектировании виброзащитных систем различной сложности, в том числе для строительных конструкций (высотные сооружения, мосты и путепроводы), для машиностроительной отрасли (электрогенераторы и турбины), для транспортных средств (амортизационные системы) и для высокоточных производств (литографическое оборудование).

Список литературы

1. Баландин Д.В., Ежов Е.Н., Петраков Е.В., Федотов И.А. Оптимальное гашение колебаний механических систем в условиях неопределённости внешних воздействий. // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов. Казань, 20-24 августа 2015, с.311-312
2. Баландин Д.В., Коган М.М. О Множестве Парето в задачах управления и фильтрации при детерминированных и стохастических возмущениях// Автомат. и телемех., 2017, № 1, с.35–58
3. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное H2-управление и задачи виброзащиты// Автомат. и телемех., 2017, № 8, с. 76–90
4. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит., 2007, 280 с.
5. Баландин Д.В., Коган М.М. Субоптимальные по Парето решения при коалициях возмущений //Межд. Конф. "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления (конференция Пятницкого), 2016.
6. Баландин Д.В., Коган М.М., Федюков А.А. Оценка предельных возможностей гашения колебаний высотных сооружений // Вестник ННГУ, 2002, № 1, с. 195-201
7. Баландин Д.В., Федотов И.А., Ежов Е.Н., Петраков Е.В. Библиотека программ, для расчета гибридного динамического гасителя колебаний// Программа для ЭВМ, ОД № 2018612922, дата регист. 01.03.2018
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980, 149 с.
9. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986, 560 с.
10. Бобцов А.А., Бойков В.И., Быстров С.В., Григорьев В.В. Исполнительные устройства и системы для микроперемещений. СПБ ГУ: ИТМО, 2011, 131 с.
11. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщённые функции и действия над ними. М.: Гос. издат-во физ.-мат. лит-ры, 1959, 469 с.

12. Гордеев Б.А., Ерофеев В.И., Синёв А.В., Мугин О.О. Системы виброзащиты с использованием инерционности и диссипации реологических сред. М.:Физматлит, 2004, 173 с.
13. Ежов Е.Н., Петраков Е.В., Федотов И.А. Синтез динамических гасителей колебаний высотного сооружения на основе решения многокритериальной задачи// X Всероссийская конференция «Нелинейные колебания механических систем» им Ю.И. Неймарка. Нижний Новгород, 26-29 сентября, 2016, с.741-745
14. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Лисенкова Е.Е., Семерикова Н.П. Сравнительный анализ динамического поведения балок моделей Бернулли – Эйлера, Рэлея и Тимошенко, лежащих на упругом основании// Вестник научно-технологического развития, № 8 (24), 2009, с. 18-26
15. Зельдович Б.Я., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972, 247 с.
16. Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. М.: Наука, 1987, 321 с.
17. Коловский М. З. Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976, 320 с.
18. Коренев Б.Г., Резников Д.М. Динамические гасители колебаний. М.: Наука. 1988, 591 с.
19. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977, 278 с.
20. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автомат. и телемех., 1960, № 4, с. 436–443
21. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М.: МАКС Пресс, 2008, 197 с.
22. Лукин В.П. Применение технологий адаптивной оптики для расширения возможностей оптико-электронных систем// Интерэкспо гео-сибирь, 2019, № 8, с. 115-138
23. Матвиенко В. П., Клигман Е. П., Юрлов М. А., Юрлова Н. А. Демпфирование механических колебаний зашунтированными пьезоэлектрическими

структурными элементами// Экологический вестник научных центров ЧЭС, 2011, №2, с. 15-32

24. Ногин В.Д. Линейная свертка критериев в многокритериальной оптимизации// Искусственный интеллект и принятие решений, 2014, №4, с. 73-82
25. Петраков Е.В. Ежов Е.Н., Гашение колебаний многоэтажных сооружений// VII Всероссийский конкурс молодых ученых «Итоги диссертационных исследований» Миасс, 8-11 октября, 2015, с. 143-150
26. Петраков Е.В. Оптимальное гашение колебаний механических систем с распределенными параметрами//Всероссийская конференция молодых ученых-механиков, Сочи, ,5-15 сентября, 2017, с. 94
27. Петраков Е.В. Оптимальное гашение поперечных колебаний консольной балки// Проблемы прочности и пластичности, 2019, Т.81 № 1, с. 94-102
28. Петраков Е.В., Лотфи Пур Х., Дробный Е.В., Активное гашение поперечных колебаний консольной балки пьезоэлектрическими слоями с различными формами электродов// Проблемы прочности и пластичности, 2019, Т.81 № 4, с. 429-442
29. Работнов Ю.Н. Сопротивление материалов. М.: Гос. издат-во физ.-мат. лит-ры, 1962, 456 с.
30. Симиу Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения// М.:Стройиздат,1984,361 с.
31. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985, 3-е издание, 472 с.
32. Уздин А.М. Основы теории сейсмостойкости и сейсмостойкого строительства зданий и сооружений. Санкт-Петербург: ВНИИ, 1993, 178 с.
33. Хазанов Х.С. Механические колебания систем с распределенными параметрами. Самара: СГАУ, 2002, 82 с.
34. Хлебников М.В., Щербаков П.С. Ограниченное линейное управление оптимальное по квадратичному критерию специального вида // Труды ИСА РАН, 2013, Т.63 №2, с. 86–89

35. Федотов И.А., Ежов Е.Н., Петраков Е.В. Гашение колебаний высотного сооружения при помощи гибридного управления// Всероссийская конференция молодых ученых-механиков, Сочи, 5-15 сентября, 2017
36. Федотов И.А., Ежов Е.Н., Петраков Е.В. Синтез динамических гасителей колебаний высотных сооружений// Процессы в геосредах, 2016, №8, с. 65-70
37. Якубович В. А. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем в критических случаях. // Автомат. и телемех., 1964, №5, с. 601–612
38. Anderson B.D.O., Moore J.B. Linear Optimal Control. N.Y.: Prentice-Hall, 1971, 413 p.
39. Anderson B.D.O., Moore J.B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. N.Y.: Prentice-Hall, 1989, 394 p.
40. Asano M., Yamano Y., Yoshie K., Koike Y., Nakagawa K., Murata T. Development of Active-Damping Bridges and Its Application to Triple High-rise Buildings// JSME International Journal, 2003, 46(3), pp. 854–860
41. Badawi F.A. On a Quadratic Matrix Inequality and the Corresponding Algebraic Riccati Equation // Int. J. Control,1982, 36(2), pp. 313–322
42. Balandin D. V., Bolotnik N. N., Pilkey W. D. Optimal protection from impact. Shock and Vibration. CRC Press, 2001, 472 p.
43. Balandin D.V., Ezhov E.N., Petrakov E.V., Fedotov I.A. Multi-criteria problems for optimal protection of elastic constructions from vibration// Materials Physics and Mechanics, 2018, 40(2), pp. 239−245
44. Balandin D.V., Kogan M.M. Pareto suboptimal solutions in control and filtering problems control and filtering problems multiple deterministic and stochastic disturbances // Robust Control: Systems, Theory and Analysis, 2016, pp. 2263-2268.
45. Bernstein D.S., Haddad W.M. LQG Control with an H∞ Performance Bound: a Riccati Equation Approach// IEEE Trans. Autom. Control, 1989, 34 (3), pp. 293-305
46. Bharti S., Dumne S., Shrimali M. Seismic Response Analysis of Adjacent Buildings Connected with MR Dampers// Engineering Structures, 2010, 32(8), pp. 2122–2133
47. Bhaskararao A., Jangid R. Seismic Analysis of Structures Connected with Friction Dampers// Engineering Structures, 2006, 28(5), pp. 690–703

48. Bian Y., Gao Z., Nonlinear vibration absorption for a flexible arm via a virtual vibration absorber, Journal of Sound and Vibration, 2017, № 399, pp. 197–215
49. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994, 205 p.
50. Calugaru V., Panagiotou M. Seismic response of 20-story base-isolated and fixed-base reinforced concrete structural wall buildings at a near-fault site// Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2014, 43, pp. 927-948
51. Chen P.-C., Tsai K.-C., Lin P.-Y. Real-time hybrid testing of a smart base isolation system// Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2014, 43, pp. 139-158
52. Chen X., Zhou K. Multiobjective Control Design// SIAM J. Control Optim., 2001, 40(2), pp. 628-660
53. Christenson R.E., Spencer Jr. B., Johnson E.A. Semiactive Connected Control Method for Adjacent Multi-degree-of-freedom Buildings// Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(3), pp. 290–298
54. Christenson R.E., Spencer Jr. B., Hori N., Seto K. Coupled Building Control Using Acceleration Feedback// Computer Aided Civil and Infrastructure Engineering, 2003, 18(1), pp. 4–18
55. Faramarz Khoshnoudian F., Ahmadi E., Sohrabi S. Response of nonlinear soil-MDOF structure systems subjected to distinct frequency-content components of near fault ground motions// Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2014, 43, pp. 701-716
56. Fulin Z., Ping T., Weiming Y., Lushun W. Theoretical and experimental research on a new system of semi-active structural control with variable stiffness and damping// Earthq. Eng. Eng.Vib., 1, 2002, pp 130–135
57. Gudarzi M., Zamanian H. Application of Active Vibration Control for Earthquake Protection of Multi-Structural Buildings// International Journal of Scientific Research in Knowledge, 2013, 11, pp. 502-513
58. Guo A.X., Xu Y.L., Wu B. Nonlinear Stochastic Seismic Response Analysis of Adjacent Buildings Linked by Viscoelastic Dampers// Earthquake Engineering and Engineering Vibration, 2001, 21(2), pp. 64–69

59. Hindi H.A., Hassibi B., Boyd S.P. Multiobjective H2/H∞-Optimal Control via Finite Dimensional Q-Parametrization and Linear Matrix Inequalities //Amer. Control Conf., Philadelphia, 1998, pp. 3244-3249
60. Huang X., Zhu H.P. Optimal Arrangement of Viscoelastic Dampers for Seismic Control of Adjacent Shear-type Structures// Journal of Zhejiang University SCIENCE A, 2013, 14 (1), pp. 47–60
61. Jung J.H., Cheng T.H. Electromagnetic synchronized switch damping for vibration control of flexible beams// IEEE/ASME Trans. Mechatron., 2012, 17(6), pp.1031–1038.
62. Kalman R.E. Contributions to the Theory of Optimal Control // Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), 1960, 5 (2), pp. 102–119
63. Karnopp D., Crosby M., Harwood R. Vibration control using semi active force generators//ASMEJ. Eng. Ind.1976, 96, pp 619–626.
64. Kasagi M., Fujita K., Tsuji M., Takewaki I. Automatic generation of smart earthquake-resistant building system: Hybrid system of base isolation and building-connection// Heliyon, 2016, 2, DOI: 10.1016/j.heliyon.2016.e00069
65. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Mixed H2/H∞ Control: a Convex Optimization Approach// IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 7. P. 824-831.
66. Khargonekar P.P., Rotea M.A. Muptiple Objective Optimal Control of LinearSystems: the Quadratic Norm Case // IEEE Trans. Autom. Control. 1991. V. 36. No. 1. P. 14–24.
67. Kim J., Ryu J., Chung L. Seismic Performance of Structures Connected by Viscoelastic Dampers// Engineering Structures, 28(2), (2006), pp. 183–195.
68. Makila P.M. On Multiple Criteria Stationary Linear Quadratic Control // IEEE Trans. Autom. Control,1989, 34 (12), pp. 1311–1313
69. Martelli A., Forni M. Seismic isolation and other antiseismic systems recent application in Italy and worldwide// The Journal of the Anti-Seismic Systems International Society, 2010, 1(1), pp. 75-122
70. Matsagar V.A. and Jangid R.S. Viscoelastic Damper Connected to Adjacent Structures Involving Seismic Isolation// Journal of Civil Engineering and Management,2005, 11(4), pp. 309–322

71. Moheimani R.S.O., Fleming A. J. Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping// Springer-Verlag London Limited, 2006, p. 20-22
72. Ohtori Y., Christenson R.E., Spencer B.F. Jr., Dyke S.J. Benchmark control problems for seismically excited nonlinear buildings // Journal of engineering mechanics, ASCE, 2004, 130, pp. 366-385
73. Pisarski D. Distributed control design for structures subjected to traveling loads// Math.Probl. Eng. 2015, pp 1–12
74. Preumont A. Mechatronics: Dynamics of Electromechanical and Piezoelectric Systems// Springer, 2006, 215 p.
75. Ramaratnam A., Jalili N., Dawson D.M. Semi-active vibration control using piezoelectric-based switched stiffness//Proceedings of the 2004 American Control Conference,2004, pp. 5461–5466
76. Ribakov Y., Gluck J., Reinhorn A.M. Active viscous damping system for control of MDOF structures, Eartquake Eng.Struct.Dyn. 2001,3, pp. 195–212
77. Ruangrassamee A., Kawashima K. Control of nonlinear bridge response with pounding effect by variable dampers// Eng. Struct. 2003, 25, pp. 593–606
78. Scherer C., Gahinet P., Chilali M. Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization// IEEE Trans. Autom. Control, 1997, 42 (7), pp. 896-911
79. Szmidt T., Pisarskin D., Bajer C., Dyniewicz B. Double-beam cantilever structure with embedded intelligent damping block// Dynamics and control, Journal of Sound and Vibration, № 401(2017), pp. 127-138
80. Tonietti G., Schiavi R., Bicchi A. Design and control of a variable stiffness actuator for safe and fast physical human/robot interaction// 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation,2005, pp. 526–531
81. Unal M., Warn G.P. Optimal cost-effective topology of column bearings for reducing vertical acceleration demands in multistory base-isolated buildings// Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 2014. 43, pp. 1107-1127
82. Wang S.-J., et al. Sloped multi-roller isolation devices for seismic protection of equipment and facilities// Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 2014, 43, pp. 1443-1461
83. Willems J.S. Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation // IEEE TAC, 1971, 16(6) pp. 621–634

84. Xu Y.L., He Q, Ko J. Dynamic Response of Damper-connected Adjacent Buildings under Earthquake Excitation// Engineering Structures, 1999, 21(2), pp. 135–148
85. Xu Y.L., Ng C. Seismic Protection of a Building Complex Using Variable Friction Damper: Experimental Investigation// Journal of Engineering Mechanics,2008, 134(8), pp. 637–649
86. Xu Y.L., Zhan S., Ko J., Zhang W. Experimental Investigation of Adjacent Buildings Connected by Fluid Damper// Earthquake engineering & Structural Dynamics, 1999, 28(6), pp. 609–631
87. Yang Z.D., Lam E.S.S. Dynamic responses of two buildings connected by viscoelastic dampers under bidirectional earthquake excitations// Earthquake Engineering and Engineering Vibration. 2014, 13, pp. 137-150
88. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses// IEEE Trans. Autom. Control, 2009, 26 (2), pp. 301-320
89. Zhang Y.F., Iwan W.D. Statistical Performance Analysis of Seismic Excited Structures with Active Interaction Control// Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 32(7), (2003), pp. 1039–1054
90. Zhang W.S., Xu Y.L. “Dynamic Characteristics and Seismic Response of Adjacent Buildings Linked by Discrete Dampers,” Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1999, 28(10), pp. 1163–1185
91. Zhang W.S., Xu Y.L. “Vibration Analysis of Two Buildings Linked by Maxwell Model-defined Fluid Dampers,” Journal of Sound and Vibration, 2000, 233(5), pp. 775–796
92. Zhou F.L. et al. (editors) Energy Dissipation and Active Vibration Control of Structures// Proceedings of the 11th World Conference on Seismic Isolation, Guangzhou, 2009
93. Zhu H., Ge D., Huang X. Optimum Connecting Dampers to Reduce the Seismic Responses of Parallel Structures, Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(9): pp. 1931–1949
94. Zhou W., Zuo L. A self-powered piezo-electric vibration control system with switch precharged inductor (SPCI) method// IEEE/ASME Trans. Mechatron, 2015, 20 (2), pp. 773–781

95. http://www.obayashi.co.jp/english/services/technologies/#anc02
96. http://www.gov-online.go.jp/eng/publicity/book/hlj/html/201112/201112 02.html
97. http://nptel.ac.in/courses/112107088/27