На правах рукописи

Нестеров Павел Николаевич

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ярославль — 2021

Работа выполнена на кафедре математического моделирования математического факультета ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова».

Официальные оппоненты:

Нефедов Николай Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова»,
заведующий кафедрой математики физического факультета

Дмитриев Михаил Геннадьевич
доктор физико-математических наук, профессор
ФГУ «ФИЦ «Информатика и управление» РАН», отделение №1
«Математические методы исследования макросистем»,
главный научный сотрудник

Соболев Владимир Андреевич
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет
им. академика С.П. Королева»,
заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и теории
управления

Ведущая организация:
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет»

Защита состоится «17» июня 2021 г. в 14 ч. 30 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» по адресу 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, корп. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского» и на официальном сайте организации:
https://diss.unn.ru/files/2021/1090/diss-Nesterov-1090.pdf

Автореферат разослан «____» ___________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20
канд. физ.-мат. наук Р.С. Бирюков

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Известно, что получение явных формул для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными коэффициентами представляет собой задачу, решаемую лишь в очень редких случаях. Поскольку такие системы возникают в различных прикладных задачах, например, механики и физики, вопрос, связанный с получением приближенных формул для решений, становится особенно актуальным. Качественная и количественная информация о поведении решений имеет принципиальное значение для теории устойчивости, теории колебаний и других прикладных разделов, связанных с изучением динамики решений дифференциальных уравнений. Особое место среди приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений занимают асимптотические методы. В этом случае часто говорят об асимптотическом интегрировании соответствующих дифференциальных уравнений. В этой работе рассматриваются задачи асимптотического интегрирования систем обыкновенных дифференциальных, функционально-дифференциальных, а также уравнений в частных производных при стремлении независимой переменной к бесконечности.

Основы асимптотических методов были заложены в работах Ж. Фурье, Ж. Лиувилля, Ж. Штурма. Значительный вклад в развитие асимптотического представления решений дифференциальных уравнений был сделан А. Пуанкаре. Дальнейшему продвижению в этой области способствовали работы В.А. Стеклова, Г. Биркгофа, Л. Шлезингера, В.И. Тржицинского и др. Существенные результаты получили такие исследователи, как В. Вазов и Л. Чезари. Среди дифференциальных уравнений, довольно часто встречающихся на практике, следует отметить уравнения с медленно меняющимися коэффициентами, в том числе, и уравнения с малым параметром при старших производных (сингулярно возмущенные уравнения). В этом направлении отметим работы С.Ф. Фещенко и Н.И. Шкиля. Сингулярно возмущенным уравнениям посвящены работы А.Н. Тихонова, А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова, Н.Н. Нефедова, а также их учеников. В развитие асимптотических методов интегрирования огромный вклад внесли работы Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова. Предложенный ими методпозволяет получать приближенные формулы для решений, не содержащие секулярных членов. С помощью метода Крылова–Боголюбова удается провести исследование колебательного процесса на достаточно большом промежутке времени. Используя результаты Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, И.З. Штокало разработал метод, который позволяет исследовать устойчивость линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами.

Фундаментальные результаты в решении задачи асимптотического интегрирования линейных систем ОДУ в окрестности бесконечности были получены Н. Левинсоном[1]. Он показал, что при выполнении некоторого условия относительно функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ (условие дихотомии) фундаментальная матрица $X(t)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = \big(\Lambda(t) + R(t)\big)x, \tag{1}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, а $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$, допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$X(t) = \big(I + o(1)\big)\exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}.$$

Системы такого вида, вслед за И.М. Рапопортом, стали называть L–диагональными системами или системами в L–диагональной форме. И.М. Рапопорт указал некоторые подстановки, приводящие отдельные типы уравнений к L–диагональному виду, а также воспользовался результатами Н. Левинсона в спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов. Асимптотическая теорема Левинсона была использована М.А. Наймарком для исследования индекса дефекта и спектра дифференциальных операторов. Более общие результаты в этой области были затем получены в работах М.В. Федорюка и А. Девинатца. Еще один классический результат об асимптотическом интегрировании линейных систем, близких к диагональным, был получен в работе Ф. Хартмана и А. Винтнера[2] и ныне известен как теорема Хартмана–Винтнера. Авторы исследовали системы вида (1), в которых матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_p[t_0, \infty)$, где $1 < p \le 2$. Ими было показано, что при определенных требованиях относительно функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ (более сильных, нежели в теореме Левинсона) фундаментальная матрица $X(t)$ системы (1) допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$X(t) = \big(I + o(1)\big)\exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \big[\Lambda(s) + \operatorname{diag} R(s)\big]ds\Big\}.$$

Среди первых результатов в области асимптотического интегрирования систем функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) следует назвать приведенные в известной книге Р. Беллмана и К. Кука[3] асимптотические теоремы о поведении решений скалярных уравнений с запаздывающим аргументом (см. также обзор в главе 9 книги Дж. Хейла[4]). В

[1]Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. 1948. Vol. 15, no. 1. P. 111–126.

[2]Hartman P., Wintner A. Asymptotic integrations of linear differential equations // Amer. J. Math. 1955. Vol. 77, no. 1. P. 45–86.

[3]Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

[4]Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

дальнейшем усилия многих авторов были направлены на получение аналогов теорем Левинсона и Хартмана–Винтнера. В этом отношении для нас наиболее примечательны работа Дж. Касселя (J.S. Cassell) и Ж. Хоу[5] (Z. Hou), а также работа М. Питука[6] (M. Pituk). В первой из этих работ рассматривается система ФДУ вида

$$\dot{x} = \Lambda(t)x(t) + R(t, x_t). \tag{2}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \leq \theta \leq 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h, 0], \mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C_h} = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\varphi(\theta)|. \tag{3}$$

Далее, $\Lambda(t) = \big(\operatorname{diag} \lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, а $R(t, \cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ такой, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$

$$|R(t, \varphi)| \leq \gamma(t)\|\varphi\|_{C_h}. \tag{4}$$

В работе[5], в частности, показано, что если $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, то при определенных условиях относительно функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$ (условие дихотомии Левинсона и некоторое дополнительное ограничение) система (2) при $t \geq T \geq t_0$ имеет m решений $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$, допускающих при $t \to \infty$ следующее асимптотическое представление:

$$x_i(t) = \big[e_i + o(1)\big] \exp\Big\{\int\limits_T^t \lambda_i(s) ds\Big\}, \tag{5}$$

где $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0)$. Кроме того, для любого решения $x(t)$ системы (2) при $t \geq T \geq t_0$ найдутся такие константы c_1,…,c_m, что

$$x(t) = \sum_{i=1}^m c_i\, x_i(t) + o\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty,$$

где функции $x_i(t)$, $i = 1, \ldots, m$ имеют асимптотику вида (5), а величина $\beta > 0$ произвольна.

В упомянутой выше статье М. Питука строится вариант теоремы типа Хартмана–Винтнера для системы ФДУ следующего вида:

$$\dot{x} = B_0 x_t + R(t, x_t). \tag{6}$$

[5]Cassell J.S., Hou Z. Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation // J. Lond. Math. Soc. (2). 1993. Vol. 47. P. 473–483.

[6]Pituk M. The Hartman–Wintner theorem for functional differential equations // J. Differential Equations. 1999. Vol. 155. P. 1–16.

Здесь B_0 — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ и не зависящий от t, а оператор $R(t, x_t)$ удовлетворяет неравенству (4). Предположим, что характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda\theta} I) \tag{7}$$

имеет простой корень $\lambda = \mu$. Пусть функция $\varphi(\theta) = e^{\mu\theta} c$, где $c \in \mathbb{C}^m$ и $-h \leq \theta \leq 0$, является соответствующим собственным решением. Тогда, если $\gamma(t) \in L_p[t_0, \infty)$, где $1 \leq p \leq 2$, и ни один корень $\lambda \neq \mu$ характеристического уравнения (7) не имеет такую же действительную часть, как у корня μ, то при $t \geq T \geq t_0$ система (6) имеет решение $x(t)$ с асимптотикой

$$x(t) = \big[c + o(1)\big] \exp\big\{\mu(t - T) + s(t, T)\big\}, \quad t \to \infty.$$

Здесь скалярная функция $s(t, T)$ определяется согласно формулам

$$s(t, T) = \int\limits_T^t \delta(\tau) d\tau, \quad \delta(t) = \alpha d R\big(t, \varphi(\theta)\big),$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ — некоторое вычисляемое специальным образом число, а d — определяемая специальным образом m–мерная вектор-строка.

Существенной проблемой в использовании теоремы Левинсона и теоремы Хартмана–Винтнера, а также их функционально-дифференциальных аналогов является необходимость приведения исходной системы к специальном виду. Кроме того, в случае систем вида (6) остается непроясненным характер поведения остальных решений, отличных от того, которое ответвляется от собственного решения невозмущенной системы. Ситуация с кратными корнями характеристического уравнения (7) также представляет интерес для исследования.

Цели и задачи исследования

Целью диссертационного исследования является развитие методов асимптотического интегрирования как конечномерных (ОДУ), так и бесконечномерных динамических систем (ФДУ, уравнения в частных производных) при стремлении независимой переменной к бесконечности. В работе рассматриваются системы с колебательно убывающими коэффициентами, для которых предложены различные варианты сведения задачи асимптотического интегрирования исходной системы к задаче построения асимптотики для решений систем вида (1) или (2). Разработанные методы сопровождаются построением асимптотических представлений для решений конкретных динамических систем. На основании полученных асимптотических формул в работе, в частности, решаются задача об устойчивости (неустойчивости) решений, спектральная задача, исследуется явление параметрического резонанса, а также изучаются вопросы, связанные с колеблемостью решений.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми.

1. Предложен общий вид усредняющей замены переменных для упрощения задачи асимптотического интегрирования линейных систем ОДУ при $t \to \infty$, а также построен вариант подобной замены для исследования нелинейных систем с колебательно убывающими коэффициентами. Сформулирована теорема о существовании в фазовом пространстве одного класса нелинейных систем ОДУ многообразия, составленного из начальных условий решений, стремящихся к нулю при $t \to \infty$. Получены асимптотические формулы для решений неавтономного уравнения Ван дер Поля.

2. Найдены те точки действительной оси, в которых у одномерного оператора Дирака с матричным потенциалом, элементами которого являются колебательно убывающие функции, могут существовать собственные числа. Получены условия на элементы матричного потенциала, при выполнении которых одномерная система Дирака имеет решения из класса $L_2\big((0, \infty), \mathbb{C}^2\big)$.

3. Исследованы два типа возмущений гармонического осциллятора: адиабатическое возмущение и интегральное возмущение. Определены частоты возмущения, при которых у соответствующих уравнений могут существовать неограниченные решения, т. е. возникает явление параметрического резонанса.

4. Предложен подход к решению задачи асимптотического интегрирования, использующий идеологию метода инвариантных (центральных) многообразий. На основе этой методологии построены асимптотические представления для решений системы двух осцилляторов с медленно убывающей связью.

5. Разработан метод асимптотического интегрирования некоторого класса систем ФДУ, близких в определенном смысле к системам ОДУ. Этот метод позволяет привести исходную систему к виду (2) и воспользоваться затем функционально-дифференциальным аналогом теоремы Левинсона. Изучена динамика решений уравнения адиабатического осциллятора с запаздыванием. Для решений этого уравнения, а также решений одного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра с помощью предложенного метода построены асимптотические представления.

6. Идеология метода центральных многообразий распространена на задачу асимптотического интегрирования более широкого класса систем ФДУ. Показано существование в фазовом пространстве исследуемых систем многообразия типа центрального (критическое многообразие), изучены свойства этого многообразия, описана процедура построения приближения для данного многообразия, а также — проекции исходной системы на указанное многообразие. Метод асимптотического интегрирования проиллюстрирован на примерах построения асимптотических формул для

решений уравнений как с постоянным, так и с переменным запаздыванием.

7. Решена задача о построении асимптотических представлений для слабых решений некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Для получения асимптотических формул использован аппарат теории центральных многообразий и усредняющие замены переменных. Разработанный метод асимптотического интегрирования продемонстрирован на примере задачи построения асимптотики решений возмущенного уравнения теплопроводности.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертационное исследование носит теоретический характер. Результаты работы могут использоваться в различных разделах теории динамических систем, как с конечномерным, так и с бесконечномерным фазовым пространством, в которых для решения задачи достаточно получить асимптотические представления решений. В этой связи отметим, например, теорию устойчивости решений, теорию колебаний, теорию параметрического резонанса.

Методология и методы исследования

В работе используются асимптотические методы теории дифференциальных, а также функционально-дифференциальных уравнений, метод усреднения, методы теории инвариантных интегральных (центральных) многообразий, методы линейной алгебры и функционального анализа. Кроме того, на основе известных методов в диссертации разработаны собственные методы асимптотического интегрирования. Некоторые вычисления и графические построения в этой работе проводились с помощью пакета символьных вычислений Wolfram Mathematica 10.

Положения, выносимые на защиту

1. Для систем с колебательно убывающими коэффициентами предложены специальные усредняющие замены переменных, упрощающие процедуру построения асимптотических представлений. Для некоторых нелинейных неавтономных систем ОДУ доказаны теоремы о существовании в фазовом пространстве многообразия, составленного из начальных условий решений, стремящихся к нулю при $t \to \infty$. Построены асимптотические формулы для решений неавтономного уравнения Ван дер Поля и доказан их глобальный характер.

2. Для одномерного оператора Дирака с матричным потенциалом специального вида найдены те точки действительной оси, в которых у рассматриваемого оператора могут существовать собственные числа.

3. Получены асимптотические формулы для решений возмущенного гармонического осциллятора с переменной частотой собственных колебаний и найдены условия параметрического резонанса в этом уравнении.

4. Предложен метод построения асимптотических формул для некоторых специальных решений (критические решения) линейных систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами. Исследована динамика решений системы двух осцилляторов с медленно убывающей связью при учете трения в одном из осцилляторов.

5. Разработан метод асимптотического интегрирования одного класса систем ФДУ, близких к ОДУ. Построены асимптотические представления для решений адиабатического осциллятора с запаздыванием. Асимптотически проинтегрированы два интегро-дифференциальных уравнения типа Вольтерра с колебательно убывающим ядром.

6. На основе идей теории центральных многообразий разработан метод асимптотического интегрирования систем ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами. Построены асимптотические формулы для решений модельного скалярного дифференциального уравнения с двумя запаздываниями и колебательно убывающим коэффициентом. Разработанный метод асимптотического интегрирования перенесен на случай систем ФДУ с переменным запаздыванием. Метод проиллюстрирован на примере решения задачи асимптотического интегрирования одного скалярного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием.

7. Получены асимптотические представления для решений одного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием, которое при нулевом запаздывании переходит в одномерное уравнение Шредингера с потенциалом типа Вигнера–фон Неймана.

8. Предложен метод асимптотического интегрирования некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих международных и российских научных конференциях: Международная конференция «Тихонов и современная математика» (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006); Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения» (Украина, Алушта, 2006, 2008, 2010); XX-я Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-20» (Ярославль, Ярославский государственный технический университет, 2007); Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина (Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 2008); Международная научная конференция «Моделирование и анализ информационных систем», посвященная 35-летию математического факультета и 25-летию факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова (Ярославль, ЯрГУ, 2012); 1st EUROMECH Colloquium 532 on «Time-periodic systems. Current trends in theory and application» (Германия, Франкфурт-на-Майне, 2012);

1-й международный научно-практический семинар «Нелинейная динамика и вычислительная геометрия» (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2012); Международная математическая конференция «Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения» по случаю 75-летия со дня рождения академика А.М. Самойленко (Украина, Севастополь, 2013); Международная конференция «Geometry, Topology, and Applications», посвященная 70-летию Н.П. Долбилина (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2013); 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014) (Австрия, Вена, 2014); Международная конференция «Метод функций Ляпунова и его приложения» (MFL-2016) (Россия, Алушта, 2016); 9th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2017) (Венгрия, Будапешт, 2017); Восьмая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (DFDE-2017) (Москва, РУДН, 2017); Международная конференция «Динамические системы в науке и технологиях» (DSST-2018) (Россия, Алушта, 2018); Международная конференция «Интегрируемые системы и нелинейная динамика» (Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2018).

Результаты диссертационного исследования также обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров: семинар научно-образовательного центра «Нелинейная динамика» ЯрГУ им. П.Г. Демидова под руководством профессора, д.ф.-м.н. С.А. Кащенко и профессора, д.ф.-м.н. С.Д. Глызина (2005–2021); семинар под руководством Dr. Serhiy Yanchuk, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Humboldt-Universität zu Berlin (Германия, Берлин, 2011); семинар регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» под руководством профессора, д.ф.-м.н. Д.В. Баландина (Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 2020); семинар «Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения» под руководством профессора, д.ф.-м.н. А.Л. Скубачевского (РУДН, г. Москва, 2021).

Публикации

Результаты диссертации полностью опубликованы. Список основных публикаций приведен в конце автореферата. Он содержит 21 статью в журналах, рекомендованных ВАК, 17 из них — в библиографической базе Web of Science, 19 — в библиографической базе Scopus. Кроме этого, опубликовано 31 тезисов докладов на международных и всероссийских конференциях. Из совместных работ в диссертацию вошли только результаты, полученные автором лично.

Объем и структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы, содержащего 173 наименования. Общий объем диссертации составляет 310 страниц печатного текста, включая 9 рисунков и 3 таблицы.

Основное содержание работы

Диссертационное исследование посвящено развитию методов асимптотического интегрирования линейных, а также некоторого класса нелинейных систем дифференциальных уравнений при стремлении независимой переменной к бесконечности. Автором предложены некоторые техники, которые позволяют сводить задачу построения асимптотических формул к использованию известных асимптотических теорем, центральной из которых является классическая теорема Н. Левинсона. Процедура сведения основана на использовании некоторого специального варианта метода усреднения, предложенного автором, а также на развитии идей теории центральных многообразий. В работе рассматриваются как системы ОДУ, так и системы ФДУ, а также дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Разработанные методы иллюстрируются на примерах построения асимптотических представлений для решений некоторых конкретных динамических систем.

Работа состоит из семи глав. В **первой главе** излагаются методы асимптотического интегрирования систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами. В разделе 1.1 приводятся известные результаты, посвященные задаче асимптотического интегрирования линейных систем ОДУ, которые в дальнейшем используются в работе. Основными такими результатами являются асимптотическая теорема Н. Левинсона и лемма о диагонализации переменной матрицы. В разделе 1.2 рассматривается следующая система ОДУ, называемая системой с колебательно убывающими коэффициентами:

$$\dot{x} = \Big[A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big]x, \quad x\in\mathbb{C}^m. \quad (8)$$

Здесь A_0, $A_{i_1\ldots i_l}(t)$, $R(t)$ — квадратные матрицы, а $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — абсолютно непрерывные на полуинтервале $[t_0,\infty)$ скалярные функции. Потребуем, чтобы были выполнены следующие условия:

B.1. A_0 — постоянная матрица с действительными собственными значениями;

B.2. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\ldots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$;

B.3. $\dot{v}_1(t),\dot{v}_2(t),\ldots,\dot{v}_n(t)\in L_1[t_0,\infty)$;

B.4. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$ для любого набора индексов $1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_{k+1}\le n$;

В.5. Элементами матриц $A_{i_1\dots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$A_{i_1\dots i_l}(t)=\sum_{j=1}^{M}\beta_j^{(i_1\dots i_l)}e^{\mathrm{i}\lambda_j t},$$

где λ_j — произвольные действительные числа, а $\beta_j^{(i_1\dots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы;

В.6. Матрица $R(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

Основным результатом раздела 1.2 является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия В.1 — В.6. Тогда система* (8) *при достаточно больших t заменой*

$$x=\Big[I+\sum_{i=1}^{n}Y_i(t)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}Y_{i_1i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}Y_{i_1\dots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y, \quad (9)$$

где I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_{i_1\dots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\dot y=\Big[A_0+\sum_{i=1}^{n}A_iv_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}A_{i_1\dots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)+R_1(t)\Big]y, \quad (10)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\dots i_l}$ и матрицей $R_1(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

Замену (9) в тексте диссертации мы называем усредняющей заменой. Она является определенным аналогом замены переменной, предложенной И.З. Штокало для исследования устойчивости решений некоторого класса систем с малым параметром. Для вычисления матриц $Y_{i_1\dots i_l}(t)$ в замене (9) и постоянных матриц $A_{i_1\dots i_l}$ в усредненной системе (10) могут быть указаны явные формулы. Усредненная система (10) оказывается проще исходной системы (8) в том смысле, что она, вообще говоря, не содержит осциллирующих коэффициентов в главной части. В частности, для приведения системы (10) к L–диагональному виду (1) во многих случаях удается воспользоваться леммой о диагонализации переменной матрицы. В разделе 1.2 также приводятся некоторые свойства усредняющей замены (9), оказывающиеся полезными при практическом использовании этой замены для построения асимптотических формул.

В разделе 1.3 рассматривается нелинейный аналог системы ОДУ вида (8):

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_i(t,x)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} F_{i_1 i_2}(t,x)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} F_{i_1\ldots i_k}(t,x)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t,x), \qquad x\in\mathbb{R}^m. \quad (11)$$

Здесь $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции, которые удовлетворяют условиям B.2 — B.4. Функции $F_{i_1\ldots i_l}(t,x)$ предполагаются T–периодическими по переменной t или представляют собой тригонометрические полиномы вида

$$F_{i_1\ldots i_l}(t,x) = \sum_{j=1}^{M} F_j^{(i_1\ldots i_l)}(x)e^{\mathrm{i}\lambda_j t}. \quad (12)$$

По переменной x функции $F_{i_1\ldots i_l}(t,x)$ предполагаются достаточно гладкими в некотором шаре $|x|\le S$. Относительно вектор–функции $R(t,x)$ предполагаются выполненными следующие условия:

C.1. $|R(t,x_1)-R(t,x_2)|\le\gamma(t)|x_1-x_2|$, $|x_j|\le S$, $j=1,2$, где $\gamma(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

C.2. $R(t,0)\in L_1[t_0,\infty)$.

Соответствующим аналогом теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2. *Система* (11) *при достаточно больших t заменой*

$$x = y + \sum_{i=1}^{n} u_i(t,y)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} u_{i_1 i_2}(t,y)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} u_{i_1\ldots i_k}(t,y)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) \quad (13)$$

приводится к виду

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{n} P_i(y)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} P_{i_1 i_2}(y)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} P_{i_1\ldots i_k}(y)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t,y), \qquad y\in\mathbb{R}^m, \quad (14)$$

где функции $u_{i_1\ldots i_l}(t,y)$ являются или периодическими вектор-функциями по переменной t, или тригонометрическими многочленами типа (12), *имеющими нулевое среднее значение по t. Вектор–функция $R_1(t,y)$ удовлетворяет условиям C.1, C.2, где $x_j=y_j$ и $|y_j|\le r<S$, $j=1,2$.*

Замена (13) является вариантом усредняющей замены Крылова–Боголюбова применительно к системам вида (11). Далее в этом разделе показано, что усредненную систему (14) после некоторых преобразований можно рассматривать как частный случай более общего класса нелинейных систем ОДУ следующего вида:

$$\dot{x} = F(t,x) + R(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^m. \tag{15}$$

Здесь $F(t,0) = 0$ и функция $F(t,x)$ непрерывна по переменной t. Вектор-функция $R(t,x)$ в шаре $|x| \le r$ удовлетворяет условиям:

D.1. $|R(t,x_1) - R(t,x_2)| \le p(t)|x_1 - x_2|$, $|x_j| \le r$, $j = 1,2$, где $p(t) \in \mathcal{M}_0$, $t \ge t_0$,

D.2. $R(t,0) \in \mathcal{M}_0$ при $t \ge t_0$.

Здесь мы говорим, что некоторая локально интегрируемая на $[t_0,\infty)$ функция $f(t)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_0$ при $t \ge t_0$, если

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+1} |f(s)|ds = 0, \qquad t \ge t_0.$$

Системы вида (15) изучаются в разделе 1.4. Предположим, что в системе (15), кроме обозначенных выше условий, выполнены следующие требования:

1. $F(t,x) = A(t)x + f(t,x)$, где

$$A(t) = \left.\frac{dF(t,x)}{dx}\right|_{x=0}, \qquad |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le \omega(r)|x_1 - x_2|,$$
$$\lim_{r\to 0} \omega(r) = 0, \quad |x_j| \le r, \ j = 1,2;$$

2. Линейная система

$$\dot{x} = A(t)x \tag{16}$$

экспоненциально дихотомична на правой полуоси. Это означает, что существуют проекторы P_1 и P_2 ($P_1 + P_2 = I$, $P_j^2 = P_j$, $j = 1,2$), а также положительные константы K, α такие, что

$$\begin{aligned} |U(t)P_1U^{-1}(s)| &\le Ke^{-\alpha(t-s)}, \qquad 0 \le s \le t, \\ |U(t)P_2U^{-1}(s)| &\le Ke^{-\alpha(s-t)}, \qquad 0 \le t \le s. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $U(t)$ — матрицант системы (16) ($U(0) = I$). Кроме того, предположим, что $\operatorname{rank} P_1 = k$.

Центральным результатом раздела 1.4 является следующая теорема.

Теорема 3. *При достаточно больших t_0 в некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^m$ существует многообразие $S(t_0)$ размерности k, обладающее свойствами*:

а). Решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) \in S(t_0)$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

б). Решение $x(t)$ с начальным условием $|x(t_0)| \le \hat{\rho}_0$ и $x(t_0) \notin S(t_0)$ покидает r_0–окрестность нуля $|x| \le r_0$ в некоторый момент времени $t^* \ge t_0$.

в). Для решений $x(t)$ и $y(t)$ с начальными условиями $x(t_0)$ и $y(t_0)$, принадлежащими многообразию $S(t_0)$, справедлива оценка

$$|x(t) - y(t)| \le C_\mu e^{-\mu(t-t_0)}|x(t_0) - y(t_0)|, \qquad t \ge t_0,$$

где C_μ — некоторая положительная постоянная, а $\mu \in (0, \alpha)$.

Иногда в приложениях требуется оценить скорость стремления к нулю при $t \to \infty$ решений системы (15) с начальными условиями, принадлежащими многообразию $S(t_0)$. Определим следующее условие:

D.2'. $|R(t, 0)| \le \varphi(t)$ при $t \ge t_0$. Здесь функция $\varphi(t) > 0$ монотонно убывает при $t \ge t_0$ и стремится к нулю при $t \to \infty$. Кроме того, существует $\beta \in (0, \alpha)$ такое, что

$$\varphi(t_1)e^{\beta t_1} \le \varphi(t_2)e^{\beta t_2}, \qquad t_0 \le t_1 \le t_2.$$

Уточнением теоремы 3 является в этом случае следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, а условие D.2 заменено условием D.2'. Тогда справедливы все утверждения теоремы 3 и, дополнительно, существует такое $L > 0$, что все решения системы* (15) *с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$ при достаточно больших t_0 допускают следующую оценку:*

$$|x(t)| \le L\varphi(t), \qquad t \ge t_0.$$

В качестве примера использования теорем из раздела 1.4 в разделе 1.5 строится асимптотика для решений неавтономного уравнения Ван дер Поля при $t \to \infty$:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(t)(1 - x^2)\dot{x}, \qquad t \ge 0, \tag{18}$$

где $\varepsilon(t)$ — непрерывная функция и $\varepsilon(t) \ge 0$. Основной результат этого раздела сформулирован в виде следующий теоремы.

Теорема 5. *Предположим, что $\varepsilon(t) \notin L_1[0, \infty)$, $\dot{\varepsilon}(t) \in L_1[0, \infty)$ и $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда поведение всех решений уравнения* (18)*, за исключением нулевого решения, описывается при $t \to \infty$ следующими асимптотическими формулами:*

$$x(t) = \big(2 + o(1)\big)\cos\big(t + \varphi(t)\big), \quad \dot{x}(t) = -\big(2 + o(1)\big)\sin\big(t + \varphi(t)\big),$$

где

$$\varphi(t) = -\frac{1}{16}\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^2(s)ds + o\left(\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^2(s)ds\right).$$

Вторая глава диссертации посвящена исследованию задачи о собственных числах одномерного оператора Дирака с колебательно убывающим потенциалом. Собственно постановке задачи отведен первый раздел этой главы. Нами рассматривается одномерный оператор Дирака, действующий в пространстве $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ и порожденный дифференциальным выражением

$$Dy = B\frac{dy}{dx} + U(x)y = \lambda y, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_2(x) & -u_1(x) \end{pmatrix}.$$

Функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определяются следующими формулами:

$$u_1(x) = -\frac{Q(x)}{(x+1)^\beta}, \qquad u_2(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^\alpha}.$$

Здесь $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, а действительные непрерывные функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются или периодическими с периодом $T > 0$ или тригонометрическими многочленами вида

$$P(x) = \sum_{j=-N}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\omega_j x}, \qquad Q(x) = \sum_{j=-M}^{M} q_j e^{\mathrm{i}\nu_j x}, \tag{20}$$

где $p_j, q_j \in \mathbb{C}$, $\omega_j, \nu_j \in \mathbb{R}$ и, кроме того,

$$p_{-j} = \bar{p}_j, \quad q_{-j} = \bar{q}_j, \quad \omega_{-j} = -\omega_j, \quad \nu_{-j} = -\nu_j \quad (\omega_k \neq \omega_s,\ \nu_k \neq \nu_s,\ k \neq s).$$

В случае, когда функции $P(x)$ и $Q(x)$ — T–периодические, поставим им в соответствие их бесконечные ряды Фурье вида (20). Оператор Дирака, кроме дифференциального выражения (19), как правило, включает в себя краевое условие вида

$$y_1(0)\sin\xi + y_2(0)\cos\xi = 0, \qquad \xi \in [0,\pi), \tag{21}$$

которое гарантирует его самосопряженность при подходящем выборе области определения $\mathfrak{D}$. В нашей работе мы игнорируем это условие, интересуясь лишь асимптотическим поведением решений системы дифференциальных уравнений (19) при $x \to \infty$. В частности, нами изучается вопрос о существовании у этой системы уравнений решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$

при некоторых значениях спектрального параметра λ и определенных условиях на компоненты матричного потенциала $U(x)$. Запишем дифференциальное выражение (19) в виде системы ОДУ:

$$\begin{aligned} y_1' &= u_2(x)y_1 - \big(\lambda + u_1(x)\big)y_2, \\ y_2' &= \big(\lambda - u_1(x)\big)y_1 - u_2(x)y_2. \end{aligned} \tag{22}$$

Систему дифференциальных уравнений (22) называют обычно одномерной системой Дирака. Всюду в этой главе мы говорим, что для $\lambda \in M$, где M — некоторое подмножество $\mathbb{R}$, выполнено *свойство* $\mathcal{A}$, если для каждого $\lambda \in M$ существует решение (22), принадлежащее классу $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Следовательно, для любого $\lambda \in M$ существует $\xi \in [0,\pi)$ (зависящее от λ) такое, что λ является собственным числом оператора Дирака (19), (21).

В разделе 2.2 исследуется случай, когда $\lambda \neq 0$. Основные результаты этого раздела сформулированы в виде двух вспомогательных утверждений и одной ключевой теоремы.

Утверждение 1. *Если функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются T–периодическими, то ненулевыми собственными числами оператора Дирака* (19), (21) *могут являться лишь числа вида $\lambda = (\pi/T)q$, $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

В том случае, когда функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются или T–периодическими или тригонометрическими многочленами вида (20) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. *Ненулевыми собственными числами оператора Дирака* (19), (21) *могут быть лишь числа вида*

$$\lambda = \frac{h_{i_1} + h_{i_2} + \ldots + h_{i_s}}{2},$$

где $h_{i_m} = \omega_{i_m}$ или $h_{i_m} = \nu_{i_m}$ $(m = 1,\ldots,s)$, и число s нечетно.

Чтобы сформулировать основной результат данного раздела, введем следующие обозначения. Положим

$$\Omega_1 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{\omega_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_2 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_2^{(1)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z} \;\&\; \big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big]\big| > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$\Omega_2^{(2)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z} \;\&\; \lambda \neq \frac{\omega_s}{2},\; s \in \mathbb{Z}$$
$$\&\; \big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big]\big| > \Big|\frac{1}{2\lambda}\Big[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\Big]\Big|\Big\},$$

$$\Omega_2^{(3)} = \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z} \;\;\&\;\; \lambda \neq \frac{\omega_s}{2},\; s \in \mathbb{Z}$$

$$\& \;\; \sqrt{\Big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big]\Big|^2 - \Big|\frac{1}{2\lambda}\Big[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\Big]\Big|^2} > \frac{1}{2} \Big\},$$

$$\Omega_2^{(4)} = \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \Big|\mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big] + \mathbf{i}\,\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big]\Big| > \frac{1}{2} \Big\},$$

$$\Omega_3 = \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{\omega_s + \omega_r + \omega_q}{2} \text{ для некоторых } s, r, q \in \mathbb{Z} \Big\},$$

$$\Omega_3^{(1)} = \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{\omega_s + \omega_r + \omega_q}{2} \text{ для некоторых } s, r, q \in \mathbb{Z}$$

$$\& \;\; \Big| \sum_{\substack{k,l,m \in \mathbb{Z}, \\ \omega_k + \omega_l + \omega_m = 2\lambda}} \frac{p_k p_l p_m}{(\omega_k - 2\lambda)(\omega_m - 2\lambda)} \Big| > \frac{1}{2} \;\;\&\;\; \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\; j \in \mathbb{Z} \Big\},$$

$$\Omega_4 = \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{h_{i_1} + h_{i_2} + \ldots + h_{i_s}}{2} \text{ для некоторых } i_1, i_2, \ldots i_s \in \mathbb{Z},$$

$$\text{где } s \geq 3 \text{ нечетно и } h_{i_m} = \omega_{i_m} \text{ или } h_{i_m} = \nu_{i_m} \Big\}.$$

Здесь и в дальнейшем символом $\mathrm{M}\big[F(x)\big]$ обозначено среднее значение периодической или почти периодической функции $F(x)$:

$$\mathrm{M}\big[F(x)\big] = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(x)dx.$$

Определим также следующие уравнения относительно λ:

$$p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2} = 0, \tag{23}$$

$$\sum_{\substack{s,r,q \in \mathbb{Z}, \\ \omega_s + \omega_r + \omega_q = 2\lambda}} \frac{p_s p_r p_q}{(\omega_s - 2\lambda)(\omega_q - 2\lambda)} = 0, \tag{24}$$

$$\sum_{\substack{s,r \in \mathbb{Z}, \\ \omega_s + \nu_r = 0}} \frac{p_s q_r (\nu_r - \omega_s)}{(\omega_s + 2\lambda)(\nu_r + 2\lambda)} = 0, \tag{25}$$

$$\big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big]\big| - \Big|\frac{1}{2\lambda}\Big[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\Big]\Big| = 0, \tag{26}$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\left[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\right] - \frac{1}{2\lambda}\left[q_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|q_j|^2}{\nu_j^2 - 4\lambda^2}\right] +$$

$$+ \mathrm{Im}\Big[\sum_{\substack{s,r \in \mathbb{Z}, \\ \omega_s + \nu_r = 0}} \frac{p_s q_r (\nu_r - \omega_s)}{(\omega_s + 2\lambda)(\nu_r + 2\lambda)} \Big] = 0. \tag{27}$$

Здесь, разумеется, предполагается, что сумма по пустому множеству индексов равна нулю. Пусть

$$\Gamma_1 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (23) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_2 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (24) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_2^c = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ не является решением (24) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_3 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (25) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2} \ \& \ \lambda \neq \frac{\nu_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_4 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (26) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_5 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (27) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2} \ \& \ \lambda \neq \frac{\nu_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Основной результат раздела 2.2 составляет следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $\sigma'(D)$ — *множество всех ненулевых собственных значений оператора Дирака* (19), (21) *для некоторого фиксированного* $\xi \in [0, \pi)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

A.1.1.1. *Если* $\alpha < 2\alpha < \beta < 1 < 3\alpha$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1)$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1)$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.1.1.1'. *Если* $\alpha < 2\alpha < \beta = 1 < 3\alpha$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1)$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1)$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.1.1.2.1. *Если* $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha < 1$ *и* $\alpha + \beta > 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$. *Кроме того, для* $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.1.1.2.1'. *Если* $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha = 1$ *и* $\alpha + \beta > 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3^{(1)} \cap \Gamma_1)$. *Кроме того, для* $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3^{(1)} \cap \Gamma_1)$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.1.1.2.2. *Если* $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha < 1$ *и* $\alpha + \beta \leq 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3)$. *Кроме того, для* $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.1.2. *Если* $\alpha < 2\alpha < 3\alpha < \beta < 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.1.2'. *Если* $\alpha < 2\alpha < 3\alpha < \beta = 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.2.1. *Если* $\alpha < \beta < 1 < 2\alpha$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.2.1'. *Если* $\alpha < \beta = 1 < 2\alpha$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.2.2.1. *Если $\alpha < \beta < 2\alpha \le 1$ и $\alpha + \beta > 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.2.2. *Если $\alpha < \beta < 2\alpha \le 1$ и $\alpha + \beta \le 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_3)$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.3. *Если $\alpha < 2\alpha = \beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)} \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_4) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_4)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)}$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.3'. *Если $\alpha < 2\alpha = \beta = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

B.1. *Если $\alpha = \beta < 1 < 2\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

B.1'. *Если $\alpha = \beta = 1 < 2\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_2^{(4)}$ и для $\lambda \in \Omega_2^{(4)}$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

B.2. *Если $\alpha = \beta < 2\alpha \le 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_5)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

Ситуация, когда в системе (22) параметр λ принимает нулевое значение, рассматривается в разделе 2.3 диссертационного исследования. Определим следующие условия:

$$\mathrm{M}\big[P(x)\big] = \mathrm{M}\big[Q(x)\big] = 0, \tag{28}$$

$$\mathrm{M}\Big[P(x) \int Q(x)dx\Big] = 0. \tag{29}$$

Основным результатом для случая $\lambda = 0$ является следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть $\sigma(D)$ — множество всех собственных значений оператора Дирака* (19), (21) *для некоторого фиксированного $\xi \in [0, \pi)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

A. *Пусть $\alpha < \beta < 1$, тогда, если $\mathrm{M}\big[P(x)\big] \ne 0$ или $\mathrm{M}\big[Q(x)\big] \ne 0$, то для $\lambda = 0$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A'. *Пусть $\alpha < \beta = 1$, тогда, если $\mathrm{M}\big[P(x)\big] \ne 0$ или $\big|\mathrm{M}\big[Q(x)\big]\big| > 1/2$, то для $\lambda = 0$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. В противном случае $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.*

A.1. *Пусть $\alpha < \beta \le 1$ и $\alpha + \beta > 1$. Тогда, если выполнено условие* (28), *то $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.*

A.2. *Пусть $\alpha < \beta < 1$ и $\alpha + \beta \le 1$. Тогда, если выполнено условие* (28), *а условие* (29) *не выполнено, то $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.*

A.2.1. *Пусть $\alpha < \beta < 1$, $\alpha + \beta \le 1$ и $2\alpha + \beta > 1$. Тогда, если выполнено условие* (28), *то $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.*

A.2.2. *Пусть $\alpha < \beta < 1$ и $2\alpha + \beta < 1$. Тогда, если выполнены условия* (28), (29) *и $\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big] \ne 0$, то для $\lambda = 0$ имеет место свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.2'. *Пусть $\alpha < \beta < 1$ и $2\alpha + \beta = 1$. Тогда, если выполнены условия* (28), (29) *и $\big|\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big]\big| > 1/4$, то для $\lambda = 0$ имеет* *место свойство $\mathcal{A}$. Кроме того, если выполнены условия* (28), (29) *и* $\left|\mathrm{M}\left[Q(x)\left(\int P(x)dx\right)^2\right]\right| \le 1/4$, *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

В. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$, *тогда, если* $\mathrm{M}\left[P(x)\right] \ne 0$ *или* $\mathrm{M}\left[Q(x)\right] \ne 0$, *то для* $\lambda = 0$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

В'. *Пусть* $\alpha = \beta = 1$, *тогда, если* $\sqrt{\left(\mathrm{M}\left[P(x)\right]\right)^2 + \left(\mathrm{M}\left[Q(x)\right]\right)^2} > 1/2$, *то для* $\lambda = 0$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$. *В противном случае* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

В.1. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $2\alpha > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (28), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

В.2. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $2\alpha \le 1$. *Тогда, если выполнено условие* (28), *а условие* (29) *не выполнено, то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

В.2.1. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$, $2\alpha \le 1$ *и* $3\alpha > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (28), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

В.2.2. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $3\alpha < 1$. *Тогда, если выполнены условия* (28), (29) *и* $\mathrm{M}\left[Q(x)\left(\int P(x)dx\right)^2\right] \ne 0$ *или* $\mathrm{M}\left[P(x)\left(\int Q(x)dx\right)^2\right] \ne 0$, *то для* $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$.

В.2.2'. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $3\alpha = 1$. *Тогда, если выполнены условия* (28), (29) *и*

$$\sqrt{\left(\mathrm{M}\left[Q(x)\left(\int P(x)dx\right)^2\right]\right)^2 + \left(\mathrm{M}\left[P(x)\left(\int Q(x)dx\right)^2\right]\right)^2} > \frac{1}{4}, \qquad (30)$$

то для $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$. *Кроме того, если выполнены условия* (28), (29) *и имеет место неравенство, противоположное* (30), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

В заключительном разделе второй главы на некоторых модельных примерах иллюстрируется практическое использование теорем 6 и 7.

В **третьей главе** диссертационного исследования изучается динамика возмущенного гармонического осциллятора. В разделах 3.1 и 3.2 рассматривается так называемый адиабатический осциллятор:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(1 + q(t)\right)x = 0. \qquad (31)$$

Здесь функция $q(t)$ предполагается в определенном смысле малой при $t \to \infty$. В разделе 3.1 приводятся некоторые известные факты об особенностях динамики решений уравнения (31) в случае, когда функция $q(t)$ колебательным образом убывает на бесконечности. Раздел 3.2 посвящен исследованию явления параметрического резонанса в гармоническом осцилляторе с переменной частотой собственных колебаний, находящегося под воздействием колебательно убывающего возмущения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\omega^2(t) + \frac{a}{t^\rho}\cos\lambda t\right)x = 0, \qquad a \ne 0, \qquad (32)$$

где $a, \lambda, \rho \in \mathbb{R}$ и $0 < \rho \leq 1$. Предполагается, что функция $\omega^2(t)$, описывающая частоту собственных колебаний, является переменной величиной и допускает при $t \to \infty$ представление вида

$$\omega^2(t) = 1 + \frac{\omega_1}{t^\rho} + \frac{\omega_2}{t^{2\rho}} + \ldots + \frac{\omega_s}{t^{s\rho}} + r(t) \tag{33}$$

для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Здесь $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, s$, а функция $r(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. В этом разделе строятся асимптотические представления решений уравнения (32) при различных значениях входящих в это уравнение параметров. На основании полученных асимптотических формул определяются те значения параметров, при которых уравнение (32) может иметь неограниченные при $t \to \infty$ решения. Основной результат раздела 3.2 сформулирован в виде следующий теоремы.

Теорема 8. *Пусть коэффициенты ω_i ($i = 1, \ldots, s$) разложения* (33) *функции $\omega^2(t)$ фиксированы (т.е. не зависят от параметров внешнего возмущения). Тогда в уравнении* (32) *резонанс может реализоваться не более, чем при пяти значениях параметра $\lambda > 0$. Этими резонансными значениями являются значения $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, \ldots, 4$) и одно из значений вида $\lambda = \lambda_n$, где $n \geq 5$, а величины λ_n определяются формулой*

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

При этом, если в уравнении (32) *реализуется резонанс $\lambda = \lambda_r$, то реализуются и все резонансы $\lambda = \lambda_i$ из числа перечисленных выше, где $i < r$. Условия возникновения резонанса в уравнении* (32) *приведены в таблице 1.*

Таблица 1. Условия резонанса в уравнении (32)

$n=$	$\lambda=\lambda_n$	Условия возникновения резонанса	Точки резонанса в плоскости (a, λ)
1	$\lambda_1=2$	$0 < \rho \leq 1$	$(a, 2)$, $\lvert a\rvert > 2\lvert\omega_1\rvert$
2	$\lambda_2=1$	$0 < \rho \leq 1/2$, $\omega_1 = 0$	$(a, 1)$, $\lvert a\rvert > \sqrt{\max\bigl(12\omega_2/5, -12\omega_2\bigr)}$
3	$\lambda_3=2/3$	$0 < \rho \leq 1/3$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$, $\lvert\omega_3\rvert < 3\omega_2^{3/2}$	$\bigl(\pm 8\sqrt{\omega_2}/3, 2/3\bigr)$
4	$\lambda_4=1/2$	$0 < \rho \leq 1/4$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$ $\omega_3 = 0$, $-317\omega_2^2/60 < \omega_4 < 433\omega_2^2/60$	$\bigl(\pm\sqrt{(15\omega_2/2)}, 1/2\bigr)$
5	$\lambda_5=2/5$	$0 < \rho \leq 1/5$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = 275\omega_2^2/336$, $\lvert\omega_5\rvert < 125\sqrt{3}\omega_2^{5/2}/16$	$\bigl(\pm 8\sqrt{3\omega_2}/5, 2/5\bigr)$
$n>5$	$\lambda_n=2/n$	$0 < \rho \leq 1/n$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = (7\lambda_n^2 + 20)\omega_2^2/\bigl(8(1-\lambda_n^2)(4-\lambda_n^2)\bigr)$, $\omega_5 = 0, \ldots$	$\bigl(\pm\sqrt{2(4-\lambda_n^2)\omega_2}, 2/n\bigr)$

В разделе 3.3 рассматривается задача асимптотического интегрирования гармонического осциллятора с интегральным возмущением. Именно, в этом разделе строятся асимптотические представления для решений интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \frac{a\sin\lambda t}{t^\rho}\int\limits_{t_0}^{t} x(s)ds = 0, \qquad t \geq t_0 > 0, \tag{34}$$

где a, λ, ρ — вещественные числа и $\rho > 0$. Как и в предыдущем разделе, с помощью полученных асимптотических представлений определяются те значения параметров, при которых уравнение (34) имеет неограниченные при $t \to \infty$ решения.

В **четвертой главе** работы система дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами (8) рассматривается при следующем условии. Предполагается, что в этой системе матрица A_0 имеет ровно s чисто мнимых собственных чисел, а остальные $m-s$ собственные числа имеют отрицательные вещественные части. В этом случае естественно ожидать, что для $m-s$ линейно независимых решений системы (8) при $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$|x_j(t)| \leq Me^{-\nu t}, \qquad \nu > 0, \qquad j = s+1, \dots, m. \tag{35}$$

Следовательно, асимптотика всех решений системы (8) в главном будет определяться асимптотическими формулами для s решений, которые не подчиняются оценкам (35). В этой главе такие решения называются *критическими*. В разделе 4.1 предложен метод построения асимптотических представлений для критических решений системы (8). В начале этого раздела приводится еще один вариант теоремы 3, необходимый для теоретического обоснования разрабатываемого в этой главе метода. Именно, рассматривается нелинейная система ОДУ следующего вида:

$$\dot{x} = A(t)x + R(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^m. \tag{36}$$

Пусть

1. Линейная система (16) экспоненциально дихотомична на правой полуоси $t \geq 0$, т. е. выполнены неравенства (17). Кроме того, пусть $\operatorname{rank} P_1 = k$;

2. Вектор-функция $R(t,x)$ в шаре $|x| \leq r$ удовлетворяет следующим условиям:

2а. $|R(t,x_1) - R(t,x_2)| \leq p(t)|x_1 - x_2|$, $|x_j| \leq r$, $j = 1,2$, где $p(t) \in \mathcal{M}_0$, $t \geq t_0$,

2б. $R(t,0) \in L_1[t_0,\infty)$.

Теорема 9. *При сформулированных выше предположениях справедливы все утверждения теоремы 3 и дополнительно все решения системы* (36) *с начальными условиями на многообразии* $S(t_0)$*, где* $t_0 \gg 1$*, принадлежат классу* $L_1[t_0,\infty)$.

Предложенный в разделе 4.1 метод построения асимптотик для критических решений использует идеологию теории центральных многообразий.

В разделе 4.2 описан иной способ получения асимптотических представлений для критических решений системы (8). Он опирается на результаты, полученные В.В. Майоровым и Ю.С. Колесовым[7] применительно к задаче об устойчивости линейных систем с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами.

В разделе 4.3 метод построения асимптотик для критических решений применяется к задаче асимптотического интегрирования системы двух связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{a\sin\omega t}{t^\alpha} x_2 = 0, \\ &\ddot{x}_2 + d\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \frac{b\sin\omega t}{t^\beta} x_1 = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь $\omega > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, a и b — произвольные (ненулевые) действительные параметры, $d > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

В **пятой главе** разрабатывается метод построения асимптотических представлений для решений систем ФДУ следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) B_i(t, x_t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(t, x_t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) B_{i_1\ldots i_k}(t, x_t) + R(t, x_t). \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь $B_{i_1\ldots i_l}(t,\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что либо все эти операторы периодичны по переменной t с периодом $\omega > 0$, т. е.

$$B_{i_1\ldots i_l}(t+\omega, \varphi) \equiv B_{i_1\ldots i_l}(t, \varphi), \qquad \varphi \in C_h, \tag{39}$$

либо

$$B_{i_1\ldots i_l}(t, \varphi) = \sum_{j=1}^{L} \Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t) \ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\varphi), \qquad \varphi \in C_h. \tag{40}$$

В формуле (40) $\ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\varphi)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t, и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t) = \sum_{s=1}^{M} \beta_{sj}^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_s t}, \tag{41}$$

[7]Колесов Ю.С., Майоров В.В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифф. уравнения. 1974. Т. 10, № 10. С. 1778–1788.

где $\beta_{sj}^{(i_1\ldots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные $(m\times m)$-матрицы, а λ_s — вещественные числа. Далее, $R(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ такой, что при любом фиксированном $\varphi\in C_h$ функция $R(\cdot,\varphi)$ измерима по Лебегу при $t\geq t_0$ и, кроме того, выполнено неравенство (4), где $\gamma(t)\in L_1[t_0,\infty)$. Операторы с такими свойствами будем называть *операторами из класса* $\mathcal{L}_1^h[t_0,\infty)$. Наконец, $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции, относительно которых выполнены условия B.2 — B.4.

Метод асимптотического интегрирования систем ФДУ вида (38) излагается в разделе 5.1. Здесь показано, что системе (38) можно сопоставить в некотором смысле эквивалентную ей систему в расширенном фазовом пространстве. Именно, с помощью некоторых преобразований от системы (38) можно перейти к системе ФДУ следующего вида:

$$\dot{x}=\Bigg(\sum_{i=1}^{n}v_i(t)A_i(t)+\sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)A_{i_1i_2}(t)+\ldots+\\ +\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)A_{i_1\ldots i_k}(t)\Bigg)x(t)+R_1(t,x_t). \quad (42)$$

Здесь $(m\times m)$-матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ — это либо ω-периодические матрицы, либо матрицы вида (41). Далее, $R_1(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h}\equiv C\big([-(k+1)h,0],\mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-(k+1)h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ в пространство $\mathbb{C}^m$ и принадлежащий классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. Система (42) с помощью замены (9) при достаточно больших t может быть приведена к усредненному виду

$$\dot{y}=\Bigg(\sum_{i=1}^{n}A_iv_i(t)+\sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n}A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\ldots+\\ +\sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n}A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Bigg)y(t)+R_2(t,y_t) \quad (43)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и оператором $R_2(t,y_t)$ из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. Предположим, что в главной части системы (43) можно выделить так называемый ведущий член, и этим членом является матрица $Av_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)$. Это означает, что систему (43) можно записать в виде

$$\dot{y}=\big[A+V(t)\big]v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)y(t)+R_2(t,y_t). \quad (44)$$

Здесь A — это либо матрица $A_{i_1\ldots i_s}$, либо сумма некоторого числа постоянных матриц $A_{i_1\ldots i_l}$, а матрица $V(t)$ такова, что $V(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и $\dot{V}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$. Если оказывается, что все собственные числа постоянной матрицы A различны, то используя известную лемму о диагонализации переменных матриц, систему (43) можно привести к виду (2). Дальнейшее построение асимптотики основано на использовании функционально-дифференциального аналога теоремы Левинсона из работы[8] применительно к системе (2).

Пусть система (44) приводится к виду (2), где $\Lambda(t)=\operatorname{diag}\big(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)\big)$, и мы можем воспользоваться указанным выше аналогом теоремы Левинсона для систем ФДУ. Основным результатом раздела 5.1 является следующая теорема, связывающая динамику решений исходной системы (38) и решений системы в расширенном пространстве (42).

Теорема 10. *Предположим, что число $l=1,\ldots,m$ фиксировано, параметр $k\in\mathbb{N}$ выбран в силу свойства B.4 функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$, а действительное число T достаточно велико. Тогда существует решение $\tilde{x}_l(t)$ системы* (38)*, которое определено при $t\geq T-kh$ и имеет асимптотическое представление вида*

$$\tilde{x}_l(t)=c_1\,x_1(t)+\ldots+c_l\,x_l(t)+\ldots+c_m\,x_m(t)+o\big(e^{-\beta t}\big) \tag{45}$$

где $c_l\neq 0$. В представлении (45) *функции $x_j(t)$ $(j=1,\ldots,m)$ суть решения системы* (42)*, имеющие при $t\to\infty$ асимптотику вида*

$$x_j(t)=\big[p_j+o(1)\big]\exp\Big\{\int\limits_T^t\lambda_j(s)ds\Big\}.$$

Здесь p_j — собственный вектор матрицы A из системы (44)*, отвечающий соответствующему собственному числу. Наконец, $\beta>0$ — произвольное действительное число.*

Кроме того, из результатов отмеченной выше работы Дж. Касселя и Ж. Хоу следует, что все решения системы (38), определенные при $t\geq T$, имеют асимптотику вида (45) с некоторыми константами $c_1,\ldots,c_m$, зависящими от решения.

В разделе 5.2 описанная выше методика используется для построения асимптотических формул для решений следующего уравнения с запаздыванием:

$$\ddot{x}+x+\frac{a\sin\lambda t}{t^\rho}x(t-h)=0, \tag{46}$$

где $a,\lambda\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, $\lambda\neq 0$, $\rho>0$ и $h>0$. Поскольку уравнение (46) при $h=0$ является уравнением адиабатического осциллятора, то в случае $h\neq 0$

[8] Cassell J.S., Hou Z. Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation // J. Lond. Math. Soc. (2). 1993. Vol. 47. P. 473–483.

это уравнение естественно называть уравнением адиабатического осциллятора с запаздыванием. Исследования, приведенные в этом разделе, являются продолжением нашей работы по изучению адиабатических осцилляторов, результаты которой обсуждаются в разделах 3.1 и 3.2. Построенные в этом разделе асимптотические представления позволяют, в том числе, определить те значения параметра ρ, при которых наличие запаздывания в уравнении (46) оказывает существенное влияние на динамику решений.

Раздел 5.3 посвящен задаче асимптотического интегрирования интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \frac{a\sin\lambda t}{t^\rho}\int\limits_{t-h}^{t} x(s)ds = 0, \qquad t \geq t_0 + h, \tag{47}$$

где a, λ, t_0, h, ρ — вещественные числа и $t_0, h, \rho > 0$. Напомним, что в разделе 3.3 исследуется похожее уравнение Вольтерра, именно уравнение (34). Поскольку уравнение (34) является конечномерной динамической системой, а уравнение (47), относящееся к ФДУ, имеет бесконечномерное фазовое пространство, естественно ожидать, что динамика решений этих уравнений существенно различается. Построение асимптотических формул для решений уравнения (47) и последующее их сопоставление с формулами, приведенными в разделе 3.3, и является основной задачей раздела 5.3.

В наиболее общем виде метод асимптотического интегрирования ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами изложен в **шестой главе**. В этой главе изучается вопрос о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений системы ФДУ

$$\dot{x} = B_0 x_t + G(t, x_t). \tag{48}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \leq \theta \leq 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h,0], \mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$. Далее, B_0 — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ и не зависящий от t, а оператор $G(t,x_t)$ допускает представление в виде

$$G(t,x_t) = B(t,x_t) + R(t,x_t). \tag{49}$$

В этой формуле $B(t,\cdot)$ и $R(t,\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$. При этом оператор $R(t,\varphi)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^h[t_0,\infty)$, а оператор $B(t,\varphi)$ определяется следующей формулой:

$$B(t,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)B_i(t,\varphi) + \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)B_{i_1 i_2}(t,\varphi) + \ldots +$$
$$+ \sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)B_{i_1\ldots i_k}(t,\varphi), \qquad \varphi \in C_h.$$

Здесь $B_{i_1\dots i_l}(t,\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, имеющие вид (40), (41). Наконец, $v_1(t),\dots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции, удовлетворяющие условиям B.2 — B.4.

Системы ФДУ вида (48) рассматриваются в главе 5 в случае $B_0=0$. В главе 6 система (48) исследуется при следующем предположении относительно оператора B_0. Предполагается, что характеристическое уравнение

$$\det\Delta(\lambda)=0, \qquad \Delta(\lambda)=\lambda I-B_0(e^{\lambda\theta}I),$$

имеет N корней $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ на мнимой оси с учетом их кратностей, а вещественные части остальных корней отрицательны. Данное предположение позволяет для асимптотического интегрирования системы (48) воспользоваться идеологией известного метода центральных многообразий. Адаптации этого метода к задаче асимптотического интегрирования системы (48) и посвящена шестая глава.

В разделе 6.1 излагаются некоторые известные сведения из теории ФДУ, а также вводятся обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. В частности, в этом разделе отмечено, что линейная автономная система

$$\dot{x}=B_0x_t, \tag{50}$$

для $t\geq 0$ порождает в C_h сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t)$: $C_h\to C_h$. Оператор $T(t)$, называемый оператором сдвига вдоль траекторий системы (50), определяется следующим образом: $T(t)\varphi=x_t^{\varphi}(\theta)$, где $\varphi\in C_h$ и $x_t^{\varphi}(\theta)$ — решение системы (50) с начальным условием $x_0^{\varphi}(\theta)=\varphi(\theta)$. Инфинитезимальный производящий оператор A этой полугруппы задается равенством $A\varphi=\varphi'(\theta)$, где $\varphi\in D(A)$. Область определения оператора A

$$D(A)=\big\{\varphi\in C_h\ \big|\ \varphi'(\theta)\in C_h,\ \ \varphi'(0)=B_0\varphi\big\}$$

плотна в C_h. Пусть

$$\Lambda=\big\{\lambda_i\in\mathbb{C}\ \big|\ \det\Delta(\lambda_i)=0,\ \operatorname{Re}\lambda_i=0,\ i=1,\dots,N\big\},$$

тогда пространство C_h можно разложить в прямую сумму двух подпространств

$$C_h=P_\Lambda\oplus Q_\Lambda. \tag{51}$$

Здесь P_Λ — прямая сумма обобщенных собственных подпространств оператора A, отвечающих собственным значениям из Λ, а Q_Λ — некоторое дополнительное пространство такое, что $T(t)Q_\Lambda\subseteq Q_\Lambda$.

В разделе 6.2 определяется понятие *критического многообразия*.

Определение 1. *Будем говорить, что множество (линейное пространство) $\mathcal{W}(t)\subset C_h$ при $t\geq t_*\geq t_0$ является критическим многообразием для системы* (48), *если выполнены следующие условия:*

1. Существует $(m \times N)$*-матрица* $H(t,\theta)$ *непрерывная по* $t \geq t_*$ *и* $\theta \in [-h, 0]$ *такая, что ее столбцы принадлежат пространству* Q_Λ *при всех* $t \geq t_*$ *и, кроме того,* $\|H(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ *при* $t \to \infty$*, где*

$$\|H(t,\cdot)\|_{C_h} = \sup_{-h\leq\theta\leq 0} |H(t,\theta)|$$

и $|\cdot|$ *— некоторая матричная норма в пространстве* $(m \times N)$*-матриц;*

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ *для* $t \geq t_*$ *задается формулой*

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{\varphi(\theta) \in C_h \;\Big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t,\theta)u,\ u \in \mathbb{C}^N\Big\}, \tag{52}$$

где столбцы $(m \times N)$*-матрицы* $\Phi(\theta)$ *образуют базис в пространстве* P_Λ *из* (51)*;*

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ *при* $t \geq t_*$ *положительно инвариантно относительно траекторий системы* (48)*, т. е. если* $x_T \in \mathcal{W}(T)$*,* $T \geq t_*$*, то* $x_t \in \mathcal{W}(t)$ *для всех* $t \geq T$*.*

Динамика решений системы (48), лежащих на критическом многообразии, описывается конечномерной системой ОДУ (*система на критическом многообразии*). В разделе 6.2 описан алгоритм приближенного построения критического многообразия и соответствующей системы ОДУ. Основным результатом этого раздела является теорема об однозначной разрешимости некоторых функционально-краевых задач для линейных систем ОДУ. Эта теорема позволяет обосновать процедуру приближенного построения критического многообразия в некотором специальном виде.

Основные теоремы, описывающие свойства критического многообразия, изложены в разделе 6.3.

Теорема 11. *При достаточно больших* t *у системы* (48) *существует критическое многообразие* $\mathcal{W}(t)$*, определяемое формулой* (52).

Справедлив следующий результат о возможности приближенного построения критического многообразия. Обозначим символом $\hat{H}(t,\theta)$ некоторую специальную $(m \times N)$-матрицу, вычисленную с помощью алгоритма из раздела 6.2.

Теорема 12. *Пусть* $\mathcal{W}(t)$ *— критическое многообразие системы* (48)*, существующее согласно теореме 11 при достаточно больших* t*. Тогда найдется такое достаточно большое* t_**, что при* $t \geq t_*$ *матрица* $H(t,\theta)$ *из* (52) *допускает представление в виде*

$$H(t,\theta) = \hat{H}(t,\theta) + Z(t,\theta), \qquad t \geq t_* \geq t_0, \quad -h \leq \theta \leq 0.$$

Здесь $(m \times N)$*-матрица* $Z(t,\theta)$ *такова, что* $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и* $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$.

Следующая теорема устанавливает свойство глобального притяжения многообразия $\mathcal{W}(t)$.

Теорема 13. *Пусть* $x(t)$ *— решение системы* (48)*, определенное при* $t \geq T \geq t_0$*. Тогда найдется такое достаточно большое* $t_* \geq T$*, что при* $t \geq t_*$ *имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u_H(t) + H(t,\theta)u_H(t) + O\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty.$$

Здесь $\beta > 0$ *— некоторое действительное число и* $u_H(t)$ $(t \geq t_*)$ *— некоторое решение системы на критическом многообразии.*

Пусть $u^{(1)}(t), \ldots, u^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии, а $x(t)$ — произвольное решение системы (48), определенное при $t \geq T$. Тогда в силу теоремы 13 имеет место следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = x_t(0) = \big(\Phi(0) + H(t,0)\big)\sum_{i=1}^{N} c_i u^{(i)}(t) + O\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty,$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. Отметим, что система, описывающая динамику исходной задачи (48) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, относится к классу линейных систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами. Метод асимптотического интегрирования таких систем описан в главе 1.

Метод асимптотического интегрирования систем ФДУ вида (48) иллюстрируется в разделе 6.4 на примере задачи построения асимптотических представлений для решений скалярного уравнения с двумя запаздываниями

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + \frac{a\sin\omega t}{t^\rho}x(t-h)$$

при $t \to \infty$. Здесь параметры $a, \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $h \geq 0$ и $\rho > 0$.

В разделе 6.5 указанный выше метод асимптотического интегрирования распространяется на случай дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием. Здесь вновь рассматриваются системы вида (48) с оператором $G(t, x_t)$ типа (49). Подход, позволяющий распространить разработанную нами асимптотическую технику на более широкий класс систем ФДУ, опирается на результаты работы[9]. В этом разделе предполагается, что операторы $B(t,\cdot)$ и $R(t,\cdot)$ в (49) таковы, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функции $B(\cdot,\varphi)$ и $R(\cdot,\varphi)$ непрерывны по $t \geq t_0$. Напомним, что функция $\varphi \in C_h$ называется липшицевой с константой Липшица, равной K, если

$$|\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leq K\,|\theta_1 - \theta_2|, \quad -h \leq \theta_1, \theta_2 \leq 0. \tag{53}$$

Заметим, что константа K в неравенстве (53) зависит от функции $\varphi(\theta)$.

[9]Cooke K.L. Linear functional differential equations of asymptotically autonomous type // J. Differential Equations. 1970. Vol. 7. P. 154–174.

Определение 2. *Пространством LC_h будем называть подпространство пространства C_h, состоящее из всех липшицевых функций и оснащенное нормой*

$$\|\varphi\|_{LC_h} = \max\left(\|\varphi\|_{C_h}, K_\varphi\right), \tag{54}$$

где $K_\varphi = \inf K$ и инфимум берется по всем постоянным K, для которых выполнено неравенство (53).

Заметим, что пространство LC_h относительно нормы (54) является банаховым пространством. Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (48) с начальным условием $x_T = \varphi$, где $\varphi \in C_h$. Тогда, в силу наложенных на операторы $B(t,\varphi)$ и $R(t,\varphi)$ условий, решение $x_t(\theta)$ будет принадлежать пространству LC_h при $t \geq T + \tau$. Следовательно, динамика системы (48) определяется поведением решений в пространстве LC_h.

Предположим, что для операторов $B(t,\varphi)$ и $R(t,\varphi)$ в представлении (49), выполнены неравенства

$$|B(t,\varphi)| \leq w(t)\|\varphi\|_{LC_h}, \quad |R(t,\varphi)| \leq \gamma(t)\|\varphi\|_{LC_h}, \quad \varphi \in LC_h, \tag{55}$$

где $w(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\gamma(t) \in L_1[t_0,\infty)$. Наконец, будем предполагать, что для любой бесконечно гладкой функции $\varphi(\theta)$ справедливо разложение

$$B(t,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)P_i^\varphi(t) + \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)P_{i_1 i_2}^\varphi(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\leq i_1\leq\ldots\leq i_k\leq n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)P_{i_1\ldots i_k}^\varphi(t) + R^\varphi(t). \tag{56}$$

Здесь $P_{i_1\ldots i_l}^\varphi(t)$ — некоторые векторные тригонометрические полиномы, зависящие от функции $\varphi(\theta)$; $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$, удовлетворяющие свойствам B.2 — B.4, а вектор-функция $R^\varphi(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$. Заменяя затем всюду в определении 1 и теоремах 11, 12, 13 пространство C_h с нормой $\|\varphi\|_{C_h}$ на пространство LC_h с нормой $\|\varphi\|_{LC_h}$ можно установить существование и соответствующие свойства критического многообразия для системы (48) с оператором $G(t,x_t)$ вида (49), (55), (56). Кроме того, представление (56) позволяет для построения матрицы $\hat{H}(t,\theta)$, являющейся приближением для матрицы $H(t,\theta)$ из (52), использовать алгоритм приближенного построения критического многообразия, аналогичный алгоритму из раздела 6.2. В качестве примера использования описанного метода в разделе 6.5 рассматривается задача построения асимптотики решений при $t \to \infty$ для скалярного уравнения с переменным запаздыванием

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x\Big(t - 1 + \frac{a\sin\omega t}{t^\rho}\Big),$$

где $a, \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\rho > 0$.

В разделе 6.6 исследуется динамика решений дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\ddot{x} - q(t)x(t-h) = 0, \qquad h > 0, \quad t \geq t_0 \tag{57}$$

при $t \to \infty$. Здесь

$$q(t) = \frac{p(t)}{t^\rho}, \qquad \rho > 0,$$

где $p(t)$ — действительный тригонометрический многочлен, имеющий нулевое среднее значение, т. е.

$$p(t) = \sum_{j=-N}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \qquad p_{-j} = \bar{p}_j, \quad \omega_{-j} = -\omega_j,$$

причем

$$\mathrm{M}\big[p(t)\big] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T p(t)dt = p_0 = 0.$$

В случае $h = 0$ уравнение (57) переходит в одномерное уравнение Шредингера при нулевой энергии с потенциалом типа Вигнера–фон Неймана. Уравнения вида (57) рассматриваются, в основном, с позиций исследования вопроса о колеблемости решений. В этом разделе нами построены асимптотические формулы, описывающие поведение решений уравнения (57) при $t \to \infty$. Отдельное внимание уделено вопросу о качественных и количественных различиях в динамике решений уравнения (57) при наличии запаздывания и динамике решений этого же уравнения при нулевом запаздывании.

В заключительной, **седьмой главе** диссертационной работы результаты шестой главы обобщаются на случай задачи асимптотического интегрирования некоторого класса дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Постановке задачи отведен раздел 7.1 этой главы. Рассматривается уравнение

$$\dot{u} = \big[A + G(t)\big]u, \quad t \geq t_0, \tag{58}$$

где u — элемент комплексного банахова пространства $\mathcal{B}$. Здесь A — замкнутый линейный оператор с плотной в $\mathcal{B}$ областью определения, который является генератором сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $T(t)$: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ $(t \geq 0)$. Далее, $G(t)$ $(t \geq t_0)$ — семейство линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$, причем

$$G(t) = B(t) + R(t). \tag{59}$$

В представлении (59) семейство линейных ограниченных операторов $B(t)$ обладает тем свойством, что операторная функция $B(t)$ сильно измерима на любом отрезке $[t_0, b]$, $b \geq t_0$, и $\|B(t)u\|_{\mathcal{B}}$ стремится к нулю колебательным образом при $t \to \infty$ для любого $u \in \mathcal{B}$. Далее, семейство линейных ограниченных операторов $R(t)$ также является сильно измеримым на любом отрезке $[t_0, b]$, $b \geq t_0$, и, кроме того, существует такая функция $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, что

$$\|R(t)u\|_{\mathcal{B}} \leq \gamma(t)\|u\|_{\mathcal{B}}$$

для любого $u \in \mathcal{B}$. Целесообразность изучения уравнений вида (58), где операторная функция $G(t)$ понимается как некоторое параметрическое возмущение с непрерывным спектром, отмечена, в частности, в известной монографии В.Н. Фомина[10].

Всюду в этой главе решение уравнения (58) с начальным условием $u(t_0) = u_0$ понимается в слабом смысле[11], точнее, как решение интегрального уравнения

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)G(s)u(s)ds. \qquad (60)$$

Из результатов работ[11,12] следует, что для любого $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное непрерывное на отрезке $[t_0, b]$ $(b \geq t_0)$ слабое решение уравнения (58) с начальным условием $u(t_0) = u_0$, и это решение задается формулой (60). Нас интересует вопрос об асимптотическом поведении решений уравнения (60) при $t \to \infty$, если на оператор A наложены следующие дополнительные условия. Предполагается, что

(i)

$$\mathcal{B} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y},$$

где линейное конечномерное подпространство $\mathcal{X}$ есть линейная оболочка обобщенных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ с нулевой вещественной частью (с учетом кратностей);

(ii) замкнутое линейное подпространство $\mathcal{Y}$ инвариантно относительно полугруппы $T(t)$, и кроме того, для любого $y \in \mathcal{Y}$ имеет место неравенство

$$\|T(t)y\|_{\mathcal{B}} \leq Ke^{-\alpha t}\|y\|_{\mathcal{B}}, \quad t \geq 0,$$

где $K, \alpha > 0$.

В разделе 7.2 вводится понятие критического многообразия для уравнения (58) и устанавливаются его основные свойства. Уточним вид оператора $B(t)$ в формуле (59). Предположим, что

[10] Фомин В.Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. 240 с.

[11] Ball J.M. Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 63, no. 2. P. 370–373.

[12] Ball J.M. On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations // J. Differential Equations. 1978. Vol. 27. P. 224–265.

$$B(t)=\sum_{i=1}^{n} v_i(t)B_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)B_{i_1i_2}(t)+\ldots+$$
$$+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)B_{i_1\ldots i_k}(t).$$

Здесь $B_{i_1\ldots i_l}(t)$ — операторные функции, относительно которых предполагается, что

$$B_{i_1\ldots i_l}(t)=\sum_{j=1}^{M} e^{\mathrm{i}\omega_j t} b_j^{(i_1\ldots i_l)},$$

где $b_j^{(i_1\ldots i_l)}$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t и действующие из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$. Наконец, $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции, которые удовлетворяют условиям B.2 — B.4.

Определение 3. *Линейное N-мерное подпространство $\mathcal{W}(t)\subset\mathcal{B}$ будем называть критическим многообразием для уравнения* (58) *при $t\ge t_*\ge t_0$, если выполнены следующие условия:*

1. Существует вектор-строка $H(t)=\big(h_1(t),\ldots,h_N(t)\big)\in\mathcal{Y}^N$, составленная из непрерывных при $t\ge t_*$ функций со значениями из подпространства $\mathcal{Y}$, такая что $\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N}\to 0$ при $t\to\infty$, где

$$\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N}=\big|\big(\|h_1(t)\|_{\mathcal{B}},\ldots,\|h_N(t)\|_{\mathcal{B}}\big)\big|$$

и $|\cdot|$ — некоторая норма в пространстве вектор-строк длины N;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t\ge t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t)=\Big\{u\in\mathcal{B}\;\Big|\;u=\Phi w+H(t)w,\ w\in\mathbb{C}^N\Big\}. \tag{61}$$

Здесь вектор-строка $\Phi=\big(\varphi_1,\ldots,\varphi_N\big)\in\mathcal{B}^N$ составлена из обобщенных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ из условия (i)*, которые образуют базис подпространства $\mathcal{X}$. Далее, символом $\mathbb{C}^N$ обозначено пространство комплекснозначных вектор-столбцов длины N, а произведение вектор-строки $U=(u_1,\ldots,u_N)\in\mathcal{B}^N$ и вектор-столбца $w=(w_1,\ldots,w_N)^T$ понимается в стандартном смысле: $Uw=u_1w_1+\ldots+u_Nw_N$;*

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t\ge t_*$ положительно инвариантно относительно решений уравнения (58)*, т.е. если $u(T)\in\mathcal{W}(T)$, $T\ge t_*$, то $u(t)\in\mathcal{W}(t)$ для всех $t\ge T$.*

Динамика решений уравнения (58), лежащих на многообразии $\mathcal{W}(t)$ при достаточно больших t, описывается N-мерной системой линейных ОДУ (система на критическом многообразии). В этом разделе приводятся алгоритм построения приближения для критического многообразия, а также вид соответствующей системы на критическом многообразии. Доказана однозначная разрешимость возникающих в результате использования указанного алгоритма вспомогательных операторных уравнений. Основными результатами этого раздела являются следующие теоремы.

Теорема 14. *При достаточно больших t у уравнения* (58) *существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемое формулой* (61).

Пусть $\hat{H}(t)$ — приближение для вектор-строки $H(t)$ из представления (61), построенное в результате описанной в разделе 7.2 процедуры. Имеет место следующая теорема об аппроксимации.

Теорема 15. *Пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие для уравнения* (58)*, существующее согласно теореме 14 при достаточно больших t. Тогда найдется такое достаточно большое t_*, что при $t \geq t_*$ вектор-строка $H(t)$ допускает представление в виде*

$$H(t) = \hat{H}(t) + Z(t), \qquad t \geq t_* \geq t_0.$$

Здесь вектор-строка $Z(t)$, принимающая значения из $\mathcal{Y}^N$, такова, что $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_*, \infty)$.

Критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ обладает свойством глобального притяжения в следующем смысле.

Теорема 16. *Пусть $u(t)$ — слабое решение уравнения* (58)*, т. е. решение интегрального уравнения* (60)*, определенное при $t \geq T \geq t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_* \geq T$, что при $t \geq t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$u(t) = \Phi w_H(t) + H(t) w_H(t) + O\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty.$$

Здесь $\beta > 0$ — некоторое действительное число и $w_H(t)$ ($t \geq t_*$) — некоторое решение системы на критическом многообразии.

Пусть $w^{(1)}(t), \ldots, w^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии, а $u(t)$ — произвольное слабое решение уравнения (58), определенное при $t \geq T$. Тогда в силу теоремы 16 имеет место следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$u(t) = (\Phi + H(t)) \sum_{i=1}^{N} c_i w^{(i)}(t) + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. Таким образом, вопрос построения асимптотик для слабых решений уравнения (58) сводится, по существу, к задаче асимптотического интегрирования N-мерной системы ОДУ. Эта система является системой ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами. Следовательно, асимптотика ее решений может быть получена с помощью метода, описанного в главе 1.

В разделе 7.3, завершающем эту главу, рассматривается возмущенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(x)\frac{\sin \omega t}{t^{\rho}}u, \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0 > 0 \tag{62}$$

с начальным условием

$$u(t_0, x) = \varphi(x) \tag{63}$$

и граничным условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{64}$$

Здесь функция $u(t, x)$ рассматривается в ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Символом $\partial u/\partial \nu$ обозначена производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$. Действительнозначные функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ считаются принадлежащими пространству $L_2(\Omega)$, параметры ω и ρ — положительны. Наконец, Δ — оператор Лапласа по компонентам вектора x. Вопрос построения асимптотики решений уравнения (62) с условиями (63), (64) обсуждался в работе[13]. В этом разделе нами строятся асимптотические формулы для решений уравнения (62), понимаемых в слабом смысле, с помощью изложенного в разделе 7.2 метода.

Основные публикации по теме диссертации

1. Нестеров П.Н. Построение асимптотики решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом // Математические заметки. 2006. Т. 80, № 2. С. 240–250. (*Перечень ВАК*)
Английский перевод:
Nesterov P.N. Construction of the asymptotics of the solutions of the one-dimensional Schrödinger equation with rapidly oscillating potential // Mathematical Notes. 2006. Vol. 80, no. 2. P. 233–243. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
2. Нестеров П.Н. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, № 6. С. 731–742. (*Перечень ВАК*)

[13]Langer M., Kozlov V. Asymptotics of solutions of a perturbed heat equation // J. Math. Anal. Appl. 2013. Vol. 397, no. 2. P. 481–493.

Английский перевод:
Nesterov P.N. Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients // Differential Equations. 2007. Vol. 43, no. 6. P. 745–756. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
3. Нестеров П.Н. Об асимптотике критических решений систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Моделирование и анализ информационных систем. 2011. Т. 18, № 3. С. 21–41. (*Перечень ВАК*)
Английский перевод:
Nesterov P.N. On asymptotics for critical solutions of systems of differential equations with oscillatory decreasing coefficients // Automatic Control and Computer Sciences. 2013. Vol. 47, no. 7. P. 500–515. (*Scopus*)
4. Нестеров П.Н. Асимптотическое интегрирование линейных систем функционально-дифференциальных уравнений // Динамические системы. 2015. Т. 5(33), № 3-4. С. 149–167. (*Перечень ВАК, zbMATH*)
5. Нестеров П.Н. Об асимптотике решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 1. С. 64–81. (*Перечень ВАК*)
Английский перевод:
Nesterov P.N. Asymptotics for solutions of harmonic oscillator with integral perturbation // Automatic Control and Computer Sciences. 2017. Vol. 51, no. 7. P. 645–657. (*WoS, Scopus*)
6. Нестеров П.Н. Асимптотическое интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Моделирование и анализ информационных систем. 2017. Т. 24, № 5. С. 596–614. (*Перечень ВАК*)
Английский перевод:
Nesterov P.N. Asymptotic integration of certain differential equations in Banach space // Automatic Control and Computer Sciences. 2019. Vol. 53, no. 7. P. 755–768. (*WoS, Scopus*)
7. Нестеров П.Н., Агафончиков Е.Н. Особенности колебания решений адиабатических осцилляторов с запаздыванием // Моделирование и анализ информационных систем. 2013. Т. 20, № 5. С. 25–44. (*Перечень ВАК*)
Английский перевод:
Nesterov P.N., Agafonchikov E.N. Specific features of oscillations in adiabatic oscillators with delay // Automatic Control and Computer Sciences. 2015. Vol. 49, no. 7. P. 582–596. (*WoS, Scopus*)
8. Burd V., Nesterov P. Parametric resonance in adiabatic oscillators // Results in Mathematics. 2010. Vol. 58, no. 1–2. P. 1–15. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
9. Burd V., Nesterov P. Asymptotic behaviour of solutions of the difference Schrödinger equation // Journal of Difference Equations and Applications. 2011. Vol. 17, no. 11. P. 1555–1579. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)

10. Nesterov P. On the asymptotics for solutions of system of two linear oscillators with slowly decreasing coupling // ZAMM. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2009. Vol. 89, no. 6. P. 466–480. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
11. Nesterov P. Parametric resonance in some dynamic equations on time scales // International Journal of Difference Equations. 2010. Vol. 5, no. 2. P. 217–231. (*MathSciNet*)
12. Nesterov P. Method of averaging for systems with main part vanishing at infinity // Mathematische Nachrichten. 2011. Vol. 284, no. 11-12. P. 1496–1514. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
13. Nesterov P. On eigenvalues of the one-dimensional Dirac operator with oscillatory decreasing potential // Mathematical Physics, Analysis and Geometry. 2012. Vol. 15, no. 3. P. 257–298. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
14. Nesterov P. Appearance of new parametric resonances in time-dependent harmonic oscillator // Results in Mathematics. 2013. Vol. 64, no. 3-4. P. 229–251. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
15. Nesterov P. Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatshefte für Mathematik. 2013. Vol. 171, no. 2. P. 217–240. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
16. Nesterov P. Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients: a center manifold approach // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2016. No. 33. P. 1–43. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
17. Nesterov P. Asymptotic integration of a certain second-order linear delay differential equation // Monatshefte für Mathematik. 2017. Vol. 182, no. 1. P. 77–98. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
18. Nesterov P. On some extension of center manifold method to functional differential equations with oscillatory decreasing coefficients and variable delays // Journal of Dynamics and Differential Equations. 2018. Vol. 30, no. 4. P. 1797–1816. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
19. Nesterov P. Asymptotic integration of certain Volterra integro-differential equations with oscillatory decreasing kernels // Differential Equations and Dynamical Systems. 2018. https://doi.org/10.1007/s12591-018-0412-z. (*Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
20. Nesterov P. Asymptotic summation of perturbed linear difference systems in critical case // Journal of Difference Equations and Applications. 2019. Vol. 25, no. 8. P. 1173–1199. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)
21. Nesterov P. On the dynamics of certain higher-order scalar difference equation: asymptotics, oscillation, stability // Turkish Journal of Mathematics. 2020. Vol. 44, no. 5. P. 1612–1639. (*WoS, Scopus, MathSciNet, zbMATH*)