Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова»

На правах рукописи

Нестеров Павел Николаевич

Некоторые задачи теории асимптотического интегрирования дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Ярославль — 2021

Оглавление

Введение **5**

Глава 1. Асимптотическое интегрирование систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами **42**

1.1. Теорема Левинсона. Приведение систем к L-диагональному виду 42

1.2. Усредняющая замена типа Штокало и некоторые ее свойства 46

1.3. Усредняющая замена типа Крылова–Боголюбова 56

1.4. Об одном классе решений систем с исчезающей на бесконечности главной частью 62

1.5. Неавтономный осциллятор Ван дер Поля 73

Глава 2. О собственных числах одномерного оператора Дирака с колебательно убывающим потенциалом **81**

2.1. Постановка задачи 81

2.2. Случай $\lambda \neq 0$ 84

2.3. Случай $\lambda = 0$ 104

2.4. Выводы и примеры 114

Глава 3. Асимптотическое исследование возмущенного гармонического осциллятора **118**

3.1. Особенности параметрического резонанса в адиабатических осцилляторах 118

3.2. Параметрический резонанс в гармоническом осцилляторе с переменной частотой собственных колебаний 122

3.3. Об асимптотике решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением 139

Глава 4. Построение асимптотики критических решений систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами **152**

4.1. Построение критической системы 152

4.2. Метод Колесова–Майорова 158
4.3. Асимптотическое интегрирование системы двух осцилляторов с колебательно убывающей связью 161

Глава 5. Асимптотическое интегрирование ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами 168

5.1. Построение асимптотики решений одного класса систем ФДУ, близких к ОДУ 168
5.2. Адиабатический осциллятор с запаздыванием 181
5.3. Интегро–дифференциальное уравнение типа Вольтерра с колебательно убывающим ядром 189

Глава 6. Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами 200

6.1. Постановка задачи и некоторые вспомогательные сведения 200
6.2. Построение критического многообразия 205
6.3. Основные теоремы 228
6.4. Построение асимптотики решений скалярного дифференциального уравнения с двумя запаздываниями 243
6.5. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием 253
6.6. Об асимптотике решений одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием 261

Глава 7. Асимптотическое интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве 276

7.1. Постановка задачи 276
7.2. Критическое многообразие и его свойства 277
7.3. Построение асимптотики решений возмущенного уравнения теплопроводности 289

Заключение **295**

Список литературы **296**

Введение

Актуальность темы. Известно, что получение явных формул для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с переменными коэффициентами представляет собой задачу, решаемую лишь в очень редких случаях. Поскольку такие системы возникают в различных прикладных задачах, например, механики и физики, вопрос, связанный с получением приближенных формул для решений становится особенно актуальным. Качественная и количественная информация о поведении решений имеет принципиальное значение для теории устойчивости, теории колебаний и других прикладных разделов, связанных с изучением динамики решений дифференциальных уравнений. Особое место среди приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений занимают асимптотические методы. В этом случае часто говорят об асимптотическом интегрировании соответствующих дифференциальных уравнений. В этой работе рассматриваются задачи асимптотического интегрирования систем обыкновенных дифференциальных, функционально-дифференциальных, а также уравнений в частных производных при стремлении независимой переменной к бесконечности.

Основы асимптотических методов были заложены в работах Ж. Фурье, Ж. Лиувилля, Ж. Штурма. Значительный вклад в развитие асимптотического представления решений дифференциальных уравнений был сделан А. Пуанкаре. Дальнейшему продвижению в этой области способствовали работы В.А. Стеклова, Г. Биркгофа, Л. Шлезингера, В.И. Тржицинского и др. Существенные результаты получили такие исследователи, как В. Вазов [8] и Л. Чезари [56]. Среди дифференциальных уравнений, довольно часто встречающихся на практике, следует отметить уравнения с медленно меняющимися коэффициентами, в том числе, и уравнения с малым параметром при старших производных (сингулярно возмущенные уравнения). В этом направлении укажем на работы С.Ф. Фещенко и Н.И. Шкиля (см. [51, 57]). Сингулярно возмущенным уравнениям посвящены работы А.Н. Тихонова, А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузова, Н.Н. Нефедова (см., в частности, [9–11,47,48]), а также их учеников. В развитие асимптотических методов интегрирования огромный вклад внесли работы Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова. Предложенный ими метод (см., например, [4]) позволяет получать приближенные формулы для решений, не содержащие секулярных членов. С помощью метода Крылова–Боголюбова удается провести исследование колебательного процесса на достаточно большом промежутке времени. Используя результаты Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова, И.З. Штокало [58, 59] разработал метод, который позволяет исследовать устойчивость линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими

коэффициентами.

Фундаментальные результаты в решении задачи асимптотического интегрирования линейных систем ОДУ в окрестности бесконечности были получены Н. Левинсоном в работе [128]. Он показал, что при выполнении некоторого условия относительно функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ (условие дихотомии) фундаментальная матрица $X(t)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = \big(\Lambda(t) + R(t)\big)x, \tag{1}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, а $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$, допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$X(t) = \big(I + o(1)\big) \exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}.$$

Системы такого вида, вслед за И.М. Рапопортом [41], стали называть L–диагональными системами или системами в L–диагональной форме. И.М. Рапопорт указал некоторые подстановки, приводящие отдельные типы уравнений к L–диагональному виду, а также воспользовался результатами Н. Левинсона в спектральной теории сингулярных дифференциальных операторов. Асимптотическая теорема Левинсона была использована М.А. Наймарком [32] для исследования индекса дефекта и спектра дифференциальных операторов. Более общие результаты в этой области были затем получены в работах М.В. Федорюка [49] и А. Девинатца (A. Devinatz) [100, 101]. Еще один классический результат об асимптотическом интегрировании линейных систем, близких к диагональным, был получен в работе Ф. Хартмана и А. Винтнера [119, стр. 71–72] и ныне известен как теорема Хартмана–Винтнера. Авторы исследовали системы вида (1), в которых матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_p[t_0, \infty)$, где $1 < p \leq 2$. Ими было показано, что при определенных требованиях относительно функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ (более сильных, нежели в теореме Левинсона) фундаментальная матрица $X(t)$ системы (1) допускает следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$X(t) = \big(I + o(1)\big) \exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \big[\Lambda(s) + \operatorname{diag} R(s)\big]ds\Big\}.$$

Важный этап в развитии теории асимптотического интегрирования связан с использованием понятия дихотомии решений. Исследование дихотомии решений линейных систем составляет отдельный раздел теории дифференциальных уравнений. Достаточно подробный список литературы на русском языке по этой тематике можно найти, например, в книге [30]. Отметим также исторический обзор в книге Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [15]. Среди

множества исследований, посвященных дихотомии решений, отметим, в частности, результаты, изложенные в [95,165]. Из них, помимо прочего, следует, что теорема Левинсона есть простое следствие того факта, что обыкновенная дихотомия решений линейной системы является грубой по отношению к возмущениям класса $L_1[t_0,\infty)$.

Среди первых результатов в области асимптотического интегрирования систем функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) следует назвать приведенные в известной книге Р. Беллмана и К. Кука [3] асимптотические теоремы о поведении решений скалярных уравнений с запаздывающим аргументом (см. также обзор в [55, Глава 9]). В дальнейшем усилия многих авторов были направлены на получение аналогов теорем Левинсона и Хартмана–Винтнера. В этом отношении для нас наиболее примечательны работа Дж. Касселя (J.S. Cassell) и Ж. Хоу (Z. Hou) [87], а также работа М. Питука (M. Pituk) [156]. В первой из этих работ рассматривается система ФДУ вида

$$\dot{x} = \Lambda(t)x(t) + R(t,x_t). \tag{2}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h,0],\mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C_h} = \sup_{-h\le\theta\le 0} |\varphi(\theta)|. \tag{3}$$

Далее, $\Lambda(t) = \big(\operatorname{diag}\lambda_1(t),\dots,\lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, а $R(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ такой, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$

$$|R(t,\varphi)| \le \gamma(t)\|\varphi\|_{C_h}. \tag{4}$$

В работе [87], в частности, показано, что если $\gamma(t) \in L_1[t_0,\infty)$, то при определенных условиях относительно функций $\lambda_i(t)$, $i=1,\dots,m$ (условие дихотомии Левинсона и некоторое дополнительное ограничение) система (2) при $t \ge T \ge t_0$ имеет m решений $x_i(t)$, $i=1,\dots,m$, допускающих при $t\to\infty$ следующее асимптотическое представление:

$$x_i(t) = \big[e_i + o(1)\big]\exp\Big\{\int_T^t \lambda_i(s)ds\Big\}, \tag{5}$$

где $e_i = (0,\dots,0,\overset{(i)}{1},0,\dots,0)$. Кроме того, для любого решения $x(t)$ системы (2) при $t \ge T \ge t_0$ найдутся такие константы $c_1,\dots,c_m$, что

$$x(t) = \sum_{i=1}^m c_i\, x_i(t) + o\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t\to\infty,$$

где функции $x_i(t)$, $i=1,\dots,m$ имеют асимптотику вида (5), а величина $\beta > 0$ произвольна.

В статье Питука [156] строится вариант теоремы типа Хартмана–Винтнера для системы ФДУ следующего вида:

$$\dot{x} = B_0 x_t + R(t, x_t). \tag{6}$$

Здесь B_0 — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ и не зависящий от t, а оператор $R(t, x_t)$ удовлетворяет неравенству (4). Предположим, что характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda\theta} I) \tag{7}$$

имеет простой корень $\lambda = \mu$. Пусть функция $\varphi(\theta) = e^{\mu\theta}c$, где $c \in \mathbb{C}^m$ и $-h \le \theta \le 0$, является соответствующим собственным решением. Тогда, если $\gamma(t) \in L_p[t_0, \infty)$, где $1 \le p \le 2$, и ни один корень $\lambda \ne \mu$ характеристического уравнения (7) не имеет такую же действительную часть, как у корня μ, то при $t \ge T \ge t_0$ система (6) имеет решение $x(t)$ с асимптотикой

$$x(t) = \big[c + o(1)\big] \exp\big\{\mu(t - T) + s(t, T)\big\}, \quad t \to \infty.$$

Здесь скалярная функция $s(t, T)$ определяется согласно формулам

$$s(t, T) = \int_T^t \delta(\tau) d\tau, \quad \delta(t) = \alpha d R\big(t, \varphi(\theta)\big),$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$ — некоторое вычисляемое специальным образом число, а d — определяемая специальным образом m–мерная вектор-строка.

Существенной проблемой в использовании теоремы Левинсона и теоремы Хартмана–Винтнера, а также их функционально-дифференциальных аналогов является необходимость приведения исходной системы к специальном виду. Кроме того, в случае систем вида (6) остается непроясненным характер поведения остальных решений, отличных от того, которое ответвляется от собственного решения невозмущенной системы. Ситуация с кратными корнями характеристического уравнения (7) также представляет интерес для исследования.

Степень разработанности темы. Развитие методов приведения произвольных систем ОДУ к L–диагональному виду стала основной тематикой целого ряда статей В.А. Харриса (W.A. Harris, Jr.) и Д.А. Латса (D.A. Lutz). Сегодня эту технику редукции систем называют методом Харриса–Латса (см. [116–118]). Задача, которую решает этот метод, состоит в том, чтобы получить для фундаментальной матрицы $X(t)$ системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \tag{8}$$

асимптотическое представление вида

$$X(t) = P(t)\big(I + o(1)\big) \exp\Big\{\int_{t^*}^t \Lambda(s) ds\Big\}, \qquad t \to \infty.$$

Авторами строится специальная матрица $P(t)$ такая, что замена $x = P(t)y$ приводит систему (8) к L–диагональному виду. В основе этого метода лежит последовательность замен переменных вида

$$x = \big(I + Q(t)\big)y,$$

где $Q(t) = o(1)$ при $t \to \infty$ и $\operatorname{diag} Q(t) \equiv 0$. Такие близкие к тождественным замены переменных называют Q–преобразованиями. Одним из преимуществ метода Харриса–Латса является то обстоятельство, что для его использования требуется знать лишь весьма общие свойства матрицы коэффициентов системы (типа абсолютной или условной сходимости некоторых интегралов). Это преимущество является одновременно и недостатком, поскольку при наличии дополнительной информации о структуре матрицы коэффициентов метод Харриса–Латса не позволяет ей воспользоваться. Процесс преобразования исходной системы по этой причине становится весьма трудоемким или, вообще, нереализуемым. Тем не менее метод, развитый Харрисом и Латсом, в дальнейшем использовался многими авторами для исследования задачи об асимптотическом интегрировании линейных систем ОДУ. Отметим в этой связи, например, работы [62, 74, 77, 120, 124, 125, 133, 162].

Примером того рода задач, для которых метод Харриса–Латса оказывается малоэффективным, являются системы ОДУ со сложным колебательным поведением элементов матрицы коэффициентов. Впервые на возможность использования усредняющих замен переменных вместо Q–преобразований для систем, коэффициенты которых колебательным образом убывают на бесконечности, указали В.Ш. Бурд и В.А. Каракулин в работе [6]. Предложенный авторами метод является аналогом усредняющей замены, использованной И.З. Штокало [58, 59] для исследования устойчивости решений некоторого класса систем с малым параметром. Этот метод получил свое развитие в работе автора [34], где был использован для упрощения систем с колебательно убывающими коэффициентами.

Задача асимптотического интегрирования систем линейных ОДУ довольно глубоко изучена. Отметим здесь замечательные монографии [79, 106], из которых можно узнать современное состояние вопроса. Если для систем ОДУ приведение исходной задачи к L–диагональному виду (1) во-многих случаях представляется стандартной, пусть даже и трудоемкой процедурой, то для систем ФДУ приведение исходной системы, скажем, к виду (2) не является типичной рекомендацией. В этой связи возникает вопрос, для каких систем ФДУ такое сведение все-таки возможно. Как оказывается, в решении этой задачи могут быть полезны усредняющие замены переменных, а также методы теории центральных многообразий.

Наконец, заметим, что задача исследования эффектов, возникающих в силу неавтоном-

ности некоторых параметров и оказывающих существенное влияние на динамику решений, представляет самостоятельный интерес (см., в частности [168, Глава 17]). В этой связи отметим также работы [12,130,132,160,164] и [5, стр. 225].

Цели и задачи работы. Целью диссертационного исследования является развитие методов асимптотического интегрирования как конечномерных (ОДУ), так и бесконечномерных динамических систем (ФДУ, уравнения в частных производных) при стремлении независимой переменной к бесконечности. В работе рассматриваются системы с колебательно убывающими коэффициентами, для которых предложены различные варианты сведения задачи асимптотического интегрирования исходной системы к задаче построения асимптотики для решений систем вида (1) или (2). Разработанные методы сопровождаются построением асимптотических представлений для решений конкретных динамических систем. На основании полученных асимптотических формул в работе, в частности, решаются задача об устойчивости (неустойчивости) решений, спектральная задача, исследуется явление параметрического резонанса, а также изучаются вопросы, связанные с колеблемостью решений.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. В частности,

— в главе 1 предложен общий вид усредняющей замены переменных для упрощения задачи асимптотического интегрирования линейных систем ОДУ при $t \to \infty$, а также построен вариант подобной замены для исследования нелинейных систем с колебательно убывающими коэффициентами. Сформулирована теорема о существовании в фазовом пространстве одного класса нелинейных систем ОДУ многообразия, составленного из начальных условий решений, стремящихся к нулю при $t \to \infty$. Получены асимптотические формулы для решений неавтономного уравнения Ван дер Поля;

— в главе 2 найдены те точки действительной оси, в которых у одномерного оператора Дирака с матричным потенциалом, элементами которого являются колебательно убывающие функции, могут существовать собственные числа. Получены условия на элементы матричного потенциала, при выполнении которых одномерная система Дирака имеет решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$;

— в главе 3 исследованы два типа возмущений гармонического осциллятора: адиабатическое возмущение и интегральное возмущение. Определены частоты возмущения, при которых у соответствующих уравнений могут существовать неограниченные решения, т. е. возникает явление параметрического резонанса;

— в главе 4 предложен подход к решению задачи асимптотического интегрирования, использующий идеологию метода инвариантных (центральных) многообразий. На основе этой методологии построены асимптотические представления для решений системы двух

осцилляторов с медленно убывающей связью;

— в главе 5 разработан метод асимптотического интегрирования некоторого класса систем ФДУ, близких в определенном смысле к системам ОДУ. Этот метод позволяет привести исходную систему к виду (2) и воспользоваться затем функционально-дифференциальным аналогом теоремы Левинсона. В этой главе рассматривается уравнение адиабатического осциллятора с запаздыванием. Для решений этого уравнения, а также решений одного интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра с помощью предложенного метода построены асимптотические представления;

— в главе 6 идеология метода центральных многообразий распространяется на задачу асимптотического интегрирования более широкого класса систем ФДУ. Показано существование в фазовом пространстве исследуемых систем многообразия типа центрального (критическое многообразие), изучены свойства этого многообразия, описана процедура построения приближения для данного многообразия, а также — проекции исходной системы на указанное многообразие. Метод асимптотического интегрирования иллюстрируется на примерах построения асимптотических формул для решений уравнений как с постоянным, так и с переменным запаздыванием;

— в главе 7 решается задача о построении асимптотических представлений для слабых решений некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Для получения асимптотических формул привлекается аппарат теории центральных многообразий и усредняющие замены переменных. Разработанный метод асимптотического интегрирования используется затем для построения асимптотики решений возмущенного уравнения теплопроводности.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационное исследование носит теоретический характер. Результаты работы могут использоваться в различных разделах теории динамических систем, как с конечномерным, так и с бесконечномерным фазовым пространством, в которых для решения задачи достаточно получить асимптотические представления решений. В этой связи отметим, например, теорию устойчивости решений, теорию колебаний, теорию параметрического резонанса.

Научные исследования в рамках этой работы осуществлялись при частичной финансовой поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проекты № РНП.2.2.2.3.16065 и № РНП.2.2.2.3.8064 в 2008–2009 гг.), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (проект № П1229 в 2010–2012 гг.), грантов РФФИ (проект № 12-01-09255 в 2012 г. и проект № 12-01-31004 в 2012–2013 гг.), грантов Президента Российской

Федерации (проект № МК-80.2013.1 в 2013–2014 гг. и проект № МК-4625.2016.1 в 2016–2017 гг.), проекта «Региональный научно-образовательный математический центр» (ЯрГУ) Минобрнауки РФ в 2017–2020 гг.

Методология и методы исследования. В работе используются асимптотические методы теории дифференциальных, а также функционально-дифференциальных уравнений, метод усреднения, методы теории инвариантных интегральных (центральных) многообразий, методы линейной алгебры и функционального анализа. Кроме того, на основе известных методов в диссертации разработаны собственные методы асимптотического интегрирования. Некоторые вычисления и графические построения в этой работе проводились с помощью пакета символьных вычислений Wolfram Mathematica 10.

Положения, выносимые на защиту.

1. Для систем с колебательно убывающими коэффициентами предложены специальные усредняющие замены переменных, упрощающие процедуру построения асимптотических представлений (теоремы 1.2.1 и 1.3.1). Доказаны теоремы о существовании в фазовом пространстве некоторых нелинейных неавтономных систем ОДУ многообразия, составленного из начальных условий решений, стремящихся к нулю при $t \to \infty$ (теоремы 1.4.1, 1.4.2 и 4.1.1). Построены асимптотические формулы для решений неавтономного уравнения Ван дер Поля и доказан их глобальный характер (теорема 1.5.1).

2. Для одномерного оператора Дирака с матричным потенциалом специального вида найдены те точки действительной оси, в которых у рассматриваемого оператора могут существовать собственные числа (утверждения 2.2.1, 2.2.2 и теоремы 2.2.1, 2.3.1).

3. Получены асимптотические формулы для решений возмущенного гармонического осциллятора с переменной частотой собственных колебаний и найдены условия параметрического резонанса в этом уравнении (теорема 3.2.1).

4. Предложен метод построения асимптотических формул для некоторых специальных решений (критические решения) линейных систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами (раздел 4.1). Исследована динамика решений системы двух осцилляторов с медленно убывающей связью при учете трения в одном из осцилляторов (раздел 4.3).

5. Разработан метод асимптотического интегрирования одного класса систем ФДУ, близких к ОДУ (раздел 5.1). Построены асимптотические представления для решений адиабатического осциллятора с запаздыванием (раздел 5.2). Асимптотически проинтегрированы два интегро-дифференциальных уравнения типа Вольтерра с колебательно убывающим ядром (разделы 3.3 и 5.3).

6. На основе идей теории центральных многообразий разработан метод асимптотического

интегрирования систем ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами (теоремы 6.2.1, 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3). Построены асимптотические формулы для решений модельного скалярного дифференциального уравнения с двумя запаздываниями и колебательно убывающим коэффициентом (раздел 6.4). Разработанный метод асимптотического интегрирования перенесен на случай систем ФДУ с переменным запаздыванием. Метод проиллюстрирован на примере решения задачи асимптотического интегрирования одного скалярного дифференциального уравнения с переменным запаздыванием (раздел 6.5).

7. Получены асимптотические представления для решений одного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием, которое при нулевом запаздывании переходит в одномерное уравнение Шредингера с потенциалом типа Вигнера–фон Неймана (раздел 6.6).

8. Предложен метод асимптотического интегрирования некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве (теоремы 7.2.1, 7.2.2, 7.2.3).

Степень достоверности и апробация результатов. Все результаты диссертационной работы получены с использованием строгих математических методов. Полученные автором новые результаты, сформулированные в виде утверждений, лемм и теорем, приводятся в работе с доказательствами. Результаты диссертации были представлены на следующих конференциях:

- Международная конференция «Тихонов и современная математика», Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 19–25 июня 2006 г. (тезисы, доклад);
- VIII-я Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения» (MFL-2006), Украина, Алушта, 10–17 сентября 2006 г. (тезисы, доклад);
- XX-я Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-20», Ярославль, Ярославский государственный технический университет, 28–31 мая 2007 г. (тезисы, доклад);
- Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна (ВЗМШ-2008), Воронеж, Воронежский государственный университет, 24–30 января 2008 г. (тезисы);
- Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 17–22 июня 2008 г. (тезисы, доклад);
- IX-я Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и его приложения» (MFL-2008), Украина, Алушта, 15–20 сентября 2008 г. (тезисы, доклад);
- Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна (ВЗМШ-2010), Воронеж, Воронежский государственный университет, 25–30 января 2010 г. (тезисы);
- X-я Крымская Международная математическая школа «Метод функций Ляпунова и

его приложения» (MFL-2010), Украина, Алушта, 13–18 сентября 2010 г. (тезисы, доклад);

- Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна (ВЗМШ-2012), Воронеж, Воронежский государственный университет, 25–30 января 2012 г. (тезисы);
- Международная научная конференция «Моделирование и анализ информационных систем», посвященная 35-летию математического факультета и 25-летию факультета информатики и вычислительной техники Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова, Ярославль, ЯрГУ, 6–7 февраля 2012 г. (тезисы, доклад);
- 1st EUROMECH Colloquium 532 on «Time-periodic systems. Current trends in theory and application», Германия, Франкфурт-на-Майне, 27–30 августа 2012 г. (тезисы, доклад);
- 1-й международный научно-практический семинар «Нелинейная динамика и вычислительная геометрия», Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 10–13 сентября 2012 г. (доклад);
- Международная конференция «Моделирование, управление и устойчивость (MCS-2012)», Украина, Севастополь, 10–14 сентября 2012 г. (тезисы);
- Международная математическая конференция «Боголюбовские чтения DIF-2013. Дифференциальные уравнения, теория функций и их приложения» по случаю 75-летия со дня рождения академика А.М. Самойленко, Украина, Севастополь, 23–30 июня 2013 г. (тезисы, доклад);
- Международная конференция «Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений», посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева, Новосибирск, 18–24 августа 2013 г. (тезисы);
- Международная конференция «Geometry, Topology, and Applications», посвященная 70-летию Н.П. Долбилина, Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 23–27 сентября 2013 г. (тезисы, доклад);
- Международная конференция «Нелинейная динамика и ее приложения», посвященная 150-летию со дня рождения Поля Пенлеве, Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 15–18 октября 2013 г. (тезисы);
- Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна (ВЗМШ-2014), Воронеж, Воронежский государственный университет, 26–31 января 2014 г. (тезисы);
- 8th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2014), Австрия, Вена, 6–11 июля 2014 г. (тезисы, доклад);
- Международная конференция «Метод функций Ляпунова и его приложения» (MFL-2014), Россия, Алушта, 15–20 сентября 2014 г. (тезисы);
- Международный научный семинар «Актуальные проблемы математической физики», Москва, МГУ, 28–29 ноября 2014 г. (тезисы);

- Международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферми-Паста-Улама, Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 1–3 октября 2015 г. (тезисы);
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (DIFF-2016), Суздаль, 8–12 июля 2016 г. (тезисы);
- Международная конференция «Метод функций Ляпунова и его приложения» (MFL-2016). Россия, Алушта, 15–18 сентября 2016 г. (тезисы, доклад);
- 9th European Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2017), Венгрия, Будапешт, 25–30 июня 2017 г. (тезисы, доклад);
- Восьмая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (DFDE-2017), Москва, РУДН, 13–20 августа 2017 г. (тезисы, доклад);
- Международная научная конференция «Новые тенденции в нелинейной динамике», Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 5–7 октября 2017 г. (тезисы).
- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (DIFF-2018), Суздаль, 6–11 июля 2018 г. (тезисы);
- Международная конференция «Динамические системы в науке и технологиях» (DSST-2018), Россия, Алушта, 17–21 сентября 2018 г. (тезисы, доклад);
- Международная конференция «Интегрируемые системы и нелинейная динамика», Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 1–5 октября 2018 г. (тезисы, доклад);
- Международная конференция «Динамика. 2019. Ярославль», Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 10–12 октября 2019 г. (тезисы).
- Вторая международная конференция по интегрируемым системам и нелинейной динамике (ISND-2020), Ярославль, ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 19–23 октября 2020 г. (тезисы).

Результаты диссертационного исследования также обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров:

- семинар научно-образовательного центра «Нелинейная динамика» ЯрГУ им. П.Г. Демидова под руководством профессора д.ф.-м.н. С.А. Кащенко и профессора д.ф.-м.н. С.Д. Глызина (2005–2021 гг.);
- семинар под руководством Dr. Serhiy Yanchuk, Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Humboldt-Universität zu Berlin, Германия, Берлин (2011 г.);
- семинар регионального научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего» под руководством профессора д.ф.-м.н. Д.В. Баландина (Нацио-

нальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, 2020 г.).

Основные публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации изложены в 21 статьях в журналах, рекомендованных ВАК [33–39, 81, 82, 136–147], 17 из них — в библиографической базе Web of Science, 19 — в библиографической базе Scopus.

Кроме этого, опубликовано 31 тезисов докладов. Из совместных работ в диссертацию вошли только результаты, полученные автором лично.

Основное содержание работы. Диссертационное исследование посвящено развитию методов асимптотического интегрирования линейных, а также некоторого класса нелинейных систем дифференциальных уравнений при стремлении независимой переменной к бесконечности. Автором предложены некоторые техники, которые позволяют сводить задачу построения асимптотических формул к использованию известных асимптотических теорем, центральной из которых является классическая теорема Н. Левинсона. Процедура сведения основана на использовании некоторого специального варианта метода усреднения, предложенного автором, а также на развитии идей теории центральных многообразий. В работе рассматриваются как системы ОДУ, так и системы ФДУ, а также дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. Разработанные методы иллюстрируются на примерах построения асимптотических представлений для решений некоторых конкретных динамических систем.

Работа состоит из семи глав. В **первой главе** излагаются методы асимптотического интегрирования систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами. В разделе 1.1 приводятся известные результаты, посвященные задаче асимптотического интегрирования линейных систем ОДУ, которые в дальнейшем используются в работе. Основными такими результатами являются асимптотическая теорема Н. Левинсона и лемма о диагонализации переменной матрицы. В разделе 1.2 рассматривается следующая система ОДУ, называемая системой с колебательно убывающими коэффициентами:

$$\dot{x} = \Big[A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le \ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big]x, \quad x\in\mathbb{C}^m. \quad (9)$$

Здесь A_0, $A_{i_1\ldots i_l}(t)$, $R(t)$ — квадратные матрицы, а $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — абсолютно непрерывные на полуинтервале $[t_0,\infty)$ скалярные функции. Потребуем, чтобы были выполнены следующие условия:

В.1. A_0 — постоянная матрица с действительными собственными значениями;

В.2. $v_1(t)\to 0, v_2(t)\to 0,\ldots,v_n(t)\to 0$ при $t\to\infty$;

B.3. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \ldots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;

B.4. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$ для любого набора индексов $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{k+1} \le n$;

B.5. Элементами матриц $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$A_{i_1\ldots i_l}(t) = \sum_{j=1}^{M} \beta_j^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t},$$

где λ_j — произвольные действительные числа, а $\beta_j^{(i_1\ldots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы;

B.6. Матрица $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Основным результатом раздела 1.2 является следующая теорема (здесь и далее в скобках указывается номер утверждения или определения в основном тексте диссертации).

Теорема 1 (1.2.1). *Пусть выполнены условия B.1 — B.6. Тогда система* (9) *при достаточно больших t заменой*

$$x = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} Y_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y, \quad (10)$$

где I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\dot{y} = \Big[A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1 i_2} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t)\Big]y, \quad (11)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и матрицей $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Замену (10) в тексте диссертации мы называем усредняющей заменой. Она является определенным аналогом замены переменной, предложенной И.З. Штокало [58,59] для исследования устойчивости решений некоторого класса систем с малым параметром. Для вычисления матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ в замене (10) и постоянных матриц $A_{i_1\ldots i_l}$ в усредненной системе (11) могут быть указаны явные формулы. Усредненная система (11) оказывается проще исходной системы (9) в том смысле, что она, вообще говоря, не содержит осциллирующих коэффициентов в главной части. В частности, для приведения системы (11) к L–диагональному виду (1) во многих случаях удается воспользоваться леммой о диагонализации переменной матрицы. В

разделе 1.2 также приводятся некоторые свойства усредняющей замены (10), оказывающиеся полезными при практическом использовании этой замены для построения асимптотических формул.

В разделе 1.3 рассматривается нелинейный аналог системы ОДУ вида (9):

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_i(t,x)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} F_{i_1 i_2}(t,x)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le \ldots\le i_k\le n} F_{i_1\ldots i_k}(t,x)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t,x), \qquad x\in\mathbb{R}^m. \quad (12)$$

Здесь $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции, которые удовлетворяют условиям В.2 — В.4. Функции $F_{i_1\ldots i_l}(t,x)$ предполагаются $T-$периодическими по переменной t или представляют собой тригонометрические полиномы вида

$$F_{i_1\ldots i_l}(t,x) = \sum_{j=1}^{M} F_j^{(i_1\ldots i_l)}(x)e^{\mathrm{i}\lambda_j t}. \quad (13)$$

По переменной x функции $F_{i_1\ldots i_l}(t,x)$ предполагаются достаточно гладкими в некотором шаре $|x|\le S$. Относительно вектор–функции $R(t,x)$ предполагаются выполненными следующие условия:

С.1. $|R(t,x_1)-R(t,x_2)|\le\gamma(t)|x_1-x_2|$, $|x_j|\le S$, $j=1,2$, где $\gamma(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

С.2. $R(t,0)\in L_1[t_0,\infty)$.

Соответствующим аналогом теоремы 1 является следующее утверждение.

Теорема 2 (1.3.1). *Система* (12) *при достаточно больших t заменой*

$$x = y + \sum_{i=1}^{n} u_i(t,y)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} u_{i_1 i_2}(t,y)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le \ldots\le i_k\le n} u_{i_1\ldots i_k}(t,y)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) \quad (14)$$

приводится к виду

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{n} P_i(y)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} P_{i_1 i_2}(y)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le \ldots\le i_k\le n} P_{i_1\ldots i_k}(y)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t,y), \qquad y\in\mathbb{R}^m, \quad (15)$$

где функции $u_{i_1\ldots i_l}(t,y)$ являются или периодическими вектор-функциями по переменной t, или тригонометрическими многочленами типа (13)*, имеющими нулевое среднее значение по t. Вектор–функция $R_1(t,y)$ удовлетворяет условиям С.1, С.2, где $x_j=y_j$ и $|y_j|\le r<S$, $j=1,2$.*

Замена (14) является вариантом усредняющей замены Крылова–Боголюбова (см., например, [4, 5, 80, 161]) применительно к системам вида (12). Далее в этом разделе показано, что усредненную систему (15) после некоторых преобразований можно рассматривать как частный случай более общего класса нелинейных систем ОДУ следующего вида:

$$\dot{x} = F(t,x) + R(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^m. \tag{16}$$

Здесь $F(t,0) = 0$ и функция $F(t,x)$ непрерывна по переменной t. Вектор-функция $R(t,x)$ в шаре $|x| \le r$ удовлетворяет условиям:

D.1. $|R(t,x_1) - R(t,x_2)| \le p(t)|x_1 - x_2|$, $|x_j| \le r$, $j = 1,2$, где $p(t) \in \mathcal{M}_0$, $t \ge t_0$,

D.2. $R(t,0) \in \mathcal{M}_0$ при $t \ge t_0$.

Здесь мы говорим, что некоторая локально интегрируемая на $[t_0,\infty)$ функция $f(t)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_0$ при $t \ge t_0$, если

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{t+1} |f(s)|ds = 0, \qquad t \ge t_0.$$

Системы вида (16) изучаются в разделе 1.4. Предположим, что в системе (16), кроме обозначенных выше условий, выполнены следующие требования:

1. $F(t,x) = A(t)x + f(t,x)$, где

$$A(t) = \left.\frac{dF(t,x)}{dx}\right|_{x=0}, \qquad |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le \omega(r)|x_1 - x_2|,$$
$$\lim_{r\to 0}\omega(r) = 0, \quad |x_j| \le r,\ j = 1,2;$$

2. Линейная система

$$\dot{x} = A(t)x \tag{17}$$

экспоненциально дихотомична на правой полуоси. Это означает, что существуют проекторы P_1 и P_2 ($P_1 + P_2 = I$, $P_k^2 = P_k$, $k = 1,2$), а также положительные константы K, α такие, что

$$\begin{aligned} |U(t)P_1U^{-1}(s)| &\le Ke^{-\alpha(t-s)}, \qquad 0 \le s \le t, \\ |U(t)P_2U^{-1}(s)| &\le Ke^{-\alpha(s-t)}, \qquad 0 \le t \le s. \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $U(t)$ — матрицант системы (17) ($U(0) = I$). Кроме того, предположим, что $\operatorname{rank} P_1 = k$.

Центральным результатом раздела 1.4 является следующая теорема.

Теорема 3 (1.4.1). *При достаточно больших t_0 в некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^m$ существует многообразие $S(t_0)$ размерности k, обладающее свойствами*:

а). Решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) \in S(t_0)$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

б). Решение $x(t)$ с начальным условием $|x(t_0)| \le \hat{\rho}_0$ и $x(t_0) \notin S(t_0)$ покидает r_0–окрестность нуля $|x| \le r_0$ в некоторый момент времени $t^* \ge t_0$.

в). Для решений $x(t)$ и $y(t)$ с начальными условиями $x(t_0)$ и $y(t_0)$, принадлежащими многообразию $S(t_0)$, справедлива оценка

$$|x(t) - y(t)| \le C_\mu e^{-\mu(t-t_0)} |x(t_0) - y(t_0)|, \qquad t \ge t_0,$$

где C_μ — некоторая положительная постоянная, а $\mu \in (0, \alpha)$.

Иногда в приложениях требуется оценить скорость стремления к нулю при $t \to \infty$ решений системы (16) с начальными условиями, принадлежащими многообразию $S(t_0)$. Определим следующее условие:

D.2'. $|R(t,0)| \le \varphi(t)$ при $t \ge t_0$. Здесь функция $\varphi(t) > 0$ монотонно убывает при $t \ge t_0$ и стремится к нулю при $t \to \infty$. Кроме того, существует $\beta \in (0, \alpha)$ такое, что

$$\varphi(t_1) e^{\beta t_1} \le \varphi(t_2) e^{\beta t_2}, \qquad t_0 \le t_1 \le t_2.$$

Уточнением теоремы 3 является в этом случае следующее утверждение.

Теорема 4 (1.4.2). *Пусть выполнены все условия теоремы 3, а условие D.2 заменено условием D.2'. Тогда справедливы все утверждения теоремы 3 и, дополнительно, существует такое $L > 0$, что все решения системы* (16) *с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$ при достаточно больших t_0 допускают следующую оценку:*

$$|x(t)| \le L\varphi(t), \qquad t \ge t_0.$$

В качестве примера использования теорем из раздела 1.4 в разделе 1.5 строится асимптотика для решений неавтономного уравнения Ван дер Поля при $t \to \infty$:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(t)(1 - x^2)\dot{x}, \qquad t \ge 0, \tag{19}$$

где $\varepsilon(t)$ — непрерывная функция и $\varepsilon(t) \ge 0$. Основной результат этого раздела сформулирован в виде следующий теоремы.

Теорема 5 (1.5.1). *Предположим, что $\varepsilon(t) \notin L_1[0,\infty)$, $\dot{\varepsilon}(t) \in L_1[0,\infty)$ и $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Тогда поведение всех решений уравнения* (19)*, за исключением нулевого решения, описывается при $t \to \infty$ следующими асимптотическими формулами:*

$$x(t) = \big(2 + o(1)\big)\cos\big(t + \varphi(t)\big), \quad \dot{x}(t) = -\big(2 + o(1)\big)\sin\big(t + \varphi(t)\big),$$

где

$$\varphi(t) = -\frac{1}{16}\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^2(s)ds + o\left(\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^2(s)ds\right).$$

Вторая глава диссертации посвящена исследованию задачи о собственных числах одномерного оператора Дирака с колебательно убывающим потенциалом. Собственно постановке задачи отведен первый раздел этой главы. Нами рассматривается одномерный оператор Дирака, действующий в пространстве $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ и порожденный дифференциальным выражением

$$Dy = B\frac{dy}{dx} + U(x)y = \lambda y, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_2(x) & -u_1(x) \end{pmatrix}.$$

Функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определяются следующими формулами:

$$u_1(x) = -\frac{Q(x)}{(x+1)^\beta}, \qquad u_2(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^\alpha}.$$

Здесь $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, а действительные непрерывные функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются или периодическими с периодом $T > 0$ или тригонометрическими многочленами вида

$$P(x) = \sum_{j=-N}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\omega_j x}, \qquad Q(x) = \sum_{j=-M}^{M} q_j e^{\mathrm{i}\nu_j x}, \tag{21}$$

где $p_j, q_j \in \mathbb{C}$, $\omega_j, \nu_j \in \mathbb{R}$ и, кроме того,

$$p_{-j} = \bar{p}_j, \quad q_{-j} = \bar{q}_j, \quad \omega_{-j} = -\omega_j, \quad \nu_{-j} = -\nu_j \quad (\omega_k \neq \omega_s,\ \nu_k \neq \nu_s,\ k \neq s).$$

В случае, когда функции $P(x)$ и $Q(x)$ — T–периодические, поставим им в соответствие их бесконечные ряды Фурье вида (21). Оператор Дирака, кроме дифференциального выражения (20), как правило, включает в себя краевое условие вида

$$y_1(0)\sin\xi + y_2(0)\cos\xi = 0, \qquad \xi \in [0,\pi), \tag{22}$$

которое гарантирует его самосопряженность при подходящем выборе области определения $\mathfrak{D}$ (см. [27, 167]). В нашей работе мы игнорируем это условие, интересуясь лишь асимптотическим поведением решений системы дифференциальных уравнений (20) при $x \to \infty$. В частности, нами изучается вопрос о существовании у этой системы уравнений решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ при некоторых значениях спектрального параметра λ и определенных

условиях на компоненты матричного потенциала $U(x)$. Запишем дифференциальное выражение (20) в виде системы ОДУ:

$$\begin{aligned} y_1' &= u_2(x)y_1 - \big(\lambda + u_1(x)\big)y_2, \\ y_2' &= \big(\lambda - u_1(x)\big)y_1 - u_2(x)y_2. \end{aligned} \tag{23}$$

Систему дифференциальных уравнений (23) называют обычно одномерной системой Дирака. Всюду в этой главе мы говорим, что для $\lambda \in M$, где M — некоторое подмножество $\mathbb{R}$, выполнено *свойство* $\mathcal{A}$, если для каждого $\lambda \in M$ существует решение (23), принадлежащее классу $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Следовательно, для любого $\lambda \in M$ существует $\xi \in [0,\pi)$ (зависящее от λ) такое, что λ является собственным числом оператора Дирака (20), (22).

В разделе 2.2 исследуется случай, когда $\lambda \neq 0$. Основные результаты этого раздела сформулированы в виде двух вспомогательных утверждений и одной ключевой теоремы.

Утверждение 1 (2.2.1). *Если функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются T–периодическими, то ненулевыми собственными числами оператора Дирака* (20), (22) *могут являться лишь числа вида $\lambda = (\pi/T)q$, $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

В том случае, когда функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются или T–периодическими или тригонометрическими многочленами вида (21) справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2 (2.2.2). *Ненулевыми собственными числами оператора Дирака* (20), (22) *могут быть лишь числа вида*

$$\lambda = \frac{h_{i_1} + h_{i_2} + \ldots + h_{i_s}}{2},$$

где $h_{i_m} = \omega_{i_m}$ или $h_{i_m} = \nu_{i_m}$ $(m = 1,\ldots,s)$, и число s нечетно.

Чтобы сформулировать основной результат данного раздела, введем следующие обозначения. Положим

$$\Omega_1 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\omega_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_2 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_2^{(1)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z} \;\&\; \big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\big| > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$\Omega_2^{(2)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z} \;\&\; \lambda \neq \frac{\omega_s}{2},\ s \in \mathbb{Z}$$
$$\&\; \big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\big| > \Big|\frac{1}{2\lambda}\Big[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\Big]\Big|\Big\},$$

$$\Omega_2^{(3)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z} \;\&\; \lambda \neq \frac{\omega_s}{2},\ s \in \mathbb{Z}$$

$$\& \ \sqrt{\left|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\right|^2 - \left|\frac{1}{2\lambda}\Big[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\Big]\right|^2} > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$\Omega_2^{(4)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \Big|\mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big] + \mathrm{i}\,\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\Big| > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$\Omega_3 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\omega_s + \omega_r + \omega_q}{2} \ \text{для некоторого } s, r, q \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_3^{(1)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\omega_s + \omega_r + \omega_q}{2} \ \text{для некоторого } s, r, q \in \mathbb{Z}$$

$$\& \ \Big|\sum_{\substack{k,l,m\in\mathbb{Z},\\ \omega_k+\omega_l+\omega_m=2\lambda}} \frac{p_k p_l p_m}{(\omega_k - 2\lambda)(\omega_m - 2\lambda)}\Big| > \frac{1}{2} \ \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2}, \ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_4 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{h_{i_1} + h_{i_2} + \ldots + h_{i_s}}{2} \ \text{для некоторых } i_1, i_2, \ldots i_s \in \mathbb{Z},$$

$$\text{где } s \geq 3 \text{ нечетно и } h_{i_m} = \omega_{i_m} \text{ или } h_{i_m} = \nu_{i_m}\Big\}.$$

Здесь и в дальнейшем символом $\mathrm{M}\big[F(x)\big]$ обозначено среднее значение периодической или почти периодической функции $F(x)$:

$$\mathrm{M}\big[F(x)\big] = \lim_{T\to\infty} \int_0^T F(x)dx.$$

Определим также следующие уравнения относительно λ:

$$p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2} = 0, \tag{24}$$

$$\sum_{\substack{s,r,q\in\mathbb{Z},\\ \omega_s+\omega_r+\omega_q=2\lambda}} \frac{p_s p_r p_q}{(\omega_s - 2\lambda)(\omega_q - 2\lambda)} = 0, \tag{25}$$

$$\sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z},\\ \omega_s+\nu_r=0}} \frac{p_s q_r(\nu_r - \omega_s)}{(\omega_s + 2\lambda)(\nu_r + 2\lambda)} = 0, \tag{26}$$

$$\big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\big| - \Big|\frac{1}{2\lambda}\Big[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\Big]\Big| = 0, \tag{27}$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\left[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\right] - \frac{1}{2\lambda}\left[q_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|q_j|^2}{\nu_j^2 - 4\lambda^2}\right] + \\ + \mathrm{Im}\Big[\sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z},\\ \omega_s+\nu_r=0}} \frac{p_s q_r(\nu_r - \omega_s)}{(\omega_s + 2\lambda)(\nu_r + 2\lambda)}\Big] = 0. \tag{28}$$

Здесь, разумеется, предполагается, что сумма по пустому множеству индексов равна нулю. Пусть

$$\Gamma_1 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \ \text{является решением (24)} \ \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2}, \ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_2 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \ \text{является решением (25)} \ \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2}, \ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_2^c = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ не является решением (25) } \&\ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$
$$\Gamma_3 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (26) } \&\ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2} \ \&\ \lambda \neq \frac{\nu_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$
$$\Gamma_4 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (27) } \&\ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$
$$\Gamma_5 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (28) } \&\ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2} \ \&\ \lambda \neq \frac{\nu_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Основной результат раздела 2.2 составляет следующая теорема.

Теорема 6 (2.2.1). *Пусть $\sigma'(D)$ — множество всех ненулевых собственных значений оператора Дирака* (20), (22) *для некоторого фиксированного $\xi \in [0, \pi)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

A.1.1.1. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta < 1 < 3\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.1.1'. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta = 1 < 3\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.1.2.1. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha < 1$ и $\alpha+\beta > 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.1.2.1'. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha = 1$ и $\alpha + \beta > 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3^{(1)} \cap \Gamma_1)$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3^{(1)} \cap \Gamma_1)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.1.2.2. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha < 1$ и $\alpha + \beta \leq 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3)$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.2. *Если $\alpha < 2\alpha < 3\alpha < \beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.2'. *Если $\alpha < 2\alpha < 3\alpha < \beta = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.1. *Если $\alpha < \beta < 1 < 2\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.1'. *Если $\alpha < \beta = 1 < 2\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.2.1. *Если $\alpha < \beta < 2\alpha \leq 1$ и $\alpha + \beta > 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.2.2. *Если $\alpha < \beta < 2\alpha \leq 1$ и $\alpha + \beta \leq 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_3)$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.3. *Если $\alpha < 2\alpha = \beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)} \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_4) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_4)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)}$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.3'. *Если* $\alpha < 2\alpha = \beta = 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

B.1. *Если* $\alpha = \beta < 1 < 2\alpha$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

B.1'. *Если* $\alpha = \beta = 1 < 2\alpha$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_2^{(4)}$ *и для* $\lambda \in \Omega_2^{(4)}$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

B.2. *Если* $\alpha = \beta < 2\alpha \leq 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_5)$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

Ситуация, когда в системе (23) параметр λ принимает нулевое значение, рассматривается в разделе 2.3 диссертационного исследования. Определим следующие условия:

$$\mathrm{M}\big[P(x)\big] = \mathrm{M}\big[Q(x)\big] = 0, \tag{29}$$

$$\mathrm{M}\big[P(x)\int Q(x)dx\big] = 0. \tag{30}$$

Основным результатом для случая $\lambda = 0$ является следующая теорема.

Теорема 7 (2.3.1). *Пусть* $\sigma(D)$ *— множество всех собственных значений оператора Дирака* (20), (22) *для некоторого фиксированного* $\xi \in [0, \pi)$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

A. *Пусть* $\alpha < \beta < 1$, *тогда, если* $\mathrm{M}\big[P(x)\big] \neq 0$ *или* $\mathrm{M}\big[Q(x)\big] \neq 0$, *то для* $\lambda = 0$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A'. *Пусть* $\alpha < \beta = 1$, *тогда, если* $\mathrm{M}\big[P(x)\big] \neq 0$ *или* $\big|\mathrm{M}\big[Q(x)\big]\big| > 1/2$, *то для* $\lambda = 0$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$. *В противном случае* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.1. *Пусть* $\alpha < \beta \leq 1$ *и* $\alpha+\beta > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (29), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.2. *Пусть* $\alpha < \beta < 1$ *и* $\alpha + \beta \leq 1$. *Тогда, если выполнено условие* (29), *а условие* (30) *не выполнено, то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.2.1. *Пусть* $\alpha < \beta < 1$, $\alpha + \beta \leq 1$ *и* $2\alpha + \beta > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (29), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.2.2. *Пусть* $\alpha < \beta < 1$ *и* $2\alpha + \beta < 1$. *Тогда, если выполнены условия* (29), (30) *и* $\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big] \neq 0$, *то для* $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$.

A.2.2'. *Пусть* $\alpha < \beta < 1$ *и* $2\alpha + \beta = 1$. *Тогда, если выполнены условия* (29), (30) *и* $\big|\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big]\big| > 1/4$, *то для* $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$. *Кроме того, если выполнены условия* (29), (30) *и* $\big|\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big]\big| \leq 1/4$, *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$, *тогда, если* $\mathrm{M}\big[P(x)\big] \neq 0$ *или* $\mathrm{M}\big[Q(x)\big] \neq 0$, *то для* $\lambda = 0$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

B'. *Пусть* $\alpha = \beta = 1$, *тогда, если* $\sqrt{\big(\mathrm{M}\big[P(x)\big]\big)^2 + \big(\mathrm{M}\big[Q(x)\big]\big)^2} > 1/2$, *то для* $\lambda = 0$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$. *В противном случае* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B.1. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $2\alpha > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (29), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B.2. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $2\alpha \leq 1$. *Тогда, если выполнено условие* (29), *а условие* (30) *не выполнено, то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B.2.1. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$, $2\alpha \leq 1$ *и* $3\alpha > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (29), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B.2.2. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $3\alpha < 1$. *Тогда, если выполнены условия* (29), (30) *и* $\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big] \neq 0$ *или* $\mathrm{M}\big[P(x)\big(\int Q(x)dx\big)^2\big] \neq 0$, *то для* $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$.

B.2.2'. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $3\alpha = 1$. *Тогда, если выполнены условия* (29), (30) *и*

$$\sqrt{\Big(\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big]\Big)^2 + \Big(\mathrm{M}\big[P(x)\big(\int Q(x)dx\big)^2\big]\Big)^2} > \frac{1}{4}, \tag{31}$$

то для $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$. *Кроме того, если выполнены условия* (29), (30) *и имеет место неравенство, противоположное* (31), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

В заключительном разделе второй главы на некоторых модельных примерах иллюстрируется практическое использование теорем 6 и 7.

В **третьей главе** диссертационного исследования изучается динамика возмущенного гармонического осциллятора. В разделах 3.1 и 3.2 рассматривается так называемый адиабатический осциллятор:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \big(1 + q(t)\big)x = 0. \tag{32}$$

Здесь функция $q(t)$ предполагается в определенном смысле малой при $t \to \infty$. В разделе 3.1 приводятся некоторые известные факты об особенностях динамики решений уравнения (32) в случае, когда функция $q(t)$ колебательным образом убывает на бесконечности. Раздел 3.2 посвящен исследованию явления параметрического резонанса в гармоническом осцилляторе с переменной частотой собственных колебаний, находящегося под воздействием колебательно убывающего возмущения:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Big(\omega^2(t) + \frac{a}{t^\rho}\cos\lambda t\Big)x = 0, \qquad a \neq 0, \tag{33}$$

где $a, \lambda, \rho \in \mathbb{R}$ и $0 < \rho \leq 1$. Предполагается, что функция $\omega^2(t)$, описывающая частоту собственных колебаний, является переменной величиной и допускает при $t \to \infty$ представление вида

$$\omega^2(t) = 1 + \frac{\omega_1}{t^\rho} + \frac{\omega_2}{t^{2\rho}} + \ldots + \frac{\omega_s}{t^{s\rho}} + r(t) \tag{34}$$

для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Здесь $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, s$, а функция $r(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. В этом разделе строятся асимптотические представления решений уравнения (33)

при различных значениях входящих в это уравнение параметров. На основании полученных асимптотических формул определяются те значения параметров, при которых уравнение (33) может иметь неограниченные при $t \to \infty$ решения. Основной результат раздела 3.2 сформулирован в виде следующий теоремы.

Теорема 8 (3.2.1). *Пусть коэффициенты ω_i $(i = 1, \dots, s)$ разложения* (34) *функции $\omega^2(t)$ фиксированы (т.е. не зависят от параметров внешнего возмущения). Тогда в уравнении* (33) *резонанс может реализоваться не более, чем при пяти значениях параметра $\lambda > 0$. Этими резонансными значениями являются значения $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \dots, 4)$ и одно из значений вида $\lambda = \lambda_n$, где $n \geq 5$, а величины λ_n определяются формулой*

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

При этом, если в уравнении (33) *реализуется резонанс $\lambda = \lambda_r$, то реализуются и все резонансы $\lambda = \lambda_i$ из числа перечисленных выше, где $i < r$. Условия возникновения резонанса в уравнении* (33) *приведены в таблице 1.*

Таблица 1[1]. Условия резонанса в уравнении (33)

$n=$	$\lambda=\lambda_n$	Условия возникновения резонанса	Точки резонанса в плоскости (a, λ)
1	$\lambda_1=2$	$0 < \rho \leq 1$	$(a, 2)$, $\lvert a\rvert > 2\lvert\omega_1\rvert$
2	$\lambda_2=1$	$0 < \rho \leq 1/2$, $\omega_1 = 0$	$(a, 1)$, $\lvert a\rvert > M$
3	$\lambda_3=2/3$	$0 < \rho \leq 1/3$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$, $\lvert\omega_3\rvert < 3\omega_2^{3/2}$	$\big(\pm 8\sqrt{\omega_2}/3, 2/3\big)$
4	$\lambda_4=1/2$	$0 < \rho \leq 1/4$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$ $\omega_3 = 0$, $-317\omega_2^2/60 < \omega_4 < 433\omega_2^2/60$	$\big(\pm\sqrt{(15\omega_2/2)}, 1/2\big)$
5	$\lambda_5=2/5$	$0 < \rho \leq 1/5$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = 275\omega_2^2/336$, $\lvert\omega_5\rvert < 125\sqrt{3}\omega_2^{5/2}/16$	$\big(\pm 8\sqrt{3\omega_2}/5, 2/5\big)$
$n>5$	$\lambda_n=2/n$	$0 < \rho \leq 1/n$, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 > 0$, $\omega_3 = 0$, $\omega_4 = (7\lambda_n^2 + 20)\omega_2^2/\big(8(1-\lambda_n^2)(4-\lambda_n^2)\big)$, $\omega_5 = 0, \dots$	$\big(\pm\sqrt{2(4-\lambda_n^2)\omega_2}, 2/n\big)$

В разделе 3.3 рассматривается задача асимптотического интегрирования гармонического осциллятора с интегральным возмущением. Именно, в этом разделе строятся асимптотиче-

[1]Символом M в таблице обозначена величина $\sqrt{\max\big(12\omega_2/5, -12\omega_2\big)}$

ские представления для решений интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \frac{a\sin\lambda t}{t^\rho}\int\limits_{t_0}^{t} x(s)ds = 0, \qquad t \geq t_0 > 0, \tag{35}$$

где a, λ, ρ — вещественные числа и $\rho > 0$. Как и в предыдущем разделе, с помощью полученных асимптотических представлений определяются те значения параметров, при которых уравнение (35) имеет неограниченные при $t \to \infty$ решения.

В **четвертой главе** работы система дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами (9) рассматривается при следующем условии. Предполагается, что в этой системе матрица A_0 имеет ровно s чисто мнимых собственных чисел, а остальные $m - s$ собственные числа имеют отрицательные вещественные части. В этом случае естественно ожидать, что для $m - s$ линейно независимых решений системы (9) при $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$|x_j(t)| \leq Me^{-\nu t}, \qquad \nu > 0, \qquad j = s+1, \ldots, m. \tag{36}$$

Следовательно, асимптотика всех решений системы (9) в главном будет определяться асимптотическими формулами для s решений, которые не подчиняются оценкам (36). В этой главе такие решения называются *критическими*. В разделе 4.1 предложен метод построения асимптотических представлений для критических решений системы (9). В начале этого раздела приводится еще один вариант теоремы 3, необходимый для теоретического обоснования разрабатываемого в этой главе метода. Именно, рассматривается нелинейная система ОДУ следующего вида:

$$\dot{x} = A(t)x + R(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^m. \tag{37}$$

Пусть

1. Линейная система (17) экспоненциально дихотомична на правой полуоси $t \geq 0$, т. е. выполнены неравенства (18). Кроме того, пусть $\operatorname{rank} P_1 = k$;

2. Вектор-функция $R(t,x)$ в шаре $|x| \leq r$ удовлетворяет следующим условиям:

2а. $|R(t,x_1) - R(t,x_2)| \leq p(t)|x_1 - x_2|$, $|x_j| \leq r$, $j = 1,2$, где $p(t) \in \mathcal{M}_0$, $t \geq t_0$,

2б. $R(t,0) \in L_1[t_0,\infty)$.

Теорема 9 (4.1.1). *При сформулированных выше предположениях справедливы все утверждения теоремы 3 и дополнительно все решения системы* (37) *с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$, где $t_0 \gg 1$, принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$.*

Предложенный в разделе 4.1 метод построения асимптотик для критических решений использует идеологию теории центральных многообразий.

В разделе 4.2 описан иной способ получения асимптотических представлений для критических решений системы (9). Он опирается на результаты, полученные В.В. Майоровым и Ю.С. Колесовым в работе [22] применительно к задаче об устойчивости линейных систем с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами.

В разделе 4.3 метод построения асимптотик для критических решений применяется к задаче асимптотического интегрирования системы двух связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{a\sin\omega t}{t^\alpha} x_2 = 0, \\ &\ddot{x}_2 + d\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \frac{b\sin\omega t}{t^\beta} x_1 = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Здесь $\omega > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, a и b — произвольные (ненулевые) действительные параметры, $d > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

В **пятой главе** разрабатывается метод построения асимптотических представлений для решений систем ФДУ следующего вида:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) B_i(t, x_t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(t, x_t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) B_{i_1\ldots i_k}(t, x_t) + R(t, x_t). \tag{39}$$

Здесь $B_{i_1\ldots i_l}(t,\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что либо все эти операторы периодичны по переменной t с периодом $\omega > 0$, т. е.

$$B_{i_1\ldots i_l}(t+\omega, \varphi) \equiv B_{i_1\ldots i_l}(t, \varphi), \qquad \varphi \in C_h, \tag{40}$$

либо

$$B_{i_1\ldots i_l}(t, \varphi) = \sum_{j=1}^{L} \Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t) \ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\varphi), \qquad \varphi \in C_h. \tag{41}$$

В формуле (41) $\ell_j^{(i_1\ldots i_l)}(\varphi)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t, и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$\Gamma_j^{(i_1\ldots i_l)}(t) = \sum_{s=1}^{M} \beta_{sj}^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_s t}, \tag{42}$$

где $\beta_{sj}^{(i_1\ldots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные $(m\times m)$-матрицы, а λ_s — вещественные числа. Далее, $R(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ такой, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функция $R(\cdot, \varphi)$ измерима по Лебегу при $t \ge t_0$ и, кроме того, выполнено неравенство (4), где $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Операторы с такими свойствами будем называть *операторами из класса* $\mathcal{L}_1^h[t_0, \infty)$. Наконец, $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ —

скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции, относительно которых выполнены условия B.2 — B.4.

Метод асимптотического интегрирования систем ФДУ вида (39) излагается в разделе 5.1. Здесь показано, что системе (39) можно сопоставить в некотором смысле эквивалентную ей систему в расширенном фазовом пространстве. Именно, с помощью некоторых преобразований от системы (39) можно перейти к системе ФДУ следующего вида:

$$\dot{x} = \Bigg(\sum_{i=1}^{n} v_i(t)A_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)A_{i_1i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)A_{i_1\ldots i_k}(t)\Bigg)x(t) + R_1(t,x_t). \quad (43)$$

Здесь $(m\times m)$-матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ — это либо ω-периодические матрицы, либо матрицы вида (42). Далее, $R_1(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h}\equiv C\big([-(k+1)h,0],\mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-(k+1)h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ в пространство $\mathbb{C}^m$ и принадлежащий классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. Система (43) с помощью замены (10) при достаточно больших t может быть приведена к усредненному виду

$$\dot{y} = \Bigg(\sum_{i=1}^{n} A_iv_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Bigg)y(t) + R_2(t,y_t) \quad (44)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и оператором $R_2(t,y_t)$ из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$. Предположим, что в главной части системы (44) можно выделить так называемый ведущий член, и этим членом является матрица $Av_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)$. Это означает, что систему (44) можно записать в виде

$$\dot{y} = \big[A+V(t)\big]v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)y(t) + R_2(t,y_t). \quad (45)$$

Здесь A — это либо матрица $A_{i_1\ldots i_s}$, либо сумма некоторого числа постоянных матриц $A_{i_1\ldots i_l}$, а матрица $V(t)$ такова, что $V(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и $\dot{V}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$. Если оказывается, что все собственные числа постоянной матрицы A различны, то используя известную лемму о диагонализации переменных матриц (лемма 1.1.1 из главы 1), систему (44) можно привести к виду (2). Дальнейшее построение асимптотики основано на использовании функционально-дифференциального аналога теоремы Левинсона из работы [87] применительно к системе (2).

Пусть система (45) приводится к виду (2), где $\Lambda(t)=\operatorname{diag}\big(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_m(t)\big)$, и мы можем воспользоваться указанным выше аналогом теоремы Левинсона для систем ФДУ. Основ-

ным результатом раздела 5.1 является следующая теорема, связывающая динамику решений исходной системы (39) и решений системы в расширенном пространстве (43).

Теорема 10 (5.1.4). *Предположим, что число $l = 1, \dots, m$ фиксировано, параметр $k \in \mathbb{N}$ выбран в силу свойства B.4 функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$, а действительное число T достаточно велико. Тогда существует решение $\tilde{x}_l(t)$ системы* (39)*, которое определено при $t \geq T - kh$ и имеет асимптотическое представление вида*

$$\tilde{x}_l(t) = c_1\, x_1(t) + \ldots + c_l\, x_l(t) + \ldots + c_m\, x_m(t) + o\big(e^{-\beta t}\big) \tag{46}$$

где $c_l \neq 0$. В представлении (46) *функции $x_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) суть решения системы* (43)*, имеющие при $t \to \infty$ асимптотику вида*

$$x_j(t) = \big[p_j + o(1)\big] \exp\Big\{ \int\limits_T^t \lambda_j(s) ds \Big\}.$$

Здесь p_j — собственный вектор матрицы A из системы (45)*, отвечающий соответствующему собственному числу. Наконец, $\beta > 0$ — произвольное действительное число.*

Кроме того, из результатов работы [87] следует, что все решения системы (39), определенные при $t \geq T$, имеют асимптотику вида (46) с некоторыми константами $c_1, \dots, c_m$, зависящими от решения.

В разделе 5.2 описанная выше методика используется для построения асимптотических формул для решений следующего уравнения с запаздыванием:

$$\ddot{x} + x + \frac{a \sin \lambda t}{t^\rho} x(t - h) = 0, \tag{47}$$

где $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $\rho > 0$ и $h > 0$. Поскольку уравнение (47) при $h = 0$ является уравнением адиабатического осциллятора, то в случае $h \neq 0$ это уравнение естественно называть уравнением адиабатического осциллятора с запаздыванием. Исследования, приведенные в этом разделе, являются продолжением нашей работы по изучению адиабатических осцилляторов, результаты которой обсуждаются в разделах 3.1 и 3.2. Построенные в этом разделе асимптотические представления позволяют, в том числе, определить те значения параметра ρ, при которых наличие запаздывания в уравнении (47) оказывает существенное влияние на динамику решений.

Раздел 5.3 посвящен задаче асимптотического интегрирования интегро-дифференциального уравнения типа Вольтерра

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \frac{a \sin \lambda t}{t^\rho} \int\limits_{t-h}^{t} x(s) ds = 0, \qquad t \geq t_0 + h, \tag{48}$$

где a, λ, t_0, h, ρ — вещественные числа и $t_0, h, \rho > 0$. Напомним, что в разделе 3.3 исследуется похожее уравнение Вольтерра, именно уравнение (35). Поскольку уравнение (35) является конечномерной динамической системой, а уравнение (48), относящееся к ФДУ, имеет бесконечномерное фазовое пространство, естественно ожидать, что динамика решений этих уравнений существенно различается. Построение асимптотических формул для решений уравнения (48) и последующее их сопоставление с формулами, приведенными в разделе 3.3, и является основной задачей раздела 5.3.

В наиболее общем виде метод асимптотического интегрирования ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами изложен в **шестой главе**. В этой главе изучается вопрос о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений системы ФДУ

$$\dot{x} = B_0 x_t + G(t, x_t). \tag{49}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h, 0], \mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$. Далее, B_0 — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ и не зависящий от t, а оператор $G(t, x_t)$ допускает представление в виде

$$G(t, x_t) = B(t, x_t) + R(t, x_t). \tag{50}$$

В этой формуле $B(t, \cdot)$ и $R(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$. При этом оператор $R(t, \varphi)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^h[t_0, \infty)$, а оператор $B(t, \varphi)$ определяется следующей формулой:

$$B(t,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) B_i(t,\varphi) + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(t,\varphi) + \ldots + \\ + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) B_{i_1 \ldots i_k}(t,\varphi), \qquad \varphi \in C_h.$$

Здесь $B_{i_1 \ldots i_l}(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, имеющие вид (41), (42). Наконец, $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, удовлетворяющие условиям В.2 — В.4.

Системы ФДУ вида (49) рассматриваются в главе 5 в случае $B_0 = 0$. В главе 6 система (49) исследуется при следующем предположении относительно оператора B_0. Предполагается, что характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda\theta} I),$$

имеет N корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ на мнимой оси с учетом их кратностей, а вещественные части остальных корней отрицательны. Данное предположение позволяет для асимптотического

интегрирования системы (49) воспользоваться идеологией известного метода центральных многообразий (см. [65,68,70,84]). Адаптации этого метода к задаче асимптотического интегрирования системы (49) и посвящена шестая глава.

В разделе 6.1 излагаются некоторые известные сведения из теории ФДУ, а также вводятся обозначения, необходимые для дальнейшего изложения. В частности, в этом разделе отмечено, что линейная автономная система

$$\dot{x} = B_0 x_t \tag{51}$$

для $t \geq 0$ порождает в C_h сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t)$: $C_h \to C_h$. Оператор $T(t)$, называемый оператором сдвига вдоль траекторий системы (51), определяется следующим образом: $T(t)\varphi = x_t^\varphi(\theta)$, где $\varphi \in C_h$ и $x_t^\varphi(\theta)$ — решение системы (51) с начальным условием $x_0^\varphi(\theta) = \varphi(\theta)$. Инфинитезимальный производящий оператор A этой полугруппы задается равенством $A\varphi = \varphi'(\theta)$, где $\varphi \in D(A)$. Область определения оператора A

$$D(A) = \left\{\varphi \in C_h \;\middle|\; \varphi'(\theta) \in C_h,\ \ \varphi'(0) = B_0\varphi\right\}$$

плотна в C_h. Пусть

$$\Lambda = \left\{\lambda_i \in \mathbb{C} \;\middle|\; \det \Delta(\lambda_i) = 0,\ \operatorname{Re}\lambda_i = 0,\ i = 1, \ldots, N\right\},$$

тогда пространство C_h можно разложить в прямую сумму двух подпространств

$$C_h = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda. \tag{52}$$

Здесь P_Λ — прямая сумма обобщенных собственных подпространств оператора A, отвечающих собственным значениям из Λ, а Q_Λ — некоторое дополнительное пространство такое, что $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$.

В разделе 6.2 определяется понятие *критического многообразия*.

Определение 1 (6.2.1). *Будем говорить, что множество (линейное пространство) $\mathcal{W}(t) \subset C_h$ при $t \geq t_* \geq t_0$ является критическим многообразием для системы* (49)*, если выполнены следующие условия:*

1. Существует $(m \times N)$-матрица $H(t,\theta)$ непрерывная по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ такая, что ее столбцы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \geq t_*$ и, кроме того, $\|H(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t,\cdot)\|_{C_h} = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |H(t,\theta)|$$

и $|\cdot|$ — некоторая матричная норма в пространстве $(m \times N)$-матриц;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \geq t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{ \varphi(\theta) \in C_h \;\Big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t,\theta)u,\ u \in \mathbb{C}^N \Big\}, \tag{53}$$

где столбцы $(m \times N)$-матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис в пространстве P_Λ из (52)*;*

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t \geq t_*$ положительно инвариантно относительно траекторий системы (49)*, т. е. если $x_T \in \mathcal{W}(T)$, $T \geq t_*$, то $x_t \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq T$.*

Динамика решений системы (49), лежащих на критическом многообразии, описывается конечномерной системой ОДУ (*система на критическом многообразии*). В разделе 6.2 описан алгоритм приближенного построения критического многообразия и соответствующей системы ОДУ. Основным результатом этого раздела является теорема об однозначной разрешимости некоторых функционально-краевых задач для линейных систем ОДУ (теорема 6.2.1). Эта теорема позволяет обосновать процедуру приближенного построения критического многообразия в некотором специальном виде.

Основные теоремы, описывающие свойства критического многообразия, изложены в разделе 6.3.

Теорема 11 (6.3.1). *При достаточно больших t у системы* (49) *существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемое формулой* (53).

Справедлив следующий результат о возможности приближенного построения критического многообразия. Обозначим символом $\hat{H}(t,\theta)$ некоторую специальную $(m \times N)$-матрицу, вычисленную с помощью алгоритма из раздела 6.2.

Теорема 12 (6.3.2). *Пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие системы* (49)*, существующее согласно теореме 11 при достаточно больших t. Тогда найдется такое достаточно большое t_*, что при $t \geq t_*$ матрица $H(t,\theta)$ из* (53) *допускает представление в виде*

$$H(t,\theta) = \hat{H}(t,\theta) + Z(t,\theta), \qquad t \geq t_* \geq t_0, \quad -h \leq \theta \leq 0.$$

Здесь $(m \times N)$-матрица $Z(t,\theta)$ такова, что $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*, \infty)$.

Следующая теорема устанавливает свойство глобального притяжения многообразия $\mathcal{W}(t)$.

Теорема 13 (6.3.3). *Пусть $x(t)$ — решение системы* (49)*, определенное при $t \geq T \geq t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_* \geq T$, что при $t \geq t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u_H(t) + H(t,\theta)u_H(t) + O\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty.$$

Здесь $\beta > 0$ — некоторое действительное число и $u_H(t)$ $(t \geq t_*)$ — некоторое решение системы на критическом многообразии.

Пусть $u^{(1)}(t), \ldots, u^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии, а $x(t)$ — произвольное решение системы (49), определенное при $t \geq T$. Тогда в силу теоремы 13 имеет место следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = x_t(0) = \big(\Phi(0) + H(t,0)\big) \sum_{i=1}^{N} c_i u^{(i)}(t) + O\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty,$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. Отметим, что система, описывающая динамику исходной задачи (49) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, относится к классу линейных систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами. Метод асимптотического интегрирования таких систем описан в главе 1.

Метод асимптотического интегрирования систем ФДУ вида (49) иллюстрируется в разделе 6.4 на примере задачи построения асимптотических представлений для решений скалярного уравнения с двумя запаздываниями

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2} x(t-1) + \frac{a \sin \omega t}{t^{\rho}} x(t-h)$$

при $t \to \infty$. Здесь параметры $a, \omega \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $h \geq 0$ и $\rho > 0$.

В разделе 6.5 указанный выше метод асимптотического интегрирования распространяется на случай дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием. Здесь вновь рассматриваются системы вида (49) с оператором $G(t, x_t)$ типа (50). Подход, позволяющий распространить разработанную нами асимптотическую технику на более широкий класс систем ФДУ, опирается на результаты работы [93]. В этом разделе предполагается, что операторы $B(t, \cdot)$ и $R(t, \cdot)$ в (50) таковы, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функции $B(\cdot, \varphi)$ и $R(\cdot, \varphi)$ непрерывны по $t \geq t_0$. Напомним, что функция $\varphi \in C_h$ называется липшицевой с константой Липшица, равной K, если

$$|\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \leq K\,|\theta_1 - \theta_2|, \quad -h \leq \theta_1, \theta_2 \leq 0. \tag{54}$$

Заметим, что константа K в неравенстве (54) зависит от функции $\varphi(\theta)$.

Определение 2 (6.5.1). *Пространством LC_h будем называть подпространство пространства C_h, состоящее из всех липшицевых функций и оснащенное нормой*

$$\|\varphi\|_{LC_h} = \max\left(\|\varphi\|_{C_h}, K_\varphi\right), \tag{55}$$

где $K_\varphi = \inf K$ и инфимум берется по всем постоянным K, для которых выполнено неравенство (54).

Заметим, что пространство LC_h относительно нормы (55) является банаховым пространством. Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (49) с начальным условием $x_T = \varphi$, где $\varphi \in C_h$. Тогда, в силу наложенных на операторы $B(t,\varphi)$ и $R(t,\varphi)$ условий, решение $x_t(\theta)$ будет принадлежать пространству LC_h при $t \geq T + \tau$. Следовательно, динамика системы (49) определяется поведением решений в пространстве LC_h.

Предположим, что для операторов $B(t,\varphi)$ и $R(t,\varphi)$ в представлении (50), выполнены неравенства

$$|B(t,\varphi)| \leq w(t)\|\varphi\|_{LC_h}, \quad |R(t,\varphi)| \leq \gamma(t)\|\varphi\|_{LC_h}, \quad \varphi \in LC_h, \tag{56}$$

где $w(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\gamma(t) \in L_1[t_0,\infty)$. Наконец, будем предполагать, что для любой бесконечно гладкой функции $\varphi(\theta)$ справедливо разложение

$$B(t,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) P_i^{\varphi}(t) + \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)P_{i_1 i_2}^{\varphi}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\leq i_1\leq \ldots \leq i_k\leq n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)P_{i_1\ldots i_k}^{\varphi}(t) + R^{\varphi}(t). \tag{57}$$

Здесь $P_{i_1\ldots i_l}^{\varphi}(t)$ — некоторые векторные тригонометрические полиномы, зависящие от функции $\varphi(\theta)$; $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$, удовлетворяющие свойствам В.2 — В.4, а вектор-функция $R^{\varphi}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$. Заменяя затем всюду в определении 1 и теоремах 11, 12, 13 пространство C_h с нормой $\|\varphi\|_{C_h}$ на пространство LC_h с нормой $\|\varphi\|_{LC_h}$ можно установить существование и соответствующие свойства критического многообразия для системы (49) с оператором $G(t,x_t)$ вида (50), (56), (57). Кроме того, представление (57) позволяет для построения матрицы $\hat{H}(t,\theta)$, являющейся приближением для матрицы $H(t,\theta)$ из (53), использовать алгоритм приближенного построения критического многообразия, аналогичный алгоритму из раздела 6.2. В качестве примера использования описанного метода в разделе 6.5 рассматривается задача построения асимптотики решений при $t \to \infty$ для скалярного уравнения с переменным запаздыванием

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x\Big(t - 1 + \frac{a\sin\omega t}{t^{\rho}}\Big),$$

где $a,\omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\rho > 0$.

В разделе 6.6 исследуется динамика решений дифференциального уравнения с запаздыванием

$$\ddot{x} - q(t)x(t-h) = 0, \qquad h > 0, \quad t \geq t_0 \tag{58}$$

при $t \to \infty$. Здесь

$$q(t) = \frac{p(t)}{t^{\rho}}, \qquad \rho > 0,$$

где $p(t)$ — действительный тригонометрический многочлен, имеющий нулевое среднее значение, т. е.

$$p(t) = \sum_{j=-N}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \qquad p_{-j} = \bar{p}_j, \quad \omega_{-j} = -\omega_j,$$

причем

$$\mathrm{M}\big[p(t)\big] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt = p_0 = 0.$$

В случае $h = 0$ уравнение (58) переходит в одномерное уравнение Шредингера при нулевой энергии с потенциалом типа Вигнера–фон Неймана. Уравнения вида (58) рассматриваются, в основном, с позиций исследования вопроса о колеблемости решений. В этом разделе нами построены асимптотические формулы, описывающие поведение решений уравнения (58) при $t \to \infty$. Отдельное внимание уделено вопросу о качественных и количественных различиях в динамике решений уравнения (58) при наличии запаздывания и динамике решений этого же уравнения при нулевом запаздывании.

В заключительной, **седьмой главе** диссертационной работы результаты шестой главы обобщаются на случай задачи асимптотического интегрирования некоторого класса дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Постановке задачи отведен раздел 7.1 этой главы. Рассматривается уравнение

$$\dot{u} = \big[A + G(t)\big]u, \quad t \geq t_0, \tag{59}$$

где u — элемент комплексного банахова пространства $\mathcal{B}$. Здесь A — замкнутый линейный оператор с плотной в $\mathcal{B}$ областью определения, который является генератором сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $T(t)$: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ ($t \geq 0$). Далее, $G(t)$ ($t \geq t_0$) — семейство линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$, причем

$$G(t) = B(t) + R(t). \tag{60}$$

В представлении (60) семейство линейных ограниченных операторов $B(t)$ обладает тем свойством, что операторная функция $B(t)$ сильно измерима на любом отрезке $[t_0, b]$, $b \geq t_0$, и $\|B(t)u\|_{\mathcal{B}}$ стремится к нулю колебательным образом при $t \to \infty$ для любого $u \in \mathcal{B}$. Далее, семейство линейных ограниченных операторов $R(t)$ также является сильно измеримым на любом отрезке $[t_0, b]$, $b \geq t_0$, и, кроме того, существует такая функция $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, что

$$\|R(t)u\|_{\mathcal{B}} \leq \gamma(t)\|u\|_{\mathcal{B}}$$

для любого $u \in \mathcal{B}$. Целесообразность изучения уравнений вида (59), где операторная функция $G(t)$ понимается как некоторое параметрическое возмущение с непрерывным спектром, отмечена, в частности, в известной монографии [52, стр. 230].

Всюду в этой главе решение уравнения (59) с начальным условием $u(t_0) = u_0$ понимается в слабом смысле (см. [72]), точнее, как решение интегрального уравнения

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)G(s)u(s)ds. \tag{61}$$

Из результатов работ [72, 73] (см. также [71]) следует, что для любого $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное непрерывное на отрезке $[t_0, b]$ ($b \geq t_0$) слабое решение уравнения (59) с начальным условием $u(t_0) = u_0$, и это решение задается формулой (61). Нас интересует вопрос об асимптотическом поведении решений уравнения (61) при $t \to \infty$, если на оператор A наложены следующие дополнительные условия. Предполагается, что

(i)

$$\mathcal{B} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y},$$

где линейное конечномерное подпространство $\mathcal{X}$ есть линейная оболочка обобщенных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ с нулевой вещественной частью (с учетом кратностей);

(ii) замкнутое линейное подпространство $\mathcal{Y}$ инвариантно относительно полугруппы $T(t)$, и кроме того, для любого $y \in \mathcal{Y}$ имеет место неравенство

$$\|T(t)y\|_{\mathcal{B}} \leq Ke^{-\alpha t}\|y\|_{\mathcal{B}}, \quad t \geq 0,$$

где $K, \alpha > 0$.

В разделе 7.2 вводится понятие критического многообразия для уравнения (59) и устанавливаются его основные свойства. Уточним вид оператора $B(t)$ в формуле (60). Предположим, что

$$B(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)B_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)B_{i_1 i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t)B_{i_1 \ldots i_k}(t).$$

Здесь $B_{i_1 \ldots i_l}(t)$ — операторные функции, относительно которых предполагается, что

$$B_{i_1 \ldots i_l}(t) = \sum_{j=1}^{M} e^{\mathrm{i}\omega_j t} b_j^{(i_1 \ldots i_l)},$$

где $b_j^{(i_1 \ldots i_l)}$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t и действующие из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$. Наконец, $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, которые удовлетворяют условиям B.2 — B.4.

Определение 3 (7.2.1). *Линейное N-мерное подпространство $\mathcal{W}(t) \subset \mathcal{B}$ будем называть критическим многообразием для уравнения* (59) *при $t \geq t_* \geq t_0$, если выполнены следующие условия:*

1. Существует вектор-строка $H(t) = \big(h_1(t), \ldots, h_N(t)\big) \in \mathcal{Y}^N$, составленная из непрерывных при $t \geq t_*$ функций со значениями из подпространства $\mathcal{Y}$, такая что $\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} = \big|\big(\|h_1(t)\|_{\mathcal{B}}, \ldots, \|h_N(t)\|_{\mathcal{B}}\big)\big|$$

и $|\cdot|$ — некоторая норма в пространстве вектор-строк длины N;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \geq t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{u \in \mathcal{B} \;\Big|\; u = \Phi w + H(t)w,\ w \in \mathbb{C}^N\Big\}. \tag{62}$$

Здесь вектор-строка $\Phi = \big(\varphi_1, \ldots, \varphi_N\big) \in \mathcal{B}^N$ составлена из обобщенных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ из условия (i)*, которые образуют базис подпространства $\mathcal{X}$. Далее, символом $\mathbb{C}^N$ обозначено пространство комплекснозначных вектор-столбцов длины N, а произведение вектор-строки $U = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathcal{B}^N$ и вектор-столбца $w = (w_1, \ldots, w_N)^T$ понимается в стандартном смысле: $Uw = u_1w_1 + \ldots + u_Nw_N$;*

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t \geq t_*$ положительно инвариантно относительно решений уравнения (59)*, т.е. если $u(T) \in \mathcal{W}(T)$, $T \geq t_*$, то $u(t) \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq T$.*

Динамика решений уравнения (59), лежащих на многообразии $\mathcal{W}(t)$ при достаточно больших t, описывается N-мерной системой линейных ОДУ (система на критическом многообразии). В этом разделе приводятся алгоритм построения приближения для критического многообразия, а также вид соответствующей системы на критическом многообразии. Доказана однозначная разрешимость возникающих в результате использования указанного алгоритма вспомогательных операторных уравнений (лемма 7.2.1). Основными результатами этого раздела являются следующие теоремы.

Теорема 14 (7.2.1). *При достаточно больших t у уравнения* (59) *существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемое формулой* (62).

Пусть $\hat{H}(t)$ — приближение для вектор-строки $H(t)$ из представления (62), построенное в результате описанной в разделе 7.2 процедуры. Имеет место следующая теорема об аппроксимации.

Теорема 15 (7.2.2). *Пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие для уравнения* (59)*, существующее согласно теореме 14 при достаточно больших t. Тогда найдется такое*

достаточно большое t_*, что при $t \geq t_*$ вектор-строка $H(t)$ допускает представление в виде

$$H(t) = \hat{H}(t) + Z(t), \qquad t \geq t_* \geq t_0.$$

Здесь вектор-строка $Z(t)$, принимающая значения из $\mathcal{Y}^N$, такова, что $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_*, \infty)$.

Критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ обладает свойством глобального притяжения в следующем смысле.

Теорема 16 (7.2.3). *Пусть $u(t)$ — слабое решение уравнения* (59)*, т. е. решение интегрального уравнения* (61)*, определенное при $t \geq T \geq t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_* \geq T$, что при $t \geq t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$u(t) = \Phi w_H(t) + H(t) w_H(t) + O\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty.$$

Здесь $\beta > 0$ — некоторое действительное число и $w_H(t)$ $(t \geq t_*)$ — некоторое решение системы на критическом многообразии.

Пусть $w^{(1)}(t), \ldots, w^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии, а $u(t)$ — произвольное слабое решение уравнения (59), определенное при $t \geq T$. Тогда в силу теоремы 16 имеет место следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$u(t) = \big(\Phi + H(t)\big) \sum_{i=1}^{N} c_i w^{(i)}(t) + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. Таким образом, вопрос построения асимптотик для слабых решений уравнения (59) сводится, по существу, к задаче асимптотического интегрирования N-мерной системы ОДУ. Эта система является системой ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами, следовательно, асимптотика ее решений может быть получена с помощью метода, описанного в главе 1.

В разделе 7.3, завершающем эту главу, рассматривается возмущенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(x) \frac{\sin \omega t}{t^\rho} u, \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0 > 0 \tag{63}$$

с начальным условием

$$u(t_0, x) = \varphi(x) \tag{64}$$

и граничным условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{65}$$

Здесь функция $u(t,x)$ рассматривается в ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Символом $\partial u/\partial\nu$ обозначена производная по направлению внешней нормали к $\partial\Omega$. Действительнозначные функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ считаются принадлежащими пространству $L_2(\Omega)$, параметры ω и ρ — положительны. Наконец, Δ — оператор Лапласа по компонентам вектора x. Вопрос построения асимптотики решений уравнения (63) с условиями (64), (65) обсуждался в работе [127]. В этом разделе нами строятся асимптотические формулы для решений уравнения (63), понимаемых в слабом смысле, с помощью изложенного в разделе 7.2 метода.

Благодарности. Автор посвящает эту работу памяти своего учителя профессора **Бурда Владимира Шепселевича** (1938–2017), благодаря которому это исследование оказалось возможным. Автор выражает огромную признательность профессору **Глызину Сергею Дмитриевичу** и профессору **Кубышкину Евгению Павловичу** за полезное обсуждение полученных в работе результатов.

Глава 1

Асимптотическое интегрирование систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами

1.1 Теорема Левинсона. Приведение систем к L-диагональному виду

Ставший уже классическим результат об асимптотическом представлении решений систем линейных дифференциальных уравнений был сформулирован Н. Левинсоном в работе [128] применительно к системам вида

$$\dot{x} = \big[A_0 + V(t) + R(t)\big]x, \quad x \in \mathbb{C}^m. \tag{1.1.1}$$

Относительно квадратных матриц A_0, $V(t)$ и $R(t)$ предполагаются выполненными следующие условия:

A.1. Все собственные числа постоянной матрицы A_0 различны.

A.2. Матрица $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

A.3. Матрица $\dot{V}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$ для некоторого $t_0 \in \mathbb{R}$, т. е.

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} |\dot{V}(t)|dt < \infty,$$

где $|\cdot|$ — какая-либо матричная норма.

A.4. Матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$.

Теорема Левинсона базируется на двух основных утверждениях, первый из которых известен как лемма о диагонализации переменной матрицы (см., например, [1, 16, 21, 32]).

Лемма 1.1.1. *Пусть выполнены условия A.1 — A.3. Тогда при достаточно больших t существует невырожденная матрица $C(t)$ такая, что:*

(i) *по столбцам этой матрицы расположены собственные векторы матрицы $A_0 + V(t)$ и $C(t) \to C_0$ при $t \to \infty$. Постоянная матрица C_0 составлена из собственных векторов матрицы A_0;*

(ii) $\dot{C}(t) \in L_1[t_0, \infty)$;

(iii) *она приводит матрицу* $A_0 + V(t)$ *к диагональному виду, т. е.*

$$C^{-1}(t)\big[A_0 + V(t)\big]C(t) = \Lambda(t),$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)\big)$ *— диагональная матрица, составленная из собственных чисел матрицы* $A_0 + V(t)$.

Замечание 1. Можно показать, что в условиях этой леммы $\dot{C}(t) = O\big(|\dot{V}(t)|\big)$.

В системе (1.1.1) осуществим замену

$$x(t) = C(t)y(t), \tag{1.1.2}$$

где $C(t)$ — матрица из леммы 1.1.1. Эта замена приводит систему (1.1.1) к так называемому *L–диагональному* виду:

$$\dot{y} = \big[\Lambda(t) + R_1(t)\big]y, \tag{1.1.3}$$

где

$$R_1(t) = C^{-1}(t)R(t)C(t) - C^{-1}(t)\dot{C}(t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ и условия A.4 матрица $R_1(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Оказывается, что остаточный член $R_1(t)$ не влияет в главном на асимптотику решений системы (1.1.3) в предположении некоторой регулярности относительно поведения функций $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)$. Эта регулярность задается следующим условием дихотомии: для каждой пары индексов (i, j) имеет место либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{1.1.4}$$

либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_i(s) - \lambda_j(s)\big)ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_*, \tag{1.1.5}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Основной результат, полученный Левинсоном, состоит в следующем (см. [21, 106, 128]).

Теорема 1.1.1 (Levinson). *Пусть выполнено условие дихотомии* (1.1.4), (1.1.5). *Тогда фундаментальная матрица L–диагональной системы* (1.1.3) *допускает следующее асимптотическое представление при* $t \to \infty$:

$$Y(t) = \big(I + o(1)\big)\exp\Big\{\int_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}. \tag{1.1.6}$$

Замечание 1. Отметим следующее условие, влекущее выполнение условия дихотомии (1.1.4), (1.1.5), которое оказывается выполненным во многих практических задачах: для любой пары функций $(\lambda_i(t), \lambda_j(t))$ можно указать такие функции $f_{ij}(t) \geq 0$, $t \geq t_0$ или $f_{ij}(t) \leq 0$, $t \geq t_0$ и $g_{ij}(t) \in L_1[t_0, \infty)$, что

$$\operatorname{Re}\big(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\big) = f_{ij}(t) + g_{ij}(t). \tag{1.1.7}$$

Замечание 2. Условия дихотомии принципиальны для возможности представления фундаментальной матрицы L–диагональной системы с помощью асимптотической формулы (1.1.6). Пример L–диагональной системы, для которой не выполнены условия дихотомии, и асимптотика фундаментальной матрицы которой не допускает представления в виде (1.1.6), можно найти в книгах [50, 106].

Возвращаясь к системе (1.1.1) с помощью замены (1.1.2) и учитывая свойство (i) матрицы $C(t)$, заключаем, что фундаментальная матрица этой системы имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$X(t) = \big(C_0 + o(1)\big) \exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t} \Lambda(s)ds\Big\}. \tag{1.1.8}$$

Основной проблемой в использовании теоремы Левинсона является необходимость приведения исходной системы к специальном виду (см. формулы (1.1.1), (1.1.3)). Идея метода приведения к L–диагональной форме в отдельных случаях применялась уже Перроном [154, 155] и Чезари [56]. И.М. Рапопорт [41] ввел некоторые подстановки, приводящие отдельные типы уравнений к виду (1.1.3). Задаче приведения линейных систем к L–диагональному виду посвящены, в частности, работы Харриса и Латса [116–118]. Предложенная ими методика применима к довольно широкому классу систем. Сегодня эту технику приведения систем к L–диагональному виду называют методом Харриса–Латса. В основе этого метода лежит последовательность замен переменных, близких к тождественным, называемых Q–преобразованиями. Авторы рассматривали системы вида

$$\dot{x} = \big(\Lambda(t) + V(t)\big)x, \tag{1.1.9}$$

где $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)\big)$, а матрица $V(t)$ мала при $t \to \infty$ в некотором подходящем смысле. Предложенный авторами подход состоит в следующем: если к системе (1.1.9) не применима теорема Левинсона, то сделаем Q–преобразование

$$x = \big(I + Q(t)\big)y, \tag{1.1.10}$$

где $Q(t) = o(1)$ при $t \to \infty$ и $\operatorname{diag} Q(t) \equiv 0$. При помощи такой замены мы приходим к системе

$$\dot{y} = \big(\Lambda(t) + V_1(t)\big)y. \tag{1.1.11}$$

Если к этой системе теорема Левинсона применима, т. е. если $\big(V_1(t) - \operatorname{diag} V_1(t)\big) \in L_1[t_0, \infty)$ и матрица $\Lambda(t) + \operatorname{diag} V_1(t)$ удовлетворяет условию дихотомии (1.1.4), (1.1.5), то построение асимптотики завершено. Если же $\big(V_1(t) - \operatorname{diag} V_1(t)\big) \notin L_1[t_0, \infty)$, но это выражение лучше исходного в некотором смысле, то в системе (1.1.11) можно сделать замену типа (1.1.10) и т. д. Отметим следующие типы систем вида (1.1.9), для которых Харрис и Латс указали алгоритм построения матрицы $Q(t)$:

1. $\Lambda(t) \to \Lambda_0$, где Λ_0 — постоянная матрица, все собственные значения которой различны, и $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

2. Матрица $V(t) - \operatorname{diag} V(t)$ интегрируема не в абсолютном смысле, т.е.

$$\int_{t_0}^{+\infty} \big(V(s) - \operatorname{diag} V(s)\big) ds < \infty.$$

3. Элементы матрицы $\Lambda(t)$ удовлетворяют следующему условию:

$$\big|\operatorname{Re}\big(\lambda_i(t) - \lambda_j(t)\big)\big| \geq \delta > 0, \qquad i, j = 1, \ldots, m, \quad i \neq j.$$

Кроме того, $\big(V(t) - \operatorname{diag} V(t)\big) \in L_p[t_0, \infty)$, $1 < p < +\infty$.

Одним из преимуществ метода Харриса–Латса является то обстоятельство, что для его использования требуется знать лишь весьма общие свойства матрицы коэффициентов системы. Это преимущество является одновременно и недостатком, поскольку при наличии дополнительной информации о структуре матрицы коэффициентов метод Харриса–Латса не позволяет ей воспользоваться. Процесс преобразования исходной системы по этой причине становится весьма трудоемким или, вообще, нереализуемым. Тем не менее после появления работ Харриса и Латса, были выполнены десятки исследований, в которых использовался этот метод. Результаты этих исследований подытожены в монографиях [79, 106].

В тех ситуациях, когда «ведущая» матрица системы имеет жорданову форму, на вид асимптотических формул в главном существенное влияние могут оказывать элементы остаточного члена даже, если он принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. В этой работе приведем лишь один из наиболее простых результатов в этом направлении. Более глубокое исследование данного вопроса можно найти в работах [89, 94, 99, 106]. Рассмотрим систему следующего вида [94]:

$$\dot{x} = \big(J + V(t)\big)x, \tag{1.1.12}$$

где матрица J — нижняя жорданова клетка с нулевым собственным значением, т.е. $J = \Delta^T$

и

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.13}$$

Сделаем в (1.1.12) следующую замену:

$$x = e^{tJ} D_m(t) y, . \tag{1.1.14}$$

где $D_m = \operatorname{diag}\bigl(1, t, \dots, t^{m-1}\bigr)$. Замечая, что

$$e^{tJ} D_m(t) = D_m(t) e^J,$$

приходим к системе

$$\dot{y} = \bigl(L t^{-1} + V_1(t)\bigr) y, \tag{1.1.15}$$

где $L = \operatorname{diag}\bigl(0, -1, \dots, 1-m\bigr)$ и $V_1(t) = e^{-J} \tilde{V}(t) e^J$,

$$\tilde{V}(t) = D_m^{-1}(t) V(t) D_m(t).$$

Пусть матрица $\tilde{V}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Тогда система (1.1.15) является L–диагональной. Поскольку выполнено условие (1.1.7), то для построения асимптотики фундаментальной матрицы $Y(t)$ этой системы мы вправе воспользоваться теоремой Левинсона. Несложно установить, что требование $\tilde{V}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ эквивалентно следующему условию:

$$\int_{t_0}^{\infty} s^{j-i} |v_{ij}(s)| ds < \infty, \qquad i, j = 1, \dots, m,$$

где $v_{ij}(t)$ — элемент матрицы $V(t)$.

1.2 Усредняющая замена типа Штокало и некоторые ее свойства

Особенную сложность процесс приведения к L–диагональной форме приобретает в тех случаях, когда исходная система содержит осциллирующие величины. В частности, метод

Харриса–Латса оказывается малоэффективным. Возможные варианты действия в этой ситуации предлагались различными авторами. В работе Ю.А. Самохина и В.Н. Фомина [45] рассматривалась система следующего вида:

$$\dot{x} = \Big(A_0 + \frac{1}{t}\sum_l A_l e^{\mathrm{i}\mu_l t} + O\big(t^{-2}\big)\Big)x, \tag{1.2.1}$$

где A_l — постоянные матрицы, μ_l — вещественные числа. Предполагается, что система

$$\dot{x} = A_0 x$$

имеет лишь ограниченные при $t \to \infty$ решения. Авторами строится замена переменных, преобразующая систему (1.2.1) в систему, которая не содержит осциллирующих коэффициентов. В работе [86] Кассел предложил метод исследования асимптотики решений системы

$$\dot{y} = \xi(t)P(t)y,$$

где $\xi(t)$ — скалярная функция, которая стремится к нулю при $t \to \infty$ и, кроме того, $\xi'(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Предполагается далее существование целого числа k, что $\xi^k(t) \notin L_1[t_0, \infty)$ и $\xi^{k+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Матрица $P(t)$ — 2π-периодическая. Метод, как он излагается в книге [106], состоит в проведении замены

$$y = \exp\big\{\xi(t)P_1(t) + \xi^2(t)P_2(t) + \ldots + \xi^k(t)P_k(t)\big\}z,$$

которая переводит исходную систему в систему

$$\dot{z} = \big(\xi(t)\Gamma_1 + \ldots + \xi^k(t)\Gamma_k + R(t)\big)z,$$

где Γ_i $(i = 1, \ldots, k)$ — постоянные матрицы и $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Матрицы $P_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ являются периодическими с периодом 2π.

Впервые на возможность использования усредняющих замен переменных вместо Q–преобразований для систем, коэффициенты которых колебательным образом убывают на бесконечности, указали В.Ш. Бурд и В.А. Каракулин в работе [6]. Предложенный авторами метод является аналогом усредняющей замены, использованной И.З. Штокало [58, 59] для исследования устойчивости решений некоторого класса систем с малым параметром. Авторы рассматривали следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = \Big(A_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t^{j\alpha}} A_j(t) + R(t)\Big)x, \tag{1.2.2}$$

где A_0 — постоянная матрица, элементами матриц $A_1(t), \ldots, A_k(t)$ являются тригонометрические многочлены, $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Вещественное число α и натуральное число k удовлетворяют неравенству $0 < k\alpha \leq 1 < (k+1)\alpha$. Показано, что система (1.2.2) при больших t с помощью замены

$$x = \Big(I + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t^{j\alpha}} Y_j(t)\Big) y,$$

где $Y_1(t), \ldots, Y_k(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\frac{dy}{dt} = \Big(A_0 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{t^{j\alpha}} A_j + R_1(t)\Big) y$$

с постоянными матрицами $A_1, \ldots, A_k$ и матрицей $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Метод, предложенный В.Ш. Бурдом и В.А. Каракулиным, получил свое развитие в работе автора [34]. Опишем основной результат отмеченной работы. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \Big[A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t) v_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} A_{i_1 i_2}(t) v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \ldots + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} A_{i_1 \ldots i_k}(t) v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big] x, \quad x \in \mathbb{C}^m. \quad (1.2.3)$$

Здесь A_0, $A_{i_1 \ldots i_l}(t)$, $R(t)$ — квадратные матрицы, а $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — абсолютно непрерывные на полуинтервале $[t_0, \infty)$ скалярные функции. Потребуем, чтобы были выполнены следующие условия:

В.1. A_0 — постоянная матрица с действительными собственными значениями;

В.2. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \ldots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

В.3. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \ldots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;

В.4. Произведение $v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) \ldots v_{i_{k+1}}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$ для любого набора индексов $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{k+1} \leq n$;

В.5. Элементами матриц $A_{i_1 \ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$A_{i_1 \ldots i_l}(t) = \sum_{j=1}^{M} \beta_j^{(i_1 \ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \quad (1.2.4)$$

где λ_j — произвольные действительные числа, а $\beta_j^{(i_1 \ldots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные матрицы;

В.6. Матрица $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

В дальнейшем системы вида (1.2.3) мы будем называть *системами с колебательно убывающими коэффициентами*. Перед тем как сформулировать основной результат, приведем следующую вспомогательную лемму [2, 8, 13, 24].

Лемма 1.2.1. *Матричное уравнение*

$$AX - XB = C,$$

где A, B, C, X — квадратные $(m \times m)$–матрицы, имеет единственное решение X при любой правой части C тогда и только тогда, когда спектры матриц A и B не пересекаются.

Справедлива следующая теорема [34].

Теорема 1.2.1. *Пусть выполнены условия B.1 — B.6. Тогда система* (1.2.3) *при достаточно больших t заменой*

$$x = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} Y_i(t)v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} Y_{i_1 i_2}(t)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y, \quad (1.2.5)$$

где I — единичная матрица, а элементами матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, приводится к виду

$$\dot y = \Big[A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i v_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} A_{i_1 i_2}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R_1(t)\Big]y, \quad (1.2.6)$$

с постоянными матрицами $A_{i_1\ldots i_l}$ и матрицей $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Доказательство. В системе (1.2.3) сделаем замену (1.2.5) и учтем (1.2.6). Опуская для сокращения записи пределы суммирования, получаем

$$\Big[\sum Y_i(t)\dot v_i + \sum \dot Y_i v_i(t) + \ldots + \sum Y_{i_1\ldots i_k}(t)\frac{d}{dt}\Big(v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big) + \\ + \sum \dot Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y + \Big[I + \sum Y_i(t)v_i(t) + \ldots + \\ + \sum Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big] \times \Big[A_0 + \sum A_i v_i(t) + \ldots + \sum A_{i_1\ldots i_k}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + \\ + R_1(t)\Big]y = \Big[A_0 + \sum A_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum A_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + R(t)\Big] \times \\ \times \Big[I + \sum Y_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]y. \quad (1.2.7)$$

Соберем слагаемые из класса $L_1[t_0, \infty)$ в (1.2.7) по обе стороны от знака равенства. Имеем

$$\Big[\sum_{j=1}^{k}\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_j\le n} Y_{i_1\ldots i_j}(t)\frac{d}{dt}\Big(v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_j}(t)\Big)\Big]+\Big[\sum_{\substack{j+p=k+1\\1\le j,\,p\le k}}^{2k}\Big(\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_j\le n} Y_{i_1\ldots i_j}(t)\times$$

$$\times\, v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_j}(t)\Big)\Big(\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_p\le n} A_{i_1\ldots i_p}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_p}(t)\Big)\Big]+$$

$$+\Big[I+\sum Y_i(t)v_i(t)+\ldots+\sum Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]R_1(t)=$$

$$=R(t)\Big[I+\sum Y_i(t)v_i(t)+\ldots+\sum Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big]+$$

$$+\Big[\sum_{\substack{j+p=k+1\\1\le j,\,p\le k}}^{2k}\Big(\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_j\le n} A_{i_1\ldots i_j}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_j}(t)\Big)\Big(\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_p\le n} Y_{i_1\ldots i_p}(t)\times$$

$$\times\, v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_p}(t)\Big)\Big]. \quad (1.2.8)$$

Поскольку матрица

$$\Big[I+\sum Y_i(t)v_i(t)+\ldots+\sum Y_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big] \quad (1.2.9)$$

в силу условия B.2 и ограниченности по норме матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ (они определяются ниже) обратима при достаточно больших t и обратная к ней ограничена, то из (1.2.8) можно выразить матрицу $R_1(t)$. Эта матрица, очевидно, будет принадлежать классу $L_1[t_0,\infty)$, если t_0 достаточно велико. Теперь будем приравнивать слагаемые при $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$, $l\le k$, находящиеся в обеих частях равенства (1.2.8). Приравнивание «свободных членов» дает нам тривиальное тождество

$$IA_0=A_0I.$$

Для дальнейшего изложения нам придется ввести несколько обозначений. Определим следующую символьную функцию:

$$\kappa(l)=\underbrace{\kappa\ldots\kappa}_{l\text{ раз}},\quad \kappa=1,2,\ldots,n,\quad l=1,2,\ldots,k$$

и $\kappa(0)=0$. Например, $1(2)=11$, $2(4)=2222$, $5(0)=0$ и т.д. Итак, нам требуется приравнять слагаемые при $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$. Набор индексов

$$(i_1i_2\ldots i_l),\quad 1\le i_1\le i_2\le\ldots\le i_l\le n$$

мы представим в виде

$$\big(\kappa_1(j_1)\kappa_2(j_2)\ldots\kappa_s(j_s)\big),\quad \text{где}\quad \kappa_1<\kappa_2<\ldots<\kappa_s,\quad s\ge1,$$

и $j_1+j_2+\ldots+j_s=l$. К примеру, набор индексов (112333) мы записываем следующим образом: $\big(1(2)2(1)3(3)\big)$. В формулах, с которыми мы встретимся ниже, могут содержаться наборы

индексов, включающие 0. Например, $\big(1(1)03(1)\big)$. Все нули из таких наборов следует удалить. Таким образом, набор индексов в последнем примере должен иметь вид $\big(1(1)3(1)\big) = (13)$. Мы также будем считать, что $(00\ldots0) = (0)$ и $Y_0(t) = I$. Наконец, введем следующие функции для $i = 1, \ldots, s$:

$$\rho_i(x) = \begin{cases} 1, & x \le j_i \\ 0, & x > j_i \end{cases}.$$

Итак, приравнивая слагаемые при $v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_l}(t)$ в (1.2.8), мы получаем следующие неоднородные дифференциальные уравнения для определения матриц $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ и $A_{i_1\ldots i_l}$:

$$\dot{Y}_{i_1 i_2 \ldots i_l} + Y_{i_1 i_2 \ldots i_l} A_0 - A_0 Y_{i_1 i_2 \ldots i_l} = \\ = \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=r \\ \rho_1(l_1)\cdot\ldots\cdot\rho_s(l_s)\neq 0}} A_{\kappa_1(j_1-l_1)\ldots\kappa_s(j_s-l_s)}(t) Y_{\kappa_1(l_1)\ldots\kappa_s(l_s)}(t) - \\ - \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=r \\ \rho_1(l_1)\cdot\ldots\cdot\rho_s(l_s)\neq 0}} Y_{\kappa_1(l_1)\ldots\kappa_s(l_s)}(t) A_{\kappa_1(j_1-l_1)\ldots\kappa_s(j_s-l_s)}. \quad (1.2.10)$$

Здесь целые числа $l_1, \ldots, l_s$ могут принимать значения от нуля до r включительно. Матрицу $A_{i_1\ldots i_l}$ определим из условия равенства нулю среднего значения выражения, стоящего в правой части (1.2.10). Именно,

$$A_{i_1\ldots i_l} = \mathrm{M}\left[\sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+\ldots+l_s=r \\ \rho_1(l_1)\cdot\ldots\cdot\rho_s(l_s)\neq 0}} A_{\kappa_1(j_1-l_1)\ldots\kappa_s(j_s-l_s)}(t) Y_{\kappa_1(l_1)\ldots\kappa_s(l_s)}(t)\right]. \quad (1.2.11)$$

Здесь и всюду далее символом $\mathrm{M}[\,\cdot\,]$ обозначается среднее значение периодической или почти периодической матрицы $F(t)$:

$$\mathrm{M}\big[F(t)\big] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s)ds.$$

Решение $Y_{i_1 i_2 \ldots i_l}(t)$ уравнения (1.2.10) ищем в виде

$$Y_{i_1 i_2 \ldots i_l}(t) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \quad \lambda_j \neq 0, \quad (1.2.12)$$

где постоянные матрицы $\beta_j^{(i_1\ldots i_l)}$ подлежат определению. Подставим выражение (1.2.12) в формулу (1.2.10) и, пользуясь тем фактом, что элементами матриц $A_{\kappa_1(j_1-l_1)\ldots\kappa_s(j_s-l_s)}(t)$ и $Y_{\kappa_1(l_1)\ldots\kappa_s(l_s)}(t)$ являются тригонометрические многочлены, приравняем слагаемые при одинаковых показателях экспоненты. Получим следующие матричные уравнения:

$$\big(\mathrm{i}\lambda_j I - A_0\big)\beta_j^{(i_1\ldots i_l)} + \beta_j^{(i_1\ldots i_l)} A_0 = \Upsilon_j^{(i_1\ldots i_l)}, \quad j = 1, \ldots, N.$$

Каждое из этих уравнений однозначно разрешимо в силу вещественности спектра матрицы A_0 и леммы 1.2.1. Теорема доказана. ■

Следствие 1.2.1. *Для матрицы $R_1(t)$ в системе* (1.2.6) *имеет место следующая асимптотическая оценка при $t \to \infty$:*

$$R_1(t) = O\big(|R(t)|\big) + O\Big(\sum_{i=1}^{n} |\dot{v}_i(t)|\Big) + O\Big(\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_{k+1}\le n} |v_{i_1}(t)|\cdot\ldots\cdot|v_{i_{k+1}}(t)|\Big). \tag{1.2.13}$$

Доказательство. Следует из равенства (1.2.8) с учетом свойства В.2, ограниченности по норме матриц $Y_{i_1 i_2 \ldots i_l}(t)$ и ограниченности по норме матрицы, обратной к (1.2.9). ■

Замечание 1. Условие вещественности спектра матрицы A_0 не является ограничительным. Если у матрицы A_0 есть комплексные собственные значения и она имеет жорданову нормальную форму, то произведем в системе (1.2.3) замену переменных

$$x = \exp\{\mathfrak{i}\Im t\}y, \tag{1.2.14}$$

где $\Im$ — диагональная матрица, составленная из мнимых частей собственных значений матрицы A_0. Эта замена с ограниченными по t коэффициентами переводит матрицу A_0 в матрицу $A_0 - \mathfrak{i}\Im$, у которой все собственные значения вещественны. При этом замена (1.2.14) не изменяет структуру системы (1.2.3).

Замечание 2. Теорема 1.2.1 остается справедливой и тогда, когда матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ в системе (1.2.3) являются периодическими с одним и тем же периодом $T > 0$. В этой ситуации матрицы $Y_{i_1\ldots i_l}(t)$ в замене (1.2.5) также являются T-периодическими и определяются как решения уравнений (1.2.10) с нулевым средним значением. В этом случае оказывается возможным ослабить требование теоремы относительно спектра матрицы A_0 (см. [5, 7, 80]). Именно, у матрицы A_0 не должно быть собственных чисел, связанных соотношением

$$\lambda_r - \lambda_p = \frac{2\pi q\mathfrak{i}}{T}, \qquad r,p = 1,\ldots,m, \quad q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}. \tag{1.2.15}$$

Замену вида (1.2.5) называют *усредняющей заменой* переменных, а систему (1.2.6) — *усредненной* системой. Используя формулу (1.2.11), несложно убедиться в том, что матрицы первого и второго приближений в усредненной системе определяются следующим образом:

$$A_i = \mathrm{M}\big[A_i(t)\big], \qquad i = 1,\ldots,n. \tag{1.2.16}$$

Далее,

$$A_{ij} = \mathrm{M}\big[A_{ij}(t) + A_i(t)Y_j(t) + A_j(t)Y_i(t)\big], \quad 1 \le i < j \le n \tag{1.2.17}$$

и

$$A_{ii} = \mathrm{M}\big[A_{ii}(t) + A_i(t)Y_i(t)\big], \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.2.18}$$

В этих формулах матрицы $Y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ определяются как решения матричных уравнений

$$\dot{Y}_i + Y_i A_0 - A_0 Y_i = A_i(t) - A_i \tag{1.2.19}$$

с нулевым средним значением. Отметим также, что для определения матриц вида $Y_{\kappa(j)}(t)$ и $A_{\kappa(j)}$ несколько упрощается форма записи уравнений (1.2.10). Именно,

$$\frac{dY_{\kappa(j)}(t)}{dt} + Y_{\kappa(j)}(t)A_0 - A_0 Y_{\kappa(j)}(t) = \sum_{l=0}^{j-1} A_{\kappa(j-l)}(t)Y_{\kappa(l)}(t) - \sum_{l=0}^{j-1} Y_{\kappa(l)}(t)A_{\kappa(j-l)}, \tag{1.2.20}$$

где $j = 1, \ldots, k$, и $\kappa = 1, 2, \ldots, n$. Формула (1.2.11) для определения постоянных матриц принимает тогда следующий вид:

$$A_{\kappa(j)} = \mathrm{M}\Big[\sum_{l=0}^{j-1} A_{\kappa(j-l)}(t)Y_{\kappa(l)}(t)\Big], \quad j = 1, \ldots, k. \tag{1.2.21}$$

При осуществлении усредняющих замен переменных (1.2.5) полезно иметь ввиду следующее их свойство (см. [7, 33]).

Теорема 1.2.2. *Пусть в системе* (1.2.3)

$$\mathrm{M}\Big[\operatorname{tr} A_{i_1 \ldots i_l}(t)\Big] = 0, \quad 1 \le i_1 \le \ldots \le i_l \le n, \quad l \le k.$$

Тогда все матрицы $A_{i_1 \ldots i_l}$ в усредненной системе (1.2.6) *имеют нулевой след, т. е.*

$$\operatorname{tr} A_{i_1 \ldots i_l} = 0, \quad 1 \le i_1 \le \ldots \le i_l \le n, \quad l \le k.$$

Замены вида (1.2.5) сохраняют также некоторые свойства, которыми обладают матрицы A_0, $A_{i_1 \ldots i_l}(t)$ в исходной системе (1.2.3) и которые наследуются матрицами $A_{i_1 \ldots i_l}$ в усредненной системе (1.2.6). Именно, пусть $\mathcal{P}$ — линейный непрерывный оператор, определенный на пространстве $(m \times m)$ комплексных матриц и переводящий это пространство в себя. Предположим, что оператор $\mathcal{P}$ не зависит от переменной t и обладает следующим свойством:

- для любых матриц A_1 и A_2 имеет место равенство

$$\mathcal{P}(A_1 A_2) = \mathcal{P}(A_1)\mathcal{P}(A_2). \tag{1.2.22}$$

Кроме того, в силу линейности и непрерывности оператор $\mathcal{P}$ обладает следующими дополнительными свойствами:

- если матрица $A(t)$ имеет вид (1.2.4), то и матрица $\mathcal{P}\big(A(t)\big)$ является матрицей вида (1.2.4);

- если матрица $A(t)$ имеет в точке t производную, то и матрица $\mathcal{P}\big(A(t)\big)$ имеет в этой точке производную и, кроме того,

$$\mathcal{P}\Big(\frac{dA}{dt}\Big) = \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{P}\big(A(t)\big)\Big); \tag{1.2.23}$$

- если матрица $A(t)$ интегрируема на отрезке $[t_1, t_2]$, то и матрица $\mathcal{P}\big(A(t)\big)$ интегрируема на этом отрезке, и, кроме того,

$$\mathcal{P}\Big(\int\limits_{t_1}^{t_2} A(s)ds\Big) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}\big(A(s)\big)ds. \tag{1.2.24}$$

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.2.1. *Пусть в системе* (1.2.3) *матрица A_0, а также все матрицы $A_{i_1\dots i_l}(t)$, $l \le k$, инвариантны относительно оператора $\mathcal{P}$, т. е.*

$$\mathcal{P}(A_0) = A_0, \quad \mathcal{P}\big(A_{i_1\dots i_l}(t)\big) = A_{i_1\dots i_l}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2.25}$$

Тогда все матрицы $A_{i_1\dots i_l}$ в усредненной системе (1.2.6) *также инвариантны относительно оператора $\mathcal{P}$, т. е.*

$$\mathcal{P}(A_{i_1\dots i_l}) = A_{i_1\dots i_l}, \quad 1 \le i_1 \le \dots \le i_l \le n, \quad l \le k. \tag{1.2.26}$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по числу l в наборе индексов $(i_1 i_2 \dots i_l)$. Пусть $l = 1$, тогда матрицы A_i определяются согласно формуле (1.2.16). В силу (1.2.24), (1.2.25) и непрерывности оператора $\mathcal{P}$ заключаем, что

$$\mathcal{P}(A_i) = \mathcal{P}\big(\mathrm{M}\big[A_i(t)\big]\big) = \mathrm{M}\big[\mathcal{P}\big(A_i(t)\big)\big] = \mathrm{M}\big[A_i(t)\big] = A_i, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Оказывается, что матрицы $Y_i(t)$, являющиеся решениями уравнений (1.2.19) с нулевым средним значением, также оказываются инвариантными относительно оператора $\mathcal{P}$. Очевидно, что элементами матрицы $\mathcal{P}\big(Y_i(t)\big)$ являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением. Покажем, что эта матрица удовлетворяет уравнению (1.2.19). Имеем,

$$\frac{d}{dt}\big(\mathcal{P}(Y_i)\big) + \mathcal{P}(Y_i)A_0 - A_0\mathcal{P}(Y_i) = \mathcal{P}\big(\dot{Y}_i\big) + \mathcal{P}(Y_i)\mathcal{P}(A_0) - \mathcal{P}(A_0)\mathcal{P}(Y_i) =$$
$$= \mathcal{P}\big(\dot{Y}_i + Y_iA_0 - A_0Y_i\big) = \mathcal{P}\big(A_i(t) - A_i\big) = A_i(t) - A_i.$$

Здесь мы воспользовались равенствами (1.2.22), (1.2.23), (1.2.25), линейностью оператора $\mathcal{P}$, а также инвариантностью правой части уравнения (1.2.19) относительно оператора $\mathcal{P}$. Таким образом, матрица $\mathcal{P}\big(Y_i(t)\big)$ наряду с матрицей $Y_i(t)$ является решением уравнения (1.2.19) с нулевым средним значением. В силу единственности такого решения (см. теорему 1.2.1) заключаем, что

$$\mathcal{P}\big(Y_i(t)\big) = Y_i(t), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Предположим далее, что все матрицы $A_{i_1 \ldots i_j}$ и $Y_{i_1 \ldots i_j}(t)$ при $j \leq l-1$ инвариантны относительно оператора $\mathcal{P}$. Установим инвариантность матриц $A_{i_1 \ldots i_l}$ и $Y_{i_1 \ldots i_l}(t)$ относительно этого оператора. Это делается совершенно аналогично случаю $l = 1$. Достаточно рассмотреть формулы (1.2.10), (1.2.11), учесть равенства (1.2.25) и воспользоваться свойствами оператора $\mathcal{P}$, а также предположением индукции. ■

В качестве примеров использования утверждения 1.2.1 рассмотрим следующие случаи, которые возникают в задачах, рассматриваемых в этой работе. Ниже мы будем предполагать, что оператор $\mathcal{P}$, заданный на пространстве комплексных матриц, рассматривается над полем $\mathbb{R}$. Предположим сначала, что $m = 2$ и определим оператор $\mathcal{P}$ на пространстве комплексных (2×2)-матриц следующим образом:

$$\mathcal{P}(A) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{22} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

где символом $\bar{z}$ обозначено число, комплексно сопряженное к z. Простая проверка показывает, что оператор $\mathcal{P}$ обладает всеми требуемыми свойствами. Легко видеть, что инвариантные относительно оператора $\mathcal{P}$ матрицы имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} \end{pmatrix}. \tag{1.2.27}$$

Пусть теперь $m = 3$ и оператор $\mathcal{P}$ на пространстве комплексных (3×3) матриц задается формулой

$$\mathcal{P}(A) = \begin{pmatrix} \bar{a}_{22} & \bar{a}_{21} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{32} & \bar{a}_{31} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{P}$ вновь обладает всеми необходимыми свойствами, а инвариантные относительно оператора $\mathcal{P}$ матрицы имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{11} & \bar{a}_{13} \\ a_{31} & \bar{a}_{31} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad a_{33} \in \mathbb{R}. \tag{1.2.28}$$

Завершая разговор про усредняющие замены вида (1.2.5), отметим, что они существенно упрощают процесс приведения исходной системы к L–диагональному виду и, как следствие, задачу построения асимптотики решений. Действительно, усредненная система (1.2.6) в главной части не содержит, вообще говоря, осциллирующих коэффициентов, и в этом смысле она проще системы (1.2.3). В частности, для приведения системы (1.2.6) к L–диагональному виду во многих случаях удается воспользоваться леммой 1.1.1. Именно, если матрица A_0 удовлетворяет условию A.1 предыдущего раздела, то система (1.2.6) имеет вид (1.1.1), и, следовательно, может быть приведена к L–диагональной форме. Другой важный с практической точки зрения случай возникает в ситуации, когда $A_0 = 0$. Предположим, что в главной части системы (1.2.6) можно выделить так называемый ведущий член, и этим членом является матрица $Av_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_s}(t)$. Это означает, что систему (1.2.6) можно записать в виде

$$\dot{y} = \big[A + V(t)\big] v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_s}(t) y + R_1(t) y. \tag{1.2.29}$$

Здесь A — это либо матрица $A_{i_1 \ldots i_s}$, либо сумма некоторого числа постоянных матриц $A_{i_1 \ldots i_l}$, а матрица $V(t)$ удовлетворяет условиям A.2, A.3. Если оказывается, что матрица A удовлетворяет условию A.1, то матрица $A + V(t)$ в силу леммы 1.1.1 диагонализируема. В этом случае система (1.2.29) заменой $y = C(t)z$, где $C(t)$ — матрица из леммы 1.1.1, приводится к L–диагональному виду.

В ситуации, когда матрица A_0 в системе (1.2.6) или матрица A в системе (1.2.29) имеют кратные собственные числа, задача получения асимптотических формул, разумеется, затрудняется. Здесь, как правило, требуется проводить некоторые специальные преобразования, для которых может потребоваться более детальная информация об остаточном члене $R_1(t)$.

1.3 Усредняющая замена типа Крылова–Боголюбова

Нелинейным аналогом системы с колебательно убывающими коэффициентами (1.2.3) в случае нулевой матрицы A_0 является система *с исчезающей на бесконечности главной частью*:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} F_i(t,x) v_i(t) + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} F_{i_1 i_2}(t,x) v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} F_{i_1 \ldots i_k}(t,x) v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) + R(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^m. \tag{1.3.1}$$

Здесь $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, которые удовлетворяют условиям B.2 — B.4 раздела 1.2. Функции $F_{i_1 \ldots i_l}(t,x)$ предполагаются T–

периодическими по переменной t или представляют собой тригонометрические полиномы вида

$$F_{i_1\dots i_l}(t,x)=\sum_{j=1}^{M}F_j^{(i_1\dots i_l)}(x)e^{\mathrm{i}\lambda_j t}. \tag{1.3.2}$$

По переменной x функции $F_{i_1\dots i_l}(t,x)$ предполагаются достаточно гладкими в некотором шаре $|x|\le S$. Относительно вектор–функции $R(t,x)$ предполагаются выполненными следующие условия:

С.1. $|R(t,x_1)-R(t,x_2)|\le\gamma(t)|x_1-x_2|$, $|x_j|\le S$, $j=1,2$, где $\gamma(t)\in L_1[t_0,\infty)$.

С.2. $R(t,0)\in L_1[t_0,\infty)$.

Следующий результат является аналогом усредняющей замены Крылова–Боголюбова (см., например, [4,5,80,161]) применительно к системам с исчезающей на бесконечности главной частью.

Теорема 1.3.1. *Система* (1.3.1) *при достаточно больших t заменой*

$$x=y+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,y)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}u_{i_1i_2}(t,y)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\dots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n}u_{i_1\dots i_k}(t,y)v_{i_1}(t)\cdot\dots\cdot v_{i_k}(t) \tag{1.3.3}$$

приводится к виду

$$\dot y=\sum_{i=1}^{n}P_i(y)v_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}P_{i_1i_2}(y)v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)+\dots+ \\ +\sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n}P_{i_1\dots i_k}(y)v_{i_1}(t)\cdot\dots\cdot v_{i_k}(t)+R_1(t,y),\qquad y\in\mathbb{R}^m, \tag{1.3.4}$$

где функции $u_{i_1\dots i_l}(t,y)$ являются или периодическими вектор-функциями по переменной t, или тригонометрическими многочленами типа (1.3.2)*, имеющими нулевое среднее значение по t. Вектор–функция $R_1(t,y)$ удовлетворяет условиям С.1, С.2, где $x_j=y_j$ и $|y_j|\le r<S$, $j=1,2$.*

Доказательство. Подставим (1.3.3) в (1.3.1) и учтем (1.3.4). Получим

$$\left[I+\sum_{i=1}^{n}v_i(t)\frac{\partial u_i}{\partial y}+\dots+\sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\dots\cdot v_{i_k}(t)\frac{\partial u_{i_1\dots i_k}}{\partial y}\right]\times \\ \times\left[\sum_{i=1}^{n}P_i(y)v_i(t)+\dots+\sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n}P_{i_1\dots i_k}(y)v_{i_1}(t)\cdot\dots\cdot v_{i_k}(t)+R_1(t,y)\right]+ \\ +\sum_{i=1}^{n}\dot v_i(t)u_i(t,y)+\sum_{i=1}^{n}v_i(t)\frac{\partial u_i(t,y)}{\partial t}+\dots+$$

$$+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}\frac{d}{dt}\Big(v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big)u_{i_1\ldots i_k}(t,y)+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\times$$

$$\times\frac{\partial u_{i_1\ldots i_k}}{\partial t}=\sum_{i=1}^{n}v_i(t)F_i\Big(t,y+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,y)v_i(t)+\ldots+$$

$$+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}u_{i_1\ldots i_k}(t,y)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big)+\ldots+$$

$$+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)F_{i_1\ldots i_k}\Big(t,y+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,y)v_i(t)+\ldots+$$

$$+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}u_{i_1\ldots i_k}(t,y)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big)+R\Big(t,y+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,y)v_i(t)+\ldots+$$

$$+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}u_{i_1\ldots i_k}(t,y)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big).\quad(1.3.5)$$

Раскладывая функции $F_{i_1\ldots i_j}(t,\cdot)$ по формуле Тейлора, соберем слагаемые при одинаковых произведениях $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$, $l\le k$. Тогда для определения функций $u_{i_1\ldots i_l}(t,y)$ и $P_{i_1\ldots i_l}(y)$ получим однотипные уравнения следующего вида:

$$\frac{\partial u_i(t,y)}{\partial t}=F_i(t,y)-P_i(y),\quad i=1,\ldots,n,$$

$$\frac{\partial u_{ii}(t,y)}{\partial t}=\frac{\partial F_i(t,y)}{\partial y}u_i(t,y)+F_{ii}(t,y)-\frac{\partial u_i(t,y)}{\partial y}P_i(y)-P_{ii}(y),\quad i=1,\ldots,n,$$

$$\frac{\partial u_{ij}(t,y)}{\partial t}=\frac{\partial F_i(t,y)}{\partial y}u_j(t,y)+\frac{\partial F_j(t,y)}{\partial y}u_i(t,y)+F_{ij}(t,y)-$$

$$-\frac{\partial u_i(t,y)}{\partial y}P_j(y)-\frac{\partial u_j(t,y)}{\partial y}P_i(y)-P_{ij}(y),\qquad i<j,$$

$$\ldots\quad\ldots$$

$$\frac{\partial u_{i_1\ldots i_k}(t,y)}{\partial t}=G_{i_1\ldots i_k}(t,y)-P_{i_1\ldots i_k}(y).$$

На каждом этапе мы получаем уравнения с правой частью, в которую входят уже определенные нами ранее функции $u_{i_1\ldots i_s}(t,y)$ и $P_{i_1\ldots i_s}(y)$. Вектор-функции $P_{i_1\ldots i_l}(y)$ определим из условия равенства нулю среднего значения правой части соответствующего уравнения. В частности,

$$P_i(y)=\mathop{\mathrm{M}}_t\big[F_i(t,y)\big]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F_i(t,y)dt,\qquad i=1,\ldots,n.$$

Далее,

$$P_{ii}(y)=\mathop{\mathrm{M}}_t\Big[\frac{\partial F_i(t,y)}{\partial y}u_i(t,y)+F_{ii}(t,y)\Big],\qquad i=1,\ldots,n,$$

$$P_{ij}(y)=\mathop{\mathrm{M}}_t\Big[\frac{\partial F_i(t,y)}{\partial y}u_j(t,y)+\frac{\partial F_j(t,y)}{\partial y}u_i(t,y)+F_{ij}(t,y)\Big],\quad 1\le i<j\le n,$$

$$\ldots\quad\ldots$$

$$P_{i_1\dots i_k}(y) = \mathop{\mathrm{M}}_{t}\Big[G_{i_1\dots i_k}(t,y)\Big].$$

Уравнения для $u_{i_1\dots i_l}(t,y)$, таким образом, будут однозначно разрешимы в интересующем нас классе (периодических функций или тригонометрических полиномов по переменной t). Заметим, что однозначность в выборе таких функций является следствием нашего требования о том, чтобы функции $u_{i_1\dots i_l}(t,y)$ имели нулевое среднее значение по t.

Матрица

$$\left[I + \sum_{i=1}^{n} v_i(t)\frac{\partial u_i}{\partial y} + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\frac{\partial u_{i_1\dots i_k}}{\partial y}\right]$$

обратима при $t \ge t_0$, $|y| \le S$. Кроме того, обратная к ней матрица допускает представление в виде равномерно сходящегося по $t \ge t_0$ и $|y| \le S$ ряда

$$W(t,y) = \Big(I - A(t,y)\Big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k(t,y), \tag{1.3.6}$$

где

$$A(t,y) = -\left[\sum_{i=1}^{n} v_i(t)\frac{\partial u_i}{\partial y} + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\frac{\partial u_{i_1\dots i_k}}{\partial y}\right].$$

В выражении (1.3.5) соберем оставшиеся слагаемые и выразим из полученного равенства вектор-функцию $R_1(t,y)$. Имеем

$$\begin{aligned} R_1(t,y) = \Big(I - A(t,y)\Big)^{-1}\Bigg[&\sum_{i=1}^{n} \dot v_i(t)u_i(t,y) + \ldots + \\ &+ \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} \frac{d}{dt}\Big(v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big)u_{i_1\dots i_k}(t,y) + \\ &+ R\Big(t, y + \sum_{i=1}^{n} u_i(t,y)v_i(t) + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} u_{i_1\dots i_k}(t,y)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big) + \\ &+ G(t,y)\Bigg], \end{aligned} \tag{1.3.7}$$

где $G(t,y)$ — сумма слагаемых вида

$$v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)T_{i_1\dots i_l}(t,y), \quad l > k \quad \text{и} \quad v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_j}(t)\tilde r_{i_1\dots i_j}(t,y).$$

Здесь функция $T_{i_1\dots i_l}(t,y)$ периодична или почти периодична по t и гладкая по y, а величины $\tilde r_{i_1\dots i_j}(t,y)$ суть остаточные члены, возникающие при разложении функций $F_{i_1\dots i_j}(t,\cdot)$ по формуле Тейлора в окрестности точки y. Соответствующие слагаемые допускают оценку вида

$$\tilde r_{i_1\dots i_j}(t,y) = O\Big(\big|h-y\big|^s\Big), \quad s + j > k, \quad t \to \infty,$$

где h — правая часть замены (1.3.3). Очевидно, что в шаре $|y| \le S$ соответствующую оценку можно сделать не зависящей от y. Эти слагаемые удовлетворяют условию Липшица

$$|\tilde{r}_{i_1\dots i_j}(t,y_1) - \tilde{r}_{i_1\dots i_j}(t,y_2)| \le L(t)|y_1 - y_2|,$$

где

$$L(t) = O\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} L_i|v_i(t)| + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} L_{i_1\dots i_k}|v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)|\Big)^s\Big)$$

и $|u_{i_1\dots i_l}(t,y)| \le L_{i_1\dots i_l},\ l \le k$. Осталось установить, что функция $R_1(t,y)$ обладает теми же свойствами, что и исходная функция $R(t,x)$. Действительно, нетрудно заметить, что матрица $W(t,y)$ равномерно ограничена при $t \ge t_0$, $|y| \le S$. Из формулы (1.3.7) тогда следует, что вектор-функция $R_1(t,0)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$, и, следовательно, условие C.2 выполнено. Наконец, осталось убедиться в том, что для функции $R_1(t,y)$ выполнено условие C.1. Для этого достаточно заметить следующее. Пусть $a_1(t,y)$ и $a_2(t,y)$ равномерно ограниченные по t и y функции, удовлетворяющие условию Липшица:

$$|a_j(t,y_1) - a_j(t,y_2)| \le L_j|y_1 - y_2|, \quad t \ge t_0,\ |y_j| \le S, \quad j = 1,2.$$

Тогда произведение $a_1(t,y)a_2(t,y)$ также удовлетворяет условию Липшица

$$|a_1(t,y_1)a_2(t,y_1) - a_1(t,y_2)a_2(t,y_2)| \le \big(L_1M_2 + L_2M_1\big)|y_1 - y_2|, \quad |y_j| \le S,$$

где $|a_j(t,y)| \le M_j,\ j = 1,2,\ t \ge t_0$. Далее заметим, что всегда можно выбрать $t_0 \gg 1$ так, чтобы

$$|A(t,y)| \le q < 1, \qquad t \ge t_0, \quad |y| \le S$$

и

$$|A(t,y_1) - A(t,y_2)| \le q|y_1 - y_2|, \quad |y_j| \le S, \quad j = 1,2.$$

С учетом сделанного выше замечания без труда устанавливается, что

$$|A^n(t,y_1) - A^n(t,y_2)| \le nq^n|y_1 - y_2|, \quad |y_j| \le S, \quad j = 1,2.$$

Тогда из (1.3.6) следует, что

$$|W(t,y_1) - W(t,y_2)| \le \Big(\sum_{n=1}^{\infty} nq^n\Big)|y_1 - y_2|, \quad |y_j| \le S, \quad j = 1,2.$$

Наконец, заметим, что каждое из слагаемых в квадратной скобке в выражении (1.3.7) удовлетворяет условию Липшица по y с некоторой функцией $L = L(t)$, принадлежащей классу $L_1[t_0,\infty)$. Для функции $R(t,y+\ldots)$, в частности, имеем

$$\Big|R\Big(t,y_1+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,y_1)v_i(t)+\ldots+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}u_{i_1\ldots i_k}(t,y_1)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big)-$$

$$-R\Big(t,y_2+\sum_{i=1}^{n}u_i(t,y_2)v_i(t)+\ldots+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}u_{i_1\ldots i_k}(t,y_2)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\Big)\Big|\le$$

$$\le\gamma(t)\Big(1+\sum_{i=1}^{n}L_i|v_i(t)|+\ldots+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}L_{i_1\ldots i_k}|v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)|\Big)|y_1-y_2|,$$

где $|y_j|\le r<S$, $j=1,2$. Таким образом, вектор-функция $R_1(t,y)$ действительно удовлетворяет условию типа C.2, что и завершает доказательство теоремы. ■

Дальнейший анализ усредненной системы (1.3.4) связан с выделением в ней ведущего слагаемого, т. е. с представлением этой системы в виде

$$\dot y=\big[P(y)+V(t,y)\big]v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)+R_1(t,y). \tag{1.3.8}$$

Здесь вектор–функция $V(t,y)$ обладает следующими свойствами:

C.1'. $|V(t,y_1)-V(t,y_2)|\le w(t)|y_1-y_2|$, $|y_j|\le S$, $j=1,2$, где $w(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

C.2'. $V(t,0)\to 0$ при $t\to\infty$.

Предположим, что в системе (1.3.8) может быть осуществлена замена времени

$$\tau=\tau(t)=\int^{t}v_{i_1}(\hat s)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(\hat s)d\hat s, \tag{1.3.9}$$

причем $\tau(t)\to\infty$ при $t\to\infty$ и функция $\tau(t)$ обратима при достаточно больших t. Подобная замена заведомо возможна, если, например, функция $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)$ принимает только положительные значения при достаточно больших t. Система (1.3.8) в новом времени τ приобретает следующий вид:

$$\frac{dy}{d\tau}=P(y)+R_2(\tau,y). \tag{1.3.10}$$

Здесь вектор-функция $R_2(\tau,y)$ наследует свойства вектор-функций $V(t,y)$ и $R_1(t,y)$. Чтобы объединить эти свойства, нам потребуется ввести следующий класс функций.

Определение 1.3.1. *Будем говорить, что локально интегрируемая на* $[t_0,\infty)$ *функция* $f(t)$ *принадлежит классу* $\mathcal{M}_0$ *при* $t\ge t_0$, *если*

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t}^{t+1}|f(s)|ds=0,\qquad t\ge t_0. \tag{1.3.11}$$

Очевидно, что функция $w(t)\to 0$ при $t\to\infty$ и функция $\gamma(t)\in L_1[t_0,\infty)$ принадлежат классу $\mathcal{M}_0$. Теперь мы можем указать свойства, которыми обладает вектор-функция $R_2(\tau,y)$ в системе (1.3.10). Именно,

D.1. $|R_2(\tau, y_1) - R_2(\tau, y_2)| \le p(\tau)|y_1 - y_2|$, $|y_j| \le r < S$, $j = 1, 2$, где $p(t) \in \mathcal{M}_0$.

D.2. $R_2(\tau, 0) \in \mathcal{M}_0$.

В частности, в рассматриваемой нами ситуации

$$p(\tau) = w\big(t(\tau)\big) + \frac{\gamma\big(t(\tau)\big)}{v_{i_1}\big(t(\tau)\big) \cdot \ldots \cdot v_{i_s}\big(t(\tau)\big)},$$
$$R_2(\tau, 0) = V\big(t(\tau), 0\big) + \frac{R_1\big(t(\tau), 0\big)}{v_{i_1}\big(t(\tau)\big) \cdot \ldots \cdot v_{i_s}\big(t(\tau)\big)},$$

где $t = t(\tau)$ — обратная к (1.3.9) функция.

Отметим, что условия B.3, B.4, накладываемые на функции $v_1(t), \ldots, v_n(t)$, а также условия C.1 и C.2 относительно вектор–функции $R(t, x)$ в исходной системе (1.3.1), обусловлены необходимостью приведения усредненной системы (1.3.4) к виду (1.3.10). В ряде случаев эти условия могут быть ослаблены, если мы можем гарантировать возможность сведения системы (1.3.4) к виду (1.3.10), где вектор–функция $R_2(\tau, y)$ удовлетворяет условиям D.1, D.2. В частности, если

$$v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t) = o\big(v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_s}(t)\big)$$

для любого набора индексов $1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_{k+1} \le n$, то от условия B.4 можно отказаться. Такая ситуация имеет место, например, в том случае, когда в системе (1.3.1) присутствует только одна убывающая функция $v_1(t)$.

В следующем разделе мы изучим динамику одного класса решений системы (1.3.10).

1.4 Об одном классе решений систем с исчезающей на бесконечности главной частью

Перед тем, как сформулировать основной результат этого раздела, нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения. Рассмотрим линейную неоднородную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \qquad x \in \mathbb{R}^m, \tag{1.4.1}$$

где матрица $A(t)$ непрерывна при $t \ge 0$ и $f(t)$ — локально интегрируемая при $t \ge t_0$ вектор-функция. Предположим, что соответствующая однородная система

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.4.2}$$

обладает экспоненциальной дихотомией на полуоси $t \ge 0$, т.е. существуют проекторы P_1 и P_2 ($P_1 + P_2 = I$, $P_k^2 = P_k$, $k = 1, 2$), а также положительные константы K, α такие, что

$$\begin{aligned} |U(t)P_1U^{-1}(s)| &\le Ke^{-\alpha(t-s)}, \qquad 0 \le s \le t, \\ |U(t)P_2U^{-1}(s)| &\le Ke^{-\alpha(s-t)}, \qquad 0 \le t \le s. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Здесь $U(t)$ — матрицант системы (1.4.2) ($U(0) = I$). Матрицу Коши этой системы будем обозначать $U(t,\tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$. Справедлива следующая лемма (см., например, [165]).

Лемма 1.4.1. *Пусть вектор-функция $f(t)$ в системе* (1.4.1) *принадлежит классу $\mathcal{M}_0$. Тогда ограниченные при $t \geq t_0$ решения этой системы стремятся к нулю при $t \to \infty$.*

Доказательство. Как известно (см. [15]), ограниченные при $t \geq t_0$ решения системы (1.4.1) задаются формулой

$$x(t) = U(t)P_1U^{-1}(t_0)x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} G(t,s)f(s)ds, \tag{1.4.4}$$

где

$$G(t,s) = \begin{cases} U(t)P_1U^{-1}(s), & 0 \leq s \leq t, \\ -U(t)P_2U^{-1}(s), & 0 \leq t \leq s, \end{cases} \tag{1.4.5}$$

функция Грина задачи об ограниченных решениях системы (1.4.1). Заметим, что несобственный интеграл в (1.4.4) существует. Действительно,

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} G(t,s)f(s)ds = \int\limits_{t_0}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s)ds - \int\limits_{t}^{\infty} U(t)P_2U^{-1}(s)f(s)ds$$

и

$$\Big|\int\limits_{t}^{\infty} U(t)P_2U^{-1}(s)f(s)ds\Big| \leq \int\limits_{t}^{\infty} |U(t)P_2U^{-1}(s)||f(s)|ds \leq$$

$$\leq K\int\limits_{t}^{\infty} e^{-\alpha(s-t)}|f(s)|ds = K\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\alpha y}|f(t+y)|dy = K\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{k}^{k+1} e^{-\alpha y}|f(t+y)|dy \leq$$

$$\leq K\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha k}\int\limits_{k}^{k+1}|f(t+y)|dy \leq \frac{KN(t)}{1-e^{-\alpha}}, \qquad N(t) = \max_{s\geq t}\int\limits_{s}^{s+1}|f(\tau)|d\tau. \tag{1.4.6}$$

Заметим также, что

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s)ds\Big| \leq \int\limits_{t_0}^{t} |U(t)P_1U^{-1}(s)||f(s)|ds \leq$$

$$\leq K\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|f(s)|ds = K\int\limits_{0}^{t-t_0} e^{-\alpha y}|f(t-y)|dy =$$

$$= K\left[\int\limits_{0}^{n} e^{-\alpha y}|f(t-y)|dy + \int\limits_{n}^{n+\gamma_t} e^{-\alpha y}|f(t-y)|dy\right],$$

где $t = t_0 + n + \gamma_t$, $n \in \{0,1,2,\ldots\}$, $\gamma_t = [0,1)$. Поэтому

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s)ds\Big| \le K\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{k}^{k+1} e^{-\alpha y}|f(t-y)|dy+$$

$$+K\int\limits_{n}^{n+\gamma_t} e^{-\alpha y}|f(t-y)|dy \le K\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\alpha k}\int\limits_{k}^{k+1}|f(t-y)|dy + Ke^{-\alpha n}\int\limits_{n}^{n+\gamma_t}|f(t-y)|dy \le$$

$$\le K\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\alpha k}N(t_0) + Ke^{-\alpha n}\int\limits_{t_0}^{t_0+1}|f(y)|dy \le \frac{KN(t_0)}{1-e^{-\alpha}}. \quad (1.4.7)$$

Из (1.4.6) следует, что

$$\Big|\int\limits_{t}^{\infty} U(t)P_2U^{-1}(s)f(s)ds\Big| \to 0, \qquad t\to\infty,$$

поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s)ds\Big| \to 0, \qquad t\to\infty.$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть t_1 выбрано настолько большим, что

$$\Big|\int\limits_{t_1}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s)ds\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}, \qquad t\ge t_1.$$

Далее,

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s)ds\Big| \le Ke^{-\alpha t}\int\limits_{t_0}^{t_1} e^{\alpha s}|f(s)|ds+$$

$$+\Big|\int\limits_{t_1}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s)ds\Big| \le Ke^{-\alpha t}\int\limits_{t_0}^{t_1} e^{\alpha s}|f(s)|ds + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку первое слагаемое в правой части этой цепочки неравенств стремится к нулю при $t\to\infty$, то окончательно получаем, что

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{t} U(t)P_1U^{-1}(s)f(s)ds\Big| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad t\ge t_2.$$

Поэтому

$$\Big|\int\limits_{t_0}^{\infty} G(t,s)f(s)ds\Big| \to 0, \qquad t\to\infty,$$

а поскольку

$$|x(t)| \le Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)| + \Big|\int\limits_{t_0}^{\infty} G(t,s)f(s)ds\Big|, \qquad t\ge t_0,$$

то лемма доказана. ■

Следствие 1.4.1. *Пусть функция $f(t)$ принадлежит классу $\mathcal{M}_0$ при $t \geq t_0$. Положим*

$$g(t) = \int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|} f(s)ds, \qquad \alpha > 0. \tag{1.4.8}$$

Тогда $g(t) \to 0$ при $t \to \infty$, и, кроме того, если $f(t) \in L_1[t_0, \infty)$, то $g(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Результат, сформулированный в следствии 1.4.1, хорошо известен и может быть найден, например, в книгах [53, Глава XIII], [106, стр. 18–19]).

Замечание 1. В силу следствия 1.4.1 заключаем, что все ограниченные при при $t \geq t_0$ решения системы (1.4.1) принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$, если $f(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Замечание 2. Для функции $g(t)$, определяемой формулой (1.4.8), где $f(t) \in \mathcal{M}_0$ при $t \geq t_0$, имеет место неравенство

$$|g(t)| \leq \frac{2N(t_0)}{1 - e^{-\alpha}}, \qquad N(t) = \max_{s \geq t} \int_{s}^{s+1} |f(\tau)|d\tau. \tag{1.4.9}$$

Нам потребуется также следующий результат (см. [15], с. 160, лемма 2.2).

Утверждение 1.4.1. *Пусть неотрицательная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\varphi(t) \leq Ce^{-\nu(t-t_0)} + M \int_{t_0}^{\infty} e^{-\nu|t-s|} u(s)\varphi(s)ds,$$

где C, M — некоторые положительные постоянные, $u(t) \geq 0$, $t \geq t_0$ и

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{t}^{t+1} u(s)ds = N(t_0) < \infty.$$

Для любого $0 < \mu < \nu$ и $0 < q < 1$ существует такое $\delta > 0$, что если выполняется условие $N(t_0) \leq \delta$, то справедлива оценка

$$\varphi(t) \leq \frac{C}{1-q} e^{-\mu(t-t_0)}, \qquad t \geq t_0.$$

Теперь мы можем перейти к основному результату этого раздела. Рассмотрим систему следующего вида:

$$\dot{x} = F(t, x) + R(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}^m. \tag{1.4.10}$$

Пусть

1. $F(t, 0) = 0$; функция $F(t, x)$ непрерывна по переменной t;

2. $F(t,x) = A(t)x + f(t,x)$, где

$$A(t) = \left.\frac{dF(t,x)}{dx}\right|_{x=0}, \qquad |f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le \omega(r)|x_1 - x_2|,$$
$$\lim_{r\to 0}\omega(r) = 0, \quad |x_j| \le r,\ j = 1,2;$$

3. Линейная система (1.4.2) экспоненциально дихотомична на правой полуоси $t \ge 0$, т. е. выполнены неравенства (1.4.3). Кроме того, пусть $\operatorname{rank} P_1 = k$;

4. Вектор-функция $R(t,x)$ в шаре $|x| \le r$ удовлетворяет условиям D.1 и D.2, т. е.

4а. $|R(t,x_1) - R(t,x_2)| \le p(t)|x_1 - x_2|$, $|x_j| \le r$, $j = 1,2$, где $p(t) \in \mathcal{M}_0$, $t \ge t_0$,

4б. $R(t,0) \in \mathcal{M}_0$ при $t \ge t_0$.

К системам вида (1.4.10) относится, в частности, система (1.3.10), которую мы получили в завершающей части предыдущего раздела. Особенно отметим тот факт, что $x = 0$, вообще говоря, не является решением системы (1.4.10). Справедлива следующая теорема (см. [138]).

Теорема 1.4.1. *Пусть выполнены условия 1 — 4. Тогда при достаточно больших t_0 в некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^m$ существует многообразие $S(t_0)$ размерности k, обладающее свойствами*:

а). Решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) \in S(t_0)$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

б). Решение $x(t)$ с начальным условием $|x(t_0)| \le \hat{\rho}_0$ и $x(t_0) \notin S(t_0)$ покидает r_0–окрестность нуля $|x| \le r_0$ в некоторый момент времени $t^* \ge t_0$.

в). Для решений $x(t)$ и $y(t)$ с начальными условиями $x(t_0)$ и $y(t_0)$, принадлежащими многообразию $S(t_0)$, справедлива оценка

$$|x(t) - y(t)| \le C_\mu e^{-\mu(t-t_0)}|x(t_0) - y(t_0)|, \qquad t \ge t_0,$$

где C_μ — некоторая положительная постоянная, а $\mu \in (0,\alpha)$.

Доказательство. Рассуждения, используемые нами для доказательства этой теоремы, в идейном плане близки к рассуждениям, приведенным в книгах [15, 21] в ситуации, близкой к рассматриваемой в нашей работе.

Систему (1.4.10) запишем в виде

$$\dot{x} = A(t)x + f(t,x) + R(t,x). \tag{1.4.11}$$

Ограниченные при $t \ge t_0$ решения этой системы обязаны удовлетворять интегральному уравнению

$$x(t) = U(t)P_1U^{-1}(t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\big[f(s,x) + R(s,x)\big]ds, \tag{1.4.12}$$

где матричная функция Грина $G(t,s)$ определяется формулой (1.4.5). Справедливо и обратное утверждение: всякое ограниченное при $t \geq t_0$ решение интегрального уравнения (1.4.12) является ограниченным решением системы (1.4.11). Покажем, что для любого достаточно малого

$$x_0 = P_1 U^{-1}(t_0) x(t_0) \tag{1.4.13}$$

при достаточно больших t_0 у этого интегрального уравнения существует единственное ограниченное при $t \geq t_0$ решение. Это решение стремится к нулю при $t \to \infty$. Начальные условия всех таких решений при различных x_0 и определяют соответствующее многообразие $S(t_0)$. Обозначим символом

$$Tx(t) = U(t)x_0 + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\big[f(s,x) + R(s,x)\big]ds, \tag{1.4.14}$$

результат применения оператора T к функции $x(t)$ при фиксированных x_0 и t_0. Будем считать, что оператор T определен на пространстве $C_0[t_0,\infty)$ — непрерывных на промежутке $[t_0,\infty)$ функций, стремящихся к нулю при $t \to \infty$, с введенной на нем нормой

$$\|x\|_{C_0} = \max_{t \geq t_0} |x(t)|. \tag{1.4.15}$$

Наша ближайшая цель заключается в том, чтобы показать, что оператор $T(x_0)$ при достаточно малых x_0 и достаточно большом t_0 переводит некоторый шар $\|x\|_{C_0} \leq r_0$ пространства $C_0[t_0,\infty)$ в себя и является в этом шаре сжимающим. Тогда необходимый результат будет очевидным образом следовать из принципа сжимающих отображений. Очевидно, что оператор T переводит непрерывные функции в непрерывные. Покажем, что функция $(Tx)(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$. Из (1.4.14) с учетом (1.4.13) выводим, что

$$\begin{aligned}|(Tx)(t)| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)| + \Bigg|\int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\big[f(s,x) - f(s,0) + \\ + R(s,x) - R(s,0) + R(s,0)\big]ds\Bigg| \leq Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0)| + K\omega(r)\int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}|x(s)|ds + \\ + K\|x\|_{C_0}\int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}p(s)ds + K\int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}|R(s,0)|ds.\end{aligned} \tag{1.4.16}$$

Заметим, что в силу леммы 1.4.1 последние три слагаемые в правой части этой цепочки неравенств стремятся к нулю при $t \to \infty$. Действительно, $p(t) \in \mathcal{M}_0$ и $R(t,0) \in \mathcal{M}_0$ при $t \geq t_0$. Наконец, $x(t)$ также принадлежит классу $\mathcal{M}_0$, так как $x(t)$ является элементом пространства $C_0[t_0,\infty)$. Следовательно, $(Tx)(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Покажем, что оператор T является сжимающим в некотором шаре $\|x\|_{C_0} \le r_0$. Из (1.4.14) вытекает, что

$$\|Tx - Ty\|_{C_0} \le K \max_{t \ge t_0} \Big\{ \omega(r) \int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|} |x(s) - y(s)| ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|} p(s) |x(s) - y(s)| ds \Big\} \le \left(\frac{2K}{\alpha} \omega(r) + K \max_{t \ge t_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|} p(s) ds \right) \le$$

$$\le \left(\frac{2K}{\alpha} \omega(r) + \frac{2KN(t_0)}{1 - e^{-\alpha}} \right) \|x - y\|_{C_0}, \quad N(t) = \max_{s \ge t} \int_{s}^{s+1} p(\tau) d\tau.$$

Здесь мы воспользовались также неравенством (1.4.9). Поскольку $\omega(r) \to 0$ при $r \to 0$ и $N(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то, выбирая r достаточно малым, а t_0 достаточно большим, мы можем добиться выполнения неравенства

$$\|Tx - Ty\|_{C_0} \le q \|x - y\|_{C_0}, \qquad 0 \le q < 1, \tag{1.4.17}$$

коль скоро $\|x\|_{C_0} \le r_0$ и $\|y\|_{C_0} \le r_0$. Осталось показать, что оператор T переводит шар $\|x\|_{C_0} \le r_0$ в себя. Заметим, что

$$\|Tx\|_{C_0} \le \|Tx - T0\|_{C_0} + \|T0\|_{C_0}.$$

Для того чтобы оценить величину $\|T0\|_{C_0}$ заметим, что из первого неравенства в (1.4.3) следует

$$|U(t) P_1 z| \le K e^{-\alpha(t-s)} |U(s) z|, \qquad 0 \le s \le t,$$

для любого $z \in \mathbb{R}^m$. Полагая в этом неравенстве $z = x_0$ и замечая, что $P_1 x_0 = x_0$ в силу (1.4.13), получаем оценку

$$|U(t) x_0| \le K e^{-\alpha(t-t_0)} |U(t_0)| |x_0|, \qquad 0 \le t_0 \le t. \tag{1.4.18}$$

Тогда из (1.4.14) следует, что

$$\|T0\|_{C_0} \le K |U(t_0)| |x_0| + \max_{t \ge t_0} \int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|} |R(s, 0)| ds$$

и поэтому с учетом (1.4.9) может быть сделано сколько угодно малым, если $|x_0| \le \rho_0$ и t_0 достаточно велико. В частности, можно считать, что

$$\|T0\|_{C_0} \le (1 - q) r_0.$$

Но тогда

$$\|Tx\|_{C_0} \le q \|x\|_{C_0} + (1 - q) r_0 \le q r_0 + (1 - q) r_0 = r_0, \tag{1.4.19}$$

и поэтому оператор T переводит шар $\|x\|_{C_0} \le r_0$ в себя, если только $|x_0| \le \rho_0$ и начальный момент времени t_0 достаточно велик.

Итак, нами установлено, что для любого $|x_0| \le \rho_0$ у интегрального уравнения (1.4.12), а следовательно, и у системы (1.4.11) существует и единственно ограниченное при $t \ge t_0$ решение. Это решение стремится к нулю при $t \to \infty$ и удовлетворяет условию (1.4.13). Начальные условия $x(t_0)$ всех таких решений при различных $|x_0| \le \rho_0$ и образуют многообразие $S(t_0)$. Именно, пусть $x(t, x_0)$ искомое решение уравнения (1.4.12), подчиняющееся условию (1.4.13). Выбирая в (1.4.12) $t = t_0$, положим

$$z(x_0) = x(t_0, x_0) = U(t_0)x_0 + \int_{t_0}^{\infty} G(t,s)\big[f\big(s, x(s,x_0)\big) + R\big(s, x(s,x_0)\big)\big]ds. \tag{1.4.20}$$

Тогда

$$S(t_0) = \big\{z \in \mathbb{R}^m \;\big|\; z = z(x_0),\ |x_0| \le \rho_0\big\}, \tag{1.4.21}$$

где $t_0 \gg 1$. Для установления k–мерности многообразия $S(t_0)$ достаточно показать, что соответствующее многообразие гомеоморфно некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^k$. Заметим, что в силу (1.4.13) переменная x_0 принадлежит k–мерному линейному подпространству $P_1\mathbb{R}^m$ пространства $\mathbb{R}^m$. Установим сначала справедливость утверждения в) данной теоремы.

Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — решения интегрального уравнения (1.4.12), отвечающие условиям

$$x_0 = P_1U^{-1}(t_0)x(t_0), \quad y_0 = P_1U^{-1}(t_0)y(t_0) \tag{1.4.22}$$

соответственно. Вычитая одно решение из другого и проводя уже знакомые нам оценки, получаем

$$|x(t) - y(t)| \le Ke^{-\alpha(t-t_0)}|x(t_0) - y(t_0)| + K\int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}\big(\omega(r_0) + p(s)\big)|x(s) - y(s)|ds.$$

Воспользуемся утверждением 1.4.1, полагая $u(s) = \omega(r_0) + p(s)$. Поскольку значение величины $N(t_0)$ может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора достаточно большого t_0 и достаточно малого r_0, окончательно заключаем, что

$$|x(t) - y(t)| \le C_\mu e^{-\mu(t-t_0)}|x(t_0) - y(t_0)|, \qquad t \ge t_0.$$

Из (1.4.12) с учетом (1.4.18), (1.4.22) следует также, что

$$|x(t) - y(t)| \le Ke^{-\alpha(t-t_0)}|U(t_0)||x_0 - y_0| + K\int_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}\big(\omega(r_0) + p(s)\big)|x(s) - y(s)|ds.$$

Следовательно,

$$|x(t) - y(t)| \le \hat{C}_\mu(t_0) e^{-\mu(t-t_0)} |x_0 - y_0|, \qquad t \ge t_0. \tag{1.4.23}$$

Из неравенства (1.4.23) при $t = t_0$ с учетом (1.4.20) выводим, что

$$|z(x_0) - z(y_0)| \le \hat{C}_\mu(t_0) |x_0 - y_0|, \quad |x_0|, |y_0| \le \rho_0.$$

Таким образом, функция $z(x_0)$, как функция, действующая из некоторой окрестности нуля k–мерного линейного подпространства $P_1\mathbb{R}^m$, непрерывна. Наконец, заметим, что в силу (1.4.22) обратная функция $x_0 = x_0(z)$ определяется формулой

$$x_0(z) = P_1 U^{-1}(t_0) z,$$

и, очевидно, также является непрерывной функцией, переводящей многообразие (1.4.21) в некоторую окрестность нуля k–мерного линейного подпространства $P_1\mathbb{R}^m$. Таким образом, нами показано, что $S(t_0)$ действительно является k–мерным многообразием.

Утверждение б) теоремы устанавливается совсем просто. Пусть $x(t)$ — ограниченное при $t \ge t_0$ решение системы (1.4.11), удовлетворяющее условиям $|x|_{C_0} \le r_0$, $|x(t_0)| \le \hat{\rho}_0$, и такое, что $x(t_0) \notin S(t_0)$. Предположим, что величина $\hat{\rho}_0$ настолько мала, что $|x_0| \le \rho_0$, где x_0 определяется формулой (1.4.13). Тогда это решение обязано удовлетворять интегральному уравнению (1.4.12) с условием (1.4.13). Но для любого $|x_0| \le \rho_0$ уравнение (1.4.12) имеет единственное ограниченное при $t \ge t_0$ решение, удовлетворяющее условию (1.4.13) и целиком лежащее в r_0–окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^m$. Начальное условие $x(t_0)$ этого решения обязательно принадлежит многообразию $S(t_0)$. Последнее противоречит нашему предположению о том, что $x(t_0) \notin S(t_0)$. Поэтому любое решение такое, что $|x(t_0)| \le \hat{\rho}_0$ и $x(t_0) \notin S(t_0)$, обязательно покидает r_0–окрестность нуля пространства $\mathbb{R}^m$ в некоторый момент времени $t^* \ge t_0$.

Теорема доказана. ■

Замечание 1. Если $P_1 = I$, то из теоремы 1.4.1 следует, что все решения системы (1.4.10) с начальными условиями $x(t_0)$ из некоторой окрестности нуля пространства $\mathbb{R}^m$ и $t_0 \gg 1$ стремятся к нулю при $t \to \infty$. Кроме того, каждое такое решение является асимптотически и равномерно устойчивым.

Замечание 2. Если $P_1 = 0$, то соответствующее многообразие $S(t_0)$ вырождается в точку и, таким образом, у системы (1.4.10) существует единственное решение, стремящееся к нулю при $t \to \infty$. Очевидно, что это решение неустойчиво.

Иногда в приложениях требуется оценить скорость стремления к нулю решений системы (1.4.10) при $t \to \infty$ с начальными условиями, принадлежащими многообразию $S(t_0)$. Определим следующее условие:

4б'. $|R(t,0)| \le \varphi(t)$ при $t \ge t_0$. Здесь функция $\varphi(t) > 0$ монотонно убывает при $t \ge t_0$ и стремится к нулю при $t \to \infty$. Кроме того, существует $\beta \in (0, \alpha)$ такое, что

$$\varphi(t_1)e^{\beta t_1} \le \varphi(t_2)e^{\beta t_2}, \qquad t_0 \le t_1 \le t_2. \tag{1.4.24}$$

Теорема 1.4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1.4.1, а условие 4б заменено условием 4б'. Тогда справедливы все утверждения теоремы 1.4.1 и, дополнительно, существует такое $L > 0$, что все решения системы* (1.4.10) *с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$ при достаточно больших t_0 допускают следующую оценку:*

$$|x(t)| \le L\varphi(t), \qquad t \ge t_0. \tag{1.4.25}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы повторяет основные этапы доказательства теоремы 1.4.1. В качестве области определения оператора T, определяемого формулой (1.4.14), выберем множество

$$\mathcal{W} = \big\{x(t) \in C_0[t_0, \infty) : \ |x(t)| \le L\varphi(t), \ t \ge t_0\big\}. \tag{1.4.26}$$

Множество $\mathcal{W}$ с нормой (1.4.15) является банаховым пространством. Константу $L > 0$ и величину t_0 в определении этого множества выберем позднее. Покажем, что оператор T переводит пространство $\mathcal{W}$ в себя при подходящем выборе этих величин. Из (1.4.14) с учетом (1.4.16), (1.4.18) и (1.4.25) следует, что

$$|(Tx)(t)| \le Ke^{-\alpha(t-t_0)}|U(t_0)||x_0| + KL\omega(r)\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}\varphi(s)ds + \\ + KL\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}p(s)\varphi(s)ds + K\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}\varphi(s)ds, \tag{1.4.27}$$

коль скоро $|x|_{C_0} \le r$. Далее, учитывая (1.4.24) и монотонное стремление к нулю функции $\varphi(t)$, имеем,

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}\varphi(s)ds = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\varphi(s)ds + \int\limits_{t}^{\infty} e^{-\alpha(s-t)}\varphi(s)ds \le$$

$$\leq \varphi(t)\int\limits_{t_0}^{t} e^{(\beta-\alpha)(t-s)}ds + \varphi(t)\int\limits_{t}^{\infty} e^{-\alpha(s-t)}ds \leq \left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)\varphi(t).$$

Аналогично выводим

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}p(s)\varphi(s)ds = \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}p(s)\varphi(s)ds + \int\limits_{t}^{\infty} e^{-\alpha(s-t)}p(s)\varphi(s)ds \leq$$

$$\leq \varphi(t)\int\limits_{t_0}^{t} e^{(\beta-\alpha)(t-s)}p(s)ds + \varphi(t)\int\limits_{t}^{\infty} e^{-\alpha(s-t)}p(s)ds \leq \left(\frac{1}{1-e^{\beta-\alpha}}+\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right)N(t_0)\varphi(t).$$

Здесь мы учли оценки (1.4.6), (1.4.7) а функцию $N(t)$ определили согласно формуле

$$N(t) = \max_{s\geq t}\int\limits_{s}^{s+1} p(\tau)d\tau.$$

Наконец, вновь используя (1.4.24), заключаем, что

$$e^{-\alpha(t-t_0)} = e^{-\alpha(t-t_0)}\frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t_0)} \leq e^{(\beta-\alpha)(t-t_0)}\frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)} \leq \frac{\varphi(t)}{\varphi(t_0)}.$$

Учитывая полученные неравенства в (1.4.27), приходим к выводу, что

$$|(Tx)(t)| \leq K\left[\frac{|U(t_0)||x_0|}{\varphi(t_0)} + \Big(L\omega(r)+1\Big)\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\alpha}\right) + \right.$$

$$\left. + LN(t_0)\left(\frac{1}{1-e^{\beta-\alpha}}+\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right)\right]\varphi(t).$$

Выберем теперь L и t_0 настолько большими, а величины r и $|x_0|$ настолько малыми, что

$$K\left[\frac{|U(t_0)||x_0|}{\varphi(t_0)} + \Big(L\omega(r)+1\Big)\left(\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\alpha}\right) + LN(t_0)\left(\frac{1}{1-e^{\beta-\alpha}}+\frac{1}{1-e^{-\alpha}}\right)\right] \leq L.$$

Возможность такого выбора очевидна. Для завершения доказательства теоремы осталось лишь установить сжимаемость оператора T в некотором шаре $|x|_{C_0} \leq r_0$ пространства $\mathcal{W}$. Для этого достаточно повторить соответствующие шаги из теоремы 1.4.1.

Теорема доказана. ■

Рассмотрим теперь систему с исчезающей на бесконечности главной частью (1.3.1). Предположим, что в результате усредняющей замены (1.3.3) и замены независимой переменной (1.3.9) она может быть приведена к виду (1.3.10). Пусть $P(0) = 0$ и собственные числа матрицы

$$A = \frac{dP(y)}{dy}\Big|_{y=0}$$

имеют ненулевые вещественные части. Тогда мы вправе воспользоваться теоремой 1.4.1, а значит, утверждать существование у системы (1.3.10) (а, следовательно, и исходной системы (1.3.1)) многообразия типа $S(t_0)$ при достаточно больших t_0.

Системы вида (1.3.1) являются в некотором смысле аналогом систем в стандартной форме Н.Н. Боголюбова:

$$\dot{x} = \varepsilon X(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^m, \tag{1.4.28}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а $X(t,x)$ — почти периодическая по t равномерно относительно x и достаточно гладкая по x равномерно относительно $t \in \mathbb{R}$ функция. Здесь x принадлежит некоторому компактному множеству $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^m$. Результаты разделов 1.3 и 1.4 тогда можно расценивать как определенный аналог так называемой второй теоремы Н.Н. Боголюбова. Эта теорема утверждает (см., например, [4, 5, 80]), что при выполнении определенных условий у системы (1.4.28) при достаточно малых ε существуют почти периодические решения, которые при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$ стремятся к положениям равновесия усредненной системы

$$\dot{y} = \varepsilon P(y), \qquad P(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(s,y)ds. \tag{1.4.29}$$

Полученные нами результаты позволяют, в частности, утверждать следующее. Пусть в системе (1.4.28) $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$ — скалярная функция, стремящаяся к нулю при $t \to \infty$. Предположим, что $\varepsilon(t) \notin L_1[t_0,\infty)$, $\dot{\varepsilon}(t) \in L_1[t_0,\infty)$, а вектор–функция $X(t,x)$ имеет вид (1.3.2) или является T–периодической по переменной t. Тогда у системы (1.4.28) существуют, вообще говоря, решения, которые при $t \to \infty$ стремятся к состояниям равновесия усредненной системы (1.4.29).

1.5 Неавтономный осциллятор Ван дер Поля

В качестве примера использования изложенных в предыдущих разделах результатов мы рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(t)(1 - x^2)\dot{x}, \qquad t \geq 0, \tag{1.5.1}$$

где $\varepsilon(t)$ — непрерывная функция и $\varepsilon(t) \geq 0$. Это уравнение рассматривалось в статье [160], в которой для обоснования полученных результатов приводились соображения частного характера, близкие в идейном плане к сформулированной нами теореме 1.4.1. В этом разделе мы уточним соответствующий результат, касающийся асимптотики решений уравнения (1.5.1), и докажем его глобальный характер.

Тот факт, что любое решение уравнения (1.5.1) ограничено при $t \geq 0$, доказывается точно так же, как и для случая, когда $\varepsilon(t) \equiv \varepsilon > 0$, — построением подходящей функции Ляпунова (см., например, [14]). Пусть

а). $\varepsilon(t) \in L_1[0,\infty)$. Тогда для каждой пары (r,φ), где $r \geq 0$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$, существует единственное решение уравнения (1.5.1) с асимптотикой вида

$$x(t) = \big(r + o(1)\big)\cos(t+\varphi), \qquad t \to \infty. \tag{1.5.2}$$

Кроме того, любое решение уравнения (1.5.1) в этом случае имеет асимптотику вида (1.5.2) с некоторыми r и φ. Для доказательства соответствующего факта достаточно воспользоваться результатами из [53, глава X] (см. также [132]). Мы будем рассматривать случай, когда

б). $\varepsilon(t) \notin L_1[0,\infty)$, $\dot\varepsilon(t) \in L_1[0,\infty)$ и $\varepsilon(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Уравнение (1.5.1) запишем в виде системы

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \varepsilon(t)\begin{pmatrix}0\\ (1-x^2)y\end{pmatrix}. \tag{1.5.3}$$

В системе (1.5.3) сделаем полярную замену:

$$x(t) = r\cos(t+\varphi), \qquad y(t) = -r\sin(t+\varphi).$$

Приходим к системе

$$\begin{aligned}\dot r &= \varepsilon(t)\left[\frac{r}{2}\Big(1-\frac{r^2}{4}\Big) - \frac{r}{2}\cos 2(t+\varphi) + \frac{r^3}{8}\cos 4(t+\varphi)\right],\\ \dot\varphi &= \varepsilon(t)\left[\frac{1}{2}\Big(1-\frac{r^2}{2}\Big)\sin 2(t+\varphi) - \frac{r^2}{8}\sin 4(t+\varphi)\right].\end{aligned} \tag{1.5.4}$$

В системе (1.5.4) выполним усредняющую замену переменных:

$$\begin{pmatrix}r\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\ \theta\end{pmatrix} + \varepsilon(t)u_1(t,a,\theta) + \varepsilon^2(t)u_2(t,a,\theta). \tag{1.5.5}$$

Получим усредненную систему

$$\begin{pmatrix}\dot a\\ \dot\theta\end{pmatrix} = \varepsilon(t)P_1(a) + \varepsilon^2(t)P_2(a) + R(t,a,\theta), \tag{1.5.6}$$

где

$$P_1(a) = \begin{pmatrix}\dfrac{a}{2}\left(1-\dfrac{a^2}{4}\right)\\ 0\end{pmatrix}, \qquad u_1(t,a,\theta) = \begin{pmatrix}-\dfrac{a}{4}\sin 2(t+\theta) + \dfrac{a^3}{32}\sin 4(t+\theta)\\ \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a^2}{2}-1\right)\cos 2(t+\theta) + \dfrac{a^2}{32}\cos 4(t+\theta)\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(t,a,\theta) = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} - \dfrac{3a^2}{8} - \dfrac{\cos 2(t+\theta)}{2} + \dfrac{3a^2}{8}\cos 4(t+\theta) & a\sin 2(t+\theta) - \dfrac{a^3}{2}\sin 4(t+\theta)\\ -\dfrac{a}{2}\sin 2(t+\theta) - \dfrac{a}{4}\sin 4(t+\theta) & \left(1-\dfrac{a^2}{2}\right)\cos 2(t+\theta) - \dfrac{a^2}{2}\cos 4(t+\theta)\end{pmatrix},$$

$$P_2(a) = \mathop{\mathrm{M}}_t\left[\mathcal{D}u_1(t,a,\theta)\right] = \begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{1}{8} + \dfrac{3a^2}{16} - \dfrac{11a^4}{256}\end{pmatrix},$$

а функция $R(t,a,\theta)$ является гладкой по a и θ, 2π–периодической по переменной θ и удовлетворяет условию 4 теоремы 1.4.1 по (a,θ). Кроме того, при $t\to\infty$ имеет место асимптотическая оценка

$$R(t,a,\theta)=O\big(\varepsilon^3(t)\big)+O\big(\dot\varepsilon(t)\big) \tag{1.5.7}$$

равномерно по $|a|\le\tilde S$ и $\theta\in\mathbb{R}$.

Заметим, что первое уравнение системы (1.5.6) в главной части не зависит от θ, а функция $R(t,a,\theta)$ является периодической по θ. Поэтому мы можем рассмотреть это уравнение отдельно от второго уравнения системы (1.5.6). Имеем

$$\dot a=\varepsilon(t)\frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right)+\tilde R(t,a), \tag{1.5.8}$$

где $\tilde R(t,a)$ — первая компонента вектора $R(t,a,\theta(t))$.

Пусть сначала $\varepsilon(t)>0$ при $t\ge t_1$. Перейдем в уравнении (1.5.8) к новому времени

$$\tau=\tau(t)=\int\limits_{t_1}^{t}\varepsilon(s)ds. \tag{1.5.9}$$

Приходим к уравнению

$$a'=\frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right)+\hat R(\tau,a). \tag{1.5.10}$$

Из (1.5.7) следует, что

$$\hat R(\tau,a)=O\big(\varepsilon^2\big(t(\tau)\big)\big)+O\left(\frac{\dot\varepsilon\big(t(\tau)\big)}{\varepsilon\big(t(\tau)\big)}\right), \tag{1.5.11}$$

где $t(\tau)$ — функция обратная к (1.5.9). Теорему 1.4.1 мы можем применить теперь к скалярному уравнению (1.5.10). Невозмущенное уравнение

$$a'=\frac{a}{2}\left(1-\frac{a^2}{4}\right) \tag{1.5.12}$$

имеет два состояния равновесия — $a=0$ и $a=2$ (нас, естественно, интересуют лишь неотрицательные решения уравнения (1.5.12)). Нулевое решение неустойчиво, а решение $a=2$ асимптотически устойчиво. Несложно понять, что скалярное уравнение (1.5.10) имеет нулевое решение, которое также неустойчиво (соответствующее многообразие $S(\tau_0)$ суть точка $a=0$). Используя теорему 1.4.1 применительно к состоянию равновесия $a=2$ невозмущенного уравнения (1.5.12), приходим к выводу, что все решения уравнения (1.5.10) с начальными условиями $a(\tau_0)=a_0$, где $\tau_0\gg1$, а $|a_0-2|\le\delta_0$ для некоторого достаточно малого δ_0, имеют асимптотику

$$a(\tau)=2+o(1),\qquad \tau\to\infty. \tag{1.5.13}$$

Возвращаясь к переменным r и t, заключаем, что все решения с начальными условиями $r(t_0) = r_0$ $(r(t_0) = \sqrt{x^2(t_0) + \dot{x}^2(t_0)})$ имеют асимптотику

$$r(t) = 2 + o(1), \qquad t \to \infty,$$

если только t_0 достаточно велико, а $|r_0 - 2| \le \delta_1$. Рассмотрим теперь второе из уравнений системы (1.5.6) и учтем, что для интересующих нас решений $a(t) = 2 + o(1)$.

Если $\varepsilon^2(t) \in L_1[0, \infty)$, то, интегрируя второе уравнение системы (1.5.6) на промежутке от t_0 до t, заключаем, что

$$\theta(t) = \theta_0 + o(1), \qquad t \to \infty,$$

где θ_0 — некоторая постоянная, зависящая от начальных условий. Поэтому решения исходного уравнения (1.5.1), для которых $|r_0 - 2| \le \delta_1$ и начальный момент времени $t_0 \gg 1$, имеют в этом случае следующую асимптотику:

$$x(t) = \big(2 + o(1)\big)\cos(t + \varphi_0 + o(1)), \quad \dot{x}(t) = -\big(2 + o(1)\big)\sin(t + \varphi_0 + o(1)), \qquad t \to \infty,$$

где $0 \le \varphi_0 < 2\pi$ — некоторая постоянная (зависящая от начальных условий.). Заметим, что в данном случае главный член асимптотики является 2π–периодической функцией, а, следовательно, рассматриваемые решения являются асимптотически 2π–периодическими.

Пусть теперь $\varepsilon^2(t) \notin L_1[0, \infty)$. Тогда, интегрируя второе уравнение в системе (1.5.6) на промежутке от t_0 до t, получаем

$$\theta(t) = -\frac{1}{16}\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^2(s)ds + o\left(\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^2(s)ds\right), \qquad t \to \infty.$$

Таким образом, решения уравнения (1.5.1), для которых $|r_0 - 2| \le \delta_1$ и $t_0 \gg 1$, имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$x(t) = \big(2 + o(1)\big)\cos\big(t + \varphi(t)\big), \quad \dot{x}(t) = -\big(2 + o(1)\big)\sin\big(t + \varphi(t)\big), \tag{1.5.14}$$

где

$$\varphi(t) = -\frac{1}{16}\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^2(s)ds + o\left(\int\limits_{t_0}^{t} \varepsilon^2(s)ds\right). \tag{1.5.15}$$

Обсудим далее случай, когда $\varepsilon(t)$ может обращаться в нуль в некоторых точках. Разумеется, нас интересует случай, когда существует неограниченно возрастающая последовательность из нулей функции $\varepsilon(t)$. В этом случае мы, вообще говоря, не можем сделать замену времени (1.5.9). Точнее, если интеграл в (1.5.9) есть функция монотонно возрастающая, то замена времени по-прежнему осуществима. Покажем, как провести исследование в общем

случае, когда $\varepsilon(t) \geq 0$ при $t \geq t_*$. Пусть $h(t)$ произвольная непрерывная функция, такая что $h(t) > 0$, если $t \geq t_*$, $h(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $h(t), \dot{h}(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Используя тривиальное тождество $\varepsilon(t) = \varepsilon(t) + h(t) - h(t)$, мы можем переписать систему (1.5.4) в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \mu(t) \begin{pmatrix} \frac{r}{2}\Big(1 - \frac{r^2}{4}\Big) - \frac{r}{2}\cos 2(t+\varphi) + \frac{r^3}{8}\cos 4(t+\varphi) \\ \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{r^2}{2}\Big)\sin 2(t+\varphi) - \frac{r^2}{8}\sin 4(t+\varphi). \end{pmatrix} + R_1(t, r, \varphi), \tag{1.5.16}$$

где $\mu(t) = \varepsilon(t) + h(t) > 0$ при $t \geq t_*$. Поскольку $h(t) \in L_1[t_*, \infty)$, остаточный член $R_1(t, r, \varphi)$ удовлетворяет условиям C.1, C.2, дающим возможность воспользоваться теоремой 1.3.1. Осуществим далее усредняющую замену (1.5.5) с функцией $\mu(t)$ вместо $\varepsilon(t)$ в системе (1.5.16). Заменяя всюду $\varepsilon(t)$ на $\mu(t)$, мы проделаем те же преобразования, что и в случае $\varepsilon(t) > 0$. Единственное отличие состоит в том, что нам необходимо добавить слагаемое порядка $O\big(h(t)\big)$ в правую часть формулы (1.5.7), а также слагаемое

$$O\left(\frac{h\big(t(\tau)\big)}{\mu\big(t(\tau)\big)}\right)$$

— в правую часть формулы (1.5.11). Поскольку $h(t) \in L_1[t_*, \infty)$ и $h^2(t) \in L_1[t_*, \infty)$, мы заключаем, что асимптотические формулы (1.5.14), (1.5.15) остаются справедливыми и в случае, когда $\varepsilon(t) \geq 0$.

Покажем теперь, что полученные нами асимптотические формулы справедливы для любого решения уравнения (1.5.1), за исключением нулевого, т. е. требования $|r(t_0) - 2| \leq \delta_1$ и $t_0 \gg 1$ являются излишними.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.5.17}$$

а также возмущенную систему

$$\dot{y} = f(t, y) + R(t, y). \tag{1.5.18}$$

Здесь

1. $f(t, x)$: $\{t \geq t^0\} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{D}$ — некоторая ограниченная область в $\mathbb{R}^m$, содержащая внутри точку $x = 0$, и $\partial\mathcal{D}$ — ее граница; функция $f(t, x)$ непрерывна по переменой t;

2. $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$, $x_j \in \mathcal{D}$, $j = 1, 2$, $L = \text{const}$;

3. Функция $R(t, y)$: $\{t \geq t^0\} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условиям D.1, D.2 раздела 1.3 в области $\mathcal{D}$.

Пусть $y(t)$ — решение системы (1.5.18), лежащее в $\mathcal{D}$ при всех $t \geq t^0$. Рассмотрим решение $x(t)$ системы (1.5.17) с начальным условием

$$x(t_0) = y(t_0), \qquad t^0 \leq t_0.$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1.5.1. *Для любых $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует достаточно большое $t_0(T, \varepsilon)$ такое, что выполнено неравенство*

$$|x(t) - y(t)| < \varepsilon, \qquad t_0 \le t \le t_0 + T.$$

Для доказательства этой леммы нам потребуется следующий вариант неравенства Гронуолла–Беллмана (см. [161]).

Утверждение 1.5.1. *Пусть при $t_0 \le t \le t_0 + T$ непрерывная неотрицательная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\varphi(t) \le a_2(t - t_0) + a_1 \int_{t_0}^{t} \varphi(s)ds + a_3$$

с некоторыми константами $a_1 > 0$, $a_2 \ge 0$, $a_3 \ge 0$. Тогда

$$\varphi(t) \le \Big(\frac{a_2}{a_1} + a_3\Big)e^{a_1(t-t_0)} - \frac{a_2}{a_1}$$

для $t_0 \le t \le t_0 + T$.

Доказательство леммы 1.5.1. Пусть $x(t)$ и $y(t)$ — решения систем (1.5.17) и (1.5.18) соответственно с начальными условиями $x(t_0) = y(t_0)$. Вычитая (1.5.17) из (1.5.18) и интегрируя полученное выражение в промежутке от t_0 до t, получаем

$$y(t) - x(t) = \int_{t_0}^{t} \Big[f(s, y(s)) - f(s, x(s)) + R(s, y(s))\Big]ds.$$

В силу наложенных на функции $f(s, x)$ и $R(s, y)$ условий, получаем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\le L \int_{t_0}^{t} \big|y(s) - x(s)\big|ds + \int_{t_0}^{t} \big|R(s, y(s)) - R(s, 0) + R(s, 0)\big|ds \le \\ &\le L \int_{t_0}^{t} \big|y(s) - x(s)\big|ds + \int_{t_0}^{t} p(s)|y(s)|ds + \int_{t_0}^{t} |R(s, 0)|ds \le \\ &\le L \int_{t_0}^{t} \big|y(s) - x(s)\big|ds + M \int_{t_0}^{t} p(s)ds + \int_{t_0}^{t} |R(s, 0)|ds, \end{aligned} \quad (1.5.19)$$

где мы учли, что $|y(t)| \le M$ при $t \ge t_0$. Для любой функции $p(t) \ge 0$ из класса $\mathcal{M}_0$ имеем

$$\int_{t_0}^{t} p(s)ds = \int_{t_0}^{t_0+n} p(s)ds + \int_{t_0+n}^{t_0+n+\alpha_t} p(s)ds,$$

где $t = t_0 + n + \alpha_t$, $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\alpha_t = [0, 1)$. Тогда

$$\int_{t_0}^{t} p(s)ds = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_0+k}^{t_0+k+1} p(s)ds + \int_{t_0+n}^{t_0+n+\alpha_t} p(s)ds.$$

Для любого $\varepsilon_1 > 0$ мы можем выбрать t_0 так, чтобы

$$\int_{t}^{t+1} p(s)ds < \varepsilon_1, \qquad t \geq t_0.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t} p(s)ds \leq \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = (n+1)\varepsilon_1 = (t - t_0 - \alpha_t + 1)\varepsilon_1 \leq (t - t_0)\varepsilon_1 + \varepsilon_1, \quad t \geq t_0.$$

Из (1.5.19) в этом случае следует, что

$$|y(t) - x(t)| \leq L \int_{t_0}^{t} \big|y(s) - x(s)\big| ds + (M+1)\varepsilon_1(t - t_0) + (M+1)\varepsilon_1, \quad t \geq t_0, \tag{1.5.20}$$

если $t_0 \gg 1$. Воспользовавшись утверждением 1.5.1, получим

$$|y(t) - x(t)| \leq \left[\frac{\varepsilon_1(M+1)}{L} + \varepsilon_1(M+1)\right] e^{L(t-t_0)} - \frac{\varepsilon_1(M+1)}{L} \leq$$

$$\leq \varepsilon_1(M+1)\left[\left(\frac{1}{L} + 1\right) e^{LT} - \frac{1}{L}\right].$$

Пусть $\delta > 0$ выбрано так, что

$$\operatorname{dist}\big(y(t), \partial D\big) \geq \delta, \qquad t_0 \leq t \leq t_0 + T.$$

Для завершения доказательства осталось выбрать $\varepsilon_1 > 0$ из условия

$$\varepsilon_1(M+1)\left[\left(\frac{1}{L} + 1\right) e^{LT} - \frac{1}{L}\right] < \min\{\delta, \varepsilon\}.$$

Лемма доказана. ■

Рассмотрим теперь уравнение (1.5.10) и укороченное уравнение (1.5.12). Любое решение уравнения (1.5.10) с начальным условием $a(\tau_0) = a_0$ лежит в некоторой ограниченной области $\mathcal{D}$ (поскольку все траектории исходного уравнения (1.5.1) ограничены). Поэтому, согласно лемме 1.5.1, соответствующая траектория сколь угодно долго остается в сколь угодно малой окрестности решения $a^*(\tau)$ укороченного уравнения (1.5.12), если только $\tau_0 \gg 1$ и $a(\tau_0) = a^*(\tau_0)$. Обратимся к укороченному уравнению (1.5.12). Динамика его решений легко устанавливается. Очевидно, что все решения уравнения (1.5.12) с начальным условием

$a^*(\tau_0) = a_0$, где $0 < R_1 \le a_0 \le R_2$, R_1 и R_2 — произвольные действительные числа, при $\tau \ge \tau_0 + T(\varepsilon, R_1, R_2)$ целиком лежат в полосе

$$|a - 2| \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. В силу автономности уравнения (1.5.12) величина T не зависит от начального момента времени τ_0 и может выбрана одной и той же для всех решений этого уравнения с начальными условиями

$$0 < R_1 \le a^*(\tau_0) \le R_2.$$

Рассмотрим теперь произвольное решение $a(\tau)$ уравнения (1.5.10) с каким-нибудь начальным условием $a(\tau_*) = a_0$. Это решение при $\tau \ge \tau_*$ целиком лежит в некоторой полосе $0 < R_1 \le a \le R_2$. Заметим также, что это решение не может сколь угодно близко приблизиться к точке $a = 0$, так как последняя суть неустойчивое состояние равновесия уравнений (1.5.10), (1.5.12). Так как решение $a(\tau)$ существует при всех $\tau \ge \tau_*$, то, согласно лемме 1.5.1, начиная с некоторого достаточно большого момента времени, это решение находится сколь угодно долго в любой сколь угодно малой окрестности некоторого решения укороченного уравнения (1.5.12). Но последнее обязательно попадет в любую окрестность точки $a = 2$, а значит, это случится и с решением уравнения (1.5.10). Дальнейшая динамика этого решения определяется асимптотической формулой (1.5.13). Осталось заметить, что асимптотические формулы (1.5.14), (1.5.15) оказываются, таким образом, справедливыми для любого решения исходного уравнения (1.5.1) (за исключением нулевого решения), так как поведение величины $r(t)$ при больших t определяется динамикой решений уравнения (1.5.10).

В завершение этого раздела мы сформулируем полученные в нем результаты в виде теоремы.

Теорема 1.5.1. *Пусть в уравнении* (1.5.1) *функция* $\varepsilon(t)$ *непрерывна и* $\varepsilon(t) \ge 0$ *при* $t \ge 0$. *Предположим, что* $\varepsilon(t) \notin L_1[0, \infty)$, $\dot{\varepsilon}(t) \in L_1[0, \infty)$ *и* $\varepsilon(t) \to 0$, $t \to \infty$. *Тогда поведение всех решений уравнения* (1.5.1), *за исключением нулевого решения, описывается при* $t \to \infty$ *асимптотическими формулами* (1.5.14), (1.5.15).

Глава 2

О собственных числах одномерного оператора Дирака с колебательно убывающим потенциалом

2.1 Постановка задачи

В этой главе изучается одномерный оператор Дирака, действующий в пространстве $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ и порожденный дифференциальным выражением

$$Dy = B\frac{dy}{dx} + U(x)y = \lambda y, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{2.1.1}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_2(x) & -u_1(x) \end{pmatrix}. \tag{2.1.2}$$

Функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ предполагаются имеющими колебательно убывающую структуру:

$$u_1(x) = -\frac{Q(x)}{(x+1)^\beta}, \qquad u_2(x) = \frac{P(x)}{(x+1)^\alpha}. \tag{2.1.3}$$

Здесь $0 < \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$, а действительные непрерывные функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются или периодическими с периодом $T > 0$ или тригонометрическими многочленами вида

$$P(x) = \sum_{j=-N}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\omega_j x}, \qquad Q(x) = \sum_{j=-M}^{M} q_j e^{\mathrm{i}\nu_j x}, \tag{2.1.4}$$

где $p_j, q_j \in \mathbb{C}$, $\omega_j, \nu_j \in \mathbb{R}$ и, кроме того,

$$p_{-j} = \bar{p}_j, \quad q_{-j} = \bar{q}_j, \quad \omega_{-j} = -\omega_j, \quad \nu_{-j} = -\nu_j \quad (\omega_k \neq \omega_s,\ \nu_k \neq \nu_s,\ k \neq s). \tag{2.1.5}$$

В случае, когда функции $P(x)$ и $Q(x)$ — T–периодические, поставим им в соответствие их бесконечные ряды Фурье вида (2.1.4).

Оператор Дирака, кроме дифференциального выражения (2.1.1), как правило, включает в себя краевое условие вида

$$y_1(0)\sin\xi + y_2(0)\cos\xi = 0, \qquad \xi \in [0,\pi), \tag{2.1.6}$$

которое гарантирует его самосопряженность при подходящем выборе области определения $\mathfrak{D}$ (см. [27, 167]). Мы будем игнорировать условие (2.1.6), интересуясь лишь асимптотическим поведением решений системы дифференциальных уравнений (2.1.1) при $x \to \infty$. В частности, мы выясним как влияет структура функций $P(x)$ и $Q(x)$ на факт появления у соответствующей системы уравнений решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$.

Исследованию спектральной задачи (2.1.1), (2.1.6) посвящено большое число работ. Отметим здесь лишь некоторые из результатов. Спектр оператора (2.1.1), (2.1.6) может быть устроен весьма разнообразно. Известно [27], что если функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в (2.1.2) принадлежат классу $L_1[0,\infty)$, т. е. абсолютно интегрируемы на $[0,\infty)$, то спектр оператора Дирака непрерывен и заполняет всю ось $\mathbb{R}$. В работе [31] дана конструкция примера оператора Дирака, у которого точечный спектр плотно заполняет всю ось $\mathbb{R}$. В статье [54] построены функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ такие, что соответствующий оператор Дирака имеет счетное число собственных значений, лежащих на непрерывном спектре. В [131] изучаются спектральные свойства оператора Дирака с медленно убывающими функциями $u_1(x)$ и $u_2(x)$. Показано, что если $u_1(x), u_2(x) \in L_2(0,\infty)$, то абсолютно непрерывный спектр оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) заполняет всю ось $\mathbb{R}$. Кроме того, в работе [131] получена оценка числа собственных значений у оператора Дирака при некоторых условиях относительно характера убывания функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ на бесконечности. Отметим также работы [96, 97]. В статье [96] автор исследует безмассовый оператор Дирака в $\mathbb{R}^3$ с дальнодействующим потенциалом. Получены условия, при которых указанный оператор имеет абсолютно непрерывный спектр, заполняющий всю действительную ось. В работе [97] изучается оператор Дирака на полуоси с различными квадратично суммируемыми потенциалами.

Следует также отметить, что схожие спектральные задачи возникают и для оператора Шредингера. В этой связи мы сошлемся на обзор работ по этой тематике [98], где отмечены последние достижения в области изучения спектров операторов Шредингера с убывающими потенциалами.

Спектральная задача (2.1.1), (2.1.6) в случае, когда функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ убывают колебательным образом, рассматривалась несколькими авторами (см. статью [54], а также ссылки в ней). В нашей работе, по-видимому, впервые рассматривается тот случай, когда осциллирующие функции $P(x)$ и $Q(x)$ имеют наиболее общую форму. Кроме того, мы предполагаем, что функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, вообще говоря, убывают на бесконечности с разной скоростью.

Для изучения задачи (2.1.1), (2.1.6) используются, в основном, методы спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов (см., например, [27,167]), а также методы

математической теории рассеяния [42, 61]. Одним из вопросов, который так или иначе возникает при анализе оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6), является вопрос о существовании у системы уравнений (2.1.1) решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, не обязательно удовлетворяющих краевому условию (2.1.6). Исследованию этого вопроса в случае потенциала (2.1.2), (2.1.3) и посвящена данная глава. В частности, мы получим явные формулы для тех λ, которые могут являться собственными числами оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6). Кроме того, будут получены некоторые дополнительные ограничения, которым должны удовлетворять соответствующие числа λ, а также функции $P(x)$ и $Q(x)$.

Одним из наиболее часто используемых методов асимптотического интегрирования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений является метод Харриса–Латса [116, 117]. Этот метод позволяет эффективно строить асимптотические представления для фундаментальных решений линейных систем в тех случаях, когда о коэффициентах системы известна лишь самая общая информация. Недостаток более детальной информации приводит к необходимости накладывать дополнительные условия на исходные величины, на их производные или интегралы от них. Мы будем использовать метод асимптотического интегрирования, изложенный в разделах 1.1 и 1.2. Он позволяет с помощью специальных замен переменных упростить исходную систему, содержащую колебательно убывающие величины. Приведенная система проще исходной в том смысле, что не содержит осциллирующих коэффициентов в главной части. Для получения асимптотики ее решений может быть использована асимптотическая теорема Левинсона. Подобного рода методика оказывается довольно эффективной для асимптотического исследования решений линейных систем дифференциальных уравнений, содержащих колебательно убывающие коэффициенты. В частности, с ее помощью удалось провести исследование поведения решений одномерного уравнения Шредингера с различного типа осциллирующими потенциалами [33], а также изучить некоторые уравнения из класса адиабатических осцилляторов (см. [34, 81]). К последнему типу уравнений приводит, в частности, анализ спектральной задачи для оператора Шредингера с потенциалом типа Вигнера–фон Неймана. Более подробно адиабатические осцилляторы обсуждаются в главе 3.

Дифференциальное выражение (2.1.1) запишем в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} y_1' &= u_2(x)y_1 - \big(\lambda + u_1(x)\big)y_2, \\ y_2' &= \big(\lambda - u_1(x)\big)y_1 - u_2(x)y_2. \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

Систему дифференциальных уравнений (2.1.7) будем называть одномерной системой Ди-

рака. В данной главе мы построим асимптотику решений системы (2.1.7) при $x \to \infty$. В частности, мы выясним при каких условиях на функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вида (2.1.3) у этой системы могут возникать решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Нас в дальнейшем будет интересовать лишь случай, когда спектральный параметр λ является действительным числом. Если $\lambda \in \mathbb{C}$ не является числом действительным, то соответствующее λ заведомо принадлежит резольвентному множеству оператора (2.1.1), (2.1.6) в силу его самосопряженности (см., например, [44]). Рассмотрим далее два случая: $\lambda \neq 0$ и $\lambda = 0$.

Определим далее следующее свойство, которое будет нами использоваться в этой главе.

Свойство $\mathcal{A}$. Будем говорить, что для $\lambda \in M$, где M — некоторое подмножество $\mathbb{R}$, выполнено свойство $\mathcal{A}$, если для каждого $\lambda \in M$ существует решение (2.1.7), принадлежащее классу $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Следовательно, для любого $\lambda \in M$ существует $\xi \in [0,\pi)$ (зависящее от λ) такое, что λ является собственным числом оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6).

2.2 Случай $\lambda \neq 0$

Поскольку функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ при $x \to \infty$ допускают асимптотическое представление

$$u_1(x) = -\frac{Q(x)}{x^\beta} + O\Big(x^{-\beta-1}\Big), \qquad u_2(x) = \frac{P(x)}{x^\alpha} + O\Big(x^{-\alpha-1}\Big), \tag{2.2.1}$$

то система (2.1.7) записывается в виде

$$y' = \Big[-\lambda B + A(x) + R(x)\Big]y. \tag{2.2.2}$$

Здесь матрица B определена в (2.1.2), матрица $R(x) \in L_1[x_0,\infty)$ и

$$A(x) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_2(x) & -\tilde{u}_1(x) \\ -\tilde{u}_1(x) & -\tilde{u}_2(x) \end{pmatrix},$$

где

$$\tilde{u}_1(x) = -\frac{Q(x)}{x^\beta}, \qquad \tilde{u}_2(x) = \frac{P(x)}{x^\alpha}. \tag{2.2.3}$$

В системе (2.2.2) осуществим замену $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathfrak{i} & \mathfrak{i} \end{pmatrix} z$, в результате которой получим систему

$$z' = \left[\lambda \begin{pmatrix} \mathfrak{i} & 0 \\ 0 & -\mathfrak{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{u}_2(x) - \mathfrak{i}\tilde{u}_1(x) \\ \tilde{u}_2(x) + \mathfrak{i}\tilde{u}_1(x) & 0 \end{pmatrix} + R_1(x)\right] z, \tag{2.2.4}$$

где $R_1(x) \in L_1[x_0,\infty)$.

Рассмотрим сначала случай, когда функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются $T-$периодическими.

Утверждение 2.2.1. *Если функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются T–периодическими, то ненулевыми собственными числами оператора Дирака* (2.1.1), (2.1.6) *могут являться лишь числа вида $\lambda = (\pi/T)q$, $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.*

Доказательство. Учитывая (2.2.3), запишем систему (2.2.4) в виде (1.2.3) :

$$z' = \big[\operatorname{diag}(\mathrm{i}\lambda, -\mathrm{i}\lambda) + A_1(x)v_1(x) + A_2(x)v_2(x) + R_1(x)\big]z. \tag{2.2.5}$$

Здесь $v_1(x) = x^{-\alpha}$, $v_2(x) = x^{-\beta}$ и

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & P(x) \\ P(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}Q(x) \\ -\mathrm{i}Q(x) & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.6}$$

Для исследования асимптотики решений системы (2.2.5), мы воспользуемся теоремой 1.2.1, а также замечанием 2 после этой теоремы. Именно, если

$$\lambda \neq \frac{\pi q}{T}, \qquad q \in \mathbb{Z}/\{0\}, \tag{2.2.7}$$

то в системе (2.2.5) мы можем сделать усредняющую замену

$$z = \big[I + Y_1(x)v_1(x) + Y_2(x)v_2(x) + Y_{11}(x)v_1^2(x) + Y_{12}(x)v_1(x)v_2(x) + Y_{22}(x)v_2^2(x) + \ldots\big]w.$$

В результате этой замены мы получим усредненную систему

$$w' = \big[\operatorname{diag}(\mathrm{i}\lambda, -\mathrm{i}\lambda) + A_1v_1(x) + A_2v_2(x) + A_{11}v_1^2(x) + \\ + A_{12}v_1(x)v_2(x) + A_{22}v_2^2(x) + \ldots + R_2(x)\big]w. \tag{2.2.8}$$

Здесь $A_{1(j_1)2(j_2)}$ $(j_1, j_2 \geq 0)$ — некоторые постоянные матрицы (мы используем обозначения из теоремы 1.2.1), $R_2(x)$ — некоторая матрица из класса $L_1[x_0, \infty)$ и многоточием обозначены слагаемые вида

$$A_{1(j_1)2(j_2)}v_1^{j_1}(x)v_2^{j_2}(x), \qquad j_1, j_2 \geq 0,$$

которые не принадлежат $L_1[x_0, \infty)$ и имеют на бесконечности более высокий порядок малости.

Система (2.2.8) имеет вид (1.1.1) с $A_0 = \operatorname{diag}(\mathrm{i}\lambda, -\mathrm{i}\lambda)$. Поскольку $\operatorname{tr} A_1(x) = \operatorname{tr} A_2(x) = 0$ (см. (2.2.6)), то в силу теоремы 1.2.2 все постоянные матрицы $A_{1(j_1)2(j_2)}$ в (2.2.8) имеют нулевой след. Кроме того, матрицы $A_1(x)$ и $A_2(x)$ имеют структуру вида (1.2.27). Следовательно, согласно утверждению 1.2.1, все матрицы $A_{1(j_1)2(j_2)}$ также имеют вид (1.2.27). Отсюда следует, что собственные числа матрицы

$$\operatorname{diag}(\mathrm{i}\lambda, -\mathrm{i}\lambda) + A_1v_1(x) + A_2v_2(x) + A_{11}v_1^2(x) + A_{12}v_1(x)v_2(x) + A_{22}v_2^2(x) + \ldots \tag{2.2.9}$$

являются чисто мнимыми при достаточно больших x. Тогда из теоремы Левинсона выводим, что фундаментальная матрица системы (2.2.8) имеет следующее асимптотическое представление при $x \to \infty$:

$$W(x) = \Big(I + o(1)\Big) \exp\Big\{ \int\limits_{x^*}^{x} \Lambda(t)dt \Big\}. \tag{2.2.10}$$

Здесь диагональная матрица $\Lambda(x)$ составлена из собственных чисел матрицы (2.2.9). Поскольку эти собственные числа являются чисто мнимыми при достаточно больших x, то из (2.2.10) заключаем, что система (2.2.8) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Таким образом, оператор Дирака (2.1.1), (2.1.6) в рассматриваемом случае не может иметь собственных чисел вида (2.2.7). ■

Предположим теперь, что функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются либо тригонометрическими многочленами, либо T–периодическими функциями. В последнем случае будем считать, что параметр λ в системе (2.2.4) имеет вид $\lambda = (\pi/T)q$, $q \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. В силу утверждения 2.2.1, только такие значения λ представляют интерес, когда функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются T–периодическими.

В системе (2.2.4) произведем замену $z = \operatorname{diag}\big(e^{\lambda \mathrm{i} x}, e^{-\lambda \mathrm{i} x}\big) w$, которая приводит эту систему к виду

$$w' = \left[\begin{pmatrix} 0 & \big(\tilde{u}_2(x) - \mathrm{i}\tilde{u}_1(x)\big)e^{-2\lambda \mathrm{i} x} \\ \big(\tilde{u}_2(x) + \mathrm{i}\tilde{u}_1(x)\big)e^{2\lambda \mathrm{i} x} & 0 \end{pmatrix} + R_2(x) \right] w, \tag{2.2.11}$$

где $R_2(x) \in L_1[x_0, \infty)$. Учитывая (2.2.3), запишем систему (2.2.11) в виде (1.2.3):

$$w' = \big[A_1(x)v_1(x) + A_2(x)v_2(x) + R_2(x)\big] w. \tag{2.2.12}$$

Здесь $v_1(x) = x^{-\alpha}$, $v_2(x) = x^{-\beta}$ и

$$A_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x} \\ P(x)e^{2\lambda \mathrm{i} x} & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x} \\ -\mathrm{i}Q(x)e^{2\lambda \mathrm{i} x} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.13}$$

Для исследования поведения решений системы (2.2.12) воспользуемся теоремой 1.2.1. Осуществим в системе (2.2.12) подходящую усредняющую замену вида

$$w = \big[I + Y_1(x)v_1(x) + Y_2(x)v_2(x) + Y_{11}(x)v_1^2(x) + Y_{12}(x)v_1(x)v_2(x) + Y_{22}(x)v_2^2(x) + \ldots\big] w_1, \tag{2.2.14}$$

в результате которой получим усредненную систему

$$w_1' = \big[A_1 v_1(x) + A_2 v_2(x) + A_{11} v_1^2(x) + A_{12} v_1(x)v_2(x) + A_{22} v_2^2(x) + \ldots + R_3(x)\big] w_1. \tag{2.2.15}$$

Здесь $A_{1(j_1)2(j_2)}$ $(j_1, j_2 \geq 0)$ — постоянные матрицы, $R_3(x)$ — некоторая матрица из класса $L_1[x_0, \infty)$, а многоточием обозначены слагаемые вида

$$A_{1(j_1)2(j_2)} v_1^{j_1}(x) v_2^{j_2}(x), \qquad j_1, j_2 \geq 0, \tag{2.2.16}$$

которые не принадлежат $L_1[x_0, \infty)$ и имеют более высокий, нежели выписанные, порядок малости на бесконечности.

Из формул (1.2.10) и (1.2.11) главы 1 выводим следующие представления для матриц $Y_{1(j_1)2(j_2)}(x)$ в замене (2.2.14) и постоянных матриц $A_{1(j_1)2(j_2)}$ в системе (2.2.15). Имеем,

$$\begin{aligned} Y'_{1(j_1)2(j_2)} = \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+l_2=r \\ \rho(l_1)\rho_2(l_2)\neq 0}} & A_{1(j_1-l_1)2(j_2-l_2)}(x) Y_{1(l_1)2(l_2)}(x) - \\ & - \sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+l_2=r \\ \rho_1(l_1)\rho_2(l_2)\neq 0}} Y_{1(l_1)2(l_2)}(x) A_{1(j_1-l_1)2(j_2-l_2)}, \quad j_1 + j_2 = l. \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Здесь целые числа l_1, l_2 изменяются от 0 до r включительно. Далее,

$$A_{1(j_1)2(j_2)} = \mathrm{M}\left[\sum_{r=0}^{l-1} \sum_{\substack{l_1+l_2=r \\ \rho_1(l_1)\rho_2(l_2)\neq 0}} A_{1(j_1-l_1)2(j_2-l_2)}(x) Y_{1(l_1)2(l_2)}(x) \right], \quad j_1 + j_2 = l. \tag{2.2.18}$$

Заметим, что формулы (2.2.17), (2.2.18) можно упростить, если учесть, что в системе (2.2.12) ненулевыми являются лишь матрицы $A_{1(j_1-l_1)2(j_2-l_2)}(x)$, для которых $l_1 + l_2 = l - 1$. Таким образом, $l_1 = j_1 - 1$ и $l_2 = j_2$, или $l_2 = j_2 - 1$ и $l_1 = j_1$. Откуда выводим следующие формулы:

$$A_{1(l)} = \mathrm{M}\Big[A_1(x) Y_{1(l-1)}(x) \Big], \quad l > 0; \tag{2.2.19}$$

$$A_{2(l)} = \mathrm{M}\Big[A_2(x) Y_{2(l-1)}(x) \Big], \quad l > 0; \tag{2.2.20}$$

$$A_{1(j_1)2(j_2)} = \mathrm{M}\Big[A_1(x) Y_{1(j_1-1)2(j_2)}(x) + A_2(x) Y_{1(j_1)2(j_2-1)}(x) \Big], \quad j_1 > 0, j_2 > 0. \tag{2.2.21}$$

Несложные вычисления позволяют получить явные выражения для нескольких первых матриц. Именно,

$$\begin{aligned} A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(x)\big] &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{M}\big[P(x) e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big] \\ \mathrm{M}\big[P(x) e^{2\lambda \mathrm{i} x}\big] & 0 \end{pmatrix}, \\ A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(x)\big] &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\,\mathrm{M}\big[Q(x) e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big] \\ -\mathrm{i}\,\mathrm{M}\big[Q(x) e^{2\lambda \mathrm{i} x}\big] & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

Если матрицы A_1 и (или) A_2 равны нулю, то для построения асимптотики решений системы (2.2.15) необходимо вычислять матрицы более высоких приближений. В частности, если

$A_1 = A_2 = 0$, то

$$A_{11} = \mathrm{M}\big[A_1(x)Y_1(x)\big] = \begin{pmatrix} \mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathfrak{i} x}\int P(x)e^{2\lambda \mathfrak{i} x}dx\big] & 0 \\ 0 & \mathrm{M}\big[P(x)e^{2\lambda \mathfrak{i} x}\int P(x)e^{-2\lambda \mathfrak{i} x}dx\big] \end{pmatrix},$$
$$A_{22} = \mathrm{M}\big[A_2(x)Y_2(x)\big] = \begin{pmatrix} \mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathfrak{i} x}\int Q(x)e^{2\lambda \mathfrak{i} x}dx\big] & 0 \\ 0 & \mathrm{M}\big[Q(x)e^{2\lambda \mathfrak{i} x}\int Q(x)e^{-2\lambda \mathfrak{i} x}dx\big] \end{pmatrix}. \tag{2.2.23}$$

Здесь матрицы $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ с нулевым средним значением определяются из матричных дифференциальных уравнений $Y_1' = A_1(x)$ и $Y_2' = A_2(x)$, а символом $\int$ обозначена первообразная, имеющая нулевое среднее значение. Наконец, если $A_1 = A_2 = 0$, то

$$A_{12} = \mathrm{M}\big[A_1(x)Y_2(x) + A_2(x)Y_1(x)\big] = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & \bar{d} \end{pmatrix}, \tag{2.2.24}$$

где

$$d = \mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathfrak{i} x}\int (-\mathfrak{i})Q(x)e^{2\lambda \mathfrak{i} x}dx + \mathfrak{i}Q(x)e^{-2\lambda \mathfrak{i} x}\int P(x)e^{2\lambda \mathfrak{i} x}dx\big]. \tag{2.2.25}$$

Поведение решений усредненной системы (2.2.15) будет определяться главным в смысле асимптотики членом в (2.2.15), т. е. ведущей матрицей. Мы говорим, что матрица $Av_1^{j_1}(x)v_2^{j_2}(x)$ является ведущей, если система (2.2.15) может быть записана в виде

$$w_1' = \big[A + V(x)\big]v_1^{j_1}(x)v_2^{j_2}(x)w_1 + R_3(x)w_1. \tag{2.2.26}$$

Здесь A — это некоторая ненулевая постоянная матрица, а $V(x)$ — некоторая матрица, удовлетворяющая условиям A.2 и A.3 раздела 1.1.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.2.2. *Ненулевыми собственными числами оператора Дирака* (2.1.1), (2.1.6) *могут быть лишь числа вида*

$$\lambda = \frac{h_{i_1} + h_{i_2} + \ldots + h_{i_s}}{2}, \tag{2.2.27}$$

где $h_{i_m} = \omega_{i_m}$ *или* $h_{i_m} = \nu_{i_m}$ $(m = 1, \ldots, s)$, *и число* s *нечетно.*

Доказательство. Заметим, что все постоянные матрицы $A_{1(j_1)2(j_2)}$ в системе (2.2.15) и все матрицы $Y_{1(j_1)2(j_2)}(x)$ в замене (2.2.14) имеют блочную структуру. Точнее, используя индукцию, а также формулы (2.2.17), (2.2.19) — (2.2.21), легко показать, что

$$A_{1(j_1)2(j_2)} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ \bar{z} & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y_{1(j_1)2(j_2)}(x) = \begin{pmatrix} 0 & y(x) \\ \bar{y}(x) & 0 \end{pmatrix},$$

если число $j_1 + j_2$ нечетно, и

$$A_{1(j_1)2(j_2)} = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}, \qquad Y_{1(j_1)2(j_2)}(x) = \begin{pmatrix} y(x) & 0 \\ 0 & \bar{y}(x) \end{pmatrix}, \tag{2.2.28}$$

если число $j_1 + j_2$ четно. Здесь z — некоторое комплексное число, которое зависит от набора индексов $\big(1(j_1)2(j_2)\big)$, и $y(x)$ — некоторая комплекснозначная функция, которая также зависит от набора индексов $\big(1(j_1)2(j_2)\big)$.

Предположим, что ведущая матрица $Av_1^{s_1}(x)v_2^{s_2}(x)$ в системе (2.2.15) такова, что

$$A = \sum A_{1(j_1)2(j_2)}, \tag{2.2.29}$$

где все суммы индексов $j_1 + j_2$ четны. В силу (2.2.28), используя теорему 1.2.2, а также тот факт, что все постоянные матрицы в усредненной системе (2.2.15) имеют структуру вида (1.2.27), заключаем, что собственные числа матрицы

$$A_1 v_1(x) + A_2 v_2(x) + A_{11} v_1^2(x) + A_{12} v_1(x) v_2(x) + A_{22} v_2^2(x) + \dots \tag{2.2.30}$$

являются чисто мнимыми при достаточно больших x. Пусть функция $v_1^{j_1}(x)v_2^{j_2}(x)$ не принадлежит классу $L_1[x_0, \infty)$ (только этот случай представляет интерес). Поскольку ненулевая матрица A имеет вид (2.2.28) и нулевой след, то ее собственные значения различны. В силу леммы 1.1.1 система (2.2.26) может быть приведена к L-диагональному виду. Используя теорему Левинсона, получаем асимптотическое представление вида (1.1.8) для фундаментальной матрицы усредненной системы (2.2.15). В этом представлении элементами диагональной матрицы $\Lambda(x)$ являются число мнимые собственные значения матрицы (2.2.30), т. е. матрицы $\big[A+V(x)\big]v_1^{j_1}(x)v_2^{j_2}(x)$. Отсюда следует, что система Дирака (2.1.7) в рассматриваемом случае не может иметь решений из $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$.

Таким образом, в представлении (2.2.29) сумма индексов $j_1 + j_2$ хотя бы одной из матриц $A_{1(j_1)2(j_2)}$ должна быть нечетной. Соответствующая матрица $A_{1(j_1)2(j_2)}$ может быть ненулевой лишь для тех значений $\lambda \neq 0$, которые имеют вид (2.2.27), где число $s = j_1 + j_2$ нечетно. Последнее вытекает из (2.2.13), а также формул (2.2.17), (2.2.19) — (2.2.21). Отсюда заключаем, что только те $\lambda \neq 0$, которые имеют вид (2.2.27), могут являться собственными числами оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6).

Утверждение доказано. ■

Для того чтобы сформулировать основной результат данного раздела, введем сперва следующие обозначения. Положим

$$\Omega_1 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{\omega_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_2 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_2^{(1)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z} \ \&\ \big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\big| > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$\Omega_2^{(2)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z} \ \&\ \lambda \neq \frac{\omega_s}{2},\ s \in \mathbb{Z}$$
$$\&\ \big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\big| > \Big|\frac{1}{2\lambda}\Big[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\Big]\Big|\Big\},$$

$$\Omega_2^{(3)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\nu_j}{2} \text{ для некоторого } j \in \mathbb{Z} \ \&\ \lambda \neq \frac{\omega_s}{2},\ s \in \mathbb{Z}$$
$$\&\ \sqrt{\big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\big|^2 - \Big|\frac{1}{2\lambda}\Big[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\Big]\Big|^2} > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$\Omega_2^{(4)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \Big|\mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big] + \mathrm{i}\,\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\Big| > \frac{1}{2}\Big\},$$

$$\Omega_3 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\omega_s + \omega_r + \omega_q}{2} \text{ для некоторого } s, r, q \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_3^{(1)} = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{\omega_s + \omega_r + \omega_q}{2} \text{ для некоторого } s, r, q \in \mathbb{Z}$$
$$\&\ \Big|\sum_{\substack{k,l,m\in\mathbb{Z},\\ \omega_k+\omega_l+\omega_m=2\lambda}} \frac{p_k p_l p_m}{(\omega_k - 2\lambda)(\omega_m - 2\lambda)}\Big| > \frac{1}{2} \ \&\ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Omega_4 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda = \frac{h_{i_1} + h_{i_2} + \ldots + h_{i_s}}{2} \text{ для некоторых } i_1, i_2, \ldots i_s \in \mathbb{Z},$$
$$\text{где } s \geq 3 \text{ нечетно и } h_{i_m} = \omega_{i_m} \text{ или } h_{i_m} = \nu_{i_m}\Big\}.$$

Определим также следующие уравнения относительно λ:

$$p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2} = 0, \tag{2.2.31}$$

$$\sum_{\substack{s,r,q\in\mathbb{Z},\\ \omega_s+\omega_r+\omega_q=2\lambda}} \frac{p_s p_r p_q}{(\omega_s - 2\lambda)(\omega_q - 2\lambda)} = 0, \tag{2.2.32}$$

$$\sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z},\\ \omega_s+\nu_r=0}} \frac{p_s q_r(\nu_r - \omega_s)}{(\omega_s + 2\lambda)(\nu_r + 2\lambda)} = 0, \tag{2.2.33}$$

$$\big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\big| - \Big|\frac{1}{2\lambda}\Big[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\Big]\Big| = 0, \tag{2.2.34}$$

$$-\frac{1}{2\lambda}\left[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2}\right] - \frac{1}{2\lambda}\left[q_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|q_j|^2}{\nu_j^2 - 4\lambda^2}\right] +$$
$$+ \mathrm{Im}\Big[\sum_{\substack{s,r\in\mathbb{Z},\\ \omega_s+\nu_r=0}} \frac{p_s q_r(\nu_r - \omega_s)}{(\omega_s + 2\lambda)(\nu_r + 2\lambda)}\Big] = 0. \tag{2.2.35}$$

Здесь, разумеется, предполагается, что сумма по пустому множеству индексов равна нулю. Пусть

$$\Gamma_1 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (2.2.31) } \&\ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_2 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (2.2.32) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_2^c = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ не является решением (2.2.32) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_3 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (2.2.33) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2} \ \& \ \lambda \neq \frac{\nu_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_4 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (2.2.34) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\},$$

$$\Gamma_5 = \Big\{\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \,\Big|\, \lambda \text{ является решением (2.2.35) } \& \ \lambda \neq \frac{\omega_j}{2} \ \& \ \lambda \neq \frac{\nu_j}{2},\ j \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Основной результат этого раздела составляет следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Пусть $\sigma'(D)$ — множество всех ненулевых собственных значений оператора Дирака* (2.1.1), (2.1.6) *для некоторого фиксированного $\xi \in [0, \pi)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

A.1.1.1. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta < 1 < 3\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.1.1'. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta = 1 < 3\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.1.2.1. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha < 1$ и $\alpha + \beta > 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.1.2.1'. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha = 1$ и $\alpha + \beta > 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3^{(1)} \cap \Gamma_1)$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3^{(1)} \cap \Gamma_1)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.1.2.2. *Если $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha < 1$ и $\alpha + \beta \leq 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3)$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.2. *Если $\alpha < 2\alpha < 3\alpha < \beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.1.2'. *Если $\alpha < 2\alpha < 3\alpha < \beta = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.1. *Если $\alpha < \beta < 1 < 2\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.1'. *Если $\alpha < \beta = 1 < 2\alpha$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.2.1. *Если $\alpha < \beta < 2\alpha \leq 1$ и $\alpha + \beta > 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.2.2.2. *Если $\alpha < \beta < 2\alpha \leq 1$ и $\alpha + \beta \leq 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_3)$. Кроме того, для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A.3. *Если* $\alpha < 2\alpha = \beta < 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)} \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_4) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_4)$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)}$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

A.3'. *Если* $\alpha < 2\alpha = \beta = 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

B.1. *Если* $\alpha = \beta < 1 < 2\alpha$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

B.1'. *Если* $\alpha = \beta = 1 < 2\alpha$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_2^{(4)}$ *и для* $\lambda \in \Omega_2^{(4)}$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

B.2. *Если* $\alpha = \beta < 2\alpha \leq 1$, *то* $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_5)$ *и для* $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

Доказательство. Схема доказательства состоит в следующем. Мы изменяем спектральный параметр λ в системе Дирака (2.1.7) (а, следовательно, и в усредненной системе (2.2.15)) и определяем ведущую матрицу в системе (2.2.15). Затем мы находим условия, при которых эта система имеет решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$.

Мы не будем доказывать каждый пункт теоремы 2.2.1 отдельно. Доказательство проводится одновременно для нескольких пунктов. Это делается следующим образом. Если мы доказываем пункт, обозначение которого начинается, скажем, с символа **A**, то это означает, что мы проводим доказательство для всех пунктов, обозначения которых начинаются с символа **A**. Аналогично, если мы доказываем, скажем, пункт **A.1**, это означает, что мы проводим доказательство для всех пунктов, обозначения которых начинаются с символов **A.1**.

A. $\alpha < \beta$.

Пусть

$$\mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big] \neq 0. \tag{2.2.36}$$

Очевидно, что условие (2.2.36) эквивалентно тому, что в представлении (2.1.4) функции $P(x)$ при некотором j соответствующий показатель $\omega_j = 2\lambda$ и $p_j \neq 0$, т. е. $\lambda \in \Omega_1$. В силу (2.2.22), (2.2.36) заключаем, что $A_1 \neq 0$. В этом случае ведущей матрицей в системе (2.2.15) является матрица $A_1 v_1(x)$. Следовательно, система (2.2.15) может быть записана в виде (2.2.26), где $A = A_1$, $j_1 = 1$ и $j_2 = 0$. Собственные числа матрицы A_1

$$\mu_{1,2} = \pm\big|\mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big]\big|$$

действительны и различны. Фундаментальная матрица $W_1(x)$ системы (2.2.15) допускает следующее асимптотическое представление при $x \to \infty$:

$$W_1(x) = \Big[C_0 + o(1)\Big] \exp\Big\{\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\operatorname{diag}\big(\mu_1 + o(1), \mu_2 + o(1)\big)\Big\}. \tag{2.2.37}$$

Здесь матрица C_0 приводит матрицу A_1 к диагональному виду. Из представления (2.2.37) следует, что у одномерной системы Дирака (2.1.7) в рассматриваемом случае всегда существуют решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$.

Таким образом, мы заключаем, что в данном случае собственными числами оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) могут быть числа вида $\lambda = \omega_j/2$ ($\lambda \neq 0$). Следовательно, $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \ldots$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \ldots$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Здесь многоточием обозначены некоторые подмножества $\mathbb{R}$, вид которых мы уточним далее.

Продолжим изменять параметр λ и определять вид ведущей матрицы в системе (2.2.15). Предположим теперь, что

$$\mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\big] = 0, \tag{2.2.38}$$

т. е. $\lambda \notin \Omega_1$. В этом случае $A_1 = 0$ и необходимо рассмотреть несколько случаев. В каждом из них вид ведущей матрицы в системе (2.2.15) будет различаться. Рассмотрим лишь некоторые из них.

A.1. $\alpha < 2\alpha < \beta$.

В данном случае главным слагаемым в системе (2.2.15) является матрица $A_{11}v_1^2(x)$. Собственные числа матрицы A_{11} (она определяется формулой (2.2.23)) различны и являются чисто мнимыми. Действительно, используя представление (2.1.4) для функции $P(x)$, несложно установить, что

$$\mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i} x}\int P(x)e^{2\lambda \mathrm{i} x}dx\big] = \sum_{\omega_s+\omega_r=0}\frac{p_s p_r}{(\omega_r+2\lambda)\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2\lambda}\left[p_0^2 - 8\lambda^2\sum_{j>0}\frac{|p_j|^2}{\omega_j^2-4\lambda^2}\right].$$

Здесь мы учли соотношения (2.1.5). Таким образом, матрица $A_{11} \neq 0$, если

$$p_0^2 \neq 8\lambda^2\sum_{j>0}\frac{|p_j|^2}{\omega_j^2-4\lambda^2},$$

т. е. когда λ не является решением уравнения (2.2.31) (напомним также, что для рассматриваемых значений параметра λ имеет место равенство (2.2.38), а, следовательно, $\lambda \neq \omega_j/2$, $j \in \mathbb{Z}$).

Вернемся теперь к усредненной системе (2.2.15). Поскольку матрицы $A_1(x)$ и $A_2(x)$ в системе (2.2.12) имеют структуру вида (1.2.27), в силу теоремы 1.2.2 все матрицы $A_{i_1\ldots i_l}$ в усредненной системе (2.2.15) также имеют вид (1.2.27). Кроме того, поскольку

$$\operatorname{tr} A_1(x) = \operatorname{tr} A_2(x) = 0,$$

то все постоянные матрицы в усредненной системе (2.2.15), согласно теореме 1.2.2, имеют нулевой след, т.е. $\operatorname{tr} A_{i_1\ldots i_l} = 0$. Поэтому собственные числа матрицы (2.2.30) при больших x

либо действительны и разных знаков, либо являются чисто мнимыми и комплексно сопряжены друг другу. Поскольку собственные числа матрицы A_{11} являются чисто мнимыми, то собственные числа матрицы (2.2.30) при достаточно больших x также являются чисто мнимыми. Следовательно, система (2.2.15) может быть записана в виде (2.2.26), где $A = A_{11}$, $j_1 = 2$ и $j_2 = 0$. Таким образом, в силу теоремы Левинсона фундаментальная матрица $W_1(x)$ системы (2.2.15) допускает следующее асимптотическое представление при $x \to \infty$:

$$W_1(x) = \Big[I + o(1)\Big] \exp\Big\{ \frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha} \operatorname{diag}\big(\mathrm{i}\mu + o(1), -\mathrm{i}\mu + o(1)\big) \Big\}, \tag{2.2.39}$$

где

$$\mu = -\frac{1}{2\lambda} \left[p_0^2 - 8\lambda^2 \sum_{j>0} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2 - 4\lambda^2} \right]. \tag{2.2.40}$$

Таким образом в рассматриваемом случае при условии, что λ не удовлетворяет уравнению (2.2.31), решений из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$ у системы Дирака (2.1.7) не существует.

Относительно оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) в исследуемой ситуации мы можем сделать следующий вывод. Если у этого оператора существует собственные числа вида $\lambda \neq \omega_j/2$, то они обязаны удовлетворять уравнению (2.2.31). Отсюда следует, что $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Gamma_1 \cap \ldots)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Gamma_1 \cap \ldots)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. В частности, из (2.2.31) выводим, что, если $P(x)$ — тригонометрический многочлен, то в промежутке

$$|\lambda| > \max_{j>0} \frac{|\omega_j|}{2}$$

у оператора Дирака в рассматриваемом случае собственных чисел заведомо не существует.

Следовательно, дальнейшему исследованию подлежат лишь те значения λ, при которых $\lambda \in \Gamma_1$. Если $\lambda \in \Gamma_1$, то ведущей в системе (2.2.15) становится матрица $A_{111}v_1^3(x)$ или (и) матрица $A_2v_2(x)$. Перейдем к исследованию этих случаев.

A.1.1. $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha$.

Ведущей матрицей в системе (2.2.15) является матрица $A_2v_2(x)$. Собственные числа матрица A_2 имееют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\big|.$$

Предположим, что

$$\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big] \neq 0, \tag{2.2.41}$$

т. е., $\lambda \in \Omega_2$. В этом случае мы получаем следующую асимптотику для матрицы $W_1(x)$:

$$W_1(x) = \Big[C_0 + o(1)\Big] \exp\Big\{ \operatorname{diag}\big(\mu_1 + o(1), \mu_2 + o(1)\big) \int x^{-\beta} dx \Big\}, \qquad x \to \infty. \tag{2.2.42}$$

Здесь матрица C_0 приводит матрицу A_2 к диагональному виду. Из (2.2.41), (2.2.42) следует, что система Дирака (2.1.7) имеет решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, если $\beta<1$. Если $\beta=1$, то решения такого вида существуют лишь в том случае, когда

$$\big|\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\big]\big|>\frac{1}{2}.$$

Таким образом, мы заключаем, что, если $\beta<1$, то $\sigma'(D)\subset\Omega_1\cup(\Omega_2\cap\Gamma_1)\cup(\Gamma_1\cap\ldots)$ и для $\lambda\in\Omega_1\cup(\Omega_2\cap\Gamma_1)\cup(\Gamma_1\cap\ldots)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.

Если $\beta=1$, то $3\alpha>1$ и мы получаем утверждение **A.1.1.1'.**

A.1.1.1. $\alpha<2\alpha<\beta<1<3\alpha$. **(A.1.1.1'.** $\alpha<2\alpha<\beta=1<3\alpha$.)

Из отмеченного выше (см. **A.1.1.**) следует, что нам необходимо рассмотреть лишь случай $\lambda\in\Gamma_1$ при условии, что $\lambda\notin\Omega_2$. В этой ситуации $A_1=A_{11}=A_2=0$, и система (2.2.15) принимает вид

$$w_1'=R_3(x)w_1, \tag{2.2.43}$$

где $R_3(x)\in L_1[x_0,\infty)$. В силу теоремы Левинсона фундаментальная матрица этой системы имеет следующее асимптотическое представление при $x\to\infty$:

$$W_1(x)=I+o(1). \tag{2.2.44}$$

Отсюда выводим, что система Дирака (2.1.7) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ в рассматриваемом случае. Следовательно, оператор Дирака (2.1.1), (2.1.6) не имеет собственных значений λ, таких что $\lambda\in\Gamma_1$ и $\lambda\notin\Omega_2$.

Таким образом, мы заключаем, что, если $\beta<1$, то $\sigma'(D)\subset\Omega_1\cup(\Omega_2\cap\Gamma_1)$ и для $\lambda\in\Omega_1\cup(\Omega_2\cap\Gamma_1)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Если $\beta=1$, то $\sigma'(D)\subset\Omega_1\cup(\Omega_2^{(1)}\cap\Gamma_1)$ и свойство $\mathcal{A}$ имеет место для $\lambda\in\Omega_1\cup(\Omega_2^{(1)}\cap\Gamma_1)$.

A.1.1.2. $\alpha<2\alpha<\beta<3\alpha\le1$.

Из **A.1.1.** вновь следует, что нам необходимо рассмотреть лишь те значения λ, при которых $\lambda\in\Gamma_1$ и $\lambda\notin\Omega_2$. В этом случае матрицы A_1, A_{11} и A_2 являются нулевыми и ведущей матрицей в системе (2.2.15) становится матрица $A_{111}v_1^3(x)$. Вычисляя матрицу A_{111}, получаем

$$A_{111}=\mathrm{M}\big[A_1(x)Y_{11}(x)\big],\qquad Y_{11}'=A_1(x)Y_1(x),\qquad Y_1'=A_1(x).$$

Откуда

$$A_{111}=\begin{pmatrix}0&\varsigma\\ \bar\varsigma&0\end{pmatrix},$$

где

$$\varsigma = \mathrm{M}\Big[P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}\int P(x)e^{2\lambda \mathrm{i}x}\big(\int P(x)e^{-2\lambda \mathrm{i}x}dx\big)dx\Big] = \sum_{\omega_s+\omega_r+\omega_q=2\lambda}\frac{p_s p_r p_q}{(\omega_s-2\lambda)(\omega_q-2\lambda)}. \quad (2.2.45)$$

Собственные числа матрица A_{111} имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm|\varsigma|. \quad (2.2.46)$$

Предположим, что $\varsigma \in \Gamma_2^c$. Тогда фундаментальная матрица $W_1(x)$ системы (2.2.15) имеет следующее асимптотическое представление при $x \to \infty$:

$$W_1(x) = \Big[C_0 + o(1)\Big]\exp\Big\{\mathrm{diag}\big(\mu_1 + o(1), \mu_2 + o(1)\big)\int x^{-3\alpha}dx\Big\}. \quad (2.2.47)$$

Здесь матрица C_0 приводит матрицу A_{111} к диагональному виду. Из (2.2.46), (2.2.47) следует, что система Дирака (2.1.7) имеет решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ при условии, что $3\alpha < 1$. Если $3\alpha = 1$, то решения такого вида существуют лишь в том случае, когда

$$\Big|\sum_{\substack{k,l,m\in\mathbb{Z},\\ \omega_k+\omega_l+\omega_m=2\lambda}}\frac{p_k p_l p_m}{(\omega_k-2\lambda)(\omega_m-2\lambda)}\Big| > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если $3\alpha < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \ldots)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \ldots)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.

Если $3\alpha = 1$, то $\alpha+\beta > 1$ и мы получаем утверждение **A.1.1.2.1'.**, которое рассматривается ниже.

A.1.1.2.1. $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha < 1$ и $\alpha + \beta > 1$.

(A.1.1.2.1'. $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha = 1$ и $\alpha + \beta > 1$.**)**

Из **A.1.1.2.** следует, что нам необходимо рассмотреть лишь те значения параметра λ, при которых $\lambda \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и $\lambda \notin \Omega_2$. Это означает, что матрицы A_1, A_2, A_{11} и A_{111} являются нулевыми и система (2.2.15) принимает вид (2.2.43). Мы получаем асимптотическую формулу (2.2.44) для фундаментальной матрицы $W_1(x)$ системы (2.2.15).

Отсюда заключаем, что, если $3\alpha < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Если $3\alpha = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3^{(1)} \cap \Gamma_1)$ и свойство $\mathcal{A}$ имеет место для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3^{(1)} \cap \Gamma_1)$.

A.1.1.2.2. $\alpha < 2\alpha < \beta < 3\alpha < 1$ и $\alpha + \beta \le 1$.

Из **A.1.1.2.** вновь следует, что нам необходимо рассмотреть лишь те значения параметра λ, при которых $\lambda \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и $\lambda \notin \Omega_2$. Как и ранее, это означает, что матрицы A_1, A_2, A_{11} и A_{111}

в системе (2.2.15) являются нулевыми. Следовательно, ведущей матрицей в системе (2.2.15) становится матрица $A_{12}v_1(x)v_2(x)$. Собственные числа матрицы A_{12}, которая описывается формулой (2.2.24), имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,d. \tag{2.2.48}$$

Здесь величина d определяется формулой (2.2.25). Заметим, что величина d является чисто мнимой, поскольку в силу теоремы 1.2.2 имеет место равенство $\mathrm{tr}\,A_{12} = 0$. Несложно получить следующее представление для этой величины:

$$d = \sum_{\omega_s+\nu_r=0} \frac{p_s q_r(\nu_r - \omega_s)}{(\omega_s + 2\lambda)(\omega_r + 2\lambda)}. \tag{2.2.49}$$

Предположим, что $\lambda \notin \Gamma_3$. Тогда $d \neq 0$ и фундаментальная матрица системы (2.2.15) имеет следующее асимптотическое представление при $x \to \infty$:

$$W_1(x) = \Big[I + o(1)\Big] \exp\Big\{\mathrm{diag}\big(\mu_1 + o(1), \mu_2 + o(1)\big) \int x^{-(\alpha+\beta)} dx\Big\},$$

где μ_1 и μ_2 определяются по формуле (2.2.48). В этом случае у системы (2.1.7) не существует решений из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$.

Таким образом, если у оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) существует собственные значения λ, такие что $\lambda \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ и $\lambda \notin \Omega_2$, то они обязаны принадлежать множеству Γ_3. Учитывая утверждение 2.2.2, мы заключаем, что $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3)$. Поскольку мы не знаем, для каких именно значений λ из множества $\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ у системы Дирака (2.1.7) существуют решения из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$, мы можем утверждать лишь следующее. Свойство $\mathcal{A}$ выполнено для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$.

A.1.2. $\alpha < 2\alpha < 3\alpha < \beta < 1$. **(A.1.2'.** $\alpha < 2\alpha < 3\alpha < \beta = 1$.**)**

Из **A.1.** заключаем, что нам следует рассмотреть случай $\lambda \in \Gamma_1$. Тогда $A_1 = A_{11} = 0$ и ведущей матрицей в системе (2.2.15) является матрица $A_{111}v_1^3(x)$. Проводя рассуждения аналогичные тем, что были сделаны в пункте **A.1.1.2.**, мы получаем асимптотическую формулу (2.2.47) для фундаментальной матрицы $W_1(x)$ системы (2.2.15), где μ_1 и μ_2 имеют вид (2.2.46). Таким образом, система Дирака (2.1.7) имеет решения из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$, если $\lambda \in \Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c$.

Предположим теперь, что $\lambda \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. В этом случае $A_1 = A_{11} = A_{111} = 0$ и, в действительности, мы не знаем, какая матрица в системе (2.2.15) является ведущей. Это может быть матрица вида $A_{1(l)}v_1^l(x)$, $l \geq 4$ или матрица $A_2 v_2(x)$. Таким образом, для того чтобы получить более детальную информацию о существовании у системы Дирака (2.1.7) решений

из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, нам необходимо указать дополнительные неравенства относительно параметров α и β.

Отсюда следует, что не имея необходимой информации о ведущем слагаемом в системе (2.2.15) в случае $\lambda \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, мы можем утверждать лишь следующее. Если $\beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Если $\beta = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup (\Omega_2^{(1)} \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$ и свойство $\mathcal{A}$ имеет место для $\lambda \in \Omega_1 \cup (\Omega_3 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2^c)$.

A.2. $\alpha < \beta < 2\alpha$.

Из **A.** выводим, что нас интересуют лишь значения $\lambda \notin \Omega_1$. Ведущей матрицей в системе (2.2.15) является матрица $A_2 v_2(x)$. Дальнейшие наши действия аналогичны случаю **A.1.1.** Мы заключаем, что, если $\beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.

Случай $\beta = 1$ влечет $2\alpha > 1$ и мы приходим к утверждению **A.2.1'.**

A.2.1. $\alpha < \beta < 1 < 2\alpha$. **(A.2.1'.** $\alpha < \beta = 1 < 2\alpha$.**)**

Предположим теперь, что $\lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$. В этом случае система (2.2.15) имеет вид (2.2.43). Из теоремы Левинсона следует, что фундаментальная матрица этой системы имеет асимптотику вида (2.2.44) при $x \to \infty$. Следовательно, при условии $\lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$ система Дирака (2.1.7) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Отсюда выводим, что, если $\beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ имеет место свойство $\mathcal{A}$. Если $\beta = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$ и свойство $\mathcal{A}$ выполнено для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$.

A.2.2.1. $\alpha < \beta < 2\alpha \leq 1$ и $\alpha + \beta > 1$.

В силу **A.2.** нам следует рассмотреть лишь значения $\lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$. Система (2.2.15) принимает следующий вид:

$$w_1' = \big[A_{11} v_1^2(x) + R_3(x)\big] w_1, \tag{2.2.50}$$

где $R_3(x) \in L_1[x_0,\infty)$. Если $\lambda \notin \Gamma_1$, то $A_{11} \neq 0$ (см. **A.1.**). Используя теорему Левинсона, получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы $W_1(x)$ системы (2.2.50) при $x \to \infty$:

$$W_1(x) = \Big[I + o(1)\Big] \exp\Big\{\operatorname{diag}\big(\mathrm{i}\mu, -\mathrm{i}\mu\big) \int x^{-2\alpha} dx\Big\}.$$

Здесь величина μ описывается формулой (2.2.40). Следовательно, система Дирака (2.1.7) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ при условии $\lambda \notin \Gamma_1$.

Если $\lambda \in \Gamma_1$, то $A_{11} = 0$ и система (2.2.50) (а, значит, и система (2.2.15)) имеет вид (2.2.43). Мы имеем тогда асимптотическую формулу (2.2.44) для фундаментальной матрицы $W_1(x)$ системы (2.2.15). Поэтому, если $\lambda \in \Gamma_1$, то система Дирака (2.1.7) также не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$.

Отсюда заключаем, что $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ имеет место свойство $\mathcal{A}$.

A.2.2.2. $\alpha < \beta < 2\alpha \le 1$ и $\alpha + \beta \le 1$.

Как и в ситуации выше, нам необходимо рассмотреть случай $\lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$. Ведущей матрицей в системе (2.2.15) является матрица $A_{11}v_1^2(x)$. Действуя так же, как и в **A.1.**, приходим к выводу, что, если $\lambda \notin \Gamma_1$, то у системы Дирака (2.1.7) нет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Таким образом, нам необходимо рассмотреть случай $\lambda \in \Gamma_1$.

Если $\lambda \in \Gamma_1$, то матрица $A_{12}v_1(x)v_2(x)$ является ведущей матрицей в системе (2.2.15). Рассуждая так же, как и в случае **A.1.1.2.2.**, заключаем, что если $\lambda \notin \Gamma_3$, то система Дирака (2.1.7) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$.

Из утверждения 2.2.2 тогда следует, что $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_3)$. Мы не имеем достаточной информации в случае, когда $\lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$ и $\lambda \in \Gamma_1 \cap \Gamma_3$. Поэтому мы можем утверждать лишь, что свойство $\mathcal{A}$ имеет место для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$.

A.3. $\alpha < 2\alpha = \beta < 1$ **(A.3'.** $\alpha < 2\alpha = \beta = 1$.**)**

Из утверждения **A.** следует, что нам необходимо рассмотреть случай $\lambda \notin \Omega_1$. Главным слагаемым в системе (2.2.15) становится матрица $A_{11}v_1^2(x) + A_2v_2(x)$. Собственные числа матрицы

$$A_{11} + A_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{M}\Big[P(x)e^{-2\mathrm{i}\lambda x}\int P(x)e^{2\mathrm{i}\lambda x}dx\Big] & \mathrm{i}\,\mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\mathrm{i}\lambda x}\big] \\ -\mathrm{i}\,\mathrm{M}\big[Q(x)e^{2\mathrm{i}\lambda x}\big] & \mathrm{M}\Big[P(x)e^{2\mathrm{i}\lambda x}\int P(x)e^{-2\mathrm{i}\lambda x}dx\Big] \end{pmatrix}$$

определяются как корни характеристического многочлена

$$p(z) = z^2 + \mu^2 - |q_j|^2.$$

Здесь $q_j = \mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\mathrm{i}\lambda x}\big]$, а величина μ определяется формулой (2.2.40). Пусть

$$|\mu| \ne |q_j|,$$

т. е. $\lambda \notin \Gamma_4$. Рассмотрим два случая.

- $|q_j| > |\mu|$.

Собственные числа матрицы $A_{11} + A_2$ имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\big(|q_j|^2 - \mu^2\big)}. \tag{2.2.51}$$

Действуя также, как и в предыдущих случаях, получаем асимптотическое представление (2.2.42) для фундаментальной матрицы $W_1(x)$ системы (2.2.15) при $x \to \infty$. На сей раз в формуле (2.2.42) матрица C_0 приводит к диагональному виду матрицу $A_{11} + A_2$, а величины $\mu_{1,2}$ определяются формулой (2.2.51). Из представления (2.2.42) следует, что у одномерной системы Дирака (2.1.7) в рассматриваемом случае всегда существуют решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, если $\beta < 1$. Если же $\beta = 1$, то подобные решения существуют лишь при условии, что

$$\sqrt{\big(|q_j|^2 - \mu^2\big)} > \frac{1}{2}.$$

Поскольку неравенство $|q_j| > |\mu|$ возможно лишь в том случае, когда $q_j \neq 0$, мы заключаем, что в рассматриваемом случае непустое множество $\Omega_2^{(2)}$ может содержать собственные значения оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6).

- $|q_j| < |\mu|$.

Собственные числа матрицы $A_{11} + A_2$ имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\mathrm{i}\sqrt{\big(\mu^2 - |q_j|^2\big)}. \tag{2.2.52}$$

Для фундаментальной матрицы $W_1(x)$ системы (2.2.15) получаем асимптотическое представление (2.2.42) при $x \to \infty$. В формуле (2.2.42) матрица C_0 приводит матрицу $A_{11} + A_2$ к диагональному виду, а величины $\mu_{1,2}$ определяются выражением (2.2.52). В данной ситуации у одномерной системы Дирака (2.1.7) решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ не существует. Таким образом, в этом случае числа вида $\lambda = \nu_j/2$ $(\lambda \neq 0)$ не могут являться собственными числами оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6).

Объединяя вместе полученные результаты, приходим к следующему выводу. Предположим сначала, что $2\alpha = \beta = 1$. Тогда система (2.2.15) имеет вид

$$w_1' = \big[(A_{11} + A_2)x^{-1} + R_3(x)\big]w_1, \tag{2.2.53}$$

где $R_3(x) \in L_1[x_0,\infty)$. Как мы установили выше, если $\lambda \in \Omega_2^{(3)}$, то система (2.2.53) (а, следовательно, и система Дирака (2.1.7)) имеет решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Пусть $\lambda \notin \Omega_1$ и $\lambda \notin \Omega_2^{(3)}$. Если $|q_j| < |\mu|$, то соответствующее значение λ не является собственным значением оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6). Таким образом, нам осталось лишь изучить

случай $|q_j| = |\mu|$, т.е. тот случай, когда $\lambda \in \Gamma_4$. В этой ситуации собственные числа матрицы $A_{11} + A_2$ равны нулю, а сама эта матрица либо является нулевой, либо подобна жордановой клетке

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.54}$$

Если матрица $A_{11} + A_2$ нулевая, то система (2.2.53) имеет вид (2.2.43). В этом случае для фундаментальной матрицы $W_1(x)$ системы (2.2.53) при $x \to \infty$ справедливо асимптотическое представление (2.2.44). Следовательно, система Дирака (2.1.7) в этой ситуации решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ не имеет. Если же матрица $A_{11} + A_2$ подобна матрице (2.2.54), то система (2.2.53) заменой $w_1 = Cw_2$, где C некоторая постоянная невырожденная матрица, приводится к виду

$$w_2' = \big[Jx^{-1} + R_4(x)\big]w_2. \tag{2.2.55}$$

Здесь $R_4(x) \in L_1[x_0,\infty)$ и, более того, можно показать, что $R_4(x) = O\big(x^{-p}\big)$ для некоторого $p > 1$. Асимптотика фундаментальной матрицы системы (2.2.55) строится точно так же, как и в случае системы (3.13) из работы [81]. Нетрудно показать, что в этой ситуации система (2.2.55) (а, значит, и система Дирака (2.1.7)) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Таким образом, мы заключаем, что, если $\beta = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.

Предположим теперь, что $2\alpha = \beta < 1$. Используя полученные выше результаты, заключаем следующее. Если $\lambda \notin \Omega_2^{(2)}$ и $\lambda \notin \Omega_1$, то собственными значениями оператора Дирака могут быть лишь значения $\lambda \in \Gamma_4$. Этот случай в работе не изучается. Принимая во внимание утверждение 2.2.2, приходим к выводу, что $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)} \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_4) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_4)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)}$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.

В. $\alpha = \beta$.

В данной ситуации функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ тождественно совпадают. Матрица (2.2.30) приобретает следующий вид:

$$\big(A_1 + A_2\big)v_1(x) + \big(A_{11} + A_{12} + A_{22}\big)v_1^2(x) + \ldots. \tag{2.2.56}$$

Главным слагаемым в системе (2.2.15) является матрица $\big(A_1 + A_2\big)v_1(x)$. Эта матрица отлична от нулевой при условии, что

$$\mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda i x}\big] \neq 0 \quad \text{или} \quad \mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda i x}\big] \neq 0, \tag{2.2.57}$$

т. е. в том случае, когда $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$. Собственные числа матрицы $A_1 + A_2$ имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm|p_s + \mathfrak{i}q_r|,$$

где

$$p_s = \mathrm{M}\big[P(x)e^{-2\lambda \mathfrak{i}x}\big], \qquad q_r = \mathrm{M}\big[Q(x)e^{-2\lambda \mathfrak{i}x}\big].$$

Фундаментальная матрица $W_1(x)$ системы (2.2.15) допускает следующее асимптотическое представление при $x \to \infty$:

$$W_1(x) = \Big[C_0 + o(1)\Big] \exp\Big\{\mathrm{diag}\big(\mu_1 + o(1), \mu_2 + o(1)\big) \int x^{-\alpha} dx\Big\}. \tag{2.2.58}$$

Здесь матрица C_0 приводит матрицу $A_1 + A_2$ к диагональному виду. Из представления (2.2.58) следует, что у одномерной системы Дирака (2.1.7) при условии (2.2.57) всегда существуют решения из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$, если $\alpha < 1$. Если же $\alpha = 1$, то эти решения существуют лишь тогда, когда

$$|p_s + \mathfrak{i}q_r| > \frac{1}{2}, \tag{2.2.59}$$

т. е. при выполнении условия $\lambda \in \Omega_2^{(4)}$.

Следовательно, в рассматриваемой ситуации собственными значениями оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) могут быть точки множества $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Таким образом, если $\alpha < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Если $\alpha = 1$, то $2\alpha > 1$ и мы получаем утверждение **B.1'.**

Очевидно, что далее нам необходимо рассмотреть случай

$$\lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2.$$

Матрица $A_1 + A_2$ становится тогда нулевой матрицей, а ведущий член в системе (2.2.15) имеет вид

$$\big(A_{11} + A_{12} + A_{22}\big)v_1^2(x).$$

Необходимо рассмотреть два варианта.

B.1. $\alpha = \beta < 1 < 2\alpha$. **(B.1'.** $\alpha = \beta = 1 < 2\alpha$.**)**

Система (2.2.15) имеет вид (2.2.43). Следовательно, фундаментальная матрица этой системы имеет асимптотику вида (2.2.44) при $x \to \infty$. Это, в свою очередь, означает что система Дирака (2.1.7) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$, если $\lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$. Отсюда выводим, что, если $\alpha < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Если же $\alpha = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_2^{(4)}$ и свойство $\mathcal{A}$ выполнено для $\lambda \in \Omega_2^{(4)}$.

B.2. $\alpha = \beta < 2\alpha \leq 1$.

Из **B.** следует, что нам следует рассмотреть лишь те значения λ, при которых $\lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$. Собственные числа матрицы $A_{11} + A_{22} + A_{12}$ чисто мнимые. Именно,

$$\mu_{1,2} = \pm \mathrm{i}\big(\mu + \varphi + \operatorname{Im} d\big). \tag{2.2.60}$$

Здесь μ определяется формулой (2.2.40); φ также определяется формулой (2.2.40), в которой коэффициенты p_j надо заменить на q_j, а показатели ω_j — на ν_j. Наконец, величина d определяется формулой (2.2.25) (см. также формулу (2.2.49)).

Пусть

$$\mu + \varphi + \operatorname{Im} d \neq 0,$$

т. е. $\lambda \notin \Gamma_5$. Тогда для фундаментальной матрицы $W_1(x)$ системы (2.2.15) справедливо следующее асимптотическое представление $x \to \infty$:

$$W_1(x) = \Big[I + o(1)\Big] \exp\Big\{\operatorname{diag}\big(\mu_1 + o(1), \mu_2 + o(1)\big) \int x^{-2\alpha} dx\Big\}.$$

Здесь $\mu_{1,2}$ определяются формулой (2.2.60). Таким образом, в этой ситуации у системы Дирака (2.1.7) решений из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$ не существует.

Следовательно, если у оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) имеются собственные значения λ, такие что $\lambda \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$, они обязаны принадлежать множеству Γ_5. Наконец, используя утверждение 2.2.2, заключаем, что $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_5)$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.

Теорема доказана. ■

Замечание 1. Теорема 2.2.1 не покрывает случай $\beta < \alpha$. Эта ситуация разбирается аналогично случаю $\alpha < \beta$ и при необходимости соответствующие исследования могут быть без труда проведены.

Замечание 2. Предположим, что число λ вида (2.2.27) фиксировано. Тогда, для того чтобы при этом значении спектрального параметра система Дирака (2.1.7) имела решения из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$, должны быть выполнены дополнительные условия. Во-первых, необходимо, чтобы матрица $A_{1(j_1)2(j_2)}$, где $s = j_1 + j_2$ нечетно, была бы ведущей матрицей (одной из ведущих) в системе (2.2.15). Это означает, что все матрицы в системе (2.2.15), имеющие более низкий порядок малости на бесконечности, должны быть нулевыми. Таким образом, мы получаем равенства вида «$\mathrm{M}[\,\cdot\,] = 0$», а, следовательно, и уравнения, которым должен удовлетворять параметр λ (см. уравнения (2.2.31) — (2.2.35)). Во-вторых, необходимо, чтобы

матрица $A_{1(j_1)2(j_2)}$ была бы ненулевой. Это влечет появление неравенств вида «$\mathrm{M}[\,\cdot\,] \neq 0$» (т. е. условий того плана, что λ не является решением некоторого уравнения вида «$\mathrm{M}[\,\cdot\,] = 0$»). Наконец, необходимо потребовать, чтобы произведение $v_1^{j_1}(x)v_2^{j_2}(x)$ не принадлежало классу $L_1[x_0, \infty)$ (отсюда получаем неравенства вида $j_1\alpha + j_2\beta \leq 1$).

2.3 Случай $\lambda = 0$

Система Дирака (2.1.7) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} y_1' &= u_2(x)y_1 - u_1(x)y_2, \\ y_2' &= -u_1(x)y_1 - u_2(x)y_2, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ определяются формулами (2.1.3). Учитывая асимптотические представления (2.2.1), представим эту систему в виде (1.2.3):

$$y' = \big[A_1(x)v_1(x) + A_2(x)v_2(x) + R(x)\big]y. \tag{2.3.2}$$

Здесь $v_1(x) = x^{-\alpha}$, $v_2(x) = x^{-\beta}$,

$$A_1(x) = P(x)\hat{A}_1, \quad A_2(x) = Q(x)\hat{A}_2, \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3.3}$$

и $R(x) \in L_1[x_0, \infty)$. В системе (2.3.2) сделаем подходящую усредняющую замену вида

$$y = \big[I + Y_1(x)v_1(x) + Y_2(x)v_2(x) + Y_{11}(x)v_1^2(x) + Y_{12}(x)v_1(x)v_2(x) + Y_{22}(x)v_2^2(x) + \ldots\big]w, \tag{2.3.4}$$

в результате которой получим усредненную систему

$$w' = \big[A_1v_1(x) + A_2v_2(x) + A_{11}v_1^2(x) + A_{12}v_1(x)v_2(x) + A_{22}v_2^2(x) + \ldots + R_1(x)\big]w. \tag{2.3.5}$$

Здесь $A_{1(j_1)2(j_2)}$ ($j_1, j_2 \geq 0$) — постоянные матрицы, $R_1(x)$ — некоторая матрица из класса $L_1[x_0, \infty)$, а многоточием обозначены слагаемые вида (2.2.16), которые не принадлежат классу $L_1[x_0, \infty)$ и имеют более высокий, нежели выписанные, порядок малости на бесконечности. Матрицы A_1 и A_2 определяются следующими формулами:

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(x)\big] = p_0\hat{A}_1, \quad A_2 = q_0\hat{A}_2, \quad p_0 = \mathrm{M}\big[P(x)\big], \quad q_0 = \mathrm{M}\big[Q(x)\big]. \tag{2.3.6}$$

Для дальнейшего изложения нам потребуется установить справедливость одного вспомогательного утверждения. Определим следующие функции:

$$F_1(x) = \int P(x)dx, \quad F_2(x) = \int P(x)F_1(x)dx, \quad \ldots \quad F_n(x) = \int P(x)F_{n-1}(x)dx, \quad \ldots . \tag{2.3.7}$$

Здесь в качестве первообразной на каждом шаге выбирается периодическая или почти периодическая функция с нулевым средним значением, т. е.

$$\mathrm{M}\big[F_k(x)\big] = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

Возможность построения последовательности функций (2.3.7) обосновывается в следующем утверждении.

Утверждение 2.3.1. *Пусть* $\mathrm{M}\big[P(x)\big] = 0$. *Тогда для любого* $k = 0, 1, 2\ldots$ *имеет место равенство*

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_k(x)\big] = 0, \tag{2.3.8}$$

где $F_0(x) = 1$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по k. При $k = 0$ утверждение очевидно. Предположим, что периодическая или почти периодическая функция $F_k(x)$ уже определена.. Покажем, что можно определить функцию $F_{k+1}(x)$ по формуле (2.3.7), т. е. установим справедливость равенства (2.3.8). В силу формулы (2.3.7) имеем

$$F_l' = P(x)F_{l-1}, \qquad l = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.3.9}$$

Далее,

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_k(x)\big] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T P(x)F_k(x)dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}F_1(x)F_k(x)\Big|_0^T - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T F_1(x)PF_{k-1}(x)dx.$$

Здесь мы просто воспользовались интегрированием по частям и формулой (2.3.9). Поскольку функции $F_l(x)$ ($l = 0, 1, \ldots, k$), будучи почти периодическими, ограничены, то первое слагаемое в этом соотношении равно нулю. Следовательно,

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_k(x)\big] = -\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1(x)F_{k-1}(x)\big]. \tag{2.3.10}$$

Вновь интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\big[P(x)F_1(x)F_{k-1}(x)\big] &= -\,\mathrm{M}\big[F_1(x)\big(F_1(x)F_{k-1}(x)\big)'\big] = \\ &= -\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1(x)F_{k-1}(x)\big] - \mathrm{M}\big[P(x)F_1^2(x)F_{k-2}(x)\big].\end{aligned}$$

Из этого равенства выводим

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_1(x)F_{k-1}(x)\big] = -\frac{1}{2}\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1^2(x)F_{k-2}(x)\big].$$

Учитывая (2.3.10), приходим к выводу, что

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_k(x)\big] = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1^2(x)F_{k-2}(x)\big]. \tag{2.3.11}$$

Действуя аналогично, на следующем шаге получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{M}\big[P(x)F_1^2(x)F_{k-2}(x)\big] &= -\,\mathrm{M}\big[F_1(x)\big(F_1^2(x)F_{k-2}(x)\big)'\big] = \\ &= -2\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1^2(x)F_{k-2}(x)\big] - \mathrm{M}\big[P(x)F_1^3(x)F_{k-3}(x)\big].\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_1^2(x)F_{k-2}(x)\big] = -\frac{1}{3}\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1^3(x)F_{k-3}(x)\big].$$

Учитывая (2.3.11), заключаем, что

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_k(x)\big] = -\frac{1}{6}\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1^3(x)F_{k-3}(x)\big].$$

Продолжая этот процесс, на $(k-1)$-ом шаге приходим к формуле

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_k(x)\big] = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1^{k-1}(x)F_1(x)\big] = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1^k(x)\big], \tag{2.3.12}$$

а на следующем, k-ом, шаге получаем равенство вида

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_k(x)\big] = \frac{(-1)^k}{k!}\,\mathrm{M}\big[P(x)F_1^k(x)\big]. \tag{2.3.13}$$

Приравнивая правые части в формулах (2.3.12) и (2.3.13) друг другу, получаем

$$\mathrm{M}\big[P(x)F_1^k(x)\big] = 0.$$

Из формулы (2.3.13) тогда вытекает требуемый результат. Утверждение доказано. ■

Определим следующие условия:

$$\mathrm{M}\big[P(x)\big] = \mathrm{M}\big[Q(x)\big] = 0, \tag{2.3.14}$$

$$\mathrm{M}\big[P(x)\int Q(x)dx\big] = 0. \tag{2.3.15}$$

Основным результатом для случая $\lambda = 0$ является следующая теорема.

Теорема 2.3.1. *Пусть $\sigma(D)$ — множество всех собственных значений оператора Дирака* (2.1.1), (2.1.6) *для некоторого фиксированного $\xi \in [0, \pi)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

A. *Пусть $\alpha < \beta < 1$, тогда, если $\mathrm{M}\big[P(x)\big] \neq 0$ или $\mathrm{M}\big[Q(x)\big] \neq 0$, то для $\lambda = 0$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.*

A'. *Пусть* $\alpha < \beta = 1$, *тогда, если* $\mathrm{M}\big[P(x)\big] \neq 0$ *или* $\big|\mathrm{M}\big[Q(x)\big]\big| > 1/2$, *то для* $\lambda = 0$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$. *В противном случае* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.1. *Пусть* $\alpha < \beta \leq 1$ *и* $\alpha + \beta > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (2.3.14), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.2. *Пусть* $\alpha < \beta < 1$ *и* $\alpha + \beta \leq 1$. *Тогда, если выполнено условие* (2.3.14), *а условие* (2.3.15) *не выполнено, то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.2.1. *Пусть* $\alpha < \beta < 1$, $\alpha + \beta \leq 1$ *и* $2\alpha + \beta > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (2.3.14), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.2.2. *Пусть* $\alpha < \beta < 1$ *и* $2\alpha + \beta < 1$. *Тогда, если выполнены условия* (2.3.14), (2.3.15) *и* $\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big] \neq 0$, *то для* $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$.

A.2.2'. *Пусть* $\alpha < \beta < 1$ *и* $2\alpha + \beta = 1$. *Тогда, если выполнены условия* (2.3.14), (2.3.15) *и* $\big|\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big]\big| > 1/4$, *то для* $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$. *Кроме того, если выполнены условия* (2.3.14), (2.3.15) *и* $\big|\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big]\big| \leq 1/4$, *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$, *тогда, если* $\mathrm{M}\big[P(x)\big] \neq 0$ *или* $\mathrm{M}\big[Q(x)\big] \neq 0$, *то для* $\lambda = 0$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$.

B'. *Пусть* $\alpha = \beta = 1$, *тогда, если* $\sqrt{\big(\mathrm{M}\big[P(x)\big]\big)^2 + \big(\mathrm{M}\big[Q(x)\big]\big)^2} > 1/2$, *то для* $\lambda = 0$ *выполнено свойство* $\mathcal{A}$. *В противном случае* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B.1. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $2\alpha > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (2.3.14), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B.2. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $2\alpha \leq 1$. *Тогда, если выполнено условие* (2.3.14), *а условие* (2.3.15) *не выполнено, то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B.2.1. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$, $2\alpha \leq 1$ *и* $3\alpha > 1$. *Тогда, если выполнено условие* (2.3.14), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B.2.2. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $3\alpha < 1$. *Тогда, если выполнены условия* (2.3.14), (2.3.15) *и* $\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big] \neq 0$ *или* $\mathrm{M}\big[P(x)\big(\int Q(x)dx\big)^2\big] \neq 0$, *то для* $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$.

B.2.2'. *Пусть* $\alpha = \beta < 1$ *и* $3\alpha = 1$. *Тогда, если выполнены условия* (2.3.14), (2.3.15) *и*

$$\sqrt{\Big(\mathrm{M}\big[Q(x)\big(\int P(x)dx\big)^2\big]\Big)^2 + \Big(\mathrm{M}\big[P(x)\big(\int Q(x)dx\big)^2\big]\Big)^2} > \frac{1}{4}, \tag{2.3.16}$$

то для $\lambda = 0$ *имеет место свойство* $\mathcal{A}$. *Кроме того, если выполнены условия* (2.3.14), (2.3.15) *и имеет место неравенство, противоположное* (2.3.16), *то* $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

Доказательство. Схема доказательства аналогична схеме доказательства теоремы 2.2.1. Единственным отличием является тот факт, что нам нет необходимости изменять спектральный параметр λ, поскольку $\lambda = 0$. Мы попросту находим ведущую матрицу в системе

(2.3.5) и строим асимптотику фундаментальной матрицы этой системы. Таким образом, мы получаем асимптотику фундаментальной матрицы системы Дирака (2.3.1) и можем сделать выводы о существовании у этой системы решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$.

A. $\alpha<\beta<1$. **(A'.** $\alpha<\beta=1$.**)**

Ведущей матрицей в системе (2.3.5) является матрица $A_1v_1(x)$. Предположим, что $A_1\neq 0$, т. е.

$$p_0=\mathrm{M}\big[P(x)\big]\neq 0. \tag{2.3.17}$$

Собственные числа матрицы A_1 имеют вид

$$\mu_{1,2}=\pm p_0.$$

Используя теорему Левинсона, получаем следующую асимптотику для фундаментальной матрицы $W(x)$ системы (2.3.5) при $x\to\infty$:

$$W(x)=\Big[I+o(1)\Big]\exp\Big\{\frac{p_0}{1-\alpha}\operatorname{diag}\big(1+o(1),-1+o(1)\big)x^{1-\alpha}\Big\}.$$

Следовательно, система Дирака (2.3.1) имеет решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, если выполнено неравенство (2.3.17).

Пусть теперь

$$p_0=\mathrm{M}\big[P(x)\big]=0. \tag{2.3.18}$$

В силу утверждения 2.3.1 с учетом формул (2.2.17), (2.2.19), (2.3.3), (2.3.18) мы заключаем, что все постоянные матрицы $A_{1(l)}$ $(l\geq 1)$ в усредненной системе (2.3.5) являются нулевыми. Отсюда выводим, что ведущим членом в системе (2.3.5) является матрица $A_2v_2(x)$.

Предположим, что

$$q_0=\mathrm{M}\big[Q(x)\big]\neq 0. \tag{2.3.19}$$

Аналогично тому, как это делалось ранее, получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы $W(x)$ системы (2.3.5) при $x\to\infty$:

$$W(x)=\Big[C_0+o(1)\Big]\exp\Big\{q_0\operatorname{diag}\big(1+o(1),-1+o(1)\big)\int x^{-\beta}dx\Big\}.$$

Здесь матрица C_0 приводит матрицу A_2 к диагональной форме. Легко видеть, что в силу(2.3.19) в рассматриваемом случае у системы Дирака (2.3.1) всегда существуют решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, если $\beta<1$. Если же $\beta=1$, то подобные решения существуют лишь при условии

$$|q_0|>\frac{1}{2}.$$

Очевидно, что, если $\beta = 1$, $p_0 = 0$ и $|q_0| \le 1/2$, то система Дирака (2.3.1) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Следовательно, в этом случае $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

Таким образом, в дальнейшем нам необходимо исследовать случай, когда выполнено условие (2.3.14), т. е.

$$p_0 = q_0 = 0.$$

Заметим, что в этом случае все матрицы $A_{1(l)}$ и $A_{2(l)}$ ($l \ge 1$) в системе (2.3.5) являются нулевыми матрицами, что следует из условия (2.3.14) и утверждения 2.3.1 (см. также (2.2.17), (2.2.19), (2.2.20) и (2.3.3)). Таким образом, ведущим слагаемым в системе (2.3.5) становится матрица $A_{12}v_1(x)v_2(x)$, и нам следует рассмотреть два случая.

A.1. $\alpha < \beta \le 1$ и $\alpha + \beta > 1$.

Из (2.3.14) следует, что система (2.3.5) имеет L-диагональный вид

$$w' = R_2(x)w, \tag{2.3.20}$$

где матрица $R_2(x)$ принадлежит классу $L_1[x_0,\infty)$. Используя теорему Левинсона, получаем следующую асимптотику для фундаментальной матрицы $W(x)$ этой системы:

$$W(x) = I + o(1), \qquad x \to \infty. \tag{2.3.21}$$

Следовательно, система Дирака (2.3.1) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Это означает, что $\lambda = 0$ не принадлежит множеству $\sigma(D)$.

A.2. $\alpha < \beta < 1$ и $\alpha + \beta \le 1$.

Нам необходимо получить явный вид матрицы A_{12}. Напомним, что матрица A_{12} задается формулой

$$A_{12} = \mathrm{M}\big[A_1(x)Y_2(x) + A_2(x)Y_1(x)\big].$$

Поскольку матрицы $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ являются решениями уравнений $Y_1' = A_1(x)$, $Y_2' = A_2(x)$ с нулевым средним значением, мы получаем следующее представление для интересующей нас матрицы:

$$A_{12} = \mathrm{M}\left[P(x)\int Q(x)dx\,\hat{A}_1\hat{A}_2 + Q(x)\int P(x)dx\,\hat{A}_2\hat{A}_1\right].$$

Здесь символом $\int$ обозначена первообразная (периодическая или почти периодическая функция) с нулевым средним значением. Заметим, что

$$\mathrm{M}\big[P(x)\int Q(x)dx\big] = -\,\mathrm{M}\big[Q(x)\int P(x)dx\big].$$

Это равенство проверяется простым интегрированием по частям аналогично тому, как это делалось при доказательстве утверждения 2.3.1. Несложные вычисления показывают, что

$$A_{12} = \mathrm{M}\big[P(x)\int Q(x)dx\big]\Big(\hat{A}_1\hat{A}_2 - \hat{A}_2\hat{A}_1\Big) = 2\,\mathrm{M}\Big[P(x)\int Q(x)dx\Big]\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.3.22)$$

Собственные числа матрицы A_{12} чисто мнимые и имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \pm 2\mathrm{i}\chi,$$

где

$$\chi = \mathrm{M}\Big[P(x)\int Q(x)dx\Big] = \frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{\omega_s+\nu_r=0}\frac{p_s q_r}{\nu_r}.$$

Собственные числа матрицы

$$A_{12}v_1(x)v_2(x) + A_{112}v_1^2(x)v_2(x) + A_{122}v_1(x)v_2^2(x) + \ldots,$$

где многоточием обозначены слагаемые, которые не принадлежат $L_1[x_0,\infty)$ и имеют более высокий порядок малости на бесконечности, также являются чисто мнимыми при достаточно больших x. Это следует из того факта, что все постоянные матрицы $A_{1(j_1)2(j_2)}$, в отличии от случая $\lambda \neq 0$, являются действительными и их след равен нулю (см. теорему 1.2.2).

Предположим, что условие (2.3.15) не выполнено, т. е. $\chi \neq 0$. Тогда фундаментальная матрица $W(x)$ системы (2.3.5) имеет следующую асимптотику при $x \to \infty$:

$$W(x) = \Big[C_0 + o(1)\Big]\exp\Big\{2\mathrm{i}\chi\,\mathrm{diag}\big(1+o(1), -1+o(1)\big)\int x^{-(\alpha+\beta)}dx\Big\}. \qquad (2.3.23)$$

Следовательно, система Дирака (2.3.1) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, если выполнено условие (2.3.14), а условие (2.3.15) не выполнено. В этом случае $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.2.1. $\alpha < \beta < 1$, $\alpha + \beta \leq 1$ и $2\alpha + \beta > 1$.

Пусть выполнено условие (2.3.14). Тогда из утверждения **A.2.** этой теоремы следует, что система Дирака (2.3.1) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ при условии $\chi \neq 0$. Предположим теперь, что имеет место равенство (2.3.15), т. е. $\chi = 0$. Тогда $A_{12} = 0$ и система (2.3.5) имеет L-диагональную форму (2.3.20). Фундаментальная матрица $W(x)$ этой системы описывается асимптотической формулой (2.3.21). Значит, система Дирака (2.3.1) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Отсюда следует, что $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

A.2.2. $\alpha < \beta < 1$ и $2\alpha + \beta < 1$. **(A.2.2'.** $\alpha < \beta < 1$ и $2\alpha + \beta = 1$.)

В силу (2.3.14), (2.3.15) и утверждения 2.3.1 матрицы A_{12}, $A_{1(l)}$ и $A_{2(l)}$ ($l \geq 1$) в системе (2.3.5) являются нулевыми. Поэтому нам необходимо определить матрицу A_{112}. Вспоминая формулу (2.2.21), получаем

$$A_{112} = \mathrm{M}\big[A_1(x)Y_{12}(x) + A_2(x)Y_{11}(x)\big].$$

Здесь

$$Y_{12}' = A_1(x)Y_2(x) + A_2(x)Y_1(x), \qquad Y_{11}' = A_1(x)Y_1(x),$$

и $Y_1' = A_1(x)$, $Y_2'(x) = A_2(x)$. Учитывая (2.3.3), а также равенства

$$\hat{A}_1^2 = \hat{A}_2^2 = I, \qquad \hat{A}_1\hat{A}_2 = -\hat{A}_2\hat{A}_1, \tag{2.3.24}$$

приходим к следующему выражению для матрицы A_{112}:

$$A_{112} = \gamma\hat{A}_2, \tag{2.3.25}$$

где

$$\gamma = \mathrm{M}\left[P(x)\int P(x)\Big(\int Q(x)dx\Big)dx\right] + \mathrm{M}\left[Q(x)\int P(x)\Big(\int P(x)dx\Big)dx\right] - \\ - \mathrm{M}\left[P(x)\int Q(x)\Big(\int P(x)dx\Big)dx\right]. \tag{2.3.26}$$

Несложно получить более компактное выражение для величины γ. Именно,

$$\gamma = 2\,\mathrm{M}\Big[Q(x)\Big(\int P(x)dx\Big)^2\Big]. \tag{2.3.27}$$

Собственные числа матрицыA_{112} имеют вид $\mu_{1,2} = \pm\gamma$. Предположим далее, что

$$\gamma \neq 0.$$

Фундаментальная матрица $W(x)$ системы (2.3.5) имеет следующее асимптотическое представление при $x \to \infty$:

$$W(x) = \Big[C_0 + o(1)\Big]\exp\Big\{\gamma\,\mathrm{diag}\big(1 + o(1), -1 + o(1)\big)\int x^{-(2\alpha+\beta)}dx\Big\}.$$

Здесь матрица C_0 приводит матрицу A_{112} к диагональной форме. В этом случае система Дирака (2.3.1) имеет решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, если $2\alpha + \beta < 1$. Если же $2\alpha + \beta = 1$, то решения такого вида существуют лишь в том случае, когда

$$|\gamma| > \frac{1}{2}.$$

В этой ситуации для $\lambda = 0$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Очевидно, что, если $2\alpha + \beta = 1$ и $|\gamma| \le 1/2$, то система Дирака (2.3.1) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$. Следовательно, $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

Если

$$\gamma = 0,$$

то анализ системы (2.3.5) следует продолжить. Здесь мы этой задачей заниматься не будем.

B. $\alpha = \beta < 1$. **(B'.** $\alpha = \beta = 1$.**)**

В данной ситуации функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ тождественно совпадают. Следовательно, главная часть системы (2.3.5), т. е. матрица (2.2.30), приобретает вид (2.2.56). Главным слагаемым в системе (2.3.5) является матрица $\big(A_1 + A_2\big)v_1(x)$. Эта матрица отлична от нулевой при условии, что

$$p_0 = \mathrm{M}\big[P(x)\big] \neq 0 \quad \text{или} \quad q_0 = \mathrm{M}\big[Q(x)\big] \neq 0. \tag{2.3.28}$$

В этом случае собственные числа матрицы $A_1 + A_2$ имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{p_0^2 + q_0^2}.$$

Фундаментальная матрица $W(x)$ системы (2.3.5) допускает следующее асимптотическое представление при $x \to \infty$: $x \to \infty$:

$$W(x) = \Big[C_0 + o(1)\Big] \exp\Big\{\mathrm{diag}\big(\mu_1 + o(1), \mu_2 + o(1)\big) \int x^{-\alpha} dx\Big\}. \tag{2.3.29}$$

Здесь матрица C_0 приводит матрицу $A_1 + A_2$ к диагональному виду. Из представления (2.3.29) следует, что у одномерной системы Дирака (2.3.1) при условии (2.3.28) всегда существуют решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, если $\alpha < 1$. Если $\alpha = 1$, то эти решения существуют лишь тогда, когда

$$\sqrt{p_0^2 + q_0^2} > \frac{1}{2}.$$

Предположим теперь, что выполнено условие (2.3.14). В силу утверждения 2.3.1 все постоянные матрицы $A_{1(l)}$ и $A_{2(l)}$ ($l \ge 1$) являются нулевыми. Ведущей матрицей в системе (2.3.5) становится матрица $A_{12}v_1^2(x)$. Напомним, что матрица A_{12} определяется формулой (2.3.22). Далее необходимо рассмотреть несколько вариантов.

B.2.1. $\alpha = \beta < 1$, $2\alpha \le 1$ и $3\alpha > 1$.

Этот случай рассматривается аналогично случаю **A.2.1.** В этой ситуации система Дирака (2.3.1) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ и, следовательно, $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

B.2.2. $\alpha = \beta < 1$ и $3\alpha < 1$. **(B.2.2'.** $\alpha = \beta < 1$ и $3\alpha = 1$.)

Из (2.3.14), (2.3.15) и утверждения 2.3.1 следует, что все матрицы A_{12}, $A_{1(l)}$ и $A_{2(l)}$ ($l \geq 1$) в системе (2.3.5) являются нулевыми. Ведущим слагаемым в системе (2.3.5) становится матрица $\big(A_{112} + A_{122}\big)v_1^3(x)$. Матрица A_{112} определяется формулой (2.3.25). Несложно проверить, что матрица A_{122}, в свою очередь, описывается формулой

$$A_{122} = \vartheta \hat{A}_1.$$

Здесь величина ϑ определяется формулами (2.3.26), (2.3.27), где функции $P(x)$ и $Q(x)$ следует поменять местами. Таким образом, мы получаем следующую формулу для матрицы $A_{112} + A_{122}$:

$$A_{112} + A_{122} = \begin{pmatrix} \vartheta & \gamma \\ \gamma & -\vartheta \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{\gamma^2 + \vartheta^2}.$$

Предположим, что

$$\gamma \neq 0 \quad \text{или} \quad \vartheta \neq 0.$$

Фундаментальная матрица $W(x)$ системы (2.3.5) имеет следующее асимптотическое представление:

$$W(x) = \Big[C_0 + o(1)\Big] \exp\Big\{\operatorname{diag}\big(\mu_1 + o(1), \mu_2 + o(1)\big) \int x^{-3\alpha} dx\Big\}, \qquad x \to \infty.$$

Здесь матрица C_0 приводит матрицу $A_{112} + A_{122}$ к диагональному виду. Следовательно, система Дирака (2.3.1) имеет решения из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$ при условии $\alpha < 1/3$. В этом случае для $\lambda = 0$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Если $\alpha = 1/3$, то решения из класса $L_2\big((0,\infty), \mathbb{C}^2\big)$ существуют лишь в том случае, когда

$$\sqrt{\gamma^2 + \vartheta^2} > \frac{1}{2}.$$

В ситуации, когда

$$\gamma = \vartheta = 0,$$

исследование системы (2.3.5) необходимо продолжить. Мы не будем на этом останавливаться.

Теорема доказана.

■

Замечание 1. Случай $\beta < \alpha$ может быть рассмотрен совершенно аналогично случаю $\alpha < \beta$. При необходимости такая работа может быть проделана.

Замечание 2. Заметим, что постоянные матрицы $A_{1(j_1)2(j_2)}$ в системе (2.3.5), а также матрицы $Y_{1(j_1)2(j_2)}(x)$ в усредняющей замене (2.3.4) имеют следующую структуру:

$$A_{1(j_1)2(j_2)} = c\hat{A}_1^{j_1}\hat{A}_2^{j_2}, \qquad Y_{1(j_1)2(j_2)}(x) = y(x)\hat{A}_1^{j_1}\hat{A}_2^{j_2}. \tag{2.3.30}$$

Здесь c — некоторое действительное число, которое зависит от набора индексов $\big(1(j_1)2(j_2)\big)$, а $y(x)$ — некоторая действительная функция, которая также зависит от набора индексов $\big(1(j_1)2(j_2)\big)$. В этом несложно убедиться, если воспользоваться индукцией и учесть формулы (2.2.17), (2.2.19) — (2.2.21), а также соотношения (2.3.24). В частности, из (2.3.24), (2.3.30) и теоремы 1.2.2 следует, что если j_1 и j_2 четны, то соответствующая матрица $A_{1(j_1)2(j_2)}$ нулевая. Легко заметить, что решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ у системы Дирака (2.3.1) могут появиться лишь в том случае, когда ведущей (одной из ведущих) матрицей в системе (2.3.5) становится матрица $A_{1(j_1)2(j_2)}$, у которой j_1 — четно, j_2 — нечетно или наоборот. При этом должны выполняться некоторые дополнительные соотношения. Во-первых, матрица $A_{1(j_1)2(j_2)}$ должна быть ведущей в системе (2.3.5), т. е. должны обращаться в нуль те матрицы в (2.3.5), которые имеют меньший порядок малости на бесконечности. Так мы получаем условия вида «$c = 0$» (см., например, (2.3.14), (2.3.15)). Во-вторых, необходимо, чтобы матрица $A_{1(j_1)2(j_2)}$ была ненулевой. Отсюда мы получаем условие типа «$c \neq 0$» в представлении (2.3.30). Наконец, произведение $v_1^{j_1}(x)v_2^{j_2}(x)$ не должно принадлежать классу $L_1[x_0,\infty)$, и мы получаем неравенство вида $j_1\alpha + j_2\beta \leq 1$.

Замечание 3. Предположим, что $P(x) \equiv aQ(x)$, где a — некоторая действительная постоянная. Кроме того, пусть $p_0 = \mathrm{M}\big[P(x)\big] = 0$. Вспоминая утверждение 2.3.1, а также формулы (2.2.17), (2.2.19) — (2.2.21), заключаем, что все постоянные матрицы в главной части усредненной системы (2.3.5) суть нулевые. Следовательно, при любых значениях параметров $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ система (2.3.5) имеет вид (2.3.20). Отсюда выводим, что фундаментальная матрица этой системы $W(x)$ при $x \to \infty$ имеет асимптотику вида (2.3.21). Значит, система Дирака (2.3.1) не имеет решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ и поэтому $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$.

2.4 Выводы и примеры

В этой главе мы получили явные выражения для тех λ, которые при подходящем выборе параметра ξ в краевом условии (2.1.6) являются собственными числами оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6). Как и следовало ожидать, соответствующие числа определяются как

некоторые комбинации показателей Фурье функций $P(x)$ и $Q(x)$. Кроме того, мы получили некоторые дополнительные условия, которым в этом случае должны удовлетворять собственные числа λ, а также функции $P(x)$, $Q(x)$ и параметры α и β. Эти условия позволяют, в частности, исключить те λ, которые заведомо не могут являться собственными значениями оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) ни при каком выборе ξ в краевом условии (2.1.6).

Как и в предыдущем разделе, обозначим множество всех собственных значений оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) при некотором фиксированном $\xi \in [0, \pi)$ символом $\sigma(D)$. Кроме того, обозначим через $\sigma'(D)$ множество $\sigma(D)\backslash\{0\}$. Ниже мы приводим несколько примеров, в которых строится множество M, такое что $\sigma(D) \subset M$.

Пример 1. Пусть $P(x) \equiv p_0 \neq 0$ и $Q(x) \equiv q_0 \neq 0$. Из утверждения 2.2.2 следует, что при любом выборе параметров $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ у соответствующего оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) не существует собственных чисел $\lambda \neq 0$. Из теоремы 2.3.1 (утверждения **A.**, **A'.**, **B.**, **B'.**) выводим, что для $\lambda = 0$ может иметь место свойство $\mathcal{A}$, если $\alpha \leq \beta \leq 1$. Нетрудно показать, что, если $\beta \leq \alpha \leq 1$, то для $\lambda = 0$ также может быть выполнено свойство $\mathcal{A}$. Таким образом, мы приходим к следующему выводу. Если $0 < \alpha \leq 1$ и $0 < \beta \leq 1$ фиксированы, то $\sigma(D)$ либо пусто, либо $\sigma(D) = \{0\}$.

Пример 2. Пусть $P(x) = a \sin 2x$, $Q(x) = b \cos x$, где $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Обращаясь к теореме 2.2.1, построим следующие множества:

$$\Omega_1 = \{-1, 1\}, \quad \Omega_2 = \{-1/2, 1/2\}, \quad \Omega_2^{(1)} = \begin{cases} \{-1/2, 1/2\}, & |b| > 1, \\ \varnothing, & |b| \leq 1, \end{cases}$$

$$\Omega_2^{(2)} = \begin{cases} \{-1/2, 1/2\}, & |b| > (1/3)a^2, \\ \varnothing, & |b| \leq (1/3)a^2, \end{cases},$$

$$\Omega_2^{(3)} = \begin{cases} \{-1/2, 1/2\}, & \sqrt{b^2 - a^4/9} > 1, \\ \varnothing, & \sqrt{b^2 - a^4/9} \leq 1, \end{cases}$$

$$\Omega_2^{(4)} = \begin{cases} \{-1, 1\}, & |a| > 1,\ |b| \leq 1, \\ \{-1, -1/2, 1/2, 1\}, & |a| > 1,\ |b| > 1, \\ \{-1/2, 1/2\}, & |a| \leq 1,\ |b| > 1, \\ \varnothing, & |a| \leq 1,\ |b| \leq 1, \end{cases}$$

$$\Omega_4 = \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda = \frac{h_{i_1} + h_{i_2} + \ldots + h_{i_s}}{2} \text{ для некоторых } i_1, i_2, \ldots i_s \in \mathbb{Z}, \text{ где } s \geq 3 \text{ нечетно и } h_{i_m} \in \{-2, -1, 1, 2\} \Big\},$$

$$\Gamma_1 = \varnothing, \quad \Gamma_4 = \begin{cases} \{-1/2, 1/2\}, & |b| = (1/3)a^2, \\ \varnothing, & |b| \neq (1/3)a^2, \end{cases}$$

$$\Gamma_5 = \Big\{ \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \;\Big|\; \lambda^2 = \frac{a^2 + 4b^2}{4a^2 + 4b^2} \;\; \& \;\; \lambda \neq \pm\frac{1}{2}, \pm 1 \Big\}.$$

Рассмотрим следующие случаи.

- $\alpha < 2\alpha < \beta \leq 1$

Необходимо провести анализ всех утверждений в теореме 2.2.1, начинающихся с **A.1.** Поскольку множество Γ_1 пусто, мы сразу же заключаем что $\sigma'(D) \subset \Omega_1$ и для $\lambda \in \Omega_1$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.

- $\alpha < \beta < 2\alpha$

В этом случае необходимо обратиться к утверждениям теоремы 2.2.1, начинающимся с **A.2.** Мы заключаем, что, если $\beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Если $\beta = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$ и свойство $\mathcal{A}$ имеет место для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(1)}$.

- $\alpha < 2\alpha = \beta \leq 1$

На сей раз нужно обратиться к утверждениям **A.3.** и **A.3'.** Откуда выводим, что, если $\beta = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(3)}$ выполнено свойство $\mathcal{A}$. Если $\beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)} \cup (\Omega_2 \cap \Gamma_4) \cup (\Omega_4 \cap \Gamma_4)$ и свойство $\mathcal{A}$ имеет место для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)}$. Это означает, что $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2^{(2)}$, если $|b| \neq (1/3)a^2$, и $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$, если $|b| = (1/3)a^2$.

- $\alpha = \beta \leq 1$

Нам следует рассмотреть утверждения теоремы 2.2.1, начинающиеся с **B.** В этом случае мы приходим к следующим результатам. Если $\alpha = \beta = 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_2^{(4)}$ и свойство $\mathcal{A}$ выполнено для $\lambda \in \Omega_2^{(4)}$. Далее, нетрудно видеть, что, если $\lambda \in \Gamma_5$, то $|\lambda| < 1$. Если мы теперь вспомним вид множества Ω_4, то придем к выводу, что $\Gamma_5 \cap \Omega_4 = \varnothing$. Следовательно, если $\alpha = \beta < 1$, то $\sigma'(D) \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ и для $\lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.

Таким образом в этом примере ненулевыми собственными значениями оператора Дирака (2.1.1), (2.1.6) могут быть лишь числа вида $\omega_j/2$ или $\nu_j/2$ (т. е. ± 1 или $\pm 1/2$). Для исследования случая $\lambda = 0$ нам необходимо воспользоваться теоремой 2.3.1. В этой связи отметим, что $\{\lambda = 0\} \notin \sigma(D)$, во всяком случае, когда $2\alpha + \beta > 1$. Это непосредственно следует из утверждений **A.2.1.** и **B.2.1.** теоремы 2.3.1.

Случай $\beta < \alpha$ нами здесь исследоваться не будет.

В заключительном примере мы покажем, что, если $P(x)$ и $Q(x)$ являются тригонометрическими многочленами, то оператор Дирака (2.1.1), (2.1.6) может иметь ненулевые собственные значения $\lambda \neq \omega_j/2$ и $\lambda \neq \nu_j/2$.

Пример 3. Пусть $P(x) = \sin x + \sin 7x$ и $Q(x) = \cos 2x$. Предположим, что $\alpha < 3\alpha < \beta < 1$. В этом случае нам необходимо воспользоваться утверждением **A.1.2.** теоремы 2.3.1. Мы не будем рассматривать этот пример подробно, а заметим лишь следующее. Легко проверить, что $\Omega_1 = \{-7/2, -1/2, 1/2, 7/2\}$, $\{\lambda = 5/2\} \in \Omega_3$ и $\Gamma_1 = \{-5/2, 5/2\}$. Кроме того, если мы вычислим величину (2.2.45) при $\lambda = 5/2$, то получим для нее значение $\varsigma = -(5/288)\mathrm{i}$. Следовательно, $\{\lambda = 5/2\} \in \Gamma_2^c$ и в силу утверждения **A.1.2.** теоремы 2.3.1 для $\lambda = 5/2$ выполнено свойство $\mathcal{A}$.

В завершение этой главы отметим, что исследованная нами задачи о возникновении у системы (2.1.7) решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ тесно связана с задачей о параметрическом резонансе в линейных системах с колебательно убывающими коэффициентами. Напомним, что явление параметрического резонанса возникает при некотором подходящем внешнем воздействии на параметры системы и сопровождается появлением неограниченных решений. Заметим, что если систему (2.1.7) представить в виде (2.2.2), то матрица $-\lambda B$ — это слагаемое, которое определяет собственные колебания системы, а матрица $A(x) + R(x)$ играет роль некоторого малого воздействия на параметры системы. Возникновение решений из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$ у системы (2.1.7), как следует из построенных нами в этой главе асимптотических формул, всегда сопровождается появлением неограниченных по норме решений. Следовательно, при том выборе параметров в системе (2.1.7), при котором существуют решения из класса $L_2\big((0,\infty),\mathbb{C}^2\big)$, в этой же системе наблюдается явление параметрического резонанса.

Более подробно явление параметрического резонанса в системах с колебательно убывающими коэффициентами на примере так называемых адиабатических осцилляторов обсуждается в следующей главе.

Глава 3

Асимптотическое исследование возмущенного гармонического осциллятора

3.1 Особенности параметрического резонанса в адиабатических осцилляторах

Возникновение неограниченно возрастающих колебаний динамической системы при сколь угодно малом периодическом (почти периодическом) возмущении некоторых ее параметров называют параметрическим резонансом. Теория линейного параметрического резонанса довольно хорошо изучена (Матье, Хилл, Хаупт (Haupt), Л.И. Мандельштам, Н.Д. Папалекси, А.А. Андронов, А.А. Витт и др.). Классическим примером системы с одной степенью свободы, в которой наблюдается явление параметрического резонанса, является уравнение Матье

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \big[1 + \varepsilon\cos\lambda t\big]x = 0, \tag{3.1.1}$$

где $\lambda > 0$ — вещественный параметр, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Это уравнение имеет огромное количество практических приложений, как классических, так и современных (см. [108]). Известно (см., например, [4, 60]), что в этом уравнении для любого сколь угодно малого ε можно указать счетное множество интервалов частот λ, при которых нулевое решение этого уравнения неустойчиво (см. рис. 3.1.1). Таким образом, спектр частот, при которых возникают неограниченно возрастающие колебания, не является точечным, а состоит из совокупности малых интервалов, длины которых зависят от амплитуды возмущений (т.е. от ε). При $\varepsilon \to 0$ интервалы частот, при которых в уравнении (3.1.1) наблюдается параметрический резонанс, стремятся к критическим частотам $\lambda = \lambda_n = 2/n$, $n \in \mathbb{N}$. Другая особенность параметрического резонанса состоит в том, что колебания нарастают по экспоненциальному закону.

Уравнения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \big(1 + q(t)\big)x = 0, \tag{3.1.2}$$

где функция $q(t)$ мала в некотором смысле при $t \to \infty$ называют обычно адиабатическими

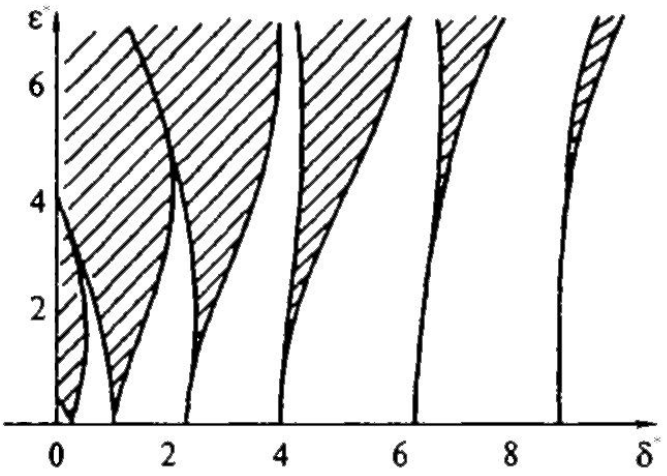

Рис. 3.1.1. Зоны неустойчивости (заштрихованы) в уравнении Матье (3.1.1). Здесь $\varepsilon^* = \dfrac{\varepsilon}{\lambda^2}$ и $\delta^* = \dfrac{1}{\lambda^2}$

осцилляторами. Считается, что этот термин был предложен Е. Вигнером и Дж. фон Нейманом [148]. Известно (см., например, [1,169,170]), что если

$$\int_{t_0}^{\infty} |q(t)|dt < \infty, \tag{3.1.3}$$

то фундаментальные решения уравнения (3.1.2) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)e^{\pm it}. \tag{3.1.4}$$

В том случае, когда $q(t) \notin L_1[t_0, \infty)$, уравнение (3.1.2) может иметь неограниченные при $t \geq t_0$ решения. Подобный пример доставляет адиабатический осциллятор с функцией

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho} \sin \lambda t, \qquad a \neq 0, \tag{3.1.5}$$

где a, λ, ρ — вещественные числа и $\rho > 0$. Известно (см. [6,106,116–118]), что если $(\lambda = \pm 2)$ и $(\rho \leq 1)$ или $(\lambda = \pm 1)$ и $(\rho \leq 1/2)$, уравнение (3.1.2) с функцией $q(t)$ вида (3.1.5) имеет неограниченные решения при любых значениях параметра $a \neq 0$. Говорят, что при данных значениях параметров в уравнении (3.1.5) имеет место параметрический резонанс. Если $\lambda \neq \pm 1, \pm 2$, то все решения этого уравнения ограничены и не стремятся к нулю при $t \to \infty$ (осциллируют). Аналогичные утверждения справедливы и для уравнения (3.1.2) с функцией

$$q(t) = \frac{a}{t^\rho} \cos \lambda t, \qquad a \neq 0, \tag{3.1.6}$$

где $a, \lambda, \rho \in \mathbb{R}$.

Уравнение (3.1.2), (3.1.6), хоть и имеет внешнее сходство с (3.1.1), относится все же к уравнениям совсем другого класса (его коэффициенты, в частности, не являются периодическими или почти периодическими функциями). Это обстоятельство оказывает влияние на особенности проявления параметрического резонанса как в уравнении вида (3.1.2), так и в других системах с колебательно убывающими коэффициентами. В частности, для уравнения (3.1.2), (3.1.6) в отличии от (3.1.1) параметрический резонанс имеет точечный тип: появление неограниченных решений возможно лишь при значениях λ из конечного множества $\{\pm 1, \pm 2\}$. Другая особенность параметрического резонанса в уравнениях вида (3.1.2) состоит в том, что рост амплитуды колебаний может происходить с различной скоростью (логарифмической, степенной, экспоненциальной и т. д.). Тем не менее причина возникновения неограниченных колебаний в уравнения вида (3.1.2) та же самая, что и в случае «классического» параметрического резонанса — малые колебательные возмущения коэффициентов системы.

Осцилляторы вида (3.1.2) возникают в различных задачах квантовой механики, где их часто называют квантовыми осцилляторами (см. [17, 40, 166]). К уравнению вида (3.1.2) сводится также спектральная задача для одномерного оператора Шредингера с так называемым потенциалом типа Вигнера–фон Неймана. Усилению интересу к исследованию уравнений (3.1.2) немало способствовала классическая работа Вигнера и фон Неймана [148]. Авторами предложен пример одномерного оператора Шредингера (см. также [43])

$$-\frac{d^2}{dx^2} + V(x), \quad V(x) = -\frac{8\sin 2x}{x} + O\big(x^{-2}\big),$$

который имеет собственное значение $\lambda = 1$ (вложенное собственное значение) на непрерывном спектре $[0, \infty)$. Это собственное значение определяется из уравнения (одномерное уравнение Шредингера)

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + V(x)y = \lambda y, \tag{3.1.7}$$

как то значение параметра λ, при котором существует такое решение этого уравнение $y(x)$, что $y^2(x) \in L_1[0, \infty)$. Как оказывается, задача отыскания вложенных собственных значений на непрерывном спектре для одномерного оператора Шредингера тесно связана с задачей поиска значений λ, при которых в уравнении (3.1.7) реализуется параметрический резонанс. После работы Вигнера и фон Неймана колебательно убывающие потенциалы $V(x)$ стали называть потенциалами типа Вигнера–фон Неймана. Исследованию спектральных свойств одномерного оператора Шредингера с потенциалами типа Вигнера–фон Неймана посвящено множество исследований. Отметим, в частности, работу [46], в которой для решения задачи уравнение вида (3.1.2) сначала приводится к уравнению Хилла — этот метод использовался

затем несколькими авторами. Среди недавних работ, посвященных изучению спектральных свойств оператора Шредингера, выделим обзор [98], а также работы [129, 133]. К слову, долгое время было неясно, существуют ли реальные квантово-механические системы, описываемые уравнениями вида (3.1.7). В работе [150] показано, что связанные состояния с положительной энергией наблюдаются, например, в полупроводниковых гетероструктурах, выращенных методом молекулярно-лучевой эпитаксии.

Изучению свойств адиабатических осцилляторов (3.1.2) с различными функциями $q(t)$ посвящены и работы автора [34, 81], в которых, в том числе, рассматривалось уравнение (3.1.2) с функцией $q(t)$ вида

$$q(t) = a\frac{\sin(t + \alpha \ln t)}{\sqrt{t}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.1.8}$$

Адиабатический осциллятор (3.1.2), (3.1.8) впервые появился в работе [62] при исследовании четвертого уравнения Пенлеве. В [34, 81] показано, что для любого значения $a \neq 0$ можно указать целый интервал значений α, при которых в уравнении (3.1.2), (3.1.8) возникают неограниченные колебания. Зона параметрического резонанса (неустойчивости решений) для этого уравнения задается неравенствами (см. рис. 3.1.2):

$$-\frac{5a^2}{24} \leq \alpha \leq \frac{a^2}{24}, \quad a \neq 0. \tag{3.1.9}$$

Таким образом, в адиабатических осцилляторах (3.1.2) в плоскости параметров могут возникать области неустойчивости, содержащие внутренние точки.

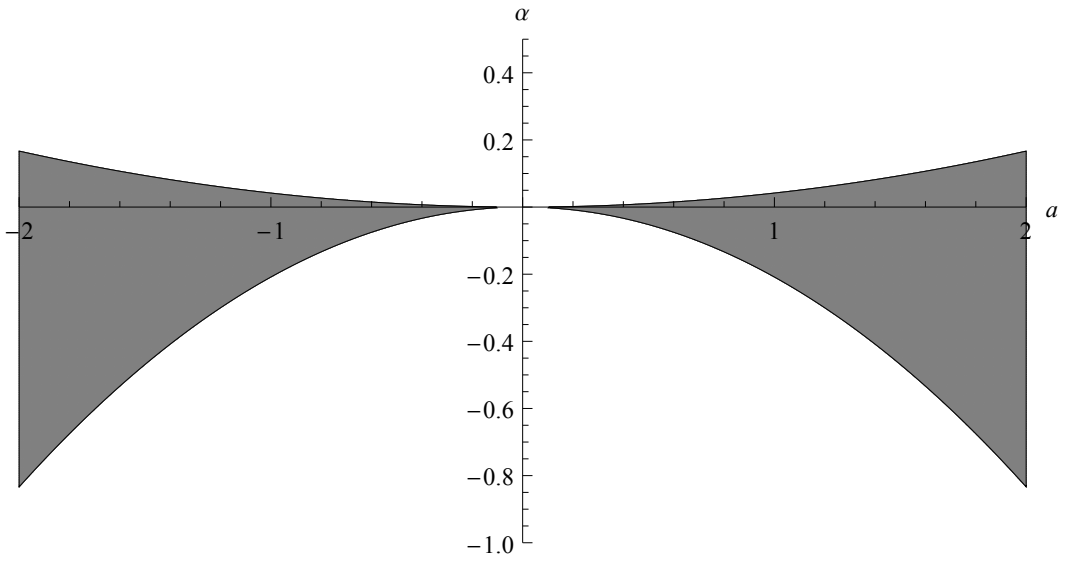

Рис. 3.1.2. Зона параметрического резонанса (3.1.9) для уравнения (3.1.2), (3.1.8)

3.2 Параметрический резонанс в гармоническом осцилляторе с переменной частотой собственных колебаний

В этом разделе будет продолжено исследование явления параметрического резонанса в адиабатических осцилляторах (3.1.2). Мы покажем, что в гармоническом осцилляторе с переменной частотой собственных колебаний под действием убывающего во времени внешнего воздействия могут возникать резонансные частоты (т.е. частоты λ, при которых существует неограниченные решения), которые отсутствуют в аналогичном осцилляторе с постоянной частой собственных колебаний. Именно, рассматривается гармонической осциллятор с переменной частотой под действием внешней силы (3.1.6):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \Big(\omega^2(t) + \frac{a}{t^\rho}\cos\lambda t\Big)x = 0, \qquad a \neq 0, \tag{3.2.1}$$

где $a, \lambda, \rho \in \mathbb{R}$ и $0 < \rho \leq 1$. Мы будем предполагать, что функция $\omega^2(t)$, описывающая частоту собственных колебаний, является переменной величиной и допускает при $t \to \infty$ представление вида

$$\omega^2(t) = 1 + \frac{\omega_1}{t^\rho} + \frac{\omega_2}{t^{2\rho}} + \ldots + \frac{\omega_s}{t^{s\rho}} + r(t) \tag{3.2.2}$$

для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Здесь $\omega_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, s$, а функция $r(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Мы покажем, что в уравнении (3.2.1) могут существовать резонансные частоты, отличные от $\lambda = \pm 1, \pm 2$ (сравни с (3.1.2), (3.1.6)). В дальнейшем будем считать, что в уравнении (3.2.1) параметр $\lambda > 0$.

От уравнения (3.2.1) перейдем к системе стандартным образом:

$$\dot{y}_0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] y_0, \qquad y_0 = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \tag{3.2.3}$$

где функция $q(t)$ определяется формулой (3.1.6). Заметим сначала, что если в уравнении (3.2.1) отсутствует возмущающий член (т.е. $q(t) = 0$), то линейно независимые решения этого уравнения допускают следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)\exp\Big\{\pm \mathrm{i}\Big(t + O\Big(\int t^{-\rho}dt\Big)\Big)\Big\}. \tag{3.2.4}$$

Действительно, в этом случае система (3.2.3) может быть записана в виде (1.1.1), где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad V(t) = \big(\omega_1 t^{-\rho} + \ldots + \omega_s t^{-s\rho}\big)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R(t) = r(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2.5}$$

Следовательно, асимптотика фундаментальной матрицы системы (3.2.3) при $t \to \infty$ определяется формулой (1.1.8), в которой

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad \Lambda(t) = \sqrt{1 + \omega_1 t^{-\rho} + \ldots + \omega_s t^{-s\rho}}\, \operatorname{diag}(\mathbf{i}, -\mathbf{i}) = \big(1 + O\big(t^{-\rho}\big)\big) \operatorname{diag}(\mathbf{i}, -\mathbf{i}).$$

Таким образом, все решения уравнения (3.2.1) в этом случае ограничены.

Пусть далее $q(t) \neq 0$. Выясним сначала, при каких значениях параметра λ уравнение (3.2.1) может иметь неограниченные решения. Систему (3.2.3) запишем в виде (1.2.3), где $n = 1$, $v_1(t) = t^{-\rho}$, а матрицы A_0 и $R(t)$ определены в (3.2.5). Далее, для сокращения записи положим

$$i := 1(i) = \underbrace{1 \ldots 1}_{i \text{ раз}}, \qquad i = 1, \ldots, s. \tag{3.2.6}$$

Тогда для матриц $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, s)$ получаем следующие выражения:

$$A_1(t) = (\omega_1 + a \cos \lambda t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 2, \ldots, s.$$

Матрицы $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, s)$ являются периодическими с периодом $T = 2\pi/\lambda$. Воспользуемся теперь теоремой 1.2.1, а также замечанием 2 к этой теореме. Поскольку собственными числами матрицы A_0 являются $\mu_{1,2} = \pm\mathbf{i}$, то условие (1.2.15), позволяющее осуществить в системе (3.2.3) усредняющую замену типа (1.2.5), имеет вид:

$$\lambda \neq \frac{2}{q}, \qquad q = \pm 1, \pm 2, \ldots \,. \tag{3.2.7}$$

В предположении условия (3.2.7) осуществим при достаточно больших t в системе (3.2.3) усредняющую замену

$$y_0 = \Big[I + Y_1(t) t^{-\rho} + Y_2(t) t^{-2\rho} + \ldots + Y_k(t) t^{-k\rho}\Big] y_1,$$

где $Y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, k)$ — $(2\pi/\lambda)$-периодические матрицы с нулевым средним значением, а число $k \in \mathbb{N}$ выбрано таким образом, что $k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$ (см. условие B.4 теоремы 1.2.1). В результате этой замены получим усредненную систему

$$\dot{y}_1 = \Big(A_0 + A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + \ldots + A_k t^{-k\rho} + R_1(t)\Big) y_1, \tag{3.2.8}$$

где $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Система (3.2.8) представляет собой систему вида (1.1.1), где

$$V(t) = A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + \ldots + A_k t^{-k\rho}.$$

Из теоремы 1.2.2 следует, что $\operatorname{tr} A_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. Кроме того, в силу формул (1.2.20), (1.2.21) все матрицы $A_1, \ldots, A_k$ действительны. Следовательно, собственные числа матрицы

$A_0+V(t)$ при достаточно больших t являются чисто мнимыми и допускают асимптотическое представление вида

$$\mu_{1,2}(t) = \big(1 + O\big(t^{-\rho}\big)\big)\,\mathrm{diag}(\mathbf{i}, -\mathbf{i}).$$

Используя асимптотическое представление (1.1.8) для фундаментальной матрицы системы (3.2.8), заключаем, что при условии (3.2.7) асимптотика линейно независимых решений уравнения (3.2.1) при $t \to \infty$ определяется формулой (3.2.4). Следовательно, резонансными значениями (т.е. значениями параметрами λ, при которых уравнение (3.2.1) может иметь неограниченные решения) с учетом положительности параметра λ могут быть лишь значения

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2.9}$$

Итак, в дальнейшем нас будет интересовать поведение решений уравнения (3.2.1) лишь при значениях параметра λ из множества (3.2.9). Будем говорить, что в уравнении (3.2.1) при некоторых условиях реализуется резонанс $\lambda = \lambda_n$, если при этих условиях уравнение (3.2.1), в котором $\lambda = \lambda_n$, имеет неограниченные при $t \geq t_0$ решения.

В системе (3.2.3) осуществим замену $y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{pmatrix} y_1$. Приходим к системе

$$\dot{y}_1 = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} + \frac{\mathbf{i}}{2}\big(q(t) + \omega^2(t) - 1\big) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right] y_1. \tag{3.2.10}$$

В системе (3.2.10) сделаем замену $y_1 = \mathrm{diag}\left(e^{\mathbf{i}t}, e^{-\mathbf{i}t}\right) y_2$, предварительно разложив $\cos \lambda t$ по формуле Эйлера. Приходим к системе вида (1.2.6):

$$y_2' = \big[A_1(t)t^{-\rho} + A_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + A_s(t)t^{-s\rho} + R(t)\big] y_2. \tag{3.2.11}$$

Здесь $R(t)$ — некоторая матрица из класса $L_1[t_0, \infty)$, а матрицы $A_i(t)$ $(i = 1, \ldots, s)$ с учетом обозначений (3.2.6) имеют следующий вид:

$$A_1(t) = \frac{a\mathbf{i}}{4} \begin{pmatrix} e^{\mathbf{i}\lambda t} + e^{-\mathbf{i}\lambda t} & e^{\mathbf{i}(\lambda-2)t} + e^{-\mathbf{i}(\lambda+2)t} \\ -e^{\mathbf{i}(\lambda+2)t} - e^{-\mathbf{i}(\lambda-2)t} & -e^{\mathbf{i}\lambda t} - e^{-\mathbf{i}\lambda t} \end{pmatrix} + \frac{\omega_1 \mathbf{i}}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\mathbf{i}t} \\ -e^{2\mathbf{i}t} & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_j(t) = \frac{\omega_j \mathbf{i}}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2\mathbf{i}t} \\ -e^{2\mathbf{i}t} & -1 \end{pmatrix}, \quad j = 2, \ldots, s. \tag{3.2.12}$$

Используя теорему 1.2.1, от этой системы при достаточно больших t с помощью замены

$$y_2 = \Big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + Y_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + Y_k(t)t^{-k\rho}\Big] y_3,$$

где $Y_i(t)$ $(i = 1, \dots, k)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, перейдем к усредненной системе

$$\dot{y}_3 = \Big(A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + \ldots + A_k t^{-k\rho} + R_1(t)\Big) y_3. \tag{3.2.13}$$

Здесь $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$, а параметр $k \in \mathbb{N}$ выбран так, что $k\rho \le 1 < (k+1)\rho$.

Вид усредненной системы (3.2.13) будет различаться в зависимости от значения λ из резонансного множества (3.2.9). Будем далее рассматривать значения λ из этого множества.

- $\lambda = \lambda_1 = 2$.

Асимптотика решений системы (3.2.13) в этом случае будет определяться видом матрицы A_1. Имеем,

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big] = \frac{a\mathbf{i}}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega_1 \mathbf{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_1 определяются следующей формулой:

$$\mu_{1,2} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a^2}{4} - \omega_1^2}, & |a| \ge 2|\omega_1|, \\ \pm\dfrac{\mathbf{i}}{2}\sqrt{\omega_1^2 - \dfrac{a^2}{4}}, & |a| < 2|\omega_1|. \end{cases} \tag{3.2.14}$$

Будем далее предполагать, что собственные числа матрицы A_1 различны, т. е.

$$|a| \ne 2|\omega_1|. \tag{3.2.15}$$

Усредненную систему (3.2.13) можно записать в следующем виде:

$$\dot{y}_3 = \Big[t^{-\rho}\big(A_1 + V(t)\big) + R_1(t)\Big] y_3, \tag{3.2.16}$$

где матрицы A_1, $V(t)$ и $R_1(t)$ при условии (3.2.15) обладают теми же свойствами, что и матрицы A_0, $V(t)$ и $R(t)$ в системе (1.1.1) соответственно. Очевидно, что система (3.2.16) при помощи замены типа (1.1.2) может быть приведена к L–диагональному виду

$$\dot{y}_4 = \big[t^{-\rho}\Lambda(t) + R_2(t)\big] y_4.$$

Здесь $\Lambda(t)$ — диагональная матрица, на диагонали которой расположены собственные числа матрицы $A_1 + V(t)$. Из теоремы 1.2.2 и утверждения 1.2.1 (матрицы $A_i(t)$, а, значит, и матрицы A_i имеют вид (1.2.27)) следует, что собственные числа матрицы $A_1 + V(t)$ при достаточно больших t либо действительны, либо являются чисто мнимыми. В силу теоремы Левинсона линейно независимые решения системы (3.2.16) (т. е. системы (3.2.13)) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$y^{(1,2)}(t) = \big[c_{1,2} + o(1)\big] \exp\Big\{\mu_{1,2} \int t^{-\rho} dt + O\Big(\int t^{-2\rho} dt\Big)\Big\}. \tag{3.2.17}$$

Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_1, определяемые формулой (3.2.14), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Кроме того, аргумент функции $\exp\{\cdot\}$ при достаточно больших t принимает или только действительные значения или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Возвращаясь теперь к уравнению (3.2.1), заключаем, что у него имеются неограниченные решения при значениях параметра

$$|a| > 2|\omega_1|. \tag{3.2.18}$$

Значит, при $\lambda = 2$ и значениях параметра a, удовлетворяющих неравенству (3.2.18), в уравнении (3.2.1) имеет место параметрический резонанс, если $0 < \rho \leq 1$.

Случай, когда оказывается выполненным равенство $|a| = 2|\omega_1|$, нуждается в дополнительном исследовании. Мы не будем на этом останавливаться.

- $\lambda = \lambda_2 = 1$.

В этом случае матрица A_1 определяется формулой:

$$A_1 = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Пусть $\omega_1 \neq 0$, тогда собственные числа матрицы A_1 различны и имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\frac{\omega_1 \mathbf{i}}{2}. \tag{3.2.19}$$

Используя те же рассуждения, что и в случае $\lambda = \lambda_1$, заключаем, что линейно независимые решения усредненной системы (3.2.13) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (3.2.17). В этой формуле величины $\mu_{1,2}$ определяются формулами (3.2.19), векторы c_1 и c_2 совпадают с векторами канонического базиса e_1 и e_2 в $\mathbb{R}^2$ соответственно, а величина в аргументе функции $\exp\{\cdot\}$ является чисто мнимой при всех достаточно больших t. В этом случае линейно независимые решения уравнения (3.2.1) имеют асимптотику вида (3.2.4):

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)\exp\Big\{\pm\mathbf{i}\Big(t + \frac{\omega_1}{2}\int t^{-\rho}dt + O\Big(\int t^{-2\rho}dt\Big)\Big)\Big\}. \tag{3.2.20}$$

Все решения этого уравнения ограничены при $t \geq t_0$.

Таким образом, неограниченные решения у уравнения (3.2.1) при $\lambda = 1$ могут существовать лишь в том случае, когда

$$\omega_1 = 0. \tag{3.2.21}$$

Рассмотрим далее эту ситуации. В силу (3.2.21) матрица A_1 является нулевой и асимптотика решений системы (3.2.13) в главном будет определяться матрицей A_2. Имеем,

$$A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big], \qquad \dot{Y}_1 = A_1(t),$$

где матрица $Y_1(t)$ имеет нулевое среднее значение. Проводя несложные вычисления, получаем следующую формулу для матрицы A_2 в случае $\lambda = 1$:

$$A_2 = \frac{a^2\mathfrak{i}}{16}\begin{pmatrix} -4/3 & -2 \\ 2 & 4/3 \end{pmatrix} + \frac{\omega_2\mathfrak{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_2 имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{12}+\omega_2\right)\left(\dfrac{5a^2}{12}-\omega_2\right)}, & -\dfrac{a^2}{12} \le \omega_2 \le \dfrac{5a^2}{12}, \\ \pm\dfrac{\mathfrak{i}}{2}\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{12}+\omega_2\right)\left(\omega_2-\dfrac{5a^2}{12}\right)}, & \omega_2 \in \left(-\infty, -\dfrac{a^2}{12}\right) \bigcup \left(\dfrac{5a^2}{12}, +\infty\right). \end{cases} \tag{3.2.22}$$

Отметим, что неограниченные колебания в системе (3.2.13) при условии (3.2.21) и $\lambda = \lambda_2$ возможны лишь в том случае, если

$$0 < \rho \le \frac{1}{2}. \tag{3.2.23}$$

Действительно, если $\rho > 1/2$, то, поскольку $A_1 = 0$, система (3.2.13) имеет L–диагональную форму (1.1.3) с нулевой матрицей $\Lambda(t)$. В этом случае фундаментальные решения системы (3.2.13) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида

$$y^{(1)}(t) = e_1 + o(1), \qquad y^{(2)}(t) = e_2 + o(1),$$

где e_1 и e_2 — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^2$. Возвращаясь к уравнению (3.2.1), получаем асимптотические формулы для его линейно независимых решений при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)e^{\pm \mathfrak{i}t}. \tag{3.2.24}$$

Итак, пусть далее выполнено неравенство (3.2.23). Будем считать, что собственные числа матрицы A_2 различны, т. е. выполнены неравенства

$$\omega_2 \ne -\frac{a^2}{12} \quad \text{и} \quad \omega_2 \ne \frac{5a^2}{12}. \tag{3.2.25}$$

Случай, когда одно из неравенств (3.2.25) обращается в равенство, в нашей работе рассматриваться не будет. Действуя аналогично случаю $\lambda = \lambda_1$, получаем следующие асимптотические представление для базисных решений системы (3.2.13) при $t \to \infty$:

$$y^{(1,2)}(t) = \big[c_{1,2} + o(1)\big] \exp\Big\{\mu_{1,2}\int t^{-2\rho}dt + O\Big(\int t^{-3\rho}dt\Big)\Big\}. \tag{3.2.26}$$

Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_2, определяемые формулой (3.2.22), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Кроме того, аргумент функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ при достаточно

больших t принимает или только действительные значения или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Таким образом, при условии

$$-\frac{a^2}{12} < \omega_2 < \frac{5a^2}{12} \tag{3.2.27}$$

уравнение (3.2.1) имеет неограниченные решения. Двойное неравенство (3.2.27) удобно переписать относительно величины $|a|$, характеризующей амплитуду внешнего воздействия. Имеем,

$$|a| > \sqrt{\max\left(\frac{12\omega_2}{5}, -12\omega_2\right)}. \tag{3.2.28}$$

Следовательно, в интервалах значений величины $|a|$, определяемых условием (3.2.28), в уравнении (3.2.1) наблюдается параметрический резонанс.

Заметим, что если в уравнении (3.2.1) реализуется резонанс $\lambda = \lambda_2$ при подходящих значениях a (для этого достаточно выполнения условий (3.2.21), (3.2.23)), то при тех же значениях ω_1 и ω_2 в этом уравнении реализуется и резонанс $\lambda = \lambda_1$ для всех $0 < \rho \leq 1$. Из (3.2.18), (3.2.21) следует, что резонанс $\lambda = \lambda_1$ имеет место при любых значениях параметра $a \neq 0$.

- $\lambda = \lambda_3 = 2/3$.

Вычисляя матрицы A_1 и A_2, получаем:

$$A_1 = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \Big(-\frac{9a^2}{128} + \frac{\omega_2}{2}\Big)\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{3.2.29}$$

Если $\omega_1 \neq 0$, то собственные числа матрицы A_1 различны и справедливы все те же рассуждения, которые были проведены нами в случае $\lambda = \lambda_2$. В этом случае линейно независимые решения уравнения (3.2.1) имеют асимптотику вида (3.2.20), а значит все решения этого уравнения ограничены при $t \geq t_0$. Поэтому для существования неограниченных решений в рассматриваемом случае необходимо выполнение условия (3.2.21). Итак, в системе (3.2.13) вновь $A_1 = 0$. Рассмотрим матрицу A_2. При условии

$$\omega_2 \neq \frac{9a^2}{64} \tag{3.2.30}$$

собственные числа матрицы A_2 различны и имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\Big(\frac{\omega_2}{2} - \frac{9a^2}{128}\Big)\mathrm{i}. \tag{3.2.31}$$

Систему (3.2.13) можно в этом случае записать в виде

$$\dot{y}_3 = \Big[t^{-2\rho}\big(A_2 + V(t)\big) + R_1(t)\Big]y_3,$$

где матрицы A_2, $V(t)$ и $R_1(t)$ при условии (3.2.30) обладают теми же свойствами, что и матрицы A_0, $V(t)$ и $R(t)$ в системе (1.1.1) соответственно. Дальнейшие рассуждения, связанные с построением асимптотики решений системы (3.2.13), полностью повторяют рассуждения, проведенные нами в случае $\lambda = \lambda_1$ относительно системы (3.2.16). Следовательно, если выполнено условие (3.2.30), линейно независимые решения системы (3.2.13) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (3.2.26). В этой формуле величины $\mu_{1,2}$ определяются формулами (3.2.31), векторы c_1 и c_2 совпадают с векторами канонического базиса e_1 и e_2 в $\mathbb{R}^2$ соответственно, а величина в аргументе функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ является чисто мнимой при всех достаточно больших t. В этом случае линейно независимые решения уравнения (3.2.1) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big) \exp\Big\{\pm \mathrm{i}\Big(t + \Big(\frac{\omega_2}{2} - \frac{9a^2}{128}\Big) \int t^{-2\rho} dt + O\Big(\int t^{-3\rho} dt\Big)\Big)\Big\}.$$

Вновь все решения уравнения (3.2.1) оказываются ограниченными.

Таким образом, мы приходим к выводу, что если у уравнения (3.2.1) при $\lambda = \lambda_3$ имеются неограниченные решения, то вместе с условием (3.2.21) должно быть выполнено и условие

$$\omega_2 = \frac{9a^2}{64}. \tag{3.2.32}$$

Из условия (3.2.32) с необходимостью вытекает следующий результат. Резонанс $\lambda = \lambda_3$ в уравнении (3.2.1) может возникнуть лишь в том случае, если коэффициент ω_2 в разложении (3.2.2) функции $\omega^2(t)$ положителен. Кроме того, этот резонанс может наблюдаться лишь в двух точках:

$$a = \pm \frac{8}{3} \sqrt{\omega_2}, \quad \omega_2 > 0. \tag{3.2.33}$$

Получим теперь некоторые дополнительные условия, при которых резонанс $\lambda = \lambda_3$ в точках (3.2.33) действительно реализуется.

Отметим, что неограниченные колебания в системе (3.2.13) (а, следовательно, и в уравнении (3.2.1)) при $\lambda = \lambda_3$ в точках (3.2.33) возможны лишь тогда, когда

$$0 < \rho \le \frac{1}{3}. \tag{3.2.34}$$

Действительно, если $\rho > 1/3$, то поскольку $A_1 = A_2 = 0$ (это следует из (3.2.21), (3.2.29) и (3.2.32)), система (3.2.13) имеет L–диагональную форму (1.1.3) с нулевой матрицей $\Lambda(t)$. В этом случае при условиях (3.2.21), (3.2.33) и $\lambda = \lambda_3$ линейно независимые решения уравнения (3.2.1) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (3.2.24).

Для дальнейшего исследования нам необходимо вычислить матрицу A_3. Имеем,

$$A_3 = \mathrm{M}\big[A_3(t) + A_2(t)Y_1(t) + A_1(t)Y_2(t)\big],$$

где матрицы $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ с нулевым средним значением — решения следующих матричных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Y}_1 = A_1(t), \qquad \dot{Y}_2 = A_2(t) + A_1(t)Y_1(t).$$

Замечая, что $\mathrm{M}\big[A_2(t)Y_1(t)\big] = 0$, в результате несложных, но довольно трудоемких вычислений, приходим к следующей формуле для матрицы A_3 в случае $\lambda = \lambda_3$:

$$A_3 = \frac{81a^3\mathbf{i}}{1024}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega_3\mathbf{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_3 имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{81a^3}{512}\right)^2 - \omega_3^2}, & |\omega_3| \le \dfrac{81|a|^3}{512}, \\ \pm\dfrac{\mathbf{i}}{2}\sqrt{\omega_3^2 - \left(\dfrac{81a^3}{512}\right)^2}, & |\omega_3| > \dfrac{81|a|^3}{512}. \end{cases} \tag{3.2.35}$$

Считаем, что собственные числа матрицы A_3 различны, т.е. выполнено неравенство

$$|\omega_3| \neq \frac{81|a|^3}{512}. \tag{3.2.36}$$

Случай равенства в (3.2.36) рассматриваться здесь не будет.

Действуя аналогично рассмотренным выше случаям, получаем следующие асимптотические представления для базисных решений системы (3.2.13) при $t \to \infty$:

$$y^{(1,2)}(t) = \big[c_{1,2} + o(1)\big]\exp\Big\{\mu_{1,2}\int t^{-3\rho}dt + O\Big(\int t^{-4\rho}dt\Big)\Big\}.$$

Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_3, определяемые формулой (3.2.35), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Как и ранее, аргумент функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ при достаточно больших t принимает или только действительные значения или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Таким образом, если

$$|\omega_3| < \frac{81|a|^3}{512}, \tag{3.2.37}$$

а также выполнены условия (3.2.21), (3.2.34), то в точках (3.2.33) при $\lambda = \lambda_3$ уравнение (3.2.1) имеет неограниченные решения. Из (3.2.33) и (3.2.37), в частности, следует, что резонанс $\lambda = \lambda_3$ реализуется в точках (3.2.33), если выполнены условия (3.2.21), (3.2.34), а также неравенства

$$|\omega_3| < 3\omega_2^{3/2}, \quad \omega_2 > 0.$$

Заметим теперь, что если резонанс $\lambda = \lambda_3$ в уравнении (3.2.1) реализуется при некоторых значениях коэффициентов ω_1, ω_2 и ω_3, то при этих же значениях коэффициентов в этом

уравнении реализуются резонансы $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$. При этом из (3.2.28), в силу положительности ω_2, следует, что резонанс $\lambda = \lambda_2$ имеет место для $0 < \rho \leq 1/2$ при значениях параметра a таких, что

$$|a| > \sqrt{\frac{12\omega_2}{5}}. \tag{3.2.38}$$

Резонанс же $\lambda = \lambda_1$ имеет место при $0 < \rho \leq 1$ и всех значениях параметра a в силу (3.2.18) и (3.2.21).

Следовательно, при условии (3.2.34) в уравнении (3.2.1) возможна реализация сразу трех резонансов ($\lambda = \lambda_i$, $i = 1, 2, 3$) при подходящих значениях параметра a. Чтобы выяснить возможность одновременной реализации в уравнении (3.2.1) большего числа резонансов, необходимо продолжить исследование динамики решений уравнения (3.2.1) при резонансных значениях $\lambda = \lambda_n$.

- $\lambda = \lambda_4 = 1/2$.

Вычисляя матрицы A_1, A_2 и A_3 получаем:

$$A_1 = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \Big(-\frac{a^2}{15} + \frac{\omega_2}{2}\Big)\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad A_3 = \frac{\omega_3}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{3.2.39}$$

Если $\omega_1 \neq 0$, то собственные числа матрицы A_1 различны и справедливы все те же рассуждения, которые были проведены нами в случаях $\lambda = \lambda_2$ и $\lambda = \lambda_3$. В этом случае линейно независимые решения уравнения (3.2.1) имеют асимптотику вида (3.2.20), а значит все решения этого уравнения ограничены при $t \geq t_0$. Поэтому для существования неограниченных решений в рассматриваемом случае необходимо выполнение условия (3.2.21). Итак, в системе (3.2.13) вновь $A_1 = 0$.

Далее, если

$$\omega_2 \neq \frac{2a^2}{15},$$

то аналогично случаю $\lambda = \lambda_3$ получаем следующие асимптотические формулы для линейно независимых решений уравнения (3.2.1) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)\exp\Big\{\pm\mathrm{i}\Big(t + \Big(\frac{\omega_2}{2} - \frac{a^2}{15}\Big)\int t^{-2\rho}dt + O\Big(\int t^{-3\rho}dt\Big)\Big)\Big\}.$$

Как и в случае $\lambda = \lambda_3$, заключаем, что вместе с условием (3.2.21) должно быть выполнено и условие

$$\omega_2 = \frac{2a^2}{15}. \tag{3.2.40}$$

Из условия (3.2.40) вновь выводим, что резонанс $\lambda = \lambda_4$ в уравнении (3.2.1) может возникнуть лишь в том случае, если коэффициент ω_2 в разложении (3.2.2) функции $\omega^2(t)$

положителен. Этот резонанс может наблюдаться лишь в двух точках:

$$a = \pm\sqrt{\frac{15\omega_2}{2}}, \quad \omega_2 > 0. \tag{3.2.41}$$

Следовательно, матрица A_2 в системе (3.2.13) нулевая.

Пусть далее выполнены условия (3.2.21) и (3.2.40). Если теперь $\omega_3 \neq 0$, то линейно независимые решения уравнения (3.2.1) при $t \to \infty$ имеют следующую асимптотику:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big) \exp\Big\{\pm\mathrm{i}\Big(t + \frac{\omega_3}{2}\int t^{-3\rho}dt + O\Big(\int t^{-4\rho}dt\Big)\Big)\Big\}.$$

Вновь все решения уравнения (3.2.1) оказываются ограниченными при $t \geq t_0$. Таким образом, для реализации резонанса $\lambda = \lambda_4$ необходимо, чтобы

$$\omega_3 = 0. \tag{3.2.42}$$

Аналогично случаю $\lambda = \lambda_3$ заключаем, что резонанс $\lambda = \lambda_4$ может наблюдаться лишь при условии

$$0 < \rho \leq \frac{1}{4}. \tag{3.2.43}$$

Действительно, если $\rho > 1/4$ и выполнены условия (3.2.21), (3.2.40), (3.2.42) и $\lambda = \lambda_4$, то линейно независимые решения уравнения (3.2.1) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (3.2.24).

Итак, пусть выполнены условия (3.2.21), (3.2.40), (3.2.42) и (3.2.43), т.е. матрицы A_1, A_2 и A_3 в системе (3.2.13) нулевые. Нам необходимо вычислить матрицу A_4. Имеем,

$$A_4 = \mathrm{M}\big[A_4(t) + A_3(t)Y_1(t) + A_2(t)Y_2(t) + A_1(t)Y_3(t)\big],$$

где матрицы $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ и $Y_3(t)$ с нулевым средним значением — решения следующих матричных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Y}_1 = A_1(t), \qquad \dot{Y}_2 = A_2(t) + A_1(t)Y_1(t), \qquad \dot{Y}_3 = A_3(t) + A_2(t)Y_1(t) + A_1(t)Y_2(t).$$

Замечая, что $\mathrm{M}\big[A_3(t)Y_1(t)\big] = 0$, в результате довольно утомительных вычислений, получаем следующую формулу для матрицы A_4 в случае $\lambda = \lambda_4$:

$$A_4 = -\frac{a^4\mathrm{i}}{6750}\begin{pmatrix} 58 & 375 \\ -375 & -58 \end{pmatrix} + \frac{\omega_4\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_4 имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{317a^4}{3375} + \omega_4\right)\left(\dfrac{433a^4}{3375} - \omega_4\right)}, & -\dfrac{317a^4}{3375} \leq \omega_4 \leq \dfrac{433a^4}{3375}, \\ \pm\dfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{\left(\dfrac{317a^4}{3375} + \omega_4\right)\left(\omega_4 - \dfrac{433a^4}{3375}\right)}, & \omega_4 \in \left(-\infty, -\dfrac{317a^4}{3375}\right) \bigcup \left(\dfrac{433a^4}{3375}, +\infty\right). \end{cases} \tag{3.2.44}$$

Считаем далее, что собственные числа матрицы A_4 различны, т.е. выполнены неравенства

$$\omega_4 \neq -\frac{317a^4}{3375} \quad \text{и} \quad \omega_4 \neq \frac{433a^4}{3375}. \tag{3.2.45}$$

Случай, когда одно из неравенств (3.2.45) обращается в равенство, в нашей работе рассматриваться не будет.

Действуя аналогично рассмотренным выше случаям, получаем следующие асимптотические представления для базисных решений системы (3.2.13) при $t \to \infty$:

$$y^{(1,2)}(t) = \big[c_{1,2} + o(1)\big] \exp\Big\{\mu_{1,2} \int t^{-4\rho} dt + O\Big(\int t^{-5\rho} dt\Big)\Big\}.$$

Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_4, определяемые формулой (3.2.44), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Как и ранее, аргумент функции $\exp\{\,\cdot\,\}$ при достаточно больших t принимает или только действительные значения или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Таким образом, если

$$-\frac{317a^4}{3375} < \omega_4 < \frac{433a^4}{3375}, \tag{3.2.46}$$

а также выполнены условия (3.2.21), (3.2.42) и (3.2.43), то в точках (3.2.41) при $\lambda = \lambda_4$ уравнение (3.2.1) имеет неограниченные решения. Из (3.2.41) и (3.2.46), в частности, следует, что резонанс $\lambda = \lambda_4$ реализуется в точках (3.2.41), если выполнены условия (3.2.21), (3.2.42) и (3.2.43), а также неравенства

$$-\frac{317\omega_2^2}{60} < \omega_4 < \frac{433\omega_2^2}{60}, \quad \omega_2 > 0. \tag{3.2.47}$$

Заметим наконец, что если резонанс $\lambda = \lambda_4$ в уравнении (3.2.1) реализуется при некоторых значениях коэффициентов ω_i $(i = 1, \ldots, 4)$, то при этих же значениях коэффициентов в этом уравнении реализуется резонансы $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ и $\lambda = \lambda_3$. Резонанс $\lambda = \lambda_3$ имеет место для $0 < \rho \leq 1/3$ и возникает в точках (3.2.33). Далее, резонанс $\lambda = \lambda_2$ в силу положительности коэффициента ω_2 имеет место для $0 < \rho \leq 1/2$ при значениях параметра a, удовлетворяющих неравенству (3.2.38). Резонанс же $\lambda = \lambda_1$ имеет место при $0 < \rho \leq 1$ и всех значениях параметра a в силу (3.2.18) и (3.2.21).

Следовательно, при условии (3.2.43) в уравнении (3.2.1) возможна реализация всех четырех резонансов ($\lambda = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, 4$) при подходящих значениях параметра a.

- $\lambda = \lambda_n = 2/n, \quad n \geq 5, \, n \in \mathbb{N}.$

Вычисляя несколько первых матриц в усредненной системе (3.2.13), получаем:

$$A_1 = \frac{\omega_1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \Big(-\frac{a^2}{4(4-\lambda_n^2)} + \frac{\omega_2}{2}\Big) \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \frac{\omega_3}{2}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \Big(-\frac{a^4(7\lambda_n^2+20)}{64(1-\lambda_n^2)(4-\lambda_n^2)^3} + \frac{\omega_4}{2}\Big)\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}. \tag{3.2.48}$$

Здесь при вычислении матрицы A_4 мы использовали тот факт, что для реализации резонанса $\lambda = \lambda_n$ необходимо, чтобы $A_2 = 0$. Точно так же, как это было сделано в предыдущих случаях, получаем несколько из числа необходимых условий реализации резонанса $\lambda = \lambda_n$ ($n \geq 5$):

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \frac{a^2}{2(4-\lambda_n^2)}, \quad \omega_3 = 0, \quad \omega_4 = \frac{a^4(7\lambda_n^2+20)}{32(1-\lambda_n^2)(4-\lambda_n^2)^3}. \tag{3.2.49}$$

Кроме того, несложно показать, что резонанс $\lambda = \lambda_n$ может возникнуть лишь в случае, когда

$$0 < \rho \leq \frac{1}{n}. \tag{3.2.50}$$

Из условий (3.2.49) реализации резонанса $\lambda = \lambda_n$ следует, что этот резонанс может наблюдаться лишь в точках

$$a = \pm\sqrt{2(4-\lambda_n^2)\omega_2}. \tag{3.2.51}$$

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.2.1. *В уравнении* (3.2.1) *при фиксированных коэффициентах* ω_i ($i = 1, \ldots, s$) *разложения* (3.2.2) *функции* $\omega^2(t)$ *может реализоваться не более одного резонанса вида* $\lambda = \lambda_n$, *где* $n \geq 5$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть в уравнении (3.2.1) реализуются резонансы λ_p и λ_r, где $r \neq p$ и $r, p \geq 5$. Из (3.2.49) следует, что в этом случае должны быть одновременно выполнены равенства:

$$\omega_4 = \frac{(7\lambda_p^2+20)\omega_2^2}{8(1-\lambda_p^2)(4-\lambda_p^2)} \quad \text{и} \quad \omega_4 = \frac{(7\lambda_r^2+20)\omega_2^2}{8(1-\lambda_r^2)(4-\lambda_r^2)}. \tag{3.2.52}$$

Откуда, поскольку $\omega_2 \neq 0$,

$$\frac{7\lambda_p^2+20}{(1-\lambda_p^2)(4-\lambda_p^2)} = \frac{7\lambda_r^2+20}{(1-\lambda_r^2)(4-\lambda_r^2)}. \tag{3.2.53}$$

Легко показать, что функция

$$f(\lambda) = \frac{7\lambda^2+20}{(1-\lambda^2)(4-\lambda^2)} \tag{3.2.54}$$

монотонно возрастает на промежутке $(0, 1)$. Отсюда с учетом (3.2.9) следует, что равенство (3.2.53) не может быть выполнено, поскольку $\lambda_p \neq \lambda_r$ и $\lambda_p, \lambda_r \in (0, 1)$. ■

Определим далее условия, при которых в уравнении (3.2.1) может реализоваться резонанс

$$\lambda = \lambda_5 = \frac{2}{5}.$$

Из (3.2.49) следует, что для реализации этого резонанса необходимо выполнение следующих условий

$$\omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \frac{25a^2}{192}, \quad \omega_4 = \frac{11 \cdot 25^3 \cdot a^4}{64 \cdot 21 \cdot 96^2}. \tag{3.2.55}$$

Из (3.2.55) выводим, что резонанс $\lambda = \lambda_5$ может возникнуть лишь в точках

$$a = \pm\frac{8\sqrt{3\omega_2}}{5}, \quad \omega_2 > 0, \tag{3.2.56}$$

а коэффициенты ω_2 и ω_4 должны быть связаны равенством

$$\omega_4 = \frac{275\omega_2^2}{336}. \tag{3.2.57}$$

Кроме того, из (3.2.50) следует, что этот резонанс может наблюдаться лишь при условии

$$0 < \rho \leq \frac{1}{5}. \tag{3.2.58}$$

В силу (3.2.55) матрицы A_i $(i = 1, \ldots, 4)$ в системе (3.2.13) нулевые. Нам необходимо вычислить матрицу A_5. Имеем,

$$A_5 = \mathrm{M}\big[A_5(t) + A_4(t)Y_1(t) + A_3(t)Y_2(t) + A_2(t)Y_3(t) + A_1(t)Y_4(t)\big],$$

где матрицы $Y_i(t)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ с нулевым средним значением — решения следующих матричных дифференциальных уравнений:

$$\dot{Y}_1 = A_1(t), \qquad \dot{Y}_2 = A_2(t) + A_1(t)Y_1(t), \qquad \dot{Y}_3 = A_3(t) + A_2(t)Y_1(t) + A_1(t)Y_2(t),$$
$$\dot{Y}_4 = A_4(t) + A_3(t)Y_1(t) + A_2(t)Y_2(t) + A_1(t)Y_3(t).$$

В результате трудоемких вычислений получаем следующую формулу для матрицы A_5 в случае $\lambda = \lambda_5$:

$$A_5 = \frac{5^8 a^5}{9 \cdot 2^{20}} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix} + \frac{\omega_5}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A_5 имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(\dfrac{5^8 a^5}{9 \cdot 2^{19}}\right)^2 - \omega_5^2}, & |\omega_5| \leq \dfrac{5^8|a|^5}{9 \cdot 2^{19}}, \\ \pm\dfrac{\mathbf{i}}{2}\sqrt{\omega_5^2 - \left(\dfrac{5^8 a^5}{9 \cdot 2^{19}}\right)^2}, & |\omega_5| > \dfrac{5^8|a|^5}{9 \cdot 2^{19}}. \end{cases} \tag{3.2.59}$$

Считаем, что собственные числа матрицы A_5 различны, т.е. выполнено неравенство

$$|\omega_5| \neq \frac{5^8|a|^5}{9 \cdot 2^{19}}. \tag{3.2.60}$$

Действуя аналогично рассмотренным выше случаям, получаем следующие асимптотические представления для базисных решений системы (3.2.13) при $t \to \infty$:

$$y^{(1,2)}(t) = \big[c_{1,2} + o(1)\big] \exp\Big\{\mu_{1,2} \int t^{-5\rho} dt + O\Big(\int t^{-6\rho} dt\Big)\Big\}.$$

Здесь $\mu_{1,2}$ — собственные числа матрицы A_5, определяемые формулой (3.2.59), а $c_{1,2}$ — отвечающие им собственные векторы. Как и ранее, аргумент функции $\exp\{\cdot\}$ при достаточно больших t принимает или только действительные значения или только чисто мнимые, в зависимости от вида собственных чисел $\mu_{1,2}$. Таким образом, если

$$|\omega_5| < \frac{5^8 |a|^5}{9 \cdot 2^{19}}, \tag{3.2.61}$$

а также выполнены условия (3.2.55), (3.2.57), (3.2.58), то в точках (3.2.56) при $\lambda = \lambda_5$ уравнение (3.2.1) имеет неограниченные решения. Из (3.2.56) и (3.2.61), в частности, следует, что резонанс $\lambda = \lambda_5$ реализуется в точках (3.2.56), если выполнены условия (3.2.55), (3.2.57), (3.2.58), а также неравенства

$$|\omega_5| < \frac{125\sqrt{3}\omega_2^{5/2}}{16}, \quad \omega_2 > 0.$$

Заметим, что если резонанс $\lambda = \lambda_n$ ($n \geq 5$) в уравнении (3.2.1) реализуется при некоторых значениях коэффициентов ω_i ($i = 1, \ldots, s$), то при этих же значениях коэффициентов в этом уравнении реализуется резонансы $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, \ldots, 4$). Действительно, резонанс $\lambda = \lambda_4$ реализуется в точках (3.2.41) для всех $0 < \rho \leq 1/4$ в силу выполнения неравенства (3.2.47). Это неравенство оказывается выполненным, поскольку: коэффициенты ω_2 и ω_4 связаны равенством типа (3.2.52); функция $f(\lambda)$, определяемая формулой (3.2.54), монотонно возрастает на промежутке $(0, 1)$; резонансы λ_n ($n \geq 5$) принадлежат отрезку $(0, 1)$ и $\lambda_{n+1} < \lambda_n$; для $\lambda = \lambda_5$ выполнено равенство (3.2.57), которое удовлетворяет неравенству (3.2.47). Как было показано ранее, выполнение резонанса $\lambda = \lambda_4$ влечет выполнение резонансов $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, 2, 3$) при подходящих значениях параметров a и ρ.

Сформулируем теперь основной результат данного раздела, являющийся следствием отмеченных в предыдущем абзаце соображений, а также утверждения 3.2.1.

Теорема 3.2.1. *Пусть коэффициенты ω_i ($i = 1, \ldots, s$) разложения* (3.2.2) *функции $\omega^2(t)$ фиксированы (т.е. не зависят от параметров внешнего возмущения* (3.1.6)*). Тогда в уравнении* (3.2.1) *резонанс может реализоваться не более, чем при пяти значениях параметра $\lambda > 0$. Этими резонансными значениями являются значения $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, \ldots, 4$) и одно из значений вида $\lambda = \lambda_n$, где $n \geq 5$, а величины λ_n определяются формулой*

(3.2.9). *При этом, если в уравнении* (3.2.1) *реализуется резонанс* $\lambda = \lambda_r$, *то реализуются и все резонансы* $\lambda = \lambda_i$ *из числа перечисленных выше, где* $i < r$. *Условия возникновения резонанса в уравнении* (3.2.1) *приведены в таблице 1.*

Таблица 1[2]. Условия резонанса в уравнении (3.2.1)

$n=$	$\lambda=\lambda_n$	Условия возникновения резонанса	Точки резонанса в плоскости (a,λ)
1	$\lambda_1=2$	$0<\rho\le 1$	$(a,2)$, $\lvert a\rvert > 2\lvert\omega_1\rvert$
2	$\lambda_2=1$	$0<\rho\le 1/2$, $\omega_1=0$	$(a,1)$, $\lvert a\rvert > M$
3	$\lambda_3=2/3$	$0<\rho\le 1/3$, $\omega_1=0$, $\omega_2>0$, $\lvert\omega_3\rvert < 3\omega_2^{3/2}$	$\big(\pm 8\sqrt{\omega_2}/3, 2/3\big)$
4	$\lambda_4=1/2$	$0<\rho\le 1/4$, $\omega_1=0$, $\omega_2>0$ $\omega_3=0$, $-317\omega_2^2/60<\omega_4<433\omega_2^2/60$	$\big(\pm\sqrt{(15\omega_2/2)}, 1/2\big)$
5	$\lambda_5=2/5$	$0<\rho\le 1/5$, $\omega_1=0$, $\omega_2>0$, $\omega_3=0$, $\omega_4=275\omega_2^2/336$, $\lvert\omega_5\rvert < 125\sqrt{3}\omega_2^{5/2}/16$	$\big(\pm 8\sqrt{3\omega_2}/5, 2/5\big)$
$n>5$	$\lambda_n=2/n$	$0<\rho\le 1/n$, $\omega_1=0$, $\omega_2>0$, $\omega_3=0$, $\omega_4=(7\lambda_n^2+20)\omega_2^2/\big(8(1-\lambda_n^2)(4-\lambda_n^2)\big)$, $\omega_5=0$, ...	$\big(\pm\sqrt{2(4-\lambda_n^2)\omega_2}, 2/n\big)$

На рис. 3.2.1 изображены точки резонанса в плоскости параметров (λ, a) для $\lambda=\lambda_i$, $i=1,\dots,5$, определяемые соответствующими значениями из четвертого столбца таблицы 1. Таким образом, параметрический резонанс, наблюдаемый в уравнении (3.2.1), имеет точечный характер.

Завершая этот раздел, заметим, что условия, накладываемые на функцию $\omega^2(t)$ для реализации, по крайней мере, первых четырех резонансов $\lambda=\lambda_i$ $(i=1,\dots,4)$, не являются сколько-нибудь ограничительными. Примеры соответствующих функций мы приводим ниже. Условия, необходимые для реализации резонансов более высокого порядка в уравнении (3.2.1), выглядят существенно более ограничительными. Так для резонанса $\lambda=\lambda_5$ требуется выполнение точного равенства (3.2.57), а для резонансов $\lambda=\lambda_n$ $(n>5)$ среди прочих условий необходимо выполнение равенств типа (3.2.52).

Приведем далее примеры функций $\omega^2(t)$, для которых в уравнении (3.2.1) возникают резонансы $\lambda=\lambda_i$ $(i=1,\dots,4)$ в соответствующих точках плоскости (a,λ) (см. табл. 1).

[2]Символом M в таблице обозначена величина $\sqrt{\max\big(12\omega_2/5, -12\omega_2\big)}$

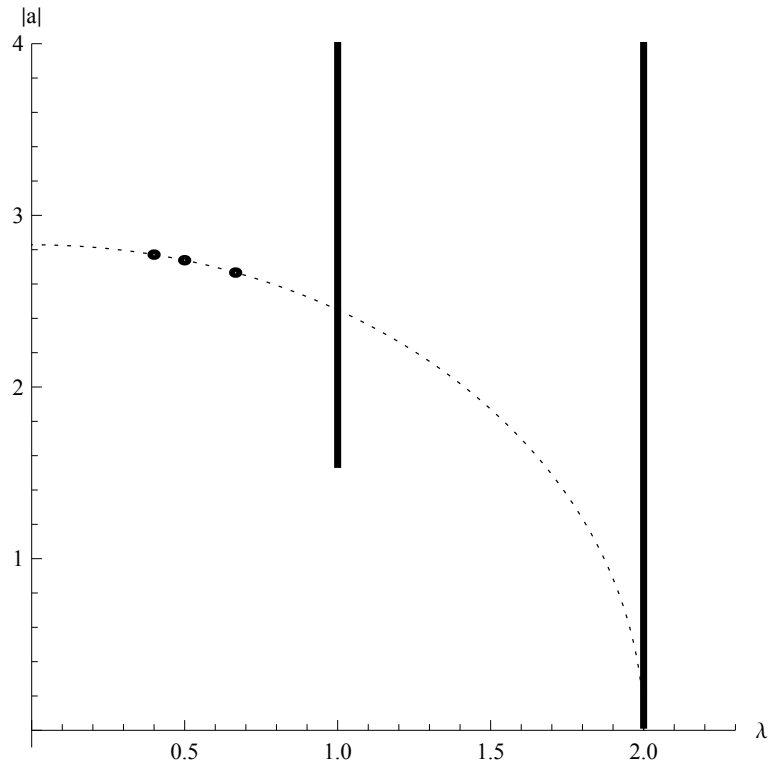

Рис. 3.2.1. На рисунке изображены точки резонанса (выделены жирным) в случае $\omega_2 = 1$ для резонансных значений $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, 5)$. Пунктиром обозначена дуга эллипса $a^2 = 2\omega_2(4 - \lambda^2)$, на которую ложатся точки резонанса для $\lambda = \lambda_n$ $(n \geq 3)$

Пусть $f(z)$ — пять раз непрерывно дифференцируемая в некоторой окрестности точки $z = 0$ функция, относительно которой выполнены следующие условия:

1^0. $f(0) = 1$;

2^0. $f'(0) = f'''(0) = 0$;

3^0. $f''(0) > 0$;

4^0. $-\dfrac{317}{10}\big(f''(0)\big)^2 < f''''(0) < \dfrac{433}{10}\big(f''(0)\big)^2$.

Тогда, если $b \in \mathbb{R}$ $(b \neq 0)$, то функция вида

$$\omega^2(t) = f\Big(\frac{b}{t^\rho}\Big)$$

удовлетворяет всем условиям появления резонансов $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ в уравнении (3.2.1) при подходящем выборе параметров a и ρ. Примеры функций $f(z)$, удовлетворяющие условиям 1^0–4^0, доставляют, в частности, функции

$$f(z) = \operatorname{ch} z; \exp(z^2); 1 + z^2 + z^4; \sqrt{1 + z^2}.$$

В заключение заметим, что применяя используемый в работе метод, можно исследовать

уравнение более общего вида, нежели уравнение (3.2.1), (3.2.2):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \big(\omega^2(t) + v(t)P(t)\big)x = 0. \tag{3.2.62}$$

Здесь $P(t)$ — периодическая функция или тригонометрический многочлен, а функция $v(t)$ удовлетворяет условиям B.2 — B.4 теоремы 1.2.1 и не меняет своего знака при достаточно больших t. Кроме того, функция $\omega^2(t)$ допускает при $t \to \infty$ представление вида

$$\omega^2(t) = 1 + \omega_1 v(t) + \omega_2 v^2(t) + \ldots + \omega_s v^s(t) + r(t) \tag{3.2.63}$$

для некоторого $s \in \mathbb{N}$. В формуле (3.2.63) коэффициенты $\omega_i \in \mathbb{R}$, $(i = 1, \ldots, s)$, а функция $r(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Точно также, как это было сделано для уравнения (3.2.1), (3.2.2), мы можем установить существование в уравнении (3.2.62), (3.2.63) резонансных значений, которые отсутствуют в уравнении (3.2.62) с постоянной частотой собственных колебаний $\omega^2(t) \equiv \omega_0^2 > 0$. По всей видимости, описанное в этом разделе явление (возникновение новых резонансных частот у осциллятора под действием колебательно убывающего возмущения) характерно для широкого класса линейных осцилляторов с переменной частотой собственных колебаний $\omega^2(t)$, для которых эта частота «не слишком быстро» стремится к своему предельному значению $\omega_0^2 > 0$.

3.3 Об асимптотике решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением

Адиабатический осциллятор (3.1.2) является частным случаем возмущенного гармонического осциллятора. В этой работе мы будем рассматривать и другие типы возмущений гармонического осциллятора. В частности, в этом разделе исследуется динамика решений интегро-дифференциального уравнения (ИДУ) типа Вольтерра

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + q(t)\int\limits_{t_0}^{t} x(s)ds = 0, \qquad t \geq t_0 > 0, \tag{3.3.1}$$

где функция $q(t)$ определяется формулой (3.1.5). Мы построим асимптотические представления для решений уравнений (3.3.1) при $t \to \infty$. Асимптотическое поведение решений ИДУ второго порядка, к которым относится и уравнение вида (3.3.1), изучалось, например, в работах [109, 173]. Следует заметить, что теория асимптотического интегрирования ИДУ по сравнению с соответствующей теорией для ОДУ существенно менее развита. Для линейных ИДУ попытка развития такой теории предпринимается в статье [135]. В отмеченных

работах авторами, в частности, указываются условия, при которых асимптотика решений ИДУ, в главном, определяется фундаментальными решениями предельного уравнения, которое, в свою очередь, является, ОДУ. Как будет нами показано, асимптотика всех решений уравнения (3.3.1) при $t \to \infty$ не всегда имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{\mathrm{i}t} + c_2 e^{-\mathrm{i}t} + o(1), \tag{3.3.2}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные, т.е. не всегда определяется фундаментальными решениями гармонического осциллятора. Мы также отметим замечательную монографию [83], в которой отражено современное состояние теории ИДУ типа Вольтерра.

Полагая

$$\dot{x} = y, \qquad z(t) = \int_{t_0}^{t} x(s)ds, \qquad u_0 = (x, y, z)^T,$$

от уравнения (3.3.1) перейдем к системе

$$\dot{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_0 + q(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_0, \tag{3.3.3}$$

которая должна рассматриваться вместе с дополнительным условием

$$z(t_0) = 0. \tag{3.3.4}$$

В системе (3.3.3) осуществим замену

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} u_1. \tag{3.3.5}$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot{u}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_1 + \frac{q(t)}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \mathrm{i} \\ -1 & 1 & -\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & -2 \end{pmatrix} u_1. \tag{3.3.6}$$

Рассмотрим сначала случай, когда параметр ρ в формуле (3.1.5), определяющей функцию $q(t)$, удовлетворяет неравенству

$$\rho > 1. \tag{3.3.7}$$

При выполнении этого условия система (3.3.6) является L–диагональной. В силу теоремы 1.1.1 фундаментальная матрица системы (3.3.6) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_1(t) = \big[I + o(1)\big] \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}t}, e^{-\mathrm{i}t}, 1\big).$$

Возвращаясь теперь к системе (3.3.3) с помощью замены (3.3.5), приходим к следующим асимптотическим представлением для первых компонент ее фундаментальных решений:

$$x^{(1,2)}(t) = \big(1 + o(1)\big)e^{\pm \mathrm{i}t}, \qquad x^{(3)}(t) = o(1). \tag{3.3.8}$$

Условие (3.3.4) выделяет в пространстве решений системы (3.3.3) линейное двумерное подпространство. В качестве базиса в этом пространстве могут быть выбраны некоторые линейные комбинации фундаментальных решений системы (3.3.3) (очевидно, линейно независимые). Отсюда следует, что в качестве фундаментальных решений уравнения (3.3.1) следует взять некоторые линейные комбинации функций (3.3.8). Выпишем линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (3.3.3). Имеем,

$$z(t) = c_1\big(-\mathrm{i} + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + c_2\big(\mathrm{i} + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t} + c_3\big(1 + o(1)\big),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставляя теперь полученное выражение для $z(t)$ в (3.3.4) и выбирая величину t_0 достаточно большой, выражаем из полученного равенства величину c_3 линейным образом через c_1 и c_2. Записывая затем линейную комбинацию функций (3.3.8) и подставляя в нее полученное выражение для c_3, приходим к следующим асимптотическим формулам для линейно независимые решений уравнения (3.3.1) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = \big(1 + o(1)\big)e^{\pm \mathrm{i}t}. \tag{3.3.9}$$

Таким образом, справедливость асимптотических представлений (3.3.9) обоснована нами, по крайней мере, для достаточно больших t_0.

Пусть теперь

$$\frac{1}{2} < \rho \leq 1. \tag{3.3.10}$$

В результате замены

$$u_1 = \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}t}, e^{-\mathrm{i}t}, 1\big)u_2 \tag{3.3.11}$$

система (3.3.6) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{u}_2 = t^{-\rho}A_1(t)u_2. \tag{3.3.12}$$

Матрица коэффициентов этой системы определяется выражением

$$A_1(t) = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} (-\mathrm{i})\big(e^{\mathrm{i}\lambda t} - e^{-\mathrm{i}\lambda t}\big) & \mathrm{i}\big(e^{\mathrm{i}(\lambda-2)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda+2)t}\big) & \big(e^{\mathrm{i}(\lambda-1)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda+1)t}\big) \\ \mathrm{i}\big(e^{\mathrm{i}(\lambda+2)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda-2)t}\big) & (-\mathrm{i})\big(e^{\mathrm{i}\lambda t} - e^{-\mathrm{i}\lambda t}\big) & -\big(e^{\mathrm{i}(\lambda+1)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda-1)t}\big) \\ 2\big(e^{\mathrm{i}(\lambda+1)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda-1)t}\big) & (-2)\big(e^{\mathrm{i}(\lambda-1)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda+1)t}\big) & 2\mathrm{i}\big(e^{\mathrm{i}\lambda t} - e^{-\mathrm{i}\lambda t}\big) \end{pmatrix}. \tag{3.3.13}$$

В силу теоремы 1.2.1 осуществим в системе (3.3.12) усредняющую замену переменной

$$u_2 = \big[I + t^{-\rho} Y_1(t)\big] u_3. \tag{3.3.14}$$

Приходим к системе

$$\dot{u}_3 = \big[t^{-\rho} A_1 + R(t)\big] u_3, \tag{3.3.15}$$

где $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$ и $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Вид матрицы A_1 будет различаться в следующих случаях.

Предположим сначала, что

$$\lambda \neq \pm 1, \pm 2. \tag{3.3.16}$$

Тогда $A_1 = 0$ и система (3.3.15) имеет L–диагональную форму. Из теоремы Левинсона следует, что фундаментальная матрица этой системы имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = I + o(1).$$

Возвращаясь теперь к исходной системе (3.3.3), получаем асимптотические представления (3.3.8) для первых компонент ее фундаментальных решений. Точно также, как и в случае (3.3.7), устанавливаем справедливость асимптотических формул (3.3.9) для линейно независимых решений уравнения (3.3.1).

Поскольку в силу вида функции $q(t)$ замена параметра λ в (3.1.5) на $(-\lambda)$ эквивалентна замене параметра a на $(-a)$, то в дальнейшем мы будем рассматривать лишь положительные значения параметра λ. Изучим далее случай, когда

$$\lambda = 1. \tag{3.3.17}$$

Матрица A_1 в этой ситуации имеет следующий вид:

$$A_1 = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами этой матрицы являются

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{a\mathrm{i}}{2}, \quad \mu_3 = 0. \tag{3.3.18}$$

Поскольку собственные числа матрицы A_1 различны, то в силу леммы 1.1.1 система (3.3.15) может быть приведена к L–диагональной форме, например, с помощью замены

$$u_3 = C u_4, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2\mathrm{i} & -2\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.19}$$

Из теоремы 1.1.1 тогда следует, что фундаментальная матрица системы (3.3.15) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \big[C + o(1)\big] \operatorname{diag}\Big(\exp\Big\{\frac{a\mathfrak{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\}, \exp\Big\{-\frac{a\mathfrak{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\}, 1\Big).$$

Здесь матрица C определяется формулой (3.3.19). Возвращаясь к системе (3.3.3), получаем следующие асимптотические формулы для первых компонент ее фундаментальных решений при $t \to \infty$:

$$x^{(1,2)}(t) = \Big[\big(1 + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} + \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t}\Big] \exp\Big\{\pm\frac{a\mathfrak{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\}, \tag{3.3.20}$$

$$x^{(3)}(t) = \big(1 + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} - \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t}.$$

Построим асимптотики фундаментальных решений уравнения (3.3.1), когда величина t_0 достаточно велика. Выписывая линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (3.3.3), получаем

$$\begin{aligned} z(t) = c_1\Big[\big(-\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} + \big(\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t} + 2\mathfrak{i} + o(1)\Big] \exp\Big\{\frac{a\mathfrak{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\} + \\ + c_2\Big[\big(-\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} + \big(\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t} - 2\mathfrak{i} + o(1)\Big] \exp\Big\{-\frac{a\mathfrak{i}}{2}\int t^{-\rho}dt\Big\} + \\ + c_3\Big[\big(-\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} - \big(\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t} + o(1)\Big]. \end{aligned}$$

Здесь c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставим полученное для $z(t)$ выражение в условие (3.3.4). Заметим, что коэффициент при c_2 не обращается в ноль, если t_0 достаточно велико. Тогда величина c_2 может быть линейным образом выражена через c_1 и c_3. Выписывая затем линейную комбинацию функций из (3.3.20) с учетом полученного представления для c_2, приходим к следующим асимптотическим формулам для линейно независимых решений уравнения (3.3.1) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,3)}(t) + \delta_{1,2}x^{(2)}(t). \tag{3.3.21}$$

Здесь $\delta_{1,2}$ — некоторые комплексные числа, которые определяются в силу условия (3.3.4).

Перейдем теперь к рассмотрению случая

$$\lambda = 2. \tag{3.3.22}$$

Нетрудно видеть, что матрица A_1 в системе (3.3.15) определяется выражением

$$A_1 = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{i} & 0 \\ -\mathfrak{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\frac{a}{4}, \quad \mu_3 = 0. \tag{3.3.23}$$

В силу леммы 1.1.1 система (3.3.15) с помощью замены

$$u_3 = Cu_4, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\mathfrak{i} & \mathfrak{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3.24}$$

может быть приведена к L–диагональной форме. Из теоремы Левинсона тогда следует, что фундаментальная матрица системы (3.3.15) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \big[C + o(1)\big]\,\mathrm{diag}\big(\exp\Big\{\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\}, \exp\Big\{-\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\}, 1\big).$$

Здесь матрица C определяется выражением (3.3.24). Для первых компонент фундаментальных решений системы (3.3.3) получаем следующие асимптотические формулы при $t \to \infty$:

$$x^{(1,2)}(t) = \Big[\big(1 + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} \mp \big(\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t}\Big]\exp\Big\{\pm\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\}, \tag{3.3.25}$$

$$x^{(3)}(t) = o(1).$$

Как и в предыдущих случаях выпишем линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (3.3.3). Получаем

$$z(t) = c_1\Big[\big(-\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} + \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t}\Big]\exp\Big\{\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\} + \\ + c_2\Big[\big(-\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} - \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t}\Big]\exp\Big\{-\frac{a}{4}\int t^{-\rho}dt\Big\} + c_3\big(1 + o(1)\big),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставляя теперь полученное выражение для $z(t)$ в (3.3.4) и выбирая величину t_0 достаточно большой, выражаем величину c_3 линейным образом через c_1 и c_2. Записывая затем линейную комбинацию функций (3.3.25) и подставляя в нее полученное выражение для c_3, приходим к следующим асимптотическим формулам для фундаментальных решений уравнения (3.3.1) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,2)}(t) + o(1). \tag{3.3.26}$$

Таким образом, при условиях (3.3.10), (3.3.22) уравнение (3.3.1) имеет неограниченные решения.

Рассмотрим далее случай, когда

$$\frac{1}{3} < \rho \le \frac{1}{2}.$$

В результате усредняющей замены

$$u_2 = \big[I + t^{-\rho}Y_1(t) + t^{-2\rho}Y_2(t)\big]u_3 \tag{3.3.27}$$

система (3.3.12) приводится к виду

$$\dot{u}_3 = \big[t^{-\rho}A_1 + t^{-2\rho}A_2 + R(t)\big]u_3. \tag{3.3.28}$$

Здесь $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$, $A_2 = \mathrm{M}\big[A_1(t)Y_1(t)\big]$, где матрица $Y_1(t)$ определяется как решение матричного дифференциального уравнения $\dot{Y}_1 = A_1(t) - A_1$ с нулевым средним значением, и, наконец, $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Несложные, но довольно утомительные вычисления приводят к следующей формуле для матрицы $A_1(t)Y_1(t)$:

$$A_1(t)Y_1(t) = \frac{a^2}{16}\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ \bar{a}_{12}(t) & \bar{a}_{11}(t) & \bar{a}_{13}(t) \\ a_{31}(t) & \bar{a}_{31}(t) & a_{33}(t) \end{pmatrix}. \tag{3.3.29}$$

Здесь символом $\bar{z}$ обозначено число, комплексно сопряженное с z. Элементы матрицы (3.3.29) определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
a_{11}(t) &= \frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Big(e^{2\mathrm{i}\lambda t} - e^{-2\mathrm{i}\lambda t}\Big) + \mathrm{i}\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda-2} - \frac{1}{\lambda+2} - \frac{e^{-2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda-2}\Big) - \\
&\quad -2\mathrm{i}\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda+1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda-1}\Big), \\
a_{12}(t) &= (-\mathrm{i})\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t}}{\lambda-2} + \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda+2} - \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda-2} - \frac{e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}}{\lambda+2}\Big) - \\
&\quad -\frac{\mathrm{i}}{\lambda}\Big(e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t} - e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}\Big) + 2\mathrm{i}\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t}}{\lambda-1} + \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda+1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda-1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}}{\lambda+1}\Big), \\
a_{13}(t) &= -\Big(\frac{e^{\mathrm{i}(2\lambda-1)t}}{\lambda-1} - \frac{e^{-\mathrm{i}(2\lambda+1)t}}{\lambda+1}\Big) - \Big(\frac{e^{\mathrm{i}(2\lambda-1)t}}{\lambda+1} - \frac{e^{-\mathrm{i}(2\lambda+1)t}}{\lambda-1}\Big) + \frac{2}{\lambda}\Big(e^{\mathrm{i}(2\lambda-1)t} - e^{-\mathrm{i}(2\lambda+1)t}\Big), \\
a_{31}(t) &= -\frac{2}{\lambda}\Big(e^{\mathrm{i}(2\lambda+1)t} - e^{-\mathrm{i}(2\lambda-1)t}\Big) - 2\Big(\frac{e^{\mathrm{i}(2\lambda+1)t}}{\lambda+2} + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\lambda-2} - \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\lambda+2} - \frac{e^{-\mathrm{i}(2\lambda-1)t}}{\lambda-2}\Big) + \\
&\quad +4\Big(\frac{e^{\mathrm{i}(2\lambda+1)t}}{\lambda+1} + \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\lambda-1} - \frac{e^{\mathrm{i}t}}{\lambda+1} - \frac{e^{-\mathrm{i}(2\lambda-1)t}}{\lambda-1}\Big), \\
a_{33}(t) &= (-2\mathrm{i})\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda-1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda+1}\Big) - 2\mathrm{i}\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda+1} - \frac{e^{-2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda-1}\Big) + \frac{4\mathrm{i}}{\lambda}\Big(e^{2\mathrm{i}\lambda t} - e^{-2\mathrm{i}\lambda t}\Big).
\end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Заметим, что интерес представляет лишь изучение случая, когда выполнены неравенства (3.3.16). Действительно, если $\lambda = 1$ или $\lambda = 2$, то матрица A_1 в системе (3.3.28) ненулевая и ее собственные числа различны. Воспользовавшись леммой 1.1.1, систему (3.3.28) заменой $u_3 = C(t)u_4$ можно привести к L–диагональному виду

$$\dot{u}_4 = \big[t^{-\rho}\Lambda(t) + R_1(t)\big]u_4, \tag{3.3.31}$$

где диагональная матрица $\Lambda(t)$ составлена из собственных чисел матрицы $A_1 + t^{-\rho}A_2$, а $R_1(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Построим затем асимптотику фундаментальной матрицы системы (3.3.31) при $t \to \infty$ согласно теореме Левинсона и вернемся к исходной системе (3.3.3). Тогда для фундаментальных решений уравнения (3.3.1) в случае $\lambda = 1$ мы получаем асимптотические формулы (3.3.20), (3.3.21), а в случае $\lambda = 2$ — формулы (3.3.25), (3.3.26) с тем лишь изменением, что величину $\int t^{-\rho}dt$ в отмеченных формулах следует заменить выражением

$$\frac{t^{1-\rho}}{1-\rho}\big(1 + o(1)\big). \tag{3.3.32}$$

Итак, будем далее рассматривать случай, когда выполнены неравенства (3.3.16). Тогда матрица $A_1 = 0$ и необходимо вычислить матрицу A_2. Вновь нам потребуется рассмотреть несколько ситуаций. Пусть сначала

$$\lambda \neq \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2. \tag{3.3.33}$$

Используя (3.3.29), (3.3.30), несложно убедиться в том, что

$$A_2 = \big[A_1(t)Y_1(t)\big] = \mu\mathbf{i}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = \frac{3a^2}{4(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)}. \tag{3.3.34}$$

Из вида матрицы A_2 следует, что система (3.3.28) является L–диагональной и асимптотика ее фундаментальной матрицы может быть построена на основании теоремы 1.1.1. Первые компоненты фундаментальных решений системы (3.3.3) имеют тогда следующие асимптотики при $t \to \infty$:

$$x^{(1,2)}(t) = \big(1 + o(1)\big)\exp\Big\{\pm\mathbf{i}\Big(t + \mu\int t^{-2\rho}dt\Big)\Big\}, \qquad x^{(3)}(t) = o(1). \tag{3.3.35}$$

Как и ранее, будем предполагать, что величина t_0 в (3.3.4) достаточно велика. Выпишем линейную комбинацию последних компонент фундаментальных решений системы (3.3.3). Имеем,

$$z(t) = c_1\big(-\mathbf{i} + o(1)\big)\exp\Big\{\mathbf{i}\Big(t + \mu\int t^{-2\rho}dt\Big)\Big\} + \\ + c_2\big(\mathbf{i} + o(1)\big)\exp\Big\{-\mathbf{i}\Big(t + \mu\int t^{-2\rho}dt\Big)\Big\} + c_3\big(1 + o(1)\big),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставляя это равенство в (3.3.4), выражаем при достаточно больших t_0 величину c_3 линейно через c_1 и c_2. Выписывая теперь линейную комбинацию функций (3.3.35) с учетом полученного выражения для c_3, получаем следующие асимптотики для линейно независимых решений уравнения (3.3.1) при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,2)}(t) + o(1). \tag{3.3.36}$$

Предположим теперь, что

$$\lambda = \frac{1}{2}. \tag{3.3.37}$$

Из (3.3.29), (3.3.30) следует, что

$$A_2 = \big[A_1(t)Y_1(t)\big] = \frac{a^2}{15}\begin{pmatrix} 4\mathfrak{i} & 0 & 5 \\ 0 & -4\mathfrak{i} & 5 \\ 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.38}$$

Несложный подсчет показывает, что собственные числа этой матрицы имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\frac{2\sqrt{21}}{15}a^2, \quad \mu_3 = 0. \tag{3.3.39}$$

Система (3.3.28) заменой

$$u_3 = Cu_4, \qquad C = \begin{pmatrix} \delta & -\bar{\delta} & 1 \\ \bar{\delta} & -\delta & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{4}{5}\mathfrak{i} \end{pmatrix}, \quad \delta = \frac{\sqrt{21}+2\mathfrak{i}}{10} \tag{3.3.40}$$

может быть приведена к L–диагональной форме. В силу теоремы Левинсона фундаментальная матрица системы (3.3.28) имеет тогда следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \big[C + o(1)\big]\,\mathrm{diag}\big(\exp\Big\{\mu_1\int t^{-2\rho}dt\Big\}, \exp\Big\{\mu_2\int t^{-2\rho}dt\Big\}, 1\big).$$

Здесь матрица C имеет вид (3.3.40), а величины μ_1 и μ_2 определяются выражениями (3.3.39). Первые компоненты фундаментальных решений системы (3.3.3) допускают тогда следующие асимптотические представления при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= \Big[\big(\delta + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} + \big(\bar{\delta} + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t}\Big]\exp\Big\{\mu_1\int t^{-2\rho}dt\Big\}, \\ x^{(2)}(t) &= \Big[\big(-\bar{\delta} + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} - \big(\delta + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t}\Big]\exp\Big\{\mu_2\int t^{-2\rho}dt\Big\}, \\ x^{(3)}(t) &= \big(1 + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} - \big(1 + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t}. \end{aligned} \tag{3.3.41}$$

Вновь выпишем линейную комбинацию z-компонент фундаментальных решений системы (3.3.3). Имеем,

$$\begin{aligned} z(t) = c_1\Big[\big(-\mathfrak{i}\delta + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} + \big(\mathfrak{i}\bar{\delta} + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t} + 1 + o(1)\Big]\exp\Big\{\mu_1\int t^{-2\rho}dt\Big\} + \\ + c_2\Big[\big(\mathfrak{i}\bar{\delta} + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} - \big(\mathfrak{i}\bar{\delta} + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t} + 1 + o(1)\Big]\exp\Big\{\mu_2\int t^{-2\rho}dt\Big\} + \\ + c_3\Big[\big(-\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{\mathfrak{i}t} - \big(\mathfrak{i} + o(1)\big)e^{-\mathfrak{i}t} - \frac{4\mathfrak{i}}{5} + o(1)\Big], \end{aligned}$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные комплексные постоянные. Подставим это выражение в (3.3.4). Заметим, что коэффициент при c_3 для достаточно больших t_0 сколь угодно близок к величине $\left(-2\mathrm{i}\cos t_0 - \frac{4\mathrm{i}}{5}\right)$. Следовательно, c_3 можно линейно выразить через c_1 и c_2 для достаточно больших t_0, таких что $\cos t_0 \neq -\frac{2}{5}$. В таком случае для фундаментальных решений уравнения (3.3.1) получаем следующие асимптотики при $t \to \infty$:

$$x_{1,2}(t) = x^{(1,2)}(t) + \delta_{1,2} x^{(3)}(t). \tag{3.3.42}$$

где $\delta_{1,2}$ — некоторые комплексные числа, которые определяются в силу условия (3.3.4). Заметим, что в рассмотренной ситуации уравнение (3.3.1) имеет неограниченные при $t \to \infty$ решения.

Рассмотрим, наконец, случай, когда

$$\rho \leq \frac{1}{3}.$$

Систему (3.3.12) с помощью усредняющей замены

$$u_2 = \left[I + t^{-\rho} Y_1(t) + \ldots + t^{-k\rho} Y_k(t)\right] u_3 \tag{3.3.43}$$

приводим к виду

$$\dot{u}_3 = \left[t^{-\rho} A_1 + t^{-2\rho} A_2 + \ldots + t^{-k\rho} A_k + R(t)\right] u_3. \tag{3.3.44}$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $0 < k\rho \leq 1 < (k+1)\rho$, матрицы $Y_i(t)$ и A_i определяются согласно формулам (1.2.20), (1.2.21) (в нашем случае $A_0 = 0$) с учетом изменения обозначений (3.2.6), а матрица $R(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Очевидно, что поведение решений системы (3.3.44) при $t \to \infty$ будет определяться видом собственных чисел матрицы

$$A(t) = t^{-\rho} A_1 + t^{-2\rho} A_2 + \ldots + t^{-k\rho} A_k. \tag{3.3.45}$$

Исследуем структуру этой матрицы более подробно.

Будем говорить, что тригонометрический многочлен

$$p(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\mathrm{i}\lambda_j t}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R},$$

относится к классу $\mathcal{A}$, если все его коэффициенты c_j, $j = 1, \ldots, N$, — чисто мнимые, и к классу $\mathcal{B}$ — если действительны. Например, функция $p(t) = \sin t$ относится к классу $\mathcal{A}$, а $p(t) = \cos t$ — к классу $\mathcal{B}$. Заметим, что матрица $A_1(t)$ в системе (3.3.12) имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}. \tag{3.3.46}$$

Утверждение 3.3.1. *Каждая из постоянных матриц A_i, $i = 1, \ldots, k$, в усредненной системе* (3.3.44) *имеет следующий вид:*

$$\begin{pmatrix} \boxed{\mathfrak{i}} & \boxed{\mathfrak{i}} & \boxed{r} \\ \boxed{\mathfrak{i}} & \boxed{\mathfrak{i}} & \boxed{r} \\ \boxed{r} & \boxed{r} & \boxed{\mathfrak{i}} \end{pmatrix}, \tag{3.3.47}$$

где символом $\boxed{\mathfrak{i}}$ обозначено некоторое чисто мнимое число или ноль, а символом $\boxed{r}$ — некоторое действительное число или ноль.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по номеру матрицы A_i (напомним, что мы используем обозначения (3.2.6)). Поскольку

$$\mathrm{M}\left[\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \boxed{\mathfrak{i}} & \boxed{\mathfrak{i}} & \boxed{r} \\ \boxed{\mathfrak{i}} & \boxed{\mathfrak{i}} & \boxed{r} \\ \boxed{r} & \boxed{r} & \boxed{\mathfrak{i}} \end{pmatrix}, \tag{3.3.48}$$

то в силу (1.2.16) утверждение справедливо для матрицы A_1 . Кроме того, из (1.2.19) следует ($A_0 = 0$), что матрица $Y_1(t)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \\ \mathcal{B} & \mathcal{B} & \mathcal{A} \\ \mathcal{A} & \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}, \tag{3.3.49}$$

поскольку такой вид имеет интеграл от матрицы (3.3.46). Предположим далее, что все матрицы A_j для $j \leq i-1$, $i \geq 2$, имеют вид (3.3.47), а все матрицы $Y_j(t)$, $j \leq i-1$, имеют вид (3.3.49). Покажем, что матрицы A_i и $Y_i(t)$ имеют тогда такую же структуру. Заметим, что произведение матрицы вида (3.3.46) и матрицы вида (3.3.49) есть матрица вида (3.3.46). Тогда из (1.2.21) в силу (3.3.48) следует, что матрица A_i имеет вид (3.3.47). Далее, произведение матрицы вида (3.3.49) и матрицы вида (3.3.47) есть матрица вида (3.3.46). Из (1.2.20) заключаем, что матрица $Y_i(t)$ имеет вид (3.3.49), поскольку, как было отмечено ранее, такой вид имеет интеграл от матрицы (3.3.46). ■

Вернемся к рассмотрению матрицы $A(t)$ из (3.3.45). Поскольку матрица $A_1(t)$ в системе (3.3.12) имеет вид (1.2.28), (3.3.46), то в силу утверждений 1.2.1, 3.3.1 каждая из матриц A_i, $i = 1, \ldots, k$, в усредненной системе (3.3.44) имеет вид (1.2.28), (3.3.47). Таким образом, сопоставляя формулы (1.2.28) и (3.3.47), заключаем, что

$$A(t) = \begin{pmatrix} \mathfrak{i}\alpha(t) & \mathfrak{i}\beta(t) & \gamma(t) \\ -\mathfrak{i}\beta(t) & -\mathfrak{i}\alpha(t) & \gamma(t) \\ \omega(t) & \omega(t) & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3.50}$$

где $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \omega(t)$ — некоторые действительнозначные функции. Для определения собственных чисел матрицы $A(t)$ получаем характеристический многочлен

$$p(\mu) = -\mu^3 + \mu\big(\beta^2(t) - \alpha^2(t) + 2\omega(t)\gamma(t)\big).$$

Следовательно, собственные числа $\mu_{1,2}(t)$ определяются как корни полинома

$$\mu^2 = \beta^2(t) - \alpha^2(t) + 2\omega(t)\gamma(t),$$

а, значит, при достаточно больших t являются либо чисто мнимыми и комплексно сопряженными друг другу, либо действительными и разных знаков. Кроме того, собственное число $\mu_3(t) \equiv 0$. Заметим, что первой ненулевой матрицей в системе (3.3.44) является либо матрица A_1, либо матрица A_2. Из леммы 1.1.1 тогда следует, что система (3.3.44) приводится к L–диагональному виду

$$\dot{u}_4 = \big[\Lambda(t) + R_1(t)\big]u_4,$$

где матрица $\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\mu_1(t), \mu_2(t), 0\big)$ составлена из собственных чисел матрицы (3.3.45).

Таким образом, мы можем сделать следующие выводы. Если $\lambda = 1$, то

$$\mu_{1,2}(t) = \mu_{1,2}t^{-\rho}\big(1 + o(1)\big), \tag{3.3.51}$$

где числа $\mu_{1,2}$ определяются формулой (3.3.18). В этом случае для фундаментальных решений уравнения (3.3.1) (во всяком случае при достаточно больших t_0) справедливы асимптотические формулы (3.3.20), (3.3.21), в которых величину $\int t^{-\rho}dt$ следует заменить выражением (3.3.32). Если $\lambda = 2$, то для собственных чисел матрицы (3.3.45) мы получаем представление (3.3.51), где на сей раз числа $\mu_{1,2}$ определяются формулой (3.3.23). Тогда для фундаментальных решений уравнения (3.3.1) мы получаем асимптотические представления (3.3.25), (3.3.26), в которых вновь следует заменить величину $\int t^{-\rho}dt$ выражением (3.3.32). Предположим теперь, что $\lambda = \frac{1}{2}$. В этом случае собственные числа матрицы (3.3.45) имеют вид

$$\mu_{1,2}(t) = \mu_{1,2}t^{-2\rho}\big(1 + o(1)\big), \tag{3.3.52}$$

где числа $\mu_{1,2}$ определяются формулой (3.3.39). Для фундаментальных решений уравнения (3.3.1) при $t \to \infty$ мы получаем асимптотические формулы (3.3.41), (3.3.42), в которых величину $\int t^{-2\rho}dt$ следует заменить выражением

$$\frac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1 + o(1)\big). \tag{3.3.53}$$

Наконец, если $\lambda \neq \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2$, то собственные числа матрицы (3.3.45) имеют асимптотику вида (3.3.52), где $\mu_{1,2} = \pm\mathrm{i}\mu$, а величина μ определяется формулой (3.3.34). В этом случае

фундаментальные решения уравнения (3.3.1) при $t \to \infty$ описываются асимптотическими формулами (3.3.35), (3.3.36), в которых $\int t^{-2\rho} dt$ следует заменить выражением (3.3.53). Отметим также, что во всех рассмотренных случаях остаточный член $o(1)$ в формулах (3.3.51) и (3.3.52) есть величина действительная при достаточно больших t.

Анализируя полученные в этом разделе формулы мы можем заключить следующее. Неограниченные колебания в ИДУ (3.3.1) могут существовать, только если $(\lambda = \pm 2)$ и $(\rho \leq 1)$ или $(\lambda = \pm 1/2)$ и $(\rho \leq 1/2)$. Во всех остальных случаях ненулевые решения уравнения (3.3.1) ограничены и не стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Глава 4

Построение асимптотики критических решений систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами

4.1 Построение критической системы

В данной главе мы продолжим разработку метода асимптотического интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами, начатую в главе 1. Суть решаемой в этом разделе задачи заключается в следующем. В практических приложениях иногда требуется определить асимптотику не всех решений системы (1.2.3), а только некоторых. Например, тех, которые определяют характер устойчивости решений. Предположим, что в системе (1.2.3) матрица A_0 имеет ровно s чисто мнимых собственных чисел, а остальные $m-s$ собственные числа имеют отрицательные вещественные части. В этой ситуации естественно ожидать, что для $m-s$ линейно независимых решений системы (1.2.3) при $t \geq t_0$ справедливы оценки

$$|x_j(t)| \leq Me^{-\nu t}, \qquad \nu > 0, \qquad j = s+1, \ldots, m. \tag{4.1.1}$$

Точная асимптотика этих решений обычно не представляет значительного интереса. Таким образом, нам необходимо построить асимптотику s линейно независимых решений, чей характер поведения при $t \to \infty$ не подчиняется оценкам (4.1.1). Эти решения мы будем называть *критическими*. В этом разделе мы укажем алгоритм построения системы дифференциальных уравнений, из которой может быть определена асимптотика s критических линейно независимых решений $x_1(t), \ldots, x_s(t)$ системы (1.2.3).

С помощью подходящей замены вида

$$x = Cy \tag{4.1.2}$$

от системы (1.2.3) перейдем к двум подсистемам вида

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= B_1 y_1 + B_{11}(t) y_1 + B_{12}(t) y_2 + R_{11}(t) y_1 + R_{12}(t) y_2, \\ \dot{y}_2 &= B_2 y_2 + B_{21}(t) y_1 + B_{22}(t) y_2 + R_{21}(t) y_1 + R_{22}(t) y_2, \end{aligned} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{4.1.3}$$

где $y_1 \in \mathbb{C}^s$, $y_2 \in \mathbb{C}^{m-s}$. Здесь все собственные числа $(s \times s)$-матрицы B_1 чисто мнимые, а собственные числа $((m-s) \times (m-s))$-матрицы B_2 имеют отрицательные вещественные части. Матрицы $B_{ij}(t)$ подходящих размеров имеют следующий вид, обусловленный исходной системой (1.2.3):

$$B_{ij}(t) = \sum_{l=1}^{n} A_l^{(ij)}(t) v_l(t) + \ldots + \sum_{1 \le l_1 \le \ldots \le l_k \le n} A_{l_1 \ldots l_k}^{(ij)}(t) v_{l_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{l_k}(t). \qquad (4.1.4)$$

Элементами матриц $A_{l_1 \ldots l_p}^{(ij)}(t)$ являются тригонометрические многочлены. Наконец, матрицы $R_{ij}(t)$ принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$. В системе (4.1.3) произведем замену вида

$$y = e^{-\alpha_0 t} z, \qquad \alpha_0 > 0$$

такую, что у матрицы

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} + \alpha_0 I$$

имеются s собственных чисел с положительными вещественными частями и $m - s$ собственных чисел с отрицательными вещественными частями. Полученная в результате такой замены линейная система является частным случаем систем вида (1.4.10), рассмотренных в разделе 1.4. Из теоремы 1.4.1 тогда следует, что в фазовом пространстве этой системы существует многообразие $S(t_0)$, которое в силу линейности системы является $(m-s)$-мерным линейным подпространством пространства $\mathbb{C}^m$, обладающее следующим свойством. При достаточно больших t_0 все решения с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$ стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью. Возвращаясь к нашей системе (4.1.3) легко устанавливаем следующий результат. У системы (4.1.3) имеются $m - s$ линейно независимых решений, для которых справедливы оценки (4.1.1). Факт существования у системы (4.1.3) $m - s$ базисных решений, для которых справедливы оценки (4.1.1), легко установить также, если воспользоваться результатами, изложенными в [95] (см. также [165]).

Для дальнейшего изложения нам потребуется один специальный вариант теоремы 1.4.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x} = A(t)x + R(t, x), \qquad x \in \mathbb{R}^m. \qquad (4.1.5)$$

Предположим, что

1. Линейная система (1.4.2) экспоненциально дихотомична на правой полуоси $t \ge 0$, т. е. выполнены неравенства (1.4.3). Кроме того, пусть $\operatorname{rank} P_1 = k$;

2. Вектор-функция $R(t, x)$ в шаре $|x| \le r$ удовлетворяет следующим условиям:

2a. $|R(t, x_1) - R(t, x_2)| \le p(t)|x_1 - x_2|$, $|x_j| \le r$, $j = 1, 2$, где $p(t) \in \mathcal{M}_0$, $t \ge t_0$,

2б. $R(t,0) \in L_1[t_0,\infty)$.

Здесь класс $\mathcal{M}_0$ вводится согласно определению 1.3.1.

Теорема 4.1.1. *При сформулированных выше предположениях справедливы все утверждения теоремы 1.4.1 и дополнительно все решения системы* (4.1.5) *с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$, где $t_0 \gg 1$, принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$.*

Доказательство. Интересующие нас решения системы с начальными условиями на многообразии $S(t_0)$ являются решениями интегрального уравнения

$$x(t) = U(t)P_1U^{-1}(t_0)x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{\infty} G(t,s)R(s,x)ds, \tag{4.1.6}$$

где матричная функция Грина $G(t,s)$ определяется формулой (1.4.5). Кроме того, для нее справедливо неравенство

$$|G(t,s)| \le Ke^{-\alpha|t-s|}, \qquad t,s \ge 0.$$

Покажем, что для любого достаточно малого

$$x_0 = P_1U^{-1}(t_0)x(t_0) \tag{4.1.7}$$

при достаточно больших t_0 у интегрального уравнения (4.1.6) существует единственное ограниченное при $t \ge t_0$ решение. Это решение стремится к нулю при $t \to \infty$ и принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$. Начальные условия всех таких решений при различных x_0 образуют многообразие $S(t_0)$. Обозначим правую часть уравнения (4.1.6) как результат применения оператора T к функции $x(t)$ при фиксированных x_0 и t_0. Оператор T будем считать определенным в банаховом пространстве BL, состоящем из непрерывных при $t \ge t_0$ функций $x(t)$, таких что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и, кроме того, $p(t)x(t) \in L_1[t_0,\infty)$. Норму в этом пространстве введем согласно формуле

$$\|x\|_{BL} = \|x\|_{C_0} + \|x\|_{L_1} = \max_{t\ge t_0}|x(t)| + \int\limits_{t_0}^{\infty} p(s)|x(s)|ds. \tag{4.1.8}$$

Покажем, что оператор T при достаточно малых x_0 и достаточно большом t_0 переводит некоторый шар $\|x\|_{BL} \le r_0$ пространства BL в себя и является в этом шаре сжимающим. Сначала установим тот факт, что функция $(Tx)(t)$ является элементом пространства BL. Заметим, что из доказательства теоремы 1.4.1 следует, что функция $(Tx)(t)$ непрерывна при $t \ge t_0$ и, кроме того, $(Tx)(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Далее, из (4.1.6) следует, что

$$|(Tx)(t)| \le Ke^{-\alpha(t-t_0)}|U(t_0)||x_0| + \left|\int\limits_{t_0}^{\infty} G(t,s)\big[R(s,x) - R(s,0) + R(s,0)\big]ds\right| \le$$

$$\le Ke^{-\alpha(t-t_0)}|U(t_0)||x_0| + K\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}p(s)|x(s)|ds + K\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}|R(s,0)|ds. \quad (4.1.9)$$

Здесь мы также учли неравенство (1.4.18). Отсюда выводим, что

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} p(t)|(Tx)(t)|dt \le K|U(t_0)||x_0|\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha(t-t_0)}p(t)dt + K\int\limits_{t_0}^{\infty} p(s)|x(s)|\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}p(t)dtds +$$

$$+ K\int\limits_{t_0}^{\infty} |R(s,0)|\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-\alpha|t-s|}p(t)dtds. \quad (4.1.10)$$

Поскольку $p(t) \in \mathcal{M}_0$, а функции $p(t)x(t)$ и $R(t,0)$ принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$, то в силу следствия 1.4.1 все интегралы в правой части неравенства (4.1.10) существуют. Следовательно, функция $p(t)|(Tx)(t)|$ также принадлежит $L_1[t_0,\infty)$. Таким образом, мы показали, что функция $(Tx)(t)$ является элементом пространства BL. Из неравенства (1.4.19) следует, что для любого наперед заданного $r_0 \le r$ можно добиться выполнения неравенства

$$\|Tx\|_{C_0} \le \frac{r_0}{2}, \quad (4.1.11)$$

если $|x_0| \le \rho_0$ достаточно мало и t_0 достаточно велико. Из (4.1.10) с учетом оценки (1.4.9) выводим, что

$$\|Tx\|_{L_1} \le \frac{2KN(t_0)}{1-e^{-\alpha}}|U(t_0)||x_0| + \frac{2KN(t_0)}{1-e^{-\alpha}}\|x\|_{L_1} + \frac{2KN(t_0)}{1-e^{-\alpha}}\int\limits_{t_0}^{\infty}|R(s,0)|ds. \quad (4.1.12)$$

Здесь функция $N(t)$ при $t \ge t_0$ определяется формулой

$$N(t) = \max_{s\ge t}\int\limits_{s}^{s+1} p(\tau)d\tau$$

и, кроме того, $N(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Из (4.1.12) следует, что если $\|x\|_{L_1} \le r_0$, то выбирая $|x_0|$ достаточно малым, а число t_0 достаточно большим, можно добиться выполнения неравенства

$$\|Tx\|_{L_1} \le \frac{r_0}{2}. \quad (4.1.13)$$

Тогда в силу (4.1.11) и (4.1.13) заключаем, что оператор T переводит шар $\|x\|_{BL} \le r_0$ в себя.

Установим теперь сжимаемость оператора T в шаре $\|x\|_{BL} \le r_0$. Из неравенства (1.4.17) следует, что

$$\|Tx - Ty\|_{C_0} \le q\|x-y\|_{C_0}, \qquad 0 \le q < 1, \quad (4.1.14)$$

коль скоро $\|x\|_{BL} \le r_0$ и $\|y\|_{BL} \le r_0$. Далее, из (4.1.6) с учетом (4.1.7), (4.1.10) и (4.1.12) выводим неравенство

$$\|Tx - Ty\|_{L_1} \le \frac{2KN(t_0)}{1 - e^{-\alpha}} \|x - y\|_{L_1} \le q\|x - y\|_{L_1}, \qquad 0 \le q < 1, \tag{4.1.15}$$

если величина t_0 достаточно велика. Из неравенств (4.1.14) и (4.1.15) следует сжимаемость оператора T в шаре $\|x\|_{BL} \le r_0$ при достаточно больших t_0.

В силу принципа сжимающих отображений заключаем, что интегральное уравнение (4.1.6) имеет единственное решение в шаре $\|x\|_{BL} \le r_0$ пространства BL при всех достаточно больших t_0 и достаточно малых $|x_0|$. Осталось показать, что это решение принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Действительно, поскольку $x = Tx$, то для $|x(t)|$ при $t \ge t_0$ справедливо неравенство (4.1.9). Осталось заметить, что все слагаемые в правой части (4.1.9) принадлежат $L_1[t_0, \infty)$. Это вытекает из следствия 1.4.1 и того факта, что этому пространству принадлежат функции $p(t)x(t)$ и $R(t, 0)$.

Теорема доказана. ■

Вернемся теперь к основной задаче этого раздела — построению системы дифференциальных уравнений, описывающей поведение критических решений системы (1.2.3). Используемый нами метод во многом повторяет основные этапы алгоритма построения центрального многообразия для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [84, 168]). Будем искать критические решения системы (4.1.3) в виде

$$y_2(t) = H(t)y_1(t), \tag{4.1.16}$$

где $H(t)$ — некоторая $((m-s) \times s)$-матрица, подлежащая определению. Подставим представление (4.1.16) во второе уравнение системы (4.1.3) и учтем первое уравнение этой системы. Приходим к выводу, что интересующая нас матрица $H(t)$ является решением следующего нелинейного матричного дифференциального уравнения:

$$\dot{H} = B_2H - HB_1 + B_{22}(t)H - HB_{11}(t) - HB_{12}(t)H + \\ + B_{21}(t) + R_{21}(t) - HR_{11}(t) + R_{22}(t)H - HR_{12}(t)H. \tag{4.1.17}$$

Рассмотрим это уравнение, ограничиваясь лишь постоянной линейной частью. Имеем,

$$\dot{H} = B_2H - HB_1. \tag{4.1.18}$$

Легко проверить, что любое решение этого уравнения с начальным условием $H(0) = C$ описывается формулой

$$H(t) = e^{B_2t}Ce^{-B_1t}. \tag{4.1.19}$$

Матричное дифференциальное уравнение (4.1.17) можно представить в виде системы (4.1.5) для нахождения элементов $h_{ij}(t)$ матрицы $H(t)$. В силу формулы (4.1.19) и условий на спектр матриц B_1 и B_2 соответствующая линейная система (1.4.2) будет обладать экспоненциальной дихотомией с проектором $P_1 = I$. Следовательно, на основании теоремы 1.4.1 все решения матричного уравнения (4.1.17) из некоторой окрестности нуля при достаточно больших t_0 стремятся к нулю при $t \to \infty$. В силу (4.1.4) будем искать эти решения в следующем виде:

$$H(t) = \sum_{i=1}^{n} H_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} H_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t) + Y(t). \tag{4.1.20}$$

Элементами матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются тригонометрические многочлены, а $Y(t) = o(1)$ — некоторая матрица из класса $L_1[t_0, \infty)$. Подставляя представление (4.1.20) в уравнение (4.1.17) и собирая слагаемые при $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$ ($l \le k$), мы получаем следующие неоднородные дифференциальные уравнения для определения матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t)$:

$$\dot{H}_{i_1\ldots i_l} = B_2H_{i_1\ldots i_l} - H_{i_1\ldots i_l}B_1 + G_{i_1\ldots i_l}(t). \tag{4.1.21}$$

Здесь $G_{i_1\ldots i_l}(t)$ — некоторая известная матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены:

$$G_{i_1\ldots i_l}(t) = \sum_j g_j^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t}.$$

Интересующее нас решение уравнения (4.1.21) будем искать в виде

$$H_{i_1\ldots i_l}(t) = \sum_j \beta_j^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_j t}. \tag{4.1.22}$$

Подставляя (4.1.22) в (4.1.21) и собирая члены при одинаковых показателях экспоненты, получаем следующие уравнения для нахождения матриц $\beta_j^{(i_1\ldots i_l)}$:

$$B_2\beta_j^{(i_1\ldots i_l)} - \beta_j^{(i_1\ldots i_l)}(B_1 + \mathrm{i}\lambda_j I) = -g_j^{(i_1\ldots i_l)}. \tag{4.1.23}$$

Поскольку спектры матриц B_2 и $B_1 + \mathrm{i}\lambda_j I$ не пересекаются, то эти уравнения однозначно разрешимы при любой правой части (см., например, [13]).

Наконец, для нахождения матрицы $Y(t)$ получаем нелинейное матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{Y} = B_2Y - YB_1 + \Phi_1(t)Y + Y\Phi_2(t) - YB_{12}(t)Y + \\ + \Psi_1(t) + Y\Psi_2(t) + \Psi_3(t)Y - YR_{12}(t)Y. \tag{4.1.24}$$

Здесь матрицы $\Phi_j(t)$ $(j = 1, 2)$ суть матрицы вида (4.1.4), а матрицы $\Psi_j(t)$ $(j = 1, 2, 3)$ принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$. Это уравнение можно записать в виде системы (4.1.5) для нахождения элементов $y_{ij}(t)$ матрицы $Y(t)$. Полученная таким образом система удовлетворяет условиям теоремы 4.1.1. Следовательно, все решения уравнения (4.1.20) с начальными условиями $Y(t_0)$ такими, что t_0 достаточно велико, а $|Y(t_0)|$ достаточно мало, принадлежат классу $L_1[t_0, \infty)$. Отсюда вытекает возможность представления решений системы (4.1.17), стремящихся к нулю при $t \to \infty$, в виде (4.1.20).

Учтем представления (4.1.16) и (4.1.20) в первом уравнении системы (4.1.3). В результате получим следующую s-мерную систему дифференциальных уравнений вида (1.2.3):

$$\dot{y}_1 = B_1 y_1 + \hat{B}_{11}(t) y_1 + \hat{R}_{11}(t) y_1. \tag{4.1.25}$$

Здесь матрица $\hat{B}_{11}(t)$ имеет вид (4.1.4), а матрица $\hat{R}_{11}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0, \infty)$. Без ограничения общности можно считать, что матрица B_1 — матрица жорданова вида D_0, единственным собственным числом которой является ноль. Действительно, в системе (4.1.25) можно сперва осуществить преобразование, приводящее матрицу B_1 к жордановой форме, а затем воспользоваться заменой типа (1.2.14).

Используя теперь теорему 1.2.1, с помощью замены типа (1.2.5) систему (4.1.25) приводим к усредненному виду

$$\dot{z} = \Big(D_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i v_i(t) + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} D_{i_1 i_2} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} D_{i_1 \ldots i_k} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) + \hat{R}(t) \Big) z \tag{4.1.26}$$

с постоянными матрицами $D_{i_1 \ldots i_l}$ и матрицей $\hat{R}(t) \in L_1[t_0, \infty)$. Система (4.1.26) и является искомой *критической системой*. Дальнейшее асимптотическое исследование системы (4.1.26) связано с необходимостью приведения этой системы к L–диагональному виду (1.1.3). Если это удается сделать, то мы можем построить асимптотику фундаментальной матрицы системы (4.1.25), а следовательно получить асимптотики для s компонент интересующих нас решений системы (4.1.3). Учитывая связь (4.1.16) между компонентами y_1 и y_2 вектора y в системе (4.1.3) и возвращаясь к исходной системе (1.2.3), мы, таким образом, можем получить асимптотические формулы для s линейно независимых критических решений.

4.2 Метод Колесова–Майорова

Одним из недостатков метода построения критической системы, описанного в предыдущем разделе, является необходимость осуществления преобразования (4.1.2), приводящего

матрицу A_0 к блочно-диагональному виду. Этого недостатка лишен метод, предложенный Ю.С. Колесовым и В.В. Майоровым в работе [22] применительно к задаче исследования устойчивости решений линейных систем с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами.

Попытаемся построить асимптотику s критических решений системы (1.2.3) следующим образом. Положим

$$S(t) = S_0(t) + \sum_{i=1}^{n} S_i(t)v_i(t) + \ldots + \sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n} S_{i_1\ldots i_k}(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t), \tag{4.2.1}$$

где элементами $(m \times s)$-матриц $S_0(t)$ и $S_{i_1\ldots i_l}(t)$ являются некоторые тригонометрические многочлены. Пусть $(s \times s)$-матрица $Z(t)$ суть фундаментальная матрица системы (4.1.26), в которой матрица $\hat{R}(t) \equiv 0$, а постоянные матрицы $D_{i_1\ldots i_l}$ подлежат определению. Предположим далее, что интересующие нас s критических решений системы (1.2.3) расположены по столбцам $(m \times s)$-матрицы

$$X(t) = S(t)Z(t). \tag{4.2.2}$$

Подставим теперь представление (4.2.2) в исходную систему (1.2.3) и применим к обеим частям полученного равенства справа матрицу $Z^{-1}(t)$. Соберем затем слагаемые при одинаковых произведениях $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$ $(l \le k)$, игнорируя члены, принадлежащие классу $L_1[t_0, \infty)$. Приравнивая «свободные» члены, получаем следующее уравнение для определения матрицы $S_0(t)$ и постоянной матрицы D_0:

$$\dot{S}_0(t) = A_0S_0(t) - S_0(t)D_0. \tag{4.2.3}$$

Пусть по столбцам $(m \times s)$-матрицы $X_0(t)$ расположены s линейно независимых решений системы

$$\dot{x} = A_0x,$$

отвечающие чисто мнимым собственным значениям матрицы A_0. Очевидно, что матрицу $X_0(t)$ можно представить в виде

$$X_0(t) = S_0(t)e^{D_0t},$$

где по столбцам матрицы $S_0(t)$ стоят некоторые тригонометрические многочлены, а $(s \times s)$-матрица D_0 — верхняя жорданова матрица с единственным собственным числом, равным нулю, причем кратность его элементарных делителей совпадает с кратностями элементарных делителей собственных чисел матрицы A_0, лежащих на мнимой оси. Построенные таким образом матрицы $S_0(t)$ и D_0 удовлетворяют уравнению (4.2.3).

Пусть нулевые строки матрицы D_0 имеют номера $l_1 < l_2 < \ldots < l_p$. Обозначим через $K(D_0)$ совокупность $(s \times s)$-матриц, у которых ненулевые элементы могут быть только в строках с этими номерами. Собирая теперь слагаемые при $v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_l}(t)$, получаем следующие уравнения для определения матриц $S_{i_1 \ldots i_l}(t)$ и $D_{i_1 \ldots i_l}$:

$$\dot{S}_{i_1 \ldots i_l}(t) = A_0 S_{i_1 \ldots i_l}(t) + F_{i_1 \ldots i_l}(t) - S_0(t) D_{i_1 \ldots i_l}. \tag{4.2.4}$$

Здесь $F_{i_1 \ldots i_l}(t)$ — некоторая известная $(m \times s)$-матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены. В [22] показано, что из уравнений вида (4.2.4) можно определить матрицы $D_{i_1 \ldots i_l} \in K(D_0)$ и матрицы $S_{i_1 \ldots i_l}(t)$, элементами которых являются тригонометрические многочлены.

Обозначим через $A(t)$ главную часть системы (1.2.3), т. е. $(m \times m)$-матрицу

$$A(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} A_i(t) v_i(t) + \ldots + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} A_{i_1 \ldots i_k}(t) v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t).$$

Далее, через $D(t)$ обозначим главную часть системы (4.1.26), т.е. $(s \times s)$-матрицу

$$D(t) = D_0 + \sum_{i=1}^{n} D_i v_i(t) + \ldots + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} D_{i_1 \ldots i_k} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t).$$

В силу определения матриц $S_{i_1 \ldots i_l}(t)$ и матриц $D_{i_1 \ldots i_l}$ имеет место следующее тождество:

$$A(t)S(t) - \dot{S}(t) = S(t)D(t) + Y(t), \tag{4.2.5}$$

где $Y(t)$ — некоторая матрица из класса $L_1[t_0, \infty)$.

Через $P(t)$ будем далее обозначать $(m \times m)$-матрицу, первыми s столбцами которой являются столбцы матрицы $S(t)$, а в качестве остальных $m - s$ столбцов взяты произвольные базисные векторы из корневого подпространства матрицы A_0, отвечающего ее собственным числам с отрицательными вещественными частями. Очевидно, что при достаточно больших t матрица $P(t)$ невырождена, а обратная к ней матрица ограничена, поскольку

$$|\det P(t)| \ge p_0 > 0, \qquad t \gg 1.$$

В системе (1.2.3) осуществим замену

$$x = P(t)y, \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad y_1 \in \mathbb{C}^s, \quad y_2 \in \mathbb{C}^{m-s}. \tag{4.2.6}$$

Используя тождество (4.2.5), нетрудно установить, что в результате этой замены исходная система преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= D(t)y_1 + B_{12}(t)y_2 + R_{11}(t)y_1 + R_{12}(t)y_2, \\ \dot{y}_2 &= B_2 y_2 + B_{22}(t)y_2 + R_{21}(t)y_1 + R_{22}(t)y_2, \end{aligned} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{4.2.7}$$

Здесь собственные числа $((m-s)\times(m-s))$-матрицы B_2 имеют отрицательные вещественные части, матрицы $B_{12}(t)$ и $B_{22}(t)$ суть матрицы вида (4.1.4), а матрицы $R_{ij}(t)$ $(i,j=1,2)$ принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$.

Будем искать решения системы (4.2.7) в виде (4.1.16). Для нахождения матрицы $H(t)$ получаем уравнение вида (4.1.17), в котором

$$B_1 = D_0, \quad B_{11}(t) = D(t) - D_0, \quad B_{21}(t) = 0.$$

Из теоремы 4.1.1 тогда следует, что все решения $H(t)$ уравнения (4.1.17) с начальными условиями из некоторой окрестности нуля при $t_0 \gg 1$ принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$. Учтем затем соотношение (4.1.16) в первом уравнении системы (4.2.7). В результате получим s-мерную систему дифференциальных уравнений вида (4.1.26) с постоянными матрицами $D_{i_1\dots i_l}$ и матрицей $\hat{R}(t) \in L_1[t_0,\infty)$, которая и является искомой критической системой.

4.3 Асимптотическое интегрирование системы двух осцилляторов с колебательно убывающей связью

В качестве примера использования изложенной в предыдущих разделах методики рассмотрим следующую систему двух связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \frac{a\sin\omega t}{t^\alpha} x_2 = 0, \\ &\ddot{x}_2 + d\dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \frac{b\sin\omega t}{t^\beta} x_1 = 0. \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Здесь $\omega > 0$, $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$, a и b — произвольные (ненулевые) действительные параметры, $d > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Система (4.3.1) исследовалась в работе [136] в предположении, что $d = 0$ и

$$\alpha + \beta > 1. \tag{4.3.2}$$

Установлено, что в том случае, когда

$$\omega \neq \omega_1 + \omega_2, \quad \omega \neq \omega_2 - \omega_1 \quad \omega \neq \omega_1 - \omega_2, \tag{4.3.3}$$

все решения системы (4.3.1) при условии (4.3.2) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma_1) + O\big(t^{-\alpha}\big) + O\big(t^{1-\alpha-\beta}\big), \\ x_2(t) &= C_2 \sin(\omega_2 t + \gamma_2) + O\big(t^{-\beta}\big) + O\big(t^{1-\alpha-\beta}\big), \end{aligned}$$

где $C_1, C_2, \gamma_1, \gamma_2$ — произвольные действительные постоянные. Если же хотя бы одно из неравенств в (4.3.3) обращается в равенство, то у системы (4.3.1) могут существовать неограниченные решения. В этом случае говорят, что в системе (4.3.1) имеет место параметрический резонанс.

Исследуем динамику решений системы (4.3.1) при условии, что коэффициент $d > 0$. От системы (4.3.1) перейдем к системе четырех уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= B_1 y_1 + B_{12}(t) y_2, \\ \dot{y}_2 &= B_2 y_2 + B_{21}(t) y_1, \end{aligned} \qquad y_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}. \tag{4.3.4}$$

Здесь

$$\begin{gathered} B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_2^2 & -d \end{pmatrix}, \\ B_{12}(t) = \frac{1}{t^\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a \sin \omega t & 0 \end{pmatrix}, \quad B_{21}(t) = \frac{1}{t^\beta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b \sin \omega t & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{4.3.5}$$

В системе (4.3.4) сначала осуществим замену

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\omega_1 & -\mathrm{i}\omega_1 \end{pmatrix}, \quad E = \operatorname{diag}(1, 1), \tag{4.3.6}$$

а затем — замену

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}(t) & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \qquad \hat{C}(t) = \operatorname{diag}\left(e^{\mathrm{i}\omega_1 t}, e^{-\mathrm{i}\omega_1 t}\right), \tag{4.3.7}$$

где $\mathbb{O}$ — нулевая (2×2)-матрица. В результате этих замен, предварительно разложив функцию $\sin \omega t$ по формуле Эйлера, приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= \hat{B}_{12}(t) w_2, \\ \dot{w}_2 &= B_2 w_2 + \hat{B}_{21}(t) w_1, \end{aligned} \qquad w_1, w_2 \in \mathbb{C}^2, \tag{4.3.8}$$

где

$$\begin{gathered} \hat{B}_{12}(t) = -\frac{a}{4\omega_1} \frac{1}{t^\alpha} \begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} - e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} & 0 \\ e^{\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{B}_{21}(t) = \frac{\mathrm{i}b}{2} \frac{1}{t^\beta} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} & e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} \end{pmatrix}, \end{gathered}$$

а матрица B_2 определена в (4.3.5).

Критические решения системы (4.3.8) будем искать в виде

$$w_2 = H(t) w_1. \tag{4.3.9}$$

Здесь (2×2)-матрица $H(t)$ является решением матричного уравнения

$$\dot{H} = B_2 H - H \hat{B}_{12}(t) H + \hat{B}_{21}(t) \tag{4.3.10}$$

и $H(t) = o(1)$ при $t \to \infty$. Интересующие нас решения уравнения (4.3.10) будем искать в виде разложения (4.1.20), в котором $n = 2$ и $v_1(t) = t^{-\alpha}$, $v_2(t) = t^{-\beta}$.

Для нахождения матрицы $H_1(t)$, элементами которой являются тригонометрические многочлены, получаем уравнение

$$\dot{H}_1 = B_2 H_1.$$

Следовательно, $H_1(t) \equiv \mathbb{O}$. Используя индукцию, легко показать, что все матрицы вида $H_{1\ldots1}(t)$ также суть нулевые. Для нахождения матрицы $H_2(t)$ получаем уравнение

$$\dot{H}_2 = B_2 H_2 + \frac{\mathfrak{i}b}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} & e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t} - e^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} \end{pmatrix}.$$

Несложные вычисления показывают, что

$$H_2(t) = e^{\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t}\Gamma_1 + e^{\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t}\Gamma_2 + e^{-\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t}\Gamma_3 + e^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t}\Gamma_4,$$

где

$$\Gamma_1 = \frac{\mathfrak{i}b}{2\gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{i}(\omega+\omega_1) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_2 = \frac{\mathfrak{i}b}{2\gamma_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \mathfrak{i}(\omega-\omega_1) \end{pmatrix},$$
$$\Gamma_3 = \frac{\mathfrak{i}b}{2\bar{\gamma}_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & \mathfrak{i}(\omega+\omega_1) \end{pmatrix}, \qquad \Gamma_4 = \frac{\mathfrak{i}b}{2\bar{\gamma}_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \mathfrak{i}(\omega-\omega_1) & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\gamma_1 = -(\omega+\omega_1)^2 + \omega_2^2 + \mathfrak{i}(\omega+\omega_1)d, \qquad \gamma_2 = -(\omega-\omega_1)^2 + \omega_2^2 + \mathfrak{i}(\omega-\omega_1)d, \tag{4.3.11}$$

а величины $\bar{\gamma}_1$ и $\bar{\gamma}_2$ комплексно сопряжены величинам γ_1 и γ_2 соответственно. Легко показать, что все матрицы вида $H_{22}(t), H_{222}(t), \ldots, H_{2\ldots2}(t)$ являются нулевыми. Из (4.3.10) следует, что матрица $H_{12}(t)$ также является нулевой.

Используя теорему 1.4.2, мы заключаем, что решения уравнения (4.3.10), стремящиеся к нулю при $t \to \infty$, имеют следующее асимптотическое представление:

$$H(t) = H_2(t)t^{-\beta} + O\big(t^{-(\alpha+2\beta)}\big) + O\big(t^{-(\beta+1)}\big). \tag{4.3.12}$$

Для нахождения критических решений системы (4.3.8) получаем следующую систему:

$$\dot{w}_1 = \hat{B}_{12}(t)H(t)w_1 = \Big[A_1(t)t^{-(\alpha+\beta)} + O\big(t^{-2(\alpha+\beta)}\big) + O\big(t^{-(\alpha+\beta+1)}\big)\Big]w_1. \tag{4.3.13}$$

Здесь

$$A_1(t) = -\frac{ab\mathfrak{i}}{8\omega_1}\Bigg[\begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} + \bar{\gamma}_2^{-1} & 0 \\ 0 & -\bar{\gamma}_1^{-1} - \gamma_2^{-1} \end{pmatrix} + e^{2\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ e^{2\mathrm{i}\omega t}\begin{pmatrix} -\gamma_1^{-1} & 0 \\ & \gamma_2^{-1} \end{pmatrix} + e^{2\mathrm{i}\omega_1 t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\bar\gamma_2^{-1} - \gamma_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} + e^{2\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t}\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_2^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ e^{-2\mathrm{i}(\omega+\omega_1)t}\begin{pmatrix} 0 & -\bar\gamma_1^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^{-2\mathrm{i}\omega t}\begin{pmatrix} -\bar\gamma_2^{-1} & 0 \\ & \bar\gamma_1^{-1} \end{pmatrix} + e^{-2\mathrm{i}\omega_1 t}\begin{pmatrix} 0 & \bar\gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ e^{-2\mathrm{i}(\omega-\omega_1)t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar\gamma_2^{-1} & 0 \end{pmatrix}\Big].$$

Для исследования системы (4.3.13) воспользуемся теоремой 1.2.1. Осуществим в системе (4.3.13) усредняющую замену вида

$$w_1 = \Big[E + Y_1(t)t^{-(\alpha+\beta)} + \ldots\Big]z.$$

В результате этого преобразования получим усредненную систему вида (1.2.6)

$$\dot z = \Big[A_1 t^{-(\alpha+\beta)} + O\big(t^{-2(\alpha+\beta)}\big) + O\big(t^{-(\alpha+\beta+1)}\big)\Big]z, \tag{4.3.14}$$

где $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$.

Предположим сначала, что имеет место неравенство (4.3.2). В этом случае система (4.3.13) имеет L–диагональный вид, и для ее фундаментальной матрицы $W_1(t)$ при $t \to \infty$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$W_1(t) = E + o(1).$$

Возвращаясь теперь к исходной системе (4.3.1) и учитывая равенства (4.3.9), (4.3.12), получаем асимптотическое представление для ее решений при $t \to \infty$:

$$x_1(t) = C_1 \sin(\omega_1 t + \gamma) + o(1),$$
$$x_2(t) = C_1 t^{-\beta}\Big[|\varphi| \sin\big((\omega+\omega_1)t + \gamma + \delta_1\big) + |\psi| \cos\big((\omega-\omega_1)t - \gamma + \delta_2\big) + o(1)\Big],$$

где C_1, γ — произвольные действительные постоянные, и

$$\varphi = \frac{\mathrm{i}b}{2\gamma_1}, \quad \psi = -\frac{\mathrm{i}b}{2\bar\gamma_2}. \tag{4.3.15}$$

Кроме того,

$$\sin\delta_1 = \frac{\operatorname{Im}\varphi}{|\varphi|}, \ \ \cos\delta_1 = \frac{\operatorname{Re}\varphi}{|\varphi|}, \ \ \sin\delta_2 = \frac{\operatorname{Re}\psi}{|\psi|}, \ \ \cos\delta_2 = \frac{\operatorname{Im}\psi}{|\psi|}. \tag{4.3.16}$$

Пусть далее

$$\alpha + \beta \le 1. \tag{4.3.17}$$

Необходимо рассмотреть два случая.

а). $\omega \ne \omega_1$.

В этой ситуации

$$A_1 = \big[A_1(t)\big] = -\frac{ab\mathfrak{i}}{8\omega_1}\begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} + \bar{\gamma}_2^{-1} & 0 \\ 0 & -\bar{\gamma}_1^{-1} - \gamma_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Собственные числа λ_1, λ_2 матрицы A_1

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = -\frac{ab\mathfrak{i}}{8\omega_1}\left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\bar{\gamma}_2}\right) \tag{4.3.18}$$

различны при условии $\operatorname{Im}\lambda_1 \neq 0$. Тогда в силу леммы 1.1.1 система (4.3.14) может быть приведена к L–диагональному виду (1.1.3), где

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1 + o(1), \bar{\lambda}_1 + o(1)\big)t^{-(\alpha+\beta)}. \tag{4.3.19}$$

Фундаментальная матрица $W_1(t)$ системы (4.3.13) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$W_1(t) = \big(E + o(1)\big)\exp\Big\{\int\limits_{t^*}^{t}\Lambda(s)ds\Big\}.$$

Для решений системы (4.3.1) получаем следующие асимптотические формулы при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1\exp\{\nu(t)\operatorname{Re}\lambda_1(1+o(1))\}\big[\sin\big(\omega_1 t + \nu(t)\operatorname{Im}\lambda_1(1+o(1))\big) + o(1)\big], \\ x_2(t) &= C_1 t^{-\beta}\exp\{\nu(t)\operatorname{Re}\lambda_1(1+o(1))\}\Big[|\varphi|\sin\big((\omega+\omega_1)t + \nu(t)\operatorname{Im}\lambda_1(1+o(1))\big) + \\ &\qquad + |\psi|\cos\big((\omega-\omega_1)t + \nu(t)\operatorname{Im}\lambda_1(1+o(1))\big) + o(1)\Big], \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

где C_1 — произвольная действительная постоянная,

$$\nu(t) = \begin{cases} \ln t, & \alpha+\beta = 1, \\ \dfrac{t^{1-(\alpha+\beta)}}{1-(\alpha+\beta)}, & \alpha+\beta < 1, \end{cases} \tag{4.3.21}$$

а величины φ и ψ определяются формулами (4.3.15). Несложные, но довольно утомительные вычисления приводят к следующей формуле:

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = \frac{abd\big(3\omega^4 + (d^2 - 2\omega_1^2 - 2\omega_2^2)\omega^2 - d^2\omega_1^2 - (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2\big)}{4\big(d^2(\omega-\omega_1)^2 + (\omega^2 - 2\omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2\big)\big(d^2(\omega+\omega_1)^2 + (\omega^2 + 2\omega\omega_1 + \omega_1^2 - \omega_2^2)^2\big)}.$$

Из асимптотических представлений (4.3.20) следует, что $x_1(t)$ растет по абсолютной величине, если $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$, и убывает, если $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$. Решение $x_2(t)$ растет по абсолютной величине, если $\operatorname{Re}\lambda_1 > 0$ и $\alpha+\beta < 1$, а также в том случае, когда $\operatorname{Re}\lambda_1 > \beta$ и $\alpha+\beta = 1$. Наконец, $x_2(t)$ убывает по абсолютной величине, если $\operatorname{Re}\lambda_1 < 0$, а также в том случае, когда $\operatorname{Re}\lambda_1 < \beta$ и $\alpha+\beta = 1$.

Если $\operatorname{Re}\lambda_1 = 0$, то асимптотические формулы (4.3.20) справедливы лишь при условии, что

$$\frac{1}{2} < \alpha + \beta \le 1.$$

Этот факт следует непосредственно из вида системы (4.3.13).

б). $\omega = \omega_1$.

В этой ситуации

$$A_1 = \big[A_1(t)\big] = -\frac{ab\mathfrak{i}}{8\omega_1}\begin{pmatrix} \gamma_1^{-1} + \bar\gamma_2^{-1} & -\gamma_2^{-1} \\ \bar\gamma_2^{-1} & -\bar\gamma_1^{-1} - \gamma_2^{-1} \end{pmatrix},$$

где в силу (4.3.11)

$$\gamma_1 = -4\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1 d\mathfrak{i}, \qquad \gamma_2 = \omega_2^2. \tag{4.3.22}$$

Формулы для собственных чисел λ_1, λ_2 будут различаться в зависимости от знака величины

$$\eta = (\omega_2^2 - 4\omega_1^2)\big(32\omega_1^4 + (8d^2 - 20\omega_2^2)\omega_1^2 + 3\omega_2^4\big). \tag{4.3.23}$$

Именно,

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \dfrac{ab(-2\omega_1\omega_2 d \pm \mathfrak{i}\sqrt{\eta})}{8\omega_1\omega_2\big[4d^2\omega_1^2 + (\omega_2^2 - 4\omega_1^2)^2\big]}, & \eta \ge 0, \\ \dfrac{ab(-2\omega_1\omega_2 d \pm \sqrt{-\eta})}{8\omega_1\omega_2\big[4d^2\omega_1^2 + (\omega_2^2 - 4\omega_1^2)^2\big]}, & \eta < 0. \end{cases} \tag{4.3.24}$$

Собственные числа λ_1, λ_2 различны при условии, что $\eta \ne 0$. В этой ситуации система (4.3.14) может быть приведена к L–диагональному виду (1.1.3), где

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1 + o(1), \lambda_2 + o(1)\big)t^{-(\alpha+\beta)}. \tag{4.3.25}$$

Фундаментальная матрица $W_1(t)$ системы (4.3.13) имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$W_1(t) = \big(P + o(1)\big)\operatorname{diag}\Big(\exp\big\{\big(\lambda_1 + o(1)\big)\nu(t)\big\}, \exp\big\{\big(\lambda_2 + o(1)\big)\nu(t)\big\}\Big). \tag{4.3.26}$$

Здесь по столбцам матрицы P стоят собственные векторы матрицы A_1, а функция $\nu(t)$ определяется формулой (4.3.21). Мы не будем выписывать асимптотические формулы для решений системы (4.3.1). Остановимся лишь на описании качественного поведения решений этой системы.

Из формул (4.3.24), (4.3.26) следует, что $x_1(t)$ растет по абсолютной величине при условии, что $ab < 0$, а также в том случае, когда $ab > 0$, $\eta < -4\omega_1^2\omega_2^2 d^2$. Решение $x_1(t)$ убывает, если $ab > 0$ и $\eta > 0$, а также в том случае, когда $ab > 0$ и $-4\omega_1^2\omega_2^2 d^2 < \eta < 0$. Учитывая формулы (4.3.9) и (4.3.12), мы можем сделать выводы о поведении решения $x_2(t)$. В случае, когда $\alpha + \beta < 1$, $x_2(t)$ растет по абсолютной величине, если растет решение $x_1(t)$. Если

$\alpha + \beta = 1$, то величина $x_2(t)$ растет в том случае, когда $ab < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 > \beta$, а также в том случае, когда $ab > 0$, $\eta < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_1 > \beta$. Решение $x_2(t)$ убывает при условии, что $\alpha + \beta < 1$ и решение $x_1(t)$ убывает. Если же $\alpha + \beta = 1$, то $x_2(t)$ убывает в том случае, когда убывает решение $x_1(t)$, а также в случае, когда $ab < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_2 < \beta$. Кроме того, решение $x_2(t)$ убывает, если $\alpha + \beta = 1$, $ab > 0$, $\eta < 0$ и $\operatorname{Re}\lambda_1 < \beta$.

Анализируя характер поведения решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ системы (4.3.1) во всех рассмотренных выше случаях, мы можем сделать следующий вывод. Если $\alpha + \beta < 1$, то характер поведения решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ одинаков (либо оба растут по абсолютной величине, либо убывают). В случае, когда $\alpha + \beta = 1$, качественное поведение решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ может различаться.

Глава 5

Асимптотическое интегрирование ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами

5.1 Построение асимптотики решений одного класса систем ФДУ, близких к ОДУ

Задаче асимптотического интегрирования линейных функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), а также систем таких уравнений, посвящено значительное число работ. Первые асимптотические теоремы для скалярных уравнений с запаздывающим аргументом были предложены Беллманом (R. Bellman) и Куком (K.L. Cooke) [3] (см. также обзор в [55, Глава 9]). Существенные результаты были затем получены в работах Драйвера (R.D. Driver) [105], Хэддока (J.R. Haddock) и Сакера (R.J. Sacker) [114], в цикле работ Арино (O. Arino), Джиори (I. Győri) и Питук (M. Pituk) [66, 67, 69, 110–113, 156], а также в работах Аи (S. Ai) [64], Касселя (J.S. Cassell) и Хоу (Z. Hou) [87, 88, 121]. Одно из направлений в решении задачи асимптотического интегрирования систем ФДУ посвящено получению аналогов известных теорем Н. Левинсона и Хартмана-Винтнера для систем такого типа, а также приведению систем уравнений к такому виду, который позволял бы воспользоваться соответствующими результатами.

В данной главе изучается вопрос построения асимптотики решений некоторого класса систем линейных ФДУ, содержащих колебательно убывающие величины. Особенностью рассматриваемого класса систем является их «близость» при $t \to \infty$ к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Данное обстоятельство во многом упрощает процесс построения асимптотических формул, позволяя применять некоторые известные приемы асимптотического интегрирования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

В основе предлагаемой нами методики лежат асимптотические теоремы, полученные Касселем и Хоу в работе [87]. Эти результаты распространяю результаты Н. Левинсона (см. теорему 1.1.1) на случай систем ФДУ, близких в определенном смысле к системам ОДУ с

диагональной матрицей. Рассмотрим следующую линейную систему:

$$\dot{x} = \Lambda(t)x(t) + R(t, x_t). \tag{5.1.1}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h, 0], \mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ с нормой

$$\|\varphi\| = \sup_{-h \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|.$$

Далее, $\Lambda(t) = \big(\operatorname{diag} \lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)\big)$ — диагональная матрица, элементами которой являются локально интегрируемые на $[t_0, \infty)$ функции со значениями в $\mathbb{C}$; $R(t, \cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ такой, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функция $R(\cdot, \varphi)$ измерима по Лебегу при $t \ge t_0$ и

$$|R(t, \varphi)| \le \gamma(t)\|\varphi\|, \qquad \gamma(t) \in L_1[t_0, \infty). \tag{5.1.2}$$

Операторы с такими свойствами будем в дальнейшем называть операторами из класса $\mathcal{L}_1^h[t_0, \infty)$. По аналогии с системами ОДУ системы ФДУ вида (5.1.1) будем называть $\mathcal{L}$-*диагональными*.

Будем говорить, что некоторая функция $x(t)$ со значениями в $\mathbb{C}^m$ удовлетворяет системе (5.1.1) при $t \ge T$, если $x(t)$ непрерывна на множестве $[T - h, \infty)$, абсолютно непрерывна на множестве $[T, \infty)$ и равенство (5.1.1) выполнено почти всюду на $[T, \infty)$. При сформулированных условиях для любого $\varphi \in C_h$ и любого $T \ge t_0$ существует единственная функция $x(t)$, которая удовлетворяет системе (5.1.1) с начальным условием $x_T = \varphi$ (см. [55]). Функцию $x(t)$ будем называть решением системы (5.1.1) с начальным условием $x_T = \varphi$.

Пусть для каждой пары индексов (j, k) имеет место либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big) ds \le K_1, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{5.1.3}$$

либо неравенство

$$\int_{t_1}^{t_2} \operatorname{Re}\big(\lambda_j(s) - \lambda_k(s)\big) ds \ge K_2, \qquad t_2 \ge t_1 \ge t_0, \tag{5.1.4}$$

где K_1, K_2 — некоторые постоянные. Кроме того, предположим, что для любого $j = 1, \dots, m$ выполнено неравенство

$$\int_{t}^{t+\tau} \operatorname{Re} \lambda_j(s) ds \ge K_3 \qquad t \ge t_0, \quad 0 \le \tau \le h, \tag{5.1.5}$$

где K_3 — некоторая постоянная.

Имеет место следующий результат, который вытекает из [87, теорема 2] и замечания после указанной теоремы.

Теорема 5.1.1. *Пусть выполнены условия* (5.1.3)–(5.1.4) *и* (5.1.5). *Тогда при достаточно больших* $T \geq t_0$ *и любом* $j = 1, \ldots, m$ *существует такая непрерывная функция* $x_j(t)$: $[T-h, \infty) \to \mathbb{C}^m$, *которая удовлетворяет системе уравнений* (5.1.1) *при* $t \geq T$ *и допускает следующее асимптотическое представление при* $t \to \infty$:

$$x_j(t) = \big[e_j + o(1)\big] \exp\Big\{\int\limits_T^t \lambda_j(s)ds\Big\}, \tag{5.1.6}$$

где $e_j = (0, \ldots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \ldots, 0)$.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 5.1.1 следует (см. [87, стр. 476]), что в качестве начальных условий для решений $x_j(t)$, имеющих асимптотику вида (5.1.6), могут быть взяты некоторые постоянные функции $\varphi_j(T, \theta)$ из C_h так, что $\varphi_j(T, \theta) \equiv \varphi_j(T, 0)$ $(-h \leq \theta \leq 0)$ и $(x_j)_T \equiv \varphi_j(T, 0)$. Эти начальные функции ограничены по отношению к величине T.

Асимптотика произвольного решения системы (5.1.1) при $t \to \infty$ описывается следующей теоремой [87, Теорема 5].

Теорема 5.1.2. *Пусть выполнены все условия теоремы 5.1.1. Тогда, если функция* $x(t)$ *удовлетворяет системе* (5.1.1) *при* $t \geq T$, *то существуют константы* $c_1, \ldots, c_m$ *такие, что*

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j\, x_j(t) + o\big(e^{-\beta t}\big), \qquad t \to \infty, \tag{5.1.7}$$

где функции $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ *имеют асимптотику вида* (5.1.6), *а величина* $\beta > 0$ *произвольна.*

Замечание 1. Константы $c_1, \ldots, c_m$ можно рассматривать как линейные непрерывные функционалы $c_1(T, \cdot), \ldots, c_m(T, \cdot)$, которые определены на пространстве начальных функций $x_T = \varphi$, где $\varphi \in C_h$ (см. [87, теоремы 4 и 5], а также [64, теорема 5]). Кроме того, можно показать, что для любого $i = 1, \ldots, m$ и для всех достаточно больших $T \geq t_0$

$$|c_i(T, \varphi)| \leq \hat{K}\|\varphi\|, \qquad \varphi \in C_h,$$

где константа $\hat{K}$ может быть выбрана не зависящей от T и φ.

В нашей работе исследуется вопрос о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений следующей системы ФДУ:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) B_i(t, x_t) + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(t, x_t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) B_{i_1 \ldots i_k}(t, x_t) + R(t, x_t). \quad (5.1.8)$$

В этой системе $B_{i_1 \ldots i_l}(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что либо все эти операторы периодичны по переменной t с периодом $\omega > 0$, т. е.

$$B_{i_1 \ldots i_l}(t + \omega, \varphi) \equiv B_{i_1 \ldots i_l}(t, \varphi), \qquad \varphi \in C_h, \quad (5.1.9)$$

либо

$$B_{i_1 \ldots i_l}(t, \varphi) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j^{(i_1 \ldots i_l)}(t) \ell_j^{(i_1 \ldots i_l)}(\varphi), \qquad \varphi \in C_h. \quad (5.1.10)$$

В формуле (5.1.10) $\ell_j^{(i_1 \ldots i_l)}(\varphi)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t, и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i_1 \ldots i_l)}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$\Gamma_j^{(i_1 \ldots i_l)}(t) = \sum_{s=1}^{M} \beta_{sj}^{(i_1 \ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\lambda_s t}, \quad (5.1.11)$$

где $\beta_{sj}^{(i_1 \ldots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные $(m \times m)$-матрицы, а λ_s — вещественные числа. В том случае, если имеет место равенство (5.1.9), будем предполагать, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функция $B_{i_1 \ldots i_l}(t, \varphi)$ измерима по Лебегу и для всех $\varphi \in C_h$ и $t \in \mathbb{R}$

$$|B_{i_1 \ldots i_l}(t, \varphi)| \le K \|\varphi\|, \quad (5.1.12)$$

где K — некоторая постоянная. Очевидно, что неравенство (5.1.12) заведомо выполнено, если оператор $B_{i_1 \ldots i_l}(t, \varphi)$ имеет вид (5.1.10), (5.1.11). Далее, $R(t, \cdot)$ — оператор из класса $\mathcal{L}_1^h[t_0, \infty)$. Наконец, $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, относительно которых выполнены условия B.2 — B.4 из раздела 1.2.

При сформулированных условиях для любого $\varphi \in C_h$ и $T \ge t_0$ существует единственная функция $x(t)$, удовлетворяющая системе (5.1.8) при $t \ge T$ с начальным условием $x_T = \varphi$. Наша дальнейшая цель состоит в том, чтобы, расширяя фазовое пространство системы (5.1.8) и приводя ее затем к системе вида (5.1.1), получить асимптотическое представление для всех решений системы (5.1.8).

Представим оператор $B_{i_1 \ldots i_l}(t, x_t)$ в следующем виде:

$$B_{i_1 \ldots i_l}(t, x_t) = B_{i_1 \ldots i_l}\big(t, x(t)\big) - B_{i_1 \ldots i_l}\big(t, x(t) - x_t\big). \quad (5.1.13)$$

Очевидно, что в силу наложенных на оператор $B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)$ условий

$$B_{i_1\dots i_l}\big(t,x(t)\big)=A_{i_1\dots i_l}(t)x(t), \tag{5.1.14}$$

где $(m\times m)$-матрица $A_{i_1\dots i_l}(t)$ является либо ω–периодической, либо ее элементами являются тригонометрические многочлены, т. е. она имеет вид (5.1.11).

Заметим далее, что

$$x(t)-x_t=\int\limits_{t+\theta}^{t}\dot{x}(s)ds,\qquad -h\le\theta\le 0. \tag{5.1.15}$$

Учтем, что при $s\ge T$ величина $\dot{x}(s)$ определяется из системы (5.1.8). Следовательно,

$$x(t)-x_t=\int\limits_{t+\theta}^{t}\Big(\sum_{i=1}^{n}v_i(s)B_i(s,x_s)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}v_{i_1}(s)v_{i_2}(s)B_{i_1i_2}(s,x_s)+\dots+$$
$$+\sum_{1\le i_1\le\dots\le i_k\le n}v_{i_1}(s)\cdot\dots\cdot v_{i_k}(s)B_{i_1\dots\,i_k}(s,x_s)+R(s,x_s)\Big)ds, \tag{5.1.16}$$

если $t\ge T+h$ и $-h\le\theta\le 0$. Подставим представление (5.1.16) во второе слагаемое в формуле (5.1.13) и воспользуемся линейностью оператора $B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)$. Имеем,

$$B_{i_1\dots i_l}\big(t,x(t)-x_t\big)=\sum_{j=1}^{n}B_{i_1\dots i_l}\Big(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}v_j(s)B_j(s,x_s)ds\Big)+\dots+$$
$$+\sum_{1\le j_1\le\dots\le j_k\le n}B_{i_1\dots i_l}\Big(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}v_{j_1}(s)\cdot\dots\cdot v_{j_k}(s)B_{j_1\dots\,j_k}(s,x_s)ds\Big)+B_{i_1\dots i_l}\Big(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}R(s,x_s)ds\Big). \tag{5.1.17}$$

Рассмотрим сначала слагаемое

$$B_{i_1\dots i_l}\Big(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}R(s,x_s)ds\Big)=B_{i_1\dots i_l}\Big(t,\int\limits_{\theta}^{0}R(s+t,x_{s+t})ds\Big). \tag{5.1.18}$$

Выражение (5.1.18) представляет собой линейный оператор

$$L\big(t,\varphi\big)=B_{i_1\dots i_l}\Big(t,\int\limits_{\theta}^{0}R(s+t,\varphi_s)ds\Big),\qquad -h\le\theta\le 0, \tag{5.1.19}$$

действующий из пространства $C_{2h}\equiv C\big([-2h,0],\mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-2h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ в пространство $\mathbb{C}^m$. Здесь, как и ранее, $\varphi_s(\theta_1)=\varphi(s+\theta_1)$ $(-h\le\theta_1\le 0)$ — элемент пространства C_h. Покажем, что оператор $L(t,\varphi)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0+h,\infty)$. Этот класс вводится точно так же, как и класс $\mathcal{L}_1^{h}[t_0,\infty)$, с той лишь разницей, что областью определения операторов из класса $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0,\infty)$ является пространство C_{2h}. Очевидно, что в

проверке нуждается лишь выполнимость условия (5.1.2). Учитывая неравенства (5.1.2) и (5.1.12), легко установить, что

$$|L(t,\varphi)| \le \left(K\int\limits_{t-h}^{t}\gamma(s)ds\right)\|\varphi\|, \qquad \|\varphi\| = \sup_{-2h\le\theta\le 0}|\varphi(\theta)|. \tag{5.1.20}$$

Осталось заметить, что функция

$$\int\limits_{t-h}^{t}\gamma(s)ds$$

принадлежит классу $L_1[t_0+h,\infty)$ в силу того, что $\gamma(t)\in L_1[t_0,\infty)$. Действительно, меняя порядок интегрирования, получаем,

$$\int\limits_{t_0+h}^{\infty}\left(\int\limits_{t-h}^{t}\gamma(s)ds\right)dt = \int\limits_{t_0}^{t_0+h}\left(\int\limits_{t_0+h}^{s+h}\gamma(s)dt\right)ds + \int\limits_{t_0+h}^{\infty}\left(\int\limits_{s}^{s+h}\gamma(s)dt\right)ds =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_0+h}\gamma(s)(s-t_0)ds + h\int\limits_{t_0+h}^{\infty}\gamma(s)ds. \tag{5.1.21}$$

Рассмотрим теперь в формуле (5.1.17) слагаемое вида

$$B_{i_1\dots i_l}\left(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s)B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds\right).$$

Имеем

$$B_{i_1\dots i_l}\left(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s)B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds\right) =$$

$$= B_{i_1\dots i_l}\left(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}\Big[v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t) - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t) + v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s)\Big]B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds\right) =$$

$$= v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)B_{i_1\dots i_l}\left(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds\right)+$$

$$+ B_{i_1\dots i_l}\left(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}\Big[v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s) - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)\Big]B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds\right). \tag{5.1.22}$$

Исследуем сначала в выражение (5.1.22) член вида

$$B_{i_1\dots i_l}\left(t,\int\limits_{t+\theta}^{t}B_{j_1\dots j_p}(s,x_s)ds\right) = B_{i_1\dots i_l}\left(t,\int\limits_{\theta}^{0}B_{j_1\dots j_p}(s+t,x_{s+t})ds\right). \tag{5.1.23}$$

Будем рассматривать выражение (5.1.23) как оператор

$$\tilde{B}(t,\varphi) = B_{i_1\dots i_l}\left(t,\int\limits_{\theta}^{0}B_{j_1\dots j_p}(s+t,\varphi_s)ds\right), \qquad -h\le\theta\le 0, \tag{5.1.24}$$

действующий из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. Здесь, как и ранее, $\varphi_s(\theta_1) = \varphi(s+\theta_1)$ $(-h \le \theta_1 \le 0)$ — элемент пространства C_h.

Оператор $\tilde{B}(t,\varphi)$ обладает теми же свойствами, что и оператор $B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)$ в исходной системе (5.1.8). Именно, из (5.1.24) следует, что если для оператора $B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)$ имеет место тождество (5.1.9), то, очевидно, для оператора $\tilde{B}_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)$ $(\varphi \in C_{2h})$ это тождество остается справедливым. Далее, несложно показать, что, если оператор $B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)$ имеет вид (5.1.10), (5.1.11), то и оператор $\tilde{B}(t,\varphi)$ $(\varphi \in C_{2h})$ имеет аналогичную структуру. Отличие состоит лишь в том, что вместо операторов $\ell_j^{(i_1\dots i_l)}(\varphi)$ в представлении типа (5.1.10) для оператора $\tilde{B}_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)$ находятся некоторые линейные ограниченные операторы $\tilde{\ell}_j^{(i_1\dots i_l)}(\varphi)$, не зависящие от t, и действующие из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. Наконец, из (5.1.12) и (5.1.24) следует, что для оператора $\tilde{B}(t,\varphi)$ имеет место неравенство (5.1.12), где $\varphi \in C_{2h}$, а $\|\varphi\|$ определена в (5.1.20).

Рассмотрим теперь в формуле (5.1.22) слагаемое вида

$$B_{i_1\dots i_l}\Bigg(t, \int\limits_{t+\theta}^{t} \Big[v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s) - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)\Big] B_{j_1\dots j_p}(s, x_s)ds\Bigg) =$$

$$= B_{i_1\dots i_l}\Bigg(t, \int\limits_{\theta}^{0} \Big[v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s+t) - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)\Big] B_{j_1\dots j_p}(s+t, x_{s+t})ds\Bigg),$$

которое мы будем считать оператором

$$\tilde{L}(t,\varphi) = B_{i_1\dots i_l}\Bigg(t, \int\limits_{\theta}^{0} \Big[v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s+t) - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)\Big] B_{j_1\dots j_p}(s+t, \varphi_s)ds\Bigg), \quad (5.1.25)$$

действующим из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$. По-прежнему, $\varphi_s(\theta_1) = \varphi(s+\theta_1)$ $(-h \le \theta_1 \le 0)$ — элемент пространства C_h. Из неравенства (5.1.12) и представления (5.1.25) следует, что

$$|\tilde{L}(t,\varphi)| \le \Bigg(\tilde{K} \int\limits_{-h}^{0} \big|v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s+t) - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)\big|ds\Bigg)\|\varphi\|, \quad \varphi \in C_{2h},$$

где $\tilde{K}$ — некоторая постоянная, а $\|\varphi\|$ определена в (5.1.20).

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.1.1. *Функция*

$$\int\limits_{-h}^{0} \big|v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s+t) - v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)\big|ds \quad (5.1.26)$$

принадлежит классу $L_1[t_0+h, \infty)$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по параметру p. Сперва заметим, что классу $L_1[t_0+h,\infty)$ принадлежит функция

$$\int\limits_{-h}^{0}\big|v_i(s+t)-v_i(t)\big|ds, \qquad i=1,\dots,n.$$

Действительно, пользуясь абсолютной непрерывностью функции $v_i(t)$ и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\int\limits_{-h}^{0}\big|v_i(s+t)-v_i(t)\big|ds=\int\limits_{-h}^{0}\Big|\int\limits_{s+t}^{t}\dot v_i(\tau)d\tau\Big|ds\le\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{s+t}^{t}\big|\dot v_i(\tau)\big|d\tau ds=$$

$$=\int\limits_{t-h}^{t}\int\limits_{-h}^{\tau-t}\big|\dot v_i(\tau)\big|ds d\tau\le h\int\limits_{t-h}^{t}\big|\dot v_i(\tau)\big|d\tau.$$

Для доказательства того факта, что интеграл в правой части этой цепочки неравенств принадлежит классу $L_1[t_0+h,\infty)$, достаточно заметить, что функция $\dot v_i(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$ (свойство B.3), и воспользоваться преобразованиями (5.1.21).

Пусть принадлежность классу $L_1[t_0+h,\infty)$ функции (5.1.26) установлена для всех $p\le P$. Покажем, что утверждение справедливо и при $p=P+1$. Обозначим

$$V_{j_P}(t)=v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_P}(t).$$

Имеем

$$\int\limits_{-h}^{0}\big|v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_{P+1}}(s+t)-v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_{P+1}}(t)\big|ds=\int\limits_{-h}^{0}\big|V_{j_P}(s+t)v_{j_{P+1}}(s+t)-V_{j_P}(t)v_{j_{P+1}}(t)\big|ds=$$

$$=\int\limits_{-h}^{0}\big|\big[V_{j_P}(s+t)-V_{j_P}(t)+V_{j_P}(t)\big]v_{j_{P+1}}(s+t)-V_{j_P}(t)v_{j_{P+1}}(t)\big|ds\le$$

$$\le\int\limits_{-h}^{0}\Big(\big|V_{j_P}(s+t)-V_{j_P}(t)\big|\big|v_{j_{P+1}}(s+t)\big|+\big|V_{j_P}(t)\big|\big|v_{j_{P+1}}(s+t)-v_{j_{P+1}}(t)\big|\Big)ds.$$

Наконец, используя ограниченность функций $v_i(t)$ (свойство B.2), заключаем, что

$$\int\limits_{-h}^{0}\big|v_{j_1}(s+t)\cdot\ldots\cdot v_{j_{P+1}}(s+t)-v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_{P+1}}(t)\big|ds\le$$

$$\le\tilde K_1\int\limits_{-h}^{0}\big|V_{j_P}(s+t)-V_{j_P}(t)\big|ds+\tilde K_2\int\limits_{-h}^{0}\big|v_{j_{P+1}}(s+t)-v_{j_{P+1}}(t)\big|ds, \quad (5.1.27)$$

где $\tilde K_1,\tilde K_2$ — некоторые постоянные. Принадлежность классу $L_1[t_0+h,\infty)$ интегралов в правой части (5.1.27) уже установлена.

Утверждение доказано. ■

Из утверждения 5.1.1 следует, что оператор $\tilde{L}(t,\varphi)$, определяемый формулой (5.1.25), принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0+h,\infty)$.

Используя далее формулы (5.1.13), (5.1.14), (5.1.17), (5.1.19), (5.1.20), свойство B.4 функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ и равенство

$$B_{i_1\ldots i_l}\left(t,\int\limits_{t+\theta}^{t} v_{j_1}(s)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(s)B_{j_1\ldots j_p}(s,x_s)ds\right)=v_{j_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{j_p}(t)\tilde{B}(t,\varphi)+\tilde{L}(t,\varphi),$$

перейдем от исходной системы (5.1.8) к следующей системе ФДУ:

$$\dot{x}=\sum_{i=1}^{n}v_i(t)A_i(t)x(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\tilde{B}_{i_1i_2}(t,x_t)+\ldots+$$
$$+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)\tilde{B}_{i_1\ldots i_k}(t,x_t)+\tilde{R}(t,x_t). \quad (5.1.28)$$

Здесь $A_i(t)$ — это либо ω-периодические матрицы, либо матрицы вида (5.1.11); $\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}(t,\varphi)$ — операторы той же структуры, что и операторы $B_{i_1\ldots i_l}(t,\varphi)$ в исходной системе (5.1.8), но действующие из пространства C_{2h} в пространство $\mathbb{C}^m$; $\tilde{R}(t,x_t)$ — некоторый оператор из класса $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0+h,\infty)$.

Дальнейшие действия состоят в том, чтобы проделать указанную процедуру в общей сложности k раз, где параметр k определяется свойством B.4 функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$. Преобразуем на s-м шаге алгоритма операторы $\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}(t,x_t)$, где $x_t\in C_{sh}$, согласно формуле

$$\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}(t,x_t)=\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}\big(t,x(t)\big)-\tilde{B}_{i_1\ldots i_l}\big(t,x(t)-x_t\big)$$

и используем равенства (5.1.15) и (5.1.16), в которых $-sh\le\theta\le 0$, а операторы $B_{i_1\ldots i_l}(t,\cdot)$ и $R(t,\cdot)$ суть операторы из исходной системы (5.1.8). В результате последовательности таких преобразований мы приходим к системе ФДУ следующего вида:

$$\dot{x}=\left(\sum_{i=1}^{n}v_i(t)A_i(t)+\sum_{1\le i_1\le i_2\le n}v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)A_{i_1i_2}(t)+\ldots+\right.$$
$$\left.+\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_k\le n}v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)A_{i_1\ldots i_k}(t)\right)x(t)+R_1(t,x_t). \quad (5.1.29)$$

В системе (5.1.29) $(m\times m)$-матрицы $A_{i_1\ldots i_l}(t)$ — это либо ω-периодические матрицы, либо матрицы вида (5.1.11). Далее, $R_1(t,\cdot)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h}\equiv C\big([-(k+1)h,0],\mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-(k+1)h,0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$ в пространство $\mathbb{C}^m$ и принадлежащий классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0+kh,\infty)$.

Системы уравнений (5.1.8) и (5.1.29), вообще говоря, не являются эквивалентными. Можно утверждать лишь следующее. Пусть функция $x(t)$ является решением системы (5.1.8) при

$t \geq T \geq t_0$ с начальным условием $x_T = \varphi$, где $\varphi \in C_h$, тогда функция $x(t)$ при $t \geq T+kh$ является решением системы уравнений (5.1.29) с начальным условием $x_{T+kh} = \tilde{\varphi}$, где $\tilde{\varphi} \in C_{(k+1)h}$ и

$$\tilde{\varphi}(\theta) = x(T + kh + \theta), \qquad -(k+1)h \leq \theta \leq 0. \tag{5.1.30}$$

Таким образом, множество всех решений системы уравнений (5.1.8), определенных при $t \geq T \geq t_0$, образует при $t \geq T + kh$ в пространстве всех решений системы (5.1.29) некоторое подмножество. Это подмножество решений определяется множеством начальных функций вида (5.1.30), где $x_T = \varphi$ ($\varphi \in C_h$) и $x(t)$ при $T \leq t \leq T + kh$ является решением системы (5.1.8) с начальной функцией $x_T = \varphi$.

Следующая задача заключается в том, чтобы систему уравнений (5.1.29) привести к виду (5.1.1) и построить асимптотику ее решений, используя теоремы 5.1.1 и 5.1.2. Для достижения этой цели мы сначала воспользуемся техникой усредняющих замен переменных, изложенной в разделе 1.2. В частности, справедлив следующий аналог теоремы 1.2.1.

Теорема 5.1.3. *Система* (5.1.29) *при достаточно больших* t *заменой* (1.2.5) *приводится к виду*

$$\dot{y} = \Bigg(\sum_{i=1}^{n} A_i v_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} A_{i_1 i_2} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} A_{i_1 \ldots i_k} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) \Bigg) y(t) + R_2(t, y_t) \tag{5.1.31}$$

с постоянными матрицами $A_{i_1 \ldots i_l}$ *и оператором* $R_2(t, y_t)$ *из класса* $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0 + kh, \infty)$. *В замене* (1.2.5) I *— единичная матрица, а матрицы* $Y_{i_1 \ldots i_l}(t)$ *с нулевым средним значением либо являются* ω*-периодическими (если таковыми являются матрицы* $A_{i_1 \ldots i_l}(t)$ *в системе* (5.1.29)*), либо их элементами являются тригонометрические многочлены.*

Для доказательства этой теоремы необходимо почти дословно повторить соответствующие рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1.2.1. Постоянные матрицы $A_{i_1 \ldots i_l}$ в системе (5.1.31) определяются в силу формулы (1.2.11), а матрицы $Y_{i_1 \ldots i_l}(t)$ в замене (1.2.5) — как решения матричных дифференциальных уравнений (1.2.10), в которых $A_0 = 0$. В частности, постоянные матрицы первого и второго «приближений» определяются согласно формулам (1.2.16) — (1.2.19).

Система уравнений (5.1.31) не содержит, вообще говоря, осциллирующих коэффициентов в главной части и в этом смысле она проще системы (5.1.29). В частности, можно воспользоваться известными из теории обыкновенных дифференциальных уравнений результатами

для приведения этой системы к виду (5.1.1). Предположим, что в главной части системы (5.1.31) можно выделить так называемый ведущий член, и этим членом является матрица $Av_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)$. Это означает, что систему (5.1.31) можно записать в виде

$$\dot{y} = \big[A + V(t)\big]v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)y(t) + R_2(t, y_t). \tag{5.1.32}$$

Здесь A — это либо матрица $A_{i_1\ldots i_s}$, либо сумма некоторого числа постоянных матриц $A_{i_1\ldots i_l}$, а матрица $V(t)$ удовлетворяет условиям A.2, A.3 раздела 1.1. Если оказывается, что матрица A удовлетворяет условию A.1, то в системе (5.1.32) можно осуществить замену

$$y(t) = C(t)z(t), \tag{5.1.33}$$

где $C(t)$ — матрица из леммы 1.1.1. Приходим к $\mathcal{L}$–диагональной системе вида (5.1.1):

$$\dot{z} = \Lambda(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)z(t) + R_3(t, z_t), \tag{5.1.34}$$

где

$$R_3(t, z_t) = -C^{-1}(t)\dot{C}(t)z(t) + C^{-1}(t)R_2(t, C(t+\theta)z_t).$$

В силу свойств (i) и (ii) матрицы $C(t)$ из леммы 1.1.1 оператор $R_3(t, z_t)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0 + kh, \infty)$. Если теперь для элементов

$$\lambda_j(t) = \tilde{\lambda}_j(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t), \qquad j = 1, \ldots, m \tag{5.1.35}$$

матрицы $\Lambda(t)v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_s}(t)$ выполнены условия (5.1.3)–(5.1.4), то для построения асимптотики решений системы (5.1.34) можно воспользоваться теоремами 5.1.1 и 5.1.2. Заметим, что условие (5.1.5) в нашем случае заведомо выполняется в силу свойства B.2 функций $v_1(t), \ldots, v_n(t)$. Будем в дальнейшем предполагать, что теоремами 5.1.1 и 5.1.2 мы вправе воспользоваться.

Возвращаясь затем к системе (5.1.28) при помощи замен (1.2.5) и (5.1.33), получаем асимптотическое представление для ее решений при $t \to \infty$ вида (5.1.7). В этом представлении функции $x_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ описываются асимптотическими формулами типа (5.1.6):

$$x_j(t) = \big[p_j + o(1)\big]\exp\Big\{\int\limits_T^t \lambda_j(s)ds\Big\}, \tag{5.1.36}$$

где p_j — j-й вектор-столбец матрицы C_0 (см. лемму 1.1.1), т. е. собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\tilde{\lambda}_j = \lim\limits_{t\to\infty}\tilde{\lambda}_j(t)$, а функция $\lambda_j(t)$ задается формулой (5.1.35). Поскольку, как отмечалось ранее, решения исходной системы (5.1.8) при достаточно больших t являются решениями системы (5.1.28), то эти решения также описываются

асимптотическими формулами (5.1.7). Но тем не менее возникает следующий важный вопрос. Существуют ли у системы уравнений (5.1.8) при достаточно больших t и всех $j = 1, \dots, m$ решения $x_j(t)$, имеющие асимптотику вида (5.1.36)? Действительно, такие решения существуют у системы (5.1.28) и вовсе не обязаны быть у исходной системы (5.1.8), множество решений которой является всего лишь подмножеством множества всех решений системы (5.1.28). Остановимся на этом моменте более подробно. Установим следующий результат, который вместе с асимптотическим представлением (5.1.7) дает полное качественное описание поведения решений системы (5.1.8) при $t \to \infty$.

Теорема 5.1.4. *Предположим, что число $l = 1, \dots, m$ фиксировано, параметр $k \in \mathbb{N}$ выбран в силу свойства B.4 функций $v_1(t), \dots, v_n(t)$, а действительное число T достаточно велико. Тогда существует решение $\tilde{x}_l(t)$ системы* (5.1.8)*, которое определено при $t \geq T - kh$ и имеет асимптотическое представление вида* (5.1.7)

$$\tilde{x}_l(t) = c_1\, x_1(t) + \ldots + c_l\, x_l(t) + \ldots + c_m\, x_m(t) + o\big(e^{-\beta t}\big) \tag{5.1.37}$$

где $c_l \neq 0$. В представлении (5.1.37) *функции $x_j(t)$ ($j = 1, \dots, m$) суть решения системы* (5.1.29)*, имеющие при $t \to \infty$ асимптотику вида* (5.1.36) *и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.*

Для обоснования теоремы 5.1.4 нам потребуется следующий вспомогательный результат.

Утверждение 5.1.2. *Для любых $\varepsilon, H > 0$ и любого $\varphi \in C_h$ существует такое $T(\varepsilon, H, \varphi) \geq t_0$, что*

$$|x(t) - \varphi(0)| \leq \varepsilon, \qquad T \leq t \leq T + H, \tag{5.1.38}$$

где $x(t)$ — решение системы (5.1.8)*, определенное при $t \geq T$ и удовлетворяющее начальному условию $x_T = \varphi$.*

Доказательство. Интегрируя систему (5.1.8) на интервале от T до $t + \theta \geq T$ ($-h \leq \theta \leq 0$), получаем

$$x(t+\theta) - x(T) = \int\limits_T^{t+\theta} \Bigg(\sum_{i=1}^{n} v_i(s) B_i(s, x_s) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(s) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(s, x_s) + \ldots + \\ + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(s) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(s) B_{i_1 \ldots i_k}(s, x_s) + R(s, x_s) \Bigg) ds. \tag{5.1.39}$$

Оценивая затем обе части неравенства (5.1.39) по норме пространства $\mathbb{C}^m$ и используя неравенства (5.1.2) и (5.1.12), а также свойство B.2 функций $v_1(t), \ldots v_n(t)$, заключаем, что

$$|x(t+\theta) - \varphi(0)| \leq \int\limits_T^{t+\theta} \Big[\tilde{\varepsilon} \tilde{K} \|x_s\| + \gamma(s) \|x_s\| \Big] ds. \tag{5.1.40}$$

Здесь $\tilde{K}$ — некоторая постоянная, которая не зависит от T, а величина $\tilde{\varepsilon}$ может быть сделана сколь угодно малой, если выбрать T достаточно большим. Из (5.1.40) следует, что

$$\|x_t - \varphi(0)\| \le \int\limits_T^t \big[\tilde{\varepsilon}\tilde{K} + \gamma(s)\big]\|x_s - \varphi(0)\|ds + \int\limits_T^t \big[\tilde{\varepsilon}\tilde{K} + \gamma(s)\big]\|\varphi(0)\|ds. \tag{5.1.41}$$

Поскольку $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, то при достаточно больших $T \ge t_0$ для второго интеграла в правой части (5.1.41) имеем оценку

$$\int\limits_T^t \big[\tilde{\varepsilon}\tilde{K} + \gamma(s)\big]\|\varphi(0)\|ds \le (\tilde{\varepsilon}\tilde{K}H + \tilde{\varepsilon})|\varphi(0)|.$$

С учетом полученной оценки неравенство (5.1.41) приобретает вид

$$\|x_t - \varphi(0)\| \le \int\limits_T^t \big[\tilde{\varepsilon}\tilde{K} + \gamma(s)\big]\|x_s - \varphi(0)\|ds + \tilde{\varepsilon}(\tilde{K}H + 1)|\varphi(0)|. \tag{5.1.42}$$

Используя теперь известное неравенство Гронуолла-Беллмана (см., например, [1]) применительно к функции $u(t) = \|x_t - \varphi(0)\|$, из (5.1.42) выводим, что

$$u(t) \le \tilde{\varepsilon}(\tilde{K}H + 1)|\varphi(0)| \exp\Big\{\int\limits_T^t \big[\tilde{\varepsilon}\tilde{K} + \gamma(s)\big]ds\Big\} \le \tilde{\varepsilon}(\tilde{K}H + 1)|\varphi(0)| \exp\big\{\tilde{\varepsilon}(\tilde{K}H + 1)\big\}.$$

Выберем теперь $\tilde{\varepsilon} > 0$ настолько малым, а $T \ge t_0$ настолько большим, что

$$\tilde{\varepsilon}(\tilde{K}H + 1)|\varphi(0)| \exp\big\{\tilde{\varepsilon}(\tilde{K}H + 1)\big\} \le \varepsilon.$$

Поскольку

$$|x(t + \theta) - \varphi(0)| \le u(t), \qquad T \le t + \theta \le t \le T + H,$$

то утверждение доказано. ■

Вернемся теперь к доказательству теоремы 5.1.4.

Доказательство теоремы 5.1.4. Из замечания к теореме 5.1.1 следует, что в качестве начальной функции для решения $z_l(t)$ $(l = 1, \dots, m)$ системы (5.1.34), которое определено при $t \ge T$ и имеет асимптотику вида (5.1.6) с $j = l$, может быть выбрана некоторая постоянная функция из класса $C_{(k+1)h}$, т. е. функция вида $\varphi_l(T, \theta) \equiv \varphi_l(T, 0)$ $(-(k+1)h \le \theta \le 0)$. Решению $z_l(t)$ системы (5.1.34) в силу замен (1.2.5) и (5.1.33) соответствует решение $x_l(t)$ системы (5.1.29), для которого справедливо асимптотическое представление (5.1.36) с $j = l$. Решение $x_l(t)$ порождается начальной функцией $\psi_l \in C_{(k+1)h}$ $(x_l(T + \theta) \equiv \psi_l(T, \theta))$, где

$$\psi_l(T,\theta) = \Big[I + \sum_{i=1}^{n} Y_i(T+\theta)v_i(T+\theta) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} Y_{i_1 i_2}(T+\theta)v_{i_1}(T+\theta)v_{i_2}(T+\theta) + \\ + \ldots + \sum_{1\le i_1\le \ldots \le i_k\le n} Y_{i_1\ldots i_k}(T+\theta)v_{i_1}(T+\theta)\cdots v_{i_k}(T+\theta)\Big] C(T+\theta)\varphi_l(T,0). \quad (5.1.43)$$

В силу свойства B.2 функций $v_1(t),\ldots v_n(t)$, свойства (i) матрицы $C(t)$ (см. лемму 1.1.1) и ограниченности величины $|\varphi_l(T,0)|$ по отношению к T, мы можем выбрать T настолько большим, что начальная функция $\psi_l(T,\theta)$ будет сколь угодно близка к постоянной $C_0\varphi_l(T,0)$ в норме пространства $C_{(k+1)h}$.

Рассмотрим теперь решение $\tilde{x}_l(t)$ системы (5.1.8) с начальным условием $(\tilde{x}_l)_{T-kh} = C_0\varphi_l(T,0)$. Воспользуемся утверждением 5.1.2, полагая $H = kh$. Выбирая T достаточно большим, мы заключаем, что

$$|\tilde{x}_l(t) - C_0\varphi_l(T,0)| \le \varepsilon, \qquad T-(k+1)h \le t \le T \quad (5.1.44)$$

для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$. Решение $\tilde{x}_l(t)$ при $t \ge T$ является решением системы (5.1.29) с начальной функцией вида

$$\tilde{\psi}_l(T,\theta) = \tilde{x}_l(T+\theta), \qquad -(k+1)h \le \theta \le 0. \quad (5.1.45)$$

Из замечания к теореме 5.1.2 следует, что соответствующие коэффициенты c_j ($j = 1,\ldots,m$) в асимптотических представлениях вида (5.1.7) для решений $x_l(t)$ и $\tilde{x}_l(t)$ системы (5.1.29) близки по абсолютной величине, если соответствующие им начальные функции близки в норме пространства $C_{(k+1)h}$. Мы знаем, что, если T достаточно велико, то начальные функции для решений $x_l(t)$ и $\tilde{x}_l(t)$ близки в силу (5.1.43), (5.1.44) и (5.1.45). Решение $x_l(t)$ имеет асимптотику вида (5.1.36). Таким образом, коэффициент c_l в асимптотическом представлении (5.1.7) этого решения не равен нулю. Следовательно, этот коэффициент не равен нулю и в асимптотическом представлении (5.1.7) решения $\tilde{x}_l(t)$, если T достаточно велико.

Теорема доказана. ■

5.2 Адиабатический осциллятор с запаздыванием

В этом разделе, используя описанную выше методику, мы построим асимптотические формулы для решений следующего уравнения с запаздыванием:

$$\ddot{x} + x + \frac{a\sin\lambda t}{t^\rho}x(t-h) = 0, \quad (5.2.1)$$

где $a, \lambda \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\lambda \neq 0$, $\rho > 0$ и $h > 0$.

Уравнение вида (5.2.1) в случае, когда $h = 0$, является уравнением так называемого адиабатического осциллятора. Уравнения такого типа обсуждались нами в разделах 3.1 и 3.2. Установлено, что хотя «в пределе» при $t \to \infty$ уравнение (5.2.1) переходит в уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0,$$

у которого все решения ограничены, уравнение (5.2.1) при $h = 0$ и определенных значениях параметра λ может иметь неограниченные решения. В этом разделе мы изучим особенности поведения решений уравнения (5.2.1) при $t \to \infty$ в случае, когда $h \neq 0$.

От уравнения (5.2.1) перейдем к системе уравнений:

$$\dot{y}_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y_0(t) + \frac{a \sin \lambda t}{t^\rho} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y_0(t-h), \qquad y_0(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}.$$

Сделаем в этой системе замену $y_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} y_1(t)$. Приходим к системе

$$\dot{y}_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} y_1(t) + \frac{\mathrm{i}}{2} \frac{a \sin \lambda t}{t^\rho} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} y_1(t-h). \tag{5.2.2}$$

Если

$$\rho > 1,$$

то система (5.2.2) имеет $\mathcal{L}$–диагональную форму, а следовательно, для построения асимптотики ее решений при $t \to \infty$ можно воспользоваться теоремой 5.1.2. Несложно проверить, что в этом случае для решений исходного уравнения (5.2.1) справедлива следующая асимптотическая формула:

$$x(t) = c_1 e^{\mathrm{i}t} + c_2 e^{-\mathrm{i}t} + o(1), \qquad t \to \infty, \tag{5.2.3}$$

где c_1, c_2 — некоторые комплексные постоянные.

В дальнейшем будем предполагать, что

$$\rho \leq 1.$$

Осуществляя в системе (5.2.2) замену $y_1(t) = \operatorname{diag}\bigl(e^{\mathrm{i}t}, e^{-\mathrm{i}t}\bigr) y_2(t)$ и представляя $\sin \lambda t$ по формуле Эйлера, получим систему вида (5.1.8):

$$\dot{y}_2(t) = t^{-\rho} B(t) y_2(t-h), \tag{5.2.4}$$

где

$$B(t)=\frac{a}{4}\begin{pmatrix} e^{-\mathrm{i}h}(e^{\mathrm{i}\lambda t}-e^{-\mathrm{i}\lambda t}) & e^{\mathrm{i}h}(e^{\mathrm{i}(\lambda-2)t}-e^{-\mathrm{i}(\lambda+2)t}) \\ e^{-\mathrm{i}h}(e^{-\mathrm{i}(\lambda-2)t}-e^{\mathrm{i}(\lambda+2)t}) & e^{\mathrm{i}h}(e^{-\mathrm{i}\lambda t}-e^{\mathrm{i}\lambda t}) \end{pmatrix}. \tag{5.2.5}$$

В системе (5.2.4) проделаем последовательность преобразований, описанную в разделе 5.1. Приходим к системе уравнений вида (5.1.29):

$$\dot{y}_2(t)=\Big[t^{-\rho}A_1(t)+t^{-2\rho}A_{11}(t)+\ldots+t^{-k\rho}A_{1\ldots1}(t)\Big]y_2(t)+R(t,(y_2)_t). \tag{5.2.6}$$

Здесь $A_1(t),A_{11}(t),\ldots,A_{1\ldots1}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, а $R(t,(y_2)_t)$ — линейный ограниченный оператор, действующий из пространства $C_{(k+1)h}$ в пространство $\mathbb{C}^m$ и принадлежащий классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0,\infty)$, где t_0 достаточно велико. Натуральный параметр k определяется из условия, что $0<k\rho\le 1<(k+1)\rho$. Несложно проверить, что матрицы $A_1(t)$ и $A_{11}(t)$ определяются следующими формулами:

$$A_1(t)=B(t),\qquad A_{11}(t)=-B(t)\int\limits_{t-h}^{t}B(s)ds. \tag{5.2.7}$$

Используя теорему 5.1.3, в системе (5.2.6) произведем усредняющую замену вида (1.2.5):

$$y_2(t)=\Big[I+t^{-\rho}Y_1(t)+t^{-2\rho}Y_{11}(t)+\ldots+t^{-k\rho}Y_{1\ldots1}(t)\Big]y_3(t).$$

Получаем следующую усредненную систему:

$$\dot{y}_3(t)=\Big[t^{-\rho}A_1+t^{-2\rho}A_{11}+\ldots+t^{-k\rho}A_{1\ldots1}\Big]y_3(t)+R_1(t,(y_3)_t). \tag{5.2.8}$$

Здесь $A_1,A_{11},\ldots,A_{1\ldots1}$ — постоянные матрицы, а $R_1(t,(y_3)_t)$ — некоторый оператор из класса $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0,\infty)$. Вспоминая формулы (1.2.16) — (1.2.19), заключаем, что

$$A_1=\mathrm{M}\big[A_1(t)\big],\qquad A_{11}=\mathrm{M}\big[A_{11}(t)+A_1(t)Y_1(t)\big],\qquad \dot{Y}_1(t)=A_1(t)-A_1. \tag{5.2.9}$$

Пусть сначала

$$\frac{1}{2}<\rho\le 1.$$

В этом случае в системе (5.2.8) параметр $k=1$ и нам достаточно вычислить матрицу A_1. Обращаясь к формулам (5.2.5), (5.2.7) и (5.2.9) приходим к выводу, что вид этой матрицы будет различаться в следующих случаях.

а). $\lambda\neq\pm2$.

В данной ситуации матрица A_1 оказывается нулевой и система (5.2.8) имеет $\mathcal{L}$–диагональный вид. Из теоремы 5.1.2 тогда следует, что решения этой системы имеют следующую асимптотику при $t\to\infty$:

$$y_3(t)=c+o(1),\qquad c\in\mathbb{C}^2.$$

Возвращаясь теперь к исходному уравнению (5.2.1), получаем для его решений при $t \to \infty$ асимптотическое представление вида (5.2.3).

б). $\lambda = 2$. (Случай $\lambda = -2$ разбирается аналогично.)

В этом случае

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big] = \mathrm{M}\big[B(t)\big] = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} 0 & e^{\mathrm{i}h} \\ e^{-\mathrm{i}h} & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2.10}$$

Собственные числа матрицы A_1 различны и имеют вид $\mu_{1,2} = \pm a/4$. Заменой вида

$$y_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\mathrm{i}h} & -e^{-\mathrm{i}h} \end{pmatrix} y_4(t)$$

систему (5.2.8) приводим к $\mathcal{L}$–диагональному виду

$$\dot{y}_4(t) = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} t^{-\rho} y_4(t) + R_2(t, (y_4)_t), \tag{5.2.11}$$

где $R_2(t, (y_4)_t)$ — оператор из класса $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0, \infty)$. Асимптотическое представление для решений системы (5.2.11) строится согласно теореме 5.1.2. Возвращаясь к исходному уравнению (5.2.1), получаем следующее асимптотическое представление для его решений при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\Big[\big(1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(e^{-\mathrm{i}h} + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big]\exp\Big\{\frac{a}{4}f(t)\Big\} + \\ + c_2\Big[\big(1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(-e^{-\mathrm{i}h} + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big]\exp\Big\{-\frac{a}{4}f(t)\Big\} + o\big(e^{-\beta t}\big). \tag{5.2.12}$$

Здесь c_1, c_2 — некоторые комплексные постоянные, $\beta > 0$ — произвольное действительное число, а функция $f(t)$ определяется следующим образом:

$$f(t) = \begin{cases} \ln t, & \rho = 1, \\ \dfrac{t^{1-\rho}}{1-\rho}, & \rho < 1. \end{cases}$$

Из теоремы 5.1.4 следует, что существуют решения уравнения (5.2.1), для которых в асимптотическом представлении (5.2.12) константа $c_1 \neq 0$, и решения, для которых $c_2 \neq 0$. Таким образом в этой ситуации у уравнения (5.2.1) существуют неограниченные решения.

Пусть далее

$$\rho \leq \frac{1}{2}.$$

Если $\lambda = 2$ ($\lambda = -2$) то, поскольку собственные матрицы A_1 различны, из леммы 1.1.1 следует, что усредненная система (5.2.8) может быть приведена к $\mathcal{L}$–диагональной форме

при любом значении k. Несложно понять тогда, что в этой ситуации для решений уравнения (5.2.1) мы получим асимптотику вида (5.2.12), где на сей раз

$$f(t) = \frac{t^{1-\rho}}{1-\rho}\big(1+o(1)\big), \qquad t \to \infty.$$

В дальнейшем будем считать, что $\lambda \neq \pm 2$, а следовательно, матрица $A_1 = 0$. Нам необходимо теперь вычислить матрицу A_{11}. Из формул (5.2.7) и (5.2.9) следует, что

$$A_{11} = \mathrm{M}\big[A_{11}(t) + A_1(t)Y_1(t)\big] = \mathrm{M}\big[-B(t)\big(Y_1(t) - Y_1(t-h)\big) + B(t)Y_1(t)\big] = \\ = \mathrm{M}\big[B(t)Y_1(t-h)\big],$$

где матрица $Y_1(t)$ с нулевым средним значением является решением уравнения $\dot{Y}_1 = B(t)$. Используя формулу (5.2.5), получаем

$$Y_1(t) = \frac{a}{4}\begin{pmatrix} \frac{e^{-\mathrm{i}h}}{\mathrm{i}\lambda}\left(e^{\mathrm{i}\lambda t} + e^{-\mathrm{i}\lambda t}\right) & e^{\mathrm{i}h}\left(\frac{e^{\mathrm{i}(\lambda-2)t}}{\mathrm{i}(\lambda-2)} + \frac{e^{-\mathrm{i}(\lambda+2)t}}{\mathrm{i}(\lambda+2)}\right) \\ -e^{-\mathrm{i}h}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}(\lambda-2)t}}{\mathrm{i}(\lambda-2)} + \frac{e^{\mathrm{i}(\lambda+2)t}}{\mathrm{i}(\lambda+2)}\right) & -\frac{e^{\mathrm{i}h}}{\mathrm{i}\lambda}\left(e^{\mathrm{i}\lambda t} + e^{-\mathrm{i}\lambda t}\right) \end{pmatrix}$$

и

$$A_{11} = \mathrm{M}\big[B(t)Y_1(t-h)\big] = \frac{a^2}{16}\,\mathrm{M}\left[\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ \bar{a}_{12}(t) & \bar{a}_{11}(t) \end{pmatrix}\right], \tag{5.2.13}$$

где

$$a_{11}(t) = \frac{e^{-2\mathrm{i}h}}{\mathrm{i}\lambda}\left(e^{2\mathrm{i}\lambda t}e^{-\mathrm{i}\lambda h} + e^{\mathrm{i}\lambda h} - e^{-\mathrm{i}\lambda h} - e^{-2\mathrm{i}\lambda t}e^{\mathrm{i}\lambda h}\right) + \frac{e^{\mathrm{i}(\lambda-2)h}}{\mathrm{i}(\lambda-2)}\left(e^{-2\mathrm{i}\lambda t} - 1\right) + \\ + \frac{e^{-\mathrm{i}(\lambda+2)h}}{\mathrm{i}(\lambda+2)}\left(1 - e^{2\mathrm{i}\lambda t}\right), \tag{5.2.14}$$

$$a_{12}(t) = -\frac{e^{2\mathrm{i}h}}{\mathrm{i}\lambda}\left(e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t}e^{-\mathrm{i}\lambda h} + e^{-2\mathrm{i}t}e^{\mathrm{i}\lambda h} - e^{-2\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}\lambda h} - e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}e^{\mathrm{i}\lambda h}\right) + \\ + \frac{e^{-\mathrm{i}(\lambda-2)h}}{\mathrm{i}(\lambda-2)}\left(e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t} - e^{-2\mathrm{i}t}\right) + \frac{e^{\mathrm{i}(\lambda+2)h}}{\mathrm{i}(\lambda+2)}\left(e^{-2\mathrm{i}t} - e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}\right), \tag{5.2.15}$$

а элементы $\bar{a}_{11}(t)$ и $\bar{a}_{12}(t)$ комплексно сопряжены элементам $a_{11}(t)$ и $a_{12}(t)$ соответственно. Из формул (5.2.13)–(5.2.15) следует, что матрица A_{11} будет различаться в следующих случаях.

а). $\lambda \neq \pm 1$.

В этом случае матрица A_{11} определяется следующей формулой:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix}, \qquad \nu = \frac{a^2\mathrm{i}}{8\lambda}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\lambda h}}{\lambda-2} + \frac{e^{-\mathrm{i}\lambda h}}{\lambda+2}\right)e^{-2\mathrm{i}h}. \tag{5.2.16}$$

Несложные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\nu &= \frac{a^2}{4\lambda(\lambda^2-4)}\left(\lambda\sin 2h\cos\lambda h - 2\cos 2h\sin\lambda h\right), \\ \operatorname{Im}\nu &= \frac{a^2}{4\lambda(\lambda^2-4)}\left(\lambda\cos 2h\cos\lambda h + 2\sin 2h\sin\lambda h\right). \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

Предположим сначала, что

$$\frac{1}{3} < \rho \le \frac{1}{2}. \tag{5.2.18}$$

В этом случае в усредненной системе (5.2.8) $k = 2$ и она уже имеет $\mathcal{L}$–диагональный вид. Для построения асимптотики ее решений мы можем воспользоваться теоремой 5.1.2. Решения исходного уравнения (5.2.1) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)\exp\big\{\mathfrak{i}(t + \operatorname{Im}\nu\hat{f}(t))\big\}\exp\big\{\operatorname{Re}\nu\hat{f}(t)\big\} + \\ + c_2\big(1 + o(1)\big)\exp\big\{-\mathfrak{i}(t + \operatorname{Im}\nu\hat{f}(t))\big\}\exp\big\{\operatorname{Re}\nu\hat{f}(t)\big\} + o\big(e^{-\beta t}\big), \tag{5.2.19}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные, $\beta > 0$ — произвольное действительное число, и

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} \ln t, & \rho = 1/2, \\ \dfrac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}, & \rho < 1/2. \end{cases} \tag{5.2.20}$$

Если теперь

$$\rho \le \frac{1}{3}, \tag{5.2.21}$$

то при условии, что $\operatorname{Im}\nu \ne 0$ (в этом случае собственные числа матрицы A_{11} различны), система (5.2.8), согласно лемме 1.1.1, может быть приведена к $\mathcal{L}$–диагональному виду при любом k. Если $\operatorname{Re}\nu \ne 0$, то для решений уравнения (5.2.1) мы получаем асимптотическое представление (5.2.19), в котором вместо функции $\hat{f}(t)$ стоят некоторые действительные величины, имеющие асимптотику вида

$$\frac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1 + o(1)\big). \tag{5.2.22}$$

Очевидно, что качественная динамика решений уравнения (5.2.1) в рассматриваемом случае будет определяться знаком величины $\operatorname{Re}\nu$. Поведение этой величины как функции переменной λ при некоторых значения h показано на рисунке 5.2.1. Используя формулу (5.2.17) легко установить следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\lambda\to 0}\operatorname{Re}\nu = \frac{a^2}{16}\big(2h\cos 2h - \sin 2h\big), \tag{5.2.23}$$

$$\lim_{\lambda\to \pm 2}\operatorname{Re}\nu = \frac{a^2}{64}\big(-4h + \sin 4h\big), \tag{5.2.24}$$

$$\operatorname{Re}\nu = \frac{a^2}{4\lambda^2}\sin 2h\cos\lambda h + O\big(\lambda^{-3}\big), \quad \lambda \to +\infty. \tag{5.2.25}$$

Из (5.2.17), (5.2.19) и теоремы 5.1.4 следует, что решения уравнения (5.2.1) в рассматриваемой ситуации могут как неограниченно возрастать, так и стремиться к нулю при $t \to \infty$.

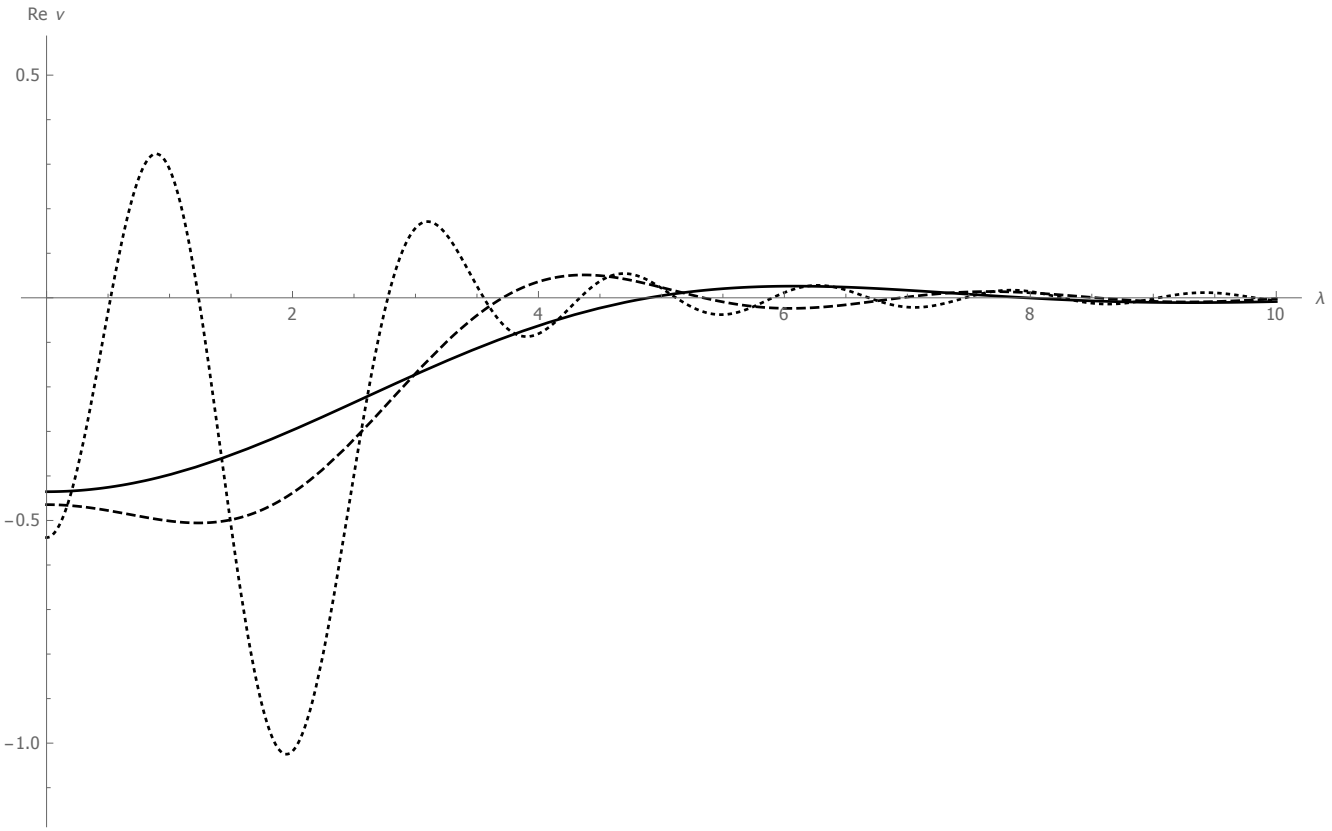

Рис. 5.2.1. Графики величины $\mathrm{Re}\,\nu$ при $a = 2$: сплошная линия — $h = 1$, штриховой пунктир — $h = 2$, точечный пунктир — $h = 4$

Более того из (5.2.17) и (5.2.25) выводим, что для любого фиксированного значения параметра h можно выбрать две бесконечные и неограниченные сверху последовательности значений λ, именно λ'_n и λ''_n, такие что при значениях параметров h и $\lambda = \lambda'_n$ в уравнении (5.2.1) существуют неограниченные решения, а при значениях параметров h и $\lambda = \lambda''_n$ все решения уравнения (5.2.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Аналогичное утверждение остается справедливым и в том случае, когда фиксировано значение параметра $\lambda \neq 0, \pm 2$. В этой ситуации можно выбрать две бесконечные и неограниченные сверху последовательности значений h, именно h'_n и h''_n, такие что при значениях параметров λ и $h = h'_n$ в уравнении (5.2.1) существуют неограниченные решения, а при значениях параметров λ и $h = h''_n$ все решения уравнения (5.2.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Как будет показано ниже, это утверждение справедливо и для значений $\lambda = \pm 1$.

б). $\lambda = 1$. (Случай $\lambda = -1$ рассматривается аналогично.)

Матрица A_{11} в этой ситуации имеет следующий вид:

$$A_{11} = -\frac{a^2}{24}\mathrm{i}\begin{pmatrix} 3e^{-\mathrm{i}h} - e^{-3\mathrm{i}h} & -3e^{\mathrm{i}h} \\ 3e^{-\mathrm{i}h} & -3e^{\mathrm{i}h} + e^{3\mathrm{i}h} \end{pmatrix}. \tag{5.2.26}$$

В результате несложных вычислений мы получаем следующие формулы для собственных чисел $\mu_{1,2}$ матрицы A_{11}:

$$\mu_{1,2} = -\frac{a^2}{6}\sin^3 h \pm \frac{a^2}{24}\sqrt{16\sin^6 h - 12\sin^2 h + 5}. \tag{5.2.27}$$

Нетрудно установить, что собственные числа μ_1 и μ_2 различны при любых значениях параметра h. Следовательно, усредненная система (5.2.8) может быть приведена к $\mathcal{L}$-диагональной форме при любых значениях параметра k.

Пусть сперва выполнено двойное неравенство (5.2.18), тогда для решений уравнения (5.2.1) при $t \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:

$$x(t) = c_1\Big[\big(\delta_1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(\delta_2 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big]\exp\Big\{\mu_1\hat{f}(t)\Big\} + O\Big(\exp\Big\{\mu_2\hat{f}(t)\Big\}\Big). \tag{5.2.28}$$

Здесь c_1 — произвольная комплексная постоянная, $\delta = (\delta_1, \delta_2)^T$ — собственный вектор матрицы A_{11}, отвечающий собственному числу μ_1, и, наконец, $\hat{f}(t)$ — функция, определяемая формулой (5.2.20).

Если параметр ρ удовлетворяет неравенству (5.2.21), то для решений уравнения (5.2.1) при $t \to \infty$ справедливо асимптотическое представление вида

$$x(t) = c_1\Big[\big(\delta_1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(\delta_2 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big]\exp\Big\{\frac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(\mu_1 + o(1)\big)\Big\} + \\ + O\Big(\exp\Big\{\frac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(\mu_2 + o(1)\big)\Big\}\Big). \tag{5.2.29}$$

Из формул (5.2.28) и (5.2.29) следует, что при $\rho \le 1/2$ уравнение (5.2.1) имеет неограниченные решения, если $\mu_1 > 0$. В том случае, когда $\rho \le 1/2$ и $\mu_1 < 0$ все решения уравнения (5.2.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Легко проверить, что

$$\mu_1 > 0 \quad \sim \quad \sin h < \sqrt{\frac{5}{12}},$$
$$\mu_1 < 0 \quad \sim \quad \sin h > \sqrt{\frac{5}{12}}.$$

В завершении этого раздела отметим некоторые особенности поведения решений уравнения (5.2.1), связанные с наличием в этом уравнении ненулевого запаздывания. Если $\rho > 1/2$, то поведение решений уравнения (5.2.1) и соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения ($h = 0$) качественно не различаются. Это, в частности, следует из того, что в рассматриваемой ситуации параметр h не влияет качественно на главные части асимптотики решений (см. формулы (5.2.3) и (5.2.12)). Существенное различие между динамикой решений обыкновенного дифференциального уравнения и уравнения (5.2.1) при $h \neq 0$ наблюдается в том случае, когда $\rho \le 1/2$. Первое отличие состоит в том, что нулевое решение

уравнения (5.2.1) при $h = 0$ не может быть асимптотически устойчивым ни при каких значениях параметров. Второе отличие заключается в том, что у уравнения (5.2.1) при $h = 0$ могут существовать неограниченные решения только в том случае, когда $\lambda = \pm 2$ или $\lambda = \pm 1$. В уравнении (5.2.1) с $h \neq 0$, как мы показали выше, для любого значения параметра λ можно выбрать такое значение параметра h, что у соответствующего уравнения будут существовать неограниченные решения.

Отметим еще одну особенность динамики решений уравнения (5.2.1) в ситуации, когда $\lambda \approx \pm 2$ и $\rho \leq 1/2$. Напомним, что если $\lambda = \pm 2$ и $\rho \leq 1$, то асимптотика решений этого уравнения определяется формулой (5.2.12), а следовательно, у этого уравнения всегда имеются неограниченные решения. Рассмотрим теперь предельное равенство (5.2.24). Легко показать, что выражение в правой части этого равенства принимает лишь отрицательные значения для всех $h > 0$. Следовательно, в силу (5.2.19) при любом фиксированном значении запаздывания h и при всех значениях параметра λ достаточно близких к $\lambda = \pm 2$ все решения уравнения (5.2.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Такая особенность в поведении решений систем с запаздыванием с близкими к основному резонансу частотами внешнего воздействия для систем с малым параметром была отмечена, например, в работе [28].

5.3 Интегро–дифференциальное уравнение типа Вольтерра с колебательно убывающим ядром

В этом разделе мы построим асимптотические представления при $t \to \infty$ для решений ИДУ типа Вольтерра

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + q(t) \int\limits_{t-h}^{t} x(s)ds = 0, \qquad t \geq t_0 + h, \tag{5.3.1}$$

где $t_0, h > 0$, а функция $q(t)$ определяется формулой (3.1.5). Напомним, что исследование динамики решений похожего уравнения Вольтерра, именно уравнения вида (3.3.1), мы провели в разделе 3.3. Отметим, что хотя уравнения (3.3.1) и (5.3.1) и относятся к одному классу ИДУ, их динамических свойства существенно различны. В частности, уравнение (3.3.1) является конечномерной динамической системой, а уравнение (5.3.1), относящееся к ФДУ, имеет бесконечномерное фазовое пространство. Построив асимптотические формулы для решений уравнения (5.3.1), мы будем иметь возможность сравнить динамику решений уравнений (3.3.1) и (5.3.1).

Полагая $\dot{x} = y$, $u_0 = (x, y)^T$, от уравнения (5.3.1) перейдем к системе ФДУ

$$\dot{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u_0 + q(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \int_{-h}^{0} u_0(t+s)ds, \qquad t \geq t_0 + h. \tag{5.3.2}$$

В этой системе осуществим замену

$$u_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix} u_1, \tag{5.3.3}$$

в результате которой приходим к системе

$$\dot{u}_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} u_1 + \frac{\mathrm{i}q(t)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \int_{-h}^{0} u_1(t+s)ds. \tag{5.3.4}$$

Предположим сначала, что параметр ρ удовлетворяет неравенству

$$\rho > 1.$$

Тогда система (5.3.4) является $\mathcal{L}$–диагональной, т. е. имеет вид (5.1.1). Асимптотика всех решений такой системы строится согласно теоремам 5.1.1, 5.1.2. В этом случае для всех решений уравнения (5.3.1) получаем следующие асимптотические формулы при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + c_2\big(1 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t} + o\big(e^{-\beta t}\big), \tag{5.3.5}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные, а $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Пусть далее

$$\frac{1}{2} < \rho \leq 1. \tag{5.3.6}$$

С помощью замены

$$u_1 = \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}t}, e^{-\mathrm{i}t}\big)u_2 \tag{5.3.7}$$

система (5.3.4) преобразуется к следующему виду:

$$\dot{u}_2 = t^{-\rho}B_1\big(t, (u_2)_t\big), \qquad B_1\big(t, \varphi(\theta)\big) = B(t) \int_{-h}^{0} \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}s}, e^{-\mathrm{i}s}\big)\varphi(s)ds. \tag{5.3.8}$$

Здесь $(u_2)_t = u_2(t+\theta)$, $\varphi(\theta) \in C_h$, а матрица $B(t)$ определяется формулой

$$B(t) = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}\lambda t} - e^{-\mathrm{i}\lambda t} & e^{\mathrm{i}(\lambda-2)t} - e^{-\mathrm{i}(\lambda+2)t} \\ e^{-\mathrm{i}(\lambda-2)t} - e^{\mathrm{i}(\lambda+2)t} & e^{-\mathrm{i}\lambda t} - e^{\mathrm{i}\lambda t} \end{pmatrix}. \tag{5.3.9}$$

Система (5.3.8) является системой ФДУ вида (5.1.8). Для ее дальнейшего упрощения необходимо проделать преобразования, описанные в разделе 5.1. При условии (5.3.6) систему (5.3.8) можно записать в расширенном фазовом пространстве C_{2h} в следующем виде:

$$\dot{u}_2 = t^{-\rho} A_1(t) u_2 + R\big(t, (u_2)_t\big). \tag{5.3.10}$$

Здесь матрица $A_1(t)$ в силу (5.1.14) определяется выражением

$$A_1(t) = B(t) \int_{-h}^{0} \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}s}, e^{-\mathrm{i}s}\big) ds, \tag{5.3.11}$$

а оператор $R\big(t, (u_2)_t\big)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0 + h, \infty)$. В системе (5.3.10) осуществим замену (3.3.14), в результате которой приходим к усредненной системе

$$\dot{u}_3 = t^{-\rho} A_1 u_3 + R_1\big(t, (u_3)_t\big), \tag{5.3.12}$$

где $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$ и $R_1\big(t, (u_3)_t\big)$ — некоторый оператор из класса $\mathcal{L}_1^{2h}[t_0 + h, \infty)$.

Предположим сначала, что

$$\lambda \neq \pm 2. \tag{5.3.13}$$

В этом случаем матрица $A_1 = 0$ и система (5.3.12) является $\mathcal{L}$–диагональной. Используя тогда теоремы 5.1.1, 5.1.2 для построения асимптотики решений системы (5.3.12) и возвращаясь затем к исходному уравнению (5.3.1), получаем для решений последнего при $t \to \infty$ асимптотическое представление (5.3.5).

Как и в случае уравнения (3.3.1), будем в дальнейшем считать параметр λ положительным. Пусть

$$\lambda = 2,$$

тогда

$$A_1 = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}\big(1 - e^{\mathrm{i}h}\big) \\ (-\mathrm{i})\big(1 - e^{-\mathrm{i}h}\big) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.3.14}$$

Собственные числа матрицы A_1 имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm \frac{a}{4} \sqrt{2(1 - \cos h)}.$$

Далее будем предполагать, что

$$\cos h \neq 1. \tag{5.3.15}$$

Случай, когда $\cos h = 1$, будет рассмотрен отдельно в конце этого раздела. Таким образом, собственные числа $\mu_{1,2}$ различны и в силу леммы 1.1.1 система (5.3.12) с помошью замены

$$u_3 = C u_4, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \delta & -\delta \end{pmatrix}, \quad \delta = -\frac{\mathrm{i}\sqrt{2(1 - \cos h)}}{1 - e^{\mathrm{i}h}},$$

приводится к $\mathcal{L}$–диагональной форме. В этом случае для решений уравнения (5.3.1) получаем следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\Big[\big(1+o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(\delta+o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big]\exp\Big\{\mu_1\int t^{-\rho}dt\Big\}+ \\ + c_2\Big[\big(1+o(1)\big)e^{\mathrm{i}t} + \big(-\delta+o(1)\big)e^{-\mathrm{i}t}\Big]\exp\Big\{\mu_2\int t^{-\rho}dt\Big\} + o\big(e^{-\beta t}\big), \quad (5.3.16)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные, а $\beta > 0$ — произвольное действительное число. Заметим, что в рассмотренном случае уравнение (5.3.1) имеет неограниченные решения при всех h, удовлетворяющих условию (5.3.15).

Рассмотрим теперь ситуацию, когда

$$\frac{1}{3} < \rho \le \frac{1}{2}.$$

Используя преобразования из раздела 5.1, запишем систему (5.3.8) в расширенном фазовом пространстве C_{3h} в следующем виде:

$$\dot{u}_2 = \big[t^{-\rho}A_1(t) + t^{-2\rho}A_{11}(t)\big]u_2 + \tilde{R}\big(t,(u_2)_t\big). \quad (5.3.17)$$

Здесь оператор $\tilde{R}\big(t,(u_2)_t\big)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{3h}[t_0+2h,\infty)$, матрица $A_1(t)$ определяется формулой (5.3.11), а матрица $A_{11}(t)$ имеет следующий вид:

$$A_{11}(t) = -B(t)\int\limits_{-h}^{0}\operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}s},e^{-\mathrm{i}s}\big)\int\limits_{s+t}^{t}B(\tau)\int\limits_{-h}^{0}\operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}z},e^{-\mathrm{i}z}\big)dzd\tau ds. \quad (5.3.18)$$

Здесь матрица $B(t)$ определяется выражением (5.3.9). В системе (5.3.17) осуществим усредняющую замену

$$u_2 = \big[I + t^{-\rho}Y_1(t) + t^{-2\rho}Y_{11}(t)\big]u_3$$

В результате этой замены получим систему

$$\dot{u}_3 = \big[t^{-\rho}A_1 + t^{-2\rho}A_{11}\big]u_3 + \tilde{R}_1\big(t,(u_3)_t\big). \quad (5.3.19)$$

Здесь $\tilde{R}_1\big(t,(u_3)_t\big)$ — некоторый оператор из класса $\mathcal{L}_1^{3h}[t_0+2h,\infty)$, а постоянные матрицы A_1 и A_{11} определяются согласно формулам (5.2.9). Заметим, что представляет интерес исследование лишь случая, когда выполнено неравенство (5.3.13). Действительно, если $\lambda = 2$ и выполнено условие (5.3.15), то матрица A_1 отлична от нулевой и определяется формулой (5.3.14). В этой ситуации система (5.3.19) может быть представлена в виде (5.1.32), где $s = 1$ и $v(t) = t^{-\rho}$. Тогда для решений уравнения (5.3.1) при $t \to \infty$ мы получаем асимптотическое представление (5.3.16), в котором величину $\int t^{-\rho}dt$ следует заменить выражением (3.3.32).

Итак, будем далее предполагать, что

$$\lambda \neq \pm 2.$$

Тогда матрица $A_1 = 0$ и нам необходимо вычислить матрицу A_{11}. Из (5.2.9), (5.3.11) и (5.3.18) выводим, что

$$A_{11}(t) = -B(t) \int\limits_{-h}^{0} \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}s}, e^{-\mathrm{i}s}\big)\big(Y_1(t) - Y_1(t+s)\big)ds =$$

$$= -A_1(t)Y_1(t) + B(t) \int\limits_{-h}^{0} \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}s}, e^{-\mathrm{i}s}\big)Y_1(t+s)ds.$$

Тогда в силу (5.2.9) заключаем, что

$$A_{11} = \mathrm{M}\left[B(t) \int\limits_{-h}^{0} \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}s}, e^{-\mathrm{i}s}\big)Y_1(t+s)ds\right] = \frac{a^2}{16}\,\mathrm{M}\left[\int\limits_{-h}^{0} \begin{pmatrix} a_{11}(t,s) & a_{12}(t,s) \\ \bar{a}_{12}(t,s) & \bar{a}_{11}(t,s) \end{pmatrix} ds\right]. \quad (5.3.20)$$

Здесь матрица $Y_1(t)$ является решением уравнения $\dot{Y}_1 = A_1(t)$ с нулевым средним значением. Кроме того,

$$a_{11}(t,s) = \frac{1}{\lambda}\big(e^{-\mathrm{i}h} - 1\big)\big(e^{2\mathrm{i}\lambda t}e^{\mathrm{i}(\lambda+1)s} + e^{-\mathrm{i}(\lambda-1)s} - e^{\mathrm{i}(\lambda+1)s} - e^{-2\mathrm{i}\lambda t}e^{-\mathrm{i}(\lambda-1)s}\big) +$$
$$+\big(1 - e^{-\mathrm{i}h}\big)\Big(\frac{e^{2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda+2}e^{\mathrm{i}(\lambda+1)s} + \frac{e^{-\mathrm{i}(\lambda-1)s}}{\lambda-2} - \frac{e^{\mathrm{i}(\lambda+1)s}}{\lambda+2} - \frac{e^{-2\mathrm{i}\lambda t}}{\lambda-2}e^{-\mathrm{i}(\lambda-1)s}\Big),$$
$$a_{12}(t,s) = \frac{1}{\lambda}\big(e^{\mathrm{i}h} - 1\big)\big(e^{-2\mathrm{i}t}e^{-\mathrm{i}(\lambda+1)s} + e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t}e^{\mathrm{i}(\lambda-1)s} - e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}e^{-\mathrm{i}(\lambda+1)s} - e^{-2\mathrm{i}t}e^{\mathrm{i}(\lambda-1)s}\big) +$$
$$+\big(1 - e^{\mathrm{i}h}\big)\Big(\frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda+2}e^{-\mathrm{i}(\lambda+1)s} + \frac{e^{2\mathrm{i}(\lambda-1)t}}{\lambda-2}e^{\mathrm{i}(\lambda-1)s} - \frac{e^{-2\mathrm{i}(\lambda+1)t}}{\lambda+2}e^{-\mathrm{i}(\lambda+1)s} - \frac{e^{-2\mathrm{i}t}}{\lambda-2}e^{\mathrm{i}(\lambda-1)s}\Big). \quad (5.3.21)$$

Предположим сначала, что

$$\lambda \neq \pm 1.$$

Тогда из (5.3.20), (5.3.21) следует, что

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix}, \quad (5.3.22)$$

где

$$\nu = \frac{a^2}{8}\big(1 - e^{-\mathrm{i}h}\big)\Big(\frac{6\mathrm{i}}{(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)} - \frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}(\lambda-1)h}}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)} + \frac{\mathrm{i}e^{-\mathrm{i}(\lambda+1)h}}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)}\Big). \quad (5.3.23)$$

Система (5.3.19) в этом случае имеет $\mathcal{L}$–диагональную форму, и асимптотика ее решений строится с помощью теорем 5.1.1, 5.1.2. Следовательно, решения уравнения (5.3.1) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)\exp\Big\{\mathrm{i}\big(t+\operatorname{Im}\nu\int t^{-2\rho}dt\big)\Big\}\exp\Big\{\operatorname{Re}\nu\int t^{-2\rho}dt\Big\}+$$
$$+\,c_2\big(1+o(1)\big)\exp\Big\{-\mathrm{i}\big(t+\operatorname{Im}\nu\int t^{-2\rho}dt\big)\Big\}\exp\Big\{\operatorname{Re}\nu\int t^{-2\rho}dt\Big\}+o\big(e^{-\beta t}\big), \quad (5.3.24)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число. Очевидно, что качественное поведение решений уравнения (5.3.1) в рассматриваемой ситуации будет определяться знаком действительной части величины ν. Используя (5.3.23), а также при необходимости пакеты символьных вычислений (мы, в частности, воспользовались математическим пакетом Wolfram Mathematica 10), можно получить следующее выражение для этой величины:

$$\operatorname{Re}\nu = \frac{a^2\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{4\lambda\left(\lambda^4-5\lambda^2+4\right)}\left(-6\lambda\cos\Big(\frac{h}{2}\Big)+(\lambda+1)(\lambda+2)\cos\Big(h\Big(\frac{3}{2}-\lambda\Big)\Big)-\right.$$
$$\left.-\,(\lambda-2)(\lambda-1)\cos\Big(h\Big(\lambda+\frac{3}{2}\Big)\Big)\right). \quad (5.3.25)$$

Из (5.3.25) несложно вывести следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\lambda\to 0}\operatorname{Re}\nu = \frac{a^2}{4}\sin^2\Big(\frac{h}{2}\Big)\big(h-3\sin h+2h\cos h\big),$$
$$\lim_{\lambda\to 1}\operatorname{Re}\nu = \frac{a^2}{12}\sin^2\Big(\frac{h}{2}\Big)\big(-3h+\sin h+\sin(2h)\big),$$
$$\lim_{\lambda\to 2}\operatorname{Re}\nu = \frac{a^2}{48}\sin^2\Big(\frac{h}{2}\Big)\big(-6h+\sin h+\sin(2h)+\sin(3h)\big), \quad (5.3.26)$$
$$\operatorname{Re}\nu = \frac{a^2}{2\lambda^3}\sin\Big(\frac{h}{2}\Big)\Big(\sin\Big(\frac{3h}{2}\Big)\sin(\lambda h)+O\big(\lambda^{-1}\big)\Big), \quad \lambda\to+\infty. \quad (5.3.27)$$

На рис. 5.3.1 изображен график величины $\operatorname{Re}\nu$ как функции переменной λ при некоторых значениях величины h и $a = 2$. Как это следует из формул (5.3.25), (5.3.27), при любом фиксированном значении величины h (за исключением, быть может, некоторого счетного множества значений) уравнение (5.3.1) имеет неограниченное при $\lambda\to+\infty$ множество интервалов асимптотической устойчивости и неустойчивости решений, сменяющих друг друга. Аналогичное утверждение справедливо и в том случае, когда фиксировано значение параметра λ, а $h\to+\infty$.

Пусть теперь

$$\lambda = 1.$$

Несложные вычисления приводят нас к следующему выражению для матрицы A_{11}, определяемой формулами (5.3.20), (5.3.21):

$$A_{11} = \frac{a^2}{8}\begin{pmatrix}\big(e^{-\mathrm{i}h}-1\big)\big(h+\frac{\mathrm{i}}{6}-\frac{\mathrm{i}}{6}e^{-2\mathrm{i}h}\big) & h\big(e^{\mathrm{i}h}-1\big)\\ h\big(e^{-\mathrm{i}h}-1\big) & \big(e^{\mathrm{i}h}-1\big)\big(h-\frac{\mathrm{i}}{6}+\frac{\mathrm{i}}{6}e^{2\mathrm{i}h}\big)\end{pmatrix}. \quad (5.3.28)$$

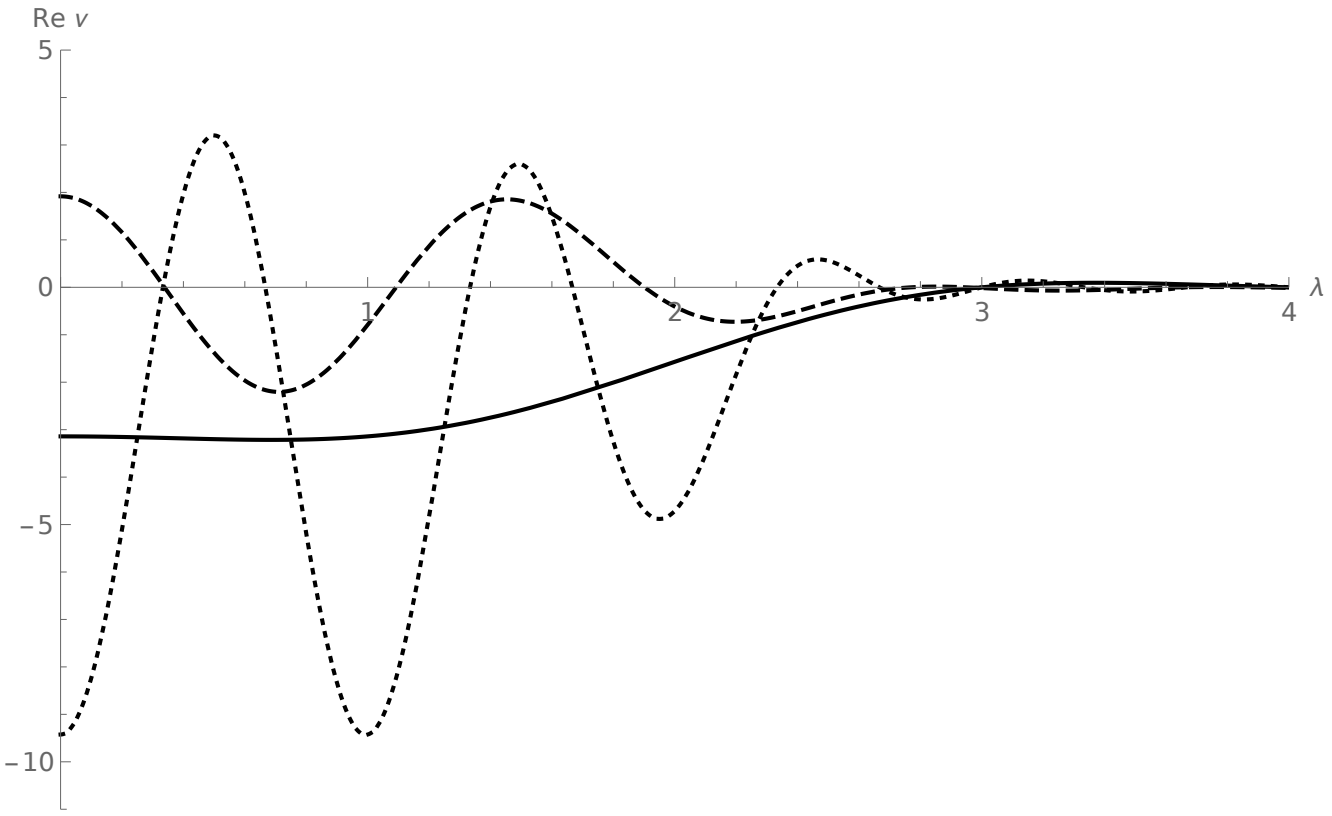

Рис. 5.3.1. Графики величины (5.3.25) при $a = 2$: сплошная линия — $h = \pi$, штриховой пунктир — $h = 7$, точечный пунктир — $h = 3\pi$

Собственные числа матрицы A_2 определяются как корни характеристического полинома

$$p(\mu) = \mu^2 + p_1(h)\mu + p_2(h), \tag{5.3.29}$$

где функции $p_1(h)$ и $p_2(h)$ задаются формулами:

$$p_1(h) = -\frac{a^2}{6}\sin^2\Big(\frac{h}{2}\Big)\big(-3h + \sin h + \sin(2h)\big), \tag{5.3.30}$$

$$p_2(h) = \frac{a^4}{72}\sin^3\Big(\frac{h}{2}\Big)\cos\Big(\frac{h}{2}\Big)\big(\sin h - 6h\cos h\big). \tag{5.3.31}$$

Собственные числа различны, если дискриминант

$$d(h) = p_1^2(h) - 4p_2^2(h) = -\frac{a^4}{144}\bigg(\sin^2 h\big(\sin h - \sin(2h)\big)^2 - 12h\sin^3\Big(\frac{h}{2}\Big)\times \\ \times\Big(\cos\Big(\frac{h}{2}\Big) + 3h\sin\Big(\frac{h}{2}\Big) + 2\cos\Big(\frac{3h}{2}\Big) + \cos\Big(\frac{5h}{2}\Big)\Big)\bigg) \tag{5.3.32}$$

отличен от нуля. В этом случае они имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = -\frac{p_1(h)}{2} \pm \begin{cases} \dfrac{1}{2}\sqrt{d(h)}, & d(h) > 0, \\ \dfrac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{-d(h)}, & d(h) < 0. \end{cases} \tag{5.3.33}$$

В силу леммы 1.1.1 система (5.3.19) может быть приведена к $\mathcal{L}$–диагональному виду. Решения исходного уравнения (5.3.1) при $t \to \infty$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = c_1\Big(e^{\mathrm{i}t}\big(\delta_1 + o(1)\big) + e^{-\mathrm{i}t}\big(\delta_2 + o(1)\big)\Big)\exp\Big\{\mu_1 \int t^{-2\rho}dt\Big\} + O\Big(\exp\Big\{\mu_2 \int t^{-2\rho}dt\Big\}\Big), \quad (5.3.34)$$

Здесь c_1 — произвольная комплексная постоянная, $f_1 = \big(\delta_1, \delta_2\big)^T$ — собственный вектор матрицы A_{11}, отвечающий собственному числу μ_1. Из (5.3.30), (5.3.32) и (5.3.33) следует, что при $h \to +\infty$ корень $\mu_1(h)$ вне некоторой фиксированной окрестности значений $h_m = 2\pi m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, является действительным и имеет следующее асимптотическое представление:

$$\mu_1(h) = \frac{a^2}{24}\sin\Big(\frac{h}{2}\Big)\Big(\cos\Big(\frac{h}{2}\Big) + 2\cos\Big(\frac{3h}{2}\Big) + \cos\Big(\frac{5h}{2}\Big) + \\ + 2\sin\Big(\frac{h}{2}\Big)\big(\sin h + \sin(2h)\big)\Big) + O\Big(\frac{1}{h}\Big). \quad (5.3.35)$$

В силу представления (5.3.34) динамика решений уравнения (5.3.1) будет определяться расположением собственных чисел $\mu_{1,2}$ на комплексной плоскости. Воспользовавшись критерием Рауса–Гурвица применительно к многочлену (5.3.29), заключаем следующее. Если при некотором h коэффициенты $p_1(h)$ и $p_2(h)$ положительны, то все решения уравнения (5.3.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если хотя бы одна из этих величин отрицательна при некотором h, то в этом случае уравнение (5.3.1) имеет неограниченные при $t \to \infty$ решения. На рисунке 5.3.2 изображены графики величин $p_1(h)$ и $p_2(h)$ при $a = 2$. Как это следует из (5.3.35), интервалы устойчивости и неустойчивости решений уравнения (5.3.1) сменяют друг друга в неограниченном числе при $h \to +\infty$.

Пусть, наконец,

$$\rho \le \frac{1}{3} \quad (5.3.36)$$

и выполнено условие (5.3.15). Используя изложенный в разделе 5.1 метод, систему (5.3.8) представим в следующем виде:

$$\dot{u}_2 = \big[t^{-\rho}A_1(t) + t^{-2\rho}A_{11}(t) + \ldots + t^{-k\rho}A_{1\ldots1}(t)\big]u_2 + \hat{R}\big(t, (u_2)_t\big). \quad (5.3.37)$$

Здесь оператор $\hat{R}\big(t, (u_2)_t\big)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_1^{(k+1)h}[t_0 + kh, \infty)$, а натуральное k выбрано так, что $k\rho \le 1 < (k+1)\rho$. Элементами матриц $A_{1\ldots1}(t)$ являются некоторые тригонометрические многочлены. В частности, матрицы $A_1(t)$ и $A_{11}(t)$ имеют вид (5.3.11) и (5.3.18) соответственно. Согласно теореме 5.1.3, осуществим в системе (5.3.37) усредняющую замену типа (1.2.5). В результате этой замены приходим к системе

$$\dot{u}_3 = \big[A_1 t^{-\rho} + t^{-2\rho}A_{11} + \ldots + t^{-k\rho}A_{1\ldots1}\big]u_3 + \hat{R}_1\big(t, (u_3)_t\big). \quad (5.3.38)$$

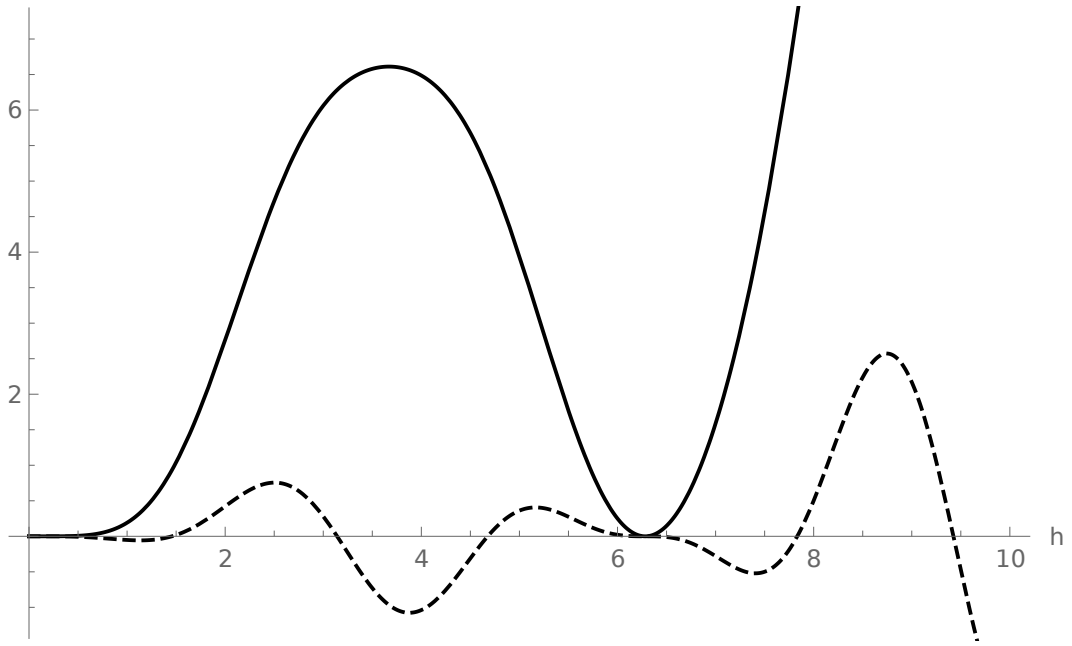

Рис. 5.3.2. Графики коэффициентов многочлена (5.3.29) как функций переменной h при $a = 2$: сплошная линия — $p_1(h)$, штриховой пунктир — $p_2(h)$

Дальнейшей анализ системы (5.3.38) связан с представлением ее в виде (5.1.32) и последующим использованием леммы 1.1.1 для приведения этой системы к $\mathcal{L}$–диагональной форме (5.1.34). Если $\lambda = \pm 2$, то собственные числа матрицы A_1 различны. Следовательно, в этом случае для решений уравнения (5.3.1) справедливо представление (5.3.16), где величину $\int t^{-\rho} dt$ нужно заменить на выражение (3.3.32). Далее, если $\lambda = \pm 1$, то $A_1 = 0$, а собственные числа матрицы A_{11} имеют вид (5.3.33). Эти собственные числа различны, если величина $d(h)$, определяемая формулой (5.3.32), отлична от нуля. В этом случае асимптотика всех решений уравнения (5.3.1) определяется формулой (5.3.34), где $\int t^{-2\rho} dt$ следует заменить выражением (3.3.53). Наконец, если выполнены неравенства $\lambda \neq \pm 1, \pm 2$, то $A_1 = 0$, а матрица A_{11} определяется формулой (5.3.22). В этой ситуации собственные числа различны, если $\operatorname{Im} \nu \neq 0$. Тогда в предположении, что $\operatorname{Re} \nu \neq 0$, асимптотика всех решений уравнения (5.3.1) имеет вид (5.3.24), где $\int t^{-2\rho} dt$ необходимо заменить величиной (3.3.53).

Рассмотрим, наконец, случай, когда

$$\cos h = 1. \tag{5.3.39}$$

Приведем систему (5.3.8) к виду (5.3.37). Несложно показать, что каждая из матриц $A_{1\ldots1}(t)$ в системе (5.3.37) имеет следущую структуру:

$$\begin{pmatrix} (*) & (*) \\ (*) & (*) \end{pmatrix} \int\limits_{-h}^{0} \operatorname{diag}\bigl(e^{\mathrm{i}s}, e^{-\mathrm{i}s}\bigr) ds = \begin{pmatrix} (*)\bigl(1 - e^{-\mathrm{i}h}\bigr) & (*)\bigl(1 - e^{\mathrm{i}h}\bigr) \\ (*)(1 - e^{-\mathrm{i}h}) & (*)\bigl(1 - e^{\mathrm{i}h}\bigr) \end{pmatrix}, \tag{5.3.40}$$

где символом $(*)$ обозначены некоторые функции. Из (5.3.39) тогда вытекает, что все матрицы $A_{1\ldots1}(t)$ суть нулевые. Отсюда следует, что система (5.3.37) имеет $\mathcal{L}$–диагональный вид. В силу теорем 5.1.1, 5.1.2 все решения системы (5.3.37) имеют следущую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u_2 = c_1\big[e_1 + o(1)\big] + c_2\big[e_2 + o(1)\big] + o\big(e^{-\beta t}\big),$$

где e_1, e_2 — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^2$, c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные, а $\beta > 0$ — произвольное действительное число. Возвращаясь теперь к уравнению (5.3.1), заключаем, что для любого $\rho > 0$ при выполнении условия (5.3.39) поведение решений этого уравнения при $t \to \infty$ определяется асимптотической формулой (5.3.5). Заметим также, что в случае (5.3.39) функции $x_{1,2}(t) = e^{\pm it}$ являются точными решениями уравнения (5.3.1).

Построенные в работе асимптотические формулы для решений уравнений (3.3.1) и (5.3.1) позволяют сделать следующие выводы. При $\rho > 1$ динамика решений этих уравнений качественно эквивалентна и при $t \to \infty$ может быть описана асимптотической формулой (3.3.2). Но уже в полуинтервале $\rho \in (1/2, 1]$ наблюдаются некоторые различия в динамике решений, как качественного, так и количественного характера. Так, для уравнения (3.3.1) наряду с особым значением $\lambda = \pm 2$ в указанном диапазоне изменения параметра ρ существует и особое значение $\lambda = \pm 1$. В случае $\rho \leq 1/2$ различия в динамике решений уравнений (3.3.1) и (5.3.1) оказываются существенными. Это связано с тем обстоятельством, что при $\rho \leq 1/2$ начинает проявляться бесконечномерность фазового пространства уравнения (5.3.1). Отметим также, что при $\lambda = \pm 2$ и $\rho \leq 1$ уравнения (3.3.1) и (5.3.1) имеют неограниченные решения. Из (5.3.26) следует, что если $\lambda \approx 2$ и h достаточно велико ($\cos h \neq 1$), то $\operatorname{Re}\nu < 0$, а, следовательно, при $\rho \leq 1/2$ все решения уравнения (5.3.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Отметим, что подобная особенность в динамике решений ФДУ была нами отмечена в заключительном абзаце предыдущего раздела относительно поведения решений уравнения (5.2.1).

В заключение отметим, что совершенно аналогично тому, как это было сделано для уравнений (3.3.1) и (5.3.1), можно построить асимптотики при $t \to \infty$ для решений ИДУ вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x + \int\limits_{\mathcal{I}} K(t,s)x(s)ds = 0, \qquad t \geq t_0,$$

где $\mathcal{I} = [t_0, t]$ или $\mathcal{I} = [t-h, t]$, а ядро $K(t,s)$ допускает следующее представление:

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} v_j(t)P_j(t)Q_j(s)$$

или

$$K(t,s) = \sum_{j=1}^{n} v_j(s)P_j(t)Q_j(s).$$

Здесь $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции такие, что

1^0. $v_1(t) \to 0, v_2(t) \to 0, \ldots, v_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$;

2^0. $\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), \ldots, \dot{v}_n(t) \in L_1[t_0, \infty)$;

3^0. Произведение $v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)\ldots v_{i_{k+1}}(t) \in L_1[t_0, \infty)$ для любого набора $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{k+1} \leq n$.

Относительно функций $P_j(t)$ и $Q_j(s)$ предполагается, что они или являются периодическими с одни и тем же периодом или представляют собой тригонометрические многочлены.

Глава 6

Метод центральных многообразий в задаче асимптотического интегрирования ФДУ с колебательно убывающими коэффициентами

6.1 Постановка задачи и некоторые вспомогательные сведения

В этой главе изучается вопрос о построении асимптотики при $t \to \infty$ решений следующей системы ФДУ:

$$\dot{x} = B_0 x_t + G(t, x_t). \tag{6.1.1}$$

Здесь $x \in \mathbb{C}^m$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ $(-h \le \theta \le 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h, 0], \mathbb{C}^m\big)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^m$. Далее, B_0 — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^m$ и не зависящий от t, а оператор $G(t, x_t)$ допускает представление в виде

$$G(t, x_t) = B(t, x_t) + R(t, x_t). \tag{6.1.2}$$

В этой формуле $B(t, \cdot)$ и $R(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$ такие, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функции $B(t, \varphi)$ и $R(t, \varphi)$ измеримы по Лебегу при $t \ge t_0$ и, кроме того,

$$|R(t, \varphi)| \le \gamma(t)\|\varphi\|_{C_h}, \quad \gamma(t) \in L_1[t_0, \infty) \quad \Big(\|\varphi\|_{C_h} = \sup_{-h \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|\Big). \tag{6.1.3}$$

Далее,

$$B(t, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) B_i(t, \varphi) + \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) B_{i_1 i_2}(t, \varphi) + \ldots + \\ + \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) B_{i_1 \ldots i_k}(t, \varphi), \qquad \varphi \in C_h. \tag{6.1.4}$$

Здесь $B_{i_1\dots i_l}(t,\cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из пространства C_h в пространство $\mathbb{C}^m$, относительно которых предполагается, что

$$B_{i_1\dots i_l}(t,\varphi)=\sum_{j=1}^{L}\Gamma_j^{(i_1\dots i_l)}(t)\ell_j^{(i_1\dots i_l)}(\varphi),\qquad \varphi\in C_h. \tag{6.1.5}$$

В формуле выше $\ell_j^{(i_1\dots i_l)}(\varphi)$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t, и действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$, а $\Gamma_j^{(i_1\dots i_l)}(t)$ — матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т. е.

$$\Gamma_j^{(i_1\dots i_l)}(t)=\sum_{s=1}^{M}\beta_{sj}^{(i_1\dots i_l)}e^{\mathrm{i}\omega_s t}, \tag{6.1.6}$$

где $\beta_{sj}^{(i_1\dots i_l)}$ — постоянные, вообще говоря, комплексные $(m\times m)$-матрицы, а ω_s — вещественные числа. Наконец, $v_1(t),\dots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$ функции, удовлетворяющие условиям B.2 — B.4 из раздела 1.2.

В данной главе мы продолжим исследование вопроса асимптотического интегрирования систем вида (6.1.1), начатое в предыдущей главе. Напомним, что в главе 5 изучался случай нулевого оператора B_0. Функционально-дифференциальные системы уравнений типа (6.1.1) с линейными, а также нелинейными операторами в правой части, рассматриваемые как возмущения линейной автономной системы

$$\dot{x}=B_0x_t,\quad t\geq 0, \tag{6.1.7}$$

исследовались многими авторами (см., например, [64–67, 88, 90, 91, 111, 156–158]). Основное предположение, при котором система (6.1.1) рассматривается в данной главе, состоит в следующем. Характеристическое уравнение

$$\det\Delta(\lambda)=0,\qquad \Delta(\lambda)=\lambda I-B_0(e^{\lambda\theta}I), \tag{6.1.8}$$

имеет N корней $\lambda_1,\dots,\lambda_N$ на мнимой оси с учетом их кратностей, а вещественные части остальных корней отрицательны. Данное обстоятельство позволяет для асимптотического интегрирования системы (6.1.1) воспользоваться идеологией известного метода центральных многообразий (см. [65, 68, 70, 84]). Адаптации этого метода к задаче асимптотического интегрирования системы (6.1.1) и посвящена данная глава. Существенная роль при этом отводится технике, развитой в первой главе применительно к задаче асимптотического интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами.

Для дальнейшего изложения нам потребуются некоторые известные факты. Излагаемые далее в этом разделе сведения могут быть найдены, например, в монографии [55] (см. также [115, 123]).

Известно, что линейная автономная система (6.1.7) для $t \geq 0$ порождает в C_h сильно непрерывную полугруппу операторов $T(t)$: $C_h \to C_h$. Оператор $T(t)$, называемый оператором сдвига вдоль траекторий системы (6.1.7), определяется следующим образом: $T(t)\varphi = x_t^\varphi(\theta)$, где $\varphi \in C_h$ и $x_t^\varphi(\theta)$ — решение системы (6.1.7) с начальным условием $x_0^\varphi(\theta) = \varphi(\theta)$. Инфинитезимальный производящий оператор A этой полугруппы задается равенством $A\varphi = \varphi'(\theta)$, где $\varphi \in D(A)$. Область определения оператора A

$$D(A) = \big\{\varphi \in C_h \;\big|\; \varphi'(\theta) \in C_h,\;\; \varphi'(0) = B_0\varphi\big\}$$

плотна в C_h. Имеют место следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}T(t)\varphi = T(t)A\varphi = AT(t)\varphi, \qquad \varphi \in D(A). \tag{6.1.9}$$

В дальнейшем нам удобно будет использовать представление Рисса для оператора B_0:

$$B_0\varphi = \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\varphi(\theta), \tag{6.1.10}$$

где $(m\times m)$-матричная функция $\eta(\theta)$ имеет ограниченную вариацию на $[-h, 0]$. Представление (6.1.10) позволяет получить следующие выражения для матрицы $\Delta(\lambda)$ из (6.1.8), а также ее производных:

$$\Delta(\lambda) = \lambda I - \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)e^{\lambda\theta}, \quad \Delta'(\lambda) = I - \int\limits_{-h}^{0} \theta d\eta(\theta)e^{\lambda\theta},$$

$$\Delta^{(j)}(\lambda) = -\int\limits_{-h}^{0} \theta^j d\eta(\theta)e^{\lambda\theta}, \quad j \geq 2. \tag{6.1.11}$$

С системой (6.1.7) можно связать так называемую формально сопряженную систему

$$\dot{y} = -\int\limits_{-h}^{0} y(t-\theta)d\eta(\theta), \quad t \leq 0, \tag{6.1.12}$$

где $y(t)$ — комплекснозначная вектор-строка длины m. Фазовым пространством для системы (6.1.12) является множество $C_h' \equiv C\big([0, h], \mathbb{C}^{m*}\big)$, где $\mathbb{C}^{m*}$ — пространство вектор-строк длины m. Для любых $\psi \in C_h'$ и $\varphi \in C_h$ определим билинейную форму

$$\big(\psi(\xi), \varphi(\theta)\big) = \psi(0)\varphi(0) - \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta} \psi(\xi-\theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi. \tag{6.1.13}$$

Пусть

$$\Lambda = \big\{\lambda_i \in \mathbb{C} \;\big|\; \det\Delta(\lambda_i) = 0,\; i = 1, \ldots, N\big\}, \tag{6.1.14}$$

тогда пространство C_h можно разложить в прямую сумму двух подпространств

$$C_h = P_\Lambda \oplus Q_\Lambda. \tag{6.1.15}$$

Здесь P_Λ — прямая сумма обобщенных собственных подпространств оператора A, отвечающих собственным значениям из Λ, а Q_Λ — некоторое дополнительное пространство такое, что $T(t)Q_\Lambda \subseteq Q_\Lambda$. Для того чтобы охарактеризовать эти подпространства более точно, определим $(m \times N)$-матрицу $\Phi(\theta)$, по столбцам которой расположены обобщенные собственные функции $\varphi_1(\theta), \ldots, \varphi_N(\theta)$ оператора A, отвечающие собственным числам из Λ. Таким образом, столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис подпространства P_Λ. Далее, пусть $\Psi(\xi)$ — $(N \times m)$-матрица, по строкам которые расположены базисные функции $\psi_1(\xi), \ldots, \psi_N(\xi)$ прямой суммы обобщенных собственных подпространств P_Λ^T оператора A^*, формально сопряженного к A относительно билинейной формы (6.1.13). Матрицы $\Phi(\theta)$ и $\Psi(\xi)$ могут быть выбраны таким образом, что

$$\big(\Psi(\xi), \Phi(\theta)\big) = \big\{\big(\psi_i(\xi), \varphi_j(\theta)\big)\big\}_{1 \le i,j \le N} = I. \tag{6.1.16}$$

Поскольку $\Phi(\theta)$ — базис P_Λ и $AP_\Lambda \subseteq P_\Lambda$, то существует такая $(N \times N)$-матрица D, спектром которой является множество Λ, что $A\Phi(\theta) = \Phi(\theta)D$. Тогда, учитывая определение оператора A, а также соотношения (6.1.9), имеем

$$\Phi(\theta) = \Phi(0)e^{D\theta}, \qquad T(t)\Phi(\theta) = \Phi(\theta)e^{Dt} = \Phi(0)e^{D(t+\theta)}, \tag{6.1.17}$$

где $-h \le \theta \le 0$ и $t \ge 0$. Аналогично для матрицы $\Psi(\xi)$ получаем

$$\Psi(\xi) = e^{-D\xi}\Psi(0), \tag{6.1.18}$$

где $0 \le \xi \le h$. Матрицы $\Phi(0)$ и $\Psi(0)$ выбираются из следующих соображений. Столбцы матрицы $\Phi(\theta)$ являются обобщенными собственными векторами инфинитезимального производящего оператора A, а, следовательно, они принадлежат $D(A)$. Значит,

$$\Phi'(0) = \Phi(0)D = B_0\Phi = \int_{-h}^{0} d\eta(\theta)\Phi(0)e^{D\theta}. \tag{6.1.19}$$

Аналогично, учитывая (6.1.12) и (6.1.18), выводим

$$\Psi'(0) = -D\Psi(0) = -\int_{-h}^{0} e^{D\theta}\Psi(0)d\eta(\theta). \tag{6.1.20}$$

Возвращаясь теперь к разложению (6.1.15), мы можем описать пространства P_Λ и Q_Λ следующим образом:

$$\begin{aligned} P_\Lambda &= \big\{\varphi \in C_h \;\big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)a,\ a \in \mathbb{C}^N\big\}, \\ Q_\Lambda &= \big\{\varphi \in C_h \;\big|\; (\Psi, \varphi) = 0\big\}. \end{aligned} \tag{6.1.21}$$

Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (6.1.1) с начальным условием $x_{t_0} = \varphi$. Имеет место так называемая формула вариации произвольных постоянных (см. [115]):

$$x_t(\theta) = T(t-t_0)\varphi + \int_{t_0}^{t} dK(t,s)G(s,x_s)ds, \qquad t \geq t_0. \tag{6.1.22}$$

Здесь $(m \times m)$-матрица $K(t,\cdot) : [t_0, t] \to C_h$ задается формулой

$$K(t,s)(\theta) = \int_{t_0}^{s} X(t+\theta-\alpha)d\alpha, \tag{6.1.23}$$

где $X(t)$ — единственное матричное решение системы (6.1.7) с начальным условием при $t = 0$ определяемым формулой

$$X_0(\theta) = \begin{cases} I, & \theta = 0, \\ 0, & -h \leq \theta < 0. \end{cases} \tag{6.1.24}$$

Формуле (6.1.22) можно придать формальный вид (см. [55])

$$x_t(\theta) = T(t-t_0)\varphi + \int_{t_0}^{t} T(t-s)X_0(\theta)G(s,x_s)ds, \qquad t \geq t_0, \tag{6.1.25}$$

где $T(t-s)X_0(\theta) = X(t+\theta-s)$.

Разложим теперь решение $x_t(\theta)$ системы (6.1.1) с начальным условием $x_{t_0} = \varphi$, используя представление (6.1.15). Тогда с учетом (6.1.22) получаем

$$x_t(\theta) = x_t^{P_\Lambda} + x_t^{Q_\Lambda}, \quad \varphi(\theta) = \varphi^{P_\Lambda} + \varphi^{Q_\Lambda}, \tag{6.1.26}$$

$$x_t^{P_\Lambda}(\theta) = T(t-t_0)\varphi^{P_\Lambda} + \int_{t_0}^{t} T(t-s)X_0^{P_\Lambda}(\theta)G(s,x_s)ds, \tag{6.1.27}$$

$$x_t^{Q_\Lambda}(\theta) = T(t-t_0)\varphi^{Q_\Lambda} + \int_{t_0}^{t} d\big[K(t,s)^{Q_\Lambda}\big]G(s,x_s)ds, \tag{6.1.28}$$

где $t \geq t_0$ и

$$X_0^{P_\Lambda}(\theta) = \Phi(\theta)\Psi(0), \quad K(t,s)^{Q_\Lambda} = K(t,s) - \Phi(\theta)\big(\Psi, K(t,s)\big). \tag{6.1.29}$$

Осуществляя разложение (6.1.26) в формуле (6.1.25), заключаем, что справедливы представления, аналогичные (6.1.27), (6.1.28) с заменой представления (6.1.28) на следующее:

$$x_t^{Q_\Lambda}(\theta) = T(t-t_0)\varphi^{Q_\Lambda} + \int_{t_0}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G(s,x_s)ds, \tag{6.1.30}$$

где $X_0^{Q_\Lambda} = X_0(\theta) - X_0^{P_\Lambda}(\theta)$. Представлением (6.1.30), как правило, удобнее пользоваться при вычислениях. При этом для придания необходимой строгости в получаемых подынтегральных выражениях следует заменять члены вида $T(t-s)X_0(\theta)(\ldots)ds$ на $dK(t,s)(\theta)(\ldots)$. Положим

$$x_t^{P_\Lambda}(\theta) = \Phi(\theta)u(t), \qquad u(t) \in \mathbb{C}^N, \tag{6.1.31}$$

тогда $u(t) = (\Psi, x_t)$ и, кроме того, функция $u(t)$ удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = Du + \Psi(0)G(t, x_t), \qquad t \geq t_0 \tag{6.1.32}$$

с начальным условием $u(t_0) = (\Psi, \varphi)$.

Пусть множество Λ определено формулой (6.1.14). Предположим, что множество Λ совпадает со множеством

$$\big\{\lambda \in \mathbb{C} \;\big|\; \det\Delta(\lambda) = 0,\ \operatorname{Re}\lambda > \beta\big\} \tag{6.1.33}$$

для некоторого $\beta \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа $M = M(\varepsilon)$ такая, что имеют место следующие неравенства:

$$\|T(t)\varphi^{Q_\Lambda}\|_{C_h} \leq Me^{(\beta+\varepsilon)t}\|\varphi^{Q_\Lambda}\|_{C_h}, \quad t \geq 0,\ \varphi \in C_h, \tag{6.1.34}$$

$$\|T(t)X_0^{Q_\Lambda}\|_{C_h} \leq Me^{(\beta+\varepsilon)t}, \quad t \geq 0, \tag{6.1.35}$$

$$\Big\|\int_{t_0}^{t} d\big[K(t,s)^{Q_\Lambda}\big]G(s,x_s)ds\Big\|_{C_h} \leq M\int_{t_0}^{t} e^{(\beta+\varepsilon)(t-s)}\big|G(s,x_s)\big|ds, \quad t \geq t_0. \tag{6.1.36}$$

Отметим, что в левой части неравенства (6.1.35) функция $T(t)X_0^{Q_\Lambda}$ принадлежит пространству C_h лишь при $t \geq h$. Тем не менее оценка левой части (6.1.35) по норме пространства C_h допустима в силу ограниченности функции $T(t)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)$ по $\theta \in [-h, 0]$, если $t \in [0, h]$.

6.2 Построение критического многообразия

Определим множество Λ согласно (6.1.14) так, что:

$\mathbf{H_1}$. $\operatorname{Re}\lambda = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$;

$\mathbf{H_2}$. Множество Λ совпадает со множеством (6.1.33) для некоторого $\beta < 0$.

Заметим, что если в исходной системе вида (6.1.1) гипотезы $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$ оказываются изначально не выполненными, то всегда можно осуществить замену переменной, положив $x(t) = y(t)e^{dt}$, где

$$d = \sup\big\{\operatorname{Re}\lambda \;\big|\; \det\Delta(\lambda) = 0\big\}.$$

Преобразованная система будет иметь ту же структуру, что и исходная, и, кроме того, в ней будут выполнены гипотезы $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$.

Разложим пространство C_h по Λ в прямую сумму (6.1.15).

Определение 6.2.1. *Будем говорить, что множество (линейное пространство) $\mathcal{W}(t) \subset C_h$ при $t \geq t_* \geq t_0$ является критическим многообразием для системы* (6.1.1)*, если выполнены следующие условия:*

1. Существует $(m \times N)$-матрица $H(t,\theta)$ непрерывная по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ такая, что ее столбцы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \geq t_*$ и, кроме того, $\|H(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t,\cdot)\|_{C_h} = \sup_{-h \leq \theta \leq 0} |H(t,\theta)|$$

и $|\cdot|$ — некоторая матричная норма в пространстве $(m \times N)$-матриц;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \geq t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{ \varphi(\theta) \in C_h \;\Big|\; \varphi(\theta) = \Phi(\theta)u + H(t,\theta)u,\ u \in \mathbb{C}^N \Big\}, \tag{6.2.1}$$

где столбцы $(m \times N)$-матрицы $\Phi(\theta)$ образуют базис в пространстве P_Λ из (6.1.15)*;*

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t \geq t_*$ положительно инвариантно относительно траекторий системы (6.1.1)*, т. е. если $x_T \in \mathcal{W}(T)$, $T \geq t_*$, то $x_t \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq T$.*

Будем далее предполагать, что критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ для системы (6.1.1) существует при достаточно больших t, отложив вопрос обоснования этого утверждения до следующего раздела. Алгоритм, описанный ниже, во многом совпадает со схемой построения приближения для центрального многообразия в нелинейных системах ФДУ (см., например, [65]). Далее мы предложим метод построения в некотором смысле главной части матрицы $H(t,\theta)$ из (6.2.1).

Пусть $x(t)$ — решение системы (6.1.1) с начальным условием при $t = T \geq t_* \geq t_0$. Тогда при $t + \theta \geq T$ справедливы равенства

$$\frac{d}{dt}x_t(\theta) = \begin{cases} \dfrac{d}{d\theta}x_t(\theta), & -h \leq \theta < 0, \\ B_0 x_t + G(t, x_t), & \theta = 0. \end{cases} \tag{6.2.2}$$

Предположим, что в начальный момент $t = T$ вектор-функция $x_T(\theta)$ принадлежит многообразию $\mathcal{W}(T)$. В силу положительной инвариантности $\mathcal{W}(t)$ имеем

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + H(t,\theta)u(t), \qquad t \geq T, \quad u(t) \in \mathbb{C}^N. \tag{6.2.3}$$

Заметим, что формула (6.2.3) представляет собой разложение (6.1.26) и, следовательно, функция $u(t)$ в силу (6.1.32) удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = \Big[D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\Big]u, \qquad t \geq T. \tag{6.2.4}$$

Эту систему будем называть проекций системы (6.1.1) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или, короче, *системой на критическом многообразии*. Подставим разложение (6.2.3) в (6.2.2). Получим при $t + \theta \geq T$

$$\big(\Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\dot{u}(t) + \frac{\partial H}{\partial t}u = \begin{cases} \Big[\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \dfrac{\partial H}{\partial \theta}\Big]u, & -h \leq \theta < 0, \\ \big[B_0\Phi + B_0 H + G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\big]u, & \theta = 0. \end{cases}$$

Подставим в это выражение представление для $\dot{u}$ из (6.2.4) и учтем (6.1.17), (6.1.19). Окончательно получаем

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big) + H(t,\theta)\left(D + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \theta}, & -h \leq \theta < 0, \\ B_0 H + G\big(t, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big), & \theta = 0. \end{cases} \tag{6.2.5}$$

Следовательно, если критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ существует при $t \geq t_*$, то для всех (t,θ) таких, что $t+\theta \geq t_*$, матрица $H(t,\theta)$, определяющая это многообразие, должна удовлетворять системе (6.2.5). В частности, из (6.2.3) и абсолютной непрерывности решения $x(t)$ ($x_{t_*} = \varphi \in \mathcal{W}(t)$) при $t \geq t_*$ следует абсолютная непрерывность $H(t,\theta)$ по переменной t при $t \geq t_* - \theta$ и переменной θ для $\theta \geq t_* - t$.

Попытаемся удовлетворить системе (6.2.5) с точностью до слагаемых $\hat{R}(t,\theta)$ таких, что $\|\hat{R}(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_0,\infty)$. Именно, положим

$$\hat{H}(t,\theta) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)H_i(t,\theta) + \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)H_{i_1 i_2}(t,\theta) + \ldots + \\ + \sum_{1\leq i_1\leq \ldots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)H_{i_1\ldots i_k}(t,\theta). \tag{6.2.6}$$

Здесь элементы подлежащих определению $(m \times N)$-матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$ являются тригонометрическими многочленами переменной t и непрерывно дифференцируемы по $\theta \in [-h,0]$, а величина $k \in \mathbb{N}$ определена свойством B.4 функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$. Кроме того, мы будем предполагать, что столбцы матриц $H_{i_1\ldots i_l}(t,\theta)$ принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \in \mathbb{R}$. Подставим выражение (6.2.6) в (6.2.5) вместо $H(t,\theta)$ и соберем слагаемые при одинаковых множителях $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$ ($l \leq k$). Получаем следующие однотипные системы для

определения матриц $H_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$:

$$F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)+H_{i_1\dots i_l}(t,\theta)D+F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)+\frac{\partial H_{i_1\dots i_l}}{\partial t}= \\ =\begin{cases}\dfrac{\partial H_{i_1\dots i_l}}{\partial\theta}, & -h\le\theta<0,\\ B_0H_{i_1\dots i_l}+G_{i_1\dots i_l}(t), & \theta=0.\end{cases} \tag{6.2.7}$$

Здесь мы учли формулы (6.1.2), (6.1.4), из которых, в частности, следует, что для решения системы (6.2.7) необходимо определить сначала все матрицы $H_{j_1\dots j_s}(t,\theta)$, для которых $s<l$. Тогда в системе (6.2.7) $F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ и $F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ — некоторые конкретные матрицы, которые, в частности, содержат в себе информацию об определенных ранее матрицах $H_{j_1\dots j_s}(t,\theta)$ $(s<l)$. В силу (6.1.2), (6.1.4), (6.1.5) и требований относительно матриц $H_{j_1\dots j_s}(t,\theta)$ $(s<l)$ мы можем заключить, что элементы матриц $F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ и $F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ являются тригонометрическими многочленами переменной t. Кроме того, столбцы матрицы $F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ принадлежат пространству P_Λ, а столбцы матрицы $F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ принадлежат пространству Q_Λ при всех $t\in\mathbb{R}$. Далее, $G_{i_1\dots i_l}(t)$ — некоторая матрица, элементами которой являются тригонометрические многочлены:

$$G_{i_1\dots i_l}(t)=\sum_j G_j^{(i_1\dots i_l)}e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \tag{6.2.8}$$

где $G_j^{(i_1\dots i_l)}$ — постоянные $(m\times N)$-матрицы, а ω_j — вещественные числа. Для матриц $F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ и $F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ в силу (6.2.5) имеем следующие представления:

$$F^{P_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)=\Phi(\theta)\Psi(0)G_{i_1\dots i_l}(t)=\sum_j P_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \tag{6.2.9}$$

$$P_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)=\Phi(\theta)\Psi(0)G_j^{(i_1\dots i_l)}, \tag{6.2.10}$$

$$F^{Q_\Lambda}_{i_1\dots i_l}(t,\theta)=\sum_j Q_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \tag{6.2.11}$$

где $P_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)$ и $Q_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые на отрезке $-h\le\theta\le 0$ матрицы.

Будем искать решение системы (6.2.7) в следующем виде:

$$H_{i_1\dots i_l}(t,\theta)=\sum_j \beta_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \tag{6.2.12}$$

где $\beta_j^{(i_1\dots i_l)}(\theta)$ — $(m\times N)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $-h\le\theta\le 0$ матрицы, подлежащие определению. Подставим (6.2.8)–(6.2.12) в (6.2.7) и соберем слагаемые при одинаковых показателях экспоненты. Опустив для краткости записи обозначение зависимости матриц от набора индексов $(i_1\dots i_l)$ и индекса j, получим следующую систему для

определения матрицы $\beta(\theta) = \beta_j^{(i_1 \dots i_l)}(\theta)$:

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta}{d\theta} = \beta(\theta)(D + \mathrm{i}\omega_j I) + P(\theta) + Q(\theta), & -h \le \theta < 0, \\ \beta(0)(D + \mathrm{i}\omega_j I) + P(0) + Q(0) = B_0\beta + G, \end{cases} \tag{6.2.13}$$

где $P(\theta) = P_j^{(i_1 \dots i_l)}(\theta)$, $Q(\theta) = Q_j^{(i_1 \dots i_l)}(\theta)$ и $G = G_j^{(i_1 \dots i_l)}$. Отметим, что в силу непрерывности решения $\beta(\theta)$ системы (6.2.13) на отрезке $-h \le \theta \le 0$ первое уравнение должно решаться с начальным условием $\beta(0)$, определяемым из второго уравнения этой системы. Нам также следует учесть требование того, чтобы столбцы матрицы $\beta(\theta)$ принадлежали пространству Q_Λ. Следовательно, в силу (6.1.21), система (6.2.13) должна решаться с дополнительным условием

$$\big(\Psi(\xi), \beta(\theta)\big) = 0. \tag{6.2.14}$$

Пусть матрица D, спектром которой является множество Λ, имеет жорданову форму

$$D = \operatorname{diag}(D^{(1)}, \dots, D^{(l)}), \qquad D^{(i)} = \begin{pmatrix} \lambda^{(i)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^{(i)} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda^{(i)} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda^{(i)} \end{pmatrix}, \tag{6.2.15}$$

где $\lambda^{(i)} \in \Lambda$, $D^{(i)}$ — $(N_i \times N_i)$-матрица и $N_1 + \dots + N_l = N$. Далее, матрицы $\beta(\theta)$, $P(\theta)$, $Q(\theta)$ и G представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \beta(\theta) &= \big[\beta^{(1)}(\theta), \dots, \beta^{(l)}(\theta)\big], \qquad P(\theta) = \big[P^{(1)}(\theta), \dots, P^{(l)}(\theta)\big], \\ Q(\theta) &= \big[Q^{(1)}(\theta), \dots, Q^{(l)}(\theta)\big], \qquad G = \big[G^{(1)}, \dots, G^{(l)}\big], \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

где $\beta^{(i)}(\theta)$, $P^{(i)}(\theta)$, $Q^{(i)}(\theta)$, $G^{(i)}$ — $(m \times N_i)$-матрицы, а символом $[\cdot, \dots, \cdot]$ обозначена матрица, составленная объединением столбцов указанных в квадратных скобках матриц (слева направо в естественном порядке). Тогда систему (6.2.13), (6.2.14) можно представить в виде l независимых подсистем вида:

$$\begin{cases} \dfrac{d\beta^{(i)}}{d\theta} = \beta^{(i)}(\theta)(D^{(i)} + \mathrm{i}\omega_j I) + P^{(i)}(\theta) + Q^{(i)}(\theta), & -h \le \theta < 0, \\ \beta^{(i)}(0)(D^{(i)} + \mathrm{i}\omega_j I) + P^{(i)}(0) + Q^{(i)}(0) = B_0\beta^{(i)} + G^{(i)}, \\ \big(\Psi(\xi), \beta^{(i)}(\theta)\big) = 0. \end{cases} \tag{6.2.17}$$

где I — единичная матрица порядка N_i и $i = 1, \dots, l$. Наконец, пусть

$$\begin{aligned} \beta^{(i)}(\theta) &= \big[z_1^{(i)}(\theta), \dots, z_{N_i}^{(i)}(\theta)\big], \qquad P^{(i)}(\theta) = \big[p_1^{(i)}(\theta), \dots, p_{N_i}^{(i)}(\theta)\big], \\ Q^{(i)}(\theta) &= \big[q_1^{(i)}(\theta), \dots, q_{N_i}^{(i)}(\theta)\big], \qquad G^{(i)} = \big[g_1^{(i)}, \dots, g_{N_i}^{(i)}\big], \end{aligned} \tag{6.2.18}$$

где $z_s^{(i)}(\theta)$, $p_s^{(i)}(\theta)$, $q_s^{(i)}(\theta)$, $g_s^{(i)}$ $(s=1,\dots,N_i)$ — вектор-столбцы высоты m. Обозначим через

$$\begin{gathered}\tilde{Z}^{(i)}(\theta)=\operatorname{col}\bigl(z_1^{(i)}(\theta),\dots,z_{N_i}^{(i)}(\theta)\bigr),\qquad \tilde{P}^{(i)}(\theta)=\operatorname{col}\bigl(p_1^{(i)}(\theta),\dots,p_{N_i}^{(i)}(\theta)\bigr),\\ \tilde{Q}^{(i)}(\theta)=\operatorname{col}\bigl(q_1^{(i)}(\theta),\dots,q_{N_i}^{(i)}(\theta)\bigr),\qquad \tilde{G}^{(i)}=\operatorname{col}\bigl(g_1^{(i)},\dots,g_{N_i}^{(i)}\bigr),\\ B_0\tilde{Z}^{(i)}=\operatorname{col}\bigl(B_0z_1^{(i)},\dots,B_0z_{N_i}^{(i)}\bigr)\end{gathered}\tag{6.2.19}$$

вектор-столбцы высоты mN_i, составленные из указанных векторов, расположенных сверху вниз в естественном порядке. В новых обозначениях система (6.2.17) запишется в виде:

$$\begin{cases}\dfrac{d\tilde{Z}^{(i)}}{d\theta}=\mathbf{A}^{(i)}\tilde{Z}^{(i)}(\theta)+\tilde{P}^{(i)}(\theta)+\tilde{Q}^{(i)}(\theta), & -h\le\theta<0,\\ \mathbf{A}^{(i)}\tilde{Z}^{(i)}(0)+\tilde{P}^{(i)}(0)+\tilde{Q}^{(i)}(0)=B_0\tilde{Z}^{(i)}+G^{(i)},\\ \bigl(\Psi(\xi),z_s^{(i)}(\theta)\bigr)=0, & s=1,\dots,N_i,\end{cases}\tag{6.2.20}$$

где $\mathbf{A}$ — $(mN_i\times mN_i)$-матрица, определяемая формулой

$$\mathbf{A}^{(i)}=\begin{pmatrix}\mu^{(i)}I & 0 & \dots & \dots & 0\\ I & \mu^{(i)}I & 0 & \dots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & I & \mu^{(i)}I & 0\\ 0 & \dots & 0 & I & \mu^{(i)}I\end{pmatrix},\qquad \mu^{(i)}=\lambda^{(i)}+\mathrm{i}\omega_j,\tag{6.2.21}$$

в которой I — $(m\times m)$-единичная матрица.

Решая первое уравнение системы (6.2.20), имеем

$$\tilde{Z}^{(i)}(\theta)=e^{\mathbf{A}^{(i)}\theta}\tilde{Z}^{(i)}(0)+\int_0^\theta e^{\mathbf{A}^{(i)}(\theta-s)}\bigl(\tilde{P}^{(i)}(s)+\tilde{Q}^{(i)}(s)\bigr)ds,\quad -h\le\theta<0.\tag{6.2.22}$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (6.2.20), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных $\tilde{Z}^{(i)}(0)$:

$$\bigl(\mathbf{A}^{(i)}-B_0e^{\mathbf{A}^{(i)}\theta}\bigr)\tilde{Z}^{(i)}(0)=B_0\Bigl(\int_0^\theta e^{\mathbf{A}^{(i)}(\theta-s)}\bigl(\tilde{P}^{(i)}(s)+\tilde{Q}^{(i)}(s)\bigr)ds\Bigr)+G^{(i)}-\tilde{P}^{(i)}(0)-\tilde{Q}^{(i)}(0).\tag{6.2.23}$$

Здесь оператор B_0 применяется к столбцам $(mN_i\times mN_i)$-матрицы $e^{\mathbf{A}^{(i)}\theta}$ аналогично (6.2.19). Заметим, что

$$e^{\mathbf{A}^{(i)}\theta}=\begin{pmatrix}I & 0 & \dots & \dots & 0\\ \theta I & I & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \frac{\theta^{N_i-2}}{(N_i-2)!}I & \dots & \theta I & I & 0\\ \frac{\theta^{N_i-1}}{(N_i-1)!}I & \frac{\theta^{N_i-2}}{(N_i-2)!}I & \dots & \theta I & I\end{pmatrix}e^{\mu^{(i)}\theta}.$$

Вспоминая формулы (6.1.10), (6.1.11), введенные нами обозначения (6.2.19), а также третье требование в (6.2.20), приходим к следующему набору задач для нахождения неизвестных векторов $z_1^{(i)}(0), \dots, z_{N_i}^{(i)}(0)$ $(i = 1, \dots, l)$.

$\mathbf{P_1}$:

$$\begin{cases} \Delta(\mu^{(i)}) z_1^{(i)}(0) = B_0 \Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \big(p_1^{(i)}(s) + q_1^{(i)}(s) \big) ds \Big) + g_1^{(i)} - p_1^{(i)}(0) - q_1^{(i)}(0), \\ \big(\Psi(\xi), e^{\mu^{(i)}\theta} I \big) z_1^{(i)}(0) = - \Big(\Psi(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \big(p_1^{(i)}(s) + q_1^{(i)}(s) \big) ds \Big); \end{cases} \tag{6.2.24}$$

$\mathbf{P_2}$:

$$\begin{cases} \Delta'(\mu^{(i)}) z_1^{(i)}(0) + \Delta(\mu^{(i)}) z_2^{(i)}(0) = B_0 \Bigg(\int\limits_0^\theta \Big((\theta - s) e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \big(p_1^{(i)}(s) + q_1^{(i)}(s) \big) + \\ + e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \big(p_2^{(i)}(s) + q_2^{(i)}(s) \big) \Big) ds \Bigg) + g_2^{(i)} - p_2^{(i)}(0) - q_2^{(i)}(0), \\ \big(\Psi(\xi), \theta e^{\mu^{(i)}\theta} I \big) z_1^{(i)}(0) + \big(\Psi(\xi), e^{\mu^{(i)}\theta} I \big) z_2^{(i)}(0) = \\ = - \Big(\Psi(\xi), \int\limits_0^\theta (\theta - s) e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \big(p_1^{(i)}(s) + q_1^{(i)}(s) \big) ds \Big) - \Big(\Psi(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \big(p_2^{(i)}(s) + q_2^{(i)}(s) \big) ds \Big); \end{cases} \tag{6.2.25}$$

$\dots \quad \dots \quad \dots$

$\mathbf{P_{N_i}}$:

$$\begin{cases} \frac{\Delta^{(N_i - 1)}(\mu^{(i)})}{(N_i - 1)!} z_1^{(i)}(0) + \dots + \Delta'(\mu^{(i)}) z_{N_i - 1}^{(i)}(0) + \Delta(\mu^{(i)}) z_{N_i}^{(i)}(0) = B_0 \Bigg(\int\limits_0^\theta \Big(\frac{(\theta - s)^{N_i - 1}}{(N_i - 1)!} e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \times \\ \times \big(p_1^{(i)}(s) + q_1^{(i)}(s) \big) + \dots + e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \big(p_{N_i}^{(i)}(s) + q_{N_i}^{(i)}(s) \big) \Big) ds \Bigg) + g_{N_i}^{(i)} - p_{N_i}^{(i)}(0) - q_{N_i}^{(i)}(0), \\ \big(\Psi(\xi), \frac{\theta^{N_i - 1}}{(N_i - 1)!} e^{\mu^{(i)}\theta} I \big) z_1^{(i)}(0) + \dots + \big(\Psi(\xi), \theta e^{\mu^{(i)}\theta} I \big) z_{N_i - 1}^{(i)}(0) + \big(\Psi(\xi), e^{\mu^{(i)}\theta} I \big) z_{N_i}^{(i)}(0) = \\ = - \Big(\Psi(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta - s)^{N_i - 1}}{(N_i - 1)!} e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \big(p_1^{(i)}(s) + q_1^{(i)}(s) \big) ds \Big) - \dots - \\ - \Big(\Psi(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu^{(i)}(\theta - s)} \big(p_{N_i}^{(i)}(s) + q_{N_i}^{(i)}(s) \big) ds \Big). \end{cases} \tag{6.2.26}$$

Теперь мы можем сформулировать основной результат этого раздела.

Теорема 6.2.1. *Система уравнений* (6.2.20) *имеет единственное непрерывно дифференцируемое на отрезке* $-h \le \theta \le 0$ *решение* $\tilde{Z}^{(i)}(\theta)$ $(i = 1, \dots, l)$. *Это решение задается формулой* (6.2.22), *где компоненты вектора начальных условий* $\tilde{Z}^{(i)}(0)$ *однозначно определяются как решения задач* $\mathbf{P_1}, \dots, \mathbf{P_{N_i}}$.

Заметим, что непрерывная дифференцируемость решения $\tilde{Z}^{(i)}(\theta)$ есть простое следствие формулы (6.2.22) и гладкости функций $\tilde{P}^{(i)}(\theta)$, $\tilde{Q}^{(i)}(\theta)$ на отрезке $-h \le \theta \le 0$. Более того, эти функции имеют бесконечную гладкость, поскольку элементы матрицы $\Phi(\theta)$ бесконечно

дифференцируемы. Следовательно, решение $\tilde{Z}^{(i)}(\theta)$ имеет бесконечную гладкость на отрезке $-h \le \theta \le 0$.

Перед тем как приступить к доказательству теоремы 6.2.1 нам потребуется ввести еще несколько обозначений и установить справедливость двух вспомогательных утверждений. Аналогично (6.2.16), (6.2.18) представим $(m \times N)$-матрицу $\Phi(\theta)$, по столбцам которой расположены базисные функции пространства P_Λ, в следующем виде:

$$\Phi(\theta) = \big[\Phi^{(1)}(\theta), \dots, \Phi^{(l)}(\theta)\big], \qquad \Phi^{(p)}(\theta) = \big[\varphi_1^{(p)}(\theta), \dots, \varphi_{N_p}^{(p)}(\theta)\big], \tag{6.2.27}$$

где $\Phi^{(p)}(\theta)$ — $(m \times N_p)$-матрицы, а $\varphi_s^{(p)}(\theta)$ — вектор-столбцы высоты m. Тогда, учитывая (6.2.15), а также формулы (6.1.17), (6.1.19), получаем

$$\Phi^{(p)}(\theta) = \Phi^{(p)}(0)e^{D^{(p)}\theta}, \quad \Phi^{(p)}(0)D^{(p)} - \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)\Phi^{(p)}(0)e^{D^{(p)}\theta} = 0, \quad -h \le \theta \le 0. \tag{6.2.28}$$

Откуда с учетом (6.1.10), (6.1.11) заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\varphi_1^{(p)}(\theta) = \varphi_1^{(p)}(0)e^{\lambda^{(p)}\theta},\\
&\varphi_2^{(p)}(\theta) = \big(\varphi_1^{(p)}(0)\theta + \varphi_2^{(p)}(0)\big)e^{\lambda^{(p)}\theta},\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&\varphi_{N_p}^{(p)}(\theta) = \Big(\varphi_1^{(p)}(0)\frac{\theta^{N_p-1}}{(N_p-1)!} + \dots + \varphi_{N_p-1}^{(p)}(0)\theta + \varphi_{N_p}^{(p)}(0)\Big)e^{\lambda^{(p)}\theta},
\end{aligned} \tag{6.2.29}$$

а векторы $\varphi_1^{(p)}(0), \dots, \varphi_{N_p}^{(p)}(0)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
&\Delta(\lambda^{(p)})\varphi_1^{(p)}(0) = 0,\\
&\Delta'(\lambda^{(p)})\varphi_1^{(p)}(0) + \Delta(\lambda^{(p)})\varphi_2^{(p)}(0) = 0,\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&\frac{\Delta^{(N_p-1)}(\lambda^{(p)})}{(N_p-1)!}\varphi_1^{(p)}(0) + \dots + \Delta'(\lambda^{(p)})\varphi_{N_p-1}^{(p)}(0) + \Delta(\lambda^{(p)})\varphi_{N_p}^{(p)}(0) = 0.
\end{aligned} \tag{6.2.30}$$

Аналогичные действия осуществим с $(N \times m)$-матрицей $\Psi(\xi)$, по строкам которой расположены базисные функции пространства P_Λ^T. Имеем,

$$\Psi(\xi) = \operatorname{col}(\Psi^{(1)}(\xi), \dots, \Psi^{(l)}(\xi)\big), \qquad \Psi^{(p)}(\xi) = \operatorname{col}\big(\psi_1^{(p)}(\xi), \dots, \psi_{N_p}^{(p)}(\xi)\big), \tag{6.2.31}$$

где $\Psi^{(p)}(\xi)$ — $(N_p \times m)$-матрицы, а $\psi_s^{(p)}(\xi)$ — вектор-строки длины m. Учитывая затем (6.2.15), а также формулы (6.1.18), (6.1.20), получаем

$$\Psi^{(p)}(\xi) = e^{-D^{(p)}\xi}\Psi^{(p)}(0), \quad D^{(p)}\Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta) = 0, \quad 0 \le \xi \le h. \tag{6.2.32}$$

Отсюда, вспоминая (6.1.10), (6.1.11), выводим

$$\begin{aligned}
&\psi^{(p)}_{N_p}(\xi) = \psi^{(p)}_{N_p}(0)e^{-\lambda^{(p)}\xi},\\
&\psi^{(p)}_{N_p-1}(\xi) = \big(\psi^{(p)}_{N_p}(0)(-\xi) + \psi^{(p)}_{N_p-1}(0)\big)e^{-\lambda^{(p)}\xi},\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&\psi^{(p)}_{1}(\xi) = \Big(\psi^{(p)}_{N_p}(0)\frac{(-\xi)^{N_p-1}}{(N_p-1)!} + \dots + \psi^{(p)}_{2}(0)(-\xi) + \psi^{(p)}_{1}(0)\Big)e^{-\lambda^{(p)}\xi}.
\end{aligned} \tag{6.2.33}$$

Векторы $\psi^{(p)}_1(0),\dots,\psi^{(p)}_{N_p}(0)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
&\psi^{(p)}_{N_p}(0)\Delta(\lambda^{(p)}) = 0,\\
&\psi^{(p)}_{N_p}(0)\Delta'(\lambda^{(p)}) + \psi^{(p)}_{N_p-1}(0)\Delta(\lambda^{(p)}) = 0,\\
&\dots \quad \dots \quad \dots\\
&\frac{\psi^{(p)}_{N_p}(0)\Delta^{(N_p-1)}(\lambda^{(p)})}{(N_p-1)!} + \dots + \psi^{(p)}_{2}(0)\Delta'(\lambda^{(p)}) + \psi^{(p)}_{1}(0)\Delta(\lambda^{(p)}) = 0.
\end{aligned} \tag{6.2.34}$$

Имеют место следующие утверждения.

Утверждение 6.2.1. *Пусть $\mu \neq \lambda^{(p)}$ для некоторого $p = 1,\dots,l$. Тогда для любой $f(\theta) \in C_h$ и любого $\nu \in \mathbb{N}$ справедливы формулы:*

$$\begin{aligned}
&\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) = -(\mu I - D^{(p)})^{-1}\Big[\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) +\\
&+ \big(\Psi^{(p)}(\xi), f(\theta)\big) - \Psi^{(p)}(0)f(0)\Big],
\end{aligned} \tag{6.2.35}$$

$$\begin{aligned}
&\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int_0^\theta \frac{(\theta-s)^\nu}{\nu!}e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) = -(\mu I - D^{(p)})^{-1}\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int_0^\theta \frac{(\theta-s)^\nu}{\nu!}e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) +\\
&+ (\mu I - D^{(p)})^{-2}\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int_0^\theta \frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) + \dots +\\
&+ (-1)^{\nu+1}(\mu I - D^{(p)})^{-(\nu+1)}\Big[\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) + \big(\Psi^{(p)}(\xi), f(\theta)\big) - \Psi^{(p)}(0)f(0)\Big].
\end{aligned} \tag{6.2.36}$$

Доказательство. Имеем,

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) = -\int_{-h}^0\int_0^\theta e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)\int_0^\xi e^{\mu(\xi-s)}f(s)ds\,d\xi =$$

$$= -\int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta} \int\limits_{0}^{\theta} e^{(\mu I - D^{(p)})\xi} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) \int\limits_{0}^{\xi} e^{-\mu s} f(s) ds\, d\xi.$$

Интегрируя по частям средний из интегралов, получаем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_{0}^{\theta} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds\Big) = -(\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta) \int\limits_{0}^{\theta} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds +$$

$$+ (\mu I - D^{(p)})^{-1} \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{0}^{\theta} e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) f(\xi) d\xi.$$

В силу (6.1.10) и (6.1.13) устанавливаем справедливость формулы (6.2.35). Далее,

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_{0}^{\theta} \frac{(\theta-s)^{\nu}}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds\Big) =$$

$$= -\int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{0}^{\theta} e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) \int\limits_{0}^{\xi} \frac{(\xi-s)^{\nu}}{\nu!} e^{\mu(\xi-s)} f(s) ds\, d\xi =$$

$$= -\int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta} \int\limits_{0}^{\theta} e^{(\mu I - D^{(p)})\xi} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) \int\limits_{0}^{\xi} \frac{(\xi-s)^{\nu}}{\nu!} e^{-\mu s} f(s) ds\, d\xi.$$

Вновь интегрируя по частям средний из интегралов, заключаем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_{0}^{\theta} \frac{(\theta-s)^{\nu}}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds\Big) = -(\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) \int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta) \int\limits_{0}^{\theta} \frac{(\theta-s)^{\nu}}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} \times$$

$$\times f(s) ds + (\mu I - D^{(p)})^{-1} \int\limits_{-h}^{0} \int\limits_{0}^{\theta} e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) \int\limits_{0}^{\xi} \frac{(\xi-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\xi-s)} f(s) ds\, d\xi =$$

$$= -(\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) B_0 \Big(\int\limits_{0}^{\theta} \frac{(\theta-s)^{\nu}}{\nu!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds\Big) -$$

$$- (\mu I - D^{(p)})^{-1} \Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_{0}^{\theta} \frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds\Big).$$

Используя теперь индукцию, выводим формулу (6.2.36). ■

Следствие 6.2.1. *Пусть $\mu \neq \lambda^{(p)}$ для некоторого $p = 1, \ldots, l$. Тогда для любого $\nu \in \mathbb{N}$ справедливы формулы:*

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta} I\big) = (\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) \Delta(\mu), \tag{6.2.37}$$

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \frac{\theta^{\nu}}{\nu!} e^{\mu\theta}\Big) = (\mu I - D^{(p)})^{-1} \Psi^{(p)}(0) \frac{\Delta^{(\nu)}(\mu)}{\nu!} - (\mu I - D^{(p)})^{-2} \Psi^{(p)}(0) \frac{\Delta^{(\nu-1)}(\mu)}{(\nu-1)!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{\nu}(\mu I - D^{(p)})^{-(\nu+1)}\Psi^{(p)}(0)\Delta(\mu). \tag{6.2.38}$$

Из (6.1.13) с учетом (6.2.32) следует, что

$$\begin{aligned}
\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big) &= \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta} e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{\mu\xi}d\xi = \\
&= \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta}\int\limits_{0}^{\theta} e^{(\mu I - D^{(p)})\xi}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)d\xi = \\
&= \Psi^{(p)}(0) - \int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta}(\mu I - D^{(p)})^{-1}\big[e^{(\mu I - D^{(p)})\theta} - I\big]\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta) = \\
&= \Psi^{(p)}(0) - (\mu I - D^{(p)})^{-1}\Psi^{(p)}(0)\int\limits_{-h}^{0} d\eta(\theta)e^{\mu\theta} + (\mu I - D^{(p)})^{-1}\int\limits_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta).
\end{aligned}$$

Заменяя второе слагаемое в последнем выражении в силу первой из формул (6.1.11), а третье — в силу правой из формул (6.2.32), устанавливаем справедливость (6.2.37). Формула (6.2.38) есть простое следствие формулы (6.2.36), если положить в этой формуле $f(\theta) = e^{\mu\theta}I$ и учесть (6.1.10), (6.1.11), а также (6.2.37).

Утверждение 6.2.2. *Пусть $\mu = \lambda^{(p)}$ для некоторого $p = 1, \dots, l$. Тогда для любой $f(\theta) \in C_h$ и любого $\nu \in \mathbb{N}$ справедлива формула:*

$$\begin{aligned}
&\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_{0}^{\theta}\frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) = \\
&= -\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\begin{pmatrix}
\frac{(\theta-\xi)^{\nu}}{\nu!} & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \cdots & \cdots & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+N_p-1}}{(\nu+N_p-1)!} \\
0 & \frac{(\theta-\xi)^{\nu}}{\nu!} & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \cdots & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+N_p-2}}{(\nu+N_p-2)!} \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 & \frac{(\theta-\xi)^{\nu}}{\nu!} & \frac{(\theta-\xi)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \\
0 & \dots & \dots & 0 & \frac{(\theta-\xi)^{\nu}}{\nu!}
\end{pmatrix}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{\mu(\theta-\xi)}f(\xi)d\xi.
\end{aligned} \tag{6.2.39}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_{0}^{\theta}\frac{(\theta-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big) = \\
&= -\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta} e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)\int\limits_{0}^{\xi}\frac{(\xi-s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}e^{\mu(\xi-s)}f(s)ds\,d\xi =
\end{aligned}$$

$$= -\int_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta} \int_{0}^{\theta} e^{(\mu I - D^{(p)})\xi} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) \int_{0}^{\xi} \frac{(\xi - s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{-\mu s} f(s) ds\, d\xi. \quad (6.2.40)$$

Поскольку $\mu = \lambda^{(p)}$, то

$$e^{(\mu I - D^{(p)})\xi} = \sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \frac{\xi^r}{r!}, \quad e^{D^{(p)}\theta} = \sum_{j=0}^{N_p-1} (D^{(p)} - \mu I)^j \frac{\theta^j}{j!} e^{\mu\theta}. \quad (6.2.41)$$

Учитывая левое из равенств (6.2.41) в (6.2.40) и интегрируя по частям средний из интегралов, получаем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int_0^\theta \frac{(\theta - s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds\Big) =$$

$$= -\sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \int_{-h}^{0} \int_{0}^{\theta} e^{D^{(p)}\theta} \frac{\theta^{r+1}}{(r+1)!} \frac{(\theta - \xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) e^{-\mu\xi} f(\xi) d\xi +$$

$$+ \sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \int_{-h}^{0} e^{D^{(p)}\theta} \int_{0}^{\theta} \frac{\xi^{r+1}}{(r+1)!} \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) \int_{0}^{\xi} \frac{(\xi - s)^{\nu-2}}{(\nu-2)!} e^{-\mu s} f(s) ds\, d\xi. \quad (6.2.42)$$

Во втором слагаемом в правой части (6.2.42) вновь проинтегрируем средний из интегралов по частям. Продолжая этот процесс, получаем

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int_0^\theta \frac{(\theta - s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds\Big) =$$

$$= -\sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \int_{-h}^{0} \int_{0}^{\theta} e^{D^{(p)}\theta} \Big(\frac{\theta^{r+1}}{(r+1)!} \frac{(\theta - \xi)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} - \frac{\theta^{r+2}}{(r+2)!} \frac{(\theta - \xi)^{\nu-2}}{(\nu-2)!} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{\nu-1} \frac{\theta^{r+\nu}}{(r+\nu)!} + (-1)^{\nu} \frac{\xi^{r+\nu}}{(r+\nu)!} \Big) \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) e^{-\mu\xi} f(\xi) d\xi. \quad (6.2.43)$$

Учитывая в (6.2.43) правое из равенств (6.2.41), приходим к следующей формуле:

$$\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int_0^\theta \frac{(\theta - s)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{\mu(\theta-s)} f(s) ds\Big) = -\int_{-h}^{0} \int_{0}^{\theta} \sum_{r=0}^{N_p-1} (\mu I - D^{(p)})^r \sum_{j=0}^{N_p-1} (D^{(p)} - \mu I)^j \times$$

$$\times \frac{\theta^j}{j!} \left(\sum_{i=1}^{\nu} \Big((-1)^{i-1} \frac{\theta^{r+i}}{(r+i)!} \frac{(\theta - \xi)^{\nu-i}}{(\nu-i)!} \Big) + (-1)^{\nu} \frac{\xi^{r+\nu}}{(r+\nu)!} \right) \Psi^{(p)}(0) d\eta(\theta) e^{\mu(\theta-\xi)} f(\xi) d\xi. \quad (6.2.44)$$

Далее, перемножим первые две суммы под интегралом в (6.2.44) и обозначим величину $r+j$ вновь за j. Учитывая, что $(\mu I - D^{(p)})^r = 0$ при $r \geq N_p$, и меняя порядок суммирования, приходим к формуле

$$\sum_{r=0}^{N_p-1}(\mu I-D^{(p)})^r\sum_{j=0}^{N_p-1}(D^{(p)}-\mu I)^j\frac{\theta^j}{j!}\left(\sum_{i=1}^{\nu}\Big((-1)^{i-1}\frac{\theta^{r+i}}{(r+i)!}\frac{(\theta-\xi)^{\nu-i}}{(\nu-i)!}\Big)+(-1)^{\nu}\frac{\xi^{r+\nu}}{(r+\nu)!}\right)=$$
$$=\sum_{j=0}^{N_p-1}(D^{(p)}-\mu I)^j\sum_{r=0}^{j}(-1)^r\left(\sum_{i=1}^{\nu}\Big((-1)^{i-1}\frac{\theta^{j+i}(\theta-\xi)^{\nu-i}}{(j-r)!(r+i)!(\nu-i)!}\Big)+(-1)^{\nu}\frac{\theta^{j-r}\xi^{r+\nu}}{(j-r)!(r+\nu)!}\right). \tag{6.2.45}$$

Вычислим внутреннюю сумму в правой части этого выражения

$$S=\sum_{r=0}^{j}(-1)^r\left(\sum_{i=1}^{\nu}\Big((-1)^{i-1}\frac{\theta^{j+i}(\theta-\xi)^{\nu-i}}{(j-r)!(r+i)!(\nu-i)!}\Big)+(-1)^{\nu}\frac{\theta^{j-r}\xi^{r+\nu}}{(j-r)!(r+\nu)!}\right). \tag{6.2.46}$$

Положим $S=S_1+S_2$, где

$$S_1=\sum_{r=0}^{j}\sum_{i=1}^{\nu}(-1)^{r+i-1}\frac{\theta^{j+i}(\theta-\xi)^{\nu-i}}{(j-r)!(r+i)!(\nu-i)!},\quad S_2=\sum_{r=0}^{j}(-1)^{r+\nu}\frac{\theta^{j-r}\xi^{r+\nu}}{(j-r)!(r+\nu)!}. \tag{6.2.47}$$

Обозначая в S_1 величину $r+i$ вновь за i, получаем

$$S_1=\sum_{r=0}^{j}\sum_{i=r+1}^{r+\nu}(-1)^{i-1}\frac{\theta^{j+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(j-r)!i!(\nu-i+r)!}=-\sum_{r=0}^{j}\frac{\theta^{j-r}}{(j-r)!}\left(\frac{(-\xi)^{r+\nu}}{(r+\nu)!}-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{\theta^i(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{i!(\nu-i+r)!}\right)=-\sum_{r=0}^{j}(-1)^{r+\nu}\frac{\theta^{j-r}\xi^{r+\nu}}{(j-r)!(r+\nu)!}+$$
$$+\sum_{r=0}^{j}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{\theta^{j+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(j-r)!i!(\nu-i+r)!}.$$

Учитывая (6.2.47), отсюда выводим

$$S=\sum_{r=0}^{j}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{\theta^{j+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(j-r)!i!(\nu-i+r)!}. \tag{6.2.48}$$

Наконец, осталось показать, что

$$S(j,\nu)=\sum_{r=0}^{j}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{\theta^{j+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(j-r)!i!(\nu-i+r)!}=\frac{(\theta-\xi)^{\nu+j}}{(\nu+j)!}. \tag{6.2.49}$$

Формула (6.2.49) доказывается индукцией по j. При $j=0$ она, очевидно, справедлива для всех $\nu\in\mathbb{N}$. Предположим, что формула (6.2.49) верна для всех $j\le J$ и $\nu\in\mathbb{N}$. Установим ее справедливость для $j=J+1$. Обозначая величину $r-1$ вновь за r, имеем,

$$S(J+1,\nu)=\sum_{r=0}^{J+1}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{\theta^{J+1+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r}}{(J+1-r)!i!(\nu-i+r)!}=$$
$$=\sum_{r=-1}^{J}\sum_{i=0}^{r+1}(-1)^i\frac{\theta^{J+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r+1}}{(J-r)!i!(\nu-i+r+1)!}=\sum_{r=0}^{J}\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\frac{\theta^{J+i-r}(\theta-\xi)^{\nu-i+r+1}}{(J-r)!i!(\nu-i+r+1)!}+$$
$$+\sum_{r=0}^{J}(-1)^{r+1}\frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J-r)!(r+1)!\nu!}+\frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J+1)!\nu!}.$$

Замечая, что первый член в правой части этого выражения есть величина $S(J,\nu+1)$ и используя предположение индукции, получаем

$$S(J+1,\nu)=\frac{(\theta-\xi)^{\nu+1+J}}{(\nu+1+J)!}+\frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{\nu!}\sum_{r=0}^{J}\frac{(-1)^{r+1}}{(J-r)!(r+1)!}+\frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J+1)!\nu!}=$$
$$=\frac{(\theta-\xi)^{\nu+1+J}}{(\nu+1+J)!}-\frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J+1)!\nu!}+\frac{\theta^{J+1}(\theta-\xi)^{\nu}}{(J+1)!\nu!}=\frac{(\theta-\xi)^{\nu+1+J}}{(\nu+1+J)!}.$$

Здесь мы воспользовались легко проверяемой формулой

$$\sum_{r=0}^{J}\frac{(-1)^{r+1}}{(J-r)!(r+1)!}=-\frac{1}{(J+1)!}. \tag{6.2.50}$$

Таким образом, формула (6.2.49) доказана. Вспоминая теперь (6.2.44), (6.2.45), (6.2.46), (6.2.48) и (6.2.49), устанавливаем справедливость формулы (6.2.39). ■

Следствие 6.2.2. *Пусть $\mu=\lambda^{(p)}$ для некоторого $p=1,\dots,l$. Тогда для любого $\nu\in\mathbb{N}$ справедливы формулы:*

$$\left(\Psi^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\right)=\Psi^{(p)}(0)-\int_{-h}^{0}\begin{pmatrix}\theta & \frac{\theta^2}{2!} & \dots & \dots & \frac{\theta^{N_p}}{N_p!}\\ 0 & \theta & \frac{\theta^2}{2!} & \dots & \frac{\theta^{N_p-1}}{(N_p-1)!}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \theta & \frac{\theta^2}{2!}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \theta\end{pmatrix}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{\mu\theta}, \tag{6.2.51}$$

$$\left(\Psi^{(p)}(\xi),\frac{\theta^{\nu}}{\nu!}e^{\mu\theta}\right)=-\int_{-h}^{0}\begin{pmatrix}\frac{\theta^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \frac{\theta^{\nu+2}}{(\nu+2)!} & \dots & \dots & \frac{\theta^{\nu+N_p}}{(\nu+N_p)!}\\ 0 & \frac{\theta^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \frac{\theta^{\nu+2}}{(\nu+2)!} & \dots & \frac{\theta^{\nu+N_p-1}}{(\nu+N_p-1)!}\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & \frac{\theta^{\nu+1}}{(\nu+1)!} & \frac{\theta^{\nu+2}}{(\nu+2)!}\\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\theta^{\nu+1}}{(\nu+1)!}\end{pmatrix}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{\mu\theta}. \tag{6.2.52}$$

Имеем

$$\left(\Psi^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\right)=\Psi^{(p)}(0)-\int_{-h}^{0}\int_{0}^{\theta}e^{-D^{(p)}(\xi-\theta)}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{\mu\xi}d\xi=$$
$$=\Psi^{(p)}(0)-\int_{-h}^{0}e^{D^{(p)}\theta}\int_{0}^{\theta}e^{(\mu I-D^{(p)})\xi}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)d\xi=$$
$$=\Psi^{(p)}(0)-\int_{-h}^{0}\sum_{r=0}^{N_p-1}(\mu I-D^{(p)})^{r}\sum_{j=0}^{N_p-1}(D^{(p)}-\mu I)^{j}\frac{\theta^{j+r+1}}{j!(r+1)!}\Psi^{(p)}(0)d\eta(\theta)e^{\mu\theta},$$

где мы воспользовались формулами (6.2.41). Перемножим суммы под интегралом и обозначим величину $r+j$ вновь за j. Учитывая, что $(\mu I - D^{(p)})^r = 0$ при $r \geq N_p$ и меняя порядок суммирования, приходим к формуле

$$\sum_{r=0}^{N_p-1}(\mu I - D^{(p)})^r \sum_{j=0}^{N_p-1}(D^{(p)} - \mu I)^j \frac{\theta^{j+r+1}}{j!(r+1)!} = \sum_{j=0}^{N_p-1}(D^{(p)} - \mu I)^j \theta^{j+1} \sum_{r=0}^{j} \frac{(-1)^r}{(j-r)!(r+1)!}.$$

Используя (6.2.50), выводим равенство (6.2.51). Формула (6.2.52) следует из (6.2.39), если положить $f(\theta) = e^{\mu\theta} I$.

Теперь мы можем вернуться к доказательству теоремы 6.2.1.

Доказательство теоремы 6.2.1. В дальнейшем для сокращения записи в коэффициентах и в неизвестных систем $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_{N_i}}$ не будем указывать верхний индекс $^{(i)}$, полагая $\mu = \mu^{(i)}$, $g_r = g_r^{(i)}$, $p_r(\theta) = p_r^{(i)}(\theta)$, $q_r(\theta) = q_r^{(i)}(\theta)$ и $z_r(0) = z_r^{(i)}(0)$ $(r = 1, \ldots N_i)$. Нам необходимо рассмотреть далее два случая.

Случай 1. Число $\mu \in \mathbb{C}$ не является корнем характеристического уравнения (6.1.8).

Рассмотрим сначала задачу $\mathbf{P_1}$. Поскольку матрица $\Delta(\mu)$ невырождена, то из первого уравнения системы (6.2.24) однозначно определяем вектор $z_1(0)$:

$$z_1(0) = \Delta^{-1}(\mu)\Big[B_0\Big(\int_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s) + q_1(s)\big)ds\Big) + g_1 - p_1(0) - q_1(0)\Big]. \tag{6.2.53}$$

Подставим полученное выражение в левую часть второго уравнения системы (6.2.24), полагая $\Psi(\xi) = \Psi^{(p)}(\xi)$, где $p = 1, \ldots, l$ — произвольно. Используя формулу (6.2.37) из следствия 6.2.1, получаем

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta} I\big) z_1(0) = (\mu I - D^{(p)})^{-1}\Psi^{(p)}(0)\times$$
$$\times \Big[B_0\Big(\int_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s) + q_1(s)\big)ds\Big) + g_1 - p_1(0) - q_1(0)\Big]. \tag{6.2.54}$$

Рассмотрим теперь правую часть второго уравнения системы (6.2.24). Сперва заметим, что поскольку $q_r(\theta) \in Q_\Lambda$ в силу представлений (6.2.11), (6.2.16) и (6.2.18), то в силу (6.1.21)

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), q_r(\theta)\big) = 0, \qquad r = 1, \ldots, N_i. \tag{6.2.55}$$

Кроме того, из (6.1.16), (6.2.9), (6.2.10), (6.2.16), (6.2.18) следует, что

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), p_r(\theta)\big) = \Psi^{(p)}(0) g_r, \qquad r = 1, \ldots, N_i. \tag{6.2.56}$$

Воспользуемся теперь формулой (6.2.35) из утверждения 6.2.1 для $f(\theta) = p_1(\theta) + q_1(\theta)$ и учтем (6.2.55), (6.2.56). Правая часть второго уравнения системы (6.2.24) перепишется тогда следующим образом:

$$- \Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) = (\mu I - D^{(p)})^{-1}\times$$

$$\times \Big[\Psi^{(p)}(0)B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) + \Psi^{(p)}(0)g_1 - \Psi^{(p)}(0)\big(p_1(0)+q_1(0)\big)\Big]. \quad (6.2.57)$$

Сопоставляя (6.2.54) и (6.2.57) и изменяя p от 1 до l, устанавливаем однозначную разрешимость задачи $\mathbf{P_1}$.

Перейдем теперь к анализу задачи $\mathbf{P_2}$. Имеем,

$$z_2(0) = \Delta^{-1}(\mu)\Big[B_0\Big(\int\limits_0^\theta \Big((\theta-s)e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big) + e^{\mu(\theta-s)}\big(p_2(s)+q_2(s)\big)\Big)ds\Big) +$$

$$+ g_2 - p_2(0) - q_2(0) - \Delta'(\mu)z_1(0)\Big].$$

Подставим полученное выражение в левую часть второго уравнения системы (6.2.25), полагая $\Psi(\xi) = \Psi^{(p)}(\xi)$, где $p = 1, \ldots, l$ — произвольно. Используя формулы (6.2.37), (6.2.38) из следствия 6.2.1, а также (6.2.53), получаем

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), \theta e^{\mu\theta} I\big)z_1(0) + \big(\Psi(\xi), e^{\mu\theta} I\big)z_2(0) = -(\mu I - D^{(p)})^{-2}\Psi^{(p)}(0)\times$$

$$\times \Big[B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) + g_1 - p_1(0) - q_1(0)\Big] + (\mu I - D^{(p)})^{-1}\Psi^{(p)}(0)\times$$

$$\times \Big[B_0\Big(\int\limits_0^\theta \Big((\theta-s)e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big) + e^{\mu(\theta-s)}\big(p_2(s)+q_2(s)\big)\Big)ds\Big) + g_2 - p_2(0) - q_2(0)\Big]. \quad (6.2.58)$$

Применяя теперь формулы (6.2.35), (6.2.36) для преобразования правой части второго уравнения системы (6.2.25) и учитывая (6.2.55), (6.2.56), приходим к выводу, что полученное выражение совпадает с (6.2.58). Тем самым однозначная разрешимость задачи $\mathbf{P_2}$ обоснована.

Абсолютно аналогично доказывается однозначная разрешимость всех остальных задач $\mathbf{P_r}$ $(r = 3, \ldots, N_i)$. Достаточно лишь во второе уравнение соответствующей системы задачи $\mathbf{P_r}$ подставить известные выражения $z_1(0), \ldots, z_r(0)$ и воспользоваться формулами (6.2.35), (6.2.36), (6.2.37), (6.2.38) с учетом (6.2.55), (6.2.56).

Случай 2. Число $\mu \in \mathbb{C}$ является корнем характеристического уравнения (6.1.8).

В рассматриваемой ситуации матрица $\Delta(\mu)$ является вырожденной. Первое уравнение задачи $\mathbf{P_r}$ $(r = 1, \ldots, N_i)$ имеет вид

$$\Delta(\mu)z_r(0) = f_r, \quad (6.2.59)$$

где $f_r \in \mathbb{C}^m$. Хорошо известно, что система (6.2.59) имеет решение тогда и только тогда, когда $y^* f_r = 0$ для всех фундаментальных решений сопряженной системы

$$\Delta^*(\mu) y = 0. \tag{6.2.60}$$

Здесь символ $(^*)$ означает эрмитово сопряжение. Сопрягая обе части системы (6.2.60) и учитывая (6.2.34), получаем условие разрешимости для (6.2.59):

$$\psi_{N_p}^{(p)}(0) f_r = 0. \tag{6.2.61}$$

Условие (6.2.61) должно выполняться для всех таких p, что $\mu = \lambda^{(p)}$. Заметим, что в силу (6.2.30) фундаментальную систему решений соответствующей однородной системы для (6.2.59) образуют векторы $\varphi_1^{(p)}(0)$ с индексами p ($p = 1, \ldots, l$) такими, что $\mu = \lambda^{(p)}$. Следовательно, в случае разрешимости системы (6.2.59) ее общее решение может быть записано в виде

$$z_r(0) = \sum_{p:\ \lambda^{(p)} = \mu} c_p \varphi_1^{(p)}(0) + \tilde{z}_r, \tag{6.2.62}$$

где $c_p \in \mathbb{C}$ — произвольные постоянные, а $\tilde{z}_r$ — некоторое частное решение системы (6.2.59).

Как и в предыдущем случае, будем изучать задачи $\mathbf{P_1}, \ldots, \mathbf{P_{N_i}}$ последовательно. Рассмотрим сначала задачу $\mathbf{P_1}$. Установим разрешимость первого уравнения системы (6.2.24). Имеем,

$$\psi_{N_p}^{(p)}(0)\Big[B_0\Big(\int_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) + g_1 - p_1(0) - q_1(0)\Big] =$$

$$= \int_{-h}^{0}\int_0^\theta \psi_{N_p}^{(p)}(0) e^{\mu(\theta-s)} d\eta(\theta)\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\big(g_1 - p_1(0) - q_1(0)\big) =$$

$$= -\big(\psi_{N_p}^{(p)}(\xi), p_1(\theta)+q_1(\theta)\big) + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\big(p_1(0)+q_1(0)\big) + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\big(g_1 - p_1(0) - q_1(0)\big) = 0.$$

Здесь мы учли равенство $\mu = \lambda^{(p)}$, формулу (6.2.33), а также соотношения (6.2.55), (6.2.56). Таким образом, общее решение первого уравнения системы (6.2.24) может быть записано в виде (6.2.62), где $r = 1$. Подставим теперь соответствующее представление для $z_1(0)$ в левую часть второго уравнения системы (6.2.24) и учтем (6.1.16), (6.2.29). Получим

$$\big(\Psi(\xi), e^{\mu\theta} I\big) z_1(0) = \sum_{p:\ \lambda^{(p)} = \mu} c_p \big(\Psi(\xi), \varphi_1^{(p)}(\theta)\big) + \big(\Psi(\xi), e^{\mu\theta}\tilde{z}_1\big) = \sum_{p:\ \lambda^{(p)} = \mu} c_p e^{(p)} + \big(\Psi(\xi), e^{\mu\theta}\tilde{z}_1\big), \tag{6.2.63}$$

где $e^{(p)}$ — вектор столбец высоты N, у которого элемент с номером $1 + N_1 + \ldots + N_{p-1}$ ($N_0 = 0$) равен единице, а остальные элементы — нули. Учитывая теперь правую часть второго уравнения системы (6.2.24), однозначно определяем постоянные c_p:

$$c_p = -(e^{(p)})^*\Big(\Psi(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) - (e^{(p)})^*\big(\Psi(\xi), e^{\mu\theta}\tilde{z}_1\big) =$$

$$= -\Big(\psi_1^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) - \big(\psi_1^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}\tilde{z}_1\big). \quad (6.2.64)$$

Таким образом, если решение $z_1(0)$ системы (6.2.24) существует, то оно определяется формулой (6.2.62), где $r=1$, а постоянные c_p определяются формулами (6.2.64). Кроме того, если решение системы (6.2.24) существует, то оно единственно (т.е. не зависит от выбора частного решения $\tilde{z}_1$). Действительно, рассматривая соответствующую однородную систему для (6.2.24), в силу (6.2.62), (6.2.64) заключаем, что она имеет только нулевое решение.

Проверим теперь справедливость второго уравнения системы (6.2.24), где $\Psi(\xi) = \Psi^{(p)}(\xi)$. Заметим, что если номер p такой, что $\lambda^{(p)} \neq \mu$, то соответствующие равенства проверяются точно так же, как и в случае 1. Действительно, для левой части второго уравнения системы (6.2.24) будет справедливо представление (6.2.54), а для правой — (6.2.57). Следовательно, нам необходимо проверить справедливость N_p равенств (для каждого p)

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) = -\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big), \qquad (\lambda^{(p)}=\mu). \quad (6.2.65)$$

Из (6.2.51) с учетом (6.1.11) и (6.2.34) выводим

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) = \begin{pmatrix} \big(\psi_1^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big) \\ \psi_2^{(p)}(0)\Delta'(\mu) + \ldots + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(N_p-1)}(\mu)}{(N_p-1)!} \\ \psi_3^{(p)}(0)\Delta'(\mu) + \ldots + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(N_p-2)}(\mu)}{(N_p-2)!} \\ \vdots \\ \psi_{N_p}^{(p)}(0)\Delta'(\mu) \end{pmatrix} z_1(0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \big(\psi_1^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big) \\ -\psi_1^{(p)}(0)\Delta(\mu) \\ -\psi_2^{(p)}(0)\Delta(\mu) \\ \vdots \\ -\psi_{N_p-1}^{(p)}(0)\Delta(\mu) \end{pmatrix} z_1(0) = \begin{pmatrix} \big(\psi_1^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1^{(p)}(0) \\ \psi_2^{(p)}(0) \\ \vdots \\ \psi_{N_p-1}(0) \end{pmatrix} \Delta(\mu)z_1(0). \quad (6.2.66)$$

Учитывая теперь тот факт, что вектор $z_1(0)$ уже построен и удовлетворяет первому уравнению системы (6.2.24), заключаем

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_1(0)=\begin{pmatrix}\big(\psi_1^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_1(0)\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\\psi_1^{(p)}(0)\\\psi_2^{(p)}(0)\\\vdots\\\psi_{N_p-1}(0)\end{pmatrix}\times$$
$$\times\Big[B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big)+g_1-p_1(0)-q_1(0)\Big]. \quad (6.2.67)$$

Рассмотрим теперь правую часть (6.2.65). Воспользуемся формулой (6.2.39) из утверждения 6.2.2 и учтем (6.2.33). Получаем

$$-\Big(\Psi^{(p)}(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big)=-\begin{pmatrix}\Big(\psi_1^{(p)}(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big)\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+$$
$$+\int\limits_{-h}^0\int\limits_0^\theta\begin{pmatrix}0\\\psi_2^{(p)}(0)(\theta-\xi)+\psi_3^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^2}{2!}+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p-1}}{(N_p-1)!}\\\vdots\\\psi_{N_p-1}^{(p)}(0)(\theta-\xi)+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^2}{2!}\\\psi_{N_p}^{(p)}(0)(\theta-\xi)\end{pmatrix}e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)f(\xi)d\xi=$$
$$=-\begin{pmatrix}\Big(\psi_1^{(p)}(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big)\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\int\limits_{-h}^0\int\limits_0^\theta\begin{pmatrix}0\\\psi_1^{(p)}(\xi-\theta)-\psi_1^{(p)}(0)e^{-\mu(\xi-\theta)}\\\vdots\\\psi_{N_p-2}^{(p)}(\xi-\theta)-\psi_{N_p-2}^{(p)}(0)e^{-\mu(\xi-\theta)}\\\psi_{N_p-1}^{(p)}(\xi-\theta)-\psi_{N_p-1}^{(p)}(0)e^{-\mu(\xi-\theta)}\end{pmatrix}d\eta(\theta)f(\xi)d\xi.$$

Откуда, в силу (6.1.10) и (6.1.13), выводим

$$-\Big(\Psi^{(p)}(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big)=-\begin{pmatrix}\Big(\psi_1^{(p)}(\xi),\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}f(s)ds\Big)\\\big(\psi_1^{(p)}(\xi),f(\theta)\big)\\\vdots\\\big(\psi_{N_p-2}^{(p)}(\xi),f(\theta)\big)\\\big(\psi_{N_p-1}^{(p)}(\xi),f(\theta)\big)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\psi_1^{(p)}(0)f(0)\\\vdots\\\psi_{N_p-2}^{(p)}(0)f(0)\\\psi_{N_p-1}^{(p)}(0)f(0)\end{pmatrix}-$$

$$- \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_1^{(p)}(0) \\ \vdots \\ \psi_{N_p-2}^{(p)}(0) \\ \psi_{N_p-1}^{(p)}(0) \end{pmatrix} B_0\Big(\int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)} f(s)ds\Big). \quad (6.2.68)$$

Полагая теперь $f(\theta) = p_1(\theta) + q_1(\theta)$ и вспоминая (6.2.55), (6.2.56), убеждаемся в том, что вектор в правой части (6.2.68) совпадает с вектором в правой части (6.2.67) за исключением, быть может, первой компоненты. Но первые компоненты этих векторов совпадают в силу (6.2.63) и выбора постоянной c_p согласно (6.2.64). Следовательно, все N_p равенств (6.2.65) выполнены.

Рассмотрим далее задачу $\mathbf{P_r}$, где $2 \le r \le N_i$, полагая, что однозначная разрешимость всех предыдущих задач уже доказана. Покажем сначала, что первое уравнение соответствующей системы имеет решение. Записывая это уравнение в виде (6.2.59), имеем

$$\psi_{N_p}^{(p)}(0)\Bigg[B_0\Big(\int\limits_0^\theta \Big(\frac{(\theta-s)^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big) + \ldots + e^{\mu(\theta-s)}\big(p_r(s)+q_r(s)\big)\Big)ds\Big) +$$

$$+ g_r - p_r(0) - q_r(0) - \Delta'(\mu)z_{r-1}(0) - \ldots - \frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)\Bigg] =$$

$$= -\Big(\psi_{N_p}^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) - \ldots -$$

$$- \Big(\psi_{N_p}^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_{r-1}(s)+q_{r-1}(s)\big)ds\Big) - \Big(\psi_{N_p}^{(p)}(\xi), p_r(\theta)+q_r(\theta)\Big) + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\big(p_r(0)+q_r(0)\big) +$$

$$+ \psi_{N_p}^{(p)}(0)\Big(g_r - p_r(0) - q_r(0) - \Delta'(\mu)z_{r-1}(0) - \ldots - \frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)\Big). \quad (6.2.69)$$

Здесь мы учли формулу (6.2.39) (а, точнее, равенство для последних компонент соответствующих векторов в левой и правой части этой формулы), вид функции $\psi_{N_p}^{(p)}(\xi)$, определяемый формулой (6.2.33), представление оператора B_0 в виде (6.1.10) и определение билинейной формы (6.1.13). Обозначим за f_r вектор в квадратных скобках в левой части (6.2.69). Используя теперь второе уравнение соответствующей системы задачи $\mathbf{P_{r-1}}$ и учитывая (6.2.55), (6.2.56), выводим из (6.2.69)

$$\psi_{N_p}^{(p)}(0)f_r = \Big(\psi_{N_p}^{(p)}(\xi), \frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\Big)z_1(0) + \ldots + \Big(\psi_{N_p}^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\Big)z_{r-1}(0) -$$

$$- \psi_{N_p}^{(p)}(0)\Big(\Delta'(\mu)z_{r-1}(0) + \ldots + \frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)\Big). \quad (6.2.70)$$

Осталось теперь воспользоваться формулами (6.2.51), (6.2.52) (а, точнее, равенством для последних компонент соответствующих векторов в левой и правой части этих формул) для преобразования правой части (6.2.70) и учесть (6.1.11). Проделывая несложные преобразования, устанавливаем справедливость (6.2.61). Следовательно, первое уравнение системы в задаче $\mathbf{P_r}$ имеет решение и общее решение этого уравнения может быть записано в виде (6.2.62). Точно так же, как и в задаче $\mathbf{P_1}$, коэффициенты c_p определяем, подставляя (6.2.62) во второе уравнение соответствующей системы задачи $\mathbf{P_r}$:

$$\big(\Psi^{(p)}(\xi), \frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) + \ldots + \big(\Psi^{(p)}(\xi), \theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0) + \big(\Psi^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}I\big)z_r(0) =$$

$$= -\Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) - \ldots -$$

$$- \Big(\Psi^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_r(s)+q_r(s)\big)ds\Big). \quad (6.2.71)$$

Откуда

$$c_p = -\Big(\psi_1^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta \frac{(\theta-s)^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_1(s)+q_1(s)\big)ds\Big) - \ldots -$$

$$- \Big(\psi_1^{(p)}(\xi), \int\limits_0^\theta e^{\mu(\theta-s)}\big(p_r(s)+q_r(s)\big)ds\Big) - \big(\psi_1^{(p)}(\xi), \frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu\theta}I\big)z_1(0) - \ldots -$$

$$- \big(\psi_1^{(p)}(\xi), \theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0) - \big(\psi_1^{(p)}(\xi), e^{\mu\theta}\tilde{z}_r\big). \quad (6.2.72)$$

Установим теперь справедливость N_p равенств (6.2.71) для каждого p. Если индекс p таков, что $\lambda^{(p)} \neq \mu$, справедливость равенств (6.2.71) проверяется точно так же, как и в случае 1. Необходимо лишь заметить, что при этом нам не требуется иметь представление для $z_s(0)$ $(s = 1, \ldots, r)$ вида $z_s(0) = \Delta^{-1}(\mu)f_s$. Достаточно лишь существования вектора $z_s(0)$, который удовлетворяет системе $\Delta(\mu)z_s(0) = f_s$.

Будем далее исследовать равенства (6.2.71) лишь для тех p, для которых $\lambda^{(p)} = \mu$. Заметим, что первое равенство в (6.2.71) верно в силу представления (6.2.62) для $z_r(0)$ и выбора коэффициентов c_p согласно формуле (6.2.72). Докажем справедливость $(\nu+1)$-го равенства в (6.2.71), где $1 \leq \nu \leq N_p - 1$. Правая часть $(\nu+1)$-го равенства в (6.2.71) с учетом (6.2.39) имеет следующий вид:

$$\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_0^\theta \Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^r}{r!} + \psi_{\nu+2}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r+1}}{(r+1)!} + \ldots + \psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+r-1-\nu}}{(N_p+r-1-\nu)!}\Big)\times$$

$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_1(\xi)+q_1(\xi)\big)d\xi+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+r-2-\nu}}{(N_p+r-2-\nu)!}\Big)\times$$

$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_2(\xi)+q_2(\xi)\big)d\xi+\ldots+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{2}}{2!}+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+1-\nu}}{(N_p+1-\nu)!}\Big)\times$$

$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_{r-1}(\xi)+q_{r-1}(\xi)\big)d\xi+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)(\theta-\xi)+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p-\nu}}{(N_p-\nu)!}\Big)\times$$

$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_r(\xi)+q_r(\xi)\big)d\xi. \quad (6.2.73)$$

Распишем теперь ν-е равенство во втором уравнении соответствующей системы в задаче $\mathbf{P_{r-1}}$, учитывая (6.2.39). Получим

$$\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\big)z_1(0)+\ldots+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-2}(0)+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0)=$$

$$=\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_\nu^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}+\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r}}{r!}+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+r-1-\nu}}{(N_p+r-1-\nu)!}\Big)\times$$

$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_1(\xi)+q_1(\xi)\big)d\xi+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_\nu^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r-2}}{(r-2)!}+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+r-2-\nu}}{(N_p+r-2-\nu)!}\Big)\times$$

$$\times e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_2(\xi)+q_2(\xi)\big)d\xi+\ldots+\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_\nu^{(p)}(0)(\theta-\xi)+\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{2}}{2!}+\ldots+$$

$$+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p+1-\nu}}{(N_p+1-\nu)!}\Big)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_{r-1}(\xi)+q_{r-1}(\xi)\big)d\xi. \quad (6.2.74)$$

Выразим общую часть (6.2.73) и (6.2.74) из соотношения (6.2.74) и подставим в (6.2.73). Таким образом, правая часть $(\nu+1)$-го равенства в (6.2.71) запишется в виде

$$\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)(\theta-\xi)+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p-\nu}}{(N_p-\nu)!}\Big)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_r(\xi)+q_r(\xi)\big)d\xi+$$

$$+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\big)z_1(0)+\ldots+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-2}(0)+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0)-$$

$$-\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_\nu^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_1(\xi)+q_1(\xi)\big)d\xi-\ldots-$$

$$-\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_\nu^{(p)}(0)(\theta-\xi)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_{r-1}(\xi)+q_{r-1}(\xi)\big)d\xi. \quad (6.2.75)$$

В выражении (6.2.75) добавим и вычтем величину

$$\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\psi_\nu^{(p)}(0)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_r(\xi)+q_r(\xi)\big)d\xi=\psi_\nu^{(p)}(0)B_0\Big(\int\limits_{0}^{\theta}e^{\mu(\theta-s)}\big(p_r(s)+q_r(s)\big)ds\Big).$$

Тогда, учитывая представление (6.1.10) оператора B_0, из первого уравнения соответствующей системы для задачи $\mathbf{P_r}$ выводим следующее представление для (6.2.75):

$$\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{0}^{\theta}\Big(\psi_\nu^{(p)}(0)+\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)(\theta-\xi)+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{(\theta-\xi)^{N_p-\nu}}{(N_p-\nu)!}\Big)e^{\mu(\theta-\xi)}d\eta(\theta)\big(p_r(\xi)+q_r(\xi)\big)d\xi+$$
$$+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\big)z_1(0)+\ldots+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-2}(0)+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0)-$$
$$-\psi_\nu^{(p)}(0)\Big(\frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)+\ldots+\Delta'(\mu)z_{r-1}(0)+\Delta(\mu)z_r(0)-g_r+p_r(0)+q_r(0)\Big). \quad (6.2.76)$$

Вспоминая формулу (6.2.33) для функции $\psi_\nu(\xi)$ и (6.1.13), замечаем, что первое слагаемое в (6.2.76) есть величина

$$-\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),p_r(\theta)+q_r(\theta)\big)+\psi_\nu^{(p)}(0)\big(p_r(0)+q_r(0)\big).$$

С учетом этого замечания и формул (6.2.55), (6.2.56), выражение (6.2.76) приобретает вид

$$\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\frac{\theta^{r-2}}{(r-2)!}e^{\mu\theta}I\big)z_1(0)+\ldots+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-2}(0)+\big(\psi_\nu^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0)-$$
$$-\psi_\nu^{(p)}(0)\Big(\frac{\Delta^{(r-1)}(\mu)}{(r-1)!}z_1(0)+\ldots+\Delta'(\mu)z_{r-1}(0)+\Delta(\mu)z_r(0)\Big). \quad (6.2.77)$$

Собирая слагаемые при $z_s(0)$ и применяя формулы (6.1.11), (6.2.51), (6.2.52), записываем (6.2.77) в виде

$$\Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(r)}(\mu)}{r!}+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(N_p+r-1-\nu)}}{(N_p+r-1-\nu)!}\Big)z_1(0)+\ldots+$$
$$+\Big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(0)\frac{\Delta''(\mu)}{2!}+\ldots+\psi_{N_p}^{(p)}(0)\frac{\Delta^{(N_p+1-\nu)}}{(N_p+1-\nu)!}\Big)z_{r-1}(0)-\psi_\nu^{(p)}(0)\Delta(\mu)z_r(0)=$$
$$=\big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(\xi),\frac{\theta^{r-1}}{(r-1)!}e^{\mu\theta}I\big)z_1(0)+\ldots+\big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(\xi),\theta e^{\mu\theta}I\big)z_{r-1}(0)+\big(\psi_{\nu+1}^{(p)}(\xi),e^{\mu\theta}I\big)z_r(0). \quad (6.2.78)$$

Здесь при выводе последнего слагаемого в правой части мы также воспользовались формулой (6.2.66), очевидно справедливой и при замене $z_1(0)$ на $z_r(0)$. Осталось теперь заметить, что правая часть (6.2.78) совпадает с левой частью $(\nu+1)$-го равенства в (6.2.71). Тем самым справедливость $(\nu+1)$-го равенства в (6.2.71) доказана.

Теорема доказана. ■

Заметим, что в силу свойств B.3 и B.4 функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ построенная нами в этом разделе матрица $\hat{H}(t,\theta)$ вида (6.2.6) удовлетворяет системе

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big)+\hat{H}(t,\theta)\Big(D+\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big)\Big)+\frac{\partial\hat{H}}{\partial t}=$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} + R_1(t,\theta), & -h \le \theta < 0, \\ B_0\hat{H} + G\big(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t,\theta)\big) + R_1(t,0) - R_2(t), & \theta = 0. \end{cases} \tag{6.2.79}$$

Здесь матрицы $R_1(t,\theta)$ и $R_2(t)$ таковы, что $\|R_1(t,\cdot)\|_{C_h}, R_2(t) \in L_1[t_0,\infty)$, и матрица $R_2(t)$ составлена из абсолютно интегрируемых на $[t_0,\infty)$ элементов матрицы $G\big(t, \Phi(\theta) + \hat{H}(t,\theta)\big)$.

В завершение этого раздела отметим, что в случае, когда система (6.1.1) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, построение критического многообразия может быть проведено по схеме, изложенной в главе 4, или с использованием общего подхода из главы 7.

6.3 Основные теоремы

В этом разделе будут установлены основные теоремы, касающиеся свойств критических многообразий. Методика доказательств соответствующих утверждений во многом опирается на схему, использованную в [84] при исследовании свойств центральных многообразий в нелинейных системах обыкновенных дифференциальных уравнений.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.3.1. *При достаточно больших t у системы* (6.1.1) *существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемое формулой* (6.2.1).

Доказательство. Поскольку столбцы матрицы $H(t,\theta)$ должны принадлежать пространству Q_Λ, то в силу (6.1.30) (см. также (6.1.28)) и (6.2.3) эта матрица удовлетворяет при $t \ge t_*$ интегральному уравнению

$$H(t,\theta)u(t) = T(t-t_*)H(t_*,\theta)u(t_*) + \int_{t_*}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G\big(s, \Phi(\theta) + H(t,\theta)\big)u(s)ds. \tag{6.3.1}$$

В (6.3.1) вектор-функция $u(t) \in \mathbb{C}^N$ является решением системы (6.2.4) с начальным условием при $t = t_*$ равным $u(t_*)$. Пусть $U_H(t,s)$ $(t,s \ge t_*)$ — матрица Коши системы (6.2.4) ($U_H(s,s) = I$). Тогда, учитывая, что $u(t) = U_H(t,t_*)u(t_*)$, и используя свойства матрицы $U_H(t,s)$, запишем уравнение (6.3.1) в операторной форме:

$$H(t,\theta) = \mathcal{A}H(t,\theta), \tag{6.3.2}$$

$$\mathcal{A}H(t,\theta) = T(t-t_*)H(t_*,\theta)U_H(t_*,t) + \int_{t_*}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G\big(s, \Phi(\theta)+H(t,\theta)\big)U_H(s,t)ds. \tag{6.3.3}$$

Областью определения оператора $\mathcal{A}$ будем считать банахово пространство B непрерывных по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$ матриц $H(t, \theta)$ размера $(m \times N)$ с фиксированным начальным условием $H(t_*, \theta)$ таких, что $\|H(t, \cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$. При этом столбцы матрицы $H(t_*, \theta)$ принадлежат пространству Q_Λ. Норму в этом пространстве введем стандартным образом:

$$\|H\|_B = \sup_{t \geq t_*} \|H(t, \cdot)\|_{C_h}. \tag{6.3.4}$$

Покажем далее, что при достаточно больших t_* и достаточно малой величине $\|H(t_*, \cdot)\|_{C_h}$ оператор $\mathcal{A}$ будет сжимающим в некотором шаре $\|H\|_B \leq r_0$ $(r_0 > 0)$ пространства B.

Покажем сначала, что оператор $\mathcal{A}$ переводит шар $\|H\|_B \leq r_0$ в себя. Заметим, что из (6.3.3) сразу следует, что матрица $\mathcal{A}H$ непрерывна по $t \geq t_*$ и $\theta \in [-h, 0]$. Кроме того, столбцы этой матрицы принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \geq t_*$ в силу инвариантности этого пространства относительно оператора сдвига $T(t)$ и вида формулы (6.3.3). Таким образом, нам необходимо показать, что $\|\mathcal{A}H\|_B \leq r_0$ и $\|(\mathcal{A}H)(t, \cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$. В дальнейшем нам потребуется оценка для величины $|U_H(s, t)|$, где $s \leq t$. Получить эту оценку можно следующим образом. Сперва заметим, что в силу (6.1.2)–(6.1.4), для любого $\varphi(\theta) \in C_h$ справедливо неравенство

$$|G(t, \varphi)| \leq p(t)\|\varphi\|_{C_h}, \qquad p(t) = w(t) + \gamma(t). \tag{6.3.5}$$

Здесь $w(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, и функция $p(t)$, следовательно, принадлежит классу $\mathcal{M}_0$ (см. определение 1.3.1). Без ограничения общности можно считать, что $p(t) > 0$ для всех $t \geq t_0$. Неравенство (6.3.5), очевидно, справедливо и в том случае, если $\varphi(\theta)$ — $(m \times N)$-матрица (вместо векторной нормы, естественно, необходимо брать матричную норму). В силу свойств матриц Коши, имеем

$$\big(U_H(s, t)\big)^* = \big(U_H^*(t, s)\big)^{-1} = U_H^c(t, s), \qquad s \leq t, \tag{6.3.6}$$

где символ * означает эрмитово сопряжение, а $U_H^c(t, s)$ — матрица Коши сопряженной к (6.2.4) системы

$$\dot{u} = \Big[-D^* - \Big(G\big(t, \Phi(\theta) + H(t, \theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0)\Big]u, \qquad t \geq t_*. \tag{6.3.7}$$

Отсюда,

$$U_H^c(t, s) = e^{-D^*(t-s)} - \int_s^t e^{-D^*(t-\tau)} \Big(G\big(\tau, \Phi(\theta) + H(\tau, \theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0) U_H^c(\tau, s) d\tau. \tag{6.3.8}$$

В силу гипотезы $\mathbf{H_1}$ все собственные числа матрица D (а, следовательно, и матрицы $(-D^*)$) имеют нулевые вещественные части. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ можно подобрать константу

$M = M(\varepsilon)$ так, что будет выполнено неравенство

$$|e^{-D^*(t-\tau)}| \le Me^{\varepsilon(t-\tau)}, \qquad t_* \le \tau \le t.$$

Учитывая (6.3.5), выводим из (6.3.8) оценку

$$|U_H^c(t,s)| \le Me^{\varepsilon(t-s)} + M\int\limits_s^t e^{\varepsilon(t-\tau)}p(\tau)|U_H^c(\tau,s)|d\tau. \tag{6.3.9}$$

Здесь и далее все возникающие в оценках константы, если их точный вид нас не интересует, мы будем обозначать одним символом. Домножая обе части неравенства (6.3.9) на $e^{-\varepsilon t}$ и применяя лемму Гронуолла–Беллмана, получаем

$$|U_H^c(t,s)| \le M\exp\Big\{\varepsilon(t-s) + M\int\limits_s^t p(\tau)d\tau\Big\}.$$

Поскольку для функции $p(t)$ выполнено предельное равенство (1.3.11), то выбирая t_* достаточно большим, для любого $\varepsilon > 0$ мы можем добиться выполнения неравенства

$$|U_H^c(t,s)| \le Me^{\varepsilon(t-s)}, \qquad t_* \le s \le t. \tag{6.3.10}$$

Отметим, что константа M в этом неравенстве может быть выбрана одна для всех $H(t,\theta)$ из шара $\|H\|_B \le r_0$. Из (6.3.6) тогда следует, что аналогичное (6.3.10) неравенство (возможно, с другой константой M) справедливо и для матрицы Коши $U_H(s,t)$.

Вернемся теперь к равенству (6.3.3). Заметим, что в силу гипотезы $\mathbf{H_2}$ неравенства (6.1.34)–(6.1.36) справедливы с некоторым показателем экспоненты $(-\alpha) < 0$. Из (6.3.3) тогда следует, что

$$\|(\mathcal{A}H)(t,\cdot)\|_{C_h} \le Me^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}\|H(t_*,\cdot)\|_{C_h} + M\int\limits_{t_*}^t e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)ds, \qquad t \ge t_*. \tag{6.3.11}$$

Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $-\alpha + \varepsilon < 0$. Используя теперь следствие 1.4.1, заключаем, что выражение в правой части неравенства (6.3.11) стремится к нулю при $t \to \infty$. Кроме того, выбирая t_* достаточно большим и $\|H(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, с учетом оценки (1.4.9) мы можем добиться того, что $\|\mathcal{A}H\|_B \le r_0$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ переводит шар $\|H\|_B \le r_0$ пространства B в себя.

Покажем далее, что оператор $\mathcal{A}$ является сжимающим в шаре $\|H\|_B \le r_0$. Пусть $H_1(t,\theta)$, $H_2(t,\theta) \in B$ и $\|H_1\|_B \le r_0$, $\|H_2\|_B \le r_0$. Тогда из (6.3.3) следует, что

$$\|(\mathcal{A}H_1)(t,\cdot) - (\mathcal{A}H_2)(t,\cdot)\|_{C_h} \le Me^{-\alpha(t-t_*)}\|H_1(t_*,\cdot)\|_{C_h}|U_{H_1}(t_*,t) - U_{H_2}(t_*,t)| +$$

$$+ M \int_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)} p(s) |U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)| ds +$$

$$+ M \int_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)} p(s) \|H_1(s,\cdot) - H_2(s,\cdot)\|_{C_h} |U_{H_1}(s,t)| ds +$$

$$+ M \int_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)} p(s) \|H_2(s,\cdot)\|_{C_h} |U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)| ds. \quad (6.3.12)$$

Здесь при выводе оценки (6.3.12) мы учли, что $H_1(t_*,\theta) = H_2(t_*,\theta)$, а также предварительно в правой части выражения для $\mathcal{A}H_1 - \mathcal{A}H_2$ мы добавили и вычли величину

$$\int_{t_*}^{t} T(t-s) X_0^{Q_\Lambda}(\theta) G\big(s, H_2(s,\theta)\big) U_{H_1}(s,t) ds.$$

Оценим далее величину $|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|$ ($s \le t$). По тем же соображениям, что были использованы ранее, нам достаточно получить оценку для величины $|U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)|$, где $U^c_{H_1}(t,s)$, $U^c_{H_2}(t,s)$ — фундаментальные матрицы сопряженной системы (6.3.7) с $H(t,\theta)$ равной $H_1(t,\theta)$ и $H_2(t,\theta)$ соответственно. Из (6.3.7) выводим

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\Big) = -D^*\big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big) - \Big(G\big(t,\Phi(\theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0) \times$$
$$\times \big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big) - \Big(G\big(t,H_1(t,\theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0) U^c_{H_1}(t,s) + \Big(G\big(t,H_2(t,\theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0) \times$$
$$\times U^c_{H_2}(t,s) = -D^*\big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big) - \Big(G\big(t,\Phi(\theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0)\big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big) -$$
$$- \Big(G\big(t,H_1(t,\theta) - H_2(t,\theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0) U^c_{H_1}(t,s) - \Big(G\big(t,H_2(t,\theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0)\big(U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)\big).$$

Таким образом разность $U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)$ удовлетворяет некоторой неоднородной системе, однородная часть которой совпадает с матрицей системы (6.3.7), где $H(t,\theta) = H_2(t,\theta)$. Следовательно, в силу формулы вариации постоянных, учитывая равенство $U^c_{H_1}(s,s) - U^c_{H_2}(s,s) = 0$, имеем

$$U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s) = -\int_{s}^{t} U^c_{H_2}(t,\tau)\Big(G\big(\tau,H_1(\tau,\theta) - H_2(\tau,\theta)\big)\Big)^* \Psi^*(0) U^c_{H_1}(\tau,s) d\tau. \quad (6.3.13)$$

Из (6.3.13) с учетом (6.3.5) и (6.3.10) при $t_* \le s \le t$ получаем оценку

$$|U^c_{H_1}(t,s) - U^c_{H_2}(t,s)| \le M e^{\varepsilon(t-s)} \int_{s}^{t} p(\tau) \|H_1(\tau,\cdot) - H_2(\tau,\cdot)\|_{C_h} d\tau \le$$

$$\le M e^{2\varepsilon(t-s)} \|H_1 - H_2\|_B. \quad (6.3.14)$$

Здесь мы, разумеется, учли, что $p(t) \in \mathcal{M}_0$. Возвращаясь теперь к неравенству (6.3.12) и используя оценку (6.3.14) применительно к величине $|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|$ ($t_* \le s \le t$), при условии $-\alpha + 2\varepsilon < 0$ устанавливаем неравенство

$$\|\mathcal{A}H_1 - \mathcal{A}H_2\|_B \le M \sup_{t \ge t_*} \Big\{ \|H_1(t_*,\cdot)\|_{C_h} + \int_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+2\varepsilon)(t-s)} p(s)ds + \\ + \int_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)} p(s)ds \Big\} \|H_1 - H_2\|_B. \quad (6.3.15)$$

Выбирая теперь t_* достаточно большим, а величину $\|H_1(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, на основании (1.4.9) устанавливаем сжимаемость оператора $\mathcal{A}$ в некотором шаре $\|H\|_B \le r_0$ пространства B.

Теорема доказана. ■

Установим теперь результат, который обосновывает возможнось приближенного построения многообразия $\mathcal{W}(t)$ с помощью изложенной в разделе 6.2 процедуры.

Теорема 6.3.2. *Пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие системы* (6.1.1)*, существующее согласно теореме 6.3.1 при достаточно больших t. Тогда найдется такое достаточно большое t_*, что при $t \ge t_*$ матрица $H(t,\theta)$ из* (6.2.1) *допускает представление в виде*

$$H(t,\theta) = \hat{H}(t,\theta) + Z(t,\theta), \qquad t \ge t_* \ge t_0, \quad -h \le \theta \le 0. \quad (6.3.16)$$

Здесь матрица $\hat{H}(t,\theta)$, определяемая формулой (6.2.6)*, удовлетворяет системе* (6.2.79)*, а $(m \times N)$-матрица $Z(t,\theta)$ такова, что $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$.*

Доказательство. Представим решение $H(t,\theta)$ операторного уравнения (6.3.2) в виде суммы (6.3.16), где $\hat{H}(t,\theta)$ — матрица (6.2.6), принадлежащая пространству B, и $Z(t,\theta)$ — некоторая матрица из B. Тогда уравнение (6.3.2) можно записать относительно неизвестной матрицы $Z(t,\theta)$:

$$Z(t,\theta) = \mathcal{S}Z(t,\theta), \quad (6.3.17)$$

$$\mathcal{S}Z(t,\theta) = \mathcal{A}\big(\hat{H}(t,\theta) + Z(t,\theta)\big) - \hat{H}(t,\theta), \quad (6.3.18)$$

где оператор $\mathcal{A}$ определен формулой (6.3.3). Будем рассматривать оператор $\mathcal{S}$ действующим в пространстве BL непрерывных по $t \ge t_*$ и $\theta \in [-h,0]$ матриц $Z(t,\theta)$ с фиксированным начальным условием $Z(t_*,\theta)$ таких, что $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$ и $p(t)\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$.

Здесь функция $p(t)$, определяемая формулой (6.3.5), принадлежит классу $\mathcal{M}_0$. Кроме того, столбцы матрицы $Z(t_*,\theta)$ принадлежат пространству Q_Λ. Пространство BL будет банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\|Z\|_{BL} = \|Z\|_B + \|Z\|_L, \qquad \|Z\|_L = \int\limits_{t_*}^{\infty} p(t)\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}dt, \tag{6.3.19}$$

где норма $\|\cdot\|_B$ определяется формулой (6.3.4). Покажем далее, что оператор $\mathcal{S}$ является сжимающим в некотором шаре $\|Z\|_{BL} \le r_0$ ($r_0 > 0$) пространства BL при условии, что величина $\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно мала, а t_* — достаточно велико.

Установим сначала, что оператор $\mathcal{S}$ переводит пространство BL в себя. В силу свойств оператора $\mathcal{A}$ и матрицы $\hat{H}(t,\theta)$ сразу заключаем, что матрица $\mathcal{S}Z$ непрерывна по $t \ge t_*$ и $\theta \in [-h,0]$, и, кроме того, $\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ при $t \to \infty$. Отметим также, что столбцы матрицы $\mathcal{S}Z$ принадлежат пространству Q_Λ при всех $t \ge t_*$ в силу свойств оператора $\mathcal{A}$ и матрицы $\hat{H}(t,\theta)$. Таким образом, нам необходимо показать, что $p(t)\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$. С этой целью получим для оператора $\mathcal{S}$ несколько иное представление.

Пусть вектор-функция $u(t) \in \mathbb{C}^N$ является решением системы (6.2.4), в которой $H(t,\theta)$ есть сумма (6.3.16), с начальным условием при $t = t_*$ равным $u(t_*)$. В силу вида матрицы $\hat{H}(t,\theta)$ (см. формулу (6.2.6)) и абсолютной непрерывности функций $v_1(t),\dots v_n(t)$, а также свойств оператора сдвига $T(t)$, заключаем, что вектор-функция $T(t-s)\hat{H}(s,\theta)u(s)$ абсолютно непрерывна по переменной s на промежутке $t_* \le s \le t$. Следовательно,

$$\hat{H}(t,\theta)u(t) = T(t-t_*)\hat{H}(t_*,\theta)u(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s,\theta)u(s)\big)ds. \tag{6.3.20}$$

Учтем (см. вывод формул (6.1.9) в [55, стр. 202]), что для любой функции $\varphi \in C_h$, непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-h,0]$,

$$\int\limits_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\varphi(\theta)\big) = -\int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\begin{cases}\dfrac{d\varphi}{d\theta}, & -h \le \theta < 0,\\ B_0\varphi(\theta), & \theta = 0.\end{cases} ds =$$

$$= -\int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\frac{d\varphi}{d\theta}ds + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)X_0(\theta)\frac{d\varphi}{d\theta}ds - \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)X_0(\theta)B_0\varphi\, ds. \tag{6.3.21}$$

При этом мы напоминаем, что для придания математической строгости равенству (6.3.21) его следует переписать в следующем виде:

$$\int\limits_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\varphi(\theta)\big)ds = -\int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\frac{d\varphi}{d\theta}ds + \int\limits_{t_*}^{t} dK(t,s)\frac{d\varphi}{d\theta} - \int\limits_{t_*}^{t} dK(t,s)B_0\varphi. \tag{6.3.22}$$

Здесь матрица $K(t,s)(\theta)$ определяется формулой (6.1.23). Поскольку матрица $\hat{H}(t,\theta)$ абсолютно непрерывна по $t \geq t_0$ и непрерывно дифференцируема по $\theta \in [-h,0]$ несложно показать, что

$$\int_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s,\theta)u(s)\big)ds = \int_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{-\frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta}u(s) + X_0(\theta)\frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta}u(s) -$$

$$- X_0(\theta)B_0\hat{H}u(s) + \frac{\partial \hat{H}}{\partial s}u(s) + \hat{H}(s,\theta)\frac{du}{ds}\Big\}ds = \int_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{-\frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} + X_0(\theta)\frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} -$$

$$- X_0(\theta)B_0\hat{H} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial s} + \hat{H}(s,\theta)\Big(D + \Psi(0)G\big(s,\Phi(\theta)+\hat{H}(s,\theta)+Z(s,\theta)\big)\Big)\Big\}u(s)ds. \quad (6.3.23)$$

Здесь мы, разумеется, учли тот факт, что вектор-функция $u(t)$ является решением системы (6.2.4). Повторим, что, аналогично (6.3.21), в правой части формулы (6.3.23) подынтегральные члены вида $T(t-s)X_0(\theta)(\ldots)ds$ должны быть заменены на $dK(t,s)(\theta)(\ldots)$. Воспользуемся теперь тем обстоятельством, что матрица $\hat{H}(t,\theta)$ удовлетворяет системе (6.2.79), которую можно записать в виде

$$\Phi(\theta)\Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big) + \hat{H}(t,\theta)\Big(D + \Psi(0)G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big)\Big) + \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} + R_1(t,\theta) - X_0(\theta)\frac{\partial \hat{H}}{\partial \theta} + X_0(\theta)B_0\hat{H} + X_0(\theta)G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big) - X_0(\theta)R_2(t). \quad (6.3.24)$$

Учтем (6.3.24) в (6.3.23) и представим вектор-функцию $u(t)$ в виде $u(t) = U_{\hat{H}+Z}(t,t_*)u(t_*)$, где $U_{\hat{H}+Z}(t,s)$ $(t,s \geq t_*)$ — матрица Коши системы (6.2.4) ($U(t,t) = I$), в которой $H(t,\theta)$ есть сумма (6.3.16). Тогда, вспоминая обозначение $X_0^{Q_\Lambda} = X_0(\theta) - \Phi(\theta)\Psi(0)$, из (6.3.20) выводим

$$\hat{H}(t,\theta) = T(t-t_*)\hat{H}(t_*,\theta)U_{\hat{H}+Z}(t_*,t) + \int_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{R_1(s,\theta) + X_0^{Q_\Lambda}G\big(s,\Phi(\theta)+\hat{H}(s,\theta)\big) -$$

$$- X_0(\theta)R_2(s) + \hat{H}(s,\theta)\Psi(0)G\big(s,Z(s,\theta)\big)\Big\}U_{\hat{H}+Z}(s,t)ds. \quad (6.3.25)$$

В силу (6.3.16), (6.3.3) и (6.3.25), из (6.3.18) получаем следующее представление для оператора $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}Z(t,\theta) = T(t-t_*)Z(t_*,\theta)U_{\hat{H}+Z}(t_*,t) + \int_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{X_0^{Q_\Lambda}G\big(s,Z(s,\theta)\big) - R_1(s,\theta) +$$

$$+ X_0(\theta)R_2(s) - \hat{H}(s,\theta)\Psi(0)G\big(s,Z(s,\theta)\big)\Big\}U_{\hat{H}+Z}(s,t)ds. \quad (6.3.26)$$

Поскольку матрица $R_1(t,\theta)$ непрерывна по $\theta \in [-h,0]$, то в силу (6.1.15) ее можно записать в виде суммы

$$R_1(t,\theta) = R_1^{P_\Lambda}(t,\theta) + R_1^{Q_\Lambda}(t,\theta),$$

где столбцы $(m \times N)$-матриц $R_1^{P_\Lambda}(t,\theta)$ и $R_1^{Q_\Lambda}(t,\theta)$ принадлежат пространствам P_Λ и Q_Λ соответственно при всех $t \geq t_0$. Заметим также, что $\|R_1^{P_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h}$ и $\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h}$ принадлежат классу $L_1[t_0,\infty)$. Далее, из формулы (6.2.6), определяющей вид матрицы $\hat{H}(t,\theta)$ и принадлежности столбцов матриц $H_{i_1\dots i_l}(t,\theta)$ пространству Q_Λ при всех $t \in \mathbb{R}$, следует, что столбцы матриц $\hat{H}(t,\theta)$ и $\dfrac{\partial \hat{H}}{\partial t}$ также принадлежат пространству Q_Λ при $t \geq t_0$. Значит, из (6.2.79) следует, что $R_1^{P_\Lambda}(t,\theta) = \Phi(\theta)\Psi(0)R_2(t)$, поскольку матрица $R_2(t)$ составлена из абсолютно интегрируемых на $[t_0,\infty)$ элементов матрицы $G\big(t,\Phi(\theta)+\hat{H}(t,\theta)\big)$. С учетом этого обстоятельства уравнение (6.3.26) приобретает следующий вид:

$$\mathcal{S}Z(t,\theta) = T(t-t_*)Z(t_*,\theta)U_{\hat{H}+Z}(t_*,t) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\Big\{X_0^{Q_\Lambda}G\big(s,Z(s,\theta)\big) + X_0^{Q_\Lambda}R_2(s) - \\ - R_1^{Q_\Lambda}(s,\theta) - \hat{H}(s,\theta)\Psi(0)G\big(s,Z(s,\theta)\big)\Big\}U_{\hat{H}+Z}(s,t)ds. \quad (6.3.27)$$

Вновь мы обращаем внимание на то, что для придания правой части выражения (6.3.27) необходимой строгости подынтегральные члены вида $T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\dots)ds$ должны быть заменены на $dK(t,s)^{Q_\Lambda}(\theta)(\dots)$, где матрица $K(t,s)^{Q_\Lambda}$ определяется формулой (6.1.29).

Используя теперь оценки (6.1.34)-(6.1.36), а также неравенство (6.3.10) для $U_{\hat{H}+Z}(s,t)$, получаем

$$\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h} \leq Me^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h} + M\int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)\|Z(s,\cdot)\|_{C_h}ds + \\ + M\int\limits_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}\big(|R_2(s)| + \|R_1^{Q_\Lambda}(s,\cdot)\|_{C_h}\big)ds, \qquad t \geq t_*. \quad (6.3.28)$$

Откуда, меняя порядок интегрирования,

$$\int\limits_{t_*}^{\infty} p(t)\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h}dt \leq M\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}\int\limits_{t_*}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}p(t)dt + \\ + M\int\limits_{t_*}^{\infty} p(s)\|Z(s,\cdot)\|_{C_h}\int\limits_{t_*}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)|t-s|}p(t)dtds + \\ + M\int\limits_{t_*}^{\infty}\big(|R_2(s)| + \|R_1^{Q_\Lambda}(s,\cdot)\|_{C_h}\big)\int\limits_{t_*}^{\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)|t-s|}p(t)dtds. \quad (6.3.29)$$

Учтем теперь следствие 1.4.1, неравенство (1.4.9) и тот факт, что функции $\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h}$, $|R_2(t)|$ и $p(t)\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}$ ($Z(t,\theta) \in BL$) принадлежат классу $L_1[t_*,\infty)$. Заключаем, что все интегралы в правой части (6.3.29) существуют, а, следовательно, функция $p(t)\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h}$ принадлежит $L_1[t_*,\infty)$ и оператор $\mathcal{S}$ переводит пространство BL в себя.

Заметим, что в силу (6.3.8), (6.3.9) константа M, фигурирующая в неравенстве (6.3.29), может быть выбрана одна для всех матриц $Z(t,\theta)$ из шара $\|Z\|_{BL} \le r_0$. Тогда из (6.3.29) с учетом неравенства (1.4.9) выводим, что $\|\mathcal{S}Z\|_L \le MN(t_*)$ для всех $\|Z\|_{BL} \le r_0$. Далее в силу (6.3.11), (6.3.18) для всех $\|Z\|_{BL} \le r_0$ имеем

$$\|\mathcal{S}Z\|_{BL} = \|\mathcal{A}\big(\hat{H}(t,\theta)+Z(t,\theta)\big)-\hat{H}(t,\theta)\|_B+\|\mathcal{S}Z\|_L \le M\big(\|\hat{H}\|_B+\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}+N(t_*)\big). \quad (6.3.30)$$

Поскольку $\|\hat{H}(t,\cdot)\|_{C_h} \to 0$ и $N(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то выбирая t_* достаточно большим, а величину $\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, мы можем добиться выполнения неравенства $\|\mathcal{S}Z\|_{BL} \le r_0$. Таким образом, оператор $\mathcal{S}$ переводит шар $\|Z\|_{BL} \le r_0$ пространства BL в себя. Покажем теперь, что оператор $\mathcal{S}$ будет сжимающим в этом шаре при достаточно больших t_*. Из (6.3.15), (6.3.18) следует, что для любых $Z_1(t,\theta)$, $Z_2(t,\theta)$ из шара $\|Z\|_{BL} \le r_0$

$$\|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_{BL} = \|\mathcal{A}(\hat{H}+Z_1) - \mathcal{A}(\hat{H}+Z_2)\|_B + \|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L \le$$
$$\le q\|Z_1 - Z_2\|_B + \|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L, \qquad 0 \le q < 1, \quad (6.3.31)$$

если величина $\|Z_1(t_*,\cdot)\|_{C_h} = \|Z_2(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно мала, а t_* — достаточно велико. Далее из (6.3.27) выводим

$$\|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L \le M\|Z_1(t_*,\cdot)\|_{C_h}\int_{t_*}^{\infty} e^{-\alpha(t-t_*)}p(t)|U_{H_1}(t_*,t) - U_{H_2}(t_*,t)|dt+$$
$$+ M\int_{t_*}^{\infty} p(t)\int_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)\|Z_1(s,\cdot) - Z_2(s,\cdot)\|_{C_h}dsdt+$$
$$+ M\int_{t_*}^{\infty} p(t)\int_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)}p(s)\|Z_2(s,\cdot)\|_{C_h}|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|dsdt+$$
$$+ M\int_{t_*}^{\infty} p(t)\int_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)}\big(|R_2(s)| + \|R_1^{Q_\Lambda}(s,\cdot)\|_{C_h}\big)|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|dsdt+$$
$$+ M\int_{t_*}^{\infty} p(t)\int_{t_*}^{t} e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)\|\hat{H}(s,\cdot)\|_{C_h}\|Z_1(s,\cdot) - Z_2(s,\cdot)\|_{C_h}dsdt+$$
$$+ M\int_{t_*}^{\infty} p(t)\int_{t_*}^{t} e^{-\alpha(t-s)}p(s)\|\hat{H}(s,\cdot)\|_{C_h}\|Z_2(s,\cdot)\|_{C_h}|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)|dsdt, \quad (6.3.32)$$

где $H_1 = \hat{H}+Z_1$ и $H_2 = \hat{H}+Z_2$. При выводе оценки (6.3.32) мы учли, что $Z_1(t_*,\theta) = Z_2(t_*,\theta)$, неравенство (6.3.10), а также предварительно в правой части выражения для $\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2$ мы добавили и вычли величину

$$\int_{t_*}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}(\theta)G\big(s,Z_2(t,\theta)\big)U_{H_1}(s,t)ds - \int_{t_*}^{t} T(t-s)\hat{H}(s,\theta)\Psi(0)G\big(s,Z_2(s,\theta)\big)U_{H_1}(s,t)ds.$$

Из первого неравенства в (6.3.14) при $t_* \le s \le t$ для любых $Z_1(t,\theta)$, $Z_2(t,\theta)$ из шара $\|Z\|_{BL} \le r_0$ вытекает оценка

$$|U_{H_1}(s,t) - U_{H_2}(s,t)| \le Me^{\varepsilon(t-s)}\|Z_1 - Z_2\|_L, \tag{6.3.33}$$

где $H_1 = \hat{H} + Z_1$ и $H_2 = \hat{H} + Z_2$. Меняя в (6.3.32) порядок интегрирования и учитывая (1.4.9), (6.3.33) и неравенства $\|Z_i\|_{BL} \le r_0$ $(i = 1, 2)$, заключаем

$$\|\mathcal{S}Z_1 - \mathcal{S}Z_2\|_L \le MN(t_*)\|Z_1 - Z_2\|_L \le q\|Z_1 - Z_2\|_L, \qquad 0 \le q < 1, \tag{6.3.34}$$

если t_* достаточно велико. Обращаясь теперь к неравенству (6.3.31), устанавливаем сжимаемость оператора $\mathcal{S}$ в шаре $\|Z\|_{BL} \le r_0$.

Пусть $Z(t,\theta)$ — существующее в силу доказанного выше решение уравнения (6.3.17) из пространства BL. Заметим, что поскольку функции $p(t)\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}$, $\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h}$ и $|R_2(t)|$ принадлежат классу $L_1[t_*,\infty)$, то в силу следствия 1.4.1 правая часть неравенства (6.3.28) есть функция из класса $L_1[t_*,\infty)$. Следовательно, $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$, и теорема доказана. ■

При построении асимптотики решений системы (6.2.4) на критическом многообразии часто необходимо иметь более точную информацию о скорости стремления к нулю функции $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h}$ при $t \to \infty$. В этой связи полезно привести следующий результат, вытекающий из теоремы 6.3.2.

Следствие 6.3.1. *Пусть имеет место оценка*

$$\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h} + |R_2(t)| \le \varphi(t), \qquad t \ge t_0, \tag{6.3.35}$$

где функция $\varphi(t) > 0$ при $t \ge t_0$ и, кроме того, существует такое $\beta \in (0,\alpha)$, что

$$\varphi(t_1)e^{\beta t_1} \le \varphi(t_2)e^{\beta t_2}, \qquad t_0 \le t_1 \le t_2. \tag{6.3.36}$$

Тогда решение уравнения (6.3.17) *при $t \ge t_* \ge t_0$ удовлетворяет неравенству*

$$\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \le K\varphi(t) \tag{6.3.37}$$

с некоторой постоянной K.

Доказательство. Из доказательства теоремы 6.3.2 следует, что оператор $\mathcal{S}$ переводит некоторый шар $\|Z\|_B \le r_0$ пространства B в себя и является сжимающим в этом шаре (см. неравенства (6.3.30), (6.3.31)). Рассмотрим подпространство B' пространства B, состоящее из матриц $Z(t,\theta)$, лежащих в шаре $\|Z\|_B \le r_0$, для которых имеет место неравенство (6.3.37)

с некоторой фиксированной константой K. Подпространство B' можно считать банаховым пространством с нормой пространства B. Таким образом, нам необходимо лишь показать, что при некотором выборе константы K оператор $\mathcal{S}$ переводит B' в себя. Пусть $Z(t,\theta)\in B'$, тогда из (6.3.28) с учетом (6.3.35) следует, что

$$\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h}\le Me^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}+KM\int\limits_{t_*}^{t}e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}p(s)\varphi(s)ds+$$
$$+M\int\limits_{t_*}^{t}e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-s)}\varphi(s)ds,\qquad t\ge t_*. \quad (6.3.38)$$

Далее, в силу (6.3.36) заключаем, что

$$\varphi(s)\le e^{\beta(t-s)}\varphi(t),\qquad t_*\le s\le t \quad (6.3.39)$$

и, следовательно,

$$\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}=\frac{\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)}\varphi(t_*)\le\frac{\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)}e^{\beta(t-t_*)}\varphi(t),\qquad t\ge t_*. \quad (6.3.40)$$

Учитывая (6.3.39), (6.3.40) в (6.3.38), получаем

$$\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h}\le M\Big(e^{(-\alpha+\beta+\varepsilon)(t-t_*)}\frac{\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)}+K\int\limits_{t_*}^{t}e^{(-\alpha+\beta+\varepsilon)(t-s)}p(s)ds+$$
$$+\int\limits_{t_*}^{t}e^{(-\alpha+\beta+\varepsilon)(t-s)}ds\Big)\varphi(t),\qquad t\ge t_*. \quad (6.3.41)$$

Выберем $\varepsilon>0$ настолько малым, что $-\alpha+\beta+\varepsilon<0$. Используя неравенство (1.4.9), окончательно получаем

$$\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h}\le M\Big(\frac{\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}}{\varphi(t_*)}+\frac{2KN(t_*)}{1-e^{-\alpha+\beta+\varepsilon}}+\frac{1}{\alpha-\beta-\varepsilon}\Big)\varphi(t),\qquad t\ge t_*. \quad (6.3.42)$$

Из (6.3.42) следует, что можно подобрать такую константу K и выбрать t_* достаточно большим, а величину $\|Z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой, так, чтобы при $t\ge t_*$ было выполнено неравенство $\|(\mathcal{S}Z)(t,\cdot)\|_{C_h}\le K\varphi(t)$. ■

Замечание 1. Из (6.1.2), (6.1.3), (6.2.6), (6.2.79) и условий B.2 — B.4, накладываемых на функции $v_1(t),\dots,v_n(t)$, следует, что функция $\|R_1^{Q_\Lambda}(t,\cdot)\|_{C_h}+|R_2(t)|$ есть величина порядка

$$O\Big(\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_{k+1}\le n}|v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_{k+1}}(t)|\Big)+O\Big(\sum_{i=1}^{n}|\dot v_i(t)|\Big)+O\big(\gamma(t)\big). \quad (6.3.43)$$

Установим теперь свойство глобального притяжения многообразия $\mathcal{W}(t)$.

Теорема 6.3.3. *Пусть $x(t)$ — решение системы* (6.1.1)*, определенное при $t \geq T \geq t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_* \geq T$, что при $t \geq t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u_H(t) + H(t,\theta)u_H(t) + O\big(e^{(-\alpha+\varepsilon)t}\big), \qquad t \to \infty. \tag{6.3.44}$$

Здесь величина $\alpha > 0$ выбрана так, что выполнены неравенства (6.1.34) — (6.1.36) *с показателем экспоненты, равным $(-\alpha)$, $\varepsilon \in (0,\alpha)$ — произвольно и $u_H(t)$ $(t \geq t_*)$ — некоторое решение системы на критическом многообразии* (6.2.4).

Доказательство. В силу (6.1.26), (6.1.31) для решения $x_t(\theta)$ имеем

$$x_t(\theta) = \Phi(\theta)u(t) + x_t^{Q_\Lambda}(\theta), \qquad t \geq t_*, \tag{6.3.45}$$

где $x_t^{Q_\Lambda}(\theta)$ определяется формулой (6.1.28) (см. также (6.1.30)) с $t_0 = t_*$, а функция $u(t)$ является решением системы (6.1.32) с начальным условием $u(t_*) = \big(\Psi(\xi), x_{t_*}(\theta)\big)$. Далее, пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие для системы (6.1.1), существующее в силу теоремы 6.3.1 при $t \geq t_*$, где t_* достаточно велико. Напомним, что это многообразие определяется формулой (6.2.1). Рассмотрим некоторое решение системы (6.1.1), лежащее при $t \geq t_*$ на многообразии $\mathcal{W}(t)$:

$$\tilde{x}_t(\theta) = \Phi(\theta)u_H(t) + H(t,\theta)u_H(t), \tag{6.3.46}$$

где величина $u_H(t_*)$ будет определена позднее. Покажем, что $x_t(\theta) = \tilde{x}_t(\theta) + O(e^{(-\alpha+\varepsilon)t})$. Полагая $z(t,\theta) = x_t^{Q_\Lambda}(\theta) - H(t,\theta)u_H(t)$, $r(t) = u(t) - u_H(t)$ и вычитая (6.3.46) из (6.3.45), получаем

$$x_t(\theta) - \tilde{x}_t(\theta) = \Phi(\theta)r(t) + z(t,\theta), \qquad t \geq t_*. \tag{6.3.47}$$

Замечая, что вектор-функция $H(t,\theta)u_H(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (6.3.1) и вычитая (6.3.1) из (6.1.30) (с $t_0 = t_*$), с учетом (6.3.45) получаем следующее уравнение для нахождения $z(t,\theta)$:

$$z(t,\theta) = T(t-t_*)z(t_*,\theta) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)X_0^{Q_\Lambda}G\big(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s,\theta)\big)ds, \qquad t \geq t_*. \tag{6.3.48}$$

Отметим, что мы можем считать величину $\|z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ настолько малой, насколько нам это потребуется. Действительно, мы всегда можем от решения $x_t(\theta)$ в силу линейности системы (6.1.1) перейти к рассмотрению решения $\delta x_t(\theta)/\|x_{t_*}(\theta)\|_{C_h}$ с начальной функцией при $t = t_*$ равной $\varphi(\theta)$ и нормой $\|\varphi(\theta)\|_{C_h} = \delta$ для любого наперед заданного $\delta > 0$.

Далее, вычитая (6.2.4) (где $u(t) = u_H(t)$) из (6.1.32) и учитывая (6.3.45), заключаем, что вектор-функция $r(t)$ является решением следующего уравнения:

$$\dot{r} = Dr(t) + \Psi(0)G\big(t, \Phi(\theta)r(t) + z(t,\theta)\big). \tag{6.3.49}$$

Представим матрицу D, имеющую жорданову форму (6.2.15), в виде суммы

$$D = D_1 + D_2, \qquad D_1 = \operatorname{diag} D \tag{6.3.50}$$

и D_2 — нильпотентная матрица. Заметим, что всегда можно считать, что $|D_2| < \delta$ для любого наперед заданного $\delta > 0$. Действительно, в системе (6.3.49) можно осуществить замену с постоянной матрицей $r = C_\delta \tilde{r}$, где матрица C_δ приводит матрицу $\delta^{-1}D$ к жордановой форме. Тогда эта замена оставляет матрицу D_1 без изменения, а у матрицы D_2 могут быть отличными от нуля лишь элементы $d_{i,i+1} = \delta$. Переходя от (6.3.49) к соответствующему интегральному уравнению, получаем

$$r(t) = e^{D_1(t-t_*)}r(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} e^{D_1(t-s)}\big[D_2 r(s) + \Psi(0)G\big(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s,\theta)\big)\big]ds. \tag{6.3.51}$$

Рассмотрим пространство B_1, элементами которого являются пары $\big(z(t,\theta), r(t)\big)$. Вектор-функция $z(t,\theta)$ непрерывна по переменным $\theta \in [-h, 0]$ и $t \geq t_*$, а вектор-функция $r(t)$ непрерывна по $t \geq t_*$. Считаем, что функция $z(t_*, \theta)$ фиксирована и принадлежит пространству Q_Λ. Кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$\|z(t,\cdot)\|_{C_h} \leq Ke^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad |r(t)| \leq Ke^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad t \geq t_*, \tag{6.3.52}$$

с некоторой константой $K > 0$ и выбранной произвольным образом величиной $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Пространство B_1 становится банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\big\|\big(z(t,\theta), r(t)\big)\big\|_{B_1} = \sup_{t \geq t_*}\big(e^{(\alpha-\varepsilon)(t-t_*)}(\|z(t,\cdot)\|_{C_h} + |r(t)|)\big).$$

Заметим, что если система (6.3.48), (6.3.51) имеет решение $\big(z(t,\theta), r(t)\big) \in B_1$, то уравнение (6.3.51) можно записать в следующей эквивалентной форме. Устремим в этом уравнении переменную t к бесконечности, учтем правое из неравенств (6.3.52), а также тот факт, что в силу гипотезы $\mathbf{H_1}$ все собственные числа матрицы D_1 имеют нулевые вещественные части. Получим

$$r(t_*) = -\int\limits_{t_*}^{\infty} e^{D_1(t_*-s)}\big[D_2 r(s) + \Psi(0)G\big(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s,\theta)\big)\big]ds. \tag{6.3.53}$$

Используя это соотношение в (6.3.51), переписываем последнее в следующем виде:

$$r(t) = -\int\limits_t^\infty e^{D_1(t-s)}\big[D_2 r(s) + \Psi(0)G\big(s, \Phi(\theta)r(s) + z(s,\theta)\big)\big]ds, \qquad t \geq t_*. \tag{6.3.54}$$

Систему уравнений (6.3.48), (6.3.54) запишем в виде операторного уравнения в пространстве B_1:

$$\big(z(t,\theta), r(t)\big) = \mathcal{L}\big(z(t,\theta), r(t)\big) = \big(\mathcal{L}_1\big(z(t,\theta), r(t)\big), \mathcal{L}_2\big(z(t,\theta), r(t)\big)\big), \tag{6.3.55}$$

где операторы $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ определяются правыми частями уравнений (6.3.48) и (6.3.54) соответственно. Покажем, что оператор $\mathcal{L}$ будет сжимающим в пространстве B_1, если величина $\|z(t_*,\cdot)\|$ достаточно мала и t_* достаточно велико.

Сначала установим, что оператор $\mathcal{L}$ переводит пространство B_1 в себя. Пусть $(z,r) \in B_1$, тогда из (6.3.48) с учетом (1.4.9) следует, что

$$\|\big(\mathcal{L}_1(z,r)\big)(t,\cdot)\|_{C_h} \leq Me^{-\alpha(t-t_*)}\|z(t_*,\cdot)\|_{C_h} + MKe^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}\int\limits_{t_*}^t e^{-\varepsilon(t-s)}p(s)ds \leq$$

$$\leq M\Big(\|z(t_*,\cdot)\|_{C_h} + \frac{2KN(t_*)}{1-e^{-\varepsilon}}\Big)e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad t \geq t_*. \tag{6.3.56}$$

Выбирая теперь $\|z(t_*,\cdot)\|_{C_h}$ достаточно малой и t_* достаточно большим можно добиться того, что для функции $\mathcal{L}_1(z,r)$ будет выполнено левое из неравенств (6.3.52). Замечая, что $|e^{D_1(t-s)}| \leq C$ для некоторой константы C (она зависит только от используемой матричной нормы) и $|D_2| < \delta$, из (6.3.54) выводим

$$|\big(\mathcal{L}_2(z,r)\big)(t)| \leq \frac{CK\delta}{\alpha-\varepsilon}e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)} + MK\int\limits_t^\infty e^{(-\alpha+\varepsilon)(s-t_*)}p(s)ds \leq$$

$$\leq K\Big(\frac{C\delta}{\alpha-\varepsilon} + M\hat{\varepsilon} + M\int\limits_t^\infty \gamma(s)ds\Big)e^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad t \geq t_*, \tag{6.3.57}$$

где величина M зависит, вообще говоря, от δ. Здесь мы учли формулу (6.3.5), определяющую вид функции $p(t)$, а также то обстоятельство, что $w(t) < \hat{\varepsilon}$ для любого наперед заданного $\hat{\varepsilon} > 0$, если t_* достаточно велико. Используя теперь тот факт, что $\gamma(t) \in L_1[t_0,\infty)$, произвольность величин δ, $\hat{\varepsilon}$ и выбирая t_* достаточно большим, устанавливаем справедливость правого из неравенств (6.3.52) для функции $\mathcal{L}_2(z,r)$.

Установим теперь сжимаемость оператора $\mathcal{L}$. Пусть (z_1,r_1) и (z_2,r_2) принадлежат пространству B_1, тогда

$$\|\mathcal{L}(z_1,r_1)-\mathcal{L}(z_2,r_2)\|_{B_1}=\sup_{t\geq t_*}\Big\{e^{(\alpha-\varepsilon)(t-t_*)}\big(\|(\mathcal{L}_1(z_1,r_1)-\mathcal{L}_1(z_2,r_2))(t,\cdot)\|_{C_h}+$$

$$+|(\mathcal{L}_2(z_1,r_1)-\mathcal{L}_2(z_2,r_2))(t)|\big)\Big\}\leq M\sup_{t\geq t_*}\int\limits_{t_*}^{t}e^{-\varepsilon(t-s)}p(s)e^{(\alpha-\varepsilon)(s-t_*)}\big\{|r_1(s)-r_2(s)|+$$

$$+\|z_1(s,\cdot)-z_2(s,\cdot)\|_{C_h}\big\}ds+\sup_{t\geq t_*}\Big\{C\delta e^{(\alpha-\varepsilon)t}\int\limits_{t}^{\infty}e^{(-\alpha+\varepsilon)s}e^{(\alpha-\varepsilon)(s-t_*)}|r_1(s)-r_2(s)|ds+$$

$$+Me^{(\alpha-\varepsilon)t}\int\limits_{t}^{\infty}e^{(-\alpha+\varepsilon)s}p(s)e^{(\alpha-\varepsilon)(s-t_*)}\big(|r_1(s)-r_2(s)|+\|z_1(s,\cdot)-z_2(s,\cdot)\|_{C_h}\big)ds\Big\}\leq$$

$$\leq\Big\{\frac{2MN(t_*)}{1-e^{-\varepsilon}}+\frac{C\delta}{\alpha-\varepsilon}+M\hat{\varepsilon}+M\int\limits_{t_*}^{\infty}\gamma(s)ds\Big\}\|(z_1,r_1)-(z_2,r_2)\|_{B_1}. \quad (6.3.58)$$

Выбирая теперь t_* достаточно большим, а величины $\delta,\hat{\varepsilon}$ достаточно малыми, устанавливаем сжимаемость оператора $\mathcal{L}$ в пространстве B_1. Следовательно, уравнение (6.3.55) имеет единственное решение в пространстве B_1.

Обращаясь теперь к равенству (6.3.47), завершаем доказательство теоремы. Осталось отметить, что функция $u_H(t)$ в представлении (6.3.46) является решением системы (6.2.4) с начальным условем $u_H(t_*)=u(t_*)-r(t_*)$, где $u(t_*)=\big(\Psi(\xi),x_{t_*}(\theta)\big)$, а $r(t_*)$ определяется формулой (6.3.53). ■

Пусть $u^{(1)}(t),\dots,u^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии (6.2.4), а $x(t)$ — произвольное решение системы (6.1.1), определенное при $t\geq T$. Тогда в силу теоремы 6.3.3 имеет место следующее асимптотическое представление:

$$x(t)=x_t(0)=\big(\Phi(0)+H(t,0)\big)\sum_{i=1}^{N}c_iu^{(i)}(t)+O\big(e^{-\beta t}\big),\qquad t\to\infty, \quad (6.3.59)$$

где $c_1,\dots,c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\beta>0$ — некоторое действительное число. Осталось заметить, что система (6.2.4), описывающая динамику исходной задачи (6.1.1) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, относится к классу линейных систем ОДУ с колебательно убывающими коэффициентами. Метод асимптотического интегрирования таких систем описан в главе 1.

6.4 Построение асимптотики решений скалярного дифференциального уравнения с двумя запаздываниями

Рассмотрим задачу построения асимптотических формул для решений скалярного уравнения с двумя запаздываниями

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2}x(t-1) + \frac{a\sin\omega t}{t^{\rho}}x(t-h) \tag{6.4.1}$$

при $t \to \infty$. Здесь параметры $a, \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $h \geq 0$ и $\rho > 0$. Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $\omega > 0$.

Имеем,

$$B_0\varphi = -\frac{\pi}{2}\varphi(-1), \quad G(t,\varphi) = B(t,\varphi) = \frac{a\sin\omega t}{t^{\rho}}\varphi(-h), \tag{6.4.2}$$

где $\varphi(\theta) \in C_\tau \equiv C\big([-\tau,0],\mathbb{C}\big)$ и $\tau = \max(1,h)$. Известно (см., например, [55]), что характеристическое уравнение (6.1.8)

$$\Delta(\lambda) = \lambda + \frac{\pi}{2}e^{-\lambda} = 0$$

имеет чисто мнимые корни $\lambda_{1,2} = \pm\mathbf{i}\pi/2$, а вещественные части всех остальных корней этого уравнения — отрицательны. Таким образом, мы находимся в условиях применимости описанного в предыдущих разделах метода. Несложные вычисления показывают, что (1×2)-матрица $\Phi(\theta)$ и (2×1)-матрица $\Psi(\xi)$, удовлетворяющие условию нормировки (6.1.16), могут быть выбраны следующим образом:

$$\Phi(\theta) = \big(e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}\theta}, e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}\theta}\big), \quad -\tau \leq \theta \leq 0, \qquad \Psi(\xi) = \frac{4}{4+\pi^2}\begin{pmatrix}(1-\mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}\xi}\\ (1+\mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}\xi}\end{pmatrix}, \quad 0 \leq \xi \leq \tau. \tag{6.4.3}$$

Система на критическом многообразии (6.2.4) имеет вид

$$\dot{u} = \Big[D + t^{-\rho}B_1(t) + W(t)\Big]u, \qquad t \geq t_*, \tag{6.4.4}$$

где

$$D = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{i} & 0\\ 0 & -\mathbf{i}\end{pmatrix}, \quad B_1(t) = -\frac{2a\mathbf{i}}{4+\pi^2}(e^{\mathbf{i}\omega t} - e^{-\mathbf{i}\omega t})\begin{pmatrix}(1-\mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}h} & (1-\mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}h}\\ (1+\mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{-\mathbf{i}\frac{\pi}{2}h} & (1+\mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{\mathbf{i}\frac{\pi}{2}h}\end{pmatrix}, \tag{6.4.5}$$

и $W(t) = \Psi(0)G\big(t, H(t,\theta)\big)$. Из теоремы 6.3.2 с учетом следствия 6.3.1 и замечания 1 выводим, что $W(t) = O\big(t^{-2\rho}\big)$ при $t \to \infty$. Рассмотрим далее следующие случаи.

Если

$$\rho > 1, \tag{6.4.6}$$

то система (6.4.4) имеет L–диагональную форму (1.1.3). Из теоремы Левинсона тогда следует, что фундаментальные решения системы (6.4.4) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u^{(j)}(t) = \big(e_j + o(1)\big)e^{(-1)^{j-1}\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}, \quad j = 1, 2, \tag{6.4.7}$$

где e_j — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^2$. Тогда в силу (6.3.59) и свойств матрицы $H(t, \theta)$ все решения уравнения (6.4.1) при $t \to \infty$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t} + c_2\big(1 + o(1)\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t} + O\big(e^{-\beta t}\big), \tag{6.4.8}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число.

Пусть теперь

$$\frac{1}{2} < \rho \leq 1. \tag{6.4.9}$$

В системе (6.4.4) осуществим замену $u = \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big)u_1$, которая приводит ее к виду

$$\dot{u}_1 = \big[t^{-\rho}A_1(t) + W_1(t)\big]u_1, \tag{6.4.10}$$

где

$$A_1(t) = -\frac{2a\mathbf{i}}{4 + \pi^2}(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}) \begin{pmatrix} (1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h} & (1 - \mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h}e^{-\mathrm{i}\pi t} \\ (1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h}e^{\mathrm{i}\pi t} & (1 + \mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h} \end{pmatrix}, \tag{6.4.11}$$

а матрица $W_1(t) \in L_1[t_*, \infty)$. В системе (6.4.10) сделаем усредняющую замену

$$u_1 = \big(I + t^{-\rho}Y_1(t)\big)u_2,$$

в результате которой в силу теоремы 1.2.1 приходим к усредненной системе

$$\dot{u}_2 = \big[t^{-\rho}A_1 + W_2(t)\big]u_2. \tag{6.4.12}$$

Здесь $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$ и $W_2(t)$ — некоторая матрица из класса $L_1[t_*, \infty)$. Вид матрицы A_1 будет различаться в следующих случаях.

Пусть

$$\omega \neq \pi. \tag{6.4.13}$$

Тогда матрица A_1 является нулевой и система (6.4.12) имеет L–диагональный вид. В силу теоремы Левинсона базисные решения этой системы имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u_2^{(j)}(t) = e_j + o(1), \quad j = 1, 2.$$

Возвращаясь теперь к системе (6.4.4), получаем асимптотические формулы (6.4.7) для ее фундаментальных решений при $t \to \infty$. Следовательно, все решения исходного уравнения (6.4.1) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (6.4.8).

Предположим теперь, что

$$\omega = \pi. \tag{6.4.14}$$

Имеем,

$$A_1 = -\frac{2a\mathbf{i}}{4+\pi^2}\begin{pmatrix} 0 & (1-\mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h} \\ -(1+\mathbf{i}\frac{\pi}{2})e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.4.15}$$

Собственные числа матрицы A_1 различны и имеют вид

$$\mu_{1,2} = \pm\frac{a}{\sqrt{4+\pi^2}}.$$

Таким образом, система (6.4.12) заменой $u_2 = Cu_3$, где матрица $C = [f_1, f_2]$ диагонализирует матрицу A_1, приводится к L–диагональному виду. Фундаментальные решения системы (6.4.12) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u_2^{(j)}(t) = \big(f_j + o(1)\big)\exp\Big\{\mu_j \int t^{-\rho}dt\Big\}, \quad j = 1, 2,$$

где

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\delta \end{pmatrix}, \quad \delta = \frac{-\pi + 2\mathbf{i}}{\sqrt{4+\pi^2}}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h}.$$

В этой ситуации все решения исходного уравнения (6.4.1) имеют следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x(t) = c_1\Big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big(1+o(1)\big) + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big(\delta+o(1)\big)\Big)\exp\Big\{\mu_1\int t^{-\rho}dt\Big\} + \\ + c_2\Big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big(1+o(1)\big) + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big(-\delta+o(1)\big)\Big)\exp\Big\{\mu_2\int t^{-\rho}dt\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big), \end{aligned} \tag{6.4.16}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число.

Рассмотрим далее случай, когда

$$\frac{1}{3} < \rho \le \frac{1}{2}. \tag{6.4.17}$$

Матрица $W(t) = \Psi(0)G\big(t, H(t,\theta)\big)$ в системе (6.4.4) более не принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$. Таким образом, нам необходимо построить (1×2)-матрицу $H(t,\theta)$, описывающую критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$. В силу (6.2.6), (6.3.16) имеем,

$$H(t,\theta) = t^{-\rho}H_1(t,\theta) + t^{-2\rho}H_2(t,\theta) + Z(t,\theta), \tag{6.4.18}$$

где $\|Z(t,\cdot)\|_{C_\tau} \in L_1[t_*,\infty)$. Заметим, что представляет интерес лишь изучение ситуации, когда выполнено неравенство (6.4.13). Действительно, если имеет место равенство (6.4.14), то усредненную систему на критическом многообразии можно сперва представить в виде (1.2.29), где $A = A_1$, а матрица A_1 определяется формулой (6.4.15). Затем, воспользовавшись леммой 1.1.1, эту систему можно привести к L–диагональному виду (1.1.3) и построить асимптотику с помощью теоремы Левинсона. Несложно установить, что в случае выполнения равенства (6.4.14) при условии $\rho \le 1/2$ для решений уравнения (6.4.1) при $t \to \infty$ будет справедливо асимптотическое представление типа (6.4.16). Единственное отличие состоит в том, что в этом представлении величину $\int t^{-\rho}dt$ нужно заменить на величину

$$\frac{t^{1-\rho}}{1-\rho}\big(1+o(1)\big). \tag{6.4.19}$$

Итак будем считать, что выполнено неравенство (6.4.13). Вычислим матрицу $H_1(t,\theta)$, используя алгоритм, описанный в разделе 6.2. Подставим представление (6.4.18) в систему (6.2.5) и соберем члены, содержащие множитель $t^{-\rho}$. Получаем следующую систему для нахождения (1×2)-матрицы $H_1(t,\theta)$:

$$\begin{aligned}\frac{a}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\Phi(\theta)\Psi(0)\Phi(-h) + H_1(t,\theta)D + \frac{\partial H_1}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \dfrac{\partial H_1}{\partial\theta}, & -1\le\theta<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}H_1(t,-1)+\dfrac{a}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\Phi(-h), & \theta=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{6.4.20}$$

Полагая $H_1(t,\theta) = \big(h_1(t,\theta), h_2(t,\theta)\big)$ получаем следующие задачи для нахождения элементов этой матрицы:

$$\begin{aligned}-\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\big(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\Big(\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta-h)}+\big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta+h)}\Big)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h_1(t,\theta)+\frac{\partial h_1}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \dfrac{\partial h_1}{\partial\theta}, & -\tau\le\theta<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}h_1(t,-1)+\dfrac{a}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h}, & \theta=0,\end{cases}\end{aligned} \tag{6.4.21}$$

и

$$\begin{aligned}-\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\big(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\Big(\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta+h)}+\big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta-h)}\Big)-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h_2(t,\theta)+\frac{\partial h_2}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \dfrac{\partial h_2}{\partial\theta}, & -\tau\le\theta<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}h_2(t,-1)+\dfrac{a}{2\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h}, & \theta=0.\end{cases}\end{aligned} \tag{6.4.22}$$

Каждая из этих задач однозначно разрешима в силу теоремы 6.2.1. Отсюда и из вида (6.4.21), (6.4.22) легко вывести, что $h_2(t,\theta) = \overline{h_1(t,\theta)}$. Решение $h_1(t,\theta)$ ищем в виде

$$h_1(t,\theta) = g_1(\theta)e^{\mathrm{i}\omega t} + g_2(\theta)e^{-\mathrm{i}\omega t}. \tag{6.4.23}$$

Подставляя (6.4.23) в (6.4.21) и собирая члены при одинаковых показателях экспоненты, получаем:

$$-\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\Big(\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta-h)}+\big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta+h)}\Big)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}g_1(\theta)+\mathrm{i}\omega g_1(\theta)= \\ =\begin{cases}\dfrac{dg_1}{d\theta}, & -\tau\le\theta<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}g_1(-1)-\dfrac{a\mathrm{i}}{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h}, & \theta=0,\end{cases} \tag{6.4.24}$$

и

$$\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\Big(\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta-h)}+\big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta+h)}\Big)+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}g_2(\theta)-\mathrm{i}\omega g_2(\theta)= \\ =\begin{cases}\dfrac{dg_2}{d\theta}, & -\tau\le\theta<0,\\ -\dfrac{\pi}{2}g_2(-1)+\dfrac{a\mathrm{i}}{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h}, & \theta=0.\end{cases} \tag{6.4.25}$$

Несложные вычисления приводят к следующим формулам для функций $g_j(\theta)$ $(j=1,2)$:

$$g_{1,2}(\theta)=K_{1,2}e^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}\pm\omega)\theta}+\frac{2a}{\omega(4+\pi^2)}\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta-h)}+\frac{2a}{(\omega\pm\pi)(4+\pi^2)}\big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}(\theta+h)}, \tag{6.4.26}$$

$$K_{1,2}=\mp\frac{ae^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h}}{2\big(\frac{\pi}{2}\pm\omega-\frac{\pi}{2}\exp\{\mp\mathrm{i}\omega\}\big)}.$$

Здесь верхний знак в формулах и константа K_1 соответствуют функции $g_1(\theta)$, а нижний знак и константа K_2 — функции $g_2(\theta)$. Таким образом, матрица $H_1(t,\theta)$ имеет вид

$$H_1(t,\theta)=\big(h_1(t,\theta),\overline{h_1(t,\theta)}\big), \tag{6.4.27}$$

где функция $h_1(t,\theta)$ определяется формулами (6.4.23), (6.4.26).

Возвращаясь теперь к системе на критическом многообразии (6.4.4) и учитывая (6.4.18), (6.4.27), получаем для нее следующее представление:

$$\dot u=\Big[D+t^{-\rho}B_1(t)+t^{-2\rho}B_2(t)+R(t)\Big]u,\qquad t\ge t_*, \tag{6.4.28}$$

где матрицы D и $B_1(t)$ определяются формулами (6.4.5), а матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*,\infty)$. Кроме того,

$$B_2(t)=-\frac{a\mathrm{i}}{2}(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t})\Psi(0)H_1(t,-h)= \\ =-\frac{2a\mathrm{i}}{4+\pi^2}\big(e^{\mathrm{i}\omega t}-e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\begin{pmatrix}\big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)h_1(t,-h) & \big(1-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\overline{h_1(t,-h)}\\ \big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)h_1(t,-h) & \big(1+\mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\overline{h_1(t,-h)}\end{pmatrix}, \tag{6.4.29}$$

В системе (6.4.28) сделаем замену $u=\operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t},e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big)u_1$, в результате которой она приводится к виду

$$\dot u_1=\big[t^{-\rho}A_1(t)+t^{-2\rho}A_2(t)+R_1(t)\big]u_1. \tag{6.4.30}$$

Здесь матрица $A_1(t)$ определятся формулой (6.4.11),

$$A_2(t) = -\frac{2a\mathfrak{i}}{4+\pi^2}(e^{\mathfrak{i}\omega t} - e^{-\mathfrak{i}\omega t}) \begin{pmatrix} (1-\mathfrak{i}\frac{\pi}{2})h_1(t,-h) & (1-\mathfrak{i}\frac{\pi}{2})e^{-\mathfrak{i}\pi t}\overline{h_1(t,-h)} \\ (1+\mathfrak{i}\frac{\pi}{2})e^{\mathfrak{i}\pi t}h_1(t,-h) & (1+\mathfrak{i}\frac{\pi}{2})\overline{h_1(t,-h)} \end{pmatrix}, \qquad (6.4.31)$$

и матрица $R_1(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Согласно теореме 1.2.1, осуществим в системе (6.4.30) усредняющую замену

$$u_1 = \big[I + t^{-\rho}Y_1(t) + t^{-2\rho}Y_2(t)\big]u_2.$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot{u}_2 = \big[t^{-2\rho}A_2 + R_2(t)\big]u_2. \qquad (6.4.32)$$

Здесь мы учли, что в силу (6.4.13) матрица $A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big]$ является нулевой. Далее,

$$A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big], \qquad \dot{Y}_1 = A_1(t) - A_1 = A_1(t) \qquad (6.4.33)$$

и матрица $R_2(t) \in L_1[t_*, \infty)$.

Пусть сначала

$$\omega \neq \frac{\pi}{2}, \pi. \qquad (6.4.34)$$

Матрица A_2, определяемая соотношениями (6.4.33), имеет следующий вид:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix}, \quad \nu = -\frac{a^2\mathfrak{i}}{4+\pi^2}\Big(1-\mathfrak{i}\frac{\pi}{2}\Big)\Big(\Psi(\omega,h) + \Psi(-\omega,h)\Big), \qquad (6.4.35)$$

где

$$\Psi(\omega,h) = \frac{e^{\mathfrak{i}(\omega-\pi)h}}{\frac{\pi}{2} - \omega - \frac{\pi}{2}e^{\mathfrak{i}\omega}}. \qquad (6.4.36)$$

Фундаментальные решения системы (6.4.32) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u_2^{(1,2)}(t) = \big(e_{1,2} + o(1)\big)\exp\Big\{\big(\operatorname{Re}\nu \pm \mathfrak{i}\operatorname{Im}\nu\big)\int t^{-2\rho}dt\Big\},$$

где e_j — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^2$. Следовательно, все решения уравнения (6.4.1) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)\exp\big\{\mathfrak{i}\big(\frac{\pi}{2}t + \operatorname{Im}\nu\int t^{-2\rho}dt\big)\big\}\exp\big\{\operatorname{Re}\nu\int t^{-2\rho}dt\big\} + \\ + c_2\big(1+o(1)\big)\exp\big\{-\mathfrak{i}\big(\frac{\pi}{2}t + \operatorname{Im}\nu\int t^{-2\rho}dt\big)\big\}\exp\big\{\operatorname{Re}\nu\int t^{-2\rho}dt\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big), \end{aligned} \qquad (6.4.37)$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — некоторое действительное число. Очевидно, что качественное поведение решений уравнения (6.4.1) в рассматриваемой ситуации будет определяться знаком величины $\operatorname{Re}\nu$. По причине громоздкости соответствующего выражения мы его здесь не приводим.

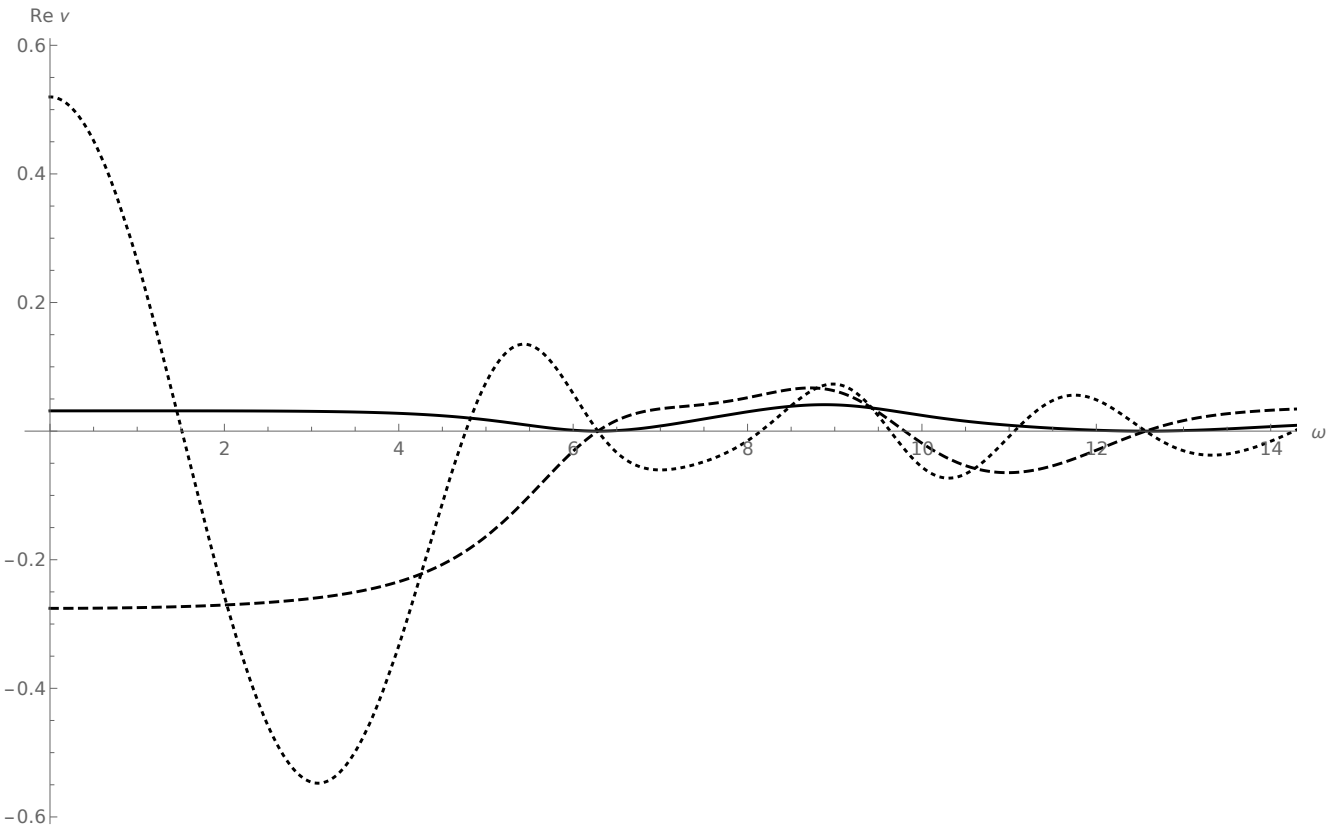

Рис. 6.4.1. Графики величины $\operatorname{Re}\nu$ при $a=2$: сплошная линия — $h=0$, штриховой пунктир — $h=1$, точечный пунктир — $h=2$

Графики величины $\operatorname{Re}\nu$ при $h=0,1,2$ и $a=2$ как функции переменной ω изображены на рис. 6.4.1. Используя формулы (6.4.35), (6.4.36), а также при необходимости пакеты символьных вычислений (мы использовали Wolfram Mathematica 10), несложно установить следующие предельные равенства:

$$\lim_{\omega\to 0}\operatorname{Re}\nu = 2\pi a^2\sin(\pi h)\frac{4\left(4+\pi^2\right)h-3\pi^2+4}{\left(4+\pi^2\right)^3}+ \tag{6.4.38}$$
$$+a^2\cos(\pi h)\frac{2\left(\pi^4-16\right)h-\pi^2\left(\pi^2-12\right)}{\left(4+\pi^2\right)^3},$$
$$\lim_{\omega\to\pi}\operatorname{Re}\nu = -\frac{a^2\left[2\left(2\pi\left(4+\pi^2\right)h+\left(4+\pi^2\right)\sin(2\pi h)-\pi^3\right)+\pi\left(4+\pi^2\right)\cos(2\pi h)\right]}{4\pi\left(4+\pi^2\right)^2}, \tag{6.4.39}$$

и

$$\operatorname{Re}\nu = \frac{a^2\sin(\omega h)\left(\pi\sin(\pi h)-2\cos(\pi h)\right)}{(4+\pi^2)\omega}+O\left(\omega^{-2}\right),\quad \omega\to+\infty. \tag{6.4.40}$$

Предположим теперь, что

$$\omega=\frac{\pi}{2}. \tag{6.4.41}$$

Несложные, но довольно утомительные вычисления, приводят к следующей формуле для

матрицы A_2:

$$A_2 = \frac{a^2}{4+\pi^2}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{11}} \end{pmatrix}, \tag{6.4.42}$$

где

$$a_{11} = (-\mathrm{i})\Big(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\Big)\Big(\Psi(\frac{\pi}{2}, h) + \Psi(-\frac{\pi}{2}, h)\Big),$$
$$a_{12} = -\frac{2}{\pi}\Big(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\Big)e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}h},$$

а величина $\Psi(\omega, h)$ описывается формулой (6.4.36). Собственные числа матрицы A_2 определяются как корни характеристического полинома

$$p(\mu) = \mu^2 + p_1(h)\mu + p_2(h), \tag{6.4.43}$$

где 4-периодические функции $p_1(h)$ и $p_2(h)$ определяются формулами:

$$p_1(h) = -\frac{2a^2}{4+\pi^2}\operatorname{Re} a_{11}, \quad p_2(h) = \frac{a^4}{(4+\pi^2)^2}\big(|a_{11}|^2 - |a_{12}|^2\big).$$

Собственные числа различны, если дискриминант

$$d(h) = p_1^2(h) - 4p_2^2(h) = \frac{4a^4}{(4+\pi^2)^2}\big((\operatorname{Re} a_{11})^2 - |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2\big) \tag{6.4.44}$$

отличен от нуля. В этом случае они имеют следующий вид:

$$\mu_{1,2} = \frac{a^2}{4+\pi^2}\left(\operatorname{Re} a_{11} \pm \begin{cases} \sqrt{(\operatorname{Re} a_{11})^2 - |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2}, & d(h) > 0, \\ \mathrm{i}\sqrt{|a_{11}|^2 - |a_{12}|^2 - (\operatorname{Re} a_{11})^2}, & d(h) < 0, \end{cases}\right). \tag{6.4.45}$$

Явные формулы для собственных чисел заинтересованный читатель можно получить, используя любой пакет символьных вычислений. Они довольно громоздки. Система (6.4.32) при условии $d(h) \neq 0$ заменой $u_2 = Cu_3$ приводится к L–диагональному виду. Фундаментальные решения системы (6.4.32), следовательно, имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u_2^{(j)}(t) = \big(f_j + o(1)\big)\exp\Big\{\mu_j \int t^{-2\rho}dt\Big\}, \quad j = 1, 2, \tag{6.4.46}$$

где $f_1 = \big(\delta_1, \delta_2\big)^T$ и f_2 — собственные векторы матрицы A_2, отвечающие собственным числам μ_1 и μ_2 соответственно. Решения исходного уравнения (6.4.1) при $t \to \infty$ имеют следующее асимптотическое представление:

$$x(t) \;=\; c_1\Big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big(\delta_1 + o(1)\big) + e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big(\delta_2 + o(1)\big)\Big)\exp\Big\{\mu_1\int t^{-2\rho}dt\Big\} + O\Big(\exp\Big\{\mu_2\int t^{-2\rho}dt\Big\}\Big), \tag{6.4.47}$$

где c_1 — произвольная комплексная постоянная. В силу представления (6.4.47) динамика решений уравнения (6.4.1) будет определяться расположением собственных чисел $\mu_{1,2}$ на комплексной плоскости. Воспользовавшись критерием Рауса–Гурвица применительно к многочлену (6.4.43), заключаем следующее. Если при некотором h коэффициенты $p_1(h)$ и $p_2(h)$ положительны, то все решения уравнения (6.4.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$. Если хотя бы одна из этих величин отрицательна при некотором h, то в этом случае уравнение (6.4.1) имеет неограниченные при $t \to \infty$ решения. На рисунке 6.4.2 изображены графики величин $p_1(h)$, $p_2(h)$, а также величины $d(h)$, определяемой формулой (6.4.44), при $a = 2$.

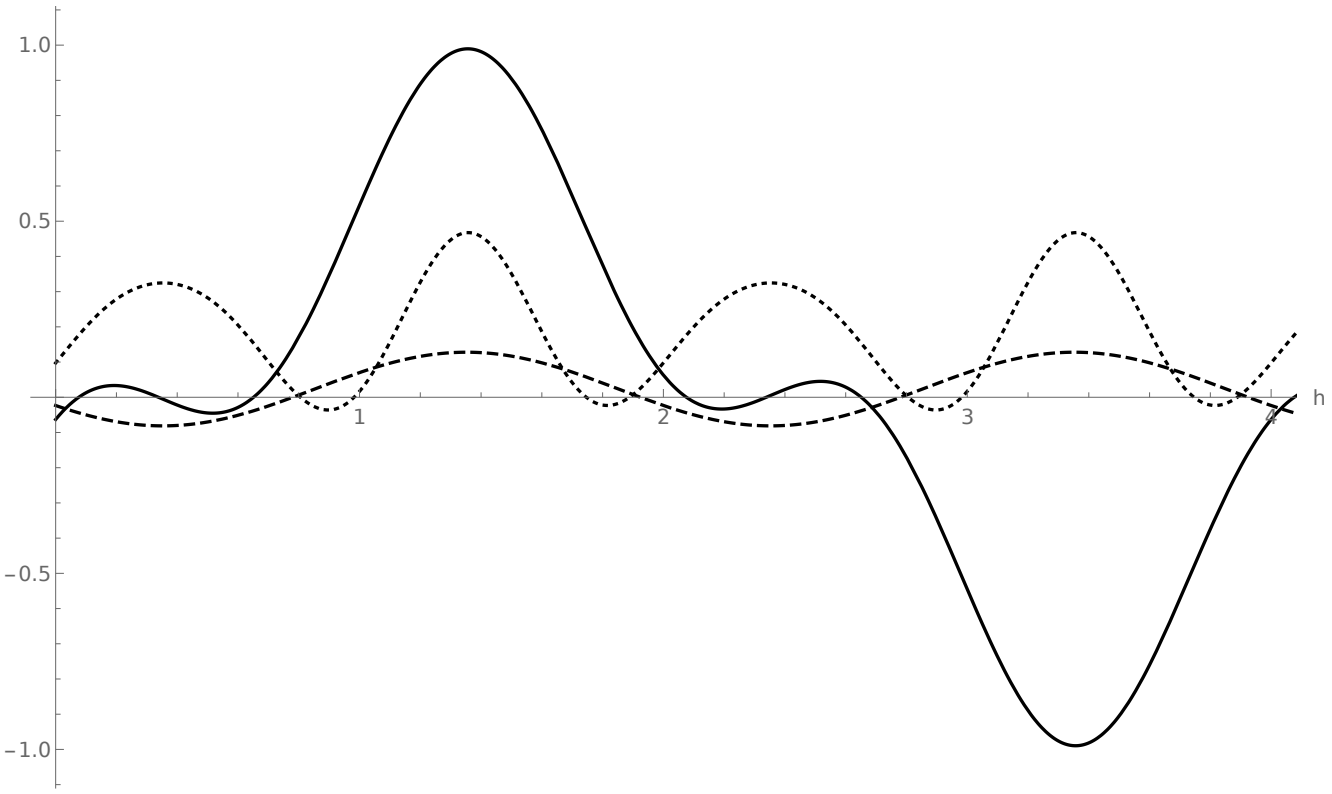

Рис. 6.4.2. Графики коэффициентов многочлена (6.4.43) и его дискриминанта (6.4.44) как функций переменной h при $a = 2$: сплошная линия — $p_1(h)$, штриховой пунктир — $p_2(h)$, точечный пунктир — $d(h)$

Пусть, наконец,

$$\rho \leq \frac{1}{3}. \tag{6.4.48}$$

В силу (6.2.6), (6.3.16) имеем,

$$H(t,\theta) = t^{-\rho} H_1(t,\theta) + \ldots + t^{-k\rho} H_k(t,\theta) + Z(t,\theta). \tag{6.4.49}$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $(k+1)\rho > 1$, а (1×2)-матрица $Z(t,\theta)$ такова, что $\|Z(t,\cdot)\|_{C_\tau} \in$

$L_1[t_*,\infty)$. Система на критическом многообразии имеет вид

$$\dot u = \Big[D + t^{-\rho}B_1(t) + t^{-2\rho}B_2(t) + \ldots + t^{-k\rho}B_k(t) + R(t)\Big]u, \qquad t \geq t_*, \tag{6.4.50}$$

где матрицы D, $B_1(t)$ определяются формулами (6.4.5), матрица $B_2(t)$ имеет вид (6.4.29) и матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*,\infty)$. Заменой $u = \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big)u_1$ систему (6.4.50) приводим к виду

$$\dot u_1 = \big[t^{-\rho}A_1(t) + t^{-2\rho}A_2(t) + \ldots + t^{-k\rho}A_k(t) + R_1(t)\big]u_1. \tag{6.4.51}$$

Согласно теореме 1.2.1, осуществим в системе (6.4.51) усредняющую замену

$$u_1 = \big[I + t^{-\rho}Y_1(t) + t^{-2\rho}Y_2(t) + \ldots + t^{-k\rho}Y_k(t)\big]u_2.$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot u_2 = \big[A_1 t^{-\rho} + t^{-2\rho}A_2 + \ldots + t^{-k\rho}A_k + R_2(t)\big]u_2. \tag{6.4.52}$$

Дальнейшей анализ системы (6.4.52) связан с представлением ее в виде (1.2.29) и последующим использованием леммы 1.1.1 для приведения этой системы к L–диагональной форме (1.1.3). Если $\omega = \pi$, то собственные числа матрицы A_1 различны. Следовательно, в этом случае для решений уравнения (6.4.1) справедливо представление (6.4.16), где величину $\int t^{-\rho}dt$ нужно заменить на выражение (6.4.19). Далее, если $\omega = \frac{\pi}{2}$, то $A_1 = 0$, а собственные числа матрицы A_2 имеют вид (6.4.45). Эти собственные числа различны, если величина d, определяемая формулой (6.4.44), отлична от нуля. В этом случае асимптотика всех решений уравнения (6.4.1) определяется формулой (6.4.47), где $\int t^{-2\rho}dt$ следует заменить выражением

$$\frac{t^{1-2\rho}}{1-2\rho}\big(1 + o(1)\big). \tag{6.4.53}$$

Наконец, если выполнены неравенства (6.4.34), то $A_1 = 0$, а матрица A_2 определяется формулой (6.4.35). В этой ситуации собственные числа различны, если $\operatorname{Im}\nu \neq 0$. Тогда в предположении, что $\operatorname{Re}\nu \neq 0$, асимптотика всех решений уравнения (6.4.1) имеет вид (6.4.37), где $\int t^{-2\rho}dt$ заменен величиной (6.4.53).

Завершая этот раздел, отметим, что совершенно аналогичным образом могут быть получены, в частности, асимптотические формулы для решений уравнения

$$\dot x = \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{t} + \frac{\sin(e^t)}{t^2}\right]x(t-1), \quad t > 0, \tag{6.4.54}$$

иллюстрирующего в работе [90] использование некоторого варианта теоремы Левинсона для систем ФДУ.

6.5 Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием

В этом разделе мы покажем, как описанный в разделах 6.2 и 6.3 метод асимптотического интегрирования может быть распространен на более широкий класс систем ФДУ. Как и ранее, будем рассматривать системы вида (6.1.1) с оператором $G(t, x_t)$ типа (6.1.2). Заметим, что для доказательства теорем 6.3.1 — 6.3.3 существенными являются лишь следующие свойства исходной системы (6.1.1).

P1. Экспоненциальные оценки (6.1.34), (6.1.36) на дополнительном пространстве Q_Λ.

P2. Вытекающая из (6.1.2), (6.1.3) и (6.1.4) в силу свойства B.2 функций $v_1(t), \dots v_n(t)$ оценка

$$|G(t, \varphi)| \le p(t)\|\varphi\|_{C_h}, \qquad p(t) = w(t) + \gamma(t), \tag{6.5.1}$$

где $w(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

P3. Возможность удовлетворить системе (6.2.5) выражением вида (6.2.6), (6.2.12) с точностью до слагаемых $\hat{R}(t, \theta)$ таких, что $\|\hat{R}(t, \cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_0, \infty)$.

Подход, позволяющий распространить разработанную нами асимптотическую технику на более широкий класс систем ФДУ, был предложен в работе [93]. Далее мы будем ему следовать. Рассмотрим систему (6.1.1) с оператором $G(t, x_t)$ вида (6.1.2), где $B(t, \cdot)$ и $R(t, \cdot)$ — линейные ограниченные операторы, действующие из C_h в $\mathbb{C}^m$. На сей раз будем считать, что при любом фиксированном $\varphi \in C_h$ функции $B(\cdot, \varphi)$ и $R(\cdot, \varphi)$ непрерывны по $t \ge t_0$. Напомним, что функция $\varphi \in C_h$ называется липшицевой с константой Липшица, равной K, если

$$|\varphi(\theta_1) - \varphi(\theta_2)| \le K\,|\theta_1 - \theta_2|, \quad -h \le \theta_1, \theta_2 \le 0. \tag{6.5.2}$$

Заметим, что константа K в неравенстве (6.5.2) зависит от функции $\varphi(\theta)$.

Определение 6.5.1. *Пространством LC_h будем называть подпространство пространства C_h, состоящее из всех липшицевых функций и оснащенное нормой*

$$\|\varphi\|_{LC_h} = \max\left(\|\varphi\|_{C_h}, K_\varphi\right), \tag{6.5.3}$$

где $K_\varphi = \inf K$ и инфимум берется по всем постоянным K, для которых выполнено неравенство (6.5.2).

Заметим, что пространство LC_h относительно нормы (6.5.3) является банаховым пространством. Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (6.1.1) с начальным условием $x_T = \varphi$, где $\varphi \in C_h$. Тогда, в силу наложенных на операторы $B(t, \varphi)$ и $R(t, \varphi)$ условий, решение $x_t(\theta)$

будет принадлежать пространству LC_h при $t \geq T + \tau$. Следовательно, динамика системы (6.1.1) определяется поведением решений в пространстве LC_h.

Как оказывается (см. [93]), неравенства (6.1.34), (6.1.36) остаются справедливыми, если заменить в них норму пространства C_h на норму пространства LC_h. При этом следует иметь в виду, что в неравенстве (6.1.34) необходимо взять $\varphi \in LC_h$. Следовательно, свойство **P1** сохраняется и в норме пространства LC_h. Предположим далее, что для операторов $B(t,\varphi)$ и $R(t,\varphi)$ в представлении (6.1.2), выполнены неравенства

$$|B(t,\varphi)| \leq w(t)\|\varphi\|_{LC_h}, \quad |R(t,\varphi)| \leq \gamma(t)\|\varphi\|_{LC_h}, \quad \varphi \in LC_h, \tag{6.5.4}$$

где $w(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\gamma(t) \in L_1[t_0,\infty)$. Отсюда следует, что если рассматривать операторы, удовлетворяющие оценкам (6.5.4), то в норме пространства LC_h оказывается выполненным свойство **P2**:

$$|G(t,\varphi)| \leq p(t)\|\varphi\|_{LC_h}, \qquad p(t) = w(t) + \gamma(t), \tag{6.5.5}$$

Наконец, будем предполагать, что для любой бесконечно гладкой функции $\varphi(\theta)$ справедливо разложение

$$B(t,\varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)P_i^{\varphi}(t) + \sum_{1\leq i_1\leq i_2\leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)P_{i_1 i_2}^{\varphi}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\leq i_1\leq \ldots \leq i_k\leq n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)P_{i_1\ldots i_k}^{\varphi}(t) + R^{\varphi}(t). \tag{6.5.6}$$

Здесь $P_{i_1\ldots i_l}^{\varphi}(t)$ — некоторые векторные тригонометрические полиномы, зависящие от функции $\varphi(\theta)$; $v_1(t),\ldots,v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0,\infty)$, удовлетворяющие свойствам В.2 — В.4, а вектор-функция $R^{\varphi}(t)$ принадлежит классу $L_1[t_0,\infty)$. Из представления (6.5.6) следует, что с помощью описанного в разделе 6.2 метода можно удовлетворить системе (6.2.5) выражением вида (6.2.6), (6.2.12) с точностью до слагаемых $\hat{R}(t,\theta)$ таких, что $\|\hat{R}(t,\cdot)\|_{LC_h} \in L_1[t_0,\infty)$. Следовательно, в норме пространства LC_h оказывается выполненным и свойство **P3**.

Таким образом, заменяя всюду в определении 6.2.1 и теоремах 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3 пространство C_h с нормой $\|\varphi\|_{C_h}$ на пространство LC_h с нормой $\|\varphi\|_{LC_h}$ можно установить существование и соответствующие свойства критического многообразия для системы (6.1.1) с оператором $G(t,x_t)$ вида (6.1.2), (6.5.4), (6.5.6).

Вопросы, связанные с асимптотикой, устойчивостью и колеблемостью решений дифференциальных уравнений, как с постоянным, так и с переменным запаздыванием, привлекают внимание множества авторов (см., например, [18, 76, 92, 102, 104, 110, 113, 121, 134, 149, 171]).

Во-многих случаях соответствующие задачи для дифференциальных уравнений с переменным запаздыванием оказываются сложнее аналогичных задач для уравнений с постоянным запаздыванием. В качестве примера использования описанной выше методики рассмотрим задачу построения асимптотики решений при $t \to \infty$ для скалярного уравнения с переменным запаздыванием

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2} x\Big(t - 1 + \frac{a \sin \omega t}{t^\rho}\Big). \tag{6.5.7}$$

В уравнении (6.5.7) параметры $a, \omega \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $\rho > 0$. Не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что $\omega > 0$. Уравнение (6.5.7) относится к рассматриваему в этом разделе классу систем. Действительно, записывая это уравнение в виде

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2} x(t-1) + \frac{\pi}{2} x(t-1) - \frac{\pi}{2} x\Big(t - 1 + \frac{a \sin \omega t}{t^\rho}\Big), \tag{6.5.8}$$

получим систему (6.1.1), (6.1.2), в которой

$$B_0 \varphi = -\frac{\pi}{2} \varphi(-1), \quad G(t, \varphi) = B(t, \varphi) = \frac{\pi}{2} \varphi(-1) - \frac{\pi}{2} \varphi\Big(-1 + \frac{a \sin \omega t}{t^\rho}\Big). \tag{6.5.9}$$

Очевидно, что если $\varphi \in LC_h$, где величина h подходящим образом выбрана, то

$$|B(t, \varphi)| \le \frac{\pi}{2} K_\varphi \frac{|a||\sin \omega t|}{t^\rho} \le w(t) \|\varphi\|_{LC_h}.$$

Здесь $w(t) = O(t^{-\rho})$ при $t \to \infty$. Кроме того, если функция $\varphi(\theta)$ бесконечно дифференцируема на $[-h, 0]$ и натуральное k выбрано так, что $k\rho \le 1 < (k+1)\rho$, то имеет место разложение Тейлора

$$B(t, \varphi) = -\frac{\pi}{2} \left[\frac{a \sin \omega t}{t^\rho} \varphi'(-1) + \frac{a^2 \sin^2 \omega t}{2t^{2\rho}} \varphi''(-1) + \ldots + \frac{a^k \sin^k \omega t}{k! t^{k\rho}} \varphi^{(k)}(-1) \right] + O\big(t^{-(k+1)\rho}\big). \tag{6.5.10}$$

Это разложение и есть представление вида (6.5.6), в котором $n = 1$ и $v_1(t) = t^{-\rho}$.

Используя представление (6.5.8), запишем уравнение (6.5.7) в виде (6.1.1), где операторы B_0 и $G(t, \varphi)$ определяются формулами (6.5.9). Заметим, что в силу (6.5.10) оператор $G(t, \varphi)$ действует на достаточно гладкую функцию $\varphi(\theta) \in LC_h$ следующим образом:

$$G(t, \varphi) = -\frac{\pi a \sin \omega t}{2t^\rho} \varphi'(-1) - \frac{\pi a^2 \sin^2 \omega t}{4t^{2\rho}} \varphi''(-1) + O\big(t^{-3\rho}\big). \tag{6.5.11}$$

Как и в случае уравнения (6.4.1), (1×2)-матрица $\Phi(\theta)$ и (2×1)-матрица $\Psi(\xi)$ определяются формулами (6.4.3). Соответствующая система на критическом многообразии (6.2.4) с учетом (6.5.11) имеет следующий вид:

$$\dot{u} = \Big[D + t^{-\rho} B_1(t) + O\big(t^{-2\rho}\big) + W(t) \Big] u, \qquad t \ge t_*. \tag{6.5.12}$$

Здесь матрица D определяется формулой (6.4.5), матрица $B_1(t)$ имеет вид

$$B_1(t) = -\frac{\pi a \sin \omega t}{2}\Psi(0)\Phi'(-1) =$$
$$= \frac{\pi^2 a\mathfrak{i}}{2(4+\pi^2)}(e^{\mathfrak{i}\omega t} - e^{-\mathfrak{i}\omega t}) \begin{pmatrix} 1-\mathfrak{i}\frac{\pi}{2} & 1-\mathfrak{i}\frac{\pi}{2} \\ 1+\mathfrak{i}\frac{\pi}{2} & 1+\mathfrak{i}\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \tag{6.5.13}$$

и $W(t) = \Psi(0)G\big(t, H(t,\theta)\big)$. Можно показать, что $W(t) = O\big(t^{-2\rho}\big)$ при $t \to \infty$.

Очевидно, что если выполнено неравенство

$$\rho > 1,$$

то система (6.5.12) имеет L–диагональную форму (1.1.3). В этом случае все решения уравнения (6.5.7) при $t \to \infty$ имеют асимптотическое представление (6.4.8).

Рассмотрим далее случай, когда величина ρ принадлежит полуинтервалу

$$\frac{1}{2} < \rho \le 1.$$

Легко проверить, что имеет место равенство

$$\Phi'(-1) = -\frac{\pi}{2}\Phi(-2). \tag{6.5.14}$$

Следовательно, матрица $B_1(t)$, определяемая формулой (6.5.13), может быть получена из аналогичной матрицы, построенной для уравнения (6.4.1), если в соответствующем выражении (6.4.5) величину a заменить на величину $\dfrac{a\pi^2}{4}$ и положить $h = 2$. Поэтому в данном случае получаются асимптотические формулы, аналогичные построенным нами в разделе 6.4 при условии (6.4.9). Необходимо лишь изменить параметры a и h в этих формулах отмеченным выше образом.

Пусть теперь параметр ρ изменяется в диапазоне

$$\frac{1}{3} < \rho \le \frac{1}{2}.$$

Как было указано в разделе 6.4, в этой ситуации необходимо рассматривать лишь случай, когда имеет место неравенство (6.4.13). Матрицу $H(t,\theta)$, описывающую критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, ищем в виде (6.4.18), где $\|Z(t,\cdot)\|_{LC_h} \in L_1[t_*,\infty)$. Вычислим матрицу $H_1(t,\theta)$, используя алгоритм, описанный в разделе 6.2. Подставим представление (6.4.18) в систему (6.2.5) и соберем члены, содержащие множитель $t^{-\rho}$. Учитывая (6.5.11), получаем следующую систему для нахождения (1×2)-матрицы $H_1(t,\theta)$:

$$-\frac{\pi a}{4\mathfrak{i}}\big(e^{\mathfrak{i}\omega t} - e^{-\mathfrak{i}\omega t}\big)\Phi(\theta)\Psi(0)\Phi'(-1) + H_1(t,\theta)D + \frac{\partial H_1}{\partial t} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\partial H_1}{\partial \theta}, & -1 \le \theta < 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} H_1(t,-1) - \dfrac{\pi a}{4\mathrm{i}}\big(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}\big)\Phi'(-1), & \theta = 0. \end{cases} \tag{6.5.15}$$

С учетом (6.5.14) система (6.5.15) приобретает вид (6.4.20), если в последней заменить величину a на величину $\dfrac{a\pi^2}{4}$ и положить $h = 2$. Таким образом, мы получаем следующую систему на критическом многообразии

$$\dot{u} = \Big[D + t^{-\rho} B_1(t) + t^{-2\rho} B_2(t) + R(t)\Big] u, \qquad t \ge t_*. \tag{6.5.16}$$

Здесь матрица D определяется формулой (6.4.5), матрица $B_1(t)$ имеет вид (6.5.13), а матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$. Кроме того,

$$B_2(t) = \frac{\pi a \mathrm{i}}{4}(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t})\Psi(0)\frac{\partial H_1}{\partial \theta}(t,-1) - \frac{\pi a^2 \sin^2 \omega t}{4}\Psi(0)\Phi''(-1) =$$
$$= \frac{\pi a \mathrm{i}}{4+\pi^2}\big(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}\big) \begin{pmatrix} \big(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\frac{\partial h_1}{\partial \theta}(t,-1) & \big(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\overline{\frac{\partial h_1}{\partial \theta}(t,-1)} \\ \big(1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\frac{\partial h_1}{\partial \theta}(t,-1) & \big(1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\overline{\frac{\partial h_1}{\partial \theta}(t,-1)} \end{pmatrix} -$$
$$- \frac{\pi^3 a^2 \mathrm{i} \sin^2 \omega t}{4(4+\pi^2)} \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2} & -1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} \\ 1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} & -1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}. \tag{6.5.17}$$

Здесь функция $h_1(t,\theta)$ определяется формулами (6.4.23), (6.4.26), в которых нужно заменить параметр a на $\dfrac{a\pi^2}{4}$ и положить $h = 2$. В системе (6.5.16) сделаем замену $u = \operatorname{diag}\big(e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}, e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}t}\big)u_1$, в результате которой она приводится к виду

$$\dot{u}_1 = \big[t^{-\rho} A_1(t) + t^{-2\rho} A_2(t) + R_1(t)\big] u_1. \tag{6.5.18}$$

Здесь матрица $A_1(t)$ определятся формулой (6.4.11), в которой нужно сделать отмеченные выше замены параметров a и h. Далее,

$$A_2(t) = \frac{\pi a \mathrm{i}}{4+\pi^2}\big(e^{\mathrm{i}\omega t} - e^{-\mathrm{i}\omega t}\big) \begin{pmatrix} \big(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\frac{\partial h_1}{\partial \theta}(t,-1) & \big(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\overline{\frac{\partial h_1}{\partial \theta}(t,-1)}e^{-\mathrm{i}\pi t} \\ \big(1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\frac{\partial h_1}{\partial \theta}(t,-1)e^{\mathrm{i}\pi t} & \big(1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\big)\overline{\frac{\partial h_1}{\partial \theta}(t,-1)} \end{pmatrix} -$$
$$- \frac{\pi^3 a^2 \mathrm{i} \sin^2 \omega t}{4(4+\pi^2)} \begin{pmatrix} 1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2} & (-1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2})e^{-\mathrm{i}\pi t} \\ (1 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2})e^{\mathrm{i}\pi t} & -1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}, \tag{6.5.19}$$

и, наконец, матрица $R_1(t) \in L_1[t_*, \infty)$. Согласно теореме 1.2.1, осуществим в системе (6.5.18) усредняющую замену

$$u_1 = \big[I + t^{-\rho} Y_1(t) + t^{-2\rho} Y_2(t)\big] u_2.$$

В результате этой замены приходим к системе

$$\dot{u}_2 = \big[t^{-2\rho} A_2 + R_2(t)\big] u_2, \tag{6.5.20}$$

где матрица A_2 определяется в силу формул (6.4.33) и $R_2(t) \in L_1[t_*, \infty)$.

Пусть сначала

$$\omega \neq \frac{\pi}{2}, \pi.$$

Матрица A_2 имеет следующий вид:

$$A_2 = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & \bar{\nu} \end{pmatrix},$$

где

$$\nu = -\frac{\pi^3 a^2 \mathrm{i}}{8(4+\pi^2)}\Big(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\Big)\Big(1 - \big(\frac{\pi}{2} - \omega\big)\Psi(\omega, 1) - \big(\frac{\pi}{2} + \omega\big)\Psi(-\omega, 1)\Big), \tag{6.5.21}$$

а функция $\Psi(\omega, h)$ определяется формулой (6.4.36). Поведение решений уравнения (6.5.7) при $t \to \infty$ описывается тогда асимптотическим представлением (6.4.37), в котором величина ν определяется формулой (6.5.21). Очевидно, что качественная динамика решений уравнения (6.5.7) будет определяться знаком величины $\operatorname{Re}\nu$. Она имеет следующий вид:

$$\operatorname{Re}\nu = \frac{\pi^4 a^2 \omega\big((\pi^2 - 4\omega^2)\sin(2\omega) + \omega\,(\pi^2 - 4\omega^2)\cos\omega - 2\pi^2 \sin\omega - \omega\,(2\omega^2 + \pi^2)\big)}{8\,(4+\pi^2)\,\big(4\omega^4 + \pi^4 + \pi^2\,(4\omega^2 - 2\pi^2)\cos\omega + \pi^2\,(\pi^2 - 4\omega^2)\cos^2\omega\big)}, \tag{6.5.22}$$

Из этого представления выводим следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\omega\to 0} \operatorname{Re}\nu = -\frac{a^2\pi^4(28 + 3\pi^2)}{4(4+\pi^2)^3}, \tag{6.5.23}$$

$$\lim_{\omega\to \pi} \operatorname{Re}\nu = -\frac{a^2\pi^4(20 + 3\pi^2)}{64(4+\pi^2)^2}, \tag{6.5.24}$$

$$\operatorname{Re}\nu = -\frac{a^2\pi^4}{16(4+\pi^2)}\big(1 + 2\cos\omega\big) + O\big(\omega^{-1}\big), \quad \omega \to +\infty. \tag{6.5.25}$$

График величины $\operatorname{Re}\nu$ при $a = 1$ как функции переменной ω изображен на рис. 6.5.1.

Предположим теперь, что

$$\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Для матрицы A_2 в этом случае получаем следующее представление:

$$A_2 = \frac{a^2\pi^3}{8(4+\pi^2)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{11}} \end{pmatrix},$$

где

$$a_{11} = (-\mathrm{i})\Big(1 - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\Big)\Big(1 - \pi\Psi\big(-\frac{\pi}{2}, 1\big)\Big),$$
$$a_{12} = -\frac{1}{2}\big(\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\big).$$

Здесь функция $\Psi(\omega, h)$ определяется формулой (6.4.36). Собственные числа матрицы A_2 действительны:

$$\mu_{1,2} = \frac{a^2\pi^3}{160(4+\pi^2)}\big(-6\pi - 16 \pm \sqrt{-39\pi^2 + 192\pi - 44}\,\big). \tag{6.5.26}$$

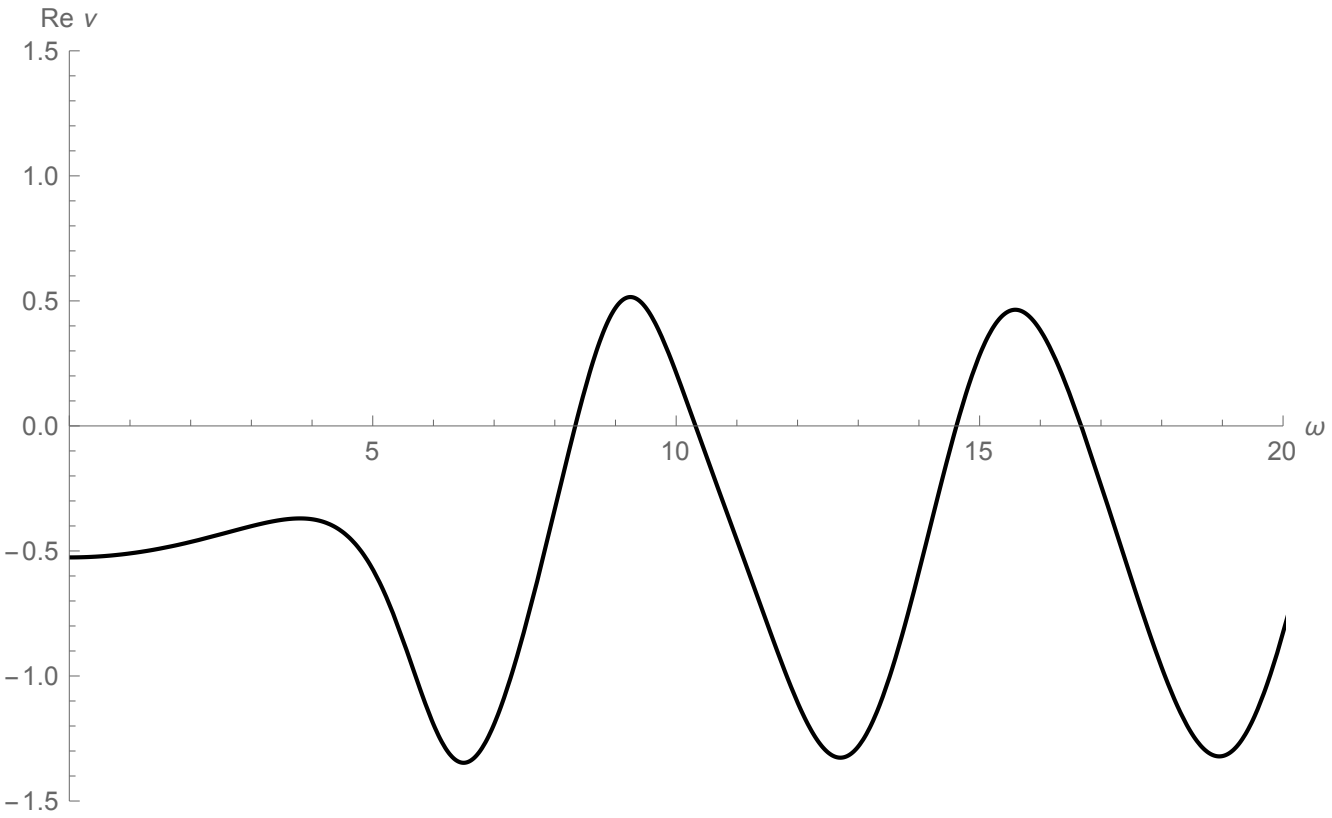

Рис. 6.5.1. График величины (6.5.22) при $a = 1$

Система (6.5.20) заменой $u_2 = Cu_3$ приводится к L–диагональному виду. Фундаментальные решения системы (6.5.20) при $t \to \infty$ имеют асимптотику вида (6.4.46), где величины μ_1 и μ_2 описываются формулой (6.5.26). Решения исходного уравнения (6.5.7) при $t \to \infty$ описываются, таким образом, асимптотическим представлением (6.4.47). Поскольку $\mu_{1,2} < 0$, то в рассмотренном случае все решения уравнения (6.5.7) стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Осталось заметить, что для построения асимптотических формул для решений уравнения (6.5.7) в случае

$$\rho \leq \frac{1}{3},$$

необходимо осуществить те же самые действия, что и в соответствующей части из раздела 6.4.

В завершении этого раздела отметим работу [28], в которой исследовалась задача устойчивости решений уравнения

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2} x\big(t - 1 + \varepsilon \sin \omega t\big) \tag{6.5.27}$$

при достаточно малых значения параметра $\varepsilon > 0$. Автором установлено, что при $\omega = \pm\pi$ решения уравнения (6.5.27) неустойчивы при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Если же $\omega \neq 0, \pm\pi$, то за устойчивость решений отвечает знак вещественной части величины ν, описываемой

формулой (6.5.21) (см. также формулу (6.5.22)). Именно, если $\operatorname{Re}\nu < 0$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ все решения уравнения (6.5.27) экспоненциально устойчивы, а при $\operatorname{Re}\nu > 0$ это уравнение имеет экспоненциально растущие при $t \to \infty$ решения.

Анализируя полученные асимптотические формулы для решений уравнений (6.4.1) и (6.5.7) можно сделать следующие выводы.

1. При $\rho > 1$ динамика решений уравнений одинакова и при $t \to +\infty$ описывается формулой (6.4.8).

2. В случае $\dfrac{1}{2} < \rho \leq 1$ качественная динамика решений уравнений (6.4.1) и (6.5.7) одинакова. Имеются лишь незначительные количественные различия. Поведение решений уравнений (6.4.1) и (6.5.7) при $\omega \neq \pi$ описывается формулой (6.4.8). Если $\omega = \pi$, то все решения уравнения (6.4.1) имеют асимптотику вида (6.4.16). Поведение решений уравнения (6.5.7) при $\omega = \pi$ определяется той же самой формулой (6.4.16), в которой параметр a необходимо заменить на величину $\dfrac{a\pi^2}{4}$ и положить $h = 2$.

3. Если $\rho \leq \dfrac{1}{2}$, то в динамике решений уравнений (6.4.1) и (6.5.7) при $t \to \infty$ имеются значительные количественные и качественные различия. Тем не менее, как это следует из формул (6.4.40) и (6.5.25), общим для этих уравнений является существование (по крайней мере, почти при всех h) неограниченного при $\omega \to +\infty$ множества интервалов устойчивости и неустойчивости решений, сменяющих друг друга. Из этих же формул вытекает также и следующее различие в динамике решений уравнений (6.4.1) и (6.5.7). Если параметры a и h фиксированы, то скорость роста (затухания) решений уравнения (6.4.1) убывает с ростом величины ω, а для решений уравнения (6.5.7) она изменяется асимптотически периодически по ω.

Укажем на еще одну особенность в динамике решений уравнений (6.4.1) и (6.5.7). Как следует из построенных асимптотических формул, при $\rho \leq 1$ и $\omega = \pi$ эти уравнения имеют неограниченные решения при любых значениях параметров $a \neq 0$ и $h \geq 0$. Обратим теперь внимание на предельные соотношения (6.4.39) и (6.5.24). Значение первого из этих пределов при $h \to \infty$ имеет асимптотическую оценку вида

$$-\frac{a^2 h}{4 + \pi^2}\big(1 + o(1)\big),$$

а, следовательно, отрицательно. Значение предела (6.5.24), как легко видеть, также отрицательно. Значит, все решения уравнений (6.4.1) (если h достаточно велико) и (6.5.7) при $\rho \leq \dfrac{1}{2}$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, коль скоро ω достаточно близко к π и $\omega \neq \pi$. Аналогичная особенность была отмечена нами и в отношении динамики решений уравнений (5.2.1) и (5.3.1).

6.6 Об асимптотике решений одного линейного дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием

Исследованию поведения решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{x} - q(t)x = 0 \tag{6.6.1}$$

при $t \to +\infty$ посвящено значительное число работ. Во многих из них исследуется задача о колеблемости (или, наоборот, неколеблемости) решений уравнения (6.6.1) (см., в частности, [1, 23, 25, 26]). Вопросу построения асимптотики решений этого уравнения посвящены, в частности, работы [85, 86]. В работах [20, 33, 78] уравнение (6.6.1) рассматривается как одномерное уравнение Шредингера при нулевой энергии. Авторами строится асимптотика решений этого уравнения при $t \to +\infty$ в случае некоторых специальных потенциалов $q(t)$. К исследованным в этих работах случаям относится и случай так называемого потенциала типа Вигнера–фон Неймана:

$$q(t) = \frac{p(t)}{t^{\rho}}, \qquad \rho > 0. \tag{6.6.2}$$

Здесь $p(t)$ — действительный тригонометрический многочлен, имеющий нулевое среднее значение, т. е.

$$p(t) = \sum_{j=-N}^{N} p_j e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \qquad p_{-j} = \bar{p}_j, \quad \omega_{-j} = -\omega_j, \tag{6.6.3}$$

причем

$$\mathrm{M}\big[p(t)\big] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T p(t)dt = p_0 = 0. \tag{6.6.4}$$

Колебательный характер функции $q(t)$ существенно усложняет исследование динамики уравнения (6.6.1) и для получения асимптотических формул авторами используются различные методы. Как оказывается, динамика решений уравнения (6.6.1) в случае функции $q(t)$ вида (6.6.2), (6.6.3) во многом определяется величиной

$$a = \mathrm{M}\big[\big(\int_0^t p(s)ds\big)^2\big] - \big(\mathrm{M}\big[\int_0^t p(s)ds\big]\big)^2 = \sum_{j=-N}^{N} \frac{|p_j|^2}{\omega_j^2} \geq 0, \tag{6.6.5}$$

а также параметром ρ, характеризующим скорость убывания амплитуды колебаний функции $q(t)$ (см. таблицу 1 на стр. 273).

В этом разделе рассматривается дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$\ddot{x} - q(t)x(t-h) = 0, \qquad h > 0, \quad t \geq t_0 \tag{6.6.6}$$

при условиях (6.6.2) — (6.6.4). Отметим, что в известных автору работах уравнения вида (6.6.6) рассматриваются, в основном, с позиций исследования вопроса о колеблемости решений. Отметим, в частности, монографии [63, 107, 126], в которых можно найти обзор литературы по этой тематике, а также работы [75, 103, 151, 152], посвященные исследованию вопросу о колеблемости решений уравнений второго порядка с запаздыванием. Заметим также, что почти во всех работах, в которых изучается вопрос о колеблемости решений уравнений типа (6.6.6), функция $q(t)$ предполагается сохраняющей знак при $t \geq t_0$. Если функция $q(t)$ осциллирует, то известные методы оказываются не применимы. Здесь мы построим асимптотические формулы, описывающие поведение решений уравнения (6.6.6) при $t \to \infty$. Нас будет интересовать вопрос о качественных и количественных различиях в динамике решений уравнения (6.6.6) и решений уравнения (6.6.1) с такой же функцией $q(t)$.

Запишем уравнение (6.6.6) в виде системы

$$\dot{y} = B_0 y_t + G(t, y_t), \qquad y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}, \tag{6.6.7}$$

где $y_t(\theta) = y(t+\theta)$ $(-h \leq \theta \leq 0)$ — элемент пространства $C_h \equiv C\big([-h, 0], \mathbb{C}^2\big)$ непрерывных на $[-h, 0]$ функций со значениями в $\mathbb{C}^2$. Далее, B_0 — линейный ограниченный оператор, действующий из C_h в $\mathbb{C}^2$ и определяемый формулой

$$B_0\varphi(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi(0), \qquad \varphi(\theta) \in C_h. \tag{6.6.8}$$

Оператор $G(t, \varphi(\theta))$, действующий из C_h в $\mathbb{C}^2$, имеет вид

$$G(t, \varphi(\theta)) = q(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \varphi(-h). \tag{6.6.9}$$

Характеристическое уравнение

$$\det \Delta(\lambda) = 0, \qquad \Delta(\lambda) = \lambda I - B_0(e^{\lambda \cdot} I) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \tag{6.6.10}$$

построенное для линейной автономной системы

$$\dot{y} = B_0 y_t, \tag{6.6.11}$$

имеет ровно два корня $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Рассматривая эти корни как корни характеристического квазиполинома (число корней которого счетно), формально можно считать, что все остальные корни уравнения (6.6.10) подчиняются неравенству $\operatorname{Re} \lambda < -\beta$, где $\beta > 0$ — произвольное

действительное число. Данное обстоятельство позволяет для построения асимптотики решений системы (6.6.7) воспользоваться методом, описанным в разделах 6.2 и 6.3.

Несложные вычисления приводят нас к следующим формулам для матриц $\Phi(\theta)$, $\Psi(\xi)$ и D, построенных применительно к системе (6.6.11) в случае оператора (6.6.8):

$$\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Psi(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & -\xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.6.12}$$

С учетом формул (6.6.9), (6.6.12) уравнение (6.2.5) для нахождения матрицы $H(t,\theta)$, описывающей критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} q(t)\begin{pmatrix} \theta & -\theta h \\ 1 & -h \end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H(t,-h) + H(t,\theta)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q(t)H(t,\theta)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix} + \\ + q(t)H(t,\theta)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H(t,-h) + \frac{\partial H}{\partial t} = \\ = \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial \theta}, \quad -h \le \theta < 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} H(t,0) + q(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H(t,-h), \quad \theta = 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{6.6.13}$$

Система на критическом многообразии (6.2.4) принимает вид

$$\dot{u} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix} + q(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H(t,-h) \right] u. \tag{6.6.14}$$

Поскольку

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H(t,-h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_{11}(t,-h) & h_{12}(t,-h) \end{pmatrix}, \quad H(t,\theta) = \begin{pmatrix} h_{11}(t,\theta) & h_{12}(t,\theta) \\ h_{21}(t,\theta) & h_{22}(t,\theta) \end{pmatrix},$$

то нам необходимо определить из уравнения (6.6.13) лишь элементы $h_{11}(t,\theta)$ и $h_{12}(t,\theta)$ матрицы $H(t,\theta)$. Согласно теореме 6.3.2, решение (6.6.13) может быть представлено в виде

$$H(t,\theta) = H_1(t,\theta)t^{-\rho} + H_2(t,\theta)t^{-2\rho} + \ldots + H_k(t,\theta)t^{-k\rho} + Z(t,\theta), \tag{6.6.15}$$

где натуральное k выбрано так, что $(k+1)\rho > 1$, $\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} \in L_1[t_*,\infty)$, а элементами матриц $H_i(t,\theta)$ являются тригонометрические многочлены переменной t, коэффициенты которых достаточно гладко зависят от $\theta \in [-h,0]$. Подставим (6.6.15) в уравнение (6.6.13) и учтем (6.6.2). Собирая члены при $t^{-\rho}$ и отбрасывая слагаемые, принадлежащие классу $L_1[t_*,\infty)$,

получаем следующее уравнение для нахождения матрицы $H_1(t,\theta)$:

$$p(t)\begin{pmatrix}\theta & -\theta h\\ 1 & -h\end{pmatrix}+H_1(t,\theta)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\frac{\partial H_1}{\partial t}=\begin{cases}\dfrac{\partial H_1}{\partial\theta}, & -h\le\theta<0,\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}H_1(t,0)+p(t)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix}, & \theta=0.\end{cases} \tag{6.6.16}$$

Решение этого уравнения ищем в виде

$$H_1(t,\theta)=\sum_{j=-N}^{N}\beta_j(\theta)e^{\mathrm{i}\omega_j t}. \tag{6.6.17}$$

Подставляя теперь (6.6.17) в (6.6.16) и собирая слагаемые при $e^{\mathrm{i}\omega_j t}$, с учетом (6.6.3) получаем следующие задачи для нахождения матриц $\beta_j(\theta)$, $j=-N,\dots,N$:

$$p_j\begin{pmatrix}\theta & -\theta h\\ 1 & -h\end{pmatrix}+\beta_j(\theta)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\mathrm{i}\omega_j\beta_j(\theta)=\begin{cases}\dfrac{d\beta_j}{d\theta}, & -h\le\theta<0,\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\beta_j(0)+p_j\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -h\end{pmatrix}, & \theta=0.\end{cases} \tag{6.6.18}$$

Пусть

$$\beta_j(\theta)=\begin{pmatrix}\beta_{11}(\theta) & \beta_{12}(\theta)\\ \beta_{21}(\theta) & \beta_{22}(\theta)\end{pmatrix}, \tag{6.6.19}$$

где зависимость элементов матрицы $\beta_j(\theta)$ от индекса j для простоты записи временно упущена. Тогда задачу (6.6.18) можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases}\beta'_{11}(\theta)=p_j\theta+\mathrm{i}\omega_j\beta_{11}(\theta),\\ \beta'_{12}(\theta)=-p_j\theta h+\beta_{11}(\theta)+\mathrm{i}\omega_j\beta_{12}(\theta),\\ \beta'_{21}(\theta)=p_j+\mathrm{i}\omega_j\beta_{21}(\theta),\\ \beta'_{22}(\theta)=-p_j h+\beta_{21}(\theta)+\mathrm{i}\omega_j\beta_{22}(\theta)\end{cases} \tag{6.6.20}$$

с начальными условиями, которые определяются из системы

$$\begin{cases}\mathrm{i}\omega_j\beta_{11}(0)=\beta_{21}(0),\\ \beta_{11}(0)+\mathrm{i}\omega_j\beta_{12}(0)=\beta_{22}(0),\\ \mathrm{i}\omega_j\beta_{21}(0)=0,\\ \beta_{21}(0)+\mathrm{i}\omega_j\beta_{22}(0)=0.\end{cases} \tag{6.6.21}$$

Из (6.6.21) выводим, что $\beta_{ij}(0)=0$ для всех $i,j=1,2$. Решая затем систему (6.6.20) с нулевыми начальными условиями при $\theta=0$, получаем

$$\beta_{11}^{(j)}(\theta):=\beta_{11}(\theta)=-\frac{p_j}{\omega_j^2}e^{\mathrm{i}\omega_j\theta}-\frac{p_j}{\mathrm{i}\omega_j}\theta+\frac{p_j}{\omega_j^2}, \tag{6.6.22}$$

$$\beta_{12}^{(j)}(\theta) := \beta_{12}(\theta) = \Big(\frac{p_j h}{\omega_j^2} + \frac{2p_j}{\mathrm{i}\omega_j^3}\Big)e^{\mathrm{i}\omega_j\theta} - \frac{p_j}{\omega_j^2}\theta e^{\mathrm{i}\omega_j\theta} + \Big(\frac{p_j h}{\mathrm{i}\omega_j} - \frac{p_j}{\omega_j^2}\Big)\theta - \Big(\frac{p_j h}{\omega_j^2} + \frac{2p_j}{\mathrm{i}\omega_j^3}\Big). \qquad (6.6.23)$$

Наконец, как следует из замечания 1 к теореме 6.3.2, для матрицы $Z(t,\theta)$ в (6.6.15) справедлива следующая оценка:

$$\|Z(t,\cdot)\|_{C_h} = O\Big(\frac{d}{dt}(t^{-\rho})\Big) + O\big(t^{-(k+1)\rho}\big) = O\big(t^{-(\rho+1)}\big) + O\big(t^{-(k+1)\rho}\big), \quad t \to \infty. \qquad (6.6.24)$$

Таким образом, учитывая (6.6.2), (6.6.15), (6.6.17), (6.6.19), (6.6.22), (6.6.23), (6.6.24), получаем следующее представление для системы на критическом многообразии (6.6.14):

$$\dot{u} = \big[D + A_1(t)t^{-\rho} + A_2(t)t^{-2\rho} + \ldots + A_{k+1}(t)t^{-(k+1)\rho} + R(t)\big]u. \qquad (6.6.25)$$

Здесь матрица D имеет вид (6.6.12), а матрицы $A_1(t)$, $A_2(t)$ задаются формулами:

$$A_1(t) = p(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -h \end{pmatrix}, \quad A_2(t) = p(t)\sum_{j=-N}^{N}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_{11}^{(j)}(-h) & \beta_{12}^{(j)}(-h) \end{pmatrix} e^{\mathrm{i}\omega_j t}. \qquad (6.6.26)$$

Явный вид матриц $A_i(t)$, $i = 3, \ldots, k+1$, нам для дальнейших вычислений не потребуется. Отметим лишь, что элементами этих матриц являются тригонометрические многочлены

$$A_i(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix},$$

стоящие в позициях, отмеченных знаком $*$. Матрица $R(t)$ принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$ и допускает следующее представление при $t \to \infty$:

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big) & O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big) \end{pmatrix}. \qquad (6.6.27)$$

В системе (6.6.25) осуществим усредняющую замену переменных

$$u = \big[I + Y_1(t)t^{-\rho} + \ldots + Y_{k+1}(t)t^{-(k+1)\rho}\big]u_1.$$

Подставляя эту замену в (6.6.25) и удерживая слагаемое порядка $O\big(t^{-(\rho+1)}\big)$ (несмотря на то что оно принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$), на основании теоремы 1.2.1 приходим к системе

$$\dot{u}_1 = \big[D + A_1 t^{-\rho} + A_2 t^{-2\rho} + A_3 t^{-3\rho} + \ldots + A_{k+1}t^{-(k+1)\rho} + \rho Y_1(t)t^{-(\rho+1)} + R_1(t)\big]u_1. \qquad (6.6.28)$$

Здесь A_i, $i = 1, \ldots, k+1$, — некоторые постоянные действительные матрицы. Матрицы A_1, A_2 и A_3 определяются формулами

$$A_1 = \mathrm{M}\big[A_1(t)\big], \qquad (6.6.29)$$

$$A_2 = \mathrm{M}\big[A_2(t) + A_1(t)Y_1(t)\big], \tag{6.6.30}$$

$$A_3 = \mathrm{M}\big[A_3(t) + A_2(t)Y_1(t) + A_1(t)Y_2(t)\big], \tag{6.6.31}$$

где матрицы $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ с нулевым средним значением определяются как решения матричных дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{Y}_1 - DY_1 + Y_1D = A_1(t) - A_1, \tag{6.6.32}$$

$$\dot{Y}_2 - DY_2 + Y_2D = A_2(t) + A_1(t)Y_1(t) - Y_1(t)A_1 - A_2. \tag{6.6.33}$$

В частности, матрица $Y_1(t)$ имеет следующий вид:

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} \iint p(t)(dt)^2 & -2\iiint p(t)(dt)^3 - h\iint p(t)(dt)^2 \\ \int p(t)dt & -\iint p(t)(dt)^2 - h\int p(t)dt \end{pmatrix}.$$

Символом $\int$ обозначена первообразная, имеющая нулевое среднее значение. Матрица $R_1(t) \in L_1[t_*, \infty)$ при $t \to \infty$ имеет порядок $O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big)$. В силу (6.6.4), (6.6.29) и (6.6.26) матрица A_1 является нулевой. При вычислении матрицы A_2 согласно (6.6.30) заметим, что

$$\mathrm{M}\big[A_1(t)Y_1(t)\big] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix},$$

где $a = \mathrm{M}\big[\big(\int p(t)dt\big)^2\big]$ есть в точности величина (6.6.5). Кроме того, здесь мы учли следующие формулы, которые проверяются простым интегрированием по частям:

$$\mathrm{M}\Big[p(t)\iint p(t)(dt)^2\Big] = -\,\mathrm{M}\Big[\Big(\int p(t)dt\Big)^2\Big], \quad \mathrm{M}\Big[p(t)\int p(t)dt\Big] = 0,$$
$$\mathrm{M}\Big[p(t)\iiint p(t)(dt)^3\Big] = -\,\mathrm{M}\Big[\int p(t)dt\iint p(t)(dt)^2\Big] = 0.$$

Поскольку в силу (6.6.3) и (6.6.22)

$$\mathrm{M}\Big[p(t)\sum_{j=-N}^{N}\beta_{11}^{(j)}(-h)e^{\mathrm{i}\omega_j t}\Big] = a - \sum_{j=-N}^{N}\frac{|p_j|^2}{\omega_j^2}e^{\mathrm{i}\omega_j h},$$

то окончательно получаем следующую формулу для матрицы A_2:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -a(h) & \nu(h) \end{pmatrix}, \tag{6.6.34}$$

где

$$a(h) = \sum_{j=-N}^{N}\frac{|p_j|^2}{\omega_j^2}e^{\mathrm{i}\omega_j h} = 2\sum_{j=1}^{N}\frac{|p_j|^2}{\omega_j^2}\cos(\omega_j h), \quad a(0) = a, \tag{6.6.35}$$

и, с учетом (6.6.3), (6.6.23),

$$\nu(h) = \mathrm{M}\Big[p(t)\sum_{j=-N}^{N}\beta_{12}^{(j)}(-h)e^{\mathrm{i}\omega_j t}\Big] = 2\sum_{j=-N}^{N}|p_j|^2\Big(\frac{h}{\omega_j^2} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega_j^3}\Big)e^{\mathrm{i}\omega_j h} = \tag{6.6.36}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{4|p_j|^2}{\omega_j^2}\Big(h\cos(\omega_j h) - \frac{1}{\omega_j}\sin(\omega_j h)\Big) = 2ha(h) - 4\sum_{j=1}^{N}\frac{|p_j|^2}{\omega_j^3}\sin(\omega_j h).$$

Матрица A_3, вычисляемая по формуле (6.6.31), имеет вид

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(h) & \psi(h) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(h)$, $\psi(h)$ — некоторые действительные величины, не оказывающие влияния на структуру асимптотических формул в главном.

Чтобы улучшить оценку остаточного члена, осуществим в системе (6.6.28) усредняющую замену

$$u_1 = \big[I + V(t)t^{-(\rho+1)}\big]u_2,$$

где матрица $V(t)$, элементами которой являются тригонометрические многочлены с нулевым средним значением, определяется как решение уравнения

$$\dot{V} - DV + VD = \rho Y_1(t).$$

Поскольку $\mathrm{M}\big[Y_1(t)\big] = 0$, то в результате этой замены мы получим систему

$$\dot{u}_2 = \big[D + A_2 t^{-2\rho} + A_3 t^{-3\rho} + \ldots + A_{k+1}t^{-(k+1)\rho} + R_2(t)\big]u_2, \tag{6.6.37}$$

где $R_2(t) = O(t^{-(k+2)\rho}) + O\big(t^{-(2\rho+1)}\big) + O\big(t^{-(\rho+2)}\big)$ при $t \to \infty$.

Продолжая упрощение системы на критическом многообразии, в системе (6.6.37) сделаем так называемое срезающее преобразование

$$u_2 = \begin{pmatrix} t^{\frac{\rho}{2}} & 0 \\ 0 & t^{-\frac{\rho}{2}} \end{pmatrix} u_3. \tag{6.6.38}$$

Приходим к системе

$$\dot{u}_3 = \big[B_0 t^{-1} + B_1 t^{-\rho} + B_2 t^{-2\rho} + \ldots + B_k t^{-k\rho} + R_3(t)\big]u_3, \tag{6.6.39}$$

где

$$B_0 = \frac{\rho}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a(h) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(h) & \nu(h) \end{pmatrix} \tag{6.6.40}$$

и B_i $(i = 3, \ldots k)$ — некоторые постоянные действительные матрицы. Матрица $R_3(t)$ из класса $L_1[t_*, \infty)$ имеет при $t \to \infty$ порядок $O(t^{-(k+1)\rho}) + O\big(t^{-(\rho+1)}\big) + O\big(t^{-2}\big)$. Система (6.6.39) может быть представлена в виде (1.2.29), а, значит, для построения асимптотики ее решений при $t \to \infty$ можно воспользоваться леммой 1.1.1 совместно с теоремой Левинсона. Далее нам необходимо рассмотреть различные интервалы изменения параметра ρ.

Пусть сначала

$$\rho > 1. \tag{6.6.41}$$

В этом случае функции $t^{-j\rho}$, $j = 1, \dots, k$, принадлежат классу $L_1[t_*, \infty]$. Поскольку матрица B_0 является диагональной, то система (6.6.39) имеет L–диагональную форму (1.1.3). Следовательно, ее фундаментальная матрица в силу теоремы 1.1.1 имеет следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \big[I + o(1)\big] \begin{pmatrix} t^{-\frac{\rho}{2}} & 0 \\ 0 & t^{\frac{\rho}{2}} \end{pmatrix}.$$

С учетом преобразования (6.6.38) получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (6.6.37):

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} 1 + o(1) & o(t^\rho) \\ o(1) & 1 + o(1) \end{pmatrix}, \quad t \to \infty. \tag{6.6.42}$$

К сожалению, данное представление не позволяет получить главную часть асимптотики для первой компоненты второго базисного решения системы (6.6.37). Это можно сделать следующим образом. Пусть

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} u_{12}(t) \\ u_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{12}(t) \\ 1 + o(1) \end{pmatrix},$$

тогда из (6.6.37) с учетом (6.6.41) следует, что

$$\dot{u}_{12} = u_{22}(t) + O\big(t^{-(\rho+2)}\big)u_{12}(t) + O\big(t^{-(\rho+2)}\big)u_{22}(t) = O\big(t^{-(\rho+2)}\big)u_{12}(t) + 1 + o(1).$$

Интегрируя этого уравнение и учитывая, что $O\big(t^{-(\rho+2)}\big) \in L_1[t_*, \infty)$, получаем

$$u_{12}(t) = \exp\Big\{\int\limits_{t_*}^{t} O\big(s^{-(\rho+2)}\big)ds\Big\}u_{12}(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} \exp\Big\{\int\limits_{s}^{t} O\big(\tau^{-(\rho+2)}\big)d\tau\Big\}\big(1 + o(1)\big)ds =$$

$$= \big(1 + o(1)\big)t, \quad t \to \infty.$$

Таким образом, фундаментальные решения системы (6.6.37), а, значит, и системы (6.6.14) имеют следующую асимптотику при $t \to \infty$:

$$u^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 + o(1) \\ o(1) \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \big(1 + o(1)\big)t \\ 1 + o(1) \end{pmatrix}.$$

Замечая теперь, что в силу (6.6.12), (6.6.15) и (6.6.24)

$$\Phi(0) + H(t, 0) = I + o(1), \qquad t \to \infty, \tag{6.6.43}$$

из (6.3.59) с учетом (6.6.7) выводим, что все решения уравнения (6.6.6) в случае (6.6.41) допускают следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)t + c_2\big(1 + o(1)\big) + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Пусть теперь

$$\rho = 1.$$

В этой ситуации система (6.6.39) может быть записана в виде

$$\dot{u}_3 = \big[A_0 t^{-1} + R_4(t)\big]u_3, \tag{6.6.44}$$

где

$$A_0 = B_0 + B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -a(h) & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

и $R_4(t) = B_2 t^{-2\rho} + \ldots + B_k t^{-k\rho} + R_3(t) = O\big(t^{-2}\big) \in L_1[t_*, \infty)$. Вид собственных чисел матрицы A_0, а следовательно, и асимптотика решений системы (6.6.44), будут различаться в зависимости от знака величины $a(h) - \frac{1}{4}$.

- $a(h) > \frac{1}{4}$.

Собственные числа матрицы A_0 определяются формулой

$$\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}}.$$

Поскольку собственные числа матрицы A_0 различны, то заменой $u_3 = Cu_4$, где матрица C приводит матрицу A_0 к диагональной форме, систему (6.6.44) можно привести к L–диагональному виду (1.1.3) с матрицей $\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)t^{-1}$. Применяя затем теорему Левинсона, получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (6.6.39) при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}} & \frac{1}{2} - \mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}} \end{pmatrix} + o(1)\right] \begin{pmatrix} \exp\{\lambda_1 \ln t\} & 0 \\ 0 & \exp\{\lambda_2 \ln t\} \end{pmatrix}.$$

Проделывая теперь замены в обратном порядке, в силу (6.6.7), (6.3.59) и (6.6.43) получаем следующую асимптотическую формулу для решений уравнения (6.6.6) при $t \to \infty$:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\Big\{\mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}}\ln t\Big\} + c_2\big(1 + o(1)\big)t^{\frac{1}{2}} \exp\Big\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h) - \frac{1}{4}}\ln t\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

- $a(h) < \frac{1}{4}$.

Собственные числа матрицы A_0 действительны и имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4} - a(h)}.$$

Действуя аналогично предыдущему случаю, получаем асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (6.6.39) при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - a(h)} & \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & t^{\lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Поведение решений уравнения (6.6.6) при $t \to \infty$ описывается следующей асимптотической формулой:

$$x(t) = c_1\big(1 + o(1)\big)t^{1/2+\sqrt{1/4-a(h)}} + c_2\big(1 + o(1)\big)t^{1/2-\sqrt{1/4-a(h)}} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\frac{1}{2} < \rho < 1. \tag{6.6.45}$$

Систему (6.6.39) запишем в виде

$$\dot{u}_3 = \big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}u_3 + R_4(t)u_3, \tag{6.6.46}$$

где $V(t) = B_0 t^{\rho-1}$ и $R_4(t) = B_2 t^{-2\rho} + \ldots + B_k t^{-k\rho} + R_3(t) = O\big(t^{-2\rho}\big) \in L_1[t_*, \infty)$. Заметим, что система (6.6.46) имеет вид (1.2.29), а, значит, асимптотика ее решений строится с помощью леммы 1.1.1 и теоремы 1.1.1. Вид асимптотических формул будет различаться в зависимости от знака величины $a(h)$.

- $a(h) > 0$.

Собственные числа матрица $\big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}$ имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm\mathrm{i}\sqrt{a(h)}t^{-\rho} + O\big(t^{\rho-2}\big), \quad t \to \infty.$$

Поскольку величина $O\big(t^{\rho-2}\big)$ при условии (6.6.45) принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$, то для фундаментальной матрицы системы (6.6.46) получаем следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{a(h)} & -\mathrm{i}\sqrt{a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \exp\{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\} & 0 \\ 0 & \exp\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\} \end{pmatrix}.$$

Совершенно аналогично тому, как это было сделано в предыдущих случаях, строим асимптотику для решений исходного уравнения (6.6.6) при $t \to \infty$. Приходим к следующей формуле:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\} + c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{-\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

- $a(h) < 0$.

Собственные числа матрица $\big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}$ определяются формулой

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm\sqrt{-a(h)}t^{-\rho} + O\big(t^{\rho-2}\big), \quad t \to \infty.$$

Для фундаментальной матрицы системы (6.6.46) получаем следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-a(h)} & -\sqrt{-a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times \\ \times \begin{pmatrix} \exp\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\} & 0 \\ 0 & \exp\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\} \end{pmatrix}.$$

Решения уравнения (6.6.6) описываются при $t \to \infty$ следующей асимптотической формулой:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\} + c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{-\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Наконец, рассмотрим случай, когда

$$\rho \le \frac{1}{2}. \tag{6.6.47}$$

Систему (6.6.39) представим в виде

$$\dot{u}_3 = \big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}u_3 + R_3(t)u_3, \tag{6.6.48}$$

где $V(t) = B_2t^{-\rho} + \ldots + B_kt^{-(k-1)\rho} + B_0t^{\rho-1}$. Как и в предыдущем случае, асимптотика решений этой системы будет различаться в зависимости от знака величины $a(h)$.

- $a(h) > 0$.

Учитывая формулы (6.6.40), определяющие матрицы B_1 и B_2, заключаем, что собственные числа матрица $\big[B_1+V(t)\big]t^{-\rho}$ при достаточно больших t являются комплексно сопряженными и имеют следующий вид:

$$\lambda_{1,2}(t) = \Big(\frac{\nu(h)}{2} + O\big(t^{-\rho}\big)\Big)t^{-2\rho} \pm \mathrm{i}\sqrt{a(h)}t^{-\rho}\Big(1 + O\big(t^{-\rho}\big)\Big), \quad t \to \infty. \tag{6.6.49}$$

Здесь величина $\nu(h)$ задается формулой (6.6.36). Заметем, что слагаемое порядка $O\big(t^{-3\rho}\big)$ в формуле (6.6.49) принадлежит классу $L_1[t_*, \infty)$, если $\rho > \frac{1}{3}$. Используя лемму 1.1.1 и теорему Левинсона, получаем следующее асимптотическое представление для фундаментальной матрицы системы (6.6.48) при $t \to \infty$:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{i}\sqrt{a(h)} & -\mathrm{i}\sqrt{a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \exp\big\{f(t) + \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} & 0 \\ 0 & \exp\big\{f(t) - \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} \end{pmatrix},$$

где

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu(h)}{2}\ln t, & \rho = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{\nu(h)}{2(1-2\rho)}t^{1-2\rho}, & \dfrac{1}{3} < \rho < \dfrac{1}{2}, \\ \Big(\dfrac{\nu(h)}{2} + o(1)\Big)\dfrac{t^{1-2\rho}}{(1-2\rho)}, & \rho \le \dfrac{1}{3}. \end{cases} \tag{6.6.50}$$

Решения уравнения (6.6.6) при $t \to \infty$ описываются тогда следующей асимптотической формулой:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{f(t) + \frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\} +$$
$$+ c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{f(t) - \frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big), \tag{6.6.51}$$

где c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число. В частности, в случае $\rho = \frac{1}{2}$ с учетом (6.6.50) асимптотическое представление (6.6.51) выглядит следующим образом:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{1/4+\nu(h)/2}\exp\Big\{\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\} +$$
$$+ c_2\big(1+o(1)\big)t^{1/4+\nu(h)/2}\exp\Big\{-\frac{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big).$$

- $a(h) < 0$.

Собственные числа матрица $\big[B_1 + V(t)\big]t^{-\rho}$ при достаточно больших t являются действительными:

$$\lambda_{1,2}(t) = \pm\sqrt{-a(h)}t^{-\rho}\big(1 + O\big(t^{-\rho}\big)\big), \quad t \to \infty.$$

Фундаментальная матрица системы (6.6.48) при $t \to \infty$ имеет следующую асимптотику:

$$U_3(t) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{-a(h)} & -\sqrt{-a(h)} \end{pmatrix} + o(1)\right] \times$$
$$\times \begin{pmatrix} \exp\big\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} & 0 \\ 0 & \exp\big\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} \end{pmatrix}.$$

Решения уравнения (6.6.6) описываются при $t \to \infty$ следующей асимптотической формулой:

$$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\} +$$
$$+ c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\Big\{-\frac{\sqrt{-a(h)}}{1-\rho}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\Big\} + O\big(e^{-\beta t}\big),$$

где c_1, c_2 — произвольные действительные постоянные и $\beta > 0$ — произвольное действительное число.

Сравним далее поведение решений уравнений (6.6.1) и (6.6.6) с функцией $q(t)$ вида (6.6.2) при $t \to +\infty$. Асимптотические формулы для базисных решений уравнения (6.6.1) при различных значениях параметра ρ приведены в таблице 1.

Таблица 1. Асимптотические формулы для фундаментальных решений уравнения (6.6.1), (6.6.2) при $t \to \infty$ ($a \neq 0$).

$\rho > 1$	$x_1(t) = t\big(1+o(1)\big),\ x_2(t) = 1 + o(1)$	
$\rho = 1$	$a > \frac{1}{4}$	$x_{1,2}(t) = t^{\frac{1}{2}}\exp\big\{\pm\mathrm{i}\sqrt{a-1/4}\ln t\big\}\big(1+o(1)\big)$
$\rho = 1$	$a < \frac{1}{4}$	$x_{1,2}(t) = t^{\frac{1}{2}\pm\sqrt{1/4-a}}\big(1+o(1)\big)$
$\frac{1}{2} < \rho < 1$	$x_{1,2}(t) = t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{\pm\mathrm{i}\sqrt{a}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\}\big(1+o(1)\big)$	
$\rho \leq \frac{1}{2}$	$x_{1,2}(t) = t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{\pm\mathrm{i}\sqrt{a}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\}\big(1+o(1)\big)$	

В таблице 2 собраны построенные нами асимптотические формулы для решений уравнения (6.6.6). В этой таблице c_1, c_2 — произвольные действительные (или комплексные) постоянные, $\beta > 0$ — произвольное действительное число, величина $a(h)$ определяется формулой (6.6.35), а функция $f(t)$ задается выражением (6.6.50).

Таблица 2. Асимптотические формулы для решений уравнения (6.6.6) при $t \to \infty$.

$\rho > 1$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t + c_2\big(1+o(1)\big) + O\big(e^{-\beta t}\big)$	
$\rho = 1$	$a(h) > \frac{1}{4}$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{1}{2}}\exp\big\{\mathrm{i}\sqrt{a(h)-1/4}\ln t\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{1}{2}}\exp\big\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h)-1/4}\ln t\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho = 1$	$a(h) < \frac{1}{4}$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{1/2+\sqrt{1/4-a(h)}} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{1/2-\sqrt{1/4-a(h)}} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\frac{1}{2} < \rho < 1$	$a(h) > 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{-\mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\frac{1}{2} < \rho < 1$	$a(h) < 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho \le \frac{1}{2}$	$a(h) > 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{f(t) + \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{f(t) - \mathrm{i}\sqrt{a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$
$\rho \le \frac{1}{2}$	$a(h) < 0$	$x(t) = c_1\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} +$ $+c_2\big(1+o(1)\big)t^{\frac{\rho}{2}}\exp\big\{-\sqrt{-a(h)}(1-\rho)^{-1}t^{1-\rho}\big(1+o(1)\big)\big\} + O\big(e^{-\beta t}\big)$

Сравним поведение решений уравнений (6.6.1) и (6.6.6) при $t \to \infty$, анализируя приведенные в таблицах 1 и 2 асимптотические выражения.

1. $\rho > 1$.

Главные части асимптотических формул в этом случае совпадают, т. е. запаздывание не влияет существенным образом на динамику решений.

2. $\rho = 1$.

В отличии от уравнения (6.6.1) характер поведения решений уравнения (6.6.6) определяется величиной $a(h)$. Изменение величины запаздывания в данном случае может приводить как к количественным, так и к качественным изменениям в динамике решений. Отметим также следующее обстоятельство. Из формулы (6.6.35) следует, что $|a(h)| \le a$ для всех $h \ge 0$. Следовательно, если решения уравнения (6.6.1) осциллировали ($a > \frac{1}{4}$), то при изменении запаздывания в уравнении (6.6.6) решения могут стать неосцилирующими при тех h, для которых $a(h) < \frac{1}{4}$. Если же решения уравнения (6.6.1) не осциллировали ($a < \frac{1}{4}$), то при изменении запаздывания в уравнении (6.6.6) решения остаются неосцилирующими, т. к. в этой ситуации $a(h) < \frac{1}{4}$ для всех $h \ge 0$. Наконец, отметим, что, как у уравнения (6.6.1), так и у уравнения (6.6.6) при $\rho = 1$ всегда существуют неограниченные решения.

3. $\frac{1}{2} < \rho < 1$.

Существенное отличие динамики решений уравнения (6.6.6) от динамики решений уравнения (6.6.1) состоит в следующем. Величина $a(h)$, определяющая динамику решений урав-

нения (6.6.6), в отличии от величины a, определяющей динамику решений уравнения (6.6.1), может принимать отрицательные значения. В частности, если решения уравнения (6.6.1) при $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ всегда осциллируют, то в уравнении (6.6.6) при изменении параметра h решения могут стать неосциллирующими, если $a(h) < 0$. Отметим также, что, как уравнение (6.6.1), так и уравнение (6.6.6) при $\rho \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ всегда имеют неограниченные решения.

4. $\rho \leq \frac{1}{2}$.

Сперва отметим, что, как и в предыдущем случае, решения уравнения (6.6.6) в отличии от решений уравнения (6.6.1) могут быть неосциллирующими при тех значениях h, при которых $a(h) < 0$. Существенная разница в динамике решений уравнения (6.6.1) и решений уравнения (6.6.6) может наблюдаться и при тех h, при которых $a(h) > 0$. Вспоминая представление (6.6.50) для функции $f(t)$, а также формулу (6.6.36) для величины $\nu(h)$, заключаем, что на поведение решений уравнения (6.6.6) при $t \to \infty$ будет влиять знак величины $\frac{1}{4} + \frac{\nu(h)}{2}$, если $\rho = \frac{1}{2}$, или знак величины $\nu(h)$, если $\rho < \frac{1}{2}$. Так, все ненулевые решения уравнения (6.6.1) при $\rho < \frac{1}{2}$ неограниченно возрастают, а все решения уравнения (6.6.6) стремятся к нулю при $t \to \infty$, если $\rho < \frac{1}{2}$, и запаздывание h выбрано так, что $a(h) > 0$ и $\nu(h) < 0$. В частности, заметим, что величина $\nu(h)$ отрицательна при всех достаточно малых $h > 0$, поскольку

$$\nu(h) = -\frac{4h^3}{3}\big(1 + O(h^2)\big)\sum_{j=1}^{N} |p_j|^2, \quad h \to 0.$$

Заметим, что отмеченные различия в динамике решений уравнений (6.6.1) и (6.6.6) во многом схожи с соответствующими различиями в динамике решений уравнения (6.6.1) и его разностного аналога

$$x(n+2) - 2x(n+1) + \Big(1 - \frac{p(n)}{n^\rho}\Big)x(n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0,$$

изученного в работе [82].

В завершении отметим, что совершенно аналогично тому, как это было сделано в настоящем разделе, могут быть построены асимптотические формулы для решений уравнения

$$\ddot{x} - \xi(t)p(t)x(t-h) = 0, \qquad h > 0, \quad t \geq t_0,$$

где функция $p(t)$ определяется формулами (6.6.3), (6.6.4), а действительная функция $\xi(t)$ такова, что $\xi(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\xi'(t) \in L_1[t_0, \infty)$ и существует такое целое неотрицательное K, что $\xi^K(t) \notin L_1[t_0, \infty)$, но $\xi^{K+1}(t) \in L_1[t_0, \infty)$.

Глава 7

Асимптотическое интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

7.1 Постановка задачи

В заключительной главе этой работы рассматривается уравнение

$$\dot{u} = \big[A + G(t)\big]u, \quad t \geq t_0, \tag{7.1.1}$$

где u — элемент комплексного банахова пространства $\mathcal{B}$. Здесь A — замкнутый линейный оператор с плотной в $\mathcal{B}$ областью определения, который является генератором сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $T(t)$: $\mathcal{B} \to \mathcal{B}$ ($t \geq 0$). Далее, $G(t)$ ($t \geq t_0$) — семейство линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$, причем

$$G(t) = B(t) + R(t). \tag{7.1.2}$$

В представлении (7.1.2) семейство линейных ограниченных операторов $B(t)$ обладает тем свойством, что операторная функция $B(t)$ сильно измерима на любом отрезке $[t_0, b]$, $b \geq t_0$, и $\|B(t)u\|_{\mathcal{B}}$ стремится к нулю колебательным образом при $t \to \infty$ для любого $u \in \mathcal{B}$. Более точно структура этого семейства операторов будет определена позднее. Далее, семейство линейных ограниченных операторов $R(t)$ также является сильно измеримым на любом отрезке $[t_0, b]$, $b \geq t_0$, и, кроме того, существует такая функция $\gamma(t) \in L_1[t_0, \infty)$, что

$$\|R(t)u\|_{\mathcal{B}} \leq \gamma(t)\|u\|_{\mathcal{B}} \tag{7.1.3}$$

для любого $u \in \mathcal{B}$. Целесообразность изучения уравнений вида (7.1.1), где операторная функция $G(t)$ понимается как некоторое параметрическое возмущение с непрерывным спектром, отмечена, в частности, в известной монографии [52, стр. 230].

Всюду в этой работе решение уравнения (7.1.1) с начальным условием $u(t_0) = u_0$ понимается в слабом смысле (см. [72]), точнее, как решение интегрального уравнения

$$u(t) = T(t - t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} T(t - s)G(s)u(s)ds. \tag{7.1.4}$$

Из результатов работ [72, 73] (см. также [71]) следует, что для любого $u_0 \in \mathcal{B}$ существует единственное непрерывное на отрезке $[t_0, b]$ ($b \geq t_0$) слабое решение уравнения (7.1.1) с начальным условием $u(t_0) = u_0$, и это решение задается формулой (7.1.4). Нас будет интересовать вопрос об асимптотическом поведении решений уравнения (7.1.4) при $t \to \infty$, если на оператор A наложены следующие дополнительные условия. Предположим, что

(i)

$$\mathcal{B} = \mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}, \tag{7.1.5}$$

где линейное конечномерное подпространство $\mathcal{X}$ есть линейная оболочка обобщенных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ с нулевой вещественной частью (с учетом кратностей);

(ii) замкнутое линейное подпространство $\mathcal{Y}$ инвариантно относительно полугруппы $T(t)$, и кроме того, для любого $y \in \mathcal{Y}$ имеет место неравенство

$$\|T(t)y\|_{\mathcal{B}} \leq Ke^{-\alpha t}\|y\|_{\mathcal{B}}, \quad t \geq 0, \tag{7.1.6}$$

где $K, \alpha > 0$.

Сформулированные условия (i) и (ii) — это стандартные требования теории центральных многообразий (см., например, [29, 84, 172]). Мы воспользуемся основными идеями этой теории, а также вариантом метода усреднения, предложенным в главе 1, для построения асимптотики слабых решений уравнения (7.1.1) при $t \to \infty$.

7.2 Критическое многообразие и его свойства

Мы начнем этот раздел с уточнения вида операторной функции $B(t)$ в (7.1.2). Следуя [34, 52], будем считать, что

$$B(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)B_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)B_{i_1 i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t)B_{i_1 \ldots i_k}(t). \tag{7.2.1}$$

Здесь $B_{i_1 \ldots i_l}(t)$ — операторные функции, относительно которых предполагается, что

$$B_{i_1 \ldots i_l}(t) = \sum_{j=1}^{M} e^{\mathrm{i}\omega_j t} b_j^{(i_1 \ldots i_l)}, \tag{7.2.2}$$

где $b_j^{(i_1 \ldots i_l)}$ — линейные ограниченные операторы, не зависящие от t и действующие из $\mathcal{B}$ в $\mathcal{B}$. Наконец, $v_1(t), \ldots, v_n(t)$ — скалярные абсолютно непрерывные на $[t_0, \infty)$ функции, которые удовлетворяют условиям B.2 — B.4 раздела 1.2.

Определение 7.2.1. *Линейное N-мерное подпространство $\mathcal{W}(t) \subset \mathcal{B}$ будем называть критическим многообразием для уравнения* (7.1.1) *при $t \geq t_* \geq t_0$, если выполнены следующие условия:*

1. Существует вектор-строка $H(t) = \big(h_1(t), \ldots, h_N(t)\big) \in \mathcal{Y}^N$, составленная из непрерывных при $t \geq t_*$ функций со значениями из подпространства $\mathcal{Y}$, такая что $\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$, где

$$\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} = \big|\big(\|h_1(t)\|_{\mathcal{B}}, \ldots, \|h_N(t)\|_{\mathcal{B}}\big)\big| \tag{7.2.3}$$

и $|\cdot|$ — некоторая норма в пространстве вектор-строк длины N;

2. Множество $\mathcal{W}(t)$ для $t \geq t_*$ задается формулой

$$\mathcal{W}(t) = \Big\{u \in \mathcal{B} \;\Big|\; u = \Phi w + H(t)w,\ w \in \mathbb{C}^N\Big\}. \tag{7.2.4}$$

Здесь вектор-строка $\Phi = \big(\varphi_1, \ldots, \varphi_N\big) \in \mathcal{B}^N$ составлена из обобщенных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ из условия (i)*, которые образуют базис подпространства $\mathcal{X}$. Далее, символом $\mathbb{C}^N$ обозначено пространство комплекснозначных вектор-столбцов длины N, а произведение вектор-строки $U = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathcal{B}^N$ и вектор-столбца $w = (w_1, \ldots, w_N)^T$ понимается в стандартном смысле: $Uw = u_1w_1 + \ldots + u_Nw_N$;*

3. Множество $\mathcal{W}(t)$ при $t \geq t_*$ положительно инвариантно относительно решений уравнения (7.1.1)*, т.е. если $u(T) \in \mathcal{W}(T)$, $T \geq t_*$, то $u(t) \in \mathcal{W}(t)$ для всех $t \geq T$.*

Перед тем, как вывести систему уравнений, описывающую динамику решений уравнения (7.1.1) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, напомним следующие факты из теории сопряженных операторов в банаховых пространствах. Пусть $\mathcal{B}^*$ — сопряженное к $\mathcal{B}$ пространство (пространство линейных ограниченных функционалов, заданных на $\mathcal{B}$) и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скобка двойственности между пространствами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^*$, так что

$$\langle\varphi, \psi\rangle = \psi(\varphi) \in \mathbb{C} \tag{7.2.5}$$

для любых $\varphi \in \mathcal{B}$ и $\psi \in \mathcal{B}^*$. При этом, если $U = (u_1, \ldots, u_l) \in \mathcal{B}^l$ и $V = (v_1, \ldots, v_m)^T \in (\mathcal{B}^*)^m$, то $\langle U, V\rangle$ есть $(m \times l)$ матрица, такая что

$$\langle U, V\rangle = \big\{v_i(u_j)\big\}_{\substack{1\leq i\leq m,\\ 1\leq j\leq l}}.$$

Пусть A' — сопряженный к A линейный замкнутый оператор, действующий из пространства $\mathcal{B}^*$ в $\mathcal{B}^*$. Как известно (см., например, [19, 122]), в силу предположения (i) относительно оператора A оператор A' также имеет собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, причем размерности соответствующих друг другу обобщенных собственных подпространств этих операторов, отвечающих одинаковым собственным числам, совпадают. Обозначим символом

$\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_N)^T \in (\mathcal{B}^*)^m$ вектор-столбец длины N, состоящий из линейно независимых обобщенных собственных векторов оператора A', отвечающих собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Считаем, что вектор-столбец Ψ выбран так что

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = I, \tag{7.2.6}$$

где I — $(N \times N)$ единичная матрица (см. [55, 115]). Заметим, в частности, что одним из возможных выборов дополнительного подпространства к $\mathcal{X}$ в условии (i) является выбор в качестве этого подпространства множества $\mathcal{Y} = \{u \in \mathcal{B} \mid \langle u, \Psi \rangle = 0\}$.

Построим далее систему, описывающую динамику решений уравнения (7.1.1) на критическом многообразии $\mathcal{W}(t)$, в предположении существования этого многообразия при достаточно больших t. Пусть P — оператор проектирования на подпространство $\mathcal{X}$ вдоль $\mathcal{Y}$. Заметим, что P есть линейный ограниченный оператор, определенный во всем пространстве $\mathcal{B}$ (см., например, [122]). В силу условия (i) заключаем, что если $u \in \mathcal{B}$, то

$$u(t) = u_{\mathcal{X}}(t) + u_{\mathcal{Y}}(t), \qquad t \geq t_0, \tag{7.2.7}$$

где

$$u_{\mathcal{X}}(t) = Pu(t) \in \mathcal{X}, \quad u_{\mathcal{Y}}(t) = (1 - P)u(t) \in \mathcal{Y} \tag{7.2.8}$$

и символом 1 обозначен тождественный оператор. Заметим, что поскольку подпространства $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ инвариантны относительно оператора A и полугруппы $T(t)$, то для всех $t \geq 0$ и $u \in \mathcal{B}$ имеют место равенства

$$PT(t)u = T(t)Pu, \quad (1 - P)T(t)u = T(t)(1 - P)u. \tag{7.2.9}$$

Подставляя (7.2.7) в интегральное уравнение (7.1.4) и учитывая (7.2.8), (7.2.9), получаем

$$u_{\mathcal{X}}(t) = T(t - t_0)u_{\mathcal{X}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t - s)PG(s)u(s)ds, \tag{7.2.10}$$

$$u_{\mathcal{Y}}(t) = T(t - t_0)u_{\mathcal{Y}}(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t - s)(1 - P)G(s)u(s)ds. \tag{7.2.11}$$

Поскольку

$$u_{\mathcal{X}}(t) = Pu(t) = \Phi w(t) \tag{7.2.12}$$

для некоторого $w(t) \in \mathbb{C}^N$, то

$$\Phi w(t) = T(t - t_0)\Phi w(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t - s)PG(s)u(s)ds. \tag{7.2.13}$$

Кроме того, из (i) следует, что $A\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$, а значит, существует такая $(N \times N)$-матрица D, спектром которой является множество $\{\lambda_1, \dots \lambda_N\}$, что

$$A\Phi = \Phi D. \tag{7.2.14}$$

Заметим, что если элемент $u \in \mathcal{B}$ принадлежит области определения оператора A, то на основании [153, p. 4, Theorem 2.4] имеем

$$\frac{dT}{dt}u = TAu = ATu. \tag{7.2.15}$$

Очевидно, что все элементы подпространства $\mathcal{X}$ заведомо принадлежат области определения оператора A. Дифференцируя тогда выражение (7.2.13) и учитывая (7.2.15), получаем

$$\Phi\dot{w}(t) = AT(t-t_0)\Phi w(t_0) + PG(t)u(t) + A\int\limits_{t_0}^{t} T(t-s)PG(s)u(s)ds =$$

$$= A\Phi w(t) + PG(t)u(t).$$

Откуда в силу (7.2.14) выводим, что

$$\Phi\dot{w} = \Phi Dw(t) + PG(t)u(t) \tag{7.2.16}$$

или с учетом (7.2.6)

$$\dot{w} = Dw(t) + \langle PG(t)u(t), \Psi\rangle. \tag{7.2.17}$$

Пусть $u(t_*) \in \mathcal{W}(t_*)$, тогда в силу инвариантности критического многообразия, используя (7.2.4), заключаем, что при $t \geq t_*$ для решения $u(t)$ имеет место представление

$$u(t) = \Phi w(t) + H(t)w(t). \tag{7.2.18}$$

Подставляя (7.2.18) в (7.2.17), имеем

$$\dot{w} = \big[D + \langle PG(t)(\Phi + H(t)), \Psi\rangle\big]w(t), \quad t \geq t_*, \quad w \in \mathbb{C}^N. \tag{7.2.19}$$

Систему (7.2.19) будем называть проекцией уравнения (7.1.1) на критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ или просто системой на критическом многообразии.

Теорема 7.2.1. *При достаточно больших t у уравнения* (7.1.1) *существует критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$, определяемое формулой* (7.2.4).

Доказательство. В силу представления (7.2.18) имеем

$$(1-P)u(t) = u_{\mathcal{Y}}(t) = H(t)w(t).$$

Используя это равенство наряду с формулой (7.2.18) в (7.2.11) и полагая $t_0 = t_*$, приходим к уравнению

$$H(t)w(t) = T(t-t_*)H(t_*)w(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)(1-P)G(s)\big[\Phi + H(s)\big]w(s)ds. \qquad (7.2.20)$$

Пусть $W_H(t,s)$ $(t,s \geq t_*)$ — матрица Коши системы (7.2.19) ($W_H(s,s) = I$). Тогда, учитывая, что $w(t) = W_H(t,t_*)w(t_*)$ и используя свойства матрицы $W_H(t,s)$, запишем уравнение (7.2.20) в следующем операторном виде:

$$H(t) = \Gamma H(t), \qquad (7.2.21)$$

$$\Gamma H(t) = T(t-t_*)H(t_*)W_H(t_*,t) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)(1-P)G(s)\big[\Phi + H(s)\big]W_H(s,t)ds. \qquad (7.2.22)$$

Областью определения оператора Γ будем считать банахово пространство $\mathcal{C}$ непрерывных по $t \geq t_*$ вектор-строк $H(t)$ длины N со значениями из пространства $\mathcal{Y}^N$ и фиксированным начальным условием $H(t_*)$ таких, что $\|H(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$. Норму в этом пространстве определим следующим образом:

$$\|H\|_{\mathcal{C}} = \sup_{t \geq t_*} \|H(t)\|_{\mathcal{B}^N}. \qquad (7.2.23)$$

В силу (7.1.6) для любого $U \in \mathcal{B}^N$ имеет место оценка

$$\|T(t)(1-P)U\|_{\mathcal{B}^N} \leq Ke^{-\alpha t}\|U\|_{\mathcal{B}^N}, \quad t \geq 0. \qquad (7.2.24)$$

Здесь и всюду далее различные константы, точные значения которых нам не важны, мы будем обозначать одинаковыми символами. Кроме того, из (7.1.2), (7.1.3), (7.2.1) и (7.2.2) следует, что

$$\|G(t)U\|_{\mathcal{B}^N} \leq p(t)\|U\|_{\mathcal{B}^N}, \qquad p(t) = f(t) + \gamma(t). \qquad (7.2.25)$$

Здесь $f(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\gamma(t)$ — некоторая функция из класса $L_1[t_0, \infty)$.

Дальнейшие шаги в доказательстве опираются на использование принципа сжимающих отображений. Аналогично тому, как это делается при доказательстве теоремы 6.3.1, несложно показать, что оператор Γ переводит некоторый замкнутый шар $\|H\|_{\mathcal{C}} \leq r_0$ пространства $\mathcal{C}$ в себя и является в этом шаре сжимающим, если t_* достаточно велико, а начальное условие $\|H(t_*)\|_{\mathcal{B}^N}$ выбрано достаточно малым. ■

Для приближенного нахождения вектор-строки $H(t)$, описывающей критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ в силу формулы (7.2.4), будем действовать следующим образом. Подставим представление (7.2.18) в уравнение (7.1.1) и учтем (7.2.14), (7.2.16) и (7.2.19). Имеем,

$$\Phi Dw(t) + PG(t)\big(\Phi + H(t)\big)w(t) + \dot{H}w(t) + H\big[D + \langle PG(t)(\Phi + H(t)), \Psi\rangle\big]w(t) =$$

$$= A\Phi w(t) + AH(t)w(t) + G(t)\big[\Phi + H(t)\big]w(t).$$

Откуда с учетом (7.2.14) выводим

$$\dot H = AH - HD + (1-P)G(t)\big(\Phi + H(t)\big) - H\langle PG(t)(\Phi + H(t)), \Psi\rangle. \tag{7.2.26}$$

Попытаемся удовлетворить уравнению (7.2.26) с точностью до слагаемых $\hat R(t)$ таких, что $\|\hat R(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_0, \infty)$. Именно, положим

$$\hat H(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t)H_i(t) + \sum_{1\le i_1\le i_2\le n} v_{i_1}(t)v_{i_2}(t)H_{i_1 i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1\le i_1\le \ldots \le i_k\le n} v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_k}(t)H_{i_1\ldots i_k}(t). \tag{7.2.27}$$

Здесь элементы подлежащих определению вектор-строк $H_{i_1\ldots i_l}(t)$ длины N принадлежат подпространству $\mathcal{Y}$ при всех $t\in\mathbb{R}$ и являются тригонометрическими многочленами в том смысле, что

$$H_{i_1\ldots i_l}(t) = \sum_j \beta_j^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \tag{7.2.28}$$

где $\beta_j^{(i_1\ldots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$. Кроме того, значение целочисленной величины $k\ge 0$ определяется свойством B.4 функций $v_1(t),\ldots,v_n(t)$.

Подставим выражение (7.2.27) в уравнение (7.2.26) вместо $H(t)$ и соберем слагаемые при одинаковых множителях $v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_l}(t)$ ($l\le k$). Получаем следующие однотипные уравнения для определения вектор-строк $H_{i_1\ldots i_l}(t)$:

$$\dot H_{i_1\ldots i_l} = AH_{i_1\ldots i_l} - H_{i_1\ldots i_l}D + F_{i_1\ldots i_l}(t). \tag{7.2.29}$$

Здесь мы учли формулы (7.1.2), (7.2.1) и (7.2.2), из которых, в частности, следует, что для решения уравнения (7.2.29) необходимо определить сначала все вектор-строки $H_{j_1\ldots j_s}(t)$ с $s<l$. Далее, $F_{i_1\ldots i_l}(t)$ — некоторая известная вектор-строка, которая в силу (7.2.2) и (7.2.28) имеет вид, аналогичный (7.2.28):

$$F_{i_1\ldots i_l}(t) = \sum_j f_j^{(i_1\ldots i_l)} e^{\mathrm{i}\omega_j t}, \tag{7.2.30}$$

где $f_j^{(i_1\ldots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$. Кроме того, вектор-строки $f_j^{(i_1\ldots i_l)}$ принадлежат пространству $\mathcal{Y}^N$. Действительно, это следует из того, что вектор-строки $H_{j_1\ldots j_s}(t)$ принимают значения из пространства $\mathcal{Y}^N$ при всех $s<l$ и, кроме того, в уравнении (7.2.26) вектор-строка $(1-P)G(t)\big(\Phi + H(t)\big)$ принимает значения из пространства $\mathcal{Y}^N$.

Решение уравнения (7.2.29) будем искать в виде (7.2.28). Подставляя последнее в (7.2.29), получаем с учетом (7.2.30) следующее операторное уравнение для нахождения элемента $\beta_j^{(i_1\dots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$:

$$A\beta_j^{(i_1\dots i_l)} - \beta_j^{(i_1\dots i_l)} D - \mathrm{i}\omega_j \beta_j^{(i_1\dots i_l)} = -f_j^{(i_1\dots i_l)}. \tag{7.2.31}$$

Лемма 7.2.1. *Уравнение* (7.2.31) *имеет единственное решение в пространстве* $\mathcal{Y}^N$ *при любой правой части* $f_j^{(i_1\dots i_l)} \in \mathcal{Y}^N$.

Доказательство. Определим оператор L: $\mathcal{Y}^N \to \mathcal{Y}^N$ по формуле

$$L\beta = A\beta - \beta D, \tag{7.2.32}$$

где $\beta \in \mathcal{Y}^N$. В силу наложенных на оператор A условий оператор L является замкнутым линейным оператором с плотной в $\mathcal{Y}^N$ областью определения. Кроме того, несложно проверить, что оператор L является генератором сильно непрерывной полугруппы линейных ограниченных операторов $U(t)$: $\mathcal{Y}^N \to \mathcal{Y}^N$ ($t \geq 0$), которая определяется по правилу

$$U(t)\beta = T(t)\beta e^{-tD}. \tag{7.2.33}$$

Поскольку все собственные числа матрицы D расположены на мнимой оси, то в силу (7.1.6) для всех $\beta \in \mathcal{Y}^N$ имеет место неравенство

$$\|U(t)\beta\|_{\mathcal{B}^N} \leq Ke^{-\nu t}\|\beta\|_{\mathcal{B}^N}, \quad t \geq 0, \tag{7.2.34}$$

где $K, \nu > 0$. Из (7.2.34) выводим, что

$$|\sigma\big(U(t)\big)| \leq Ke^{-\nu t}, \quad t \geq 0, \tag{7.2.35}$$

где $\sigma\big(U(t)\big)$ — спектр оператора $U(t)$. Неравенство (7.2.35) понимается в том смысле, что оно выполнено для любого $\mu \in \sigma\big(U(t)\big)$. Согласно [153, p. 45, Theorem 2.3], имеем

$$e^{t\sigma(L)} \subset \sigma\big(U(t)\big), \quad t \geq 0. \tag{7.2.36}$$

В силу (7.2.35), (7.2.36) заключаем, что число вида $\mathrm{i}\omega$, где $\omega \in \mathbb{R}$, не может принадлежать множеству $\sigma(L)$, т.е. спектру оператора L. Таким образом, вся мнимая ось принадлежит резольвентному множеству оператора L. Следовательно (см., например, [19]), для любого $\omega \in \mathbb{R}$ существует определенный во всем пространстве $\mathcal{Y}^N$ линейный непрерывный оператор $(L - \mathrm{i}\omega I)^{-1}$. Таким образом, уравнение (7.2.31) имеет единственное решение

$$\beta_j^{(i_1\dots i_l)} = -(L - \mathrm{i}\omega_j I)^{-1} f_j^{(i_1\dots i_l)}.$$

■

Следствие 7.2.1. *Единственное решение уравнения* (7.2.31) *определяется формулой*

$$\beta_j^{(i_1\dots i_l)} = \int\limits_0^\infty e^{-\mathrm{i}\omega_j s} U(s) f_j^{(i_1\dots i_l)} ds, \tag{7.2.37}$$

где полугруппа операторов $U(t)$ *имеет вид* (7.2.33).

Доказательство. Сходимость интеграла в (7.2.37) следует из неравенства (7.2.34). Аналогично тому, как это делается в [153, p. 8, Theorem 3.1], можно показать, что интеграл (7.2.37) принадлежит области определения оператора L, который описывается формулой (7.2.32). И, кроме того, справедливо равенство

$$L\beta_j^{(i_1\dots i_l)} = \mathrm{i}\omega_j \beta_j^{(i_1\dots i_l)} - f_j^{(i_1\dots i_l)},$$

которое эквивалентно (7.2.31). ■

Построенная нами вектор-строка $\hat{H}(t)$, определяемая формулой (7.2.27), удовлетворяет, таким образом, следующему уравнению:

$$\frac{d\hat{H}}{dt} = A\hat{H} - \hat{H}D + (1-P)G(t)\big(\Phi + \hat{H}(t)\big) - \hat{H}\langle PG(t)(\Phi + \hat{H}(t)), \Psi\rangle + \hat{R}(t), \tag{7.2.38}$$

где $\hat{R}(t)$ — некоторая вектор-строка, принимающая значения из пространства $\mathcal{Y}^N$, такая что $\|\hat{R}(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_0, \infty)$. Имеет место следующая теорема об аппроксимации.

Теорема 7.2.2. *Пусть* $\mathcal{W}(t)$ *— критическое многообразие для уравнения* (7.1.1)*, существующее согласно теореме 7.2.1 при достаточно больших* t*. Тогда найдется такое достаточно большое* t_**, что при* $t \geq t_*$ *вектор-строка* $H(t)$ *из* (7.2.4) *допускает представление в виде*

$$H(t) = \hat{H}(t) + Z(t), \qquad t \geq t_* \geq t_0. \tag{7.2.39}$$

Здесь вектор-строка $\hat{H}(t)$ *описывается формулой* (7.2.27) *и удовлетворяет уравнению* (7.2.38)*, а вектор-строка* $Z(t)$*, принимающая значения из* $\mathcal{Y}^N$*, такова, что* $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ *при* $t \to \infty$ *и* $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_*, \infty)$.

Доказательство. Вектор-строку $H(t)$, являющуюся решением операторного уравнения (7.2.21), (7.2.22), запишем в виде суммы (7.2.39). Тогда уравнение (7.2.21) можно записать относительно неизвестной вектор-строки $Z(t)$:

$$Z(t) = \Pi Z(t), \tag{7.2.40}$$

$$\Pi Z(t) = \Gamma\big(\hat{H}(t) + Z(t)\big) - \hat{H}(t), \tag{7.2.41}$$

где оператор Γ определен формулой (7.2.22). Будем рассматривать оператор Π действующим в пространстве $\mathcal{CL}$ непрерывных при $t \geq t_*$ вектор-строк $Z(t)$, принимающих значения в пространстве $\mathcal{Y}^N$, с фиксированным начальным условием $Z(t_*)$ таких, что $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \to 0$ при $t \to \infty$ и $p(t)\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} \in L_1[t_*, \infty)$. Здесь функция $p(t)$ определяется в силу (7.2.25). Пространство $\mathcal{CL}$ будет банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\|Z\|_{\mathcal{CL}} = \|Z\|_{\mathcal{C}} + \|Z\|_{\mathcal{L}}, \qquad \|Z\|_{\mathcal{L}} = \int\limits_{t_*}^{\infty} p(t)\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N} dt, \tag{7.2.42}$$

где норма $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$ введена согласно (7.2.23).

Запишем далее оператор Π в несколько ином виде. Пусть вектор-функция $w(t) \in \mathbb{C}^N$ является решением системы (7.2.19), в которой $H(t)$ есть сумма (7.2.39). В силу вида $\hat{H}(t)$ (см. формулы (7.2.27), (7.2.28)) с учетом следствия 7.2.1 заключаем, что элементы вектор-строки $\hat{H}(s)$ принадлежат области определения оператора A. Тогда, имея в виду абсолютную непрерывность функций $v_1(t), \dots v_n(t)$ и [153, p. 4, Theorem 2.4], приходим к выводу, что

$$\hat{H}(t)w(t) = T(t-t_*)\hat{H}(t_*)w(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} \frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s)w(s)\big)ds, \tag{7.2.43}$$

где

$$\frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s)w(s)\big) = -T(t-s)A\hat{H}(s)w(s) + T(t-s)\frac{d\hat{H}}{ds}w(s) + T(t-s)\hat{H}(s)\dot{w}(s).$$

Далее, принимая во внимание (7.2.19), (7.2.38) и (7.2.39), имеем

$$\frac{d}{ds}\big(T(t-s)\hat{H}(s)w(s)\big) = T(t-s)\Big((1-P)G(s)\big(\Phi + \hat{H}(s)\big) + \hat{H}\langle PG(s)Z(s), \Psi\rangle + \hat{R}(s)\Big)w(s). \tag{7.2.44}$$

Вектор-функцию $w(t)$ запишем в виде $w(t) = W_{\hat{H}+Z}(t, t_*)w(t_*)$, где $W_{\hat{H}+Z}(t,s)$ $(t, s \geq t_*)$ — матрица Коши системы (7.2.19) ($W_{\hat{H}+Z}(t,t) = I$), в которой $H(t)$ есть сумма (7.2.39). Подставляя (7.2.44) в (7.2.43) и возвращаясь к (7.2.41), получаем с учетом (7.2.22) следующее представление для оператора Π:

$$\Pi Z(t) = T(t-t_*)Z(t_*)U_{\hat{H}+Z}(t_*, t) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)\Big((1-P)G(s)Z(s) - \\ - \hat{H}(s)\langle PG(s)Z(s), \Psi\rangle - \hat{R}(s)\Big)W_{\hat{H}+Z}(s,t)ds. \tag{7.2.45}$$

Точно так же, как это делается в доказательстве теоремы 6.3.2, можно установить, что оператор Π переводит некоторый замкнутый шар $\|Z\|_{\mathcal{CL}} \leq r_0$ пространства $\mathcal{CL}$ в себя и является в этом шаре сжимающим, если t_* достаточно велико, а величина $\|Z(t_*)\|_{\mathcal{B}^N}$ достаточно

мала. При этом оказывается, что не только функция $p(t)\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N}$, но и функция $\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N}$ принадлежит классу $L_1[t_*,\infty)$. Отметим, что существенную роль при доказательстве играют оценки (7.1.6) и (7.2.24). ■

Следствие 7.2.2. *Пусть имеет место оценка*

$$\sum_{1\le i_1\le\ldots\le i_{k+1}\le n}|v_{i_1}(t)\cdot\ldots\cdot v_{i_{k+1}}(t)|+\sum_{i=1}^{n}|\dot v_i(t)|+\gamma(t)\le\varphi(t),\qquad t\ge t_0,$$

где $\varphi(t)$ — некоторая положительная при $t\ge t_0$ функция, а функция $\gamma(t)$ определена в силу (7.1.3). *Предположим, что существует такое $\beta\in(0,\alpha)$, где $\alpha>0$ — величина из неравенств* (7.1.6) *и* (7.2.24), *что*

$$\varphi(t_1)e^{\beta t_1}\le\varphi(t_2)e^{\beta t_2},\qquad t_0\le t_1\le t_2.$$

Тогда для вектор-строки $Z(t)$ из представления (7.2.39) *при $t\ge t_*\ge t_0$ справедливо неравенство*

$$\|Z(t)\|_{\mathcal{B}^N}\le K\varphi(t)$$

с некоторой постоянной K.

Это утверждение аналогично следствию 6.3.1. Критическое многообразие $\mathcal{W}(t)$ обладает свойством глобального притяжения в следующем смысле.

Теорема 7.2.3. *Пусть $u(t)$ — слабое решение уравнения* (7.1.1), *т.е. решение интегрального уравнения* (7.1.4), *определенное при $t\ge T\ge t_0$. Тогда найдется такое достаточно большое $t_*\ge T$, что при $t\ge t_*$ имеет место следующее асимптотическое представление:*

$$u(t)=\Phi w_H(t)+H(t)w_H(t)+O\big(e^{(-\alpha+\varepsilon)t}\big),\qquad t\to\infty. \tag{7.2.46}$$

Здесь величина $\alpha>0$ выбрана в силу неравенства (7.1.6), *$\varepsilon\in(0,\alpha)$ — произвольно и $w_H(t)$ ($t\ge t_*$) — некоторое решение системы на критическом многообразии* (7.2.19).

Доказательство. В силу (7.2.7), (7.2.12) решение $u(t)$ может быть записано в виде

$$u(t)=\Phi w(t)+u_{\mathcal{Y}}(t),\qquad t\ge t_*, \tag{7.2.47}$$

где функция $u_{\mathcal{Y}}(t)$, принимающая значения из подпространства $\mathcal{Y}$, удовлетворяет интегральному уравнению (7.2.11) с $t_0=t_*$, а функция $w(t)$ является решением системы (7.2.17) с начальным условием $w(t_*)=\langle Pu(t_*),\Psi\rangle$. Далее, пусть $\mathcal{W}(t)$ — критическое многообразие

для уравнения (7.1.1), существующее в силу теоремы 7.2.1 при $t \geq t_*$, где t_* достаточно велико. Напомним, что это многообразие определяется формулой (7.2.4). Рассмотрим некоторое слабое решение уравнения (7.1.1), лежащее при $t \geq t_*$ на многообразии $\mathcal{W}(t)$:

$$\tilde{u}(t) = \Phi w_H(t) + H(t)w_H(t) \tag{7.2.48}$$

где величина $w_H(t_*)$ будет определена позднее. Покажем, что $u(t) = \tilde{u}(t) + O(e^{(-\alpha+\varepsilon)t})$. Полагая

$$z(t) = u_{\mathcal{Y}}(t) - H(t)w_H(t), \quad r(t) = w(t) - w_H(t)$$

и вычитая (7.2.48) из (7.2.47), получаем

$$u(t) - \tilde{u}(t) = \Phi r(t) + z(t), \qquad t \geq t_*. \tag{7.2.49}$$

Далее, замечая, что функция $H(t)w_H(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению (7.2.20) с $w(t) = w_H(t)$ и вычитая (7.2.20) из (7.2.11) (с $t_0 = t_*$), с учетом (7.2.47) получаем следующее уравнение для нахождения $z(t)$:

$$z(t) = T(t-t_*)z(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} T(t-s)(1-P)G(s)\big[\Phi r(s) + z(s)\big]ds, \qquad t \geq t_*. \tag{7.2.50}$$

Отметим, что мы можем считать величину $\|z(t_*)\|_{\mathcal{B}}$ настолько малой, насколько нам это потребуется. Действительно, мы всегда можем от решения $u(t)$ в силу линейности уравнения (7.1.4) перейти к рассмотрению решения $\delta u(t)/\|u(t_*)\|_{\mathcal{B}}$ для любого наперед заданного $\delta > 0$.

Далее, вычитая (7.2.19) (где $w(t) = w_H(t)$) из (7.2.17) и учитывая (7.2.47), заключаем, что вектор-функция $r(t)$ является решением следующего уравнения:

$$\dot{r} = Dr(t) + \langle PG(t)\big(\Phi r(t) + z(t)\big), \Psi\rangle. \tag{7.2.51}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что матрица D имеет жорданову нормальную форму. Следовательно, ее можно представить в виде

$$D = D_1 + D_2,$$

где $D_1 = \operatorname{diag} D$ и D_2 — нильпотентная матрица. Заметим, что всегда можно считать, что $|D_2| < \delta$ для любого наперед заданного $\delta > 0$. Действительно, в уравнении (7.2.51) можно осуществить замену с постоянной матрицей $r = C_\delta \tilde{r}$, где матрица C_δ приводит матрицу $\delta^{-1}D$ к жордановой форме. Тогда эта замена оставляет матрицу D_1 без изменения, а у матрицы D_2 могут быть отличными от нуля лишь элементы $d_{i,i+1} = \delta$. Переходя от (7.2.51) к соответствующему интегральному уравнению, получаем

$$r(t) = e^{D_1(t-t_*)}r(t_*) + \int\limits_{t_*}^{t} e^{D_1(t-s)}\big[D_2 r(s) + \langle PG(s)\big(\Phi r(s) + z(s)\big), \Psi\rangle\big]ds. \tag{7.2.52}$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{D}$, элементами которого являются пары $\big(z(t), r(t)\big)$. Функции $z(t)$ и $r(t)$ непрерывны при $t \geq t_*$. Считаем, что начальный элемент $z(t_*)$ фиксирован и принадлежит подпространству $\mathcal{Y}$. Кроме того, имеют место следующие неравенства:

$$\|z(t)\|_{\mathcal{B}} \leq Ke^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad |r(t)| \leq Ke^{(-\alpha+\varepsilon)(t-t_*)}, \qquad t \geq t_*, \tag{7.2.53}$$

с некоторой константой $K > 0$ и выбранной произвольным образом величиной $\varepsilon \in (0, \alpha)$. Пространство $\mathcal{D}$ становится банаховым, если ввести в нем норму по правилу

$$\big\|\big(z(t), r(t)\big)\big\|_{\mathcal{D}} = \sup_{t \geq t_*} \big(e^{(\alpha-\varepsilon)(t-t_*)}(\|z(t)\|_{\mathcal{B}} + |r(t)|)\big).$$

Заметим, что если система (7.2.50), (7.2.52) имеет решение $\big(z(t), r(t)\big) \in \mathcal{D}$, то уравнение (7.2.52) можно записать в следующей эквивалентной форме. Устремим в этом уравнении переменную t к бесконечности, учтем правое из неравенств (7.2.53), а также тот факт, что все собственные числа матрицы D_1 имеют нулевые вещественные части. Получим

$$r(t_*) = -\int_{t_*}^{\infty} e^{D_1(t_*-s)}\big[D_2 r(s) + \langle PG(s)\big(\Phi r(s) + z(s)\big), \Psi\rangle\big]ds. \tag{7.2.54}$$

Используя это соотношение в (7.2.52), переписываем последнее в следующем виде:

$$r(t) = -\int_{t}^{\infty} e^{D_1(t-s)}\big[D_2 r(s) + \langle PG(s)\big(\Phi r(s) + z(s)\big), \Psi\rangle\big]ds, \qquad t \geq t_*. \tag{7.2.55}$$

Систему уравнений (7.2.50), (7.2.55) запишем в виде операторного уравнения в пространстве $\mathcal{D}$:

$$\big(z(t), r(t)\big) = \Sigma\big(z(t), r(t)\big) = \big(\Sigma_1\big(z(t), r(t)\big), \Sigma_2\big(z(t), r(t)\big)\big), \tag{7.2.56}$$

где операторы $\Sigma_1\colon \mathcal{D} \to \mathcal{Y}$ и $\Sigma_2\colon \mathcal{D} \to \mathbb{C}^N$ определяются правыми частями уравнений (7.2.50) и (7.2.55) соответственно. Можно показать, что оператор Σ будет сжимающим в пространстве $\mathcal{D}$, если величина $\|z(t_*)\|_{\mathcal{B}}$ достаточно мала, t_* достаточно велико, а константа K в (7.2.53) подходящим образом выбрана. Это делается точно так же, как и в доказательстве теоремы 6.3.3.

Осталось отметить, что функция $w_H(t)$ в представлении (7.2.48) является решением системы (7.2.19) с начальным условием $w_H(t_*) = w(t_*) - r(t_*)$, где $w(t_*) = \langle Pu(t_*), \Psi\rangle$, а $r(t_*)$ определяется формулой (7.2.54). ■

Пусть $w^{(1)}(t), \ldots, w^{(N)}(t)$ — фундаментальные решения системы на критическом многообразии (7.2.19), а $u(t)$ — произвольное слабое решение уравнения (7.1.1), определенное при

$t \geq T$. Тогда в силу теоремы 7.2.3 имеет место следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$u(t) = \big(\Phi + H(t)\big) \sum_{i=1}^{N} c_i w^{(i)}(t) + O\big(e^{-\hat{\alpha}t}\big), \tag{7.2.57}$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — произвольные комплексные постоянные и $\hat{\alpha} > 0$ — некоторое действительное число. Таким образом, вопрос построения асимптотик для слабых решений уравнения (7.1.1) сводится, по существу, к задаче асимптотического интегрирования N-мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (7.2.19).

С учетом теоремы 7.2.3 и формул (7.2.27), (7.2.28), определяющих вектор-строку $\hat{H}(t)$, система на критическом многообразии имеет следующий вид:

$$\dot{w} = \Big[D + \sum_{i=1}^{n} v_i(t) D_i(t) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} v_{i_1}(t) v_{i_2}(t) D_{i_1 i_2}(t) + \ldots + \\ + \sum_{1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_k \leq n} v_{i_1}(t) \cdot \ldots \cdot v_{i_k}(t) D_{i_1 \ldots i_k}(t) + L(t)\Big] w, \qquad w \in \mathbb{C}^N. \tag{7.2.58}$$

В этой системе $(N \times N)$-матрицы $D_{i_1 \ldots i_l}(t)$ — это матрицы, элементами которых являются тригонометрические многочлены, т.е. матрицы вида (1.2.4). Кроме того, $L(t)$ — это некоторая матрица из класса $L_1[t_*, \infty)$. Система (7.2.58) относится к классу систем с колебательно убывающими коэффициентами. Метод асимптотического интегрирования систем такого типа изложен в главе 1.

7.3 Построение асимптотики решений возмущенного уравнения теплопроводности

В качестве простого примера, иллюстрирующего использование описанной в предыдущем разделе методики, рассмотрим возмущенное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + g(x) \frac{\sin \omega t}{t^{\rho}} u, \quad x \in \Omega, \quad t \geq t_0 > 0 \tag{7.3.1}$$

с начальным условием

$$u(t_0, x) = \varphi(x) \tag{7.3.2}$$

и граничным условием Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{7.3.3}$$

Здесь функция $u(t, x)$ рассматривается в ограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Символом $\partial u / \partial \nu$ обозначена производная по направлению внешней нормали к

$\partial\Omega$. Действительнозначные функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ считаются принадлежащими пространству $L_2(\Omega)$, параметры ω и ρ — положительны. Наконец, Δ — оператор Лапласа по компонентам вектора x. Вопрос построения асимптотики решений уравнения (7.3.1) с условиями (7.3.2), (7.3.3) обсуждался в работе [127]. Здесь мы продемонстрируем иной подход к решению этой задачи.

Начально-краевую задачу (7.3.1)—(7.3.3) будем рассматривать в гильбертовом пространстве $\mathcal{B} = L_2(\Omega)$. Областью определения оператора Δ будем считать множество $C_0^2(\bar{\Omega})$ дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций, удовлетворяющих на границе $\partial\Omega$ краевому условию (7.3.3). Известно (см., например, [159,172]), что определенный таким образом оператор Δ допускает в пространстве $L_2(\Omega)$ замыкание в виде оператора A. Оператор A, в свою очередь, является генератором сильно непрерывной (даже аналитической) компактной полугруппы операторов $T(t)$. Отметим, что точечный спектр оператора $(-A)$ имеет вид:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

По этой причине представим пространство $L_2(\Omega)$ в виде прямой суммы (7.1.5), выбрав в качестве пространства $\mathcal{X}$ собственное подпространство оператора A, отвечающее собственному числу λ_0. Очевидно, что тогда $\mathcal{X} = \{f(x) \equiv \mathrm{const}, x \in \Omega\}$. Поскольку $\mathcal{B}$ является гильбертовым пространством, то $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ и скобка двойственности (7.2.5) есть скалярное произведение в пространстве $\mathcal{B}$:

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(x)\overline{\psi(x)}dx.$$

Заметим, что оператор A является самосопряженным оператором, а следовательно, $A' = A$. Элементы Φ и Ψ пространства $\mathcal{B}$ выберем так, чтобы было выполнено условие нормировки (7.2.6):

$$\Phi(x) \equiv 1, \qquad \Psi(x) \equiv \frac{1}{|\Omega|}, \tag{7.3.4}$$

где $|\Omega|$ — лебегова мера множества Ω. Наконец, положим

$$\mathcal{Y} = \mathcal{X}^{\perp} = \{y(x) \in \mathcal{B} \mid \big(y(x), \Psi\big) = 0\}. \tag{7.3.5}$$

Справедливость оценки (7.1.6) тогда есть следствие лемм 7.4.1 и 7.4.2 из [55] и компактности полугруппы $T(t)$.

Поскольку в силу (7.3.5) для любого $u \in \mathcal{B}$ имеет место равенство

$$(u, \Psi) = (Pu, \Psi),$$

то уравнение на критическом многообразии (7.2.19) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\dot{w} = \frac{\sin\omega t}{t^\rho}\big(g(x)(\Phi + H(t,x)), \Psi\big)w(t), \quad t \geq t_*, \quad w \in \mathbb{R}. \tag{7.3.6}$$

Здесь функция $H(t,\cdot)$ при всех $t \geq t_*$ принадлежит пространству $L_2(\Omega)$ и, кроме того, $\|H(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $t \to \infty$. В силу теоремы 7.2.2 для этой функции справедливо следующее представление:

$$H(t,x) = \hat{H}(t,x) + Z(t,x), \qquad t \geq t_* \geq t_0. \tag{7.3.7}$$

Здесь функция $Z(t,\cdot)$, принадлежащая подпространству $\mathcal{Y}$, такова, что $\|Z(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $t \to \infty$ и $\|Z(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \in L_1[t_*, \infty)$. Функция $\hat{H}(t,x)$, принадлежащая по переменной x подпространству $\mathcal{Y}$, является приближенным решением уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} = AH + g(x)\frac{\sin\omega t}{t^\rho}\big(\Phi + H(t,x)\big) - \frac{\sin\omega t}{t^\rho}\big(\Phi + H(t,x)\big)\big(g(x)(\Phi + H(t,x)), \Psi\big) \tag{7.3.8}$$

с точностью до слагаемых $\hat{R}(t,x)$ таких, что $\|\hat{R}(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \in L_1[t_0, \infty)$. Здесь мы также учли тот факт, что для любого $u \in \mathcal{B}$ выполнено равенство

$$u - Pu = u - \Phi(u, \Psi). \tag{7.3.9}$$

Функцию $\hat{H}(t,x)$ ищем в виде

$$\hat{H}(t,x) = t^{-\rho}H_1(t,x) + t^{-\rho}H_2(t,x) + \dots, \tag{7.3.10}$$

где функции $H_1(t,x), H_2(t,x), \dots$ по переменной x принадлежат подпространству $\mathcal{Y}$ и являются тригонометрическими многочленами переменной t. Подставим выражение (7.3.10) в уравнение (7.3.8) и соберем слагаемые при $t^{-\rho}$, отбрасывая слагаемые $\hat{R}(t,x)$, такие что $\|\hat{R}(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \in L_1[t_0, \infty)$. Учитывая (7.3.4), получим следующее уравнение для нахождения функции $H_1(t,x)$:

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = AH_1 + g(x)\sin\omega t - \sin\omega t\big(g(x), \Psi\big). \tag{7.3.11}$$

Решение уравнения (7.3.11) будем искать в виде

$$H_1(t,x) = h_1(x)e^{\mathrm{i}\omega t} + \overline{h_1(x)}e^{-\mathrm{i}\omega t}, \tag{7.3.12}$$

где функция $h_1(x)$ принадлежит подпространству $\mathcal{Y}$ пространства $L_2(\Omega)$. Подставляя (7.3.12) в (7.3.11) и собирая слагаемые при $e^{\mathrm{i}\omega t}$, получим уравнение для отыскания функции $h_1(x)$:

$$Ah_1 - \mathrm{i}\omega h_1 = \frac{\mathrm{i}g(x)}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}\big(g(x), \Psi\big). \tag{7.3.13}$$

В силу леммы 7.2.1 это уравнение имеет единственное решение в подпространстве $\mathcal{Y}$. Используя (7.3.7), (7.3.10), (7.3.12) в уравнении (7.3.6), с учетом следствия 7.2.2 получаем следующее представление для уравнения на критическом многообразии:

$$\dot{w} = \Big[t^{-\rho}a_1(t) + t^{-2\rho}a_2(t) + O(t^{-3\rho}) + O(t^{-(2\rho+1)})\Big]w(t). \tag{7.3.14}$$

Здесь

$$a_1(t) = \sin\omega t\big(g(x)\Phi, \Psi\big) = \frac{\sin\omega t}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} g(x)dx, \tag{7.3.15}$$

$$a_2(t) = \sin\omega t\big(g(x)H_1(t,x), \Psi\big) = \frac{\sin\omega t}{|\Omega|}\Big[e^{\mathrm{i}\omega t}\int\limits_{\Omega} g(x)h_1(x)dx + e^{-\mathrm{i}\omega t}\int\limits_{\Omega} g(x)\overline{h_1(x)}dx\Big]. \tag{7.3.16}$$

Следуя теореме 1.2.1, осуществим в уравнении (7.3.14) усредняющую замену переменной

$$w = \big[1 + t^{-\rho}y_1(t) + t^{-2\rho}y_2(t) + \ldots + t^{-k\rho}y_k(t)\big]w_1. \tag{7.3.17}$$

Здесь целочисленный неотрицательный параметр k выбран так, что $k\rho \le 1 < (k+1)\rho$, а функции $y_1(t), \ldots, y_k(t)$ являются тригонометрическими многочленами с нулевым средним значением. В результате этой замены уравнение (7.3.14) преобразуется к усредненному виду

$$\dot{w}_1 = \Big[t^{-\rho}a_1 + t^{-2\rho}a_2 + O(t^{-3\rho}) + O(t^{-(\rho+1)})\Big]w_1(t), \tag{7.3.18}$$

где

$$a_1 = \mathrm{M}\big[a_1(t)\big], \quad a_2 = \mathrm{M}\big[a_2(t) + a_1(t)y_1(t)\big].$$

Тригонометрический многочлен $y_1(t)$ определяется как решение уравнения

$$\dot{y}_1 = a_1(t) - a_1$$

с нулевым средним значением. Несложные расчеты, использующие формулы (7.3.15), (7.3.16), приводят нас к следующим выражениям для величин a_1 и a_2:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \mathrm{M}\big[a_2(t)\big] = \frac{1}{|\Omega|}\,\mathrm{Re}\Big\{\mathrm{i}\int\limits_{\Omega} g(x)h_1(x)dx\Big\}. \tag{7.3.19}$$

Покажем, что величина a_2 неотрицательна. Заметим, что, поскольку функция $h_1(x)$ принадлежит подпространству $\mathcal{Y}$, то в силу (7.3.5)

$$(h_1, \Psi) = \frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} h_1(x)dx = 0. \tag{7.3.20}$$

Вычислим комплексное сопряжение от обеих частей уравнения (7.3.13) и умножим каждую из них на функцию $h_1(x)$. Умножая затем каждую из частей скалярно на элемент Ψ и приравнивая действительные части полученного равенства, с учетом (7.3.20) и самосопряженности оператора A приходим к выражению

$$a_2 = -\frac{2}{|\Omega|}\,\mathrm{Re}\Big\{\int\limits_\Omega Ah_1(x)\overline{h_1(x)}dx\Big\}. \tag{7.3.21}$$

Предположим сначала, что функция $h_1(x)$ принадлежит области определения оператора Δ. Следовательно, в формуле (7.3.21) выполнено равенство $Ah_1 = \Delta h_1$. Используя формулу интегрирования по частям для многомерного случая, имеем

$$\int\limits_\Omega \Delta h_1(x)\overline{h_1(x)}dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial h_1}{\partial \nu}\overline{h_1(x)}d\sigma - \int\limits_\Omega \nabla h_1(x)\nabla\overline{h_1(x)}dx, \tag{7.3.22}$$

где $d\sigma$ — мера на $\partial\Omega$. Поскольку $h_1(x)$ принадлежит области определения оператора Δ, то эта функция удовлетворяет граничному условию (7.3.3). Таким образом,

$$\int\limits_\Omega \Delta h_1(x)\overline{h_1(x)}dx = -\int\limits_\Omega |\nabla h_1(x)|^2 dx. \tag{7.3.23}$$

В силу определения оператора A, осуществляя предельный переход в (7.3.23), легко видеть, что для любой функции h_1 из области определения этого оператора выполнено равенство

$$\int\limits_\Omega Ah_1(x)\overline{h_1(x)}dx = -\int\limits_\Omega |\nabla h_1(x)|^2 dx. \tag{7.3.24}$$

Окончательно получаем, что

$$a_2 = \frac{2}{|\Omega|}\int\limits_\Omega |\nabla h_1(x)|^2 dx \geq 0. \tag{7.3.25}$$

Проинтегрируем теперь уравнение (7.3.18), учитывая формулы (7.3.19), (7.3.25). Получим следующие асимптотические представления для его решений при $t \to \infty$:

$$w(t) = \begin{cases} c\big(1 + O(t^{-\rho})\big), & \rho \geq 1, \\ c\big(1 + O(t^{-2\rho+1})\big), & \dfrac{1}{2} < \rho < 1, \\ c\big(1 + O(t^{-1/2})\big)t^{a_2}, & \rho = \dfrac{1}{2}, \\ c\big(1 + O(t^{-3\rho+1})\big)\exp\big\{\frac{a_2}{1-2\rho}t^{-2\rho+1}\big\}, & \dfrac{1}{3} < \rho < \dfrac{1}{2}, \\ c\big(1 + O(t^{-(k+1)\rho+1})\big)\exp\big\{\frac{a_2}{1-2\rho}t^{-2\rho+1}(1+o(1))\big\}, & \dfrac{1}{k+1} < \rho \leq \dfrac{1}{k}, \quad k \geq 3, \end{cases} \tag{7.3.26}$$

где c — произвольная действительная постоянная. В силу теоремы 7.2.3, учитывая (7.3.4), для слабых решений исходной задачи (7.3.1)—(7.3.3) имеем тогда следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$u(t,x) = \big(1 + H(t,x)\big)w(t) + r(t,x). \tag{7.3.27}$$

Здесь функция $w(t)$ определяется формулами (7.3.26), функция $H(t,x)$ обладает тем свойством, что $\|H(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $t \to \infty$, а функция $r(t,x)$ допускает оценку $\|r(t,\cdot)\|_{L_2(\Omega)} = O(e^{-\alpha t})$, где $\alpha > 0$ — некоторое действительное число.

Анализируя формулы (7.3.26), (7.3.27), мы приходим к выводу, что при $\rho > 1/2$ все решения задачи (7.3.1)—(7.3.3) ограничены при $t \to \infty$ (в норме пространства $L_2(\Omega)$), а в случае $\rho \le 1/2$ решения, вообще говоря, не ограничены. Особо отметим, что существование неограниченных решений является следствием пространственной неоднородности коэффициента возмущения в уравнении (7.3.1). Действительно, предположим, что в этом уравнении $g(x) \equiv g = \text{const}$. Тогда интегральное уравнение (7.2.20) с учетом формул (7.3.4), (7.3.9) имеет решение $H(t,x) \equiv 0$. Следовательно, уравнение на критическом многообразии (7.3.6) приобретает вид

$$\dot{w} = \frac{g \sin \omega t}{t^\rho} w(t).$$

Несложно показать, что все решения этого уравнения имеют следующее асимптотическое представление при $t \to \infty$:

$$w(t) = c\big(1 + O(t^{-\rho})\big),$$

где c — произвольная действительная постоянная.

Заключение

В работе предложена методика построения асимптотических представлений для решений некоторых классов динамических систем при стремлении независимой переменной к бесконечности. Рассмотрены случаи как конечномерных, так и бесконечномерных систем. Основным характеристическим свойством изучаемых задач является наличие среди коэффициентов систем колебательно убывающих функций. Как оказывается, подобного рода величины усложняют использование известных асимптотических результатов напрямую — требуются дополнительные преобразования, позволяющие, в конечном итоге, упростить задачу асимптотического интегрирования. Одним из такого рода упрощающих преобразований является аналог усредняющей замены переменных типа Штокало–Боголюбова–Крылова, разработанный в данном исследовании. Существенная роль в работе отводится также понятию критического многообразия — инвариантному многообразию типа центрального для линейной динамической системы. Изложенная в исследовании схема редукции исходной системы на критическое многообразие позволяет, в частности, применять результаты, известные для конечномерных систем, для построения асимптотики решений в бесконечномерном случае.

Многочисленные примеры, рассмотренные в работе, иллюстрируют предложенные в исследовании методы асимптотического интегрирования. Выбор изучаемых в диссертации задач обусловлен, в первую очередь, их очевидной прикладной направленностью. Среди них отметим различного рода возмущенные гармонические осцилляторы (в том числе, адиабатический осциллятор) и системы таких осцилляторов, а также в определенном смысле их бесконечномерные аналоги; неавтономный осциллятор Ван дер Поля; одномерный оператор Дирака и возмущенное уравнение теплопроводности.

Несмотря на то что в работе рассматривались лишь непрерывные модели, аналоги предложенных в диссертации методов могут быть распространены и на дискретный случай. Соответствующие результаты не вошли в текст диссертации, но могут быть найдены, в частности, в работах автора [82, 146, 147].

В этой работе, за исключением изложенных в разделах 1.3–1.5 результатов, рассматриваются только линейные задачи. Одно из возможных направлений дальнейшего развития темы диссертации могло бы быть связано с более детальным изучением влияния убывающих коэффициентов на динамику нелинейных систем. Отметим, что задачи в этой области уже привлекают внимание исследователей (см. [163]).

Список литературы

Список литературы

[1] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1954. — 215 с.

[2] Беллман Р. Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1969. — 367 с.

[3] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — 548 с.

[4] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974. — 503 с.

[5] Бурд В.Ш. Метод усреднения на бесконечном промежутке и некоторые задачи теории колебаний. — Ярославль: ЯрГУ, 2013. — 420 с.

[6] Бурд В.Ш., Каракулин В.А. Асимптотическое интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, № 5. — С. 658–666.

[7] Бурд В.Ш., Нестеров П.Н. Системы дифференциальных и разностных уравнений: метод усреднения и асимптотика решений: учебное пособие. — Ярославль: ЯрГУ, 2008. — 192 с.

[8] Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968. — 464 с.

[9] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с.

[10] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с.

[11] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н. Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Тр. МИАН. — 2010. — Т. 268. — С. 268–283.

[12] Ганина В.В., Колесов Ю.С. Условия устойчивости верхнего положения равновесия маятника при одном способе исчезающей во времени вибрации его точки подвеса // Дифф. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 2. — С. 152–157.

[13] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — 5-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 560 с.

[14] Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. — М.: Высшая школа, 2001. — 395 с.

[15] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 536 с.

[16] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

[17] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику: От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988. — 368 с.

[18] Зевин А.А. Максимальные показатели Ляпунова и критерии устойчивости линейных систем с переменным запаздыванием // ПММ. — 2015. — Т. 79, № 1. — С. 3–13.

[19] Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[20] Итс А.Р. Асимптотическое поведение решений радиального уравнения Шредингера с осциллирующим потенциалом при нулевой энергии // Проблемы математической физики. Сб. статей. — Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1979. — Т. 9. — С. 30–41.

[21] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ИЛ, 1958. — 475 с.

[22] Колесов Ю.С., Майоров В.В. Новый метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с близкими к постоянным почти периодическими коэффициентами // Дифф. уравнения. — 1974. — Т. 10, № 10. — С. 1778–1788.

[23] Кондратьев В.А. Элементарный вывод необходимого и достаточного условия неколеблемости решений линейного дифференциального уравнения второго порядка // УМН. — 1957. — Т. 12, № 3(75). — С. 159–160.

[24] Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1982. — 272 с.

[25] Левин А. Ю. Интегральный критерий неосцилляционности для уравнения $\ddot{x} + q(t)x = 0$ // УМН. — 1965. — Т. 20, № 2(122). — С. 244–246.

[26] Левин А. Ю. Поведение решений уравнения $\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0$ в неколебательном случае // Матем. сб. — 1968. — Т. 75(117), № 1. — С. 39–63.

[27] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. — М.: Наука, 1988. — 432 с.

[28] Майоров В.В. Исследование устойчивости решений одного линейного дифференциального уравнения с последействием, встречающегося в приложениях // Вестник Ярославского университета. Исследования по устойчивости и теории колебаний. — 1973. — № 5. — С. 86–93.

[29] Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980. — 368 с.

[30] Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л. Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. — Киев: Наук. думка, 1990. — 272 с.

[31] Набоко С.Н. О плотном точечном спектре операторов Шредингера и Дирака // ТМФ. — 1986. — Т. 68, № 1. — С. 18–28.

[32] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. — 2-е изд. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

[33] Нестеров П.Н. Построение асимптотики решений одномерного уравнения Шредингера с быстро осциллирующим потенциалом // Матем. заметки. — 2006. — Т. 80, № 2. — С. 240–250.

Английский перевод:

Nesterov P.N. Construction of the asymptotics of the solutions of the one-dimensional Schrödinger equation with rapidly oscillating potential // Mathematical Notes. — 2006. — Vol. 80, no. 2. — P. 233–243.

[34] Нестеров П.Н. Метод усреднения в задаче асимптотического интегрирования систем с колебательно убывающими коэффициентами // Дифф. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 6. — С. 731–742.

Английский перевод:

Nesterov P.N. Averaging method in the asymptotic integration problem for systems with oscillatory-decreasing coefficients // Differential Equations. — 2007. — Vol. 43, no. 6. — P. 745–756.

[35] Нестеров П.Н. Об асимптотике критических решений систем дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами // Модел. и анализ информ. систем. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 21–41.

Английский перевод:

Nesterov P.N. On asymptotics for critical solutions of systems of differential equations with oscillatory decreasing coefficients // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. — Vol. 47, no. 7. — P. 500–515.

[36] Нестеров П.Н. Асимптотическое интегрирование линейных систем функционально-дифференциальных уравнений // Динамические системы. — 2015. — Т. 5(33), № 3-4. — С. 149–167.

[37] Нестеров П.Н. Асимптотическое интегрирование некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Модел. и анализ информ. систем. — 2017. — Т. 24, № 5. — С. 596–614.

Английский перевод:

Nesterov P.N. Asymptotic integration of certain differential equations in Banach space // Automatic Control and Computer Sciences. — 2019. — Vol. 53, no. 7. — P. 755–768.

[38] Нестеров П.Н. Об асимптотике решений гармонического осциллятора с интегральным возмущением // Модел. и анализ информ. систем. — 2017. — Т. 24, № 1. — С. 64–81.

Английский перевод:

Nesterov P.N. Asymptotics for solutions of harmonic oscillator with integral perturbation // Automatic Control and Computer Sciences. — 2017. — Vol. 51, no. 7. — P. 645–657.

[39] Нестеров П.Н., Агафончиков Е.Н. Особенности колебания решений адиабатических осцилляторов с запаздыванием // Модел. и анализ информ. систем. — 2013. — Т. 20, № 5. — С. 25–44.

Английский перевод:

Nesterov P.N., Agafonchikov E.N. Specific features of oscillations in adiabatic oscillators with delay // Automatic Control and Computer Sciences. — 2015. — Vol. 49, no. 7. — P. 582–596.

[40] Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. — М.: Наука, 1987. — 269 с.

[41] Рапопорт И.М. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. — Киев: Изд-во АН УССР, 1954. — 290 с.

[42] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Т. 3. Теория рассеяния. — М.: Мир, 1982. — 443 с.

[43] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики: Т. 4. Анализ операторов. — М.: Мир, 1982. — 428 с.

[44] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т. 1. — М.: Мир, 1982.

[45] Самохин Ю.А., Фомин В.Н. Метод исследования устойчивости колебаний линейных систем, подверженных действию параметрических нагрузок с непрерывным спектром // Сиб. матем. журн. — 1976. — Т. 17, № 4. — С. 926–931.

[46] Скриганов М.М. О собственных значениях оператора Шредингера, расположенных на непрерывном спектре // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 7, Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1973. — Т. 38. — С. 149–152.

[47] Тихонов А. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сб. — 1948. — Т. 22(64), № 2. — С. 193–204.

[48] Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Матем. сб. — 1952. — Т. 31(73), № 3. — С. 575–586.

[49] Федорюк М.В. Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов // Тр. ММО. — 1966. — Т. 15. — С. 296–345.

[50] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983. — 352 с.

[51] Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: «Наукова думка», 1966. — 252 с.

[52] Фомин В.Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. — 240 с.

[53] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970. — 720 с.

[54] Хасанов А.Б. О собственных значениях оператора Дирака, расположенных на непрерывном спектре // ТМФ. — 1994. — Т. 99, № 1. — С. 20–26.

[55] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984. — 421 с.

[56] Чезари Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1964. — 477 с.

[57] Шкиль Н.И., Вороной А.Н., Лейфура В.Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. — Киев: Вища шк. Головное изд-во, 1985. — 248 с.

[58] Штокало И.З. Критерий устойчивости и неустойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с квази-периодическими коэффициентами // Матем. сб. — 1946. — Т. 19(61), № 2. — С. 263–286.

[59] Штокало И.З. Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. — Киев: Изд-во АН УССР, 1960. — 76 с.

[60] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — 720 с.

[61] Яфаев Д.Р. Математическая теория рассеяния (Общая теория). — СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1994. — 424 с.

[62] Abdullayev A.S. Justification of asymptotic formulas for the fourth Painleve equation // Stud. Appl. Math. — 1997. — Vol. 99, no. 3. — P. 255–283.

[63] Agarwal R.P., Bohner M., Li W.-T. Nonoscillation and oscillation: theory for functional differential equations. — New York: Marcel Dekker, 2004. — 376 p.

[64] Ai S. Asymptotic integration of delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. — 1992. — Vol. 165. — P. 71–101.

[65] Ait Babram M., Hbid M.L., Arino O. Approximation scheme of a center manifold for functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — Vol. 213. — P. 554–572.

[66] Arino O., Győri I. Asymptotic integration of delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. — 1989. — Vol. 138. — P. 311–327.

[67] Arino O., Győri I., Pituk M. Asymptotically diagonal delay differential systems // J. Math. Anal. Appl. — 1996. — Vol. 204. — P. 701–728.

[68] Arino O., Hbid M.L., Ait Dads E. (Eds.). Delay differential equations and applications. — Dordrecht: Springer, 2006. — 581 p.

[69] Arino O., Pituk M. More on linear differential systems with small delays // J. Differential Equations. — 2001. — Vol. 170. — P. 381–407.

[70] Balachandran B., Kalmár-Nagy T., Gilsinn D.E. (Eds.). Delay differential equations: recent advances and new directions. — New York: Springer, 2009. — 350 p.

[71] Balakrishnan A.V. Applied functional analysis. — 2nd edition. — New York: Springer-Verlag, 1981. — 373 p.

[72] Ball J.M. Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constants formula // Proc. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 63, no. 2. — P. 370–373.

[73] Ball J.M. On the asymptotic behavior of generalized processes, with applications to nonlinear evolution equations // J. Differential Equations. — 1978. — Vol. 27. — P. 224–265.

[74] Behncke H., Remling C. Asymptotic integration of linear differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1997. — Vol. 210, no. 2. — P. 585–597.

[75] Berezansky L., Braverman E. Some oscillation problems for a second order linear delay differential equation // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — Vol. 220, no. 2. — P. 719–740.

[76] Berezansky L., Braverman E. Nonoscillation and exponential stability of delay differential equations with oscillating coefficients // J. Dyn. Control Syst. — 2009. — Vol. 15, no. 1. — P. 63–82.

[77] Bodine S. A dynamical systems result on asymptotic integration of linear differential systems // J. Differential Equations. — 2003. — Vol. 187, no. 1. — P. 1–22.

[78] Bodine S., Lutz D.A. Asymptotic analysis of solutions of a radial Schrödinger equation with oscillating potential // Math. Nachr. — 2006. — Vol. 279, no. 15. — P. 1641–1663.

[79] Bodine S., Lutz D.A. Asymptotic integration of differential and difference equations. — Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London: Springer, 2015. — 402 p.

[80] Burd V. Method of averaging for differential equations on an infinite interval: theory and applications. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007. — 360 p.

[81] Burd V., Nesterov P. Parametric resonance in adiabatic oscillators // Results Math. — 2010. — Vol. 58, no. 1–2. — P. 1–15.

[82] Burd V., Nesterov P. Asymptotic behaviour of solutions of the difference Schrödinger equation // J. Difference Equ. Appl. — 2011. — Vol. 17, no. 11. — P. 1555–1579.

[83] Burton T.A. Volterra integral and differential equations. — 2nd edition. — Amsterdam: Elsevier, 2005. — 368 p.

[84] Carr J. Applications of centre manifold theory. — New York: Springer-Verlag, 1982. — 142 p.

[85] Cassell J.S. The asymptotic behaviour of a class of linear oscillators // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). — 1981. — Vol. 32, no. 3. — P. 287–302.

[86] Cassell J.S. The asymptotic integration of some oscillatory differential equations // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). — 1982. — Vol. 33, no. 3. — P. 281–296.

[87] Cassell J.S., Hou Z. Asymptotically diagonal linear differential equations with retardation // J. Lond. Math. Soc. (2). — 1993. — Vol. 47. — P. 473–483.

[88] Cassell J.S., Hou Z. L^p-perturbation of linear functional differential equations // Monatsh. Math. — 1999. — Vol. 128. — P. 211–226.

[89] Castillo S., Pinto M. Asymptotic integration of ordinary different systems // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — Vol. 218, no. 1. — P. 1–12.

[90] Castillo S., Pinto M. Levinson theorem for functional differential systems // Nonlinear Anal. — 2001. — Vol. 47. — P. 3963–3975.

[91] Castillo S., Pinto M. An asymptotic theory for nonlinear functional differential equations // Comput. Math. Appl. — 2002. — Vol. 44. — P. 763–775.

[92] Chudinov K. Note on oscillation conditions for first-order delay differential equations // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — no. 2. — P. 1–10.

[93] Cooke K.L. Linear functional differential equations of asymptotically autonomous type // J. Differential Equations. — 1970. — Vol. 7. — P. 154–174.

[94] Coppel W.A. Stability and asymptotic behavior of differential equations. — Boston: D.C. Heath and Co., 1965. — 166 p.

[95] Coppel W.A. Dichotomies in stability theory. — Berlin: Springer-Verlag, 1978. — 102 p.

[96] Denisov S.A. On the absolutely continuous spectrum of Dirac operator // Comm. Partial Differential Equations. — 2004. — Vol. 29, no. 9–10. — P. 1403–1428.

[97] Denisov S.A. On the existence of wave operators for some Dirac operators with square summable potentials // Geom. Funct. Anal. — 2004. — Vol. 14, no. 3. — P. 529–534.

[98] Denisov S.A., Kiselev A. Spectral properties of Schrödinger operators with decaying potentials // Festschrift for B. Simon's 60th Birthday. Proc. Sympos. Pure Math. — Vol. 76, part 2. — Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2007. — P. 565–589.

[99] Devinatz A. The asymptotic nature of the solutions of certain linear systems of differential equations // Pacific J. Math. — 1965. — Vol. 15, no. 1. — P. 75–83.

[100] Devinatz A. The deficiency index of a certain class of ordinary self-adjoint differential operators // Adv. Math. — 1972. — Vol. 8, no. 3. — P. 434–473.

[101] Devinatz A. The deficiency index problem for ordinary selfadjoint differential operators // Bull. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 79, no. 6. — P. 1109–1127.

[102] Diblík J. Asymptotic representation of solutions of equation $\dot{y}(t) = \beta(t)[y(t) - y(t - \tau(t))]$ // J. Math. Anal. Appl. — 1998. — Vol. 217, no. 1. — P. 200–215.

[103] Diblík J. Behaviour of solutions of linear differential equations with delay // Arch. Math. (Brno). — 1998. — Vol. 34, no. 1. — P. 31–47.

[104] Diblík J. Asymptotic convergence criteria of solutions of delayed functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — Vol. 274, no. 1. — P. 349–373.

[105] Driver R.D. Linear differential systems with small delays // J. Differential Equations. — 1976. — Vol. 21. — P. 148–166.

[106] Eastham M.S.P. The asymptotic solution of linear differential systems. London Math. Soc. Monographs. — Oxford: Clarendon Press, 1989. — 240 p.

[107] Erbe L.H., Kong Q., Zhang B.G. Oscillation theory for functional differential equations. — New York: Marcel Dekker, 1995. — 488 p.

[108] Five parametric resonances in a microelectromechanical system / K.L. Turner, S.A. Miller, P.G. Hartwell et al. // Nature. — 1998. — Vol. 396. — P. 149–152.

[109] Grace S.R., Lalli B.S. Asymptotic behaviour of certain second order integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1980. — Vol. 76. — P. 84–90.

[110] Győri I. Necessary and sufficient stability conditions in an asymptotically ordinary delay differential equation. // Differential Integral Equations. — 1993. — Vol. 6, no. 1. — P. 225–239.

[111] Győri I., Pituk M. L^2-perturbation of a linear delay differential equation // J. Math. Anal. Appl. — 1995. — Vol. 195. — P. 415–427.

[112] Győri I., Pituk M. Stability criteria for linear delay differential equations // Differential Integral Equations. — 1997. — Vol. 10, no. 5. — P. 841–852.

[113] Győri I., Pituk M. Asymptotic formulas for a scalar linear delay differential equation // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — no. 72. — P. 1–14.

[114] Haddock J.R., Sacker R.J. Stability and asymptotic integration for certain linear systems of functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1980. — Vol. 76. — P. 328–338.

[115] Hale J.K., Verduyn Lunel S.M. Introduction to functional differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1993. — 450 p.

[116] Harris W.A. Jr., Lutz D.A. On the asymptotic integration of linear differential systems // J. Math. Anal. Appl. — 1974. — Vol. 48, no. 1. — P. 1–16.

[117] Harris W.A. Jr., Lutz D.A. Asymptotic integration of adiabatic oscillators // J. Math. Anal. Appl. — 1975. — Vol. 51, no. 1. — P. 76–93.

[118] Harris W.A. Jr., Lutz D.A. A unified theory of asymptotic integration // J. Math. Anal. Appl. — 1977. — Vol. 57, no. 3. — P. 571–586.

[119] Hartman P., Wintner A. Asymptotic integrations of linear differential equations // Amer. J. Math. — 1955. — Vol. 77, no. 1. — P. 45–86.

[120] Hinton D.B., Klaus M., Shaw J.K. Embedded half-bound states for potentials of Wigner–von Neumann type // Proc. Lond. Math. Soc. (3). — 1991. — Vol. 62, no. 3. — P. 607–646.

[121] Hou Z., Cassell J.S. Asymptotic solutions for mixed-type equations with a small deviation // Georgian Math. J. — 1998. — Vol. 5, no. 2. — P. 107–120.

[122] Kato T. Perturbation theory for linear operators. — 2nd edition. — Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1980. — 623 p.

[123] Kolmanovskii V., Myshkis A. Introduction to the theory and applications of functional differential equations. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 648 p.

[124] Kurasov P., Naboko S. Wigner–von Neumann perturbations of a periodic potential: spectral singularities in bands // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2007. — Vol. 142, no. 1. — P. 161–183.

[125] Kurasov P., Simonov S. Weyl–Titchmarsh-type formula for periodic Schrödinger operator with Wigner–von Neumann potential // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2013. — Vol. 143, no. 2. — P. 401–425.

[126] Ladde G.S., Lakshmikantham V., Zhang B.G. Oscillation theory of differential equations with deviating arguments. — New York: Marcel Dekker, 1987. — 308 p.

[127] Langer M., Kozlov V. Asymptotics of solutions of a perturbed heat equation // J. Math. Anal. Appl. — 2013. — Vol. 397, no. 2. — P. 481–493.

[128] Levinson N. The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. — 1948. — Vol. 15, no. 1. — P. 111–126.

[129] Lukic M. Schrödinger operators with slowly decaying Wigner–von Neumann type potentials // J. Spectr. Theory. — 2013. — Vol. 3, no. 2. — P. 147–169.

[130] Markus L. Asymptotically autonomous differential systems // Contributions to the theory of nonlinear oscillations III / Ed. by S. Lefschetz. — Princeton: Princeton University Press., 1956. — Vol. 36 of Ann. Math. Stud. — P. 17–29.

[131] Martin M. Spectral analysis of one–dimensional Dirac operators with slowly decreasing potentials // Math. Phys. Anal. Geom. — 2003. — Vol. 6, no. 4. — P. 385–398.

[132] Mischaikow K., Smith H., Thieme H.R. Asymptotically autonomous semiflows: chain recurrence and Lyapunov functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 347, no. 5. — P. 1669–1685.

[133] Naboko S., Simonov S. Zeroes of the spectral density of the periodic Schrödinger operator with Wigner–von Neumann potential // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 2012. — Vol. 153, no. 1. — P. 33–58.

[134] Naulin R. On the instability of differential systems with varying delay // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — Vol. 274, no. 1. — P. 305–318.

[135] Naulin R., Vanegas C.J. Asymptotic formulas for the solutions of integro-differential equations // Acta Math. Hungar. — 2000. — Vol. 89, no. 4. — P. 281–299.

[136] Nesterov P. On the asymptotics for solutions of system of two linear oscillators with slowly decreasing coupling // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. — 2009. — Vol. 89, no. 6. — P. 466–480.

[137] Nesterov P. Parametric resonance in some dynamic equations on time scales // Int. J. Difference Equ. — 2010. — Vol. 5, no. 2. — P. 217–231.

[138] Nesterov P. Method of averaging for systems with main part vanishing at infinity // Math. Nachr. — 2011. — Vol. 284, no. 11-12. — P. 1496–1514.

[139] Nesterov P. On eigenvalues of the one-dimensional Dirac operator with oscillatory decreasing potential // Math. Phys. Anal. Geom. — 2012. — Vol. 15, no. 3. — P. 257–298.

[140] Nesterov P. Appearance of new parametric resonances in time-dependent harmonic oscillator // Results Math. — 2013. — Vol. 64, no. 3-4. — P. 229–251.

[141] Nesterov P. Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients // Monatsh. Math. — 2013. — Vol. 171, no. 2. — P. 217–240.

[142] Nesterov P. Asymptotic integration of functional differential systems with oscillatory decreasing coefficients: a center manifold approach // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — no. 33. — P. 1–43.

[143] Nesterov P. Asymptotic integration of a certain second-order linear delay differential equation // Monatsh. Math. — 2017. — Vol. 182, no. 1. — P. 77–98.

[144] Nesterov P. On some extension of center manifold method to functional differential equations with oscillatory decreasing coefficients and variable delays // J. Dynam. Differential Equations. — 2018. — Vol. 30, no. 4. — P. 1797–1816.

[145] Nesterov P. Asymptotic integration of certain Volterra integro-differential equations with oscillatory decreasing kernels // Differ. Equ. Dyn. Syst. — 2018 (https://doi.org/10.1007/s12591-018-0412-z).

[146] Nesterov P. Asymptotic summation of perturbed linear difference systems in critical case // J. Difference Equ. Appl. — 2019. — Vol. 25, no. 8. — P. 1173–1199.

[147] Nesterov P. On the dynamics of certain higher-order scalar difference equation: asymptotics, oscillation, stability // Turkish J. Math. — 2020. — Vol. 44, no. 5. — P. 1612–1639.

[148] Neumann J.v., Wigner E. Über merkwürdige diskrete Eigenwerte // Physikalische Zeitschrift. — 1929. — Vol. 30. — P. 465–467.

[149] Nonoscillation theory of functional differential equations with applications / R.P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, A. Domoshnitsky. — New York: Springer, 2012. — 520 p.

[150] Observation of an electronic bound state above a potential well / F. Capasso, C. Sirtori, J. Faist et al. // Nature. — 1992. — Vol. 358. — P. 565–567.

[151] Opluštil Z., Šremr J. Some oscillation criteria for the second-order linear delay differential equation // Math. Bohem. — 2011. — Vol. 136, no. 2. — P. 195–204.

[152] Opluštil Z., Šremr J. Myshkis type oscillation criteria for second-order linear delay differential equations // Monatsh. Math. — 2015. — Vol. 178, no. 1. — P. 143–161.

[153] Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1983. — 282 p.

[154] Perron 0. Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reell ist (Erste Mitteilung) // J. Reine Angew. Math. — 1913. — Vol. 142. — P. 254–270.

[155] Perron 0. Über lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängige Variable reell ist (Zweite Mitteilung) // J. Reine Angew. Math. — 1913. — Vol. 143. — P. 29–50.

[156] Pituk M. The Hartman–Wintner theorem for functional differential equations // J. Differential Equations. — 1999. — Vol. 155. — P. 1–16.

[157] Pituk M. Asymptotic behavior and oscillation of functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 322. — P. 1140–1158.

[158] Pituk M. A Perron type theorem for functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 316. — P. 24–41.

[159] Rothe F. Global solutions of reaction-diffusion systems. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1984. — 218 p.

[160] Samoilenko A., Pinto M., Trofimchuk S. Krylov–Bogolyubov averaging of asymptotically autonomous differential equations // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 133, no. 1. — P. 145–154.

[161] Sanders J.A., Verhulst F., Murdock J. Averaging methods in nonlinear dynamical systems. — 2-nd edition. — New York: Springer, 2007. — 434 p.

[162] Simonov S. Zeroes of the spectral density of the Schrödinger operator with the slowly decaying Wigner–von Neumann potential // Math. Z. — 2016. — Vol. 284, no. 1-2. — P. 335–411.

[163] Sultanov O. Bifurcations in asymptotically autonomous Hamiltonian systems under oscillatory perturbations. — 2020. — arXiv : math.DS/2010.05078.

[164] Thieme H.R. Asymptotically autonomous differential equations in the plane // Rocky Mountain J. Math. — 1994. — Vol. 24, no. 1. — P. 351–380.

[165] Trofimchuk S., Pinto M. L_p–perturbations of invariant subbundles for linear systems // J. Dynam. Differential Equations. — 2002. — Vol. 14, no. 4. — P. 743–761.

[166] Um C.I., Yeon K.H., George T.F. The quantum damped harmonic oscillator // Phys. Rep. — 2002. — Vol. 362, no. 2-3. — P. 63–192.

[167] Weidmann J. Spectral theory of ordinary differential operators. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1987. — 304 p.

[168] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos. — 2nd edition. — New York: Springer-Verlag, 2003. — 844 p.

[169] Wintner A. The adiabatic linear oscillator // Amer. J. Math. — 1946. — Vol. 68, no. 3. — P. 385–397.

[170] Wintner A. Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator // Amer. J. Math. — 1947. — Vol. 69, no. 2. — P. 251–272.

[171] Wu H., Chen C., Zhuang R. Oscillation criterion for first-order delay differential equations with sign-changing coefficients // Electron. J. Differential Equations. — 2017. — Vol. 2017, no. 126. — P. 1–9.

[172] Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1996. — 432 p.

[173] Yang E.H. Asymptotic behaviour of certain second order integro-differential equations // J. Math. Anal. Appl. — 1985. — Vol. 106. — P. 132–139.