На правах рукописи

Развенская Ольга Олеговна

НЕКОТОРЫЕ НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СЛУЧАИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ И ПСЕВДОПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ О ВЕРШИННОЙ РАСКРАСКЕ ГРАФОВ

Специальность 01.01.09 —

дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2021 г.

Работа выполнена в лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики»

Научный руководитель:	**Малышев Дмитрий Сергеевич**, д.ф.-м.н., доц., ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики», профессор кафедры прикладной математики и информатики
Официальные оппоненты:	**Абросимов Михаил Борисович**, д.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО «Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского», заведующий кафедрой теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии
	Жуковский Максим Евгеньевич, д.ф.-м.н., доц., ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», доцент кафедры дискретной математики
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова», кафедра дискретного анализа

Защита состоится ____________ 2021 г. в ______:______ на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Автореферат разослан ________________ 2021 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.166.20,
к.ф.-м.н. Бирюков Руслан Сергеевич

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследований, значение основных результатов диссертации

На настоящее время накоплено огромное количество фактов об эффективной разрешимости (полиномиальной разрешимости, FPT-разрешимости и т.п.) и о труднорешаемости (NP-трудности, $W[1]$-трудности и т.п.) многих задач на графах в различных классах графов, причем список соответствующих библиографических источников постоянно пополняется. Упомянем электронный ресурс www.graphclasses.org, на котором представлены несколько тысяч результатов такого типа. Направляющие мотивы к получению новых сведений о сложности могут быть самыми разнообразными, но среди них можно выделить интерес к получению полной классификации сложности задачи для рассматриваемого семейства ее подзадач. Например, задача выполнимости булевых формул, заданных конъюнктивными нормальными формами с не более чем k литералами в каждом сомножителе, полиномиально разрешима при $k \in \{1, 2\}$, но является NP-полной для любого $k \geq 3$[1]. Задача целочисленного линейного программирования полиномиально разрешима в классе полиэдров с целыми вершинами, но она NP-трудна в классе многогранников с целыми и полуцелыми вершинами[2]. Выяснение сложностного статуса даже отдельной подзадачи из рассматриваемого семейства дает продвижение на пути к получению полной классификации сложности задачи в данном семействе. Такой результат может быть особенно интересным, если он получен при помощи новых алгоритмических и сложностных приемов, которые могут оказаться полезными для будущих исследований.

В данной диссертации будут представлены результаты о новых алгоритмических приемах для задачи о взвешенной вершинной раскраске графа. В ней также будут представлены новые результаты о псевдополиномиальной разрешимости данной задачи и полиномиальной разрешимости ее невзвешенного варианта в некоторых наследственных классах графов.

Задача о взвешенной вершинной раскраске графа (сокращенно, *задача* ВВР) состоит в минимизации количества цветов в раскрасках вершин задаваемого графа так, что для каждой вершины назначаются цвета, количество которых равно задаваемому весу вершины, причем смежным вершинам назначаются различные цвета. Невзвешенный вариант (т.е. с единичными весами вершин) данной задачи называется *задачей о вершинной раскраске графа* (сокращенно, *задачей* ВР). *Задача о вершинной k-раскраске* (кратко, *задача* k-ВР) состоит в проверке того, а можно ли вершины заданного графа раскрасить не более чем в k цветов так, чтобы любые соседние вершины имели

[1] Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. — New York, NY, USA: W. H. Freeman and Co, 1979. — 338 P.

[2] Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. — 1989. — V. 45, № 1–3. — P. 139–172.

различные цвета.

Задача ВР является классической задачей на графах, она тесно связана с рядом прикладных задач теории расписаний, складской логистики и других областей (см., например, монографию[3]). Задача ВВР вызывает интерес по двум причинам. Во-первых, она возникает при постановке некоторых прикладных задач на формальном математическом языке. Упомянем задачи распределения радиочастот при организации беспроводной связи[4] и планирования литья деталей на машине пакетной обработки с учетом совместимости заданий[5].

Во-вторых, некоторые важные алгоритмические приемы работают путем перехода от невзвешенных графов к их собственным порожденным подграфам, но с весами вершин. Таким приемом является, например, модульное разложение графов. Тем самым, их применение обязывает «замкнуть» задачу о вершинной раскраске, т.е. обязывает рассматривать ее взвешенный случай. Если при исследовании сложности задачи ВР в каком-нибудь классе графов возникает переход к задаче ВВР, то результат о сложности принято формулировать именно для задачи ВВР, даже если изначально ставилась цель рассматривать только задачу ВР. Автор настоящей диссертации также будет придерживаться этого принципа.

Задача k-ВР при любом $k \geq 3$ является NP-полной, а задача ВР является NP-трудной[1]. Поэтому задача ВВР является NP-трудной в сильном смысле. Следовательно, существование полиномиального алгоритма хотя бы для одной из задач k-ВР при $k \geq 3$ и ВР или существование псевдополиномиального алгоритма для задачи ВВР эквивалентно равенству классов сложности P и NP. Развитие теории сложности вычислений способствовало укоренению пессимистического взгляда на возможность существования полиномиальных (соответственно, псевдополиномиальных) алгоритмов для решения NP-полных/NP-трудных (соответственно, NP-трудных в сильном смысле) задач.

Известно несколько способов редукции графов при решении алгоритмических задач на графах. Такими приемами являются модульное разложение графов[6] и разложение графов посредством разделяющих клик[7]. Другой известный подход к построению (псевдо)полиномиальных алгоритмов решения задач на графах состоит в отделении уже известных случаев (псевдо)полиномиальной разрешимости. Такого рода случаями, на-

[3]Christofides N. Graph theory: An algorithmic approach. — Academic Press, 1975. — 400 P.

[4]Mishra A., Banerjee S, Arbaugh W. A. Weighted coloring based channel assignment for WLANs // Mobile Computing and Communications Review. — 2005. — V. 9, № 3. — P. 19–31.

[5]Gavranovich H., Finke G. Graph partitioning and set covering for the optimal design of a production system in the metal industry // Proceedings of the Second Conference on Management and Control of Production and Logistics. — 2000. — V. 2. — P. 603–608.

[6]Cournier A., Habib M. A new linear algorithm for modular decomposition // Lecture Notes in Computer Science. — 1994. — V. 787. — P. 68–84.

[7]Tarjan R. Decomposition by clique separators // Discrete Mathematics. — 1985. — V. 55. — P. 221–232.

пример, являются совершенные графы[8,9,10]. Во второй главе диссертации предложены новые алгоритмические приемы для построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов решения подзадач задачи ВВР. А именно, разрешимость задачи ВВР за кубичное от суммы весов вершин время для графов без трех попарно несмежных вершин, элиминация вершин с независимой анти-окрестностью и переборная элиминация вершин специального вида.

Как обычно, через P_n, C_n, O_n, K_n обозначены простой путь, простой цикл, пустой граф, полный граф на n вершинах. Через $K_{p,q}$ обозначается полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле, называемый также (p,q)-*бикликой*. Граф $K_p - e$ получается из K_p путем удаления произвольного ребра. Через $K_{2,3}^{+}$ мы обозначаем граф, получаемый добавлением ребра к графу $K_{2,3}$, инцидентного вершинам степени 3 этого графа. Граф W_4, называемый *4-колесом*, получается из цикла с 4 вершинами добавлением новой вершины и всех ребер, инцидентных добавленной вершине и вершинам цикла. Граф $butterfly$ — результат отождествления двух вершин, принадлежащих двум треугольникам.

Через $G_1 + G_2$ обозначается дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин. Через kG обозначается дизъюнктное объединение k копий графа G. Граф $\overline{G}$ — граф, дополнительный к графу G.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ можно задать множеством $\mathcal{Y}$ своих *запрещенных порожденных подграфов*, т.е. графов, минимальных относительно удаления вершин, которые не принадлежат $\mathcal{X}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{Y})$. Графы из $\mathcal{X}$ называются $\mathcal{Y}$-*свободными.*

Существует множество «белых пятен» на «картах» вычислительной сложности задач на графах в семействе наследственных классов графов. Имеется два способа для уменьшения количества этих «белых пятен». Первый — увеличение количества запрещенных порожденных подграфов, а второй — увеличение размера таких подграфов. Ограничения на размер или количество запрещенных порожденных структур образуют некоторое подсемейство семейства наследственных классов. Возможное сокращение совокупности «белых пятен» состоит в получении полной сложностной дихотомии для бóльших значений данной границы.

Для задачи k-ВР сложностной статус остается открытым даже для некоторых классов, определяемых одним запрещенным порожденным подграфом. Для $k = 3$ и семейства $\{Free(\{H\}) : |V(H)| \leq 6\}$, а также для $k = 4$ и семейства

[8] Chudnovsky M., Cornuéjols G., Liu X., Seymour P., Vušković K. Recognizing Berge graphs // Combinatorica. — 2005. — V. 25. — P. 143–186.

[9] Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R. The strong perfect graph theorem // Annals of Mathematics. — 2006. — V. 164. — P. 51–229.

[10] Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. Polynomial algorithms for perfect graphs // Annals of Discrete Mathematics. — 1984. — V. 21. — P. 325–356.

$\{Free(\{H\}) : \ |V(H)| \leq 5\}$ в работах[11,12] были получены полные сложностные дихотомии. Задача 3-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_7\})$ (см. работу[13]), а задача 4-ВР разрешима за полиномиальное время в классе $Free(\{P_6\})$ (см. работу[14]). При любом k задача k-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_5\})$ (см. работу[15]). Для каждого фиксированного $k \geq 5$ задача k-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_6\})$ (см. работу[16]). Задача 4-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_7\})$ (см. работу[16]). На настоящее время сложностной статус задачи k-ВР является открытым для класса $Free(\{P_8\})$ и $k = 3$, а также для класса $Free(\{P_7\})$ и $k = 4$.

В работах[17,18,19] рассматривается задача 3-ВР. В работе[17] для задачи 3-ВР получена полная сложностная дихотомия в семействе

$$\{Free(\{H_1, H_2\}) : \ \max(|V(H_1)|, |V(H_2)|) \leq 5\}.$$

В работе[18] был получен аналогичный результат для семейства

$$\{Free(\{H_1, H_2, H_3\}) : \ \max(|V(H_1)|, |V(H_2)|, |V(H_3)|) \leq 5\}.$$

В работе[19] рассматривались четверки запрещенных порожденных 5-вершинных подграфов. В той же работе для всех данных наследственных классов, кроме трех, устанавливается вычислительный статус задачи 3-ВР. В работе[20] была доказана полиномиальная разрешимость задачи 3-ВР для данных трех случаев.

В работе[21] было показано, что задача ВР полиномиально разрешима для класса $Free(\{H\})$, если H — порожденный подграф графа P_4 или графа $P_3 + K_1$, иначе она является NP-трудной в данном классе. Однако, при запрещении двух или более порожденных подграфов полную сложностную классификацию получить уже не уда-

[11] Broersma H. J., Golovach P. A., Paulusma D., Song J. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theoretical Computer Science — 2012. — V. 414, № 1. — P. 9–19

[12] Golovach P. A., Paulusma D., Song J. 4-coloring H-free graphs when H is small // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — V. 161, № 1–2. — P. 140–150.

[13] Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. — 2018. — V. 38. — P. 779–801.

[14] Spirkl S., Chudnovsky M., Zhong M. Four-coloring P_6-free graphs // Proc. 30th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (San Diego, USA, January 6–9, 2019), 2019. — P. 1239–1256.

[15] Hoàng C., Kamiński M., Lozin V. V., Sawada J., Shu X. Deciding k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time // Algorithmica. — 2010. — V. 57. — P. 74–81.

[16] Huang S. Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs // European Journal of Combinatorics. — 2016. — V. 51. — P. 336–346.

[17] Malyshev D. S. The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs // Discrete Mathematics. — 2015. — V. 338, № 11. — P. 1860–1865.

[18] Malyshev D. S. The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs and Combinatorics. — 2017. — V. 33, № 4. — P. 1009–1022.

[19] Сироткин Д. В., Малышев Д. С. О сложности задачи вершинной 3-раскраски для наследственных классов графов, определенных запретами небольшого размера // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 4. — С. 112–130.

[20] Малышев Д. С. Полная классификация сложности задачи о вершинной 3-раскраске для четверок порожденных 5-вершинных запретов // Журнал Средневолжского Математического Общества. — 2020. — Т. 22, № 1. — С. 38–47.

[21] Kral D., Kratochvil J., Tuza Z., Woeginger G. Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Lecture Notes in Computer Science. — 2001. — V. 2204. — P. 254–262.

ется. В работе[22] рассматривалась сложность задачи ВР для наследственных классов, определяемых запрещенными порожденными фрагментами, каждый не более чем с 4 вершинами. В данной работе был установлен сложностной статус задачи ВР для всех таких классов, кроме четырех:

$$Free(\{K_{1,3}, O_4\}), Free(\{K_{1,3}, K_2 + O_2, O_4\}),$$

$$Free(\{C_4, O_4\}), Free(\{K_{1,3}, K_2 + O_2\}).$$

Там же было показано, что задача ВР для $\{K_{1,3}, K_2 + O_2\}$-свободных графов полиномиально сводится к той же задаче для $\{K_{1,3}, K_2 + O_2, O_4\}$-свободных графов.

В ряде работ, в частности, в публикациях[23,24,25,26,27,28], исследовалась сложность задачи ВР для классов, определяемых парой связных запрещенных порожденных фрагментов с не более чем 5 вершинами каждый. На настоящее время здесь имеется только три следующих случая с открытой сложностью задачи ВР:

$$\{P_5, H\}, \text{ где } H \in \{K_{2,3}, K_{2,3}^{+}, W_4\}.$$

Сокращению количества «белых пятен» до трех способствовали результаты автора. А именно, в третьей главе настоящей диссертации доказывается, что для любого p задача ВР полиномиально разрешима для графов из $Free(\{P_5, K_p - e\})$ и что задача ВВР псевдополиномиально разрешима для $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободных графов. Отметим, что из разрешимости задачи ВВР за псевдополиномиальное время следует полиномиальная разрешимость задачи ВР.

Сложностной статус задачи ВР не удается прояснить ни для одного из оставшихся трех классов. Возникло предложение рассмотреть попарные пересечения этих трех классов. В работе[29] рассматривался класс $Free(\{P_5, K_{2,3}, W_4\})$ и для него была доказана псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР. В четвертой главе диссертации рассматривается класс $Free(\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^{+}\})$ и для его графов доказывается псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР. Отметим, что в принятой к опубликованию

[22] Lozin V. V., Malyshev D. S. Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — V. 216. — P. 273–280.

[23] Hoàng C., Lazzarato D. Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P_5})$-free graphs and similar graph classes //Discrete Applied Mathematics. — 2015. — V. 186. — P. 105–111.

[24] Karthick T., Maffray F., Pastor L. Polynomial cases for the vertex coloring problem // Algorithmica. — 2017. — V. 81, № 3. — P. 1053–1074.

[25] Malyshev D. S. The coloring problem for classes with two small obstructions // Optimization Letters. — 2014. — V. 8, № 8. — P. 2261–2270.

[26] Malyshev D. S. Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem // Journal of Combinatorial Optimization. — 2015. — V. 31, № 2. — P. 833–845.

[27] Malyshev D. S. The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures // Discrete Applied Mathematics. — 2018. — V. 47. — P. 423–432.

[28] Malyshev D. S. The vertex colourability problem for $\{claw, butterfly\}$-free graphs is polynomial-time solvable // Optimization Letters. — 2021, doi: 10.1007/s11590-020-01679-9, принято к опубликованию.

[29] Грибанов Д. В., Малышев Д. С., Мокеев Д. Б. Эффективная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для некоторого наследственного класса с 5-вершинными запретами// Дискретный анализ и исследование операций. — 2020. — Т. 27, № 2.— С. 71–87.

работе[30] устанавливается псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР в классе $Free(\{P_5, K^+_{2,3}, W_4\})$, доказательство данного результата не включено в содержание настоящей диссертации.

Цели и задачи диссертационной работы

Целями диссертационного исследования являются развитие способов построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов для решения подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске, а также их применение для установления полиномиальной или псевдополиномиальной разрешимости некоторых ее наследственных подзадач.

Задачи диссертационного исследования:

1. Развить методы построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов для решения подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске.

2. Доказать полиномиальную разрешимость задачи о вершинной раскраске или псевдополиномиальную разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске в некоторых наследственных классах графов, определяемых связными 5-вершинными запрещенными порожденными структурами.

Методы исследования

В диссертации использованы методы теории графов, теории алгоритмов и теории сложности вычислений.

Положения диссертации, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

1. Предложены новые приемы для построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов решения подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске графа.

2. Доказана полиномиальная разрешимость задачи о вершинной раскраске для графов, не содержащих порожденных 5-пути и клики фиксированного размера с удаленным ребром.

3. Доказана псевдополиномиальная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для графов без порожденных 5-пути и дополнения дизъюнктной суммы 3-пути и 2-пути.

---

[30] Развенская О. О., Малышев Д. С. Эффективная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для некоторых двух наследственных классов графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2021. — Т. 28 (принято к опубликованию).

4. Доказана псевдополиномиальная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для графов без порожденных 5-пути, (2,3)-биклики, и дополнения дизъюнктной суммы 3-клики и 2-независимого множества.

Научная новизна

В диссертации предлагаются новые приемы, ориентированные на построение полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов для решения подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске. С их помощью в диссертационной работе устанавливается вычислительный статус некоторых наследственных подзадач данной задачи, для которых ранее он был открыт. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при сложностном анализе подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске. Они могут найти применения в исследованиях, проводимых в профильных российских и международных научных группах. Они могут также применяться при разработке и чтении курсов и спецкурсов по теории графов.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты диссертации получены лично соискателем. Научному руководителю принадлежат общее руководство диссертационным исследованием, предложения по редактуре текста и оптимизация некоторых доказательств. Вклад соавтора одной из работ проф. П. М. Пардалоса в данную публикацию состоит в предложениях по редактуре в англоязычный текст и оптимизацию некоторых доказательств.

Апробация работы, степень достоверности результатов и публикации

Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих семинарах:

- Семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ НН (руководитель В.А. Калягин).
- Общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике (руководители В.Н. Шевченко и Н.Ю. Золотых).
- Межкафедральный семинар МФТИ МФТИ (руководитель А.М. Райгородский).
- Семинар «Экстремальная комбинаторика и случайные структуры» МГУ (руководитель Д.А. Шабанов).

- Семинар кафедры дискретного анализа ЯрГУ имени П.Г. Демидова (руководитель В.А. Бондаренко)

Все результаты диссертации, полученные автором, являются новыми и достоверными. Это подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях. По теме диссертации имеется 3 публикации в изданиях из перечня рецензируемых научных изданий ВАК Минобрнауки РФ. Одна работа в журнале «Discrete Applied Mathematics» (входит в базы цитирования Web of Science и Scopus), одна работа в журнале «Optimization Letters» (входит в базы цитирования Web of Science и Scopus), одна работа в журнале «Журнал Средневолжского Математического Общества» (входит в базу цитирования Zentralblatt Math). Работа в журнале «Discrete Applied Mathematics» опубликована под девичьей фамилией «Лобанова».

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 47 наименований. Общий объем диссертации составляет 78 страниц и включает 9 иллюстраций. Нумерация всех теорем и лемм ведется независимо внутри каждой главы, причем номер каждого такого утверждения состоит из трех частей, первая из которых соответствует номеру главы, вторая номеру раздела, а третья порядковому номеру внутри раздела. Точно также нумеруются рисунки. Нумерация теорем, лемм, следствий ведется независимо.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы диссертационной работы, представлены обзор литературы по теме исследований, цели и задачи работы, научная новизна диссертации, теоретическая и практическая значимость работы, методы диссертационного исследования, основные результаты диссертации, структура работы, а также представлены степень достоверности результатов работ, апробации результатов работ и публикации по теме диссертации.

В **главе 1** приводятся некоторые понятия и обозначения из теории графов и теории сложности вычислений.

В **главе 2** приводятся известные и предлагаются новые алгоритмические приемы, которые будут использоваться в диссертации для построения (псевдо)полиномиальных алгоритмов решения некоторых наследственных подзадач задачи ВВР.

Для заданного графа $G = (V, E)$ и функции $w : V \longrightarrow \mathbb{N}$ пара (G, w) называется *взвешенным графом.*

Для взвешенного графа (G, w) задачу ВВР можно переформулировать как вычисление такого минимального числа k, обозначаемого через $\chi_w(G)$, что существует функция $c : V \longrightarrow 2^{\{1,2,\dots,k\}}$, где $|c(v)| = w(v)$ для любой $v \in V$ и $c(v_1) \cap c(v_2) = \emptyset$ для любого ребра $v_1v_2 \in E$.

Множество попарно несмежных вершин графа называется *независимым. Кликой* называется подмножество попарно смежных вершин графа.

Модульное разложение графов и разложение графов посредством разделяющих клик — известные приемы редукции графов, ориентированные на построение эффективных алгоритмов для решения задач на графах. Подмножество множества вершин графа называется *модулем*, если любая вершина вне этого подмножества либо смежна со всеми вершинами подмножества, либо несмежна ни с одной из них. Модуль графа называется *тривиальным*, если он содержит либо одну вершину, либо все вершины исходного графа. В противном случае он называется *нетривиальным. Разделяющей кликой* в графе называется клика, удаление которой приводит к увеличению количества компонент связности. Граф, не содержащий нетривиальных модулей и разделяющих клик, называется *атомарным.* Известно, что задача ВВР в любом наследственном классе графов полиномиально сводится к той же задаче для атомарных графов из данного класса (см., например, лемму 2.3.1).

Во второй главе доказаны

Лемма 2.4.1 *Задача* ВВР *для любого O_3-свободного графа $(G = (V, E), w)$ разрешима за время $O((\sum\limits_{v \in V} w(v))^3)$.*

Лемма 2.5.1 *Для любого фиксированного C задачу* ВВР *можно решить за полиномиальное время в классе графов, имеющих не более, чем C вершин.*

Пусть $G = (V, E)$. *Анти-окрестностью $\overline{N(v)}$ вершины $v \in V$* назовем множество $V \setminus (N(v) \cup \{v\})$, где $N(v)$ — окрестность вершины v. Если анти-окрестность вершины оказывается независимым множеством, то справедлив следующий способ элиминации такого рода вершин за полиномиальное время:

Лемма 2.6.1 *Пусть (G, w) — взвешенный граф, содержащий вершину v, такую, что $\overline{N(v)} = \{v_1, \dots, v_k\}$ является независимым множеством. Тогда, $\chi_w(G) = \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$, где $w'(u) = w(u)$ для любой вершины $u \notin \overline{N(v)} \cup \{v\}$ и $w'(u) = \max(w(u) - w(v), 0)$ для любой вершины $u \in \overline{N(v)}$.*

Атомарный граф, у которого анти-окрестность каждой вершины не является независимым множеством, называется *неприводимым.* Из леммы 2.3.1 и леммы 2.6.1 следует, что задача ВВР в любом наследственном классе графов полиномиально сводится к той же задаче для его неприводимых графов (лемма 2.6.2).

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, где $|V| \geq 2$. Образуем по нему новый граф $G' = (V', E')$ следующим образом. Добавляются вершины v_1, v_2, u_1, u_2 и все ребра вида vv_i, где $v \in V, i \in \{1, 2\}$, а также ребра v_1u_1, u_1u_2, u_2v_2. В следующем утверждении представлен способ сведéния задачи ВВР на графе G' к нескольким задачам ВВР на графе G:

Лемма 2.7.1 *Для любой функции* $w : V' \longrightarrow \mathbb{N}_0$ *имеет место соотношение:*

$$\chi_w(G') = \min_{x \le w(v_2)} (w(v_1) + w(v_2) - x + \max(\chi_w(G), \chi'_x)), \text{ где}$$

$$\chi'_x = \max(w(u_1) - w(v_2) + x, 0) + \max(w(u_2) - w(v_1) + x, 0).$$

Леммы 2.4.1, 2.6.1, 2.6.2 и 2.7.1 получены автором диссертации.

В диссертации активно используется полиномиальная разрешимость[10] задачи ВВР для совершенных графов, класс которых совпадает[9] с классом

$$Free(\{C_{2i+1} : \ i \ge 1\} \cup \{\overline{C_{2i+1}} : \ i \ge 1\}).$$

Это утверждение оформлено в виде леммы 2.8.1.

Глава 3 состоит из двух частей. В **первой** из них доказывается, что задача ВР разрешима за полиномиальное время для $\{P_5, K_p - e\}$-свободных графов при любом фиксированном p. В лемме 3.1.2 доказывается, что для любого $\{P_5, K_p - e\}$-свободного графа без разделяющих клик верно, что либо он является O_3-свободным, либо размер его наибольшей клики ограничен некоторой функцией от p. Вместе с уже известными результатами о случаях полиномиальной разрешимости задач ВР и k-ВР это приводит к следующему результату:

Теорема 3.1.1 *Для любого фиксированного p задача* ВР *разрешима за полиномиальное время для графов из класса $Free(\{P_5, K_p - e\})$.*

Во **второй части** главы 3 доказывается, что задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободных графов. В леммах 3.2.1-3.2.5 доказывается, что каждый атомарный $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободный граф либо является совершенным, либо является O_3-свободным, либо содержит не более 23 вершин. Это приводит к следующему результату:

Теорема 3.2.1 *Задача* ВВР *разрешима за псевдополиномиальное время для графов из класса $Free(\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\})$.*

В **главе 4** диссертации рассматривается класс $\{P_5, K_{2,3}, K^+_{2,3}\}$-свободных графов. В леммах 4.2.1-4.2.10 доказывается, что каждый неприводимый $\{P_5, K_{2,3}, K^+_{2,3}\}$-свободный граф либо является $\{P_5, C_4\}$-свободным, либо является в некотором смысле почти O_3-свободным, либо имеет не более 12 вершин. Вместе с уже известными результатами о сложности задачи ВВР они дают следующее утверждение:

Теорема 4.3.1 *Задача* ВВР *разрешима за псевдополиномиальное время для $\{P_5, K_{2,3}, K^+_{2,3}\}$-свободных графов.*

В заключении подводится итог к проделанной работе и обсуждаются перспективы дальнейшего развития тематики диссертационного исследования.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

(все в изданиях, рекомендованных ВАК РФ и включенных в перечень международных баз цитирования — Web of Science, Scopus, Zentralblatt Math)

[1]. Malyshev D. S., Lobanova (Razvenskaya) O. O. Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — V. 219. — P. 158–166 (индексируется в Web of Science и Scopus).

[2]. Развенская О. О. О новых алгоритмических приемах для задачи о взвешенной вершинной раскраске // Журнал Средневолжского Математического Общества. — 2020. — Т. 22, № 4. — С. 442–448 (индексируется в Zentralblatt Math).

[3]. Malyshev D. S., Razvenskaya O. O., Pardalos P. M. The computational complexity of weighted vertex coloring for $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-free graphs // Optimization Letters. — 2021. — V. 15, №1. — P. 137–152.

Работа [1] опубликована под девичьей фамилией «Лобанова».

РАЗВЕНСКАЯ ОЛЬГА ОЛЕГОВНА

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Подписано в печать . Формат $60\times80\frac{1}{16}$. Печать офсетная. Бумага газетная.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 0,75. Тираж 100 экз. Заказ № .

Нижегородский государственный технический университет
имени Р.Е. Алексеева
Типография НГТУ, 603950, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24.