Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур

На правах рукописи

УДК 519.17

Развенская Ольга Олеговна

НЕКОТОРЫЕ НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СЛУЧАИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ И ПСЕВДОПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ О ВЕРШИННОЙ РАСКРАСКЕ ГРАФОВ

01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., доц. Малышев Дмитрий Сергеевич

Нижний Новгород — 2021 год

Оглавление

Введение

1. Актуальность, степень разработанности темы исследований и формулировки основных результатов диссертации

На настоящее время накоплено огромное количество фактов об эффективной разрешимости (полиномиальной разрешимости, FPT-разрешимости и т.п.) и о труднорешаемости (NP-трудности, $W[1]$-трудности и т.п.) многих задач на графах в различных классах графов, причем список соответствующих библиографических источников постоянно пополняется. Упомянем электронный ресурс www.graphclasses.org, на котором представлены несколько тысяч результатов такого типа. Направляющие мотивы к получению новых сведений о сложности могут быть самыми разнообразными, но среди них можно выделить интерес к получению полной классификации сложности задачи для рассматриваемого семейства ее подзадач. Например, задача выполнимости булевых формул, заданных конъюнктивными нормальными формами с не более чем k литералами в каждом сомножителе, полиномиально разрешима при $k \in \{1, 2\}$, но является NP-полной для любого $k \geq 3$ [23]. Задача целочисленного линейного программирования полиномиально разрешима в классе полиэдров с целыми вершинами, но она NP-трудна в классе многогранников с целыми и полуцелыми вершинами [45]. Выяснение сложностного статуса даже отдельной подзадачи из рассматриваемого семейства дает продвижение на пути к получению полной классификации сложности задачи в данном семействе. Такой результат может быть особенно интересным, если он получен при помощи новых алгоритмических и сложностных приемов, которые могут оказаться полезными для будущих исследований.

В данной диссертации будут представлены результаты о новых алгоритмических приемах для задачи о взвешенной вершинной раскраске графа. В ней также будут представлены новые результаты о псевдополиномиальной разрешимости данной задачи и полиномиальной разрешимости ее невзвешенного варианта в некоторых наследственных классах графов.

Задача о взвешенной вершинной раскраске графа (сокращенно, задача ВВР) состоит в минимизации количества цветов в раскрасках вершин задаваемого графа так, что для каждой вершины назначаются цвета, количество которых равно задаваемому весу вершины, причем смежным вершинам назначаются различные цвета. Невзвешенный вариант (т.е. с единичными весами вершин) данной задачи называется задачей о вершинной раскраске графа (сокращенно, задачей ВР). Задача о вершинной k-раскраске (кратко, задача k-ВР) состоит в проверке того, а можно ли вершины заданного графа раскрасить не более чем в k цветов так, чтобы любые соседние вершины имели различные цвета.

Задача ВР является классической задачей на графах, она тесно связана с рядом прикладных задач теории расписаний, складской логистики и других областей (см., например, монографию [14]). Задача ВВР вызывает интерес по двум причинам. Во-первых, она возникает при постановке некоторых прикладных задач на формальном математическом языке. Упомянем задачи распределения радиочастот при организации беспроводной связи [44] и планирования литья деталей на машине пакетной обработки с учетом совместимости заданий [24].

Во-вторых, некоторые важные алгоритмические приемы работают путем перехода от невзвешенных графов к их собственным порожденным подграфам, но с весами вершин. Таким приемом является, например, модульное разложение графов. Тем самым, их применение обязывает «замкнуть» задачу о вершинной раскраске, т.е. обязывает рассматривать ее взвешенный случай. Если при исследовании сложности задачи ВР в каком-нибудь классе графов возникает переход к задаче ВВР, то результат о сложности принято формулировать именно для задачи ВВР, даже если изначально ставилась цель рассматривать только задачу ВР. Автор настоящей диссертации также будет придерживаться этого принципа.

Задача k-ВР при любом $k \geq 3$ является NP-полной, а задача ВР является

NP-трудной [23]. Поэтому задача ВВР является NP-трудной в сильном смысле. Следовательно, существование полиномиального алгоритма хотя бы для одной из задач k-ВР при $k \geq 3$ и ВР или существование псевдополиномиального алгоритма для задачи ВВР эквивалентно равенству классов сложности P и NP. Развитие теории сложности вычислений способствовало укоренению пессимистического взгляда на возможность существования полиномиальных (соответственно, псевдополиномиальных) алгоритмов для решения NP-полных/NP-трудных (соответственно, NP-трудных в сильном смысле) задач.

Известно несколько способов упрощения графов при решении алгоритмических задач на графах. Такими приемами являются модульное разложение графов и разложение графов посредством разделяющих клик. Другой известный подход к построению (псевдо)полиномиальных алгоритмов решения задач на графах состоит в отделении уже известных случаев (псевдо)полиномиальной разрешимости. Такого рода случаями, например, являются совершенные графы. Во второй главе диссертации предложены новые алгоритмические приемы для построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов решения подзадач задачи ВВР. А именно, разрешимость задачи ВВР за кубичное от суммы весов вершин время для графов без трех попарно несмежных вершин, элиминация вершин с независимой антиокрестностью и переборная элиминация вершин специального вида.

Как обычно, через P_n, C_n, O_n, K_n обозначены простой путь, простой цикл, пустой граф, полный граф на n вершинах. Через $K_{p,q}$ обозначается полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле, называемый также (p, q)-бикликой. Граф $K_p - e$ получается из K_p путем удаления произвольного ребра. Через $K_{2,3}^+$ мы обозначаем граф, получаемый добавлением ребра к графу $K_{2,3}$, инцидентного вершинам степени 3 этого графа. Граф W_4, называемый 4-колесом, получается из цикла с 4 вершинами добавлением новой вершины и всех ребер, инцидентных добавленной вершине и вершинам цикла. Граф $butterfly$ — результат отождествления двух вершин, принадлежащих двум треугольникам.

Через $G_1 + G_2$ обозначается дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин. Через kG обозначается дизъюнктное объединение k копий графа G. Граф $\overline{G}$ — граф, дополнительный к графу G.

Класс графов называется наследственным, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ можно задать множеством $\mathcal{Y}$ своих запрещенных порожденных подграфов, т.е. графов, минимальных относительно удаления вершин, которые не принадлежат $\mathcal{X}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{Y})$. Графы из $\mathcal{X}$ называются $\mathcal{Y}$-свободными.

Существует множество «белых пятен» на «картах» вычислительной сложности задач на графах в семействе наследственных классов графов. Имеется два способа для уменьшения количества этих «белых пятен». Первый — увеличение количества запрещенных порожденных подграфов, а второй — увеличение размера таких подграфов. Ограничения на размер или количество запрещенных порожденных структур образуют некоторое подсемейство семейства наследственных классов. Возможное сокращение совокупности «белых пятен» состоит в получении полной сложностной дихотомии для бóльших значений данной границы.

Для задачи k-ВР сложностной статус остается открытым даже для некоторых классов, определяемых одним запрещенным порожденным подграфом. Для $k = 3$ и семейства $\{Free(\{H\}) : |V(H)| \leq 6\}$, а также для $k = 4$ и семейства $\{Free(\{H\}) : |V(H)| \leq 5\}$ в работах [10] и [26] были получены полные сложностные дихотомии. Задача 3-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_7\})$ [9], а задача 4-ВР разрешима за полиномиальное время в классе $Free(\{P_6\})$ [46]. При любом k задача k-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_5\})$ [29]. Для каждого фиксированного $k \geq 5$ задача k-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_6\})$ [31]. Задача 4-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_7\})$ [31]. На настоящее время сложностной статус задачи k-ВР является открытым для класса $Free(\{P_8\})$ и $k = 3$, а также для класса $Free(\{P_7\})$ и $k = 4$.

В работах [6, 37, 39] рассматривается задача 3-ВР. В работе [37] для задачи 3-ВР получена полная сложностная дихотомия в семействе

$$\{Free(\{H_1, H_2\}) : \max(|V(H_1)|, |V(H_2)|) \leq 5\}.$$

В работе [39] был получен аналогичный результат для семейства

$$\{Free(\{H_1, H_2, H_3\}) : \max(|V(H_1)|, |V(H_2)|, |V(H_3)|) \leq 5\}.$$

В работе [6] рассматривались четверки запрещенных порожденных 5-вершинных подграфов. В той же работе для всех данных наследственных классов, кроме трех, устанавливается вычислительный статус задачи 3-ВР. В работе [3] была доказана полиномиальная разрешимость задачи 3-ВР для данных трех случаев.

В работе [33] было показано, что задача ВР полиномиально разрешима для класса $Free(\{H\})$, если H — порожденный подграф графа P_4 или графа $P_3 + K_1$, иначе она является NP-трудной в данном классе. Однако, при запрещении двух или более порожденных подграфов полную сложностную классификацию получить уже не удается. В работе [35] рассматривалась сложность задачи ВР для наследственных классов, определяемых запрещенными порожденными фрагментами, каждый не более чем с 4 вершинами. В данной работе был установлен сложностной статус задачи ВР для всех таких классов, кроме четырех:

$$Free(\{K_{1,3}, O_4\}), Free(\{K_{1,3}, K_2 + O_2, O_4\}),$$

$$Free(\{C_4, O_4\}), Free(\{K_{1,3}, K_2 + O_2\}).$$

Там же было показано, что задача ВР для $\{K_{1,3}, K_2 + O_2\}$-свободных графов полиномиально сводится к той же задаче для $\{K_{1,3}, K_2 + O_2, O_4\}$-свободных графов.

В ряде работ, в частности, в публикациях [30, 32, 36, 38, 40, 43] исследовалась сложность задачи ВР для пар связных запрещенных порожденных фрагментов с не более чем 5 вершинами каждый. На настоящее время здесь имеется только три следующих случая с открытой сложностью задачи ВР:

$$\{P_5, H\}, \text{ где } H \in \{K_{2,3}, K_{2,3}^{+}, W_4\}.$$

Сокращению количества «белых пятен» до трех способствовали результаты автора. А именно, в третьей главе настоящей диссертации доказывается, что для любого p задача ВР полиномиально разрешима для графов из класса $Free(\{P_5, K_p - e\})$ и что задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободных графов. Отметим, что из разрешимости задачи ВВР за псевдополиномиальное время следует полиномиальная разрешимость задачи ВР.

Сложностной статус задачи ВР не удается прояснить ни для одного из оставшихся трех классов. Поэтому возникло предложение рассмотреть попарные пересечения данных классов. В работе [1] рассматривался класс $Free(\{P_5, K_{2,3}, W_4\})$ и для его графов была доказана псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР. В четвертой главе диссертации рассматривается класс $Free(\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^{+}\})$ и для его графов доказывается псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР. Отметим, что в принятой к опубликованию работе [5] автора настоящей диссертации устанавливается псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР в классе $Free(\{P_5, K_{2,3}^{+}, W_4\})$, доказательство данного результата не включено в содержание этой диссертации.

Некоторые недавние результаты о сложности задачи ВР в наследственных классах, определяемых запретами небольшого размера, представлены в работах [11, 12, 17, 21, 25].

2. Цели и задачи работы

Целями диссертационного исследования являются развитие способов построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов для решения подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске, а также их применение для установления полиномиальной или псевдополиномиальной разрешимости некоторых ее наследственных подзадач.

Задачи диссертационного исследования:

1. Развить методы построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов для решения подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске.

2. Доказать полиномиальную разрешимость задачи о вершинной раскраске или псевдополиномиальную разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске в некоторых наследственных классах графов, определяемых связными 5-вершинными запрещенными порожденными структурами.

3. Научная новизна работы

В диссертации предлагаются новые приемы, ориентированные на построение полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов для решения подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске. С их помощью в диссертационной работе устанавливается вычислительный статус некоторых наследственных подзадач данной задачи, для которых ранее он был открыт. Все основные результаты диссертации являются новыми.

4. Теоретическая и практическая значимость работы

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при сложностном анализе подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске. Они могут найти применения в исследованиях, проводимых в профильных российских и международных научных группах. Они могут также применяться при разработке и чтении курсов и спецкурсов по теории графов.

5. Методология и методы диссертационного исследования

В диссертации использованы методы теории графов, теории алгоритмов и теории сложности вычислений.

6. Положения, выносимые на защиту, и личный вклад соискателя

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

1. Предложены новые приемы для построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов решения подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске графа.

2. Доказана полиномиальная разрешимость задачи о вершинной раскраске для графов, не содержащих порожденных 5-пути и клики фиксированного размера с удаленным ребром.

3. Доказана псевдополиномиальная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для графов без порожденных 5-пути и дополнения дизъюнктной суммы 3-пути и 2-пути.

4. Доказана псевдополиномиальная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для графов без порожденных 5-пути, (2,3)-биклики, и дополнения дизъюнктной суммы 3-клики и 2-независимого множества.

Все основные результаты диссертации получены лично соискателем. Научному руководителю принадлежат общее руководство диссертационным исследованием, предложения по редактуре текста и оптимизация некоторых доказательств. Вклад соавтора одной из работ проф. П. М. Пардалоса в данную публикацию состоит в предложениях по редактуре в англоязычный текст и оптимизацию некоторых доказательств.

7. Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 47 наименований. Общий объем диссертации составляет 78 страниц и включает 9 иллюстраций. Нумерация всех теорем и лемм ведется независимо внутри каждой главы, причем номер каждого такого утверждения состоит из трех частей, первая из которых соответствует номеру главы, вторая номеру раздела, а третья порядковому номеру внутри раздела. Точно также нумеруются рисунки. Нумерация теорем, лемм, следствий ведется независимо.

Во *введении* обосновывается актуальность диссертационной работы, представлены обзор литературы по теме исследований, цели и задачи работы, научная новизна диссертации, теоретическая и практическая значимость работы, методы диссертационного исследования, основные результаты диссертации, структура работы, а также представлены степень достоверности результатов работ, апробации результатов работ и публикации по теме диссертации.

В *первой главе* диссертации приводятся некоторые понятия и обозначения теории графов и теории сложности вычислений.

Во *второй главе* диссертации приводятся известные и предлагаются новые алгоритмические приемы, которые будут использоваться в диссертации для построения (псевдо)полиномиальных алгоритмов решения некоторых наследственных подзадач задачи ВВР.

Третья глава диссертации состоит из двух частей. В первой из них доказывается, что для любого p задача ВР разрешима за полиномиальное время для $\{P_5, K_p - e\}$-свободных графов. Во второй части доказывается, что задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободных графов.

В *четвертой главе* диссертации доказывается, что задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободных графов.

В *заключении* подводится итог к проделанной работе и обсуждаются перспективы дальнейшего развития тематики диссертационного исследования.

8. Степень достоверности и апробации результатов работы, публикации автора по теме диссертации

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и достоверными. Это подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях из перечня изданий Министерства науки и высшего образования РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени кандидата наук. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих семинарах:

1. Общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике.

2. Семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ НН.

3. Межкафедральный семинар МФТИ.

4. Семинар «Экстремальная комбинаторика и случайные структуры» МГУ.

5. Семинар кафедры дискретного анализа ЯрГУ имени П.Г. Демидова.

По теме диссертации имеется 3 работы в изданиях из перечня Министерства науки и высшего образования РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени кандидата наук:

1. Malyshev D. S., Lobanova (Razvenskaya) O. O. Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — V. 219. — P. 158–166.

2. Развенская О. О. О новых алгоритмических приемах для задачи о взвешенной вершинной раскраске // Журнал Средневолжского Математического Общества. — 2020. — Т. 22, № 4. — С. 442–448.

3. Malyshev D. S., Razvenskaya O. O., Pardalos P. M. The computational complexity of weighted vertex coloring for $\{P_5, K_{2,3}, K^+_{2,3}\}$-free graphs // Optimization Letters. — 2021. — V. 15, №1. — P. 137–152.

Первая из упомянутых выше работ опубликована под девичьей фамилией «Лобанова».

Автор работы выражает глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н., доц. Дмитрию Сергеевичу Малышеву за постоянное внимание к работе, полезные советы и замечания.

Глава 1

Терминология и обозначения

В первой главе определяются некоторые понятия и обозначения теории графов и теории сложности вычислений, которые будут использоваться на протяжении всей диссертации. Все основные понятия и факты, которые в этой и следующих главах не приводятся, можно найти, например, в учебниках [2, 7, 8, 18] по теории графов и в книге [23].

1.1 Множества, графы и их порожденные подграфы

Через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел. Для множеств A и B через $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ обозначены объединение, пересечение и разность множеств A и B.

Все рассматриваемые в диссертации графы являются *абстрактными* и *обыкновенными* одновременно, т.е. конечными непомеченными неориентированными графами без петель и кратных ребер. Множества вершин и ребер графа $G = (V, E)$ будем обозначать через V и E, соответственно.

Через $G_1 + G_2$ обозначается дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин. Через kG обозначается дизъюнктное объединение k копий графа G. Граф $\overline{G}$ — граф, дополнительный к графу G.

Для некоторых специальных графов используются следующие стандартные обозначения:

- P_n — простой путь на n вершинах,
- C_n — простой цикл на n вершинах,
- K_n — полный граф на n вершинах,
- O_n — пустой граф на n вершинах,
- $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и q вершинами в другой доле.

Граф $K_p - e$ получается из K_p путем удаления произвольного ребра.

Через $K_{2,3}^{+}$ мы обозначаем граф, получаемый добавлением ребра к графу $K_{2,3}$, инцидентного вершинам степени 3 этого графа. Граф W_4 получается из цикла с 4 вершинами добавлением новой вершины и всех ребер, инцидентных добавленной вершине и вершинам цикла. Граф $butterfly$ — результат отождествления двух вершин, принадлежащих двум треугольникам.

Графы $K_{2,3}^{+}, butterfly, W_4$ изображены на рисунке 1.1.

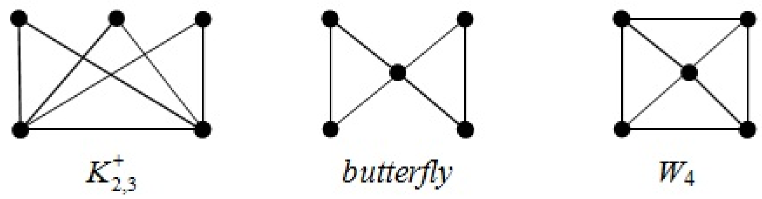

Рис. 1.1: Графы $K_{2,3}^{+}, butterfly, W_4$.

Граф $G' = (V', E')$ называется *подграфом* графа $G = (V, E)$, если выполнены включения $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$. Подграф некоторого графа называется *порожденным*, если любые две вершины подграфа смежны тогда и только тогда, когда эти вершины являются смежными в исходном графе. Таким образом, любой подграф получается из графа удалением вершин и ребер, а порожденный подграф удалением только вершин, имея в виду, что операция удаления вершины подразумевает удаление самой вершины и всех инцидентных ей ребер.

Предположим, что $G = (V, E)$ — граф и $V' \subseteq V$. Обозначение $G(V')$ означает порожденный подграф графа G на вершинах из V'. Через $G \setminus V'$ мы обозначаем результат удаления всех вершин подмножества V' из графа G.

Пусть A и B — произвольные непересекающиеся подмножества множества вершин V. Если каждый элемент множества A смежен с каждым элементом множества B, то говорят, что множество вершин A *вполне смежно* с множеством B. Если каждый элемент множества A несмежен ни с одним элементом множества B, то говорят, что множество вершин A *вполне несмежно* с множеством B. Множество A одновременно вполне смежно и вполне несмежно с множеством B тогда и только тогда, когда $A = \emptyset$ или $B = \emptyset$.

1.2 Окрестности вершин

Пусть v — вершина в некотором графе. Через $N(v)$ обозначается окрестность вершины v. Для вершин v_1 и v_2 некоторого графа и некоторого подмножества V' его вершин переобозначим $(N(v_1) \setminus N(v_2)) \cap V'$ через $N^-_{V'}(v_1, v_2)$. Для вершины v вместо $N(v) \cap V'$ пишем $N_{V'}(v)$.

1.3 Задачи о вершинной раскраске и некоторые определения и сведения из теории сложности вычислений

Вершинной раскраской графа $G = (V, E)$ называется произвольное отображение $c : V \longrightarrow \mathbb{N}$ такое, что $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любых смежных вершин $v_1, v_2 \in V$. Вершинная раскраска c^* графа G называется *вершинной k-раскраской*, если $c^* : V \longrightarrow \{1, \ldots, k\}$. *Хроматическое число графа G*, которое обозначается через $\chi(G)$, это минимальное число k, такое, что граф G имеет вершинную k-раскраску. *Задача о вершинной раскраске* (кратко, *задача* ВР) для заданного графа состоит в вычислении его хроматического числа. Аналогично, *задача о вершинной k-раскраске* (кратко, *задача* k-ВР) состоит в проверке того, а выполняется ли неравенство $\chi(G) \leq k$ для заданного графа G или нет. Задача ВР является классической задачей на графах, она тесно связана с рядом прикладных задач теории расписаний, складской логистики и других областей (см., например, монографию [14]).

На следующем рисунке изображен граф, называемый *Мозеровым веретеном*, а также раскраска его вершин в минимально возможное количество цветов. Тем самым, хроматическое число Мозерова веретена равно четырем.

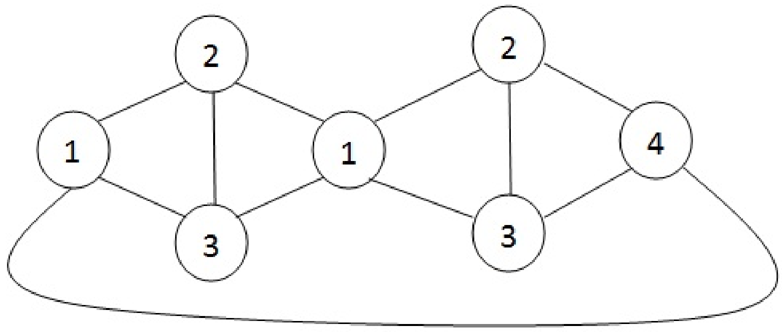

Рис. 1.2: Мозерово веретено и его оптимальная вершинная раскраска в 4 цвета.

Для заданных графа $G = (V, E)$ и функции $w : V \longrightarrow \mathbb{N}$ пара (G, w) называется *взвешенным графом*. Для заданного взвешенного графа (G, w) задача *о взвешенной вершинной раскраске* (далее, кратко *задача* ВВР) состоит в нахождении минимального числа k, обозначаемого через $\chi_w(G)$, такого, что существует функция $c : V \longrightarrow 2^{\{1,2,\ldots,k\}}$, где $|c(v)| = w(v)$ для любой вершины $v \in V$ и $c(v_1) \cap c(v_2) = \emptyset$ для любого ребра $v_1 v_2 \in E$. Представленную постановку задачи ВВР можно переформулировать следующим образом. Каждая вершина $v \in V$ разделяется на $w(v)$ «секторов». Требуется найти минимальное количество цветов, что можно так раскрасить получившуюся совокупность «секторов», чтобы каждые два «сектора» из любых соседних вершин или из одной и той же вершины получали бы различные цвета.

Число $\chi_w(G)$ называется *взвешенным хроматическим числом* взвешенного графа (G, w). Для любого графа G имеем $\chi_{w'}(G) = \chi(G)$, где w' задает вес каждой вершины, равный 1. Таким образом, задача ВВР обобщает задачу ВР. Элементы множества $\bigcup\limits_{v \in V} c(v)$ называются *цветами*.

На следующем рисунке представлены экземпляр задачи ВВР и ее оптимальное решение, показывающее, что соответствующее взвешенное хроматическое число равно 7.

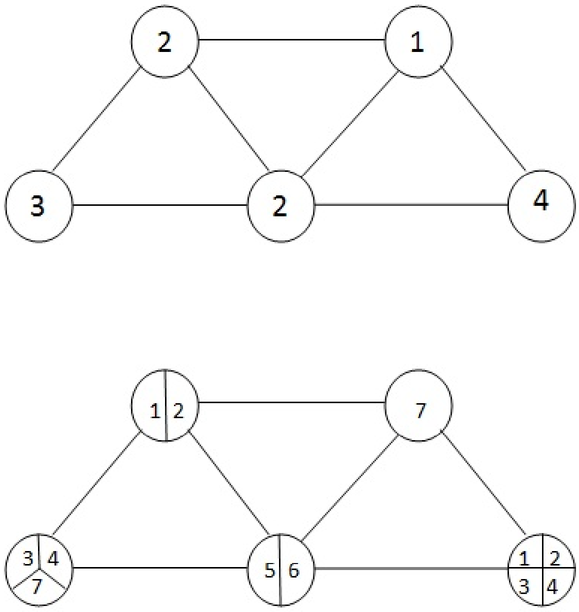

Рис. 1.3: Взвешенный граф и его оптимальная вершинная раскраска в 7 цветов.

По-видимому, задача ВВР (правда, в форме задачи целочисленного линейного программирования) была впервые введена в работе [27], где с помощью метода эллипсоидов доказывается ее полиномиальная разрешимость для так называемых совершенных графов. Класс совершенных графов будет определен в конце второй главы данной диссертации. Задача ВВР возникает, например, при постановке задач распределения радиочастот при организации беспроводной связи [44] и планирования литья деталей на машине пакетной обработки с учетом совместимости заданий [24] на формальном математическом языке.

Некоторые важные алгоритмические приемы работают путем перехода от невзвешенных графов к их собственным порожденным подграфам, но с весами вершин. Таким приемом является, например, модульное разложение графов, оно будет описано в начале второй главы данной диссертации. Тем самым, их применение обязывает «замкнуть» задачу о вершинной раскраске, т.е. обязывает рассматривать ее взвешенный случай. Если при исследовании сложности задачи ВР в каком-нибудь классе графов возникает переход к задаче ВВР, то результат о сложности принято формулировать именно для задачи ВВР, даже если изначально ставилась цель рассматривать только задачу ВР. Автор настоящей диссертации также будет придерживаться этого принципа.

Задача k-ВР при любом $k \geq 3$ является NP-*полной*, а задача ВР является NP-*трудной* [23]. Это означает, что задача k-ВР при любом k принадлежит классу сложности NP и что к задачам k-ВР при $k \geq 3$ и ВР сводится за полиномиальное время любая задача из класса сложности NP (определения класса NP и полиномиальной сводимости представлены, например, в книге [23]). Задача ВВР является NP-*трудной в сильном смысле*, т.е. она является NP-трудной в случае ограниченных (даже единичных) весов вершин.

Алгоритм для решения подзадачи задачи ВР называется *полиномиальным*, если время его работы ограничено сверху некоторым полиномом от количества вершин входного графа. Алгоритм для решения подзадачи задачи ВВР называется *полиномиальным*, если время его работы ограничено сверху некоторым полиномом от суммы верхних целых частей логарифмов весов вершин входного взвешенного графа. Алгоритм для решения подзадачи задачи ВВР называется *псевдополиномиальным*, если время его работы ограничено сверху некоторым полиномом от количества вершин и от максимального веса вершин входного взвешенного графа. Иными словами, псевдополиномиальный алгоритм — такой алгоритм, время работы которого ограничено сверху некоторым полиномом от суммы весов вершин. Очевидно, что из псевдополиномиальной разрешимости задачи ВВР в некотором классе графов следует полиномиальная разрешимость задачи ВР для графов из того же класса.

Существование полиномиального алгоритма хотя бы для одной из задач k-ВР при $k \geq 3$ и ВР или существование псевдополиномиального алгоритма для задачи ВВР эквивалентно равенству классов сложности P и NP. Развитие теории сложности вычислений способствовало укоренению пессимистического взгляда на возможность существования полиномиальных (соответственно, псевдополиномиальных) алгоритмов для решения NP-полных/NP-трудных (соответственно, NP-трудных в сильном смысле) задач.

1.4 Специальные подмножества вершин и ребер в графах

Независимым множеством графа называется любое подмножество попарно несмежных его вершин. Хроматическое число графа можно определить как наименьшее количество независимых множеств, на которые можно разбить множество его вершин.

Кликой графа называется любое подмножество попарно смежных его вершин. Размер наибольшей клики графа G называется его *кликовым числом* и обозначается через $\omega(G)$.

Доминирующее множество графа — такое подмножество его вершин, что каждая вершина графа вне данного подмножества имеет соседа в подмножестве.

Паросочетанием в графе называется множество его попарно несмежных ребер.

Для графа, изображенного на следующем рисунке, $\{v_1, v_4, v_7\}$ — независимое множество, $\{v_2, v_4, v_5\}$ — клика, $\{v_2, v_6\}$ — доминирующее множество, $\{v_1v_2, v_4v_6, v_5v_7\}$ — паросочетание.

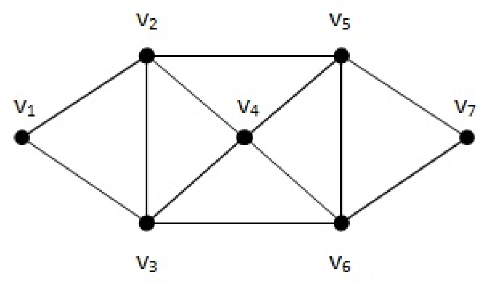

Рис. 1.4: Иллюстрация к понятиям независимого множества, доминирующего множества, клики и паросочетания.

1.5 Классы графов

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Например, класс лесов является наследственным, а класс деревьев не является таковым. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ можно задать множеством $\mathcal{Y}$ своих *запрещенных порожденных подграфов*, т.е. графов, минимальных относительно удаления вершин, которые не принадлежат $\mathcal{X}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = Free(\mathcal{Y})$. Графы из класса $Free(\mathcal{Y})$ называются $\mathcal{Y}$*-свободными*. Если $\mathcal{Y} = \{H\}$, то графы из $\mathcal{X}$ будем называть H*-свободными*, а не $\{H\}$-свободными.

Глава 2

Некоторые алгоритмические техники для построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов решения подзадач задачи ВВР

Во второй главе приводятся алгоритмические приемы, которые будут использоваться в данной диссертации для построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов решения некоторых наследственных подзадач задачи ВВР. При этом разрешимость задачи ВВР за кубичное от суммы весов вершин время для O_3-свободных графов (лемма 2.4.1), элиминация вершин с независимыми анти-окрестностями (лемма 2.6.1) и переборная элиминация вершин специального вида (лемма 2.7.1) были предложены автором настоящей диссертации. Эти и некоторые другие приемы опубликованы в работах [4, 41, 42].

2.1 Модульное разложение графов

Модульное разложение графов — известный способ редукции графов, применяемый для полиномиального сведения оптимизационной задачи на графе к той же задаче для семейства его попарно непересекающихся по вершинам порожденных подграфов.

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество $M \subseteq V$ называется *модулем* графа G, если для любой вершины $x \in V \setminus M$ вершина x либо смежна со всеми вершинами из M, либо несмежна ни с одной из них. Модуль графа называется *тривиальным*, если он содержит либо одну вершину, либо все вершины графа. В противном случае он называется *нетривиальным*. Граф, не содержащий нетривиальных модулей, называется *примарным*. Например, граф P_4, в отличие от C_4, является примарным.

В основе модульного разложения графов лежит следующий результат Т. Галлаи (см. работу [22]):

Лемма 2.1.1. *Пусть* $G = (V, E)$ *— граф, содержащий как минимум две вершины. Тогда в точности только одно из следующих утверждений верно:*

(1) G *— несвязный граф*

(2) $\overline{G}$ *— несвязный граф*

(3) G *и* $\overline{G}$ *— связные графы и существует подмножество вершин* $|V'| \geqslant 4$, *а также единственное разбиение* $P(G)$ *множества* V *такое, что:*

(a) $G(V')$ *— максимальный примарный порожденный подграф графа* G

(b) *для любого* $V'' \in P(G)$ *множество* V'' *является модулем (возможно, тривиальным) графа* G *и* $|V'' \cap V'| = 1$.

Согласно лемме 2.1.1, существует три типа операций разложения. Первый, если G — несвязный граф, то разложим его на компоненты связности $G_1, \ldots, G_p$. Второй, если $\overline{G}$ имеет компоненты связности $\overline{G_1}, \ldots, \overline{G_q}$, то разложим G на $G_1, \ldots, G_q$. Третий, если G и $\overline{G}$ — связные графы, то максимальные модули попарно не пересекаются, т.е. не имеют общих вершин, и порождают разбиение $P(G)$. Таким образом, граф G разложен на подграфы $\{G(V'') : V'' \in P(G)\}$. Кроме того, стянем каждый элемент разбиения $P(G)$ в вершину и получим граф, изоморфный $G(V')$. Другими словами, $G(V')$ — порожденный подграф графа G, полученный путем взятия по одной вершине из каждого элемента $P(G)$.

На следующем рисунке представлены граф G, содержащий ровно 4 максимальных модуля, вершины каждого из которых отмечены общей буквой, а также граф $G' = G(V')$.

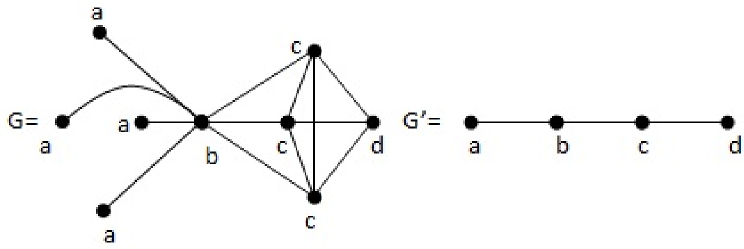

Рис. 2.1: Граф G с 4 максимальными модулями и граф $G' = G(V')$.

Процесс разбиения, описанный выше, можно представить в виде дерева, определенного единственным образом, называемого *деревом модульного разложения* и обозначаемого через $T(G)$ для графа G. Его узлы соответствуют порожденным подграфам графа G. Для первых двух типов операций разложения корень дерева $T(G)$, соответствующий графу G, имеет детей, соответствующих каждой компоненте связности графа G или $\overline{G}$, соответственно. Для операции разложения третьего типа дети корневого узла соответствуют графам из $\{G(V'') : V'' \in P(G)\}$. Дополнительно, ассоциируем граф $G(V')$ с корнем дерева $T(G)$. Иными словами, $G(V')$ — «правило», по которому графы, соответствующие детям корня дерева $T(G)$, будут связываться в граф, соответствующий корню $T(G)$.

А. Курнье и М. Хабиб в работе [16] показали, что для любого графа на n вершинах с m ребрами дерево его модульного разложения можно построить за время $O(n + m)$.

Очевидно, что для любой функции w имеем $\chi_w(G) = \max\limits_i(\chi_w(G_i))$, где $G_1, \ldots, G_p$ — компоненты связности графа G. Аналогично, если $\overline{G_1}, \ldots, \overline{G_q}$ — компоненты связности графа $\overline{G}$, то $\chi_w(G) = \sum\limits_{i=1}^{q} \chi_w(G_i)$. Следующая лемма является своего рода законом сохранения взвешенного хроматического числа при операции разложения третьего типа. Она, несомненно, является известным фактом, но автору не удалось найти соответствующую ссылку. Поэтому данная лемма приводится с доказательством.

Лемма 2.1.2. *Пусть (G, w) — взвешенный граф и $P(G)$ — его модульное разложение. Тогда $\chi_w(G) = \chi_{w^*}(G(V'))$, где для любого $V'' \in P(G)$ и соответствующего $\{v\} = V' \cap V''$ имеем $w^*(v) = \chi_w(G(V''))$.*

Доказательство. Стягивание множества $V'' \in P(G)$ в вершину v и присвоение $w(v) = \chi_w(G(V''))$ порождает подграф H графа G, причем взвешенное хроматическое число графа H не более, чем $\chi_w(G)$. В графе H любой элемент из $N(v)$ не может иметь цвет, совпадающий с одним из $\chi_w(G(V''))$ цветов вершины v. Следовательно, взвешенное хроматическое число графа H не менее, чем $\chi_w(G)$. Поэтому взвешенное хроматическое число графа H равно $\chi_w(G)$. Применив это равенство и стягивание модулей в вершины необходимое количество раз, мы получим случай $H = G(V')$ и поэтому $\chi_w(G) = \chi_{w^*}(G(V'))$. □

На следующем рисунке представлены граф G, дерево его модульного разложения и процесс вычисления его хроматического числа. Типы операций разложения отмечены римскими цифрами, арабскими цифрами отмечены хроматические числа возникающих графов, курсивом отмечены веса вершин графа $G' = G(V')$. Процесс вычисления хроматического числа выполняется по правилам, описанным выше, от листьев дерева к его корню.

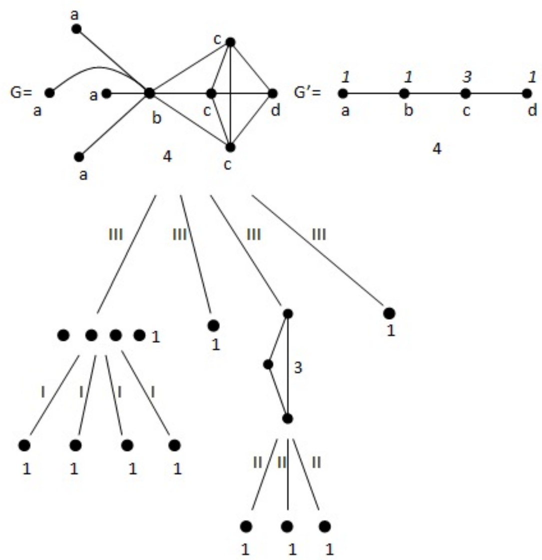

Рис. 2.2: Дерево модульного разложения графа G и процесс вычисления его хроматического числа.

Обозначим через $[\mathcal{X}]_P$ множество всех графов, у которых каждый их примарный порожденный подграф принадлежит классу $\mathcal{X}$. Следующее утверждение, несомненно, тоже известно, но автору не удалось найти ссылку и поэтому оно приводится с доказательством.

Лемма 2.1.3. *Задача* ВВР *для графов из* $[\mathcal{X}]_P$ *сводится за полиномиальное время к той же задаче для графов из класса* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Пусть G — произвольный граф из $[\mathcal{X}]_P$. Построим дерево $T(G)$ модульного разложения графа G. Данное дерево можно построить за линейное время [16]. Если для графа G реализовалось третье правило разложения, то граф $G(V')$ будет примарным по третьему пункту леммы 2.1.1. Отсюда, леммы 2.1.2 и правил пересчета взвешенного хроматического числа в операциях разложения первого и второго типов следует справедливость утверждения данной леммы. □

2.2 Разложение графов посредством разделяющих клик

Разложение графов посредством разделяющих клик — также известный способ редукции графов, применяемый для полиномиального сведения оптимизационной задачи на графе к той же задаче для семейства его пересекающихся только по специальным кликам порожденных подграфов.

Разделяющей кликой в графе называется клика, удаление которой приводит к увеличению количества компонент связности. Например, граф $K_p - e$ имеет разделяющую клику на $p-2$ вершинах.

Если граф $G = (V, E)$ имеет разделяющую клику Q, то $V \setminus Q$ можно разбить на непустые подмножества A и B так, что A вполне несмежно с B. Пусть $G_1 = G(A \cup Q)$ и $G_2 = G(B \cup Q)$. Продолжим процесс разложения до тех пор, пока это возможно. Весь этот процесс можно представить в виде бинарного дерева, которое определяется не единственным образом. Листья данного дерева соответствуют некоторым порожденным подграфам графа G без разделяющих клик.

По-видимому, разложение графа посредством разделяющих клик было впервые предложено в работе Р. Тарьяна [47]. В ней также был предложен алгоритм построения некоторого дерева разложения посредством разделяющих клик для любого графа на n вершинах с m ребрами, имеющий вычислительную сложность $O(m \cdot n)$. Идея доказательства следующего утверждения (правда, только для невзвешенного случая) представлена в той же работе [47], далее будет приведено полное доказательство для взвешенного случая.

Лемма 2.2.1. *Для любого взвешенного графа (G, w) имеем*

$$\chi_w(G) = \max(\chi_w(G_1), \chi_w(G_2)).$$

Доказательство. Очевидно, что $\chi_w(G) \geqslant \max(\chi_w(G_1), \chi_w(G_2))$. Пусть c_1 и c_2 — оптимальные взвешенные раскраски графов $(G_1 = (V_1, E_1), w)$ и $(G_2 = (V_2, E_2), w)$, соответственно. Пусть $\bigcup\limits_{v \in V_1} c_1(v) = \{col_1, \ldots, col_p\}$ и $\bigcup\limits_{u \in V_2} c_2(u) = \{col'_1, \ldots, col'_q\}$. Не уменьшая общности можно считать, что $q \geq p$ и что для любой вершины v из множества Q имеем $c_1(v) = \{col_{i_1^{(v)}}, \ldots, col_{i_k^{(v)}}\}$ и $c_2(v) = \{col'_{i_1^{(v)}}, \ldots, col'_{i_k^{(v)}}\}$. Определим взвешенную вершинную раскраску c графа (G, w) следующим образом. Для любой вершины $x \in V_2$ положим $c(x) = c_2(x)$. Для любых $y \in V_1 \setminus V_2$ и $i \in \{1, \ldots, p\}$ имеем $col'_i \in c(y)$ тогда и только тогда, когда $col_i \in c_1(y)$. Таким образом, взвешенный граф (G, w) можно раскрасить в $\chi_w(G_2)$ цветов, поэтому $\chi_w(G) \leqslant \chi_w(G_2)$. Следовательно, $\chi_w(G) = \max(\chi_w(G_1), \chi_w(G_2))$. □

На следующем рисунке представлены некоторое дерево разложения графа посредством разделяющих клик и вычисление его хроматического числа от листьев дерева к его корню по лемме 2.2.1.

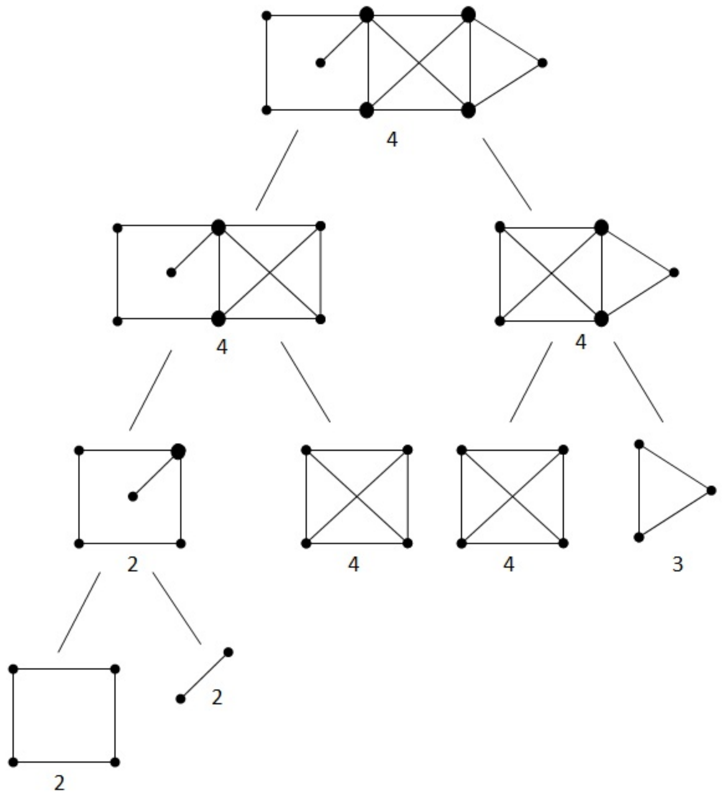

Рис. 2.3: Дерево разложения графа посредством разделяющих клик и вычисление хроматического числа графа.

Для данного графа любой его максимальный порожденный подграф, не имеющий собственной разделяющей клики, называется *C-блоком* графа. Пусть $\mathcal{X}$ — некоторый класс графов. Через $[\mathcal{X}]_C$ обозначим множество тех графов, все C-блоки которых принадлежат $\mathcal{X}$. Следующее утверждение, несомненно, тоже известно, но автору не удалось найти ссылку и поэтому оно приводится с доказательством:

Лемма 2.2.2. *Задача* ВВР *для графов из* $[\mathcal{X}]_C$ *сводится за полиномиальное время к той же задаче для графов из класса* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Каждый C-блок любого графа $G = (V, E) \in [\mathcal{X}]_C$ принадлежит классу $\mathcal{X}$. Дерево разложения посредством разделяющих клик для графа G можно построить за время $O(|V| \cdot |E|)$. Листья этого дерева соответствуют его C-блокам. Отсюда и леммы 2.2.1 следует, что данная лемма имеет место. □

2.3 Атомарные графы и их значение

Связный примарный граф без разделяющих клик называется *атомарным.* Из лемм 2.1.3 и 2.2.2 следует справедливость следующего утверждения, которое, несомненно, известно, но найти соответствующую ссылку автору диссертации не удалось:

Лемма 2.3.1. *Для любого наследственного класса графов задача* ВВР *сводится за полиномиальное время к той же задаче для его атомарных графов.*

2.4 Задача ВВР для O_3-свободных графов

Следующее утверждение принадлежит автору настоящей диссертации, оно опубликовано в работах [4, 41]:

Лемма 2.4.1. *Задача* ВВР *для любого O_3-свободного графа $(G = (V, E), w)$ разрешима за время $O((\sum\limits_{v \in V} w(v))^3)$.*

Доказательство. Построим невзвешенный граф $G' = (V', E')$ на $\sum\limits_{v \in V} w(v)$ вершинах следующим образом. Для каждой вершины $v \in V$ множество V'_v является кликой графа G' на $w(v)$ вершинах. Для любых различных вершин $v, u \in V$ либо V'_v вполне смежно с V'_u (если $vu \in E$), либо V'_v вполне несмежно с V'_u (если $vu \notin E$). Очевидно, что $\chi_w(G) = \chi(G')$ и что G' является O_3-свободным графом. Более того, $\chi(G') = |V'| - \pi(\overline{G'})$, где $\pi(H)$ — количество ребер в наибольшем паросочетании графа H. Значение $\pi(\overline{G'})$ можно найти за время $O(|V'|^3)$ (см. работу [19]). $\square$

Отметим, что оценка сложности в лемме 2.4.1 является псевдополиномиальной, а не полиномиальной. Это единственный в данной главе результат, связанный с псевдополиномиальностью для задачи ВВР, а не с ее полиномиальностью. Соответственно, если алгоритм для какой-нибудь подзадачи задачи ВВР использует лемму 2.4.1, то, несмотря на полиномиальность остальных его частей, этот алгоритм будет только псевдополиномиальным. Возможно, что данный алгоритм можно улучшить до полиномиального (используя специфику возникающих O_3-свободных графов), но этот вопрос не рассматривается в данной диссертации и лемма 2.4.1 будет применяться напрямую.

2.5 Задача ВВР для графов с небольшим количеством вершин

Задачу ВВР для любого взвешенного графа с n вершинами можно сформулировать как задачу целочисленного линейного программирования с $O(2^n)$ переменными (см., например, работу [27]). Известно, что задача целочисленного линейного программирования с фиксированным числом переменных разрешима за время, полиномиальное от суммы верхних целых частей логарифмов ее коэффициентов (см., например, работу [34]). Отсюда следует, что справедливо следующее утверждение:

Лемма 2.5.1. *Для любого фиксированного C задача* ВВР *разрешима за полиномиальное время в классе графов, имеющих не более, чем C вершин.*

2.6 Элиминация вершин с независимой анти-окрестностью

В этом и следующем разделах данной главы в определении задачи ВВР допускаются вершины нулевого веса. При этом предполагается, что вершины нулевого веса не окрашиваются и поэтому их можно удалить. Необходимость в вершинах нулевого веса обусловлена процедурами изменения веса, при которых допускается уменьшение весов вершин до нуля.

Анти-окрестностью вершины v некоторого графа $G = (V, E)$ назовем множество $V \setminus (N(v) \cup \{v\})$, обозначаемое через $\overline{N(v)}$. Следующее утверждение принадлежит автору настоящей диссертации, оно опубликовано в работах [4, 42]:

Лемма 2.6.1. *Пусть* (G, w) *— взвешенный граф, содержащий вершину* v*, такую, что* $\overline{N(v)} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ *является независимым множеством.*

Тогда, $\chi_w(G) = \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$, *где* $w'(u) = w(u)$ *для любой вершины* $u \notin \overline{N(v)} \cup \{v\}$ *и* $w'(u) = \max(w(u) - w(v), 0)$ *для любой вершины* $u \in \overline{N(v)}$.

Доказательство. Т.к. $\overline{N(v)}$ является независимым, то любой цвет, используемый для v, можно использовать для каждой вершины из $\overline{N(v)}$ с сохранением допустимости вершинной раскраски и общего количества используемых цветов. Таким образом, достаточно рассматривать такие взвешенные вершинные раскраски графа (G, w), в которых для любой вершины $u \in \overline{N(v)}$ некоторые из $\min(w(v), w(u))$ цветов для u совпадают с некоторыми из $\min(w(v), w(u))$ цветов для v. Удаление v из G и уменьшение $w(u)$ на $\min(w(v), w(u))$ для каждого $u \in \overline{N(v)}$ приводит к взвешенному графу $(G \setminus \{v\}, w')$, который можно раскрасить в $\chi_w(G) - w(v)$ цветов. Следовательно, $\chi_w(G) \geq \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$. С другой стороны, любую взвешенную вершинную раскраску графа $(G \setminus \{v\}, w')$ можно дополнить до взвешенной вершинной раскраски графа (G, w) путем использования новых $w(v)$ цветов для окрашивания вершины v и добавления любых новых $w(u) - w'(u)$ цветов для окрашивания каждой вершины $u \in \overline{N(v)}$. Следовательно, $\chi_w(G) \leq \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$. Таким образом, лемма доказана. □

На следующем рисунке представлены взвешенный граф, его вершина v с независимой анти-окрестностью (выделена жирным), а также элиминация вершины v по лемме 2.6.1:

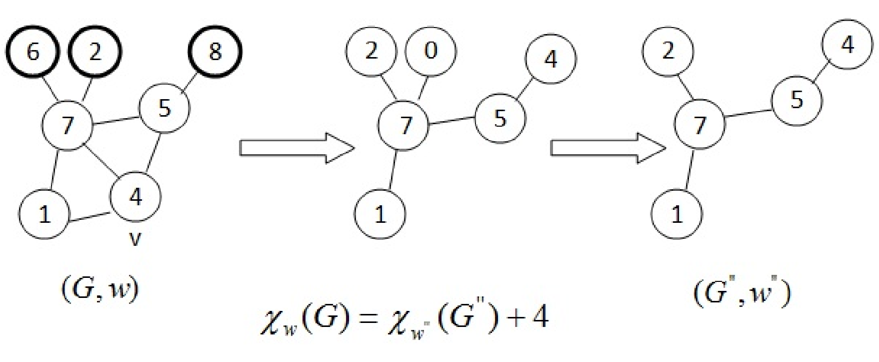

Рис. 2.4: Элиминация вершины v с независимой анти-окрестностью.

Атомарный граф назовем *неприводимым*, если анти-окрестность каждой его вершины не является независимым множеством. Из лемм 2.3.1 и 2.6.1 следует справедливость следующего результата (принадлежащего автору диссертации):

Лемма 2.6.2. *Для любого наследственного класса графов задача* ВВР *сводится за полиномиальное время к той же задаче для его неприводимых графов.*

2.7 Переборная элиминация вершин специального типа

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, где $|V| \geq 2$. Образуем по нему новый граф $G' = (V', E')$ следующим образом. Добавляются вершины v_1, v_2, u_1, u_2 и все ребра вида vv_i, где $v \in V, i \in \{1, 2\}$, а также ребра v_1u_1, u_1u_2, u_2v_2. Переход от G к G' представлен на следующем рисунке:

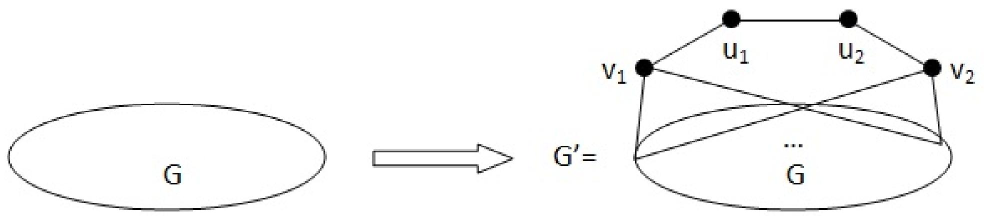

Рис. 2.5: Построение графа G' по графу G.

Очевидно, что G' содержит в точности один порожденный 4-путь, в котором две внутренние вершины имеют степень 2 в графе G'. Тем самым, восстановить G по G' можно за время $O(|V'|^4)$. Следующее утверждение принадлежит автору настоящей диссертации, оно опубликовано в работе [42]:

Лемма 2.7.1. *Для любой функции* $w : V' \longrightarrow \mathbb{N}$ *имеет место соотношение:*

$$\chi_w(G') = \min_{x \leq w(v_2)} (w(v_1) + w(v_2) - x + \max(\chi_w(G), \chi'_x)), \text{ где}$$

$$\chi'_x = \max(w(u_1) - w(v_2) + x, 0) + \max(w(u_2) - w(v_1) + x, 0).$$

Доказательство. Из соображений симметрии можно считать, что $w(v_1) \geq w(v_2)$. Пусть x означает количество общих цветов вершин v_1 и

v_2 в рассматриваемой взвешенной вершинной раскраске взвешенного графа (G', w). Таким образом, имеется в точности $w(v_1) + w(v_2) - x$ различных цветов для окрашивания вершин из $\{v_1, v_2\}$, каждый из которых нельзя использовать для окрашивания вершин графа G. Чтобы минимизировать общее количество цветов, используемых для окрашивания вершин из $\{u_1, u_2\}$, каждый из оставшихся $w(v_1) - x$ цветов для v_1 можно использовать для окрашивания u_2. Аналогично, каждый из оставшихся $w(v_2) - x$ цветов для v_2 можно использовать для окрашивания u_1. Следовательно, для окрашивания u_1 и u_2 нам в точности необходимо χ'_x цветов. Тем самым, справедливо соотношение:

$$\chi_w(H) = \min_{x \le w(v_2)} (w(v_1) + w(v_2) - x + \max(\chi_w(G), \chi'_x)).$$

□

2.8 Совершенные графы и их значение

Граф называется *графом Бержа*, если он принадлежит классу

$$Free(\{C_{2i+1} :\ i \ge 1\} \cup \{\overline{C_{2i+1}} :\ i \ge 1\}).$$

Граф называется *совершенным*, если его хроматическое и кликовое числа равны и это верно для любого его порожденного подграфа. В работе [15] авторов М. Чудновски, Н. Робертсона, П. Сеймура, Р. Томаса было доказано, что граф является совершенным тогда и только тогда, когда он является графом Бержа. Это так называемая *сильная теорема о совершенных графах*. Распознавание совершенных графов выполняется за полиномиальное от количества их вершин время, данный результат авторов М. Чудновски, Г. Корнуджелоса, К. Лю, П. Сеймура, К. Вучкович содержится в работе [13].

Известен (см. работу [27] авторов М. Гретчела, Л. Ловаса, А. Схрейвера) следующий результат, который оформлен в виде леммы:

Лемма 2.8.1. *Задача* ВВР *полиномиально разрешима для совершенных графов.*

Глава 3

О полиномиальной и псевдополиномиальной разрешимости двух подзадач задачи ВВР, определенных парами порожденных 5-вершинных запретов

Третья глава диссертации состоит из двух частей. В первой из них доказывается, что для любого p задача ВР разрешима за полиномиальное время для $\{P_5, K_p - e\}$-свободных графов (теорема 3.1.1). Во второй части доказывается, что задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободных графов (теорема 3.2.1). Эти результаты опубликованы в работе [41].

3.1 Задача ВР для $\{P_5, K_p - e\}$-свободных графов

3.1.1 Теорема Рамсея для двудольных графов

Утверждение широко известной теоремы Рамсея состоит в том, что любой достаточно большой граф имеет клику заданного размера или независимое множество заданного размера. Существует аналог этой теоремы для двудольных графов. Следующий результат является следствием теоремы 2 из [20] при $H = K_{s,s}$.

Лемма 3.1.1. *Двудольный граф G с долями A и B, каждая из которых содержит $n > s^{s+1}$ вершин, содержит подмножества*

$$A' \subseteq A, B' \subseteq B, |A'| = |B'| = \lfloor (\frac{n}{s})^{\frac{1}{s}} \rfloor$$

такие, что множество ребер между A' и B' является паросочетанием или $G(A' \cup B')$ — полный двудольный граф.

3.1.2 Связные $\{P_5, K_p - e\}$-свободные графы без разделяющих клик

Лемма 3.1.2. *Пусть $G = (V, E)$ — связный $\{P_5, K_p - e\}$-свободный граф ($p \geq 3$) без разделяющих клик и пусть Q — его наибольшая клика. Тогда либо G является O_3-свободным, либо $|Q| \leq (p+1)^{p+2}(p-2)$.*

Доказательство. Предположим, что $|Q| > (p+1)^{p+2}(p-2)$. Положим $N(Q) = \{y \notin Q | \ \exists x \in Q, yx \in E\}$. Рассмотрим двудольный подграф H графа G, порожденный ребрами, соединяющими клику Q и множество $N(Q)$. Каждый элемент из множества $N(Q)$ смежен с, как минимум, $p-3$ вершинами из множества Q, т.к. G является $K_p - e$-свободным графом и клика Q — наибольшая. У каждого элемента множества Q есть сосед в $N(Q)$, т.к. граф G не имеет разделяющих клик. Таким образом, подграф H имеет паросочетание с, как минимум, $\lfloor \frac{|Q|}{p-2} \rfloor$ ребрами. Пусть $G' = (V', E')$ — подграф графа H, порожденный всеми вершинами некоторого наибольшего паросочетания H. Очевидно, что G' является $K_{p-2,p-2}$-свободным графом, каждая из его долей содержит не менее $\lfloor \frac{|Q|}{p-2} \rfloor$ вершин и $\lfloor \frac{|Q|}{p-2} \rfloor > (p+1)^{p+2}$. Пусть $N_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ — наибольшее подмножество множества $Q \cap V'$ такое, что множество $N(Q)$ содержит вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$, где $v_i \in N(u_i) \setminus \bigcup\limits_{j \neq i} N(u_j)$ для всех i. По лемме 3.1.1 для $s = p+1$ имеем

$$k \geq \lfloor (\frac{1}{p+1} \lfloor \frac{|Q|}{p-2} \rfloor)^{\frac{1}{p+1}} \rfloor \geq p+1 \geq 4.$$

Множество $N_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ является независимым или кликой.

Действительно, граф $G'(N_2)$ является P_3-свободным, иначе некоторые вершины $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}$, вершина u_{i_1} и некоторый произвольный элемент из множества $N_1 \setminus \{u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}\}$ порождают P_5 в графе G. Другими словами, $G'(N_2)$ — дизъюнктное объединение полных графов. Если $G'(N_2)$ не полный и не пустой одновременно, то существуют вершины $v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}$ такие, что $v_{j_1}v_{j_2} \in E, v_{j_1}v_{j_3} \notin E, v_{j_2}v_{j_3} \notin E$. Вершины $v_{j_1}, v_{j_2}, u_{j_2}, u_{j_3}, v_{j_3}$ порождают P_5 в графе G.

Предположим, что N_2 — независимое множество. Тогда не существует вершины v_i, у которой был бы сосед w такой, что $w \notin Q \cup N(Q)$. В противном случае, чтобы избежать наличия порожденного подграфа P_5, вершина w является смежной со всеми вершинами множества N_2. Следовательно, вершины v_1, w, v_2, u_1, u_3 порождают P_5 в графе G. Таким образом, для любого i каждый сосед вершины v_i, не принадлежащий множеству Q, должен принадлежать множеству $N(Q)$. Пусть $w_i \in N(Q)$ — сосед v_i. Существует три элемента $u_{k_1}, u_{k_2}, u_{k_3}$, не являющихся соседями вершины w_i, т.к. G' — $K_{p-2,p-2}$-свободный граф. Пусть $u' \in Q \setminus \{u_i\}$ — сосед вершины w_i. Тогда $w_iv_{k_1}$ и $w_iv_{k_2}$ — ребра графа G, иначе вершины $v_i, w_i, u', u_{k_1}, v_{k_1}$ или вершины $v_i, w_i, u', u_{k_2}, v_{k_2}$ порождают P_5. Но вершины $v_{k_2}, w_i, v_{k_1}, u_{k_1}, u_{k_3}$ порождают P_5. Следовательно, $N_Q(w_i) = \{u_i\}$. Таким образом, любой сосед вершины v_i, который лежит вне множества Q, является смежным с u_i и несмежным с $u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_k$ одновременно. Более того, это справедливо для любой вершины из компоненты связности $G(N(u_i) \setminus Q)$, содержащей вершину v_i. Предположим, что у w_i есть сосед $v^* \in N(Q)$, несмежный с u_i. Очевидно, что $v_iv^* \notin E$. Т.к. множество N_1 является наибольшим, то существует число i^* такое, что $i^* \neq i$ и $v^*u_{i^*} \in E$. Т.к. G' является $K_{p-2,p-2}$-свободным графом и $k \geq p+1$, то существует вершина $u_{i^{**}}$ такая, что $i^{**} \notin \{i, i^*\}$ и $u_{i^{**}}v^* \notin E$. Вершины $v_i, w_i, v^*, u_{i^*}, u_{i^{**}}$ порождают P_5 в графе G. Таким образом, ни одна из вершин компоненты связности $G(N(u_i) \setminus Q)$, содержащей v_i, не имеет соседей в $N(Q)$, несмежных с u_i. Таким образом, Q — разделяющая клика.

Предположим, что множество N_2 является кликой. Пусть Q' — максимальная клика графа G, содержащая N_2. Предположим, что вершина $v \in N(Q) \setminus Q'$. Т.к. множество N_1 является наибольшим, то v имеет соседей в N_1, которых обозначим через $u_1, \ldots, u_q$. Т.к. G' является $K_{p-2,p-2}$-свободным графом, то $q \leq p-3$. Чтобы избежать P_5, порожденного вершинами v, u_1, вершиной из $\{u_{q+1}, \ldots, u_k\}$ и некоторыми двумя вершинами из $\{v_{q+1}, \ldots, v_k\}$, несмежными с v, вершина v является смежной с, как минимум, $k-q-1$ вершинами среди вершин $v_{q+1}, \ldots, v_k$. Пусть ребро $vv_{k-1} \in E$. Вершина v является смежной с, как минимум, $q-1$ элементом множества $\{v_1, \ldots, v_q\}$, иначе существуют две вершины $v_{i'}, v_{i''}$ в $\{v_1, \ldots, v_q\} \setminus N(v)$ такие, что вершины $v_{i'}, v_{k-1}, v, u_{i''}, u_k$ порождают P_5 в графе G. Таким образом, вершина v смежна с не менее, чем $k-2$ вершинами из N_2. Следовательно, чтобы избежать наличия порожденного $K_p - e$ необходимо, чтобы $v \in Q'$. Так как Q' является максимальной кликой, то такой вершины v не существует, таким образом, $Q' = N(Q)$. Более того, $V = Q \cup N(Q)$, так как иначе $N(Q)$ — разделяющая клика. Следовательно, G — O_3-свободный граф, поскольку Q и $N(Q)$ — клики. □

3.1.3 Полиномиальная разрешимость задачи ВР для $\{P_5, K_p - e\}$-свободных графов

Теорема 3.1.1. *Для любого фиксированного p задача* ВР *разрешима за полиномиальное время для графов из класса $Free(\{P_5, K_p - e\})$.*

Доказательство. Известно, что неравенство $\chi(G) \leq 4^{w(G)-1}$ выполнено для любого P_5-свободного графа $G = (V, E)$ [28]. Для любого фиксированного k задачу k-ВР можно решить полиномиальное время для P_5-свободных графов [29]. Из этих результатов, лемм 2.2.2 и 3.1.2 следует, что задача ВР для $\{P_5, K_p - e\}$-свободных графов полиномиально сводится к той же задаче для O_3-свободных графов. Следовательно, по лемме 2.4.1 для любого фиксированного p задачу ВР можно решить за полиномиальное время для графов из класса $Free(\{P_5, K_p - e\})$. □

К сожалению, доказательство теоремы 3.1.1 не обобщается напрямую до псевдополиномиальной разрешимости задачи ВВР в классе $Free(\{P_5, K_p - e\})$. А именно, к G можно было бы применить преобразование из доказательства леммы 2.4.1, получить P_5-свободный граф G' и по той же лемме рассматривать случай $G' \notin Free(\{O_3\})$. Тогда для некоторой функции f справедливо неравенство $\chi(G') \leqslant f(p, \sum\limits_{v \in V} w(v))$ по лемме 3.1.2 и результату из [28]. Но, к сожалению, применение результата из [29] к G' не дает полиномиальной от $\sum\limits_{v \in V} w(v)$ оценки сложности. Действительно, оценочное время решения задачи k-ВР для n-вершинных P_5-свободных графов алгоритмом из [29] есть $O(g_1(k)n^{g_2(k)})$ для некоторых функций g_1 и g_2.

3.2 Задача ВВР для $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободных графов

3.2.1 Общее описание алгоритма и некоторые обозначения

Опишем общую схему нашего алгоритма для $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободных графов. По лемме 2.3.1 можно рассматривать только атомарные $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободные графы. Далее будет показано, что каждый такой граф либо является совершенным, либо является O_3-свободным, либо содержит не более чем 23 вершины. Отсюда и лемм 2.4.1,2.5.1,2.8.1 следует псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР в классе $Free(\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\})$.

Очевидно, что любой $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}, C_5\}$-свободный граф является совершенным, что следует из сильной теоремы о совершенных графах. Пусть $G = (V, E)$ — атомарный $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободный граф, содержащий порожденный подграф $C_5 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Всюду далее индексы вершин данного цикла понимаются по модулю 5. Применительно к графу G, введем следующие обозначения:

- $V_i = \{x \notin V(C_5) :\ N_{V(C_5)}(x) = \{v_{i-1}, v_{i+1}\}\}$,
- $V_i' = \{x \notin V(C_5) :\ N_{V(C_5)}(x) = \{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}\}$,
- $V_i'' = \{x \notin V(C_5) :\ N_{V(C_5)}(x) = V(C_5) \setminus \{v_i\}\}$,

- $V_i''' = \{x \notin V(C_5) : \ N_{V(C_5)}(x) = \{v_{i-2}, v_i, v_{i+2}\}\}$,
- V'''' — множество вершин, смежных сразу со всеми вершинами 5-цикла.

3.2.2 Структурные леммы об атомарных $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободных графах

Практически все леммы данного подраздела работы нацелены на нахождение четкой структуры возникающих графов. Таких лемм несколько и они довольно техничны. Следующее утверждение верно, т.к. G является P_5-свободным графом.

Лемма 3.2.1. *Каждый элемент множества $V \setminus V(C_5)$, у которого сосед является элементом 5-цикла, принадлежит множеству*

$$\bigcup_{i=1}^{5}(V_i \cup V_i' \cup V_i'' \cup V_i''') \cup V''''.$$

Лемма 3.2.2. *Верны следующие утверждения:*

1) Множество вершин V'''' вполне смежно с множеством $\bigcup_{i=1}^{5}(V_i \cup V_i'' \cup V_i''')$.

2) Множество V'''' — клика. Для любого i множество V_i является независимым, а V_i'' — кликой.

3) (a) Если $V_i \neq \emptyset$, то

$$V_{i-1}' \cup V_{i+1}' \cup V_{i-1}'' \cup V_{i+1}'' = \emptyset,$$

множество вершин V_i вполне смежно с множеством

$$V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup V_i' \cup V_{i-2}'' \cup V_{i+2}''$$

и вполне несмежено с множеством $V_{i-2}' \cup V_{i+2}' \cup V_i''$.

(b) Для любого i множество вершин V_i' вполне смежено с множеством

$$V_{i-1}' \cup V_{i+1}' \cup V_{i-2}'' \cup V_i'' \cup V_{i+2}'',$$

и множество вершин V_i'' вполне смежено с множеством $V_{i-2}'' \cup V_{i+2}''$.

(c) Для любого i любые два несмежных элемента из V'_i имеют одинаковые множества соседей в

$$V'_i \cup V'_{i-2} \cup V'_{i+2} \cup V''_{i-1} \cup V''_{i+1}.$$

4) (a) Для любого i любой элемент из V_i смежен с не более чем одним элементом из $V_{i+2} \cup V_{i-2}$. Более того, для любых i и $j \in \{i-2, i+2\}$ не существует двух элементов из V_i, у которых одновременно есть соседи в V_j.

(b) Если элемент из V_i и элемент из V_j смежны и $j \in \{i-2, i+2\}$, то $V_{\frac{i+j}{2}} \cup \bigcup\limits_{s=1}^{5} (V'_s \cup V''_s) = \emptyset$.

5) Для любого i ни у одного из элементов множества $V_i \cup V'_i$ не существует соседей вне $\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$.

6) Для любого i все элементы V''_i, у которых есть соседи вне $\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, смежны с каждым элементом $V''_{i-1} \cup V''_{i+1}$.

Доказательство. (1) Пусть вершина $a \in V''''$ и вершина $b \in \bigcup\limits_{i=1}^{5} (V_i \cup V''_i \cup V'''_i)$ несмежны. Если $b \in V_i$, то вершины $a, b, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ порождают граф $\overline{P_3 + P_2}$. Если вершина $b \in V''_i$, то вершины $a, b, v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i+1}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Если $b \in V'''_i$, то вершины $a, b, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$.

(2) Множество V'''' — клика, иначе любые две его несмежные вершины вместе с вершинами v_1, v_2, v_4 порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Для любого i множество V_i является независимым, иначе любые две его вершины, а также вершины v_{i-1}, v_i и v_{i+1} порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Для любого i множество V''_i является независимым, иначе любые две его вершины, а также вершины v_{i-1}, v_i, v_{i+1} порождают $\overline{P_3 + P_2}$.

(3) Пусть a_1 — произвольный элемент множества V_i. Эта вершина смежна с каждым элементом множества

$$V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup V'_{i-1} \cup V'_{i+1},$$

иначе граф G содержит подграф P_5, порожденный вершиной a_1, некоторым элементом этого множества, и вершинами $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i+2}$ или вершинами $v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i-2}$. Таким образом, множество $V'_{i-1} \cup V'_{i+1}$ является пустым, иначе некоторый его элемент, вершины $a_1, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Вершина a_1 смежна с каждым элементом множества $V'_i \cup V''_{i-2} \cup V''_{i+2}$, иначе некоторый его элемент, а также вершины $a_1, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ порождают граф $\overline{P_3 + P_2}$. Если множество $V''_{i-1} \cup V''_{i+1}$ содержит элемент b_1, то $a_1 b_1 \in E$, иначе вершины $a_1, v_{i+1}, v_i, b_1, v_{i-2}$ или вершины $a_1, v_{i-1}, v_i, b_1, v_{i+2}$ порождают P_5. Таким образом, вершины $a_1, b_1, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Если у вершины a_1 есть сосед $b_2 \in V''_i$, то вершины $a_1, b_2, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Если у a_1 есть сосед $b_3 \in V'_{i-2} \cup V'_{i+2}$, то вершины $v_{i+2}, b_3, a_1, v_{i-1}, v_i$ или вершины $v_{i-2}, b_3, a_1, v_{i+1}, v_i$ порождают P_5.

Пусть вершина a_2 — произвольный элемент множества V'_i. Она смежна с каждым элементом множества $V'_{i-1} \cup V'_{i+1}$, иначе граф G содержит подграф P_5, порожденный вершиной a_2, некоторым элементом множества $V'_{i-1} \cup V'_{i+1}$, и вершинами $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i+2}$ или $v_{i-2}, v_{i+1}, v_{i+2}$. Вершина a_2 смежна с каждым элементом множества V''_i, иначе некоторый элемент множества V''_i, а также вершины $a_2, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Вершина a_2 смежна с каждым элементом множества $V''_{i-2} \cup V''_{i+2}$, иначе некоторый его элемент и вершины $a_2, v_i, v_{i-2}, v_{i+2}$ порождают P_5.

Множество вершин V''_i вполне смежно с множеством $V''_{i-2} \cup V''_{i+2}$, иначе некоторый элемент множества V''_i и некоторый элемент множества $V''_{i-2} \cup V''_{i+2}$, вершины $v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}$ или вершины $v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i+1}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$.

Пусть a' и a'' — произвольные несмежные вершины из V'_i, вершина b' принадлежит множеству

$$V'_i \cup V'_{i-2} \cup V'_{i+2} \cup V''_{i-1} \cup V''_{i+1},$$

при этом b' смежна с a' и несмежна с a''. Если $b' \in V'_i$, то вершины $a', a'', b', v_{i-1}, v_{i+1}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Если

$$b' \in V'_{i-2} \cup V'_{i+2} \cup V''_{i-1} \cup V''_{i+1},$$

то вершины $a'', v_{i+1}, a', b', v_{i-2}$ или $a'', v_{i-1}, a', b', v_{i+2}$ порождают P_5.

(4) Пусть v' — произвольная вершина из V_i. Не уменьшая общности, можно считать, что она смежна с вершинами $u' \in V_{i-2}$ и $u'' \in V_{i-2} \cup V_{i+2}$. Если $u'' \in V_{i-2}$, то вершины u' и u'' несмежны, согласно части (2) леммы 3.2.2. Таким образом, вершины $v', u', u'', v_{i-1}, v_{i+2}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Если $u'' \in V_{i+2}$, то $u'u'' \in E$, согласно лемме 3.2.2 (часть 3-а), и вершины $v', u', u'', v_{i-1}, v_{i-2}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$.

Если у элементов v^* и v^{**} множества V_i есть, соответственно, соседи u^* и u^{**} из V_j, то v^*u^{**} и $v^{**}u^*$ не являются ребрами графа G, согласно предыдущему утверждению. Согласно лемме 3.2.2 (часть 2), v^*v^{**} и u^*u^{**} не являются ребрами графа G. Следовательно, вершины v^*, v^{**}, u^*, u^{**} и v_{i-1} или v_{i+1} порождают P_5 в графе G.

Пусть w_1 и w_2 — произвольные смежные элементы множеств V_i и V_j, соответственно, и вершина $w_3 \in V_{\frac{i+j}{2}} \cup \bigcup\limits_{s=1}^{5}(V'_s \cup V''_s)$. Если $w_3 \in V_{\frac{i+j}{2}}$, то, согласно лемме 3.2.2 (часть 3-а), $w_3w_2 \in E$ и $w_3w_1 \in E$. Тогда элементы $v_i, v_{\frac{i+j}{2}}, w_1, w_2, w_3$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Если $w_3 \in \bigcup\limits_{i=1}^{5} V'_i$, то $w_3 \in V'_i$ или $w_3 \in V'_j$, согласно лемме 3.2.2 (часть 3-а). Согласно лемме 3.2.2 (часть 3-а), вершина w_3 смежна с w_1 и несмежна с w_2 в первом случае, и она смежна с w_2 и несмежна с w_1 во втором. Тогда вершины $v_i, w_3, w_1, w_2, v_{\frac{i+j}{2}+2}$ или вершины $v_j, w_3, w_2, w_1, v_{j+2}$ порождают P_5. Если вершина $w_3 \in \bigcup\limits_{i=1}^{5} V''_i$, то, согласно лемме 3.2.2 (часть 3-а), $w_3 \in V''_i$ или $w_3 \in V''_j$. Согласно лемме 3.2.2 (часть 3-а), вершина w_3 смежна с w_2 и несмежна с w_1 в первом случае, w_3 смежна с w_1 и несмежна с w_2 во втором случае. Тогда элементы $\{w_1, w_2, w_3\} \cup N_{V(C_5)}(w_1, w_3)$ или $\{w_1, w_2, w_3\} \cup N_{V(C_5)}(w_2, w_3)$ порождают подграф $\overline{P_3 + P_2}$.

(5) Для любого i у любого элемента множества $V_i \cup V'_i$ нет соседей вне $\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, т.к. в таком случае граф G содержал бы порожденный подграф P_5.

(6) Пусть x — вершина из множества V''_i, у которой есть сосед $y \notin \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, и пусть z — произвольный элемент множества $V''_{i-1} \cup V''_{i+1}$. Если $xz \notin E, yz \notin E$, то вершины y, x, v_{i-2}, z, v_i или вершины y, x, v_{i+2}, z, v_i порож-

дают подграф P_5. Если $xz \notin E, yz \in E$, то вершины $x, y, z, v_{i-2}, v_{i+2}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. $\square$

Далее будет показано, что либо $|V| \leq 15$ или $G \in Free(\{O_3\})$ (если $\bigcup\limits_{j=1}^{5} V_j''' = \emptyset$), либо $|V| \leq 23$ (если $\bigcup\limits_{j=1}^{5} V_j''' \neq \emptyset$).

Лемма 3.2.3. *Если* $\bigcup\limits_{j=1}^{5} V_j''' = \emptyset$, *то* $|V| \leq 15$ *или* G *является* O_3*-свободным графом.*

Доказательство. Пусть $\hat{V}$ — подмножество всех элементов множества $\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, имеющих как минимум одного соседа, не принадлежащего $\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$. Согласно лемме 3.2.2 (пункты 2, 3-b, 6), множество $\hat{V} \cap \bigcup\limits_{i=1}^{5} V_i''$ — клика. Из этого факта и по лемме 3.2.2 (пункты 1, 2, 5) следует, что $\hat{V}$ — клика. Это множество является пустым, иначе бы оно являлось разделяющей кликой в графе G.

Предположим, что V_i не пусто для некоторого i и пусть v — произвольный элемент множества V_i. Множество $\{v, v_i\}$ не является модулем графа G тогда и только тогда, когда у вершины v существует сосед, принадлежащий множеству $V_{i+2} \cup V_{i-2}$, согласно лемме 3.2.2 (пункты 1, 2, 3-a, 5). Следовательно, $|V_i| \leq 2$, согласно лемме 3.2.2 (пункты 1, 2, 3-a, 4-a, 5), иначе некоторые два его элемента порождают модуль графа G. Дополнительно, $\bigcup\limits_{s=1}^{5} (V_s' \cup V_s'') = \emptyset$, согласно лемме 3.2.2 (пункт 4-b). По лемме 3.2.2 (пункт 1) множество V'''' является пустым, иначе множество $V \setminus V''''$ представляет собой нетривиальный модуль. Таким образом, $|V| \leq 5 + \sum\limits_{j=1}^{5} |V_j| \leq 15$.

Предположим, что $\bigcup\limits_{i=1}^{5} V_i = \emptyset$. Можно показать, что множество V_i' является кликой для любого i, иначе любые два его несмежных элемента порождают модуль, согласно лемме 3.2.2 (пункты 1, 3-b, 3-c, 5). Предположим, что граф G имеет три попарно несмежные вершины. Ни одна из них не принадлежит множеству $V(C_5)$, согласно лемме 3.2.2 (пункты 2 и 3-b) и тому факту, что

V_i' — клика для любого i. Если одна из них принадлежит множеству V'''', то вторая и третья обязательно принадлежат множествам V_i' и V_{i+2}' для некоторого i, согласно лемме 3.2.2 (пункты 1, 2, 3-b) и тому факту, что V_i' — клика для любого i. Граф G содержит подграф P_5, порожденный тремя его вершинами и элементами v_i, v_{i+2}. Предположим, что ни одна из этих трех вершин не принадлежит V''''. Очевидно, что как минимум одна их них принадлежит множеству $\bigcup\limits_{s=1}^{5} V_s'$, согласно лемме 3.2.2 (пункты 2 и 3-b). Предположим, что эта вершина принадлежит $V_{i'}'$. Тогда остальные две принадлежат

$$V_{i'-2}' \cup V_{i'+2}' \cup V_{i'-1}'' \cup V_{i'+1}'',$$

согласно лемме 3.2.2 (пункт 3-b) и тому факту, что V_i' — клика для любого i. Следовательно, согласно лемме 3.2.2 (пункты 2 и 3-b), если одна из вершин принадлежит $V_{i'+2}'$, то вторая вершина принадлежит $V_{i'+1}''$ или же, если одна из вершин принадлежит $V_{i'-2}'$, то вторая вершина принадлежит $V_{i'-1}''$. Следовательно, элемент из V_i', элемент из $V_{i'+2}'$, элемент из $V_{i'+1}''$, вершины $v_{i'}$ и $v_{i'+2}$ или $v_{i'-2}$ порождают P_5. Получаем противоречие с исходным предположением. □

Лемма 3.2.4. *Пусть $V_i''' \neq \emptyset$. Тогда следующие утверждения верны:*

1. $|V_i'''| = 1$, $V_{i-1}''' = V_{i+1}''' = \emptyset$, $\bigcup\limits_{j=1}^{5} V_j' = \emptyset$ и $\bigcup\limits_{j=1, j\neq i}^{5} V_j'' = \emptyset$.

2. Множество вершин V_i''' вполне смежно с множеством V_i. Множество вершин

$$\Big(\bigcup_{j=1, j\neq i} V_i\Big) \cup V_i'' \cup V_{i-2}''' \cup V_{i+2}'''$$

вполне несмежно с множеством V_i'''.

3. Если $V_i'' \neq \emptyset$, то $\bigcup\limits_{j=1, j\neq i}^{5} V_j = \emptyset$ и каждый элемент множества $V_i'' \cup V_i'''$ не имеет соседей вне $\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$.

Доказательство. Пусть a — произвольный элемент множества V_i'''.

(1) Предположим, что существует вершина $b_1 \in V_i''' \backslash \{a\}$. Если вершины a и b_1 смежны, то элементы $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, a, b_1$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Если вершины

a и b_1 не смежны, то элементы $v_i, v_{i+2}, v_{i-2}, a, b_1$ порождают $\overline{P_3+P_2}$. Таким образом, вершины b_1 не существует и $|V_i'''| = 1$

Предположим, что существует вершина $b_2 \in V_{i-1}''' \cup V_{i+1}'''$. Если вершины a и b_2 несмежны, то элементы $v_{i-2}, a, v_i, v_{i+1}, b_2$ или $v_{i+2}, a, v_i, v_{i-1}, b_2$ порождают P_5. Если вершины a и b_2 смежны, то элементы $v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, a, b_2$ или $v_i, v_{i-1}, v_{i-2}, a, b_2$ порождают $\overline{P_3+P_2}$. Таким образом, вершины b_2 не существует и $V_{i-1}''' = V_{i+1}''' = \emptyset$

Предположим, что существует вершина $b_3 \in \bigcup\limits_{j=1}^{5} V_j' \cup \bigcup\limits_{j=1, j\neq i}^{5} V_j''$. Если вершина $b_3 \in V_{i-2}' \cup V_{i+2}'$ и $ab_3 \notin E$, то вершины $b_3, v_{i-2}, a, v_i, v_{i+1}$ или вершины $b_3, v_{i+2}, a, v_i, v_{i-1}$ порождают P_5. Если вершина $b_3 \in V_{i-2}'' \cup V_{i+2}''$ и $ab_3 \notin E$, то вершины $a, b_3, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ или вершины $a, b_3, v_i, v_{i-1}, v_{i-2}$ порождают $\overline{P_3+P_2}$. Если вершина

$$b_3 \in V_{i-2}' \cup V_{i+2}' \cup V_{i-2}'' \cup V_{i+2}''$$

и $ab_3 \in E$, то вершины $b_3, a, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ или вершины $b_3, a, v_i, v_{i-1}, v_{i-2}$ порождают $\overline{P_3+P_2}$. Если вершина

$$b_3 \in V_{i-1}' \cup V_{i+1}' \cup V_{i-1}'' \cup V_{i+1}''$$

и $ab_3 \notin E$, то вершины $a, b_3, v_i, v_{i-1}, v_{i-2}$ или вершины $a, b_3, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ порождают $\overline{P_3+P_2}$. Если вершина $b_3 \in V_{i-1}' \cup V_{i+1}'$ и $ab_3 \in E$, то вершины $v_{i-1}, b_3, a, v_{i+2}, v_{i+1}$ или вершины $v_{i+1}, b_3, a, v_i, v_{i-2}, v_{i-1}$ порождают P_5. Если вершина $b_3 \in V_{i-1}'' \cup V_{i+1}''$ и $ab_3 \in E$, то вершины $a, b_3, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ или вершины $a, b_3, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ порождают $\overline{P_3+P_2}$. Если вершина $b_3 \in V_i'$ и $ab_3 \notin E$, то вершины $v_{i-1}, b_3, v_{i+1}, v_{i+2}, a$ порождают P_5. Если $b_3 \in V_i'$ и $ab_3 \in E$, то вершины $a, b_3, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ порождают $\overline{P_3+P_2}$. Таким образом, $\bigcup\limits_{j=1}^{5} V_j' = \emptyset$ и $\bigcup\limits_{j=1, j\neq i}^{5} V_j'' = \emptyset$.

(2) Если существует элемент $b' \in V_i$, несмежный с a, то вершины $b', v_{i+1}, v_i, a, v_{i-2}$ порождают P_5. Пусть b'' принадлежит

$$(\bigcup_{j=1, j\neq i} V_i) \cup V_i'' \cup V_{i-2}''' \cup V_{i+2}'''.$$

Если

$$b'' \in V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup V_i'' \cup V_{i-2}''' \cup V_{i+2}'''$$

и $ab'' \in E$, то вершины $a, b'', v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ или вершины $a, b'', v_i, v_{i-1}, v_{i-2}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. Если вершина $b'' \in V_{i-2} \cup V_{i+2}$ и $ab'' \in E$, то вершины $a, b'', v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i-2}$ или вершины $a, b, v_{i-1}, v_{i-2}, v_{i+2}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$.

(3) Пусть b''' — произвольный элемент множества V_i'' и пусть b^* — произвольный элемент множества $\bigcup\limits_{j=1, j\neq i}^{5} V_j$. Очевидно, что $b^* \in V_{i-2} \cup V_{i+2}$, согласно лемме 3.2.2 (пункт 3-а). По лемме 3.2.4 (пункт 2), $ab^* \notin E$ и $ab''' \notin E$. Тогда $b'''b^* \in E$, согласно лемме 3.2.2 (пункт 3-а). Следовательно, вершины $b^*, b''', v_{i-2}, a, v_i$ или вершины $b^*, b''', v_{i+2}, a, v_i$ порождают P_5.

Если

$$c \in (N(a) \cup N(b''')) \setminus \bigcup_{i=1}^{5} N(v_i),$$

то $c \in N(a) \cap N(b''')$, иначе вершины c, a, v_i, v_{i+1}, b''' или вершины c, b''', v_{i+1}, v_i, a порождают P_5. Тогда вершины $a, c, b''', v_{i-2}, v_{i+2}$ порождают $\overline{P_3 + P_2}$. □

Лемма 3.2.5. *Если $\bigcup\limits_{j=1}^{5} V_j''' \neq \emptyset$, то G имеет не более 23 вершин.*

Доказательство. Пусть $V_i''' \neq \emptyset$. Предположим, что $V_i'' \neq \emptyset$. Следовательно,

$$\bigcup_{j=1, j\neq i}^{5} V_j''' = \bigcup_{j=1, j\neq i}^{5} V_j'' = \bigcup_{j=1}^{5} V_j' = \bigcup_{j=1, j\neq i}^{5} V_j = \emptyset,$$

согласно лемме 3.2.4 (пункты 1 и 3). Множество всех вершин, имеющих соседей вне $\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, является пустым. Иначе, по лемме 3.2.2 (пункты 2, 5) и лемме 3.2.4 (пункт 3), любая вершина из такого множества должна принадлежать V'''', а множество V'''' — разделяющая клика в графе G. Множество V_i имеет не более одного элемента, иначе оно является нетривиальным модулем, согласно лемме 3.2.2 (пункты 1, 2, 3-а) и лемме 3.2.4 (пункт 2). Аналогично, множество V_i'' имеет не более одного элемента и оно является нетривиальным модулем графа G. Более того, $V'''' = \emptyset$, иначе $V \setminus V''''$ — нетривиальный модуль графа G, согласно лемме 3.2.2 (пункт 1). Следовательно,

$$|V| \leq 5 + |V_i| + |V_i''| + |V_i'''| \leq 8.$$

Предположим, что $V_i'' = \emptyset$ и $V_{i-2}''' = V_{i+2}''' = \emptyset$. Следовательно, согласно лемме 3.2.4 (пункт 1), имеем

$$\bigcup_{j=1, j\neq i}^{5} V_j''' = \bigcup_{j=1}^{5} V_j'' = \bigcup_{j=1}^{5} V_j' = \emptyset.$$

Множество всех вершин, имеющих соседей вне множества $\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, является разделяющей кликой, согласно лемме 3.2.2 (пункты 2, 5) и лемме 3.2.4 (пункт 1). Следовательно, это множество является пустым. Очевидно, что $V'''' = \emptyset$, иначе $V \setminus V''''$ — нетривиальный модуль графа G, согласно лемме 3.2.2 (пункт 1). Для любого j множество V_j содержит не более трех элементов, иначе некоторые две его вершины порождают нетривиальный модуль графа G, согласно лемме 3.2.2 (пункты 1, 2, 3-а, 4-а, 5) и лемме 3.2.4 (пункт 2). Следовательно,

$$|V| \leq 5 + |V_i'''| + \sum_{j=1}^{5} |V_j| \leq 21,$$

согласно лемме 3.2.4 (пункт 1).

Предположим, что $V_i'' = \emptyset$ и $|V_{i-2}'''| + |V_{i+2}'''| > 0$. Следовательно, $|V_{i-2}'''| + |V_{i+2}'''| = 1$, согласно лемме 3.2.4 (пункт 1). Не умаляя общности имеем, что $|V_{i-2}'''| = 1$. Следовательно,

$$V_{i-1}''' = V_{i+1}''' = V_{i+2}''' = \bigcup_{j=1}^{5} V_j'' = \bigcup_{j=1}^{5} V_j' = \emptyset,$$

согласно лемме 3.2.4 (пункт 1). Для любого j множество V_j содержит не более трех элементов, иначе некоторые две его вершины порождают нетривиальный модуль графа G, согласно лемме 3.2.2 (пункты 1, 2, 3-а, 4-а, 5) и лемме 3.2.4 (пункт 2). Пусть a и b — элементы множеств V_i''' и V_{i-2}''', соответственно. Тогда $ab \notin E$, согласно лемме 3.2.4 (пункт 2), и $N(a) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i) = N(b) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, иначе элемент множества $N(a) \setminus N(b)$ или элемент множества $N(b) \setminus N(a)$ и вершины a, b, v_{i+2}, v_{i+1} порождают P_5. Если множество $N(a) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$ пусто, то V'''' пусто, иначе оно порождает разделяющую клику в графе G или $V \setminus V''''$ — нетривиальный модуль, согласно лемме 3.2.2 (пункты 1, 2, 5). Следовательно,

$$|V| \leq 5 + |V_i'''| + |V_{i-2}'''| + \sum_{j=1}^{5} |V_j| \leq 22.$$

Предположим, что множество $N(a) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$ непусто. Ни один из элементов множества $N(a) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$ несмежен с вершиной множества $V \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i) \cup N(a))$, иначе элемент множества $V \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i) \cup N(a))$, элемент множества $N(a) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, и вершины a, v_{i+2}, v_{i+1} порождают P_5. Каждый элемент множества V'''' смежен с каждым элементом множества $N(a) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, иначе элемент из V'''', элемент из $N(a) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$, и вершины a, b, v_i порождают $\overline{P_3 + P_2}$, согласно лемме 3.2.2 (пункт 1). Следовательно, V'''' пусто, иначе $V \setminus V''''$ является нетривиальным модулем или V'''' является разделяющей кликой, согласно лемме 3.2.2 (пункты 1, 2). Более того, $|N(a) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)| \leq 1$, т.к. $N(a) \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{5} N(v_i)$ является модулем G, по лемме 3.2.2 (пункт 6). Следовательно,

$$|V| \leq 5 + |V_i'''| + |V_{i-2}'''| + \sum_{j=1}^{5} |V_j| + 1 \leq 23.$$

□

3.2.3 Псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР для $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободных графов

Теорема 3.2.1. *Задача* ВВР *разрешима за псевдополиномиальное время для графов из класса* $Free(\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\})$.

Доказательство. Напомним, что распознавание совершенных графов выполняется за полиномиальное время [13] и что задача ВВР полиномиально разрешима для совершенных графов по лемме 2.8.1. Отсюда и леммы 2.3.1 следует, что можно рассматривать только $\{P_5, \overline{P_3 + P_2}\}$-свободные графы, содержащие порожденный C_5. Отсюда, лемм 3.2.3 и 3.2.5, а также лемм 2.4.1 и 2.5.1 следует справедливость утверждения данной теоремы. $\square$

Глава 4

Псевдополиномиальность задачи ВВР для некоторой тройки порожденных 5-вершинных запретов

В четвертой главе диссертации доказывается, что задача ВВР разрешима за псевдополиномиальное время для $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободных графов (теорема 4.3.1). Этот результат опубликован в работе [42].

4.1 Общее описание алгоритма и некоторые обозначения

Опишем общую схему нашего алгоритма для $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободных графов. По лемме 2.6.2 можно рассматривать только неприводимые $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободные графы. Далее будет показано, что каждый такой граф либо является C_4-свободным, либо он является результатом применения преобразования из раздела 2.7 к O_3-свободному графу, либо содержит не более чем 12 вершин. Отсюда, лемм 2.4.1,2.5.1,2.7.1 и работы [30] следует псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР в классе $Free(\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\})$.

Пусть $G = (V, E)$ — неприводимый $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободный граф и $C = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ — произвольный его порожденный цикл с 4 вершинами. С графом G и циклом C мы связываем следующие обозначения, предполагая на протяжении всего подраздела, что индексы рассматриваются по модулю 4:

1. для любого $1 \le i \le 4$ множество V_i — множество вершин v таких, что $N_{V(C)}(v) = \{v_i\}$,
2. для любого $1 \le i \le 4$ множество V_i' — множество вершин v таких, что $N_{V(C)}(v) = \{v_i, v_{i+1}\}$,
3. для любого $1 \le i \le 4$ множество V_i'' — множество вершин v таких, что $N_{V(C)}(v) = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$,
4. W_C — множество вершин, смежных со всеми вершинами C, и S_C — множество вершин, не имеющих соседа на C.

4.2 Структурные леммы об атомарных $\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^+\}$-свободных графах

Практически все леммы данного раздела работы нацелены на нахождение четкой структуры возникающих графов. Таких лемм довольно много и они довольно техничны.

4.2.1 Первые пять лемм

Леммы этого подраздела нацелены на выявление свойств множеств, обозначенных в предыдущем разделе, а также связей между ними.

Лемма 4.2.1. *Любая вершина G, имеющая соседа на C, принадлежит*

$$V(C) \cup \bigcup_{i=1}^{4} (V_i \cup V_i' \cup V_i'') \cup W_C.$$

Каждый элемент из множества $\bigcup\limits_{i=1}^{4} (V_i \cup V_i')$ *не имеет соседей в* S_C.

Доказательство. Предположим, что существует вершина

$$v \notin V(C) \cup \bigcup_{i=1}^{4} (V_i \cup V_i' \cup V_i'') \cup W_C,$$

для которой $N_{V(C)}(v) \neq \emptyset$. Ясно, что v является смежной с двумя несмежными вершинами цикла C. Тогда v, v_1, v_2, v_3, v_4 порождают $K_{2,3}$.

Предположим, что некоторый элемент $v \in V_i \cup V_i'$ имеет соседа $u \in S_C$. Тогда либо $u, v, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$, либо $u, v, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}$ порождают P_5. $\square$

Лемма 4.2.2. *Для любого i множество V_i вполне несмежно с*

$$V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup V_i' \cup V_{i+3}' \cup V_{i+1}'' \cup V_{i+3}'' \cup W_C$$

и вполне смежно с $V_{i+2} \cup V_{i+1}' \cup V_{i+2}'$. Для любого i множество V_i' вполне смежно с $V_{i+1}' \cup V_{i+3}'$. Для любого i множество V_i'' является кликой.

Доказательство. Предположим, что $v \in V_i$. Если v смежна с вершиной $u \in V_{i-1} \cup V_{i+1}$, то либо $u, v, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$, либо $u, v, v_i, v_{i+3}, v_{i+2}$ порождают P_5. Если v смежна с вершиной $u \in V_i' \cup V_{i+3}'$, то либо $v, u, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}$, либо $v, u, v_{i+3}, v_{i+2}, v_{i+1}$ порождают P_5. Если v не смежна с вершиной $u \in V_{i+3}'' \cup W_C$, то $v, u, v_{i+3}, v_i, v_{i+1}$ порождают $K_{2,3}^+$. Если v смежна с вершиной $u \in V_{i+1}''$, то $v, u, v_i, v_{i+1}, v_{i+3}$ порождают $K_{2,3}$.

Предположим, что $v \in V_i$ и что $u \in V_{i+2}$. Если v и u не смежны, то $v, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, u$ порождают P_5. Предположим, что $v \in V_i$ и $u \in V_{i+1}' \cup V_{i+2}'$. Если v и u не являются смежными, то либо $u, v_{i+2}, v_{i+3}, v_i, v$, либо $v, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, u$ порождают P_5.

Предположим, что $v \in V_i'$ и $u \in V_{i+1}' \cup V_{i+3}'$. Если $vu \notin E$, то либо $v, v_i, v_{i+3}, v_{i+2}, u$, либо $v, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, u$ порождают P_5.

Предположим, что вершины $v \in V_i''$ и $u \in V_i''$ не смежны. Тогда $v, u, v_i, v_{i+2}, v_{i+3}$ порождают $K_{2,3}$. $\square$

Лемма 4.2.3. *Если $V_i \neq \emptyset$, то каждая из пар (V_i', V_{i+2}') и (V_{i+1}', V_{i+3}') содержит пустое множество. Если $V_i \neq \emptyset$ и $V_{i+1} \neq \emptyset$, то $V_{i+2} = V_{i+3} = \emptyset$ и $V_{i+2}' \neq \emptyset, V_i' = \emptyset$.*

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение. Из соображений симметрии достаточно рассматривать случай, когда $a \in V_i'$ и $b \in V_{i+2}'$. По лемме 4.2.2 имеем, что $bc \in E$ и $ac \notin E$, где $c \in V_i$. Тогда $c, b, v_{i+2}, v_{i+1}, a$ порождают P_5, если $ba \notin E$, или c, b, a, v_i, v_{i+3} порождают $K_{2,3}$, если $ba \in E$.

Предположим, что $V_i \neq \emptyset$ и что $V_{i+1} \neq \emptyset$. По лемме 4.2.2 множество V_i вполне смежно с V_{i+1}. Дополнительно предположим, что $V_{i+2} \cup V_{i+3} \neq \emptyset$. Если $V_{i+2} \neq \emptyset$, то V_{i+2} вполне смежно с V_i и вполне несмежно с V_{i+1} по лемме 4.2.2. Тогда любая вершина из V_{i+2}, любая вершина из V_i, v_i, v_{i+1}, любая вершина из V_{i+1} порождают P_5. Следовательно, $V_{i+2} = \emptyset$. Аналогичным образом можно доказать, что $V_{i+3} = \emptyset$.

Дополнительно предположим, что $V'_{i+2} = \emptyset$. По лемме 4.2.1 множество S_C вполне несмежно с $V_i \cup V_{i+1}$. По лемме 4.2.2 множество V_i вполне несмежно с

$$V'_i \cup V'_{i+3} \cup V''_{i+1} \cup V''_{i+3} \cup W_C.$$

По тем же причинам множество V_{i+1} вполне несмежно с

$$V'_i \cup V'_{i+1} \cup V''_i \cup V''_{i+2} \cup W_C.$$

Множество V''_{i+2} вполне несмежно с V_i, иначе любой элемент из V_i, любой элемент из V''_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+1}, и любой элемент из V_{i+1} порождают P_5. Аналогичным образом можно показать, что V''_{i+1} вполне несмежно с V_{i+1}.

Поскольку $\{v_i, v_{i+1}\}$ является кликой, но не разделяющей, т.к. G является неприводимым, то некоторый элемент из V_i и некоторый элемент из V_{i+1} являются смежными с элементами из $\bigcup\limits_{i=1}^{4}(V'_i \cup V''_i)$. Пусть x — произвольный элемент множества V_i и y — произвольный элемент множества V_{i+1}, одновременно имеющие соседей в $\bigcup\limits_{i=1}^{4}(V'_i \cup V''_i)$. Предположим, что $z' \in V'_{i+3}$. Тогда $yz' \in E$ по лемме 4.2.2. Тогда по первой части данной леммы имеем, что $V'_{i+1} = \emptyset$. Следовательно, существует вершина $z'' \in V''_i$ такая, что $xz'' \in E$. Если $z'z'' \notin E$, то $y, z', v_{i+3}, v_{i+2}, z''$ порождают P_5, а если $z'z'' \in E$, то x, v_i, v_{i+1}, z', z'' порождают $K^+_{2,3}$. Поэтому мы можем предполагать, что $V'_{i+3} = V'_{i+1} = \emptyset$. Если $yz_1 \in E$ и $xz_2 \in E$, где $z_1 \in V''_{i+3}, z_2 \in V''_i$, то $z_1z_2 \in E$, т.к. иначе $y, z_1, v_{i+3}, v_{i+2}, z_2$ порождают P_5. Отсюда и того факта, что V''_i, V''_{i+3} являются кликами по лемме 4.2.2, следует, что $\{v_i, v_{i+1}\} \cup V^1_i \cup V^2_i$ является разделяющей кликой, где

$$V^1_i = \{v \in V''_{i+3} |\ \exists u \in V_{i+1}, vu \in E\} \text{ и } V^2_i = \{v \in V''_i |\ \exists u \in V_i, vu \in E\}.$$

Следовательно, V'_{i+2} не пусто. По лемме 4.2.2 множество V'_{i+2} вполне смежно с $V_i \cup V_{i+1}$. Предположим, что $V'_i \neq \emptyset$. Тогда по лемме 4.2.2 множество V'_i вполне несмежно с $V_i \cup V_{i+1}$. Следовательно, V'_i вполне несмежно с V'_{i+2}, т.к. G является $K_{2,3}$-свободным. Тогда G содержит порожденный P_5. Таким образом, $V'_i = \emptyset$. □

Лемма 4.2.4. *Для любого i множество V_i является либо пустым, либо независимым.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что $V_i \neq \emptyset$ и что оно не является независимым. Пусть $\tilde{V}$ — множество вершин произвольной компоненты связности с не менее чем двумя вершинами графа $G(V_i)$. Заметим, что множество $\tilde{V}$ существует, т.к. V_i не является независимым. Докажем, что $\tilde{V}$ является нетривиальным модулем графа G.

По леммам 4.2.1 и 4.2.2 и правилу выбора $\tilde{V}$ имеем, что $\tilde{V}$ вполне несмежно с

$$(V_i \setminus \tilde{V}) \cup S_C \cup V_{i+3} \cup V_{i+1} \cup V'_i \cup V'_{i+3} \cup V''_{i+1} \cup V''_{i+3} \cup W_C$$

и вполне смежно с $V_{i+2} \cup V'_{i+1} \cup V'_{i+2}$. Пусть $j \in \{i, i+2\}$. Если $\tilde{V}$ не является вполне смежным с V''_j, то либо $\tilde{V}$ вполне несмежно с V''_j, либо существуют вершины $x, y \in \tilde{V}, z \in V''_j$ такие, что $xy \in E, yz \in E, xz \notin E$. Следовательно, либо $x, y, z, v_{i+2}, v_{i+3}$, либо $x, y, z, v_{i+2}, v_{i+1}$ порождают P_5. Получаем противоречие. Следовательно, наше предположение было ложным. □

Лемма 4.2.5. *Если цикл C доминирует наибольшее количество вершин среди всех порожденных циклов на 4 вершинах, то S_C является пустым.*

Доказательство. Предположим противное. Через $\tilde{V}$ обозначим множество всех вершин, каждая из которых не принадлежит S_C и имеет соседа в S_C. Это множество не пусто. По лемме 4.2.1 имеем, что $\tilde{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^{4} V''_i \cup W_C$. Если некоторый элемент $v \in \bigcup_{i=1}^{4} V''_i$ имеет соседа $s \in S_C$ и $ss' \in E$, где $s' \in S_C$ и $s'v \notin E$, то s', s, v, и некоторые две вершины цикла C порождают P_5. Если несмежные элементы $v_1, v_2 \in \bigcup\limits_{i=1}^{4} V_i'' \cup W_C$ имеют соседей $u_1 \in N_{S_C}^-(v_1, v_2)$ и $u_2 \in N_{S_C}^-(v_2, v_1)$, то $u_1u_2 \in E$, т.к. иначе v_1, v_2, u_1, u_2, и некоторая вершина цикла C порождают P_5. Следовательно, если v_1 или v_2 принадлежит $\bigcup\limits_{i=1}^{4} V_i''$, то G не является P_5-свободным.

Т.к. G не содержит разделяющих клик, то $\tilde{V}$ не является кликой. Таким образом, в $\tilde{V}$ существуют несмежные вершины. Предположим, что $a \in \tilde{V}$ и $b \in \tilde{V}$ являются несмежными.

Предположим, что существует вершина $c \in S_C$, одновременно смежная и с a, и с b. Если $\{a, b\} \cap W_C \neq \emptyset$, то a и b одновременно смежны с двумя несмежными вершинами цикла C. Следовательно, G содержит порожденную копию графа $K_{2,3}$. Поэтому $a \in V_i''$ и $b \in V_j''$. По лемме 4.2.2 имеем, что $j \neq i$. Если $j = i + 2$, то $v_{i+1}, a, c, b, v_{i+3}$ порождают P_5. Таким образом, можно предполагать, что $j = i + 1$. Т.к. C доминирует наибольшее количество вершин и $(v_i, a, v_{i+2}, v_{i+3}), (v_i, v_{i+1}, b, v_{i+3})$ — порожденные 4-циклы, то $V_{i+1} \neq \emptyset$ и $V_{i+2} \neq \emptyset$. Следовательно, по лемме 4.2.3 существует вершина $d \in V_{i+3}'$. По лемме 4.2.1 имеем, что $dc \notin E$. Чтобы избежать порождения 5-путей (d, v_i, v_{i+1}, b, c) и $(d, v_{i+3}, v_{i+2}, a, c)$, da и db являются ребрами G. Тогда a, d, c, d, v_{i+1} порождают $K_{2,3}$. Поэтому любые два несмежных элемента из $\tilde{V}$ не имеют общего соседа в S. Следовательно, $a, b \in W_C$ и $N_{S_C}^-(a, b)$ вполне смежно с $N_{S_C}^-(b, a)$. Пусть $a' \in N_{S_C}^-(a, b)$ и $b' \in N_{S_C}^-(b, a)$.

Предположим, что вершина $x \in \tilde{V} \setminus \{a, b\}$ имеет соседа $x' \in S_C$. Если $x' \in N(a) \cup N(b)$, то x', две несмежные вершины цикла C, x, и некоторая вершина из $\{a, b\}$ порождают либо $K_{2,3}$, либо $K_{2,3}^+$. Следовательно, x не имеет соседей в $N_{S_C}(a) \cap N(b)$. Вершина x одновременно смежна и с a, и с b, т.к. иначе x, v_j, a, a', b' или x, v_j, b, b', a' порождают P_5 для некоторого j. Вершина x' смежна хотя бы с одной вершиной из $\{a', b'\}$ (скажем, с a'), т.к. иначе x', x, a, a', b' порождают P_5. Следовательно, b, v_1, a, a', x' порождают P_5. Таким образом, $\tilde{V} = \{a, b\}$.

Если существует вершина $v' \in \bigcup_{i=1}^{4} V_i$, то

$$av' \notin E, bv' \notin E, v'a' \notin E, v'b' \notin E$$

по леммам 4.2.1 и 4.2.2. Тогда v', некоторая вершина цикла C, a, a', b' порождают P_5. Следовательно, $\bigcup_{i=1}^{4} V_i = \emptyset$. Если существует вершина $v'' \in V_i'$, несмежная с a, то $v''a' \notin E, v''b' \notin E$, и v'', v_i, a, a', b' порождают P_5. Следовательно, $\{a, b\}$ вполне смежно с V_i'. Аналогичным образом можно показать, что $\{a, b\}$ вполне смежно с $\bigcup_{i=1}^{4} V_i'' \cup (W_C \setminus \{a, b\})$. Следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^{4} (\{v_i\} \cup V_i' \cup V_i'') \cup (W_C \setminus \{a, b\})$$

является нетривиальным модулем графа G.

Таким образом, исходное предположение было неверным. □

4.2.2 Следующие шесть лемм

До конца этого подраздела мы будем предполагать, что C — порожденный цикл с 4 вершинами, доминирующий наибольшее количество вершин графа G. По лемме 4.2.5 имеем, что $S_C = \emptyset$. Целью следующих 5 лемм является установление того, что если $\bigcup_{i=1}^{4} V_i \neq \emptyset$, то либо G близок в определенном смысле к O_3-свободному графу, либо он имеет не более чем 12 вершин. В шестой лемме будет показано, что если $\bigcup_{i=1}^{4} V_i = \emptyset$, то G является O_3-свободным.

Лемма 4.2.6. *Если $V_i \neq \emptyset$ и $V_{i+1} \neq \emptyset$, то $|V| \leq 11$.*

Доказательство. По леммам 4.2.2 и 4.2.3 имеем, что

$$V_{i+2} = V_{i+3} = \emptyset, V_{i+2}' \neq \emptyset, V_i' = \emptyset$$

и что $V_i \cup V_{i+1}$ вполне смежно с V_{i+2}'. Следовательно, по лемме 4.2.4 имеем, что $V_i = \{a\}$, т.к. иначе V_i является независимым и любые два его элемента, v_i, v_{i+3}, любой элемент из V_{i+2}' порождают $K_{2,3}$. Аналогичным образом можно показать, что $V_{i+1} = \{b\}$. По лемме 4.2.2 имеем, что $ab \notin E$ и что V_{i+3}'' вполне несмежно с $\{a\}$. По лемме 4.2.2 имеем, что V'_{i+2} вполне смежно с $V'_{i+1} \cup V'_{i+3}$, W_C вполне несмежно с $\{a, b\}$, V'_{i+1} вполне смежно с $\{a\}$ и вполне несмежно с $\{b\}$, V'_{i+3} вполне смежно с $\{b\}$ и вполне несмежно с $\{a\}$.

Множество V''_{i+3} вполне смежно с V'_{i+2}, т.к. иначе v_{i+2}, некоторый элемент из V'_{i+2}, a, v_i, и некоторый элемент из V''_{i+3} порождают P_5. Следовательно, V''_{i+3} вполне смежно с $\{b\}$, т.к. иначе любой элемент из $V''_{i+3}, b, v_{i+1}, v_{i+2}$, любой элемент из V'_{i+2} порождают $K_{2,3}$. Поэтому V''_{i+3} вполне смежно с $V'_{i+2} \cup \{b\}$ и вполне несмежно с $\{a\}$. Аналогичным образом можно доказать, что V''_i вполне смежно с $V'_{i+2} \cup \{a\}$ и вполне несмежно с $\{b\}$. Множество V'_{i+2} вполне смежно с W_C, т.к. иначе b, некоторый элемент из V'_{i+2}, a, v_i, некоторый элемент из W_C порождают P_5. Следовательно, V'_{i+1} вполне смежно с W_C, т.к. иначе v_{i+3}, некоторый элемент из W_C, v_{i+1}, некоторый элемент из V'_{i+1}, a порождают P_5. Таким образом, W_C вполне смежно с $V'_{i+1} \cup V'_{i+3}$. Множество V''_{i+3} вполне смежно с W_C, т.к. иначе любой элемент из V'_{i+2}, некоторый элемент из W_C, v_i, a, некоторый элемент из V''_{i+3} порождают $K_{2,3}$. Следовательно, $V''_{i+3} \cup V''_i$ вполне смежно с W_C.

Докажем, что $V''_{i+2} = \emptyset$. Предположим противное, т.е. что $v \in V''_{i+2}$. По лемме 4.2.2 имеем, что $bv \notin E$. Тогда $va \notin E$, т.к. иначе $a, v, v_{i+2}, v_{i+1}, b$ порождают P_5. Таким образом, $\{a, b\}$ вполне несмежно с V''_{i+2}. Вершина v смежна со всеми вершинами из V'_{i+2}, т.к. иначе v, v_i, a, некоторый элемент из V'_{i+2}, b порождают P_5. Вершина v смежна со всеми вершинами из W_C, т.к. иначе v, v_{i+3}, некоторый элемент из W_C, v_{i+1}, b порождают P_5. Поэтому V''_{i+2} вполне смежно с $V'_{i+2} \cup W_C$. Множество V''_{i+2} вполне смежно с V''_{i+3}, т.к. иначе a, v_i, любой элемент из V'_{i+2}, некоторый элемент из V''_{i+2}, некоторый элемент из V''_{i+3} порождают $K_{2,3}$. Множество V''_{i+2} вполне несмежно с V''_i, т.к. иначе v_{i+3}, некоторый элемент из V''_{i+2}, некоторый элемент из V''_i, v_{i+1}, b порождают P_5.

Предположим, что $u \in V'_{i+1} \cup V'_{i+3} \cup V''_{i+1}$. Если $u \in V'_{i+3}$, то $bu \in E$. Вершины u и v являются смежными, т.к. иначе v, u, a, v_i, и некоторый элемент V'_{i+2} порождают $K_{2,3}$. Если $u \in V''_{i+1}$, то $au \notin E$. Вершины u и v являются смежными, т.к. иначе a, v_i, v, v_{i+2}, u порождают P_5. Предположим, что $u \in V'_{i+1}$. Тогда v и u являются несмежными, т.к. иначе $v_{i+3}, v, u, v_{i+1}, b$ порождают P_5. Следовательно, V''_{i+2} вполне смежно с $V'_{i+3} \cup V''_{i+1}$ и вполне несмежно с V'_{i+1}. Напомним, что V''_{i+2} является кликой по лемме 4.2.2. Тогда $V''_{i+2} \cup \{v_{i+3}\}$ является нетривальным модулем графа G. Таким образом, $V''_{i+2} = \emptyset$. Аналогично можно показать, что $V''_{i+1} = \emptyset$.

Предположим, что $V''_{i+3} \neq \emptyset$. Предположим, что существует вершина $x \in V'_{i+1} \cup V''_i$. Тогда $\{x\}$ вполне смежно с $V'_{i+2} \cup \{a\}$ и $xb \notin E$. Чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного вершинами a, b, x, любой вершиной из V'_{i+2}, и любой вершиной из V''_{i+3}, $\{x\}$ является вполне смежным с V''_{i+3}. Тогда a, любая вершина из V''_{i+3}, x, v_{i+2}, и любая вершина из V'_{i+2} порождают $K^+_{2,3}$. Следовательно, $V'_{i+1} \cup V''_i = \emptyset$. Множество V'_{i+3} вполне смежно с $V'_{i+2} \cup \{b\}$ и вполне несмежно с $\{a\}$. Следовательно, V'_{i+3} вполне смежно с V''_{i+3}, т.к. иначе некоторый элемент из V''_{i+3}, некоторый элемент из V'_{i+3}, некоторый элемент из V'_{i+2}, a, v_{i+3} порождают $K_{2,3}$. Таким образом, каждое из множеств

$$W_C, V'_{i+1}, V'_{i+2}, V'_{i+3}, V''_i, V''_{i+3}$$

имеет не более одного элемента, т.к. оно является модулем графа G. По лемме 4.2.3 хотя бы одно из множеств V'_{i+1} и V'_{i+3} является пустым. Следовательно, G имеет не более 11 вершин. Аналогичный факт имеет место, если $V''_i \neq \emptyset$.

Предположим, что $V''_i = V''_{i+3} = \emptyset$. Каждое из множеств $W_C, V'_{i+1}, V'_{i+2}, V'_{i+3}$ содержит не более одного элемента, т.к. оно является модулем графа G. Таким образом, $|V'_{i+2}| = 1$. По лемме 4.2.3 хотя бы одно из множеств V'_{i+1} и V'_{i+3} является пустым. Итак, $|V| \leq 9$. □

Лемма 4.2.7. *Если $V_i \neq \emptyset$ и $V'_{i+1} \neq \emptyset, V'_{i+2} \neq \emptyset$, то $|V| \leq 12$.*

Доказательство. По лемме 4.2.2 имеем, что V_i вполне смежно с $V'_{i+1} \cup V'_{i+2}$ и что V'_{i+1} вполне смежно с V'_{i+2}. По лемме 4.2.3 имеем, что $V'_i = V'_{i+3} = \emptyset$. По лемме 4.2.6 можно предполагать, что $V_{i+1} = V_{i+3} = \emptyset$. Множество V_i содержит только один элемент (скажем, a), иначе по леммам 4.2.2 и 4.2.4 множество

V_i является независимым и любые два его элемента, v_i, v_{i+3}, любой элемент из V'_{i+2} порождают $K_{2,3}$. Если $|V_{i+2}| \geq 2$, то V_{i+2} является независимым по лемме 4.2.4, V_{i+2} вполне смежно с V_i и вполне несмежно с $V'_{i+1} \cup V'_{i+2}$ по лемме 4.2.2. Следовательно, a, v_{i+2}, любые два элемента из V_{i+2}, любой элемент из V'_{i+2} порождают $K_{2,3}$. Поэтому, $|V_{i+2}| \leq 1$.

Докажем, что $V''_{i+3} = \emptyset$ и что каждое из множеств

$$V'_{i+1}, V'_{i+2}, V''_i, V''_{i+1}, V''_{i+2}, W_C$$

является модулем графа G. По лемме 4.2.2 множество W_C вполне несмежно с $V_i \cup V_{i+2}$. Множество W_C вполне смежно с $V'_{i+1} \cup V'_{i+2}$, т.к. иначе v_{i+3}, некоторый элемент из W_C, v_{i+1}, некоторый элемент из $V'_{i+1} \cup V'_{i+2}$, a порождают P_5.

Если $v \in V''_{i+3}$, то $va \notin E$ по лемме 4.2.2. Множество $\{v\}$ вполне смежно с V'_{i+2}, т.к. иначе v, v_i, a, некоторый элемент из V'_{i+2}, v_{i+2} порождают P_5. Аналогичным образом можно показать, что $\{v\}$ вполне смежно с V'_{i+1}. Следовательно, v, a, v_{i+2}, любая вершина из V'_{i+1}, любой элемент из V'_{i+2} порождают $K^+_{2,3}$. Следовательно, $V''_{i+3} = \emptyset$.

По лемме 4.2.2 множество V''_{i+1} вполне несмежно с $V_i \cup V_{i+2}$. Множество V''_{i+1} вполне смежно с W_C, т.к. иначе некоторый элемент из V''_{i+1}, v_{i+2}, некоторый элемент из W_C, v_i, a порождают P_5. Множество V''_{i+1} вполне смежно с $V'_{i+1} \cup V'_{i+2}$, т.к. иначе v_{i+1}, v_{i+3}, a, некоторый элемент из V''_{i+1}, некоторый элемент из $V'_{i+1} \cup V'_{i+2}$ порождают P_5.

Предположим, что u — произвольная вершина из V''_i. Если u смежна с вершиной $u' \in V'_{i+2}$, то она является смежной с a, т.к. иначе u, a, v_i, v_{i+3}, u' порождают $K_{2,3}$. Тогда a, v_{i+1}, u', u, и любая вершина из V'_{i+1} порождают либо $K_{2,3}$, либо $K^+_{2,3}$. Поэтому $\{u\}$ вполне несмежно с V'_{i+2}. Тогда $au \notin E$, т.к. иначе v_{i+1}, u, a, некоторый элемент из V'_{i+2}, v_{i+3} порождают P_5. Множество $\{u\}$ вполне смежно с V'_{i+1}, т.к. иначе v_{i+3}, некоторый элемент из V'_{i+2}, произвольный элемент из V'_{i+1}, v_{i+1}, u порождают P_5. Вершина u несмежна с вершиной из V_{i+2}, т.к. иначе u, вершина из V_{i+2}, a, любая вершина из V'_{i+2}, v_{i+3} порождают P_5. Множество $\{u\}$ вполне смежно с W_C, т.к. иначе u, v_{i+1}, некоторая вершина из W_C, v_{i+3}, и любая вершина из V'_{i+2} порождают P_5. Множество $\{u\}$ вполне смежно с V''_{i+1}, т.к. иначе a, v_i, u, v_{i+2}, некоторый элемент из V''_{i+1} порождают P_5.

Следовательно, V''_i вполне смежно с $V'_{i+1} \cup V''_{i+1} \cup W_C$ и вполне несмежно с $V_i \cup V_{i+2} \cup V'_{i+2}$. Аналогичным образом можно показать, что V''_{i+2} вполне смежно с $V'_{i+2} \cup V''_{i+1} \cup W_C$ и вполне несмежно с $V_i \cup V_{i+2} \cup V'_{i+1}$. Если u смежна с $u'' \in V''_{i+2}$, то v_{i+1}, u, u'', любая вершина из V'_{i+2}, a порождают P_5. Следовательно, V''_i вполне несмежно с V''_{i+2}.

Итак, каждое из множеств

$$V'_{i+1}, V'_{i+2}, V''_i, V''_{i+1}, V''_{i+2}, W_C$$

является модулем графа G. Таким образом, каждое из них содержит не более одного элемента и $|V| \leq 12$. □

Лемма 4.2.8. *Если $V_i \neq \emptyset$, то либо $V_{i+1} \cup V_{i+2} \cup V_{i+3} \neq \emptyset$, либо $V'_{i+1} \neq \emptyset, V'_{i+2} \neq \emptyset$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $V_{i+1} = V_{i+2} = V_{i+3} = \emptyset$ и ($V'_{i+1} = \emptyset$ или $V'_{i+2} = \emptyset$). По лемме 4.2.4 множество V_i является независимым. По лемме 4.2.2 множество V_i вполне несмежно с

$$V'_i \cup V'_{i+3} \cup V''_{i+1} \cup V''_{i+3} \cup W_C.$$

Пусть

$$V_i^1 = \{v \in V''_i |\ \exists u \in V_i, vu \in E\} \text{ и } V_i^2 = \{v \in V''_{i+2} |\ \exists u \in V_i, vu \in E\}.$$

Докажем, что множество $V_i^1 \cup V_i^2$ является либо пустым, либо кликой. Предположим противное. Тогда существуют несмежные вершины $u_1 \in V_i^1, u_2 \in V_i^2$ такие, что существуют вершины $v_1, v_2 \in V_i$, для которых имеем $v_1u_1 \in E$ и $v_2u_2 \in E$. По лемме 4.2.2 можно предполагать, что $u_1 \in V''_i, u_2 \in V''_{i+2}$, т.к. по лемме 4.2.2 множества V_i^1 и V_i^2 являются кликами. Т.к. G является $K^+_{2,3}$-свободным, то $v_2u_1 \notin E, v_1u_2 \notin E$. Поэтому,

$v_1, u_1, v_{i+2}, u_2, v_2$ порождают P_5. Следовательно, $V_i^1 \cup V_i^2$ является либо пустым множеством, либо кликой.

Т.к. G является неприводимым, то множество $\{v_i\} \cup V_i^1 \cup V_i^2$ является кликой, но не разделяющей. Поэтому хотя бы одно из множеств V'_{i+1} и V'_{i+2} не пусто. По нашему предположению хотя бы одно из этих множеств (скажем, V'_{i+2}) является пустым. Следовательно, $V'_{i+1} \neq \emptyset$. Тогда $V'_{i+3} = \emptyset$ по лемме 4.2.3. По лемме 4.2.2 множество V_i вполне смежно с V'_{i+1}. Отсюда и т.к. G является $K_{2,3}$-свободным заключаем, что $V_i = \{a\}$ и V'_{i+1} является кликой.

Пусть $x \in W_C$. Тогда $xa \notin E$. По лемме 4.2.2 множество V'_{i+1} вполне смежно с V'_i. Множество $\{x\}$ вполне смежно с V'_{i+1}, чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного v_{i+3}, x, v_{i+1}, некоторым элементом из V'_{i+1}, и a. Множество $\{x\}$ вполне смежно с V'_i, чтобы избежать возникновения подграфа $K_{2,3}$, порожденного a, x, v_i, произвольным элементом из V'_{i+1}, и некоторым элементом из V'_i. Поэтому W_C вполне смежно с $V'_i \cup V''_i$

Т.к. G является неприводимым, то множество $\overline{N(v_{i+1})}$ не является независимым. Поэтому $V''_{i+2} \neq \emptyset$. Пусть $v \in V''_{i+2}$. Тогда $\{v\}$ вполне несмежно с $\{a\} \cup V'_{i+1}$ или вполне смежно с $\{a\} \cup V'_{i+1}$. Действительно, если $va \in E$, то v_{i+3}, v, a, любой элемент из V'_{i+1}, несмежный с v, v_{i+1} порождают P_5. Если $va \notin E$ и v смежна с некоторым элементом из V'_{i+1}, то этот элемент, a, v_i, v_{i+1}, x порождают $K_{2,3}$.

Покажем, что $\{v\}$ вполне несмежно с $V''_{i+1} \cup V''_{i+3}$. По лемме 4.2.2 множество $\{a\}$ вполне несмежно с $V''_{i+1} \cup V''_{i+3}$. Пусть $u \in V''_{i+1} \cup V''_{i+3}$ такая, что $vu \notin E$. Заметим, что $\{u\}$ вполне смежно с V'_{i+1}, т.к. иначе v_{i+3}, u, v_{i+1}, некоторый элемент из V'_{i+1}, a порождают P_5. Тогда $\{v\}$ вполне смежно с $\{a\} \cup V'_{i+1}$, т.к. иначе u, v_{i+2}, v, v_i, a или v, v_{i+3}, u, v_{i+1}, и произвольный элемент из V'_{i+1} порождают P_5. Тогда $v_{i+1}, u, v_{i+3}, v, a$ порождают P_5. Множество $\{v\}$ вполне смежно с W_C, т.к. иначе v, v_{i+3}, некоторый элемент из W_C, v_{i+1}, a порождают P_5. Поэтому V''_{i+2} вполне смежно с $V''_{i+1} \cup V''_{i+3} \cup W_C$.

Докажем, что $\{v\}$ вполне смежно с $\{a\} \cup V'_{i+1}$. Предположим противное.

Если существует вершина $u \in V_i'$, смежная с v, то $ua \notin E$ и v_{i+3}, v, u, v_{i+1}, любой элемент из V_{i+1}' порождают P_5. Следовательно, $\{v\}$ вполне несмежно с V_i'. Если существует вершина $u \in V_i''$, смежная с v, то $\{u\}$ вполне смежно с V_{i+1}', т.к. иначе v_{i+3}, v, u, v_{i+1}, некоторый элемент из V_{i+1}' порожают P_5. Аналогично, $au \in E$, т.к. иначе v_{i+3}, v, u, любой элемент из V_{i+1}', и a порождают P_5. Тогда a, v, u, v_i, v_{i+1} порождают $K_{2,3}^+$. Следовательно, $\{v\}$ вполне несмежно с V_i''. Поэтому V_{i+2}'' вполне смежно с $V_{i+1}' \cup W_C$ и вполне несмежно с V_i'. По лемме 4.2.2 имеем, что V_{i+2}'' является кликой. Поэтому $\{v, v_{i+3}\}$ является модулем графа G. Таким образом, $\{v\}$ действительно вполне смежно с $\{a\} \cup V_{i+1}'$.

Множество V_{i+3}'' является пустым, т.к. если $y \in V_{i+3}''$, то $\{y\}$ вполне смежно с V_{i+1}', чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного y, v_{i+3}, v_{i+2}, любым элементом из V_{i+1}', и a. Следовательно, a, y, v, v_{i+2}, и любой элемент из V_{i+1}' порождают $K_{2,3}^+$. Множество V_i' является пустым, т.к. если $y \in V_i'$, то $ya \notin E$ и либо $a, v, v_{i+2}, v_{i+1}, y$ порождают P_5, либо a, v, y, v_i, v_{i+3} порождают $K_{2,3}^+$. Если существует вершина $y \in V_i''$ такая, что $vy \in E$, то $ay \in E$, чтобы избежать возникновения подграфа $K_{2,3}^+$, порожденного a, v, y, v_i, v_{i+3}. Следовательно, любая вершина из V_{i+2}'', имеющая соседа в V_i'', смежна с a. Если $z \in V_{i+2}'', z \neq v$, то $zy \in E$, чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного $v_{i+1}, y, a, z, v_{i+3}$. Таким образом, все вершины из V_{i+2}'' имеют одинаковые окрестности в V_i''.

Пусть $\hat{V}_i''$ — множество вершин из V_i'', каждая из которых не имеет соседа в V_{i+2}''. Докажем, что $\hat{V}_i'' = \emptyset$. Предположим противное. Напомним, что

$$V_i' = \emptyset, V_{i+3}'' = \emptyset, V_{i+1}' \neq \emptyset, V_{i+2}'' \neq \emptyset,$$

и V_{i+2}'' вполне смежно с $V_{i+1}'' \cup W_C$. Множество $\hat{V}_i''$ вполне смежно с V_{i+1}', т.к. иначе некоторый элемент из $\hat{V}_i''$, v_{i+1}, любой элемент из V_{i+1}', любой элемент из V_{i+2}'', v_{i+3} порождают P_5. Множество $\hat{V}_i''$ вполне несмежно с $\{a\}$, т.к. иначе v_{i+1}, некоторый элемент из $\hat{V}_i''$, a, любой элемент из V_{i+2}'', v_{i+3} порождают P_5. Множество $\hat{V}_i''$ вполне смежно с W_C, т.к. иначе некоторый элемент из $\hat{V}_i''$,

v_{i+1}, некоторый элемент из W_C, произвольный элемент из V''_{i+2}, a порождают P_5. Если $x \in V''_{i+1}$, то $ax \notin E$ и $\{x\}$ вполне несмежно с V''_{i+2}. Тогда $\{x\}$ вполне смежно с $\hat{V}''_i$, т.к. иначе a, v_i, некоторый элемент из $\hat{V}''_i, v_{i+2}, x$ порождают P_5. По лемме 4.2.2 множество V''_i является кликой. Поэтому $\hat{V}''_i$ вполне смежно с

$$(V''_i \setminus \hat{V}''_i) \cup V'_{i+1} \cup V''_{i+1} \cup W_C$$

и вполне несмежно с $\{a\} \cup V''_{i+2}$. Таким образом, $\{v_{i+1}\} \cup \hat{V}''_i$ является нетривиальным модулем графа G. Следовательно, $\hat{V}''_i = \emptyset$, т.к. G является неприводимым.

Таким образом, $V'_i = \emptyset, V''_{i+3} = \emptyset$, V''_{i+2} вполне смежно с

$$\{a\} \cup V'_i \cup V''_i \cup V''_{i+1} \cup V''_{i+3} \cup W_C,$$

и V''_{i+2} является кликой. Следовательно, для любой вершины $v \in V''_{i+2}$ ее антиокрестность состоит из v_{i+1}. Итак, G не является неприводимым. Наше исходное предположение было неверным. $\square$

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, где $|V| \geq 2$. Образуем по нему новый граф $G' = (V', E')$ следующим образом. Добавляются вершины v_1, v_2, u_1, u_2 и все ребра вида vv_i, где $v \in V, i \in \{1, 2\}$, а также ребра v_1u_1, u_1u_2, u_2v_2. Очевидно, что G' содержит в точности один порожденный подграф P_4, в котором две внутренние вершины имеют в G степень 2. Тем самым, восстановить G по G' можно за время $O(|V'|^4)$. Переход от G к G' также описан в разделе 2.7. второй главы.

Для класса $\mathcal{X}$ через $\mathcal{X}'$ обозначим множество $\{G' : \ G \in \mathcal{X}\}$.

Лемма 4.2.9. *Если V_i и V_{i+2} одновременно не пусты, то либо $|V| \leq 12$, либо $G \in (Free(\{O_3\}))'$.*

Доказательство. По лемме 4.2.3 имеем, что $V_{i+1} = V_{i+3} = \emptyset$. По лемме 4.2.2 имеем, что множество V_i вполне смежно с $V_{i+2} \cup V'_{i+1} \cup V'_{i+2}$ и вполне несмежно с $V'_i \cup V'_{i+3}$. Аналогично, V_{i+2} вполне смежно с $V'_i \cup V'_{i+3}$ и вполне несмежно с $V'_{i+1} \cup V'_{i+2}$. По лемме 4.2.2 имеем, что $V''_{i+1} \cup V''_{i+3}$ вполне несмежно с

$V_i \cup V_{i+2}$. Следовательно, $V''_{i+1} \cup V''_{i+3} = \emptyset$, т.к. иначе любой элемент из V_i, любой элемент из V_{i+2}, любой элемент из $V''_{i+1} \cup V''_{i+3}$, и v_i, v_{i+2} порождают P_5. По лемме 4.2.4 имеем, что V_i и V_{i+2} одновременно являются независимыми. Следовательно, чтобы избежать возникновения порожденного подграфа $K_{2,3}$, выполнено неравенство $|V_i| + |V_{i+2}| \leq 3$. По лемме 4.2.2 множество W_C вполне несмежно с $V_i \cup V_{i+2}$. По лемме 4.2.2 имеем, что V''_i и V''_{i+2} являются кликами.

Если $V'_i \neq \emptyset, V'_{i+3} \neq \emptyset$ или $V'_{i+1} \neq \emptyset, V'_{i+2} \neq \emptyset$, то $|V| \leq 12$ по лемме 4.2.7. Предположим, что $V'_i \neq \emptyset$ и $V'_{i+1} \neq \emptyset$. Тогда по лемме 4.2.2 множество V'_i вполне смежно с V_{i+2} и вполне несмежно с V_i, V'_{i+1} вполне смежно с V_i и вполне несмежно с V_{i+2}. Тогда любая вершина из V_i, любая вершина из V_{i+2}, любая вершина из V'_i, любая вершина из V'_{i+1}, и v_{i+2} порождают $K_{2,3}$. Поэтому по лемме 4.2.3 каждое из множеств $V'_i, V'_{i+1}, V'_{i+2}, V'_{i+3}$, кроме, быть может, одного является пустым. Из соображений симметрии можно считать, что если $\bigcup\limits_{i=1}^{4} V'_i \neq \emptyset$, то $V'_i \neq \emptyset$. Напомним, что

$$V_{i+1} = V_{i+3} = V'_{i+1} = V'_{i+2} = V'_{i+3} = V''_{i+1} = V''_{i+3} = \emptyset.$$

Предположим, что $V'_i \neq \emptyset$. Тогда $|V_i| = |V_{i+2}| = 1$, т.к. иначе по леммам 4.2.2 и 4.2.4 граф G содержит порожденный подграф $K_{2,3}$. Аналогично, V'_i является кликой. Множество V'_i вполне смежно с W_C, т.к. иначе v_{i+3}, некоторый элемент из W_C, v_{i+1}, некоторый элемент из V'_i, и элемент из V_{i+2} порождают P_5. Поэтому $W_C = \emptyset$, т.к. иначе элемент из V_i, элемент из V_{i+2}, любой элемент из V'_i, любой элемент из W_C, и v_{i+3} порождают P_5. Если существует вершина $c \in V''_i$, смежная с $a \in V'_i$ и несмежная с $b \in V'_i$, то $b, a, c, v_{i+2}, v_{i+3}$ порождают P_5. Предположим, что существует вершина $c \in V''_{i+2}$, смежная с $a \in V'_i$ и несмежная с $b \in V'_i$. Тогда c и элемент из V_i не смежны, т.к. иначе a, c, v_i, v_{i+3}, и элемент из V_i порождают $K^+_{2,3}$. Следовательно, c и элемент из V_{i+2} являются смежными, т.к. иначе v_{i+3}, c, a, элемент из V_{i+2}, и элемент из V_i порождают P_5. Тогда v_i, b, c, элемент из V_i, элемент из V_{i+2} порождают $K_{2,3}$. Следовательно, V'_i содержит в точности один элемент.

Докажем, что если $V_i \cup V_{i+2}$ не является вполне смежным с $V_i'' \cup V_{i+2}''$, то $|V| \leq 9$. Предположим, что некоторая вершина $v \in V_i \cup V_{i+2}$ имеет соседа в $V_i'' \cup V_{i+2}''$. Не умаляя общности можно считать, что $v \in V_i$ и $\tilde{V}_i = \{u \in V_i'' | \ uv \in E\} \neq \emptyset$. Через $\tilde{V}_{i+2}$ обозначим множество тех вершин из V_{i+2}'', которые смежны с v.

Покажем, что $\tilde{V}_{i+2} = V_{i+2}''$. Предположим противное. Множество $\tilde{V}_i$ вполне смежно с $\tilde{V}_{i+2}$, т.к. иначе v, v_{i+1}, v_{i+3}, некоторый элемент из $\tilde{V}_i$, некоторый элемент из $\tilde{V}_{i+2}$ порождают P_5. Множество $\tilde{V}_i$ вполне несмежно с $V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}$, чтобы избежать образования подграфа $K_{2,3}^+$, порожденного v, v_i, v_{i+1}, и смежными элементами из $\tilde{V}_i$ и $V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}$. Аналогично, $\tilde{V}_{i+2}$ вполне несмежно с $V_i'' \setminus \tilde{V}_i$. Множество $V_i'' \setminus \tilde{V}_i$ вполне несмежно с $V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}$, т.к. иначе v, любой элемент из $\tilde{V}_i$, некоторый элемент из $V_i'' \setminus \tilde{V}_i$, некоторый элемент из $V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}$, и v_{i+3} порождают P_5.

Чтобы избежать возникновения подграфа $K_{2,3}^+$, множество $\tilde{V}_i$ вполне несмежно с $V_i \setminus \{v\}$. Если V_i имеет 2 элемента, то $\tilde{V}_i$ вполне смежно с V_{i+2}, т.к. иначе v, элемент из V_{i+2}, элемент из $V_i \setminus \{v\}$, любой элемент из $\tilde{V}_i$, и v_{i+1} порождают P_5. Если V_{i+2} имеет 2 элемента, то любой элемент из $\tilde{V}_i$ имеет соседа в V_{i+2}, т.к. иначе $V_i \cup V_{i+2} \cup \{v_{i+1}\}$ и элемент из $\tilde{V}_i$ порождают $K_{2,3}$. Следовательно, множество $V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}$ вполне несмежно с $V_i \cup V_{i+2}$. Действительно, иначе либо $V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}$ и $\tilde{V}_i$ имеют общего соседа в $V_i \cup V_{i+2}$, либо ни одно из множеств V_i и V_{i+2} не содержит вершин u_1 и u_2 таких, что u_1 имеет соседа в $V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}$ и u_2 имеет соседа в $\tilde{V}_i$. Поэтому G содержит порожденный P_5.

Чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного v, v_{i+1}, v_{i+3}, некоторым элементом из W_C, и некоторым элементом из $\tilde{V}_i \cup \tilde{V}_{i+2}$, множество $\tilde{V}_i \cup \tilde{V}_{i+2}$ вполне смежно с W_C. Чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного v, любым элементом из $\tilde{V}_i$, некоторым элементом из W_C, v_{i+3}, некоторым элементом из $V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}$, множество $V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}$ вполне смежно с W_C. Чтобы избежать возникновения подграфа $K_{2,3}^+$, порожденного v, v_i, любым элементом из $\tilde{V}_i$, некоторым элементом из $V_i'' \setminus \tilde{V}_i$, некоторым элементом из

W_C, множество $V_i'' \setminus \tilde{V}_i$ вполне смежно с W_C. Поэтому $(V_{i+2}'' \setminus \tilde{V}_{i+2}) \cup \{v_{i+3}\}$ является модулем графа G. Т.к. G является неприводимым, то $\tilde{V}_{i+2} = V_{i+2}''$.

Итак, $\tilde{V}_{i+2} = V_{i+2}''$. Таким образом, если $\bigcup\limits_{i=1}^{4} V_i' = \emptyset$, то $\overline{N(w)} \subseteq \{w, v_{i+3}\} \cup V_{i+2}$ является независимым для любого $w \in \tilde{V}_i$. Предположим, что $V_i' = \{u\}$. Тогда $|V_i| = |V_{i+2}| = |V_i'| = 1$ и $W_C = \emptyset$. Тогда $\{u\}$ вполне несмежно с $\tilde{V}_i$, чтобы избежать возникновения подграфа $K_{2,3}$ или подграфа $K_{2,3}^+$, порожденного v, u, v_{i+2}, некоторым элементом из $\tilde{V}_i$, и любым элементом из V_{i+2}. Если $V_{i+2}'' \neq \emptyset$, то либо u, v_{i+1}, v_{i+3}, некоторая вершина из $\tilde{V}_i$, некоторая вершина из $\tilde{V}_{i+2} = V_{i+2}''$ порождают P_5, либо v, u, v_{i+1}, v_{i+3}, некоторая вершина из $\tilde{V}_{i+2}$ порождают $K_{2,3}^+$. Если существует вершина $w \in V_i''$, смежная с вершиной из V_{i+2}, то $\overline{N(w)}$ является независимым. Если V_{i+2} вполне несмежно с V_i'', то $\tilde{V}_i$ и $V_i'' \setminus \tilde{V}_i$ являются модулями графа G. Следовательно, $|V_i''| \leq 2$ и $|V| \leq 9$. Итак, мы будем предполагать, что $V_i \cup V_{i+2}$ вполне несмежно с $V_i'' \cup V_{i+2}''$.

Предположим, что $V_i' = \{v\}$. Докажем, что $|V| = 7$. Напомним, что

$$V_{i+1} = V_{i+3} = V_{i+1}' = V_{i+2}' = V_{i+3}' = V_{i+1}'' = V_{i+3}'' = W_C = \emptyset,$$

и что $|V_i| = |V_{i+2}| = 1$. Пусть $u \in V_i'' \cup V_{i+2}''$. Если $u \in V_i''$, то $vu \in E$, т.к. иначе u, v_{i+1}, v, вершина из V_{i+2}, и вершина из V_i порождают P_5. Если $u \in V_{i+2}''$, то $vu \notin E$, т.к. иначе v_{i+3}, u, v, вершина из V_{i+2}, и вершина из V_i порождают P_5. Следовательно, если существуют смежные вершины $u \in V_i''$ и $u' \in V_{i+2}''$, то $uv \in E$ и $u'v \notin E$. Тогда, v_{i+3}, u', u, v, и вершины из V_{i+2} порождают P_5. Следовательно, $V_i'' \cup \{v_{i+1}\}$ и $V_{i+2}'' \cup \{v_{i+3}\}$ являются модулями графа G. Тогда $V_i'' = V_{i+2}'' = \emptyset$, т.к. G является неприводимым, и $|V| = 7$.

Предположим, что $\bigcup\limits_{i=1}^{4} V_i' = \emptyset$. Напомним, что

$$V_{i+1} = V_{i+3} = V_{i+1}'' = V_{i+3}'' = \emptyset.$$

Множества V_i и V_{i+2} являются модулями графа G, и, следовательно, $|V_i| = |V_{i+2}| = 1$. Граф $(G \setminus (V_i \cup V_{i+2} \cup \{v_i, v_{i+2}\}))'$ изоморфен графу G. Проверим, что граф $H = G \setminus (V_i \cup V_{i+2})$ является O_3-свободным.

Действительно,

$$V(H) = V''_i \cup V''_{i+2} \cup W_C \cup \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Пусть x, y, z — три попарно несмежных вершины графа H. Т.к. V''_i и V''_{i+2} являются кликами по лемме 4.2.2, то

$$\{x, y, z\} \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \emptyset, |V''_i \cap \{x, y, z\}| \leq 1, \text{ и } |V''_{i+2} \cap \{x, y, z\}| \leq 1.$$

Если каждое из множеств V''_i, V''_{i+2}, W_C содержит в точности один элемент из $\{x, y, z\}$, то H содержит порожденный подграф P_5. В любом другом случае граф H содержит порожденный подграф $K^+_{2,3}$. Таким образом, $G \in (Free(\{O_3\}))'$. □

Лемма 4.2.10. *Если* $\bigcup\limits_{i=1}^{4} V_i = \emptyset$, *то* G *является* O_3*-свободным.*

Доказательство. Сначала докажем следующие два наблюдения: 1) для любого i множество V'_i вполне смежно с $V''_i \cup V''_{i+3}$, 2) для любого i множество V'_i является кликой.

Докажем первое наблюдение. Предположим, что вершины $a \in V'_i$ и $b \in V''_i$ несмежны. Если существует вершина $x \in V'_{i+3}$, то $ax \in E$ по лемме 4.2.2 и $xb \in E$, чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного $v_{i+3}, x, a, v_{i+1}, b$. Тогда a, b, v_i, x, v_{i+3} порождают $K^+_{2,3}$. Таким образом, $V'_{i+3} = \emptyset$. Если существует вершина $x \in V'_{i+2}$, то либо $xa \notin E$, либо $xa \in E$. В первом случае имеем $bx \in E$, чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного a, v_i, b, v_{i+2}, x. Тогда $a, v_{i+1}, b, x, v_{i+3}$ порождают P_5. Во втором случае имеем $bx \in E$, чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного $v_{i+3}, x, a, v_{i+1}, b$. Тогда a, b, x, v_{i+3}, v_i порождают $K_{2,3}$. Поэтому $V'_{i+2} = \emptyset$. Множество $\overline{N(v_{i+1})}$ не является независимым, т.к. G является неприводимым. Следовательно, существует вершина $c \in V''_{i+2}$. Докажем, что $\{c, v_{i+3}\}$ является нетривиальным модулем графа G.

Вершина c одновременно несмежна и с a, и с b. Действительно, если $ac \in E, bc \in E$, то a, b, c, v_i, v_{i+3} порождают $K^+_{2,3}$. Если $ac \in E, bc \notin E$, то

$v_{i+3}, c, a, v_{i+1}, b$ порождают P_5. Если $bc \in E, ac \notin E$, то $v_{i+3}, c, b, v_{i+1}, a$ порождают P_5. По лемме 4.2.2 имеем, что $\{c, v_{i+3}\}$ вполне смежно с $V''_{i+2} \setminus \{c\}$. Пусть v — произвольная вершина из V''_{i+1}, несмежная с c. Чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного c, v_{i+3}, v, v_{i+1}, a или b, имеем $va \in E$ и $vb \in E$. Тогда a, b, v, v_i, v_{i+3} порождают $K_{2,3}$. Следовательно, $\{c, v_{i+3}\}$ вполне смежно с V''_{i+1}. Аналогично, $\{c, v_{i+3}\}$ вполне смежно с V''_{i+3}. Пусть $v \neq b$ — произвольная вершина из V''_i, смежная с c. Тогда $vb \in E$ по лемме 4.2.2. Чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного $v_{i+3}, c, v, v_{i+1}, a$, имеем $va \in E$. Тогда a, b, c, v, v_i порождают $K^+_{2,3}$. Поэтому $\{c, v_{i+3}\}$ вполне несмежно с V''_i.

Пусть $u \neq a$ — произвольная вершина из V'_i, смежная с c. Чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного v_{i+3}, c, u, v_{i+1}, a или b, имеем $ua \in E$ и $ub \in E$. Тогда a, b, c, u, v_i порождают $K^+_{2,3}$. Поэтому $\{c, v_{i+3}\}$ вполне несмежно с V'_i. Пусть u — произвольная вершина из V'_{i+1}, смежная с c. Тогда $ua \in E$ по лемме 4.2.2. Чтобы избежать возникновения P_5, порожденного $v_{i+3}, c, u, v_{i+1}, b$, имеем $ub \in E$. Тогда a, b, c, u, v_i порождают $K_{2,3}$. Поэтому $\{c, v_{i+3}\}$ вполне несмежно с V'_{i+1}. Если существует вершина $u \in W_C$, несмежная с c, то $ua \in E, ub \in E$, чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного c, v_{i+3}, u, v_{i+1}, a или b. Тогда v_i, u, v_{i+3}, a, b порождают $K^+_{2,3}$. Поэтому $\{c, v_{i+3}\}$ вполне смежно с W_C. Итак, $\{c, v_{i+3}\}$ — нетривиальный модуль графа G. Следовательно, для любого i множество V'_i вполне смежно с $V''_i \cup V''_{i+3}$.

Докажем второе наблюдение. Предположим, что множество V'_i не является кликой. Тогда $V''_i \cup V''_{i+3}$ является пустым. Действительно, если элемент принадлежит этому множеству, то он смежен со всеми элементами из V'_i по первому наблюдению и G содержит порожденный подграф $K^+_{2,3}$. Аналогично, $V'_{i+1} \cup V'_{i+3} = \emptyset$. Пусть $M \subseteq V'_i$ — минимальный по включению модуль среди модулей графа $G(V'_i)$, содержащих несмежные вершины. Следовательно, для любой вершины $x \in M$ множество $\{x\}$ не является вполне смежным с $M \setminus \{x\}$.

Если существует вершина $v \in V''_{i+1} \cup V''_{i+2}$, смежная с вершиной $x \in M$, то существует вершина $y \in M$ такая, что $xy \notin E$. Чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного $x, y, v, v_{i+1}, v_{i+3}$ или x, y, v, v_i, v_{i+2}, имеем $yv \in E$. Тогда x, y, v, v_{i+3}, v_i или $x, y, v, v_{i+1}, v_{i+2}$ порождают $K^+_{2,3}$. Поэтому M вполне несмежно с $V''_{i+1} \cup V''_{i+2}$. Если существует вершина $v' \in V'_{i+2}$, смежная с $x' \in M$, то существует вершина $y' \in M$ такая, что $x'y' \notin E$. Чтобы избежать возникновения подграфа P_5, порожденного вершинами $v_{i+3}, v', x', v_{i+1}, y'$, имеем $v'y' \in E$. Тогда x', y', v', v_i, v_{i+3} порождают $K_{2,3}$. Поэтому M вполне несмежно с V'_{i+2}.

Предположим, что $W_C \neq \emptyset$. Т.к. G является $K^+_{2,3}$-свободным и M не является кликой, то любая вершина из W_C имеет соседа в M. Пусть $v'' \in W_C$, x и y — несмежные вершины множества M. Т.к. G является $K^+_{2,3}$-свободным, то $N_{V'_i}(v'')$ и $N_{V'_i}(v'')$ являются кликами. Следовательно, $xv'' \in E, yv'' \notin E$ или наоборот. Вершина v'' смежна со всеми вершинами из $V'_i \setminus M$, т.к. иначе x, y, v_{i+2}, некоторый элемент из $V'_i \setminus M$, и некоторый элемент из W_C порождают P_5. Вместе с тем, $V'_i \setminus M$ является кликой. Если существуют несмежные вершины $v'_1, v'_2 \in W_C$, то любая вершина из V'_i имеет соседа в $\{v'_1, v'_2\}$, т.к. G является $K^+_{2,3}$-свободным. Следовательно, можно предполагать, что $xv'_1 \in E, yv'_1 \notin E$ или $yv'_2 \in E, xv'_2 \notin E$. Тогда $x, v'_1, v_{i+2}, v'_2, y$ порождают P_5. Поэтому W_C является кликой. Более того,

$$W_C \cup \{v_i, v_{i+1}\} \cup (V'_i \setminus M)$$

является кликой, которая является разделяющей. Таким образом, $W_C = \emptyset$. Итак, M — нетривиальный модуль графа G. Следовательно, V'_i является кликой для любого i.

Докажем, что G является O_3-свободным. Предположим противное. Пусть x, y, z — попарные вершины графа G. Ясно, что

$$\{x, y, z\} \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

имеет не более одной вершины. Если это множество содержит одну вершину (скажем, x), то по лемме 4.2.2 либо $y \in V'_i \cup V'_{i+1}, z \in V''_i$ (или наоборот), либо

$y, z \in V'_i$ для некоторого i. Но это противоречит наблюдениям. Предположим, что

$$\{x, y, z\} \cap \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \emptyset.$$

По второму наблюдению и лемме 4.2.2 множество $\bigcup\limits_{i=1}^{4} V'_i \cap \{x, y, z\}$ содержит не более двух элементов.

Предположим, что $|\bigcup\limits_{i=1}^{4} V'_i \cap \{x, y, z\}| = 2$. Можно предполагать, что $x \in V'_i$ и $y \in V'_{i+2}$ по второму наблюдению и лемме 4.2.2. По первому наблюдению имеем $z \in W_C$. Следовательно, G содержит P_5, порожденный вершинами $x, v_{i+1}, z, v_{i+3}, y$.

Предположим, что $\bigcup\limits_{i=1}^{4} V'_i \cap \{x, y, z\} = \{x\}$, где $x \in V'_i$. Тогда по первому наблюдению можно предполагать, что $y, z \in W_C \cup V''_{i+1} \cup V''_{i+2}$. Если $W_C \cap \{y, z\} = \emptyset$, то по лемме 4.2.2 и первому наблюдению имеем, что $y \in V''_{i+1}, z \in V''_{i+2}$ или наоборот. Тогда $x, v_{i+1}, y, v_{i+3}, z$ порождают P_5. Если $y, z \in W_C$, то x, y, z, v_i, v_{i+1} порождают $K^+_{2,3}$. Если только одна из вершин y, z принадлежит W_C, то по первому наблюдению имеем, что $y \in W_C, z \in V''_{i+1}$ с точностью до симметрии. Тогда z, v_{i+2}, y, v_i, x порождают P_5.

Предположим, что $\bigcup\limits_{i=1}^{4} V'_i \cap \{x, y, z\} = \emptyset$. Если хотя бы две из вершин x, y, z принадлежат W_C, то G содержит порожденный подграф $K^+_{2,3}$. Во всех других случаях G содержит порожденный подграф P_5.

Итак, наше предположение о существовании трех попарно несмежных вершин в графе G было неверным. □

4.3 Псевдополиномиальная разрешимость задачи ВВР для $\{P_5, K_{2,3}, K^+_{2,3}\}$-свободных графов

Теорема 4.3.1. *Задача* ВВР *разрешима за псевдополиномиальное время для* $\{P_5, K_{2,3}, K^+_{2,3}\}$*-свободных графов.*

Доказательство. По лемме 2.6.2 можно рассматривать только неприводимые $\{P_5, K_{2,3}, K^+_{2,3}\}$-свободные графы. По леммам 4.2.1–4.2.10 задача ВВР для

$\{P_5, K_{2,3}, K_{2,3}^{+}\}$-свободных графов полиномиально сводится к той же задаче для графов из

$$(Free(\{O_3\}))' \cup Free(\{P_5, C_4\})$$

и графов с не более чем 12 вершинам. Задача ВВР разрешима за полиномиальное время для $\{P_5, C_4\}$-свободных графов [30]. Отсюда и лемм 2.4.1, 2.5.1, 2.7.1 следует справедливость утверждения данной теоремы. $\square$

Заключение

В настоящей диссертационной работе рассматривалась задача о взвешенной вершинной раскраске графов и доказывалась ее псевдополиномиальная разрешимость в некоторых наследственных классах графов. В ней предложены новые приемы для построения полиномиальных и псевдополиномиальных алгоритмов решения подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске графа. В данной диссертации доказана полиномиальная разрешимость задачи о вершинной раскраске для графов, одновременно не содержащих порожденных 5-пути и клики фиксированного размера с удаленным ребром. В ней также была установлена псевдополиномиальная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для графов без порожденных 5-пути и дополнения дизъюнктной суммы 3-пути и 2-пути. В данной диссертации доказывается псевдополиномиальная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для графов без порожденных 5-пути, (2,3)-биклики, и дополнения дизъюнктной суммы 3-клики и 2-независимого множества.

Возможные дальнейшие перспективы развития темы диссертационного исследования состоят в разработке новых алгоритмических приемов для задачи о взвешенной вершинной раскраске а также в обобщении результатов диссертации.

Литература

[1] Грибанов Д. В., Малышев Д. С., Мокеев Д. Б. Эффективная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для некоторого наследственного класса с 5-вершинными запретами// Дискретный анализ и исследование операций. — 2020. — Т. 27, № 3. — С. 71–87.

[2] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. — 384 С.

[3] Малышев Д. С. Полная классификация сложности задачи о вершинной 3-раскраске для четверок порожденных 5-вершинных запретов // Журнал Средневолжского Математического Общества. — 2020. — Т. 22, № 1. — С. 38–47.

[4] Развенская О. О. О новых алгоритмических приемах для задачи о взвешенной вершинной раскраске // Журнал Средневолжского Математического Общества. — 2020. — Т. 22, № 4. — С. 442–448.

[5] Развенская О. О., Малышев Д. С. Эффективная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для некоторых двух наследственных классов графов // Дискретный анализ и исследование операций. — 2021. — Т. 28 (принято к опубликованию).

[6] Сироткин Д. В., Малышев Д. С. О сложности задачи вершинной 3-раскраски для наследственных классов графов, определенных запретами небольшого размера // Дискретный анализ и исследование операций. — 2018. — Т. 25, № 4. — С. 112–130.

[7] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1982. — 301 С.

[8] Bondy A., Murty U. Graph theory. — Springer-Verlag: Graduate texts in mathematics, V. 244, 2008. — 655 P.

[9] Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. — 2018. — V. 38. — P. 779–801.

[10] Broersma H. J., Golovach P. A., Paulusma D., Song J. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theoretical Computer Science — 2012. — V. 414, № 1. — P. 9–19.

[11] Cameron K., Huang S., Penev I., Sivaraman V. The class of (P_7, C_4, C_5)-free graphs: decomposition, algorithms, and χ-boundedness // Journal of Graph Theory. 2019. doi: 10.1002/jgt.22499.

[12] Cameron K., da Silva M., Huang S., Vuskovic K. Structure and algorithms for $(cap, even\ hole)$-free graphs // Discrete Mathematics. — 2018. — V. 341. — P. 463–473.

[13] Chudnovsky M., Cornuéjols G., Liu X., Seymour P., Vušković K. Recognizing Berge graphs // Combinatorica. — 2005. — V. 25. — P. 143–186.

[14] Christofides N. Graph theory: An algorithmic approach. — Academic Press, 1975. — 400 P.

[15] Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P., Thomas R. The strong perfect graph theorem // Annals of Mathematics. — 2006. — V. 164. — P. 51–229.

[16] Cournier A., Habib M. A new linear algorithm for modular decomposition // Lecture Notes in Computer Science. — 1994. — V. 787. — P. 68–84.

[17] Dai Y., Foley A., Hoàng C. On coloring a class of claw-free graphs: to the memory of Frédéric Maffray // Electronic Notes in Theoretical Computer Science. — 2019. — V. 346. — P. 369–377.

[18] Diestel R. Graph theory. — Springer-Verlag: Graduate texts in mathematics, V. 173, 2016. — 447 P.

[19] Edmonds J. Paths, trees, and flowers // Canadian Journal of Mathematics. — 1965. — V. 17. — P. 449–467.

[20] Erdös P., Hajnal A., Pach J. Ramsey-type theorem for bipartite graphs // Geombinatorics. — 2000. — V. 10. — P. 64–68.

[21] Fraser D., Hamela A., Hoàng C., Holmes K., LaMantia T. Characterizations of $(4K_1, C_4, C_5)$-free graphs // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — V. 231. — P. 166–174.

[22] Gallai T. Transitiv orientierbare graphen // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. — 1967. — V. 18. — P. 25–66.

[23] Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. — New York, NY, USA: W. H. Freeman and Co, 1979. — 338 P.

[24] Gavranovich H., Finke G. Graph partitioning and set covering for the optimal design of a production system in the metal industry // Proceedings of the Second Conference on Management and Control of Production and Logistics. — 2000. — V. 2. — P. 603–608.

[25] Golovach P. A., Johnson M., Paulusma D., Song J. A survey on the computational complexity of coloring graphs with forbidden subgraphs // Journal of Graph Theory. — 2017. — V. 84. — P. 331–363.

[26] Golovach P. A., Paulusma D., Song J. 4-coloring H-free graphs when H is small // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — V. 161, № 1–2. — P. 140–150.

[27] Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. Polynomial algorithms for perfect graphs // Annals of Discrete Mathematics. — 1984. — V. 21. — P. 325–356.

[28] Gyárfás A. Problems from the world surrounding perfect graphs // Zastosowania Matematyki Applicationes Mathematicae. — 1987. — V. 19. — P. 413–441.

[29] Hoàng C., Kamiński M., Lozin V. V., Sawada J., Shu X. Deciding k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time // Algorithmica. — 2010. — V. 57. — P. 74–81.

[30] Hoàng C., Lazzarato D. Polynomial-time algorithms for minimum weighted colorings of $(P_5, \overline{P_5})$-free graphs and similar graph classes // Discrete Applied Mathematics. — 2015. — V. 186. — P. 105–111.

[31] Huang S. Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs // European Journal of Combinatorics. — 2016. — V. 51. — P. 336–346.

[32] Karthick T., Maffray F., Pastor L. Polynomial cases for the vertex coloring problem // Algorithmica. — 2017. — V. 81, № 3. — P. 1053–1074.

[33] Kral D., Kratochvil J., Tuza Z., Woeginger G. Complexity of coloring graphs without forbidden induced subgraphs // Lecture Notes in Computer Science. — 2001. — V. 2204. — P. 254–262.

[34] Lenstra, H. W. Integer programming with a fixed number of variables // Mathematics of operations research. — 1983. — V. 8, № 4. — P. 538–548.

[35] Lozin V. V., Malyshev D. S. Vertex coloring of graphs with few obstructions // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — V. 216. — P. 273–280.

[36] Malyshev D. S. The coloring problem for classes with two small obstructions // Optimization Letters. — 2014. — V. 8, № 8. — P. 2261–2270.

[37] Malyshev D. S. The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs // Discrete Mathematics. — 2015. — V. 338, № 11. — P. 1860–1865.

[38] Malyshev D. S. Two cases of polynomial-time solvability for the coloring problem // Journal of Combinatorial Optimization. — 2015. — V. 31, № 2. — P. 833–845.

[39] Malyshev D. S. The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs and Combinatorics. — 2017. — V. 33, № 4. — P. 1009–1022.

[40] Malyshev D. S. The weighted coloring problem for two graph classes characterized by small forbidden induced structures // Discrete Applied Mathematics. — 2018. — V. 47. — P. 423–432.

[41] Malyshev D. S., Lobanova (Razvenskaya) O. O. Two complexity results for the vertex coloring problem // Discrete Applied Mathematics. — 2017. — V. 219. — P. 158–166.

[42] Malyshev D. S., Razvenskaya O. O., Pardalos P. M. The computational complexity of weighted vertex coloring for $\{P_5, K_{2,3}, K^+_{2,3}\}$-free graphs // Optimization Letters. — 2021. — V. 15, №1. — P. 137–152.

[43] Malyshev D. S. The vertex colourability problem for $\{claw, butterfly\}$-free graphs is polynomial-time solvable // Optimization Letters. — 2021, doi: 10.1007/s11590-020-01679-9, принято к опубликованию.

[44] Mishra A., Banerjee S, Arbaugh W. A. Weighted coloring based channel assignment for WLANs // Mobile Computing and Communications Review. — 2005. — V. 9, № 3. — P. 19–31.

[45] Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. — 1989. — V. 45, № 1–3. — P. 139–172.

[46] Spirkl S., Chudnovsky M., Zhong M. Four-coloring P_6-free graphs // Proc. 30th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (San Diego, USA, January 6–9, 2019), 2019. — P. 1239–1256.

[47] Tarjan R. Decomposition by clique separators // Discrete Mathematics. — 1985. — V. 55. — P. 221–232.