ОТЗЫВ официального оппонента

на диссертацию на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Развенской Ольги Олеговны

«Некоторые наследственные случаи полиномиальной и псевдополиномиальной разрешимости задач о вершинной раскраске графов»

по специальности 01.01.09 —

«Дискретная математика и математическая кибернетика»

В диссертации О.О. Развенской рассматриваются вопросы, связанные с алгоритмами решения задач о взвешенной вершинной раскраске и с установлением их полиномиальной и псевдополиномиальной резрешимости. Напомню, что хроматическим числом графа называется наименьшее количество цветов, необходимых для такой покраски вершин графа, что любые две смежные вершины покрашены в разные цвета. Граф называется k-раскрашиваемым, если его хроматическое число не превосходит k. Если каждой вершине графа поставлено в соответствие некоторое натуральное число (вес вершины), то вводится понятие взвешенного хроматического числа — наименьшего k такого, что существует отображение из множества вершин графа V в $2^{\{1,\dots,k\}}$, удовлетворяющее двум свойствам: 1) для любой вершины из v мощность ее образа равна ее весу, 2) если вершины смежны, то их образы не пересекаются. Взвешенный граф называется k-раскрашиваемым, если его взвешенное хроматическое число не превосходит k. Подобного рода вопросы возникают, например, в задаче распределения радиочастот при организации беспроводной связи и при планировании литья деталей на машине пакетной обработки с учетом совместимости заданий. Практическая значимость задач о хроматическом числе и о взвешенном хроматическом числе не представляет сомнения, а значит актуальна и задача выяснения ее сложностного статуса. Известно, что задача разрешимости, состоящая в ответе на вопрос, является ли граф k-раскрашиваемым, NP-полная. Задача же нахождения хроматического числа является NP-трудной. Для многих естественных и стандартных классов графов сложностные статусы упомянутых задач не известны. В диссертационной работе рассматриваются наследственные классы графов. Под наследственным классом понимается множество графов, замкнутое относительно удаления вершин. Как известно, любой наследственный класс можно задать множеством запрещенных индуцированных подграфов. Существует несколько десятков работ, посвященных сложностному статусу задачи разрешимости для насследственных классов с небольшим количеством запрещенных индуцированных подграфов. О.О. Развенской удалось совершить значительные продвижения в этой области и закрыть некоторые дыры в этих результатах.

В диссертации получены следующие результаты. Доказана полиномиальная разрешимость задачи о вершинной раскраске для графов, не содержащих индуцированных P_5 и клики фиксированного размера с одним удаленным ребром. Доказана псевдополиномиальная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для графов без индуцированных P_5 и $\overline{P_3 \sqcup P_2}$. Доказана псевдополиномиальная разрешимость задачи о взвешенной вершинной раскраске для графов без индуцированных P_5, $K_{2,3}$, $\overline{K_3 \sqcup 2K_1}$.

Текст диссертации состоит из введения, четырех глав и заключения. Общий объем диссертации 78 страниц, из них 69 страниц текста (не считая титульного листа, оглавления и библиографии). Первая глава посвящена теоретико-графовым конструкциям и сложностным определениям, используемым в диссертации. Во второй главе обсуждаются методы и приемы (в том числе новые), которые используются в дальнейшних двух главах для построения алгоритмов решения рассматриваемых задач. В третьей главе доказывается, во-первых, что задача о вершинной раскраске разрешима за полиномиальное время для графов, не содержащих индуцированных P_5 и клики фиксированного размера с одним удаленным ребром, а, во-вторых, что задача о взвешенной вершинной раскраске разрешима за псевдополиномиальное время для графов без индуцированных P_5 и $\overline{P_3 \sqcup P_2}$. Наконец, в четвертой главе диссертации доказывается, что задача о взвешенной вершинной раскраске разрешима за псевдополиномиальное время для графов без индуцированных P_5, $K_{2,3}$, $\overline{K_3 \sqcup 2K_1}$.

Результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Достоверность выводов и заключений, сформулированных в диссертации, подтверждается строгими математическими доказательствами. Диссертационная работа носит теоретический характер. Диссертация О.О. Развенской содержит решение актуальных и важных задач, имеющих значение для развития алгоритмической теории графов. Эти результаты вносят весомый вклад в дискретную математику и могут быть использованы при сложностном анализе подзадач задачи о взвешенной вершинной раскраске. Разработанная техника может позволить получить ряд новых результатов о полиномиальной и псевдополнимальной разрешимости наследственных классов графов с другими запретами. Работа написана на высоком математическом уровне.

Работа апробирована на различных представительных семинарах и научных конференциях; ее результаты адекватно и полно отражены в

3 печатных работах в изданиях, включенных в перечень Министерства науки и высшего образования РФ (из них два издания включены в базу данных Scopus). По результатам работы сделаны доклады на не менее чем 5 представительных семинарах. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Тем не менее, в работе замечены незначительные недостатки в презентации и небольшое количество опечаток.

1. На стр. 5 написано, что результат о сложности принято формулировать именно для задачи ВВР. Мне кажется, что здесь помимо привычки должны быть еще какие-то естественные объяснения. Хотелось бы, чтобы они были представлены в диссертации.
2. На стр. 7 (аналогичное место есть и в главе 1) сказано, что любой наследственный класс можно задать множеством запрещенных индуцированных подграфов, и что это хорошо известно. Да, это действительно широко известно, но, тем не менее, стоило бы в диссертационной работе привести ссылку на источник.
3. Для графа $K_{2,3}^{+}$ есть более общепринятое обозначение — $K_{1,1,3}$.
4. В разделе 1.2 при объяснении обозначения $N(v)$ используется слово

окрестность, при этом ни расстояние нигде не введено, ни непосредственного определения этого слова не встречается.

5. В пункте (а) леммы 2.1.1 используется слово "максимальный". Какая максимальность имеется в виду? По включению, по мощности, или какая-то другая?

6. В формулировке леммы 3.1.1, во-первых, сказано "паросочетание", а имелось в виду, видимо, вообще отсутствие ребер. Кроме того, кажется, что вместо страшной формулы $\lfloor (\frac{n}{s})^{1/s} \rfloor$ можно просто написать s, и ничего не потерять.

7. Стр. 38, строка 8 снизу: стоило бы все-таки дать ссылку на сильную теорему.

8. Стр. 50, последняя строка. По модулю 4 — это обычно остатки 0,1,2,3, а здесь имеются в виду 1,2,3,4.

9. Стр. 69, строка 4 снизу. Что подразумевается под попарными вершинами?

10. Имеется ряд пунктуационных, орфографических и стилистических недочетов. Например, стр. 14, строка 7 снизу — лишняя запятая; последнее предложение в доказательстве леммы 2.1.2 — пропущен предлог "за" перед словом "леммы"; стр. 35, строка 13 снизу — $K_p - e$

стоило заключить в скобки; стр. 37, строка 6 снизу — пропущен предлог "за" перед словом "полиномиальное"; стр. 44, строка 16 снизу — пропущена запятая перед "или же"; на стр. 45 в строках 2 и 7 пропущены точки в конце предложений; на стр. 49 пропущено три предлога "из"; на стр. 50 в строке 7 снизу пропущен предлог "из"; стр. 51, строка 8 сверху — предлог "на" должен быть исправлен на "в" или "из" (то же самое в формулировке леммы 4.2.1); стр. 60, последняя строка — лишняя запятая в конце строки; стр. 63, строка 8 снизу — лишняя точка. Кроме того, во множестве мест используется конструкция типа "Чтобы избежать P_5, вершина является смежной". Стоило согласовать иначе — например, "В силу отсутствия P_5, вершина является смежной...", или "Вершина является смежной, так как иначе присутствует P_5".

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация отвечает всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика». Таким образом, соискатель Развенская Ольга Олеговна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика».

Официальный оппонент: доктор физико-математических наук, доцент кафедры дискретной математики ФГАОУВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Жуковский Максим Евгеньевич

20.04.2021

Контакты: тел.: +7 (906) 754-66-17, e-mail: zhukmax@gmail.com.

Адрес места работы: 141701, Московская область г. Долгопрудный, Институтский пер., 9, Московский физико-технический институт (государственный университет), кафедра дискретной математики.

Тел.: +7 (495) 408-45-54; e-mail: dm@phystech.edu

Подпись сотрудника МФТИ (НИУ) М. Е. Жуковского удостоверяю:

Ученый секретарь МФТИ (НИУ)

к.ф.-м.н., доцент Евсеев Евгений Григорьевич