Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша
Российской академии наук»

На правах рукописи

Попков Кирилл Андреевич

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ ЛЕГКОТЕСТИРУЕМЫХ КОНТАКТНЫХ СХЕМ И СХЕМ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

01.01.09 — Дискретная математика и математическая кибернетика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Научный консультант:

доктор физико-математических наук,

профессор Редькин Николай Петрович

Москва — 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Одно из важнейших направлений современной дискретной математики и математической кибернетики связано с разработкой теории управляющих систем, куда входят анализ, синтез и сложность управляющих систем, их надёжность, контроль исправности и диагностика неисправностей. Зарождение и первоначальное развитие такой теории связано с работами К. Э. Шеннона [316], О. Б. Лупанова [101], Дж. фон Неймана [296], Э. Ф. Мура и К. Э. Шеннона [293], Ю. Г. Потапова и С. В. Яблонского [180], С. В. Яблонского и И. А. Чегис [263] и других авторов.

Тестовые подходы широко применяются в различных областях науки и сферах жизни и имеют важное теоретическое и прикладное значение. Общую постановку задачи тестирования можно сформулировать следующим образом. Имеется некоторый тестируемый объект — человек, механизм, компьютерная программа и т. п.. Над объектом проводится эксперимент, заключающийся в подаче ему некоторых запросов и наблюдении реакции объекта на эти запросы. На основании указанной реакции требуется определить наличие у объекта тех или иных признаков (проверяющий тест) либо классифицировать данные признаки (диагностический тест). Основными характеристиками теста являются точность (вероятность того, что определение наличия признаков либо их классификация проведены верно) и сложность тестирования (выражаемая во времени, стоимости и т. п.). Важность проведения тестов наглядно заметна в медицине, когда в зависимости от результата тестирования пациента принимается решение о назначении ему соответствующего лечения, что в ряде случаев может спасти ему жизнь.

Конечно, методы математической теории тестов отличаются от методов, используемых, например, в медицине, педагогике и технике, однако сама концепция теста весьма схожа и хорошо вписывается в предложенную выше общую схему. Тестовый подход к математической задаче распознавания образов описан, например, в работе А. Н. Дмитриева, Ю. И. Журавлёва и Ф. П. Кренделева [71]. В диссертации разрабатываются новые методы тестирования применительно к двум классическим модельным классам управляющих систем — схемам из функциональных элементов и контактным схемам.

В конце XIX в. в связи с развитием электродинамики стали появляться электрические, а позднее, в середине XX в. — электронные устройства, работа которых основывалась на содержащихся в них дискретных управляющих системах без памяти — релейно-контактных или интегральных схемах. В 1910 г. физик-теоретик П. С. Эренфест обратил внимание [258], что релейно-контактные схемы можно рассматривать на языке булевых высказываний. Позднее этот подход был наглядно продемонстрирован К. Э. Шенноном [316], а применительно к интегральным схемам — О. Б. Лупановым [101]. Указанные две работы являются одними из первых работ, в которых описаны математические модели релейно-контактных и интегральных схем — контактные схемы и схемы из функциональных элементов соответственно.

При проектировании схем основное внимание, помимо их сложности, т. е числа контактов, реле, транзисторов, диодов, объёма схем и т. п., уделяется реакции схем на неисправности различного рода, которые могут в них возникать. Часто требуется, чтобы схема была надёжной, т. е. при возникновении в ней неисправностей функционировала правильно с вероятностью, а) близкой к единице или б) равной единице; возможности построения таких схем при различных допустимых в них неисправностях изучаются в математической теории надёжности схем и синтеза самокорректирующихся схем соответственно (см., например, [192, главы II, III], [137, 259, 9, 23, 37, 242]).

Другим требованием к схеме является возможность её быстрого тестирования на предмет наличия в ней неисправностей. Тестирование схемы заключается в последовательной подаче на её входы некоторых наборов булевых значений, т. е. наборов из нулей и единиц (нуль отвечает отсутствию сигнала, единица — наличию сигнала), и наблюдении выдаваемых схемой значений на данных наборах; обратим внимание, что для этого не требуется вмешательство в её структуру. На основании такого эксперимента надо сделать однозначный вывод о том, правильно или неправильно функционирует схема (проверяющий тест), а также, возможно, о том, как именно она функционирует (диагностический тест). Предполагается, что в ходе эксперимента в схеме не могут произойти дополнительные неисправности и, как следствие, она не может изменить своё функционирование. Длительность тестирования схемы напрямую связана с числом подаваемых наборов булевых значений её входных переменных, называемым длиной теста, и может быть очень большой, недоступной на практике, если число n этих переменных велико (скажем, больше 50), поскольку число всевозможных наборов булевых значений n переменных, как известно, равно 2^n. Поэтому возникает вопрос о возможности построения для конкретной схемы проверяющих или диагностических тестов, длины которых существенно меньше, чем 2^n (примеры такого построения см. в [246, §§1–3], [192, глава IV, §§1, 2]). Однако далеко не для каждой схемы удаётся построить короткие тесты; более того, бывают ситуации, когда сделать это в принципе невозможно (см., например, [192, глава IV, §5]). В связи с указанным обстоятельством ставится задача синтеза (построения) легкотестируемых схем, имеющих заданное функционирование, т. е. схем, допускающих тесты сравнительно малой длины. Основополагающей здесь следует считать работу С. В. Яблонского и И. А. Чегис [246], в которой такая задача была сформулирована для случая контактных схем и получены первые (наряду с работой [263] тех же авторов) результаты в этой области. Данный подход применим и для формализации задачи синтеза легкотестируемых схем из функциональных элементов (см., например, [261, 262]). Подробно постановка задачи синтеза легкотестируемых схем описана в следующем разделе диссертации «Основные определения и обозначения».

Актуальность темы исследования подтверждается тем, что интегральные схемы являются «начинкой» большинства современных устройств и несвоевременное обнаружение в этих схемах неисправностей может привести к печальным последствиям, учитывая, что такие устройства используются, например, в авиации и военном деле. Поэтому важно проектировать схемы не только из соображений простоты их изготовления, но и с учётом быстрого обнаружения возникающих в них неисправностей. По теме диссертации и смежным темам опубликовано большое количество работ отечественных и зарубежных авторов, что отражено в разделе диссертации «Степень разработанности темы исследования» (с. 23–49).

Основные определения и обозначения

Всюду далее для удобства будем считать, что любая запись вида $j, \dots, j'$, или $z_j, \dots, z_{j'}$, или $z_{i_j}, \dots, z_{i_{j'}}$ при $j > j'$ обозначает пустую строку. Введём обозначения $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\tilde{x}^l = (x_1, \dots, x_l)$, $\tilde{0}^l = \underbrace{0, \dots, 0}_{l}$ и $\tilde{1}^l = \underbrace{1, \dots, 1}_{l}$, где $l \in \mathbb{Z}^+$ (в случае $l = 0$ последние два из них также обозначают пустую строку: например, $(1, \tilde{0}^0, 1) = (1, 1)$). Все логарифмы, встречающиеся в дальнейшем тексте, за исключением натурального логарифма, берутся по основанию 2, которое для краткости будем опускать.

Булевы функции

Функция $f(\tilde{x}^n)$, где $n \in \mathbb{Z}^+$, называется *булевой* (или *булевской*, или *функцией алгебры логики*, или *логической*), если все её переменные и сама функция принимают значения из множества $\{0, 1\}$ (см., например, [203, с. 40]); такие переменные также называют *булевыми*. *Двоичным набором длины* n или, кратко, n*-набором* будем называть набор из n чисел, каждое из которых равно нулю или единице. Любая булева функция (б. ф.) $f(\tilde{x}^n)$ определена на всех 2^n двоичных наборах длины n и на каждом из них принимает значение 0 или 1. Она может быть задана таблицей, в которой перечислены всевозможные n-наборы, напротив каждого из которых указано значение функции на этом наборе (см., например, [203, с. 40, таблица 1]). Общее число б. ф. от n переменных равно числу различных комбинаций из 2^n нулей или единиц и равно 2^{2^n}. Важными примерами б. ф. являются булевы константы 0 (*тождественный нуль*) и 1 (*тождественная единица*), функции x, $\overline{x}$ (*отрицание* или *инверсия*) от одной переменной и функции $x_1 \& x_2$ (*конъюнкция*), $x_1 \vee x_2$ (*дизъюнкция*), $x_1 \oplus x_2$ (*сумма по модулю* 2), $x_1 \sim x_2$ (*эквивалентность*), $x_1 \to x_2$ (*импликация*), $x_1 \,|\, x_2$ (*штрих Шеффера*), $x_1 \downarrow x_2$ (*стрелка Пирса*) от двух переменных (см., например, [99, с. 21]). Отметим, что конъюнкция $x_1 \& x_2$ ведёт себя в точности как умножение булевых переменных (б. п.) x_1 и x_2 в обычном арифметическом смысле. Булевы функции также могут быть заданы формулами (см., например, [203, глава III, §2]). Скажем, формула $x_1 \& \ldots \& x_n$ задаёт б. ф., равную единице при $x_1 = \ldots = x_n = 1$ и равную нулю в остальных случаях, а формулы $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, $\overline{x}_1 \vee x_2$, $\overline{x_1 \& x_2}$ и $\overline{x_1 \vee x_2}$ задают функции $x_1 \sim x_2$, $x_1 \to x_2$, $x_1 \,|\, x_2$ и $x_1 \downarrow x_2$ соответственно.

Предполагается, что каждая б. ф., которая будет встречаться в дальнейшем изложении, задана вместе со множеством её переменных. В большинстве случаев это множество при первом упоминании той или иной б. ф. будет указываться явно: например, «Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)\ldots$». При последующих упоминаниях той же б. ф. множество её переменных там, где это удобно, для краткости будем опускать (скажем, вместо $f(\tilde{x}^n)$ будем писать просто f в рамках одного и того же рассуждения). Все переменные $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ по умолчанию будут предполагаться булевыми.

Пусть $f_1(\tilde{x}^n)$ и $f_2(\tilde{x}^n)$ — произвольные б. ф.. Равенство $f_1 = f_2$ (неравенство $f_1 \leqslant f_2$) означает, что $f_1(\tilde{\sigma}) = f_2(\tilde{\sigma})$ (соответственно $f_1(\tilde{\sigma}) \leqslant f_2(\tilde{\sigma})$) для любого n-набора $\tilde{\sigma}$. Неравенство $f_1 < f_2$ означает, что $f_1 \leqslant f_2$ и $f_1 \neq f_2$. Если $f_1 \leqslant f_2$ (если $f_1 < f_2$), то полагаем $f_2 \geqslant f_1$ (соответственно $f_2 > f_1$).

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется *для почти всех б. ф. от n переменных*, если отношение числа б. ф. от n переменных, для которых это свойство не выполняется, к числу всех б. ф. от n переменных (т. е. к 2^{2^n}) стремится к нулю при $n \to \infty$.

Пусть x — б. п. и $\sigma \in \{0, 1\}$. Введём обозначение (см., например, [203, с. 45]):

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \text{если } \sigma = 1, \\ \overline{x}, & \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Отметим, что $\sigma^\sigma \equiv 1$, $(\overline{\sigma})^\sigma \equiv 0$, $x^\sigma \equiv x \oplus \sigma \oplus 1$ и

$$x^\sigma = \begin{cases} \sigma, & \text{если } x = 1, \\ \overline{\sigma}, & \text{если } x = 0; \end{cases}$$

для проверки последних двух соотношений достаточно отдельно рассмотреть случаи, когда пара (x, σ) равна $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(0, 0)$, а для проверки первых двух тождеств — случаи $\sigma = 1$ и $\sigma = 0$.

Два двоичных набора одинаковой длины называются *соседними*, если они различаются ровно в одной компоненте.

Контактные схемы

Контактной схемой (КС) называется неориентированный граф с выделенными вершинами — *полюсами*, каждому ребру которого приписан символ б. п. или её отрицания (см., например, [105, с. 33]). КС называется *m-полюсной*, если в ней содержится ровно m полюсов. Ребро с приписанным ему символом указанного вида называется *контактом*; если при этом ребру приписан символ б. п. (отрицания б. п.), то такой контакт называется *замыкающим* (соответственно *размыкающим*). Контакт с приписанным ему символом x^σ, где x — б. п. и $\sigma \in \{0, 1\}$, будем для удобства называть контактом x^σ, контактом вида x^σ, а также контактом переменной x.

Далее будем рассматривать только конечные КС, т. е. содержащие конечное число вершин и контактов. Б. п. $x_1, \ldots, x_n$, где $n \in \mathbb{Z}^+$, будем называть *входными переменными* контактной схемы, если каждый её контакт является контактом одной из этих переменных.

Цепью в КС называется цепь в соответствующем ей графе. Любую цепь C в КС можно представить в виде $a_1 - K_1 - a_2 - \ldots - a_d - K_d - a_{d+1}$, где $d \in \mathbb{Z}^+$, a_1 и a_{d+1} — концы этой цепи; при движении от вершины a_1 к вершине a_{d+1} в цепи C последовательно располагаются попарно различные контакты $K_1, \ldots, K_d$, причём концами контакта K_i являются вершины a_i и a_{i+1} для каждого $i = 1, \ldots, d$. Такую цепь также можно кратко представить в виде $a_1 - a_2 - \ldots - a_d - a_{d+1}$, если вершины a_i и a_{i+1}, $i = 1, \ldots, d$, соединены в схеме единственным контактом. Отметим, что в случае $d = 0$ указанная цепь не содержит контактов, а её концы совпадают; в случае $d = 1$ она принимает вид $a_1 - K_1 - a_2$ или, сокращённо, $a_1 - a_2$. Цепь называется *несамопересекающейся*, если все её вершины $a_1, \ldots, a_{d+1}$ попарно различны. Число d будем называть *длиной* цепи. Будем также говорить, что цепь с концами a_1 и a_{d+1} *соединяет* вершины a_1 и a_{d+1}.

Пусть $n \in \mathbb{Z}^+$, S — КС со входными переменными $x_1, \ldots, x_n$ и $\tilde{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — произвольный n-набор. Предположим, что вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ подставлены значения $\pi_1, \ldots, \pi_n$ соответственно (иначе говоря, на входы схемы S вместо переменных $x_1, \ldots, x_n$ поданы значения $\pi_1, \ldots, \pi_n$ соответственно). Будем говорить, что контакт x_i^σ *проводит на наборе* $\tilde{\pi}$, если при указанной подстановке $x_i^\sigma = 1$, т. е. $\pi_i^\sigma = 1$ (это равносильно равенству $\pi_i = \sigma$), и *не проводит на наборе* $\tilde{\pi}$, если при указанной подстановке $x_i^\sigma = 0$, т. е. $\pi_i^\sigma = 0$ (это равносильно соотношению $\pi_i \neq \sigma$). Например, контакт x_i проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$ и не проводит на наборе $(\tilde{0}^n)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Будем говорить, что цепь C в схеме S

проводит на наборе $\tilde{\pi}$ (*не проводит на наборе* $\tilde{\pi}$), если каждый контакт, содержащийся в цепи C, проводит на этом наборе (соответственно хотя бы один контакт, содержащийся в цепи C, не проводит на этом наборе). Будем также говорить, что в схеме S *есть проводимость между вершинами* a *и* b *на наборе* $\tilde{\pi}$ (*проводимость между вершинами* a *и* b *на наборе* $\tilde{\pi}$ *отсутствует*), если в этой схеме есть хотя бы одна цепь с концами a и b, проводящая на наборе $\tilde{\sigma}$ (соответственно ни одна цепь с концами a и b в схеме S не проводит на наборе $\tilde{\pi}$). Нетрудно понять, что в определениях из предыдущего предложения слово «цепь» можно с сохранением смысла заменить на словосочетание «несамопересекающаяся цепь». Если схема S двухполюсная и в ней есть проводимость между полюсами на наборе $\tilde{\pi}$ (проводимость между её полюсами на наборе $\tilde{\pi}$ отсутствует), то будем говорить, что схема S *проводит на наборе* $\tilde{\pi}$ (соответственно *не проводит на наборе* $\tilde{\pi}$).

Будем считать, что если контакт, цепь или КС проводит (не проводит) на некотором n-наборе, то проводимость этого контакта, цепи или КС на указанном наборе равна 1 (соответственно 0). Будем также считать, что если в КС S есть проводимость между вершинами a и b на некотором n-наборе (проводимость между вершинами a и b на некотором n-наборе отсутствует), то эта проводимость на нём равна 1 (соответственно 0).

Назовём *функцией проводимости* между произвольными двумя вершинами КС S со входными переменными $x_1, \ldots, x_n$ булеву функцию от этих n переменных, равную 1 на тех и только тех n-наборах, на которых в схеме S есть проводимость между данными двумя вершинами. Будем говорить, что двухполюсная КС *реализует* б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, если функция проводимости между полюсами этой схемы равна $f(\tilde{x}^n)$. Из определений нетрудно получить, что функция проводимости между концами любой несамопересекающейся цепи, содержащей в точности контакты $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n}$ и рассматриваемой как самостоятельная КС, равна $x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_n}^{\sigma_n}$, а функция проводимости между любыми двумя вершинами произвольной КС равна $f_1 \vee \ldots \vee f_t$, где $f_1, \ldots, f_t$ — функции проводимости между концами всевозможных несамопересекающихся цепей, соединяющих в этой схеме данные две вершины. Пример двухполюсной КС с указанием реализуемой ей функции приведён в [105, с. 34, рисунок 13].

Подсхемой контактной схемы называется КС, являющаяся подграфом соответствующего графа с сохранением приписанных контактам символов. Число и множество полюсов подсхемы при этом могут отличаться от числа и множества полюсов исходной схемы. На рисунках четырёхполюсные подсхемы контактных схем будем обозначать прямоугольниками, а двухполюсные подсхемы — фигурами из двух дуг с общими концами (см. рисунок 7.1 на с. 167 диссертации).

В дальнейшем под КС всюду будет пониматься двухполюсная контактная схема, если явно не оговорено иное.

Схемы из функциональных элементов

Любое множество б. ф. будем считать (схемным) *базисом*. Базис называется *функционально полным* (ф. п.) или просто *полным*, если любая б. ф. может быть выражена формулой над этим базисом (определение формулы над множеством б. ф. см., например, в [203, с. 42–43]). Функциональную полноту любого базиса можно проверить с использованием [260, с. 40, теорема 7]. Если все функции из базиса принадлежат множеству $\{0, 1, \overline{x}, x\&y, x\vee y, x\oplus y, x \sim y, x \to y\}$ (с точностью до переименования переменных), то в записи базиса принято опускать символы переменных у функций $x\&y$, $x \vee y$, $x \oplus y$, $x \sim y$ и $x \to y$, а вместо «$\overline{x}$» писать «$\neg$» или «$^{-}$». Например, широко распространённый стандартный (классический) базис $B_0 = \{x\&y, x \vee y, \overline{x}\}$ обычно записывается в виде $\{\&, \vee, \neg\}$ или $\{\&, \vee, ^{-}\}$.

Схемой из функциональных элементов (СФЭ) называется непустой ориентированный граф без ориентированных циклов с выделенными вершинами, некоторые из которых объявляются *входами* схемы, а некоторые — *выходами* схемы (одна и та же вершина может быть как входом, так и выходом схемы); при этом в каждый из входов схемы не входит ни одного ребра, каждому входу приписана какая-то своя б. п. и все такие б. п. называются *входными переменными* схемы; вершины, отличные от входов схемы, называются *функциональными элементами* (ФЭ), и каждой из них приписана некоторая б. ф., число переменных которой равно числу рёбер, входящих в эту вершину, причём каждой переменной отвечает какое-то своё такое ребро. Говорят, что СФЭ является схемой *в базисе* B, если все б. ф., приписанные её функциональным элементам, принадлежат базису B. Данные определения являются обобщениями определений, приведённых в [203, с. 65], на случай СФЭ в произвольном базисе. Вход схемы, которому приписана произвольная б. п. x, будем для краткости называть входом «x» схемы.

Далее будем рассматривать только конечные СФЭ, т. е. содержащие конечное число вершин и рёбер.

Предположим, что все вершины некоторого ориентированного графа занумерованы натуральными числами. Нумерацию вершин графа будем считать *монотонной*, если любое его ребро ориентировано от вершины с меньшим номером к вершине с бо́льшим номером. В силу [203, с. 66, лемма 4] любой конечный ориентированный граф без ориентированных циклов допускает монотонную нумерацию вершин последовательными натуральными числами, начиная с единицы. Таким образом, в любой СФЭ S можно ввести монотонную нумерацию вершин числами от 1 до N, где N — общее число вершин в схеме. Пусть X — множество входных переменных схемы S. Определим по индукции понятие булевой функции, *реализуемой в i-й вершине* схемы S, $i = 1, \ldots, N$. Пусть уже определены б. ф. $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$, реализуемые соответственно в 1-й, …, $(i-1)$-й вершинах схемы S для некоторого $i \in \{1, \ldots, N\}$ (в случае $i = 1$ полагаем, что никакие б. ф. ещё не определены), причём множество переменных каждой из функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$ равно X. Если i-я вершина схемы S является её входом «x» для некоторой б. п. $x \in X$, то будем считать, что в этой вершине реализуется б. ф. x, зависящая от всех переменных из множества X, но при этом от каждой из них, кроме x, несущественно (понятие существенной зависимости б. ф. от переменной можно найти, например, в [203, с. 40–41]). Если же i-я вершина схемы S является ФЭ, которому приписана некоторая б. ф. $\psi(\tilde{x}^m)$ (с точностью до переименования переменных), где $m \in \mathbb{Z}^+$, то в эту вершину входит m рёбер, причём каждой из переменных $x_1, \ldots, x_m$ отвечает какое-то своё такое ребро. Пусть $j_1, \ldots, j_m$ — номера вершин, из которых исходят рёбра, входящие в i-ю вершину и отвечающие переменным $x_1, \ldots, x_m$ соответственно. Тогда каждый из номеров $j_1, \ldots, j_m$ меньше i в силу монотонности нумерации, т. е. принадлежит множеству $\{1, \ldots, i-1\}$. (Отметим, что некоторые из чисел $j_1, \ldots, j_m$ могут совпадать.) Будем считать, что в i-й вершине схемы S реализуется б. ф. $\psi(\varphi_{j_1}, \ldots, \varphi_{j_m})$, т. е. б. ф., заданная такой формулой, зависящая от всех переменных из множества X (возможно, от некоторых из них несущественно).

Говорят, что СФЭ *реализует* упорядоченную систему б. ф., реализуемых на выходах данной схемы (см., например, [203, с. 67]). В частности, если схема имеет единственный выход, то она реализует б. ф., реализуемую на её выходе. В силу [203, с. 67, лемма 5] б. ф., реализуемые в вершинах СФЭ, полностью определяются самой схемой независимо от монотонной нумерации вершин схемы (формально это было доказано для схем в базисе B_0, но доказательство дословно переносится на случай схем в произвольном базисе).

Всюду далее будем придерживаться общепринятых предположений, что каждая б. ф., приписанная какому-либо элементу в произвольной СФЭ, а также каждая б. ф. из произвольного базиса существенно зависит от всех своих переменных (любой базис и любую СФЭ в этом базисе можно преобразовать к видам, для которых данные условия выполняются, путём изъятия всех несущественных переменных из каждой из указанных б. ф., а также удаления из СФЭ каждого ребра, отвечавшего какой-то несущественной переменной б. ф., приписанной ФЭ, в которое входит это ребро).

Для любого ф. п. конечного базиса B через $m(B)$ будем обозначать максимальное число переменных у функций из B; отметим, что $m(B) \geqslant 2$ в силу полноты базиса.

Нетрудно видеть, что ни тождественный нуль, ни тождественную единицу нельзя реализовать СФЭ без входных переменных в каком-либо базисе B, не содержащем булевых констант. Поэтому под реализацией булевой константы α схемой в таком базисе в отечественной литературе принято понимать реализацию б. ф. $f(x_1) \equiv \alpha$ схемой (с одной входной переменной x_1) в базисе B; мы будем придерживаться именно этого подхода.

Функциональные элементы часто изображают в виде треугольников, внутри каждого из которых может содержаться символ б. ф., приписанной данному элементу.

Пусть E — произвольный элемент в произвольной СФЭ и ему приписана некоторая б. ф. $\psi(\tilde{x}^m)$, где $m \in \mathbb{Z}^+$. Введём ряд определений и обозначений, используемых в дальнейшем тексте диссертации. Элемент E будем называть *ψ-элементом.* Будем полагать, что он имеет *m входов*, графически располагающихся на верхней стороне треугольника, изображающего элемент E, и один *выход*, графически являющийся нижней точкой треугольника, изображающего данный элемент; каждому входу соответствуют какое-то своё ребро, входящее в вершину E схемы, а также своя переменная из множества $\{x_1, \ldots, x_m\}$, отвечающая этому ребру. Вход элемента E, соответствующий переменной x_i, для краткости будем называть входом «x_i» элемента E. В случае $m \geqslant 2$ для удобства будем считать, что входы «x_1», …, «x_m» этого элемента располагаются слева направо в указанном порядке; эти входы также будем называть соответственно 1-м, …, m-м входом элемента E. Будем говорить, что на выходе элемента E *реализуется* б. ф. (или, иначе, элемент E *реализует* б. ф.), реализуемая (-ую) в вершине E схемы, а также что элемент E *реализует* функцию $\psi(\tilde{x}^m)$ *от своих входов.* Если ребро, соответствующее некоторому входу v элемента E, исходит из ФЭ E' (из входа a схемы), то будем считать, что вход v элемента E *соединён* с выходом элемента E' (соответственно со входом a схемы) и на вход v *подаётся* б. ф., реализуемая на выходе элемента E' (соответственно в вершине a схемы).

Если на входы СФЭ вместо набора её входных переменных подан некоторый двоичный набор $\tilde{\sigma}$ и E — произвольный элемент этой схемы, то можно естественным образом определить значение, возникающее на выходе элемента E или, иначе, выдаваемое элементом E, как значение функции, реализуемой на его выходе, на наборе $\tilde{\sigma}$, а также определить значение, подаваемое на произвольный вход элемента E, как значение функции, подаваемой на этот его вход, на наборе $\tilde{\sigma}$.

В случаях, когда функция ψ имеет простой вид, любой ψ-элемент получает альтернативное название:

$\psi(\tilde{x}^m) = x_1 \& \ldots \& x_m$, где $m \geqslant 2$ — (m-*входовой*) *конъюнктор*;

$\psi(\tilde{x}^m) = x_1 \vee \ldots \vee x_m$, где $m \geqslant 2$ — (m-*входовой*) *дизъюнктор*;

$\psi(x) = \overline{x}$ — *инвертор*;

$\psi(\tilde{x}^m) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_m$, где $m \geqslant 2$ — (m-*входовой*) *сумматор*;

$\psi \equiv 1$ — *элемент «константа* 1*»*;

$\psi \equiv 0$ — *элемент «константа* 0*»*.

Пример СФЭ с одним выходом с указанием функций, реализуемых на выходах её элементов, приведён в [203, с. 66, рисунок 10,б]; эта схема является схемой в базисе B_0 (а также в любом базисе, подмножеством которого является B_0).

Подсхемой схемы из функциональных элементов называется СФЭ, являющаяся подграфом соответствующего графа с сохранением приписанных функциональным элементам б. ф.. Отметим, что число и множество входов подсхемы могут отличаться от числа и множества входов исходной схемы; то же самое верно для выходов схемы и подсхемы. На рисунках подсхемы СФЭ будем обозначать прямоугольниками.

В данной диссертации указание ориентации рёбер на рисунках, изображающих СФЭ, отсутствует, но его можно однозначно восстановить по следующему правилу: любое ребро, один из концов которого лежит на верхней стороне треугольника (изображающего ФЭ) или прямоугольника (изображающего подсхему), ориентировано в сторону данного конца.

В дальнейшем под СФЭ всюду будет пониматься СФЭ с одним выходом, если явно не оговорено иное. Элемент, выход которого совпадает с выходом СФЭ, называется *выходным элементом* схемы.

Тесты для схем

Пусть задана произвольная КС или СФЭ S, реализующая б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Представим, что на схему S воздействует некоторый источник неисправностей, способный вызывать в этой схеме изменения одного или нескольких из следующих видов:

1. Изменение значений, подаваемых на входы схемы. Например, вместо некоторых входных переменных схемы S могут быть поданы булевы константы или отрицания этих переменных.

2. Изменение символов, приписанных контактам, или изменение б. ф., приписанных функциональным элементам. Например, некоторым контактам вместо исходных символов б. п. или их отрицаний, а также некоторым ФЭ вместо исходных б. ф. могут быть приписаны булевы константы (подробнее об этом см. в следующем подразделе «Неисправности»).

3. Изменение структуры схемы S, рассматриваемой как граф с выделенными вершинами (такие неисправности в основной части диссертации рассматриваться не будут). Например, к схеме S могут быть добавлены или из неё могут быть удалены несколько контактов (в случае КС) либо функциональных элементов (в случае СФЭ, причём с некоторыми дополнительными изменениями, чтобы полученный объект удовлетворял определению СФЭ); также

может измениться множество выделенных вершин схемы, но при этом в КС по-прежнему должны остаться два полюса, а у СФЭ — один выход.

Все возможные виды воздействия источника неисправностей на схему S, т. е. все виды неисправностей, которые могут происходить в этой схеме, заранее оговариваются. Виды неисправностей в схемах, рассматриваемые в основной части диссертации, перечислены в следующем подразделе. В результате конкретного воздействия источника неисправностей схема S вместо исходной функции $f(\tilde{x}^n)$ станет реализовывать некоторую б. ф. $g(\tilde{x}^n)$, вообще говоря, отличную от f. Все такие б. ф. $g(\tilde{x}^n)$, получающиеся при всевозможных допустимых неисправностях в данной схеме, называются *функциями неисправности* (ф. н.) схемы S. Любая ф. н. $g(\tilde{x}^n)$ схемы S, отличная от $f(\tilde{x}^n)$, называется *нетривиальной*.

Следующие определения можно найти, например, в [192, глава IV, §§1, 3]. *Проверяющим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой нетривиальной ф. н. $g(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $f(\tilde{\sigma}) \neq g(\tilde{\sigma})$. *Диагностическим тестом* для схемы S называется такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных ф. н. $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $g_1(\tilde{\sigma}) \neq g_2(\tilde{\sigma})$. Другими словами, проверяющий (диагностический) тест для схемы S позволяет однозначно определить путём последовательной подачи на входы этой схемы наборов из теста и наблюдения выдаваемых схемой значений, реализует ли она «правильную» функцию $f(\tilde{x}^n)$ или же какую-то ф. н., отличную от f (соответственно какую именно б. ф. она реализует), в предположении, что известны строение исправной схемы S и перечень всех неисправностей, которые могут в ней происходить, а значит, и все возможные ф. н. данной схемы. Число наборов в T называется *длиной* теста. В качестве тривиального диагностического (и проверяющего) теста длины 2^n для схемы S всегда можно взять множество, состоящее из всех двоичных наборов длины n. Тест называется *полным*, если в схеме могут происходить сколько угодно неисправностей, и *единичным*, если в схеме может произойти только одна неисправность. Единичные тесты обычно рассматривают для *неизбыточных схем*, т. е. для таких схем, в которых любая допустимая неисправность приводит к нетривиальной ф. н.; обоснование этого см. в [192, глава IV, §3, 2-й–3-й абзацы].

Назовём проверяющий (диагностический) тест *k-проверяющим* (*k-диагностическим*), если в схеме может произойти не более k неисправностей, где $k \in \mathbb{N}$ [160, 164]. Будем рассматривать такие тесты только для *k-неизбыточных схем*, в которых любые не менее одной и не более k допустимых неисправностей приводят к нетривиальной ф. н. [87, с. 68]. Очевидно, что понятия 1-проверяющего теста, 1-диагностического теста и 1-неизбыточной схемы совпадают с понятиями единичного проверяющего теста (ЕПТ), единичного диагностического теста (ЕДТ) и неизбыточной схемы соответственно.

Всюду далее будем считать, что при определениях неизбыточности и k-неизбыточности схемы не учитываются возможные неисправности на её входах (скажем, любая КС или СФЭ по умолчанию неизбыточна и k-неизбыточна для любого $k \in \mathbb{N}$ относительно каких бы то ни было неисправностей, затрагивающих только её входы). Если бы такие неисправности учитывались, то, например, любую б. ф., не зависящую существенно от какой-то из своих переменных, невозможно было бы в принципе реализовать схемой, неизбыточной или k-неизбыточной относительно определяемых в следующем подразделе «Неисправности» константных или инверсных неисправностей на входах схем (поскольку при любой константной или инверсной неисправности на входе схемы, соответствующем указанной несущественной переменной, функция, реализуемая схемой, не изменилась бы), что усложнило бы последующие определения и обзор результатов.

Для каждого из шести определённых выше типов теста: ЕПТ, k-проверяющего теста (k-ПТ), полного проверяющего теста (ППТ), ЕДТ, k-диагностического теста (k-ДТ) и полного диагностического теста (ПДТ) определим значение величины Т, характеризующей тип теста; это будет необходимо для введения дальнейших обозначений. А именно, будем говорить, что множество T является тестом типа Т для схемы S, в следующих случаях:

- T — ЕПТ для схемы S и Т = ЕП;
- T — k-ПТ для схемы S и Т = k-П;
- T — ППТ для схемы S и Т = ПП;
- T — ЕДТ для схемы S и Т = ЕД;
- T — k-ДТ для схемы S и Т = k-Д;
- T — ПДТ для схемы S и Т = ПД.

Неисправности

Перечислим виды неисправностей в схемах, рассматриваемые в основной части диссертации. Параллельно для каждого такого вида определим значения величин М (кроме случаев 1.1–1.3) и Н, характеризующие возможные «места» и типы неисправностей; это потребуется для введения обозначений из следующего подраздела.

1. Неисправности контактов в контактных схемах.

1.1. Обрывы (размыкания) контактов. Каждый контакт при обрыве начинает иметь тождественно нулевую проводимость, т. е. не проводит ни на одном наборе. Положим Н = 0.

1.2. Замыкания контактов. Каждый контакт при замыкании начинает иметь тождественно единичную проводимость, т. е. проводит на любом наборе. Положим Н $=1$.

1.3. Обрывы и замыкания контактов. Каждый неисправный контакт в любой КС может быть оборван или замкнут независимо от неисправностей других контактов в этой схеме. Положим Н $=01$.

В каждом из случаев 1.1–1.3 считаем, что в неисправное состояние может перейти любой контакт в любой КС (т. е. в ней нет «абсолютно надёжных» контактов).

2. Неисправности на входах схем. Данный класс неисправностей будет рассматриваться для СФЭ, но, как нетрудно видеть, множество ф. н. любой СФЭ при неисправностях произвольного типа, возникающих на её входах, зависит только от б. ф., реализуемой этой схемой в случае её исправной работы, и от типа неисправностей и не зависит от строения схемы, базиса, в котором она строится, и даже от принадлежности её классу СФЭ, КС или каких-то других логических устройств (под логическим устройством здесь понимается любой объект с n входами, $n \in \mathbb{Z}^+$, на которые подаются попарно различные б. п., и одним выходом, на котором реализуется некоторая б. ф. от данных n переменных); это обстоятельство отмечено, например, в [192, глава IV, §4, 1-й абзац].

2.1. Однотипные константные неисправности (ОКН) типа p, $p \in \{0,1\}$, на входах схем. В каждом неисправном входе любой СФЭ вместо б. п., приписанной этому входу, реализуется константа p. Положим М $=$ P (сокращение от выражения «primary input»), Н $= p$.

2.2. Произвольные константные неисправности (ПКН) на входах схем. В каждом неисправном входе любой СФЭ вместо б. п., приписанной этому входу, реализуется одна из булевых констант $0, 1$ независимо от неисправностей других входов этой схемы. Положим М $=$ P, Н $=01$.

2.3. Инверсные неисправности (ИН) на входах схем. В каждом неисправном входе любой СФЭ вместо б. п., приписанной этому входу, реализуется отрицание данной б. п.. Положим М $=$ P, Н $=$ Inv.

В каждом из случаев 2.1–2.3 считаем, что в неисправное состояние может перейти любой вход любой СФЭ (т. е. у неё нет «абсолютно надёжных» входов).

3. Неисправности элементов в схемах из функциональных элементов.

3.1. ОКН типа p, $p \in \{0,1\}$, на выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на константу p. Положим М $=$ O (сокращение от слова «output»), Н $= p$.

3.2. ПКН на выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на одну из булевых констант $0, 1$ независимо от неисправностей других элементов этой схемы. Положим М $=$ O, Н $=01$.

3.3. ИН на выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на отрицание этой функции. Положим М = O, Н = Inv.

3.4. ОКН типа p, $p \in \{0, 1\}$, на входах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, константы p. Положим М = I (сокращение от слова «input»), Н = p.

3.5. ПКН на входах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, одной из булевых констант $0, 1$ независимо от неисправностей других входов элементов в данной схеме. Положим М = I, Н = 01.

3.6. ИН на входах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, отрицания данной переменной. Положим М = I, Н = Inv.

3.7. ОКН типа p, $p \in \{0, 1\}$, на входах и выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на константу p, если неисправен выход этого элемента, либо на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, константы p, если его выход исправен. Положим М = IO, Н = p.

3.8. ПКН на входах и выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на одну из булевых констант $0, 1$, если неисправен выход этого элемента, либо на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, одной из булевых констант $0, 1$, если его выход исправен, независимо от неисправностей других входов/выходов элементов в данной схеме. Положим М = IO, Н = 01.

3.9. ИН на входах и выходах элементов. Б. ф., приписанная каждому неисправному элементу в любой СФЭ, меняется на функцию, получающуюся из исходной функции подстановкой вместо каждой переменной, отвечающей какому-то неисправному входу этого элемента, отрицания данной переменной, а затем — если неисправен выход этого элемента — на отрицание полученной функции. Положим М = IO, Н = Inv.

Считаем, что в неисправное состояние может перейти выход (в случаях 3.1–3.3, 3.7–3.9) и любой вход (в случаях 3.4—3.9) любого элемента в любой СФЭ.

Вполне разумно предполагать, что если исправный элемент в СФЭ является элементом «константа α» для некоторого $\alpha \in \{0, 1\}$, то неисправность типа α на его выходе (при которой приписанная этому элементу б. ф. меняется на константу α) невозможна.

4. Комбинации рассмотренных выше неисправностей элементов в схемах из функциональных элементов и неисправностей на входах этих схем. В каждом их нижеследующих случаев 4.1–4.3 будем полагать $\mathrm{M} = \mathrm{PIO}$, $\mathrm{M} = \mathrm{PI}$ или $\mathrm{M} = \mathrm{PO}$ в зависимости от того, допускаются ли в схемах, помимо неисправностей на их входах, неисправности соответственно на входах и выходах, только на входах или только на выходах элементов.

4.1. ОКН типа p, $p \in \{0, 1\}$, на входах и/или выходах элементов и на входах схем. Положим $\mathrm{H} = p$.

4.2. ПКН на входах и/или выходах элементов и на входах схем. Положим $\mathrm{H} = 01$.

4.3. ИН на входах и/или выходах элементов и на входах схем. Положим $\mathrm{H} = \mathrm{Inv}$.

Приведём для наглядности несколько примеров. При обрывах контактов x_1 и $\overline{x}_3$ и замыкании контакта $\overline{x}_2$, соединяющего вершины a_2 и a_6, схема с полюсами a_1 и a_4, изображённая на рисунке 13 работы [105] (см. [105, с. 34]), как нетрудно видеть, станет реализовывать ф. н. $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_21x_2x_3 = \overline{x}_1x_3$ (слагаемое $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$ отвечает цепи $a_1 - a_5 - a_3 - a_4$, а слагаемое $\overline{x}_1x_21x_2x_3$ — цепи $a_1 - a_5 - a_6 - a_2 - a_3 - a_4$). При неисправностях типа 0 на выходе верхнего конъюнктора и правом входе дизъюнктора и неисправности типа 1 на входе «x_2» схемы, изображённой на рисунке 10,б работы [203] (см. [203, с. 66]), данная схема станет реализовывать ф. н. $g(x_1, x_2) = \overline{0}\&(x_1 \vee 0) = x_1$, а при инверсных неисправностях на выходе верхнего конъюнктора, правом входе и выходе дизъюнктора и входе «x_1» той же схемы она станет реализовывать ф. н. $g'(x_1, x_2) = \left(\overline{\overline{\overline{x}_1\&x_2}}\right) \& \left(\overline{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}\right) = (\overline{x}_1\&x_2)\&(x_1\&x_2) \equiv 0$. Пример построения минимальных, т. е. имеющих наименьшую возможную длину, ПДТ и ППТ для этой же схемы при ПКН на выходах элементов приведён в [192, с. 102–107].

Глава 1 диссертации целиком посвящена неисправностям видов 1.1–1.3; в главе 2 основное внимание уделяется неисправностям видов 3.1–3.9. Неисправности оставшихся видов (2.1–2.3 и 4.1–4.3) будут рассмотрены лишь в §8, содержащем вспомогательные утверждения, а также в лемме 10.2 и теоремах 10.4, 10.5 и 12.4, в доказательствах которых используется результат этой леммы.

Отметим следующие два обстоятельства. Во-первых, при подсчёте числа неисправностей, произошедших в КС, учитывается общее число неисправных контактов, а в СФЭ — общее число неисправных входов и выходов элементов и входов схем. Таким образом, например, инверсные неисправности на двух входах и на выходе какого-то ФЭ учитываются как три неисправности, а не как одна. Во-вторых, помимо неисправностей из приведённого выше списка, теоретически можно рассмотреть инверсные неисправности контактов, при которых приписанный каждому неисправному контакту символ б. п. или её отрицания меняется на противоположный (т. е. замыкающий контакт становится размыкающим контактом той же переменной и наоборот), а также комбинации константных (однотипных или произвольных) и инверсных неисправностей на входах и/или выходах ФЭ и/или на входах СФЭ, когда, скажем, на выходе одного элемента в схеме может возникнуть константная, а на выходе другого — инверсная неисправность. Однако такие неисправности в силу тех или иных причин традиционно почти не рассматривались авторами, занимавшимися математическими вопросами тестирования схем, и данная диссертация в этом смысле не является исключением.

Основные оцениваемые величины

Пусть зафиксированы значения $\mathrm{Т} \in \{\mathrm{ЕП}, k\text{-}\mathrm{П}, \mathrm{ПП}, \mathrm{ЕД}, k\text{-}\mathrm{Д}, \mathrm{ПД}\}$, $\mathrm{Н} \in \{0, 1, 01\}$ и множество T является тестом типа Т для некоторой контактной схемы S относительно неисправностей типа Н в этой схеме (например, обрывов контактов при $\mathrm{Н} = 0$). Введём следующие обозначения: $D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(T)$ — длина теста T; $D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(S) = \min D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(T)$, где минимум берётся по всем тестам T типа Т для схемы S; $D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(f) = \min D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(S)$, где $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф. и минимум берётся по всем реализующим её КС S, на которые дополнительно накладывается условие неизбыточности (относительно неисправностей типа Н) в случае $\mathrm{Т} \in \{\mathrm{ЕП}, \mathrm{ЕД}\}$, условие k-неизбыточности в случае $\mathrm{Т} \in \{k\text{-}\mathrm{П}, k\text{-}\mathrm{Д}\}$ и не накладывается никаких дополнительных условий в случае $\mathrm{Т} \in \{\mathrm{ПП}, \mathrm{ПД}\}$; $D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(n) = \max D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(f)$, где $n \in \mathbb{Z}^+$ и максимум берётся по всем б. ф. f от n переменных. Функция $D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины теста типа Т для контактных схем при неисправностях типа Н. Тесты для контактных схем при обрывах контактов ещё называют *тестами размыкания*, а при замыканиях контактов — *тестами замыкания* (см. [192, глава V, §3, 1-й абзац]). Скажем, функция $D^{0}_{\mathrm{ЕП}}(n)$ является функцией Шеннона длины ЕПТ размыкания для контактных схем.

Отметим, что значения введённых величин $D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(S)$, $D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(f)$ и $D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(n)$ всегда определены, т. е. минимумы и максимумы в их определениях берутся по непустым множествам, которое в определении величины $D^{\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}}(n)$ ещё и конечно. Действительно, конечность последнего множества следует из того, что всего существует 2^{2^n} б. ф. от n переменных. Множество тестов типа Т для конкретной КС всегда непусто, так как содержит тривиальный тест, состоящий из всех n-наборов, где n — число входных переменных схемы. Наконец, из утверждения 1.1 диссертации (см. с. 68) вытекает, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать КС, k-неизбыточной относительно обрывов и замыканий контактов, а значит, и относительно только их обрывов или только их замыканий, для любого $k \in \mathbb{N}$.

Пусть зафиксированы значения Т $\in$ {ЕП, k-П, ПП, ЕД, k-Д, ПД}, М $\in$ {I, O, IO, P, PI, PO, PIO}, Н $\in$ {0, 1, 01, Inv} (такие значения величин Т, М и Н будем называть *допустимыми*) и множество T является тестом типа Т для некоторой схемы из функциональных элементов S в некотором ф. п. базисе B относительно неисправностей типа Н, которые могут происходить в «местах» М этой схемы (например, ПКН на входах элементов при М = I, Н = 01). Введём следующие обозначения: $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(T)$ — длина теста T; $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(S) = \min D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(T)$, где минимум берётся по всем тестам T типа Т для схемы S; $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f) = \min D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(S)$, где $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф. и минимум берётся по всем реализующим её СФЭ S в базисе B, на которые дополнительно накладывается условие неизбыточности (относительно неисправностей типа Н в «местах» М, кроме входов схем) в случае Т $\in$ {ЕП, ЕД}, условие k-неизбыточности в случае Т $\in$ {k-П, k-Д} и не накладывается никаких дополнительных условий в случае Т $\in$ {ПП, ПД}; $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(n) = \max D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f)$, где $n \in \mathbb{Z}^+$ и максимум берётся по всем б. ф. f от n переменных, для которых определено значение $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f)$. Функция $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(n)$ называется *функцией Шеннона* длины теста типа Т для схем из функциональных элементов в базисе B при неисправностях типа Н в «местах» М. Скажем, функция $D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{k\text{-Д}\,(\mathrm{PO})}(n)$ является функцией Шеннона длины k-ДТ для СФЭ в базисе B при инверсных неисправностях на выходах элементов и на входах схем.

Отметим, что значение величины $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(S)$ определено для любых допустимых Т, М и Н, любого ф. п. базиса B и любой СФЭ S в этом базисе, поскольку схема S всегда допускает тривиальный тест типа Т, состоящий из всех n-наборов, где n — число входных переменных схемы. При Т $\in$ {ПП, ПД} значения величин $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f)$ и $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(n)$ определены для любых допустимых Т, М и Н, любого полного базиса B, любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ и любого $n \in \mathbb{Z}^+$ с учётом того, что любую б. ф. можно реализовать СФЭ в любом полном базисе (например, моделируя представление функции формулой в этом базисе). В то же время при Т $\in$ {ЕП, k-П, ЕД, k-Д} значения величин $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f)$ и $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(n)$ в отдельных случаях могут быть не определены, когда минимум и максимум в их определениях берутся по пустым множествам — см. утверждения 8.2 и 8.3 и абзац перед формулировкой утверждения 8.2 (с. 177).

В случае М = P, т. е. при неисправностях на входах схем, как было отмечено в предыдущем подразделе при разборе случая 2, множество ф. н. любой СФЭ при любых фиксированных допустимых Н и Т (последняя величина, помимо прочего, определяет ограничение на максимальное число неисправностей в схемах или отсутствие этого ограничения) зависит только от б. ф., реализуемой этой схемой при отсутствии в ней неисправностей, и не зависит от строения схемы и базиса, в котором она строится. Поэтому значения всех величин $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(S)$ при различных ф. п. базисах B и схемах S, реализующих одну и ту же б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, в этих базисах совпадают и верхний индекс B у величин $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (Р)}}(f)$ и $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (Р)}}(n)$ можно опускать.

Основное внимание в дальнейшем будет уделяться величинам $D^{\text{Н}}_{\text{Т}}(f)$, $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(f)$, $D^{\text{Н}}_{\text{Т}}(n)$ и $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(n)$ (при различных значениях входящих в них параметров). Первые две из них определяют минимально возможную длину теста для КС или СФЭ, реализующей функцию f; последние две — наименьшее число наборов, достаточное для тестирования (специальным образом построенных) КС или СФЭ, реализующих булевы функции от n переменных, или, иначе говоря, минимально возможную длину теста для КС или СФЭ, реализующей самую труднотестируемую б. ф. от n переменных. Нахождение точных значений этих величин или их нетривиальных верхних оценок с предъявлением схем, которые дают эти оценки, позволило бы строить легкотестируемые схемы, реализующие конкретные или произвольные б. ф.; нахождение нетривиальных нижних оценок этих величин указало бы на невозможность синтеза схем, реализующих некоторые б. ф. и допускающих тесты сравнительно малой длины. Отметим, что тривиальными нижней и верхней оценками любой из четырёх указанных величин, если её значение определено, можно считать соответственно 0 и 2^n (длину тривиального теста) в предположении, что f — б. ф. от n переменных.

В основной части диссертации встретится много результатов, каждый из которых содержит верхнюю (соответственно нижнюю) оценку величины вида $D^{\text{Н}}_{\text{Т}}(f)$, $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(f)$, $D^{\text{Н}}_{\text{Т}}(n)$ или $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(n)$ и доказывается путём рассмотрения неисправностей, задаваемых значениями М (для величины вида $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(f)$ или $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(n)$) и Н, построения (соответственно исследования произвольной) КС или СФЭ S, реализующей б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (для величины вида $D^{\text{Н}}_{\text{Т}}(n)$ или $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(n)$ — произвольную такую б. ф., для которой это значение определено), неизбыточной в случае $\text{Т} \in \{\text{ЕП}, \text{ЕД}\}$ и k-неизбыточной в случае $\text{Т} \in \{k\text{-П}, k\text{-Д}\}$, и доказательства того, что длина некоторого (соответственно любого) теста типа Т не превосходит (соответственно не меньше) искомой верхней (соответственно нижней) оценки. Без ограничения общности в качестве указанных КС S будем рассматривать только КС без петель (контактов с совпадающими концами) и изолированных вершин, отличных от полюсов, а в качестве указанных СФЭ S — только такие СФЭ, в которых выход каждого не выходного элемента соединён хотя бы с одним входом хотя бы одного элемента, т. е. нет «висячих» элементов. В противном случае все петли и изолированные вершины, не являющиеся полюсами, можно было бы удалить из КС S, а все «висячие» элементы — из СФЭ S и это никак не отразилось бы на функции, реализуемой схемой, множестве ф. н. данной схемы и её неизбыточности (k-неизбыточности), если исходная схема была неизбыточна (соответственно k-неизбыточна).

Схемы с фиктивными входными переменными

Две б. ф. называются *равными*, если одну из них можно получить из другой при помощи операций добавления и изъятия фиктивных, т. е. несущественных переменных (см., например, [260, с. 12]).

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — б. ф. и $r \in \mathbb{Z}^+$. Будем говорить, что КС или СФЭ *содержит r фиктивных входных переменных и реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$*, если данная схема содержит r входных переменных, отличных от переменных $x_1, \ldots, x_n$, и реализует б. ф., не зависящую существенно от этих r переменных и равную функции $f(\tilde{x}^n)$ [152, 162]. На рисунке 11.4 (с. 274 диссертации) приведён пример СФЭ, содержащей одну фиктивную входную переменную и реализующую б. ф. x_1x_2. Условимся считать, что наборы из любого теста для схемы, содержащей r фиктивных входных переменных и реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$, имеют длину $n+r$ (по общему числу переменных $x_1, \ldots, x_n$ и фиктивных входных переменных схемы). Такое предположение сделано в [217], где рассматриваются, в частности, КС, содержащие входные переменные $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и реализующие функцию $f(\tilde{x}^n)$, и тесты для этих схем, содержащие наборы длины $n+1$.

Обозначим через $D_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}\,(+r)}(f)$ (через $D_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}^{B;\,\mathrm{H}\,(+r)}(f)$) функцию, получающуюся заменой в определении функции $D_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}}(f)$ (соответственно $D_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}^{B;\,\mathrm{H}}(f)$) фразы «реализующим её КС S» на «содержащим не более r фиктивных входных переменных и реализующим её КС S» (соответственно фразы «реализующим её СФЭ S в базисе B» на «содержащим не более r фиктивных входных переменных и реализующим её СФЭ S в базисе B»). Очевидно, что всегда $D_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}\,(+r)}(f) \leqslant D_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}}(f)$ и $D_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}^{B;\,\mathrm{H}\,(+r)}(f) \leqslant D_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}^{B;\,\mathrm{H}}(f)$, если значение правой части последнего неравенства определено. Положим $D_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}\,(+r)}(n) = \max D_{\mathrm{T}}^{\mathrm{H}\,(+r)}(f)$, где максимум берётся по всем б. ф. f от n переменных, и $D_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}^{B;\,\mathrm{H}\,(+r)}(n) = \max D_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}^{B;\,\mathrm{H}\,(+r)}(f)$, где максимум берётся по всем б. ф. f от n переменных, для которых определено значение $D_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}^{B;\,\mathrm{H}\,(+r)}(f)$.

Тесты для схем, реализующих системы булевых функций

В этом и следующем подразделах введём некоторые понятия, которые будут использованы для описания известных результатов, примыкающих к теме диссертации, но не встретятся в главах 1 и 2.

Обобщим понятия проверяющего и диагностического тестов на случай, когда КС или СФЭ реализует не одну, а несколько б. ф.. Будем говорить, что КС (СФЭ) S *реализует* систему б. ф. $(f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_m(\tilde{x}^n))$, где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, если в этой КС содержится ровно $m+1$ полюсов и функции проводимости между каким-то одним из них и m оставшимися упорядоченными полюсами равны $f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_m(\tilde{x}^n)$ (соответственно если эта СФЭ имеет ровно m упорядоченных выходов и на этих выходах реализуются функции $f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_m(\tilde{x}^n)$). Назовём *проверяющим тестом* для схемы S такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что для любой системы б. ф. $(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_m(\tilde{x}^n))$, реализуемой схемой S в случае возникновения в ней каких-либо допустимых неисправностей (такие системы назовём *системами ф. н.* схемы S) и удовлетворяющей условию $(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_m(\tilde{x}^n)) \neq (f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_m(\tilde{x}^n))$ (т. е. $f_i \neq g_i$ хотя бы для одного $i \in \{1, \ldots, m\}$; такие системы ф. н. схемы S назовём *нетривиальными*), в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $(f_1(\tilde{\sigma}), \ldots, f_m(\tilde{\sigma})) \neq (g_1(\tilde{\sigma}), \ldots, g_m(\tilde{\sigma}))$. *Диагностическим тестом* для схемы S назовём такое множество T наборов значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, что T является проверяющим тестом и, кроме того, для любых двух различных систем ф. н. $(g_1(\tilde{x}^n), \ldots, g_m(\tilde{x}^n))$ и $(g'_1(\tilde{x}^n), \ldots, g'_m(\tilde{x}^n))$ схемы S в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором $(g_1(\tilde{\sigma}), \ldots, g_m(\tilde{\sigma})) \neq (g'_1(\tilde{\sigma}), \ldots, g'_m(\tilde{\sigma}))$. Число наборов в T называется *длиной* теста. Определения полного и единичного тестов, неизбыточной и k-неизбыточной схем, k-проверяющего и k-диагностического тестов дословно переносятся из подраздела «Тесты для схем» на рассматриваемый случай с тем лишь изменением, что вместо б. ф. и ф. н. в эти определения входят системы б. ф. и системы ф. н. соответственно.

Схемы, моделирующие булевы функции

Будем говорить, что КС или СФЭ *моделирует* б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ *с* n' *дополнительными входами*, где $n' \in \mathbb{N}$, если данная схема реализует б. ф. $\hat{f}(\tilde{x}^{n+n'})$, обладающую следующим свойством: существуют такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n'}$, что $f(\tilde{x}^n) = \hat{f}(x_1, \ldots, x_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n'})$. Будем также говорить, что СФЭ *моделирует* б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ *с* m' *дополнительными выходами*, где $m' \in \mathbb{N}$, если данная схема реализует систему из $m'+1$ б. ф., среди которых есть функция $f(\tilde{x}^n)$. Путём комбинации этих определений очевидным образом получается определение СФЭ, моделирующей б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ с n' дополнительными входами и m' дополнительными выходами; для краткости вместо этого будем говорить, что СФЭ (n', m')-*моделирует* б. ф. $f(\tilde{x}^n)$.

Степень разработанности темы исследования

Сложность схем

Говоря о результатах, примыкающих к теме диссертации, в первую очередь упомянем работы, касающиеся сложности контактных схем и схем из функциональных элементов, определяемой чаще всего как число контактов в КС и число функциональных элементов в СФЭ соответственно; именно такие меры сложности схем будут рассмотрены в данном и следующих подразделах. *Сложностью* (*реализации*) б. ф. в некотором классе схем называется минимальная сложность схемы из этого класса, реализующей данную функцию. К. Э. Шеннон в работе [317] ввёл величину, равную наибольшей возможной сложности б. ф. от n переменных в классе контактных схем — эта величина впоследствии была названа *функцией Шеннона*, так же как и аналогичная величина для класса СФЭ или произвольного подкласса класса всех КС или СФЭ — и установил, что функция Шеннона сложности КС по порядку равна $\frac{2^n}{n}$, причём такой же порядок сложности в классе КС имеют почти все б. ф. от n переменных. Подобный результат для класса СФЭ в стандартном базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ получил Д. Э. Маллер [294]. Большой вклад в теорию сложности схем был внесён О. Б. Лупановым, который в [100] нашёл асимптотику $\frac{2^n}{n}$ функции Шеннона сложности КС, а в [101] — асимптотику $\frac{1}{m(B)-1} \cdot \frac{2^n}{n}$ функции Шеннона сложности СФЭ в произвольном ф. п. конечном базисе B. Он же в [102] предложил новый метод синтеза СФЭ — принцип локального кодирования, с помощью которого удалось получить ряд асимптотик сложностей самых сложных (с точки зрения реализации СФЭ в произвольном полном конечном базисе) б. ф. из некоторых классов: в частности, из класса функций $f(\tilde{x}^n)$ с заданным числом единиц, т. е. наборов, на которых функции принимают значение 1 (при некоторых ограничениях сверху и снизу на это число наборов), а также из класса всех симметрических б. ф. от n переменных. Многие результаты Лупанова можно найти в его книге [105]. А. Б. Угольников в [239, 240] для каждого замкнутого класса б. ф. и СФЭ в произвольном полном конечном базисе нашёл асимптотику сложности самой сложной б. ф. от n переменных из этого класса или доказал, что указанная сложность имеет не более чем линейный по n порядок роста. С. А. Ложкин в [98], в частности, нашёл асимптотические оценки высокой степени точности — с явным указанием второго слагаемого в асимптотическом разложении — функций Шеннона сложности КС и СФЭ. Н. П. Редькин в [201] рассматривал класс б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ с малым числом единиц и установил асимптотику сложности самой сложной функции из этого класса при реализации её СФЭ в базисе, состоящем из всех б. ф. от двух переменных, кроме функций $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$.

В работе [103] О. Б. Лупанов нашёл асимптотику функции Шеннона сложности СФЭ в бесконечном базисе, состоящем из всевозможных пороговых функций. В дальнейшем изучением сложности СФЭ в различных бесконечных базисах занимался О. М. Касим-Заде; приведём здесь его работы [78]–[81], в которых были получены результаты для произвольных бесконечных базисов. В частности, оказалось, что максимально возможный порядок роста функции Шеннона сложности СФЭ в бесконечном базисе равен $2^{\frac{n}{2}}$.

Также опишем некоторые результаты, касающиеся сложности реализации конкретных б. ф. в классах КС и СФЭ. К. Кардо [269] установил, что сложность функции $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, $n \geqslant 2$, в классе КС равна $4n-4$. З. Е. Королёва [90] доказала минимальность (в смысле сложности) КС, реализующей оператор сравнения двух n-разрядных двоичных чисел, и многополюсной КС, реализующей оператор прибавления единицы к n-разрядному двоичному числу. Н. П. Редькин в [207, 208] нашёл точные значения сложности соответственно функции $f(x_1,\ldots,x_n)=\bigvee\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$ (где $n\geqslant 2$) и характеристических функций сфер в классе КС. Е. П. Сопруненко [232] доказала, что сложность функций $x_1\&\ldots\&x_n$ и $x_1\vee\ldots\vee x_n$ в классе СФЭ в базисе $\{x\,|\,y\}$ равна $2(n-1)$ и $3(n-1)$ соответственно. Н. П. Редькину также удалось в [182] найти точные значения сложности функций $x_1\oplus\ldots\oplus x_n$, $x_1\oplus\ldots\oplus x_n\oplus 1$, операторов сравнения и совпадения двух n-разрядных двоичных чисел в классе СФЭ в базисе $\{\&,\vee,\neg\}$: оказалось, что эти значения равны $4n-4$, $4n-4$, $5n-3$ и $5n-1$ соответственно (первые два — при $n\geqslant 2$). Е. С. Горелик [68] нашёл сложность произвольной элементарной конъюнкции или элементарной дизъюнкции в классе СФЭ в базисе $\{x\,|\,y\}$, а Г. А. Кочергиной [91] удалось сделать то же самое для схем в некоторых других полных базисах.

Надёжность схем

Пусть S — КС или СФЭ, в которой могут происходить неисправности контактов или функциональных элементов, имеющие заранее оговоренные вид и вероятности возникновения и независимые друг от друга, и пусть данная схема при отсутствии в ней неисправностей реализует б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. *Ненадёжностью* схемы S *на входном наборе* $\tilde{\sigma}$ называется вероятность того, что схема при подаче на её входы n-набора $\tilde{\sigma}$ выдаёт «неправильное» значение $\overline{f(\tilde{\sigma})}$. *Ненадёжностью* схемы S называется максимальная ненадёжность этой схемы на входном наборе, где максимум берётся по всем n-наборам. Под *надёжностью* схемы S понимается результат вычитания её ненадёжности из единицы.

Э. Ф. Мур и К. Э. Шеннон [293] показали, что любую б. ф. можно реализовать сколь угодно надёжной КС из ненадёжных контактов, подверженных обрывам и замыканиям (см. также [192, глава II, §4]) и получили верхние и нижние оценки сложности таких схем, состоящих только из замыкающих контактов одной и той же переменной; эти оценки при разумных требованиях, предъявляемых к надёжности каждого контакта и надёжности итоговой КС, несильно отличаются друг от друга. В работе У. Э. Дикинсона и Р. М. Уокера [274] сравниваются надёжности одного контакта и контактной схемы, построенной по методу из [293], в предположении, что вероятности перехода каждого контакта в любое из двух неисправных состояний (обрыв или замыкание) зависят от времени; в частности, рассмотрен случай, когда эти вероятности подчиняются экспоненциальному закону. Н. В. Петри [137] доказал, что функция Шеннона сложности КС, имеющих ненадёжность не более $\delta>0$ и состоящих из ненадёжных контактов, вероятность как обрыва, так и замыкания каждого из которых равна $\varepsilon\in(0;\frac{1}{4})$, имеет порядок $n\cdot\frac{\log^2\delta}{\log^2\varepsilon}$ при $n\to\infty$ и достаточно малом δ.

Намного больше работ посвящено проблеме построения надёжных схем из ненадёжных функциональных элементов. Всюду далее в данном подразделе, если явно не оговорено иное, будем считать, что каждый ненадёжный ФЭ подвержен ИН на выходе с вероятностью $\varepsilon > 0$ (и не подвержен никаким другим неисправностям). Один из результатов работы Дж. фон Неймана [296] можно интерпретировать следующим образом. Пусть B — произвольный ф. п. базис, $\varepsilon < \frac{1}{6}$ и $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф., реализуемая СФЭ в базисе B с ненадёжностью менее $\frac{1}{2}$. Тогда функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать СФЭ в базисе $B \cup \{xy \vee xz \vee yz\}$, ненадёжность которой сколь угодно близка к числу

$$\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1-6\varepsilon}{1-2\varepsilon}}\right) = \varepsilon + 3\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \ \ (\varepsilon \to 0),$$

в частности, асимптотически равна ε (см. также [192, глава II, §2]). В работах С. Г. Гиндикина и А. А. Мучника [65] и В. В. Тарасова [233] для произвольного базиса, состоящего из надёжной и ненадёжной частей, найдены необходимые и достаточные условия возможности реализации произвольной б. ф. сколь угодно надёжной СФЭ в этом базисе. Также в работе [65] доказан важный факт, сформулированный (в несколько других терминах) ещё в [296]: ненадёжность СФЭ не может быть меньше ненадёжности ε её выходного элемента (т. е. вероятности перехода этого элемента в неисправное состояние) в случае выполнения условия $\varepsilon < \frac{1}{2}$. В. В. Тарасов в [234] нашёл критерий того, что любую б. ф. можно реализовать сколь угодно надёжной СФЭ в базисе, состоящей из одной б. ф. от двух переменных; отметим, что в данной работе, по-видимому, впервые среди работ по надёжности СФЭ рассматривались неисправности на выходах элементов, отличные от инверсных.

Р. Л. Добрушин и С. И. Ортюков в [73] доказали, что для любого $\varepsilon < 0,07$ любую б. ф. f можно реализовать СФЭ в базисе, состоящем из всех б. ф. от не более чем трёх переменных, а также СФЭ в базисе $\{x \,|\, y\}$, ненадёжность которых не превосходит $\varepsilon + 3\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$, а сложность каждой из них равна $O(L_f \ln L_f)$, где L_f — сложность функции f в классе СФЭ в рассматриваемом базисе. Они же в [72] установили, что для некоторого класса б. ф., содержащего все линейные функции (см. замечание на с. 58 работы [73] непосредственно после соотношения (1.5)), сложность реализации любой функции f из этого класса схемой из функциональных элементов в произвольном полном конечном базисе, ненадёжность которой не превосходит p, при $p \in (0, \frac{1}{3})$ и $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ по порядку не меньше $L_f \ln L_f$. Н. Пиппенджер, Дж. Д. Стамулис и Дж. Н. Цициклис [302] получили тот же результат, но для класса линейных б. ф. и $p \in (0, \frac{1}{2})$, при этом указали на две ошибки в рассуждениях из [72]. Впоследствии А. Гал [277, следствие 2.5] (см. также [278]) и, независимо, Р. Райшук и Б. Шмельц [311, следствие 1] распространили результат работы [302] на, в частности, произвольный класс б. ф., любая функция из которого принимает на каком-то наборе значение, отличное от её значения на всех соседних с ним наборах. В то же время Д. Улиг в [322] нашёл последовательность б. ф. f_n, $n = 1, 2, \ldots$, существенно зависящих от n переменных, которые для любого $c > 0$ можно реализовать СФЭ сложности не более $(1+c)n$ в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, причём ненадёжность этих схем не превосходит $K(c)\varepsilon$, где $K(c)$ — некоторая положительная функция, а элементы схем подвержены произвольным неисправностям (т. е. могут реализовывать произвольные б. ф. от своих входов) с вероятностями повреждения ε.

С. И. Ортюков в [135, 136] установил, что при некоторых ограничениях сверху на характер стремления числа ε к нулю (более слабых в [136]) асимптотика функции Шеннона сложности СФЭ в произвольном полном конечном базисе B, ненадёжность которых асимптотически не превышает ненадёжности одного ФЭ, умноженной на сложность функции $xy \vee xz \vee yz$ в классе схем в базисе B, совпадает с асимптотикой обычной функции Шеннона сложности СФЭ в этом базисе; позднее Д. Улиг в [321] получил тот же результат, но при более слабых условиях, а именно при произвольном стремлении ε к нулю. С. В. Яблонский в [259] доказал, что любую б. ф. от n переменных можно реализовать сколь угодно надёжной СФЭ в базисе $\{x\&y, x\vee y, \overline{x}, xy\vee xz\vee yz\}$, в которой все элементы, реализующие функцию $xy\vee xz\vee yz$, надёжны, а все остальные элементы подвержены произвольным неисправностям с вероятностями повреждения, не превосходящими некоторой константы из интервала $(0, \frac{1}{2})$, причём сложность указанной схемы асимптотически не превосходит обычной функции Шеннона сложности СФЭ в том же базисе, равной $\frac{1}{2} \cdot \frac{2^n}{n}(1 + o(1))$. Н. Пиппенджер в [301] установил, что при рассмотрении произвольных неисправностей ФЭ, при которых вероятность ошибки каждого элемента на любом входном наборе не превосходит $\frac{1}{192}$, любую б. ф. от n переменных можно реализовать СФЭ в произвольном полном базисе, ненадёжность которой не больше $\frac{1}{12}$, а сложность равна $O(\frac{2^n}{n})$. С использованием метода синтеза схем из работы [301] в [192, с. 47, теорема 1] доказано, что при $\varepsilon \leqslant \frac{1}{200}$ любую б. ф. от n переменных можно реализовать СФЭ в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, ненадёжность которой (при ИН на выходах элементов) не превосходит 18ε, а сложность асимптотически не больше $170 \cdot \frac{2^n}{n}$.

Д. Клейтман, Т. Лейтон и Ю. Ма [290] получили верхние и нижние оценки сложности булевых функций в классе СФЭ в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, обладающих высокой надёжностью относительно таких неисправностей элементов, при которых один из входов каждого неисправного элемента замыкается на его выход (т. е. функция, приписанная этому элементу, меняется на одну из своих переменных). В работе М. Р. Чоудхури и К. Моханрама [271] рассмотрены различные подходы к анализу надёжности произвольных СФЭ и произведено сравнение этих подходов на основе их применения к некоторым «модельным» схемам.

Пусть зафиксированы полный базис, в которых строятся СФЭ, и допустимые неисправности элементов. Среди всех СФЭ, реализующих некоторую б. ф., *асимптотически оптимальной по надёжности* называется такая СФЭ, ненадёжность которой асимптотически минимальна (в указанном классе схем) при стремлении вероятности ошибки каждого элемента к нулю. Задачи поиска асимптотически оптимальных по надёжности СФЭ, а также нахождения верхних и нижних оценок ненадёжности таких схем были решены в работе Дж. фон Неймана [296] 1956 г. в некотором частном случае, описанном выше при первом упоминании данной работы. В последнее время, начиная с 1991 г., указанные задачи активно исследуются в работах М. А. Алёхиной и её учеников. При рассмотрении ИН на выходах элементов [1, 14], [24]–[27], [33], [56]–[63], [264], ИН на входах элементов [35], [247]–[250], ОКН (типа 0 и/или типа 1) на выходах элементов [2]–[5], [9, 10, 12, 13, 17, 18, 22, 23, 28, 30, 31], ОКН на входах элементов [6]–[9], [11, 13, 15, 16], ПКН на входах элементов [32], ПКН на входах и выходах элементов [19], слипаний входов элементов [20, 34], произвольных неисправностей элементов [21, 29] были получены различные верхние и/или нижние оценки ненадёжности асимптотически оптимальных по надёжности СФЭ; при этом в качестве базисов рассматривались либо множества, состоящие из б. ф. от не более чем двух или трёх переменных, либо произвольные множества б. ф., содержащие функции некоторых специальных видов, либо произвольные множества б. ф. (во всех этих случаях предполагалась функциональная полнота базиса). В каждой из указанных в предыдущем предложении работ, кроме [1, 12, 18, 23, 29] (а также [33] — если исключить из рассмотрения тривиальный случай, когда надёжная часть базиса полна), хотя бы для одной комбинации базиса и допустимых неисправностей элементов для почти всех б. ф. от n переменных найдены реализующие их асимптотически оптимальные по надёжности СФЭ и асимптотика ненадёжности этих схем. В некоторых работах [3, 9, 11, 13, 14, 56, 250, 264] показано, что существуют такие схемы, обладающие ещё и невысокой сложностью, которая по порядку совпадает с верхней оценкой функции Шеннона сложности обычных СФЭ в рассматриваемом базисе.

Самокорректирующиеся схемы

КС или СФЭ называется *самокорректирующейся* (относительно неисправностей заданного вида), если при наличии любых допустимых неисправностей в схеме она реализует ту же б. ф., что и в отсутствие неисправностей. С точки зрения тестов это означает, что схема допускает диагностический (и проверяющий) тест длины 0 и при этом является избыточной, если в ней возможна хотя бы одна неисправность. Произвольную КС, самокорректирующуюся относительно обрывов не более a контактов и замыканий не более b контактов, где

$a, b \in \mathbb{Z}^+$, для краткости назовём (a, b)-*самокорректирующейся*. Любую КС можно тривиальным образом преобразовать в (a, b)-самокорректирующуюся КС, реализующую ту же б. ф., что и исходная схема, путём замены каждого контакта x_i^σ на КС сложности $(a+1)(b+1)$, представляющую собой параллельное соединение $a+1$ несамопересекающихся цепей, каждая из которых состоит из $b+1$ контактов x_i^σ. Таким образом, сложность реализации произвольной б. ф. в классе (a, b)-самокорректирующихся КС не более чем в $(a+1)(b+1)$ раз превышает сложность реализации той же функции в классе КС.

Для удобства функцию Шеннона сложности (a, b)-самокорректирующихся КС будем обозначать через $L_{a,b}(n)$. Ю. Г. Потапов и С. В. Яблонский [180] установили асимптотическое равенство $L_{0,1}(n) \sim \frac{2^n}{n}$, а Х. А. Мадатян в [107] — равенство $L_{1,0}(n) \sim \frac{2^n}{n}$ (здесь и всюду далее во всех асимптотических соотношениях предполагается $n \to \infty$). Э. И. Нечипорук в [117] установил, что $L_{0,b}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$ при $b = o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$, в [118] доказал соотношение $L_{a,0}(n) \sim \frac{2^n}{n}$ при $a = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$, а в [119, 120] — соотношения $L_{a,b}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$ при $a = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$ и $b = o\left(n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right)$, где ε — сколь угодно малая положительная константа, а также $L_{a,3}(n) \sim \frac{2^n}{n}$ при $a = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$. В дальнейшем оценка $L_{a,b}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$ была распространена Д. Улигом в [243] на случай $a = 2^{o\left(\frac{n}{\log n}\right)}$ и $b = 2^{o\left(\frac{n}{\log n}\right)}$, а оценка $L_{0,b}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$ была улучшена Н. П. Редькиным, который сперва в [183] доказал, что $L_{0,b}(n) \sim \frac{2^n}{n}$ при $b = o(\frac{n}{\log n})$, а затем в [184] получил ещё более сильный результат: $L_{a,b}(n) \sim \frac{2^n}{n}$ при $a = o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$ и $b = o(\frac{n}{\log n})$ (последний результат также улучшает соотношение $L_{a,b}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$ из [119, 120]). Но и этот результат впоследствии был усилен А. Е. Андреевым, который в [37, теорема 8] установил, что функция Шеннона сложности КС, самокорректирующихся относительно k неисправностей, где $k = 2^{o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)}$ и каждая неисправность заключается в замене произвольного контакта на произвольную КС (частными случаями таких неисправностей являются обрывы и замыкания контактов), асимптотически равна $\frac{2^n}{n}$ (для получения этого результата в формулировке указанной теоремы надо взять $a = k$, $r = 2^n$). Также Андреев в [36] описал ряд классов б. ф., для каждого из которых сложность самой сложной функции от n переменных из данного класса при реализации её КС или СФЭ в произвольном полном базисе (надёжная и ненадёжная части которого совпадают), самокорректирующимися относительно небольшого числа «локальных» неисправностей (в случае контактных схем заключающихся в замене произвольного контакта на произвольную КС), асимптотически равна сложности самой сложной функции из рассматриваемого класса при реализации её обычными КС или СФЭ. В некотором смысле обратный эффект установил Н. П. Редькин в [204] для класса б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ с малым числом единиц: оказалось, что сложность самой сложной функции из этого класса при реализации её (a,b)-самокорректирующимися КС асимптотически в $(a+1)(b+1)$ раз больше аналогичной величины, определяемой для обычных КС. В. М. Рабинович [181] доказал, что сложность функции $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, $n \geqslant 2$, равна $4n$ в классе $(1,0)$-самокорректирующихся КС и равна $8n$ в классе $(1,1)$-самокорректирующихся КС.

Заметим, что никакая СФЭ, содержащая выходной элемент и реализующая неконстантную б. ф., не может быть самокорректирующейся относительно константных (однотипных или произвольных) либо инверсных неисправностей на выходах $k \geqslant 1$ элементов, поскольку константная или инверсная неисправность на выходе её выходного элемента приводит к нетривиальной ф. н.. Поэтому при изучении самокорректирующихся СФЭ обычно предполагают, что некоторые ФЭ являются надёжными, т. е. всегда исправными, но вместе с тем в ряде случаев имеют больший вес, чем ненадёжные элементы, вес которых предполагается равным единице, и тогда под сложностью СФЭ понимается сумма весов её элементов. Любую СФЭ, самокорректирующуюся относительно не более k произвольных неисправностей элементов, где $k \in \mathbb{N}$, для краткости назовём *k-самокорректирующейся.*

Пусть B — произвольный базис, состоящий из надёжной и ненадёжной частей. Г. И. Кириенко в [82, теорема 1] для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ нашёл необходимые и достаточные условия возможности реализации произвольной б. ф. k-самокорректирующейся СФЭ в базисе B. Он же в предположениях наличия такой возможности и конечности базиса получил асимптотику $\frac{1}{m(B)-1} \cdot \frac{2^n}{n}$ функции Шеннона сложности k-самокорректирующихся СФЭ в базисе B как при фиксированном k [82, теорема 2], так и при растущем k, удовлетворяющем условию $k = 2^{o(n)}$ [83]; при этом доля надёжных элементов в схемах мала, однако их число в обоих случаях растёт с ростом n. Д. Улиг в [242] доказал, что в случае функциональной полноты базиса B при $k = 2^{o\left(\frac{n}{\log n}\right)}$ любую б. ф. можно реализовать k-самокорректирующейся СФЭ сложности асимптотически не больше $\frac{1}{m(B)-1} \cdot \frac{2^n}{n}$ в этом базисе, число надёжных элементов в которой зависит только от k и при этом линейно по k, если надёжная часть базиса B полна.

В рамках данного абзаца считаем, что надёжная и ненадёжная части любого рассматриваемого базиса совпадают. Н. И. Турдалиев [237, 238] для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ получил нетривиальные асимптотические верхние оценки сложности реализации функции $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ в классе k-самокорректирующихся СФЭ в некоторых полных базисах, включая базисы $\{\&, \vee, \neg\}$, $\{\&, \neg\}$ и $\{\vee, \neg\}$. Н. П. Редькин в [197] для $k = 1$, а в [196] для произвольного $k \in \mathbb{N}$ нашёл асимптотики сложности функции $\bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$ в классе СФЭ в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$, а также в неполном базисе $\{\&, \vee\}$, самокорректирующихся относительно ОКН типа 0 на выходах не более k элементов, при некоторых условиях на веса надёжных элементов.

А. В. Чашкин [245] установил, что для любых $a > 0$, $c > 3$ любую б. ф. от n переменных, обращающуюся в единицу не более чем на n^c наборах, можно реализовать k-самокорректирующейся СФЭ в базисе, состоящем из всех б. ф. от двух переменных, содержащей не более $b\left\lfloor\frac{n}{\log n}\right\rfloor$ надёжных и не более $d\left\lfloor\frac{n^{c+1}}{\log n}\right\rfloor$ ненадёжных элементов, где $k = a\left\lfloor\frac{n}{\log n}\right\rfloor$, а числа b и d не зависят от n.

В. М. Краснов [93] рассматривал СФЭ в базисе $\{\&, \neg\}$, в которых все инверторы надёжны, а конъюнкторы могут быть как надёжными, так и ненадёжными, причём вес каждого надёжного конъюнктора равен p, а вес любого другого элемента — единице, и для произвольного $k \in \mathbb{N}$ при условии $p > k+2$ нашёл асимптотику $(k+3)n$ сложности функции $\bigvee\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$ в классе указанных схем, самокорректирующихся относительно ОКН типа δ, $\delta \in \{0, 1\}$, на выходах не более k элементов (конъюнкторов).

Тесты для входов схем

Обзор известных результатов, касающихся проверяющих или диагностических тестов для входов схем, разобьём на шесть подразделов, соответствующих рассматривавшимся в работах неисправностям на входах схем. Для удобства формулировки некоторых результатов введём величины $D_{\text{Т (Р)}}(f)$ и $D_{\text{Т (Р)}}(n)$, определяемые так же, как величины соответственно $D^{\text{Н}}_{\text{Т (Р)}}(f)$ и $D^{\text{Н}}_{\text{Т (Р)}}(n)$ (см. с. 20–21), но при рассмотрении неисправностей, не обязательно являющихся константными или инверсными; в этом случае вид неисправностей на входах схем будет указываться явно при формулировании соответствующих результатов.

Однотипные константные неисправности. Г. Р. Погосян в [139, 140] доказал, что $D^p_{\text{ПП (Р)}}(n) = n$ для любых $n \geqslant 1$, $p \in \{0, 1\}$.

Произвольные константные неисправности. К. Д. Вайсс [324] установил равенство $D^{01}_{\text{ПП (Р)}}(n) = n + 1$ при $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и неравенство $D^{01}_{\text{ПП (Р)}}(n) \leqslant 2n - 4$ при $n \geqslant 6$. В. Н. Носков в [122, 123] усилил второй из этих результатов при $n \geqslant 136$, получив равенство

$$D^{01}_{\text{ПП (Р)}}(n) = \begin{cases} 2n - 2t - 1, & \text{если } n = 2^t + t + 1, \\ 2n - 2t - 2, & \text{если } 2^t + t + 1 < n \leqslant 2^{t+1} + t + 1, \end{cases}$$

где t — целое число. Г. Р. Погосян в [139, 140] (см. также [94, глава 1]) распространил последнее равенство на случай $n \geqslant 1$ и доказал, что $D^{01}_{k\text{-П (Р)}}(n) = D^{01}_{\text{ПП (Р)}}(n)$ для любых $n \geqslant 1$, $k \in \{1, \dots, n\}$. В работе [122] получены также следующие результаты: для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{01}_{\text{ЕП (Р)}}(f) = 3$ и $\frac{n}{2} \lesssim D^{01}_{\text{ПП (Р)}}(f) \lesssim \frac{2n}{3}$. В. Н. Носков в [121] установил, что $D^{01}_{k\text{-Д (Р)}}(n) = \left(\frac{n}{k}\right)^{k(1+o(1))}$ при $n \to \infty$ и $\frac{k}{n} \to 0$, а также что $2^{\frac{n}{2}(1-o(1))} < D^{01}_{\text{ПД (Р)}}(n) \leqslant$ $\leqslant 4(n+1)^3 \cdot 2^{0{,}773n}$ (в левом неравенстве предполагается $n \to \infty$). Он же в [124] при $n \geqslant 1$

доказал равенство $D^{01}_{\text{ЕД (Р)}}(n) = 2n$, а для почти всех б. ф. f от n переменных — соотношение $\log n < D^{01}_{\text{ЕД (Р)}}(f) < c\log n$, где $c < 17$. М. Карповский в [288, теорема 2] получил оценки $2\lfloor\log n\rfloor \leqslant \min|T(n)| \leqslant 2\left\lfloor\log n\left(1+\frac{1}{\log\log n}\right)\right\rfloor$, где минимум берётся по всем множествам $T(n)$, каждое из которых для почти всех б. ф. от n переменных является ЕПТ для любых реализующих эти функции схем относительно ПКН на входах схем. М. Карповский и Л. Левитин в [289, следствие 4.2] установили, что для любых $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant \frac{1}{4}n - 1$, существуют множества $T_1(n,k)$ и $T_2(n,k)$, удовлетворяющие условиям $|T_1(n,k)| \lesssim 2\left\lceil\log\sum_{i=1}^{k} 2^i C_n^i\right\rceil$, $|T_2(n,k)| \lesssim 2\left\lceil 2\log\sum_{i=0}^{k} 2^i C_n^i\right\rceil$ и такие, что для почти всех б. ф. от n переменных множество $T_1(n,k)$ является k-ПТ, а множество $T_2(n,k)$ является k-ДТ для любых реализующих эти функции схем относительно ПКН на входах схем.

О. А. Долотова в [74]–[76] (см. также [94, главы 5–7]) для произвольного замкнутого класса б. ф. (класса Поста) $\mathcal{K}$, содержащего б. ф., существенно зависящие от сколь угодно большого числа переменных, при $n \in \mathbb{N}$ нашла точное значение или асимптотику величины $\max D^{01}_{\text{ЕП (Р)}}(f)$, где максимум берётся по всем б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящим от n переменных, из $\mathcal{K}$, а также значения, которые может принимать величина $D^{01}_{\text{ЕП (Р)}}(f)$, где f — произвольная или почти любая функция от n переменных из $\mathcal{K}$, существенно зависящая от всех своих переменных. В. А. Варданян в [323] доказал, что $\max D^{01}_{\text{ЕП (Р)}}(f) = 2n - 2\log n + O(\log\log n)$, $\max D^{01}_{\text{ПП (Р)}}(f) = 2n - 2\log n + O(\log\log n)$, где оба максимума берутся по всем монотонным б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, и $D^{01}_{\text{ПП (Р)}}(f) \lesssim \frac{n}{2}$ для почти всех монотонных б. ф. f от n переменных. Д. С. Романов в [216] для функции $l_n(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, $n \geqslant 2$, получил следующие результаты: $D^{01}_{\text{ПП (Р)}}(l_n) = n+1$, $\log\left(\sum_{i=1}^{\lfloor k/2\rfloor} C_n^i\right) + 1 \leqslant D^{01}_{k\text{-П (Р)}}(l_n) \leqslant \log\left(\sum_{i=0}^{2\lfloor k/2\rfloor-1} C_{n+1}^i\right) + 4$ при $k \in \{2,\ldots,n\}$, $D_{\text{ПП (Р)}}(l_n) = \lceil\log(n+1)\rceil + 1$ при рассмотрении локальных ПКН на входах схем, $D_{\text{ПП (Р)}}(l_n) = n$ $(D_{\text{ПП (Р)}}(l_n) = 2)$ при рассмотрении чётного (соответственно нечётного) числа ПКН на входах схем. Г. В. Антюфеев и Д. С. Романов в [40] доказали равенство $D_{k\text{-Д (Р)}}(n) = 2^{k(1+o(1))}$ при $n \to \infty$, $k = k(n) \to \infty$, $1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}$, $\log n = o(k)$ и рассмотрении локальных k-кратных ПКН на входах схем, а также асимптотическое неравенство $D^{01}_{\text{ПД (Р)}}(n) \gtrsim 2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}$, улучшающее неравенство $D^{01}_{\text{ПД (Р)}}(n) > 2^{\frac{n}{2}(1-o(1))}$ из [121].

Инверсные неисправности. Г. Р. Погосян в [139, 140] (см. также [94, глава 3]) при $n \geqslant 1$ установил равенство $D^{\text{Inv}}_{\text{ЕП (Р)}}(n) = n - t$, где $t \in \mathbb{Z}^+$ определяется из условия $2^{t-1} + t \leqslant n \leqslant 2^t + t$, а также соотношение $2\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor + 1 \leqslant D^{\text{Inv}}_{\text{ПП (Р)}}(n) \leqslant n$. С. Р. Беджанова в [41, теоремы 1–4] для функции $d_n(\tilde{x}^n) = x_1 \vee \ldots \vee x_n$, $n \geqslant 2$, доказала равенства $D^{\text{Inv}}_{\text{ЕП (Р)}}(d_n) =$

$= D^{\mathrm{Inv}}_{\text{ПП (Р)}}(d_n) = 1$, $D^{\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (Р)}}(d_n) = n$ и $D^{\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (Р)}}(d_n) = 2^n - 1$ (из последнего равенства следует, что $D^{\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (Р)}}(n) \in \{2^n - 1, 2^n\}$ при $n \geqslant 2$).

Слипания входов схем. Под *слипанием* входов схемы понимается подача на некоторые входы схемы, число которых не меньше двух, вместо б. п., подаваемых на эти входы в отсутствие неисправностей, одной и той же б. ф. от этих переменных. Слипания называется *множественными*, если на число групп входов схемы, в каждой из которых все входы подвергаются слипанию, не накладывается нетривиальных ограничений. Г. Р. Погосян в [139, 140] (см. также [94, глава 2]) установил равенства $D_{k\text{-П (Р)}}(n) = D_{\text{ПП (Р)}}(n) = n - 1$ при $n \geqslant 2$, $k \in \{2, \ldots, n\}$ в случае множественных дизъюнктивных слипаний входов схем, Н. А. Соловьёв [231, раздел 4.3] — равенство $D_{\text{ПП (Р)}}(n) = n - 1$ при $n \geqslant 2$ в случае множественных линейных слипаний входов схем, при каждом из которых слипанию подвергаются ровно два входа, а А. А. Икрамов в [77, теорема 4] — равенство $D_{\text{ПП (Р)}}(n) = 2n - 2$ при $n \geqslant 3$ в случае множественных конъюнктивных и дизъюнктивных слипаний входов схем. М. Карповский и Л. Левитин в [289, теорема 4.4] при рассмотрении конъюнктивных либо дизъюнктивных слипаний входов схем получили некоторые асимптотические верхние оценки минимально возможных мощностей множеств, являющихся для почти всех б. ф. от n переменных k-ПТ или k-ДТ для любых реализующих эти функции схем.

При рассмотрении локальных k-кратных слипаний входов схем, где $k \in \{2, \ldots, n\}$, И. А. Кузнецов и Д. С. Романов в [95], в частности, доказали, что $D_{k\text{-П (Р)}}(n) \sim 2^{k-1}(n-k)$ при $n \to \infty$, $n - k \to \infty$ и $k \to \infty$, а Д. С. Романов в [211] — что $D_{k\text{-Д (Р)}}(n) \sim 2^k(n-k)$ при $n \to \infty$ и $k \to \infty$. Е. В. Морозов в [110] установил, что величина $D_{\text{ПД (Р)}}(n)$ по порядку не меньше $\frac{2^{\frac{n}{2}}}{\sqrt[4]{n}}$ в случае возможного возникновения для каждого $k \in \{2, \ldots, n\}$ хотя бы какого-то слипания произвольных k входов схем, характеризующегося одной и той же б. ф. от k переменных (не зависящей от множества неисправных k входов). В этой же работе установлено, что величина $D_{\text{ПД (Р)}}(n)$ по порядку не меньше $\frac{2^n}{\sqrt{n}}$ (по порядку не больше $n^4 \cdot 2^{0{,}773n}$) в случае дизъюнктивных (соответственно линейных) слипаний входов схем. Е. В. Морозов при рассмотрении множественных линейных слипаний входов схем в [111] доказал соотношения $D_{\text{ПП (Р)}}(n) \sim \frac{n^2}{2}$ и $D_{\text{ПД (Р)}}(n) = 2^n$, а в [114, теорема 1] — неравенство $D_{\text{ПП (Р)}}(f) \leqslant (1+\delta)n \log n$ для почти всех б. ф. f от n переменных, где δ — сколь угодно малое положительное число. Он же в [112] установил, что $2n \leqslant D_{\text{ПП (Р)}}(n) \leqslant \frac{n^2}{2} + O(n \log n)$ и $D_{\text{ПД (Р)}}(n) = 2^n$ при рассмотрении множественных монотонных симметрических слипаний входов схем. Е. В. Морозов и Д. С. Романов в [115, теорема 2] нашли асимптотику $2n$ величины $D_{\text{ПП (Р)}}(n)$ в случае множественных линейных локальных k-кратных слипаний входов схем при выполнении условий $n \to \infty$, $k \to \infty$ и $k = o(n)$.

Перестановки и сдвиги переменных, подаваемых на входы схем. В случае транспозиций переменных (подаваемых на входы схем; неисправными при этом оказываются два входа) Н. И. Глазунов и А. П. Горяшко [67] доказали, что величина $D_{2\text{-П}\,(\text{Р})}(n)$ по порядку не меньше $n\log n$, а Д. С. Романов в [210] получил оценки $D_{2\text{-П}\,(\text{Р})}(n) \leqslant \sqrt{2}n\sqrt{n}+\frac{3}{2}n+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{n}$ при $n \geqslant 4$ и $\frac{n^2}{2}(1-\frac{5}{n}) \leqslant D_{2\text{-Д}\,(\text{Р})}(n) \leqslant \frac{n^2}{2}(1-\frac{1}{n})$ при $n \geqslant 11$. В работе [213] Д. С. Романов нашёл порядок роста $n\log n$ величины $D_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n)$ и асимптотику 2^n величины $D_{\text{ПД}\,(\text{Р})}(n)$ как в случае перестановок переменных, так и в случае их перестановок с последующими возможными инверсными неисправностями на входах схем. При рассмотрении примитивных сдвигов переменных влево Д. С. Романов и Г. В. Антюфеев в [223] нашли точное значение 2 величины $D_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n)$ и порядок роста $2^{\frac{n}{2}}$ величины $D_{\text{ПД}\,(\text{Р})}(n)$ (см. также [39]), а Г. В. Антюфеев в [38] указал свойство булевых функций $f(\tilde{x}^n)$, гарантирующее справедливость неравенства $D_{\text{ПД}\,(\text{Р})}(f) \leqslant 2\log n(1+o(1))$. В. К. Курбацкая в [96, теорема 1] нашла точное значение $k_1 \ldots k_p - 1$ величины $D_{\text{ПД}\,(\text{Р})}(n)$ в случае циклических сдвигов переменных в $p \geqslant 1$ попарно непересекающихся множествах мощностей $k_1, \ldots, k_p$, где $k_1 \geqslant 2, \ldots, k_p \geqslant 2$ и $k_1+\ldots+k_p = n$, последовательных переменных.

Прочие неисправности. При рассмотрении таких неисправностей на входах схем, при которых на неисправные входы схемы вместо б. п., подаваемых на эти входы в отсутствие неисправностей, подаются произвольные б. ф., зависящие от указанных переменных, В. Н. Носков в [125] доказал, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует множество $T(n,k)$ мощности не более $c(k)\log n$ ($c(k)$ не зависит от n), являющееся для почти всех б. ф. от n переменных k-ДТ для любых реализующих эти функции схем, а Н. Н. Нурмеев [134] усилил этот результат, показав, что в качестве $T(n,k)$ при фиксированном k можно взять почти любое множество мощности $c(k)\lfloor\log n\rfloor$, состоящее из n-наборов. В [94, раздел 4.1] получена верхняя оценка $2n$ величины $D_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n)$ в случае одновременного возможного наличия в схемах а) ПКН и ИН на входах схем — при $n \geqslant 1$, б) ПКН на входах схем, ИН не более чем на одном входе схем и множественных дизъюнктивных слипаний входов схем — при $n \geqslant 2$. А. А. Икрамов в [77, теоремы 2, 3, 5] при рассмотрении одновременно ИН не более чем на одном на входе схем и множественных конъюнктивных либо дизъюнктивных слипаний входов схем установил равенство $D_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n) = n$, а при рассмотрении одновременно всех трёх указанных видов неисправностей — соотношение $2n-2 \leqslant D_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n) \leqslant 2n-1$ (всюду предполагается, что $n \geqslant 2$). Е. В. Морозов в случае вытесняющих неисправностей входов схем, при которых на неисправные входы схемы вместо б. п., подаваемых на эти входы в отсутствие неисправностей, подаются произвольные б. ф., зависящие от остальных входных переменных схемы, в [113] доказал, что $D_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(n) = 2n - \log n + O(\log\log n)$ и $D_{\text{ПД}\,(\text{Р})}(n) \sim 2^n$, а в [114, теорема 2] — что $D_{\text{ПП}\,(\text{Р})}(f) = n + 1$ для почти всех б. ф. f от n переменных. В. К. Курбацкая в [96, теорема 2] установила соотношение $k_1 \ldots k_p \cdot \frac{n-p+2}{2} \leqslant D_{\text{ПД}\,(\text{Р})}(n) \leqslant k_1 \ldots k_p(n+1) - 1$ при рассмотрении одновременно ОКН (типа 0 или типа 1) не более чем на одном входе схем и циклических сдвигов переменных в $p \geqslant 1$ попарно непересекающихся множествах мощностей $k_1, \ldots, k_p$, где $k_1 \geqslant 2, \ldots, k_p \geqslant 2$ и $k_1 + \ldots + k_p = n$, последовательных переменных.

Тесты для контактных схем

Исторически одним из первых подходов к построению коротких тестов для контактных схем без использования очень трудоёмких общих алгоритмов поиска минимальных (по длине) тестов было задание некоторых ограничений на структуру таких схем. С. В. Яблонский и И. А. Чегис в [263, 246] установили следующие факты: а) известные КС сложности $O(n^2)$, реализующие произвольные элементарные симметрические б. ф. от n переменных, допускают ЕДТ длины $O(n^2)$ относительно замыканий контактов; б) известная КС сложности $4n-4$, где $n \geqslant 2$, реализующая линейную б. ф. $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, если n нечётно, либо $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$, если n чётно, допускает ЕДТ длины $3n - 2$ относительно обрывов и замыканий контактов; в) длина минимального ЕДТ для известной КС сложности $4n - 2$, реализующей оператор сравнения двух n-разрядных двоичных чисел, относительно обрывов и замыканий контактов равна $2n + 4$ при $n \geqslant 3$. Впоследствии для КС и вида неисправностей, упомянутых в б), Р. Н. Тоноян [236] получил более сильный результат: длина минимального ЕДТ для этой схемы не меньше $2\lceil\log 2n\rceil + 2$ и не больше $3\lceil\log 2n\rceil + 1$, а Н. П. Редькин в [185, лемма 1] установил, что длина минимального ППТ для этой же схемы не превосходит $4n-4$. И. В. Коган [85], В. В. Ваксов [52] и Х. А. Мадатян [108, лемма 8] доказали, что любая КС, состоящая из n контактов попарно различных переменных (такие КС называют *бесповторными*), допускает соответственно ППТ длины не более $n+1$, ЕДТ длины не более $n+1$ и ПДТ длины не более $n \cdot 3^{\frac{n}{3}}$ при обрывах и замыканиях контактов. Х. А. Мадатяном в [108, лемма 13] установлено, что любая бесповторная параллельно-последовательная КС (П-схема) из n контактов допускает ПДТ длины не более $\frac{3}{2}n$, а в [109, следствие 2] — что любая квазибесповторная, т. е. не содержащая одновременно двух замыкающих или двух размыкающих контактов одной и той же переменной, П-схема допускает ППТ длины не более $4n$ при неисправностях такого же вида. В. В. Глаголев [66] и существенно позже С. М. Вартанян [54, 55] и Д. С. Романов [209] получили различные верхние и нижние оценки длин минимальных тестов для блочных КС при обрывах или замыканиях контактов.

Далее приведём обзор результатов, касающихся задачи синтеза легкотестируемых КС при различных допустимых неисправностях в схемах (практически везде в качестве этих неисправностей рассматривались обрывы и/или замыкания контактов). Для удобства разобьём его на восемь подразделов, первые шесть из которых соответствуют названиям §§2–7 диссертации.

Проверяющие тесты размыкания (§2 диссертации). Н. П. Редькин в [186, теорема 1] получил оценку $D^0_{\text{ПП}}(n) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ при $n \geqslant 0$. Д. С. Романов в [217, теорема 3] установил, что $D^{0\,(+1)}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 2n+2$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, принимающей значение 1 на каком-то n-наборе и всех соседних с ним наборах; отметим, что в рассуждениях А. А. Икрамова, используемых при дальнейшем доказательстве данной теоремы, содержится ошибка, поэтому результат, указанный непосредственно в формулировке теоремы 3 работы [217], здесь не приводится.

Диагностические тесты размыкания (§3 диссертации). По аналогии с [192, с. 113, теорема 9] можно показать, что $D^0_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$. Х. А. Мадатян в [108, теорема 1] фактически установил, что $D^0_{\text{ПД}}(n) \geqslant 2^{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Н. П. Редькин в [206] доказал соотношение $D^0_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n - 2$ при $n \geqslant 2$.

Проверяющие тесты замыкания (§4 диссертации). Н. П. Редькин в [186, теорема 2] получил асимптотическую оценку $D^1_{\text{ПП}}(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log n}}+\frac{5}{2}}$. А. И. Рыбко в [230, теорема 2] доказал, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, где n достаточно велико, при $b = o\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)$ существует КС, моделирующая эту функцию с не более чем $2\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + 2$ дополнительными входами, содержащая асимптотически не более $\frac{2^n}{n}$ контактов, самокорректирующаяся относительно замыканий не более b контактов и обладающая следующим свойством: если принять за полюсы этой схемы другую (конкретную) пару вершин, то схема будет допускать ППТ замыкания длины не более $2\left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + 2$. Д. С. Романов в [217, теорема 3] установил, что $D^{1\,(+1)}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 2n+2$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, принимающей значение 0 на каком-то n-наборе и всех соседних с ним наборах.

В силу соотношений (1.1)–(1.4) (с. 70 диссертации) упомянутые результаты для величин $D^p_{\text{ПП}}(n)$, $p = 0, 1$, из [186] остаются справедливыми для $D^p_{\text{ЕП}}(n)$ и $D^p_{k\text{-П}}(n)$ при любом натуральном k.

Диагностические тесты замыкания (§5 диссертации). По аналогии с [192, с. 113, теорема 9] можно показать, что $D^1_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$. Х. А. Мадатян в [108, теорема 1] фактически установил, что $D^1_{\text{ПД}}(n) \geqslant 2^{n-1}$ при $n \geqslant 1$. Н. П. Редькин в [206] доказал соотношение $D^1_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n - 2$ при $n \geqslant 2$.

Проверяющие тесты при обрывах и замыканиях контактов (§6 диссертации). Н. П. Редькин в [185] получил оценку $D^{01}_{\text{ПП}}(n) \leqslant \frac{15}{16} \cdot 2^n$ при $n \geqslant 4$. Д. С. Романов в [225, теорема 2] (совместно с Е. Ю. Романовой) доказал неравенство $D^{01}_{\text{ЕП}}(n) \geqslant n+2$ при $n \geqslant 2$, а в [217, теорема 1] установил, что $D^{01\,(+1)}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 4n+4$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ вида $h(\tilde{x}^{n-1}) \oplus x_n$, где $n \geqslant 2$, а $h(\tilde{x}^{n-1})$ — произвольная б. ф. существенно зависящая хотя бы от одной переменной, и, кроме того, что систему функций $(f, \overline{f})$, где $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная неконстантная б. ф., можно реализовать (между двумя из трёх пар полюсов) трёхполюсной КС, содержащей одну фиктивную входную переменную, неизбыточной и допускающей ЕПТ длины $2n+4$ относительно обрывов и замыканий контактов. Также Д. С. Романов и Е. Ю. Романова в [224, теорема 4] доказали, что для любой б. ф. существует моделирующая её неизбыточная КС с не более чем пятью дополнительными входами, допускающая ЕПТ длины не более 35 относительно неисправностей такого же вида.

Диагностические тесты при обрывах и замыканиях контактов (§7 диссертации). В [192, с. 113, теорема 9] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что $D^{01}_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$. Х. А. Мадатян в [108, теорема 1] доказал равенство $D^{0,1}_{\text{ПД}}(n) = 2^n$ при $n \geqslant 1$.

Тесты при связных неисправностях контактных схем. Н. П. Редькин в [194, 195] рассматривал КС, все контакты в которых разбиваются на попарно непересекающиеся группы из $a+b$ контактов, где a и b — заданные целые числа, $a \geqslant b \geqslant 0$ и $a+b \geqslant 2$; каждая группа состоит из двух блоков, содержащих a и b контактов соответственно; все контакты в каждой группе отвечают одной и той же переменной; либо все a контактов в первом блоке — замыкающие, а все b контактов во втором блоке — размыкающие, либо наоборот; каждая неисправность КС заключается фактически в подстановке вместо указанной переменной одной и той же булевой константы для каждого контакта из группы (при этом либо все контакты из первого блока оказываются замкнуты, а все контакты из второго блока — оборваны, либо наоборот). Для описанной модели контактных схем и их неисправностей было доказано, что любую б. ф. от n переменных можно реализовать а) КС, допускающей ППТ длины не более $2n$, в случае $a+b \geqslant 3$ [194, теорема 2]; б) неизбыточной КС, допускающей ЕДТ длины не более $4n$, в случае $a+b \geqslant 3$ [195, теорема 1]; в) неизбыточной КС, допускающей ЕПТ длины не более $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n$, в случае $a+b=2$ [195, теорема 2]; г) КС, допускающей ППТ длины не более $2n$, в случае $a+b=2$ при дополнительном условии, что в первых блоках неисправных контактных групп возможны (независимо от группы) либо только замыкания, либо только обрывы контактов [195, теоремы 3, 4].

Тесты для обобщённых итеративных контактных схем. Д. С. Романов и Е. Ю. Романова в [224, 225] ввели понятие обобщённой итеративной контактной схемы (ОИКС) и доказали, что любую неконстантную б. ф. можно реализовать а) неизбыточной ОИКС, допускающей ЕПТ длины не более 7 при обрывах контактов [224, теорема 1]; б) неизбыточной ОИКС, допускающей ЕПТ длины не более 4 при замыканиях контактов [224, теорема 1];

в) неизбыточной ОИКС, допускающей ЕПТ длины не более 30 при обрывах и замыканиях контактов [225, теорема 1].

Тесты для схем из функциональных элементов

В дальнейшем для удобства в обозначении любого базиса, фигурирующего в формулировке хотя бы одного результата главы 2 или хотя бы в одном соотношении, непосредственно вытекающем из такого результата, будем использовать букву B, а в обозначении любого другого (конкретного) базиса — букву $\mathtt{B}$. Все указанные базисы, кроме $\mathtt{B}_9$ и $\mathtt{B}_{10}$, являются функционально полными, что легко проверяется с использованием [260, с. 40, теорема 7]; каждый раз это оговаривать не будем.

Отметим, что многие верхние оценки величин вида $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$ (равных $\max D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f)$, где максимум берётся по всем б. ф. f от n переменных, для которых определено значение $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f)$), встречающиеся в данном подразделе и монотонно неубывающие по n, в действительности были получены авторами для соответствующих величин $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f)$, где $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф., существенно зависящая от всех своих переменных, и $n \in \mathbb{N}$. Однако если функция $f(\tilde{x}^n)$ не зависит существенно от каких-то из переменных $x_1, \ldots, x_n$, то из неё путём изъятия несущественных переменных можно получить б. ф. f', существенно зависящую от всех своих n' переменных, где $n' < n$. Если при этом $n' \geqslant 1$, то и для величины $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f')$ оценка в силу монотонности будет верна; если же $n' = 0$, то f' — булева константа и для неё простыми соображениями устанавливается, что либо значение $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f')$ не определено (см. утверждение 8.2 на с. 177 диссертации), либо оно очень мало (например, не превосходит 2) и не влияет на указанную оценку величины $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$.

Д. С. Романов во многих своих работах рассматривал несколько другое определение неизбыточных СФЭ: он считал неизбыточной (относительно некоторого источника неисправностей) любую СФЭ, любая нетривиальная (а не любая вообще) допустимая неисправность в которой приводит к нетривиальной функции неисправности. При этом нетривиальной неисправностью в его работах называлась любая неисправность в СФЭ, при которой изменяется значение на выходе хотя бы одного элемента этой схемы хотя бы на одном её входном наборе по сравнению со случаем отсутствия в ней неисправностей. В качестве примера тривиальной (по Романову) неисправности можно привести неисправность типа 1 на выходе произвольного двухвходового элемента E в произвольной СФЭ S, реализующего в исправном состоянии функцию $x \to y$ от своих входов, оба входа которого соединены с одним и тем же входом схемы. Из определений сразу следует, что любая неизбыточная СФЭ является неизбыточной по Романову. Обратное, вообще говоря, неверно: скажем, если в упомянутом примере элемент E

является единственным элементом схемы S, то она будет избыточна относительно ОКН типа 1 (а также ПКН) на выходах элементов в смысле определений данной диссертации, но при этом неизбыточна в смысле определений Романова.

Обозначим через $\hat{D}^{B;\,\text{Н}}_{\text{ЕП}\,(\text{М})}(f)$ функцию, получающуюся заменой в определении функции $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f)$ (см. с. 20) при Т $=$ ЕП слова «неизбыточности» на словосочетание «неизбыточности по Романову». Очевидно, что всегда $\hat{D}^{B;\,\text{Н}}_{\text{ЕП}\,(\text{М})}(f) \leqslant D^{B;\,\text{Н}}_{\text{ЕП}\,(\text{М})}(f)$, если значение правой части этого неравенства определено. Положим $\hat{D}^{B;\,\text{Н}}_{\text{ЕП}\,(\text{М})}(n) = \max \hat{D}^{B;\,\text{Н}}_{\text{ЕП}\,(\text{М})}(f)$, где максимум берётся по всем б. ф. f от n переменных, для которых определено значение $\hat{D}^{B;\,\text{Н}}_{\text{ЕП}\,(\text{М})}(f)$.

СФЭ называется *бесповторной*, если в ней из каждой вершины исходит не более одного ребра.

Для удобства сравнения с результатами диссертации обзор известных результатов, касающихся задачи синтеза легкотестируемых СФЭ при различных допустимых неисправностях в схемах, разобьём на шестнадцать подразделов, первые восемь из которых соответствуют названиям §§9–16 диссертации.

Проверяющие тесты при однотипных константных неисправностях на выходах элементов (§9 диссертации). Для стандартного базиса $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ Н. П. Редькин в [189] получил оценку $D^{B_0;\,p}_{\text{ПП}\,(\text{О})}(n) \leqslant n$ для $p = 0, 1$ при $n \geqslant 1$. Впоследствии эта оценка была улучшена Ю. В. Бородиной, которая в [46] установила, что $D^{B_0;\,p}_{\text{ПП}\,(\text{О})}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$. Ей же для базиса Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ при $n \geqslant 1$ удалось найти точное значение функций Шеннона $D^{B_1;\,1}_{\text{ЕП}\,(\text{О})}(n) = 1$ [47] и $D^{B_1;\,0}_{\text{ПП}\,(\text{О})}(n) = 1$ [51] (совместно с П. А. Бородиным) и описание всех булевых функций f, для которых $D^{B_1;\,1}_{\text{ПП}\,(\text{О})}(f) = 1$ [50], а для базиса $B_2 = \{x \,|\, y\}$ при $n \geqslant 2$ установить равенство $D^{B_2;\,1}_{\text{ПП}\,(\text{О})}(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = n + 1$ [49] (из него следует, что $D^{B_2;\,1}_{\text{ПП}\,(\text{О})}(n) \geqslant n + 1$ в случае $n \geqslant 2$). Кроме того, Ю. В. Бородина в [48, теоремы 1, 4] доказала, что любую систему из m неконстантных б. ф. можно реализовать СФЭ (с m выходами) в базисе B_0, допускающей ППТ длины не более $1+q$ относительно ОКН типа 1 на выходах элементов, где q — число функций из этой системы, принимающих значение 1 на наборе из всех единиц, а любую систему неконстантных б. ф., каждая из которой зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$, монотонна по каждой из l переменных $x_2, \ldots, x_{l+1}$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, и антимонотонна по каждой из $n - l - 1$ переменных $x_{l+2}, \ldots, x_n$, можно реализовать СФЭ в том же базисе, допускающей ППТ длины 1 относительно неисправностей такого же типа.

Диагностические тесты при однотипных константных неисправностях на выходах элементов (§10 диссертации). Все результаты этого подраздела справедливы для любого $p \in \{0, 1\}$. По аналогии с [192, с. 113, теорема 9] можно показать, что $D^{B;\,p}_{\text{ЕД}\,(\text{О})}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$ для любого полного базиса B. Н. П. Редькин получил следующие оценки: $D^{B_0;\,p}_{\text{ЕД}\,(\text{О})}(n) \leqslant 2n+1$

при $n \geqslant 1$ [193], $D^{\mathtt{B}_1;\,p}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 2\log\lceil n+1\rceil + 1$ для бесконечного базиса $\mathtt{B}_1 = \{x_1\&\ldots\&x_t, x_1\vee\ldots\vee x_t, \overline{x} \mid t = 2,3,4,\ldots\}$ при $n \geqslant 1$ [202] и $D^{B_0;\,p}_{\text{ПД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 2^{n-1}$ при $n \geqslant 2$ [205].

Проверяющие тесты при произвольных константных неисправностях на выходах элементов (§11 диссертации). В [192, с. 116, теорема 10] с использованием метода синтеза СФЭ, предложенного С. М. Редди [310], для базиса Жегалкина B_1 была получена оценка $D^{B_1;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \leqslant n+3$ при $n \geqslant 0$. В дальнейшем указанное неравенство было распространено С. С. Колядой в [86]–[89] на случай произвольного ф. п. конечного базиса B (при $n \geqslant 1$, если $m(B) = 2$, и при $n \geqslant 3$, если $m(B) \geqslant 3$). Д. С. Романов в [212] установил соотношение $2 \leqslant D^{\mathtt{B}_2;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \leqslant 4$ для базиса $\mathtt{B}_2 = \{x\&y, x\oplus y, 1, \overline{x}(y\vee z)\vee x(y\sim z)\}$, а в [215] — соотношение $2 \leqslant \hat{D}^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \leqslant 4$ для любого ф. п. базиса B (оба соотношения справедливы при $n \geqslant 1$). Для некоторых базисов B, а именно для базисов $\{\&,\oplus,\sim\}$, $\{\&,\neg\}$, $\{\vee,\neg\}$, $\{x\,|\,y\}$, $\{x\downarrow y\}$, $\{\overline{x}, x\&\overline{y}\}$, $\{\overline{x}, x\vee\overline{y}\}$, а также любого полного базиса, содержащего обе булевы константы 0 и 1, крышку над буквой D в последнем двойном неравенстве можно убрать, поскольку, как нетрудно проверить, в доказательствах теорем 1, 3, 4, 6 из [215] использовались неизбыточные СФЭ (в смысле определений данной диссертации); то же можно сказать и о доказательстве теоремы 7, если предполагать, что базис B изначально содержит обе константы; доказательство леммы 6 остаётся неизменным при переходе от класса СФЭ, неизбыточных по Романову, к классу неизбыточных СФЭ. Также им заявлено получение неравенства $\hat{D}^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) \leqslant 3$ для любого ф. п. конечного базиса B при $n \geqslant 2$ и равенства $D^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n) = 3$ для любого ф. п. базиса B, содержащего функции от не более чем двух переменных, не содержащего констант и отличного от $\{x\&\overline{y}, x\vee\overline{y}\}$, при $n \geqslant 3$ [221, теорема 1]; при этом нижняя оценка в последнем равенстве следует, как указано в [221], из одной из работ автора данной диссертации (более конкретно, см. теорему 11.1 и замечания 11.1, 11.2).

Для полных проверяющих тестов Н. П. Редькин в [187, 190] при $n \geqslant 0$ получил оценку $D^{B;\,01}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) \leqslant 2\left(2^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2}\rceil} + n\right)$ для любого ф. п. конечного базиса B, а в [192, с. 128–130] при $n \geqslant 2$ — оценку $D^{B_0;\,01}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(x_1\oplus\ldots\oplus x_n) \leqslant 4$; Д. С. Романов в [214] доказал, что существует базис $\mathtt{B}_3$, для которого $m(\mathtt{B}_3) = 7$ и $2 \leqslant D^{\mathtt{B}_3;\,01}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 1$; Ю. В. Бородина в [49] для базиса $B_3 = \{\&,\neg\}$ установила неравенство $D^{B_3;\,01}_{\text{ПП}\,(\text{O})}(n) \geqslant n+1$ при $n \geqslant 2$. С. С. Коляда в [87, глава 3] для любого $k \in \mathbb{N}$ получил оценку $D^{B_1;\,01}_{k\text{-П}\,(\text{O})}(n) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\lfloor \log k\rfloor+1} C_n^i + 3$ при $n \geqslant 0$.

Диагностические тесты при произвольных константных неисправностях на выходах элементов (§12 диссертации). В [192, с. 113, теорема 9] с использованием идей С. В. Яблонского установлено, что $D^{B;\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$ для любого полного базиса B. Д. С. Романов и Е. Ю. Романова в [227] при $n \geqslant 1$ получили оценки $D^{B_1';\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 22$ и $D^{\mathtt{B}_4;\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) \leqslant 22$

для базисов $B_1' = \{\&, \oplus, 1\}$ и $\mathtt{B}_4 = \{\&, \oplus, \sim\}$, а также доказали существование базиса $\mathtt{B}_5$, для которого $m(\mathtt{B}_5) = 9$ и $D^{\mathtt{B}_5;\,01}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 6$. Романовым также заявлено существование такой константы $c > 0$, что $D^{\mathtt{B}_4;\,01}_{\text{2-Д (O)}}(n) \leqslant c$ для любого $n \geqslant 1$ [221, теорема 2].

Проверяющие тесты при однотипных константных неисправностях на входах (и, возможно, выходах) элементов (§13 диссертации). Н. П. Редькин в [188] для стандартного базиса B_0 получил оценку $D^{B_0;\,p}_{\text{ПП (I)}}(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} + 2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}\right)$, где $p = 0, 1$.

Диагностические тесты при однотипных константных неисправностях на входах (и, возможно, выходах) элементов (§14 диссертации). Н. П. Редькин в [191] доказал, что $D^{B_0;\,p}_{\text{ЕД (I)}}(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} + 2^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}\right)$, а также фактически установил соотношение $D^{B_0;\,p}_{\text{ЕД (IO)}}(n) = O(2^{\frac{n}{2}})$ для $p = 0, 1$.

Проверяющие тесты при произвольных константных неисправностях на входах (и, возможно, выходах) элементов (§15 диссертации). В рассуждениях на с. 116 работы [192], следующих после формулировки теоремы 10, показано, что $D^{B_1;\,01}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant n+3$ при $n \geqslant 0$. В. Г. Хахулин [244] для любого ф. п. базиса B установил соотношение $n+1 \leqslant D^{B;\,01}_{\text{ПП (I)}}(x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) \leqslant n+2$ при $n \geqslant 2$. Н. П. Редькин в [198] доказал, что $D^{B_0;\,01}_{\text{ПП (I)}}(n) = O\left(\frac{2^n}{\sqrt{\log n}}\right)$. Д. С. Романовым и Е. Ю. Романовой в [226, 229] при $n \geqslant 1$ установлены неравенства $D^{B_1';\,01}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant 16$ и $D^{\mathtt{B}_4;\,01}_{\text{ЕП (IO)}}(n) \leqslant 16$; в частности, при $n \geqslant 14$ улучшен упомянутый результат из [192, с. 116] (любая схема в базисе B_1' является также схемой в базисе B_1).

По тематике данного подраздела было опубликовано много англоязычных статей. Во всех работах, упоминаемых в этом абзаце, рассматриваются ПКН на входах и выходах элементов. Дж. П. Хэйес в [282, теоремы 1, 6, 7] доказал, что любая бесповторная СФЭ с n входами в базисе $\{\overline{x_1 \& \ldots \& x_t} \mid t = 1, 2, 3, \ldots\}$ допускает ППТ длины не более $n+1$, а любая СФЭ в базисе $\{x \,|\, y, \overline{x}\}$, реализующая функцию $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, $n \geqslant 2$, и представляющая собой дерево (цепочку без повторяющихся входных переменных) из двухвходовых блоков, каждый из которых реализует сложение по модулю 2, допускает ЕПТ длины 4 (соответственно ППТ длины не более $n+2$). С. М. Редди в [310, теорема 1] установил, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно смоделировать неизбыточной СФЭ с одним дополнительным входом в базисе Жегалкина B_1, допускающей универсальный (не зависящий от f) ЕПТ длины $n+4$; К. Л. Кодандапани [291] понизил это значение до $n+3$ с сохранением универсальности теста. Дж. П. Хэйесом в [283] установлено, что любую б. ф. можно (N, N)-смоделировать СФЭ в базисе $\{x \,|\, y, x \oplus y\}$, допускающей ППТ длины 5, где $3N$ — общее число входов элементов данной схемы. К. К. Салуджа и С. М. Редди в [312] доказали, что любую б. ф. можно (n', m')-смоделировать СФЭ в базисе B_0, допускающей ППТ длины 3, где $n' \leqslant 6$, а m' — общее число конъюнкторов и дизъюнкторов в этой схеме. Они же в [313] установили, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ для любого $k \in \mathbb{N}$ можно смоделировать k-неизбыточной СФЭ с одним дополнительным входом в базисе B_1, допускающей универсальный k-ПТ длины $4 + \sum_{i=1}^{\lfloor \log 2k \rfloor} C_n^i$. Д. К. Прадхан [303] доказал, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, представимую в виде обобщённого полинома Жегалкина (полинома по модулю 2, в каждое слагаемое которого любая переменная может входить либо без отрицания, либо с отрицанием) степени r, можно $(2,1)$-смоделировать СФЭ в базисе $\{\&, \oplus\}$, допускающей универсальный ППТ длины $6 + 2n + \sum_{i=0}^{r} C_n^i$. Б. Б. Бхаттачарья и Б. Гупта [266] привели пример неизбыточной СФЭ в базисе B_0, реализующей некоторую б. ф. $f(\tilde{x}^5)$ и обладающей следующим свойством: одна из ф. н. этой схемы относительно одиночных неисправностей получается из функции f перестановкой переменных (данный результат лишь косвенно относится к тематике тестов для СФЭ). Т. Хираяма, Г. Кода, Я. Нишитани и К. Шимидзу [284] предложили метод моделирования произвольной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, где $n \geqslant 4$ — такое число, что $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, неизбыточной СФЭ с $\sqrt{n}+1$ дополнительными входами в базисе $\{x_1 \& \ldots \& x_t, x_1 \vee \ldots \vee x_t, x \oplus y \mid t = 2, 3, \ldots, \sqrt{n}\}$, допускающей ЕПТ длины $2\sqrt{n}$. А. И. Тимошкин [320] доказал, что для любых $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geqslant n_2$, умножение n_1-разрядного двоичного числа на n_2-разрядное двоичное число можно смоделировать неизбыточной СФЭ с n_2+1 дополнительными входами (число выходов этой схемы равно n_1+n_2) в базисе $\{x \& y, x \sim y, x \downarrow y\}$, допускающей ЕПТ длины 3.

А. П. Горяшко в [69] и [70, с. 193, утверждение 5.7] установил, что любую б. ф. можно $(1,4)$-смоделировать схемой, состоящей из специальных двухвыходных [69] и трёхвыходных функциональных блоков, каждый из которых имеет не более трёх входов, и допускающей ППТ длины 3 относительно ПКН на входах и выходах этих блоков. В. А. Варданян в [53] доказал, что для любого ф. п. конечного базиса B любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно $(2,2)$-смоделировать схемой, состоящей из специальных трёхвыходных функциональных блоков, каждый из которых имеет не более $3m(B)+2$ входов в общем случае и не более 7 входов в случае $B = B_0$, и допускающей ППТ длины 2 относительно ПКН на входах и выходах этих блоков, причём сложность данной схемы (определяемая как число блоков в ней) равна сложности реализации функции $f(\tilde{x}^n)$ в классе СФЭ в базисе B.

Диагностические тесты при произвольных константных неисправностях на входах (и, возможно, выходах) элементов (§16 диссертации). Дж. П. Хэйес в [282, теорема 4] установил, что любая бесповторная СФЭ с n входами в базисе $\{\overline{x_1 \& \ldots \& x_t} \mid t = 1, 2, 3, \ldots\}$ допускает ПДТ длины не более $2n$ относительно ПКН на входах и выходах элементов.

Проверяющие тесты при инверсных неисправностях на выходах элементов. С. В. Коваценко [84] доказал равенство $D^{B_1;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (O)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 1$. Н. П. Редькин в [199] получил оценку $D^{B_0;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (O)}}(n) \leqslant 2$, а в [200] для произвольного полного конечного базиса B — оценку $D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (O)}}(n) \leqslant 3$ (обе оценки справедливы при $n \geqslant 0$). С. Р. Беджанова в [41, теоремы 5, 8] для функции $d_n(\tilde{x}^n) = x_1 \vee \ldots \vee x_n$, $n \geqslant 2$, доказала равенства $D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (O)}}(d_n) = D^{\mathsf{B}_6;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (O)}}(d_n) = 1$, где B — произвольный ф. п. базис, содержащий функцию $x \vee y$, а $\mathsf{B}_6 = \{\to, \neg\}$. Она же в [45, с. 58–59, теорема 15] установила, что $D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПП (O)}}(d_n) \leqslant n + 1$ для любого полного конечного базиса B при $n \geqslant 3$. Этот, а также многие другие упомянутые результаты С. Р. Беджановой, как показано в [45], справедливы не только для функции d_n, но и для любой б. ф. вида $\overline{x}_1 \vee \ldots \vee \overline{x}_l \vee x_{l+1} \vee \ldots \vee x_n$, где $l \in \{1, \ldots, n\}$ (в случае $l = n$ полагаем $x_{l+1} \vee \ldots \vee x_n \equiv \equiv 0$). Д. С. Романов в [219] доказал, что существует базис B_7, для которого $m(\mathsf{B}_7) = 9$ и $D^{\mathsf{B}_7;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПП (O)}}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 0$.

Диагностические тесты при инверсных неисправностях на выходах элементов. С. В. Коваценко [84] получил оценки $D^{B_1;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant n + 1$ при $n \geqslant 1$ и $D^{B_1;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) \leqslant 2^{n-2}$ при $n \geqslant 2$. Первая из этих оценок была впоследствии улучшена Д. С. Романовым, который в [218] установил равенство $D^{B_1';\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 0$. С. Р. Беджанова в [42] для функции $d_n(\tilde{x}^n) = x_1 \vee \ldots \vee x_n$, $n \geqslant 3$, доказала соотношения $D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(d_n) \leqslant 2$ и $D^{B_3^*;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(d_n) = 2$, где B — произвольный ф. п. конечный базис, а $B_3^* = \{\vee, \neg\}$. Ей же в [44] получена оценка $D^{B_0;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(x_1 \oplus \ldots \oplus x_n) \leqslant \lceil \log(n-1) \rceil + 2$ при $n \geqslant 2$. Д. С. Романовым в [220] доказано равенство $D^{B_0;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$, причём для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ найдено точное значение величины $D^{B_0;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(f)$ (в частности, улучшен результат работы [44]). И. Г. Любич и Д. С. Романов [106] установили неравенство $D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 4$ для любого ф. п. базиса B, содержащего хотя бы одну из функций $x \& y$, $x \vee y$, $x \,|\, y$, $x \downarrow y$, и любого $n \geqslant 1$. Д. С. Романов и Е. Ю. Романова в [228] для бесконечного базиса $\mathsf{B}_8 = \{x_1 \& \ldots \& x_t, x \oplus y, 1 \mid t = 2, 3, 4, \ldots\}$ доказали, что $D^{\mathsf{B}_8;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 1$. Отметим, что последний результат, а также неравенство $D^{B_1;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) \leqslant 2^{n-2}$ из [84] относятся к тематике §17 диссертации.

Тесты при инверсных неисправностях на входах элементов. С. Р. Беджанова в [41, теоремы 7, 10] для функции $d_n(\tilde{x}^n) = x_1 \vee \ldots \vee x_n$, $n \geqslant 2$, установила равенства $D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (I)}}(d_n) = D^{\mathsf{B}_6;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (I)}}(d_n) = D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (I)}}(d_n) = D^{\mathsf{B}_6;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (I)}}(d_n) = 1$, где B — произвольный ф. п. базис, содержащий функцию $x \vee y$. Она же в [43] доказала, что минимально возможная длина ПДТ для СФЭ, реализующей функцию d_n и состоящей только из двухвходовых дизъюнкторов, при ИН на входах элементов равна $2^n - 1$.

Тесты при прочих неисправностях элементов. В [215, лемма 1] установлено, что любая СФЭ, неизбыточная и допускающая некоторый ЕПТ T относительно ПКН на выходах элементов, неизбыточна и допускает ЕПТ T относительно ИН на выходах элементов. Поэтому каждая верхняя оценка величины вида $D^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{O})}(n)$, где B — ф. п. базис, приведённая выше в подразделе, соответствующем §11 диссертации, является также верхней оценкой длины минимального ЕПТ относительно одновременно ПКН и ИН на выходах элементов при реализации произвольной б. ф. схемами из функциональных элементов в базисе B.

С. К. Сет и К. Л. Кодандапани [315] доказали, что любая СФЭ, реализующая функцию $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и представляющая собой дерево из двухвходовых сумматоров, допускает ППТ длины не более $\left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor + 1$ относительно произвольных неисправностей элементов, за исключением инверсных. Г. Г. Темербекова и Д. С. Романов [235] установили, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, можно реализовать СФЭ в базисе $\{\&, \oplus, 1\}$ (в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$), неизбыточной по Романову и допускающей ЕПТ длины 1 (соответственно 2) относительно таких неисправностей двухвходовых элементов, при которых функция, приписанная каждому неисправному элементу, меняется на отрицание одной из своих переменных.

Тесты при неисправностях элементов и входов схем. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ целое число t определяется из неравенств $2^t + t + 1 \leqslant n \leqslant 2^{t+1} + t + 1$. В докторской диссертации Д. С. Романова [222] получены, в частности, следующие результаты: $2n - 2t - 2 \leqslant$ $\leqslant \hat{D}^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{PO})}(n) \leqslant 2n - 2t + 3$ при $n \geqslant 1$ для любого ф. п. базиса B (теорема 4.9; для каждого из конкретных базисов, упомянутых в настоящем тексте на с. 40 при цитировании работы [215], крышку над буквой D можно убрать); $2n - 2t - 2 \leqslant D^{B;\,01}_{\text{ЕП}\,(\text{PIO})}(n) \leqslant 2n - 2t + 15$ при $n \geqslant 1$, где B — один из базисов $\{\&, \oplus, 1\}$, $\{\&, \oplus, \sim\}$ (теорема 5.3); $2n - 2t - 2 \leqslant D^{\mathsf{B}_3;\,01}_{\text{ПП}\,(\text{PO})}(n) \leqslant 2n - 2t + 3$ при $n \geqslant 1$, где B_3 — некоторый базис с $m(\mathsf{B}_3) = 7$ (теорема 6.3); $2\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 \leqslant D^{\mathsf{B}_7;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПП}\,(\text{PO})}(n) \leqslant n + 4$ при $n \geqslant 3$, где B_7 — некоторый базис с $m(\mathsf{B}_7) = 9$ (теорема 7.3); $D^{B;\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{PO})}(n) = 2n + O(1)$ при $n \to \infty$, где B — один из базисов $\{\&, \oplus, 1\}$, $\{\&, \oplus, \sim\}$ (теорема 8.4); $D^{B_1';\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД}\,(\text{PO})}(n) = n$ при $n \geqslant 1$ (теорема 9.3); $n \leqslant D^{B_0;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД}\,(\text{PO})}(n) \leqslant n + 1$ при $n \geqslant 1$ (теорема 9.5); любую неконстантную б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно смоделировать неизбыточной СФЭ с двумя дополнительными выходами в любом из базисов $\{\&, \oplus, 1\}$, $\{\&, \oplus, \sim\}$, допускающей ЕПТ длины не более 17 при ПКН на входах и выходах элементов и на входах схем (теорема 5.4). Отметим, что в [222] представлены все основные результаты, полученные Д. С. Романовым в 2007–2019 гг. и касающиеся тестов для входов схем, для КС или для СФЭ.

По тематике данного подраздела было опубликовано много англоязычных работ. М. А. Бройер [268] доказал, что при рассмотрении ПКН на выходах элементов и на входах схем любая (любая бесповторная) СФЭ, состоящая только из сумматоров, неизбыточна и допускает ЕПТ, длина которого не превосходит суммарного числа элементов и входов схемы (соответственно не превосходит 3). Х. Иносэ и М. Сакаучи [285] предложили метод моделирования произвольной б. ф. СФЭ с двумя дополнительными входами, допускающей универсальный ППТ длины 2 при ПКН на выходах элементов, а также на входах схемы и элементов схемы, кроме этих дополнительных входов, в некотором базисе, состоящем из функций от четырёх переменных. С. Дасгупта, К. Р. П. Хартманн и Л. Д. Радолф [273] установили, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно смоделировать СФЭ с четырьмя дополнительными входами в некотором базисе, состоящем из функций от шести переменных, допускающей универсальный ППТ длины 2 при ПКН на входах и выходах элементов и на входах схем, с условием, что у каждого элемента неисправно не более одного входа, являющегося дополнительным входом схемы. П. Р. Бхаттачарджи, С. К. Басу и Дж. Ч. Паул [265] доказали, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно $(n', 1)$-смоделировать неизбыточной СФЭ, где $n' \leqslant n$, в базисе $\mathtt{B}_9 = \{x_1 \& \ldots \& x_t, x_1 \vee \ldots \vee x_t, x \oplus y \mid t = 2, 3, 4, \ldots\}$, допускающей универсальный ЕПТ длины 1 (длины $n+1$) при ОКН (соответственно ПКН) на входах элементов и схем. Ц. Сасао [314] установил, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, представимую в виде обобщённого полинома Жегалкина, содержащего s слагаемых, для любого $k \in \mathbb{N}$ можно $(1, 4)$-смоделировать k-неизбыточной СФЭ из четырёх частей (входы схемы, &-часть, $\oplus$-часть, контролирующая часть) в базисе $\mathtt{B}_9$, допускающей k-ПТ длины не более $s + n + 4 + \sum\limits_{i=1}^{\lfloor \log 2k \rfloor} C_n^i$ относительно ПКН в любой одной части схемы.

Во всех работах, упоминаемых в этом абзаце, рассматриваются ПКН на входах и выходах элементов и на входах схем. С. М. Редди в [310, теоремы 2, 3] доказал, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно смоделировать неизбыточной СФЭ с одним дополнительным входом в базисе B_1, допускающей ЕПТ длины не более $3n+4$, а также $(1, 2)$-смоделировать неизбыточной СФЭ в базисе B_1, допускающей универсальный ЕПТ длины $n+4$. Х. Фудзивара [276] установил, что любая СФЭ с n входами, состоящая из только элементов, реализующих монотонные б. ф. от своих входов, допускает ППТ длины не более $C_{n+1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$, а длины минимальных ППТ и ПДТ для произвольной СФЭ, реализующей функцию $x_1 \& \ldots \& x_n$, $x_1 \vee \ldots \vee x_n$ или $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и состоящей соответственно только из конъюнкторов, только из дизъюнкторов или только из элементов, реализующих линейные функции от своих входов, равны между собой и равны $n+1$. С. Кадзихара и Ц. Сасао в [286, теорема 6] доказали, что сложение двух n-разрядных двоичных чисел можно реализовать СФЭ с $n+1$ выходами в базисе $\{\&, \vee, \oplus\}$, допускающей ППТ длины 6. У. Калай, Д. В. Холл и М. А. Перковски [287] установили, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно $(2, 2)$-смоделировать неизбыточной СФЭ в базисе $\mathtt{B}_{10} = \{x_1 \& \ldots \& x_t, x \oplus y \mid t = 2, 3, 4, \ldots\}$, допускающей универсальный ЕПТ длины не более $n + 6$, на основе представления данной функции обобщённым полиномом Жегалкина (отметим, что этот результат в некотором смысле слабее теоремы 3 работы [310], однако сложность схемы, подвергаемой тестированию, может быть существенно меньше). Р. Х. Латыпов [97] усилил результат работы [287], доказав, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно $(1,1)$-смоделировать неизбыточной СФЭ в базисе $\mathtt{B}_{10}$, допускающей универсальный ЕПТ длины $n+1$ (сложность схемы при этом сравнима со сложностью схемы из [287]). Чж. Пань в [297] предложил метод $(4,2)$-моделирования произвольной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ неизбыточной СФЭ в базисе $\mathtt{B}_9$, допускающей универсальный ЕПТ длины $n+5$ и имеющей небольшую глубину (под глубиной схемы понимается максимально возможная длина пути от входа схемы к её выходу).

Тесты при слипаниях рёбер схем. Слипание рёбер или, иначе, короткое замыкание проводников (англ. bridging fault) — такая неисправность СФЭ, при которой два или более рёбер схемы начинают иметь общую вершину. Например, слипанию рёбер e и e' в произвольной СФЭ соответствует замена ребра e на цепь $e_1 - v - e_2$, а ребра e' на цепь $e'_1 - v - e'_2$, где v — одна и та же новая вершина схемы. Слипание рёбер в ряде случаев приводит к возникновению в схеме обратных связей, в результате чего она становится автоматной; автоматные схемы в данной диссертации не рассматриваются. Возможности построения СФЭ, допускающих короткие тесты при одиночных или множественных слипаниях рёбер, исследуются в работах Б. Б. Бхаттачарьи, Б. Гупты, С. Саркара и А. К. Чоудхури [267], А. П. Горяшко [70, §4.3], Т. Р. Дамарлы [272], М. А. Перковски, Л. Чанки, А. Сараби и И. Шефера [300], Чж. Паня [298], Х. Рахамана, Д. К. Даса и Б. Б. Бхаттачарьи [307]–[309], Х. Рахамана и Д. К. Даса [305, 306], Чж. Паня и Г. Ченя [299].

Тесты при неисправностях достаточно общего вида. В.-Т. Чен и Я. Х. Пател [270] доказали, что минимальный ППТ для схемы, реализующей сложение двух n-разрядных двоичных чисел и представляющей собой цепочку из трёхвходовых функциональных блоков, каждый из которых имеет два выхода и реализует на одном из них сумму по модулю 2 своих входов, а на другом — функцию переноса в более старший разряд, при произвольных неисправностях блоков имеет длину 11.

Всюду далее в данном подразделе предполагается, что k — натуральное число, не зависящее от n. В. Н. Носков в работах [126]–[128] предложил методы (n', m')-моделирования произвольной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ СФЭ в произвольном полном базисе, имеющими блочное строение, при подходящем выборе параметров обладающими сравнительно невысокой сложностью и допускающими тест типа Т сравнительно малой длины относительно произвольных неисправностей внутри блоков (при которых, в частности, могут меняться структуры этих блоков), включающих в себя ПКН и ИН на входах и выходах элементов. Значения n', m' и Т следующие: $n' = 1$, $m' = n$, Т $=$ ПП [126]; $n' = 2$, $m' = n+1$, Т $\in \{$ПП, k-П$\}$ [127]; $n' = 3$,

$m' = 1$, Т $= k$-П [128]. Если при этом параметры подбирать так, чтобы минимизировать длину теста (не обращая внимания на сложность схем), то указанная длина равна $O(n)$ [126], $O(n)$ при Т $=$ ПП и $O(1)$ при Т $= k$-П [127], $O(n)$ [128] (всюду предполагается $n \to \infty$).

В. Н. Носков в статьях [129]–[132] для любой СФЭ S в произвольном полном конечном базисе B, реализующей б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, и любой её подсхемы A предложил методы преобразования подмножества элементов M, содержащихся в S, но не в A, в подсхему C сравнительно небольшой сложности, при котором полученная СФЭ S' (n', m')-моделирует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и при рассмотрении в схеме S' произвольных неисправностей не более k элементов из её подсхемы C, а также произвольных неисправностей внутри подсхемы A схема S' обладает следующими свойствами:

- допускает проверяющий тест длины $3 \cdot 2^{m(B)+1} + 2^{k+1}$, при этом $n' = 3$, $m' = 1$ [130];

- допускает проверяющий тест достаточно малой длины, зависящей от $|M|$, последовательная подача на входы схемы S' всех наборов из которого позволяет а) с некоторой точностью локализовать неисправности в подсхеме C, при этом $m' = 1$, а n' растёт с ростом $|M|$ [129]; б) в ряде случаев восстановить правильное функционирование подсхемы C путём подачи на дополнительные входы схемы S' соответствующих значений, при этом $m' = 1$, а n' растёт с ростом $|M|$ [131];

- допускает проверяющий тест длины $2^{m(B)+2} + 4$, последовательная подача на входы схемы S' всех наборов из которого позволяет в ряде случаев восстановить правильное функционирование подсхемы C путём подачи на дополнительные входы схемы S' соответствующих значений, при этом n' зависит от числа внешних входов элементов из множества M, а m' близко к числу элементов в подсхеме C [132].

Также В. Н. Носковым в [133] для любой СФЭ S в произвольном полном конечном базисе B, реализующей б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, и любой её подсхемы A предложен метод преобразования подмножества элементов M, содержащихся в S, но не в A, в подсхему C с последующим добавлением подсхемы F (сложность каждой из подсхем C, F сравнительно невелика), при котором полученная СФЭ S' $(2, m')$-моделирует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и при рассмотрении в схеме S' произвольных неисправностей не более k элементов как из подсхемы C, так и из подсхемы F, а также произвольных неисправностей любого числа элементов из подсхемы A схема S' допускает проверяющий тест длины $2^{m(B)+2} + 8$, последовательная подача на входы схемы S' всех наборов из которого позволяет с некоторой точностью локализовать неисправности в подсхеме C; при этом $m' < (k+1)^3 \ln L(C)$, где $L(C)$ — сложность подсхемы C.

Другие подходы к синтезу легкотестируемых схем. В работах П. Н. Нилакантана и А. Э. Джеякумара [295], Н. П. Рахагуде [304], В. Гиты, Н. Девараджана и П. Н. Нилакантана [279]–[281], И. Лю [292] предложены различные методы построения СФЭ, в которых путём последовательной подачи на входы схем небольшого числа наборов и наблюдения выдаваемых схемами значений можно обнаружить, а в некоторых случаях и диагностировать достаточно большой процент неисправностей, что подтверждается компьютерными вычислениями, проведёнными для некоторых «модельных» схем; отметим, что множества указанных наборов, вообще говоря, не удовлетворяют определениям проверяющего и тем более диагностического тестов для СФЭ. С. П. Сингх и Б. Б. Сагар [318, 319] предложили метод минимизации числа слагаемых в обобщённом полиноме Жегалкина произвольной б. ф.; данный метод, как отмечено авторами, может позволить уменьшить длины тестов для СФЭ, построенных в соответствии с представлением функций этими полиномами.

Условные тесты для схем

Условные тесты отличаются от рассматривавшихся нами до настоящего момента и рассматриваемых в основной части диссертации (безусловных) тестов тем, что каждый следующий набор из условного теста, а также момент окончания тестирования зависят от значений, выдаваемых схемой на всех предыдущих наборах из теста. Под глубиной условного теста понимается наибольшее возможное число наборов в нём.

В. И. Шевченко в работах [251]–[257] для любых двух (не обязательно полных) конечных базисов B и B' и произвольного целого числа $t \geqslant 2$ исследовал поведение величины, равной максимуму по всем СФЭ в базисе B, общее число входов и ФЭ в каждой из которых не превосходит t, минимально возможной глубины условного ПДТ для такой схемы относительно вставок в неё элементов из базиса B', и доказал, что данная величина, рассматриваемая как функция от t, либо ограничена сверху константой, либо имеет линейный порядок роста, либо растёт быстрее любого полинома, причём для каждой пары B и B' установлена конкретная из этих трёх альтернатив; отметим, что частными случаями указанных неисправностей являются ОКН типа p, $p \in \{0, 1\}$ (при $p \in B'$), ПКН (при $0, 1 \in B'$) и ИН (при $\overline{x} \in B'$) на входах и выходах элементов. М. Ю. Мошков в [116, теорема 2.1] для любого конечного базиса B и произвольного $t \in \mathbb{N}$ установил, что похожая величина, равная максимуму по всем СФЭ сложности не более t (подсчитываются только ФЭ, но не входы схем) в базисе B минимально возможной глубины условного ПДТ для такой схемы относительно ПКН на входах элементов, либо не превосходит $c_1 t$, либо не меньше $2^{c_2\sqrt{t}}$, где c_1 и c_2 — некоторые положительные числа, не зависящие от t, причём для каждого B установлена конкретная из этих двух альтернатив; в [116, теорема 4.1] получен аналогичный результат для бесповторных СФЭ сложности не более t в базисе B с той лишь разницей, что класс базисов B, для каждого из которых указанная величина не превосходит $c_1 t$, существенно шире.

А. А. Вороненко [64] доказал, что глубина любого условного ПДТ для известной КС сложности $4n-4$, реализующей линейную б. ф. $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, где $n \geqslant 2$, относительно обрывов и замыканий контактов равна 2^n.

Тесты для контактов и функциональных элементов

В кандидатской диссертации автора [147] рассматривались задачи тестирования базисных элементов схем — контактов и функциональных элементов — путём составления из них нескольких КС и СФЭ соответственно и наблюдения выдаваемых схемами значений на любых наборах значений входных переменных (см. также [141]–[146], [148, 149]). В качестве неисправностей предполагались обрывы и замыкания контактов и ПКН на выходах функциональных элементов. Под проверяющим (диагностическим) тестом понимался набор указанных схем, позволяющий однозначно определить исправность или неисправность (соответственно состояние) каждого базисного элемента, а под длиной теста — число входящих в него схем. Были получены различные верхние и нижние оценки минимально возможных длин тестов для N контактов или N ФЭ, реализующих в исправном состоянии одну и ту же заданную б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, среди которых не более k могут быть неисправны (N и k — фиксированные натуральные числа), а в некоторых случаях найдены точные значения этих длин.

Цели и задачи

Основными целями работы являются:

- нахождение для произвольной б. ф. f точных значений длин минимальных тестов для реализующих эту функцию КС и СФЭ при различных исходных условиях, т. е. нахождение точных значений величин $D_{\text{Т}}^{\text{Н}}(f)$ и $D_{\text{Т}\,(\text{М})}^{B;\,\text{Н}}(f)$ при различных Н, Т, B и М;

- получение нетривиальных и не известных ранее верхних и нижних оценок (в идеале — точных значений) функций Шеннона длин тестов для КС и СФЭ при различных исходных условиях, т. е. нахождение новых и улучшение существующих оценок величин $D_{\text{Т}}^{\text{Н}}(n)$ и $D_{\text{Т}\,(\text{М})}^{B;\,\text{Н}}(n)$ при различных Н, Т, B, М и n;

- получение для почти всех б. ф. от n переменных нетривиальных и не известных ранее верхних и нижних оценок (в идеале — точных значений) длин минимальных тестов для реализующих эти функции КС и СФЭ при различных исходных условиях, т. е. нахождение новых и улучшение существующих оценок величин $D_{\text{Т}}^{\text{Н}}(f)$ и $D_{\text{Т}\,(\text{М})}^{B;\,\text{Н}}(f)$ при различных Н, Т, B и М для почти всех б. ф. f от n переменных.

Научная новизна

Результаты диссертации, сформулированные в виде теорем, лемм и следствий из теорем, за исключением отдельно оговоренных случаев, являются новыми и получены автором самостоятельно. На научную новизну результатов, сформулированных в виде утверждений и следствий из них (не являющихся одновременно следствиями теорем), автор не претендует.

Теоретическая и практическая значимость работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории контроля и диагностики управляющих систем. Возможно включение этих результатов в образовательные программы для студентов и аспирантов математических специальностей. Представленные в диссертации методы синтеза могут быть использованы на практике при проектировании легкотестируемых цифровых устройств и схем.

Методология и методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики и математической кибернетики, математической теории синтеза, контроля и диагностики управляющих систем, теории булевых функций, комбинаторики, а также ряд новых предложенных автором методов синтеза и анализа контактных схем и схем из функциональных элементов. Все верхние оценки величин $D(f)$ и $D(n)$ с различными верхними и нижними индексами доказаны конструктивно, т. е. с предъявлением конкретных схем и тестов для них, дающих эти оценки.

Положения, выносимые на защиту

В данной диссертации:

- найдены точные значения а) функций Шеннона длин единичных проверяющих, полных проверяющих и полных диагностических тестов размыкания и замыкания для контактных схем, б) длин минимальных единичного и полного проверяющих тестов размыкания при реализации произвольной булевой функции контактными схемами, в) длин минимальных единичных и полных проверяющих тестов размыкания и замыкания, а также единичного проверяющего теста относительно обрывов и замыканий контактов при реализации почти любой булевой функции контактными схемами;

- получены новые верхние оценки а) для любого натурального k — функций Шеннона длин k-диагностических тестов размыкания и замыкания для контактных схем, б) длины минимального единичного диагностического теста относительно обрывов и замыканий контактов, а также — для любого натурального k — длин минимальных k-диагностических тестов размыкания и замыкания при реализации почти любой булевой функции контактными схемами;

- получены новые нижние оценки мощностей множеств самых труднотестируемых булевых функций с точки зрения полных диагностических тестов относительно обрывов и замыканий, только обрывов или только замыканий контактов в реализующих эти функции контактных схемах;

- для ряда комбинаций полного базиса, вида неисправностей функциональных элементов и типа теста найдено точное значение длины минимального теста при реализации произвольной либо почти любой булевой функции схемами из функциональных элементов в указанном базисе и/или точное значение функции Шеннона длины теста для таких схем;

- для ряда комбинаций полного базиса, вида неисправностей функциональных элементов и типа теста получены новые оценки функции Шеннона длины теста для схем из функциональных элементов в указанном базисе и/или оценки длины минимального теста при реализации почти любой булевой функции такими схемами;

- получена новая нижняя оценка функции Шеннона длины полного диагностического теста при однотипных константных неисправностях на входах схем;

- предложен метод реализации булевых функций легко диагностируемыми схемами из функциональных элементов относительно единичных неисправностей элементов в схемах, с использованием которого получены новые верхние оценки функций Шеннона длин единичных диагностических тестов в различных полных базисах при различных неисправностях элементов.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых на восемнадцать параграфов, заключения и списка литературы из 324 наименований. Общий объем диссертации — 377 страниц, в работе содержатся 42 рисунка и 12 таблиц. В каждом параграфе принята сквозная нумерация теорем, лемм, утверждений, следствий, замечаний, примеров, формул, рисунков и таблиц.

Содержание диссертации

В главе 1 изучаются возможности реализации булевых функций двухполюсными контактными схемами, допускающими короткие проверяющие или диагностические тесты относительно обрывов и/или замыканий контактов.

В §1 устанавливается несколько вспомогательных утверждений, которые используются в §§2–7. Приведём некоторые из них.

Утверждение 1.3 [155]. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *справедливы равенства* $D^0_{\text{ПП}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f)$ *и* $D^1_{\text{ПП}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f)$.

Следствие 1.2. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливы равенства* $D^0_{\text{ПП}}(n) = D^0_{\text{ЕП}}(n)$ *и* $D^1_{\text{ПП}}(n) = D^1_{\text{ЕП}}(n)$.

Утверждение 1.4 [164]. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *и любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства* $D^0_{k\text{-П}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f)$ *и* $D^1_{k\text{-П}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f)$.

Следствие 1.3. *Для любых* $n \geqslant 0$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *справедливы равенства* $D^0_{k\text{-П}}(n) = D^0_{\text{ЕП}}(n)$ *и* $D^1_{k\text{-П}}(n) = D^1_{\text{ЕП}}(n)$.

Из утверждений 1.3, 1.4 и следствий 1.2, 1.3 вытекает, что для любых $n \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$ и любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ выполнены соотношения (1.1)–(1.4) (см. с. 70).

Далее перечислим основные результаты главы 1.

В §2 рассматриваются проверяющие тесты для КС относительно обрывов контактов. В формулировке нижеследующей теоремы присутствует величина $m(f)$, определяемая на с. 74.

Теорема 2.1 [155]. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *справедливо равенство* $D^0_{\text{ЕП}}(f) = m(f)$.

Следствие 2.1 [155]. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо равенство* $D^0_{\text{ЕП}}(n) = n$.

Следствие 2.2 [155]. *Для почти всех б. ф.* f *от* n *переменных* $D^0_{\text{ЕП}}(f) = 2$.

Величина $m(f)$ может быть достаточно просто вычислена по столбцу значений функции $f(\tilde{x}^n)$ (см. с. 74). Таким образом, теорема 2.1 позволяет найти точное значение величины $D^0_{\text{ЕП}}(f)$ для каждой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$.

С использованием соотношений (1.1)–(1.4) из основных результатов §2 и §4 можно получать новые результаты. Например, из следствия 2.1 и (1.2) вытекает равенство $D^0_{\text{ПП}}(n) = n$, существенно улучшающее неравенство $D^0_{\text{ПП}}(n) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ из [186, теорема 1].

В §3 рассматриваются диагностические тесты для КС относительно обрывов контактов.

Теорема 3.2 [164]. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$D^0_{k\text{-Д}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0, 1, 2\}, \\ n+1, & \text{если } n = 3, \\ n + k(n-2), & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 3.1 [164]. *Для любых* $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ *справедливо неравенство* $D^0_{k\text{-Д}}(n) \leqslant n + k(n-2)$.

Следствие 3.2 [164]. *Справедливо неравенство*

$$D^0_{\text{ЕД}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \textit{если } n \in \{0,1,2\},\\ n+1, & \textit{если } n = 3,\\ 2n-2, & \textit{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 3.2 улучшает оценку $D^0_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, которую можно получить по аналогии с [192, с. 113, теорема 9].

Теорема 3.3 [164]. *При условии $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^0_{k\text{-Д}}(f) \leqslant 2k+2$.*

Следствие 3.3 [164]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^0_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 4$.*

Следствие 3.4 [165] (из теоремы 3.4 [165]). *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^0_{\text{ПД}}(n) = 2^{n-1}$.*

Следствие 3.4 улучшает неравенство $D^0_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n - 2$ из [206], полученное для $n \geqslant 2$.

Положим $w(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$.

Следствие 3.5 [165] (из теоремы 3.5 [165]). *Число б. ф. f от n переменных, для которых $D^0_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, при $n \geqslant 2$ не меньше*

$$2 + 2\sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^{n-1}}{w(n-1)} \right\rceil} \left(\frac{2^{n-1}(2^{n-1} - w(n-1)) \cdot \ldots \cdot (2^{n-1} - (i-1)w(n-1))}{i!} \right)$$

и асимптотически не меньше $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$.

Следствие 3.5 с учётом следствия 3.4 показывает, что существует достаточно много б. ф. f от n переменных, для которых $D^0_{\text{ПД}}(f) = D^0_{\text{ПД}}(n)$, т. е. самых труднотестируемых б. ф. от n переменных с точки зрения ПДТ размыкания для реализующих эти функции контактных схем.

В §4 рассматриваются проверяющие тесты для КС относительно замыканий контактов. В работе автора [152], в частности, установлены неравенства $D^1_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 4$ для почти всех б. ф. f от n переменных (следствие 1) и $D^{1\,(+1)}_{\text{ЕП}}(n) \leqslant 2n$ для любого $n \geqslant 0$ (теорема 2). Следующие две теоремы при $k = 1$ улучшают эти два результата соответственно.

Теорема 4.2 [169]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных выполняется равенство $D^1_{k\text{-П}}(f) = 2$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 4.4 [170]. *Для любых $n \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $D^1_{k\text{-П}}(n) = n$.*

Из теоремы 4.4 и соотношения (1.4) вытекает равенство $D^1_{\text{ПП}}(n) = n$, существенно улучшающее асимптотическое неравенство $D^1_{\text{ПП}}(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log n}} + \frac{5}{2}}$ из [186, теорема 2].

В §5 рассматриваются диагностические тесты для КС относительно замыканий контактов. В работе автора [152], в частности, установлены неравенства $D^1_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$ для почти всех б. ф. f от n переменных (следствие 2) и $D^{1\,(+2)}_{\text{ЕД}}(n) \leqslant 4n$ для любого $n \geqslant 0$ (теорема 4). Сформулированные ниже следствия 5.1 и 5.3 улучшают эти два результата соответственно. Отметим, что все основные результаты §5 полностью совпадают с основными результатами §3 после замены у всех букв D верхних индексов 0 на 1, тогда как доказательства соответствующих результатов из §3 и §5 не всегда аналогичны; обоснование этого приведено во втором абзаце §5 (см. с. 133).

Теорема 5.1 [169]. *При условии $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^1_{k\text{-Д}}(f) \leqslant 2k + 2$.*

Следствие 5.1 [169]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^1_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 4$.*

Теорема 5.3 [170]. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$D^1_{k\text{-Д}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0, 1, 2\}, \\ n + 1, & \text{если } n = 3, \\ n + k(n-2), & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 5.2 [170]. *Для любых $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $D^1_{k\text{-Д}}(n) \leqslant$ $\leqslant n + k(n-2)$.*

Следствие 5.3 [170]. *Справедливо неравенство*

$$D^1_{\text{ЕД}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0, 1, 2\}, \\ n + 1, & \text{если } n = 3, \\ 2n - 2, & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 5.3 улучшает также оценку $D^1_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, которую можно получить по аналогии с [192, с. 113, теорема 9].

Следствие 5.4 [165] (из теоремы 5.4 [165]). *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^1_{\text{ПД}}(n) = 2^{n-1}$.*

Следствие 5.4 улучшает неравенство $D^1_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n - 2$ из [206], полученное для $n \geqslant 2$.

Следствие 5.5 [165] (из теоремы 5.5 [165]). *Число б. ф. f от n переменных, для которых $D^1_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, при $n \geqslant 2$ не меньше*

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^{n-1}}{w(n-1)} \right\rceil} \left(\frac{2^{n-1}(2^{n-1} - w(n-1)) \cdot \ldots \cdot (2^{n-1} - (i-1)w(n-1))}{i!} \right)$$

и асимптотически не меньше $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$.

(Здесь так же, как и в формулировке следствия 3.5, полагаем $w(n)=\frac{n^2+n+2}{2}$.)

В §6 рассматриваются единичные проверяющие тесты для КС относительно обрывов и замыканий контактов. Назовём б. ф. $f_2(\tilde{x}^n)$ *родственной* б. ф. $f_1(\tilde{x}^n)$, если существуют такие попарно различные индексы $i_1,\dots,i_n$ от 1 до n и такие булевы константы $\sigma_1,\dots,\sigma_n$, что $f_2(\tilde{x}^n)=f_1(x_{i_1}^{\sigma_1},\dots,x_{i_n}^{\sigma_n})$.

Теорема 6.1 [161]. *Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — б. ф.. Справедливо равенство*

$$D^{01}_{\text{ЕП}}(f)=\begin{cases}0, & \text{если } f\equiv 0 \text{ или } f\equiv 1,\\ 2, & \text{если } f \text{ родственна функции } x_1,\\ 3, & \text{если } f \text{ родственна одной из функций } x_1x_2,\ x_1\vee x_2.\end{cases}$$

В остальных случаях $D^{01}_{\text{ЕП}}(f)\geqslant 4$.

Теорема 6.1 даёт описание всех б. ф. f, для которых величина $D^{01}_{\text{ЕП}}(f)$ равна 0, 1, 2 и 3. Оказывается, в большинстве других случаев эта величина принимает значение 4.

Теорема 6.3 [161]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{01}_{\text{ЕП}}(f)=4$.*

Отметим, что единую константную верхнюю оценку величины $D^{01}_{\text{ЕП}}(f)$ для любой б. ф. f получить невозможно, поскольку $D^{01}_{\text{ЕП}}(n)\geqslant n+2$ при $n\geqslant 2$ [225, теорема 2].

В §7 рассматриваются единичные и полные диагностические тесты для КС относительно обрывов и замыканий контактов.

Теорема 7.2 [168]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{01}_{\text{ЕД}}(f)\leqslant 8$.*

Следствие 7.1 [165] (из теоремы 7.4 [165] и теоремы 7.5 [165]). *Число б. ф. f от n переменных, для которых $D^{01}_{\text{ПД}}(f)=2^n$, при $n\geqslant 2$ не меньше $4\cdot 2^{2^{n-2}}-6$.*

Следствие 7.1 с учётом равенства $D^{01}_{\text{ПД}}(n)=2^n$ [108, теорема 1] показывает, что существует достаточно много самых труднотестируемых б. ф. от n переменных с точки зрения ПДТ относительно обрывов и замыканий контактов в реализующих эти функции контактных схемах (при этом в работе [108] фактически было получено равенство $D^{01}_{\text{ПД}}(f)=2^n$ для двух случаев: $f(\tilde{x}^n)=x_1\oplus\ldots\oplus x_n$ и $f(\tilde{x}^n)=x_1\oplus\ldots\oplus x_n\oplus 1$, где $n\geqslant 1$).

В главе 2 изучаются возможности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов в различных полных базисах, допускающими короткие проверяющие или диагностические тесты относительно однотипных константных, произвольных константных либо инверсных неисправностей на входах и/или выходах элементов.

В §8 устанавливается несколько вспомогательных утверждений, которые используются в §§9–18. В частности, получен аналог принципа двойственности (см., например, [260, с. 24]) для задачи синтеза легкотестируемых СФЭ. Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ и любого ф. п. базиса B

обозначим через $f^*(\tilde{x}^n)$ двойственную к f б. ф. $\overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$; а через B^* — базис, получающийся из B заменой всех содержащихся в нём б. ф. на двойственные. Положим

$$\mathrm{Н}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{Н} = 0, \\ 0, & \text{если } \mathrm{Н} = 1, \\ \mathrm{Н}, & \text{если } \mathrm{Н} \in \{01, \mathrm{Inv}\}. \end{cases}$$

Утверждение 8.9. *Для любого ф. п. базиса* B, *любых допустимых* М, Н, Т *и любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *справедливо равенство* $D^{B^*;\,\mathrm{Н}^*}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f^*) = D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f)$, *если значение его правой части определено.*

Следствие 8.1. *Для любого ф. п. базиса* B, *любых допустимых* М, Н, Т *и любого* $n \geqslant 0$ *справедливо равенство* $D^{B^*;\,\mathrm{Н}^*}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(n) = D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(n)$, *если значение его правой части определено.*

С использованием утверждения 8.9 и следствия 8.1 из основных результатов главы 2, содержащихся в §§9–18 и приведённых ниже, можно получать двойственные им результаты. Примеры получения таких результатов приведены на с. 185 (примеры 8.1 и 8.2).

В §9 рассматриваются единичные и полные проверяющие тесты для СФЭ относительно ОКН типа 1 или типа 0 на выходах элементов. Обозначим через P_2 множество всех б. ф, а через M — множество всех монотонных б. ф. (определение монотонной б. ф. см., например, в [260, с. 36]). В следующей теореме описан достаточно обширный класс ф. п. базисов B, для которых $D^{B;\,1}_{\mathrm{ЕП}\,(\mathrm{О})}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$.

Теорема 9.3 [154]. *Пусть* $B \subseteq (\mathsf{M} \cup \{\overline{x}_1 \vee h \mid h \in P_2\}) \setminus \{1\}$ *— такой ф. п. базис, что отождествлением и переименованием переменных из монотонных функций этого базиса можно получить функции* $x\&y$ *и* $x \vee y$. *Тогда для любого* $n \geqslant 2$ *справедливо равенство* $D^{B;\,1}_{\mathrm{ЕП}\,(\mathrm{О})}(n) = 2$.

Рассмотрим стандартный базис $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$. Выделим возможное представление б. ф. $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \tag{8.1}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$.

В формулировке следующей теоремы присутствуют величина m_f и двоичный набор $\tilde{\sigma}_f$ длины n, определяемые на с. 194. Они легко находятся по столбцу значений функции $f(\tilde{x}^n)$, что следует непосредственно из их определений.

Теорема 9.4 [163]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_0;\,1}_{\text{ПП (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1) или } f \equiv 1, \\ 2, & \text{если } \mathrm{m}_f \leqslant n-2 \text{ и } f(\tilde{\sigma}_f) = 1, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 9.4 уточняет равенство $D^{B_0;\,1}_{\text{ПП (О)}}(n) = 2$ из [46, теорема 3], полученное для $n \geqslant 2$. Выделим четыре возможных представления функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = 0,\ \overline{x}_i \text{ или } x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2} \ldots \& x_{i_k}, \tag{9.6}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \overline{x}_{i_1} \& \overline{x}_{i_2} \& x_{i_3} \& \ldots \& x_{i_k} \text{ или } \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2})^{\sigma_2} \& x_{i_3})^{\sigma_3} \& \ldots \& x_{i_k})^{\sigma_k}, \tag{9.7}$$

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k}, \tag{9.15}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2})^{\delta_1} \& x_{i_3}^{\sigma_3})^{\delta_2} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k})^{\delta_{k-1}}, \tag{9.16}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$ в представлении (9.15) и $2 \leqslant k \leqslant n$ в представлениях (9.6), (9.7), (9.16); $i, i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, индексы $i_1, \ldots, i_k$ попарно различны и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \delta_1, \ldots, \delta_{k-1} \in \{0, 1\}$, причём в представлении (9.7) хотя бы одно из чисел $\sigma_2, \ldots, \sigma_k$ равно 0 и если $k = 2$, то полагаем $x_{i_3} \& \ldots \& x_{i_k} \equiv 1$, а в представлении (9.16) хотя бы одно из чисел $\delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$ равно 0.

В формулировках следующих двух теорем и следствий из них под B понимается произвольное ф. п. подмножество множества $\{\overline{x}, x_1 \& \ldots \& x_m \mid m \geqslant 2\}$, например, множество $B_3 = \{\&, \neg\}$.

Теорема 9.5 [153]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 1, *справедливо равенство*

$$D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.6)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.7)}, \\ 3, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(f)$ не определено.

Следствие 9.1 [153]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 3$.*

Теорема 9.6 [153]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B;\,0}_{\text{ЕП (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (9.15), \textit{ но не в виде } (8.1), \\ 2, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (9.16), \\ 3, & \textit{если } f \textit{ не представима в видах } (8.1), (9.15), (9.16). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D^{B;\,0}_{\text{ЕП (О)}}(f)$ не определено.

Следствие 9.2 [153]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B;\,0}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 3$.*

В §10 рассматриваются единичные и полные диагностические тесты для СФЭ относительно ОКН типа 1 или типа 0 на выходах элементов.

Теорема 10.1 [154]. *Для любого ф. п. конечного базиса B и любого $p \in \{0,1\}$ справедливо неравенство $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 2$ при $n > m(B)$, причём для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(f) \geqslant 2$.*

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \vee \ldots \vee K_m, \tag{10.1}$$

где $m \geqslant 1$ и каждое слагаемое K_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x}_{i_j}$, либо $x_{i_j}x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i'_j$.

Теорема 10.2 [156]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 1, справедливо равенство*

$$D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (10.1), \textit{ но не в виде } (8.1), \\ 2, & \textit{если } f \textit{ не представима в виде } (10.1). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ не определено.

Следствие 10.1 [156]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$.*

Следствие 10.1 улучшает неравенство $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) \leqslant 2n+1$ из [193], которое было получено для $n \geqslant 1$.

Рассмотрим базис Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$. Выделим два возможных представления функции f:

$$f(\tilde{x}^n) = 0 \text{ или } x_i, \tag{10.8}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$;

$$f(\tilde{x}^n) = 1 \text{ или } L_1 \& \ldots \& L_m, \tag{10.9}$$

где $m \geqslant 1$ и каждый множитель L_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x}_{i_j}$, либо $x_{i_j} \oplus x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i'_j$.

Теорема 10.3 [151]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде } (10.8), \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде } (10.9), \text{ но не в виде } (10.8), \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима ни в одном из видов } (10.8), (10.9). \end{cases}$$

Следствие 10.2. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$.*

Следствия 10.1 и 10.2 показывают, что неравенство $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 2$ из теоремы 10.1 в общем случае неулучшаемо.

Теорема 10.4 [150]. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^{0}_{\text{ПД (Р)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$.*

Теорема 10.4 напрямую не относится к тематике §10 и, более того, является единственным основным результатом диссертации, касающимся неисправностей (а именно ОКН типа 0) на входах схем. Она получается в качестве очевидного следствия из леммы 10.2 (см. с. 238), которая также используется при доказательстве следующего результата.

Рассмотрим базис $B_2 = \{x \,|\, y\}$.

Теорема 10.5 [150]. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^{B_2;\,1}_{\text{ПД (О)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$.*

В §11 рассматриваются единичные и полные проверяющие тесты для СФЭ относительно ПКН на выходах элементов. В следующей теореме описан достаточно обширный класс ф. п. базисов B, для которых $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (О)}}(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$; в этот класс, в частности, входят все полные базисы (с точностью до переименования переменных), состоящие из функций от не более чем двух переменных и не содержащие констант.

Теорема 11.1. *Пусть B — произвольное ф. п. подмножество множества $\{(x_1^\sigma \& \ldots \& x_n^\sigma)^\delta, (x_1 \& \overline{x}_2 \& h)^\delta, x_1 \oplus x_2 \oplus c \mid n \in \mathbb{N};\, h \in P_2;\, \sigma, \delta, c \in \{0,1\}\} \setminus \{0,1\}$. Тогда $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (О)}}(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$, причём для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (О)}}(f) \geqslant 3$.*

Формулировка теоремы 11.1 по существу отличается от формулировки теоремы 4 работы [154] лишь добавлением условий $0 \notin B$ и $1 \notin B$ (см. замечание 11.2 на с. 241–242 диссертации).

Рассмотрим базис $B_4 = \{x \& y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$.

Теорема 11.2 [157]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде } (8.1), \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде } (8.1). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП (О)}}(f)$ не определено.

Следствие 11.1 [157]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство* $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 2$.

Следствие 11.1 показывает, что при рассмотрении в качестве B базиса B_4, содержащего, помимо б. ф. от одной и двух переменных, только одну, причём «просто устроенную», функцию от трёх переменных, неравенство $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (О)}}(n) \geqslant 3$ из теоремы 11.1 уже не выполняется.

Рассмотрим базис $B_5 = \{h^{\sigma_1}(x, y, z, t), (x \oplus y \oplus z)^{\sigma_2}\}$, где $h(x, y, z, t)$ — б. ф., заданная таблицей 11.1 (см. с. 252; вместо звёздочки может стоять как 0, так и 1), а σ_1, σ_2 — фиксированные булевы константы, хотя бы одна из которых равна 0.

Теорема 11.4 [159]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_5;\,01}_{\text{ПП (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \textit{если } f \equiv 0 \textit{ или } f \equiv 1, \\ 2 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие 11.3 [159]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство* $D^{B_5;\,01}_{\text{ПП (О)}}(n) = 2$.

Отметим, что базис B_5, особенно в случае $h(x, y, z, t) = x(y \sim zt) \vee y\overline{z}$, возникающем, когда в таблице 11.1 вместо звёздочки стоит 0, существенно проще базиса $\mathtt{B}_3$, для которого Д. С. Романов в [214] получил оценку $D^{\mathtt{B}_3;\,01}_{\text{ПП (О)}}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 0$ (полное описание базиса $\mathtt{B}_3$ см. в 3-м абзаце на с. 119 работы [214], а также в соотношениях (1)–(16) из указанной работы; данный базис в ней обозначается через $\hat{B}$), а сама оценка из следствия 11.3 при этом ниже и точнее (установлено точное равенство).

Рассмотрим базисы $B_6 = \{\&, \vee, \oplus, 1\}$, $B'_6 = \{\&, \vee, \oplus, \rightarrow\}$.

Теорема 11.5 [162]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных* $D^{B_6;\,01}_{\text{ПП (О)}}(f) \leqslant 4$.

В следующих двух теоремах рассматриваются СФЭ, содержащие не более одной фиктивной входной переменной и реализующие заданные булевы функции.

Теорема 11.6 [162]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство* $D^{B_6;\,01\,(+1)}_{\text{ПП (О)}}(n) \leqslant 5$.

Теорема 11.7 [162]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство* $D^{B'_6;\,01\,(+1)}_{\text{ПП (О)}}(n) \leqslant 4$.

В §12 рассматриваются единичные и полные диагностические тесты для СФЭ относительно ПКН на выходах элементов.

Следствие 12.1 [154] (из теоремы 12.1 [154]). *Если B — произвольный ф. п. конечный базис и $n > m(B)$, то $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 3$ и для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящей от всех своих переменных,* $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(f) \geqslant 3$.

Рассмотрим базис $B_7 = \{\overline{\varphi}(\tilde{x}^6)\}$, где $\varphi(\tilde{x}^6)$ — б. ф., определяемая на с. 279–280. Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = \varphi^{\sigma}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_6}), \tag{12.6}$$

где $i_1, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, n\}$ и $\sigma \in \{0, 1\}$.

Теорема 12.3 [157]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД (O)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде } (8.1), \\ 2, & \text{если } f \text{ представима в виде } (12.6), \text{ но не в виде } (8.1), \\ 3, & \text{если } f \text{ не представима в виде } (12.6). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД (O)}}(f)$ не определено.

Следствие 12.3 [157]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД (O)}}(n) = 3$.*

Следствие 12.3 демонстрирует, что неравенство $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (O)}}(n) \geqslant 3$ из следствия 12.1 в общем случае неулучшаемо.

Отметим, что базис B_7 проще базиса $\mathtt{B}_5$, для которого Д. С. Романов и Е. Ю. Романова в [227, теорема 3] установили неравенство $D^{\mathtt{B}_5;\,01}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 6$ при $n \geqslant 1$ (базис $\mathtt{B}_5$ состоит из одной б. ф. от девяти переменных, одной б. ф. от четырёх переменных, а также из функций $x \& y$, $x \oplus y$ и $x \oplus y \oplus 1$), а сама оценка из следствия 12.3 при этом ниже и точнее (получено точное равенство).

Рассмотрим базис $B_3 = \{\&, \neg\}$.

Теорема 12.4 [150]. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^{B_3;\,01}_{\text{ПД (O)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$.*

В §13 рассматриваются k-проверяющие тесты для СФЭ относительно ОКН типа 0 или типа 1 на входах и выходах, а также только на входах элементов. В §§13–15, а также в теореме 16.1 и следствии 16.1 предполагается, что k — произвольное натуральное число, и приведены примеры ф. п. конечных базисов B, для которых найдены константные (не зависящие от n и k) точные значения величин $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(n)$ и $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ при некоторых $\text{М} \in \{\text{I}, \text{IO}\}$, $\text{Н} \in \{0, 1, 01\}$ и $\text{Т} \in \{k\text{-П}, k\text{-Д}\}$. (Здесь и всюду во вступлениях к §§9–18 в основной части диссертации, а также в приложении Б под словами «найдено точное значение величины $D^{\because}_{\because}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$» понимается, что это значение найдено для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, а в каждом из случаев $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ — независимо один от другого — либо оно также найдено, либо доказано, что оно не определено.)

Рассмотрим базис $B_8(k) = \{\varphi(\tilde{x}^m), \overline{x}\}$, где $m = \max(k+1, 3)$ и $\varphi(\tilde{x}^m) = x_1 \ldots x_m \vee \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_m$.

Теорема 13.1 [160]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде } (8.1). \end{cases}$$

Следствие 13.1 [160]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (I)}}(n) = 1$.*

Теорема 13.2 [160]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 0, справедливо равенство*

$$D_{k\text{-П (IO)}}^{B_8(k);\,0}(f) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } f \text{ \textit{представима в виде} (8.1)},\\ 1, & \text{\textit{если} } f \text{ \textit{не представима в виде} (8.1) \textit{и} } f(\tilde{1}^n) = 1,\\ 2, & \text{\textit{если} } f(\tilde{1}^n) = 0. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D_{k\text{-П (IO)}}^{B_8(k);\,0}(f)$ не определено.

Следствие 13.2 [160]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D_{k\text{-П (IO)}}^{B_8(k);\,0}(n) = 2$.*

В §14 рассматриваются k-диагностические тесты для СФЭ относительно ОКН типа 0 или типа 1 на входах и выходах, а также только на входах элементов.

Рассмотрим базис $B_9(k) = \{\psi(\tilde{x}^q), \overline{\psi}(\tilde{x}^q)\}$, где $q = 2k + \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor + 2$, а $\psi(\tilde{x}^q)$ — б. ф., определяемая на с. 291–292.

Теорема 14.1 [160]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D_{k\text{-Д (I)}}^{B_9(k);\,0}(f) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } f \text{ \textit{представима в виде} (8.1)},\\ 1, & \text{\textit{если} } f \text{ \textit{не представима в виде} (8.1)}. \end{cases}$$

Следствие 14.1 [160]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D_{k\text{-Д (I)}}^{B_9(k);\,0}(n) = 1$.*

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_s}, \tag{14.1}$$

где $s \in \{1, \ldots, n\}$ и $i_1, \ldots, i_s$ — попарно различные индексы от 1 до n.

Теорема 14.2 [160]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 0, справедливо равенство*

$$D_{k\text{-Д (IO)}}^{B_9(k);\,0}(f) = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если} } f \text{ \textit{представима в виде} (8.1)},\\ 1, & \text{\textit{если} } f \text{ \textit{представима в виде} (14.1), \textit{но не в виде} (8.1)},\\ 2, & \text{\textit{если} } f \text{ \textit{не представима в виде} (14.1)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D_{k\text{-Д (IO)}}^{B_9(k);\,0}(f)$ не определено.

Следствие 14.2 [160]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D_{k\text{-Д (IO)}}^{B_9(k);\,0}(n) = 2$.*

В §15 рассматриваются k-проверяющие тесты для СФЭ относительно ПКН на входах и выходах, а также только на входах элементов.

Рассмотрим базис $B_{10}(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \psi(\tilde{x}^{k+1}), \overline{x}, 0\}$, где $\psi(\tilde{x}^{k+1}) = x_1 \ldots x_{k+1} \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_{k+1}$, а $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — б. ф., определяемая на с. 297.

Теорема 15.1 [166]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.8)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (10.8)}. \end{cases}$$

Следствие 15.1 [166]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство* $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (I)}}(n) = 2$.

Назовём б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ *палиндромной*, если на любой паре n-наборов, различающихся во всех компонентах, она принимает одинаковые значения.

Теорема 15.2 [166]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 1, *справедливо равенство*

$$D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \equiv 0, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.1) и не является палиндромной}, \\ 3, & \text{если } f \text{ — палиндромная функция и } f \not\equiv 0. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 15.2 [166]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство* $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 3$.

В §16 рассматриваются k-диагностические тесты для СФЭ относительно ПКН на входах и выходах, а также только на входах элементов.

Рассмотрим базис $B_{11}(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \xi(\tilde{x}^{3k+2}), \eta(\tilde{x}^{4k+2}), \overline{x}, 0\}$, где $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — функция из базиса $B_{10}(k)$, а $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$ и $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ — б. ф., определяемые на с. 303–304.

Теорема 16.1 [166]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.8)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (10.8)}. \end{cases}$$

Следствие 16.1 [166]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство* $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 2$.

Б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ называется *самодвойственной*, если $f^* = f$ (см., например, [260, с. 34]).

В следующей теореме и следствии из неё рассмотрен случай $k = 1$.

Теорема 16.2 [166]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 1, *справедливо* *равенство*

$$D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)},\\ 1, & \text{если } f \equiv 0,\\ 2, & \text{если } f = \overline{x}_i \text{ для некоторого } i \in \{1,\dots,n\},\\ 3, & \text{если } f \text{ — несамодвойственная функция и } f \not\equiv 0,\\ 4, & \text{если } f \text{ — самодвойственная функция и } f \notin \{x_1,\dots,x_n,\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n\}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, *то значение* $D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(f)$ *не определено.*

Следствие 16.2 [166]. *Для любого* $n \geqslant 3$ *справедливо равенство* $D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(n) = 4$.

Теорема 16.3 [166]. *Для любого* $k \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство* $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 4$ *при* $n \geqslant 3$, *причём в случае* $k \geqslant 2$ *для почти всех б. ф.* f *от* n *переменных* $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (IO)}}(f) = 4$.

В §17 рассматриваются полные диагностические тесты для СФЭ относительно ИН на выходах элементов. Приведён пример ф. п. конечного базиса B, для которого найдена константная верхняя оценка величины $D^{B;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n)$. А именно, рассмотрим базис $B_{12} = \{x\&y\&z, x \oplus y, 1\}$.

Теорема 17.1 [158]. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливы неравенства* $1 \leqslant D^{B_{12};\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) \leqslant 2$.

В §18 предложен метод построения СФЭ в произвольном ф. п. базисе, допускающих короткие единичные диагностические тесты относительно ОКН, ПКН либо ИН на входах и/или выходах элементов, основанный на существовании схем в том же базисе, допускающих короткие единичные проверяющие тесты относительно неисправностей такого же типа — **теорема 18.1** [167] (см. с. 323–324). Формулировка данного результата ввиду своей громоздкости здесь не приводится.

С использованием теоремы 18.1 получен ряд новых верхних оценок функций Шеннона длины ЕДТ для схем в различных базисах при различных неисправностях элементов. Эти оценки сформулированы в следующих пяти теоремах.

Рассмотрим базис $B_8(1) = \{x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3, \overline{x}\}$.

Теорема 18.2 [167]. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B_8(1);\,0}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 3$.

Рассмотрим базис Жегалкина $B_1' = \{\&, \oplus, 1\}$.

Теорема 18.3 [167]. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B_1';\,1}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 3$.

Рассмотрим базис $B_{10}(1)$, получаемый из определённого выше семейства базисов $B_{10}(k)$ при $k = 1$.

Теорема 18.4 [167]. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B_{10}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 4$.

Рассмотрим базис $B_4 = \{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$.

Теорема 18.5 [167]. *Для любого* $n \geqslant 1$ *справедливо неравенство* $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 4$.

Теорема 18.6 [167]. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B'_1;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 3$.

В заключении подводятся итоги выполненного исследования, перечисляются основные нерешённые проблемы по тематике диссертации, указываются различные обобщения рассмотренных в диссертации постановок задач.

В приложениях А и Б к диссертации приведены сводные таблицы результатов по тематикам глав 1 и 2 (таблицы А.1 и Б.1 соответственно).

Степень достоверности результатов

Все результаты диссертации математически строго доказаны.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на семинаре сектора теоретической кибернетики математического отдела ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2015–2020 гг.), на семинаре «Диагностика управляющих систем» под руководством профессора Н. П. Редькина (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, 2016–2019 гг.), на онлайн-семинаре «Дискретная математика и математическая кибернетика» кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (2020 г.), на онлайн-семинаре «Теория управляющих систем и математические модели СБИС» кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (2020 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 11–15 апреля 2016 г.), на XII Международном семинаре «Дискретная математика и её приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 20–25 июня 2016 г.), на конференции молодых учёных ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 29 ноября 2016 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2017» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 10–14 апреля 2017 г.), на XVIII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Пенза, 19–23 июня 2017 г.), на X Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г.), в рамках школы-конференции молодых ученых «Математические модели, высокоточные алгоритмы и программное обеспечение для суперкомпьютеров–2018» (Москва, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 27–29 ноября 2018 г.), на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2019» (Москва, МГУ имени М. В. Ломоносова, 8–12 апреля 2019 г.), на

XIII Международном семинаре «Дискретная математика и её приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 17–22 июня 2019 г.), в рамках школы-конференции молодых ученых «Математические основы конструирования современных алгоритмов в высокопроизводительных вычислениях–2019» (Москва, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 4–5 декабря 2019 г.).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 30 работах ([150]–[179]), из них 21 ([150]–[170]) в научных журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Николаю Петровичу Редькину за постановку задачи и постоянное внимание к работе, всем сотрудникам сектора теоретической кибернетики математического отдела ИПМ им. М. В. Келдыша РАН и лично Алексею Дмитриевичу Яшунскому и Юлии Владиславовне Бородиной за рецензирование и ценные замечания в подготовке статей, а также всем сотрудникам кафедры дискретной математики механико-математического факультета и кафедры математической кибернетики факультета ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова и лично Вадиму Васильевичу Кочергину, Дмитрию Сергеевичу Романову и Андрею Анатольевичу Вороненко за поддержку и доброжелательное отношение.

Глава 1. Тесты для контактных схем

В данной главе изучаются возможности реализации булевых функций двухполюсными контактными схемами, допускающими короткие проверяющие или диагностические тесты относительно обрывов и/или замыканий контактов.

Всюду далее, если в формулировке какого-то результата из главы 1 или главы 2 (под результатом в данном абзаце понимается теорема, лемма, утверждение или следствие, имеющее порядковый номер) встречается какая-то величина вида $D^{\dots}_{\dots}$ (возможно, неоднократно и, возможно, зависящая в разных местах от разных аргументов) и не встречается никаких других величин такого же вида, то внутри доказательства этого результата, если оно явно приведено, для краткости будем опускать все верхние и нижние индексы у указанной величины. Например, всюду в доказательстве теоремы 2.1 вместо $D^0_{\text{ЕП}}(f)$, $D^0_{\text{ЕП}}(S)$ и $D^0_{\text{ЕП}}(T)$ будем писать соответственно $D(f)$, $D(S)$ и $D(T)$ и отдельно это оговаривать не будем; в то же время, скажем, в формулировке утверждения 1.3 присутствуют различные величины вида $D^{\dots}_{\dots}$ (а именно $D^0_{\text{ПП}}$, $D^0_{\text{ЕП}}$, $D^1_{\text{ПП}}$ и $D^1_{\text{ЕП}}$), поэтому во избежание путаницы опускать индексы ни у какой величины такого вида внутри доказательства этого утверждения не будем.

Двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n будем называть *единичным* (*нулевым*) набором б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, если $f(\tilde{\sigma}) = 1$ (соответственно $f(\tilde{\sigma}) = 0$).

Двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n будем называть (i, α)-*набором*, если его i-я (слева) компонента равна α.

Два двоичных набора одинаковой длины называются *противоположными*, если они различаются во всех компонентах.

Через $f^*(\tilde{x}^n)$ будем обозначать двойственную к $f(\tilde{x}^n)$ б. ф. $\overline{f}(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ (см., например, [260, с. 23]), а через $I_M(\tilde{x}^n)$ — б. ф., равную единице на всех наборах из множества M и нулю на всех остальных наборах, где M — произвольное множество n-наборов. Очевидно, что $(f^*)^* = f$ и $I_\varnothing \equiv 0$.

Пусть $f_1(\tilde{x}^n), \dots, f_m(\tilde{x}^n)$ — произвольные б. ф., где $m \geqslant 2$; $\circ$ — произвольная двухместная булева операция, а $\tilde{\sigma}$ — произвольный n-набор. Выражение вида $f_1(\tilde{x}^n) \circ \dots \circ f_m(\tilde{x}^n)$ будем далее для краткости записывать в виде $(f_1 \circ \dots \circ f_m)(\tilde{x}^n)$, а выражение вида $f_1(\tilde{\sigma}) \circ \dots \circ f_m(\tilde{\sigma})$ — в виде $(f_1 \circ \dots \circ f_m)(\tilde{\sigma})$ там, где это удобно.

Введённые к настоящему моменту определения и обозначения будут использоваться как в главе 1, так и в главе 2.

Два контакта будем называть *противоположными*, если один из них имеет вид x_i, а другой — вид $\overline{x}_i$, где $i \in \mathbb{N}$.

Несколько контактов, имеющих одинаковые пары концов, называются *пучком.*

Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$ и S_i — произвольная КС с полюсами A_i и B_i, реализующая б. ф. f_i, где $i = 1, \ldots, m$. Путём отождествления всех вершин $A_1, \ldots, A_m$, а также (независимо) всех вершин $B_1, \ldots, B_m$ из схем $S_1, \ldots, S_m$ можно получить КС S с полюсами A_1 и B_1, представляющую собой *параллельное соединение* схем $S_1, \ldots, S_m$. Путём отождествления вершин B_i и A_{i+1} для каждого $i = 1, \ldots, m-1$ из схем $S_1, \ldots, S_m$ можно получить КС S' с полюсами A_1 и B_m, представляющую собой *последовательное соединение* схем $S_1, \ldots, S_m$. Из определений легко следует, что схема S реализует функцию $f_1 \vee \ldots \vee f_m$, а схема S' — функцию $f_1 \& \ldots \& f_m$.

Через $M_1(f)$ будем обозначать множество всех единичных наборов функции $f(\tilde{x}^n)$.

§1. Вспомогательные утверждения

В данном параграфе устанавливается несколько утверждений, которые будут использованы в §§2–7.

Утверждение 1.1. *Любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать КС, k-неизбыточной относительно обрывов и замыканий контактов для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать контактной схемой (см., например, [105, с. 36]). Среди всех КС, реализующих эту функцию, выберем схему S, содержащую наименьшее число контактов. Докажем, что схема S является k-неизбыточной для любого $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим произвольную неисправность в ней не менее одного и не более k контактов. Схема при этом реализует некоторую ф. н. $g(\tilde{x}^n)$. Легко видеть, что при удалении из схемы S всех неисправных контактов и дополнительном «стягивании» в одну вершину (т. е. отождествлении) концов каждого неисправного замкнутого контакта полученная схема S' в случае отсутствия в ней неисправностей будет реализовывать ту же самую функцию $g(\tilde{x}^n)$. В схеме S' содержится меньше контактов, чем в схеме S, поэтому $g \neq f$. Таким образом, любая ф. н. схемы S отлична от функции $f(\tilde{x}^n)$, откуда следует k-неизбыточность данной схемы. Утверждение 1.1 доказано. □

Следствие 1.1. *Любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать КС, k-неизбыточной относительно только обрывов, а также относительно только замыканий контактов для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Из утверждения 1.1 и следствия 1.1 вытекает, что для любых $n \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$ и любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ значения всех величин $D^{01}_{k\text{-П}}$, $D^{01}_{\text{ЕП}}$, $D^{01}_{k\text{-Д}}$, $D^{01}_{\text{ЕД}}$, $D^{0}_{k\text{-П}}$, $D^{0}_{\text{ЕП}}$, $D^{0}_{k\text{-Д}}$, $D^{0}_{\text{ЕД}}$, $D^{1}_{k\text{-П}}$, $D^{1}_{\text{ЕП}}$, $D^{1}_{k\text{-Д}}$, $D^{1}_{\text{ЕД}}$, зависящих от f или от n, определены.

Утверждение 1.2. *Любой ЕПТ T размыкания (замыкания) для КС S, неизбыточной относительно обрывов (соответственно замыканий) контактов, является также ППТ и k-ПТ размыкания (замыкания) для неё, а сама схема при этом k-неизбыточна относительно неисправностей такого же типа, где k — произвольное натуральное число.*

Доказательство следует из рассуждений, приведённых в [192, с. 147–148]. Обрыв (замыкание) любого одного контакта K схемы S обязан (-но) обнаруживаться хотя бы на одном наборе $\tilde{\sigma}$ из множества T, причём значение, выдаваемое схемой на этом наборе при переходе контакта K в неисправное состояние, меняется с 1 на 0 (соответственно с 0 на 1), так как при обрыве (замыкании) контакта проводимость схемы не может увеличиться (соответственно уменьшиться). Тогда при дополнительном обрыве (замыкании) m произвольных других контактов схемы S указанное значение останется равным 0 (соответственно 1) и неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma} \in T$. Отсюда при рассмотрении произвольного $m \geqslant 0$ следует, что T — ППТ для схемы S, а при рассмотрении произвольного $m \in \{0, \ldots, k-1\}$ — что множество T является k-ПТ для данной схемы, которая при этом k-неизбыточна. Утверждение 1.2 доказано. □

Утверждение 1.3 [155]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливы равенства $D^0_{\text{ПП}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f)$ и $D^1_{\text{ПП}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f)$.*

Доказательство. Неравенства $D^0_{\text{ПП}}(f) \leqslant D^0_{\text{ЕП}}(f)$ и $D^1_{\text{ПП}}(f) \leqslant D^1_{\text{ЕП}}(f)$ следуют из утверждения 1.2. Далее, пусть T — ППТ размыкания (замыкания) для КС S, реализующей б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, длины $D^0_{\text{ПП}}(f)$ (соответственно $D^1_{\text{ПП}}(f)$). Последовательно будем обрывать (замыкать) избыточные контакты в схеме S, то есть такие контакты, что их обрывы (замыкания) не меняют функцию, реализуемую данной схемой. (После замыкания каждого контакта его вершины стягиваем в одну точку.) За конечное число шагов получим неизбыточную схему S', реализующую ту же функцию f. Пусть при этом A — множество оборванных (замкнутых) контактов. Тогда множество T будет ЕПТ для неизбыточной схемы S'. Действительно, обрыв (замыкание) любого контакта K в схеме S' равносилен (-льно) обрыву (замыканию) всех контактов из множества $A \cup \{K\}$ в схеме S, а множество T позволяет обнаружить такую неисправность, так как является ППТ для схемы S. Получаем, что $D^0_{\text{ЕП}}(f) \leqslant |T| = D^0_{\text{ПП}}(f)$ (соответственно $D^1_{\text{ЕП}}(f) \leqslant |T| = D^1_{\text{ПП}}(f)$). Окончательно имеем $D^0_{\text{ПП}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f)$ и $D^1_{\text{ПП}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f)$. Утверждение 1.3 доказано. □

Следствие 1.2. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливы равенства $D^0_{\text{ПП}}(n) = D^0_{\text{ЕП}}(n)$ и $D^1_{\text{ПП}}(n) = D^1_{\text{ЕП}}(n)$.*

Утверждение 1.4 [164]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ и любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $D^0_{k\text{-П}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f)$ и $D^1_{k\text{-П}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f)$.*

Доказательство. Неравенства $D^0_{k\text{-П}}(f) \leqslant D^0_{\text{ЕП}}(f)$ и $D^1_{k\text{-П}}(f) \leqslant D^1_{\text{ЕП}}(f)$ следуют из утверждения 1.2. Обратные неравенства очевидны. Утверждение 1.4 доказано. □

Следствие 1.3. *Для любых $n \geqslant 0$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства $D^0_{k\text{-П}}(n) = D^0_{\text{ЕП}}(n)$ и $D^1_{k\text{-П}}(n) = D^1_{\text{ЕП}}(n)$.*

Из утверждений 1.3, 1.4 и следствий 1.2, 1.3 вытекает, что для любых $n \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$ и любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливы равенства

$$D^0_{\text{ПП}}(f) = D^0_{\text{ЕП}}(f) = D^0_{k\text{-П}}(f), \tag{1.1}$$

$$D^0_{\text{ПП}}(n) = D^0_{\text{ЕП}}(n) = D^0_{k\text{-П}}(n), \tag{1.2}$$

$$D^1_{\text{ПП}}(f) = D^1_{\text{ЕП}}(f) = D^1_{k\text{-П}}(f), \tag{1.3}$$

$$D^1_{\text{ПП}}(n) = D^1_{\text{ЕП}}(n) = D^1_{k\text{-П}}(n). \tag{1.4}$$

Утверждение 1.5. *В случаях $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$ и $f(\tilde{x}^n) \equiv 1$ значения всех величин $D^*_{\text{ЕП}}(f)$, $D^*_{k\text{-П}}(f)$, $D^*_{\text{ПП}}(f)$, $D^*_{\text{ЕД}}(f)$, $D^*_{k\text{-Д}}(f)$, $D^*_{\text{ПД}}(f)$ равны 0, где k — произвольное натуральное число, а вместо каждой звёздочки стоит либо 0, либо 1, либо 01.*

Доказательство. Константу 1 (константу 0) можно реализовать КС, не содержащей ни одного контакта, полюсы которой совпадают (соответственно не совпадают). У такой схемы, очевидно, нет ни одной ф. н. вне зависимости от того, допускаются ли в схемах обрывы и замыкания контактов, только их обрывы или только их замыкания, поэтому указанная схема неизбыточна и k-неизбыточна и пустое множество является для неё ЕПТ, k-ПТ, ППТ, ЕДТ, k-ДТ и ПДТ длины 0, откуда следует справедливость утверждения 1.5. □

Назовём б. ф. $f_2(\tilde{x}^n)$ *родственной* б. ф. $f_1(\tilde{x}^n)$, если существуют такие попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_n$ от 1 до n и такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что $f_2(\tilde{x}^n) = f_1(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$.

Например, любая из функций $x_1\overline{x}_2$, x_1x_3, $\overline{x}_2\overline{x}_3$, $x_3\overline{x}_4$ родственна функции x_1x_2, если все эти функции рассматриваются как функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$, где $n \geqslant 4$.

Отметим, что если б. ф. $f_2(\tilde{x}^n)$ родственна б. ф. $f_1(\tilde{x}^n)$, то $f_1(\tilde{x}^n)$ родственна $f_2(\tilde{x}^n)$. Действительно, пусть попарно различные индексы $j_1, \ldots, j_n$ от 1 до n таковы, что $j_{i_1} = 1$,

$\ldots, j_{i_n} = n$; тогда

$$f_2(x_{j_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{j_n}^{\sigma_n}) = f_1\left(\left(x_{j_{i_1}}^{\sigma_1}\right)^{\sigma_1}, \ldots, \left(x_{j_{i_n}}^{\sigma_n}\right)^{\sigma_n}\right) = f_1(\tilde{x}^n),$$

т. е. $f_1(\tilde{x}^n)$ родственна $f_2(\tilde{x}^n)$.

Утверждение 1.6. *Пусть зафиксирован вид неисправностей контактов в КС: а) обрывы и замыкания контактов, б) только их обрывы или в) только их замыкания. Пусть также натуральное число n, б. ф. $f_1(\tilde{x}^n)$ и $f_2(\tilde{x}^n)$, множества T_1 и T_2 (некоторых) n-наборов, попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_n$ от 1 до n и булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ таковы, что $f_2(\tilde{x}^n) = f_1(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$, $|T_1| = |T_2|$, множество T_1 получается из множества T_2 заменой каждого набора $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ на набор $(\pi_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \pi_{i_n}^{\sigma_n})$ и функцию $f_1(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС, для которой множество T_1 является ЕПТ. Тогда функцию $f_2(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС, для которой множество T_2 является ЕПТ.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательством леммы 1 работы [161]. (Отметим, что в указанной лемме в качестве неисправностей контактов в КС предполагались только их неисправности вида а).) По условию существует неизбыточная КС S_1, реализующая функцию $f_1(\tilde{x}^n)$ и допускающая ЕПТ T_1. Для любых $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta \in \{0, 1\}$ заменим в схеме S_1 каждый контакт x_j^β на контакт $x_{i_j}^{\beta \oplus \sigma_j \oplus 1}$; указанные два контакта поставим в соответствие друг другу. Полученную схему обозначим через S_2. На любом двоичном наборе $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ каждый контакт $x_{i_j}^{\beta \oplus \sigma_j \oplus 1}$ схемы S_2 функционирует в точности так же, как соответствующий ему контакт x_j^β схемы S_1 на наборе $(\alpha_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \alpha_{i_n}^{\sigma_n})$, поскольку

$$\alpha_{i_j}^{\beta \oplus \sigma_j \oplus 1} = \alpha_{i_j} \oplus (\beta \oplus \sigma_j \oplus 1) \oplus 1 = (\alpha_{i_j} \oplus \sigma_j \oplus 1) \oplus \beta \oplus 1 = (\alpha_{i_j}^{\sigma_j})^\beta \tag{1.5}$$

(здесь используется тождество $\alpha^\beta \equiv \alpha \oplus \beta \oplus 1$ при $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$). Следовательно, схема S_2 при отсутствии в ней неисправностей выдаёт на наборе $\tilde{\alpha}$ значение $f_1(\alpha_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \alpha_{i_n}^{\sigma_n}) = f_2(\tilde{\alpha})$, т. е. реализует функцию $f_2(\tilde{x}^n)$.

Докажем, что данная схема неизбыточна и допускает ЕПТ T_2; отсюда будет вытекать справедливость утверждения 1.6. Рассмотрим произвольную допустимую неисправность любого одного контакта схемы S_2 (например, в случае б) — обрыв этого контакта). Такую же неисправность соответствующего контакта схемы S_1 можно обнаружить на каком-то наборе $\tilde{\pi}'_s = (\pi_{s,i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \pi_{s,i_n}^{\sigma_n}) \in T_1$, полученном из набора $\tilde{\pi}_s = (\pi_{s,1}, \ldots, \pi_{s,n}) \in T_2$, так как T_1 является ЕПТ для неизбыточной схемы S_1. Значит, для получающейся ф. н. $g(\tilde{x}^n)$ справедливо соотношение

$$g(\tilde{\pi}'_s) \neq f_1(\tilde{\pi}'_s). \tag{1.6}$$

Каждый контакт $x_{i_j}^{\beta\oplus\sigma_j\oplus 1}$ схемы S_2 на наборе $\tilde{\pi}_s$ при рассматриваемых неисправностях контактов в схемах S_1, S_2 функционирует так же, как соответствующий ему контакт x_j^{β} схемы S_1 на наборе $\tilde{\pi}'_s$: если они оба исправны, то это устанавливается по аналогии с (1.5), а если оба данных контакта неисправны, то они либо одновременно оборваны, либо одновременно замкнуты. Отсюда следует, что схема S_2 выдаёт на наборе $\tilde{\pi}_s$ значение $g(\tilde{\pi}'_s)$, отличное от значения

$$f_1(\tilde{\pi}'_s) = f_1(\pi_{s,i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \pi_{s,i_n}^{\sigma_n}) = f_2(\pi_{s,1}, \ldots, \pi_{s,n}) = f_2(\tilde{\pi}_s)$$

в силу (1.6), т. е. рассматриваемая неисправность схемы S_2 обнаруживается на наборе $\tilde{\pi}_s \in T_2$. Из приведённых рассуждений вытекает, что схема S_2 неизбыточна и допускает ЕПТ T_2. Утверждение 1.6 доказано. $\square$

Следствие 1.4. *Пусть б. ф. $f_2(\tilde{x}^n)$ родственна б. ф. $f_1(\tilde{x}^n)$. Тогда $D_{\text{ЕП}}^{01}(f_2) = D_{\text{ЕП}}^{01}(f_1)$, $D_{\text{ЕП}}^{0}(f_2) = D_{\text{ЕП}}^{0}(f_1)$ и $D_{\text{ЕП}}^{1}(f_2) = D_{\text{ЕП}}^{1}(f_1)$.*

Доказательство. Докажем первое равенство; остальные два равенства устанавливаются аналогично. Вместо $D_{\text{ЕП}}^{01}$ для краткости будем писать D. Пусть в КС допускаются как обрывы, так и замыкания контактов. По определению родственной функции существуют такие попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_n$ от 1 до n и такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что $f_2(\tilde{x}^n) = f_1(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$. Рассмотрим неизбыточную КС S_1, реализующую функцию $f_1(\tilde{x}^n)$, и ЕПТ T_1 для этой схемы, удовлетворяющие равенствам $D(f_1) = D(S_1) = D(T_1)$. Пусть попарно различные индексы $j_1, \ldots, j_n$ от 1 до n таковы, что $j_{i_1} = 1, \ \ldots, \ j_{i_n} = n$. Обозначим через T_2 множество той же мощности, что и T_1, получающееся из множества T_1 заменой каждого набора $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ на набор $(\tau_{j_1}^{\sigma_1}, \ldots, \tau_{j_n}^{\sigma_n})$. Тогда множество T_1 получается из множества T_2 заменой каждого набора $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ на набор $(\pi_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \pi_{i_n}^{\sigma_n})$, поскольку $\left(\left(\tau_{j_{i_1}}^{\sigma_1}\right)^{\sigma_1}, \ldots, \left(\tau_{j_{i_n}}^{\sigma_n}\right)^{\sigma_n}\right) = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Таким образом, выполнены все условия утверждения 1.6 (для случая а)), из которого следует, что функцию $f_2(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС S_2, для которой множество T_2 является ЕПТ. Тогда

$$D(f_2) \leqslant D(S_2) \leqslant D(T_2) = |T_2| = |T_1| = D(T_1) = D(f_1),$$

т. е. $D(f_2) \leqslant D(f_1)$. Аналогично доказывается неравенство $D(f_1) \leqslant D(f_2)$ (с учётом того, что функция $f_1(\tilde{x}^n)$ родственна функции $f_2(\tilde{x}^n)$). В итоге получаем равенство $D(f_2) = D(f_1)$. Следствие 1.4 доказано. $\square$

Замечание 1.1. По аналогии с доказательством утверждения 1.6 можно получить аналогичные ему утверждения для ППТ или k-ПТ вместо ЕПТ, где k — произвольное натуральное число (в случае ППТ требование неизбыточности со схем снимается, а в случае k-ПТ оно заменяется на требование k-неизбыточности). Однако такого рода утверждения не будут использованы в дальнейшем тексте и поэтому явным образом не формулируются. В то же время утверждение 1.6 и следствие 1.4 из него будут использованы в §4 и §6.

§2. Проверяющие тесты размыкания

В данном параграфе рассматриваются проверяющие тесты для КС относительно обрывов контактов. Для каждой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ найдено точное значение величины $D^0_{\text{ЕП}}(f)$ (теорема 2.1). Для любого $n \geqslant 0$ установлено равенство $D^0_{\text{ЕП}}(n) = n$ (следствие 2.1), улучшающее в силу (1.2) неравенство $D^0_{\text{ПП}}(n) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ из [186, теорема 1]. Доказано, что для почти всех б. ф. f от n переменных $D^0_{\text{ЕП}}(f) = 2$ (следствие 2.2).

Б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ будем называть *α-монотонной по переменной x_i*, где $n \geqslant 1$, $\alpha \in \{0,1\}$ и $i \in \{1,\dots,n\}$, если для любых булевых констант $\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n$ справедливо неравенство $f(\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\alpha,\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n) \geqslant f(\sigma_1,\dots,\sigma_{i-1},\overline{\alpha},\sigma_{i+1},\dots,\sigma_n)$.

Пример 2.1. Любая монотонная б. ф. является 1-монотонной по каждой своей переменной (определение монотонной б. ф. можно найти, например, в [260, с. 36]).

Множество M (некоторых) единичных наборов б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, назовём *покрывающим* для этой функции, если для любых $\alpha \in \{0,1\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$ таких, что функция f не является α-монотонной по переменной x_i, в M найдётся $(i,\overline{\alpha})$-набор.

Пример 2.2. Если б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, и два противоположных двоичных набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ и $\tilde{\sigma}' = (\overline{\sigma}_1,\dots,\overline{\sigma}_n)$ таковы, что $f(\tilde{\sigma}) = f(\tilde{\sigma}') = 1$, то в качестве покрывающего для f множества можно взять множество $\{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'\}$. Действительно, для любых $i \in \{1,\dots,n\}$, $\alpha \in \{0,1\}$ либо $\sigma_i = \overline{\alpha}$, либо $\overline{\sigma}_i = \overline{\alpha}$.

Пример 2.3. Пусть б. ф. $f(\tilde{x}^4)$ такова, что $M_1(f) = \{(0,1,0,1),(0,1,1,1),(1,0,0,1),(1,0,1,1),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$. Тогда в качестве покрывающего для f множества можно взять, например, одно из множеств $\{(0,1,0,1),(1,0,1,1)\}$, $\{(0,1,1,1),(1,0,0,1)\}$ или $\{(0,1,1,1),(1,0,1,1)\}$ (функция f является 1-монотонной по переменным x_3 и x_4).

Понятие покрывающего множества будет существенным образом использовано в формулировке и доказательстве теоремы 2.1 данного параграфа.

Утверждение 2.1 [155]. *Если для некоторых $\alpha \in \{0,1\}$, $i \in \{1,\dots,n\}$ б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ не является α-монотонной по переменной x_i, то существует хотя бы один единичный $(i,\overline{\alpha})$-набор этой функции.*

Доказательство. По условию существуют такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots,$ σ_n, что $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \alpha, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) < f(\tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}})$, где $\tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\alpha}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$. Но тогда $f(\tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}}) = 1$ и набор $\tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}}$ является $(i, \overline{\alpha})$-набором. Утверждение 2.1 доказано. □

Из утверждения 2.1 следует, что в качестве покрывающего множества для б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ всегда можно взять множество $M_1(f)$.

Ниже нам понадобятся понятия элементарной конъюнкции (ЭК) и её ранга, которые можно найти, например, в [260, с. 297].

Пусть M_n, $n \geqslant 1$ — множество всех таких неконстантных б. ф. от n переменных, каждая из которых для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ является α_i-монотонной по переменной x_i для некоторого $\alpha_i \in \{0, 1\}$; K_n, $n \geqslant 1$ — множество всех ЭК вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_s}^{\sigma_s}$, где $s \in \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \{0, 1\}$.

Введём для б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ величину $m(f)$, равную 0, если $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, равную 2, если $f \in \mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n$, и равную наименьшей мощности покрывающего множества для функции f, если $f \notin (\mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n) \cup \{0, 1\}$.

Отметим, что величина $m(f)$ может быть достаточно просто вычислена по столбцу значений функции $f(\tilde{x}^n)$. Действительно, сперва можно определить все несущественные переменные данной функции и её принадлежность множествам K_n и $\{0, 1\}$, затем — все переменные, по которым функция $f(\tilde{x}^n)$ является 1-монотонной или 0-монотонной, и её принадлежность множеству M_n. Тем самым определяется, какое из соотношений $f \in \{0, 1\}$, $f \in \mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n$ или $f \notin (\mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n) \cup \{0, 1\}$ имеет место. В случае выполнения первого (второго) из этих соотношений величина $m(f)$ равна 0 (равна 2); в случае же выполнения третьего из этих соотношений с учётом нижеследующей леммы 2.1 можно перебрать всевозможные подмножества мощности не более n множества $M_1(f)$ и для каждого из них проверить, будет ли оно покрывающим для функции $f(\tilde{x}^n)$. Минимальная мощность такого покрывающего множества и даст значение величины $m(f)$.

Лемма 2.1 [155]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо неравенство $m(f) \leqslant n$.*

Доказательство. Если $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то утверждение леммы очевидно. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант. Если при этом $n = 1$, то $f(x_1) = x_1$ или $f(x_1) = \overline{x}_1$. В каждом из этих случаев $f \in \mathsf{K}_n$; в первом случае покрывающим множеством для функции f будет $\{1\}$, а во втором — $\{0\}$. Поэтому $m(f) \leqslant 1 = n$. Далее будем считать, что $n \geqslant 2$. Если $f \in \mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n$, то $m(f) = 2 \leqslant n$, что и требовалось доказать. Пусть $f \notin \mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n$. Надо доказать, что для функции f существует покрывающее множество мощности не больше n.

Если $|M_1(f)| \leqslant 2$, то в качестве искомого покрывающего множества можно взять $M_1(f)$. Предположим теперь, что $|M_1(f)| \geqslant 3$. Возьмём произвольные три попарно различных набора из множества $M_1(f)$. Очевидно, что какие-то два из них различаются по крайней мере в двух компонентах. Обозначим эти два набора через $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$, а номера произвольных двух компонент, в которых они различаются — через i_1 и i_2.

Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Рассмотрим все возможные значения i от 1 до n, отличные от i_1 и i_2, при которых функция f не является σ_i-монотонной по переменной x_i. В силу утверждения 2.1 для этих значений i существует единичный $(i, \overline{\sigma_i})$-набор функции f. Множество всех таких значений i обозначим через I, а соответствующие им единичные $(i, \overline{\sigma_i})$-наборы функции f — через $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma_i}}$ (если таких значений нет, полагаем $I = \varnothing$). Пусть $M = \{\tilde{\sigma}\} \cup \{\tilde{\sigma}'\} \cup \{\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma_i}} \mid i \in I\}$. Тогда $|M| \leqslant 2 + |I| \leqslant n$.

Покажем, что M является покрывающим множеством для функции f. Пусть i — произвольный индекс от 1 до n; α — произвольная булева константа. Если $i = i_1$ или $i = i_2$, то $(i, \overline{\alpha})$-набором будет один из наборов $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$. Пусть теперь $i \neq i_1$ и $i \neq i_2$. Если $\alpha = \overline{\sigma}_i$, то в качестве $(i, \overline{\alpha})$-набора можно взять набор $\tilde{\sigma}$. Если же $\alpha = \sigma_i$ и функция f не является α-монотонной по переменной x_i, то $i \in I$ и в качестве $(i, \overline{\alpha})$-набора можно взять набор $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma_i}}$. Все указанные наборы принадлежат множеству M. Лемма 2.1 доказана. □

Лемма 2.2 [155]. *Для любого $n \geqslant 0$ существует б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, для которой $m(f) = n$.*

Доказательство. При $n = 0$ в качестве функции f, очевидно, можно взять любую из булевых констант (тогда $m(f) = 0$ по определению этой величины), а при $n = 1$ — любую из функций x_1^σ, где $\sigma \in \{0, 1\}$ (тогда $f \in \mathsf{K}_n$ и множество $\{(\sigma)\}$ является единственным покрывающим множеством для функции f). Пусть $n \geqslant 2$, а $f(\tilde{x}^n)$ — б. ф., принимающая значение 1 на всех наборах, ровно одна компонента которых равна единице, и значение 0 на всех остальных наборах. Пусть i, j — произвольные различные индексы от 1 до n; $\tilde{\sigma}_i$ ($\tilde{\sigma}_j$, $\tilde{\sigma}_{i,j}$) — набор, только i-я (слева) компонента (соответственно j-я компонента, i-я и j-я компоненты) которого равна (равны) единице. Функция $f(\tilde{x}^n)$ не является 0-монотонной по переменной x_i, поскольку $0 = f(\tilde{0}^n) < f(\tilde{\sigma}_i) = 1$, и не является 1-монотонной по переменной x_i, поскольку $0 = f(\tilde{\sigma}_{i,j}) < f(\tilde{\sigma}_j) = 1$. Поэтому $f(\tilde{x}^n) \notin \mathsf{M}_n$ и в любом покрывающем множестве M для функции f должен содержаться единичный $(i, 1)$-набор этой функции для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Единственным таким набором является $\tilde{\sigma}_i$, поэтому $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n \in M$, т. е. $|M| \geqslant n$. Отсюда получаем неравенство $m(f) \geqslant n$, а с учётом леммы 2.1 — равенство $m(f) = n$. Лемма 2.2 доказана. □

Лемма 2.3 [155]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $m(f) = 2$.*

Доказательство. Пусть $n \geqslant 1$ и F_n — множество, состоящее из всех б. ф. от n переменных, не принадлежащих множеству $\mathsf{M}_n \cup \{0,1\}$, для которых наименьшая мощность покрывающего множества больше 2. Если f — произвольная б. ф. от n переменных, не принадлежащая множеству $\mathsf{F}_n \cup \mathsf{K}_n \cup \{0,1\}$, то она либо принадлежит $\mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n$, либо не принадлежит $\mathsf{F}_n \cup \mathsf{K}_n \cup \{0,1\} \cup (\mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n) = \mathsf{F}_n \cup \mathsf{K}_n \cup \mathsf{M}_n \cup \{0,1\}$, а значит, не принадлежит $\mathsf{M}_n \cup \{0,1\}$ и при этом наименьшая мощность покрывающего множества для функции f не превосходит 2. В каждом из указанных случаев $m(f) = 2$. Действительно, если $f \in \mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n$, то это верно по определению величины $m(f)$. Если же $f \notin \mathsf{M}_n \cup \{0,1\}$ и наименьшая мощность покрывающего множества для функции f не превосходит 2, то $m(f) \leqslant 2$ по определению этой величины; с другой стороны, $n \geqslant 1$ и функция $f(\tilde{x}^n)$ не является ни 1-монотонной, ни 0-монотонной по какой-то своей переменной x_i, поэтому в любом покрывающем множестве для функции f должен содержаться как $(i,1)$-набор, так и $(i,0)$-набор, т. е. как минимум два набора, откуда $m(f) \geqslant 2$ и, следовательно, $m(f) = 2$. Поэтому достаточно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\mathsf{F}_n \cup \mathsf{K}_n \cup \{0,1\}|}{2^{2^n}} = 0$.

Заметим, что $|\mathsf{K}_n| = 3^n - 1$, поскольку каждая из переменных $x_1, \ldots, x_n$ может либо входить в произвольную ЭК вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_s}^{\sigma_s}$, где $s \in \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \{0,1\}$, без отрицания, либо входить в неё с отрицанием, либо не входить в неё, но при этом все переменные $x_1, \ldots, x_n$ не могут одновременно не входить в эту ЭК. Далее, если б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ принадлежит множеству F_n, то она не может обращаться в единицу на двух противоположных наборах (см. определение этого множества и пример 2.2). Поэтому на каждой из 2^{n-1} пар противоположных наборов функция f может принимать одну из трёх возможных пар значений — $(0,0)$, $(0,1)$ или $(1,0)$. Общее число таких функций равно $3^{2^{n-1}}$, следовательно, $|\mathsf{F}_n| \leqslant 3^{2^{n-1}}$. В итоге получаем, что

$$\frac{|\mathsf{F}_n \cup \mathsf{K}_n \cup \{0,1\}|}{2^{2^n}} \leqslant \frac{|\mathsf{F}_n| + |\mathsf{K}_n| + |\{0,1\}|}{2^{2^n}} \leqslant \frac{3^{2^{n-1}} + 3^n - 1 + 2}{2^{2^n}} =$$

$$= \frac{2^{2^{n-1}\log 3} + 3^n + 1}{2^{2^n}} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

откуда следует справедливость леммы 2.3. □

Деревом называется неориентированный связный граф без циклов (см., например, [203, с. 25]). Вершина v и ребро R произвольного графа называются *инцидентными*, если v — один из концов ребра R.

Пусть G — произвольное конечное дерево. Выделим в нём какую-нибудь одну вершину, которую будем называть *корнем* и обозначать через a. Введём для произвольной вершины v дерева G функцию $l(v)$, равную длине цепи, соединяющей в этом дереве вершины a и v (с учётом отсутствия в G циклов несложно показать, что такая цепь единственна); в частности,

$l(a) = 0$. Далее, пусть R — произвольное ребро дерева G, инцидентное вершине v, и w — второй конец этого ребра. Будем говорить, что ребро R *исходит из вершины* v, если $l(w) = l(v) + 1$, и *входит в вершину* v, если $l(w) = l(v) - 1$. Очевидно, что других случаев быть не может, а в вершину a не входит ни одного ребра. *Концевой вершиной* дерева G будем называть его произвольную отличную от a вершину, инцидентную ровно одному ребру.

Утверждение 2.2. *Любая цепь в дереве G, соединяющая две его различные концевые вершины, проходит через два ребра, исходящие из одной и той же вершины.*

Доказательство. Пусть C — цепь в дереве G, соединяющая какие-то его различные концевые вершины v_1 и v_2. Среди всех вершин, принадлежащих цепи C, выберем произвольную вершину v, для которой значение функции $l(v)$ минимально. Предположим, что $v = v_1$ или $v = v_2$. Обозначим через v' отличный от v конец единственного ребра, инцидентного вершине v. Ясно, что вершина v' принадлежит как цепи C, так и цепи, соединяющей вершины a и v. Отсюда следует, что $l(v') = l(v) - 1$, однако это противоречит выбору вершины v. Таким образом, $v \neq v_1$ и $v \neq v_2$. Значит, в цепи C содержатся два ребра, инцидентные вершине v. Пусть w и w' — вторые концы этих рёбер. Тогда $l(w), l(w') \in \{l(v) - 1, l(v) + 1\}$ и, кроме того, $l(w) \geqslant l(v)$ и $l(w') \geqslant l(v)$ в силу выбора вершины v, поэтому $l(w) = l(w') = l(v) + 1$. В итоге получаем, что указанные два ребра исходят из вершины v. Утверждение 2.2 доказано. $\square$

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф. и T — произвольное подмножество множества $M_1(f)$. Возьмём контактное дерево $\hat{D}$, реализующую систему всех 2^n ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$ и содержащее $2 \cdot 2^n - 2$ контактов (см. [105, с. 39]). Корнем этого дерева будем считать вершину, инцидентную контактам x_1 и $\overline{x}_1$. Для каждого нулевого набора $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ функции $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$ удалим из дерева $\hat{D}$ концевую вершину вместе с инцидентным ей ребром, в которой реализуются ЭК $x_1^{\tau_1} \& \ldots \& x_n^{\tau_n}$. Если после всех этих операций в дереве возникли новые концевые вершины, удалим и их вместе с инцидентными им рёбрами, и т. д. Обозначим полученное в итоге дерево через $D_{f,T}$. Легко проверить, что оно обладает следующими свойствами:

(i) в каждой концевой вершине дерева $D_{f,T}$ реализуется ЭК вида $x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, причём единственный n-набор, на котором эта конъюнкция обращается в единицу, является единичным для функции $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$;

(ii) для каждого единичного набора $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ функции $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$ в дереве $D_{f,T}$ найдётся такая концевая вершина, что единственная цепь, соединяющая корень дерева D с этой вершиной, содержит n контактов: $x_1^{\pi_1}$, …, $x_n^{\pi_n}$.

Например, для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, принимающей значение 1 только на наборах

$(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,1,1,1), (1,0,0,1), (1,1,0,0), (1,1,0,1), (1,1,1,1),$

и множества $T = \{(0,0,0,0), (1,1,1,1)\}$ дерево $D_{f,T}$ имеет вид, показанный на рисунке 2.1.

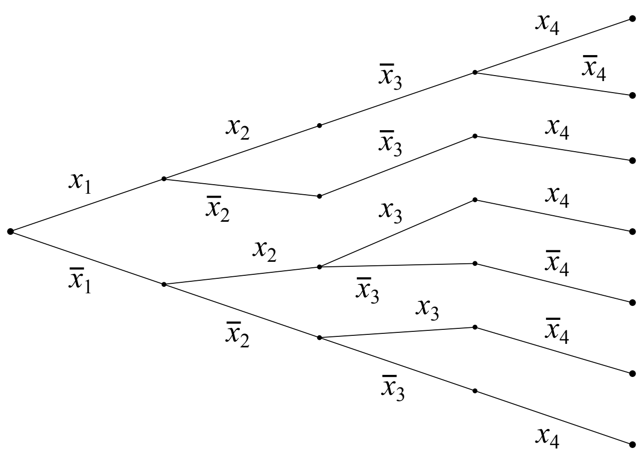

Рис. 2.1. Дерево $D_{f,T}$

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 2.1 [155]. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *справедливо равенство* $D^0_{\text{ЕП}}(f) = m(f)$.

Из теоремы 2.1 и лемм 2.1, 2.2 вытекает

Следствие 2.1 [155]. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо равенство* $D^0_{\text{ЕП}}(n) = n$.

Из теоремы 2.1 и леммы 2.3 вытекает

Следствие 2.2 [155]. *Для почти всех б. ф.* f *от* n *переменных* $D^0_{\text{ЕП}}(f) = 2$.

Доказательство теоремы 2.1. В случаях $f \equiv 0$ и $f \equiv 1$ из утверждения 1.5 и определения величины $m(f)$ следует, что $D(f) = 0 = m(f)$. Далее будем считать, что функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант, тогда $n \geqslant 1$. Докажем сначала неравенство $D(f) \geqslant m(f)$. Пусть S — такая неизбыточная КС, реализующая функцию f, а T — такой ЕПТ размыкания для схемы S, что $D(f) = D(S) = D(T)$. Пусть функция f не является α-монотонной по переменной x_i для некоторых $\alpha \in \{0,1\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда существует такие булевы константы $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n$, что

$$f(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \alpha, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) < f(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \overline{\alpha}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n). \tag{2.1}$$

Если в схеме S не содержится ни одного контакта $x_i^{\overline{\alpha}}$, то при переходе от входного набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \alpha, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ ко входному набору $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\alpha}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ проводимости всех контактов, отвечающих переменным $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, останутся неизменными, проводимости всех контактов x_i^{α} изменятся с 1 на 0 и значение, выдаваемое схемой S, не увеличится, что противоречит неравенству (2.1). Поэтому в схеме S содержится хотя бы один контакт $x_i^{\overline{\alpha}}$.

Для возможности обнаружения обрыва этого контакта в тесте T должен содержаться такой набор $\tilde{\pi}$, что его i-я компонента равна $\overline{\alpha}$ (иначе обрыв указанного контакта никак не отразится на значениях, выдаваемых схемой S на наборах из множества T) и $f(\tilde{\pi}) = 1$ (поскольку при обрыве любого контакта значение, выдаваемое схемой S на любом наборе, не может увеличиться), т. е. единичный $(i, \overline{\alpha})$-набор функции f. Получаем, что для любых $\alpha \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ таких, что функция $f(\tilde{x}^n)$ не является α-монотонной по переменной x_i, в T найдётся единичный $(i, \overline{\alpha})$-набор этой функции, поэтому множество $T \cap M_1(f)$ является для неё покрывающим. Отсюда следует, что

$$D(f) = D(T) = |T| \geqslant |T \cap M_1(f)| \geqslant m(f),$$

если $f \notin \mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n$ (см. определение величины $m(f)$).

Пусть теперь $f \in \mathsf{M}_n \setminus \mathsf{K}_n$. Очевидно, что в схеме S содержится хотя бы один контакт. Для возможности обнаружения обрыва этого контакта в тесте T должен содержаться хотя бы один единичный набор $\tilde{\pi}$ функции f (см. рассуждения из предыдущего абзаца). Пусть Z — произвольная проводящая на этом наборе несамопересекающаяся цепь между полюсами схемы S. Если все контакты данной схемы содержатся в этой цепи, то схема S, очевидно, реализует б. ф. из множества K_n, что невозможно. Поэтому в данной схеме присутствует хотя бы один контакт, не принадлежащий цепи Z. Тогда при обрыве этого контакта в схеме S цепь Z по прежнему будет проводить на наборе $\tilde{\pi}$ и схема на этом наборе выдаст значение $1 = f(\tilde{\pi})$. Это означает, что в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, отличный от $\tilde{\pi}$. Отсюда следует соотношение

$$D(f) = D(T) = |T| \geqslant 2 = m(f).$$

Тем самым неравенство $D(f) \geqslant m(f)$ полностью доказано.

Докажем неравенство $D(f) \leqslant m(f)$. В случае $f \in \mathsf{K}_n$, т. е. $f(\tilde{x}^n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_s}^{\sigma_s}$, где $s \in \{1, \ldots, n\}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \in \{0, 1\}$, реализуем функцию f КС S, представляющей собой цепь из контактов $x_{i_1}^{\sigma_1}$, …, $x_{i_s}^{\sigma_s}$. Тогда при обрыве любого контакта в этой схеме получающаяся ф. н. равна тождественному нулю, который можно отличить от функции f на любом её единичном наборе. Поэтому множество, состоящее из любого одного единичного набора функции f, является ЕПТ размыкания для схемы S и $D(f) \leqslant 1 \leqslant \leqslant m(f)$ (последнее неравенство следует из того, что функция f не является $\overline{\sigma}_1$-монотонной по переменной x_1), что и требовалось доказать.

Далее будем считать, что $f \notin \mathsf{K}_n$. Если при этом $f \in \mathsf{M}_n$, то функция $f(\tilde{x}^n)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ является α_i-монотонной по переменной x_i для некоторого $\alpha_i \in \{0, 1\}$ и принимает значение 1 по крайней мере на двух наборах, в качестве одного из которых можно взять набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. В таком случае из определения покрывающего множества легко следует, что множество $\{\tilde{\alpha}\}$ является для этой функции покрывающим. Если к этому набору добавить любой другой единичный набор функции f, то получим для неё покрывающее множество мощности $2 = m(f)$. Если же $f \notin \mathsf{M}_n$, то для функции f существует покрывающее множество мощности $m(f)$ в силу определения этой величины.

Таким образом, для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n) \notin \mathsf{K}_n$ существует покрывающее множество из $m(f)$ наборов. Среди всех таких множеств выберем множество $T(f)$, в котором для наибольшего возможного числа индексов i от 1 до n присутствуют как $(i, 1)$-набор, так и $(i, 0)$-набор. Без ограничения общности это индексы $1, \ldots, q$, где $q \in \{0, 1, \ldots, n\}$ (при $q = 0$ таких индексов нет). Тогда для каждого $i \in \{q+1, \ldots, n\}$ (при $q < n$) i-е компоненты всех наборов из множества $T(f)$ совпадают и равны некоторому числу $\beta_i \in \{0, 1\}$, т. е. в этом множестве не содержится ни одного $(i, \overline{\beta}_i)$-набора. В силу определения покрывающего множества это означает, что функция $f(\tilde{x}^n)$ является β_i-монотонной по переменной x_i.

Пример 2.4. Рассмотрим б. ф. $f(\tilde{x}^7)$, принимающую значение 1 на наборах

$$
\begin{array}{ccc}
(0,1,1,1,0,1,1) & (1,0,0,1,1,1,1) & (1,0,1,1,1,1,0) \\
(0,1,1,1,1,0,1) & (1,0,1,0,1,1,1) & (1,0,1,1,1,1,1) \\
(0,1,1,1,1,1,0) & (1,0,1,1,1,0,0) & (1,1,0,1,1,1,1) \\
(0,1,1,1,1,1,1) & (1,0,1,1,1,0,1) & (1,1,1,0,1,1,1)
\end{array}
$$

и значение 0 на всех остальных наборах. Нетрудно убедиться, что эта функция не является ни 1-монотонной, но 0-монотонной по каждой из переменных x_1, x_2, x_3, x_4 и является 1-монотонной, но не 0-монотонной по каждой из переменных x_5, x_6, x_7; что $m(f) = 3$ (никакие два единичных набора функции f не могут «покрывать» первые четыре компоненты; с другой стороны, например, множество $M = \{(0,1,1,1,0,1,1), (1,0,1,0,1,1,1), (1,1,0,1,1,1,1)\}$ является покрывающим для функции f) и что в качестве $T(f)$ можно взять указанное множество M, при этом $q = 5$, $\beta_6 = \beta_7 = 1$.

Далее для удобства вместо $T(f)$ будем писать T.

Лемма 2.4 [155]. *В указанных предположениях* $q \geqslant 1$ *и* $|T| \geqslant 2$.

Доказательство. Если $q = 0$, то функция $f(\tilde{x}^n)$ является β_i-монотонной по переменной x_i для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, откуда $f \in \mathsf{M}_n$. Поэтому во множестве T содержится $m(f) = 2$ набора. Эти наборы отличаются хотя бы в одной компоненте, например, в j-й. Тогда во множестве T присутствуют как $(j, 1)$-набор, так и $(j, 0)$-набор, однако это противоречит тому, что $q = 0$. Поэтому $q \geqslant 1$. Тогда во множестве T присутствуют как $(1, 1)$-набор, так и $(1, 0)$-набор, следовательно, $|T| \geqslant 2$. Лемма 2.4 доказана. □

Дерево $D_{f,T}$, определённое выше, обозначим для краткости через D, его корень — через a_0, а объединение всех цепей длины q в дереве D, одним из концов каждой из которых является вершина a_0, — через D_q. Очевидно, что D_q является деревом; его корнем также будем считать вершину a_0. Например, для функции $f(\tilde{x}^7)$ и множества $T = M$, взятых из примера 2.4, дерево D имеет вид, показанный на рисунке 2.2, а дерево D_q в случае $q = 5$ состоит из всех контактов дерева D, отвечающих переменным $x_1, \ldots, x_5$.

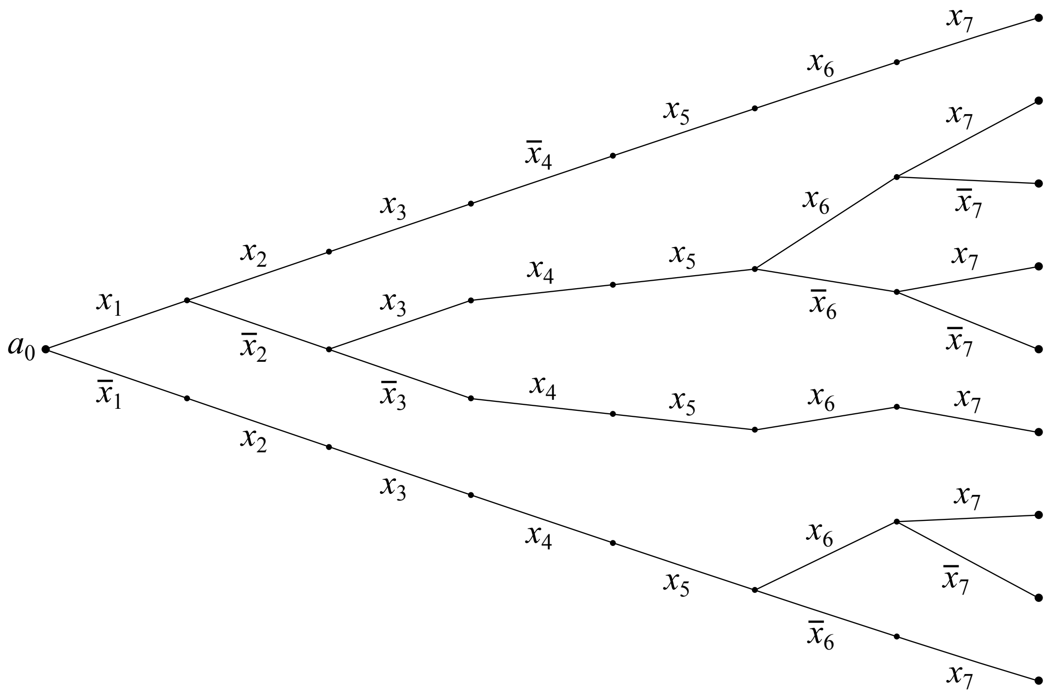

Рис. 2.2. Дерево D

Отметим следующие очевидные свойства дерева D_q:

(iii) в вершину a_0 не входит ни одного контакта, а в любую другую вершину этого дерева входит ровно один контакт;

(iv) из каждой его вершины исходит не более двух контактов, и если два, то это противоположные контакты (а именно x_i и $\overline{x}_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, q\}$).

Лемма 2.5 [155]. *Ни одна цепь в дереве D_q, соединяющая его корень с какой-либо его концевой вершиной, не проводит ни на одном наборе из множества T.*

Доказательство. Пусть Z — произвольная цепь длины q в дереве D_q, соединяющая его корень с какой-то его концевой вершиной. Из построения дерева D легко следует, что эта цепь содержит контакты $x_1^{\sigma_1}$, …, $x_q^{\sigma_q}$ для некоторых $\sigma_1, \dots, \sigma_q \in \{0, 1\}$ (напомним, что $q \geqslant 1$ в силу леммы 2.4). Если $q = n$, то цепь Z соединяет корень дерева D с одной из его концевых вершин и утверждение леммы вытекает из свойства (i) дерева D и того, что

$$(f \oplus I_T)(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau}) \oplus I_T(\tilde{\tau}) = 1 \oplus 1 = 0 \tag{2.2}$$

для любого набора $\tilde{\tau} \in T$ (равенство $f(\tilde{\tau}) = 1$ верно в силу того, что T является покрывающим множеством для функции f).

Пусть $q < n$. Предположим, что цепь Z проводит на некотором наборе $\tilde{\tau} \in T$. Тогда первые q компонент набора $\tilde{\tau}$ равны $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ соответственно, а его последние $n-q$ компонент равны $\beta_{q+1}, \dots, \beta_n$ (см. абзац перед примером 2.4). Цепь Z является подцепью некоторой цепи Z' длины n, соединяющей корень дерева D с одной из его концевых вершин. Пусть цепь Z' кроме контактов $x_1^{\sigma_1}$, …, $x_q^{\sigma_q}$ содержит также контакты $x_{q+1}^{\sigma_{q+1}}$, …, $x_n^{\sigma_n}$ для некоторых $\sigma_{q+1}, \dots, \sigma_n \in \{0, 1\}$. Тогда $(f \oplus I_T)(\tilde{\sigma}) = 1$, где $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, в силу свойства (i) дерева D. Отсюда и из (2.2) следует, что $\tilde{\sigma} \notin T$; в частности, $\tilde{\sigma} \neq \tilde{\tau}$, т. е. хотя бы для одного $i \in \in \{q+1, \dots, n\}$ верно равенство $\sigma_i = \overline{\beta}_i$.

Далее, во множестве T набор $\tilde{\tau}$ можно заменить на набор $\tilde{\sigma}$; при этом множество T останется покрывающим для функции f. Действительно, на «покрытии» первых q компонент такая замена никак не скажется; в то же время по лемме 2.4 во множестве T содержится ещё хотя бы один набор $\tilde{\gamma}$, причём $(q+1)$-я, …, n-я его компоненты равны $\beta_{q+1}, \dots, \beta_n$ соответственно, а функция $f(\tilde{x}^n)$ является β_j-монотонной по переменной x_j для любого $j \in \{q+1, \dots, n\}$ (см. выше). Набор $\tilde{\gamma}$ будет «покрывать» последние $n - q$ компонент. При этом в «новом» множестве T, помимо наличия $(i', 1)$-набора и $(i', 0)$-набора для каждого $i' \in \{1, \dots, q\}$, будут также содержаться $(i, \overline{\beta}_i)$-набор $\tilde{\sigma}$ и (i, β_i)-набор $\tilde{\gamma}$, однако это противоречит определению множества T. Лемма 2.5 доказана. □

Идея дальнейших рассуждений доказательства теоремы 2.1 состоит в построении КС S', удовлетворяющей условиям нижеследующей леммы 2.8. Если такая схема будет построена, справедливость неравенства $D(f) \leqslant m(f)$ будет вытекать из этой леммы и равенства $|T| = m(f)$. Схема S' будет получена из дерева D путём его преобразования сначала в дерево D', а затем в саму схему S'; при этом переход от дерева D' к схеме S' окажется весьма простым. Наиболее трудоёмким будет преобразование дерева D в дерево D' и установление некоторых свойств дерева D' (леммы 2.6, 2.7), хотя само дерево при этом изменится несильно, а его поддерево D_q останется неизменным.

Пусть в дереве D_q содержатся r_i контактов, отвечающих переменной x_i, где $i = 1, \ldots, q$. Занумеруем в этом дереве контакты, отвечающие переменной x_1, числами от 1 до r_1 (в произвольном порядке); контакты, отвечающие переменной x_2, числами от $r_1 + 1$ до $r_1 + r_2$ (в произвольном порядке); $\ldots$; контакты, отвечающие переменной x_q, числами от $\sum\limits_{i=1}^{q-1} r_i + 1$ до $\sum\limits_{i=1}^{q} r_i$ (в произвольном порядке).

Опишем некоторую процедуру Π, преобразующую дерево D в дерево D' и определяющую для каждого контакта K из дерева D' набор $\tilde{\sigma}(K) \in T$.

1. Рассмотрим в дереве D_q контакт K с наименьшим номером, для которого ещё не определён набор $\tilde{\sigma}(K)$. Если таких контактов нет, завершим процедуру.

2. Пусть K — это контакт x_i^{ρ}, где $i \in \{1, \ldots, q\}$, $\rho \in \{0, 1\}$; a — «ближний» к вершине a_0 конец контакта K (т. е. сама эта вершина при $i = 1$ либо конец контакта K, инцидентный контакту, отвечающему переменной x_{i-1}, при $i > 1$); b — другой конец контакта K.

а) Если во множестве T существует такой набор $\tilde{\tau}$, что на этом наборе контакт K проводит, а ни одна цепь длины $q - i$ в дереве D_q, соединяющая вершину b с какой-либо концевой вершиной этого дерева, не проводит, то оставим дерево D без изменений, положим $\tilde{\sigma}(K) = \tilde{\tau}$ и вернёмся к пункту 1.

б) Пусть для любого набора из множества T, на котором контакт K проводит, в дереве D_q существует проводящая на этом наборе цепь длины $q - i$, соединяющая вершину b с какой-либо концевой вершиной этого дерева. Пусть Z — (единственная) цепь в дереве D_q, соединяющая вершины a_0 и a. Среди всех наборов из множества T, на которых контакт K проводит (хотя бы один такой набор найдётся в силу определений множества T и числа q и неравенства $i \leqslant q$; надо взять (i, ρ)-набор), выберем такой набор $\tilde{\tau}$, на котором наибольшее число контактов из цепи Z проводит, обозначим это число через d и положим $\tilde{\sigma}(K) = \tilde{\tau}$. Пусть Z' — проводящая на наборе $\tilde{\tau}$ цепь длины $q - i$ в дереве D_q, соединяющая вершину b с какой-то концевой вершиной этого дерева. Такая цепь единственна; в противном случае в D_q существовала бы цепь между двумя его различными концевыми вершинами, проводящая на наборе $\tilde{\tau}$, однако это противоречит утверждению 2.2, свойству (iv) дерева D_q и тому, что противоположные контакты не могут оба проводить на наборе $\tilde{\tau}$. Положим $\tilde{\sigma}(K') = \tilde{\tau}$ для каждого контакта K' из цепи Z'. В случае $q = n$ оставим дерево D без изменений и вернёмся к пункту 1.

Пусть теперь $q < n$. Концевую вершину дерева D_q, с которой цепь Z' соединяет вершину b, обозначим через v. Цепь $Z - K - Z'$ соединяет вершины a_0 и v и не проводит на наборе $\tilde{\tau}$ в силу леммы 2.5. Однако контакт K и цепь Z' проводят на этом наборе. Значит, на нём не проводит цепь Z. Пусть $x_{i'}^{\rho'}$ — один из контактов цепи Z, не проводящих на наборе $\tilde{\tau}$, где $i' < i \leqslant q$, $\rho' \in \{0, 1\}$. Тогда $\tilde{\tau}$ является $(i', \overline{\rho'})$-набором. По определению множества T и числа q в T содержится хотя бы один (i', ρ')-набор $\tilde{\tau}'$. Если все проводящие на наборе $\tilde{\tau}$ контакты из цепи $Z - K$ проводят также на наборе $\tilde{\tau}'$, то контакт K проводит на наборе $\tilde{\tau}'$ и общее число проводящих контактов из цепи Z на наборе $\tilde{\tau}'$ не меньше $d + 1$ (поскольку контакт $x_{i'}^{\rho'}$ проводит на наборе $\tilde{\tau}'$), однако это противоречит определению числа d. Поэтому какой-то проводящий на наборе $\tilde{\tau}$ контакт $x_{i''}^{\rho''}$, $i'' \in \{1, \ldots, i\} \setminus \{i'\}$, $\rho'' \in \{0, 1\}$, из цепи $Z - K$ не проводит на наборе $\tilde{\tau}'$.

Далее, пусть $x_j^{\overline{\beta}_j}$ — произвольный контакт, содержащийся в какой-то цепи длины $n - q$ в дереве D, соединяющей вершину v с какой-то концевой вершиной этого дерева, для произвольного $j \in \{q + 1, \ldots, n\}$ (определение чисел β_j см. выше). Обозначим этот контакт через $\hat{K}$. Пусть $\hat{a}$ — «ближний» к вершине a_0 конец контакта $\hat{K}$ (т. е. конец этого контакта, инцидентный контакту, отвечающему переменной x_{j-1}); $\hat{b}$ — другой конец контакта $\hat{K}$. Если вершина $\hat{a}$ инцидентна в дереве D только двум указанным контактам, удалим из этого дерева контакт $\hat{K}$, стянув две его вершины в одну. Если же вершина $\hat{a}$ инцидентна в дереве D также некоторому контакту $x_j^{\beta_j}$, который мы обозначим через $\hat{K}'$, а его второй конец — через $\hat{b}'$, то заменим в этом дереве контакт $\hat{K}$ контактом K_1 вида $x_{i'}^{\rho'}$, а контакт $\hat{K}'$ — цепью $\hat{a} - K_2 - K_3 - \hat{b}'$, где контакт K_2 имеет вид $x_{i''}^{\rho''}$, а контакт K_3 — вид $x_j^{\beta_j}$, и положим $\tilde{\sigma}(K_1) = \tilde{\tau}'$, $\tilde{\sigma}(K_2) = \tilde{\sigma}(K_3) = \tilde{\tau}$ (отметим, что тогда контакт K_1 проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K_1)$ и не проводит на наборе $\tilde{\tau}$, а контакт K_2 проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K_2)$ и не проводит на наборе $\tilde{\tau}'$ — см. рассуждения из предыдущего абзаца). Других случаев в силу построения дерева D быть не может. Указанную операцию проделаем одновременно для всех контактов $\hat{K}$ вида $x_j^{\overline{\beta}_j}$, где $j = q + 1, \ldots, n$, содержащихся в какой-то цепи длины $n - q$ в дереве D, соединяющей вершину v с какой-то концевой вершиной этого дерева. Положим $\tilde{\sigma}(K') = \tilde{\tau}$ для каждого контакта K' из цепи длины $n - q$ в «старом» дереве D, соединяющей вершину v с какой-то концевой вершиной этого дерева, кроме тех, которые подверглись замене. Вернёмся к пункту 1.

Нетрудно убедиться, что описанная процедура П завершится не более, чем через $\sum_{i=1}^{q} r_i$ шагов, дерево D будет преобразовано в некоторое дерево D' и для каждого контакта K из дерева D' будет определён набор $\tilde{\sigma}(K) \in T$, причём поддерево D_q дерева D не претерпит никаких изменений.

Вид дерева D' для функции $f(\tilde{x}^7)$ и множества $T = M$, взятых из примера 2.4, показан на рисунке 2.3. Рядом с каждым контактом K в скобках указан номер набора из множества T, который берётся в качестве набора $\tilde{\sigma}(K)$; при этом предполагается, что наборы $(0, 1, 1, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 1, 1, 1), (1, 1, 0, 1, 1, 1, 1)$ из этого множества имеют номера 1, 2, 3 соответственно.

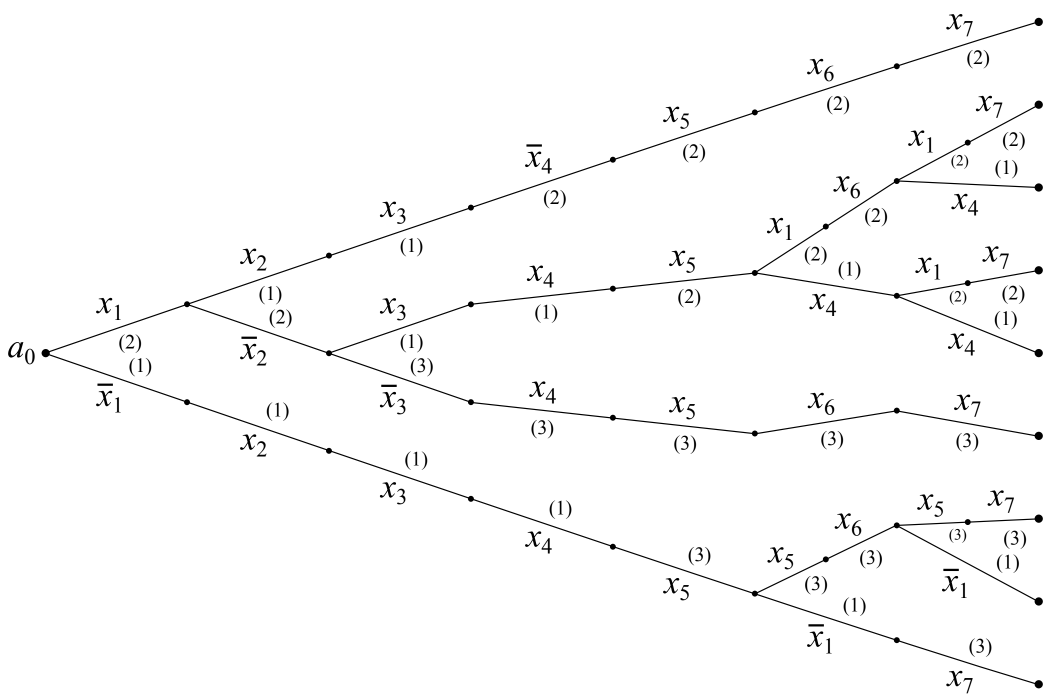

Рис. 2.3. Дерево D'

Лемма 2.6 [155]. *Дизъюнкция всех функций, реализуемых в концевых вершинах дерева D', равна $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — произвольный единичный набор функции $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$. По свойству (ii) дерева D в нём найдётся такая концевая вершина, что единственная цепь, соединяющая корень дерева D с этой вершиной, содержит n контактов: $x_1^{\pi_1}$, $\ldots$, $x_n^{\pi_n}$. В ходе преобразования дерева D в дерево D' в эту цепь могло быть добавлено несколько контактов $x_1^{\pi_1}, \ldots, x_q^{\pi_q}$ и из неё могли быть удалены некоторые из контактов $x_1^{\pi_{q+1}}$, $\ldots$, $x_n^{\pi_n}$ (при $q < n$). Однако каждый контакт в получившейся цепи по-прежнему проводит на наборе $\tilde{\pi}$, поэтому в выбранной концевой вершине будет реализована б. ф., принимающая на этом наборе значение 1. В силу произвольности выбора набора $\tilde{\pi}$ это означает, что дизъюнкция всех функций, реализуемых в концевых вершинах дерева D', больше либо равна $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$.

Пусть теперь $\tilde{\pi}'$ — произвольный n-набор, на котором дизъюнкция всех функций, реализуемых в концевых вершинах дерева D', принимает значение 1. Это означает, что некоторая цепь Z'_v, соединяющая вершину a_0 с какой-то концевой вершиной v дерева D', проводит на наборе $\tilde{\pi}'$. По лемме 2.5 ни одна цепь в дереве D_q, соединяющая его корень с какой-либо его концевой вершиной, не проводит ни на одном наборе из множества T, поэтому

$$\tilde{\pi}' \notin T. \tag{2.3}$$

В силу построения дерева D' цепь Z'_v обязательно получена из некоторой цепи Z_v в дереве D, соединяющей вершину a_0 с той же вершиной v и содержащей контакты $x_1^{\pi'_1}$, …, $x_n^{\pi'_n}$ для некоторых $\pi'_1, \ldots, \pi'_n \in \{0, 1\}$, путём добавления, быть может, нескольких контактов $x_1^{\pi'_1}$, …, $x_q^{\pi'_q}$ и удаления всех тех контактов $x_j^{\pi'_j}$, $j = q+1, \ldots, n$ (при $q < n$), для которых $\pi'_j = \overline{\beta}_j$. Пусть J_1 (J_2) — множество таких индексов j от $q+1$ до n (при $q < n$), для которых $\pi'_j = \beta_j$ (соответственно $\pi'_j = \overline{\beta}_j$); $|J_1| = s$ и если $s > 0$, то $J_1 = \{j_1, \ldots, j_s\}$, а если $s < n - q$, то $J_2 = \{j_{s+1}, \ldots, j_{n-q}\}$. Тогда цепь Z'_v содержит хотя бы по одному контакту $x_1^{\pi'_1}, \ldots, x_q^{\pi'_q}, x_{j_1}^{\beta_{j_1}}, \ldots, x_{j_s}^{\beta_{j_s}}$.

Пусть $\tilde{\pi}'' = (\pi'_1, \ldots, \pi'_n)$. Тогда цепь Z_v в дереве D проводит на наборе $\tilde{\pi}''$, откуда вытекает, что $(f \oplus I_T)(\tilde{\pi}'') = 1$, а в силу соотношения (2.2) — что $\tilde{\pi}'' \notin T$ и, следовательно, $1 = (f \oplus I_T)(\tilde{\pi}'') = f(\tilde{\pi}'') \oplus I_T(\tilde{\pi}'') = f(\tilde{\pi}'')$, т. е.

$$f(\tilde{\pi}'') = 1. \tag{2.4}$$

Далее, так как цепь Z'_v проводит на наборе $\tilde{\pi}'$, то 1-я, …, q-я, j_1-я, …, j_s-я компоненты набора $\tilde{\pi}'$ равны $\pi'_1, \ldots, \pi'_q, \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_s}$ соответственно. То же самое, очевидно, можно сказать и о наборе $\tilde{\pi}''$. С другой стороны, j_{s+1}-я, …, j_{n-q}-я компоненты набора $\tilde{\pi}''$ равны $\overline{\beta}_{j_{s+1}}, \ldots, \overline{\beta}_{j_{n-q}}$ соответственно. Из соотношения (2.4) и того, что функция f является β_i-монотонной по переменной x_i для каждого $i \in \{q+1, \ldots, n\}$ (при $q < n$), в частности, для каждого $i \in J_2$, следует, что при последовательной замене тех компонент набора $\tilde{\pi}''$, которые отличаются от соответствующих компонент набора $\tilde{\pi}'$ (а все такие компоненты принадлежат множеству J_2), на соответствующие компоненты набора $\tilde{\pi}'$ значение функции f на получаемых наборах не будет уменьшаться и в итоге получим равенство $f(\tilde{\pi}') = 1$, а с учётом (2.3) — соотношение $(f \oplus I_T)(\tilde{\pi}') = f(\tilde{\pi}') \oplus I_T(\tilde{\pi}') = 1 \oplus 0 = 1$. В силу произвольности выбора набора $\tilde{\pi}'$ это означает, что дизъюнкция всех функций, реализуемых в концевых вершинах дерева D', меньше либо равна $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$. Лемма 2.6 доказана. $\square$

Следующее утверждение похоже как формулировкой, так и доказательством на лемму 4 работы [155].

Лемма 2.7. *Любой контакт K из дерева D' проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, и в подграфе $D'_{\tilde{\sigma}(K)}$, образованном всеми проводящими на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ контактами дерева D', компонента связности R_K, содержащая контакт K, а также компонента связности R_0, содержащая вершину a_0, представляют собой несамопересекающиеся цепи (возможно, нулевой длины), в которых ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0 и хотя бы один из концов отличен от всех концевых вершин дерева D'.*

Доказательство. То, что любой контакт K из дерева D' проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, следует из определения этого набора в описании процедуры П; стоит лишь отметить, что при $q < n$ и $j \in \{q+1, \ldots, n\}$ контакт $x_j^{\beta_j}$ проводит на любом наборе из множества T в силу определения чисел $\beta_{q+1}, \ldots, \beta_n$. Граф R_0 целиком содержится в дереве D_q — это следует из леммы 2.5 и того, что $\tilde{\sigma}(K) \in T$. Пусть R_K^q — часть компоненты связности R_K, состоящая из всех её контактов, содержащихся в дереве D_q. Так как данное дерево не содержит циклов, то и каждый из графов R_0, R_K^q не содержит циклов. Из связности графа R_K и вида деревьев D', D_q легко вытекает, что граф R_K^q связный. В силу свойств (iii), (iv) дерева D_q и того, что противоположные контакты не могут оба проводить на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, в этом дереве на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ проводит не более двух контактов, инцидентных какой-либо вершине компоненты связности R_0 (R_K^q), и не более одного контакта, инцидентного вершине a_0. Отсюда вытекает, что любая вершина графа R_0 (R_K^q) инцидентна в нём не более чем двум контактам, а вершина a_0, если она содержится в этом графе — не более чем одному контакту. Учитывая, что граф R_0 связный, содержит вершину a_0 и не содержит циклов, получаем, что он представляет собой несамопересекающуюся цепь (возможно, нулевой длины), одним из концов которой является a_0. Ясно, что в этой цепи ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0 и хотя бы один из концов (а именно a_0) отличен от всех концевых вершин дерева D'.

Осталось доказать утверждение леммы 2.7, относящееся к графу R_K. Предположим, что граф R_K^q непуст, т. е содержит хотя бы одну вершину (но, возможно, не содержит ни одного контакта). Тогда из рассуждений предыдущего абзаца, связности графа R_K^q и отсутствия в нём циклов следует, что данный граф представляет собой несамопересекающуюся цепь (возможно, нулевой длины), в которой ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0. Хотя бы один конец этой цепи отличен от всех концевых вершин дерева D_q (а значит, и D') в силу утверждения 2.2 и свойства (iv) дерева D_q. Если граф R_K совпадает с графом R_K^q, то утверждение леммы справедливо.

Пусть это не так, т. е. либо граф R_K^q пуст, либо хотя бы один контакт графа R_K не содержится в поддереве D_q. Из первого из этих условий следует второе, поскольку граф R_K непуст по условию леммы. В силу рассуждений из предыдущего абзаца граф R_K^q обладает следующим свойством, которое нам понадобится в дальнейшем:

(v) если граф R_K^q непуст, то он представляет собой несамопересекающуюся цепь (возможно, нулевой длины), целиком лежащую в дереве D_q, в которой ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0 и хотя бы один конец отличен от всех концевых вершин указанного дерева.

В случае $q = n$ дерево D совпадает с деревом D_q, которое после применения процедуры П остаётся без изменений. Значит, дерево D' совпадает с деревом D_q. Однако тогда соотношение $R_K \subseteq D'_{\tilde{\sigma}(K)} \subseteq D'$, где отношение $G_1 \subseteq G_2$ означает, что граф G_1 является подграфом графа G_2, приводит к противоречию с соотношением $R_K \nsubseteq D_q$. Поэтому

$$q < n. \tag{2.5}$$

Пусть K^* — контакт из дерева D_q, при рассмотрении которого в процедуре П для контакта K был определён набор $\tilde{\sigma}(K)$. Тогда контакту K^* отвечает какая-то переменная x_i, где $i \in \{1, \ldots, q\}$. Пусть a — «ближний» к вершине a_0 конец контакта K^* в дереве D_q; b — другой конец контакта K^*. Предположим, что для контакта K^* при его рассмотрении в процедуре П был выполнен случай а). Тогда $K = K^*$ и ни одна цепь длины $q-i$ в дереве D_q, соединяющая вершину b с какой-либо концевой вершиной этого дерева, не проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$.

Предположим, что в дереве D_q существует цепь Z_K, соединяющая контакт K с какой-то концевой вершиной v этого дерева и проводящая на наборе $\tilde{\sigma}(K)$. Тогда одним из концов цепи Z_K является v, а другим — либо a, либо b. Если этот другой конец — a, то цепь Z_K имеет вид $a - K - b - Z'_K - v$, причём длина цепи Z'_K обязательно равна $q - i$ в силу построения дерева D_q. Однако это противоречит последнему предложению предыдущего абзаца. Поэтому другим концом цепи Z_K является b, а сама она имеет вид $b - K - a - \ldots - v$. Но вершина a находится «ближе» к вершине a_0, чем каждая из вершин b, v, откуда нетрудно заключить, что в какой-то момент цепь Z_K пройдёт подряд по двум противоположным контактам (а именно в момент первого «разворота» направления цепи Z_K от вершины a_0) и, как следствие, что она не может проводить на наборе $\tilde{\sigma}(K)$. Полученное противоречие означает, что ни одна цепь в дереве D_q, соединяющая контакт K с какой-либо концевой вершиной этого дерева, не проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$. Отсюда вытекает, что каждый контакт компоненты связности R_K содержится в дереве D_q, однако это противоречит соотношению $R_K \nsubseteq D_q$.

В итоге получаем, что случай а) для контакта K^* при его рассмотрении в процедуре П выполняться не может. Значит, для него выполняется случай б), при этом $q < n$ в силу (2.5). Согласно описанию процедуры П в данном случае, в дереве D_q существует единственная цепь Z' длины $q - i$, проводящая на наборе $\tilde{\sigma}(K^*)$ и соединяющая вершину b с какой-то концевой вершиной w этого дерева, причём для контакта K может выполняться один из двух случаев: 1) контакт K содержится в цепи $K^* - Z'$ длины $1 + (q - i)$, соединяющей контакт K^* с вершиной w, и $\tilde{\sigma}(K) = \tilde{\sigma}(K^*)$; 2) контакт K содержится в поддереве D_w дерева D', представляющем собой объединение всех цепей, соединяющих вершину w с какой-то концевой вершиной дерева D' и не проходящих ни через один контакт из дерева D_q (и, более того, содержится в подграфе $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$ дерева D_w, состоящем из всех контактов этого дерева, проводящих на наборе $\tilde{\sigma}(K)$).

Докажем, что в каждом из случаев 1), 2) граф R_K содержится в объединении графов R_K^q и $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$ (последний граф, а также дерево D_w в случае 1) определяются также, как в случае 2)). В случае 1) цепь $K^* - Z'$ содержит контакт K и проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, поэтому она содержится в графе R_K^q, который непуст и обладает свойством (v). Тогда очевидно, что одним из концов цепи R_K^q является w, значит, второй её конец отличен от всех вершин дерева D_q. В таком случае связный граф R_K может получиться из своего подграфа R_K^q только добавлением некоторых вершин и контактов из дерева D_w, причём все эти контакты должны проводить на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ и, как следствие, содержатся в графе $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$, откуда получаем требуемое утверждение. В случае 2) достаточно рассмотреть подслучай $R_K \nsubseteq D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$ (иначе утверждение выполнено автоматически). Тогда в графе R_K обязательно содержится вершина w, так как любая цепь в дереве D', соединяющая контакт K с любой вершиной этого дерева, не содержащейся в его поддереве D_w, очевидным образом проходит через вершину w. Это означает, что и в графе R_K^q содержится вершина w; в силу свойства (v) данная вершина обязана являться одним из концов цепи R_K^q, а другой конец указанной цепи отличен от всех концевых вершин дерева D_q. Отсюда вытекает, что связный граф R_K, все контакты которого проводят на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, не может «выйти за пределы» объединения графов R_K^q и $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$, и требуемое утверждение доказано.

Вершину w будем считать корнем дерева D_w. Тогда это дерево и граф $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$ обладают следующими свойствами:

(vi) в вершину w в дереве D_w не входит ни одного контакта, а в любую другую вершину этого дерева входит ровно один контакт;

(vii) из каждой вершины дерева D_w исходит не более двух контактов, и если два, то один из них не проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$;

(viii) граф $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$ не содержит циклов.

Свойства (vi) и (vii) следуют из преобразования дерева D в дерево D' и того, что в обозначениях из описания процедуры П либо $\tilde{\sigma}(K) = \tilde{\tau}$ и контакт K_1 не проводит на наборе $\tilde{\tau}$, либо $\tilde{\sigma}(K) = \tilde{\tau}'$ и контакт K_2 не проводит на наборе $\tilde{\tau}'$. Свойство (viii) следует из того, что дерево D_w не содержит циклов. Из свойств (vi) и (vii) вытекает, что любая вершина подграфа $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$ инцидентна в нём не более чем двум контактам, а вершина w — не более чем одному контакту, а отсюда и из свойства (viii) — что граф $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$ обладает следующим свойством:

(ix) если он непуст, то он представляет собой объединение несамопересекающихся и попарно непересекающихся цепей, причём вершина w не является внутренней вершиной ни одной из этих цепей.

По доказанному выше компонента связности R_K графа $D'_{\tilde{\sigma}(K)}$, содержащая контакт K, содержится в объединении графа R_K^q, обладающего свойством (v), и графа $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$, обладающего свойством (ix). При этом у графов R_K^q и $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$ нет ни одного общего контакта и может быть только одна общая вершина — w, инцидентная в каждом из этих графов не более чем одному контакту. Таким образом, объединение графов R_K^q и $D_w^{\tilde{\sigma}(K)}$ представляет собой объединение несамопересекающихся и попарно непересекающихся цепей, в которых ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0. Так как граф R_K связный и содержится в этом объединении, то он представляет собой несамопересекающуюся цепь, в которой ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0. Осталось заметить, что хотя бы один из концов этой цепи отличен от всех концевых вершин дерева D'. Действительно, в противном случае оба конца цепи R_K обязательно были бы концевыми вершинами дерева D_w, однако это невозможно в силу утверждения 2.2, свойства (vii) и того, что цепь R_K проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$. Лемма 2.7 доказана. □

Возьмём две копии дерева D' и соединим каждую концевую вершину одной из них с той же концевой вершиной другой. Корни этих копий будем считать полюсами A и B полученной «симметричной» КС, которую обозначим через S'. Из леммы 2.6 нетрудно получить, что схема S' реализует функцию $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$ (каждая цепь между полюсами схемы S' представляет собой «удвоенную» цепь из дерева D', соединяющую его корень с какой-то концевой вершиной), а из леммы 2.7 — что для любого контакта K схемы S' во множестве T найдётся такой набор $\tilde{\sigma}(K)$, что контакт K проводит на этом наборе и в подсхеме, образованной всеми проводящими на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ контактами схемы S', компонента связности, содержащая контакт K, а также компоненты связности, содержащие полюсы схемы S', представляют собой несамопересекающиеся цепи (возможно, нулевой длины), в которых ни одна внутренняя вершина не совпадает ни с одним из двух полюсов схемы S'.

Вид схемы S' для функции $f(\tilde{x}^7)$ и множества $T = M$, взятых из примера 2.4, а также вид подсхем S'_1, S'_2, S'_3, образованных всеми проводящими на наборах с номерами 1, 2, 3 соответственно контактами схемы S', показаны на рисунке 2.4.

Справедливость неравенства $D(f) \leqslant m(f)$ будет вытекать из равенства $|T| = m(f)$ и следующей леммы.

Лемма 2.8 [155]. *Пусть КС S' и множество T (некоторых) единичных наборов б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ таковы, что выполнены следующие условия:*

1) *схема S' реализует функцию $(f \oplus I_T)(\tilde{x}^n)$;*

2) *для любого контакта K схемы S' в T найдётся такой набор $\tilde{\sigma}(K)$, что контакт K проводит на этом наборе и в подсхеме, образованной всеми проводящими на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ контактами схемы S', компонента связности, содержащая контакт K, а также компоненты связности, содержащие полюсы схемы S', представляют собой несамопересекающиеся цепи (возможно, нулевой длины), в которых ни одна внутренняя вершина не совпадает ни с одним из двух полюсов схемы S'.*

Тогда из схемы S' путём, быть может, присоединения к ней некоторых контактов можно получить реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ и неизбыточную (относительно обрывов контактов) схему S, для которой множество T является ЕПТ размыкания.

Доказательство. Пусть $|T| = l$. Если $l = 0$, то из условий 1), 2) следует, что в схеме S' не содержится ни одного контакта и эта схема реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Тогда в качестве схемы S, очевидно, можно взять саму схему S' (у неё нет ни одной ф. н.). Далее будем считать, что $l \geqslant 1$. Пусть $T = \{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l\}$. Полюсы схемы S' обозначим через A и B. Для каждого $i = 1, \ldots, l$ введём множество M_i, состоящее из всех таких контактов K, для которых $\tilde{\sigma}(K) = \tilde{\sigma}_i$. Пусть в подсхеме, образованной всеми проводящими на наборе $\tilde{\sigma}_i$ контактами схемы S', имеется ровно k_i компонент связности, представляющих собой несамопересекающиеся цепи, в которых ни одна внутренняя вершина не совпадает ни с одним из двух полюсов схемы S' и каждая из которых, за исключением, быть может, компонент связности, содер-

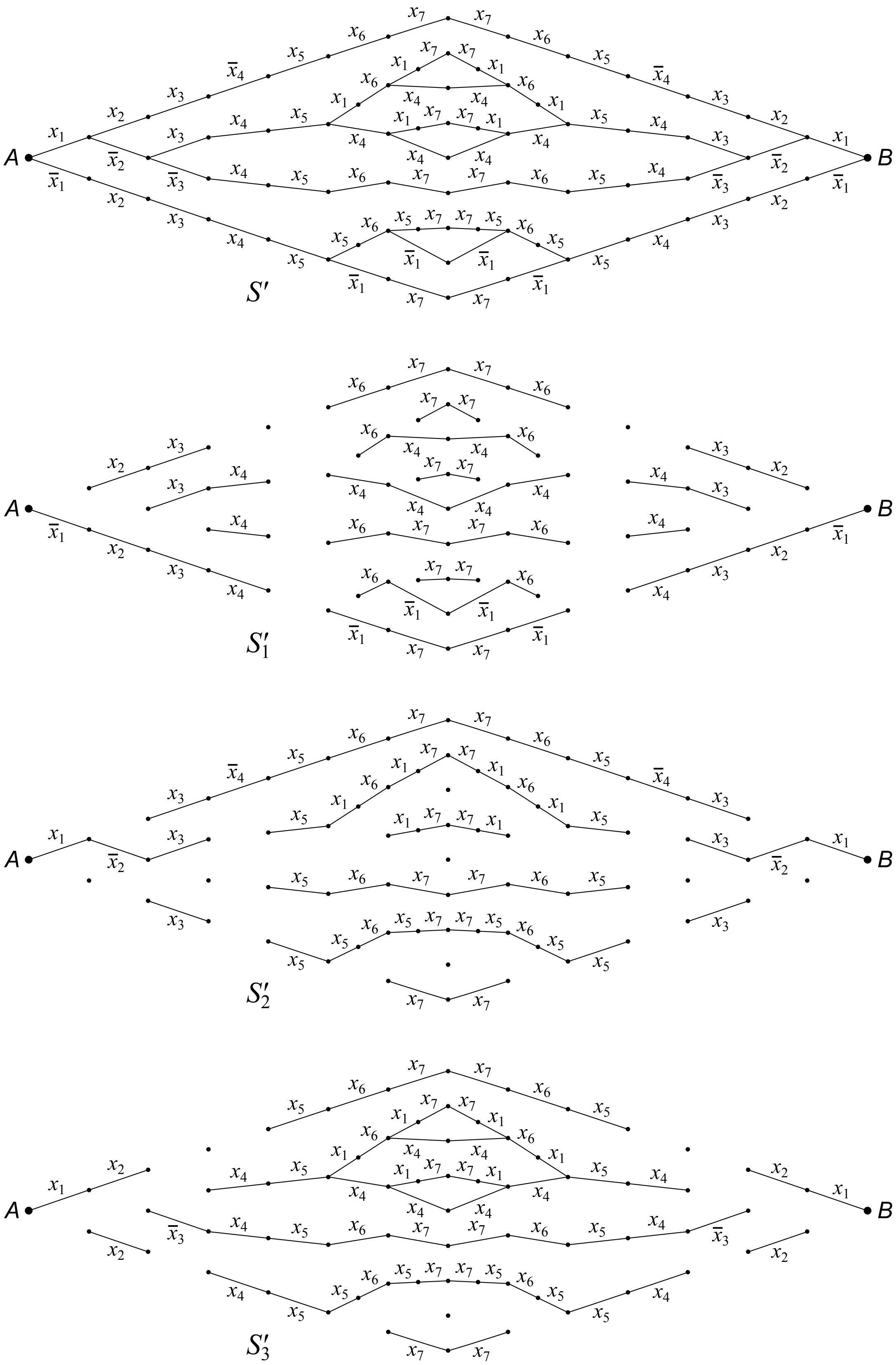

Рис. 2.4. Схема S' и подсхемы S'_1, S'_2, S'_3

жащих полюсы схемы S', имеет ненулевую длину. Тогда в силу условия 2) каждый контакт из множества M_i и каждый полюс схемы S' входит в одну из этих k_i компонент.

Пусть Z_1^i ($Z_{k_i}^i$) — та из этих компонент связности, в которую входит полюс A (соответственно B) схемы S'. Тогда Z_1^i ($Z_{k_i}^i$) — несамопересекающаяся цепь и полюс A (соответственно B) обязан быть одной из концевых вершин этой цепи. Другую концевую вершину этой цепи обозначим через b_1^i (соответственно через $a_{k_i}^i$; вершины A и b_1^i, а также вершины B и $a_{k_i}^i$ могут совпадать). Отметим, что компоненты связности Z_1^i и $Z_{k_i}^i$ различны; в противном случае на наборе $\tilde{\sigma}_i$ существовала бы проводящая цепь между полюсами схемы S', что невозможно в силу условия 1) и соотношений $\tilde{\sigma}_i \in T$, $(f \oplus I_T)(\tilde{\sigma}_i) = f(\tilde{\sigma}_i) \oplus I_T(\tilde{\sigma}_i) = 1 \oplus 1 = 0$. Поэтому $k_i \geqslant 2$. Если $k_i \geqslant 3$, то пусть $Z_2^i, \ldots, Z_{k_i-1}^i$ — остальные из указанных k_i компонент связности. Тогда все они — несамопересекающиеся цепи ненулевой длины. Концевые вершины этих цепей обозначим через a_2^i и b_2^i, …, $a_{k_i-1}^i$ и $b_{k_i-1}^i$ соответственно.

Далее, пусть $\tilde{\sigma}_i = (\sigma_1^i, \ldots, \sigma_n^i)$, а $Z_{\tilde{\sigma}_i}$ — цепь длины n, состоящая из контактов $x_1^{\sigma_1^i}, \ldots, x_n^{\sigma_n^i}$. Очевидно, что эта цепь проводит на наборе $\tilde{\sigma}_i$ и не проводит ни на каком другом n-наборе. Для каждого $j = 1, \ldots, k_i - 1$ возьмём экземпляр цепи $Z_{\tilde{\sigma}_i}$ и подсоединим один её конец к вершине b_j^i, а другой — к вершине a_{j+1}^i схемы S'. Цепь $A - Z_1^i - b_1^i - Z_{\tilde{\sigma}_i} - a_2^i - Z_2^i - b_2^i - \ldots - b_{k_i-1}^i - Z_{\tilde{\sigma}_i} - a_{k_i}^i - Z_{k_i}^i - B$, соединяющую полюсы A и B, которая при этом получается, обозначим для краткости через $\hat{Z}_i$. Указанные действия выполним для каждого $i = 1, \ldots, l$. Полученную схему с полюсами A и B обозначим через S.

Докажем, что схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. На любом n-наборе $\tilde{\delta}$, не принадлежащем множеству T, т. е. отличном от наборов $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l$, ни одна из цепей $Z_{\tilde{\sigma}_i}$, $i = 1, \ldots, l$, подсоединённых к схеме S' для получения схемы S, не проводит, поэтому схема S функционирует на наборе $\tilde{\sigma}$ в точности как схема S' на этом же наборе и выдаёт на нём значение $(f \oplus I_T)(\tilde{\delta}) = f(\tilde{\delta}) \oplus I_T(\tilde{\delta}) = f(\tilde{\delta}) \oplus 0 = f(\tilde{\delta})$ в силу условия 1) и того, что $\tilde{\delta} \notin T$. С другой стороны, на любом наборе $\tilde{\sigma}_i$, $i \in \{1, \ldots, l\}$, каждая из цепей $Z_1^i, Z_2^i, \ldots, Z_{k_i}^i, Z_{\tilde{\sigma}_i}$, а значит, и цепь $\hat{Z}_i$, соединяющая полюсы схемы S, проводит по определению этих цепей, откуда следует, что схема S на наборе $\tilde{\sigma}_i$ выдаёт значение 1, которое равно $f(\tilde{\sigma}_i)$ в силу того, что $\tilde{\sigma}_i \in T$, и определения множества T. В итоге получаем, что схема S на любом n-наборе выдаёт то же значение, что и функция f, т. е. реализует эту функцию.

Докажем теперь, что схема S неизбыточна и множество T является для неё ЕПТ размыкания. Пусть в этой схеме неисправен некоторый контакт K. Тогда либо $K \in S'$ и $\tilde{\sigma}(K) = \tilde{\sigma}_i$, т. е. $K \in M_i$ (и, следовательно, контакт K содержится в одной из цепей $Z_1^i, Z_2^i, \ldots, Z_{k_i}^i$), либо данный контакт содержится в каком-то присоединённом к схеме S' экземпляре цепи $Z_{\tilde{\sigma}_i}$, где

$i \in \{1, \ldots, l\}$. В каждом из этих случаев по определению цепи $\hat{Z}_i$ получаем, что $K \in \hat{Z}_i$.

На наборе $\tilde{\sigma}_i$ никакие из цепей $Z_{\tilde{\sigma}_1}, \ldots, Z_{\tilde{\sigma}_k}$, подсоединённых к схеме S' для получения схемы S, кроме цепей $Z_{\tilde{\sigma}_i}$, не проводят, поэтому схема S как в случае отсутствия в ней неисправностей, так и при обрыве контакта K функционирует на наборе $\tilde{\sigma}_i$ в точности как схема S' со всеми подсоединёнными к ней указанным выше способом экземплярами цепи $Z_{\tilde{\sigma}_i}$ (обозначим данную схему с полюсами A и B через S'_i) на этом же наборе. По построению цепь $\hat{Z}_i$ соединяет полюсы схемы S'_i и представляет собой отдельную компоненту связности подсхемы S''_i, образованной всеми проводящими на наборе $\tilde{\sigma}_i$ контактами схемы S'_i (действительно, «разрозненные» компоненты связности $Z^i_1, \ldots, Z^i_{k_i}$ подсхемы, образованной всеми проводящими на наборе $\tilde{\sigma}_i$ контактами схемы S', соединяются в одну $k_i - 1$ экземплярами цепи $Z_{\tilde{\sigma}_i}$, проводящей на наборе $\tilde{\sigma}_i$).

Как было отмечено выше, $K \in \hat{Z}_i$, поэтому при обрыве контакта K компонента связности $\hat{Z}_i$ подсхемы S''_i разобьётся на две, причём полюсы подсхемы S''_i окажутся в разных компонентах связности. Это означает, что на наборе $\tilde{\sigma}_i$ в схеме S'_i, а значит, и в схеме S, при неисправности контакта K не будет существовать ни одной проводящей цепи между её полюсами, т. е. схема S на наборе $\tilde{\sigma}_i$ выдаст значение 0, в то время как $f(\tilde{\sigma}_i) = 1$. Таким образом, неисправность контакта K будет обнаружена на одном из наборов множества T. Отсюда в силу произвольности выбора контакта K в схеме S следует, что данная схема неизбыточна и множество T является для неё ЕПТ размыкания. Лемма 2.8 доказана. □

Неравенство $D(f) \leqslant m(f)$, а вместе с ним теорема 2.1 доказаны. □

С использованием (1.1), (1.2) из теоремы 2.1 и следствий 2.1, 2.2 можно получить аналогичные им результаты для величин $D^0_{\text{ПП}}(f)$, $D^0_{k\text{-П}}(f)$, $D^0_{\text{ПП}}(n)$ и $D^0_{k\text{-П}}(n)$, где k — любое натуральное число.

Множество M (некоторых) единичных наборов б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, назовём *ключевым* для этой функции, если для любых $\alpha \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ таких, что существует хотя бы один единичный (i, α)-набор функции $f(\tilde{x}^n)$, в M найдётся (i, α)-набор.

Очевидно, что в качестве ключевого множества для функции $f(\tilde{x}^n)$ всегда можно взять множество $M_1(f)$.

Пример 2.5. Если б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, и два противоположных двоичных набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $\tilde{\sigma}' = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ таковы, что $f(\tilde{\sigma}) = f(\tilde{\sigma}') = 1$, то в качестве ключевого для f множества можно взять множество $\{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$. Действительно, для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$ либо $\sigma_i = \alpha$, либо $\overline{\sigma}_i = \alpha$.

Для объяснения связи между понятиями покрывающего и ключевого множества отметим, что в силу утверждения 2.1 любое ключевое множество является покрывающим. Обратное, вообще говоря, неверно: например, легко проверить, что для функции $f(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ множество $\{(1,1)\}$ является покрывающим, но не ключевым. В дальнейшем понятие покрывающего множества не понадобится.

Следующая теорема интересна для нас прежде всего тем, что её результат будет использован в §3 при доказательствах теорем 3.2 и 3.3.

Теорема 2.2 [164]. *Пусть M — ключевое множество для б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$. Тогда эту функцию для любого $k \in \mathbb{N}$ можно реализовать k-неизбыточной КС, для которой множество M является k-ПТ размыкания.*

Доказательство получается упрощением доказательства теоремы 2.1. Положим $T = M$ и $D' = D_{f,T}$. В таком случае из свойств (i), (ii) дерева $D_{f,T}$ сразу следует лемма 2.6.

Рассмотрим произвольный контакт K в дереве D'; пусть это контакт x_i^α, где $i \in \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$. По построению дерева D' существует хотя бы одна несамопересекающаяся цепь, соединяющая его корень с какой-то концевой вершиной и проходящая через контакт K. По свойству (i) данная цепь проводит на каком-то наборе $\tilde{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, причём

$$(f \oplus I_T)(\tilde{\pi}) = 1. \tag{2.6}$$

Если $\tilde{\pi} \in T$, то $I_T(\tilde{\pi}) = 1$ и $f(\tilde{\pi}) = 1$, так как $T = M$ — ключевое множество для функции $f(\tilde{x}^n)$, т. е. состоит только из её единичных наборов. Получаем противоречие с (2.6), откуда вытекает, что $\tilde{\pi} \notin T$, $I_T(\tilde{\pi}) = 0$ и $f(\tilde{\pi}) = 1$. Контакт K проводит на наборе $\tilde{\pi}$, поэтому $\pi_i = \alpha$. Получаем, что $\tilde{\pi}$ является единичным (i, α)-набором функции $f(\tilde{x}^n)$, а тогда по определению ключевого множества в T найдётся (i, α)-набор, который мы обозначим через $\tilde{\sigma}(K)$. Контакт K проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, так как имеет вид x_i^α. Тем самым для каждого контакта K в дереве D' определён набор $\tilde{\sigma}(K) \in T$, на котором этот контакт проводит.

Корень дерева D' обозначим через a_0.

Докажем лемму 2.7 (её необходимо доказать заново, так как определение дерева D' отличается от определения этого дерева в доказательстве теоремы 2.1). Пусть K — произвольный контакт в дереве D'. То, что он проводит на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, следует из выбора этого набора. Так как данное дерево не содержит циклов, то и граф R_K (R_0) не содержит циклов. Очевидно, что дерево D' обладает свойствами (iii) и (iv) (в пояснении к свойству (iv) надо заменить q на n). Из этих свойств и того, что противоположные контакты не могут оба проводить на наборе $\tilde{\sigma}(K)$, следует, что в дереве D' на наборе $\tilde{\sigma}(K)$ проводит не более двух контактов, инцидентных какой-либо вершине компоненты связности R_K (R_0), и не более одного контакта, инцидентного вершине a_0. Отсюда вытекает, что любая вершина графа R_K (R_0) инцидентна в нём не более чем двум контактам, а вершина a_0, если она содержится в этом графе — не более чем одному контакту. Учитывая, что граф R_K (R_0) связный и не содержит циклов, получаем, что он представляет собой несамопересекающуюся цепь (возможно, нулевой длины), в которой ни одна внутренняя вершина не совпадает с вершиной a_0. Хотя бы один из концов этой цепи отличен от всех концевых вершин дерева D' в силу утверждения 2.2 и свойства (iv) данного дерева. Лемма 2.7 доказана.

Возьмём две копии дерева D' и соединим каждую концевую вершину одной из них с той же концевой вершиной другой. Корни этих копий будем считать полюсами A и B полученной «симметричной» КС, которую обозначим через S'. Из лемм 2.6 и 2.7 следует выполнение условий соответственно 1) и 2) леммы 2.8. В силу этой леммы функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС S, для которой множество $T = M$ является ЕПТ размыкания. Но тогда M является и k-ПТ размыкания для схемы S, которая при этом k-неизбыточна (см. утверждение 1.2). Теорема 2.2 доказана. $\square$

§3. Диагностические тесты размыкания

В данном параграфе рассматриваются диагностические тесты для КС относительно обрывов контактов. Установлены, в частности, следующие результаты. Для любых $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $D^0_{k\text{-Д}}(n) \leqslant n + k(n-2)$ (следствие 3.1), улучшающее в случае $k = 1$ упомянутую во введении оценку $D^0_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, которую можно получить по аналогии с [192, с. 113, теорема 9]. При условии $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^0_{k\text{-Д}}(f) \leqslant 2k + 2$ (теорема 3.3). Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^0_{\text{ПД}}(n) = 2^{n-1}$ (следствие 3.4), улучшающее неравенство $D^0_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n - 2$ из [206], полученное для $n \geqslant 2$. Кроме того, число б. ф. f от n переменных, для которых $D^0_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, асимптотически не меньше $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$ (следствие 3.5).

В доказательствах теорем 3.2 и 3.3 будут использованы некоторые свойства ключевых множеств.

Лемма 3.1 [164]. *Пусть M — ключевое множество для б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, а $f'(\tilde{x}^n)$ — такая б. ф., что выполнено функциональное соотношение $I_M \leqslant f' \leqslant f$. Тогда множество M является ключевым и для функции $f'(\tilde{x}^n)$.*

Доказательство. На любом наборе из множества M функция $f'(\tilde{x}^n)$ принимает значение 1 в силу неравенства $I_M \leqslant f'$. Для любых $\alpha \in \{0,1\}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$ таких, что существует хотя бы один единичный (i,α)-набор функции $f'(\tilde{x}^n)$, существует и хотя бы один единичный (i,α)-набор функции $f(\tilde{x}^n)$, поскольку $f' \leqslant f$. Так как M — ключевое множество для $f(\tilde{x}^n)$, то в M найдётся (i,α)-набор. Тогда по определению множество M является ключевым для функции $f'(\tilde{x}^n)$. Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2 [164]. *Если какие-то два единичных набора $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$ б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, различаются в s компонентах, то для неё существует ключевое множество мощности не более $n-s+2$.*

Доказательство сходно с доказательством леммы 2.1. Обозначим номера компонент, в которых наборы $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$ различаются, через $i_1,\ldots,i_s$. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$. Рассмотрим все возможные значения i от 1 до n, отличные от $i_1,\ldots,i_s$, для каждого из которых существует единичный $(i,\overline{\sigma}_i)$-набор функции f. Множество всех таких значений i обозначим через $\mathcal{I}$, а соответствующие им единичные $(i,\overline{\sigma}_i)$-наборы функции f — через $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i}$ (если таких значений нет, полагаем $\mathcal{I} = \varnothing$). Пусть $M = \{\tilde{\sigma}\} \cup \{\tilde{\sigma}'\} \cup \{\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i} \mid i \in \mathcal{I}\}$. Тогда $|M| \leqslant 2 + |\mathcal{I}| \leqslant n-s+2$.

Покажем, что M является ключевым множеством для функции $f(\tilde{x}^n)$. Пусть i — произвольный индекс от 1 до n; α — произвольная булева константа. Если $i \in \{i_1,\ldots,i_s\}$, то (i,α)-набором будет один из наборов $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$. Пусть теперь $i \neq \{i_1,\ldots,i_s\}$. Если $\alpha = \sigma_i$, то в качестве (i,α)-набора можно взять набор $\tilde{\sigma}$. Если же $\alpha = \overline{\sigma}_i$ и существует единичный (i,α)-набор функции f, то $i \in \mathcal{I}$ и в качестве (i,α)-набора можно взять набор $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i}$. Все указанные наборы принадлежат множеству M. Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3 [164]. *Пусть $n \geqslant 4$ и множество M двоичных наборов длины n таково, что любые два набора из этого множества различаются не более чем в двух компонентах. Тогда либо $|M| = 4$ и j-е компоненты всех наборов из M совпадают для некоторого $j \in \{1,\ldots,n\}$, либо $|M| \leqslant n+1$ и существует такой n-набор $\tilde{\tau}$, что M является подмножеством множества, состоящего из набора $\tilde{\tau}$ и n соседних с ним наборов.*

Доказательство. Если любые два набора из множества M различаются не более чем в одной компоненте, то очевидно, что $|M| \leqslant 2$ и в качестве набора $\tilde{\tau}$ можно взять любой набор из множества M при $|M| \geqslant 1$ либо произвольный набор при $|M| = 0$. Пусть теперь какие-то два набора $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$ из M различаются ровно в двух компонентах: без ограничения общности, в 1-й и 2-й компонентах. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\ldots,\sigma_n)$, тогда $\tilde{\sigma}' = (\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,\sigma_3,\ldots,\sigma_n)$.

Если первые две компоненты какого-то набора из множества $M \setminus \{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'\}$ равны σ_1,σ_2 соответственно ($\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2$ соответственно), то он отличается от набора $\tilde{\sigma}'$ (соответственно $\tilde{\sigma}$) по крайней мере в трёх компонентах, что невозможно. Поэтому первые две компоненты любого набора из множества $M\setminus\{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'\}$ равны либо $\sigma_1,\overline{\sigma}_2$ соответственно, либо $\overline{\sigma}_1,\sigma_2$ соответственно. Рассмотрим два случая.

1. В множестве $M\setminus\{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'\}$ содержится хотя бы один набор $\tilde{\pi}$, первые две компоненты которого равны $\sigma_1,\overline{\sigma}_2$ соответственно, и хотя бы один набор $\tilde{\pi}'$, первые две компоненты которого равны $\overline{\sigma}_1,\sigma_2$ соответственно. Так как наборы $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\pi}'$ различаются в первых двух компонентах, они должны совпадать во всех остальных компонентах. Пусть $\tilde{\pi}=(\sigma_1,\overline{\sigma}_2,\pi_3,\dots,\pi_n)$, тогда $\tilde{\pi}'=(\overline{\sigma}_1,\sigma_2,\pi_3,\dots,\pi_n)$. Если первые две компоненты какого-то набора из множества $M\setminus\{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}',\tilde{\pi},\tilde{\pi}'\}$ равны σ_1,σ_2 соответственно ($\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2$ соответственно, $\sigma_1,\overline{\sigma}_2$ соответственно, $\overline{\sigma}_1,\sigma_2$ соответственно), то этот набор отличается от набора $\tilde{\sigma}'$ (набора $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\pi}'$, $\tilde{\pi}$) по крайней мере в трёх компонентах, что невозможно. Поэтому $M=\{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}',\tilde{\pi},\tilde{\pi}'\}$ и $|M|=4$.

Наборы $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\pi}$ различаются во 2-й компоненте, поэтому они могут различаться не более чем в одной из 3-й, ..., n-й компонент. С учётом неравенства $n\geqslant 4$ получаем, что $\sigma_j=\pi_j$ для некоторого $j\in\{3,\dots,n\}$. Тогда j-е компоненты всех наборов $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$, $\tilde{\pi}$, $\tilde{\pi}'$ совпадают, что и требовалось доказать.

2. Первые две компоненты каждого набора из множества $M\setminus\{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'\}$ равны $\sigma_1^c,\sigma_2^{\overline{c}}$ соответственно, где c — булева константа, одинаковая для всех наборов из данного множества. Так как каждый из этих наборов отличается от набора $\tilde{\sigma}$ в одной из первых двух компонент, то он может отличаться от него не более чем в одной из 3-й, ..., n-й компонент. Всего таких наборов $n-1$, а именно набор $\tilde{\tau}=(\sigma_1^c,\sigma_2^{\overline{c}},\sigma_3,\dots,\sigma_n)$ и $n-2$ набора $\tilde{\tau}_3,\dots,\tilde{\tau}_n$, отличающихся от набора $\tilde{\tau}$ только в 3-й, ..., в n-й компоненте соответственно. Поэтому $M\setminus\{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}'\}\subseteq\{\tilde{\tau},\tilde{\tau}_3,\dots,\tilde{\tau}_n\}$ и $M\subseteq M'$, где $M'=\{\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}',\tilde{\tau},\tilde{\tau}_3,\dots,\tilde{\tau}_n\}$. Легко видеть, что $|M'|=n+1$ и множество M' состоит в точности из набора $\tilde{\tau}$ и n соседних с ним наборов. Лемма 3.3 доказана. $\square$

Лемма 3.4 [164]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n\geqslant 4$, для которой $|M_1(f)|\geqslant n+2$, существует ключевое множество мощности не более $n-1$.*

Доказательство. Если какие-то два единичных набора функции $f(\tilde{x}^n)$ различаются хотя бы в трёх компонентах, то справедливость леммы 3.4 вытекает из леммы 3.2. Если же любые два единичных набора функции $f(\tilde{x}^n)$, т. е. любые два набора из множества $M_1(f)$, различаются не более чем в двух компонентах, то в силу леммы 3.3 и неравенства $4<n+1$ имеем $|M_1(f)|\leqslant n+1$, однако это противоречит условию $|M_1(f)|\geqslant n+2$. Лемма 3.4 доказана. $\square$

Лемма 3.5 [164]. *Если б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, такова, что j-е компоненты всех наборов из множества $M_1(f)$ совпадают для некоторого $j \in \{1, \dots, n\}$, то для неё существует ключевое множество мощности не более $n-1$.*

Доказательство. Если $|M_1(f)| \leqslant 2$, то в качестве такого ключевого множества можно взять само $M_1(f)$. Пусть $|M_1(f)| \geqslant 3$. Возьмём произвольные три попарно различных набора из множества $M_1(f)$. Очевидно, что какие-то два из них различаются по крайней мере в двух компонентах. Обозначим эти два набора через $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$, а номера произвольных двух компонент, в которых они различаются — через i_1 и i_2. По условию $i_1 \neq j$ и $i_2 \neq j$.

Дальнейшие рассуждения похожи на доказательство леммы 3.2. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Рассмотрим все возможные значения i от 1 до n, отличные от i_1, i_2, j, для которых существует единичный $(i, \overline{\sigma}_i)$-набор функции f. Множество всех таких значений i обозначим через $\mathcal{I}$, а соответствующие им единичные $(i, \overline{\sigma}_i)$-наборы функции f — через $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i}$ (если таких значений нет, полагаем $\mathcal{I} = \varnothing$). Пусть $M = \{\tilde{\sigma}\} \cup \{\tilde{\sigma}'\} \cup \{\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i} \mid i \in \mathcal{I}\}$. Тогда $|M| \leqslant 2 + |\mathcal{I}| \leqslant n-1$.

Покажем, что M является ключевым множеством для функции $f(\tilde{x}^n)$. Пусть i — произвольный индекс от 1 до n; α — произвольная булева константа. Если $i = i_1$ или $i = i_2$, то (i, α)-набором будет один из наборов $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$. Если $i = j$ и $\alpha = \overline{\sigma}_j$, то по условию не существует ни одного единичного (i, α)-набора функции $f(\tilde{x}^n)$, так как j-я компонента набора $\tilde{\sigma}$ равна σ_j. Если $i = j$ и $\alpha = \sigma_j$, то (i, α)-набором будет любой набор из множества M. Пусть теперь $i \notin \{i_1, i_2, j\}$. Если $\alpha = \sigma_i$, то в качестве (i, α)-набора можно взять набор $\tilde{\sigma}$. Если же $\alpha = \overline{\sigma}_i$ и существует единичный (i, α)-набор функции f, то $i \in \mathcal{I}$ и в качестве (i, α)-набора можно взять набор $\tilde{\delta}_{i,\overline{\sigma}_i}$. Все указанные наборы принадлежат множеству M. Лемма 3.5 доказана. □

Лемма 3.6 [164]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$, для которой $|M_1(f)| \geqslant 2n-1$, существуют такое ключевое множество M и такое множество M' двоичных наборов длины n, что M' является ключевым множеством для функции $(f \& \overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ и $|M| + |M'| \leqslant 2n-2$.*

Доказательство. В силу леммы 3.4 и неравенства $2n-1 > n+2$ для функции $f(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество M мощности не более $n-1$. Тогда

$$|M_1(f \& \overline{I}_M)| = |M_1(f)| - |M| \geqslant 2n - 1 - (n-1) = n > 3.$$

В случае $|M| \leqslant n-2$ возьмём произвольные три попарно различных набора из множества $M_1(f \& \overline{I}_M)$; очевидно, что какие-то два из них различаются по крайней мере в двух компонентах. Тогда для функции $(f \& \overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ в силу леммы 3.2 существует ключевое множество M' мощности не более n и $|M| + |M'| \leqslant 2n-2$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $|M| = n-1$. Если какие-то два единичных набора функции $(f\&\overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ различаются хотя бы в трёх компонентах, то по лемме 3.2 для этой функции существует ключевое множество M' мощности не более $n-1$ и $|M|+|M'| \leqslant 2n-2$, что и требовалось доказать. Пусть любые два единичных набора функции $(f\&\overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ различаются не более чем в двух компонентах. По лемме 3.3 может выполняться один из двух случаев.

1. Множество $M_1(f\&\overline{I}_M)$ содержит четыре набора, причём все эти наборы совпадают друг с другом в какой-то компоненте. Тогда в силу леммы 3.5 для функции $(f\&\overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество M' мощности не более $n-1$ и $|M|+|M'| \leqslant 2n-2$, что и требовалось доказать.

2. Множество $M_1(f\&\overline{I}_M)$ является подмножеством множества $M_{\tilde{\tau}}$, состоящего из некоторого набора $\tilde{\tau}$ и n соседних с ним наборов. Положим $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tilde{\tau}^i = (\tau_1, \ldots, \tau_{i-1}, \overline{\tau}_i, \tau_{i+1}, \ldots, \tau_n)$ для $i = 1, \ldots, n$; тогда $M_{\tilde{\tau}} = \{\tilde{\tau}, \tilde{\tau}^1, \ldots, \tilde{\tau}^n\}$. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $\tilde{\tau}^i \notin M_1(f\&\overline{I}_M)$. Легко видеть, что i-е компоненты всех наборов из множества $M_{\tilde{\tau}} \setminus \{\tilde{\tau}^i\} \supseteq M_1(f\&\overline{I}_M)$ совпадают с i-й компонентой набора $\tilde{\tau}$, т. е. совпадают между собой. Тогда в силу леммы 3.5 для функции $(f\&\overline{I}_M)(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество M' мощности не более $n-1$ и $|M|+|M'| \leqslant 2n-2$, что и требовалось доказать.

2.2. Множество $M_1(f\&\overline{I}_M)$ содержит все наборы $\tilde{\tau}^1, \ldots, \tilde{\tau}^n$. В множестве M содержится хотя бы один набор, отличный от наборов $\tilde{\tau}$ и $(\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$, поскольку $|M| = n-1 \geqslant 3$. Ясно, что указанный набор не принадлежит множеству $M_1(f\&\overline{I}_M)$, поэтому отличается от набора $\tilde{\tau}$ не менее чем в двух и не более чем в $n-1$ компонентах. Среди всех таких наборов из множества M выберем произвольный набор $\tilde{\pi}$, совпадающий с набором $\tilde{\tau}$ в наименьшем числе компонент; число этих компонент обозначим через s, а их номера — через $i_1, \ldots, i_s$. Из сказанного выше следует, что $1 \leqslant s \leqslant n-2$. Положим $\hat{M} = \{\tilde{\pi}, \tilde{\tau}^{i_1}, \ldots, \tilde{\tau}^{i_s}\}$.

Множество $\hat{M}$ является ключевым для функции $f(\tilde{x}^n)$. Действительно, пусть i — произвольный индекс от 1 до n. Если $i \in \{i_1, \ldots, i_s\}$, то (i, τ_i)-набором будет набор $\tilde{\pi}$, а $(i, \overline{\tau}_i)$-набором — набор $\tilde{\tau}^i$. Если же $i \notin \{i_1, \ldots, i_s\}$, то (i, τ_i)-набором будет любой из наборов $\tilde{\tau}^{i_1}, \ldots, \tilde{\tau}^{i_s}$, а $(i, \overline{\tau}_i)$-набором — набор $\tilde{\pi}$. Все указанные наборы принадлежат множеству $\hat{M}$ и являются единичными наборами функции $f(\tilde{x}^n)$, поскольку $\tilde{\pi} \in M$, а $\tilde{\tau}^{i_1}, \ldots, \tilde{\tau}^{i_s} \in$ $\in M_1(f\&\overline{I}_M) \subset M_1(f)$.

Заметим, что $|\hat{M}| = s+1$. Если $1 \leqslant s \leqslant n-3$, то $|\hat{M}| \leqslant n-2$, а этот случай (с заменой $\hat{M}$ на M) был разобран в начале доказательства леммы 3.6. Пусть теперь $s = n-2$, тогда $|\hat{M}| = n-1$. Наборы $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\tau}$ совпадают ровно в $s = n-2$ компонентах, т. е. различаются в двух компонентах, номера которых мы обозначим через i'_1 и i'_2. Из соотношения $|M| = n-1 \geqslant$

$\geqslant 3$ следует существование во множестве M набора $\tilde{\pi}'$, отличного от наборов $\tilde{\tau}$, $\tilde{\pi}$, который в силу предположения подслучая 2.2 отличен также от наборов $\tilde{\tau}^1, \ldots, \tilde{\tau}^n$; из определения множества $\hat{M}$ вытекает, что $\tilde{\tau}^{i'_1}, \tilde{\tau}^{i'_2}, \tilde{\pi}' \notin \hat{M}$, а тогда $\tilde{\tau}^{i'_1}, \tilde{\tau}^{i'_2}, \tilde{\pi}' \in M_1(f\&\overline{I}_{\hat{M}})$. Достаточно доказать, что для функции $(f\&\overline{I}_{\hat{M}})(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество M' мощности не более $n-1$; тогда $|\hat{M}|+|M'| \leqslant 2n-2$ и после переобозначения $M = \hat{M}$ получим утверждение леммы 3.6. Согласно выбору числа s, возможны два подслучая.

2.2.1. Наборы $\tilde{\pi}'$ и $\tilde{\tau}$ совпадают не менее чем в $s = n-2$ компонентах, т. е. различаются не более чем в двух компонентах; тогда они различаются ровно в двух компонентах, номера которых мы обозначим через i''_1 и i''_2. При этом $\{i''_1, i''_2\} \neq \{i'_1, i'_2\}$, так как $\tilde{\pi}' \neq \tilde{\pi}$. Значит, хотя бы одно из чисел i'_1, i'_2 не принадлежит множеству $\{i''_1, i''_2\}$; без ограничения общности это i'_1. Тогда наборы $\tilde{\tau}^{i'_1}$ и $\tilde{\pi}'$ различаются в трёх компонентах — i'_1-й, i''_1-й и i''_2-й, и из соотношений $\tilde{\tau}^{i'_1}, \tilde{\pi}' \in M_1(f\&\overline{I}_{\hat{M}})$ и леммы 3.2 вытекает, что для функции $(f\&\overline{I}_{\hat{M}})(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество мощности не более $n-1$, что и требовалось доказать.

2.2.2. Набор $\tilde{\pi}'$ равен $(\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$. Тогда наборы $\tilde{\tau}^{i'_1}$ и $\tilde{\pi}'$ различаются во всех компонентах, кроме i'_1-й, т. е. в $n-1 \geqslant 3$ компонентах, поэтому в силу леммы 3.2 для функции $(f\&\overline{I}_{\hat{M}})(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество мощности не более $n-1$. Лемма 3.6 доказана. □

Лемма 3.7 [164]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$, для которой $|M_1(f)| \geqslant 2n+1$, существует ключевое множество мощности не более $n-2$.*

Доказательство. Если какие-то два единичных набора функции $f(\tilde{x}^n)$ различаются хотя бы в четырёх компонентах, то справедливость леммы 3.7 вытекает из леммы 3.2. Если любые два единичных набора функции $f(\tilde{x}^n)$ различаются не более чем в двух компонентах, то в силу леммы 3.3 и неравенства $4 < n+1$ имеем $|M_1(f)| \leqslant n+1$, однако это противоречит неравенствам $|M_1(f)| \geqslant 2n+1$ и $n \geqslant 4$, выполненным по условию леммы 3.7.

Пусть теперь какие-то два набора $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$ из множества $M_1(f)$ различаются ровно в трёх компонентах — без ограничения общности, в 1-й, 2-й и 3-й компонентах, а любые два набора из множества $M_1(f)$ различаются не более чем в трёх компонентах. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_n)$, тогда $\tilde{\sigma}' = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \overline{\sigma}_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_n)$. Если i-я и j-я компоненты какого-то набора из множества $M_1(f) \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$ равны $\overline{\sigma}_i$ и $\overline{\sigma}_j$ соответственно для некоторых $i, j \in \{4, \ldots, n\}$, $i \neq j$, то этот набор отличается от одного из наборов $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'$ по крайней мере в четырёх компонентах, что невозможно. Поэтому не более одной из 4-й, …, n-й компонент каждого набора из множества $M_1(f) \setminus \{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$, а значит, и из множества $M_1(f)$, отлично от

$\sigma_4, \ldots, \sigma_n$ соответственно. Тогда

$$M_1(f) = A \cup A_4 \cup \ldots \cup A_n, \tag{3.1}$$

где A — подмножество множества $M_1(f)$, состоящее из всех наборов, 4-я, …, n-я компоненты которых равны $\sigma_4, \ldots, \sigma_n$ соответственно; A_i, $i = 4, \ldots, n$ — подмножество множества $M_1(f)$, состоящее из всех наборов, 4-я, …, n-я компоненты которых равны $\sigma_4, \ldots, \sigma_n$ соответственно, за исключением i-й компоненты, которая равна $\overline{\sigma}_i$.

Среди множеств $A_4, \ldots, A_n$ выберем произвольное множество наибольшей мощности; без ограничения общности это A_4. Заметим, что множество $A \cup A_4$ может содержать только наборы, последние $n-4$ компонент каждого из которых равны $\sigma_5, \ldots, \sigma_n$ соответственно (при $n \geqslant 5$). Всего таких наборов 16, причём для любых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \{0, 1\}$ во множестве $A \cup A_4$ может содержаться не более одного из наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_n)$ и $(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3, \overline{\alpha}_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_n)$, поскольку данные два набора различаются в четырёх компонентах. Таким образом,

$$|A \cup A_4| \leqslant 8. \tag{3.2}$$

В случае $n = 4$ в силу (3.1), (3.2) имеем

$$|M_1(f)| = |A \cup A_4| \leqslant 8 = 2n,$$

что противоречит условию леммы 3.7. Далее считаем, что $n \geqslant 5$. Если $|A_4| \leqslant 2$, то

$$|M_1(f)| \leqslant |A \cup A_4| + \sum_{i=5}^{n} |A_i| \leqslant 8 + \sum_{i=5}^{n} |A_4| \leqslant 8 + 2(n-4) = 2n$$

в силу (3.1), (3.2) и неравенства $|A_i| \leqslant |A_4|$ для любого $i \in \{5, \ldots, n\}$; вновь получаем противоречие.

Пусть теперь $|A_4| \geqslant 3$. Выберем из множества A_4 произвольные три различных набора $\tilde{\pi}_j = (\pi_1^j, \pi_2^j, \pi_3^j, \overline{\sigma}_4, \sigma_5, \ldots, \sigma_n)$, $j = 1, 2, 3$. Для любого $s \in \{1, 2, 3\}$ среди чисел $\pi_s^1, \pi_s^2, \pi_s^3$ хотя бы два числа принимают одно и то же булево значение, которые мы обозначим через π_s. Предположим, что $|A_i| \geqslant 2$ для некоторого $i \in \{5, \ldots, n\}$. Тогда во множестве A_i содержится хотя бы один набор $\tilde{\tau}$, отличный от набора $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \sigma_4, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$, причём последние $n-3$ компонент набора $\tilde{\tau}$ должны совпадать с соответствующими компонентами указанного набора в силу определения множества A_i. Значит, хотя бы одна из первых трёх компонент набора $\tilde{\tau}$ отлична от π_1, π_2, π_3 соответственно; пусть это s-я компонента, которая равна $\overline{\pi}_s$. Среди чисел $\pi_s^1, \pi_s^2, \pi_s^3$ не менее двух равны π_s, поэтому набор $\tilde{\tau}$ отличается по крайней мере от двух из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3$ в трёх компонентах: s-й, 4-й и i-й. Значит, во всех остальных компонентах он должен совпадать с каждым из этих двух наборов, откуда следуют, что данные два набора из множества $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$ совпадают. Получаем противоречие с выбором указанных наборов. Тем самым доказано, что для любого $i \in \{5, \ldots, n\}$ должно выполняться неравенство $|A_i| \leqslant 1$. Тогда

$$|M_1(f)| \leqslant |A \cup A_4| + \sum_{i=5}^{n} |A_i| \leqslant 8 + \sum_{i=5}^{n} 1 = 8 + (n-4) < 2n$$

в силу (3.1), (3.2), что противоречит условию леммы 3.7. Поэтому случай, когда какие-то два набора из множества $M_1(f)$ различаются ровно в трёх компонентах, а любые два набора из множества $M_1(f)$ — не более чем в трёх компонентах, выполняться не может. Лемма 3.7 доказана. □

Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ обозначим через $l(f)$ минимально возможную длину дизъюнктивной нормальной формы (д. н. ф.), содержащей только переменные из множества $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ для этой функции. (Определения д. н. ф. и её длины можно найти, например, в [99, с. 25–26]; из первого равенства в [99, с. 26, (2.4)] следует, что величина $l(f)$ определена.)

Теорема 3.1. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ и любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $D^0_{k\text{-Д}}(f) \leqslant l(f)$ и $D^0_{\text{ПД}}(f) \leqslant l(f)$.*

Доказательство. Функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно представить в виде д. н. ф. $K_1 \vee \ldots \vee K_m$, где $m = l(f)$, а $K_1, \ldots, K_m$ — ЭК, содержащие только переменные из множества $X(n)$. Реализуем каждую ЭК K_i, $i = 1, \ldots, m$, цепью Z_i из контактов, длина которой равна рангу этой конъюнкции. Затем все цепи $Z_1, \ldots, Z_m$ соединим параллельно. Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f, а всевозможные её ф. н. относительно обрыва произвольного числа контактов равны дизъюнкциям некоторых не более $m-1$ ЭК из множества $\mathcal{K} = \{K_1, \ldots, K_m\}$ (дизъюнкцию 0 ЭК из этого множества считаем равной константе 0).

Для каждой конъюнкции K_i, $i = 1, \ldots, m$, существует n-набор $\tilde{\tau}_i$, на котором она обращается в единицу, а все остальные конъюнкции из множества $\mathcal{K}$ — в нуль; в противном случае конъюнкцию K_i можно было бы удалить из д. н. ф. $K_1 \vee \ldots \vee K_m$ и получить д. н. ф. длины $l(f)-1$ для функции $f(\tilde{x}^n)$, что невозможно. Наборы $\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_m$, очевидно, попарно различны. Пусть $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ — произвольные две б. ф., представимые в виде различных дизъюнкций некоторых ЭК из множества $\mathcal{K}$. Тогда существует такое $i \in \{1, \ldots, m\}$, что конъюнкция K_i входит в представление одной из этих функций (без ограничения общности g_1) и не входит в представление другой (g_2). Легко видеть, что $g_1(\tilde{\tau}_i) = 1$ и $g_2(\tilde{\tau}_i) = 0$, следовательно,

$g_1 \neq g_2$. Это означает, что любую ф. н. схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$, а любые две различные ф. н. данной схемы — друг от друга на наборах из множества $\{\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_m\}$. Таким образом, для любого $k \in \mathbb{N}$ схема S является k-неизбыточной, а указанное множество составляет для неё k-ДТ и ПДТ длины $m = l(f)$, откуда получаем требуемые неравенства. Теорема 3.1 доказана. $\square$

Утверждение 3.1. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо неравенство $l(f) \leqslant 2^{n-1}$.*

Доказательство. Разобьём все n-наборы на 2^{n-1} пар наборов, различающихся только в последней компоненте. Если оба набора из какой-то пары являются единичными (соответственно если ровно один набор из какой-то пары является единичным) для функции f, то рассмотрим ЭК ранга $n-1$ (соответственно n), содержащую только переменные из множества $X(n)$ и обращающуюся в единицу в точности на этих двух наборах (соответственно на одном этом наборе). Д. н. ф., являющаяся дизъюнкцией всех рассмотренных ЭК, очевидно, имеет длину не более 2^{n-1} и реализует функцию f, поэтому $l(f) \leqslant 2^{n-1}$. Утверждение 3.1 доказано. $\square$

Лемма 3.8 [164]. *Пусть б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, натуральное число k, попарно непересекающиеся множества $T_1, \ldots, T_{k+1}$ её единичных наборов и k-неизбыточные КС $S_1, \ldots, S_{k+1}$ таковы, что выполнены следующие условия*:

1) *схема S_i, $i = 1, \ldots, k+1$, реализует б. ф. $(f \& \overline{I}_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$, где $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{k+1}$;*

2) *множество T_i, $i = 1, \ldots, k+1$, является k-ПТ размыкания для схемы S_i.*

Тогда схема S, представляющая собой параллельное соединение схем $S_1, \ldots, S_{k+1}$, реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и k-неизбыточна, а множество T является для неё k-ДТ размыкания.

Доказательство. Схема S реализует функцию

$$(f \& \overline{I}_{T \setminus T_1}) \vee \ldots \vee (f \& \overline{I}_{T \setminus T_{k+1}}) = f \& (\overline{I}_{T \setminus T_1} \vee \ldots \vee \overline{I}_{T \setminus T_{k+1}}) = f \& \overline{I_{T \setminus T_1} \& \ldots \& I_{T \setminus T_{k+1}}} = f \& \overline{0} = f$$

в силу условия 1) и равенства $(T \setminus T_1) \cap \ldots \cap (T \setminus T_{k+1}) = \varnothing$. Докажем, что данная схема k-неизбыточна. Пусть в ней неисправен, т. е. оборван, хотя бы один контакт и он содержится в подсхеме S_i, $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Хотя бы на одном наборе $\tilde{\sigma}$ из множества T_i подсхема S_i выдаст значение, отличное от

$$f(\tilde{\sigma}) \& \overline{I}_{T \setminus T_i}(\tilde{\sigma}) = 1 \& \overline{0} = 1$$

в силу условий 1), 2), т. е. значение 0. Любая подсхема S_j, $j \notin \{1,\ldots,k+1\}\setminus\{i\}$, по условию 1) выдаст на наборе $\tilde{\sigma}$ значение

$$f(\tilde{\sigma})\&\overline{I}_{T\setminus T_j}(\tilde{\sigma}) = 1\&\overline{1} = 0$$

при отсутствии в ней неисправностей, а значит, очевидно, и при обрыве произвольного числа её контактов. Поэтому схема S выдаст на указанном наборе значение $\underbrace{0 \vee \ldots \vee 0}_{k+1} = 0$, отличное от значения $f(\tilde{\sigma}) = 1$, откуда следует, что она k-неизбыточна.

Найдём все возможные ф. н. схемы S при неисправностях не более k контактов. На любом нулевом наборе функции $f(\tilde{x}^n)$ каждая из схем $S_1,\ldots,S_{k+1}$ по условию 1) выдаст значение $0\&\ldots = 0$ при отсутствии в ней неисправностей, а значит, и при обрыве произвольного числа её контактов. Следовательно, любая ф. н. схемы S принимает на указанном наборе значение $\underbrace{0 \vee \ldots \vee 0}_{k+1} = 0$. Далее, при обрыве не более k контактов схемы S хотя бы в одной из подсхем $S_1,\ldots,S_{k+1}$ все контакты исправны. На любом единичном наборе функции $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащем множеству T, указанная подсхема выдаст значение $1\&\overline{0} = 1$ по условию 1). Отсюда вытекает, что и значение, выдаваемое схемой S на этом наборе, будет равно 1. Тем самым показано, что любая ф. н. g данной схемы принимает такие же значения, как и функция f, на всех n-наборах, не принадлежащих множеству T, причём $g \neq f$ в силу k-неизбыточности схемы S. Поэтому любую её ф. н. можно отличить от функции f, а любые две различные ф. н. схемы S — друг от друга на наборах из множества T, откуда получаем, что данное множество является k-ДТ для схемы S. Лемма 3.8 доказана. $\square$

Теорема 3.2 [164]. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$D^0_{k\text{-Д}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0,1,2\}, \\ n+1, & \text{если } n = 3, \\ n + k(n-2), & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 3.1 [164]. *Для любых $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $D^0_{k\text{-Д}}(n) \leqslant$ $\leqslant n + k(n-2)$.*

Следствие 3.2 [164]. *Справедливо неравенство*

$$D^0_{\text{ЕД}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \text{если } n \in \{0,1,2\}, \\ n+1, & \text{если } n = 3, \\ 2n-2, & \text{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 3.2. Достаточно доказать аналогичное неравенство с заменой аргумента в левой части с n на f для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. В случае $n = 0$, а также в случае $n \geqslant 1$ и $f(\tilde{x}^n) \in \{0, 1\}$ оно следует из утверждения 1.5. Далее будем считать, что функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант. Если $n \in \{1, 2, 3\}$, то требуемое неравенство следует из теоремы 3.1, утверждения 3.1 и очевидных равенств $2^{n-1} = n$ при $n \in \{1, 2\}$, $2^{n-1} = n + 1$ при $n = 3$.

Пусть $n \geqslant 4$. Надо доказать, что $D(f) \leqslant n+k(n-2)$. Обозначим через s число единичных наборов функции $f(\tilde{x}^n)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $s \leqslant n + k(n-2)$. Функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно представить в виде совершенной д. н. ф. (см., например, [99, с. 26]), длина которой равна s. В силу теоремы 3.1 и определения величины $l(f)$ имеем $D(f) \leqslant l(f) \leqslant s \leqslant n + k(n-2)$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $s \geqslant n+1+k(n-2)$. В случае $k \geqslant 2$ выполнено соотношение $s \geqslant 3n-3 \geqslant 2n+1$ и в силу леммы 3.7 для функции $f_1(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$ существует ключевое множество T_1 мощности не более $n-2$. Если $k \geqslant 3$, то функция $f_2(\tilde{x}^n) = (f \& \overline{I}_{T_1})(\tilde{x}^n)$ принимает значение 1 на

$$s - |T_1| \geqslant n + 1 + k(n-2) - (n-2) = n + 1 + (k-1)(n-2) \geqslant 3n - 3 \geqslant 2n + 1$$

наборах и в силу леммы 3.7 для этой функции существует ключевое множество T_2 мощности не более $n-2$. Если $k \geqslant 4$, то функция $f_3(\tilde{x}^n) = (f \& \overline{I}_{T_1 \cup T_2})(\tilde{x}^n)$ принимает значение 1 на

$$s - |T_1 \cup T_2| \geqslant n + 1 + k(n-2) - 2(n-2) = n + 1 + (k-2)(n-2) \geqslant 3n - 3 \geqslant 2n + 1$$

наборах, и т. д. В итоге при $k \geqslant 2$ можно определить такие попарно непересекающиеся множества $T_1, \ldots, T_{k-1}$ двоичных наборов длины n, что для любого $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ множество T_i имеет мощность не более $n-2$ и является ключевым для функции

$$f_i(\tilde{x}^n) = (f \& \overline{I}_{T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}})(\tilde{x}^n) \tag{3.3}$$

(в случае $i = 1$ множество $T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}$ считаем пустым).

Пусть теперь $k \geqslant 1$. Функция $f_k(\tilde{x}^n)$, определяемая формулой (3.3) при $i = k$, принимает значение 1 не менее чем на

$$s - (k-1)(n-2) \geqslant n + 1 + k(n-2) - (k-1)(n-2) = 2n - 1$$

наборах. Тогда по лемме 3.6 для неё существуют такое ключевое множество T_k и такое множество T_{k+1} двоичных наборов длины n, что T_{k+1} является ключевым множеством для функции $f_{k+1}(\tilde{x}^n) = (f_k \& \overline{I}_{T_k})(\tilde{x}^n)$ и

$$|T_k| + |T_{k+1}| \leqslant 2n - 2. \tag{3.4}$$

Отметим, что функция f_{k+1} также удовлетворяет представлению (3.3) при $i = k+1$.

Пусть $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{k+1}$. Легко видеть, что множества $T_1, \ldots, T_{k+1}$ попарно не пересекаются и для любого $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ выполнены соотношения $T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1} \subseteq T \setminus T_i$, $I_{T_i} \leqslant f \& \overline{I}_{T \setminus T_i} \leqslant f_i$ (см. (3.3)). Так как T_i — ключевое множество для функции $f_i(\tilde{x}^n)$, то из леммы 3.1 следует, что множество T_i является ключевым и для функции $(f \& \overline{I}_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$. Тогда по теореме 2.2 последнюю функцию можно реализовать k-неизбыточной КС S_i, для которой множество T_i является k-ПТ. Получаем, что выполнены все условия леммы 3.8, из которой с использованием (3.4) следует соотношение

$$D(f) \leqslant |T| = |T_1 \cup \ldots \cup T_{k-1}| + |T_k| + |T_{k+1}| \leqslant (k-1)(n-2) + 2n - 2 = n + k(n-2).$$

Теорема 3.2 доказана. □

Теорема 3.3 [164]. *При условии $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^0_{k\text{-Д}}(f) \leqslant 2k + 2$.*

Следствие 3.3 [164]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^0_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 4$.*

Доказательство теоремы 3.3. Обозначим через $F_{n,k}$ множество всех б. ф. от n переменных, каждая из которых принимает пару значений $(1,1)$ не более, чем на k различных парах противоположных n-наборов, где $n \geqslant 1$. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф., не принадлежащая множеству $F_{n,k}$. Тогда существуют такие различные множества $T_1, \ldots, T_{k+1}$, каждое из которых состоит из двух противоположных n-наборов, что все наборы из множества $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{k+1}$ являются единичными для функции f. Оба набора из множества T_i, $i = 1, \ldots, k+1$, очевидно, являются единичными и для функции $(f \& \overline{I}_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$. Отсюда, а также из примера 2.5 и теоремы 2.2 следует, что функцию $(f \& \overline{I}_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k-неизбыточной КС S_i, для которой множество T_i является k-ПТ. Тогда выполнены все условия леммы 3.8, из которой следует соотношение $D(f) \leqslant |T| = 2k + 2$.

Оценим мощность множества $F_{n,k}$. Очевидно, что его можно представить в виде объединения попарно непересекающихся множеств $F^0_n, \ldots, F^k_n$, где множество F^i_n, $i = 0, \ldots, k$, состоит из всех б. ф. от n переменных, каждая из которых принимает пару значений $(1,1)$ ровно на i различных парах противоположных n-наборов. Такие i пар можно выбрать $C^i_{2^{n-1}}$ способами; на наборах из каждой такой пары значения функции определены однозначно, а на каждой из остальных $2^{n-1} - i$ пар n-наборов она может принимать одну из трёх пар значений $(0,0)$, $(0,1)$ или $(1,0)$. Отсюда и из асимптотики для биномиальных коэффициентов (см., например, [260, с. 211]) следуют соотношения

$$|F^i_n| = C^i_{2^{n-1}} \cdot 3^{2^{n-1}-i},$$

$$\frac{|F_n^i|}{|F_n^{i+1}|} = \frac{(2^{n-1})! \cdot 3^{2^{n-1}-i}}{i! \cdot (2^{n-1}-i)!} : \frac{(2^{n-1})! \cdot 3^{2^{n-1}-i-1}}{(i+1)! \cdot (2^{n-1}-i-1)!} = \frac{3i+3}{2^{n-1}-i} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3k}{2^{n-1}-k} \leqslant \frac{3 \cdot 2^{n-4}}{2^{n-1}-2^{n-4}} = \frac{3}{7} \text{ (при } i \leqslant k-1),$$

$$|F_n^i| \leqslant \frac{3}{7}|F_n^{i+1}| \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{3}{7}\right)^{2^{n-4}-i} \left|F_n^{2^{n-4}}\right|,$$

$$|F_{n,k}| = \sum_{i=0}^{k} |F_n^i| \leqslant \left|F_n^{2^{n-4}}\right| \cdot \sum_{i=0}^{2^{n-4}} \left(\frac{3}{7}\right)^{2^{n-4}-i} = C_{2^{n-1}}^{2^{n-4}} \cdot 3^{2^{n-1}-2^{n-4}} \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{7}\right)^{2^{n-4}+1}}{1-\frac{3}{7}} \lesssim$$
$$\lesssim \frac{\sqrt{2^{n-1}}}{\sqrt{2\pi \cdot 2^{n-4} \cdot (2^{n-1}-2^{n-4})}} \cdot \frac{2^{(n-1)\cdot 2^{n-1}}}{2^{(n-4)\cdot 2^{n-4}} \cdot (2^{n-1}-2^{n-4})^{2^{n-1}-2^{n-4}}} \cdot 3^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4} =$$
$$= \sqrt{\frac{2^{n-1}}{2\pi \cdot 2^{n-4} \cdot 7 \cdot 2^{n-4}}} \cdot \frac{2^{(n-1)\cdot 2^{n-1}}}{2^{(n-4)\cdot 2^{n-4}} \cdot (7 \cdot 2^{n-4})^{7\cdot 2^{n-4}}} \cdot 3^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{7\pi \cdot 2^{n-6}}} \cdot \frac{2^{(n-1)\cdot 2^{n-1}}}{7^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot 2^{(n-4)\cdot 8\cdot 2^{n-4}}} \cdot 3^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{1}{7\pi \cdot 2^{n-6}}} \cdot 2^{3\cdot 2^{n-1}} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4},$$

$$\frac{|F_{n,k}|}{2^{2^n}} \lesssim \sqrt{\frac{1}{7\pi \cdot 2^{n-6}}} \cdot 2^{2^{n-1}} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{7\cdot 2^{n-4}} \cdot \frac{7}{4}.$$

Прологарифмируем последнее соотношение по основанию 2:

$$\log \frac{|F_{n,k}|}{2^{2^n}} \lesssim -\frac{\log(7\pi)+n-6}{2} + 2^{n-1} + 7 \cdot 2^{n-4} \cdot \log \frac{3}{7} + \log \frac{7}{4} \lesssim$$
$$\lesssim 2^{n-4}\left(8 + 7 \cdot \log \frac{3}{7}\right) = 2^{n-4} \log \frac{2^8 \cdot 3^7}{7^7} < -0,5 \cdot 2^{n-4} \to -\infty \ \ (n \to \infty).$$

Таким образом, отношение числа б. ф. из множества $F_{n,k}$ к общему числу б. ф. от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству $F_{n,k}$, выполнено неравенство $D(f) \leqslant 2k+2$, откуда следует справедливость теоремы 3.3. □

Пусть $f(\tilde{x}^n)$, где $n \geqslant 1$, — произвольная б. ф.. Двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n назовём *обособленным набором* этой функции, если на любом наборе, соседнем с набором $\tilde{\sigma}$, она принимает значение $\overline{f}(\tilde{\sigma})$. Двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n назовём *квазиобособленным набором* функции $f(\tilde{x}^n)$, если на любом наборе, соседнем с набором $\tilde{\sigma}$, кроме, быть может, одного набора $\tilde{\pi}$, она принимает значение $\overline{f}(\tilde{\sigma})$; набор $\tilde{\pi}$ при этом назовём *парным* набору $\tilde{\sigma}$. Пару $(\tilde{\sigma}, \tilde{\pi})$ квазиобособленных наборов функции $f(\tilde{x}^n)$ назовём её *особой парой наборов*, если они являются парными друг другу.

Через $q_1(f)$ обозначим число единичных квазиобособленных наборов б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, а через $p_1(f)$ — число особых пар единичных наборов этой функции.

Заметим, что ни один набор из особой пары функции $f(\tilde{x}^n)$ не может быть парным никакому квазиобособленному набору этой функции, кроме другого набора из той же пары; в противном случае первый набор сам не был бы квазиобособленным.

Теорема 3.4 [165]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ выполняется соотношение*

$$q_1(f) - p_1(f) \leqslant D^0_{\text{ПД}}(f) \leqslant l(f).$$

Доказательство. Неравенство $D(f) \leqslant l(f)$ следует из теоремы 3.1. Докажем, что $D(f) \geqslant q_1(f) - p_1(f)$. Пусть S — произвольная КС, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$; T — произвольный ПДТ для схемы S. Достаточно доказать, что $D(T) \geqslant q_1(f) - p_1(f)$.

Обозначим через $M^s(f)$ множество единичных обособленных наборов функции $f(\tilde{x}^n)$. Кроме того, для произвольного набора $\tilde{\pi}$, являющегося парным хотя бы одному единичному квазиобособленному набору функции $f(\tilde{x}^n)$, введём величину $N(\tilde{\pi})$, равную числу квазиобособленных наборов указанной функции, которым набор $\tilde{\pi}$ является парным.

Рассмотрим произвольный единичный квазиобособленный набор $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ функции f. Возможны два случая.

1. Набор $\tilde{\sigma}$ является обособленным набором функции f. Рассуждая аналогично 3-му–5-му абзацам из доказательства теоремы 16 работы [192] (см. [192, с. 133]), получаем, что у схемы S есть ф. н., обращающаяся в единицу на наборе $\tilde{\sigma}$ и в нуль на всех остальных n-наборах, а также ф. н. $g_0(\tilde{x}^n) \equiv 0$ (возникающая при обрыве всех контактов схемы S). Указанные две функции можно отличить друг от друга только на наборе $\tilde{\sigma}$, поэтому данный набор должен входить в тест T. В силу произвольности выбора набора $\tilde{\sigma}$ во множество T должны входить все наборы из множества $M^s(f)$.

2. Существует парный $\tilde{\sigma}$ набор $\tilde{\pi}$. Тогда $n \geqslant 2$, поскольку для $n = 1$ и $f(x_1) \in \{x_1, \overline{x}_1\}$ случай 2, очевидно, не выполнен. В силу определений $f(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\sigma}) = 1$ и наборы $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\pi}$ различаются ровно в одной компоненте; для простоты будем считать, что это первая компонента (в остальных случаях рассуждения аналогичны), т. е. $\tilde{\pi} = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Из равенства $f(\tilde{\sigma}) = 1$ следует, что в схеме S есть несамопересекающаяся цепь $Z_{\tilde{\sigma}}$ между полюсами, проводящая на наборе $\tilde{\sigma}$. Легко видеть, что данная цепь может содержать только контакты $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$. Если в ней не содержится ни одного контакта $x_i^{\sigma_i}$ для некоторого $i \in \{2, \ldots, n\}$, то цепь $Z_{\tilde{\sigma}}$, а вместе с ней и схема S проводят также на наборе $\tilde{\pi}_i$, отличающегося от набора $\tilde{\sigma}$ только в i-й компоненте, откуда следует, что $f(\tilde{\pi}_i) = 1$. Но это противоречит тому, что $\tilde{\sigma}$ — квазиобособленный набор функции f и $f(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\sigma}) = 1$. Таким образом, в цепи $Z_{\tilde{\sigma}}$ содержится хотя бы по одному контакту $x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, а также, возможно, один или несколько контактов $x_1^{\sigma_1}$. При обрыве всех контактов схемы S, не содержащихся в этой цепи, схема станет

реализовывать функцию $g_1(\tilde{x}^n) \in \{x_1^{\sigma_1}\& \ldots \& x_n^{\sigma_n}, x_2^{\sigma_2}\& \ldots \& x_n^{\sigma_n}\}$, а при обрыве всех контактов схемы S — функцию $g_0(\tilde{x}^n) \equiv 0$. Функции $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_0(\tilde{x}^n)$ можно отличить друг от друга только на наборе $\tilde{\sigma}$ и, возможно, на наборе $\tilde{\pi}$.

Пусть $\tilde{\rho}_1, \ldots, \tilde{\rho}_t$ — все квазиобособленные наборы функции $f(\tilde{x}^n)$, которым набор $\tilde{\pi}$ является парным, где $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\sigma}$ и $t \geqslant 1$. Тогда $N(\tilde{\pi}) = t$ и

$$f(\tilde{\rho}_1) = \ldots = f(\tilde{\rho}_t) = f(\tilde{\pi}) = 1. \tag{3.5}$$

Проводя для каждого набора $\tilde{\rho}_j$, $j = 2, \ldots, t$ (при $t \geqslant 2$), те же рассуждения, которые были проведены для набора $\tilde{\sigma}$ в разборе случая 2, получаем, что у схемы S есть ф. н. $g_j(\tilde{x}^n)$, отличающаяся от функции $g_0(\tilde{x}^n)$ только на наборе $\tilde{\rho}_j$ и, возможно, на наборе $\tilde{\pi}$. В таблице 3.1 приведены значения функций $g_1, \ldots, g_t, g_0$ на наборах $\tilde{\rho}_1, \ldots, \tilde{\rho}_t, \tilde{\pi}$, а также на произвольном другом n-наборе $\tilde{\delta}$ (вместо каждой звёздочки может стоять как 0, так и 1).

Таблица 3.1

	g_1	$\ldots$	g_j	$\ldots$	g_m	$\ldots$	g_t	g_0
$\tilde{\rho}_1$	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\tilde{\rho}_j$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\tilde{\rho}_m$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	$\ldots$	0	0
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\tilde{\rho}_t$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	1	0
$\tilde{\pi}$	$*$	$\ldots$	$*$	$\ldots$	$*$	$\ldots$	$*$	0
$\tilde{\delta}$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	$\ldots$	0	0

Из таблицы видно, что если во множество T не входят одновременно наборы $\tilde{\rho}_j$ и $\tilde{\rho}_m$ для некоторых $j, m \in \{1, \ldots, t\}$, $j \neq m$, то по крайней мере две из трёх функций g_j, g_m и g_0 нельзя отличить друг от друга на наборах из T, но это противоречит тому, что T — ПДТ для схемы S. Если же во множество T не входят одновременно наборы $\tilde{\rho}_j$ и $\tilde{\pi}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, t\}$, то функции g_j и g_0 нельзя различить на наборах из T; вновь получаем противоречие. Таким образом, в тест T входят по крайней мере $t = N(\tilde{\pi})$ наборов из множества $\{\tilde{\rho}_1, \ldots, \tilde{\rho}_t, \tilde{\pi}\}$. Обозначим множество, состоящее из этих $N(\tilde{\pi})$ наборов, через $M_{\tilde{\pi}}(S)$.

Из рассмотрения случаев 1 и 2 следует, что $T \supseteq M^s(f) \cup \bigcup\limits_{\tilde{\pi}} M_{\tilde{\pi}}(S)$ (здесь и далее большое объединение, а также большая сумма берутся по всем наборам $\tilde{\pi}$, являющимся парными хотя бы одному единичному квазиобособленному набору функции $f(\tilde{x}^n)$). Поэтому

$$D(T) = |T| \geqslant \left| M^s(f) \cup \bigcup_{\tilde{\pi}} M_{\tilde{\pi}}(S) \right|.$$

Заметим, что множества $M^s(f)$ и $\bigcup\limits_{\tilde{\pi}} M_{\tilde{\pi}}(S)$ не пересекаются, так как ни в одном множестве $M_{\tilde{\pi}}(S)$ не содержится ни одного обособленного набора (см. (3.5)). Следовательно,

$$D(T) \geqslant |M^s(f)| + \left| \bigcup_{\tilde{\pi}} M_{\tilde{\pi}}(S) \right|. \tag{3.6}$$

Далее предположим, что некоторый набор $\tilde{\rho}$ принадлежит одновременно двум построенным множествам $M_{\tilde{\pi}_1}(S)$ и $M_{\tilde{\pi}_2}(S)$ при $\tilde{\pi}_1 \neq \tilde{\pi}_2$. Тогда $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = 1$. Если $\tilde{\rho} \neq \tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\rho} \neq \tilde{\pi}_2$, то в силу построения указанных множеств $\tilde{\rho}$ является квазиобособленным набором функции $f(\tilde{x}^n)$, а оба набора $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ — парные к нему наборы, что невозможно. Поэтому $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$; без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\rho} = \tilde{\pi}_1$. Тогда $\tilde{\rho} \neq \tilde{\pi}_2$ и из соотношения $\tilde{\pi}_1 \in M_{\tilde{\pi}_2}(S)$ следует, что $\tilde{\pi}_1$ — единичный квазиобособленный набор функции $f(\tilde{x}^n)$, а $\tilde{\pi}_2$ — парный к нему набор. Значит, $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ — соседние наборы. Других соседних наборов у $\tilde{\pi}_1$, на которых функция $f(\tilde{x}^n)$ принимает значение 1, быть не может, и при этом он является парным некоторому квазиобособленному набору данной функции. Такое возможно только в том случае, если $\tilde{\pi}_2$ — квазиобособленный набор функции $f(\tilde{x}^n)$, а $\tilde{\pi}_1$ — парный к нему набор. Получаем, что наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ образуют особую пару наборов. Тогда оба множества $M_{\tilde{\pi}_1}(S)$, $M_{\tilde{\pi}_2}(S)$ по построению являются подмножествами мощности 1 множества $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ и, как следствие, пересекаются только по одному набору.

Из приведённых рассуждений следует, что множества $M_{\tilde{\pi}_1}(S)$ и $M_{\tilde{\pi}_2}(S)$ при $\tilde{\pi}_1 \neq \tilde{\pi}_2$ могут пересекаться только в случае, когда $(\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2)$ — особая пара единичных наборов функции $f(\tilde{x}^n)$, причем пересекаются не более чем по одному набору. Отсюда, из (3.6) и определения величины $p_1(f)$ вытекает соотношение

$$D(T) \geqslant |M^s(f)| + \sum_{\tilde{\pi}} |M_{\tilde{\pi}}(S)| - p_1(f) \cdot 1 = |M^s(f)| + \sum_{\tilde{\pi}} |N(\tilde{\pi})| - p_1(f).$$

Осталось заметить, что $|M^s(f)| + \sum\limits_{\tilde{\pi}} |N(\tilde{\pi})| = q_1(f)$, поскольку любой единичный квазиобособленный набор функции $f(\tilde{x}^n)$ либо является её обособленным набором, либо имеет ровно один набор $\tilde{\pi}$ в качестве парного. Неравенство $D(T) \geqslant q_1(f) - p_1(f)$, а вместе с ним теорема 3.4 доказаны. □

Следствие 3.4 [165]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^0_{\text{ПД}}(n) = 2^{n-1}$.*

Доказательство. Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ в силу теоремы 3.1 и утверждения 3.1 выполняется соотношение $D(f) \leqslant l(f) \leqslant 2^{n-1}$. Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то $D(f) = 0$ по утверждению 1.5. В итоге получаем, что $D(n) \leqslant 2^{n-1}$.

С другой стороны, у функции $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ любой из её 2^{n-1} единичных наборов, очевидно, является обособленным, следовательно, $q_1(f) = 2^{n-1}$ и $p_1(f) = 0$. Тогда из теоремы 3.4 вытекает, что $D(f) \geqslant 2^{n-1}$, поэтому $D(n) \geqslant 2^{n-1}$ (последнее неравенство также фактически установлено Х. А. Мадатяном в [108, теорема 1]). Окончательно имеем $D(n) = 2^{n-1}$. Следствие 3.4 доказано. □

Множество n-наборов называется *двоичным блоковым кодом длины n, исправляющим одну ошибку*, если любые два набора из этого множества различаются по крайней мере в трёх компонентах (см., например, [138, §1.4]; отметим, что любое множество мощности не более 1 удовлетворяет данному определению). Обозначим через $\nu(n)$ число различных таких кодов. Сокращённо будем их называть $(n, 2, 1)$*-кодами.*

Произвольный n-набор, сумма компонент которого по модулю 2 равна α, для краткости назовём $(n_{(\oplus)}, \alpha)$*-набором.*

В следующей теореме устанавливается оценка снизу числа самых труднотестируемых б. ф. от n переменных с точки зрения ПДТ для реализующих эти функции КС при обрывах контактов.

Теорема 3.5 [165]. *Число б. ф. f от n переменных, $n \geqslant 2$, для которых $D^0_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, не меньше $2\nu(n-1)$.*

Доказательство. Пусть B — произвольный $(n-1, 2, 1)$-код, α — произвольная булева константа. Заменим каждый набор $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}) \in B$ на $(n_{(\oplus)}, \overline{\alpha})$-набор $(\sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_{n-1} \oplus \oplus \overline{\alpha}, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$. Множество полученных наборов (той же мощности, что и B) обозначим через B_α. Определим б. ф. $f_{B,\alpha}(\tilde{x}^n)$, равную 1 на всех $(n_{(\oplus)}, \alpha)$-наборах, а также на всех наборах из множества B_α, и равную 0 на всех остальных наборах. Предположим, что какой-то $(n_{(\oplus)}, \alpha)$-набор $\tilde{\pi}$ не является квазиобособленным набором указанной функции. Тогда существуют такие два различных набора $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$, соседних с набором $\tilde{\pi}$, что

$$f_{B,\alpha}(\tilde{\pi}_1) = f_{B,\alpha}(\tilde{\pi}_2) = f_{B,\alpha}(\tilde{\pi}) = 1.$$

Каждый из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ является $(n_{(\oplus)}, \overline{\alpha})$-набором, поэтому из последнего соотношения следует, что $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2 \in B_\alpha$. Тогда наборы $\tilde{\pi}'_1$ и $\tilde{\pi}'_2$ длины $n-1$, получающиеся из наборов соответственно $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ отбрасыванием первой компоненты, принадлежат множеству B и различаются не более чем в двух компонентах, поскольку наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются ровно в двух компонентах. Однако это противоречит тому, что B — $(n-1, 2, 1)$-код. Полученное противоречие означает, что любой $(n_{(\oplus)}, \alpha)$-набор является единичным квазиобособленным набором функции $f_{B,\alpha}$. Число различных $(n_{(\oplus)},\alpha)$-наборов при фиксированном $\alpha \in \{0,1\}$, как известно, равно 2^{n-1}, откуда

$$q_1(f_{B,\alpha}) \geqslant 2^{n-1}. \tag{3.7}$$

Далее предположим, что у функции $f_{B,\alpha}(\tilde{x}^n)$ есть хотя бы одна особая пара единичных наборов. Один набор из этой пары обязательно является $(n_{(\oplus)},\overline{\alpha})$-набором; обозначим его через $\tilde{\tau}$. Пусть $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$ — различные соседние с $\tilde{\tau}$ наборы (такие наборы найдутся, так как $n \geqslant 2$). Тогда они оба являются $(n_{(\oplus)},\alpha)$-наборами и

$$f_{B,\alpha}(\tilde{\tau}_1) = f_{B,\alpha}(\tilde{\tau}_2) = 1 = f_{B,\alpha}(\tilde{\tau}).$$

Следовательно, $\tilde{\tau}$ не является квазиобособленным набором функции $f_{B,\alpha}$, однако это противоречит тому, что он входит в особую пару наборов данной функции. Таким образом, у функции $f_{B,\alpha}(\tilde{x}^n)$ не может быть ни одной особой пары единичных наборов и $p_1(f_{B,\alpha}) = 0$. Отсюда, из (3.7) и теоремы 3.4 получаем, что

$$D(f_{B,\alpha}) \geqslant q_1(f_{B,\alpha}) - p_1(f_{B,\alpha}) \geqslant 2^{n-1} - 0 = 2^{n-1}.$$

С другой стороны, $D(f_{B,\alpha}) \leqslant 2^{n-1}$ в силу следствия 3.4. Поэтому

$$D(f_{B,\alpha}) = 2^{n-1}. \tag{3.8}$$

Легко видеть, что для любого фиксированного $\alpha \in \{0,1\}$ из различных $(n-1,2,1)$-кодов B получаются различные множества B_α, а значит, и различные функции $f_{B,\alpha}(\tilde{x}^n)$. Если же $f_{B,0}(\tilde{x}^n) \equiv f_{B',1}(\tilde{x}^n)$ для некоторых $(n-1,2,1)$-кодов B и B', то функция $f_{B,0}(\tilde{x}^n)$ по определению принимает значение 1 на всех $(n_{(\oplus)},0)$-наборах и всех $(n_{(\oplus)},1)$-наборах, т. е. $f_{B,0} \equiv 1$. Но в таком случае $D(f_{B,0}) = 0$ по утверждению 1.5; противоречие с (3.8). Отсюда заключаем, что все функции $f_{B,\alpha}$ для произвольных $(n-1,2,1)$-кода B и $\alpha \in \{0,1\}$ попарно различны. Общее число этих функций равно $2\nu(n-1)$, и каждая из них удовлетворяет равенству (3.8). Теорема 3.5 доказана. $\square$

Введём обозначение $w(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$. Отметим, что $w(n) \leqslant 2^n$ при $n \geqslant 1$.

Утверждение 3.2 [165]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо неравенство*

$$\nu(n) \geqslant 1 + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^n}{w(n)} \right\rceil} \left(\frac{2^n(2^n - w(n)) \cdot \ldots \cdot (2^n - (i-1)w(n))}{i!} \right),$$

правая часть которого асимптотически не меньше $\frac{2}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^{n+1}(\log(n^2+n+2)-1)}{n^2+n+2}}$ (при $n \to \infty$).

Из теоремы 3.5 и утверждения 3.2 вытекает

Следствие 3.5 [165]. *Число б. ф. f от n переменных, для которых $D^0_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, при $n \geqslant 2$ не меньше*

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^{n-1}}{w(n-1)} \right\rceil} \left(\frac{2^{n-1}(2^{n-1} - w(n-1)) \cdot \ldots \cdot (2^{n-1} - (i-1)w(n-1))}{i!} \right)$$

и асимптотически не меньше $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$.

Доказательство утверждения 3.2. Для установления неравенства на $\nu(n)$ достаточно доказать, что число $(n,2,1)$-кодов мощности i не меньше $\frac{2^n(2^n - w(n)) \cdot \ldots \cdot (2^n-(i-1)w(n))}{i!}$ для $i = 1, \ldots, \left\lceil \frac{2^n}{w(n)} \right\rceil$ (с учётом того, что существует $(n,2,1)$-код мощности 0 — пустое множество). В качестве первого набора для произвольного $(n,2,1)$-кода мощности i можно взять любой из 2^n двоичных наборов длины n. Пусть уже выбраны j наборов для этого кода, $j \in \{1, \ldots, i-1\}$ (при $i \geqslant 2$). Тогда в качестве $(j+1)$-го набора для него можно выбрать любой n-набор, отличающийся от каждого из ранее выбранных по крайней мере в трёх компонентах. Это можно сделать не менее чем $2^n - j \cdot w(n)$ способами, так как общее число наборов, отличающихся от произвольного n-набора не более чем в двух компонентах, равно

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = w(n)$$

(из соотношения

$$2^n - j \cdot w(n) \geqslant 2^n - (i-1)w(n) \geqslant 2^n - \left(\left\lceil \frac{2^n}{w(n)} \right\rceil - 1 \right) w(n) > 2^n - \frac{2^n}{w(n)} \cdot w(n) = 0$$

вытекает, что $2^n - j \cdot w(n) > 0$). Таким образом, общее число способов выбрать для $(n,2,1)$-кода i наборов с учётом их порядка не меньше $2^n(2^n - w(n)) \cdot \ldots \cdot (2^n - (i-1)w(n))$, а без учёта порядка — не меньше $\frac{2^n(2^n-w(n)) \cdot \ldots \cdot (2^n-(i-1)w(n))}{i!}$, что и требовалось доказать.

Покажем, что

$$1 + \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^n}{w(n)} \right\rceil} \left(\frac{2^n(2^n - w(n)) \cdot \ldots \cdot (2^n - (i-1)w(n))}{i!} \right) \gtrsim \frac{2}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^{n+1}(\log(n^2+n+2)-1)}{n^2+n+2}} \quad (n \to \infty).$$

Для любых $i = 1, \ldots, \left\lfloor \frac{2^n}{w(n)} \right\rfloor$ и $j = 0, \ldots, i-1$ имеем

$$2^n \geqslant i \cdot w(n),$$

$$i(2^n - j \cdot w(n)) \geqslant 2^n(i-j),$$

$$\frac{2^n - j \cdot w(n)}{i-j} \geqslant \frac{2^n}{i},$$

$$\frac{2^n(2^n - w(n)) \cdot \ldots \cdot (2^n - (i-1)w(n))}{i!} \geqslant \left(\frac{2^n}{i} \right)^i \geqslant \left(2^n : \frac{2^n}{w(n)} \right)^i = w^i(n),$$

поэтому

$$1+\sum_{i=1}^{\left\lceil\frac{2^n}{w(n)}\right\rceil}\left(\frac{2^n(2^n-w(n))\cdot\ldots\cdot(2^n-(i-1)w(n))}{i!}\right)\geqslant\sum_{i=0}^{\left\lfloor\frac{2^n}{w(n)}\right\rfloor}w^i(n)=\frac{w^{\left\lfloor\frac{2^n}{w(n)}\right\rfloor+1}(n)-1}{w(n)-1}>$$

$$>\frac{w^{\frac{2^n}{w(n)}}(n)-1}{\binom{\frac{n^2+n}{2}}{}}=\frac{2w^{\frac{2^n}{w(n)}}(n)-2}{n^2+n}\gtrsim\frac{2\cdot 2^{\frac{2^n\log w(n)}{w(n)}}}{n^2}=\frac{2}{n^2}\cdot 2^{\frac{2^{n+1}(\log(n^2+n+2)-1)}{n^2+n+2}}.$$

Утверждение 3.2 доказано. □

§4. Проверяющие тесты замыкания

В данном параграфе рассматриваются проверяющие тесты для КС относительно замыканий контактов. Пусть k — произвольное натуральное число. Доказано, что для почти всех б. ф. f от n переменных $D^1_{k\text{-П}}(f)=2$ (теорема 4.2). Для любого $n\geqslant 0$ установлено равенство $D^1_{k\text{-П}}(n)=n$ (теорема 4.4), улучшающее в силу (1.4) соотношение $D^1_{\text{ПП}}(n)\lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log n}}+\frac{5}{2}}$ из [186, теорема 2]. Утверждения теорем 4.2 и 4.4 также усиливают результаты из работы автора [152], упомянутые на с. 53 в описании §4.

Теорема 4.1 [169]. *Любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, принимающую значение 0 на противоположных n-наборах $\tilde\sigma$ и $\tilde\sigma'$, для любого $k\in\mathbb{N}$ можно реализовать k-неизбыточной КС, для которой множество $M=\{\tilde\sigma,\tilde\sigma'\}$ является k-ПТ замыкания.*

Доказательство. В силу утверждения 1.2 достаточно доказать утверждение теоремы для $k=1$. Пусть $\tilde\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$, тогда $\tilde\sigma'=(\overline{\sigma}_1,\ldots,\overline{\sigma}_n)$. Положим $f_1(\tilde{x}^n)=f(x_1^{\sigma_1},\ldots,x_n^{\sigma_n})$, $f_2=f$, $T_1=\{(\tilde{1}^n),(\tilde{0}^n)\}$ и $T_2=M$. Тогда $f_2(\tilde{x}^n)=f_1(x_1^{\sigma_1},\ldots,x_n^{\sigma_n})$, а множество T_1 получается из множества T_2 заменой набора $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ на набор $(\sigma_1^{\sigma_1},\ldots,\sigma_n^{\sigma_n})=(\tilde{1}^n)$ и набора $(\overline{\sigma}_1,\ldots,\overline{\sigma}_n)$ на набор $((\overline{\sigma}_1)^{\sigma_1},\ldots,(\overline{\sigma}_n)^{\sigma_n})=(\tilde{0}^n)$. Докажем, что функцию $f_1(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС, для которой множество T_1 является ЕПТ замыкания; отсюда в силу утверждения 1.6 при $i_1=1,\ \ldots,\ i_n=n$ будет следовать справедливость теоремы.

В случае $f_1\equiv 0$ функцию f_1 можно реализовать КС, не содержащей ни одного контакта. У такой схемы, очевидно, нет ни одной ф. н., поэтому она неизбыточна и любое множество n-наборов, в том числе и T_1, является для неё ЕПТ. Далее будем считать, что $f_1\not\equiv 0$; кроме того, $f_1\not\equiv 1$, поскольку из определения функции f_1 и условия теоремы вытекают соотношения

$$f_1(\tilde{1}^n)=f(1^{\sigma_1},\ldots,1^{\sigma_n})=f(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)=0,\tag{4.1}$$

$$f_1(\tilde{0}^n)=f(0^{\sigma_1},\ldots,0^{\sigma_n})=f(\overline{\sigma}_1,\ldots,\overline{\sigma}_n)=0.\tag{4.2}$$

Рассмотрим произвольную д. н. ф. функции $f_1(\tilde{x}^n)$, содержащую только переменные из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$; пусть она имеет вид $K_1 \vee \ldots \vee K_m$, где $m \geqslant 1$, а $K_1, \ldots, K_m$ — различные ЭК.

Зафиксируем $d \in \{1, \ldots, m\}$. Пусть $K_d = x_{j_1}^{\pi_1} \& \ldots \& x_{j_r}^{\pi_r}$. Из соотношений (4.1), (4.2) следует, что

$$1^{\pi_1} \& \ldots \& 1^{\pi_r} = K_d(\tilde{1}^n) \leqslant K_1(\tilde{1}^n) \vee \ldots \vee K_m(\tilde{1}^n) = f_1(\tilde{1}^n) = 0,$$
$$0^{\pi_1} \& \ldots \& 0^{\pi_r} = K_d(\tilde{0}^n) \leqslant K_1(\tilde{0}^n) \vee \ldots \vee K_m(\tilde{0}^n) = f_1(\tilde{0}^n) = 0,$$

поэтому существуют такие $s, t \in \{1, \ldots, r\}$, что $1^{\pi_s} = 0$ и $0^{\pi_t} = 0$, т. е. $\pi_s = 0$ и $\pi_t = 1$. Пусть $i_1, \ldots, i_q$ — все такие индексы j_t из множества $\{j_1, \ldots, j_r\}$, для которых $\pi_t = 1$, а $i_{q+1}, \ldots, i_r$ — все такие индексы j_s из множества $\{j_1, \ldots, j_r\}$, для которых $\pi_s = 0$. Тогда $K_d = x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_q} \& \overline{x}_{i_{q+1}} \& \ldots \& \overline{x}_{i_r}$, где $1 \leqslant q \leqslant r-1$. Для упрощения дальнейших обозначений будем считать, что $i_1 = 1, \ldots, i_q = q, i_{q+1} = q+1, \ldots, i_r = r$ (в остальных случаях рассуждения аналогичны), т. е.

$$K_d = x_1 \& \ldots \& x_q \& \overline{x}_{q+1} \& \ldots \& \overline{x}_r. \tag{4.3}$$

Построим КС S_d, реализующую ЭК K_d, следующим образом. Вначале построим цепь C_d из

$$2(q-1) + 1 + 1 + 2(r-q-1) = 2r - 2$$

контактов $x_1, x_1, \ldots, x_{q-1}, x_{q-1}, x_q, \overline{x}_{q+1}, \overline{x}_{q+2}, \overline{x}_{q+2}, \ldots, \overline{x}_r, \overline{x}_r$, соединённых в указанном порядке (её вид при $r = 6$, $q = 3$ показан на рисунке 4.1; в этом случае $K_d = x_1 x_2 x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 \overline{x}_6$). Пусть $A, a_1, b_1, \ldots, a_{r-2}, b_{r-2}, a_{r-1}, B$ — вершины данной цепи при движении от первого контакта x_1 к последнему контакту $\overline{x}_r$. Соединим вершину A с каждой вершиной a_j, $j = q+1, \ldots, r-1$, контактом x_{j+1} (в случае $q = r-1$ таких контактов нет), а вершину B — с каждой вершиной a_j, $j = 1, \ldots, q-1$, контактом $\overline{x}_j$ (в случае $q = 1$ таких контактов нет). Далее, если $r \geqslant 3$, то пусть $c_1 \ldots, c_{r-2}$ — попарно различные вершины, отличные от вершин $A, a_1, b_1, \ldots, a_{r-2}, b_{r-2}, a_{r-1}, B$. Соединим вершину c_j, $j = 1, \ldots, r-2$, с вершиной A контактом $\overline{x}_{j+1}$, с вершиной B контактом x_{j+1}, а также с вершиной b_j контактом $\overline{x}_{j+1}$, если $j \leqslant q-1$, либо контактом x_{j+1}, если $j \geqslant q$.

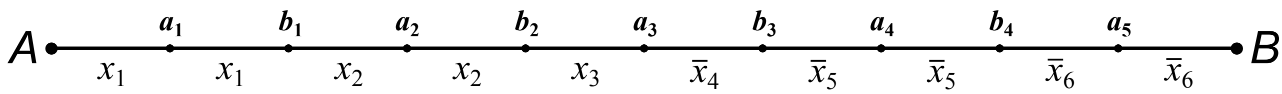

Рис. 4.1. Цепь C_d

Полученную КС с полюсами A и B обозначим через S_d (её вид при $r = 6$, $q = 3$ показан на рисунке 4.2). Докажем, что данная схема в случае исправности всех входящих в неё контактов реализует ЭК K_d. Цепь C_d в силу (4.3) реализует данную конъюнкцию. Предположим, что в схеме S_d существует какая-то другая несамопересекающаяся цепь C'_d между полюсами, проводящая хотя бы на одном n-наборе. Каждая вершина a_j, $j = 1, \dots, q-1$ (при $q \geqslant 2$), инцидентна ровно трём контактам: двум контактам x_j и одному контакту $\overline{x}_j$, соединяющему её с вершиной B, поэтому цепь C'_d не может проходить через указанный контакт $\overline{x}_j$. Каждая вершина a_j, $j = q+1, \dots, r-1$ (при $q \leqslant r-2$), инцидентна ровно трём контактам: двум контактам $\overline{x}_{j+1}$ и одному контакту x_{j+1}, соединяющему её с вершиной A, поэтому цепь C'_d не может проходить через указанный контакт x_{j+1}. Аналогично, рассматривая вершину c_j, $j = 1, \dots, r-2$, получаем, что в случае $q \geqslant 2$ и $j \in \{1, \dots, q-1\}$ цепь C'_d не может проходить через контакт x_{j+1}, соединяющий вершины c_j и B, а в случае $q \leqslant r-2$ и $j \in \{q, \dots, r-2\}$ данная цепь не может проходить через контакт $\overline{x}_{j+1}$, соединяющий вершины c_j и A.

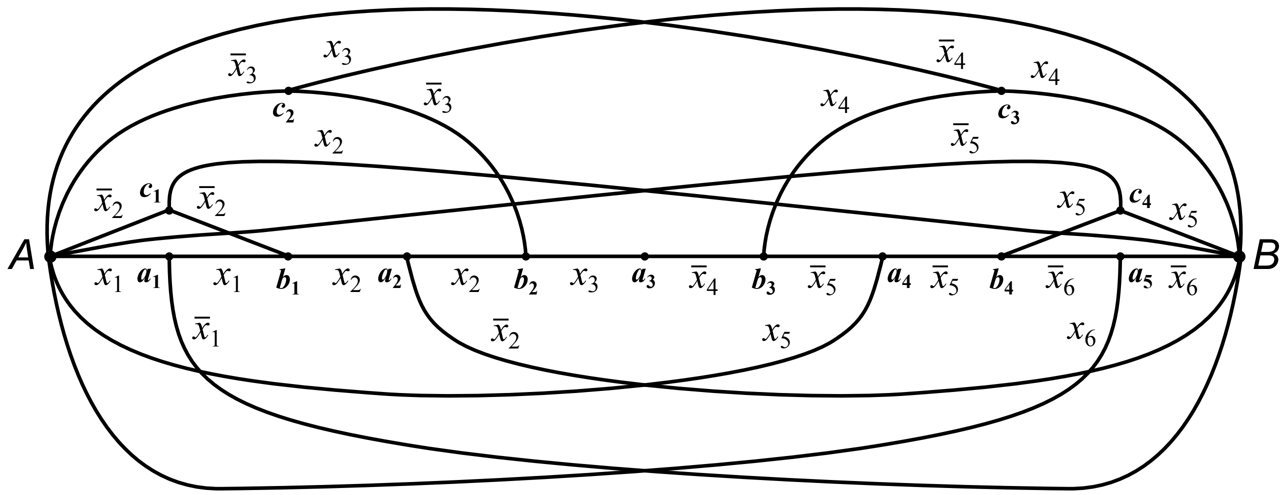

Рис. 4.2. Схема S_d

КС, получающуюся из схемы S_d удалением всех контактов, через которые не может проходить цепь C'_d в силу рассуждений из предыдущего абзаца, обозначим через S'_d (её вид при $r = 6$, $q = 3$ показан на рисунке 4.3). Легко заметить, что единственной проводящей хотя бы на одном наборе несамопересекающейся цепью между полюсами A и B схемы S'_d является цепь C_d, поэтому предположение о существовании цепи C'_d было неверно. Тем самым показано, что схема S_d реализует ту же функцию, что и цепь C_d, т. е. ЭК K_d.

Пусть S — КС, представляющая собой параллельное соединение всех построенных схем S_d, $d = 1, \dots, m$. Тогда схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $K_1 \vee \ldots \vee K_m = f_1$. Докажем, что данная схема неизбыточна, а множество $T_1 = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\}$

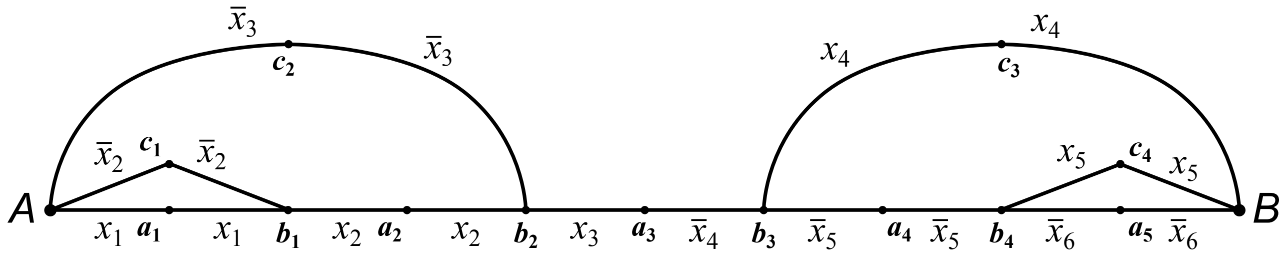

Рис. 4.3. Схема S'_d

является для неё ЕПТ. На каждом наборе из T_1 функция $f_1(\tilde{x}^n)$ принимает значение 0 в силу (4.1), (4.2), поэтому достаточно доказать, что при неисправности, т. е. при замыкании, любого одного контакта в схеме S найдётся набор из T_1, на котором функция, реализуемая полученной схемой, равна единице. Предположим, что неисправен некоторый контакт в некоторой подсхеме S_d схемы S. Докажем, что в этой подсхеме существует несамопересекающаяся цепь между полюсами A и B, проводящая при указанной неисправности на одном из наборов $(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)$; отсюда будет следовать требуемое утверждение, а вместе с ним и справедливость теоремы 4.1. Возможны шестнадцать случаев.

1. Неисправен контакт x_1, соединяющий вершины A и a_1 схемы S_d, и при этом $q = 1$. Тогда цепь C_d проводит на наборе $(\tilde{0}^n)$.

2. Неисправен контакт x_1, соединяющий вершины A и a_1 схемы S_d, и при этом $q \geqslant 2$. Тогда цепь $A - x_1 - a_1 - \overline{x}_1 - B$ проводит на наборе $(\tilde{0}^n)$.

3. Неисправен контакт x_j, соединяющий вершины a_j и b_j схемы S_d для некоторого $j \in \{1, \ldots, q-1\}$ (при $q \geqslant 2$). Тогда цепь $A - \overline{x}_{j+1} - c_j - \overline{x}_{j+1} - b_j - x_j - a_j - \overline{x}_j - B$ проводит на наборе $(\tilde{0}^n)$.

4. Неисправен контакт x_j, соединяющий вершины b_{j-1} и a_j схемы S_d для некоторого $j \in \{2, \ldots, q-1\}$ (при $q \geqslant 3$). Тогда цепь $A - \overline{x}_j - c_{j-1} - \overline{x}_j - b_{j-1} - x_j - a_j - \overline{x}_j - B$ проводит на наборе $(\tilde{0}^n)$.

5. Неисправен контакт x_q, соединяющий вершины b_{q-1} и a_q схемы S_d, и при этом $q \geqslant 2$. Тогда цепь $A - \overline{x}_q - c_{q-1} - \overline{x}_q - b_{q-1} - x_q - a_q - \overline{x}_{q+1} - b_q - \ldots - a_{r-1} - \overline{x}_r - B$ (правая часть которой совпадает с правой частью цепи C_d от вершины a_q до вершины B) проводит на наборе $(\tilde{0}^n)$.

6. Неисправен контакт $\overline{x}_{q+1}$, соединяющий вершины a_q и b_q схемы S_d, и при этом $q \leqslant r-2$. Тогда цепь $A - x_1 - a_1 - \ldots - b_{q-1} - x_q - a_q - \overline{x}_{q+1} - b_q - x_{q+1} - c_q - x_{q+1} - B$ (левая часть которой совпадает с левой частью цепи C_d от вершины A до вершины a_q) проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

7. Неисправен контакт $\overline{x}_j$, соединяющий вершины b_{j-2} и a_{j-1} схемы S_d для некоторого

$j \in \{q+2, \ldots, r\}$ (при $q \leqslant r-2$). Тогда цепь $A - x_j - a_{j-1} - \overline{x}_j - b_{j-2} - x_{j-1} - c_{j-2} - x_{j-1} - B$ проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

8. Неисправен контакт $\overline{x}_j$, соединяющий вершины a_{j-1} и b_{j-1} схемы S_d для некоторого $j \in \{q+2, \ldots, r-1\}$ (при $q \leqslant r-3$). Тогда цепь $A - x_j - a_{j-1} - \overline{x}_j - b_{j-1} - x_j - c_{j-1} - x_j - B$ проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

9. Неисправен контакт $\overline{x}_r$, соединяющий вершины a_{r-1} и B схемы S_d, и при этом $q \leqslant r-2$. Тогда цепь $A - x_r - a_{r-1} - \overline{x}_r - B$ проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

10. Неисправен контакт $\overline{x}_r$, соединяющий вершины a_{r-1} и B схемы S_d, и при этом $q = r-1$. Тогда цепь C_d проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

11. Неисправен контакт x_j, соединяющий вершины A и a_{j-1} схемы S_d для некоторого $j \in \{q+2, \ldots, r\}$ (при $q \leqslant r-2$). Тогда цепь $A - x_j - a_{j-1} - \overline{x}_j - b_{j-1} - \ldots - a_{r-1} - \overline{x}_r - B$ (правая часть которой совпадает с правой частью цепи C_d от вершины a_{j-1} до вершины B) проводит на наборе $(\tilde{0}^n)$.

12. Неисправен контакт $\overline{x}_j$, соединяющий вершины a_j и B схемы S_d для некоторого $j \in \{1, \ldots, q-1\}$ (при $q \geqslant 2$). Тогда цепь $A - x_1 - a_1 - \ldots - b_{j-1} - x_j - a_j - \overline{x}_j - B$ (левая часть которой совпадает с левой частью цепи C_d от вершины A до вершины a_j) проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

13. Неисправен контакт $\overline{x}_j$, соединяющий вершины A и c_{j-1} схемы S_d для некоторого $j \in \{2, \ldots, r-1\}$ (при $r \geqslant 3$). Тогда цепь $A - \overline{x}_j - c_{j-1} - x_j - B$ проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

14. Неисправен контакт x_j, соединяющий вершины c_{j-1} и B схемы S_d для некоторого $j \in \{2, \ldots, r-1\}$ (при $r \geqslant 3$). Тогда цепь $A - \overline{x}_j - c_{j-1} - x_j - B$ проводит на наборе $(\tilde{0}^n)$.

15. Неисправен контакт $\overline{x}_j$, соединяющий вершины c_{j-1} и b_{j-1} схемы S_d для некоторого $j \in \{2, \ldots, q\}$ (при $q \geqslant 2$). Тогда цепь $A - x_1 - a_1 - \ldots - a_{j-1} - x_{j-1} - b_{j-1} - \overline{x}_j - c_{j-1} - x_j - B$ (левая часть которой совпадает с левой частью цепи C_d от вершины A до вершины b_{j-1}) проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

16. Неисправен контакт x_j, соединяющий вершины c_{j-1} и b_{j-1} схемы S_d для некоторого $j \in \{q+1, \ldots, r-1\}$ (при $q \leqslant r-2$). Тогда цепь $A - \overline{x}_j - c_{j-1} - x_j - b_{j-1} - \overline{x}_{j+1} - a_j - \ldots - a_{r-1} - \overline{x}_r - B$ (правая часть которой совпадает с правой частью цепи C_d от вершины b_{j-1} до вершины B) проводит на наборе $(\tilde{0}^n)$.

Теорема 4.1 доказана. $\square$

Теорема 4.2 [169]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных выполняется равенство $D^1_{k\text{-}\Pi}(f) = 2$ для любого $k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $n \geqslant 1$. Обозначим через F_n множество всех б. ф. от n переменных, каждая из которых либо тождественно равна 0, либо не принимает пару значений $(0,0)$ ни на какой паре противоположных n-наборов. Рассмотрим произвольную б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащую множеству F_n. Тогда $D(f) \leqslant 2$ в силу теоремы 4.1. Докажем неравенство $D(f) \geqslant 2$. Предположим, что $D(f) \leqslant 1$. Тогда существует k-неизбыточная схема S, реализующая функцию f и допускающая k-ПТ T из не более чем одного набора. Функция f принимает значение 0 на каких-то двух противоположных наборах $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$, поэтому $f \not\equiv 1$. Кроме того, $f \not\equiv 0$, так как $f \notin F_n$. Поэтому полюсы схемы S не совпадают между собой и в ней содержится хотя бы один контакт. Его замыкание должно обнаруживаться на наборах из множества T, откуда $|T| = 1$ и $T = \{\tilde{\pi}\}$ для некоторого n-набора $\tilde{\pi}$. Ни один контакт схемы S не может проводить на наборе $\tilde{\pi}$, поскольку в противном случае замыкание проводящего на этом наборе контакта нельзя было бы обнаружить на наборах из T. Замыкание любого одного контакта K данной схемы должно обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}$, т. е. в полученной схеме должна быть цепь между полюсами, проводящая на наборе $\tilde{\pi}$. Но единственным проводящим в этой схеме на указанном наборе контактом является K, следовательно, он соединяет полюсы схемы.

Пусть K — это контакт x_i^α, где $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0,1\}$. Заметим, что i-я компонента какого-то из наборов $\tilde{\sigma}$, $\tilde{\sigma}'$ равна α, поэтому схема S при отсутствии в ней неисправностей проводит на этом наборе и функция f принимает на нём значение 1; противоречие. Неравенство $D(f) \geqslant 2$, а вместе с ним равенство $D(f) = 2$ доказаны.

Оценим мощность множества F_n. На каждой из 2^{n-1} пар противоположных n-наборов каждая функция из этого множества, кроме константы 0, может принимать одну из трёх пар значений $(0,1)$, $(1,0)$ или $(1,1)$. Отсюда следует, что $|F_n| = 3^{2^{n-1}} + 1$ и

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{2^n}} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

т. е. отношение числа б. ф. из множества F_n к общему числу б. ф. от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству F_n, выполнено равенство $D(f) = 2$, откуда следует справедливость теоремы 4.2. $\square$

С использованием (1.3) из теоремы 4.2 можно получить, что для почти всех б. ф. f от n переменных $D^1_{\text{ПП}}(f) = 2$ и $D^1_{\text{ЕП}}(f) = 2$.

Двоичный набор $\tilde{\sigma}$ длины n будем называть *β-набором* б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, если $f(\tilde{\sigma}) = \beta$. (Путаницы с введённым ранее понятием n-набора не возникнет, так как слово «n-набор» используется только для сокращения фразы «двоичный набор длины n», а никакое другое слово вида «…-набор» для этой цели использовано не будет.)

Множество M (некоторых) β-наборов б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, где $n \geqslant 1$ и $\beta \in \{0, 1\}$, назовём *β-ключевым* для этой функции, если для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$ таких, что существует хотя бы один (i, α)-набор, являющийся β-набором функции $f(\tilde{x}^n)$, в M найдётся (i, α)-набор.

Легко видеть, что определение 1-ключевого множества совпадает с определением ключевого множества, данным на с. 94, а в качестве 0-ключевого множества для функции $f(\tilde{x}^n)$ всегда можно взять множество всех её 0-наборов, которое мы будем обозначать через $M_0(f)$.

Пример 4.1. Если два противоположных двоичных набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ и $\tilde{\sigma}' = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ являются β-наборами б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, то в качестве β-ключевого для f множества можно взять множество $\{\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}'\}$. Действительно, для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$ либо $\sigma_i = \alpha$, либо $\overline{\sigma}_i = \alpha$.

Пусть M — некоторое множество n-наборов. Обозначим через M^* множество той же мощности, что и M, получающееся из M заменой каждого набора на противоположный.

Лемма 4.1 [170]. *Для любого $\beta \in \{0, 1\}$ множество M является β-ключевым для б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ тогда и только тогда, когда множество M^* является $\overline{\beta}$-ключевым для функции $f^*(\tilde{x}^n)$.*

Доказательство. Пусть M — β-ключевое множество для функции $f(\tilde{x}^n)$. Тогда все наборы из M являются β-наборами этой функции и для любых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$ таких, что существует хотя бы один (i, α)-набор, являющийся β-набором функции $f(\tilde{x}^n)$, в M найдётся (i, α)-набор. Произвольный набор $\tilde{\sigma}'$ из множества M^* является противоположным некоторому набору $\tilde{\sigma}$ из множества M, поэтому $f^*(\tilde{\sigma}') = \overline{f}(\tilde{\sigma}) = \overline{\beta}$, т. е. все наборы из M^* являются $\overline{\beta}$-наборами функции $f^*(\tilde{x}^n)$. Далее рассмотрим произвольные $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \{0, 1\}$, для которых существует хотя бы один (i, α)-набор, являющийся $\overline{\beta}$-набором функции $f^*(\tilde{x}^n)$. Противоположный ему набор является $(i, \overline{\alpha})$-набором и β-набором функции $f(\tilde{x}^n)$, поэтому по определению β-ключевого множества в M найдётся $(i, \overline{\alpha})$-набор. Набор, противоположный последнему набору, принадлежит множеству M^* и является (i, α)-набором. Получаем, что M^* удовлетворяет всем условиям из определения $\overline{\beta}$-ключевого множества для функции $f^*(\tilde{x}^n)$.

Обратно, пусть M^* — $\overline{\beta}$-ключевое множество для функции $f^*(\tilde{x}^n)$. По доказанному в предыдущем абзаце, заменяя M на M^*, β на $\overline{\beta}$ и $f(\tilde{x}^n)$ на $f^*(\tilde{x}^n)$, получаем, что множество $(M^*)^* = M$ является $\overline{\overline{\beta}}$-ключевым, т. е. β-ключевым, для функции $(f^*)^*(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$. Лемма 4.1 доказана. □

Легко проверяется тождество

$$\left(\overline{I}_M\right)^* (\tilde{x}^n) \equiv I_{M^*}(\tilde{x}^n). \tag{4.4}$$

С использованием леммы 4.1 из лемм 3.1, 3.2, 3.6, 3.7 нетрудно получить нижеследующие леммы 4.2–4.5 соответственно.

Лемма 4.2 [170]. *Пусть M — 0-ключевое множество для б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, а $f'(\tilde{x}^n)$ — такая б. ф., что выполнено функциональное соотношение $f \leqslant f' \leqslant \overline{I}_M$. Тогда множество M является 0-ключевым и для функции $f'(\tilde{x}^n)$.*

(В доказательстве леммы 4.2 используются соотношение $\left(\overline{I}_M\right)^* \leqslant (f')^* \leqslant f^*$, вытекающее из соотношения $f \leqslant f' \leqslant \overline{I}_M$, и тождество (4.4).)

Лемма 4.3 [170]. *Если какие-то два 0-набора $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\sigma}'$ б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ различаются в s компонентах, то для неё существует 0-ключевое множество мощности не более $n - s + 2$.*

Лемма 4.4 [170]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$, для которой $|M_0(f)| \geqslant 2n-1$, существуют такое 0-ключевое множество M и такое множество M' двоичных наборов длины n, что M' является 0-ключевым множеством для функции $(f \vee I_M)(\tilde{x}^n)$ и $|M|+|M'| \leqslant 2n-2$.*

(В доказательстве леммы 4.4 используются соотношение $\left(f^* \& \overline{I}_{M^*}\right)^* = f \vee \left(\overline{I}_{M^*}\right)^*$, вытекающее из принципа двойственности — см., например, [260, с. 24], и тождество (4.4), в которое вместо M подставлено M^*.)

Лемма 4.5 [170]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 4$, для которой $|M_0(f)| \geqslant 2n + 1$, существует 0-ключевое множество мощности не более $n - 2$.*

Лемма 4.6 [170]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ существует 0-ключевое множество мощности не более n.*

Доказательство. Если $|M_0(f)| \leqslant n$, то в качестве искомого 0-ключевого множества можно взять $M_0(f)$. Пусть $|M_0(f)| \geqslant n + 1$. Из условия леммы следует, что $n \geqslant 1$, причём если $n = 1$, то $f(x_1) = x_1$ или $f(x_1) = \overline{x}_1$. В каждом из этих двух случаев $|M_0(f)| = 1 = n$, что противоречит неравенству $|M_0(f)| \geqslant n+1$. Таким образом, $n \geqslant 2$ и $|M_0(f)| \geqslant 3$. Возьмём произвольные три попарно различных набора из множества $M_0(f)$. Очевидно, что какие-то два из них различаются по крайней мере в двух компонентах. Тогда утверждение леммы 4.6 вытекает из леммы 4.3. $\square$

Лемма 4.7 [170]. *Пусть множество M двоичных наборов длины n, попарно различные индексы $j_1, \ldots, j_r \in \{1, \ldots, n\}$, где $n \geqslant 2$ и $r \geqslant 2$, и булевы константы $\pi_1, \ldots, \pi_r$ таковы, что любой набор из множества M является 0-набором б. ф. $K(\tilde{x}^n) = x_{j_1}^{\pi_1} \& \ldots \& x_{j_r}^{\pi_r}$ и для любого $i \in \{1, \ldots, r\}$ в M найдутся $(j_i, 0)$-набор и $(j_i, 1)$-набор. Тогда функцию $K(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС, для которой множество M является ЕПТ замыкания.*

Доказательство. Среди всех наборов из множества M выберем такой набор $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, что для максимального числа q индексов $u \in \{1, \ldots, r\}$ выполнено равенство $\tau_{j_u} = \pi_u$. В силу условия леммы

$$0 = K(\tilde{\tau}) = \tau_{j_1}^{\pi_1} \& \ldots \& \tau_{j_r}^{\pi_r},$$

поэтому $\tau_{j_u} \neq \pi_u$ хотя бы для одного $u \in \{1, \ldots, r\}$, значит, $q < r$. Если $q = 0$, то j_1-я компонента любого набора из множества M равна $\overline{\pi}_1$, однако это противоречит тому, что в M найдутся $(j_1, 0)$-набор и $(j_1, 1)$-набор. Таким образом, $1 \leqslant q \leqslant r - 1$.

Пусть $u_1, \ldots, u_q$ — все такие индексы u из множества $\{1, \ldots, r\}$, для которых $\tau_{j_u} = \pi_u$, а $u_{q+1}, \ldots, u_r$ — все такие индексы u из множества $\{1, \ldots, r\}$, для которых $\tau_{j_u} = \overline{\pi}_u$. Тогда $K(\tilde{x}^n) = x_{i_1}^{\tau_{i_1}} \& \ldots \& x_{i_q}^{\tau_{i_q}} \& x_{i_{q+1}}^{\overline{\tau}_{i_{q+1}}} \& \ldots \& x_{i_r}^{\overline{\tau}_{i_r}}$, где $i_1 = j_{u_1}$, $\ldots$, $i_r = j_{u_r}$. Все индексы $i_1, \ldots, i_r$ попарно различны, так как все индексы $j_1, \ldots, j_r$ попарно различны. Положим

$$f_1(\tilde{x}^n) = x_1 \& \ldots \& x_q \& \overline{x}_{q+1} \& \ldots \& \overline{x}_r \tag{4.5}$$

и $f_2 = K$, тогда $f_2(\tilde{x}^n) = f_1(x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_n}^{\sigma_n})$, где $\sigma_1 = \tau_{i_1}$, $\ldots$, $\sigma_n = \tau_{i_n}$, а $i_{r+1}, \ldots, i_n$ (при $r < n$) — попарно различные индексы от 1 до n, отличные от индексов $i_1, \ldots, i_r$. Далее, пусть $T_2 = M$, а T_1 — множество той же мощности, что и T_2, получающееся из множества T_2 заменой каждого набора $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ на набор $(\rho_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \rho_{i_n}^{\sigma_n})$. Докажем, что функцию $f_1(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС, для которой множество T_1 является ЕПТ замыкания; отсюда в силу утверждения 1.6 будет следовать справедливость леммы.

Отметим некоторые свойства множества T_1:

(i) в T_1 содержится набор $(\tilde{1}^n)$;

(ii) любой набор из T_1 является 0-набором функции $f_1(\tilde{x}^n)$;

(iii) для любого $v \in \{1, \ldots, r\}$ в T_1 найдутся $(v, 0)$-набор и $(v, 1)$-набор;

(iv) любой набор из T_1 совпадает с набором $(\tilde{1}^q, \tilde{0}^{n-q})$ не более чем в q из первых r компонент.

Свойство (i) выполнено в силу включения $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \in T_2$, построения множества T_1 и равенств $(\tau_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \tau_{i_n}^{\sigma_n}) = (\sigma_1^{\sigma_1}, \ldots, \sigma_n^{\sigma_n}) = (\tilde{1}^n)$. Докажем свойство (ii). Для любого набора

$(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in T_2$ в силу условия леммы и введённых обозначений выполнены равенства

$$0 = K(\rho_1, \ldots, \rho_n) = f_2(\rho_1, \ldots, \rho_n) = f_1(\rho_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \rho_{i_n}^{\sigma_n}),$$

поэтому набор $(\rho_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \rho_{i_n}^{\sigma_n})$ из множества T_1, на который заменяется набор $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ из T_2, является 0-набором функции $f_1(\tilde{x}^n)$, и свойство (ii) выполнено.

Докажем свойство (iii). По условию леммы для любого $v \in \{1, \ldots, r\}$ во множестве T_2 найдутся $(j_{u_v}, 0)$-набор и $(j_{u_v}, 1)$-набор, т. е. два набора, i_v-е компоненты которых равны 0 и 1 соответственно, поскольку $j_{u_v} = i_v$. Тогда во множестве T_1 эти наборы заменятся на наборы, v-е компоненты которых равны $0^{\sigma_v} = \overline{\sigma}_v$ и $1^{\sigma_v} = \sigma_v$ соответственно. Таким образом, для любого $v \in \{1, \ldots, r\}$ в T_1 найдутся $(v, 0)$-набор и $(v, 1)$-набор, что и требовалось доказать.

Докажем свойство (iv). По определению числа q для любого набора $(\rho_1, \ldots, \rho_n) \in T_2$ равенство $\rho_{j_{u_v}} = \pi_{u_v}$, т. е. $\rho_{i_v} = \pi_{u_v}$, выполнено не более, чем для q индексов $v \in \{1, \ldots, r\}$. Значит, и равенство $\rho_{i_v}^{\sigma_v} = \pi_{u_v}^{\sigma_v}$ выполнено не более, чем для q индексов $v \in \{1, \ldots, r\}$, т. е. набор $(\rho_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, \rho_{i_n}^{\sigma_n})$ из T_1, на который заменяется набор $(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ из T_2, совпадает с набором $(\pi_{u_1}^{\sigma_1}, \ldots, \pi_{u_r}^{\sigma_r}, \tilde{0}^{n-r})$ не более чем в q из первых r компонент. Осталось заметить, что $(\pi_{u_1}^{\sigma_1}, \ldots, \pi_{u_r}^{\sigma_r}, \tilde{0}^{n-r}) = (\tilde{1}^q, \tilde{0}^{n-q})$, поскольку $\pi_{u_v} = \tau_{j_{u_v}} = \tau_{i_v} = \sigma_v$ при $v \in \{1, \ldots, q\}$ по определению индексов $u_1, \ldots, u_q$ и $\pi_{u_v} = \overline{\tau}_{j_{u_v}} = \overline{\tau}_{i_v} = \overline{\sigma}_v$ при $v \in \{q+1, \ldots, r\}$ по определению индексов $u_{q+1}, \ldots, u_r$. Свойство (iv) доказано.

Построим КС S, реализующую функцию $f_1(\tilde{x}^n)$. Если во множестве T_1 содержится набор $\tilde{\sigma}_0$, первые r компонент которого равны 0, то схема S строится точно так же, как схема S_d в доказательстве теоремы 4.1 (с учётом того, что правые части равенств (4.3) и (4.5) совпадают), и аналогично этой теореме устанавливается, что схема S реализует функцию $f_1(\tilde{x}^n)$. Рассматривая те же шестнадцать случаев, что и в указанной теореме, получаем, что при неисправности, т. е. при замыкании, любого одного контакта в этой схеме в ней возникает цепь между полюсами, проводящая на одном из наборов $(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}_0$, и схема начинает выдавать на этом наборе единицу, в то время как исправная схема выдаёт на каждом из наборов $(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}_0$ нуль в силу включения $\tilde{\sigma}_0 \in T_1$ и свойств (i), (ii). Отсюда следует, что схема S неизбыточна, а множество $\{(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}_0\}$, а значит, и T_1, является для неё ЕПТ замыкания.

Пусть теперь во множестве T_1 не содержится набора, первые r компонент которого равны 0. Для определения схемы S нам понадобится ввести некоторые обозначения. Среди всех наборов из T_1 выберем такой набор $\tilde{\sigma}^1 = (\sigma_1^1, \ldots, \sigma_n^1)$, что для максимального числа q_1 индексов $i \in \{1, \ldots, q\}$ выполнено равенство $\sigma_i^1 = 0$. Если $q_1 = 0$, то первые q компонент любого набора из множества T_1 равны 1, однако это противоречит свойству (iii). Поэтому $q_1 \geqslant 1$.

Без ограничения общности равенство $\sigma_i^1 = 0$ выполнено для $i = 1, \ldots, q_1$ и не выполнено для $i = q_1 + 1, \ldots, q$ (при $q_1 < q$), т. е. $\tilde{\sigma}^1 = (\tilde{0}^{q_1}, \tilde{1}^{q-q_1}, \underbrace{*, \ldots, *}_{n-q})$ (здесь и далее в доказательстве леммы каждая звёздочка обозначает некоторое булево число). В случае $q_1 < q$ среди всех наборов из множества T_1 выберем такой набор $\tilde{\sigma}^2 = (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$, что для максимального числа q_2 индексов $i \in \{q_1+1, \ldots, q\}$ выполнено равенство $\sigma_i^2 = 0$. Если $q_2 = 0$, то q-я компонента любого набора из множества T_1 равна 1, однако это противоречит свойству (iii). Поэтому $q_2 \geqslant 1$. Без ограничения общности равенство $\sigma_i^2 = 0$ выполнено для $i = q_1 + 1, \ldots, q_1 + q_2$ и не выполнено для $i = q_1 + q_2 + 1, \ldots, q$ (при $q_1 + q_2 < q$), т. е. $\tilde{\sigma}^2 = (\underbrace{*, \ldots, *}_{q_1}, \tilde{0}^{q_2}, \tilde{1}^{q-q_1-q_2}, \underbrace{*, \ldots, *}_{n-q})$. В случае $q_1+q_2 < q$ среди всех наборов из множества T_1 выберем такой набор $\tilde{\sigma}^3 = (\sigma_1^3, \ldots, \sigma_n^3)$, что для максимального числа q_3 индексов $i \in \{q_1+q_2+1, \ldots, q\}$ выполнено равенство $\sigma_i^3 = 0$, и т. д. В итоге можно определить такие наборы $\tilde{\sigma}^1, \ldots, \tilde{\sigma}^m \in T_1$, где $m \geqslant 1$, что для любого $s \in \{1, \ldots, m\}$ набор $\tilde{\sigma}^s$ имеет вид $(\underbrace{*, \ldots, *}_{t_{s-1}}, \tilde{0}^{q_s}, \tilde{1}^{q-t_s}, \underbrace{*, \ldots, *}_{n-q})$, где $t_0 = 0$ и $t_{s'} = q_1 + \ldots + q_{s'}$ при $s' \in \{1, \ldots, m\}$, причём все числа $q_1, \ldots, q_m$ натуральные и $t_m = q$.

Далее, для каждого $i \in \{q + 1, \ldots, r\}$ по свойству (iii) во множестве T_1 найдётся $(i, 0)$-набор $\tilde{\rho}^i$. (Отметим, что некоторые из наборов $\tilde{\rho}^{q+1}, \ldots, \tilde{\rho}^r$ могут совпадать друг с другом или с какими-то из наборов $\tilde{\sigma}^1, \ldots, \tilde{\sigma}^m$. Однако равенства $m = 1$ и $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r = \tilde{\sigma}^1$ не могут выполняться одновременно, поскольку в таком случае первые r компонент набора $\tilde{\sigma}^1$ равны 0, что противоречит предположению.) Если первые q компонент набора $\tilde{\rho}^i$ равны 1, то этот набор совпадает с набором $(\tilde{1}^q, \tilde{0}^{n-q})$ в первых q компонентах и в i-й компоненте, что противоречит свойству (iv). Поэтому существует такое $\nu_i \in \{1, \ldots, q\}$, что ν_i-я компонента набора $\tilde{\rho}^i$ равна 0.

Перейдём к построению схемы S. Вначале построим цепь C с концами A и B, состоящую из $2r - m - 1$ контактов. В этой цепи при движении от вершины A к вершине B располагаются контакты $x_1, \ldots, x_q, \overline{x}_{q+1}, \ldots, \overline{x}_r$, причём контакты каждого из указанных типов, кроме $x_{t_1}, \ldots, x_{t_m}, \overline{x}_{q+1}$, присутствуют в ней дважды и располагаются подряд. Для каждого $i \in \{1, \ldots, r\}$ вершину цепи C, расположенную между двумя контактами переменной x_i (если такие два контакта есть), обозначим через a_i, а вершину данной цепи, расположенную между контактами переменных x_i и x_{i+1} (при $i < r$) — через b_i. Множество индексов i у всех построенных вершин a_i обозначим через $\mathcal{I}$. Тогда $\mathcal{I} = \{1, \ldots, r\} \setminus \{t_1, \ldots, t_m, q + 1\}$.

На рисунке 4.4 показан вид цепи C при $r = 8$, $q = 5$, $m = 3$, $t_1 = 2$, $t_2 = 4$. В этом случае $t_3 = q = 5$, $\mathcal{I} = \{1, 3, 7, 8\}$ и $f_1(\tilde{x}^n) = x_1x_2x_3x_4x_5\overline{x}_6\overline{x}_7\overline{x}_8$.

Каждую вершину a_i, $i \in \mathcal{I}$, при $i \leqslant q$ соединим с вершиной B контактом $\overline{x}_i$, а при

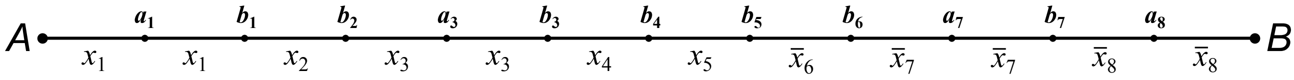

Рис. 4.4. Цепь C

$i \geqslant q+1$ — с вершиной A контактом x_i. Вершины b_q и B соединим пучком из m контактов: $\overline{x}_{t_1}, \ldots, \overline{x}_{t_m}$. Для каждого $i \in \{2, \ldots, r-1\}$ (в случае $r \geqslant 3$) введём в схему новую вершину c_i и соединим её с вершиной A контактом $\overline{x}_i$, с вершиной B контактом x_i, а также — при $i \leqslant q$ — с вершиной b_{i-1} контактом $\overline{x}_i$, а при $i \geqslant q+1$ — с вершиной b_i контактом x_i. Наконец, в случае $r \geqslant q+2$ и невыполнения равенства $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r$ введём в схему для каждого $i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$ новую вершину d_i и соединим её с вершиной A контактом x_{ν_i}, а также с каждой из вершин b_i, B контактом $\overline{x}_{\nu_i}$. Полученную схему с полюсами A и B обозначим через S. Вид этой схемы при $r=8$, $q=5$, $m=3$, $t_1=2$, $t_2=4$, $\nu_6=1$, $\nu_7=2$ показан на рисунке 4.5; при указанных значениях параметров

$$\begin{aligned}
(\tilde{1}^n) &= (1,1,1,1,1,1,1,1,\ldots),\\
\tilde{\sigma}^1 &= (0,0,1,1,1,*,*,*,\ldots),\\
\tilde{\sigma}^2 &= (*,*,0,0,1,*,*,*,\ldots),\\
\tilde{\sigma}^3 &= (*,*,*,*,0,*,*,*,\ldots),\\
\tilde{\rho}^6 &= (0,*,*,*,*,0,*,*,\ldots),\\
\tilde{\rho}^7 &= (*,0,*,*,*,*,0,*,\ldots),\\
\tilde{\rho}^8 &= (*,*,*,*,*,*,*,0,\ldots),
\end{aligned}$$

где для краткости первое многоточие обозначает $n-8$ единиц, а каждое последующее — $n-8$ звёздочек.

Докажем, что данная схема в случае исправности всех входящих в неё контактов реализует функцию $f_1(\tilde{x}^n)$. Цепь C в силу (4.5) реализует данную функцию. Предположим, что в схеме S существует какая-то другая несамопересекающаяся цепь C' между полюсами, проводящая хотя бы на одном n-наборе. Нетрудно видеть, что каждая из построенных вершин a_i, c_i, d_i инцидентна ровно трём контактам, причём один из них, который мы назовём особым, является противоположным каждому из двух других; поэтому цепь C' не может проходить ни через один особый контакт. Обозначим КС, получающуюся из схемы S удалением всех особых контактов, через S' (её вид при $r=8$, $q=5$, $m=3$, $t_1=2$, $t_2=4$, $\nu_6=1$, $\nu_7=2$ показан на рисунке 4.6). Легко заметить, что единственной проводящей хотя бы на одном наборе несамопересекающейся цепью между полюсами A и B схемы S' является

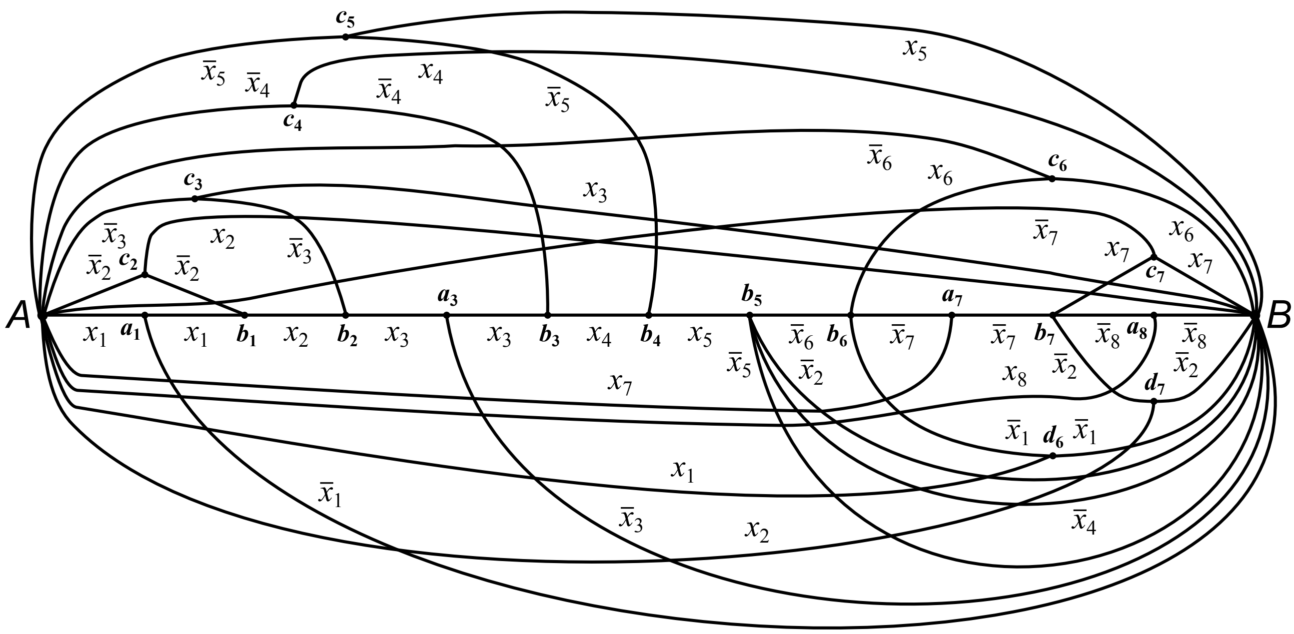

Рис. 4.5. Схема S

цепь C (с учётом того, что $\nu_i \in \{1, \ldots, q\}$ для любого $i \in \{q+1, \ldots, r\}$ и контакт $\overline{x}_{\nu_i}$ является противоположным одному из контактов $x_1, \ldots, x_q$, а также $t_1, \ldots, t_m \in \{1, \ldots, q\}$), поэтому предположение о существовании цепи C' было неверно. Тем самым показано, что схема S реализует ту же функцию, что и цепь C, т. е. функцию $f_1(\tilde{x}^n)$.

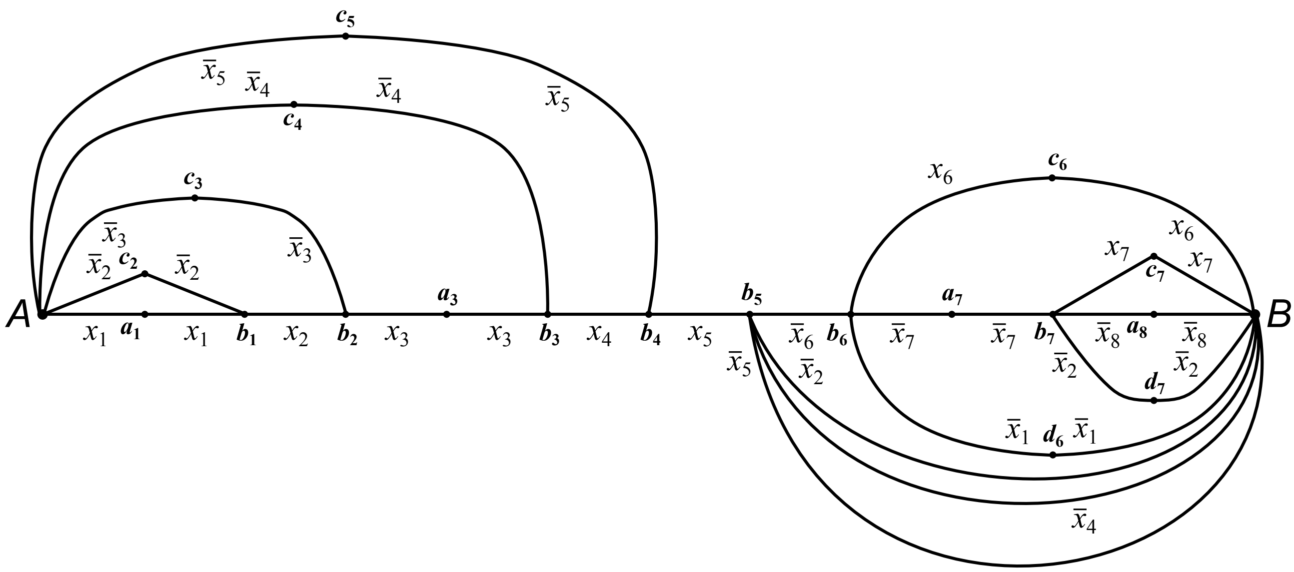

Рис. 4.6. Схема S'

Докажем, что схема S неизбыточна, а множество T_1 является для неё ЕПТ. На каждом наборе из этого множества в силу свойства (ii) функция $f_1(\tilde{x}^n)$ принимает значение 0, поэтому достаточно доказать, что при неисправности, т. е. при замыкании, любого одного контакта в схеме S найдётся набор из T_1, на котором функция, реализуемая полученной схемой, равна единице. Убедимся, что в S существует несамопересекающаяся цепь между полюсами, проводящая при указанной неисправности хотя бы на одном наборе из T_1; отсюда будет следовать требуемое утверждение, а вместе с ним и справедливость леммы 4.7. Отметим, что $(\tilde{1}^n) \in T_1$ в силу свойства (i) и все ранее определённые наборы $\tilde{\sigma}^1, \ldots, \tilde{\sigma}^m, \tilde{\rho}^{q+1}, \ldots, \tilde{\rho}^r$ также принадлежат множеству T_1. Возможны 23 случая.

1. Неисправен контакт x_1, соединяющий вершины A и a_1 схемы S (и при этом $1 \in \mathcal{I}$). Тогда цепь $A - x_1 - a_1 - \overline{x}_1 - B$ проводит на наборе $\tilde{\sigma}^1$.

2. Неисправен контакт x_1, соединяющий вершины A и b_1 схемы S (и при этом $1 \notin \mathcal{I}$). Тогда $t_1 = 1$ в силу определения множества $\mathcal{I}$. Цепь $A - x_1 - b_1 - \ldots - b_q - \overline{x}_{t_1} - B$, средняя часть которой совпадает с частью цепи C от вершины b_1 до вершины b_q, проводит на наборе $\tilde{\sigma}^1$, поскольку 1-я компонента этого набора равна 0, а его 2-я, …, q-я компоненты равны 1 (при $q \geqslant 2$).

3. Неисправен контакт x_i, соединяющий вершины a_i и b_i схемы S для некоторого $i \in \mathcal{I} \cap \{1, \ldots, q\}$. Тогда существует такое $s \in \{1, \ldots, m\}$, что $i \in [t_{s-1} + 1; t_s]$. Из определения множества $\mathcal{I}$ следует, что $i \neq t_s$, поэтому $t_{s-1} + 1 \leqslant i \leqslant t_s - 1$ и $i \leqslant t_m - 1 = q - 1$. Цепь $A - \overline{x}_{i+1} - c_{i+1} - \overline{x}_{i+1} - b_i - x_i - a_i - \overline{x}_i - B$ проводит на наборе $\tilde{\sigma}^s$, поскольку $i, i+1 \in [t_{s-1}+1; t_s]$ (см. определение этого набора).

4. Неисправен контакт x_i, соединяющий вершины b_{i-1} и a_i схемы S для некоторого $i \in \mathcal{I} \cap \{2, \ldots, q\}$ (при $q \geqslant 2$). Тогда существует такое $s \in \{1, \ldots, m\}$, что $i \in [t_{s-1} + 1; t_s]$, и цепь $A - \overline{x}_i - c_i - \overline{x}_i - b_{i-1} - x_i - a_i - \overline{x}_i - B$ проводит на наборе $\tilde{\sigma}^s$.

5. Неисправен контакт x_i, соединяющий вершины b_{i-1} и b_i схемы S для некоторого $i \in \{2, \ldots, q\} \setminus \mathcal{I}$ (при $q \geqslant 2$). Тогда существует такое $s \in \{1, \ldots, m\}$, что $i = t_s$ (см. определение множества $\mathcal{I}$). Цепь $A - \overline{x}_i - c_i - \overline{x}_i - b_{i-1} - x_i - b_i - \ldots - b_q - \overline{x}_{t_s} - B$, средняя часть которой совпадает с частью цепи C от вершины b_i до вершины b_q, проводит на наборе $\tilde{\sigma}^s$, поскольку i-я компонента этого набора равна 0, а его $(i+1)$-я, …, q-я компоненты равны 1 (при $i < q$).

6. Неисправен контакт $\overline{x}_{q+1}$, соединяющий вершины b_q и b_{q+1} схемы S (и при этом $r \geqslant q + 2$). Тогда цепь $A - \ldots - b_q - \overline{x}_{q+1} - b_{q+1} - x_{q+1} - c_{q+1} - x_{q+1} - B$, левая часть которой совпадает с частью цепи C от вершины A до вершины b_q, проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

7. Неисправен контакт $\overline{x}_i$, соединяющий вершины b_{i-1} и a_i схемы S для некоторого $i \in \{q + 2, \ldots, r\}$ (при $r \geqslant q + 2$). Тогда цепь $A - x_i - a_i - \overline{x}_i - b_{i-1} - x_{i-1} - c_{i-1} - x_{i-1} - B$

проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

8. Неисправен контакт $\overline{x}_i$, соединяющий вершины a_i и b_i схемы S для некоторого $i \in \{q+2, \ldots, r-1\}$ (при $r \geqslant q+3$). Тогда цепь $A - x_i - a_i - \overline{x}_i - b_i - x_i - c_i - x_i - B$ проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

9. Неисправен контакт $\overline{x}_{q+1}$, соединяющий вершины b_q и B схемы S (и при этом $r = q+1$). Тогда цепь C проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

10. Неисправен контакт $\overline{x}_r$, соединяющий вершины a_r и B схемы S (и при этом $r \geqslant q+2$). Тогда цепь $A - x_r - a_r - \overline{x}_r - B$ проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

Примечание: к данному моменту разобраны все возможные неисправности контактов из цепи C.

11. Неисправен контакт $\overline{x}_{t_s}$, соединяющий вершины b_q и B схемы S для некоторого $s \in \{1, \ldots, m\}$. Тогда цепь $A - \ldots - b_q - \overline{x}_{t_s} - B$, левая часть которой совпадает с левой частью цепи C от вершины A до вершины b_q, проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

12. Неисправен контакт $\overline{x}_i$, соединяющий вершины a_i и B схемы S для некоторого $i \in \mathcal{I} \cap \{1, \ldots, q\}$. Тогда цепь $A - \ldots - a_i - \overline{x}_i - B$, левая часть которой совпадает с левой частью цепи C от вершины A до вершины a_i, проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

13. Неисправен контакт $\overline{x}_i$, соединяющий вершины A и c_i схемы S для некоторого $i \in \{2, \ldots, r-1\}$ (при $r \geqslant 3$). Тогда цепь $A - \overline{x}_i - c_i - x_i - B$ проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

14. Неисправен контакт x_i, соединяющий вершины c_i и B схемы S для некоторого $i \in \{2, \ldots, r-1\}$ (при $r \geqslant 3$). Тогда цепь $A - \overline{x}_i - c_i - x_i - B$ проводит на любом $(i, 0)$-наборе из множества T_1 (хотя бы один такой набор найдётся в силу свойства (iii)).

15. Неисправен контакт $\overline{x}_i$, соединяющий вершины c_i и b_{i-1} схемы S для некоторого $i \in \{2, \ldots, q\}$ (при $q \geqslant 2$). Тогда цепь $A - \ldots - b_{i-1} - \overline{x}_i - c_i - x_i - B$, левая часть которой совпадает с левой частью цепи C от вершины A до вершины b_{i-1}, проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

16. Не выполнено равенство $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r$ (в частности, $r \geqslant q+2$), и неисправен контакт x_{ν_i}, соединяющий вершины A и d_i схемы S для некоторого $i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$. Тогда цепь $A - x_{\nu_i} - d_i - \overline{x}_{\nu_i} - B$ проводит на любом $(\nu_i, 0)$-наборе из множества T_1 (хотя бы один такой набор найдётся в силу свойства (iii)).

17. Не выполнено равенство $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r$, и неисправен контакт $\overline{x}_{\nu_i}$, соединяющий вершины d_i и B схемы S для некоторого $i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$. Тогда цепь $A - x_{\nu_i} - d_i - \overline{x}_{\nu_i} - B$ проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

18. Не выполнено равенство $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r$, и неисправен контакт $\overline{x}_{\nu_i}$, соединяющий вершины d_i и b_i схемы S для некоторого $i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$. Тогда цепь $A - x_{\nu_i} - d_i - \overline{x}_{\nu_i} -$

$- b_i - x_i - c_i - x_i - B$ проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$.

19. Выполнено равенство $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r$, и неисправен контакт x_i, соединяющий вершины A и a_i схемы S для некоторого $i \in \mathcal{I} \cap \{q+1, \ldots, r\}$. Тогда цепь $A - x_i - a_i - \ldots - B$, правая часть которой совпадает с правой частью цепи C от вершины a_i до вершины B, проводит на наборе $\tilde{\rho}^{q+1}$, поскольку $(q+1)$-я, …, r-я компоненты этого набора равны 0 и $i \geqslant q+1$.

20. Не выполнено равенство $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r$, и неисправен контакт x_i, соединяющий вершины A и a_i схемы S для некоторого $i \in \mathcal{I} \cap \{q+1, \ldots, r-1\}$. Тогда цепь $A - x_i - a_i - \overline{x}_i - - b_i - \overline{x}_{\nu_i} - d_i - \overline{x}_{\nu_i} - B$ проводит на наборе $\tilde{\rho}^i$, поскольку i-я и ν_i-я компоненты этого набора равны 0.

21. Не выполнено равенство $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r$, и неисправен контакт x_r, соединяющий вершины A и a_r схемы S. Тогда цепь $A - x_r - a_r - \overline{x}_r - B$ проводит на наборе $\tilde{\rho}^r$.

22. Выполнено равенство $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r$, и неисправен контакт x_i, соединяющий вершины c_i и b_i схемы S для некоторого $i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$ (при $r \geqslant q+2$). Тогда цепь $A - \overline{x}_i - c_i - x_i - b_i - \ldots - B$, правая часть которой совпадает с правой частью цепи C от вершины b_i до вершины B, проводит на наборе $\tilde{\rho}^{q+1}$ (см. пояснение к случаю 19).

23. Не выполнено равенство $\tilde{\rho}^{q+1} = \ldots = \tilde{\rho}^r$, и неисправен контакт x_i, соединяющий вершины c_i и b_i схемы S для некоторого $i \in \{q+1, \ldots, r-1\}$. Тогда цепь $A - \overline{x}_i - c_i - x_i - - b_i - \overline{x}_{\nu_i} - d_i - \overline{x}_{\nu_i} - B$ проводит на наборе $\tilde{\rho}^i$ (см. пояснение к случаю 20).

Лемма 4.7 доказана. □

Теорема 4.3 [170]. *Пусть M — 0-ключевое множество для б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$. Тогда эту функцию для любого $k \in \mathbb{N}$ можно реализовать k-неизбыточной КС, для которой множество M является k-ПТ замыкания.*

Доказательство. В силу утверждения 1.2 достаточно доказать утверждение теоремы для $k = 1$. В случае $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$ функцию f можно реализовать КС, не содержащей ни одного контакта. У такой схемы нет ни одной ф. н., поэтому она неизбыточна и любое множество n-наборов, в том числе и M, является для неё ЕПТ, что и требовалось доказать. Далее считаем, что функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант. Рассмотрим произвольную тупиковую д. н. ф. F этой функции; пусть она имеет вид $F = K_1 \vee \ldots \vee K_m$, где $m \geqslant 1$, а $K_1, \ldots, K_m$ — различные ЭК переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (определение тупиковой д. н. ф. можно найти, например, в [260, с. 301]).

Зафиксируем произвольное $d \in \{1, \ldots, m\}$. Пусть $K_d = x_{j_1}^{\pi_1} \& \ldots \& x_{j_r}^{\pi_r}$, где $\pi_1, \ldots, \pi_r \in \in \{0, 1\}$, а $j_1, \ldots, j_r$ — попарно различные индексы из множества $\{1, \ldots, n\}$. Определим КС S_d, реализующую б. ф. $K_d(\tilde{x}^n)$. Рассмотрим два случая.

Случай А: $r = 1$. Пусть S_d — схема, состоящая из одного контакта $x_{j_1}^{\pi_1}$. Очевидно, что она реализует функцию $K_d(\tilde{x}^n)$.

Случай Б: $r \geqslant 2$. Тогда $n \geqslant 2$. Докажем, что выполнены все условия леммы 4.7 при $K(\tilde{x}^n) = K_d(\tilde{x}^n)$. В силу определения 0-ключевого множества и неравенства $K_d \leqslant f$ любой набор из множества M является 0-набором б. ф. $K_d(\tilde{x}^n)$. Поэтому достаточно доказать, что для любого $i \in \{1, \ldots, r\}$ во множестве M найдутся $(j_i, 0)$-набор и $(j_i, 1)$-набор. Из тупиковости д. н. ф. F следует, что для любого $t \in \{1, \ldots, r\}$ при удалении из F множителя $x_{j_t}^{\pi_t}$ в ЭК K_d полученная д. н. ф. реализует некоторую б. ф. $f'(\tilde{x}^n)$, отличную от $f(\tilde{x}^n)$, т. е. существует такой n-набор $\tilde{\sigma}$, что $f(\tilde{\sigma}) \neq f'(\tilde{\sigma})$. Это возможно только при выполнении равенств

$$K_1(\tilde{\sigma}) = \ldots = K_{d-1}(\tilde{\sigma}) = K_{d+1}(\tilde{\sigma}) = \ldots = K_m(\tilde{\sigma}) = 0$$

и неравенства $K_d(\tilde{\sigma}) \neq K'_d(\tilde{\sigma})$, где $K'_d = x_{j_1}^{\pi_1} \& \ldots \& x_{j_{t-1}}^{\pi_{t-1}} \& x_{j_{t+1}}^{\pi_{t+1}} \& \ldots \& x_{j_r}^{\pi_r}$. Очевидно, что $K'_d \geqslant K_d$, поэтому $K_d(\tilde{\sigma}) = 0$ и $K'_d(\tilde{\sigma}) = 1$. Тогда

$$f(\tilde{\sigma}) = K_1(\tilde{\sigma}) \vee \ldots \vee K_m(\tilde{\sigma}) = 0,$$

$j_{t'}$-я компонента набора $\tilde{\sigma}$ равна $\pi_{t'}$ для любого $t' \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{t\}$, а j_t-я компонента набора $\tilde{\sigma}$ равна $\overline{\pi}_t$. Отсюда при $t = i$ получаем, что набор $\tilde{\sigma}$ является $(j_i, \overline{\pi}_i)$-набором и одновременно 0-набором функции $f(\tilde{x}^n)$, а при произвольном $t \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$ и $t' = i$ — что набор $\tilde{\sigma}$ является (j_i, π_i)-набором и одновременно 0-набором функции $f(\tilde{x}^n)$. Тогда по определению 0-ключевого множества для этой функции в M найдутся $(j_i, \overline{\pi}_i)$-набор и (j_i, π_i)-набор, что и требовалось доказать.

Таким образом, выполнены все условия леммы 4.7 при $K(\tilde{x}^n) = K_d(\tilde{x}^n)$, из которой следует, что функцию $K_d(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС S_d, для которой множество M является ЕПТ замыкания.

Все построенные схемы S_d при $d = 1, \ldots, m$ соединим параллельно. Полученную КС обозначим через S. Очевидно, что она реализует функцию $K_1(\tilde{x}^n) \vee \ldots \vee K_m(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$. Докажем, что схема S неизбыточна, а множество M является для неё ЕПТ замыкания. На каждом наборе из M функция $f(\tilde{x}^n)$ принимает значение 0, поэтому достаточно доказать, что при замыкании любого одного контакта в схеме S найдётся набор из M, на котором функция, реализуемая полученной схемой, равна единице.

Отметим, что множество M непусто. Действительно, функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от тождественной единицы, поэтому принимает значение 0 хотя бы на одном наборе. Пусть 1-я компонента этого набора равна α. Тогда он является $(1, \alpha)$-набором и при этом 0-набором функции $f(\tilde{x}^n)$, откуда по определению 0-ключевого множества для этой функции в M найдётся $(1, \alpha)$-набор.

Предположим, что неисправен некоторый контакт в некоторой подсхеме S_d схемы S. Если выполнен случай А, то при неисправности единственного контакта подсхемы S_d в схеме S возникает цепь между полюсами, проводящая на любом наборе, в том числе на произвольном наборе из множества M, поэтому функция, реализуемая полученной схемой, на указанном наборе равна единице, что и требовалось доказать. Пусть выполнен случай Б. Тогда множество M является ЕПТ замыкания для неизбыточной схемы S_d; при этом, как было показано выше, любой набор из данного множества M является 0-набором б. ф. $K_d(\tilde{x}^n)$. Следовательно, при рассматриваемой неисправности контакта подсхема S_d, а вместе с ней и схема S, станет выдавать единицу хотя бы на одном наборе из множества M. Теорема 4.3 доказана. □

Теорема 4.4 [170]. *Для любых* $n \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$ *справедливо равенство* $D^1_{k\text{-П}}(n) = n$.

Доказательство. Сначала докажем, что $D(n) \leqslant n$. Достаточно доказать неравенство $D(f) \leqslant n$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. В случаях $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ оно следует из утверждения 1.5, а в остальных случаях — из теоремы 4.3 и леммы 4.6.

Докажем теперь неравенство $D(n) \geqslant n$. В случае $n = 0$ оно очевидно. Пусть $n \geqslant 1$, а $f(\tilde{x}^n)$ — б. ф., принимающая значение 0 на всех наборах, ровно одна компонента которых равна единице, и значение 1 на всех остальных наборах. Пусть S — такая k-неизбыточная КС, реализующая функцию f, а T — такой k-ПТ замыкания для схемы S, что $D(f) = D(S) = D(T)$. Если в схеме S не содержится ни одного контакта $\overline{x}_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, то при переходе от входного набора $\tilde{\sigma}_0 = (\tilde{0}^n)$ ко входному набору $\tilde{\sigma}_i = (\tilde{0}^{i-1}, 1, \tilde{0}^{n-i})$ проводимости всех контактов x_i изменятся с 0 на 1, а проводимости всех контактов переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i\}$ останутся неизменными, и значение, выдаваемое схемой S, не уменьшится, что противоречит неравенству $f(\tilde{\sigma}_0) > f(\tilde{\sigma}_i)$, вытекающему из определения функции f. Поэтому в схеме S содержится хотя бы один контакт $\overline{x}_i$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Для возможности обнаружения замыкания этого контакта в тесте T должен содержаться такой набор $\tilde{\pi}_i$, что его i-я компонента равна 1 (иначе замыкание указанного контакта никак не отразится на значениях, выдаваемых схемой S на наборах из множества T) и $f(\tilde{\pi}_i) = 0$ (поскольку при замыкании любого контакта значение, выдаваемое схемой S на любом наборе, не может уменьшиться). Из определения функции f следует, что единственным таким набором является набор $\tilde{\sigma}_i$. Получаем, что $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_n \in T$, откуда $D(T) \geqslant n$ и

$$D(n) \geqslant D(f) = D(S) = D(T) \geqslant n.$$

Окончательно имеем $D(n) = n$. Теорема 4.4 доказана. $\square$

С использованием (1.4) из теоремы 4.4 можно получить равенства $D^1_{\text{ПП}}(n) = n$ и $D^1_{\text{ЕП}}(n) = n$ для любого $n \geqslant 0$.

§5. Диагностические тесты замыкания

В данном параграфе рассматриваются диагностические тесты для КС относительно замыканий контактов. Перечислим основные результаты параграфа; они полностью совпадают с результатами, описанными в начале §3, после замены у всех букв D верхних индексов 0 на 1. При условии $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^1_{k\text{-Д}}(f) \leqslant 2k+2$ (теорема 5.1). Для любых $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $D^1_{k\text{-Д}}(n) \leqslant n + k(n-2)$ (следствие 5.2), улучшающее в случае $k = 1$ упомянутую во введении оценку $D^1_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, которую можно получить по аналогии с [192, с. 113, теорема 9]. Теорема 5.1 и следствие 5.2 при $k = 1$ также усиливают результаты из работы автора [152], приведённые на с. 54 в описании §5. Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^1_{\text{ПД}}(n) = 2^{n-1}$ (следствие 5.4), улучшающее неравенство $D^1_{\text{ПД}}(n) \leqslant 2^n - 2$ из [206], полученное для $n \geqslant 2$. Кроме того, число б. ф. f от n переменных, для которых $D^1_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, асимптотически не меньше $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$ (следствие 5.5).

Почти все результаты этого параграфа доказываются с помощью соответствующих результатов §3 и принципа двойственности, который, напомним, сформулирован в [260, с. 24]. Однако, как известно, в классе произвольных двухполюсных КС не удается ввести простого понятия двойственности (с тем требованием, чтобы двойственные схемы реализовывали двойственные б. ф.), поэтому некоторые рассуждения всё же понадобятся.

Лемма 5.1 [169]. *Пусть б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, натуральное число k, попарно непересекающиеся множества $T_1, \ldots, T_{k+1}$ её нулевых наборов и k-неизбыточные КС $S_1, \ldots, S_{k+1}$ таковы, что выполнены следующие условия:*

1) *схема S_i, $i = 1, \ldots, k+1$, реализует б. ф. $(f \vee I_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$, где $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{k+1}$;*

2) *множество T_i, $i = 1, \ldots, k+1$, является k-ПТ замыкания для схемы S_i.*

Тогда схема S, представляющая собой последовательное соединение схем $S_1, \ldots, S_{k+1}$, реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$ и k-неизбыточна, а множество T является для неё k-ДТ замыкания.

Доказательство проводится двойственным образом по отношению к доказательству леммы 3.8. Схема S реализует функцию

$$(f \vee I_{T\setminus T_1})\& \ldots \&(f \vee I_{T\setminus T_{k+1}}) = f \vee (I_{T\setminus T_1}\& \ldots \&I_{T\setminus T_{k+1}}) = f \vee 0 = f$$

в силу условия 1). Докажем, что данная схема k-неизбыточна. Пусть в ней неисправны не менее одного и не более k контактов и хотя бы один неисправный контакт содержится в подсхеме S_i, $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Хотя бы на одном наборе $\tilde{\sigma}$ из множества T_i подсхема S_i выдаст значение, отличное от

$$f(\tilde{\sigma}) \vee I_{T\setminus T_i}(\tilde{\sigma}) = 0 \vee 0 = 0$$

в силу условий 1), 2), т. е. значение 1. Любая подсхема S_j, $j \in \{1, \ldots, k+1\}\setminus\{i\}$, по условию 1) выдаст на наборе $\tilde{\sigma}$ значение

$$f(\tilde{\sigma}) \vee I_{T\setminus T_j}(\tilde{\sigma}) = 0 \vee 1 = 1$$

при отсутствии в ней неисправностей, а значит, очевидно, и при замыкании произвольного числа её контактов. Поэтому схема S выдаст на указанном наборе значение $\underbrace{1\& \ldots \&1}_{k+1} = 1$, отличное от значения $f(\tilde{\sigma}) = 0$, откуда следует, что она k-неизбыточна.

Найдём все возможные ф. н. схемы S при неисправностях не более k контактов. На любом единичном наборе функции $f(\tilde{x}^n)$ каждая из схем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ по условию 1) выдаст значение $1 \vee \ldots = 1$ при отсутствии в ней неисправностей, а значит, и при замыкании произвольного числа её контактов. Следовательно, любая ф. н. схемы S принимает на указанном наборе значение $\underbrace{1\& \ldots \&1}_{k+1} = 1$. Далее, при замыкании не более k контактов схемы S хотя бы в одной из подсхем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ все контакты исправны. На любом нулевом наборе функции $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащем множеству T, указанная подсхема выдаст значение $0 \vee 0 = 0$ по условию 1). Отсюда вытекает, что и значение, выдаваемое схемой S на этом наборе, будет равно 0. Тем самым показано, что любая ф. н. g данной схемы принимает такие же значения, как и функция $f(\tilde{x}^n)$, на всех n-наборах, не принадлежащих множеству T, причём $g \neq f$ в силу k-неизбыточности схемы S. Поэтому любую её ф. н. можно отличить от функции f, а любые две различные ф. н. схемы S — друг от друга на наборах из множества T, откуда получаем, что данное множество является k-ДТ для схемы S. Лемма 5.1 доказана. □

Теорема 5.1 [169]. *При условии $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^1_{k\text{-Д}}(f) \leqslant 2k + 2$.*

Следствие 5.1 [169]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^1_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 4$.*

Доказательство теоремы 5.1 проводится двойственным образом по отношению к доказательству теоремы 3.3. Пусть $n \geqslant 1$. Обозначим через $F_{n,k}$ множество всех б. ф. от n переменных, каждая из которых принимает пару значений $(0,0)$ не более, чем на k различных парах противоположных n-наборов. Рассмотрим произвольную б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащую множеству $F_{n,k}$. Тогда существуют такие различные множества $T_1, \ldots, T_{k+1}$, каждое из которых состоит из двух противоположных n-наборов, что все наборы из множества $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{k+1}$ являются нулевыми наборами функции f. Оба набора из множества T_i, $i = 1, \ldots, k+1$, очевидно, являются и нулевыми наборами функции $(f \vee I_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$. Отсюда, а также из теоремы 4.1 следует, что функцию $(f \vee I_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k-неизбыточной КС S_i, для которой множество T_i является k-ПТ замыкания. Тогда выполнены все условия леммы 5.1, из которой следует соотношение $D(f) \leqslant |T| = 2k + 2$.

Оценим мощность множества $F_{n,k}$. Очевидно, что его можно представить в виде объединения попарно непересекающихся множеств $F_n^0, \ldots, F_n^k$, где множество F_n^i, $i = 0, \ldots, k$, состоит из всех б. ф. от n переменных, каждая из которых принимает пару значений $(0,0)$ ровно на i различных парах противоположных n-наборов. Такие i пар можно выбрать $C_{2^{n-1}}^i$ способами; на наборах из каждой такой пары значения функции определены однозначно, а на каждой из остальных $2^{n-1} - i$ пар n-наборов она может принимать одну из трёх пар значений $(0,1)$, $(1,0)$ или $(1,1)$. Отсюда следует соотношение

$$|F_n^i| = C_{2^{n-1}}^i \cdot 3^{2^{n-1}-i},$$

а вместе с ним и все последующие соотношения на с. 108. Таким образом, отношение числа б. ф. из множества $F_{n,k}$ к общему числу б. ф. от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству $F_{n,k}$, выполнено неравенство $D(f) \leqslant 2k + 2$, откуда следует справедливость теоремы 5.1. $\square$

Ниже нам понадобятся понятия элементарной дизъюнкции (ЭД), ранга ЭД, конъюнктивной нормальной формы (к. н. ф.) и её длины. Все эти понятия можно найти, например, в [99, с. 25–26].

Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ обозначим через $l^*(f)$ минимально возможную длину к. н. ф., содержащей только переменные из множества $X(n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ для этой функции. Из второго равенства в [99, с. 26, (2.4)] следует, что величина $l^*(f)$ определена.

Теорема 5.2. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ и любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства $D^1_{k\text{-Д}}(f) \leqslant l^*(f)$ и $D^1_{\text{ПД}}(f) \leqslant l^*(f)$.*

Доказательство проводится двойственным образом по отношению к доказательству теоремы 3.1. Функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно представить в виде к. н. ф. $\mathrm{D}_1\& \ldots \&\mathrm{D}_m$, где $m = l^*(f)$, а $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_m$ — ЭД, содержащие только переменные из множества $X(n)$. Реализуем каждую ЭД D_i, $i = 1, \ldots, m$, пучком P_i из контактов, число которых равна рангу этой дизъюнкции. Затем все пучки $P_1, \ldots, P_m$ соединим последовательно. Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f, а всевозможные её ф. н. относительно замыкания произвольного числа контактов равны конъюнкциям некоторых не более $m-1$ ЭД из множества $\mathcal{D} = \{\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_m\}$ (конъюнкцию 0 ЭД из этого множества считаем равной константе 1).

Для каждой дизъюнкции D_i, $i = 1, \ldots, m$, существует n-набор $\tilde{\tau}_i$, на котором она обращается в нуль, а все остальные дизъюнкции из множества $\mathcal{D}$ — в единицу; в противном случае дизъюнкцию D_i можно было бы удалить из к. н. ф. $\mathrm{D}_1\& \ldots \&\mathrm{D}_m$ и получить к. н. ф. длины $l^*(f) - 1$ для функции $f(\tilde{x}^n)$, что невозможно. Наборы $\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_m$, очевидно, попарно различны. Пусть $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_2(\tilde{x}^n)$ — произвольные две б. ф., представимые в виде различных конъюнкций некоторых ЭД из множества $\mathcal{D}$. Тогда существует такое $i \in \{1, \ldots, m\}$, что дизъюнкция D_i входит в представление одной из этих функций (без ограничения общности g_1) и не входит в представление другой (g_2). Легко видеть, что $g_1(\tilde{\tau}_i) = 0$ и $g_2(\tilde{\tau}_i) = 1$, следовательно, $g_1 \neq g_2$. Это означает, что любую ф. н. схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$, а любые две различные ф. н. данной схемы — друг от друга на наборах из множества $\{\tilde{\tau}_1, \ldots, \tilde{\tau}_m\}$. Таким образом, для любого $k \in \mathbb{N}$ схема S является k-неизбыточной, а указанное множество составляет для неё k-ДТ и ПДТ длины $m = l^*(f)$, откуда получаем требуемые неравенства. Теорема 5.2 доказана. □

Утверждение 5.1. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо неравенство $l^*(f) \leqslant 2^{n-1}$.*

Доказательство проводится двойственным образом по отношению к доказательству утверждения 3.1. Разобьём все n-наборы на 2^{n-1} пар наборов, различающихся только в последней компоненте. Если оба набора из какой-то пары являются нулевыми (соответственно если ровно один набор из какой-то пары является нулевым) для функции f, то рассмотрим ЭД ранга $n-1$ (соответственно n), содержащую только переменные из множества $X(n)$ и обращающуюся в нуль в точности на этих двух наборах (соответственно на одном этом наборе). К. н. ф., являющаяся конъюнкцией всех рассмотренных ЭД, очевидно, имеет длину не более 2^{n-1} и реализует функцию f, поэтому $l^*(f) \leqslant 2^{n-1}$. Утверждение 5.1 доказано. □

Доказательство следующей теоремы проводится двойственным образом по отношению к доказательству теоремы 3.2.

Теорема 5.3 [170]. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$D^1_{k\text{-Д}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \textit{если } n \in \{0, 1, 2\}, \\ n + 1, & \textit{если } n = 3, \\ n + k(n-2), & \textit{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Следствие 5.2 [170]. *Для любых $k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $D^1_{k\text{-Д}}(n) \leqslant$ $\leqslant n + k(n-2)$.*

Следствие 5.3 [170]. *Справедливо неравенство*

$$D^1_{\text{ЕД}}(n) \leqslant \begin{cases} n, & \textit{если } n \in \{0, 1, 2\}, \\ n + 1, & \textit{если } n = 3, \\ 2n - 2, & \textit{если } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 5.3. Достаточно доказать аналогичное неравенство с заменой аргумента в левой части с n на f для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. В случае $n = 0$, а также в случае $n \geqslant 1$ и $f(\tilde{x}^n) \in \{0, 1\}$ оно следует из утверждения 1.5. Далее будем считать, что функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант. Если $n \in \{1, 2, 3\}$, то требуемое неравенство следует из теоремы 5.2, утверждения 5.1 и равенств $2^{n-1} = n$ при $n \in \{1, 2\}$, $2^{n-1} = n + 1$ при $n = 3$.

Пусть $n \geqslant 4$. Надо доказать, что $D(f) \leqslant n + k(n-2)$. Обозначим через s число нулевых наборов функции $f(\tilde{x}^n)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $s \leqslant n + k(n-2)$. Функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно представить в виде совершенной к. н. ф. (см., например, [99, с. 26]), длина которой равна s. В силу теоремы 5.2 и определения величины $l^*(f)$ имеем $D(f) \leqslant l^*(f) \leqslant s \leqslant n + k(n-2)$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $s \geqslant n+1+k(n-2)$. В случае $k \geqslant 2$ выполнено соотношение $s \geqslant 3n-3 \geqslant 2n+1$ и в силу леммы 4.5 для функции $f_1(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n)$ существует 0-ключевое множество T_1 мощности не более $n - 2$. Если $k \geqslant 3$, то функция $f_2(\tilde{x}^n) = (f \vee I_{T_1})(\tilde{x}^n)$ принимает значение 0 на

$$s - |T_1| \geqslant n + 1 + k(n-2) - (n-2) = n + 1 + (k-1)(n-2) \geqslant 3n - 3 \geqslant 2n + 1$$

наборах и в силу леммы 4.5 для этой функции существует 0-ключевое множество T_2 мощности не более $n - 2$. Если $k \geqslant 4$, то функция $f_3(\tilde{x}^n) = (f \vee I_{T_1 \cup T_2})(\tilde{x}^n)$ принимает значение 0 на

$$s - |T_1 \cup T_2| \geqslant n + 1 + k(n-2) - 2(n-2) = n + 1 + (k-2)(n-2) \geqslant 3n - 3 \geqslant 2n + 1$$

наборах, и т. д. В итоге при $k \geqslant 2$ можно определить такие попарно непересекающиеся множества $T_1, \ldots, T_{k-1}$ двоичных наборов длины n, что для любого $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ множество T_i имеет мощность не более $n-2$ и является 0-ключевым для функции

$$f_i(\tilde{x}^n) = (f \vee I_{T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}})(\tilde{x}^n) \tag{5.1}$$

(в случае $i = 1$ множество $T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1}$ считаем пустым).

Пусть теперь $k \geqslant 1$. Функция $f_k(\tilde{x}^n)$, определяемая формулой (5.1) при $i = k$, принимает значение 0 не менее чем на

$$s - (k-1)(n-2) \geqslant n + 1 + k(n-2) - (k-1)(n-2) = 2n - 1$$

наборах. Тогда по лемме 4.4 для неё существуют такое 0-ключевое множество T_k и такое множество T_{k+1} двоичных наборов длины n, что T_{k+1} является 0-ключевым множеством для функции $f_{k+1}(\tilde{x}^n) = (f_k \vee I_{T_k})(\tilde{x}^n)$ и

$$|T_k| + |T_{k+1}| \leqslant 2n - 2. \tag{5.2}$$

Отметим, что функция f_{k+1} также удовлетворяет представлению (5.1) при $i = k + 1$.

Пусть $T = T_1 \cup \ldots \cup T_{k+1}$. Легко видеть, что множества $T_1, \ldots, T_{k+1}$ попарно не пересекаются и для любого $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ выполнены соотношения $T_1 \cup \ldots \cup T_{i-1} \subseteq T \setminus T_i$, $f_i \leqslant f \vee I_{T \setminus T_i} \leqslant \overline{I}_{T_i}$ (см. (5.1)). Так как T_i — 0-ключевое множество для функции $f_i(\tilde{x}^n)$, то из леммы 4.2 следует, что множество T_i является 0-ключевым и для функции $(f \vee I_{T \setminus T_i})(\tilde{x}^n)$. Тогда по теореме 4.3 последнюю функцию можно реализовать k-неизбыточной КС S_i, для которой множество T_i является k-ПТ замыкания. Получаем, что выполнены все условия леммы 5.1, из которой с использованием (5.2) следует соотношение

$$D(f) \leqslant |T| = |T_1 \cup \ldots \cup T_{k-1}| + |T_k| + |T_{k+1}| \leqslant (k-1)(n-2) + 2n - 2 = n + k(n-2).$$

Теорема 5.3 доказана. □

Пусть S — КС. Множество (некоторых) её контактов называется *сечением*, если оно имеет хотя бы один общий контакт с каждой несамопересекающейся цепью, соединяющей полюсы схемы S. Сечение считается *тупиковым*, если после выбрасывания из него любого одного контакта оно перестает быть сечением [192, с. 133].

Обозначим через $q_0(f)$ число нулевых квазиобособленных наборов б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, а через $p_0(f)$ — число особых пар нулевых наборов этой функции (необходимые определения см. на с. 108).

Теорема 5.4 [165]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ выполняется соотношение*

$$q_0(f) - p_0(f) \leqslant D^1_{\text{ПД}}(f) \leqslant l^*(f).$$

Доказательство. Неравенство $D(f) \leqslant l^*(f)$ следует из теоремы 5.2. Докажем, что $D(f) \geqslant q_0(f) - p_0(f)$. Пусть S — произвольная КС, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$; T — произвольный ПДТ для схемы S. Достаточно доказать, что $D(T) \geqslant q_0(f) - p_0(f)$.

Обозначим через $M^s(f)$ множество нулевых обособленных наборов функции $f(\tilde{x}^n)$. Кроме того, для произвольного набора $\tilde{\pi}$, являющегося парным хотя бы одному нулевому квазиобособленному набору функции $f(\tilde{x}^n)$, введём величину $N(\tilde{\pi})$, равную числу квазиобособленных наборов указанной функции, которым набор $\tilde{\pi}$ является парным.

Рассмотрим произвольный нулевой квазиобособленный набор $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ функции f. Возможны два случая.

1. Набор $\tilde{\sigma}$ является обособленным набором функции f. Рассуждая аналогично 6-му–9-му абзацам из доказательства теоремы 16 работы [192] (см. [192, с. 133–134]), в которых под набором $\tilde{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ понимаем набор $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, получаем, что у схемы S есть ф. н. $x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}$, а также ф. н., тождественно равная единице (возникающая при замыкании всех контактов схемы S). Данные две функции можно отличить друг от друга только на наборе $\tilde{\sigma}$, поэтому он должен входить в тест T. В силу произвольности выбора набора $\tilde{\sigma}$ во множество T должны входить все наборы из множества $M^s(f)$.

2. Существует парный $\tilde{\sigma}$ набор $\tilde{\pi}$. Тогда $n \geqslant 2$, поскольку для $n = 1$ и $f(x_1) \in \{x_1, \overline{x}_1\}$ случай 2, очевидно, не выполнен. В силу определений $f(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\sigma}) = 0$ и наборы $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\pi}$ различаются ровно в одной компоненте; для простоты будем считать, что это первая компонента (в остальных случаях рассуждения аналогичны), т. е. $\tilde{\pi} = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Из равенства $f(\tilde{\sigma}) = 0$ следует, что множество всех контактов $x_1^{\overline{\sigma}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\sigma}_n}$ схемы S является сечением этой схемы. Отбрасыванием «лишних» контактов из него можно получить тупиковое сечение A^*, в котором каждый контакт имеет один из видов $x_1^{\overline{\sigma}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\sigma}_n}$. Если в A^* не содержится ни одного контакта $x_i^{\overline{\sigma}_i}$ для некоторого $i \in \{2, \ldots, n\}$, то схема S не проводит на наборе $\tilde{\pi}_i$, отличающегося от набора $\tilde{\sigma}$ только в i-й компоненте, откуда следует, что $f(\tilde{\pi}_i) = 0$. Но это противоречит тому, что $\tilde{\sigma}$ — квазиобособленный набор функции f и $f(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\sigma}) = 0$. Таким образом, в сечении A^* содержится хотя бы по одному контакту $x_2^{\overline{\sigma}_2}, \ldots, x_n^{\overline{\sigma}_n}$, а также, возможно, один или несколько контактов $x_1^{\overline{\sigma}_1}$.

Представим, что все контакты, содержащиеся в этом сечении, исправны, а все остальные контакты схемы S замкнуты. Данная схема при этом станет реализовывать некоторую ф. н. $g_1(\tilde{x}^n)$. Заметим, что $g_1(\tilde{\sigma}) = 0$, так как на наборе $\tilde{\sigma}$ ни один контакт сечения A^* не проводит. Пусть $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ — произвольный n-набор, отличный от наборов $\tilde{\sigma}$ и $\tilde{\pi}$. Тогда существует такое $i \in \{2, \ldots, n\}$, что $\tau_i = \overline{\sigma}_i$. В силу тупиковости сечения A^* для любого его контакта $x_i^{\overline{\sigma}_i}$ в схеме S найдётся несамопересекающаяся цепь Z между полюсами, в которой этот контакт является единственным контактом, принадлежащим A^*, а все остальные контакты цепи Z замкнуты. Данная цепь проводит на наборе $\tilde{\tau}$, поэтому $g_1(\tilde{\tau}) = 1$. В итоге значения функции $g_1(\tilde{x}^n)$ на всех наборах, кроме набора $\tilde{\pi}$, определены однозначно и

$$g_1(\tilde{x}^n) = \begin{cases} x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}, & \text{если } g(\tilde{\pi}) = 1, \\ x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}, & \text{если } g(\tilde{\pi}) = 0. \end{cases}$$

В то же время при замыкании всех контактов схемы S между её полюсами возникнет ф. н. $g_0(\tilde{x}^n) \equiv 1$. Функции $g_1(\tilde{x}^n)$ и $g_0(\tilde{x}^n)$ можно отличить друг от друга только на наборе $\tilde{\sigma}$ и, возможно, на наборе $\tilde{\pi}$.

Пусть $\tilde{\rho}_1, \ldots, \tilde{\rho}_t$ — все квазиобособленные наборы функции $f(\tilde{x}^n)$, которым $\tilde{\pi}$ является парным, где $\tilde{\rho}_1 = \tilde{\sigma}$ и $t \geqslant 1$. Тогда $N(\tilde{\pi}) = t$ и

$$f(\tilde{\rho}_1) = \ldots = f(\tilde{\rho}_t) = f(\tilde{\pi}) = 0.$$

Проводя для каждого набора $\tilde{\rho}_j$, $j = 2, \ldots, t$ (при $t \geqslant 2$), те же рассуждения, которые были проведены для набора $\tilde{\sigma}$ в разборе случая 2, получаем, что у схемы S есть ф. н. $g_j(\tilde{x}^n)$, отличающаяся от функции $g_0(\tilde{x}^n)$ только на наборе $\tilde{\rho}_j$ и, возможно, на наборе $\tilde{\pi}$. Далее, рассуждая двойственным образом по отношению к рассуждениям из теоремы 3.4, начиная со слов «В таблице 3.1 приведены значения функций ...» (по сути, заменяя в указанном фрагменте доказательства теоремы 3.4 все булевы значения 0 на 1 и наоборот, величины $p_1(f)$ и $q_1(f)$ на $p_0(f)$ и $q_0(f)$ соответственно, а слово «единичный» на слово «нулевой» в различных формах), устанавливаем справедливость теоремы 5.4. □

Следствие 5.4 [165]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^1_{\text{ПД}}(n) = 2^{n-1}$.*

Доказательство. Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ в силу теоремы 5.2 и утверждения 5.1 выполняется соотношение $D(f) \leqslant l^*(f) \leqslant 2^{n-1}$. Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то $D(f) = 0$ по утверждению 1.5. В итоге получаем, что $D(n) \leqslant 2^{n-1}$.

С другой стороны, у функции $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ любой из её 2^{n-1} нулевых наборов, очевидно, является обособленным, следовательно, $q_0(f) = 2^{n-1}$ и $p_0(f) = 0$. Тогда из теоремы 5.4 вытекает, что $D(f) \geqslant 2^{n-1}$, поэтому $D(n) \geqslant 2^{n-1}$ (последнее неравенство также фактически установлено Х. А. Мадатяном в [108, теорема 1]). Окончательно имеем $D(n) = 2^{n-1}$. Следствие 5.4 доказано. □

В формулировке следующей теоремы присутствует функция $\nu(n)$, определение которой см. на с. 112.

Теорема 5.5 [165]. *Число б. ф. f от n переменных, $n \geqslant 2$, для которых $D^1_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, не меньше $2\nu(n-1)$.*

Доказательство проводится двойственным образом по отношению к доказательству теоремы 3.5 (по сути, достаточно заменить в нём все булевы значения 0 на 1 и наоборот, величины $q_1(f_{B,\alpha})$ и $p_1(f_{B,\alpha})$ на $q_0(f_{B,\alpha})$ и $p_0(f_{B,\alpha})$ соответственно, верхний индекс у всех величин $D_{\text{ПД}}$ с 0 на 1, а слово «единичный» на слово «нулевой» в различных формах). $\square$

Так же, как и в §3, положим $w(n) = \frac{n^2+n+2}{2}$. Из теоремы 5.5 и утверждения 3.2 вытекает

Следствие 5.5 [165]. *Число б. ф. f от n переменных, для которых $D^1_{\text{ПД}}(f) = 2^{n-1}$, при $n \geqslant 2$ не меньше*

$$2 + 2 \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{2^{n-1}}{w(n-1)} \right\rceil} \left(\frac{2^{n-1}(2^{n-1} - w(n-1)) \cdot \ldots \cdot (2^{n-1} - (i-1)w(n-1))}{i!} \right)$$

и асимптотически не меньше $\frac{4}{n^2} \cdot 2^{\frac{2^n(\log(n^2-n+2)-1)}{n^2-n+2}}$.

§6. Проверяющие тесты при обрывах и замыканиях контактов

В данном параграфе рассматриваются единичные проверяющие тесты для КС относительно обрывов и замыканий контактов. Описаны все б. ф. f, для которых величина $D^{01}_{\text{ЕП}}(f)$ равна 0, 1, 2 и 3 (теорема 6.1), а также достаточно обширный класс б. ф. f, для которых она равна 4 (теорема 6.2); показано, что в этом классе содержатся почти все б. ф. от n переменных (теорема 6.3). Отметим, что $D^{01}_{\text{ЕП}}(n) \geqslant n+2$ при $n \geqslant 2$ [225, теорема 2].

Лемма 6.1 [161]. *Для любой неизбыточной КС S, содержащей не менее трёх контактов, справедливо неравенство $D^{01}_{\text{ЕП}}(S) \geqslant 4$.*

Доказательство. Рассмотрим четыре случая.

1. Полюсы схемы S совпадают. Тогда она, очевидно, реализует константу 1 как при отсутствии в ней неисправностей, так и при любой неисправности любого её контакта, поэтому избыточна; противоречие.

2. Все контакты схемы S принадлежат некоторой несамопересекающейся цепи C, соединяющей её полюсы. Если в этой цепи присутствуют одновременно замыкающий и размыкающий контакт одной и той же переменной, то схема S, очевидно, реализует константу 0

как при отсутствии в ней неисправностей, так и при обрыве любого из контактов цепи C, поэтому избыточна. Если в цепи C присутствуют два замыкающих или два размыкающих контакта одной и той же переменной, то при замыкании любого одного из них, как нетрудно видеть, функция, реализуемая схемой S, не изменится, поэтому схема избыточна. Далее можно считать, что все контакты схемы S отвечают разным переменным. Пусть это контакты $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, где $n \geqslant 3$. Тогда рассматриваемая схема при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f = x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}$, при обрыве любого контакта — функцию $g_0 \equiv 0$, а при замыкании контакта $x_i^{\sigma_i}$ — функцию $g_i = x_1^{\sigma_1} \ldots x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \ldots x_n^{\sigma_n}$ для $i = 1, \ldots, n$. Функция $f(\tilde{x}^n)$ отличается от функции $g_0(\tilde{x}^n)$ только на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, а от функции $g_i(\tilde{x}^n)$ — только на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$, где $i = 1, \ldots, n$, поэтому в любой ЕПТ для схемы S должны входить все указанные $n + 1 \geqslant 4$ наборов, откуда следует неравенство $D(S) \geqslant 4$.

3. Полюсы схемы S не совпадают и каждый контакт в ней соединяет её полюсы. Если среди этих контактов присутствуют одновременно замыкающий и размыкающий контакт одной и той же переменной, то схема S, очевидно, реализует константу 1 как при отсутствии в ней неисправностей, так и при замыкании любого из её контактов, поэтому избыточна. Если в ней присутствуют два замыкающих или два размыкающих контакта одной и той же переменной, то при обрыве любого одного из них, как нетрудно видеть, функция, реализуемая схемой S, не изменится, поэтому схема избыточна. Далее можно считать, что все контакты схемы S отвечают разным переменным. Пусть это контакты $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$, где $n \geqslant 3$. Тогда рассматриваемая схема при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$, при замыкании любого контакта — функцию $g_0 \equiv 1$, а при обрыве контакта $x_i^{\sigma_i}$ — функцию $g_i = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \vee x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ для $i = 1, \ldots, n$. Функция $f(\tilde{x}^n)$ отличается от функции $g_0(\tilde{x}^n)$ только на наборе $(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$, а от функции $g_i(\tilde{x}^n)$ — только на наборе $(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n)$, где $i = 1, \ldots, n$, поэтому в любой ЕПТ для схемы S должны входить все указанные $n + 1 \geqslant 4$ наборов, откуда следует неравенство $D(S) \geqslant 4$.

4. Отрицание объединения случаев 1–3: полюсы схемы S не совпадают, не все её контакты принадлежат одной и той же несамопересекающейся цепи и в схеме S есть контакт K, хотя бы один конец которого отличен от полюсов схемы. Пусть схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, и пусть T — произвольный ЕПТ для данной схемы. При замыкании любого её контакта функция, реализуемая схемой S, не может уменьшиться, поэтому данная неисправность может обнаруживаться только на нулевых наборах функции f, откуда следует, что в тесте T содержится хотя бы один нулевой набор $\tilde{\sigma}_0$ этой функции. Предположим, что это единственный нулевой набор функции f, содержащийся в T. Тогда ни один контакт схемы S не может проводить на наборе $\tilde{\sigma}_0$, поскольку в

противном случае замыкание проводящего на этом наборе контакта нельзя было бы обнаружить на наборах из T. Замыкание контакта K должно обнаруживаться на наборе $\tilde{\sigma}_0$, т. е. в полученной схеме должна быть цепь между полюсами, проводящая на указанном наборе. Но единственным проводящим в этой схеме на наборе $\tilde{\sigma}_0$ контактом является K, следовательно, он соединяет полюсы схемы; противоречие. Тем самым доказано, что в T содержатся хотя бы два нулевых набора функции f.

Далее, при обрыве любого контакта схемы S функция, реализуемая этой схемой, не может увеличиться, поэтому данная неисправность может обнаруживаться только на единичных наборах функции f, откуда следует, что в тесте T содержится хотя бы один единичный набор $\tilde{\sigma}_1$ этой функции. Пусть C — произвольная проводящая на этом наборе несамопересекающаяся цепь между полюсами схемы S. По предположению случая 4 в данной схеме присутствует хотя бы один контакт, не принадлежащий цепи C. Тогда при обрыве этого контакта в схеме S цепь C по прежнему будет проводить на наборе $\tilde{\sigma}_1$ и схема на данном наборе выдаст значение $1 = f(\tilde{\sigma}_1)$. Это означает, что в тесте T должен содержаться ещё какой-то единичный набор функции f, отличный от $\tilde{\sigma}_1$, на котором обнаруживается обрыв указанного контакта. В итоге получаем, что в любой ЕПТ для схемы S должны входить хотя бы четыре набора, откуда следует неравенство $D(S) \geqslant 4$. Лемма 6.1 доказана. □

Теорема 6.1 [161]. *Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — б. ф.. Справедливо равенство*

$$D^{01}_{\text{ЕП}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \equiv 0 \text{ или } f \equiv 1, \\ 2, & \text{если } f \text{ родственна функции } x_1, \\ 3, & \text{если } f \text{ родственна одной из функций } x_1x_2,\ x_1 \vee x_2. \end{cases}$$

В остальных случаях $D^{01}_{\text{ЕП}}(f) \geqslant 4$.

Доказательство. В случаях $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ равенство $D(f) = 0$ следует из утверждения 1.5. В случае $f = x_1$ функцию f можно реализовать КС, содержащей ровно один контакт. При обрыве (замыкании) этого контакта схема станет реализовывать константу 0 (соответственно константу 1), которую можно отличить от функции f на любом наборе, первая компонента которого равна 1 (соответственно 0), поэтому $D(f) \leqslant 2$. С другой стороны, в любой неизбыточной КС S, реализующей функцию f, должен содержаться хотя бы один контакт; при обрыве (замыкании) этого контакта реализуемая схемой функция не может увеличиться (соответственно уменьшиться), поэтому для обнаружения указанной неисправности в любом ЕПТ T для схемы S должен содержаться хотя бы один единичный (соответственно нулевой) набор функции f. Отсюда следует неравенства $D(T) \geqslant 2$, $D(S) \geqslant 2$ и $D(f) \geqslant 2$, а вместе с последним из них равенство $D(f) = 2$, т. е. $D(x_1) = 2$.

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ родственна функции x_1, то $D(f) = 2$ в силу следствия 1.4.

Пусть $f = x_1 x_2$. Докажем равенство $D(f) = 3$. Реализуем функцию f схемой $S_{\&}$, представляющей собой цепь из двух контактов: x_1 и x_2. Легко видеть, что всевозможными ф. н. такой схемы относительно обрыва или замыкания любого одного контакта являются функции $g_0 \equiv 0$, $g_1 = x_1$ и $g_2 = x_2$. Функция g_0 (функция g_1, функция g_2) отличается от функции f в точности на всех таких наборах, первые две компоненты каждого из которых равны 1 и 1 соответственно (1 и 0 соответственно, 0 и 1 соответственно). Указанные три множества наборов попарно не пересекаются, а в любой ЕПТ для схемы $S_{\&}$ должно входить хотя бы по одному набору из каждого из них, поэтому $D(S_{\&}) \geqslant 3$. С другой стороны, выбрав по произвольному набору из каждого из этих множеств, получим ЕПТ длины 3 для схемы $S_{\&}$, откуда следует, что $D(S_{\&}) = 3$. Далее заметим, что единственной КС, содержащей не более двух контактов и реализующей функцию f (с точностью до перестановки полюсов), является схема $S_{\&}$, поэтому любая другая неизбыточная схема S', реализующая эту функцию, содержит не менее трёх контактов и $D(S') \geqslant 4$ по лемме 6.1. В итоге получаем, что $D(f) = D(S_{\&}) = 3$, т. е. $D(x_1 x_2) = 3$.

Пусть $f = x_1 \vee x_2$. Реализуем функцию f схемой $S_{\vee}$, представляющей собой пучок из двух контактов: x_1 и x_2. Дальнейшие рассуждения проводятся двойственным образом по отношению к рассуждениям из случая $f = x_1 x_2$. В итоге получаем, что $D(x_1 \vee x_2) = 3$.

Если функция $f(\tilde{x}^n)$ родственна одной из функций $x_1 x_2$, $x_1 \vee x_2$, то $D(f) = 3$ в силу следствия 1.4.

Нетрудно заметить, что КС, содержащие не более двух контактов, могут реализовывать только б. ф. f, рассмотренные выше. Любая другая б. ф. f может быть реализована только КС, содержащими не менее трёх контактов, откуда с учётом леммы 6.1 следует неравенство $D(f) \geqslant 4$. Теорема 6.1 доказана. $\square$

Пусть $n \geqslant 2$. Назовём $L_{(n)}$-*блоком* четырёхполюсную КС с полюсами A_1, A_2, A_3 и A_4, содержащую четыре контакта: контакт x_{t_1} между полюсами A_1 и A_3, контакт x_{t_2} между полюсами A_2 и A_4, контакт $\overline{x}_{t_3}$ между полюсами A_2 и A_3 и контакт $\overline{x}_{t_4}$ между полюсами A_1 и A_4, где либо $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \{1, \ldots, n-1\}$, либо $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = n$ (см. рисунок 6.1). Для удобства будем обозначать такой $L_{(n)}$-блок через $B^{t_1, t_2}_{t_3, t_4}$.

Назовём $L_{(n)}$-*схемой* четырёхполюсную КС S с полюсами a_0, b_0, a_m и b_m, составленную из произвольных $L_{(n)}$-блоков $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$ следующим образом: по-

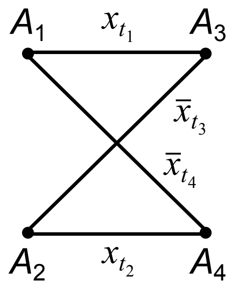

Рис. 6.1. $L_{(n)}$-блок

люсы a_0 и b_0 схемы S совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 блока B_1; для любого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ полюсы A_3 и A_4 блока B_i совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 блока B_{i+1} и для удобства объявляются вершинами соответственно a_i и b_i схемы; полюсы a_m и b_m схемы S совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_m (см. рисунок 6.2). Наличие буквы L в названии «$L_{(n)}$-схема» обусловлено тем, что похожее строение имеет известная схема, реализующая линейную б. ф. $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и содержащая $4n-4$ контактов (см., например, [105, с. 44, рисунок 21]).

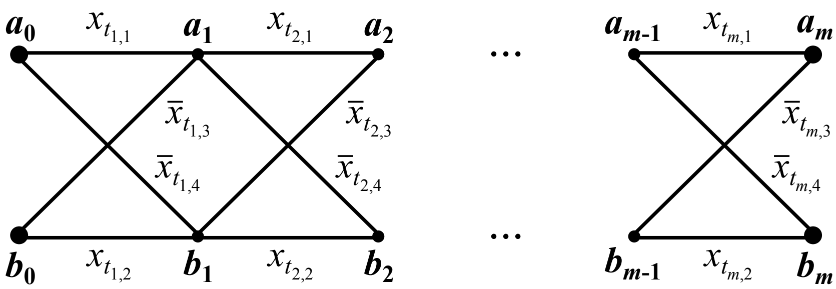

Рис. 6.2. $L_{(n)}$-схема

Пусть S — произвольная $L_{(n)}$-схема, составленная из чётного числа m $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно. Назовём $L'_{(n)}$-*схемой* КС с полюсами b_0 и a_m, получающуюся из схемы S добавлением вершины c_1 и соединением её с полюсами b_m и a_0 схемы S контактами x_1 и x_n соответственно, а также добавлением вершины c_2 и соединением её с полюсами b_m и a_0 схемы S контактами $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_n$ соответственно (см. рисунок 6.3).

Лемма 6.2 [161]. *Любая $L'_{(n)}$-схема неизбыточна и допускает ЕПТ $T = \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0), (\tilde{1}^n)\}$; при этом в случае отсутствия в ней неисправностей она проводит на наборах $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$ и не проводит на наборах $(\tilde{0}^{n-1}, 1)$ и $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$.*

Доказательство. Пусть S' — произвольная $L'_{(n)}$-схема, и пусть она при отсутствии неисправностей реализует б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ и получена из некоторой $L_{(n)}$-схемы S способом, указан-

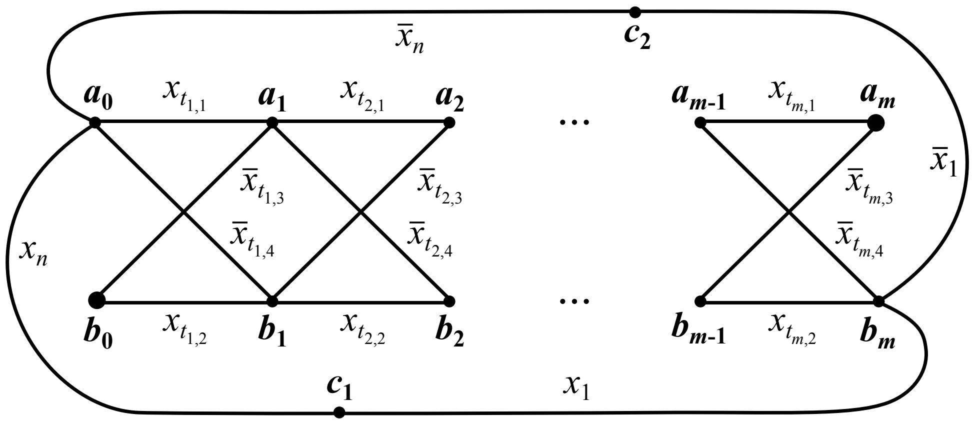

Рис. 6.3. $L'_{(n)}$-схема

ным в определении $L'_{(n)}$-схемы; в свою очередь, схема S состоит из $L_{(n)}$-блоков $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$ для некоторого чётного m, среди которых число μ блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно; в случае $\mu \geqslant 2$ обозначим номера этих μ блоков в порядке возрастания через $i_1, \ldots, i_\mu$. Докажем, что схема S' неизбыточна и допускает ЕПТ T. Для этого достаточно доказать, что любая неисправность (обрыв или замыкание) любого одного контакта данной схемы обнаруживается на каком-то наборе из множества T. Рассмотрим произвольную такую неисправность. Нетрудно видеть, что все замыкающие (размыкающие) контакты схемы S' принадлежат несамопересекающейся цепи $b_0 - b_1 - \ldots - b_m - c_1 - a_0 - a_1 - \ldots - a_m$ (соответственно $b_0 - a_1 - b_2 - \ldots - a_{m-1} - b_m - c_2 - a_0 - b_1 - a_2 - \ldots - b_{m-1} - a_m$; здесь используется, что m чётно), соединяющей полюсы схемы. Поэтому при отсутствии неисправностей схема S' проводит на наборе $(\tilde{1}^n)$ (соответственно $(\tilde{0}^n)$), а при обрыве произвольного её замыкающего (соответственно размыкающего) контакта — не проводит на этом наборе. Таким образом, обрыв любого контакта данной схемы обнаруживается на одном из наборов $(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n) \in T$.

Далее, на наборе $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$ в схеме S' в случае отсутствия в ней неисправностей проводят все контакты $x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_n$ и только они. Ни один блок из множества $\{\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m\} \setminus \setminus \{\mathsf{B}_{i_1}, \ldots, \mathsf{B}_{i_\mu}\}$ в силу определения $L_{(n)}$-блока не содержит контактов переменной x_n (в случае $\mu = 0$ множество $\{\mathsf{B}_{i_1}, \ldots, \mathsf{B}_{i_\mu}\}$ считаем пустым). Поэтому нетрудно видеть, что множество проводящих на наборе $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$ контактов схемы S' представляет собой объединение двух непересекающихся и несамопересекающихся цепей: $b_0 - b_1 - \ldots - b_{i_1-1} - a_{i_1} - a_{i_1+1} - \ldots - - a_{i_2-1} - b_{i_2} - b_{i_2+1} - \ldots - a_{i_\mu-1} - b_{i_\mu} - b_{i_\mu+1} - \ldots - b_m - c_1$ и $c_2 - a_0 - a_1 - \ldots - a_{i_1-1} - b_{i_1} - b_{i_1+1} - - \ldots - b_{i_2-1} - a_{i_2} - a_{i_2+1} - \ldots - b_{i_\mu-1} - a_{i_\mu} - a_{i_\mu+1} - \ldots - a_m$ (здесь используется, что μ чётно; в случае $\mu = 0$ эти цепи вырождаются в $b_0 - b_1 - \ldots - b_m - c_1$ и $c_2 - a_0 - a_1 - \ldots - a_m$ соответственно. Везде в случае $i < j$ участок цепи $a_i - \ldots - a_j$ или $b_i - \ldots - b_j$ считаем пустым), причём полюсы b_0 и a_m принадлежат разным цепям, а любой из контактов $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$ этой схемы соединяет какую-то вершину одной из указанных цепей с какой-то вершиной другой. (Пример строения схемы S' при $m = 6$, $\mu = 2$, $i_1 = 3$, $i_2 = 5$ приведён на рисунке 6.4; сплошными линиями выделены все контакты $x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_n$, а пунктирными — все контакты $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$.) Отсюда следует, что при отсутствии неисправностей схема S' не проводит на наборе $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$, а при замыкании любого из её контактов $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$ — проводит на этом наборе. Таким образом, замыкание любого такого контакта данной схемы обнаруживается на наборе $(\tilde{1}^{n-1}, 0) \in T$.

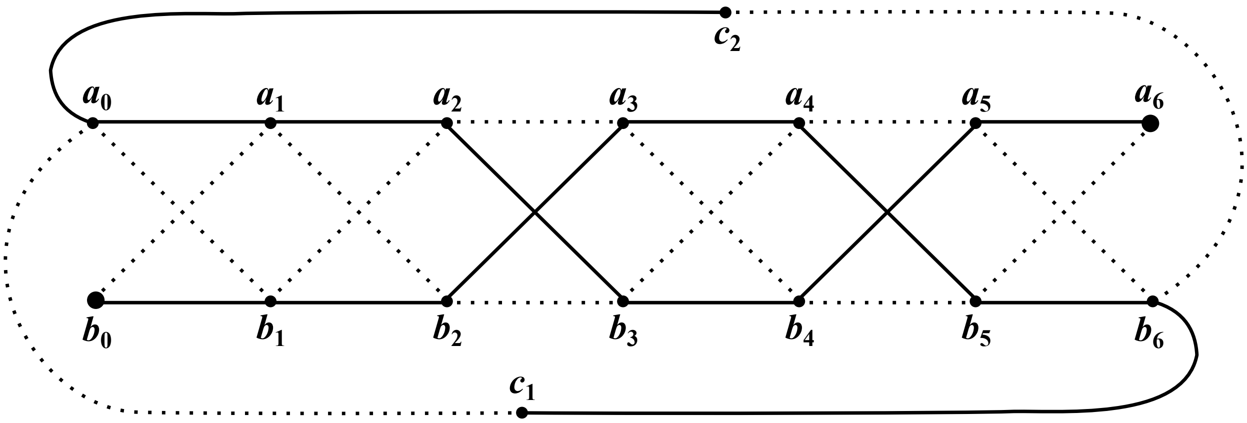

Рис. 6.4. Строение схемы S'

Осталось рассмотреть замыкание любого из контактов $x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_n$ схемы S'. Переобозначим вершины этой схемы — а именно поменяем местами вершины a_i и b_i для каждого нечётного i от 1 до $m-1$, а также вершины c_1 и c_2. Тогда схема S' примет вид, представленный на рисунке 6.5. Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с рассуждениями из предыдущего абзаца при замене набора $(\tilde{1}^{n-1}, 0)$ на набор $(\tilde{0}^{n-1}, 1)$, а контактов $x_1, \ldots, x_{n-1}, \overline{x}_n$ — на контакты $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, x_n$ и наоборот. Получаем, что рассматриваемая неисправность обнаруживается на наборе $(\tilde{0}^{n-1}, 1) \in T$, а при отсутствии неисправностей схема S' не проводит на этом наборе. Лемма 6.2 доказана. $\square$

Дальнейшие рассуждения направлены на поиск б. ф., которые могут быть реализованы $L'_{(n)}$-схемами. С учётом леммы 6.2 для любой такой функции f выполнено соотношение $D^{01}_{\text{ЕП}}(f) \leqslant 4$. Всюду в нижеследующих леммах 6.3–6.6 считаем, что все контакты, содержащиеся в схемах, исправны.

Контакт, соединяющий произвольные две вершины v и v' КС, будем обозначать через $[v, v']$.

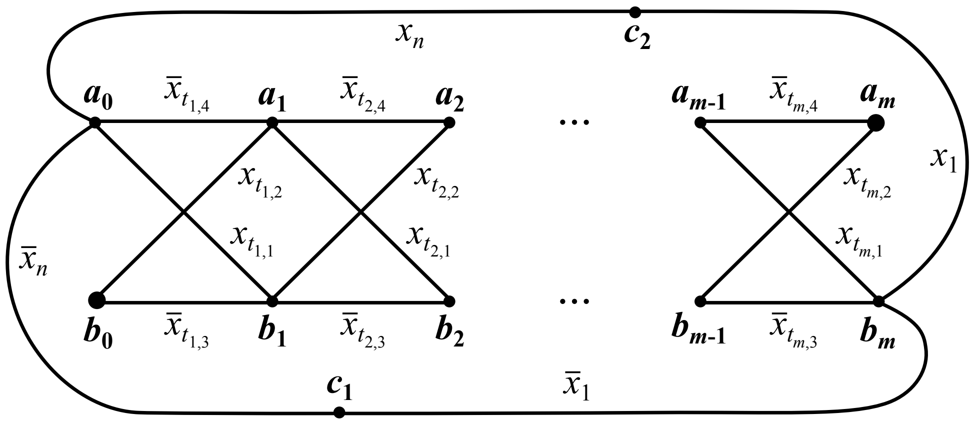

Рис. 6.5. Схема S' после переобозначения вершин

Лемма 6.3 [161]. *Для любого двоичного набора $\tilde{\alpha}$ длины $n-1$, $n \geqslant 3$, отличного от наборов $(\tilde{0}^{n-1})$ и $(\tilde{1}^{n-1})$, существует $L_{(n)}$-схема $S_{\tilde{\alpha}}$, составленная из $m = 2n-5$ $L_{(n)}$-блоков, содержащая только контакты переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ и обладающая следующими свойствами*:

(i) *на наборе $\tilde{\alpha}$ проводимость между полюсами схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ из любой из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m) отсутствует*;

(ii) *на наборе $\tilde{\alpha}$ есть проводимость между полюсами b_0 и b_m схемы $S_{\tilde{\alpha}}$*;

(iii) *на любом двоичном наборе $\tilde{\tau}$ длины $n-1$, отличном от наборов $\tilde{\alpha}$, $(\tilde{0}^{n-1})$ и $(\tilde{1}^{n-1})$, в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть проводимости либо между полюсами из каждой из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), либо между полюсами из каждой из пар (b_0, a_m), (b_0, b_m).*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ и при этом $\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_q} = 1$, $\alpha_{i_{q+1}} = \ldots = \alpha_{i_{n-1}} = 0$, где $q \in \{1, \ldots, n-2\}$, а $i_1, \ldots, i_{n-1}$ — попарно различные индексы от 1 до $n-1$ (для определённости можно считать, что $i_1 < \ldots < i_q$ и $i_{q+1} < \ldots < i_{n-1}$). По определению $L_{(n)}$-схема однозначно задаётся числом $m \in \mathbb{N}$ и $L_{(n)}$-блоками $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$. Положим $m = 2n-5$, $\mathsf{B}_1 = B_{i_1, i_1}^{i_{n-1}, i_1}$; $\mathsf{B}_{2j} = B_{i_j, i_{j+1}}^{i_{j+1}, i_j}$, $\mathsf{B}_{2j+1} = B_{i_{j+1}, i_j}^{i_{j+1}, i_j}$ для каждого $j = 1, \ldots, q-1$ (при $q \geqslant 2$); $\mathsf{B}_{2j} = B_{i_{j+1}, i_{j+2}}^{i_{j+2}, i_{j+1}}$, $\mathsf{B}_{2j+1} = B_{i_{j+2}, i_{j+1}}^{i_{j+2}, i_{j+1}}$ для каждого $j = q, \ldots, n-3$ (при $q \leqslant n-3$). Полученную $L_{(n)}$-схему обозначим через $S_{\tilde{\alpha}}$ (её вид при $n = 5$, $\tilde{\alpha} = (1, 1, 0, 0)$ показан на рисунке 6.6). Проверим выполнение для этой схемы свойств (i)–(iii).

Предположим, что свойство (i) не выполнено, т. е. в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть несамопересекающаяся цепь между её полюсами из какой-то из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m), проводящая на наборе $\tilde{\alpha}$. Из всех таких цепей выберем цепь C наименьшей длины. Она не может соединять полюсы a_0 и a_m, а также полюсы a_0 и b_m, так как на наборе $\tilde{\alpha}$ ни один из контактов $[a_0, a_1]$, $[a_0, b_1]$ не проводит (в силу определения блока B_1 это контакты $x_{i_{n-1}}$, $\bar{x}_{i_1}$ соответственно).

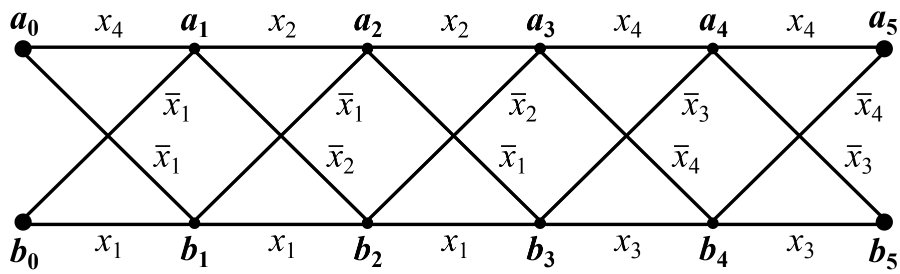

Рис. 6.6. Схема $S_{\tilde{\alpha}}$

Поэтому цепь C соединяет полюсы b_0 и a_m схемы $S_{\tilde{\alpha}}$. Вершины этой цепи при движении от полюса b_0 к полюсу a_m обозначим через $v_0, \dots, v_s$, где $v_0 = b_0$ и $v_s = a_m$. Тогда $v_1 = b_1$, поскольку на наборе $\tilde{\alpha}$ контакт $[b_0, a_1]$ не проводит (это контакт $\overline{x}_{i_1}$). Также

$$v_1, \dots, v_s \notin \{a_0, b_0\} \tag{6.1}$$

в силу выбора цепи C.

Для удобства будем считать, что вершины a_d и b_d не принадлежат схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ для любого $d \geqslant m+1$. Докажем, что $v_d \in \{a_d, b_d\}$ для любого $d \in \{0, \dots, s\}$ (в частности, $s \leqslant m$). Предположим противное. Пусть d — наименьший индекс от 0 до s, для которого $v_d \notin \{a_d, b_d\}$. Тогда $d \geqslant 2$, $v_{d-2} \in \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$ и $v_{d-1} \in \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$. Из последнего соотношения вытекает неравенство $d-1 \leqslant m$. Каждая из вершин a_{d-1}, b_{d-1} в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ соединена контактами с вершинами a_{d-2} и b_{d-2}, а также — в случае $d-1 < m$ — с вершинами a_d и b_d. Поэтому из соотношений $v_{d-1} \in \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$ и $v_d \notin \{a_d, b_d\}$ следует, что $v_d \in \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$; в частности, $d \geqslant 3$ в силу (6.1). Таким образом,

$$2 \leqslant d-1 \leqslant m = 2n-5. \tag{6.2}$$

Далее, из соотношений $v_{d-2} \in \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$, $v_d \in \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$ и того, что цепь C несамопересекающаяся, следует равенство $\{v_{d-2}, v_d\} = \{a_{d-2}, b_{d-2}\}$. Если $v_{d+1} \in \{a_{d-3}, b_{d-3}\}$, то на участке $v_{d+1} - \ldots - v_s$ цепи C обязательно должна содержаться одна из вершин a_{d-2}, b_{d-2}, а значит, одна из вершин v_{d-2}, v_d, однако обе эти вершины уже содержатся на участке $v_0 - \ldots - v_d$ данной цепи; противоречие. Поэтому $v_{d+1} \in \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$. С учётом ранее установленного соотношения $v_{d-1} \in \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$ получаем, что $\{v_{d-1}, v_{d+1}\} = \{a_{d-1}, b_{d-1}\}$. Значит, на участке $v_{d-2} - v_{d-1} - v_d - v_{d+1}$ цепи C чередуются вершины из множеств $\{a_{d-2}, b_{d-2}\}$ и $\{a_{d-1}, b_{d-1}\}$, причём на нём содержатся все вершины a_{d-2}, b_{d-2}, a_{d-1}, b_{d-1}, являющиеся полюсами $L_{(n)}$-блока B_{d-1}. Из (6.2) следует неравенство $n \geqslant 4$ и существование такого $j \in \{1, \dots, n-3\}$, что блок B_{d-1} имеет один из видов $B^{i_{j+1}, i_j}_{i_j, i_{j+1}}$, $B^{i_{j+1}, i_j}_{i_{j+1}, i_j}$, $B^{i_{j+2}, i_{j+1}}_{i_{j+1}, i_{j+2}}$ или $B^{i_{j+2}, i_{j+1}}_{i_{j+2}, i_{j+1}}$.

Заметим, что в блоке каждого из этих видов имеется по одному контакту $x_{i'}$, $x_{i''}$, $\overline{x}_{i'}$ и $\overline{x}_{i''}$ для некоторых $i', i'' \in \{i_j, i_{j+1}, i_{j+2}\}$, $i' \neq i''$. На участке $v_{d-2} - v_{d-1} - v_d - v_{d+1}$ цепи C содержатся три из этих четырёх контактов, поэтому какие-то два из указанных трёх контактов обязательно являются противоположными. Наличие противоположных контактов в данной цепи означает, что она не может проводить на наборе $\tilde{\alpha}$; противоречие. Тем самым доказано, что $v_d \in \{a_d, b_d\}$ для любого $d \in \{0, \ldots, s\}$; в частности, $s \leqslant m$. Отсюда и из соотношения $v_s = a_m$ следует, что

$$s = m = 2n - 5,$$

т.е. $v_{2n-5} = a_{2n-5}$. Выше было показано, что $v_1 = b_1$ и $n \geqslant 4$. Поэтому существует такой индекс $j \in \{1, \ldots, n-3\}$, что $v_{2j-1} = b_{2j-1}$ и $v_{2j+1} = a_{2j+1}$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $j \leqslant q - 1$ и $v_{2j} = a_{2j}$. Тогда участок $v_{2j-1} - v_{2j} - v_{2j+1}$ цепи C имеет вид $b_{2j-1} - a_{2j} - a_{2j+1}$ и содержит контакты $\overline{x}_{i_j}$ и $x_{i_{j+1}}$ из блоков B_{2j} и B_{2j+1} соответственно (см. определения этих блоков в начале доказательства леммы). Но $\alpha_{i_j} = 1$, поскольку $j \leqslant q$, следовательно, контакт $\overline{x}_{i_j}$, а вместе с ним и цепь C не могут проводить на наборе $\tilde{\alpha}$. Противоречие.

2. Пусть $j \leqslant q - 1$ и $v_{2j} = b_{2j}$. Тогда участок $v_{2j-1} - v_{2j} - v_{2j+1}$ цепи C имеет вид $b_{2j-1} - b_{2j} - a_{2j+1}$ и содержит контакты x_{i_j} и $\overline{x}_{i_{j+1}}$ из блоков B_{2j} и B_{2j+1} соответственно. Но $\alpha_{i_{j+1}} = 1$, поскольку $j + 1 \leqslant q$, следовательно, контакт $\overline{x}_{i_{j+1}}$, а вместе с ним и цепь C не могут проводить на наборе $\tilde{\alpha}$. Противоречие.

3. Пусть $j \geqslant q$ и $v_{2j} = a_{2j}$. Тогда участок $v_{2j-1} - v_{2j} - v_{2j+1}$ цепи C имеет вид $b_{2j-1} - a_{2j} - a_{2j+1}$ и содержит контакты $\overline{x}_{i_{j+1}}$ и $x_{i_{j+2}}$ из блоков B_{2j} и B_{2j+1} соответственно (см. определения этих блоков в начале доказательства леммы). Но $\alpha_{i_{j+2}} = 0$, поскольку $j + 2 \geqslant q + 1$, следовательно, контакт $x_{i_{j+2}}$, а вместе с ним и цепь C не могут проводить на наборе $\tilde{\alpha}$. Противоречие.

4. Пусть $j \geqslant q$ и $v_{2j} = b_{2j}$. Тогда участок $v_{2j-1} - v_{2j} - v_{2j+1}$ цепи C имеет вид $b_{2j-1} - b_{2j} - a_{2j+1}$ и содержит контакты $x_{i_{j+1}}$ и $\overline{x}_{i_{j+2}}$ из блоков B_{2j} и B_{2j+1} соответственно. Но $\alpha_{i_{j+1}} = 0$, поскольку $j + 1 \geqslant q + 1$, следовательно, контакт $x_{i_{j+1}}$, а вместе с ним и цепь C не могут проводить на наборе $\tilde{\alpha}$. Противоречие.

Во всех случаях получено противоречие, поэтому свойство (i) доказано.

Докажем промежуточное свойство (iv) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$, которое будет использоваться при доказательстве свойств (ii), (iii): функции проводимости между вершинами a_{2j-1} и $a_{2j'-1}$, а также между вершинами b_{2j-1} и $b_{2j'-1}$ в этой схеме тождественно равны 1 для любых $j, j' \in \{1, \ldots, n-2\}$.

Достаточно доказать свойство (iv) для случая $j' = j+1$. Между вершинами a_{2j-1} и a_{2j+1} в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть, в частности, цепи $a_{2j-1} - a_{2j} - a_{2j+1}$ и $a_{2j-1} - b_{2j} - a_{2j+1}$. В силу определения блоков B_{2j} и B_{2j+1} первая из этих цепей содержит два контакта x_t, где

$$t = \begin{cases} i_{j+1}, & \text{если } j \leqslant q-1, \\ i_{j+2}, & \text{если } j \geqslant q, \end{cases}$$

а вторая цепь — два контакта $\overline{x}_t$. Далее, между вершинами b_{2j-1} и b_{2j+1} в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть, в частности, цепи $b_{2j-1} - b_{2j} - b_{2j+1}$ и $b_{2j-1} - a_{2j} - b_{2j+1}$. В силу определения блоков B_{2j} и B_{2j+1} первая из этих цепей содержит два контакта $x_{t'}$, где

$$t' = \begin{cases} i_{j}, & \text{если } j \leqslant q-1, \\ i_{j+1}, & \text{если } j \geqslant q, \end{cases}$$

а вторая цепь — два контакта $\overline{x}_{t'}$. Таким образом, функции проводимости между вершинами a_{2j-1} и $a_{2j'-1}$, а также между вершинами b_{2j-1} и $b_{2j'-1}$ в рассматриваемой схеме не меньше $x_t \vee \overline{x}_t \equiv 1$ и $x_{t'} \vee \overline{x}_{t'} \equiv 1$ соответственно, т. е. тождественно равны 1. Свойство (iv) доказано.

Докажем свойство (ii). В силу свойства (iv) и нечётности m достаточно доказать, что на наборе $\tilde{\alpha}$ есть проводимость между вершинами b_0 и b_1 схемы $S_{\tilde{\alpha}}$, а это утверждение очевидно, так как данные две вершины по определению блока B_1 соединены контактом x_{i_1}, проводящим на указанном наборе.

Докажем свойство (iii). Компоненты набора $\tilde{\tau}$ обозначим через $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $q \geqslant 2$ и $\tau_{i_j} \neq \tau_{i_{j+1}}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, q-1\}$. В силу определения блока B_1 вершина b_1 в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ соединена с вершинами a_0 и b_0 контактами $\overline{x}_{i_1}$ и x_{i_1} соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$. Поэтому достаточно доказать, что в этой схеме на указанном наборе есть проводимость между вершиной b_1 и каждой из вершин a_m, b_m. В силу свойства (iv) вершины b_1, a_m и b_m в предыдущем предложении можно заменить на b_{2j-1}, a_{2j+1} и b_{2j+1} соответственно. Проводимость между вершинами b_{2j-1} и b_{2j+1} есть по этому же свойству; исследуем проводимость между вершинами b_{2j-1} и a_{2j+1}. Между ними в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ есть, в частности, цепи $b_{2j-1} - a_{2j} - a_{2j+1}$ и $b_{2j-1} - b_{2j} - a_{2j+1}$. По определению блоков B_{2j} и B_{2j+1} первая из этих цепей содержит по одному контакту $\overline{x}_{i_j}$ и $x_{i_{j+1}}$, а вторая цепь — по одному контакту x_{i_j} и $\overline{x}_{i_{j+1}}$. Одна из них проводит на наборе $\tilde{\tau}$, так как $\tau_{i_j} \neq \tau_{i_{j+1}}$. Случай 1 разобран.

2. Пусть $q \leqslant n-3$ и $\tau_{i_{j+1}} \neq \tau_{i_{j+2}}$ для некоторого $j \in \{q, \ldots, n-3\}$. Так же, как в случае 1, достаточно доказать наличие проводимости между вершинами b_{2j-1} и a_{2j+1} в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ на наборе $\tilde{\tau}$. Между указанными вершинами есть, в частности, цепи $b_{2j-1} - a_{2j} - a_{2j+1}$ и $b_{2j-1} - b_{2j} - a_{2j+1}$. По определению блоков B_{2j} и B_{2j+1} первая из этих цепей содержит по одному контакту $\overline{x}_{i_{j+1}}$ и $x_{i_{j+2}}$, а вторая цепь — по одному контакту $x_{i_{j+1}}$ и $\overline{x}_{i_{j+2}}$. Одна из них проводит на наборе $\tilde{\tau}$, так как $\tau_{i_{j+1}} \neq \tau_{i_{j+2}}$. Случай 2 разобран.

3. Отрицание объединения случаев 1 и 2: пусть $\tau_{i_1} = \ldots = \tau_{i_q}$ и $\tau_{i_{q+1}} = \ldots = \tau_{i_{n-1}}$. Тогда $\tau_{i_1} = \ldots = \tau_{i_q} = 0$ и $\tau_{i_{q+1}} = \ldots = \tau_{i_{n-1}} = 1$, поскольку $\tilde{\tau} \notin \{\tilde{\alpha}, (\tilde{0}^{n-1}), (\tilde{1}^{n-1})\}$. В силу определения блока B_1 вершина a_1 в схеме $S_{\tilde{\alpha}}$ соединена с вершинами a_0 и b_0 контактами $x_{i_{n-1}}$ и $\overline{x}_{i_1}$ соответственно, каждый из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$; кроме того, вершина b_1 соединена с вершинами a_0 и b_0 контактами $\overline{x}_{i_1}$ и x_{i_1} соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$. Поэтому на указанном наборе есть проводимость либо между вершинами из каждой из пар (a_0, a_1), (a_0, b_1), либо между вершинами из каждой из пар (b_0, a_1), (b_0, b_1). Осталось заметить, что по свойству (iv) есть проводимость между вершинами a_1 и a_m, а также между вершинами b_1 и b_m. Случай 3 разобран. Свойство (iii), а вместе с ним лемма 6.3 доказаны. □

Лемма 6.4 [161]. *Пусть $n \geqslant 3$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — произвольные булевы константы, не все из которых равны между собой; $\tilde{\sigma}_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$, $\tilde{\sigma}_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$ и M — одно из множеств $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$, $\{\tilde{\sigma}_0\}$, $\{\tilde{\sigma}_1\}$. Тогда существует $L_{(n)}$-схема S_M, обладающая следующими свойствами:*

(v) *на любом наборе из множества M проводимость между полюсами схемы S_M из любой из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m), (b_0, b_m) отсутствует;*

(vi) *на любом n-наборе $\tilde{\pi}$, не принадлежащем множеству $M \cup \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0), (\tilde{1}^n)\}$, в схеме S_M есть проводимости либо между полюсами из каждой из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), либо между полюсами из каждой из пар (b_0, a_m), (b_0, b_m).*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$, а i и j — такие индексы от 1 до $n-1$, что $\alpha_i = 1$ и $\alpha_j = 0$. По лемме 6.3 существует $L_{(n)}$-схема $S_{\tilde{\alpha}}$, составленная из $2n-5$ $L_{(n)}$-блоков, содержащая только контакты переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ и обладающая свойствами (i)–(iii). Пусть $\tilde{\pi} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ (в формулировке свойства (vi)) и $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$. Тогда

$$\tilde{\tau} \notin \{(\tilde{0}^{n-1}), (\tilde{1}^{n-1})\}. \tag{6.3}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $M = \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$. Определим $L_{(n)}$-схему S_M следующим образом: полюсы a_0 и b_0 схемы S_M совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $S_{\tilde{\alpha}}$; полюсы a_{2n-5} и b_{2n-5} схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_m вида $B^{i,j}_{i,j}$, где $m = 2n-4$; полюсы a_m и b_m схемы S_M совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_m (см. рисунок 6.7).

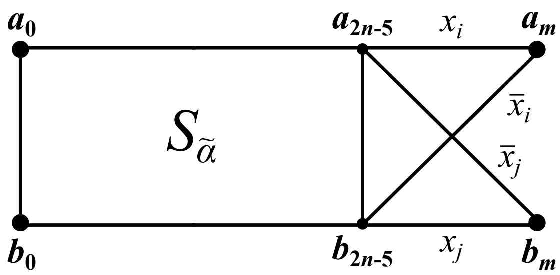

Рис. 6.7. Схема S_M в случае 1

Предположим, что свойство (v) не выполнено, т. е. в схеме S_M есть несамопересекающаяся цепь C между её полюсами из какой-то из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m), (b_0, b_m), проводящая на наборе $\tilde{\sigma}_\beta$ для некоторого $\beta \in \{0, 1\}$. Пусть $v \in \{a_0, b_0\}$ — один из концов этой цепи. Очевидно, что в ней можно выделить максимальный по длине участок, начинающийся с вершины v, содержащийся целиком в подсхеме $S_{\tilde{\alpha}}$ и проходящий через какую-то вершину $v' \in \{a_{2n-5}, b_{2n-5}\}$. Из свойства (i) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\sigma}_\beta$ и $\tilde{\alpha}$ совпадают, вытекает, что обязательно $v = b_0$, $v' = b_{2n-5}$. Вершина v' в силу максимальности выделенного участка инцидентна в цепи C некоторому контакту, не лежащему в подсхеме $S_{\tilde{\alpha}}$, а значит, принадлежащему блоку B_m. Это один из контактов $[b_{2n-5}, a_m]$, $[b_{2n-5}, b_m]$, т. е. один из контактов $\overline{x}_i$, x_j. Но ни один из них не проводит на наборе $\tilde{\sigma}_\beta$, поскольку $\alpha_i = 1$ и $\alpha_j = 0$; противоречие. Свойство (v) доказано.

Докажем свойство (vi). Заметим, что $\tilde{\tau} \notin \{\tilde{\alpha}, (\tilde{0}^{n-1}), (\tilde{1}^{n-1})\}$ в силу (6.3) и соотношения $\tilde{\pi} \notin M$. Отсюда, из свойства (iii) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\tau}$ совпадают, следует, что в этой схеме есть проводимость на наборе $\tilde{\pi}$ между полюсами из каждой из пар (w, a_{2n-5}), (w, b_{2n-5}) для некоторого $w \in \{a_0, b_0\}$. В силу определения блока B_m вершина a_m соединена с вершинами a_{2n-5} и b_{2n-5} контактами x_i и $\overline{x}_i$ соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$; вершина b_m соединена с вершинами a_{2n-5} и b_{2n-5} контактами $\overline{x}_j$ и x_j соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$. Поэтому на указанном наборе есть проводимость между вершиной w и каждой из вершин a_m, b_m. Свойство (vi) доказано.

2. Пусть $M = \{\tilde{\sigma}_\beta\}$ для некоторого $\beta \in \{0, 1\}$. Определим $L_{(n)}$-схему S_M следующим образом: полюсы a_0 и b_0 схемы S_M совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $S_{\tilde{\alpha}}$;

полюсы a_{2n-5} и b_{2n-5} схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m-1} вида $B^{n,n}_{n,n}$, где $m = 2n-3$, и объявляются вершинами соответственно a_{m-1} и b_{m-1} схемы S_M; полюсы A_3 и A_4 блока B_{m-1} совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_m вида

$$\begin{cases} B^{i,j}_{i,j}, & \text{если } \beta = 1, \\ B^{j,i}_{j,i}, & \text{если } \beta = 0; \end{cases}$$

полюсы a_m и b_m схемы S_M совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_m (вид этой схемы при $\beta = 1$ показан на рисунке 6.8).

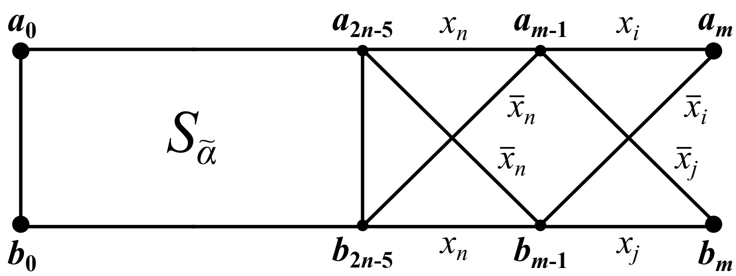

Рис. 6.8. Схема S_M в случае 2

Предположим, что свойство (v) не выполнено, т. е. в схеме S_M есть несамопересекающаяся цепь C между её полюсами из какой-то из пар (a_0, a_m), (a_0, b_m), (b_0, a_m), (b_0, b_m), проводящая на наборе $\tilde{\sigma}_\beta$. Пусть $v \in \{a_0, b_0\}$ — один из концов этой цепи. Очевидно, что в ней можно выделить максимальный по длине участок, начинающийся с вершины v, содержащийся целиком в подсхеме $S_{\tilde{\alpha}}$ и проходящий через какую-то вершину $v' \in \{a_{2n-5}, b_{2n-5}\}$. Из свойства (i) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\sigma}_\beta$ и $\tilde{\alpha}$ совпадают, вытекает, что обязательно $v = b_0$, $v' = b_{2n-5}$. Вершина v' в силу максимальности выделенного участка инцидентна в цепи C некоторому контакту K, не лежащему в подсхеме $S_{\tilde{\alpha}}$. Это один из контактов $[b_{2n-5}, a_{m-1}]$, $[b_{2n-5}, b_{m-1}]$, принадлежащий блоку B_{m-1}, т. е. один из контактов $\overline{x}_n$, x_n. Из них на наборе $\tilde{\sigma}_\beta$ проводит только контакт x_n^β; таким образом, K — это контакт x_n^β. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть $\beta = 1$. Тогда контакт K соединяет вершины b_{2n-5} и b_{m-1} цепи C. Вершина b_{m-1} инцидентна в ней ещё одному контакту. В силу строения схемы S_M это один из контактов $[b_{m-1}, a_{2n-5}]$, $[b_{m-1}, a_m]$, $[b_{m-1}, b_m]$, т. е. один из контактов $\overline{x}_n$, $\overline{x}_i$, x_j (см. определения блоков B_{m-1} и B_m). Но ни один из них не проводит на наборе $\tilde{\sigma}_\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta)$, поскольку $\beta = 1$, $\alpha_i = 1$ и $\alpha_j = 0$; противоречие.

2.2. Пусть $\beta = 0$. Тогда контакт K соединяет вершины b_{2n-5} и a_{m-1} цепи C. Вершина a_{m-1} инцидентна в ней ещё одному контакту. В силу строения схемы S_M это один из контактов $[a_{m-1}, a_{2n-5}]$, $[a_{m-1}, a_m]$, $[a_{m-1}, b_m]$, т. е. один из контактов x_n, x_j, $\overline{x}_i$ (см. определения блоков B_{m-1} и B_m). Но ни один из них не проводит на наборе $\tilde{\sigma}_\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta)$, поскольку $\beta = 0$, $\alpha_i = 1$ и $\alpha_j = 0$; противоречие. Свойство (v) доказано.

Докажем свойство (vi). Пусть вначале $\tilde{\pi} \neq \tilde{\sigma}_{\overline{\beta}}$. Заметим, что $\tilde{\pi} \neq \tilde{\sigma}_\beta$, так как $\tilde{\pi} \notin M$. Тогда $\tilde{\tau} \notin \{\tilde{\alpha}, (\tilde{0}^{n-1}), (\tilde{1}^{n-1})\}$ в силу (6.3) и соотношения $\tilde{\pi} \notin \{\tilde{\sigma}_\beta, \tilde{\sigma}_{\overline{\beta}}\}$. Отсюда, из свойства (iii) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\tau}$ совпадают, следует, что в этой схеме есть проводимость на наборе $\tilde{\pi}$ между полюсами из каждой из пар (w, a_{2n-5}), (w, b_{2n-5}) для некоторого $w \in \{a_0, b_0\}$. По определению блока B_{m-1} вершина a_{m-1} соединена с вершинами a_{2n-5} и b_{2n-5} контактами x_n и $\overline{x}_n$ соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$; вершина b_{m-1} соединена с вершинами a_{2n-5} и b_{2n-5} контактами $\overline{x}_n$ и x_n соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$. Поэтому на указанном наборе есть проводимость между вершиной w и каждой из вершин a_{m-1}, b_{m-1}. Далее, по определению блока B_m вершина a_m соединена с вершинами a_{m-1} и b_{m-1} контактами соответственно x_i и $\overline{x}_i$ в случае $\beta = 1$ и контактами соответственно x_j и $\overline{x}_j$ в случае $\beta = 0$, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$; вершина b_m соединена с вершинами a_{m-1} и b_{m-1} контактами соответственно $\overline{x}_j$ и x_j в случае $\beta = 1$ и контактами соответственно $\overline{x}_i$ и x_i в случае $\beta = 0$, один из которых проводит на наборе $\tilde{\pi}$. Поэтому на указанном наборе есть проводимость между вершиной w и каждой из вершин a_m, b_m, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\tilde{\pi} = \tilde{\sigma}_{\overline{\beta}}$. Из свойства (ii) схемы $S_{\tilde{\alpha}}$ и того, что первые $n-1$ компонент наборов $\tilde{\pi}$ и $\tilde{\alpha}$ совпадают, вытекает, что на наборе $\tilde{\pi}$ есть проводимость между полюсами b_0 и b_{2n-5} схемы $S_{\tilde{\alpha}}$. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть $\beta = 1$. Тогда $\tilde{\pi} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0)$. На наборе $\tilde{\pi}$ каждый из контактов $[b_{2n-5}, a_{m-1}]$, $[a_{m-1}, a_m]$ и $[a_{m-1}, b_m]$ схемы S_M проводит, так как это контакты $\overline{x}_n$, x_i и $\overline{x}_j$ соответственно (см. определения блоков B_{m-1} и B_m). Следовательно, в данной схеме есть проводимость между полюсом b_0 и каждым из полюсов a_m, b_m, что и требовалось доказать.

2.2. Пусть $\beta = 0$. Тогда $\tilde{\pi} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$. На наборе $\tilde{\pi}$ каждый из контактов $[b_{2n-5}, b_{m-1}]$, $[b_{m-1}, a_m]$ и $[b_{m-1}, b_m]$ схемы S_M проводит, так как это контакты x_n, $\overline{x}_j$ и x_i соответственно (см. определения блоков B_{m-1} и B_m). Следовательно, в данной схеме есть проводимость между полюсом b_0 и каждым из полюсов a_m, b_m. Свойство (vi), а вместе с ним лемма 6.4 доказаны. □

Лемма 6.5 [161]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, существует такая $L_{(n)}$-схема S, со-*

ставленная из чётного числа m $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно, что на любом n-наборе $\tilde{\tau}$, не принадлежащем множеству $M_0 = \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0), (\tilde{1}^n)\}$, проводимости между полюсами b_0 и a_0, b_0 и a_m, b_0 и b_m схемы S равны 0, $f(\tilde{\tau})$, $f(\tilde{\tau})$ соответственно.

Доказательство. Построим сначала вспомогательную $L_{(n)}$-схему S_0. По определению она однозначно задаётся числом $m_0 \in \mathbb{N}$ и $L_{(n)}$-блоками $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_{m_0}$. Положим $m_0 = 2n - 4$, $\mathsf{B}_{2j-1} = B^{j,j}_{j,j}$, $\mathsf{B}_{2j} = B^{j+1,j}_{j+1,j}$ для каждого $j = 1, \ldots, n-2$. Вид схемы S_0 показан на рисунке 6.9.

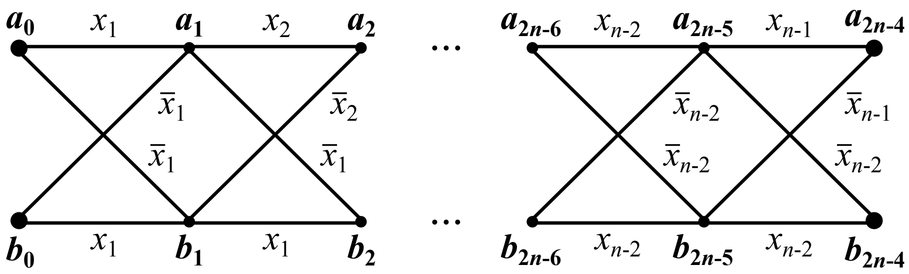

Рис. 6.9. Схема S_0

Докажем свойство (vii) этой схемы: функция проводимости между её вершинами b_0 и b_{2j} тождественно равна 1 для любого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Достаточно доказать, что функция проводимости между вершинами b_{2j-2} и b_{2j} в схеме S_0 тождественно равна 1 для любого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Между этими вершинами в данной схеме есть, в частности, цепи $b_{2j-2} - b_{2j-1} - b_{2j}$ и $b_{2j-2} - a_{2j-1} - b_{2j}$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} первая из этих цепей содержит два контакта x_j, а вторая — два контакта $\overline{x}_j$. Таким образом, функция проводимости между вершинами b_{2j-2} и b_{2j} в схеме S_0 не меньше $x_j \vee \overline{x}_j \equiv 1$, т. е. тождественно равна 1. Свойство (vii) доказано.

Докажем свойство (viii) схемы S_0: на любом двоичном наборе $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$, не принадлежащем множеству M_0, в этой схеме есть проводимость между полюсами b_0 и a_{2n-4}. Из соотношения $\tilde{\tau} \notin M_0$ следует, что не все из чисел $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ равны между собой. Пусть $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ — максимальной такой индекс, что $\tau_j \neq \tau_{j+1}$. В силу свойства (vii) достаточно доказать, что в схеме S_0 на наборе $\tilde{\tau}$ есть проводимость между вершинами b_{2j-2} и a_{2j}, а также между вершинами a_{2j} и a_{2n-4}. Между вершинами b_{2j-2} и a_{2j} в данной схеме есть, в частности, цепи $b_{2j-2} - a_{2j-1} - a_{2j}$ и $b_{2j-2} - b_{2j-1} - a_{2j}$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} первая из этих цепей содержит по одному контакту $\overline{x}_j$ и x_{j+1}, а вторая цепь — по одному контакту x_j и $\overline{x}_{j+1}$. Одна из них проводит на наборе $\tilde{\tau}$, так как $\tau_j \neq \tau_{j+1}$. Между вершинами a_{2j} и a_{2n-4} в схеме S также есть проводимость на наборе $\tilde{\tau}$. Действительно, при

$j = n-2$ это очевидно; в случае $j \leqslant n-3$ в силу выбора числа j выполнено соотношение $\tau_{j+1} = \tau_{j+2} = \ldots = \tau_{n-1}$, поэтому либо цепь $a_{2j} - a_{2j+1} - \ldots - a_{2n-5} - a_{2n-4}$, состоящая из контактов $x_{j+1}, x_{j+2}, \ldots, x_{n-1}$, либо цепь $a_{2j} - b_{2j+1} - a_{2j+2} - \ldots - b_{2n-5} - a_{2n-4}$, состоящая из контактов $\overline{x}_{j+1}, \overline{x}_{j+2}, \ldots, \overline{x}_{n-1}$, проводит на наборе $\tilde{\tau}$ (некоторые из этих контактов могут входить в одну из рассматриваемых цепей по два раза). Свойство (viii) доказано.

Разобьём все n-наборы, кроме наборов из множества M_0, на $2^{n-1}-2$ пар наборов, различающихся только в последней компоненте. Пусть d — число таких пар, в каждой из которых хотя бы один набор является нулевым набором функции $f(\tilde{x}^n)$. Если $d = 0$, то положим $\hat{S} = S_0$ и $m = 2n-4$. В случае же $d \geqslant 1$ обозначим подмножества указанных d пар наборов, состоящие из всех нулевых наборов функции f, содержащихся в этих парах, через $M_1, \ldots, M_d$ (в произвольном порядке). Тогда $|M_i| \in \{1, 2\}$ для любого $i \in \{1, \ldots, d\}$ и множество $M_1 \cup \ldots \cup M_d$ совпадает со множеством всех нулевых наборов функции $f(\tilde{x}^n)$, не лежащих во множестве M_0 (при $d = 0$ последнее утверждение также верно, если положить $M_1 \cup \ldots \cup M_d = \varnothing$). Для каждого $M \in \{M_1, \ldots, M_d\}$ по лемме 6.4 построим $L_{(n)}$-схему S_M, обладающую свойствами (v), (vi). Определим $L_{(n)}$-схему $\hat{S}$ следующим образом: полюсы a_0 и b_0 схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы S_0; полюсы a_{2n-4} и b_{2n-4} схемы S_0 совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы S_{M_1} и для удобства объявляются вершинами соответственно a^1 и b^1 схемы $\hat{S}$; для любого $i \in \{1, \ldots, d-1\}$ (при $d \geqslant 2$) полюсы a_{m_i} и b_{m_i} схемы S_{M_i}, где m_i — некоторое натуральное число, совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $S_{M_{i+1}}$ и для удобства объявляются вершинами соответственно a^{i+1} и b^{i+1} схемы $\hat{S}$; полюсы a_m и b_m схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно a_{m_d} и b_{m_d} схемы S_{M_d}, где m, m_d — некоторые натуральные числа, и для удобства объявляются вершинами соответственно a^{d+1} и b^{d+1} схемы $\hat{S}$. Вид схемы $\hat{S}$ показан на рисунке 6.10.

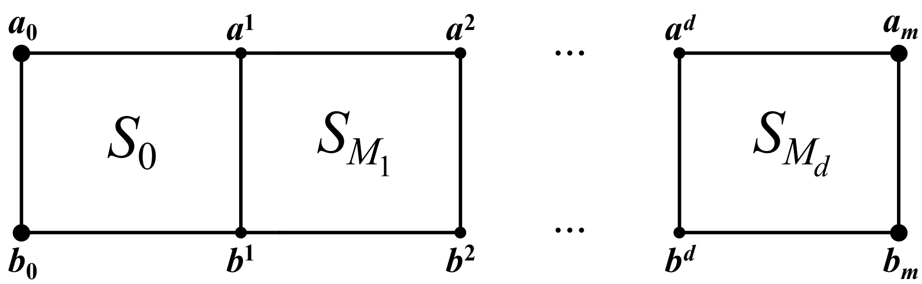

Рис. 6.10. Схема $\hat{S}$

Определим теперь $L_{(n)}$-схему S. Рассмотрим четыре случая.

Случай А. Схема $\hat{S}$ составлена из чётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно. Тогда положим $S = \hat{S}$.

Случай Б. Схема $\hat{S}$ составлена из нечётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ чётно. Определим схему S следующим образом: полюсы a_0 и b_0 схемы S совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $\hat{S}$; полюсы a_m и b_m схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m+1} вида $B^{1,1}_{1,1}$; полюсы a_{m+1} и b_{m+1} схемы S совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_{m+1} (см. рисунок 6.11).

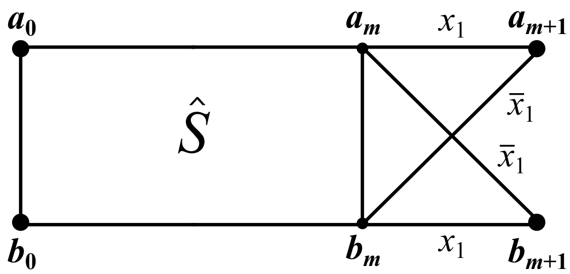

Рис. 6.11. Схема S в случае Б

Случай В. Схема $\hat{S}$ составлена из нечётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ нечётно. Определим схему S следующим образом: полюсы a_0 и b_0 схемы S совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $\hat{S}$; полюсы a_m и b_m схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m+1} вида $B^{n,n}_{n,n}$; полюсы a_{m+1} и b_{m+1} схемы S совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_{m+1} (см. рисунок 6.11; все контакты переменной x_1 в правом блоке надо заменить на соответствующие контакты переменной x_n).

Случай Г. Схема $\hat{S}$ составлена из чётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ нечётно. Определим схему S следующим образом: полюсы a_0 и b_0 схемы S совпадают с полюсами соответственно a_0 и b_0 схемы $\hat{S}$; полюсы a_m и b_m схемы $\hat{S}$ совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m+1} вида $B^{1,1}_{1,1}$; полюсы A_3 и A_4 блока B_{m+1} совпадают с полюсами соответственно A_1 и A_2 $L_{(n)}$-блока B_{m+2} вида $B^{n,n}_{n,n}$ и объявляются вершинами соответственно a_{m+1} и b_{m+1} схемы S; полюсы a_{m+2} и b_{m+2} схемы S совпадают с полюсами соответственно A_3 и A_4 блока B_{m+2} (см. рисунок 6.12).

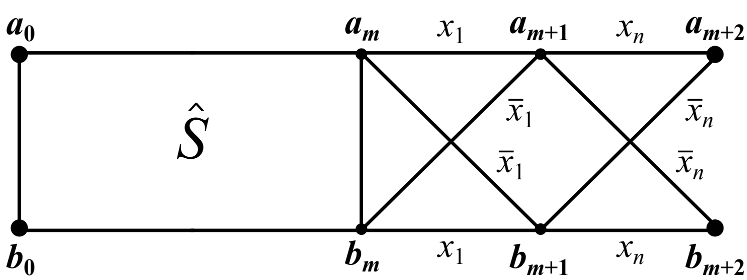

Рис. 6.12. Схема S в случае Г

Легко видеть, что в каждом из случаев А–Г схема S является $L_{(n)}$-схемой и составлена из чётного числа $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно.

Далее будем параллельно рассматривать случаи А–Г. Пусть $\tilde{\tau}$ — произвольный n-набор, не принадлежащий множеству M_0. Докажем сначала, что проводимость между полюсами b_0 и a_0 схемы S на этом наборе равна 0, т. е. отсутствует. Обозначим произвольную несамопересекающуюся цепь в схеме S между этими полюсами через C, а вершины этой цепи при движении от a_0 к b_0 — через $v_0, \ldots, v_s$, где $v_0 = a_0$, $v_s = b_0$. Достаточно доказать, что данная цепь не проводит на наборе $\tilde{\tau}$. Рассмотрим два случая.

1. Цепь C целиком содержится в подсхеме S_0. Пусть $t \in \{0, \ldots, 2n-4\}$ — максимальное такое число, что среди вершин $v_0, \ldots, v_s$ есть хотя бы одна вершина $v_{s'}$, принадлежащая множеству $\{a_t, b_t\}$, где a_t, b_t — вершины $L_{(n)}$-схемы S_0. Очевидно, что $t \geqslant 1$, поэтому $0 < s' < s$. Вершина $v_{s'}$ соединена в схеме S_0 контактами с вершинами a_{t-1}, b_{t-1}, a_{t+1} и b_{t+1}, если $t \leqslant 2n-5$, и с вершинами a_{t-1} и b_{t-1}, если $t = 2n-4$. Отсюда и из выбора числа t следует соотношение $v_{s'-1}, v_{s'+1} \in \{a_{t-1}, b_{t-1}\}$; кроме того, $v_{s'-1} \neq v_{s'+1}$. Поэтому в цепи C обязательно одновременно содержатся либо контакты $[a_{t-1}, a_t]$ и $[b_{t-1}, a_t]$, либо контакты $[a_{t-1}, b_t]$ и $[b_{t-1}, b_t]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n-2$, это либо контакты x_j и $\overline{x}_j$, либо контакты x_{j+1} и $\overline{x}_{j+1}$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$, т. е. противоположные контакты. Следовательно, данная цепь не может проводить на наборе $\tilde{\tau}$.

2. Цепь C не содержится целиком в подсхеме S_0. Из вида этой подсхемы легко следует, что цепь C можно разбить на участок C_a, соединяющий вершину a_0 с какой-то вершиной w, не содержащейся в S_0, и участок C_b, соединяющий вершины w и b_0; для любого $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$ на участке C_a (C_b) обязательно содержится вершина $w^a_{t'}$ (соответственно $w^b_{t'}$), принадлежащая множеству $\{a_{t'}, b_{t'}\}$; при этом $w^a_{t'} \neq w^b_{t'}$, так как цепь C несамопересекающаяся. Отсюда вытекает, что $s > 2(2n-3)$, $v_{t'} = w^a_{t'}$ и $v_{s-t'} = w^b_{t'}$ для любого $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$ (последние два равенства можно доказать индукцией по t'); таким образом, $v_{t'}, v_{s-t'} \in \{a_{t'}, b_{t'}\}$ и $v_{t'} \neq v_{s-t'}$. Рассмотрим пять подслучаев.

2.1. Пусть $v_{t'} = a_{t'}$ для любого $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$. Тогда в цепи C содержатся контакты $[a_0, a_1], [a_1, a_2], \ldots, [a_{2n-5}, a_{2n-4}]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n-2$, это контакты $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (некоторые из этих контактов при $n \geqslant 4$ повторяются). Хотя бы одна из первых $n-1$ компонент набора $\tilde{\tau}$ равна 0, так как $\tilde{\tau} \notin M_0$. Поэтому цепь C не может проводить на данном наборе.

2.2. Пусть $v_{t'} = a_{t'}$ для любого чётного $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$ и $v_{t'} = b_{t'}$ для любого нечётного $t' \in \{0, \ldots, 2n-4\}$. Тогда в цепи C содержатся контакты $[a_0, b_1], [b_1, a_2], \ldots, [b_{2n-5}, a_{2n-4}]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n-2$, это контакты $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_{n-1}$ (некоторые из этих контактов при $n \geqslant 4$ повторяются). Хотя бы одна из первых $n-1$ компонент набора $\tilde{\tau}$ равна 1, так как $\tilde{\tau} \notin M_0$. Поэтому цепь C не может проводить на данном наборе.

2.3. Пусть существует такое $t' \in \{0, \ldots, 2n-6\}$, что $v_{t'} = a_{t'}$, $v_{t'+1} = a_{t'+1}$ и $v_{t'+2} = b_{t'+2}$. Тогда в цепи C содержатся контакты $[a_{t'}, a_{t'+1}]$ и $[a_{t'+1}, b_{t'+2}]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n-2$, это либо контакты x_j и $\overline{x}_j$ соответственно, либо контакты x_{j+1} и $\overline{x}_{j+1}$ соответственно для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$, т. е. противоположные контакты. Поэтому данная цепь не может проводить на наборе $\tilde{\tau}$.

2.4. Пусть существует такое $t' \in \{0, \ldots, 2n-6\}$, что $v_{t'} = a_{t'}$, $v_{t'+1} = b_{t'+1}$ и $v_{t'+2} = b_{t'+2}$. Тогда $v_{s-t'} = b_{t'}$, $v_{s-t'-1} = a_{t'+1}$ и $v_{s-t'-2} = a_{t'+2}$, поэтому в цепи C содержатся контакты $[a_{t'}, b_{t'+1}]$, $[b_{t'+1}, b_{t'+2}]$, $[b_{t'}, a_{t'+1}]$ и $[a_{t'+1}, a_{t'+2}]$. В силу определения блоков B_{2j-1} и B_{2j} схемы S_0, где $j = 1, \ldots, n-2$, это либо контакты $\overline{x}_j$, x_j, $\overline{x}_j$ и x_{j+1} соответственно, либо контакты $\overline{x}_j$, x_{j+1}, $\overline{x}_{j+1}$ и x_{j+1} соответственно для некоторого $j \in \{1, \ldots, n-2\}$. Среди них есть противоположные контакты, поэтому данная цепь не может проводить на наборе $\tilde{\tau}$.

2.5. Пусть существует такое $t' \in \{0, \ldots, 2n-6\}$, что $v_{t'} = b_{t'}$, $v_{t'+1} = a_{t'+1}$ и $v_{t'+2} = a_{t'+2}$. Тогда $v_{s-t'} = a_{t'}$, $v_{s-t'-1} = b_{t'+1}$ и $v_{s-t'-2} = b_{t'+2}$, значит, в цепи C содержатся контакты $[b_{t'}, a_{t'+1}]$, $[a_{t'+1}, a_{t'+2}]$, $[a_{t'}, b_{t'+1}]$ и $[b_{t'+1}, b_{t'+2}]$. Этот подслучай сводится к предыдущему.

Нетрудно заметить, что подслучаи 2.1–2.5 охватывают все возможные подслучаи случая 2. Тем самым доказано, что проводимость между полюсами b_0 и a_0 схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равна 0.

Обозначим через m' число $L_{(n)}$-блоков в схеме S (в силу построения этой схемы $m' \in \{m, m+1, m+2\}$). Докажем, что проводимости между полюсами b_0 и $a_{m'}$, а также между полюсами b_0 и $b_{m'}$ схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равны $f(\tilde{\tau})$. Рассмотрим два случая.

1'. Пусть $f(\tilde{\tau}) = 0$. Тогда $d \geqslant 1$ и $\tilde{\tau} \in M_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, d\}$. Предположим, что на наборе $\tilde{\tau}$ в схеме S есть несамопересекающаяся проводящая цепь между полюсами b_0 и v для некоторого $v \in \{a_{m'}, b_{m'}\}$. Очевидно, что в указанной цепи можно выбрать участок, соединяющий одну из вершин a^i, b^i с одной из вершин a^{i+1}, b^{i+1} и лежащий целиком внутри подсхемы S_{M_i}, однако это противоречит выполнению свойства (v) для схемы S_{M_i} с учётом того, что вершины a^i, b^i, a^{i+1} и b^{i+1} совпадают с полюсами a_0, b_0, a_{m_i} и b_{m_i} данной схемы соответственно. Поэтому проводимости между полюсами b_0 и $a_{m'}$, а также между полюсами b_0 и $b_{m'}$ схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равны $0 = f(\tilde{\tau})$, что и требовалось доказать.

2'. Пусть $f(\tilde{\tau}) = 1$. Докажем свойство (ix) схемы $\hat{S}$: в этой схеме на наборе $\tilde{\tau}$ есть проводимость между полюсами b_0 и a_m, а также между полюсами b_0 и b_m. В силу свойств (vii), (viii) в подсхеме S_0 есть проводимость между полюсами b_0 и b_{2n-4}, а также между полюсами b_0 и a_{2n-4}. Если $d = 0$, то $\hat{S} = S_0$ и $m = 2n - 4$, откуда следует требуемое утверждение. В случае $d \geqslant 1$ имеем $\tilde{\tau} \notin M_0 \cup M_1 \cup \ldots \cup M_d$. В силу свойства (vi) в подсхеме S_{M_d} есть проводимость между её полюсами v^d и a_m, а также между её полюсами v^d и b_m для некоторого $v^d \in \{a^d, b^d\}$. В случае $d \geqslant 2$ в силу свойства (vi) в подсхеме $S_{M_{d-1}}$ есть проводимость между её полюсами v^{d-1} и v^d для некоторого $v^{d-1} \in \{a^{d-1}, b^{d-1}\}$. В случае $d \geqslant 3$ в силу свойства (vi) в подсхеме $S_{M_{d-2}}$ есть проводимость между её полюсами v^{d-2} и v^{d-1} для некоторого $v^{d-2} \in$ $\in \{a^{d-2}, b^{d-2}\}$, и т. д. В итоге получаем, что в схеме $\hat{S}$ есть проводимость между вершинами v^1 и a_m, а также между вершинами v^1 и b_m для некоторого $v^1 \in \{a^1, b^1\} = \{a_{2n-4}, b_{2n-4}\}$. Выше было показано, что в подсхеме S_0 есть проводимость между полюсами b_0 и v^1. Таким образом, в схеме $\hat{S}$ есть проводимость между полюсами b_0 и a_m, а также между полюсами b_0 и b_m. Свойство (ix) доказано.

В случае А в силу равенства $S = \hat{S}$ получаем, что проводимости между полюсами b_0 и $a_{m'}$, а также между полюсами b_0 и $b_{m'}$ схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равны $1 = f(\tilde{\tau})$, что и требовалось доказать.

В случае Б в силу определения блока B_{m+1} вершина a_{m+1} соединена в схеме S с вершинами a_m и b_m контактами x_1 и $\overline{x}_1$ соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$; вершина b_{m+1} соединена с вершинами a_m и b_m контактами $\overline{x}_1$ и x_1 соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$. С учётом свойства (ix) в схеме S на указанном наборе проводимость между вершиной b_0 и каждым из полюсов a_{m+1}, b_{m+1} равна $1 = f(\tilde{\tau})$, что и требовалось доказать.

В случае В требуемое утверждение доказывается аналогично случаю Б с заменой контактов x_1 и $\overline{x}_1$ на контакты x_n и $\overline{x}_n$ соответственно.

В случае Г по аналогии со случаем Б устанавливается, что в схеме S на наборе $\tilde{\tau}$ есть проводимость между вершиной b_0 и каждой из вершин a_{m+1}, b_{m+1}. В силу определения блока B_{m+2} вершина a_{m+2} соединена в этой схеме с вершинами a_{m+1} и b_{m+1} контактами x_n и $\overline{x}_n$ соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$; вершина b_{m+2} соединена с вершинами a_{m+1} и b_{m+1} контактами $\overline{x}_n$ и x_n соответственно, один из которых проводит на наборе $\tilde{\tau}$. Поэтому в схеме S на указанном наборе проводимость между вершиной b_0 и каждым из полюсов a_{m+2}, b_{m+2} равна $1 = f(\tilde{\tau})$, что и требовалось доказать.

Во всех случаях доказано, что проводимости между полюсами b_0 и a_m, а также между полюсами b_0 и b_m схемы S на наборе $\tilde{\tau}$ равны $f(\tilde{\tau})$. Лемма 6.5 доказана. $\square$

Лемма 6.6 [161]. *Любую б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, *удовлетворяющую условиям* $f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{1}^n) = 1$, $f(\tilde{0}^{n-1}, 1) = f(\tilde{1}^{n-1}, 0) = 0$, *можно реализовать* $L'_{(n)}$*-схемой.*

Доказательство. В силу леммы 6.5 существует такая $L_{(n)}$-схема S, составленная из чётного числа m $L_{(n)}$-блоков, среди которых число блоков вида $B^{n,n}_{n,n}$ также чётно, что на любом n-наборе $\tilde{\tau}$, не принадлежащем множеству $M_0 = \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0), (\tilde{1}^n)\}$, проводимости между полюсами b_0 и a_0, b_0 и a_m, b_0 и b_m схемы S равны 0, $f(\tilde{\tau})$, $f(\tilde{\tau})$ соответственно. Пусть S' — КС с полюсами b_0 и a_m, получающаяся из схемы S добавлением вершины c_1 и соединением её с полюсами b_m и a_0 схемы S контактами x_1 и x_n соответственно, а также добавлением вершины c_2 и соединением её с полюсами b_m и a_0 схемы S контактами $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_n$ соответственно (см. рисунок 6.3). Тогда по определению S' является $L'_{(n)}$-схемой.

Докажем, что схема S' реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Для этого достаточно доказать, что функция проводимости $h(\tilde{x}^n)$ данной схемы на произвольном двоичном наборе $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ принимает значение $f(\tilde{\sigma})$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 1$ и $\tilde{\sigma} \notin M_0$. Тогда проводимость между полюсами b_0 и a_m схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ равна $f(\tilde{\sigma}) = 1$. Следовательно, в подсхеме S, а значит, и в схеме S' есть проводящая на этом наборе цепь между полюсами b_0 и a_m, откуда

$$h(\tilde{\sigma}) = 1 = f(\tilde{\sigma}).$$

2. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 0$ и $\tilde{\sigma} \notin M_0$. Тогда проводимости между полюсами b_0 и a_0, b_0 и a_m, b_0 и b_m схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ равны 0, $f(\tilde{\sigma}) = 0$, $f(\tilde{\sigma}) = 0$ соответственно, т. е. в подсхеме S нет проводящей на этом наборе цепи ни между какой из пар вершин b_0 и a_0, b_0 и a_m, b_0 и b_m. Добавление к схеме S контактов $[a_0, c_1]$, $[c_1, b_m]$, $[a_0, c_2]$ и $[c_2, b_m]$ для получения из неё схемы S' никак не повлияет на это свойство. Следовательно, в схеме S' нет ни одной проводящей на наборе $\tilde{\sigma}$ цепи между её полюсами b_0 и a_m, откуда

$$h(\tilde{\sigma}) = 0 = f(\tilde{\sigma}).$$

3. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 1$ и $\tilde{\sigma} \in M_0$. Тогда $\tilde{\sigma} \in \{(\tilde{0}^n), (\tilde{1}^n)\}$ и в силу леммы 6.2 схема S' проводит на наборе $\tilde{\sigma}$, откуда

$$h(\tilde{\sigma}) = 1 = f(\tilde{\sigma}).$$

4. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 0$ и $\tilde{\sigma} \in M_0$. Тогда $\tilde{\sigma} \in \{(\tilde{0}^{n-1}, 1), (\tilde{1}^{n-1}, 0)\}$ и в силу леммы 6.2 схема S' не проводит на наборе $\tilde{\sigma}$, откуда

$$h(\tilde{\sigma}) = 0 = f(\tilde{\sigma}).$$

Лемма 6.6 доказана. □

Следующая теорема похожа как формулировкой, так и доказательством на теорему 2 работы [161].

Теорема 6.2. *Пусть для б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, существуют такой индекс $i \in \{1, \ldots, n\}$ и такие булевы константы $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, что*

$$f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = 1, \tag{6.4}$$

$$f(\tilde{\pi}_3) = f(\tilde{\pi}_4) = 0, \tag{6.5}$$

где

$$\tilde{\pi}_1 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n),$$

$$\tilde{\pi}_2 = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n),$$

$$\tilde{\pi}_3 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),$$

$$\tilde{\pi}_4 = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n).$$

Тогда $D^{01}_{\text{ЕП}}(f) = 4$, причём функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3, \tilde{\pi}_4\}$.

Доказательство. Докажем второе утверждение теоремы; из него будет следовать неравенство $D(f) \leqslant 4$. Рассмотрим б. ф. $f'(\tilde{x}^n) = f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$, тогда $f(\tilde{x}^n) = f'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$ и в силу утверждения 1.6 достаточно доказать, что функцию $f'(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n), (\tilde{1}^{i-1}, 0, \tilde{1}^{n-i}), (\tilde{0}^{i-1}, 1, \tilde{0}^{n-i})\}$. Рассмотрим теперь функцию $f''(\tilde{x}^n) = f'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_i)$, получающуюся из функции f' перестановкой переменных x_i и x_n (в случае $i = n$ полагаем $f'' = f'$). Тогда $f'(\tilde{x}^n) = f''(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_n, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}, x_i)$ и в силу утверждения 1.6 достаточно доказать, что функцию $f''(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n), (\tilde{1}^{n-1}, 0), (\tilde{0}^{n-1}, 1)\}$. Заметим, что

$$f''(\tilde{1}^n) = f'(\tilde{1}^n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f(\tilde{\pi}_1) = 1,$$

$$f''(\tilde{0}^n) = f'(\tilde{0}^n) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n) = f(\tilde{\pi}_2) = 1,$$

$$f''(\tilde{1}^{n-1}, 0) = f'(1^{i-1}, 0, 1^{n-i}) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n) = f(\tilde{\pi}_3) = 0,$$

$$f''(\tilde{0}^{n-1}, 1) = f'(0^{i-1}, 1, 0^{n-i}) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n) = f(\tilde{\pi}_4) = 0,$$

а в таком случае требуемое утверждение следует из леммы 6.6, применяемой для функции $f''(\tilde{x}^n)$, и леммы 6.2. Поэтому функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3, \tilde{\pi}_4\}$, и $D(f) \leqslant 4$.

Докажем теперь неравенство $D(f) \geqslant 4$. Из (6.4), (6.5) следуют соотношения

$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n),$$
$$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \neq f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_{i-1}, \sigma_i, \overline{\sigma}_{i+1}, \ldots, \overline{\sigma}_n),$$

откуда вытекает, что функция f существенно зависит от переменной x_i и хотя бы от одной из переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_n\} \setminus \{x_i\}$. Предположим, что $D(f) \leqslant 3$. Тогда в силу теоремы 6.1 и предыдущего предложения функция f существенно зависит ровно от двух переменных: x_i и x_j для некоторого $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ и родственна одной из функций $x_1 x_2$, $x_1 \vee x_2$. Поэтому существует такая б. ф. $\varphi(x, y)$, что $f(\tilde{x}^n) = \varphi(x_i, x_j)$. Тогда из (6.4), (6.5) получаем

$$\varphi(\sigma_i, \sigma_j) = \varphi(\overline{\sigma}_i, \overline{\sigma}_j) = 1,$$
$$\varphi(\sigma_i, \overline{\sigma}_j) = \varphi(\overline{\sigma}_i, \sigma_j) = 0.$$

Для любых $\sigma_i, \sigma_j \in \{0, 1\}$ из последних двух соотношений следует, что $\varphi(x, y) \in \{x \oplus y, x \sim y\}$, поэтому $f(\tilde{x}^n) \in \{x_i \oplus x_j, x_i \sim x_j\}$. Но ни одна из функций $x_i \oplus x_j$, $x_i \sim x_j$ не родственна ни одной из функций $x_1 x_2$, $x_1 \vee x_2$; противоречие. Таким образом, $D(f) \geqslant 4$, а с учётом ранее установленного неравенства $D(f) \leqslant 4$ получаем равенство $D(f) = 4$. Теорема 6.2 доказана. $\square$

Теорема 6.3 [161]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных* $D^{01}_{\text{ЕП}}(f) = 4$.

Доказательство. Пусть $n \geqslant 3$. Легко видеть, что множество всех n-наборов можно разбить на 2^{n-2} попарно непересекающихся упорядоченных четвёрок наборов

$$U_{\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}} = ((1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, 1), (1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, 0), (0, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_{n-1}, 1), (0, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_{n-1}, 0)),$$

где $\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ — булевы константы, образующие все возможные комбинации. Пусть F_n — множество б. ф. от n переменных, не принимающих ни на одной из этих четвёрок наборов ни одну из четвёрок значений $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$. Любая б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащая множеству F_n, удовлетворяет либо соотношениям

$$f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, 1) = f(0, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_{n-1}, 0) = 1,$$
$$f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = f(0, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_{n-1}, 1) = 0,$$

либо соотношениям

$$f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, 0) = f(0, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_{n-1}, 1) = 1,$$
$$f(1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, 1) = f(0, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_{n-1}, 0) = 0$$

для некоторых $\sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1} \in \{0, 1\}$. Тогда функция $f(\tilde{x}^n)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2 при $i = n$ и $\sigma_1 = 1$ для некоторого $\sigma_n \in \{0, 1\}$, поэтому $D(f) = 4$.

Найдём мощность множества F_n. На каждой из 2^{n-2} четвёрок наборов $U_{\sigma_2,\ldots,\sigma_{n-1}}$ любая функция из этого множества может принимать любую из $2^4 - 2 = 14$ четвёрок значений. Следовательно, $|F_n| = 14^{2^{n-2}}$. Тогда

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} = \frac{14^{2^{n-2}}}{16^{2^{n-2}}} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n-2}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Таким образом, отношение числа б. ф. из множества F_n к общему числу б. ф. от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству F_n, выполнено равенство $D(f) = 4$, откуда следует справедливость теоремы 6.3. □

§7. Диагностические тесты при обрывах и замыканиях контактов

В данном параграфе рассматриваются единичные и полные диагностические тесты для КС относительно обрывов и замыканий контактов. Описан достаточно обширный класс б. ф. f, для которых $D^{01}_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$ (теорема 7.1); показано, что в этом классе содержатся почти все б. ф. от n переменных (теорема 7.2). Установлено, что число б. ф. f от n переменных, для которых $D^{01}_{\text{ПД}}(f) = 2^n$, не меньше $4 \cdot 2^{2^{n-2}} - 6$ при $n \geqslant 2$ (следствие 7.1; при этом ранее в [108, теорема 1] фактически было получено равенство $D^{01}_{\text{ПД}}(f) = 2^n$ при $n \geqslant 1$ для случаев $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $f(\tilde{x}^n) = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$, откуда вытекало, что $D^{01}_{\text{ПД}}(n) = 2^n$).

Всюду ниже считаем, что запись вида $\alpha_i, \ldots, \alpha_{i'}$ или $\overline{\alpha}_i, \ldots, \overline{\alpha}_{i'}$ при $i > i'$ обозначает пустую строку.

Теорема 7.1 [168]. *Пусть для б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 3$, существуют такие индексы $j, s \in \{1, \ldots, n\}$, $j < s$, и такие булевы константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что*

$$f(\tilde{\rho}_1) = f(\tilde{\rho}_2) = f(\tilde{\rho}_3) = f(\tilde{\rho}_4) = 1, \tag{7.1}$$

$$f(\tilde{\rho}_5) = f(\tilde{\rho}_6) = f(\tilde{\rho}_7) = f(\tilde{\rho}_8) = 0, \tag{7.2}$$

где

$$\tilde{\rho}_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\rho}_2 = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n),$$

$$\tilde{\rho}_3 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \overline{\alpha}_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{s-1}, \overline{\alpha}_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\rho}_4 = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{j-1}, \alpha_j, \overline{\alpha}_{j+1}, \ldots, \overline{\alpha}_{s-1}, \alpha_s, \overline{\alpha}_{s+1}, \ldots, \overline{\alpha}_n),$$

$$\tilde{\rho}_5 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \overline{\alpha}_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\rho}_6 = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{j-1}, \alpha_j, \overline{\alpha}_{j+1}, \ldots, \overline{\alpha}_n),$$

$$\tilde{\rho}_7 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{s-1}, \overline{\alpha}_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n),$$

$$\tilde{\rho}_8 = (\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_{s-1}, \alpha_s, \overline{\alpha}_{s+1}, \ldots, \overline{\alpha}_n).$$

Тогда $D^{01}_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$.

Доказательство. Пусть i_1, i_2, i_3, i_4 — произвольные попарно различные индексы от 1 до 8. Обозначим через $I_{i_1 i_2 i_3 i_4}(\tilde{x}^n)$ б. ф., равную 1 на наборах $\tilde{\rho}_{i_1}, \tilde{\rho}_{i_2}, \tilde{\rho}_{i_3}, \tilde{\rho}_{i_4}$ и равную 0 на всех остальных n-наборах. Положим

$$f_1 = f \oplus I_{3478}, \tag{7.3}$$

$$f_2 = f \oplus I_{3456}, \tag{7.4}$$

$$f_3 = f \oplus I_{1278}, \tag{7.5}$$

$$f_4 = f \oplus I_{1256}. \tag{7.6}$$

В таблице 7.1 приведены значения функций $f_1(\tilde{x}^n), f_2(\tilde{x}^n), f_3(\tilde{x}^n), f_4(\tilde{x}^n)$ на наборах $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8$. При этом используются соотношения (7.1)–(7.6): например,

$$f_1(\tilde{\rho}_1) = f(\tilde{\rho}_1) \oplus I_{3478}(\tilde{\rho}_1) = 1 \oplus 0 = 1.$$

Таблица 7.1

	$\tilde{\rho}_1$	$\tilde{\rho}_2$	$\tilde{\rho}_3$	$\tilde{\rho}_4$	$\tilde{\rho}_5$	$\tilde{\rho}_6$	$\tilde{\rho}_7$	$\tilde{\rho}_8$
f_1	1	1	0	0	0	0	1	1
f_2	1	1	0	0	1	1	0	0
f_3	0	0	1	1	0	0	1	1
f_4	0	0	1	1	1	1	0	0

Применяя теорему 6.2 при $i = j$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, получаем, что функцию $f_1(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС S_1, допускающей ЕПТ $T_1 = \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}$.

Применяя теорему 6.2 при $i = s$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, получаем, что функцию $f_2(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС S_2, допускающей ЕПТ $T_2 = \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$.

Применяя теорему 6.2 при $i = s$ и $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \overline{\alpha}_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{s-1}, \overline{\alpha}_s, \alpha_{s+1}, \ldots, \alpha_n)$, получаем, что функцию $f_3(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС S_3, допускающей ЕПТ $T_3 = \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}$.

Применяя теорему 6.2 при $i = j$ и $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \overline{\alpha}_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{s-1}, \overline{\alpha}_s, \alpha_{s+1}, \dots, \alpha_n)$, получаем, что функцию $f_4(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС S_4, допускающей ЕПТ $T_4 = \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$.

Соединим последовательно схемы S_1 и S_2, а также схемы S_3 и S_4. Полученные две схемы соединим параллельно. Обозначим итоговую схему через S (см. рисунок 7.1; полюсами схемы S являются её левая и правая вершины). Докажем, что при отсутствии неисправностей она реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Для любого $i \in \{1, \dots, 8\}$ на наборе $\tilde{\rho}_i$ схема S выдаёт значение $f_1(\tilde{\rho}_i)f_2(\tilde{\rho}_i) \vee f_3(\tilde{\rho}_i)f_4(\tilde{\rho}_i)$, которое, как нетрудно видеть из таблицы 7.1, равно

$$\begin{cases} 1, & \text{если } i \leqslant 4, \\ 0, & \text{если } i \geqslant 5, \end{cases}$$

и в силу (7.1), (7.2) равно $f(\tilde{\rho}_i)$. В то же время на любом n-наборе $\tilde{\tau}$, не принадлежащем множеству $T = \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$, подсхема S_m, $m = 1, 2, 3, 4$, выдаёт значение

$$f_m(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau}) \oplus I_{\dots}(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau}) \oplus 0 = f(\tilde{\tau}), \tag{7.7}$$

а схема S — значение $f_1(\tilde{\tau})f_2(\tilde{\tau}) \vee f_3(\tilde{\tau})f_4(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau})$. Тем самым доказано, что схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$.

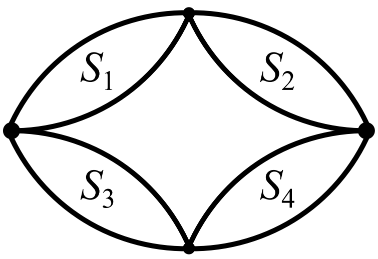

Рис. 7.1. Схема S

Докажем теперь, что данная схема неизбыточна, а множество T является для неё ЕДТ. Предположим, что имеет место неисправность (обрыв или замыкание) произвольного одного контакта схемы S. Пусть при этом неисправный контакт содержится в подсхеме S_m для некоторого $m \in \{1, 2, 3, 4\}$. Множество T_m является ЕПТ для неизбыточной схемы S_m, поэтому существует такой набор $\tilde{\rho} \in T_m$, что при указанной неисправности подсхема S_m выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ «неправильное» значение $\overline{f}_m(\tilde{\rho})$. Вместе с тем для любого $m' \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{m\}$ подсхема $S_{m'}$ выдаёт на этом наборе «правильное» значение $f_{m'}(\tilde{\rho})$. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть $m = 1$. Тогда $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}$ и схема S выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ значение $\overline{f}_1(\tilde{\rho})f_2(\tilde{\rho}) \vee f_3(\tilde{\rho})f_4(\tilde{\rho})$. Просматривая 1-й, 2-й, 5-й и 6-й столбцы таблицы 7.1, получаем,

что это значение равно

$$\begin{cases} 0\cdot 1\vee 0\cdot 0=0, & \text{если } \tilde{\rho}\in\{\tilde{\rho}_1,\tilde{\rho}_2\},\\ 1\cdot 1\vee 0\cdot 1=1, & \text{если } \tilde{\rho}\in\{\tilde{\rho}_5,\tilde{\rho}_6\},\end{cases}$$

и в силу (7.1), (7.2) равно $\overline{f}(\tilde{\rho})$.

2. Пусть $m = 2$. Тогда $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$ и схема S выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ значение $f_1(\tilde{\rho})\overline{f}_2(\tilde{\rho}) \vee f_3(\tilde{\rho})f_4(\tilde{\rho})$. Просматривая 1-й, 2-й, 7-й и 8-й столбцы таблицы 7.1, получаем, что это значение равно

$$\begin{cases} 1\cdot 0\vee 0\cdot 0=0, & \text{если } \tilde{\rho}\in\{\tilde{\rho}_1,\tilde{\rho}_2\},\\ 1\cdot 1\vee 1\cdot 0=1, & \text{если } \tilde{\rho}\in\{\tilde{\rho}_7,\tilde{\rho}_8\},\end{cases}$$

и в силу (7.1), (7.2) равно $\overline{f}(\tilde{\rho})$.

3. Пусть $m = 3$. Тогда $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_5, \tilde{\rho}_6\}$ и схема S выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ значение $f_1(\tilde{\rho})f_2(\tilde{\rho}) \vee \overline{f}_3(\tilde{\rho})f_4(\tilde{\rho})$. Просматривая 3-й, 4-й, 5-й и 6-й столбцы таблицы 7.1, получаем, что это значение равно

$$\begin{cases} 0\cdot 0\vee 0\cdot 1=0, & \text{если } \tilde{\rho}\in\{\tilde{\rho}_3,\tilde{\rho}_4\},\\ 0\cdot 1\vee 1\cdot 1=1, & \text{если } \tilde{\rho}\in\{\tilde{\rho}_5,\tilde{\rho}_6\},\end{cases}$$

и в силу (7.1), (7.2) равно $\overline{f}(\tilde{\rho})$.

4. Пусть $m = 4$. Тогда $\tilde{\rho} \in \{\tilde{\rho}_3, \tilde{\rho}_4, \tilde{\rho}_7, \tilde{\rho}_8\}$ и схема S выдаёт на наборе $\tilde{\rho}$ значение $f_1(\tilde{\rho})f_2(\tilde{\rho}) \vee f_3(\tilde{\rho})\overline{f}_4(\tilde{\rho})$. Просматривая 3-й, 4-й, 7-й и 8-й столбцы таблицы 7.1, получаем, что это значение равно

$$\begin{cases} 0\cdot 0\vee 1\cdot 0=0, & \text{если } \tilde{\rho}\in\{\tilde{\rho}_3,\tilde{\rho}_4\},\\ 1\cdot 0\vee 1\cdot 1=1, & \text{если } \tilde{\rho}\in\{\tilde{\rho}_7,\tilde{\rho}_8\},\end{cases}$$

и в силу (7.1), (7.2) равно $\overline{f}(\tilde{\rho})$.

В каждом из случаев 1–4 установлено, что на наборе $\tilde{\rho} \in T_m \subset T$ схема S выдаёт значение $\overline{f}(\tilde{\rho})$, отличное от значения $f(\tilde{\rho})$, выдаваемого этой схемой при отсутствии в ней неисправностей. Тем самым доказано, что схема S неизбыточна, а множество T является для неё ЕПТ.

Далее, на любом n-наборе $\tilde{\tau}$, не принадлежащем множеству T, при рассматриваемой неисправности подсхема S_m выдаёт некоторое значение $a_{\tilde{\tau}} \in \{0, 1\}$, а подсхема $S_{m'}$ — «правильное» значение $f_{m'}(\tilde{\tau})$, равное $f(\tilde{\tau})$ в силу (7.7), для любого $m' \in \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{m\}$. Тогда схема S выдаёт на данном наборе значение $a_{\tilde{\tau}} f(\tilde{\tau}) \vee f(\tilde{\tau})f(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau})$. Таким образом, значение любой ф. н. схемы S на любом n-наборе, не принадлежащем множеству T, совпадает со значением функции f на этом наборе. Поэтому любые две различные ф. н. данной схемы могут различаться только на наборах из множества T и обязаны различаться хотя бы на одном наборе из этого множества, откуда вытекает, что T — ЕДТ для схемы S.

В итоге получаем, что функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной КС S, допускающей ЕДТ T длины 8. Следовательно,

$$D(f) \leqslant D(S) \leqslant D(T) = 8.$$

Теорема 7.1 доказана. $\square$

Теорема 7.2 [168]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{01}_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$.*

Доказательство. Пусть $n \geqslant 4$. Нетрудно заметить, что множество всех n-наборов можно разбить на 2^{n-3} попарно непересекающихся упорядоченных восьмёрок наборов

$$\begin{aligned} U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3}} = (&(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3},1,1,1),(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{n-3},0,0,0),\\ &(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3},0,0,1),(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{n-3},1,1,0),\\ &(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3},0,1,1),(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{n-3},1,0,0),\\ &(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3},1,0,1),(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_{n-3},0,1,0)),\end{aligned}$$

где $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3}$ — булевы константы, образующие все возможные комбинации (для краткости обозначим данные восемь наборов через $\tilde{\rho}_1^{\tilde{\alpha}},\tilde{\rho}_2^{\tilde{\alpha}},\ldots,\tilde{\rho}_8^{\tilde{\alpha}}$ соответственно, где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3})$). Пусть F_n — множество б. ф. от n переменных, не принимающих ни на одной из этих восьмёрок наборов ни одну из восьмёрок значений $(1,1,1,1,0,0,0,0)$, $(0,0,0,0,1,1,1,1)$. Любая б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащая множеству F_n, удовлетворяет либо соотношениям

$$\begin{aligned} &f(\tilde{\rho}_1^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_2^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_3^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_4^{\tilde{\alpha}}) = 1,\\ &f(\tilde{\rho}_5^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_6^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_7^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_8^{\tilde{\alpha}}) = 0,\end{aligned}$$

либо соотношениям

$$\begin{aligned} &f(\tilde{\rho}_1^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_2^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_3^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_4^{\tilde{\alpha}}) = 0,\\ &f(\tilde{\rho}_5^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_6^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_7^{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\rho}_8^{\tilde{\alpha}}) = 1\end{aligned}$$

для некоторых $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3} \in \{0,1\}$. Тогда функция $f(\tilde{x}^n)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.1 при $j = n-3$, $s = n-2$, $\alpha_{n-1} = \alpha_n = 1$ и некотором $\alpha_{n-2} \in \{0,1\}$, поэтому $D(f) \leqslant 8$.

Найдём мощность множества F_n. На каждой из 2^{n-3} восьмёрок наборов $U_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-3}}$ любая функция из этого множества может принимать любую из $2^8 - 2 = 254$ восьмёрок значений. Следовательно, $|F_n| = 254^{2^{n-3}}$. Тогда

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} = \frac{254^{2^{n-3}}}{256^{2^{n-3}}} = \left(\frac{127}{128}\right)^{2^{n-3}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Таким образом, отношение числа б. ф. из множества F_n к общему числу б. ф. от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству F_n, выполнено неравенство $D(f) \leqslant 8$, откуда следует справедливость теоремы 7.2. □

Обозначим через $M(f)$ множество n-наборов, каждый из которых является либо обособленным набором функции $f(\tilde{x}^n)$ (см. с. 108), либо соседним хотя бы с одним обособленным набором этой функции. Пусть $s(f) = |M(f)|$.

Теорема 7.3 [165]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, справедливо неравенство $D^{01}_{\text{ПД}}(f) \geqslant \geqslant s(f)$.*

Доказательство. Пусть S — произвольная КС, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$. Достаточно доказать, что в любой ПДТ для схемы S входят все наборы из множества $M(f)$. Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — произвольный обособленный набор указанной функции. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 1$. Рассуждая аналогично 3-му–4-му абзацам из доказательства теоремы 16 работы [192] (см. [192, с. 133]), получаем, что в схеме S есть несамопересекающаяся цепь $Z_{\tilde{\sigma}}$ между полюсами, содержащая контакты $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$ и только их. В таком случае при обрыве всех контактов схемы S, не содержащихся в этой цепи, схема станет реализовывать функцию $g(\tilde{x}^n) = x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$; при дополнительном замыкании всех контактов $x_i^{\sigma_i}$ в цепи $Z_{\tilde{\sigma}}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ — функцию $g_i(\tilde{x}^n) = x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \& x_{i+1}^{\sigma_{i+1}} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, а при обрыве всех контактов схемы S — функцию $g_0(\tilde{x}^n) \equiv 0$. Функцию $g(\tilde{x}^n)$ можно отличить от функции $g_i(\tilde{x}^n)$ только на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, а от функции $g_0(\tilde{x}^n)$ — только на наборе $\tilde{\sigma}$. Поэтому в любой ПДТ для схемы S должны входить набор $\tilde{\sigma}$ и n соседних с ним наборов.

2. Пусть $f(\tilde{\sigma}) = 0$. Рассуждая аналогично 6-му–9-му абзацам из доказательства теоремы 16 работы [192], в которых под набором $\tilde{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ понимаем набор $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, получаем, что в схеме S есть тупиковое сечение A^*, содержащее контакты $x_1^{\overline{\sigma}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\sigma}_n}$ и только их, а при замыкании всех контактов схемы S, не входящих в это сечение, схема станет реализовывать функцию $g'(\tilde{x}^n) = x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n}$. Тогда дополнительный обрыв всех контактов $x_i^{\overline{\sigma}_i}$ в сечении A^* для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$ равносилен подаче на вход схемы S (в которой уже все контакты не из A^* замкнуты) вместо переменной x_i значения σ_i, и схема

при такой неисправности станет реализовывать функцию

$$g_i'(\tilde{x}^n) = g'(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) = x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_{i-1}^{\overline{\sigma}_{i-1}} \vee \sigma_i^{\overline{\sigma}_i} \vee x_{i+1}^{\overline{\sigma}_{i+1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} = \\ = x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee \ldots \vee x_{i-1}^{\overline{\sigma}_{i-1}} \vee x_{i+1}^{\overline{\sigma}_{i+1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n};$$

при замыкании всех контактов схемы S она станет реализовывать функцию $g_0'(\tilde{x}^n) \equiv 1$. Функцию $g'(\tilde{x}^n)$ можно отличить от функции $g_i'(\tilde{x}^n)$ только на наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \overline{\sigma}_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_n)$ для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$, а от функции $g_0'(\tilde{x}^n)$ — только на наборе $\tilde{\sigma}$. Поэтому в любой ПДТ для схемы S должен входить набор $\tilde{\sigma}$ и n соседних с ним наборов.

В итоге получаем, что в любой ПДТ для схемы S должны входить все обособленные наборы функции $f(\tilde{x}^n)$, а также все наборы, соседние хотя бы с одним обособленным набором этой функции, т. е. все наборы из множества $M(f)$. Теорема 7.3 доказана. □

Множество A вершин графа G называется *независимым*, если никакие две вершины из A не соединены ребром в G.

Множество вершин графа G называется *максимальным независимым* (МНМ), если оно является независимым, но перестает быть таковым при добавлении к нему любой другой вершины из этого графа.

По аналогии с [275] через $\mathrm{mis}(G)$ будем обозначать общее число МНМ в графе G, а через C_n — граф булева куба размерности n (его вершинами являются всевозможные n-наборы, а рёбрами соединены только соседние наборы).

Теорема 7.4 [165]. *Число б. ф. f от n переменных, $n \geqslant 1$, для которых $D^{01}_{\text{ПД}}(f) = 2^n$, не меньше* $2 \cdot \mathrm{mis}(C_n) - 2$.

Доказательство. Пусть A — произвольное МНМ в графе C_n. Через $f_{A,\alpha}(\tilde{x}^n)$ обозначим б. ф., принимающую значение α на всех наборах из множества A и значение $\overline{\alpha}$ на всех остальных наборах ($\alpha \in \{0, 1\}$). Заметим, что любой набор из A является обособленным набором функции $f_{A,\alpha}$ в силу независимости этого множества, а любой другой n-набор — соседним хотя бы с одним обособленным набором данной функции в силу максимальности множества A. Поэтому $s(f_{A,\alpha}) = 2^n$ и $D(f_{A,\alpha}) \geqslant 2^n$ по теореме 7.3. С другой стороны, $D(f_{A,\alpha}) \leqslant 2^n$, поскольку для произвольной КС, реализующей функцию $f_{A,\alpha}(\tilde{x}^n)$, существует тривиальный ПДТ длины 2^n. Следовательно, $D(f_{A,\alpha}) = 2^n$.

Очевидно, что все функции $f_{A,\alpha}$ при фиксированном $\alpha \in \{0, 1\}$ попарно различны. Предположим, что $f_{A_0,0}(\tilde{x}^n) \equiv f_{A_1,1}(\tilde{x}^n)$ для некоторых МНМ A_0 и A_1 в графе C_n. Пусть $\tilde{\sigma}$ и

$\tilde{\sigma}'$ — два произвольных соседних n-набора. Если

$$f_{A_0,0}(\tilde{\sigma}) = f_{A_0,0}(\tilde{\sigma}') = 0,$$

то $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}' \in A_0$, что противоречит независимости множества A_0. Если

$$f_{A_0,0}(\tilde{\sigma}) = f_{A_0,0}(\tilde{\sigma}') = 1,$$

то

$$f_{A_1,1}(\tilde{\sigma}) = f_{A_1,1}(\tilde{\sigma}') = 1$$

и $\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}' \in A_1$, что противоречит независимости множества A_1. Поэтому на любых двух соседних наборах функция $f_{A_0,0}(\tilde{x}^n)$ принимает различные значения. В таком случае данная функция однозначно задаётся, например, значением $f_{A_0,0}(\tilde{0}^n)$; несложно показать, что она совпадает с одной из функций $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$, $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$.

В итоге получаем, что среди всех функций $f_{A,\alpha}(\tilde{x}^n)$ для произвольных МНМ A и $\alpha \in \{0,1\}$ совпадать могут не более двух пар функций. Поэтому общее число различных таких функций не меньше $2 \cdot \mathrm{mis}(C_n) - 2$. Теорема 7.4 доказана. $\square$

В [275, теорема 1] при $n \geqslant 2$ установлено соотношение

$$2^{n-2} \leqslant \log \mathrm{mis}(C_n) \leqslant 0{,}78(1 + o(1))2^{n-1};$$

в частности, $\mathrm{mis}(C_n) \geqslant 2^{2^{n-2}}$. Следующая теорема улучшает эту оценку.

Теорема 7.5 [165]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо неравенство* $\mathrm{mis}(C_n) \geqslant 2 \cdot 2^{2^{n-2}} - 2$.

Из теорем 7.4 и 7.5 вытекает

Следствие 7.1 [165]. *Число б. ф. f от n переменных, для которых $D^{01}_{\text{ПД}}(f) = 2^n$, при $n \geqslant 2$ не меньше* $4 \cdot 2^{2^{n-2}} - 6$.

Доказательство теоремы 7.5. Пусть $m = 2^{n-2}$. Обозначим всевозможные двоичные наборы длины $n-1$, содержащие чётное (нечётное) число единичных компонент, через $\tilde{\tau}^0_1, \ldots, \tilde{\tau}^0_m$ (соответственно через $\tilde{\tau}^1_1, \ldots, \tilde{\tau}^1_m$) в произвольном порядке (как известно, количества таких наборов совпадают и равны половине числа всех двоичных наборов длины $n-1$, т. е. равны $\frac{2^{n-1}}{2} = m$). Пусть $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_m$ — произвольные булевы константы. Для каждого набора $\tilde{\tau}^\beta_i = (\tau^\beta_{i,1}, \ldots, \tau^\beta_{i,n-1})$, $i = 1, \ldots, m$, положим $\tilde{\sigma}^\beta_{i,\gamma_i} = (\gamma_i, \tau^\beta_{i,1}, \ldots, \tau^\beta_{i,n-1})$ (набор, получающийся из набора $\tilde{\tau}^\beta_i$ приписыванием на первое место значения γ_i). Никакие два набора $\tilde{\tau}^\beta_i$ и $\tilde{\tau}^\beta_j$, а значит, и никакие два набора $\tilde{\sigma}^\beta_{i,\gamma_i}$ и $\tilde{\sigma}^\beta_{j,\gamma_j}$, при $i \neq j$ и одном и том же β, очевидно, не являются соседними, поэтому множество $\{\tilde{\sigma}^{\beta}_{1,\gamma_1}, \ldots, \tilde{\sigma}^{\beta}_{m,\gamma_m}\}$ является независимым в графе C_n. Дополним его произвольным образом до МНМ в этом графе и обозначим полученное множество через $A^{\beta}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m}$.

Достаточно доказать, что среди построенных МНМ $A^{\beta}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m}$ не менее $2 \cdot 2^m - 2 = 2^{m+1} - 2$ различных. Пусть $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \beta', \gamma'_1, \ldots, \gamma'_m$ — такие булевы константы, что $(\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_m) \neq$ $\neq (\beta', \gamma'_1, \ldots, \gamma'_m)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\beta = \beta'$. Тогда существует такое $i \in \{1, \ldots, m\}$, что $\gamma_i \neq \gamma'_i$. Наборы $\tilde{\sigma}^{\beta}_{i,\gamma_i}$ и $\tilde{\sigma}^{\beta}_{i,\gamma'_i}$ являются соседними, поскольку $\tilde{\sigma}^{\beta}_{i,\gamma_i} = (\gamma_i, \tau^{\beta}_{i,1}, \ldots, \tau^{\beta}_{i,n-1})$, $\tilde{\sigma}^{\beta}_{i,\gamma'_i} = (\gamma'_i, \tau^{\beta}_{i,1}, \ldots, \tau^{\beta}_{i,n-1})$. При этом по построению

$$\tilde{\sigma}^{\beta}_{i,\gamma_i} \in A^{\beta}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m} \tag{7.8}$$

и

$$\tilde{\sigma}^{\beta}_{i,\gamma'_i} \in A^{\beta}_{\gamma'_1,\ldots,\gamma'_m}. \tag{7.9}$$

Из (7.8) с учётом независимости множества $A^{\beta}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m}$ следует, что $\tilde{\sigma}^{\beta}_{i,\gamma'_i} \notin A^{\beta}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m}$. Отсюда и из (7.9) вытекает, что множества $A^{\beta}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m}$ и $A^{\beta}_{\gamma'_1,\ldots,\gamma'_m}$ различны.

2. Пусть $\beta \neq \beta'$. Предположим, что $A^{\beta}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m} = A^{\beta'}_{\gamma'_1,\ldots,\gamma'_m}$. Тогда по построению

$$A^{\beta}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_m} \supseteq \{\tilde{\sigma}^{\beta}_{1,\gamma_1}, \ldots, \tilde{\sigma}^{\beta}_{m,\gamma_m}, \tilde{\sigma}^{\beta'}_{1,\gamma'_1}, \ldots, \tilde{\sigma}^{\beta'}_{m,\gamma'_m}\}. \tag{7.10}$$

Допустим также, что не выполнено соотношение $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m$. Тогда существуют такие $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, что $\gamma_i = 0$, $\gamma_j = 1$. Чётность числа единичных компонент наборов $\tilde{\tau}^{\beta}_i =$ $= (\tau^{\beta}_{i,1}, \ldots, \tau^{\beta}_{i,n-1})$ и $\tilde{\tau}^{\beta}_j = (\tau^{\beta}_{j,1}, \ldots, \tau^{\beta}_{j,n-1})$ одинакова (см. определение этих наборов), поэтому

$$(\tau^{\beta}_{i,1} \oplus \tau^{\beta}_{j,1}) \oplus \ldots \oplus (\tau^{\beta}_{i,n-1} \oplus \tau^{\beta}_{j,n-1}) = (\tau^{\beta}_{i,1} \oplus \ldots \oplus \tau^{\beta}_{i,n-1}) \oplus (\tau^{\beta}_{j,1} \oplus \ldots \oplus \tau^{\beta}_{j,n-1}) = 0.$$

Отсюда следует, что число компонент, в которых наборы $\tilde{\tau}^{\beta}_i$ и $\tilde{\tau}^{\beta}_j$ различаются, чётно и не меньше двух (так как $\tilde{\tau}^{\beta}_i \neq \tilde{\tau}^{\beta}_j$). Последовательно заменяя произвольные пары таких компонент набора $\tilde{\tau}^{\beta}_i$ на пары соответствующих компонент набора $\tilde{\tau}^{\beta}_j$, получим последовательность наборов $\tilde{\tau}^{\beta}_{i_1}, \tilde{\tau}^{\beta}_{i_2}, \ldots, \tilde{\tau}^{\beta}_{i_t}$, где $i_1, \ldots, i_t \in \{1, \ldots, m\}$, $i_1 = i$ и $i_t = j$, в которой любые два расположенные рядом набора различаются ровно в двух компонентах. Из равенств $\gamma_{i_1} = 0$, $\gamma_{i_t} = 1$ следует существование такого $r \in \{1, \ldots, t-1\}$, что $\gamma_{i_r} = 0$, $\gamma_{i_{r+1}} = 1$. Тогда наборы

$$\tilde{\sigma}^{\beta}_{i_r,\gamma_{i_r}} = (0, \tau^{\beta}_{i_r,1}, \ldots, \tau^{\beta}_{i_r,n-1}) \tag{7.11}$$

и $\tilde{\sigma}^{\beta}_{i_{r+1},\gamma_{i_{r+1}}} = (1, \tau^{\beta}_{i_{r+1},1}, \ldots, \tau^{\beta}_{i_{r+1},n-1})$ различаются ровно в трёх компонентах; пусть это первая, u-я и v-я компоненты, где $u < v$, т. е.

$$\tilde{\sigma}^{\beta}_{i_{r+1},\gamma_{i_{r+1}}} = (1, \tau^{\beta}_{i_r,1}, \ldots, \tau^{\beta}_{i_r,u-1}, \overline{\tau}^{\beta}_{i_r,u}, \tau^{\beta}_{i_r,u+1}, \ldots, \tau^{\beta}_{i_r,v-1}, \overline{\tau}^{\beta}_{i_r,v}, \tau^{\beta}_{i_r,v+1}, \ldots, \tau^{\beta}_{i_r,n-1}). \tag{7.12}$$

Оба указанных набора принадлежат множеству $A^{\beta}_{\gamma_1,\dots,\gamma_m}$ в силу (7.10).

Заметим, что чётность числа единичных компонент наборов $\tilde{\tau}^{\beta}_{i_r} = (\tau^{\beta}_{i_r,1}, \dots, \tau^{\beta}_{i_r,n-1})$ и $(\tau^{\beta}_{i_r,1}, \dots, \tau^{\beta}_{i_r,u-1}, \overline{\tau}^{\beta}_{i_r,u}, \tau^{\beta}_{i_r,u+1}, \dots, \tau^{\beta}_{i_r,n-1})$ различна, поэтому

$$(\tau^{\beta}_{i_r,1}, \dots, \tau^{\beta}_{i_r,u-1}, \overline{\tau}^{\beta}_{i_r,u}, \tau^{\beta}_{i_r,u+1}, \dots, \tau^{\beta}_{i_r,n-1}) = \tilde{\tau}^{\beta'}_{i'}$$

для некоторого $i' \in \{1, \dots, m\}$. Набор $\tilde{\sigma}^{\beta'}_{i',\gamma'_{i'}} = (\gamma'_{i'}, \tau^{\beta}_{i_r,1}, \dots, \tau^{\beta}_{i_r,u-1}, \overline{\tau}^{\beta}_{i_r,u}, \tau^{\beta}_{i_r,u+1}, \dots, \tau^{\beta}_{i_{r+1},n-1})$ является соседним с набором $\tilde{\sigma}^{\beta}_{i_r,\gamma_{i_r}}$ при $\gamma'_{i'} = 0$ и соседним с набором $\tilde{\sigma}^{\beta}_{i_{r+1},\gamma_{i_{r+1}}}$ при $\gamma'_{i'} = 1$ — см. (7.11), (7.12). Тогда $\tilde{\sigma}^{\beta'}_{i',\gamma'_{i'}} \notin A^{\beta}_{\gamma_1,\dots,\gamma_m}$, однако это противоречит соотношению (7.10). Полученное противоречие означает, что $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m$. Аналогично доказывается соотношение $\gamma'_1 = \ldots = \gamma'_m$.

Далее, набор $\tilde{\tau}^{0}_{1} = (\tau^{0}_{1,1}, \dots, \tau^{0}_{1,n-1})$ содержит чётное число единичных компонент, а набор $(\overline{\tau}^{0}_{1,1}, \tau^{0}_{1,2}, \dots, \tau^{0}_{1,n-1})$ — нечётное, поэтому совпадает с набором $\tilde{\tau}^{1}_{i''}$ для некоторого $i'' \in \in \{1, \dots, m\}$. Наборы $\tilde{\sigma}^{0}_{1,\gamma_1} = (\gamma_1, \tau^{0}_{1,1}, \dots, \tau^{0}_{1,n-1})$ и $\tilde{\sigma}^{1}_{i'',\gamma_{i''}} = (\gamma_{i''}, \overline{\tau}^{0}_{1,1}, \tau^{0}_{1,2}, \dots, \tau^{0}_{1,n-1})$ принадлежат независимому множеству $A^{\beta}_{\gamma_1,\dots,\gamma_m}$ в силу (7.10), т. е. не могут быть соседними. Отсюда заключаем, что $\gamma_1 \neq \gamma_{i''}$. Значит, либо одновременно $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0$ и $\gamma'_1 = \ldots = \gamma'_m = 1$, либо одновременно $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 1$ и $\gamma'_1 = \ldots = \gamma'_m = 0$.

Из приведённых рассуждений в случаях 1 и 2 следует, что из всех множеств $A^{\beta}_{\gamma_1,\dots,\gamma_m}$, где $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ — произвольные булевы константы, совпадать могут только множества $A^{0}_{\tilde{0}^{n-1}}$ и $A^{1}_{\tilde{1}^{n-1}}$, а также множества $A^{0}_{\tilde{1}^{n-1}}$ и $A^{1}_{\tilde{0}^{n-1}}$. Таким образом, общее число различных множеств $A^{\beta}_{\gamma_1,\dots,\gamma_m}$ не меньше $2^{m+1} - 2$. Теорема 7.5 доказана. $\square$

Глава 2. Тесты для схем из функциональных элементов

В данной главе изучаются возможности реализации булевых функций схемами из функциональных элементов в различных полных базисах, допускающими короткие проверяющие или диагностические тесты относительно однотипных константных, произвольных константных либо инверсных неисправностей на входах и/или выходах элементов.

Назовём *блоком* любую СФЭ с одним выходом, в которой отменено приписывание её входам символов переменных (таким образом, формально блок не является СФЭ).

Назовём *цепочкой* любой блок B, состоящий из блоков $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$ для произвольного $m \in \mathbb{N}$, каждый из которых, кроме, возможно, B_1, имеет хотя бы один вход, причём выход блока B совпадает с выходом блока B_m, а в случае $m \geqslant 2$ для любого $i \in \{1, \ldots, m-1\}$ выход блока B_i соединяется хотя бы с одним входом блока B_{i+1} и не соединяется ни с одним входом ни одного из остальных $m-2$ блоков; входами блока B являются все незанятые входы блоков $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$. Важным частным случаем цепочки является цепочка из ФЭ, когда каждый из блоков $\mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m$ является некоторым ФЭ. Будем рассматривать также пустую цепочку (не содержащую ФЭ), отвечающую случаю $m = 0$.

Будем говорить, что ФЭ E' расположен в СФЭ или в цепочке из ФЭ *выше* (*ниже*) ФЭ E, если в этой схеме/цепочке существует ориентированный путь от E' к E (соответственно от E к E'). Среди всех элементов, содержащихся в произвольной СФЭ и принадлежащих произвольному непустому множеству M, будем называть *верхним* (*нижним*) такой элемент из M, выше (соответственно ниже) которого в этой схеме нет ни одного элемента из M. Для любого M как верхний, так и нижний элемент существует (но, возможно, не единственен) в силу конечности любой СФЭ и отсутствия в ней ориентированных циклов.

Введём следующие обозначения: P_2 — множество всех б. ф; T_1 — замкнутый класс б. ф., принимающих значение 1 на наборе, все компоненты которого равны единице (см., например, [260, с. 34]); $I_{\tilde{\sigma}}(\tilde{x}^n)$ — б. ф., принимающая значение 1 на n-наборе $\tilde{\sigma}$ и значение 0 на всех остальных n-наборах.

Два двоичных набора одинаковой длины будем называть *k-соседними*, если они различаются не более, чем в k компонентах, где $k \in \mathbb{N}$.

Б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ называется *самодвойственной*, если $f^* = f$ (см., например, [260, с. 34]).

Для любого ф. п. базиса B обозначим через B^* базис, получающийся из B заменой всех содержащихся в нём б. ф. на двойственные; в силу принципа двойственности базис B^* также является полным.

Напомним обозначения из введения. Пусть буква М обозначает «места» возможных неисправностей ФЭ и М $\in \{\mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{IO}, \mathrm{P}, \mathrm{PI}, \mathrm{PO}, \mathrm{PIO}\}$; буква Н обозначает типы возможных неисправностей ФЭ и Н $\in \{0, 1, 01, \mathrm{Inv}\}$; буква Т обозначает тип теста и Т $\in \{$ЕП, k-П, ПП, ЕД, k-Д, ПД$\}$, где k — произвольное натуральное число. Для краткости неисправности на входах и выходах элементов будем называть *IO-неисправностями*, а неисправности на входах элементов — *I-неисправностями*.

Пусть S — произвольная СФЭ. Произвольный элемент E этой схемы будем считать *разделяющим*, если любая цепочка из ФЭ, соединяющая любой элемент, расположенный в этой схеме выше элемента E, с выходом схемы S, проходит через элемент E.

§8. Принцип двойственности для тестов и другие вспомогательные утверждения

В данном параграфе устанавливается несколько утверждений, которые будут использованы в §§9–18.

Неисправности, возможные места, типы и максимальное число которых однозначно задаются значениями М, Н и Т соответственно, будем называть М,Н,Т-*неисправностями*.

Замечание 8.1. В [87, теорема 3] доказано, что для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, где $n \geqslant 3$, и для любого ф. п. конечного базиса B справедливо неравенство $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(f) \leqslant n+3$; в частности, существует неизбыточная (относительно ПКН на выходах элементов) схема в базисе B, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$. Тогда и для любого (не обязательно конечного) ф. п. базиса B существует неизбыточная схема в этом базисе, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, поскольку из любой полной системы б. ф. можно выделить конечную полную подсистему (см., например, [260, с. 41, теорема 8]), причём эта схема, очевидно, будет неизбыточной и относительно ОКН типа 1 и типа 0 на выходах элементов. Отсюда следует, что для любых $n \geqslant 3$, Н $\in \{0, 1, 01\}$, Т $\in \{$ЕП, ЕД$\}$ и любого ф. п. базиса B определены значения величин $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (O)}}(f)$ и $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (O)}}(n)$.

Выделим возможное представление б. ф. $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_i, \tag{8.1}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Утверждение 8.1. *Для любого* М $\in \{\mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{IO}\}$, *любых допустимых* Н *и* Т, *любого ф. п. базиса* B *и любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *вида* (8.1) *справедливо равенство* $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(f) = 0$.

Доказательство. Функцию f можно реализовать схемой, не содержащей ни одного ФЭ, выход которой совпадает с её входом «x_i». У такой схемы в силу условия на М нет ни одной ф. н., поэтому она неизбыточна и k-неизбыточна для любого $k \in \mathbb{N}$, а пустое множество является для неё тестом типа Т, откуда следует равенство $D(f) = 0$. Утверждение 8.1 доказано. □

Из утверждения 8.1 вытекает, что для любых $n \geqslant 1$, $\mathrm{M} \in \{\mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{IO}\}$, любых допустимых Н и Т и любого ф. п. базиса B значение величины $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(n)$ определено. При $n = 0$ это, вообще говоря, неверно — см. формулировку следующего утверждения при $\mathrm{M} \in \{\mathrm{O}, \mathrm{IO}\}$, $\mathrm{H} = 01$ и $0, 1 \notin B$.

Утверждение 8.2. *Пусть* $\mathrm{M} \in \{\mathrm{O}, \mathrm{IO}, \mathrm{PO}, \mathrm{PIO}\}$; $\mathrm{H} \in \{0, 1, 01\}$; $\mathrm{T} \in \{\text{ЕП}, k\text{-П}, \text{ЕД}, k\text{-Д}\}$, *где k — произвольное натуральное число; α — булева константа, равная* 0 *при* $\mathrm{H} = 0$, *равная* 1 *при* $\mathrm{H} = 1$ *и произвольная при* $\mathrm{H} = 01$. *Тогда для любого ф. п. базиса B, не содержащего константу α, значение величины $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$ при $f(\tilde{x}^n) \equiv \alpha$ не определено.*

Доказательство. Пусть S — произвольная СФЭ в базисе B, реализующая константу α. Выход схемы S не может совпадать ни с одним из её входов (иначе она бы реализовывала б. ф. вида (8.1)), поэтому он является выходом некоторого ФЭ. Тогда при неисправности типа α этого выхода (такая неисправность возможна в силу условий на М, Н и B) получающаяся схема по-прежнему будет реализовывать константу α, т. е. схема S избыточна и k-избыточна для любого $k \in \mathbb{N}$. Получаем, что неизбыточных и k-неизбыточных схем в базисе B, реализующих функцию f при $f \equiv \alpha$, не существует и значение $D(f)$ не определено. Утверждение 8.2 доказано. □

В нижеследующем утверждении 8.3 приведён пример допустимых М, Н, Т, полного базиса B и неконстантной булевой функции $f(\tilde{x}^n)$, для которых значение $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$ также не определено.

Рассмотрим базис $B_{13} = \{x \& \overline{y}, x \vee \overline{y}\}$; он является ф. п. в силу [260, с. 40, теорема 7].

Утверждение 8.3. *Значение величины $D^{B_{13};\,01}_{\text{ЕП}\,(\mathrm{O})}(f)$ при $f(x_1) = \overline{x}_1$ не определено.*

Доказательство. Пусть S — произвольная СФЭ в базисе B_{13}, реализующая б. ф. $f(x_1)$. В этой схеме имеется хотя бы один элемент, так как функция f не представима в виде (8.1). Рассмотрим произвольный верхний элемент E схемы S. Оба его входа, очевидно, обязаны соединяться с единственным входом «x_1» схемы S. Но тогда на выходе элемента E в схеме S реализуется либо функция $x_1 \& \overline{x}_1 \equiv 0$, либо функция $x_1 \vee \overline{x}_1 \equiv 1$. В первом случае неисправность типа 0, а во втором — неисправность типа 1 на этом выходе никак не отразится на функции, реализуемой схемой S; тем самым данная схема избыточна. Получаем, что неизбыточных схем в базисе B_{13}, реализующих функцию f, не существует и, следовательно, значение $D(f)$ не определено. Утверждение 8.3 доказано. $\square$

Под неисправностью типа Inv входа/выхода ФЭ либо входа СФЭ в дальнейшем понимается инверсная неисправность этого входа/выхода ФЭ (соответственно входа СФЭ).

Утверждение 8.4. *Пусть* $\mathrm{M} \in \{\mathrm{O}, \mathrm{IO}, \mathrm{PO}, \mathrm{PIO}\}$. *Тогда для любых допустимых* Н, Т, *любого ф. п. базиса* B *и любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$, *не представимой в виде* (8.1), *отличной от константы* 0 *в случае* $\mathrm{H} = 0$ *и от константы* 1 *в случае* $\mathrm{H} = 1$, *справедливо неравенство* $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f) \geqslant 1$, *если значение* $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$ *определено.*

Доказательство. Достаточно доказать, что у любой СФЭ S в базисе B, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$ и неизбыточной относительно М,Н,Т-неисправностей, есть хотя бы одна нетривиальная ф. н.. Выход схемы S не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого ФЭ E. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $\mathrm{H} \in \{0, 1, \mathrm{Inv}\}$. Неисправность типа Н указанного выхода невозможна только в том случае, когда E — элемент «константа α» и при этом $\mathrm{H} = \alpha$ для некоторого $\alpha \in \{0, 1\}$; но тогда $f \equiv \alpha$, что противоречит условию утверждения как при $\alpha = 0$, так и при $\alpha = 1$. Таким образом, неисправность типа Н выхода элемента E возможна. При этой неисправности схема S станет реализовывать ф. н. $g(\tilde{x}^n)$, равную константе 0 при $\mathrm{H} = 0$, константе 1 при $\mathrm{H} = 1$ и функции $\overline{f}$ при $\mathrm{H} = \mathrm{Inv}$. С учётом условий на функцию f в каждом из указанных случаев $g \neq f$, что и требовалось доказать.

2. Пусть $\mathrm{H} = 01$. Очевидно, что $f \not\equiv \beta$ для некоторого $\beta \in \{0, 1\}$, поэтому E не является элементом «константа β». Тогда при неисправности типа β выхода элемента E схема S станет реализовывать ф. н. $g \equiv \beta$, отличную от функции f. Утверждение 8.4 доказано. $\square$

Утверждение 8.5. *Пусть* $\mathrm{M} \in \{\mathrm{O}, \mathrm{IO}, \mathrm{PO}, \mathrm{PIO}\}$ *и* $\mathrm{H} = 01$. *Тогда для любого допустимого* Т, *любого ф. п. базиса* B *и любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$, *не представимой в виде* (8.1) *и отличной от констант, справедливо неравенство* $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f) \geqslant 2$, *если значение* $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f)$ *определено.*

Доказательство. Выход любой СФЭ S в базисе B, реализующей функцию $f(\tilde{x}^n)$, не может совпадать ни с одним и входов данной схемы, поэтому он является выходом некоторого ФЭ E. Пусть α — произвольная булева константа. Элемент E не является элементом «константа α», так как $f \not\equiv \alpha$. Тогда на выходе этого элемента возможна неисправность типа α, при которой схема S станет реализовывать константу α. Указанную константу можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ только на тех n-наборах, на которых f принимает значение $\overline{\alpha}$. Таким образом, в любом тесте типа Т для схемы S должен присутствовать хотя бы один нулевой и хотя бы один единичный набор функции $f(\tilde{x}^n)$, откуда следует, что $D(S) \geqslant 2$, а в силу произвольности схемы S — что $D(f) \geqslant 2$, если значение $D(f)$ определено. Утверждение 8.5 доказано. □

Утверждение 8.6. *Пусть* $\mathrm{M} \in \{\mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{IO}\}$; B — *ф. п. базис, содержащий булеву константу* α, *и* $f(\tilde{x}^n) \equiv \alpha$. *Тогда для любых допустимых* Н *и* Т *справедливо равенство* $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f) = 0$, *если* $\mathrm{M} = \mathrm{I}$ *или* $\mathrm{H} = \alpha$, *и равенство* $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f) = 1$ *в остальных случаях.*

Доказательство. Функцию f можно реализовать СФЭ S в базисе B, состоящей из одного элемента «константа α» (обозначим этот элемент через E). Он не имеет входов, а на его выходе невозможна неисправность типа α, поэтому в каждом из случаев $\mathrm{M} = \mathrm{I}$, $\mathrm{H} = \alpha$ у схемы S нет ни одной ф. н. и пустое множество является для неё тестом типа Т относительно М,Н,Т-неисправностей (с учётом того, что во втором из этих случаев $\mathrm{M} \in \{\mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{IO}\}$), а сама эта схема неизбыточна и k-неизбыточна для любого $k \in \mathbb{N}$, откуда следует равенство $D(f) = 0$.

Пусть теперь одновременно $\mathrm{M} \neq \mathrm{I}$ и $\mathrm{H} \neq \alpha$, т. е. $\mathrm{M} \in \{\mathrm{O}, \mathrm{IO}\}$ и $\mathrm{H} \in \{\overline{\alpha}, 01, \mathrm{Inv}\}$. Тогда в схеме S возможна только неисправность типа $\overline{\alpha}$ (при $\mathrm{H} \in \{\overline{\alpha}, 01\}$) либо инверсная неисправность (при $\mathrm{H} = \mathrm{Inv}$) выхода элемента E, при каждой из которых схема станет реализовывать константу $\overline{\alpha}$. Указанная неисправность обнаруживается на любом n-наборе, поэтому $D(f) \leqslant D(S) \leqslant 1$. С другой стороны, выход любой СФЭ в базисе B, реализующей константу α, не может совпадать ни с одним из входов данной схемы, поэтому он является выходом некоторого ФЭ. Тогда при неисправности типа $\overline{\alpha}$ (в случае $\mathrm{H} \in \{\overline{\alpha}, 01\}$) либо инверсной неисправности (в случае $\mathrm{H} = \mathrm{Inv}$) выхода этого элемента получающаяся схема станет реализовывать константу $\overline{\alpha}$, которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, откуда следует, что $D(f) \geqslant 1$. Окончательно имеем $D(f) = 1$. Утверждение 8.6 доказано. □

Утверждение 8.7. *Пусть* $\mathrm{M} \in \{\mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{IO}\}$; $\mathrm{H} = 01$; B — *ф. п. базис, содержащий функцию* $\overline{x}$, *и* $f(\tilde{x}^n) = \overline{x}_i$ *для некоторого* $i \in \{1, \ldots, n\}$. *Тогда для любого допустимого* Т *справедливо неравенство* $D^{B;\,\mathrm{H}}_{\mathrm{T}\,(\mathrm{M})}(f) \leqslant 2$.

Доказательство. Функцию f можно реализовать схемой S в базисе B, состоящей из одного инвертора, на вход которого подаётся переменная x_i. Очевидно, что у данной схемы есть только две ф. н. — константы 0 и 1, которые можно отличить друг от друга и от функции f на множестве, состоящем из любого $(i,0)$-набора и любого $(i,1)$-набора. Поэтому схема S неизбыточна и k-неизбыточна для любого $k \in \mathbb{N}$ и допускает тест типа Т длины 2, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 2$. Утверждение 8.7 доказано. $\square$

Утверждение 8.8. *Пусть ф. п. базисы B и B' таковы, что $B \subset B'$. Тогда для любых допустимых* М, Н, Т *и любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо неравенство $D^{B';\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f) \leqslant D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f)$, если значение его правой части определено.*

Утверждение 8.8 следует из того соображения, что любая СФЭ в базисе B является СФЭ в базисе B', причём её свойства неизбыточности и k-неизбыточности сохраняются при переходе от базиса B к базису B'.

Положим

$$\mathrm{Н}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathrm{Н} = 0, \\ 0, & \text{если } \mathrm{Н} = 1, \\ \mathrm{Н}, & \text{если } \mathrm{Н} \in \{01, \mathrm{Inv}\}. \end{cases}$$

Легко проверяется соотношение $(\mathrm{Н}^*)^* = \mathrm{Н}$. Очевидно также, что $(B^*)^* = B$ для любого ф. п. базиса B.

Пусть E_1 и E_2 — произвольные ФЭ с одинаковым числом входов, S_1 и S_2 — произвольные СФЭ с одними и теми же входными переменными и $\mathrm{Н} \in \{0, 1, \mathrm{Inv}\}$. Неисправность типа $\mathrm{Н}^*$ произвольного входа/выхода элемента E_2 (произвольного входа схемы S_2) будем считать *двойственной* неисправности типа Н того же входа/выхода элемента E_1 (соответственно того же входа схемы S_1).

Сформулируем аналог принципа двойственности для задачи синтеза легкотестируемых СФЭ.

Утверждение 8.9. *Для любого ф. п. базиса B, любых допустимых* М, Н, Т *и любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство $D^{B^*;\,\mathrm{Н}^*}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f^*) = D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f)$, если значение его правой части определено.*

Доказательство. Докажем сначала неравенство

$$D^{B^*;\,\mathrm{Н}^*}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f^*) \leqslant D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f). \tag{8.2}$$

Пусть S — такая СФЭ в базисе B, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, что $D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(S) = D^{B;\,\mathrm{Н}}_{\mathrm{Т}\,(\mathrm{М})}(f)$, причём в случае $\mathrm{Т} \in \{\text{ЕП}, \text{ЕД}\}$ схема S неизбыточна, а в случае $\mathrm{Т} \in \{k\text{-П}, k\text{-Д}\}$ она k-неизбыточна. Обозначим через S^* схему, которая получается из схемы S заменой каждого ФЭ на элемент с тем же числом входов, реализующий двойственную б. ф.; тогда S^* является СФЭ в базисе B^*. Докажем **свойство (i)** схем S, S^*: при наличии произвольных М,Н*,Т-неисправностей в схеме S^* (число которых может быть равно 0) и двойственных им М,Н,Т-неисправностей в схеме S на выходах этих схем реализуются двойственные друг другу б. ф..

В схеме S, рассматриваемой как конечный ориентированный граф без ориентированных циклов, можно ввести монотонную нумерацию вершин, при которой все вершины схемы S занумерованы различными натуральными числами от 1 до N, где N — общее число вершин в схеме. Такую же нумерацию вершин, очевидно, можно ввести и в схеме S^*. Докажем по индукции, что при рассматриваемых М,Н*,Т-неисправностях в схеме S^* и двойственных им М,Н,Т-неисправностях в схеме S в i-х вершинах этих схем реализуются двойственные друг другу б. ф., где $i = 1, \ldots, N$; отсюда будет следовать справедливость свойства (i), так как вершины, отвечающие выходам схем S и S^*, имеют один и тот же номер из множества $\{1, \ldots, N\}$.

База индукции. Пусть $i = 1$. Первые вершины схем S и S^*, очевидно, являются либо а) входами схем, отвечающими какой-то одной и той же переменной x_s, где $s \in \{1, \ldots, n\}$, либо б) элементами соответственно «константа δ» и «константа $\overline{\delta}$» для некоторого $\delta \in \{0, 1\}$ (не имеющими входов). В случае а) при отсутствии неисправностей на этих входах схем S и S^* (соответственно при инверсных неисправностях этих входов схем S и S^*, при неисправности типа $c \in \{0, 1\}$ входа «x_s» схемы S^* и двойственной неисправности типа $\overline{c}$ входа «x_s» схемы S) в первых вершинах схем S и S^* реализуются функции x_s и x_s (соответственно $\overline{x}_s$ и $\overline{x}_s$, $\overline{c}$ и c); в случае б) при отсутствии неисправностей на выходах этих элементов (соответственно при инверсных неисправностях на выходах этих элементов, при неисправности типа $\overline{\delta}$ выхода элемента «константа δ» и двойственной неисправности типа δ выхода элемента «константа $\overline{\delta}$») в первых вершинах схем S и S^* реализуются функции $\overline{\delta}$ и δ (соответственно δ и $\overline{\delta}$, δ и $\overline{\delta}$). Б. ф. из каждой из указанных пар функций являются двойственными друг другу; база индукции доказана.

Предположение и шаг индукции. Пусть утверждение доказано для $i = 1, \ldots, j$, где $j < N$; докажем его для $i = j + 1$. Если $(j + 1)$-я вершина каждой из схем S, S^* является входом схемы, то он отвечает одной и той же переменной и доказательство аналогично доказательству базы индукции. Пусть $(j+1)$-я вершина схемы S^* (схемы S) является ФЭ E^* (соответственно E); элемент E^* имеет m входов и при рассматриваемых М,Н*,Т-неисправностях в схеме S^* реализует б. ф. $\psi(\tilde{x}^m)$ от своих входов, на которые подаются б. ф. $\varphi_1(\tilde{x}^n), \ldots, \varphi_m(\tilde{x}^n)$, реализуемые в этой схеме в вершинах с номерами, не превосходящими j (в силу монотонности нумерации). По предположению индукции при двойственных М,Н,Т-неисправностях в схеме S на входы элемента E в этой схеме подаются функции $\varphi_1^*(\tilde{x}^n), \dots, \varphi_m^*(\tilde{x}^n)$. Достаточно доказать, что при этих неисправностях элемент E реализует функцию $\psi^*(\tilde{x}^m)$ от своих входов; отсюда будет вытекать, что на выходах элементов E и E^*, т. е. в $(j+1)$-х вершинах схем S и S^*, реализуются функции соответственно $\psi^*(\varphi_1^*(\tilde{x}^n), \dots, \varphi_m^*(\tilde{x}^n))$ и $\psi(\varphi_1(\tilde{x}^n), \dots, \varphi_m(\tilde{x}^n))$, двойственные друг другу по принципу двойственности, и шаг индукции будет доказан.

При неисправности типа $c \in \{0, 1\}$ выхода элемента E^* схемы S^* и двойственной неисправности типа $\overline{c}$ выхода элемента E схемы S на этих выходах реализуются константы c и $\overline{c}$ соответственно, т. е. $\psi(\tilde{x}^m) \equiv c$, а элемент E реализует функцию $\overline{c} \equiv \psi^*(\tilde{x}^m)$ от своих входов, что и требовалось доказать. Далее рассмотрим случай, когда выход элемента E^* схемы S^* исправен или имеет место инверсная неисправность этого выхода. Пусть при отсутствии неисправностей в схеме S^* элемент E^* реализует б. ф. $\xi(\tilde{x}^m)$ от своих входов. С учётом возможных константных либо инверсных неисправностей некоторых входов и/или выхода элемента E^* функция $\psi(\tilde{x}^m)$ получается из функции $\xi(\tilde{x}^m)$ подстановкой вместо переменных из некоторых непересекающихся множеств $X_0, X_1 \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$ констант 0, 1 соответственно либо инверсией переменных из некоторого множества $X_{\text{Inv}} \subseteq \{x_1, \dots, x_m\}$, а также заменой самой полученной к данному моменту функции $\theta(\tilde{x}^m)$ на функцию $\theta^\alpha(\tilde{x}^m)$ при $\alpha \in \{0, 1\}$ (в зависимости от исправности или неисправности выхода элемента E^*; в случае Н $\in \{0, 1, 01\}$ обязательно $\alpha = 1$), совпадающую с функцией $\psi(\tilde{x}^m)$. При отсутствии неисправностей в схеме S элемент E по построению реализует двойственную к $\xi(\tilde{x}^m)$ функцию $\xi^*(\tilde{x}^m)$ от своих входов. При М,Н,Т-неисправностях в схеме S, двойственных рассматриваемым М,Н*,Т-неисправностям в схеме S^*, элемент E реализует функцию от своих входов, получающуюся из функции $\xi^*(\tilde{x}^m)$ подстановкой вместо переменных из множеств X_0, X_1 констант 1, 0 соответственно либо инверсией переменных из множества X_{Inv} и последующим возведением в булеву степень α. По принципу двойственности эта функция равна $(\theta^*)^\alpha(\tilde{x}^m) = (\theta^\alpha)^*(\tilde{x}^m)$, т. е. равна $\psi^*(\tilde{x}^m)$. Тем самым требуемое утверждение, а вместе с ним шаг индукции и свойство (i) доказаны.

Из свойства (i) следует, что схема S^* при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f^*(\tilde{x}^n)$. Пусть T — тест типа Т для схемы S длины $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(S) = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f)$ относительно М,Н,Т-неисправностей; T^* — множество той же мощности, что и T, получающееся из T заменой каждого набора на противоположный. Для любой ф. н. $g_1(\tilde{x}^n)$ схемы S^* относительно М,Н*,Т-неисправностей в силу свойства (i) у схемы S есть ф. н. $g_1^*(\tilde{x}^n)$ относительно М,Н,Т-неисправностей. Рассмотрим шесть случаев.

1. Пусть Т = ЕП. Тогда по построению схема S неизбыточна (относительно М,Н,Т-неисправностей), поэтому $g_1^* \neq f$. Отсюда вытекает, что $g_1^*(\tilde{\sigma}) \neq f(\tilde{\sigma})$ хотя бы для одного набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ из множества T, так как T — ЕПТ для схемы S. Из последнего неравенства получаем, что

$$g_1(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n) = \overline{g_1^*}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \overline{f^*}(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n), \tag{8.3}$$

т. е.

$$g_1(\tilde{\sigma}^*) \neq f^*(\tilde{\sigma}^*), \tag{8.4}$$

где $\tilde{\sigma}^* = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$, причём $\tilde{\sigma}^* \in T^*$ по определению множества T^*. Значит, любую ф. н. схемы S^* (относительно М,Н*,Т-неисправностей) можно отличить от «правильной» функции f^*, реализуемой данной схемой, хотя бы на одном наборе из множества T^*, вследствие чего схема S^* неизбыточна, а множество T^* является для неё ЕПТ. В итоге имеем

$$D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f^*) \leqslant D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(S^*) \leqslant D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(T^*) = |T^*| = |T| = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(T) = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(S) = \\ = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f), \tag{8.5}$$

и требуемое неравенство (8.2) доказано.

2. Пусть Т $= k$-П, где $k \in \mathbb{N}$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1 с заменой всех вхождений слова «неизбыточна» на «k-неизбыточна», а также «ЕПТ» на «k-ПТ».

3. Пусть Т = ПП. Тогда либо $g_1^* = f$, либо $g_1^*(\tilde{\sigma}) \neq f(\tilde{\sigma})$ хотя бы для одного набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ из множества T. В первом из этих случаев получаем, что $g_1 = f^*$, а во втором, рассуждая аналогично случаю 1 — что выполнены соотношения (8.3) и (8.4), откуда вытекает, что любую нетривиальную ф. н. схемы S^* (относительно М,Н*,Т-неисправностей) можно отличить от «правильной» функции f^*, реализуемой данной схемой, хотя бы на одном наборе из множества T^*, которое тем самым является ППТ для схемы S^*. Тогда справедливо соотношение (8.5) и требуемое неравенство (8.2) доказано.

4. Пусть Т = ЕД. Тогда по построению схема S неизбыточна и множество T является для неё ЕДТ, а значит, и ЕПТ (относительно М,Н,Т-неисправностей). Дословно повторяя рассуждения из случая 1, получаем, что схема S^* неизбыточна, а множество T^* является для неё ЕПТ (относительно М,Н*,Т-неисправностей). Для любой ф. н. $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S^*, отличной от $g_1(\tilde{x}^n)$ (если такая ф. н. g_2 существует), в силу свойства (i) у схемы S есть ф. н. $g_2^*(\tilde{x}^n)$, причём $g_1^* \neq g_2^*$, поскольку $g_1^*(\tilde{x}^n) = \overline{g}_1(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ и $g_2^*(\tilde{x}^n) = \overline{g}_2(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Тогда $g_1^*(\tilde{\pi}) \neq g_2^*(\tilde{\pi})$ хотя бы для одного набора $\tilde{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ из множества T, так как T — ЕДТ

для схемы S. Из последнего неравенства получаем, что

$$g_1(\overline{\pi}_1, \ldots, \overline{\pi}_n) = \overline{g_1^*}(\pi_1, \ldots, \pi_n) = g_2^*(\pi_1, \ldots, \pi_n) = \overline{g}_2(\overline{\pi}_1, \ldots, \overline{\pi}_n),$$

т. е. $g_1(\tilde{\pi}^*) \neq g_2(\tilde{\pi}^*)$, где $\tilde{\pi}^* = (\overline{\pi}_1, \ldots, \overline{\pi}_n)$, причём $\tilde{\pi}^* \in T^*$ по определению множества T^*. Значит, любые две различные ф. н. схемы S^* можно отличить друг от друга хотя бы на одном наборе из множества T^*, поэтому оно является ЕДТ для данной схемы. Тогда справедливо соотношение (8.5) и требуемое неравенство (8.2) доказано.

5. Пусть Т $=$ k-Д, где $k \in \mathbb{N}$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 4 с заменой всех вхождений слова «неизбыточна» на «k-неизбыточна», «ЕПТ» на «k-ПТ», «ЕП» на «k-П» и «ЕДТ» на «k-ДТ» (указанную замену необходимо произвести в том числе в случае 1, на который есть ссылка в разборе случая 4).

6. Пусть Т $=$ ПД. Тогда множество T является ПДТ, а значит, и ППТ для схемы S (относительно М,Н,Т-неисправностей). Дословно повторяя рассуждения из случая 3, получаем, что множество T^* является ППТ для схемы S^* (относительно М,Н*,Т-неисправностей). Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично рассуждениям из случая 4, начиная со слов «Для любой ф. н. $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S^*, отличной от $g_1(\tilde{x}^n)$ …», с заменой всех «ЕДТ» на «ПДТ».

Во всех случаях неравенство (8.2) доказано (в частности, значение $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f^*)$ определено). Подставляя в обе части этого неравенства вместо B, Н и f соответственно B^*, Н* и f^*, получаем $D^{(B^*)^*;\,(\text{Н}^*)^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}((f^*)^*) \leqslant D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f^*)$, т. е. $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f) \leqslant D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f^*)$, откуда с учётом (8.2) окончательно имеем $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f^*) = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f)$. Утверждение 8.9 доказано. □

Следствие 8.1. *Для любого ф. п. базиса B, любых допустимых* М, Н, Т *и любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n) = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$, если значение его правой части определено.*

Доказательство. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — такая б. ф., что $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f) = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$. Тогда из утверждения 8.9 следует, что

$$D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n) \geqslant D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f^*) = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f) = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n),$$

т. е. $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n) \geqslant D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$ (в частности, значение $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$ определено). Подставляя в последнее неравенство вместо B и Н соответственно B^* и Н*, получаем $D^{(B^*)^*;\,(\text{Н}^*)^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n) \geqslant$ $\geqslant D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$, т. е. $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n) \geqslant D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$. Окончательно имеем $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n) = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$. Следствие 8.1 доказано. □

С использованием утверждения 8.9 и следствия 8.1 из всех упомянутых в данной диссертации результатов, в формулировках которых присутствует хотя бы одна величина вида

$D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(f)$ или $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т (М)}}(n)$ (такие результаты содержатся во введении и в §§9–18), можно получать аналогичные результаты для величин вида $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т (М)}}(f^*)$ или $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т (М)}}(n)$; при этом результаты, содержащие величины вида $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т (М)}}(f^*)$, как показано в следующих двух примерах, можно переформулировать для величин «более естественного» вида $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т (М)}}(f)$.

Пример 8.1. Из теоремы 16.3 (см. с. 315) можно получить следующий результат: для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $D^{B^*_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (ИО)}}(n) = 4$ при $n \geqslant 3$, причём в случае $k \geqslant 2$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B^*_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (ИО)}}(f) = 4$ (определение базиса $B_{11}(k)$ см. на с. 304).

Пример 8.2. Выделим возможное представление б. ф. $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = D_1 \& \ldots \& D_m, \tag{8.6}$$

где $m \geqslant 1$ и каждый множитель D_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x}_{i_j}$, либо $x_{i_j} \vee x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i'_j$.

Отметим, что представление (8.1) является частным случаем представления (8.6).

Из теоремы 10.2 (см. с. 220) с учётом соотношения $B^*_0 = B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ и того, что вид (8.1) является двойственным самому себе, а вид (8.6) — двойственным виду (10.1) (см. с. 220), можно получить следующий результат.

Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 0, справедливо равенство

$$D^{B_0;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.6), но не в виде (8.1)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.6)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D^{B_0;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ не определено.

Поясним последнее предложение. Если бы значение $D^{B_0;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ было определено, то в силу утверждения 8.9 имело бы место равенство $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(f^*) = D^{B_0;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f)$, где $f^* \equiv 1$; в частности, значение $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(f^*)$ было бы определено, однако это противоречит теореме 10.2.

В дальнейшем для краткости результаты, содержащие величины видов $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т (М)}}(f)$ и $D^{B^*;\,\text{Н}^*}_{\text{Т (М)}}(n)$ и получаемые из результатов §§9–18 с использованием утверждения 8.9 и следствия 8.1, будут выписываться явно, только если эти результаты не содержат конкретных представлений функции f (в отличие от примера 8.2) и, кроме того, выполнен хотя бы один из указанных ниже случаев:

а) Н $\in \{0, 1\}$ (тогда Н$^* \neq$ Н и получаются результаты для неисправностей «нового» типа по сравнению с исходными результатами);

б) базис B^* оказывается простым — например, $B^* = \{\&, \vee, \neg\}$ или $B^* = \{\vee, \neg\}$.

Следующее утверждение интуитивно довольно очевидно (от перестановки переменных у б. ф. минимально возможная длина теста для реализующих её СФЭ в заданном ф. п. базисе не меняется); тем не менее, строго докажем его.

Утверждение 8.10. *Пусть натуральное число n, б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ и $f'(\tilde{x}^n)$ и попарно различные индексы $i_1, \ldots, i_n$ от 1 до n таковы, что $f'(\tilde{x}^n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Тогда для любого ф. п. базиса B и любых допустимых* М, Н, Т *справедливо равенство $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f') = D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f)$, если значение его правой части определено.*

Доказательство сходно с доказательством утверждения 8.9. Установим сначала неравенство

$$D(f') \leqslant D(f). \tag{8.7}$$

Пусть S — такая СФЭ в базисе B, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, что $D(S) = D(f)$, причём в случае $\text{Т} \in \{\text{ЕП}, \text{ЕД}\}$ схема S неизбыточна, а в случае $\text{Т} \in \{k\text{-П}, k\text{-Д}\}$ она k-неизбыточна. Обозначим через S' схему, получающуюся из схемы S подачей на её входы «x_1», …, «x_n» переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ соответственно. Введём в схеме S, рассматриваемой как конечный ориентированный граф без ориентированных циклов, произвольную монотонную нумерацию вершин натуральными числами от 1 до N, где N — общее число вершин в схеме. Такую же нумерацию вершин можно ввести и в схеме S' (при этом для любого $q \in \{1, \ldots, n\}$ вершины схем S и S', отвечающие переменным x_q и x_{i_q} соответственно, получат одинаковые номера). Для удобства произвольную неисправность входа/выхода произвольного элемента схемы S будем считать *эквивалентной* такой же неисправности входа/выхода элемента схемы S' с тем же номером, а произвольную неисправность произвольного входа схемы S — *эквивалентной* такой же неисправности входа схемы S' с тем же номером.

Докажем **свойство (ii)** схем S, S': при наличии произвольных М,Н,Т-неисправностей в схеме S' (число которых может быть равно 0) и эквивалентных им неисправностей в схеме S реализуемые на выходах этих схем б. ф. соответственно $h(\tilde{x}^n)$ и $h'(\tilde{x}^n)$ связаны соотношением $h'(\tilde{x}^n) = h(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Для этого достаточно доказать, что при рассматриваемых неисправностях в схемах S и S' реализуемые в r-х вершинах этих схем б. ф. соответственно $h_r(\tilde{x}^n)$ и $h'_r(\tilde{x}^n)$ связаны соотношением $h'_r(\tilde{x}^n) = h_r(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, где $r = 1, \ldots, N$; последний факт докажем индукцией по r.

База индукции. Пусть $r = 1$. Первые вершины схем S и S', очевидно, являются либо а) входами схем, отвечающими переменным соответственно x_q и x_{i_q} для некоторого $q \in \in \{1, \ldots, n\}$, либо б) элементами «константа δ» для некоторого $\delta \in \{0, 1\}$. В случае а) при отсутствии неисправностей (соответственно при инверсных неисправностях, при неисправностях типа $c \in \{0,1\}$) на этих входах реализуемые в указанных вершинах схем S и S^* функции $h_1(\tilde{x}^n)$ и $h_1'(\tilde{x}^n)$ равны x_q и x_{i_q} (соответственно $\overline{x}_q$ и $\overline{x}_{i_q}$, c и c); в случае б) при отсутствии неисправностей (соответственно при инверсных неисправностях, при неисправностях типа $\overline{\delta}$) на выходах этих элементов обе функции $h_1(\tilde{x}^n)$, $h_1'(\tilde{x}^n)$ равны δ (соответственно δ, $\overline{\delta}$). Легко видеть, что в каждом из рассматриваемых случаев $h_1'(\tilde{x}^n) = h_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$; база индукции доказана.

Предположение и шаг индукции. Пусть утверждение доказано для $r = 1, \ldots, t$, где $t < N$; докажем его для $r = t+1$. Если $(t+1)$-е вершины схем S, S' являются их входами, то доказательство аналогично доказательству базы индукции. Пусть $(t+1)$-я вершина схемы S' (схемы S) является ФЭ E' (соответственно E); элемент E' имеет m входов и при рассматриваемых неисправностях в схеме S' реализует б. ф. $\psi(\tilde{x}^m)$ от своих входов, на которые подаются функции $h_{r_1}'(\tilde{x}^n), \ldots, h_{r_m}'(\tilde{x}^n)$, реализуемые в этой схеме в вершинах с номерами $r_1, \ldots, r_m$ соответственно, каждый из которых в силу монотонности нумерации не превосходит t. По предположению индукции $h_r'(\tilde{x}^n) = h_r(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ для любого $r \in \{r_1, \ldots, r_m\}$. Тогда на выходе элемента E' в схеме S реализуется б. ф. $h_{t+1}'(\tilde{x}^n) = \psi(h_{r_1}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}), \ldots, h_{r_m}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}))$. Достаточно доказать, что $h_{t+1}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = \psi(h_{r_1}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}), \ldots, h_{r_m}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}))$, т. е. что

$$h_{t+1} = \psi(h_{r_1}, \ldots, h_{r_m}). \tag{8.8}$$

По построению элемент E также имеет m входов реализует ту же б. ф. от своих входов, что и элемент E', при отсутствии неисправностей на входах/выходах элементов E и E', а значит, очевидно, и при рассматриваемых неисправностях на входах/выходе элемента E' и эквивалентных им неисправностях на входах/выходе элемента E, т. е. функцию $\psi(\tilde{x}^m)$. На входы элемента E в схеме S подаются функции $h_{r_1}(\tilde{x}^n), \ldots, h_{r_m}(\tilde{x}^n)$, реализуемые в этой схеме в вершинах с номерами $r_1, \ldots, r_m$ соответственно. Таким образом, реализуемая на выходе элемента E в схеме S функция $h_{t+1}(\tilde{x}^n)$ равна $\psi(h_{r_1}(\tilde{x}^n), \ldots, h_{r_m}(\tilde{x}^n))$, соотношение (8.8) выполнено и шаг индукции, а вместе с ним и свойство (ii) доказаны.

Из свойства (ii) следует, что схема S' при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f'(\tilde{x}^n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Пусть T — тест типа Т для схемы S длины $D(S) = D(f)$ (относительно М,Н,Т-неисправностей); T' — множество той же мощности, что и T, получающееся из T заменой каждого набора $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ на набор $(\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_n})$, где $j_1, \ldots, j_n$ — такие попарно различные индексы от 1 до n, что $j_{i_1} = 1, \ldots, j_{i_n} = n$. Для любой ф. н. $g_1'(\tilde{x}^n)$ схемы S' в силу свойства (ii) у схемы S есть такая ф. н. $g_1(\tilde{x}^n)$, что $g_1'(\tilde{x}^n) = g_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Рассмотрим шесть случаев.

1. Пусть Т = ЕП. Тогда по построению схема S неизбыточна, поэтому $g_1 \neq f$. Отсюда вытекает, что $g_1(\tilde{\sigma}) \neq f(\tilde{\sigma})$ хотя бы для одного набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ из множества T, так как T — ЕПТ для схемы S. Из последнего неравенства получаем, что

$$g_1'(\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_n}) = g_1(\sigma_{j_{i_1}}, \ldots, \sigma_{j_{i_n}}) = g_1(\tilde{\sigma}) = \overline{f}(\tilde{\sigma}) = \overline{f}(\sigma_{j_{i_1}}, \ldots, \sigma_{j_{i_n}}) = \overline{f'}(\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_n}), \quad (8.9)$$

т. е.

$$g_1(\tilde{\sigma}') \neq f'(\tilde{\sigma}'), \quad (8.10)$$

где $\tilde{\sigma}' = (\sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_n})$, причём $\tilde{\sigma}' \in T'$ по определению множества T'. Значит, любую ф. н. схемы S' можно отличить от «правильной» функции f', реализуемой этой схемой, хотя бы на одном наборе из множества T'. Отсюда следует, что схема S' неизбыточна, а множество T' является для неё ЕПТ. В итоге имеем

$$D(f') \leqslant D(S') \leqslant D(T') = |T'| = |T| = D(T) = D(S) = D(f), \quad (8.11)$$

и требуемое неравенство (8.7) доказано.

2. Пусть Т = k-П, где $k \in \mathbb{N}$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1 с заменой всех вхождений слова «неизбыточна» на «k-неизбыточна», а также «ЕПТ» на «k-ПТ».

3. Пусть Т = ПП. Тогда либо $g_1 = f$, либо $g_1(\tilde{\sigma}) \neq f(\tilde{\sigma})$ хотя бы для одного набора $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ из множества T. В первом из этих случаев получаем, что

$$g_1'(\tilde{x}^n) = g_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) = f'(\tilde{x}^n),$$

а во втором, рассуждая аналогично случаю 1 — что выполнены соотношения (8.9) и (8.10), откуда вытекает, что любую нетривиальную ф. н. схемы S' можно отличить от «правильной» функции f', реализуемой данной схемой, хотя бы на одном наборе из множества T', которое тем самым является ППТ для схемы S'. Тогда справедливо соотношение (8.11) и требуемое неравенство (8.7) доказано.

4. Пусть Т = ЕД. Тогда по построению схема S неизбыточна и множество T является для неё ЕДТ, а значит, и ЕПТ. Дословно повторяя рассуждения из случая 1, получаем, что схема S' неизбыточна, а множество T' является для неё ЕПТ. Для любой ф. н. $g_2'(\tilde{x}^n)$ схемы S', отличной от $g_1'(\tilde{x}^n)$ (если такая ф. н. g_2' существует), в силу свойства (ii) у схемы S есть такая ф. н. $g_2(\tilde{x}^n)$, что $g_2'(\tilde{x}^n) = g_2(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. причём $g_1 \neq g_2$, поскольку $g_1'(\tilde{x}^n) = g_1(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ и $g_2'(\tilde{x}^n) = g_2(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Тогда $g_1(\tilde{\pi}) \neq g_2(\tilde{\pi})$ хотя бы для одного набора $\tilde{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ из множества T, так как T — ЕДТ для схемы S. Из последнего неравенства получаем, что

$$g_1'(\pi_{j_1}, \ldots, \pi_{j_n}) = g_1(\pi_{j_{i_1}}, \ldots, \pi_{j_{i_n}}) = g_1(\tilde{\pi}) = \overline{g}_2(\tilde{\pi}) = \overline{g}_2(\pi_{j_{i_1}}, \ldots, \pi_{j_{i_n}}) = \overline{g_2'}(\pi_{j_1}, \ldots, \pi_{j_n}),$$

т. е. $g_1'(\tilde{\pi}') \neq g_2'(\tilde{\pi}')$, где $\tilde{\pi}' = (\pi_{j_1}, \ldots, \pi_{j_n})$, причём $\tilde{\pi}' \in T'$ по определению множества T'. Значит, любые две различные ф. н. схемы S' можно отличить друг от друга хотя бы на одном наборе из множества T', поэтому оно является ЕДТ для данной схемы. Тогда справедливо соотношение (8.11) и требуемое неравенство (8.7) доказано.

5. Пусть Т = k-Д, где $k \in \mathbb{N}$. Этот случай рассматривается аналогично случаю 4 с заменой всех вхождений слова «неизбыточна» на «k-неизбыточна», «ЕПТ» на «k-ПТ», «ЕП» на «k-П» и «ЕДТ» на «k-ДТ» (указанную замену необходимо произвести в том числе в случае 1, на который есть ссылка в разборе случая 4).

6. Пусть Т = ПД. Тогда множество T является ПДТ, а значит, и ППТ для схемы S. Дословно повторяя рассуждения из случая 3, получаем, что множество T' является ППТ для схемы S'. Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично рассуждениям из случая 4, начиная со слов «Для любой ф. н. $g_2(\tilde{x}^n)$ схемы S^*, отличной от $g_1(\tilde{x}^n)$ …», с заменой всех «ЕДТ» на «ПДТ».

Во всех случаях неравенство (8.7) доказано (в частности, значение $D(f')$ определено). Тогда и $D(f(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})) \leqslant D(f(\tilde{x}^n))$, поскольку $j_1, \ldots, j_n$ — попарно различные индексы от 1 до n. Подставляя в обе части последнего неравенства f' вместо f, получаем $D(f) \leqslant D(f')$, так как

$$f'(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) = f(x_{j_{i_1}}, \ldots, x_{j_{i_n}}) = f(\tilde{x}^n).$$

С учётом (8.7) окончательно имеем $D(f') = D(f)$. Утверждение 8.10 доказано. □

Из утверждения 8.10 следует, что при доказательствах равенств и неравенств, в левой части каждого из которых стоит величина вида $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f)$, а в правой — некоторое целое неотрицательное число (такие соотношения будут встречаться в формулировках или доказательствах большинства теорем §§9–18), можно, не ограничивая общности, произвольным образом переставлять переменные у функции $f(\tilde{x}^n)$.

Утверждение 8.11 [153]. *Пусть S — произвольная СФЭ, неизбыточная и допускающая ЕПТ T относительно ОКН типа* 0 *или* 1 *либо ПКН на выходах элементов*; *E — произвольный разделяющий элемент схемы S; S' — подсхема схемы S, получающаяся из неё удалением всех элементов, расположенных в схеме S не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E. Тогда схема S' неизбыточна и допускает ЕПТ T относительно неисправностей такого же типа.*

Доказательство. Пусть E' — произвольный элемент, содержащийся в схеме S', тогда он содержится и в схеме S. Так как T — ЕПТ для неизбыточной схемы S, то в T найдётся набор $\tilde{\sigma}$, на котором значение на выходе схемы S при неисправности элемента E' изменится. Тогда на этом наборе при указанной неисправности изменится и значение на выходе элемента E. Действительно, в противном случае переход элемента E' в неисправное состояние никак не отразился бы на значении, выдаваемой схемой S на наборе $\tilde{\sigma}$, что невозможно. Таким образом, при указанной неисправности изменится значение на выходе схемы S', откуда следует, что эта схема неизбыточна и множество T является для неё ЕПТ. Утверждение 8.11 доказано. $\square$

§9. Проверяющие тесты при однотипных константных неисправностях на выходах элементов

В данном параграфе рассматриваются единичные и полные проверяющие тесты для СФЭ относительно ОКН типа 1 или типа 0 на выходах элементов. Описан достаточно обширный класс ф. п. базисов B, для которых $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 2$ (теорема 9.3); найдено точное значение величины $D^{B_0;\,1}_{\text{ПП (О)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, где $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$ (теорема 9.4). В силу утверждения 8.9 и следствия 8.1 результаты, кратко сформулированные в предыдущем предложении, остаются верными при замене в верхнем индексе буквы D после обозначения базиса единицы на нуль в обоих местах. Для произвольного ф. п. подмножества B множества $\{\overline{x}, x_1\&\ldots\&x_m \mid m \geqslant 2\}$ (например, для базиса $\{\&, \neg\}$) найдены точные значения величин $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(f)$ и $D^{B;\,0}_{\text{ЕП (О)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (теоремы 9.5 и 9.6) и установлено, что $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(n) = D^{B;\,0}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 3$ при $n \geqslant 2$ (следствия 9.1 и 9.2). Отметим, что ранее Ю. В. Бородиной были получены равенства $D^{B_0;\,1}_{\text{ПП (О)}}(n) = D^{B_0;\,0}_{\text{ПП (О)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$ [46], $D^{B_1;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 1$ [47] и (совместно с П. А. Бородиным) $D^{B_1;\,0}_{\text{ПП (О)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 1$ [51], где $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$.

Через M будем обозначать множество всех монотонных б. ф. (см., например, [260, с. 36]).

Всюду ниже вплоть до окончания доказательства теоремы 9.5 в качестве неисправностей ФЭ рассматриваются ОКН типа 1 на выходах элементов. Отдельно это оговаривать не будем.

Следующее утверждение формулируется и доказывается почти точно так же, как теорема 1 работы [154].

Теорема 9.1. *Для любого $n \geqslant 3$ справедливо неравенство $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(n) \geqslant 2$, где B — произвольное ф. п. подмножество множества $(\mathsf{M} \cup \{\overline{x}_1 \vee h \mid h \in P_2\}) \setminus \{1\}$. Такое же неравенство справедливо и при $n = 2$, если определено значение величины $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(x_1 \sim x_2)$.*

Доказательство. Идеи доказательства сходны с идеями, использованными в [46, теорема 3] при получении оценки $D(n) \geqslant 2$. Пусть $n \geqslant 2$ и $f(\tilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$. Предположим, что существует неизбыточная схема S в базисе B, реализующая функцию f и допускающая ЕПТ, состоящий из какого-то одного набора $\tilde{\sigma}$. Тогда на этом наборе значения на выходах всех элементов схемы S равны 0. Действительно, если бы значение на выходе некоторого элемента схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ было равно 1, то при неисправности этого элемента на наборе $\tilde{\sigma}$ данная схема по-прежнему выдавала бы значение $f(\tilde{\sigma})$; однако это противоречит тому, что $\{\tilde{\sigma}\}$ — ЕПТ для неизбыточной схемы S.

Пусть $\tilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. Заметим, что хотя бы одно из чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ равно 0, так как в противном случае значение на выходе выходного элемента схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ было бы равно $f(\tilde{\sigma}) = f(\tilde{1}^n) = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $\sigma_1 = 0$. В схеме S должен присутствовать хотя бы один элемент, реализующий функцию вида $\overline{x}_1 \vee h$, $h \in P_2$; иначе все элементы схемы S реализовывали бы монотонные функции и на её выходе возникла бы монотонная б. ф. в силу замкнутости класса M (см., например, [260, с. 36–37]), однако функция f немонотонна. Пусть E — произвольный ФЭ из схемы S, реализующий функцию указанного вида. Его вход «x_1» не может соединяться с выходом другого ФЭ E' или со входом «x_1» схемы S, так как в противном случае значение на выходе элемента E' (соответственно на входе «x_1» схемы S) на наборе $\tilde{\sigma}$ в схеме S должно было быть равно 0, а тогда значение на выходе элемента E на этом же наборе равнялось бы $\overline{0} \vee \ldots = 1$, что невозможно. Поэтому вход «x_1» любого элемента схемы S, реализующего функцию вида $\overline{x}_1 \vee h$, $h \in P_2$, соединяется с одним из входов «x_2»,…,«x_n» схемы S.

Предположим, что на каждый такой вход схемы S подано значение 0. Тогда на выходе каждого элемента схемы S, реализующего функцию указанного вида, будет реализована функция $\overline{0} \vee \ldots \equiv 1$, а на выходе любого другого элемента схемы S — некоторая монотонная функция. Поэтому итоговая функция, реализуемая схемой S, должна быть монотонной, но она равна $f(x_1, 0, \ldots, 0) = \overline{x}_1$. Полученное противоречие означает, что $D(n) \geqslant D(f) \geqslant 2$, если значение величины $D(f)$ определено. При $n \geqslant 3$ оно определено — см. замечание 8.1, а при $n = 2$ имеем $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \equiv x_1 \sim x_2$. Теорема 9.1 доказана. □

Теорема 9.2. *Любую неконстантную б. ф. можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе* $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, *допускающей ЕПТ длины не более* 2.

Теорема 9.2 несложным образом вытекает из доказательств теорем 1 и 2 работы [46]; автор не претендует на научную новизну этого результата.

Утверждение 9.1. *СФЭ S_0, изображённая на рисунке 9.1, реализует константу 0 и имеет две ф. н. относительно неисправностей произвольного числа элементов: x_1 и константу 1.*

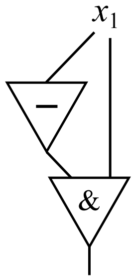

Рис. 9.1. Схема S_0

Доказательство. Схема S_0 при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $\overline{x}_1 \& x_1 \equiv 0$, при неисправности конъюнктора — константу 1, а при исправности конъюнктора и неисправности инвертора — функцию $1\&x_1 = x_1$. Утверждение 9.1 доказано.

Теорема 9.3 [154]. *Пусть $B \subseteq (\mathsf{M} \cup \{\overline{x}_1 \vee h \mid h \in P_2\}) \setminus \{1\}$ — такой ф. п. базис, что отождествлением и переименованием переменных из монотонных функций этого базиса можно получить функции $x\&y$ и $x \vee y$. Тогда для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 2$.*

Доказательство. Неравенство $D(n) \geqslant 2$ следует из теоремы 9.1 (в случае $n = 2$ — в предположении, что значение $D(x_1 \sim x_2)$ определено). Докажем неравенство $D(n) \leqslant 2$. Из условия теоремы 9.3 вытекает, что путём отождествления некоторых входов некоторых ФЭ, реализующих монотонные функции из базиса B, можно получить двухвходовые конъюнктор и дизъюнктор, допускающие только неисправности типа 1 на их выходах. Поэтому можно считать, что $x\&y \in B$ и $x \vee y \in B$. Рассмотрим два случая.

1. В базисе B содержится функция вида $\overline{x}_1 \vee h(\tilde{x}^m)$, где $m \geqslant 0$ и $h(\tilde{1}^m) = 0$. Тогда легко проверить, что $\overline{x}_1 \vee h(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{m}) \equiv \overline{x}_1$, следовательно, отождествлением всех входов ФЭ, реализующего функцию указанного вида, можно получить инвертор. Аналогично написанному выше можно считать, что $\overline{x} \in B$, а тогда $B_0 = \{\&, \vee, \neg\} \subseteq B$ и в силу теоремы 9.2 и утверждения 8.8 для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ выполнено неравенство $D(f) \leqslant 2$ (в частности, при $n = 2$ значение $D(x_1 \sim x_2)$ определено). Если $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$, то по утверждению 9.1 функцию f можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе B, допускающей ЕПТ из любого одного $(1, 1)$-набора, поэтому $D(f) \leqslant 1$. Наконец, в случае $f(\tilde{x}^n) \equiv 1$ значение $D(f)$

не определено в силу утверждения 8.2. Отсюда и из определения величины $D(n)$ вытекает справедливость неравенства $D(n) \leqslant 2$, а вместе с ним и равенства $D(n) = 2$ при $n \geqslant 2$.

2. Отрицание случая 1: для каждой функции вида $\overline{x}_1 \vee h(\tilde{x}^m)$, где $m \geqslant 0$, из базиса B выполнено равенство

$$h(\tilde{1}^m) = 1. \tag{9.1}$$

Тогда и $(\overline{x}_1 \vee h(\tilde{x}^m))(\tilde{1}^m) = 1$. Поскольку B — ф. п. базис, в нём должна существовать функция, не принадлежащая классу T_1 (см. [260, с. 40, теорема 7]), причём эта функция, как было показано выше, не может иметь вид $\overline{x}_1 \vee h(\tilde{x}^m)$ и, следовательно, монотонна. Единственной монотонной функцией, не принадлежащей классу T_1, является тождественный нуль, поэтому

$$0 \in B. \tag{9.2}$$

Кроме того, в базисе B должна существовать хотя бы одна немонотонная функция f_{M}, и она, очевидно, имеет вид $\overline{x}_1 \vee h(\tilde{x}^m)$, где $m \geqslant 0$. Если $m \in \{0, 1\}$, то с учётом (9.1) имеем $h(\tilde{x}^m) \in \{1, x_1\}$, а в каждом из этих случаев $f_{\mathsf{M}} \equiv 1$, что невозможно. Поэтому $m \geqslant 2$; тогда легко видеть, что

$$f_{\mathsf{M}} \equiv \overline{x}_1 \vee h(1, x_2, \ldots, x_m) \equiv \overline{x}_1 \vee h'(x_2, \ldots, x_m),$$

где $h'(x_2, \ldots, x_m) = h(1, x_2, \ldots, x_m)$ и

$$h'(\tilde{1}^{m-1}) = 1, \tag{9.3}$$

но $h'(x_2, \ldots, x_m) \not\equiv 1$.

Пусть $\tilde{\sigma}$ — произвольный двоичный набор длины $m-1$, для которого $h'(\tilde{\sigma}) = 0$. Без ограничения общности $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{m-k-1})$, где $0 \leqslant k \leqslant m-2$. Легко проверяется соотношение

$$f_{\mathsf{M}}(\underbrace{x, \ldots, x}_{k+1}, \tilde{0}^{m-k-1}) \equiv \overline{x} \vee h'(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \tilde{0}^{m-k-1}) \equiv \overline{x}, \tag{9.4}$$

где $x \in \{0, 1\}$ (достаточно подставить в правое тождество формулы (9.4) поочерёдно 0 и 1).

Пусть $S_\neg$ — схема в базисе B, состоящая из ФЭ E, реализующего функцию $f_{\mathsf{M}}(\tilde{x}^m)$, левые $k+1$ входов которого соединяются со входом «x» схемы, а правые $m-k-1$ входов — с выходом одного и того же элемента E_0, реализующего константу 0 (такой элемент существует в силу (9.2)). На выходе схемы $S_\neg$ реализуется функция $\overline{x}$ (см. (9.4)). При неисправности элемента E на выходе схемы $S_\neg$ возникнет тождественная единица, а при неисправности элемента E_0 — функция

$$f_{\mathsf{M}}(\underbrace{x, \ldots, x}_{k+1}, \tilde{1}^{m-k-1}) \equiv \overline{x} \vee h'(\underbrace{x, \ldots, x}_{k}, \tilde{1}^{m-k-1}) \equiv 1$$

в силу (9.3). Таким образом, схема $S_\neg$ реализует функцию $\overline{x}$ и имеет единственную ф. н. — тождественную единицу, поэтому можно считать, что $\overline{x} \in B$. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют рассуждения из случая 1. Теорема 9.3 доказана. $\square$

Сформулируем одно утверждение, вытекающее из [46, теорема 1] в предположении, что набор $\tilde{\sigma}$, фигурирующий в формулировке этой теоремы, равен $(\tilde{0}^k, \tilde{1}^{n-k})$, где $k \in \{0, 1, \dots, n\}$; автор не претендует на научную новизну нижеследующего результата.

Лемма 9.1 [163]. *Пусть неконстантная б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, равная ей тупиковая д. н. ф. F и число $k \in \{0, \dots, n\}$ таковы, что выполнены следующие условия*:

1) $f(\tilde{0}^k, \tilde{1}^m) = 0$, *где* $m = n - k$;

2) $f(\tilde{\tau}) = 1$ *для любого n-набора $\tilde{\tau}$, последние m компонент и хотя бы одна из первых k компонент которого равны* 1;

3) *в случае $k \geqslant 1$ в форму F не входят отрицания переменных $x_1, \dots, x_k$.*

Тогда функцию f можно реализовать СФЭ в базисе B_0, допускающей ППТ длины 1.

Б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ называется *монотонной по переменной* x_i, где $n \geqslant 1$ и $i \in \{1, \dots, n\}$, если для любых булевых констант $\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n$ справедливо неравенство $f(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 0, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n) \leqslant f(\sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1}, \dots, \sigma_n)$.

Через m_f будем обозначать число переменных, по которым функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна, а через $\tilde{\sigma}_f$ — двоичный набор длины n, i-я компонента которого равна 0 тогда и только тогда, когда данная функция монотонна по переменной x_i $(i = 1, \dots, n)$.

Теорема 9.4 [163]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_0;\,1}_{\text{ПП (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1) \textit{ или } f \equiv 1, \\ 2, & \textit{если } \mathrm{m}_f \leqslant n-2 \textit{ и } f(\tilde{\sigma}_f) = 1, \\ 1 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Если функция f представима в виде (8.1), то $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1. Если $f \equiv 1$, то такое же равенство доказано в [192, с. 149]. Далее будем считать, что функция f не представима в виде (8.1) и $f \not\equiv 1$. Тогда $D(f) \geqslant 1$ в силу утверждения 8.4.

Пусть $\mathrm{m}_f \leqslant n-2$ и $f(\tilde{\sigma}_f) = 1$. Из [46, теорема 2] следует неравенство $D(f) \leqslant 2$. Докажем, что $D(f) \geqslant 2$. Без ограничения общности

$$\tilde{\sigma}_f = (\tilde{0}^{\mathrm{m}_f}, \tilde{1}^{n-\mathrm{m}_f}). \tag{9.5}$$

Предположим, что существует СФЭ S в базисе B_0, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$ и допускающая ППТ, состоящий из какого-то одного набора $\tilde{\sigma}$. По аналогии с первым абзацем доказательства теоремы 3 работы [46] удалим из схемы S все избыточные элементы, если они есть, и получим неизбыточную схему S', реализующую функцию f и допускающую тот же ППТ $\{\tilde{\sigma}\}$. В схеме S' содержится хотя бы один инвертор, так как в противном случае все её элементы реализовывали бы монотонные функции и функция f также была бы монотонной, а значит, монотонной по каждой переменной, что противоречит неравенству $\mathrm{m}_f \leqslant n-2$. Далее, рассуждая аналогично второму абзацу доказательства теоремы 3 из [46], получаем, что входы инверторов могут соединяться только со входами схемы S' и данная схема должна содержать хотя бы по одному инвертору после входа каждой из переменных $x_{\mathrm{m}_f+1}, \ldots, x_n$.

Если i-я компонента набора $\tilde{\sigma}$ равна 0 для некоторого $i \in \{\mathrm{m}_f+1, \ldots, n\}$, то на выходе того из этих инверторов, на вход которого подаётся переменная x_i, на наборе $\tilde{\sigma}$ возникнет значение 1 и неисправность указанного инвертора нельзя обнаружить на данном наборе, но это противоречит тому, что $\{\tilde{\sigma}\}$ — ППТ для неизбыточной схемы S'. Значит, последние $n-\mathrm{m}_f$ компонент набора $\tilde{\sigma}$ равны 1. Отсюда, из (9.5), равенства $f(\tilde{\sigma}_f)=1$ и монотонности функции f по первым m_f переменным вытекает, что $f(\tilde{\sigma})=1$, а тогда неисправность выходного элемента схемы S' нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\sigma}$. Полученное противоречие означает, что $D(f) \geqslant 2$, следовательно, $D(f)=2$.

Пусть теперь либо $\mathrm{m}_f \geqslant n-1$, либо $f(\tilde{\sigma}_f)=0$. Докажем, что $D(f) \leqslant 1$; с учётом доказанного неравенства $D(f) \geqslant 1$ отсюда будет следовать равенство $D(f)=1$. Без ограничения общности выполнено (9.5). Рассмотрим три случая.

1. Пусть $f(\tilde{\sigma}_f)=1$ и $\mathrm{m}_f=n$. Тогда $\tilde{\sigma}_f=(\tilde{0}^n)$ и функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна по всем переменным, откуда следует, что $f(\tilde{\pi}) \geqslant f(\tilde{\sigma}_f)=1$ для любого n-набора $\tilde{\pi}$, поэтому $f \equiv 1$. Противоречие.

2. Пусть $f(\tilde{\sigma}_f)=1$ и $\mathrm{m}_f=n-1$. Тогда $\tilde{\sigma}_f=(\tilde{0}^{n-1},1)$ и функция $f(\tilde{x}^n)$ монотонна по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$, откуда следует, что $f(\tilde{\pi}) \geqslant f(\tilde{\sigma}_f)=1$ для любого n-набора $\tilde{\pi}$, последняя компонента которого равна 1. Однако это противоречит тому, что функция $f(\tilde{x}^n)$ не является монотонной по переменной x_n.

3. Пусть $f(\tilde{\sigma}_f)=0$. Если $f \equiv 0$, то по утверждению 9.1 функцию f можно реализовать СФЭ в базисе B_0, допускающей ППТ из любого одного $(1,1)$-набора, поэтому $D(f) \leqslant 1$. Далее считаем, что $f \not\equiv 0$. Из множества всех n-наборов, последние $n-\mathrm{m}_f$ компонент которых равны единице и на которых функция f принимает значение 0, выберем произвольный набор $\tilde{\sigma}$ с наибольшим числом единичных компонент (отметим, что указанное множество непусто,

поскольку набор $\tilde{\sigma}_f$ удовлетворяет обоим перечисленным выше условиям). Без ограничения общности $\tilde{\sigma} = (\tilde{0}^k, \tilde{1}^m)$, где $k \leqslant \mathrm{m}_f$. Пусть F — произвольная тупиковая д. н. ф. функции $f(\tilde{x}^n)$. Из монотонности данной функции по переменным $x_1, \dots, x_k$ при $k \geqslant 1$ несложно получить, что в F не могут входить отрицания этих переменных (см., например, [99, с. 44]). Тогда выполнены условия 1)–3) леммы 9.1, из которой следует неравенство $D(f) \leqslant 1$. Теорема 9.4 доказана. □

В нижеследующих лемме 9.2, теоремах 9.5, 9.6 и следствиях 9.1, 9.2 под базисом B понимается произвольное ф. п. подмножество множества $\{\overline{x}, x_1 \& \dots \& x_m \mid m \geqslant 2\}$, например, множество $B_3 = \{\&, \neg\}$. Очевидно, что $\overline{x} \in B$.

Лемма 9.2 [153]. *Пусть S — произвольная неизбыточная СФЭ в базисе B, в которой содержится хотя бы один элемент и вход любого инвертора соединён с одним из входов схемы; T — произвольный ЕПТ для схемы S; $x_{i_1}, \dots, x_{i_d}$ — все попарно различные переменные, подаваемые в этой схеме на входы инверторов (если таких переменных нет, полагаем $d = 0$), а $x_{i_{d+1}}, \dots, x_{i_k}$ — все попарно различные переменные, каждая из которых подаётся в ней на вход хотя бы одного конъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $k = d$). Тогда $k \geqslant 1$, на выходе схемы S реализуется функция $\overline{x}_{i_1} \& \dots \& \overline{x}_{i_d} \& x_{i_{d+1}} \& \dots \& x_{i_k}$ (в случае $d = 0$ полагаем $\overline{x}_{i_1} \& \dots \& \overline{x}_{i_d} \equiv 1$; в случае $k = d$ полагаем $x_{i_{d+1}} \& \dots \& x_{i_k} \equiv 1$) и $|T| \geqslant d$.*

Замечание 9.1. Множества индексов $\{i_1, \dots, i_d\}$ и $\{i_{d+1}, \dots, i_k\}$ в формулировке леммы могут пересекаться.

Доказательство леммы 9.2. Неравенство $k \geqslant 1$ очевидно, так как хотя бы одна переменная обязана подаваться на входы произвольного верхнего элемента схемы S. Все инверторы схемы S и её входы «$x_{i_{d+1}}$», …, «x_{i_k}» соединяются со входами некоторой её подсхемы, состоящей из одних конъюнкторов (эта подсхема содержит все конъюнкторы схемы S). Поэтому на выходе схемы S реализуется функция $f = \overline{x}_{i_1} \& \dots \& \overline{x}_{i_d} \& x_{i_{d+1}} \& \dots \& x_{i_k}$.

Докажем неравенство $|T| \geqslant d$. В случае $d = 0$ оно очевидно. Пусть $d \geqslant 1$. Если какая-то из переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_d}$ подаётся в схеме S на входы хотя бы двух инверторов, то при неисправности любого из них получающаяся ф. н. этой схемы будет равна $1 \& \overline{x}_{i_1} \& \dots \& \overline{x}_{i_d} \& x_{i_{d+1}} \& \& \dots \& x_{i_k} \equiv f$, т. е. схема S избыточна, что невозможно. Поэтому каждая из переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_d}$ подаётся в схеме S на вход только одного инвертора (и других инверторов в этой схеме нет). Тогда при неисправности инвертора, на вход которого подаётся переменная x_{i_j}, $j \in \{1, \dots, d\}$, получающаяся ф. н. схемы S равна $g_j = \overline{x}_{i_1} \& \dots \& \overline{x}_{i_{j-1}} \& \overline{x}_{i_{j+1}} \& \dots \& \overline{x}_{i_d} \& x_{i_{d+1}} \& \& \dots \& x_{i_k}$. Заметим, что $g_j \neq f$, так как схема S неизбыточна, и функцию g_j можно отличить от функции f только на тех наборах, у которых i_1-я, $\ldots$, i_{j-1}-я, i_{j+1}-я, $\ldots$, i_d-я компоненты равны нулю, а i_j-я, i_{d+1}-я, i_{d+2}-я, $\ldots$, i_k-я компоненты — единице. Очевидно, что при $j = 1, \ldots, d$ множества этих наборов попарно не пересекаются. В тест T должно входить хотя бы по одному набору из каждого из этих d множеств, т. е. хотя бы d наборов, откуда следует, что $|T| \geqslant d$. Лемма 9.2 доказана. $\square$

Выделим два возможных представления функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = 0,\ \overline{x}_i \text{ или } x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2} \ldots \& x_{i_k}, \tag{9.6}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \overline{x}_{i_1} \& \overline{x}_{i_2} \& x_{i_3} \& \ldots \& x_{i_k} \text{ или } \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2})^{\sigma_2} \& x_{i_3})^{\sigma_3} \& \ldots \& x_{i_k})^{\sigma_k}, \tag{9.7}$$

где $2 \leqslant k \leqslant n$; $i, i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$, индексы $i_1, \ldots, i_k$ попарно различны и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \in \{0, 1\}$, причём в представлении (9.7) хотя бы одно из чисел $\sigma_2, \ldots, \sigma_k$ равно 0 и если $k = 2$, то полагаем $x_{i_3} \& \ldots \& x_{i_k} \equiv 1$.

Теорема 9.5 [153]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 1, *справедливо равенство*

$$D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.6)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.7)}, \\ 3, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(f)$ не определено.

Следствие 9.1 [153]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 3$.*

Для доказательства следствия 9.1 достаточно заметить, что функция $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ при $n \geqslant 2$ не представима в видах (8.1), (9.6), (9.7).

Доказательство теоремы 9.5. Будем считать, что в базисе B содержится функция $x_1 \& x_2$; в противном случае можно отождествить все входы, кроме одного, у произвольного конъюнктора из этого базиса и получить двухвходовой конъюнктор, допускающий те же самые неисправности (а именно неисправность типа 1 на его выходе), что и исходный конъюнктор. В случае $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Далее будем считать, что $f \not\equiv 1$. Рассмотрим четыре случая.

1. Функция f представима в виде (8.1). Тогда $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1.

2. Функция f представима в виде (9.6). Тогда $D(f) \geqslant 1$ в силу утверждения 8.4, если значение $D(f)$ определено. Докажем, что оно определено и $D(f) \leqslant 1$. Рассмотрим три подслучая.

2.1. Пусть $f \equiv 0$. По утверждению 9.1 функцию f можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе B, допускающей ЕПТ из любого одного $(1,1)$-набора, поэтому $D(f) \leqslant 1$.

2.2. Пусть $f = \overline{x}_i$, где $i \in \{1, \ldots, n\}$. Реализуем функцию f СФЭ в базисе B, содержащей один инвертор. Очевидно, что эта схема имеет только одну ф. н. — тождественную единицу, которую можно отличить от функции f на любом $(i,1)$-наборе. Поэтому схема неизбыточна и $D(f) \leqslant 1$.

2.3. Пусть $f = x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2} \& \ldots \& x_{i_k}$, где $2 \leqslant k \leqslant n$; $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1 \in \{0,1\}$. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$, т. е. $f(\tilde{x}^n) = x_1^{\sigma_1} \& x_2 \& \ldots \& x_k$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B, представляющей собой цепочку из одного инвертора (в случае $\sigma_1 = 0$) и $k-1$ двухвходовых конъюнкторов, на правые входы которых подаются последовательно переменные $x_2, \ldots, x_k$. Если $\sigma_1 = 0$, то верхний элемент этой цепочки — инвертор, на вход которого подаётся переменная x_1, а его выход соединяется с левым входом верхнего двухвходового конъюнктора; если же $\sigma_1 = 1$, то верхний элемент этой цепочки — двухвходовой конъюнктор, на левый вход которого подаётся переменная x_1.

Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f. Докажем, что она неизбыточна и множество $\{\tilde{\pi}\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\pi} = (\overline{\sigma_1}, \tilde{1}^{n-1})$. Заметим, что $f(\tilde{\pi}) = 0$, причём на правые входы всех конъюнкторов в схеме S на наборе $\tilde{\pi}$ подаются единицы. Если неисправен некоторый элемент в этой схеме, то на указанном наборе на выходе этого и всех следующих за ним элементов в схеме S, а значит, и на выходе этой схемы, очевидно, возникнут единицы и неисправность будет обнаружена. Поэтому схема S неизбыточна и $D(f) \leqslant 1$.

В итоге для любой функции f вида (9.6) получаем равенство $D(f) = 1$. Случай 2 разобран.

3. Функция f представима в виде (9.7). Докажем сначала неравенство $D(f) \leqslant 2$. Рассмотрим два подслучая.

3.1. Пусть $f = \overline{x}_{i_1} \& \overline{x}_{i_2} \& x_{i_3} \& \ldots \& x_{i_k}$, где $2 \leqslant k \leqslant n$ и $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$, т. е. $f(\tilde{x}^n) = \overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& x_3 \& \ldots \& x_k$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B, содержащей два инвертора и $k-1$ двухвходовых конъюнкторов. На входы инверторов подадим переменные x_1 и x_2; затем выходы этих инверторов и входы «x_3», …, «x_k» схемы последовательно соединим со входами цепочки из $k-1$ конъюнкторов: входы верхнего конъюнктора из цепочки соединим с выходами двух построенных инверторов; на правые входы остальных $k-2$ конъюнкторов подадим последовательно переменные $x_3, \ldots, x_k$.

Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f. Докажем, что она неизбыточна и множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\pi}_1 = (0, \tilde{1}^{n-1})$, $\tilde{\pi}_2 = (1, 0, \tilde{1}^{n-2})$. Заметим, что $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = 0$, причём на один из входов верхнего конъюнктора и на правые входы всех остальных конъюнкторов в схеме S на каждом из наборов $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ подаются единицы. Если неисправен некоторый элемент в этой схеме, то по крайней мере на одном из указанных наборов на выходе этого и всех следующих за ним элементов в схеме S, а значит, и на выходе этой схемы, очевидно, возникнут единицы и неисправность будет обнаружена. Поэтому схема S неизбыточна и $D(f) \leqslant 2$.

3.2. Пусть $f = (\underbrace{\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2})^{\sigma_2} \& x_{i_3})^{\sigma_3} \& \ldots \& x_{i_k})^{\sigma_k}$, где $2 \leqslant k \leqslant n$; $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$, причём хотя бы одно из чисел $\sigma_2, \ldots, \sigma_k$ равно 0. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$, т. е. $f(\tilde{x}^n) = (\underbrace{\ldots((}_{k-1} x_1^{\sigma_1} \& x_2)^{\sigma_2} \& x_3)^{\sigma_3} \& \ldots \& x_k)^{\sigma_k}$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B, представляющей собой цепочку из инверторов и конъюнкторов, в соответствии с последним равенством. В этой схеме содержатся $k-1$ двухвходовых конъюнкторов и столько инверторов, сколько чисел из $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ равны 0. Если $\sigma_1 = 1$, то верхний элемент схемы S — двухвходовой конъюнктор, на левый вход которого подаётся переменная x_1, а на правый — переменная x_2. Если же $\sigma_1 = 0$, то верхний элемент схемы S — инвертор, на вход которого подаётся переменная x_1; выход этого инвертора соединяется с левым входом двухвходового конъюнктора, на правый вход которого подаётся переменная x_2. Если $\sigma_2 = 0$, то выход указанного конъюнктора соединяется со входом инвертора. Далее, если $k \geqslant 3$, то выход последнего построенного элемента соединяется с левым входом двухвходового конъюнктора, на правый вход которого подаётся переменная x_3, и т. д.

Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f. Докажем, что она неизбыточна и множество $T = \{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\pi}_1 = (0, \tilde{1}^{n-1})$, $\tilde{\pi}_2 = (\tilde{1}^n)$. Заметим, что $f(x_1, \tilde{1}^{n-1}) = (\underbrace{\ldots((}_{k-1} x_1^{\sigma_1})^{\sigma_2})^{\sigma_3} \ldots)^{\sigma_k}$, поэтому

$$f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2). \tag{9.8}$$

Единственная цепь, связывающая вход «x_1» схемы S с её выходом, проходит через каждый её элемент. Поэтому если в данной схеме какой-то элемент неисправен, то при подаче на её входы вместо переменных $x_2, \ldots, x_n$ константы 1 изменение значения переменной x_1 с 0 на 1, т. е. переход от входного набора $\tilde{\pi}_1$ ко входному набору $\tilde{\pi}_2$, никак не отразится на значении, выдаваемом схемой S. Следовательно, получающаяся ф. н. g схемы S удовлетворяет условию $g(\tilde{\pi}_1) = g(\tilde{\pi}_2)$. Отсюда и из (9.8) вытекает, что $g \neq f$, т. е. схема S неизбыточна, и множество T является для неё ЕПТ, поэтому $D(f) \leqslant 2$.

Докажем теперь, что $D(f) \geqslant 2$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема в базисе B, реализующая функцию f вида (9.7); T —произвольный ЕПТ для этой схемы. Надо доказать, что $|T| \geqslant 2$. Рассмотрим два подслучая.

3.1$'$. В схеме S найдётся хотя бы один инвертор I, вход которого соединён с выходом некоторого ФЭ E. Пусть на выходе элемента E в схеме S реализуется б. ф. φ, тогда на выходе элемента I реализуется функция $\overline{\varphi}$. Чтобы обнаружить неисправность элемента E (элемента I), в тесте T должен содержаться набор $\tilde{\sigma}_1$ (набор $\tilde{\sigma}_2$), для которого $\varphi(\tilde{\sigma}_1) = 0$ (соответственно $\overline{\varphi}(\tilde{\sigma}_2) = 0$). Из двух последних равенств следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, поэтому $|T| \geqslant 2$, что и требовалось доказать.

3.2$'$. Вход любого инвертора схемы S соединён с одним из входов этой схемы. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ — все попарно различные переменные, подаваемые в этой схеме на входы инверторов (если таких переменных нет, полагаем $d = 0$), а $x_{i_{d+1}}, \ldots, x_{i_k}$ — все попарно различные переменные, каждая из которых подаётся в ней на вход хотя бы одного конъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $k = d$). Тогда в силу леммы 9.2 имеем $k \geqslant 1$, $f = \overline{x}_{i_1} \& \ldots \& \overline{x}_{i_d} \& x_{i_{d+1}} \& \ldots \& x_{i_k}$ (в случае $d = 0$ полагаем $\overline{x}_{i_1} \& \ldots \& \overline{x}_{i_d} \equiv 1$; в случае $k = d$ полагаем $x_{i_{d+1}} \& \ldots \& x_{i_k} \equiv 1$) и $|T| \geqslant d$. Так как функция f не представима в видах (8.1), (9.6), то $d \geqslant 2$, следовательно, $|T| \geqslant 2$, что и требовалось доказать.

В итоге для любой функции f вида (9.7) получаем равенство $D(f) = 2$. Случай 3 разобран.

4. Функция f отлична от константы 1 и не представима в видах (8.1), (9.6), (9.7). Докажем сначала неравенство $D(f) \leqslant 3$. Идеи доказательства сходны с идеями, использованными в работах [87, 215] при получении верхних оценок длин ЕПТ в базисе $\{\&, \neg\}$. Представим функцию f полиномом Жегалкина (см., например, [260, с. 32]):

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c, \tag{9.9}$$

где $m \geqslant 1$, $c \in \{0, 1\}$, а $K_1, \ldots, K_m$ — попарно различные конъюнкции некоторых переменных (не менее одной) из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$, причём K_1 — самая короткая из этих конъюнкций (содержащая наименьшее число переменных; если таких конъюнкций несколько, выбирается любая из них). Без ограничения общности $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_k$. Отметим, что $k < n$, так как в противном случае функция f была бы равна $x_1 \& \ldots \& x_n \oplus c = (x_1 \& \ldots \& x_n)^{\overline{c}}$, т. е. имела бы вид (9.6) или (9.7). По аналогичной причине $m \geqslant 2$. Если в полиноме Жегалкина функции f присутствует слагаемое $x_1\& \ldots \&x_k\&x_{k+1}$, то будем без ограничения общности считать, что это слагаемое K_m. Представим K_1 в виде $K_1' \oplus K_{m+1}$, где $K_1' = x_1\& \ldots \&x_k\&\overline{x}_{k+1}$, $K_{m+1} = x_1\& \ldots \&x_k\&x_{k+1}$. Тогда

$$f = K_1' \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus K_{m+1} \oplus c = K_1' \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_r \oplus c, \tag{9.10}$$

где $r = m - 1$ при $K_m = K_{m+1}$ и $r = m + 1$ при $K_m \neq K_{m+1}$. Отметим, что случай $m = 2$, $K_m = K_{m+1}$ невозможен, так как в этом случае функция f была бы равна $K_1' \oplus c = (\overline{x}_{k+1}\&x_1 \ldots \&x_k)^{\overline{c}}$, т. е. была бы представима в виде (9.6) или (9.7). Поэтому $r \geqslant 2$.

Так как K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина функции f, то в каждую конъюнкцию $K_i = x_{j_1(i)}\& \ldots \&x_{j_{t_i}(i)}$, где $i = 2, \ldots, r$, входит хотя бы одна переменная, отличная от переменных $x_1, \ldots, x_k$. Без ограничения общности это переменная $x_{j_1(i)}$. В случае $t_i \geqslant 3$ представим конъюнкцию K_i, $i = 2, \ldots, r$, в виде $(K_i^{(2)} \oplus \ldots \oplus K_i^{(t_i-1)} \oplus K_i^{(t_i)}) \oplus (K_i^{(2)} \oplus \ldots \oplus K_i^{(t_i-1)})$, где $K_i^{(s)} = x_{j_1(i)}\& \ldots \&x_{j_s(i)}$, $s = 2, \ldots, t_i$ (конъюнкция первых s переменных из K_i). Тогда представление (9.10) примет вид

$$f = K_1' \oplus \bigoplus_{i=2}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{t_i} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus_{s=2}^{t_i-1} K_i^{(s)} \right) \oplus c \tag{9.11}$$

(в случае $t_i \in \{1, 2\}$ полагаем $\bigoplus\limits_{s=2}^{t_i} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{t_i-1} K_i^{(s)} = K_i$).

Наконец, заменим в представлении (9.11) все операции $\oplus$ на операции $\oplus'$, где по определению полагаем $x \oplus' y = x \oplus y \oplus 1$ (заметим, что $x \oplus' y = x \sim y$, но это свойство в дальнейшем не понадобится). Указанная замена приведёт к прибавлению к правой части представления (9.11) некоторого числа единиц (по одному на каждую операцию $\oplus$). Сложив все эти единицы, а также константу c по модулю 2, получим некоторую булеву константу c' такую, что

$$f = K_1' \oplus' {\bigoplus_{i=2}^{r}}' \left({\bigoplus_{s=2}^{t_i}}' K_i^{(s)} \oplus' {\bigoplus_{s=2}^{t_i-1}}' K_i^{(s)} \right) \oplus c'. \tag{9.12}$$

Пусть $S_{\oplus'}$ — схема в базисе B с двумя входами и одним выходом, изображённая на рисунке 9.2 (все конъюнкторы двухвходовые). Нетрудно проверить, что на выходе этой схемы реализуется функция $x \oplus' y$, её всевозможными ф. н. являются функции $1, 0, x \to y, y \to x, \overline{x}, \overline{y}, xy$ (и, следовательно, схема $S_{\oplus'}$ неизбыточна), а в качестве ЕПТ для неё можно взять множество $T_{\oplus'} = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0)\}$ (действительно, единственной б. ф. от двух переменных, которую нельзя отличить от функции $x \oplus' y$ на наборах из множества $T_{\oplus'}$, кроме неё самой, является функция $\overline{x}\,\overline{y}$, но она не входит в число ф. н. схемы $S_{\oplus'}$).

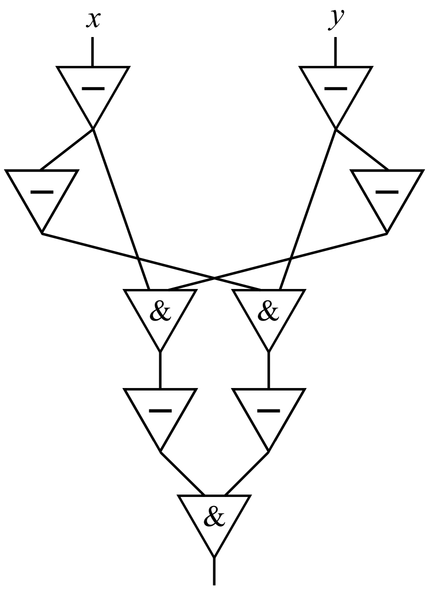

Рис. 9.2. Схема $S_{\oplus'}$

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B в соответствии с представлением (9.12) (см. рисунок 9.3). Конъюнкцию K_1' реализуем цепочкой Z_1 из одного инвертора и k двухвходовых конъюнкторов, верхним элементом в которой является инвертор; на вход этого инвертора подадим переменную x_{k+1}, а на правые входы двухвходовых конъюнкторов — последовательно переменные $x_1, \ldots, x_k$. Каждую конъюнкцию K_i, $i = 2, \ldots, r$, реализуем цепочкой Z_i из $t_i - 1$ двухвходовых конъюнкторов, на входы которой последовательно подадим переменные $x_{j_1(i)}, x_{j_2(i)} \ldots, x_{j_{t_i}(i)}$ (в случае $t_i = 1$ в этой цепочке не содержится элементов, а её выход совпадает со входом «$x_{j_1(i)}$» схемы S). Далее, для каждого $i \in \{2, \ldots, r\}$ такого, что $t_i \geqslant 3$, реализуем конъюнкцию $K_i^{(t_i-1)}$ цепочкой $\hat{Z}_i$ из $t_i - 2$ двухвходовых конъюнкторов, на входы которой последовательно подадим переменные $x_{j_1(i)}, x_{j_2(i)} \ldots, x_{j_{t_i-1}(i)}$. Затем выход цепочки Z_1, выходы всех цепочек Z_i, в которых не содержится элементов, и выходы всех конъюнкторов, содержащихся в цепочках $Z_2, \ldots, Z_r$, $\hat{Z}_2, \ldots, \hat{Z}_r$ (а точнее, в тех из них, которые были определены), соединим со входами цепочки $Z_{\oplus'}$, состоящей из блоков $S_{\oplus'}$ и — в случае $c' = 1$ — инвертора, вход которого соединён с выходом нижнего из этих блоков, причём левый верхний вход данной цепочки соединим с выходом цепочки Z_1. Выход нижнего элемента цепочки $Z_{\oplus'}$ объявим выходом схемы S.

Нетрудно убедиться, что построенная схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Для этого достаточно заметить, что на выходах конъюнкторов, содержащихся в цепочке Z_i, $i = 2, \ldots, r$, при движении по этой цепочке «сверху вниз» реализуются функции $K_i^{(2)}, \ldots, K_i^{(t_i)}$ (при $t_i \geqslant 2$), а на выходах конъюнкторов, содержащихся в цепочке $\hat{Z}_i$, $i = 2, \ldots, r$, — функции

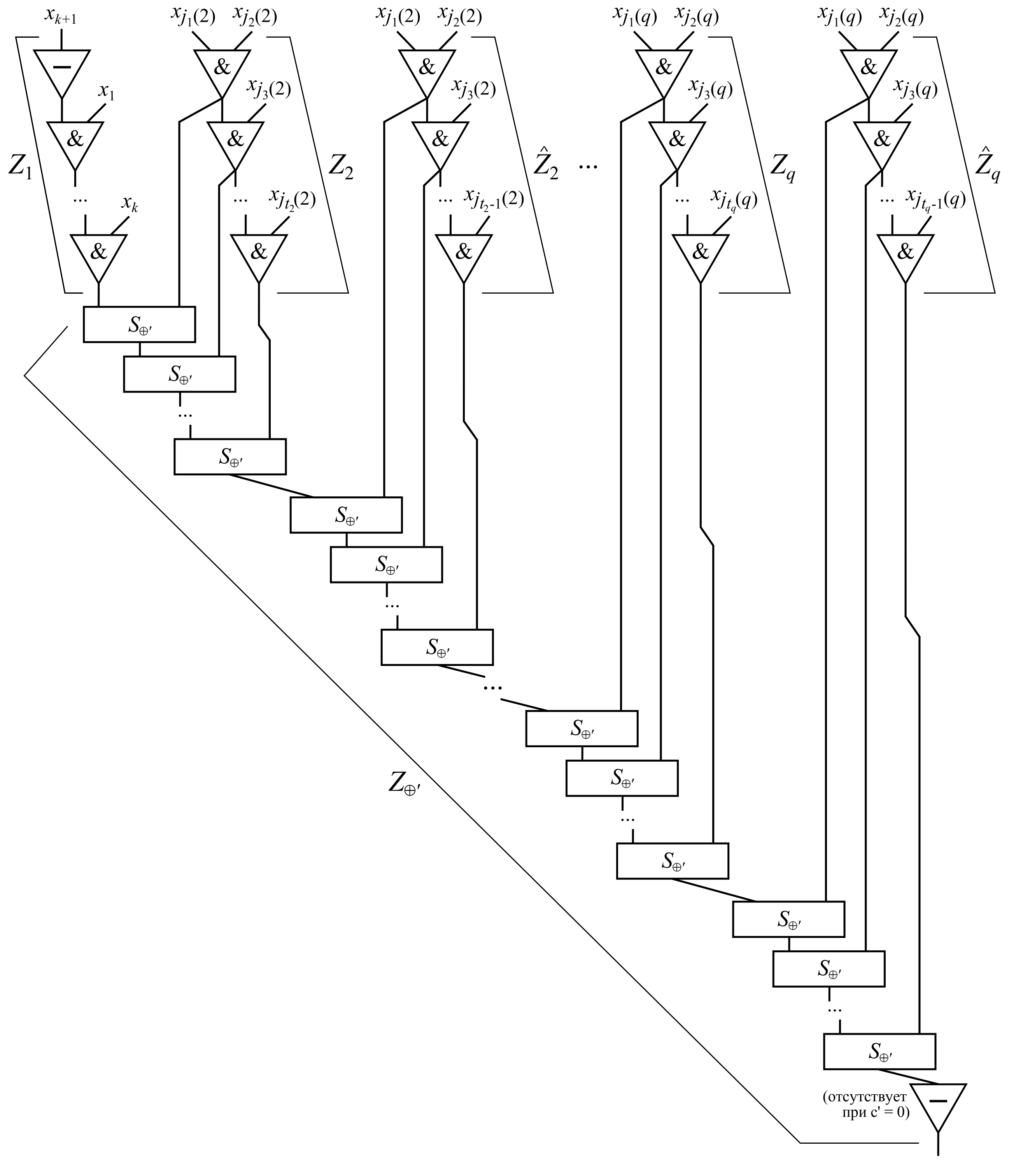

Рис. 9.3. Схема S

$K_i^{(2)}, \ldots, K_i^{(t_i-1)}$ (при $t_i \geqslant 3$).

Докажем, что схема S неизбыточна и множество $T = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\sigma}_1 = (\tilde{0}^n)$, $\tilde{\sigma}_2 = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$, $\tilde{\sigma}_3 = (\tilde{1}^n)$. Здесь и далее нам потребуется очевидное свойство линейных б. ф. (определение таких функций см., например, в [260, с. 33], где операция $+$ обозначает суммирование по модулю 2): при изменении значения любой существенной переменной произвольной линейной б. ф. на противоположное и фиксированных значениях остальных существенных переменных этой функции значение самой функции меняется на противоположное.

В случае исправности всех элементов схемы S на наборе $\tilde{\sigma}_1$ на выходах всех конъюнкторов, содержащихся в цепочках $Z_i, \hat{Z}_i$, где $i = 2, \ldots, r$, возникнут нули. Если неисправен некоторый конъюнктор в одной из этих цепочек, то на наборе $\tilde{\sigma}_1$ на выходе этого конъюнктора возникнет единица, а на выходах всех остальных конъюнкторов из указанных цепочек по-прежнему будут нули. Учитывая, что выход неисправного конъюнктора соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т. е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}_1$.

Далее, в случае исправности всех элементов схемы S на наборе $\tilde{\sigma}_3$ на выходах всех элементов, содержащихся в цепочке Z_1, возникнут нули, причём на правые входы всех конъюнкторов в этой цепочке подаются единицы. Если неисправен некоторый элемент в указанной цепочке, то на наборе $\tilde{\sigma}_3$ на выходе этого и всех следующих за ним элементов в цепочке Z_1, т. е. на выходе этой цепочки, очевидно, возникнут единицы. Учитывая, что выход цепочки Z_1 соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т. е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}_3$.

Осталось рассмотреть случай неисправности некоторого элемента в цепочке $Z_{\oplus'}$. В случае исправности всех элементов схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ на выходе цепочки Z_1 возникают значения соответственно $0, 1, 0$, а на выходах всех цепочек Z_i, в которых не содержится элементов, и выходах всех конъюнкторов, содержащихся в цепочках $Z_i, \hat{Z}_i$, где $i = 2, \ldots, r$, — соответственно $0, 0, 1$ (здесь используется то свойство, что каждая переменная $x_{j_1(i)}$ отлична от переменных $x_1, \ldots, x_k$). В таком случае на входы верхнего блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ подаются наборы $(0,0), (1,0), (0,1)$, а на его выходе реализуются значения $0 \oplus' 0, 1 \oplus' 0, 0 \oplus' 1$, т. е. $1, 0, 0$. Тогда на входы второго сверху блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ (если он существует) подаются наборы $(1,0), (0,0), (0,1)$, а на его выходе реализуются значения $1 \oplus' 0, 0 \oplus' 0, 0 \oplus' 1$, т. е. $0, 1, 0$. Далее, на входы третьего сверху блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ (если он существует) подаются наборы $(0,0), (1,0), (0,1)$, а на его выходе реализуются значения $0 \oplus' 0, 1 \oplus' 0, 0 \oplus' 1$, т. е. $1, 0, 0$, и т. д. Таким образом, на входах каждого блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ при подаче на входы схемы S наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ возникают все наборы из множества $T_{\oplus'}$. Так как это множество является ЕПТ для неизбыточной схемы $S_{\oplus'}$, то при неисправности любого элемента в любом блоке $S_{\oplus'}$

цепочки $Z_{\oplus'}$ хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ значение на выходе этого блока изменится. Учитывая, что выход указанного блока либо совпадает с выходом схемы S, либо соединяется ровно с одним входом некоторой нижней части цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе схемы S изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$.

Наконец, если неисправен выходной инвертор цепочки $Z_{\oplus'}$ (в случае $c' = 1$), то ф. н. схемы S равна тождественной единице, которую можно отличить от функции f на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ (поскольку $f(\tilde{\sigma}_1) = c$, $f(\tilde{\sigma}_2) = \overline{c}$ — это следует из представления (9.9)).

В итоге получаем, что любую ф. н. схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе из множества T. Поэтому данная схема неизбыточна и множество T является для неё ЕПТ длины 3, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 3$.

Докажем теперь, что $D(f) \geqslant 3$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема в базисе B, реализующая функцию f, отличную от константы 1 и не представимую в видах (8.1), (9.6), (9.7); T —произвольный ЕПТ для этой схемы. Надо доказать, что $|T| \geqslant 3$. Рассмотрим два подслучая.

4.1. В схеме S найдётся элемент, входы которого соединены с выходами по крайней мере двух различных ФЭ. Среди всех элементов с таким свойством выберем произвольный нижний элемент E; очевидно, что это конъюнктор, а входы каждого элемента, расположенного в схеме S ниже элемента E, соединены с выходом ровно одного ФЭ и, как следствие, E — разделяющий элемент (напомним, что мы рассматриваем только схемы без «висячих» элементов).

Среди всех элементов, выходы которых соединены в схеме S непосредственно со входами элемента E (а таких элементов не меньше двух), выберем произвольный нижний элемент E_1 и любой другой элемент E_2. Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E_1 (E_2) этой схемы реализуется б. ф. φ_1 (соответственно φ_2). Тогда на выходе элемента E реализуется б. ф. $\varphi_1 \& \varphi_2 \& \varphi_3$, где φ_3 — конъюнкция функций, подаваемых на все те входы элемента E, которые не соединены с выходом ни одного из элементов E_1, E_2, либо тождественная единица, если таких входов не существует. Рассмотрим три подслучая.

4.1.1. В схеме S найдётся хотя бы один инвертор, расположенный ниже элемента E. Пусть I — верхний из этих инверторов. Очевидно, что I — разделяющий элемент. По утверждению 8.11 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента I, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента I, неизбыточна и T — ЕПТ для схемы S'. Все элементы, расположенные в схеме S ниже элемента E, но выше элемента I (если такие есть) — конъюнкторы. Поэтому на вход элемента I

подаётся функция $\varphi_1\&\varphi_2\&\varphi_3\&\varphi_4$, где φ_4 — некоторая б. ф.. Тогда на выходе элемента I, т. е. на выходе схемы S', реализуется функция $f' = \overline{\varphi_1\&\varphi_2\&\varphi_3\&\varphi_4}$.

При неисправности инвертора I на выходе схемы S' возникнет ф. н. $g_1 \equiv 1$. При неисправности элемента E_1 на его выходе вместо функции φ_1 возникнет тождественная единица, а функции на выходах всех остальных элементов, соединяющихся со входами элемента E, не изменятся, поскольку все эти элементы расположены в схеме S' не ниже элемента E_1 в силу его выбора. Поэтому на выходе схемы S' возникнет ф. н. $g_2 = \overline{1\&\varphi_2\&\varphi_3\&\varphi_4} = \overline{\varphi_2\&\varphi_3\&\varphi_4}$.

Так как схема S' неизбыточна, то каждая из функций g_1, g_2 отлична от функции f'. Чтобы отличить функцию f' от функции g_1, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_1$, для которого $f'(\tilde{\sigma}_1) = 0$, т. е. $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_3(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_4(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Чтобы отличить функцию f' от функции g_2, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_2$, для которого $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 0$, $\varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = \varphi_3(\tilde{\sigma}_2) = \varphi_4(\tilde{\sigma}_2) = 1$. Из равенств $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = 1$, $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 0$ следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, а из равенств $\varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = 1$ — что неисправность элемента E_2, на выходе которого в случае исправности всех элементов схемы S' реализуется функция φ_2, нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, отличный от указанных двух наборов. Таким образом, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

4.1.2. Условие подслучая 4.1.1 не выполнено, но при этом в схеме S найдётся хотя бы один инвертор, расположенный выше элемента E и вход которого соединён с выходом некоторого ФЭ. Среди всех инверторов с такими свойствами выберем произвольный нижний инвертор I. Пусть Z — произвольная цепочка из ФЭ, соединяющая элемент I с элементом E. Будем считать, что сам элемент I в неё не входит. Очевидно тогда, что все элементы в цепочке Z — конъюнкторы. По утверждению 8.11 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E, неизбыточна и T — ЕПТ для схемы S'. На выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S', как было показано выше, реализуется функция $f' = \varphi_1\&\varphi_2\&\varphi_3$.

При неисправности того элемента, выход которого соединён в схеме S (и, следовательно, в схеме S') со входом инвертора I, на вход этого инвертора будет подаваться тождественная единица, а на его выходе возникнет тождественный нуль. Он будет подаваться на один из входов цепочки Z из конъюнкторов, поэтому на её выходе, т. е. на выходе элемента E, а значит, и схемы S', возникнет ф. н. $g_1 \equiv 0$. Далее, при неисправности элемента E_1 на его выходе вместо функции φ_1 возникнет тождественная единица, а функции на выходах всех остальных элементов, соединяющихся со входами элемента E, не изменятся, поскольку все эти элементы расположены в схеме S' не ниже элемента E_1 в силу его выбора. Поэтому на выходе схемы S' возникнет ф. н. $g_2 = 1\&\varphi_2\&\varphi_3 = \varphi_2\&\varphi_3$.

Так как схема S' неизбыточна, то каждая из функций g_1, g_2 отлична от функции f'. Чтобы отличить функцию f' от функции g_1, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_1$, для которого $f'(\tilde{\sigma}_1) = 1$, т. е. $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_3(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Чтобы отличить функцию f' от функции g_2, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_2$, для которого $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 0$, $\varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = \varphi_3(\tilde{\sigma}_2) = 1$. Из равенств $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = 1$, $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 0$ следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, а из равенств $\varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = 1$ — что неисправность элемента E_2, на выходе которого в случае исправности всех элементов схемы S' реализуется функция φ_2, нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, отличный от указанных двух наборов. Таким образом, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

4.1.3. Отрицание объединения подслучаев 4.1.1 и 4.1.2: в схеме S ниже элемента E не расположено ни одного инвертора, а вход любого инвертора этой схемы, расположенного выше элемента E, соединён с одним из входов схемы. В таком случае вход любого инвертора схемы S соединён с одним из входов этой схемы. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_d}$ — все попарно различные переменные, подаваемые в этой схеме на входы инверторов (если таких переменных нет, полагаем $d = 0$), а $x_{i_{d+1}}, \ldots, x_{i_k}$ — все попарно различные переменные, каждая из которых подаётся в ней на вход хотя бы одного конъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $k = d$). Тогда в силу леммы 9.2 имеем $k \geqslant 1$, $f = \overline{x}_{i_1}\&\ldots\&\overline{x}_{i_d}\&x_{i_{d+1}}\&\ldots\&x_{i_k}$ (в случае $d = 0$ полагаем $\overline{x}_{i_1}\&\ldots\&\overline{x}_{i_d} \equiv 1$; в случае $k = d$ полагаем $x_{i_{d+1}}\&\ldots\&x_{i_k} \equiv 1$) и $|T| \geqslant d$. Так как функция f не представима в видах (8.1), (9.6), (9.7), то $d \geqslant 3$, следовательно, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать. Подслучай 4.1 разобран.

4.2. Входы каждого элемента схемы S соединены с выходом не более чем одного ФЭ. Очевидно, что в таком случае схема S представляет собой цепочку из элементов, причём в ней содержится хотя бы один элемент, так как функция f не представима в виде (8.1). Пусть в этой цепочке при движении сверху вниз расположены элементы $E_1, \ldots, E_q$, где q — общее число элементов в схеме S.

Докажем индукцией по i, что на выходе элемента E_i в данной схеме, $i = 1, \ldots, q$, реализуется функция вида

$$0, 1 \text{ или } \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1}\&x_{i_2})^{\sigma_2}\&x_{i_3})^{\sigma_3}\&\ldots\&x_{i_k})^{\sigma_k}, \tag{9.13}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$; $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$ (при $k = 1$ этот вид превращается в $x_{i_1}^{\sigma_1}$).

База индукции. Пусть $i = 1$. Легко видеть, что вне зависимости от того, является элемент E_1 инвертором или конъюнктором, на его выходе реализуется функция указанного вида. База индукции доказана.

Предположение и шаг индукции. Пусть утверждение доказано для $i = j$, где $j \in \in \{1, \dots, q-1\}$ (и при этом $q \geqslant 2$); докажем его для $i = j+1$. На выходе элемента E_j по предположению индукции реализуется функция f_j вида (9.13); этот выход соединяется в схеме S с одним или несколькими входами элемента E_{j+1}, на все остальные входы которого подаются переменные. Если элемент E_{j+1} — инвертор, то утверждение очевидно, так как отрицание любой функции вида (9.13) является функцией того же вида. Пусть этот элемент — конъюнктор и все попарно различные переменные, которые подаются на его входы, не соединённые с выходом элемента E_j, — это переменные $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_l}$, где $l \geqslant k$ и $i_{k+1}, \dots, i_l$ — попарно различные индексы от 1 до n (если таких переменных нет, полагаем $l = k$). Тогда на выходе элемента E_{j+1} реализуется функция $f_j \& x_{i_{k+1}} \& \dots \& x_{i_l}$ (в случае $l = k$ полагаем $x_{i_{k+1}} \& \dots \& x_{i_l} \equiv 1$). Справедливо тождество

$$f_j \& x_{i_{k+1}} \& \dots \& x_{i_l} \equiv h_j \& x_{i_{k+1}} \& \dots \& x_{i_l}, \tag{9.14}$$

где h_j — б. ф., получающаяся подстановкой в функцию f_j вместо всех переменных из множества $\{x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_l}\}$ константы 1 (в случае $l = k$ полагаем $\{x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_l}\} = \varnothing$). Для доказательства тождества (9.14) достаточно рассмотреть случай, когда хотя бы одна из переменных $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_l}$ равна 0, и противоположный случай. Но функция $h_j \& x_{i_{k+1}} \& \dots \& x_{i_l}$, как нетрудно видеть, представима в виде (9.13) (при указанных непосредственно после него условиях). Шаг индукции доказан.

Получаем, что на выходе элемента E_q, т. е. на выходе всей схемы S, реализуется функция f вида (9.13). Но тогда эта функция имеет один из видов (8.1), (9.6), (9.7) или равна тождественной единице, что невозможно по предположению случая 4. Противоречие.

В итоге для любой б. ф. f, отличной от константы 1 и не представимой в видах (8.1), (9.6), (9.7), получаем равенство $D(f) = 3$. Теорема 9.5 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь в качестве неисправностей ФЭ ОКН типа 0 на выходах элементов. Выделим ещё два возможных представления функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \dots \& x_{i_k}^{\sigma_k}, \tag{9.15}$$

$$f(\tilde{x}^n) = \underbrace{(\dots((}_{k-1} x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2})^{\delta_1} \& x_{i_3}^{\sigma_3})^{\delta_2} \& \dots \& x_{i_k}^{\sigma_k})^{\delta_{k-1}}, \tag{9.16}$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$ в представлении (9.15) и $2 \leqslant k \leqslant n$ в представлении (9.16); $i_1, \dots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \dots, \sigma_k, \delta_1, \dots, \delta_{k-1} \in \{0, 1\}$, причём хотя бы одно из чисел $\delta_1, \dots, \delta_{k-1}$ (в представлении (9.16)) равно 0.

Теорема 9.6 [153]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B;\,0}_{\text{ЕП (O)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)},\\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.15), но не в виде (8.1)},\\ 2, & \text{если } f \text{ представима в виде (9.16)},\\ 3, & \text{если } f \text{ не представима в видах (8.1), (9.15), (9.16)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D^{B;\,0}_{\text{ЕП (O)}}(f)$ не определено.

Следствие 9.2 [153]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B;\,0}_{\text{ЕП (O)}}(n) = 3$.*

Для доказательства следствия 9.2 достаточно заметить, что функция $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ при $n \geqslant 2$ не представима в видах (8.1), (9.15), (9.16).

Доказательство теоремы 9.6. В случае $f \equiv 0$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Пусть $f \equiv 1$. Рассмотрим произвольную СФЭ S в базисе B, реализующую функцию f. Выход этой схемы не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого ФЭ. Среди всех элементов схемы S, на выходах которых при отсутствии в ней неисправностей реализуется константа 1 (хотя бы один такой элемент есть — выходной), выберем произвольный верхний элемент E. Если E — конъюнктор, то на каждом его входе в схеме S обязана реализовываться константа 1, что невозможно. Поэтому E — инвертор; в таком случае на его входе в схеме S реализуется константа 0 и этот вход обязан соединяться с выходом некоторого ФЭ E', на котором в схеме S при отсутствии неисправностей реализуется тождественный нуль. Тогда неисправность элемента E' никак не отразится на функции, реализуемой схемой S, т. е. эта схема избыточна. Получаем, что неизбыточных схем, реализующих функцию f, не существует и, следовательно, значение $D(f)$ при $f \equiv 1$ не определено.

Далее будем считать, что $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv 1$; можно также считать, что в базисе B содержится функция $x_1 \& x_2$ (см. начало доказательства теоремы 9.5). Рассмотрим четыре случая.

1. Функция f представима в виде (8.1). Тогда $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1.

2. Функция f представима в виде (9.15), но не в виде (8.1). Тогда $D(f) \geqslant 1$ в силу утверждения 8.4, если значение $D(f)$ определено. Докажем, что оно определено и $D(f) \leqslant 1$. Имеем $f = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k}$, где $1 \leqslant k \leqslant n$; $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B в соответствии с последним равенством. В этой схеме содержатся $k-1$ двухвходовых конъюнкторов и столько инверторов, сколько чисел из $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ равны 0. Каждый множитель вида $\overline{x}_{i_j}$ реализуем с

использованием одного инвертора. Затем все построенные инверторы и все входы «x_{i_j}» схемы, отвечающие множителям вида x_{i_j}, соединим цепочкой из конъюнкторов. Очевидно, что полученная схема реализует функцию f, а единственной её ф. н. является тождественный нуль. Отсюда следует, что схема S неизбыточна и множество, состоящее из любого одного единичного набора функции $f(\tilde{x}^n)$, является для данной схемы ЕПТ длины 1. Поэтому $D(f) \leqslant 1$. В итоге получаем равенство $D(f) = 1$. Случай 2 разобран.

3. Функция f представима в виде (9.16). Докажем сначала неравенство $D(f) \leqslant 2$. Без ограничения общности можно считать, что $i_1 = 1, \ldots, i_k = k$, т. е. $f(\tilde{x}^n) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_1^{\sigma_1} \& \& x_2^{\sigma_2})^{\delta_1} \& x_3^{\sigma_3})^{\delta_2} \& \ldots \& x_k^{\sigma_k})^{\delta_{k-1}}$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B в соответствии с последним равенством. В этой схеме содержатся $k-1$ двухвходовых конъюнкторов и столько инверторов, сколько чисел из $\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \delta_1, \ldots, \delta_{k-1}$ равны 0. Для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ такого, что $\sigma_i = 0$, подадим входную переменную x_i на вход инвертора. Затем подадим функции $x_1^{\sigma_1}$ и $x_2^{\sigma_2}$ (каждая из которых берётся либо со входа схемы, либо с выхода одного из построенных инверторов) соответственно на левый и правый входы двухвходового конъюнктора. Если $\delta_1 = 0$, то выход указанного конъюнктора соединим со входом инвертора. Далее, если $k \geqslant 3$, то выход последнего построенного элемента соединим с левым входом двухвходового конъюнктора, на правый вход которого подадим функцию $x_3^{\sigma_3}$ (взятую либо со входа схемы, либо с выхода одного из построенных инверторов). Если $\delta_2 = 0$, то выход указанного конъюнктора соединим со входом инвертора, и т. д.

Очевидно, что построенная схема S реализует функцию f. Докажем, что она неизбыточна и множество $T = \{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\pi}_1 = (0, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tilde{1}^{n-k})$, $\tilde{\pi}_2 = (1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tilde{1}^{n-k})$. Заметим, что $f(x_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tilde{1}^{n-k}) = \underbrace{(\ldots((}_{k-1} x_1^{\sigma_1})^{\delta_1})^{\delta_2} \ldots)^{\delta_{k-1}}$, поэтому верно соотношение (9.8): $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2)$. Заметим, что неисправность каждого инвертора в схеме S, кроме выходного (если выходной элемент этой схемы — инвертор), приводит к той же ф. н. схемы S, что и неисправность следующего за ним конъюнктора. Поэтому достаточно рассмотреть неисправности конъюнкторов и, быть может, выходного инвертора. Единственная цепь, связывающая вход «x_1» схемы S с её выходом, проходит через каждый из этих элементов. Поэтому если какой-то из них неисправен, то при подаче на входы схемы S вместо переменных $x_2, \ldots, x_n$ констант соответственно $\sigma_2, \ldots, \sigma_k, \tilde{1}^{n-k}$ изменение значения переменной x_1 с 0 на 1, т. е. переход от входного набора $\tilde{\pi}_1$ ко входному набору $\tilde{\pi}_2$, никак не отразится на значении, выдаваемом данной схемой. Следовательно, получающаяся ф. н. g схемы S удовлетворяет условию $g(\tilde{\pi}_1) = g(\tilde{\pi}_2)$. Отсюда и из (9.8) вытекает, что $g \neq f$, т. е. схема S неизбыточна, и множество T является для неё ЕПТ, поэтому $D(f) \leqslant 2$.

Докажем теперь, что $D(f) \geqslant 2$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема в базисе B, реализующая функцию f вида (9.16); T —произвольный ЕПТ для этой схемы. Надо доказать, что $|T| \geqslant 2$. Рассмотрим два подслучая.

3.1. В схеме S найдётся хотя бы один инвертор I, вход которого соединён с выходом некоторого ФЭ E. Пусть на выходе элемента E в схеме S реализуется б. ф. φ, тогда на выходе элемента I реализуется функция $\overline{\varphi}$. Чтобы обнаружить неисправность элемента E (элемента I), в тесте T должен содержаться набор $\tilde{\sigma}_1$ (набор $\tilde{\sigma}_2$), для которого $\varphi(\tilde{\sigma}_1) = 1$ (соответственно $\overline{\varphi}(\tilde{\sigma}_2) = 1$). Из двух последних равенств следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, поэтому $|T| \geqslant 2$, что и требовалось доказать.

3.2. Вход любого инвертора схемы S соединён с одним из входов этой схемы. Рассуждая аналогично первому абзацу из доказательства леммы 9.2 и учитывая соотношение $f \not\equiv 0$, получаем, что функция f представима в одном из видов (8.1), (9.15). Однако это невозможно, так как она представима в виде (9.16). Противоречие.

В итоге для любой функции f вида (9.16) получаем равенство $D(f) = 2$. Случай 3 разобран.

4. Функция f отлична от булевых констант и не представима в видах (8.1), (9.15), (9.16). Докажем сначала неравенство $D(f) \leqslant 3$. Идеи доказательства сходны с идеями, использованными при получении аналогичного неравенства в случае 4 из доказательства теоремы 9.5. Представим функцию f полиномом Жегалкина (9.9), где $m \geqslant 1$, $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме. Без ограничения общности $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_k$. Отметим, что $k < n$, так как в противном случае функция f была бы равна $x_1 \& \ldots \& x_n \oplus c = (x_1 \& \ldots \& \& x_n)^{\overline{c}}$, т. е. имела бы вид (9.15) или (9.16). По аналогичной причине $m \geqslant 2$.

Заменим в представлении (9.9) все операции $\oplus$ на операции $\oplus'$, где $x \oplus' y = x \oplus y \oplus 1$. Указанная замена приведёт к прибавлению к правой части представления (9.9) некоторого числа единиц (по одному на каждую операцию $\oplus$). Сложив все эти единицы, а также константу c по модулю 2, получим некоторую булеву константу c' такую, что

$$f = K_1 \oplus' \ldots \oplus' K_m \oplus c'. \tag{9.17}$$

Пусть $S_{\oplus'}$ — схема в базисе B с двумя входами и одним выходом, изображённая на рисунке 9.4 (все конъюнкторы двухвходовые). Нетрудно проверить, что на выходе этой схемы реализуется функция $x \oplus' y$, её всевозможными ф. н. являются функции $0, 1, xy, \overline{x}\,\overline{y}$ (и, следовательно, схема $S_{\oplus'}$ неизбыточна), а в качестве ЕПТ для неё можно взять множество $T_{\oplus'} = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$ (действительно, единственной б. ф. от двух переменных, которую нельзя отличить от функции $x \oplus' y$ на наборах из множества $T_{\oplus'}$, кроме неё самой, является функция $\overline{x} \vee y$, но она не входит в число ф. н. схемы $S_{\oplus'}$).

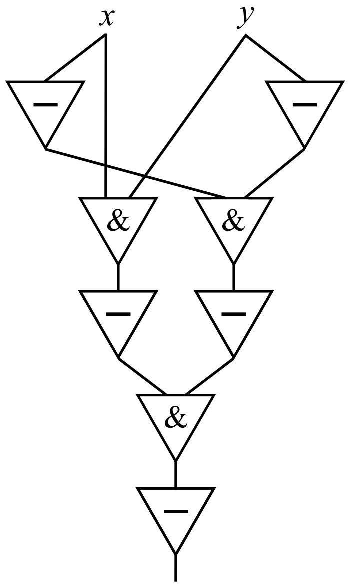

Рис. 9.4. Схема $S_{\oplus'}$

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B в соответствии с представлением (9.17) (см. рисунок 9.5). Каждую конъюнкцию K_i, $i = 1, \ldots, m$, реализуем цепочкой Z_i из конъюнкторов (если ранг конъюнкции K_i равен 1, то в цепочке Z_i не содержится элементов, а её выход совпадает с соответствующим входом схемы S). Затем выходы всех построенных цепочек $Z_1, \ldots, Z_m$ соединим со входами цепочки $Z_{\oplus'}$, состоящей из блоков $S_{\oplus'}$ и — в случае $c' = 1$ — инвертора, вход которого соединён с выходом нижнего из этих блоков, причём левый верхний вход этой цепочки соединим с выходом цепочки Z_1. Выход нижнего элемента цепочки $Z_{\oplus'}$ объявим выходом схемы S.

Легко видеть, что построенная схема S реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Докажем, что она неизбыточна и множество $T = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3\}$ является для неё ЕПТ, где $\tilde{\sigma}_1 = (\tilde{0}^n)$, $\tilde{\sigma}_2 = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$, $\tilde{\sigma}_3 = (\tilde{1}^n)$. В случае исправности всех элементов схемы S на наборе $\tilde{\sigma}_3$ на выходах всех конъюнкторов, содержащихся в цепочках $Z_1, \ldots, Z_m$, возникнут единицы. Если неисправен некоторый конъюнктор в цепочке Z_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$, то на наборе $\tilde{\sigma}_3$ на выходе этого конъюнктора и всех следующих за ним конъюнкторов в указанной цепочке, а значит, и на выходе цепочки Z_i, возникнут нули, а на выходах всех остальных конъюнкторов из указанных цепочек по-прежнему будут единицы. Учитывая, что выход цепочки Z_i соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т. е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}_3$.

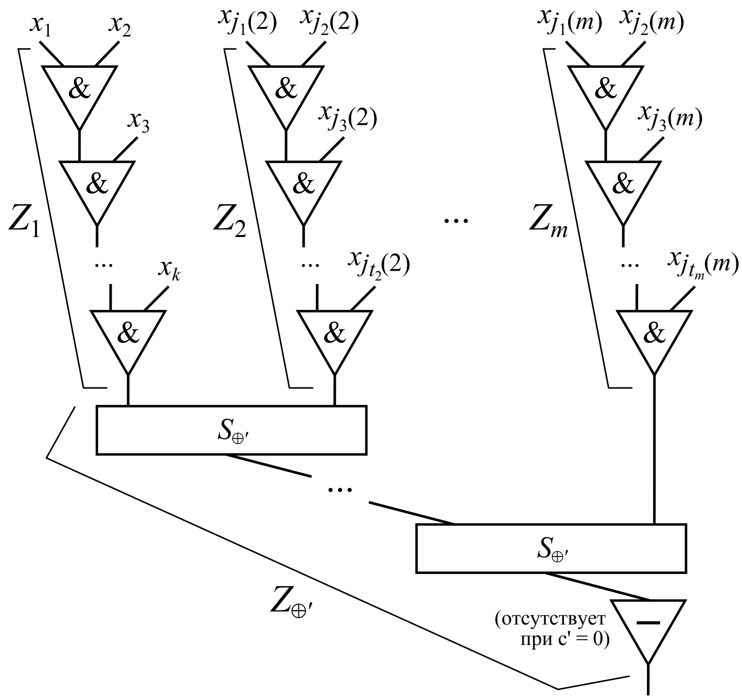

Рис. 9.5. Схема S

Далее, в случае исправности всех элементов схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ на выходе цепочки Z_1 возникают значения соответственно $0, 1, 1$, а на выходе каждой из цепочек $Z_2, \ldots, Z_m$ — соответственно $0, 0, 1$ (здесь используется то свойство, что в каждую из конъюнкций $K_2, \ldots, K_m$ входит хотя бы одна переменная, отличная от переменных $x_1, \ldots, x_k$, так как K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина функции f). В таком случае на входы верхнего блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ подаются наборы $(0,0), (1,0), (1,1)$, а на его выходе реализуются значения $0 \oplus' 0, 1 \oplus' 0, 1 \oplus' 1$, т. е. $1, 0, 1$. Тогда на входы второго сверху блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ (если он существует) подаются наборы $(1,0), (0,0), (1,1)$, а на его выходе реализуются значения $1 \oplus' 0, 0 \oplus' 0, 1 \oplus' 1$, т. е. $0, 1, 1$. Далее, на входы третьего сверху блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ (если он существует) подаются наборы $(0,0), (1,0), (1,1)$, а на его выходе реализуются значения $0 \oplus' 0, 1 \oplus' 0, 1 \oplus' 1$, т. е. $1, 0, 1$, и т. д. Таким образом, на входах каждого блока $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ при подаче на входы схемы S наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ возникают все наборы из множества $T_{\oplus'}$. Так как это множество является ЕПТ для неизбыточной схемы $S_{\oplus'}$, то при неисправности любого элемента в любом блоке $S_{\oplus'}$ цепочки $Z_{\oplus'}$ хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$ значение на выходе этого блока изменится. Учитывая, что выход указанного блока либо совпадает с выходом схемы S, либо соединяется ровно с одним входом некоторой нижней части цепочки $Z_{\oplus'}$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе схемы S изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$.

Наконец, если неисправен выходной инвертор цепочки $Z_{\oplus'}$ (в случае $c' = 1$), то ф. н. схемы S равна тождественному нулю, которую можно отличить от функции f на одном из наборов $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ (поскольку $f(\tilde{\sigma}_1) = c$, $f(\tilde{\sigma}_2) = \overline{c}$ — это следует из представления (9.9)).

В итоге получаем, что любую ф. н. схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе из множества T. Это означает, что схема S неизбыточна и множество T является для неё ЕПТ длины 3, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 3$.

Докажем теперь, что $D(f) \geqslant 3$. Пусть S — произвольная неизбыточная схема в базисе B, реализующая функцию f, отличную от констант и не представимую в видах (8.1), (9.15), (9.16); T —произвольный ЕПТ для этой схемы. Надо доказать, что $|T| \geqslant 3$.

Пусть E — произвольный конъюнктор, содержащийся в схеме S. Через $A_1(E)$ будем обозначать множество всех таких конъюнкторов схемы S, каждый из которых является верхним элементом хотя бы одной цепочки из конъюнкторов, у которой нижний элемент — E. Очевидно, что $E \in A_1(E)$. Через $A_2(E)$ обозначим множество всех таких элементов схемы S, не принадлежащих множеству $A_1(E)$, выход каждого из которых соединён хотя бы с одним входом хотя бы одного элемента из множества $A_1(E)$. Легко видеть, что все элементы во множестве $A_2(E)$ (если такие есть) — инверторы. Через $A_3(E)$ обозначим множество всех таких элементов схемы S, выход каждого из которых соединён со входом хотя бы одного инвертора из множества $A_2(E)$. Рассмотрим два подслучая.

4.1. В схеме S найдётся разделяющий конъюнктор E, для которого $|A_3(E)| \geqslant 2$. Среди всех элементов из множества $A_3(E)$ выберем произвольный нижний элемент E_1 и любой другой элемент E_2. Пусть I_1 (I_2) — произвольный инвертор из множества $A_2(E)$, вход которого соединён с выходом элемента E_1 (соответственно E_2); E_1' (E_2') — произвольный конъюнктор из множества $A_1(E)$, хотя бы один вход которого соединён с выходом элемента I_1 (соответственно I_2; элементы E_1' и E_2' могут совпадать). Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E_1 (E_2) этой схемы реализуется б. ф. φ_1 (соответственно φ_2). Тогда на выходе элемента I_1 (I_2) реализуется функция $\overline{\varphi_1}$ (соответственно $\overline{\varphi_2}$), на выходе элемента E_1' (E_2') — функция, меньшая либо равная $\overline{\varphi_1}$ (соответственно меньшая либо равная $\overline{\varphi_2}$), а на выходе элемента E — функция, меньшая либо равная как $\overline{\varphi_1}$, так и $\overline{\varphi_2}$, т. е. функция вида $\overline{\varphi_1} \& \overline{\varphi_2} \& \varphi_3$, где φ_3 — некоторая б. ф..

По утверждению 8.11 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E, неизбыточна и T — ЕПТ для схемы S'. На выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S', как было показано выше, реализуется функция $f' = \overline{\varphi_1} \& \overline{\varphi_2} \& \varphi_3$.

При неисправности элемента E на выходе схемы S' возникнет ф. н. $g_1 \equiv 0$. При неисправности элемента E_1 в силу его выбора на выходе элемента E_2 в схеме S (а значит, и в схеме S') по-прежнему будет реализована функция φ_2, а на выходе элемента I_2 — функция $\overline{\varphi_2}$. Тогда на выходе элемента E_2' и, как следствие, элемента E будет реализована функция, меньшая либо равная $\overline{\varphi_2}$. Поэтому получающаяся ф. н. g_2 схемы S' представима в виде $\overline{\varphi_2} \& \varphi_3'$, где φ_3' — некоторая б. ф..

Так как схема S' неизбыточна, то каждая из функций g_1, g_2 отлична от функции f'. Чтобы отличить функцию f' от функции g_1, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_1$, для которого $f'(\tilde{\sigma}_1) = 1$, т. е. $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = 0$, $\varphi_3(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Чтобы отличить функцию f' от функции g_2, во множестве T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\sigma}_2$, для которого $\varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = 0$ (это следует из выражений для функций f', g_2) и $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 1$ (чтобы можно было обнаружить появление на выходе элемента E_1 вместо функции φ_1 константы 0). Из равенств $\varphi_1(\tilde{\sigma}_1) = 0$, $\varphi_1(\tilde{\sigma}_2) = 1$ следует, что $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$, а из равенств $\varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = 0$ — что неисправность элемента E_2, на выходе которого в случае исправности всех элементов схемы S' реализуется функция φ_2, нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, отличный от указанных двух наборов. Таким образом, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

4.2. Для любого разделяющего конъюнктора E в схеме S выполняется неравенство $|A_3(E)| \leqslant 1$. Так как функция f не представима в видах (8.1), (9.15), то в схеме S содержится хотя бы один конъюнктор. Нижний конъюнктор схемы S, очевидно, является разделяющим (ниже его в схеме S может располагаться только цепочка из инверторов). Обозначим этот конъюнктор через E_1. Если $|A_3(E_1)| = 0$, то вход каждого инвертора, расположенного в схеме S выше элемента E_1, соединён с одним из входов этой схемы. Тогда, рассуждая аналогично первому абзацу из доказательства леммы 9.2, получаем, что на выходе элемента E_1 и, как следствие, на выходе схемы S реализуется функция одного из видов (8.1), (9.15), (9.16) или булева константа, что невозможно. Поэтому $|A_3(E_1)| = 1$. Пусть E_2' — единственный элемент из множества $A_3(E_1)$; I_1 — произвольный инвертор из множества $A_2(E_1)$, вход которого соединён с выходом элемента E_2'. Входы всех остальных инверторов из множества $A_2(E_1)$ соединены либо с выходом элемента E_2', либо со входами схемы. Входы всех верхних конъюнкторов из множества $A_1(E_1)$, очевидно, соединены либо с выходами инверторов из множества $A_2(E_1)$, либо со входами схемы.

Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E_2' этой схемы реализуется б. ф. φ_1. Тогда на выходе элемента I_1 реализуется функция $\overline{\varphi_1}$. Заметим, что $E_2' \notin A_1(E_1) \cup A_2(E_1)$, так как в противном случае на выходе элемента E_1 реализовывалась бы функция $\overline{\varphi_1} \& \varphi_1 \& \ldots \equiv 0$, что невозможно. В таком случае нетрудно видеть, что функция f, реализуемая на выходе всей схемы, имеет вид $(\overline{\varphi_1} \& K_1)^{\delta_1}$, где $\delta_1 \in \{0, 1\}$, а K_1 — либо тождественная единица, либо выражение вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k}$, в котором $k \geqslant 1$; $i_1, \ldots, i_k$ — попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \{0, 1\}$).

Справедливо тождество $\overline{\varphi_1} \& K_1 \equiv h_1 \& K_1$, где h_1 — б. ф., получающаяся подстановкой в функцию $\overline{\varphi_1}$ вместо тех переменных, которые входят в конъюнкцию K_1, булевых констант, обращающих эту конъюнкцию в единицу (доказательство аналогично доказательству тождества (9.14); в случае $K_1 \equiv 1$ полагаем, что таких переменных нет). Тогда $f = (h_1 \& K_1)^{\delta_1}$. Функция φ_1 не может иметь вид (8.1), (9.15), (9.16) или равняться константе, так как в противном случае такой же вид имела бы функция $h_1 \& K_1$, а значит, и функция $f = (h_1 \& K_1)^{\delta_1}$, что невозможно.

Легко видеть, что элемент E_2' в схеме S является разделяющим. Действительно, любая цепочка из ФЭ, соединяющая любой элемент, расположенный в схеме S выше элемента E_2', с выходным элементом этой схемы, обязана проходить через элемент E_2', так как у всех остальных элементов из множества $A_1(E_1) \cup A_2(E_1) \cup A_3(E_1)$ все входы уже «заняты» либо выходами элементов из этого же множества, либо входами схемы (см. рисунок 9.6).

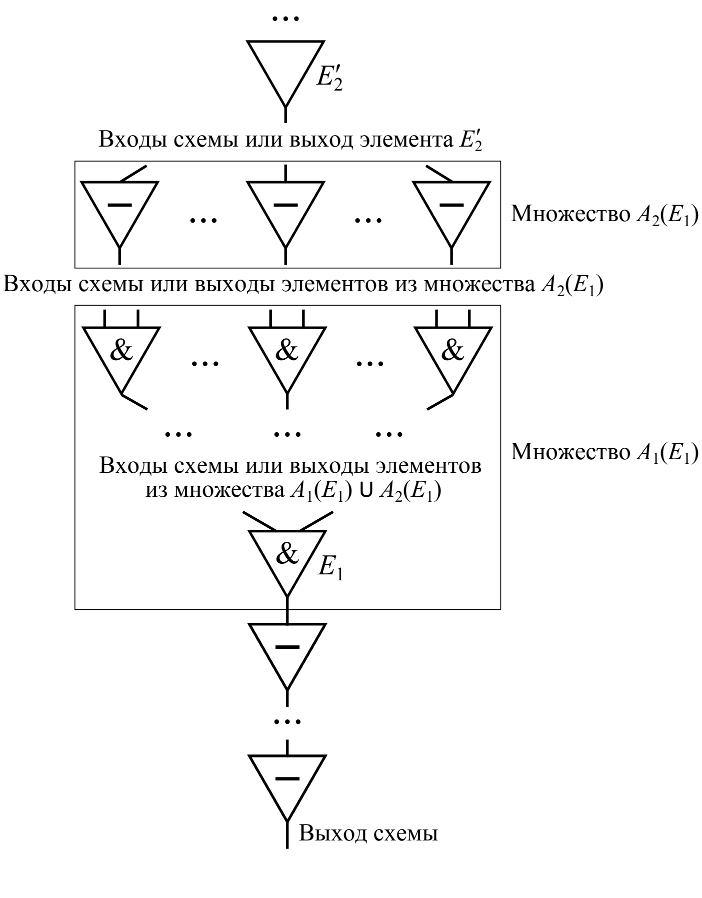

Рис. 9.6. Нижняя часть схемы S

Далее, если элемент E_2' — конъюнктор, положим $E_2 = E_2'$; если же E_2' — инвертор, то пусть E_2 — нижний конъюнктор, расположенный в схеме S выше элемента E_2' (если такого конъюнктора нет, то выше элемента E_2' располагается цепочка из инверторов, поэтому функция φ_1, реализуемая на выходе элемента E_2', имеет вид x_i^σ, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $\sigma \in \{0, 1\}$, т. е. вид (8.1) или (9.15), что невозможно в силу написанного выше); в этом втором случае очевидно, что от элемента E_2 к элементу E_2' ведёт цепочка из инверторов. В любом случае получаем, что на выходе конъюнктора E_2 реализуется б. ф. вида $\varphi_1^{\delta_2}$, где $\delta_2 \in \{0, 1\}$.

Из того, что элемент E_2' разделяющий, а между элементами E_2 и E_2' в схеме S может располагаться только цепочка из инверторов, вход каждого из которых уже «занят» выходом предыдущего элемента в этой цепочке или выходом элемента E_2, легко следует, что E_2 — разделяющий конъюнктор. По предположению случая 4.2 имеем $|A_3(E_2)| \leqslant 1$. Далее отдельно разбираем случаи $|A_3(E_2)| = 0$ и $|A_3(E_2)| = 1$ по аналогии с разбором случаев $|A_3(E_1)| = 0$ и $|A_3(E_1)| = 1$ (с использованием того факта, что функция $\varphi_1^{\delta_2}$ отлична от констант и не представима в видах (8.1), (9.15), (9.16)). Получаем, что в схеме S выше элемента E_2 должен существовать некоторый разделяющий конъюнктор E_3, на выходе которого реализуется функция, отличная от булевых констант и не представимая в видах (8.1), (9.15), (9.16), и т. д. Поскольку число элементов в схеме S конечно, рано или поздно мы придём к противоречию. Поэтому подслучай 4.2 невозможен.

В итоге для любой б. ф. f, отличной от констант и не представимой в видах (8.1), (9.15), (9.16), получаем равенство $D(f) = 3$. Теорема 9.6 доказана. $\square$

Из следствий 9.1 и 9.2 с использованием следствия 8.1 можно получить равенства $D^{B^*;\,0}_{\text{ЕП (О)}}(n) = D^{B^*;\,1}_{\text{ЕП (О)}}(n) = 3$ при $n \geqslant 2$, где B^* — произвольное ф. п. подмножество множества $\{\overline{x}, x_1 \vee \ldots \vee x_m \mid m \geqslant 2\}$, например, множество $\{\vee, \neg\}$.

§10. Диагностические тесты при однотипных константных неисправностях на выходах элементов

В данном параграфе рассматриваются единичные и полные диагностические тесты для СФЭ относительно ОКН типа 1 или типа 0 на выходах элементов. Доказано, что $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant$ $\geqslant 2$ при $n > m(B)$, где B — произвольный ф. п. конечный базис, а $p \in \{0, 1\}$, причём для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(f) \geqslant 2$ (теорема 10.1). Для стандартного базиса B_0 и базиса Жегалкина B_1 найдены точные значения величин $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ и $D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (теоремы 10.2 и 10.3) и установлено, что $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 0$

(следствие 10.1), $D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$ (следствие 10.2). Первое из этих следствий улучшает неравенство $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) \leqslant 2n+1$ из [193], которое было получено для $n \geqslant 1$. Доказано также соотношение $D^{B_2;\,1}_{\text{ПД (О)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log n + 2}}$ при $n \geqslant 1$, где $B_2 = \{x \,|\, y\}$ (теорема 10.5). В качестве побочного результата, имеющего самостоятельную ценность, получена оценка $D^{0}_{\text{ПД (Р)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log n + 2}}$ для любого $n \geqslant 1$ (теорема 10.4) при рассмотрении ОКН типа 0 на входах схем.

Лемма 10.1. *Пусть B — произвольный ф. п. базис; $p \in \{0,1\}$; S — СФЭ в базисе B, реализующая б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, неизбыточная относительно ОКН типа p на выходах элементов и такая, что $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(S) \leqslant 1$. Тогда функция, реализуемая на выходе любого элемента схемы S при отсутствии в ней неисправностей, не превосходит f при $p = 1$ и не меньше f при $p = 0$.*

Доказательство. Предположим противное: значение функции h, реализуемой на выходе некоторого элемента E схемы S, на каком-то наборе $\tilde{\delta}$ больше значения функции f на том же наборе $\tilde{\delta}$ при $p = 1$ либо меньше этого значения при $p = 0$. Тогда $h(\tilde{\delta}) = p$ и $f(\tilde{\delta}) = \overline{p}$. В таком случае неисправность (типа p на выходе) элемента E никак не отразится на значении, выдаваемом схемой S на наборе $\tilde{\delta}$, которое по прежнему будет равно $f(\tilde{\delta}) = \overline{p}$, поэтому получающаяся ф. н. $g(\tilde{x}^n)$ схемы S удовлетворяет условию $g(\tilde{\delta}) = \overline{p}$. Так как схема S неизбыточна, то $g \neq f$. Далее, при неисправности выходного элемента схемы S (такой элемент существует, поскольку в данной схеме есть хотя бы один элемент и нет «висячих» элементов) получающаяся схема будет реализовывать константу p, причём $f \not\equiv p$ и $g \not\equiv p$ в силу равенств $f(\tilde{\delta}) = \overline{p}$ и $g(\tilde{\delta}) = \overline{p}$. Таким образом, функции f, g и p попарно различны. Чтобы различить указанные три функции между собой, в любой ЕДТ для схемы S, очевидно, должны входить по крайней мере два набора, однако это противоречит неравенству $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(S) \leqslant 1$. Полученное противоречие доказывает лемму 10.1. □

Теорема 10.1 [154]. *Для любого ф. п. конечного базиса B и любого $p \in \{0,1\}$ справедливо неравенство $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 2$ при $n > m(B)$, причём для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B;\,p}_{\text{ЕД (О)}}(f) \geqslant 2$.*

Доказательство. В силу утверждения 8.9 и следствия 8.1, а также равенства $m(B^*) = m(B)$ достаточно рассмотреть случай $p = 1$, т. е. когда в схемах допускаются ОКН типа 1 на выходах элементов. Вместо $m(B)$ для краткости будем писать m. Пусть $n > m$ и $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная не тождественно нулевая б. ф., такая, что при подстановке вместо произвольных её m переменных произвольных булевых констант получающаяся функция отлична от тождественной единицы. Тогда функция f отлична от констант и переменных. В качестве $f(\tilde{x}^n)$

можно взять, например, функцию $x_1 \& x_2 \& \ldots \& x_n$. Предположим, что функцию f можно реализовать неизбыточной СФЭ S в базисе B, для которой $D^{B;\,1}_{\text{ЕД}\,(\text{О})}(S) \leqslant 1$. Ясно, что в схеме S содержится выходной элемент, причём на выходе этого элемента реализуется неконстантная б. ф. Среди всех элементов схемы S, на выходах которых реализуются неконстантные б. ф., выберем произвольный верхний элемент E. Пусть элемент E имеет t входов и реализует б. ф. $\varphi(\tilde{x}^t)$ от своих входов. Отметим, что $t \leqslant m$.

Согласно выбору элемента E, каждый его вход в схеме S соединён либо с каким-то входом схемы S, либо с выходом элемента, реализующего булеву константу. Поэтому на выходе элемента E в схеме S реализуется б. ф. $\varphi(y_1, \ldots, y_t)$, где $y_1, \ldots, y_t \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n\}$. Хотя бы одно из $y_1, \ldots, y_t$ принадлежит множеству $\{x_1, \ldots, x_n\}$, так как функция $\varphi(y_1, \ldots, y_t)$ отлична от булевых констант в силу выбора элемента E. Тогда эта функция зависит от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{t'}}$, где

$$1 \leqslant t' \leqslant t \leqslant m < n,$$

а $i_1, \ldots, i_{t'}$ — попарно различные индексы от 1 до n; обозначим её через $\psi(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{t'}})$. Пусть $(\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_{t'}})$ — произвольный единичный набор данной функции. Из леммы 10.1 следует, что $\psi \leqslant f$; при подстановке в обе части этого неравенства вместо переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{t'}}$ констант соответственно $\pi_{i_1}, \ldots, \pi_{i_{t'}}$ получим, что $1 \leqslant f'$, т. е. $f' \equiv 1$, где f' — б. ф., получающаяся из функции f в результате указанной подстановки. Однако это противоречит выбору функции $f(\tilde{x}^n)$ с учётом того, что $t' \leqslant m$. Полученное противоречие означает, что $D(n) \geqslant D(f) \geqslant 2$ (отметим, что в силу замечания 8.1 и соотношения $n > m \geqslant 2$ значения $D(n)$ и $D(f)$ определены).

Пусть R_n — множество б. ф. f от n переменных, для которых указанное в начале доказательства теоремы свойство не выполняется, т. е. множество таких б. ф. от n переменных, каждая из которых либо равна тождественному нулю, либо при подстановке вместо некоторых m переменных некоторых булевых констант становится равна тождественной единице. Оценим сверху величину $|R_n|$. Пусть $j_1, \ldots, j_m$ — произвольные индексы от 1 до n такие, что $j_1 < \ldots < j_m$; $\delta_1, \ldots, \delta_m$ — произвольные булевы константы. Каждая б. ф. от n переменных, обращающаяся в тождественную единицу при подстановке вместо её переменных $x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}$ констант $\delta_1, \ldots, \delta_m$ соответственно, принимает значение 1 на 2^{n-m} наборах, j_1-я,…,j_m-я компоненты которых равны $\delta_1, \ldots, \delta_m$ соответственно, и может принимать произвольные значения на остальных $2^n - 2^{n-m}$ наборах, поэтому число таких функций равно $2^{2^n - 2^{n-m}}$. Кроме того, $0 \in R_n$. Тогда

$$|R_n| \leqslant 1 + \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 < \\ < \ldots < j_m \leqslant n}} \sum_{\substack{\delta_1, \ldots, \delta_m \in \\ \in \{0,1\}}} 2^{2^n - 2^{n-m}} = 1 + C_n^m \cdot 2^m \cdot 2^{2^n - 2^{n-m}} \leqslant 2^{2^n - 2^{n-m} + n + m + 1},$$

$$\frac{|R_n|}{2^{2^n}} \leqslant \frac{2^{2^n - 2^{n-m} + n + m + 1}}{2^{2^n}} = 2^{-2^{n-m} + n + m + 1} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Таким образом, отношение числа б. ф. из множества R_n к общему числу б. ф. от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству R_n, выполнено неравенство $D(f) \geqslant 2$, откуда следует справедливость теоремы 10.1. □

Рассмотрим стандартный базис $B_0 = \{\&, \vee, \neg\}$, а в качестве неисправностей ФЭ — ОКН типа 1 на выходах элементов. Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = K_1 \vee \ldots \vee K_m, \tag{10.1}$$

где $m \geqslant 1$ и каждое слагаемое K_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x}_{i_j}$, либо $x_{i_j} x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i'_j$.

Отметим, что представление (8.1) является частным случаем представления (10.1).

Теорема 10.2 [156]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 1, справедливо равенство*

$$D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде } (10.1), \text{ но не в виде } (8.1), \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде } (10.1). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ не определено.

Следствие 10.1 [156]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_0;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$.*

Для доказательства следствия 10.1 достаточно заметить, что функция $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$ не представима в видах (8.1) и (10.1).

Доказательство теоремы 10.2. В случае $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Далее считаем, что $f \not\equiv 1$. Если функция f представима в виде (8.1), то $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1. Пусть данная функция представима в виде (10.1) и не представима в виде (8.1). Каждое слагаемое K_j вида $\overline{x}_{i_j}$ реализуем с использованием одного инвертора, а каждое слагаемое K_j вида $x_{i_j} x_{i'_j}$ — с использованием одного конъюнктора. Далее определим СФЭ, представляющую собой цепочку из дизъюнкторов, входы которой соединяются с выходами всех построенных к настоящему моменту ФЭ и со всеми входами «x_{i_j}» схемы, отвечающими слагаемым K_j вида x_{i_j}. Очевидно, что полученная схема реализует функцию f, а единственной её ф. н. является тождественная единица. Отсюда следует, что данная схема неизбыточна и множество, состоящее из любого одного нулевого набора функции $f(\tilde{x}^n)$, является для этой схемы ЕДТ длины 1. Поэтому $D(f) \leqslant 1$. С другой стороны, $D(f) \geqslant 1$ в силу утверждения 8.4. В итоге получаем равенство $D(f) = 1$.

Пусть теперь функция f не представима в виде (10.1). Докажем сначала, что $D(f) \geqslant 2$, если $D(f)$ определено. Предположим, что $D(f) \leqslant 1$. Тогда существует неизбыточная СФЭ S в базисе B_0, реализующая функцию f, для которой $D(S) \leqslant 1$. Очевидно, что в схеме S содержится выходной элемент.

Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ — все такие входные переменные схемы S, каждая из которых подаётся в ней на вход какого-то инвертора (если таких переменных нет, полагаем $r = 0$). На выходах этих инверторов реализуются функции $\overline{x}_{i_1}, \ldots, \overline{x}_{i_r}$; каждая из них по лемме 10.1 не превосходит f. Поэтому

$$\overline{x}_{i_1} \vee \ldots \vee \overline{x}_{i_r} \leqslant f \tag{10.2}$$

(в случае $r = 0$ полагаем $\overline{x}_{i_1} \vee \ldots \vee \overline{x}_{i_r} = 0$).

Далее, пусть $x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_{r+s}}$ — все такие входные переменные схемы S, каждая из которых подаётся в ней на вход какого-то дизъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $s = 0$). На выходах этих дизъюнкторов реализуются функции, большие либо равные соответственно $x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_{r+s}}$, а тогда по лемме 10.1 имеем $x_{i_{r+1}} \leqslant f$, ..., $x_{i_{r+s}} \leqslant f$. Следовательно,

$$x_{i_{r+1}} \vee \ldots \vee x_{i_{r+s}} \leqslant f \tag{10.3}$$

(в случае $s = 0$ полагаем $x_{i_{r+1}} \vee \ldots \vee x_{i_{r+s}} = 0$).

Пусть теперь $(x_{i_{r+s+1}}, x_{i_{r+s+2}}), \ldots, (x_{i_{r+s+2t-1}}, x_{i_{r+s+2t}})$ — все такие неупорядоченные пары входных переменных схемы S, что обе переменные из каждой пары подаются в ней на входы какого-то одного и того же конъюнктора (если таких пар переменных нет, полагаем $t = 0$). На выходах этих конъюнкторов реализуются функции $x_{i_{r+s+1}}x_{i_{r+s+2}}, \ldots, x_{i_{r+s+2t-1}}x_{i_{r+s+2t}}$, каждая из которых по лемме 10.1 не превосходит f. Поэтому

$$x_{i_{r+s+1}}x_{i_{r+s+2}} \vee \ldots \vee x_{i_{r+s+2t-1}}x_{i_{r+s+2t}} \leqslant f \tag{10.4}$$

(в случае $t = 0$ полагаем $x_{i_{r+s+1}}x_{i_{r+s+2}} \vee \ldots \vee x_{i_{r+s+2t-1}}x_{i_{r+s+2t}} = 0$).

Отметим, что хотя бы одно из чисел r, s, t больше нуля, так как на все входы любого верхнего элемента схемы S обязаны подаваться переменные.

Из (10.2)–(10.4) получаем соотношение $f' \leqslant f$, где

$$f' = \overline{x}_{i_1} \vee \ldots \vee \overline{x}_{i_r} \vee x_{i_{r+1}} \vee \ldots \vee x_{i_{r+s}} \vee x_{i_{r+s+1}} x_{i_{r+s+2}} \vee \ldots \vee x_{i_{r+s+2t-1}} x_{i_{r+s+2t}}. \tag{10.5}$$

Если $f' = f$, то функция f представима в виде (10.1), что противоречит предположению рассматриваемого случая. Поэтому $f' < f$, т. е. существует такой набор $\tilde{\pi}$, что $f'(\tilde{\pi}) = 0$, $f(\tilde{\pi}) = 1$. Тогда значение на выходе выходного элемента схемы S на наборе $\tilde{\pi}$ равно 1. Из этого следует существование в схеме S такого элемента E, что на наборе $\tilde{\pi}$ значение на его выходе равно 1, а значение на выходе любого элемента, расположенного в схеме S выше элемента E (если такой элемент существует) равно 0. Возможны семь случаев.

1. Элемент E — инвертор, и его вход соединён в схеме S с выходом какого-то ФЭ E_2. Пусть на выходе элемента E_2 в схеме S реализуется функция φ, тогда на выходе элемента E реализуется функция $\overline{\varphi}$. Из леммы 10.1 следует, что $\varphi \leqslant f$ и $\overline{\varphi} \leqslant f$, а тогда $1 \equiv \varphi \vee \overline{\varphi} \leqslant f$, т. е. $f \equiv 1$. Противоречие.

2. Элемент E — инвертор, и его вход соединён в схеме S с каким-то входом «x_i» этой схемы. На наборе $\tilde{\pi}$ значение на выходе элемента E в схеме S равно единице, следовательно, на этом наборе $x_i = 0$. Но $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ по определению данных индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 1$ в силу (10.5). Противоречие.

3. Элемент E — конъюнктор или дизъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S с выходами ФЭ. В этом случае в силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на обоих входах элемента E равно нулю, а значение на его выходе — единице, что невозможно.

4. Элемент E — конъюнктор, и один его вход (без ограничения общности левый) соединён в схеме S с выходом ФЭ, а другой — с каким-то входом схемы S. Тогда в силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на левом входе элемента E равно нулю, а значение на его выходе — единице, что невозможно.

5. Элемент E — дизъюнктор, и один его вход (без ограничения общности левый) соединён в схеме S с выходом ФЭ, а другой — с каким-то входом «x_i» схемы S. Тогда в силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на левом входе элемента E равно нулю, а значение на его выходе — единице, следовательно, на этом наборе $x_i = 1$. Но $i \in \{i_{r+1}, \ldots, i_{r+s}\}$ по определению данных индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 1$ в силу (10.5). Противоречие.

6. Элемент E — конъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S с какими-то входами «x_i», «$x_{i'}$» этой схемы. На наборе $\tilde{\pi}$ значение на выходе элемента E в схеме S равно единице, следовательно, на этом наборе $x_i = x_{i'} = 1$. Но $(i, i') \in \{(i_{r+s+1}, i_{r+s+2}), \ldots, (i_{r+s+2t-1}, i_{r+s+2t})\}$ по определению данных индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 1$ в силу (10.5). Противоречие.

7. Элемент E — дизъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S со входами этой

схемы. На наборе $\tilde{\pi}$ значение на выходе элемента E в схеме S равно единице, следовательно, на этом наборе значение хотя бы одной из двух входных переменных схемы S, подающихся на входы элемента E, равно единице; обозначим эту переменную через x_i. Но $i \in \{i_{r+1}, \ldots, i_{r+s}\}$ по определению данных индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 1$ в силу (10.5). Противоречие.

Во всех случаях получено противоречие, значит, исходное предположение было неверно и $D(f) \geqslant 2$, если $D(f)$ определено.

Докажем теперь, что $D(f)$ определено и $D(f) \leqslant 2$. Если $f(\tilde{x}^n) \equiv 0$, то по утверждению 9.1 функцию f можно реализовать неизбыточной СФЭ в базисе B_0, допускающей ЕДТ из любого $(1,1)$-набора и любого $(1,0)$-набора, поэтому $D(f) \leqslant 2$. Далее будем считать, что $f \not\equiv 0$. Рассмотрим произвольную тупиковую д. н. ф. F функции $f(\tilde{x}^n)$. Пусть $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_l}^{\sigma_l}$ — все попарно различные входящие в неё ЭК ранга 1 (если таких ЭК нет, полагаем $l = 0$). Индексы $i_1, \ldots, i_l$ попарно различны, поскольку $f \not\equiv 1$. Без ограничения общности $i_1 = 1, \ldots, i_l = l$. Тогда представление функции $f(\tilde{x}^n)$ формой F имеет вид

$$f(\tilde{x}^n) = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \tag{10.6}$$

(в случае $l = 0$ полагаем $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} = 0$), где $\hat{f}$ — дизъюнкция некоторых ЭК, ранг каждой из которых не меньше двух; отметим, что хотя бы одна такая ЭК есть, так как функция f не представима в виде (10.1). Легко видеть, что если $l \geqslant 1$ и в некоторую такую ЭК входит множитель вида x_i^{α}, где $i \in \{1, \ldots, l\}$ и $\alpha \in \{0, 1\}$, то при $\alpha = \overline{\sigma}_i$ этот множитель, а при $\alpha = \sigma_i$ всю ЭК можно удалить из правой части представления (10.6) с сохранением равенства, что противоречит тупиковости д. н. ф. F. Следовательно, б. ф. $\hat{f}$ зависит только от $n - l$ переменных $x_{l+1}, \ldots, x_n$; при этом $n - l \geqslant 2$, так как в $\hat{f}$ (в указанном представлении) входит хотя бы одна ЭК ранга 2 или больше. Рассмотрим два случая.

I. Пусть $\hat{f}(\tilde{1}^{n-l}) = 1$. Построим схему S в базисе B_0, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ и состоящую из семи подсхем (см. рисунок 10.1). В случае $l \geqslant 1$ на входы подсхемы S_1 подаются переменные $x_1, \ldots, x_l$; на её l выходах реализуются функции $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_l^{\sigma_l}$, причём, если $\sigma_i = 1$, $i \in \{1, \ldots, l\}$, то вход «x_i» подсхемы S_1 считаем её выходом, а если $\sigma_i = 0$, то входная переменная x_i подаётся на вход инвертора, выход которого считаем выходом подсхемы S_1. При $l = 0$ подсхема S_1 пуста.

На входы подсхем S_2 и S_2' подаются переменные $x_{l+1}, \ldots, x_n$; каждая из этих подсхем содержит $n - l$ инверторов и реализует отрицания всех указанных переменных. (Всего в подсхемах S_2 и S_2' содержатся $2(n - l)$ инверторов.)

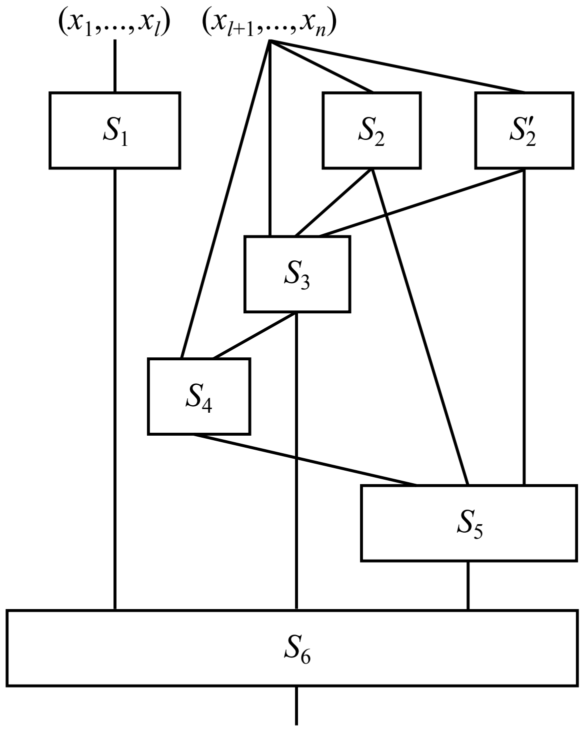

Рис. 10.1. Схема S

Через K обозначим конъюнкцию $x_{l+1}\&\ldots\&x_n$. Пусть некоторая тупиковая д. н. ф. функции $\hat{f}'(x_{l+1},\ldots,x_n) = \hat{f}(x_{l+1},\ldots,x_n)\&\overline{K}$ содержит m ЭК $K_1,\ldots,K_m$ (если $\hat{f}' \equiv 0$, то $m = 0$ и полагаем $K_1 \vee \ldots \vee K_m = 0$). Тогда $\hat{f}' = K_1 \vee \ldots \vee K_m$. Из (10.6), определения слагаемых $x_{i_1}^{\sigma_1},\ldots,x_{i_l}^{\sigma_l}$ и неравенства $\hat{f}' \leqslant \hat{f}$ следует, что ранг каждой из ЭК $K_1,\ldots,K_m$ не меньше двух. В случае $m \geqslant 1$ на входы подсхемы S_3 подаются переменные $x_{l+1},\ldots,x_n$ и выходы подсхем S_2, S_2'. Для каждой ЭК K_j, $j = 1,\ldots,m$, в подсхеме S_3 содержатся две непересекающиеся цепочки из конъюнкторов C_j и C_j'. На входы цепочки C_j (C_j') подаются все те переменные из $x_{l+1},\ldots,x_n$ и их отрицания, реализованные на выходах подсхемы S_2 (соответственно S_2'), которые входят в конъюнкцию K_j; при этом на левый вход верхнего конъюнктора обеих цепочек подаётся отрицание какой-то переменной из $x_{l+1},\ldots,x_n$; в конъюнкцию K_j входит хотя бы одно такое отрицание, так как

$$K_j(\tilde{1}^{n-l}) \leqslant \hat{f}'(\tilde{1}^{n-l}) = \hat{f}(\tilde{1}^{n-l})\&\overline{K(\tilde{1}^{n-l})} = 1\&0 = 0.$$

Каждая из цепочек C_j и C_j', очевидно, реализует K_j. Кроме того, для каждого $j \in \{1,\ldots,m\}$ в подсхеме S_3 содержится конъюнктор E_j, входы которого соединены с выходами цепочек C_j и C_j'. На выходе этого конъюнктора также реализуется K_j. При $m = 0$ подсхема S_3 пуста.

Подсхема S_4 служит (как будет видно из дальнейшего) для контроля исправности элементов из подсхемы S_3. В случае $m \geqslant 1$ на входы подсхемы S_4 подаются переменные

$x_{l+1}, \ldots, x_n$ и выходы всех конъюнкторов из цепочек C_j, C'_j подсхемы S_3, $j = 1, \ldots, m$. Для каждого конъюнктора E из цепочки C_j (C'_j) в подсхеме S_4 содержится конъюнктор E', один из входов которого соединён с выходом элемента E, а на другой его вход подаётся та переменная x_i из $x_{l+1}, \ldots, x_n$, отрицание которой подаётся на левый вход верхнего конъюнктора цепочки C_j (соответственно C'_j). Легко видеть, что функция, реализуемая на выходе элемента E', представляет собой конъюнкцию некоторых переменных и отрицаний переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$, причём в неё входят x_i и $\overline{x}_i$, откуда следует, что она тождественно равна нулю. Все такие конъюнкторы E' будем считать выходными элементами подсхемы S_4. Тогда на всех выходах подсхемы S_4 реализуются тождественные нули. При $m = 0$ подсхема S_4 пуста.

Подсхема S_5 представляет собой цепочку из дизъюнкторов, входы которой соединяются со всеми выходами подсхем S_2, S'_2 и S_4, и инвертора I, являющегося нижним элементом этой цепочки. Легко видеть, что на выходе элемента I, который мы будем считать единственным выходом подсхемы S_5, реализуется функция $\overline{\overline{x}_{l+1} \vee \ldots \vee \overline{x}_n} = x_{l+1} \& \ldots \& x_n = K$.

Подсхема S_6 представляет собой цепочку из дизъюнкторов, входы которой соединяются со всеми выходами подсхемы S_1, с выходами элементов E_j, $j = 1, \ldots, m$, из подсхемы S_3 (при $m \geqslant 1$) и с выходом инвертора I из подсхемы S_5. На выходе этой цепочки в силу соотношений $\hat{f}(\tilde{1}^{n-l}) = 1$, $K \leqslant \hat{f}$, $K = \hat{f}K$ и (10.6) реализуется функция

$$x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}' \vee K =$$
$$= x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}\overline{K} \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}\overline{K} \vee \hat{f}K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} = f.$$

Выход указанной цепочки будем считать выходом всей схемы S (в случае $l = m = 0$ этот выход совпадёт с выходом подсхемы S_5). Тогда схема S реализует функцию f.

Найдём все возможные ф. н. схемы S. Если неисправен какой-то элемент в одной из подсхем S_1, S_6, инвертор I в подсхеме S_5 или какой-то элемент E_j, $j \in \{1, \ldots, m\}$, в подсхеме S_3, то ф. н. схемы S в силу вида подсхемы S_6 и того, что любой элемент подсхемы S_1 является выходным, равна тождественной единице. Если неисправен какой-то дизъюнктор в подсхеме S_5 или какой-то элемент в подсхеме S_4, то в силу вида подсхемы S_5 и того, что любой элемент подсхемы S_4 является выходным, на вход инвертора I будет подаваться тождественная единица, значит, на его выходе будет реализован тождественный нуль. Тогда ф. н. схемы S будет равна $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}'$.

Пусть неисправен какой-то элемент E в цепочке C_j (или C'_j) из подсхемы S_3. Тогда на выходе этой цепочки вместо K_j реализуется некоторая б. ф. K'_j, причём $K'_j \geqslant K_j$. С другой стороны, на выходе цепочки C'_j (соответственно C_j) по-прежнему реализуется функция K_j, а значит, на выходе конъюнктора E_j реализуется функция $K_j \& K'_j = K_j$. Далее, выход неисправного элемента E соединён с одним из входов некоторого конъюнктора E' из подсхемы S_4, на другой вход которого подаётся какая-то переменная x_i из $x_{l+1}, \ldots, x_n$. Поэтому на выходе элемента E' реализуется функция $1 \& x_i = x_i$. Она подаётся на некоторый вход цепочки из дизъюнкторов в подсхеме S_5, а какой-то другой вход этой цепочки по построению соединён с выходом подсхемы S_2, на котором реализуется функция $\overline{x}_i$. Отсюда следует, что на выходе указанной цепочки, т. е. на входе инвертора I, реализуется тождественная единица. Тогда на выходе элемента I реализуется тождественный нуль, а на выходе всей схемы S — функция $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}'$.

Наконец, пусть неисправен какой-то инвертор в подсхеме S_2 (или S'_2). Тогда на выходе каждой цепочки C_j (соответственно C'_j) из подсхемы S_3 реализуется некоторая б. ф. K''_j, причём $K''_j \geqslant K_j$. С другой стороны, на выходе цепочки C'_j (соответственно C_j) по-прежнему реализуется функция K_j, а значит, на выходе конъюнктора E_j реализуется функция $K_j \& K''_j = K_j$. Далее, выход неисправного инвертора соединён с некоторым входом цепочки из дизъюнкторов в подсхеме S_5, поэтому на её выходе, т. е. на входе инвертора I, реализуется тождественная единица. Тогда на выходе элемента I реализуется тождественный нуль, а на выходе всей схемы S — функция $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}'$.

В итоге получаем, что у схемы S есть только две ф. н. — тождественная единица и

$$g = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f}' = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee (\hat{f} \& \overline{x_{l+1} \& \ldots \& x_n}).$$

На наборе $\tilde{u} = (\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_l}, \tilde{1}^{n-l})$ значение функции g равно нулю и отличается от значений каждой из функций f, 1 в силу (10.6) и равенства $\hat{f}(\tilde{1}^{n-l}) = 1$. С другой стороны, функцию f можно отличить от тождественной единицы на любом её нулевом наборе $\tilde{v}$. Следовательно, схема S неизбыточна и множество $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ для неё является ЕДТ длины 2, откуда $D(f) \leqslant 2$. В случае I теорема 10.2 доказана.

II. Пусть $\hat{f}(\tilde{1}^{n-l}) = 0$. Построим схему S в базисе B_0, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ и состоящую из восьми подсхем (см. рисунок 10.2). Подсхемы S_1, S_2 и S'_2 полностью совпадают с соответствующими подсхемами схемы S из случая I. Как было показано выше, функция f представима в виде (10.6), где $\hat{f}$ — дизъюнкция некоторых m ЭК ($m \geqslant 1$), каждая из которых имеет ранг не меньше двух и содержит только переменные из множества $\{x_{l+1}, \ldots, x_n\}$. Обозначим эти ЭК через $K_1, \ldots, K_m$. Заметим, что в каждую из них хотя бы одна переменная входит с отрицанием, так как $\hat{f}(\tilde{1}^{n-l}) = 0$. Это обстоятельство позволяет построить подсхему S_3 схемы S в точности как соответствующую подсхему в случае I. В частности, в построенной подсхеме S_3 можно выделить цепочки конъюнкторов C_j и C'_j и конъюнкторы E_j, $j = 1, \ldots, m$, реализующие ЭК K_j.

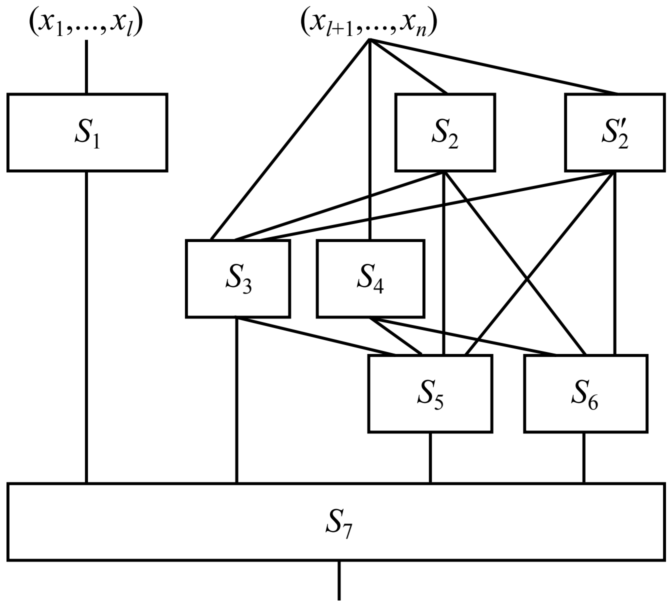

Рис. 10.2. Схема S

Подсхемы S_4 и S_5 служат (как будет видно из дальнейшего) для контроля исправности элементов из подсхем S_2, S'_2 и S_3. Пусть $K = x_{l+1} \& \ldots \& x_n$. Подсхема S_4 представляет собой две непересекающиеся цепочки C и C' из конъюнкторов, на входы каждой из которых подаются переменные $x_{l+1}, \ldots, x_n$ (напомним, что $n - l \geqslant 2$), причём переменная x_{l+1} подаётся на левый вход верхнего конъюнктора каждой из этих цепочек. На выходе каждой из цепочек C, C', очевидно, реализуется конъюнкция K.

Входы подсхемы S_5 соединяются с выходами подсхем S_2, S'_2, цепочек C и C' из подсхемы S_4, а также всех конъюнкторов из цепочек C_j, C'_j подсхемы S_3, $j = 1, \ldots, m$. Для каждого элемента E, принадлежащего одной из подсхем S_2, S'_2 или одной их цепочек C_j, C'_j подсхемы S_3, в подсхеме S_5 содержатся конъюнктор E', один из входов которого соединён с выходом элемента E, а другой — с выходом цепочки C подсхемы S_4, и конъюнктор E'', один из входов которого соединён с выходом элемента E', а другой — с выходом цепочки C' подсхемы S_4. Легко видеть, что функция, реализуемая на выходе элемента E'', представляет собой конъюнкцию некоторых переменных и отрицаний переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$, причём в эту конъюнкцию входят все указанные переменные без отрицаний (как множители в конъюнкции K), а также отрицание хотя бы одной такой переменной, откуда следует, что данная функция тождественно равна нулю. Все такие конъюнкторы E'' будем считать выходными элементами подсхемы S_5. Тогда на всех выходах подсхемы S_5 реализуются тождественные нули.

Подсхема S_6 служит (как будет видно из дальнейшего) для контроля исправности элементов из подсхемы S_4. Входы подсхемы S_6 соединяются с выходами всех конъюнкторов из цепочек C, C' подсхемы S_4, а также с выходами инверторов I и I', реализующих функцию $\overline{x}_{l+1}$, из подсхем S_2 и S_2' соответственно. Для каждого конъюнктора $\hat{E}$, принадлежащего одной из цепочек C, C', в подсхеме S_6 содержатся конъюнктор $\hat{E}'$, один из входов которого соединён с выходом элемента $\hat{E}$, а другой — с выходом элемента I, и конъюнктор $\hat{E}''$, один из входов которого соединён с выходом элемента $\hat{E}'$, а другой — с выходом элемента I'. Легко видеть, что функция, реализуемая на выходе элемента $\hat{E}''$, представляет собой конъюнкцию функции $\overline{x}_{l+1}$ и некоторых переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$, причём в неё входит x_{l+1}, поэтому данная функция тождественно равна нулю. Все такие конъюнкторы $\hat{E}''$ будем считать выходными элементами подсхемы S_6. Тогда на всех выходах подсхемы S_6 реализуются тождественные нули.

Подсхема S_7 представляет собой цепочку из дизъюнкторов, входы которой соединяются со всеми выходами подсхем S_1, S_5, S_6 и с выходами элементов E_j, $j = 1, \ldots, m$, из подсхемы S_3. Легко видеть, что на выходе этой цепочки реализуется функция

$$x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} = f$$

в силу (10.6). Выход указанной цепочки будем считать выходом всей схемы S. Тогда схема S реализует функцию f.

Найдём все возможные ф. н. схемы S. Если неисправен какой-то элемент в одной из подсхем S_1, S_7, один из выходных элементов подсхем S_5, S_6 или какой-то элемент E_j, $j = 1, \ldots, m$, в подсхеме S_3, то ф. н. схемы S в силу вида подсхемы S_7 и того, что любой элемент подсхемы S_1 является выходным, равна тождественной единице. Пусть неисправен один из конъюнкторов E' в подсхеме S_5 (см. описание этой подсхемы). Выход этого элемента соединён с одним из входов конъюнктора E'', другой вход которого соединён с выходом цепочки C'. Поэтому на выходе элемента E'' будет реализована функция $1\&K = K$, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. Тогда ф. н. схемы S будет равна

$$x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee K = f \vee K$$

в силу (10.6).

Пусть неисправен один из конъюнкторов $\hat{E}'$ в подсхеме S_6 (см. описание этой подсхемы). Выход этого элемента соединён с одним из входов конъюнктора $\hat{E}''$, другой вход которого соединён с выходом инвертора I'. Поэтому на выходе элемента $\hat{E}''$ будет реализована функция

$1\&\overline{x}_{l+1} = \overline{x}_{l+1}$, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. Тогда ф. н. схемы S будет равна

$$x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee \overline{x}_{l+1} = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee \overline{x}_{l+1} = f \vee \overline{x}_{l+1}$$

в силу (10.6).

Пусть неисправен какой-то элемент E в цепочке C_j (или C'_j) из подсхемы S_3. Тогда на выходе этой цепочки вместо K_j реализуется некоторая б. ф. K'_j, причём $K'_j \geqslant K_j$. С другой стороны, на выходе цепочки C'_j (соответственно C_j) по-прежнему реализуется функция K_j, а значит, на выходе конъюнктора E_j реализуется функция $K_j \& K'_j = K_j$. Далее, выход неисправного элемента E соединён с одним из входов некоторого конъюнктора E' из подсхемы S_5, другой вход которого соединён с выходом цепочки C подсхемы S_4. Поэтому на выходе элемента E' реализуется функция $1\&K = K$. Она подаётся на один из входов некоторого конъюнктора E'' из подсхемы S_5, а другой его вход соединён с выходом цепочки C' подсхемы S_4, на котором реализуется функция K. Отсюда следует, что и на выходе элемента E'' реализуется функция K, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. В результате рассматриваемой неисправности функции, реализуемые на выходах элементов, расположенных в цепочке C_j (C'_j) ниже элемента E, изменятся и на некоторых выходах подсхемы S_5, отличных от выхода элемента E'', возможно, будут реализованы ненулевые б. ф., но все они, как нетрудно видеть, не превосходят K. Поэтому ф. н. схемы S будет равна

$$x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee K = f \vee K$$

в силу (10.6).

Пусть неисправен какой-то элемент $\hat{E}$ в цепочке C (или C') из подсхемы S_4. Тогда на выходе этой цепочки вместо K реализуется некоторая б. ф. K'. С другой стороны, на выходе цепочки C' (соответственно C) по-прежнему реализуется функция K, а значит, на выходе каждого конъюнктора E'' из подсхемы S_5 по построению реализуется функция, представляющая собой конъюнкцию некоторых переменных и отрицаний переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$ и функций K и K', причём в неё входит отрицание хотя бы одной такой переменной. Отсюда и из того, что $K = x_{l+1} \& \ldots \& x_n$, следует, что указанная функция тождественно равна нулю. Далее, выход неисправного элемента $\hat{E}$ соединён с одним из входов некоторого конъюнктора $\hat{E}'$ из подсхемы S_6, другой вход которого соединён с выходом инвертора I из подсхемы S_2, реализующего функцию $\overline{x}_{l+1}$. Поэтому на выходе элемента $\hat{E}'$ реализуется функция $1\&\overline{x}_{l+1} = \overline{x}_{l+1}$. Она подаётся на один из входов некоторого конъюнктора $\hat{E}''$ из подсхемы S_6, а другой его вход соединён с выходом инвертора I', на котором реализуется функция $\overline{x}_{l+1}$. Отсюда следует, что и на выходе элемента $\hat{E}''$ реализуется функция $\overline{x}_{l+1}$, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. В результате рассматриваемой неисправности функции, реализуемые на выходах элементов, расположенных в цепочке C (C') ниже элемента $\hat{E}$, изменятся и на некоторых выходах подсхемы S_6, отличных от выхода элемента $\hat{E}''$, возможно, будут реализованы ненулевые б. ф., но все они, как нетрудно видеть, не превосходят $\overline{x}_{l+1}$. Поэтому ф. н. схемы S будет равна

$$x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee \overline{x}_{l+1} = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee \overline{x}_{l+1} = f \vee \overline{x}_{l+1}$$

в силу (10.6).

Пусть, наконец, неисправен какой-то инвертор E в одной из подсхем S_2, S_2'. Тогда на выходе каждой цепочки C_j (соответственно C_j') из подсхемы S_3 реализуется некоторая б. ф. K_j'', причём $K_j'' \geqslant K_j$. С другой стороны, на выходе цепочки C_j' (соответственно C_j) по-прежнему реализуется функция K_j, а значит, на выходе конъюнктора E_j реализуется функция $K_j \& K_j'' = K_j$. Далее, выход неисправного инвертора E соединён с одним из входов некоторого конъюнктора E' из подсхемы S_5, другой вход которого соединён с выходом цепочки C подсхемы S_4. Поэтому на выходе элемента E' реализуется функция $1 \& K = K$. Она подаётся на один из входов некоторого конъюнктора E'' из подсхемы S_5, а другой его вход соединён с выходом цепочки C' подсхемы S_4, на котором реализуется функция K. Отсюда следует, что и на выходе элемента E'' реализуется функция K, которая будет подаваться на один из входов подсхемы S_7. В результате рассматриваемой неисправности функции, реализуемые на выходах элементов, расположенных в цепочках C_j (C_j'), $j = 1, \ldots, m$, из подсхемы S_3 ниже элемента E, изменятся и на некоторых выходах подсхемы S_5, отличных от выхода элемента E'', возможно, будут реализованы ненулевые б. ф., но все они, как нетрудно видеть, не превосходят K. Следовательно, если элемент E отличен от инверторов I, I', то ф. н. схемы S будет равна $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee K = f \vee K$ в силу (10.6). Если E — это инвертор I, то его выход по построению соединён также с одним из входов каждого элемента $\hat{E}'$ из подсхемы S_6, другой вход которого соединён с выходом некоторого элемента $\hat{E}$ из подсхемы S_4. На выходе элемента $\hat{E}$, как следует из вида подсхемы S_4, реализуется конъюнкция $\hat{K}$ некоторых переменных из $x_{l+1}, \ldots, x_n$, в которую обязательно входит x_{l+1}. Тогда на выходе элемента $\hat{E}'$ будет реализована функция $1 \& \hat{K} = \hat{K}$. Она будет подаваться на один из входов некоторого элемента $\hat{E}''$ из подсхемы S_6, а другой его вход соединён с выходом инвертора I', на котором реализуется функция $\overline{x}_{l+1}$. Отсюда следует, что на выходе элемента $\hat{E}''$ будет реализована функция $\hat{K} \& \overline{x}_{l+1} \equiv 0$, так как в $\hat{K}$ входит переменная x_{l+1} без отрицания. Аналогично можно показать, что если элемент E совпадает с инвертором I', то на выходе каждого выходного элемента $\hat{E}''$ подсхемы S_6 будет реализована функция $\hat{K}\&\overline{x}_{l+1}\&1 \equiv 0$. Значит, если неисправный элемент E — это один из инверторов I, I', то на всех выходах подсхемы S_6 будет реализованы тождественные нули и ф. н. схемы S будет равна

$$x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee K_1 \vee \ldots \vee K_m \vee K = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \hat{f} \vee K = f \vee K$$

в силу (10.6).

В итоге получаем, что у схемы S есть только три ф. н. — тождественная единица, $g_1 = f \vee K$ и

$$g_2 = f \vee \overline{x}_{l+1} = x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_l^{\sigma_l} \vee \overline{x}_{l+1} \vee \hat{f}. \tag{10.7}$$

Заметим, что на наборе $\tilde{u} = (\overline{\sigma_1}, \ldots, \overline{\sigma_l}, \tilde{1}^{n-l})$ значение функции f равно нулю в силу (10.6) и равенства $f(\tilde{1}^{n-l}) = 0$; в то же время $g_1(\tilde{u}) = 0 \vee 1 = 1$, поэтому $g_1 \neq f$. Кроме того, $g_2 \neq f$, поскольку $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_l}^{\sigma_l}$ — все попарно различные слагаемые ранга 1, входящие в некоторую тупиковую д. н. ф. функции f, а в любую тупиковую д. н. ф. функции g_2 в силу (10.7) входит также слагаемое $\overline{x}_{l+1}$. Получаем, что все ф. н. схемы S отличаются от функции f, т. е. эта схема неизбыточна. Далее, пусть $\tilde{v}$ — любой n-набор, на котором значения функций f и g_2 различаются. Так как $g_2 = f \vee \overline{x}_{l+1} \geqslant f$, то $f(\tilde{v}) = 0$, $g_2(\tilde{v}) = 1$. Тогда $(l+1)$-й разряд набора $\tilde{v}$ равен нулю, поэтому $g_1(\tilde{v}) = f(\tilde{v}) \vee K(\tilde{v}) = 0$. Заметим также, что $g_2(\tilde{u}) = f(\tilde{u}) \vee 0 = 0$. В таком случае на наборе $\tilde{v}$ каждую из функций f, g_1 можно отличить от каждой из функций g_2, 1, а на наборе $\tilde{u}$ функцию f можно отличить от функции g_1, а функцию g_2 — от тождественной единицы. Поэтому множество $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ является ЕДТ длины 2 для схемы S, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 2$. Теорема 10.2 доказана. □

Из следствий 10.1 и 8.1 можно получить равенство $D^{B_0;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 0$, улучшающее неравенство $D^{B_0;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(n) \leqslant 2n+1$ из [193].

Рассмотрим базис Жегалкина $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$, а в качестве неисправностей ФЭ — ОКН типа 0 на выходах элементов (кроме элементов «константа 0»). Выделим два возможных представления функции f:

$$f(\tilde{x}^n) = 0 \text{ или } x_i, \tag{10.8}$$

где $i \in \{1, \ldots, n\}$;

$$f(\tilde{x}^n) = 1 \text{ или } L_1\& \ldots \&L_m, \tag{10.9}$$

где $m \geqslant 1$ и каждый множитель L_j, $j = 1, \ldots, m$, имеет вид либо x_{i_j}, либо $\overline{x}_{i_j}$, либо $x_{i_j} \oplus x_{i'_j}$ для некоторых $i_j, i'_j \in \{1, \ldots, n\}$, $i_j \neq i'_j$.

Формулировка следующей теоремы получается комбинацией формулировки теоремы 1 и рассуждений из первого абзаца замечания 2 работы [151], касающихся базиса $\hat{B}_1$ (обозначение взято из указанной работы).

Теорема 10.3 [151]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.8)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.9), но не в виде (10.8)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима ни в одном из видов (10.8), (10.9)}. \end{cases}$$

Следствие 10.2. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$.*

Для доказательства следствия 10.2 достаточно заметить, что функция $x_1 \vee \ldots \vee x_n$ при $n \geqslant 2$ не представима ни в одном из видов (10.8), (10.9).

Доказательство теоремы 10.3. Если функция f представима в виде (10.8), то равенство $D(f) = 0$ следует из утверждений 8.1 и 8.6. Равенство $D(f) = 1$ в случае $f \equiv 1$ вытекает из утверждения 8.6. Далее считаем, что функция f отлична от констант и переменных. Пусть при этом она представима в виде (10.9). Надо доказать, что $D(f) = 1$. Каждый множитель L_j вида $x_{i_j} \oplus x_{i'_j}$ реализуем с использованием одного сумматора, на входы которого подадим переменные x_{i_j} и $x_{i'_j}$. Каждый множитель L_j вида $\overline{x}_{i_j} = x_{i_j} \oplus 1$ реализуем с использованием одного сумматора, на входы которого подадим переменную x_{i_j} и тождественную единицу с выхода (одного и того же для всех таких множителей L_j) элемента E_1, реализующего константу 1. Затем выходы всех сумматоров и элемента E_1 (если он был использован при построении сумматоров), а также все входы «x_{i_j}», отвечающие множителям L_j вида x_{i_j}, соединим цепочкой из конъюнкторов. Очевидно, что полученная схема реализует функцию f, а единственной её ф. н. является тождественный нуль. Отсюда следует, что данная схема неизбыточна и множество, состоящее из любого одного единичного набора функции $f(\tilde{x}^n)$, является для этой схемы ЕДТ длины 1. Поэтому $D(f) \leqslant 1$. С другой стороны, $D(f) \geqslant 1$ в силу утверждения 8.4. В итоге получаем равенство $D(f) = 1$.

Пусть, наконец, функция f не представима ни в одном из видов (10.8), (10.9). Докажем сначала, что $D(f) \geqslant 2$, если $D(f)$ определено. Идеи доказательства сходны с идеями, использованными при доказательстве такого же неравенства в теореме 10.2. Предположим, что $D(f) \leqslant 1$. Тогда существует неизбыточная СФЭ S в базисе B_1, реализующая функцию f, для которой $D(S) \leqslant 1$. Очевидно, что в схеме S содержится выходной элемент.

Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ — все такие входные переменные схемы S, каждая из которых подаётся в ней на вход какого-то конъюнктора (если таких переменных нет, полагаем $r = 0$).

На выходах этих конъюнкторов реализуются функции, меньшие либо равные соответственно $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$, а тогда по лемме 10.1 имеем $x_{i_1} \geqslant f, \ldots, x_{i_r} \geqslant f$. Следовательно,

$$x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_r} \geqslant f \tag{10.10}$$

(в случае $r = 0$ полагаем $x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_r} = 1$).

Далее, пусть $x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_{r+s}}$ — все такие входные переменные схемы S, что каждая переменная $x_{i_{r+j}}$, $j = 1, \ldots, s$, подаётся в ней на вход какого-то сумматора E_j, другой вход которого соединён с выходом некоторого ФЭ E'_j (если таких переменных нет, полагаем $s = 0$). Пусть на выходе элемента E'_j в схеме S реализуется б. ф. φ_j, тогда на выходе элемента E_j реализуется функция $\varphi_j \oplus x_{i_{r+j}}$. Из леммы 10.1 следует, что $\varphi_j \geqslant f$ и $\varphi_j \oplus x_{i_{r+j}} \geqslant f$, а тогда

$$f \leqslant \varphi_j(\varphi_j \oplus x_{i_{r+j}}) = \varphi_j \oplus \varphi_j x_{i_{r+j}} = \varphi_j(1 \oplus x_{i_{r+j}}) = \varphi_j \overline{x}_{i_{r+j}} \leqslant \overline{x}_{i_{r+j}},$$

т. е. $\overline{x}_{i_{r+j}} \geqslant f$, откуда

$$\overline{x}_{i_{r+1}} \& \ldots \& \overline{x}_{i_{r+s}} \geqslant f \tag{10.11}$$

(в случае $s = 0$ полагаем $\overline{x}_{i_{r+1}} \& \ldots \& \overline{x}_{i_{r+s}} = 1$).

Пусть теперь $(x_{i_{r+s+1}}, x_{i_{r+s+2}}), \ldots, (x_{i_{r+s+2t-1}}, x_{i_{r+s+2t}})$ — все такие неупорядоченные пары входных переменных схемы S, что обе переменные из каждой пары подаются в ней на входы какого-то одного и того же сумматора (если таких пар переменных нет, полагаем $t = 0$). На выходах этих сумматоров реализуются функции $x_{i_{r+s+1}} \oplus x_{i_{r+s+2}}, \ldots, x_{i_{r+s+2t-1}} \oplus x_{i_{r+s+2t}}$, каждая из которых по лемме 10.1 не меньше f. Поэтому

$$(x_{i_{r+s+1}} \oplus x_{i_{r+s+2}}) \& \ldots \& (x_{i_{r+s+2t-1}} \oplus x_{i_{r+s+2t}}) \geqslant f \tag{10.12}$$

(в случае $t = 0$ полагаем $(x_{i_{r+s+1}} \oplus x_{i_{r+s+2}}) \& \ldots \& (x_{i_{r+s+2t-1}} \oplus x_{i_{r+s+2t}}) = 1$).

Отметим, что хотя бы одно из чисел r, s, t больше нуля, так как в противном случае ни одна входная переменная схемы S не подаётся в ней на вход ни одного ФЭ и функция, реализуемая данной схемой, имеет вид (10.8) или тождественно равна единице, что невозможно по предположению.

Из (10.10)–(10.12) получаем соотношение $f' \geqslant f$, где

$$f' = x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_r} \& \overline{x}_{i_{r+1}} \& \ldots \& \overline{x}_{i_{r+s}} \& (x_{i_{r+s+1}} \oplus x_{i_{r+s+2}}) \& \ldots \& (x_{i_{r+s+2t-1}} \oplus x_{i_{r+s+2t}}). \tag{10.13}$$

Если $f' = f$, то функция f представима в виде (10.9), что противоречит предположению рассматриваемого случая. Поэтому $f' > f$, т. е. существует такой набор $\tilde{\pi}$, что $f'(\tilde{\pi}) = 1$, $f(\tilde{\pi}) = 0$. Тогда значение на выходе выходного элемента схемы S на наборе $\tilde{\pi}$ равно 0.

Из этого следует существование в схеме S такого элемента E, что на наборе $\tilde{\pi}$ значение на его выходе равно 0, а значение на выходе любого элемента E', расположенного в схеме S выше элемента E (если такой элемент существует) равно 1. Возможны шесть случаев.

1. Элемент E — конъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S с выходами ФЭ. В этом случае в силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на обоих входах элемента E равно единице, а значение на его выходе — нулю, что невозможно.

2. Элемент E — конъюнктор, и один его вход (без ограничения общности левый) соединён в схеме S с выходом ФЭ, а другой — с каким-то входом «x_i» схемы S. Тогда в силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на левом входе элемента E равно единице, а значение на его выходе — нулю, следовательно, на этом наборе $x_i = 0$. Но $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ по определению данных индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 0$ в силу (10.13). Противоречие.

3. Элемент E — конъюнктор, и оба его входа соединены в схеме S со входами этой схемы. На наборе $\tilde{\pi}$ значение на выходе элемента E в схеме S равно нулю, следовательно, на этом наборе значение хотя бы одной из двух входных переменных схемы S, подающихся на входы элемента E, равно нулю (обозначим эту переменную через x_i). Но $i \in \{i_1, \ldots, i_r\}$ по определению данных индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 0$ в силу (10.13). Противоречие.

4. Элемент E — сумматор, и оба его входа соединены в схеме S с выходами ФЭ. Пусть на выходах этих двух элементов в схеме S реализуются функции φ и ψ, тогда на выходе элемента E реализуется функция $\varphi \oplus \psi$. Из леммы 10.1 следует, что $\varphi \geqslant f$, $\psi \geqslant f$ и $\varphi \oplus \psi \geqslant f$, а тогда $f \leqslant \varphi\psi(\varphi \oplus \psi) = \varphi\psi \oplus \varphi\psi = 0$, т. е. $f \equiv 0$. Противоречие.

5. Элемент E — сумматор, и один его вход (без ограничения общности левый) соединён в схеме S с выходом ФЭ, а другой — с каким-то входом «x_i» схемы S. Тогда в силу выбора элемента E на наборе $\tilde{\pi}$ в схеме S значение на левом входе элемента E равно единице, а значение на его выходе — нулю, следовательно, на этом наборе $x_i = 1$. Но $i \in \{i_{r+1}, \ldots, i_{r+s}\}$ по определению данных индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 0$ в силу (10.13). Противоречие.

6. Элемент E — сумматор, и оба его входа соединены в схеме S с какими-то входами «x_i», «$x_{i'}$» этой схемы. На наборе $\tilde{\pi}$ значение на выходе элемента E в схеме S равно нулю, следовательно, на этом наборе $x_i \oplus x_{i'} = 0$. Но $(i, i') \in \{(i_{r+s+1}, i_{r+s+2}), \ldots, (i_{r+s+2t-1}, i_{r+s+2t})\}$ по определению данных индексов, а тогда $f'(\tilde{\pi}) = 0$ в силу (10.13). Противоречие.

Во всех случаях получено противоречие, значит, исходное предположение было неверно и $D(f) \geqslant 2$, если $D(f)$ определено.

Докажем теперь, что $D(f)$ определено и $D(f) \leqslant 2$. Пусть $h(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф. от n переменных, отличная от констант; $\tilde{\sigma}$ — произвольный единичный набор функции $h(\tilde{x}^n)$, содержащий наименьшее число единиц. Из предложения 1 работы [51] и рассуждений, приведённых в ней на с. 130 выше этого предложения, но после формулировки условий а) и б), следует, что функцию h можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_1, допускающей ЕПТ (и даже ППТ) из одного набора $\tilde{\sigma}$ (на самом деле, в указанной работе рассматривались ОКН типа 0 на выходах только конъюнкторов и сумматоров, но при дополнительном рассмотрении неисправностей типа 0 на выходах элементов «константа 1» указанные рассуждения из [51, с. 130] проходят без изменений).

Заметим, что функция $f(\tilde{x}^n)$ принимает значение 1 хотя бы на двух наборах в силу того, что $f \not\equiv 0$ и f не представима в виде $x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, являющемся частным случаем вида (10.9). Пусть $\tilde{\sigma}_1$ — произвольный единичный набор функции $f(\tilde{x}^n)$, содержащий наименьшее число единиц. Тогда функцию f можно реализовать неизбыточной схемой S_1 в базисе B_1, для которой множество $\{\tilde{\sigma}_1\}$ является ЕПТ. Пусть S_2 — копия схемы S_1.

Функция $f_1(\tilde{x}^n) = (f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1})(\tilde{x}^n)$ принимает значение 0 на наборе $\tilde{\sigma}_1$ и значение 1 хотя бы на одном наборе. Пусть $\tilde{\sigma}_2$ — произвольный единичный набор функции $f_1(\tilde{x}^n)$, содержащий наименьшее число единиц, тогда $\tilde{\sigma}_1 \neq \tilde{\sigma}_2$ и существует неизбыточная схема S_3 в базисе B_1, реализующая функцию f_1, для которой множество $\{\tilde{\sigma}_2\}$ является ЕПТ. Пусть $f_2(\tilde{x}^n) = (f \oplus I_{\tilde{\sigma}_2})(\tilde{x}^n)$. Заметим, что значения функций f_2 и f совпадают на всех n-наборах, кроме набора $\tilde{\sigma}_2$; при этом $f(\tilde{\sigma}_2) = (f_1 \oplus I_{\tilde{\sigma}_1})(\tilde{\sigma}_2) = f_1(\tilde{\sigma}_2) = 1$, а $f_2(\tilde{\sigma}_2) = (f \oplus I_{\tilde{\sigma}_2})(\tilde{\sigma}_2) = f(\tilde{\sigma}_2) \oplus 1 = 0$. Отсюда $f_2 < f$ и $f_2(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, следовательно, $\tilde{\sigma}_1$ является единичным набором функции $f_2(\tilde{x}^n)$, содержащим наименьшее число единиц. Тогда функцию f_2 можно реализовать неизбыточной схемой S_4 в базисе B_1, для которой множество $\{\tilde{\sigma}_1\}$ является ЕПТ. Будем считать, что все ФЭ, содержащиеся в схемах S_1, S_2, S_3 и S_4, попарно различны.

Пусть S — схема в базисе B_1, состоящая из подсхем S_1–S_5 (см. рисунок 10.3). Подсхемы S_1–S_4 определены выше; подсхема S_5 имеет четыре входа v_1, v_2, v_3, v_4 и один выход, содержит четыре сумматора и два конъюнктора и реализует на выходе б. ф. $\theta(y_1, y_2, y_3, y_4) = (y_1 \oplus y_3)(y_2 \oplus y_3)(y_3 \oplus y_4) \oplus y_3$, где y_1, y_2, y_3, y_4 — значения, подаваемые на её входы v_1, v_2, v_3, v_4 соответственно. Вход v_i подсхемы S_5, $i = 1, 2, 3, 4$, в схеме S соединяется с выходом подсхемы S_i.

Отметим некоторые свойства функции $\theta(y_1, y_2, y_3, y_4)$:

(i) на любом двоичном наборе длины 4, не менее трёх компонент которого равны α, она принимает значение α;

(ii) $\theta(0, 1, 0, 1) = \theta(1, 0, 0, 1) = \theta(1, 1, 0, 0) = 0$;

(iii) $\theta(0, 1, 1, 0) = \theta(1, 0, 1, 0) = 1$.

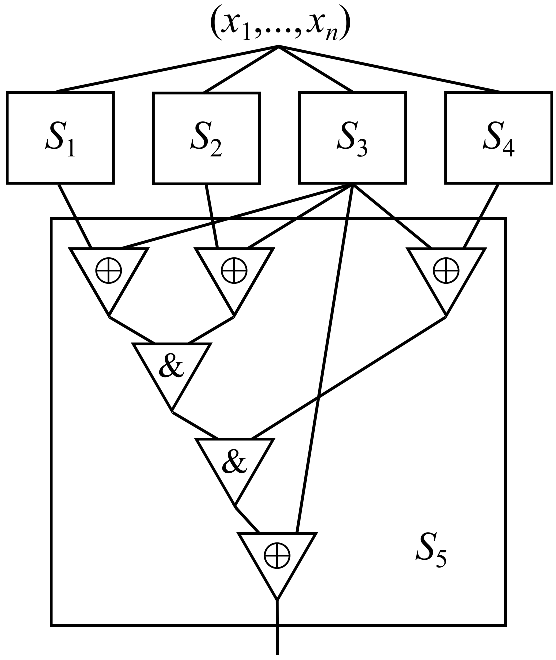

Рис. 10.3. Схема S

Докажем, что схема S реализует б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. Пусть $\tilde{\sigma}$ — произвольный n-набор. На выходах подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 на наборе $\tilde{\sigma}$ по построению реализуются значения соответственно $f(\tilde{\sigma}), f(\tilde{\sigma}), f_1(\tilde{\sigma}) = f(\tilde{\sigma}) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma})$ и $f_2(\tilde{\sigma}) = f(\tilde{\sigma}) \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{\sigma})$, а на выходе всей схемы S — значение $\theta(f(\tilde{\sigma}), f(\tilde{\sigma}), f(\tilde{\sigma}) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}), f(\tilde{\sigma}) \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{\sigma}))$. В силу выполнения хотя бы одного из равенств $I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}) = 0$, $I_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{\sigma}) = 0$ и свойства (i) это значение равно $f(\tilde{\sigma})$, что и требовалось доказать.

Докажем теперь, что схема S неизбыточна и множество $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$ является для неё ЕДТ. При неисправности выходного элемента подсхемы S_5 ф. н. схемы S равна тождественному нулю. Легко видеть, что при неисправности любого элемента подсхемы S_5, отличного от выходного, функция, реализуемая подсхемой S_5, равна y_3 (где y_3 — значение, подаваемое на её вход v_3), а ф. н. всей схемы S — равна f_1.

Предположим, что неисправен некоторый элемент в одной из подсхем S_1, S_2, S_4. Тогда на любом наборе $\tilde{\sigma}$, отличном от наборов $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, оставшиеся три из подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 будут выдавать значение $f(\tilde{\sigma})$, и по свойству (i) такое же значение будет на выходе всей схемы S. Ранее было показано, что $f(\tilde{\sigma}_2) = 1$. На наборе $\tilde{\sigma}_2$ в случае исправной работы всех элементов в схеме S на выходах подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 реализуются значения соответственно $f(\tilde{\sigma}_2), f(\tilde{\sigma}_2), f(\tilde{\sigma}_2) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_2), f(\tilde{\sigma}_2) \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{\sigma}_2)$, т. е. $1, 1, 1, 0$, значит, на входы подсхемы S_5 подаётся набор $(1, 1, 1, 0)$. При наличии неисправного элемента в одной из подсхем S_1, S_2, S_4 в этом наборе может измениться не более одной из 1-й, 2-й и 4-й компонент, а 3-я компонента остаётся неизменной. Тогда на выходе всей схемы S будет реализовано значение $1 = f(\tilde{\sigma}_2)$, так как $\theta(1,1,1,0) = \theta(0,1,1,0) = \theta(1,0,1,0) = \theta(1,1,1,1) = 1$ (см. свойства (i), (iii)).

Далее, на наборе $\tilde{\sigma}_1$ в случае исправной работы всех элементов в схеме S на выходах подсхем S_1, S_2, S_3, S_4 реализуются значения соответственно $f(\tilde{\sigma}_1), f(\tilde{\sigma}_1), f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_1)$, $f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{\sigma}_1)$, т. е. $1, 1, 0, 1$, значит, на входы подсхемы S_5 подаётся набор $(1,1,0,1)$. При наличии неисправного элемента в одной из подсхем S_1, S_2, S_4 в этом наборе изменится соответствующая компонента, так как множество $\{\tilde{\sigma}_1\}$ является ЕПТ для каждой из неизбыточных схем S_1, S_2, S_4. Остальные три компоненты набора $(1,1,0,1)$ останутся неизменными. Тогда на выходе всей схемы S будет реализовано значение $0 \neq f(\tilde{\sigma}_1)$, так как $\theta(0,1,0,1) = \theta(1,0,0,1) = \theta(1,1,0,0) = 0$ (см. свойство (ii)). В итоге получаем, что функция, реализуемая схемой S при неисправности любого элемента в любой из подсхем S_1, S_2, S_4, отличается от функции $f(\tilde{x}^n)$ только на наборе $\tilde{\sigma}_1$, т. е. равна f_1.

Предположим, наконец, что неисправен некоторый элемент в подсхеме S_3. Тогда на любом наборе $\tilde{\sigma}$, отличном от набора $\tilde{\sigma}_2$, подсхемы S_1, S_2, S_4 будут выдавать значения соответственно $f(\tilde{\sigma}), f(\tilde{\sigma}), f(\tilde{\sigma}) \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}(\tilde{\sigma})$, т. е. $f(\tilde{\sigma}), f(\tilde{\sigma}), f(\tilde{\sigma})$, и по свойству (i) на выходе схемы S возникнет значение $f(\tilde{\sigma})$. В то же время на наборе $\tilde{\sigma}_2$ в случае отсутствия неисправностей в схеме S на входы подсхемы S_5 подаётся набор $(1,1,1,0)$ (см. выше). При наличии неисправного элемента в подсхеме S_3 в этом наборе изменится 3-я компонента, так как множество $\{\tilde{\sigma}_2\}$ является ЕПТ для неизбыточной схемы S_3. Остальные три компоненты набора $(1,1,1,0)$ останутся неизменными. Тогда на выходе всей схемы S будет реализовано значение $0 \neq f(\tilde{\sigma}_2)$, так как $\theta(1,1,0,0) = 0$ (см. свойство (ii)). В итоге получаем, что функция, реализуемая схемой S при неисправности любого элемента в подсхеме S_3, отличается от функции $f(\tilde{x}^n)$ только на наборе $\tilde{\sigma}_2$, т. е. равна f_2.

Из приведённых рассуждений следует, что у схемы S есть только три ф. н. — $g \equiv 0$, f_1 и f_2. На паре наборов $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)$ функции f, f_1, f_2 и g принимают пары значений соответственно $(1,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ и $(0,0)$. Таким образом, на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ функцию f можно отличить от каждой из ф. н., а любые две ф. н. — друг от друга. Это означает, что схема S неизбыточна, а множество $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$ является для неё ЕДТ длины 2, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 2$. Теорема 10.3 доказана. □

Замечание 10.1. При рассмотрении вместо базиса B_1 базиса $B_1' = \{\&, \oplus, 1\}$ результат теоремы 10.3 остаётся верен для всех б. ф. f, кроме $f \equiv 0$; значение $D^{B_1';\,0}_{\text{ЕД}\,(\text{О})}(0)$ не определено. Действительно, в схемах, использованных в доказательстве теоремы 10.3 и допускающих ЕДТ длины $D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД}\,(\text{О})}(f)$, за исключением случая $f \equiv 0$, не содержалось элементов «константа 0». Это следует из построения указанных схем, в частности, из метода синтеза схем, используемого в работе [51] при доказательстве теоремы 2. Поэтому $D^{B_1';\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f) \leqslant D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ при $f \not\equiv 0$. С другой стороны, $D^{B_1;\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f) \leqslant D^{B_1';\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ в силу того, что любая (неизбыточная) схема в базисе B_1' является (неизбыточной) схемой в базисе B_1. Если же $f \equiv 0$, то значение $D^{B_1';\,0}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Следствием «новой» теоремы 10.3 является равенство $D^{B_1';\,0}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$.

Из следствий 10.2, 8.1 и замечания 10.1 можно получить равенства $D^{B_1^*;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$ и $D^{B_1'^*;\,1}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 2$, где $B_1^* = \{\vee, \sim, 0, 1\}$, $B_1'^* = \{\vee, \sim, 0\}$.

В нижеследующих лемме 10.2 и теореме 10.4 в качестве неисправностей рассматриваются ОКН типа 0 на входах схем.

Лемма 10.2. *Для любого $n \geqslant 3$ существует такая б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящая от всех своих переменных, что*

$$D^{0}_{\text{ПД (Р)}}(f) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}. \tag{10.14}$$

Доказательство. Пусть $q = q(n)$ — целочисленный параметр, удовлетворяющий условиям $q \geqslant 1$ и $2q < n$; точное его значение определим несколько позже. Дальнейшие идеи сходны с идеями, использованными В. Н. Носковым в работе [121] при получении нижней оценки для величины $\alpha_g(n)$. Пусть $K_1, \ldots, K_r$ — всевозможные попарно различные ЭК переменных $x_1, \ldots, x_{2q}$, в каждую из которых ровно q переменных входит с отрицанием; $K_1', \ldots, K_s'$ — всевозможные попарно различные ЭК переменных $x_{2q+1}, \ldots, x_n$. Тогда $r = C_{2q}^q$ и $s = 2^{n-2q}$.

Рассмотрим б. ф. $f(\tilde{x}^n) = K_1K_1' \vee K_2K_2' \vee \ldots \vee K_mK_m'$, где $m = \min(r, s)$. Предположим, что в ЭК K_i, $i = 1, \ldots, m$, переменные $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_q(i)}$ входят с отрицанием, а переменные $x_{j_{q+1}(i)}, \ldots, x_{j_{2q}(i)}$ — без отрицания, где $j_1(i), \ldots, j_{2q}(i)$ — попарно различные индексы от 1 до $2q$. Так как K_i — единственная ЭК среди $K_1, \ldots, K_m$, в которую каждая из переменных $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_q(i)}$ входит с отрицанием, то при замене всех этих q переменных константой 0 конъюнкция K_i станет равна $x_{j_{q+1}(i)} \& \ldots \& x_{j_{2q}(i)}$, а любая другая конъюнкция из $K_1, \ldots, K_m$ — тождественному нулю. Поэтому ф. н. при указанной замене будет равна $g_i = x_{j_{q+1}(i)} \& \ldots \& x_{j_{2q}(i)} \& K_i'$. В то же время при дополнительной замене переменной $x_{j_{q+1}(i)}$ константой 0 получим ф. н. $g_0 \equiv 0$.

Докажем, что функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех своих переменных. Получающаяся из неё подстановкой вместо некоторых переменных константы 0 функция $g_1 = x_{j_{q+1}(1)} \& \ldots \& x_{j_{2q}(1)} \& K_1'$, очевидно, существенно зависит от переменных $x_{j_{q+1}(1)}, \ldots, x_{j_{2q}(1)}$, $x_{2q+1}, \ldots, x_n$, а значит, и функция f существенно зависит от всех этих переменных. Если же подставить в функцию f вместо каждой из переменных $x_{j_{q+1}(1)}, \ldots, x_{j_{2q}(1)}$ константу 1, то конъюнкция K_1 станет равна $\overline{x}_{j_1(1)} \& \ldots \& \overline{x}_{j_q(1)}$, а любая другая конъюнкция из $K_1, \ldots, K_m$ обратится в нуль, поэтому полученная функция будет равна $\overline{x}_{j_1(1)} \& \ldots \& \overline{x}_{j_q(1)} \& K'_1$ и будет существенно зависеть, в частности, от переменных $x_{j_1(1)}, \ldots, x_{j_q(1)}$; тогда и исходная функция f существенно зависит от тех же q переменных. В итоге получаем, что функция f существенно зависит от всех переменных из множества $\{x_{j_1(1)}, \ldots, x_{j_q(1)}, x_{j_{q+1}(1)}, \ldots, x_{j_{2q}(1)}, x_{2q+1}, \ldots, x_n\} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что ф. н. $g_i(\tilde{x}^n)$, $i = 1, \ldots, m$, можно отличить от ф. н. $g_0(\tilde{x}^n)$ только на тех наборах, которые обращают в единицу ЭК K'_i. Учитывая, что множества n-наборов, обращающих в единицу конъюнкции $K'_1, \ldots, K'_m$, попарно не пересекаются, в любой ПДТ для функции $f(\tilde{x}^n)$ должны входить по крайней мере m наборов, откуда следует, что $D(f) \geqslant m$.

Выберем теперь параметр q так, чтобы число $m = \min(r, s) = \min(C_{2q}^q, 2^{n-2q})$ было как можно бо́льшим. Положим $q = \left\lfloor \frac{n}{4} + \frac{\log n}{8} + \frac{1}{2} \right\rfloor$, тогда соотношения $q \geqslant 1$, $2q < n$ легко вытекают из того, что $n \geqslant 3$; в силу неравенства [138, с. 509, (A.3)] при $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ имеем

$$C_{2q}^q \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot 2q \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2q}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{2q}{2}} = \frac{2^{2q}}{2\sqrt{q}} >$$

$$> \frac{2^{2\left(\frac{n}{4} + \frac{\log n}{8} - \frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{4\left(\frac{n}{4} + \frac{\log n}{8} + \frac{1}{2}\right)}} = \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}};$$

кроме того,

$$2^{n-2q} \geqslant 2^{n-2\left(\frac{n}{4} + \frac{\log n}{8} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot n^{-\frac{1}{4}}}{2} = \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n}} > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}.$$

Поэтому $m > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$ и выполнено неравенство (10.14). Лемма 10.2 доказана. □

Теорема 10.4 [150]. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^0_{\text{ПД (Р)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$.*

Доказательство. В случае $n \geqslant 3$ указанное неравенство следует из леммы 10.2, а в случаях $n = 1$ и $n = 2$ — например, из соотношения $D(f) \geqslant 1$ при рассмотрении функции $f(\tilde{x}^n) = x_1$, которую надо отличить от ф. н. $g \equiv 0$ хотя бы на одном наборе. Теорема 10.4 доказана. □

Из теоремы 10.4 и следствия 8.1 можно получить неравенство $D^1_{\text{ПД (Р)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$ при $n \geqslant 1$ (напомним, что выражения $D^0_{\text{ПД (Р)}}(n)$ и $D^1_{\text{ПД (Р)}}(n)$ используются для краткой записи величин $D^{B;\,0}_{\text{ПД (Р)}}(n)$ и $D^{B;\,1}_{\text{ПД (Р)}}(n)$ соответственно, где B — произвольный ф. п. базис).

Рассмотрим в качестве базиса множество $B_2 = \{x \,|\, y\}$, а в качестве неисправностей — ОКН типа 1 на выходах ФЭ.

В доказательстве следующей теоремы используются идеи, сходные с идеями Ю. В. Бородиной из работы [49].

Теорема 10.5 [150]. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^{B_2;\,1}_{\text{ПД (О)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log n+2}}$.*

Доказательство. В случаях $n = 1$, $n = 2$ указанное неравенство следует, например, из соотношения $D(f) \geqslant 1$ при $f(\tilde{x}^n) = \overline{x}_1$, которое верно в силу утверждения 8.4. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$. По лемме 10.2 существует такая б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящая от всех своих переменных, что выполнено (10.14). Пусть S — произвольная СФЭ в базисе B_2, реализующая данную функцию. Предположим, что на некоторых входах этой схемы возникли неисправности типа 0. Тогда на все входы элементов схемы S, соединенные с неисправными входами схемы, будет подаваться константа 0 и на выходах этих элементов по свойству функции $x \,|\, y$ будет реализована тождественная единица (хотя бы один такой элемент найдётся, так как функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех своих n переменных и $n > 1$). Таким образом, неисправности типа 0 любых входов схемы S можно «промоделировать» неисправностями типа 1 на выходах некоторых элементов этой схемы. Поэтому множество функций, получаемых при всевозможных неисправностях типа 0 на входах схемы S, содержится во множестве функций, получаемых при всевозможных неисправностях типа 1 на выходах элементов этой схемы, откуда следует неравенство $D(f) \geqslant D^0_{\text{ПД (Р)}}(f)$, а с учётом (10.14) — соотношение

$$D(n) \geqslant D(f) \geqslant D^0_{\text{ПД (Р)}}(f) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log n+2}}. \tag{10.15}$$

Теорема 10.5 доказана. □

Замечание 10.2. Результат теоремы 10.5 остаётся справедлив при рассмотрении в качестве B_2 базиса $\{\overline{x_1\& \ldots \& x_m}\}$, где $m \geqslant 3$, и даже бесконечного базиса $\{\overline{x_1\& \ldots \& x_m} \mid m \geqslant 1\}$. Доказательство проводится аналогично.

Из теоремы 10.5 и следствия 8.1 можно получить неравенство $D^{B_2^*;\,0}_{\text{ПД (О)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log n+2}}$ при $n \geqslant 1$ для базиса $B_2^* = \{x \downarrow y\}$.

§11. Проверяющие тесты при произвольных константных неисправностях на выходах элементов

В данном параграфе рассматриваются единичные и полные проверяющие тесты для СФЭ относительно ПКН на выходах элементов. Для любого ф. п. базиса B, не содержащего констант и состоящего из б. ф. от не более чем двух переменных, а также, возможно, из некоторых других б. ф. специального вида, доказано, что $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$, причём $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(f) \geqslant 3$ для почти всех б. ф. f от n переменных (теорема 11.1). Для базиса $B_4 = \{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$ найдено точное значение величины $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (теорема 11.2) и установлено, что $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 1$ (следствие 11.1). Отметим, что ранее С. С. Коляда получил оценку $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(n) \leqslant n+3$ для любого ф. п. конечного базиса B при $n \geqslant 3$ [87, теорема 3], а Д. С. Романов — соотношение $2 \leqslant \hat{D}^{B;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(n) \leqslant 4$ для любого ф. п. базиса B при $n \geqslant 1$ [215] (определение величины $\hat{D}^{B;\,\text{Н}}_{\text{ЕП (М)}}(n)$ см. на с. 39 диссертации). Романовым также приведён пример базиса $\mathtt{B}_3$, состоящего из не более чем 46 булевых функций от не более чем семи переменных, для которого $D^{\mathtt{B}_3;\,01}_{\text{ПП (O)}}(n) \leqslant 4$ при $n \geqslant 0$ [214]. В данной диссертации для более простого базиса B_5, состоящего из одной б. ф. от четырёх переменных и одной б. ф. от трёх переменных, найдено точное значение величины $D^{B_5;\,01}_{\text{ПП (O)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (теорема 11.4) и установлено равенство $D^{B_5;\,01}_{\text{ПП (O)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 1$ (следствие 11.3). Доказано также, что $D^{B_6;\,01}_{\text{ПП (O)}}(f) \leqslant 4$ для почти всех б. ф. f от n переменных (теорема 11.5), $D^{B_6;\,01\,(+1)}_{\text{ПП (O)}}(n) \leqslant 5$ для любого $n \geqslant 0$ (теорема 11.6) и $D^{B_6';\,01\,(+1)}_{\text{ПП (O)}}(n) \leqslant 4$ для любого $n \geqslant 0$ (теорема 11.7), где $B_6 = \{\&, \vee, \oplus, 1\}$, $B_6' = \{\&, \vee, \oplus, \rightarrow\}$, а величина $D^{B;\,\text{Н}\,(+r)}_{\text{Т (М)}}(n)$ определяется на с. 22.

Теорема 11.1. *Пусть B — произвольное ф. п. подмножество множества $\{(x_1^\sigma \& \ldots \& x_n^\sigma)^\delta, (x_1 \& \overline{x}_2 \& h)^\delta, x_1 \oplus x_2 \oplus c \mid n \in \mathbb{N};\, h \in P_2;\, \sigma, \delta, c \in \{0,1\}\} \setminus \{0,1\}$. Тогда $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$, причём для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(f) \geqslant 3$.*

Замечание 11.1. В качестве базиса B в формулировке теоремы можно взять произвольный ф. п. базис (с точностью до переименования переменных), состоящий из функций от не более чем двух переменных и не содержащий констант.

Замечание 11.2. Формулировка теоремы 11.1 по существу отличается от формулировки теоремы 4 работы [154] лишь добавлением условий $0 \notin B$ и $1 \notin B$. Доказательство теоремы 4 из [154] в её первоначальной формулировке неверно (этот факт был обнаружен при подготовке данной диссертации): в случае наличия в базисе константы 0 или 1 на выходе ФЭ, её реализующего, не может быть неисправности типа 0 или типа 1 соответственно, однако в доказательстве указанной теоремы неявно предполагается, что на выходе каждого ФЭ возможны неисправности обоих этих типов. После внесения упомянутой замены в формулировку теоремы её доказательство становится корректным.

Доказательство теоремы 11.1. Пусть $n \geqslant 3$ и $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф., такая, что при подстановке вместо любой её переменной любой булевой константы получается нелинейная б. ф.. В качестве $f(\tilde{x}^n)$ можно взять, скажем, функцию $x_1 x_2 \ldots x_n \vee \overline{x}_1\, \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$. В силу замечания 8.1 и неравенства $n \geqslant 3$ значения $D(f)$ и $D(n)$ определены. Докажем, что $D(f) \geqslant 3$. Идеи доказательства сходны с идеями, использованными при установлении такого же неравенства в случае 4 из доказательства теоремы 9.5. Достаточно доказать, что $|T| \geqslant 3$, где T — произвольный ЕПТ для произвольной неизбыточной схемы S в базисе B, реализующей функцию f.

Элементы, реализующие функции вида $(x_1^\sigma \& \ldots \& x_n^\sigma)^\delta$, где $\sigma, \delta \in \{0,1\}$, будем называть *обобщёнными конъюнкторами I типа*; вида $(x_1 \& \overline{x}_2 \& h)^\delta$, где $h \in P_2$, $\delta \in \{0,1\}$ — *обобщёнными конъюнкторами II типа*; вида $x_1 \oplus x_2 \oplus c$, где $c \in \{0,1\}$ — *обобщёнными сумматорами.*

Рассмотрим два случая.

1. В схеме S найдётся ФЭ, входы которого соединены с выходами по крайней мере двух различных ФЭ. Среди всех элементов с таким свойством выберем произвольный нижний элемент E. Очевидно, что входы каждого элемента, расположенного в схеме S ниже элемента E, соединены с выходом ровно одного ФЭ и, как следствие, E — разделяющий элемент. Рассмотрим три подслучая.

1.1. Элемент E — обобщённый сумматор. Пусть его входы соединены в схеме S с выходами элементов E_1 и E_2, на которых в случае исправности всех элементов схемы S реализуются б. ф. φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда на выходе элемента E в схеме S реализуется функция $\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus c$, где $c \in \{0,1\}$. Чтобы обнаружить неисправность типа 0 (типа 1) на выходе элемента E_1, в тесте T должен содержаться набор $\tilde{\pi}_1$ (набор $\tilde{\pi}_2$), для которого $\varphi_1(\tilde{\pi}_1) = 1$ (соответственно $\varphi_1(\tilde{\pi}_2) = 0$). Отсюда $\tilde{\pi}_1 \neq \tilde{\pi}_2$. Если $\varphi_2(\tilde{\pi}_1) = \varphi_2(\tilde{\pi}_2)$, то неисправность типа $\varphi_2(\tilde{\pi}_1)$ на выходе элемента E_2 нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, откуда $|T| \geqslant 3$. Если же $\varphi_2(\tilde{\pi}_1) \neq \varphi_2(\tilde{\pi}_2)$, то

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus c)(\tilde{\pi}_1) = 1 \oplus \varphi_2(\tilde{\pi}_1) \oplus c = 0 \oplus \varphi_2(\tilde{\pi}_2) \oplus c = (\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus c)(\tilde{\pi}_2)$$

и неисправность типа $(\varphi_1 \oplus \varphi_2 \oplus c)(\tilde{\pi}_1)$ на выходе элемента E нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, откуда $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

1.2. Элемент E — обобщённый конъюнктор I типа. Среди всех элементов, выходы которых соединены в схеме S со входами элемента E (а таких элементов не меньше двух), выберем произвольный нижний элемент E_1 и любой другой элемент E_2. Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E_1 (E_2) этой схемы реализуется б. ф. φ_1 (соответственно φ_2). Тогда на выходе элемента E в схеме S реализуется функция вида $(\varphi_1^\sigma \& \varphi_2^\sigma \& \varphi_3)^\delta$, где φ_3 — некоторая б. ф. и $\sigma, \delta \in \{0, 1\}$. По утверждению 8.11 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E, неизбыточна и T — ЕПТ для схемы S'. Тогда на выходе схемы S' реализуется функция $f' = (\varphi_1^{\sigma_1} \& \varphi_2^{\sigma_2} \& \varphi_3)^\delta$, где $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (константы σ_1 и σ_2 вводятся для удобства рассмотрения нижеследующего подслучая 1.3.1).

При неисправности типа $\overline{\delta}$ на выходе элемента E получающаяся ф. н. схемы S' равна $g_1 \equiv \overline{\delta}$. При неисправности типа σ_1 на выходе элемента E_1 на нём вместо функции φ_1 возникнет константа σ_1, а функция на выходе элемента E_2 не изменится, поскольку элемент E_2 расположен в схеме S' не ниже элемента E_1 в силу выбора последнего. Поэтому на выходе схемы S' возникнет ф. н. $g_2 = (\sigma_1^{\sigma_1} \& \varphi_2^{\sigma_2} \& \varphi_4)^\delta = (\varphi_2^{\sigma_2} \& \varphi_4)^\delta$, где φ_4 — некоторая б. ф.. (Отметим, что функции φ_3 и φ_4 могут не совпадать, если выход элемента E_1 соединён более чем с одним входом элемента E.)

Так как схема S' неизбыточна, то каждая из функций g_1, g_2 отлична от функции f'. Чтобы отличить функцию f' от функции g_1, в тесте T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\pi}_1$, для которого $(\varphi_1^{\sigma_1} \& \varphi_2^{\sigma_2} \& \varphi_3)(\tilde{\pi}_1) = 1$, т. е. $\varphi_1(\tilde{\pi}_1) = \sigma_1$, $\varphi_2(\tilde{\pi}_1) = \sigma_2$, $\varphi_3(\tilde{\pi}_1) = 1$. Чтобы отличить функцию f' от функции g_2, в тесте T должен содержаться хотя бы один набор $\tilde{\pi}_2$, для которого $\varphi_2(\tilde{\pi}_2) = \sigma_2$ (это следует из выражений для функций f', g_2) и $\varphi_1(\tilde{\pi}_2) = \overline{\sigma_1}$ (чтобы можно было обнаружить появление на выходе элемента E_1 вместо функции φ_1 константы σ_1). Из равенств $\varphi_1(\tilde{\pi}_1) = \sigma_1$, $\varphi_1(\tilde{\pi}_2) = \overline{\sigma_1}$ следует, что $\tilde{\pi}_1 \neq \tilde{\pi}_2$, а из равенств $\varphi_2(\tilde{\pi}_1) = \varphi_2(\tilde{\pi}_2) = \sigma_2$ — что неисправность типа σ_2 на выходе элемента E_2, на котором в случае исправности всех элементов схемы S' реализуется функция φ_2, нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$. Поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, отличный от указанных двух наборов. Таким образом, $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать.

1.3. Элемент E — обобщённый конъюнктор II типа. Рассмотрим два подслучая.

1.3.1. Входы «x_1», «x_2» элемента E соединены с выходами различных ФЭ E_1 и E_2. Один из элементов E_1, E_2 расположен в схеме S не ниже другого. Пусть этот элемент — E_2 (случай, когда этот элемент — E_1, рассматривается аналогично). Пусть на выходах элементов E_1, E_2 в схеме S в случае исправности всех элементов этой схемы реализуются б. ф. φ_1 и φ_2

соответственно. Тогда на выходе элемента E реализуется функция вида $(\varphi_1\&\overline{\varphi_2}\&\varphi_3)^\delta$, где φ_3 — некоторая б. ф. и $\delta \in \{0,1\}$. По утверждению 8.11 схема S', получающаяся из схемы S удалением всех элементов, расположенных в ней не выше элемента E, кроме него самого, и переносом выхода схемы на выход элемента E, неизбыточна и T — ЕПТ для схемы S'. Тогда на выходе схемы S' реализуется функция $f' = (\varphi_1^{\sigma_1}\&\varphi_2^{\sigma_2}\&\varphi_3)^\delta$, где $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$. Дальнейшие рассуждения дословно совпадают с рассуждениями из подслучая 1.2, начиная с их второго абзаца. Получаем, что $|T| \geqslant 3$.

1.3.2. Отрицание подслучая 1.3.1: либо входы «x_1», «x_2» элемента E соединены с выходом одного и того же ФЭ, либо хотя бы один из этих входов соединён с каким-то входом схемы. Заметим, что в схеме S не может содержаться ни одного обобщённого сумматора, оба входа которого соединены с выходами одного и того же ФЭ. Действительно, в противном случае на выходе такого сумматора реализовывалась бы булева константа и соответствующая константная неисправность на данном выходе привела бы к тривиальной ф. н., т. е. схема S была бы избыточна.

Среди элемента E и всех элементов, расположенных в этой схеме ниже элемента E, выберем нижний элемент E', удовлетворяющий следующему условию: либо E' — обобщённый конъюнктор II типа, либо E' — обобщённый конъюнктор I типа и не все его входы соединены с выходом одного и того же ФЭ (ясно, что такой элемент можно выбрать, так как сам элемент E удовлетворяет указанному условию). Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E' в ней реализуется б. ф. φ. Любой элемент, расположенный в схеме S ниже элемента E' — либо обобщённый конъюнктор I типа, все входы которого соединены с выходом одного и того же ФЭ, либо обобщённый сумматор, один вход которого соединён с выходом некоторого ФЭ, а другой — с каким-то входом схемы (см. правило выбора элемента E). В таком случае нетрудно заметить, что на выходе схемы S реализуется функция вида $\varphi \oplus \psi$, где ψ — некоторая линейная б. ф. (этот факт легко доказать, двигаясь «сверху вниз» от элемента E' к выходу схемы). Для элемента E' возможны три подслучая.

1.3.2.1. Элемент E' — обобщённый конъюнктор II типа, и его входы «x_1», «x_2» соединены с выходом одного и того же ФЭ E''. Пусть на выходе элемента E'' в схеме S реализуется б. ф. φ', тогда на выходе элемента E' реализуется функция $(\varphi'\&\overline{\varphi'}\&\ldots)^\delta = 0^\delta = \overline{\delta}$, где $\delta \in \{0,1\}$, и неисправность типа $\overline{\delta}$ элемента E' приводит к тривиальной ф. н., т. е. схема S избыточна; противоречие.

1.3.2.2. Элемент E' — обобщённый конъюнктор II типа, и хотя бы один из его входов «x_1», «x_2» соединён со каким-то входом «x_i» схемы. Тогда на выходе элемента E' в схеме S, как нетрудно видеть, реализуется функция φ вида $(x_i^\sigma\&\varphi')^\delta$, где $\varphi' \in P_2$; $\sigma, \delta \in \{0,1\}$, а на выходе схемы S — функция $f = \varphi \oplus \psi = (x_i^\sigma \& \varphi')^\delta \oplus \psi$, которая при подстановке вместо переменной x_i булевой константы $\overline{\sigma}$ становится равна $(0\&\varphi')^\delta \oplus \psi = \overline{\delta} \oplus \psi$, т. е. становится линейной, что противоречит выбору функции f. Поэтому подслучай 1.3.2.2 невозможен.

1.3.2.3. Элемент E' — обобщённый конъюнктор I типа, и не все его входы соединены в схеме S с выходом одного и того же ФЭ. Отсюда, из выбора элемента E и того, что элемент E' расположен в схеме S ниже элемента E, легко вытекает, что хотя бы один вход элемента E' соединён со каким-то входом «x_i» схемы. Дальнейшие рассуждения дословно повторяют рассуждения из подслучая 1.3.2.2. Получаем, что подслучай 1.3.2.3 невозможен. Случай 1 разобран.

2. Входы любого ФЭ схемы S соединены с выходом не более чем одного ФЭ. Очевидно, что в таком случае схема S представляет собой цепочку из элементов. Рассмотрим два подслучая.

2.1. В схеме S содержится либо обобщённый конъюнктор I типа, не все входы которого соединены с выходом одного и того же ФЭ, либо обобщённый конъюнктор II типа. Среди всех элементов схемы S, удовлетворяющих указанному условию, выберем нижний элемент E'. Дальнейшие рассуждения полностью совпадают с рассуждениями из случая 1.3.2, начиная со слов «Пусть в случае исправности всех элементов схемы S на выходе элемента E' в ней ...». Получаем, что подслучай 2.1 невозможен.

2.2. Отрицание подслучая 2.1: любой элемент схемы S является либо обобщённым конъюнктором I типа, все входы которого соединены с выходом одного и того же ФЭ, либо обобщённым сумматором. В таком случае нетрудно заметить, что на выходе схемы S реализуется некоторая линейная б. ф. (этот факт легко доказать, двигаясь по схеме S «сверху вниз»), которая остаётся линейной при подстановке вместо, скажем, переменной x_1 произвольной булевой константы, что противоречит выбору функции f. Поэтому подслучай 2.2 невозможен. Случай 2 разобран.

Неравенство $|T| \geqslant 3$ доказано. Следовательно, $D(f) \geqslant 3$ и $D(n) \geqslant D(f) \geqslant 3$. Первая часть теоремы 11.1 доказана.

Пусть R_n — множество таких б. ф. от n переменных, при подстановке в каждую из которых вместо некоторой переменной некоторой булевой константы получается линейная б. ф.. Оценим сверху величину $|R_n|$. Пусть i — произвольный индекс от 1 до n; α — произвольная булева константа. Каждая б. ф. $f_{i,\alpha}(\tilde{x}^n)$, при подстановке в которую вместо переменной x_i константы α получается линейная б. ф., может принимать произвольные значения на 2^{n-1} двоичных наборах длины n, i-я компонента которых равна $\overline{\alpha}$, а при подстановке вместо переменной x_i константы α становится равной одной из 2^n линейных функций от переменных $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ (и принимает вид $c_0 \oplus c_1 x_1 \oplus \ldots \oplus c_{i-1} x_{i-1} \oplus c_{i+1} x_{i+1} \oplus \ldots \oplus c_n x_n$, где все $c_j \in \{0, 1\}$). Поэтому общее число рассматриваемых функций $f_{i,\alpha}(\tilde{x}^n)$ при фиксированных i, α равно $2^{2^{n-1}} \cdot 2^n = 2^{2^{n-1}+n}$. Тогда

$$|R_n| \leqslant \sum_{\substack{i \in \{1,\ldots,n\} \\ \alpha \in \{0,1\}}} 2^{2^{n-1}+n} = 2n \cdot 2^{2^{n-1}+n},$$

$$\frac{|R_n|}{2^{2^n}} \leqslant \frac{2n \cdot 2^{2^{n-1}+n}}{2^{2^n}} = \frac{n}{2^{2^{n-1}-n-1}} \to 0 \ \ (n \to \infty).$$

Таким образом, отношение числа б. ф. из множества R_n к общему числу б. ф. от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству R_n, выполнено неравенство $D(f) \geqslant 3$, откуда следует справедливость теоремы 11.1. $\square$

Рассмотрим базис $B_4 = \{x \& y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$.

Теорема 11.2 [157]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1), \\ 2, & \textit{если } f \textit{ не представима в виде } (8.1). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(f)$ не определено.

Следствие 11.1 [157]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕП (O)}}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 11.2. В случаях $f \equiv 0$ и $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Если функция f представима в виде (8.1), то $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1. Далее будем считать, что эта функция отлична от констант и не представима в виде (8.1). Тогда $D(f) \geqslant 2$ в силу утверждения 8.5, если значение $D(f)$ определено.

Докажем, что оно определено и $D(f) \leqslant 2$. Некоторые идеи доказательства сходны с идеями, использованными при установлении неравенства $D(f) \leqslant 3$ в случае 4 из доказательства теоремы 9.5. Представим функцию f полиномом Жегалкина (9.9), где $m \geqslant 1$, $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме. Пусть $K_i = x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_{t_i}(i)}$, $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим два случая.

Случай A. Пусть $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$. Пусть $\tilde{\sigma}$ — произвольный n-набор, на котором каждая из конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ принимает значение 0, тогда из представления (9.9) следует, что $f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{\sigma}) = c$, поэтому

$$f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{\sigma}). \tag{11.1}$$

В качестве $\tilde{\sigma}$, очевидно, можно взять набор $(\tilde{0}^n)$. Пусть в наборе $\tilde{\sigma}$ содержится ровно k единиц, где $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. Без ограничения общности $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$. Тогда в каждую конъюнкцию K_i, $i = 1, \ldots, m$, входят $p_i \in \{1, \ldots, t_i\}$ переменных из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Случай Б. Пусть $f(\tilde{1}^n) = f(\tilde{0}^n)$. Без ограничения общности будем считать, что $j_1(1) = 1, \ldots, j_k(1) = k$, где $k = t_1$. Тогда $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_k$. Положим $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$. Поскольку K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина функции f, то в каждую конъюнкцию $K_2, \ldots, K_m$ входит хотя бы одна переменная из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Отсюда и из представления (9.9) следует, что $f(\tilde{0}^n) = c$, а $f(\tilde{\sigma}) = 1 \oplus \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m-1} \oplus c = \overline{c}$, т. е. $f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{\sigma})$. Тогда верно соотношение (11.1), в частности, $(\tilde{1}^n) \neq \tilde{\sigma}$, поэтому $k < n$. Если в полиноме Жегалкина функции f присутствует слагаемое $x_1 \& \ldots \& x_k \& x_{k+1}$, то будем без ограничения общности считать, что это слагаемое K_m. Представим K_1 в виде $K_1' \oplus K_{m+1}$, где $K_1' = x_1 \& \ldots \& x_k \& \overline{x}_{k+1}$, $K_{m+1} = x_1 \& \ldots \& x_k \& x_{k+1}$. Тогда выполнено (9.10), где $r = m - 1$ при $K_m = K_{m+1}$ и $r = m + 1$ при $K_m \neq K_{m+1}$ (в случае $r = 1$ полагаем $K_2 \oplus \ldots \oplus K_r = 0$). Так как K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина функции f, то в каждую конъюнкцию K_i, $i = 2, \ldots, r$ (при $r \geqslant 2$), входят $p_i \in \{1, \ldots, t_i\}$ переменных из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Далее будем параллельно рассматривать случаи А и Б. Введём для удобства обозначение

$$q = \begin{cases} 1 & \text{в случае А,} \\ 2 & \text{в случае Б.} \end{cases} \tag{11.2}$$

В случае А положим $r = m$. Тогда в каждом из случаев А, Б имеем $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$, а в каждую конъюнкцию $K_q, \ldots, K_r$ (при $r \geqslant q$) входят $p_i \in \{1, \ldots, t_i\}$ переменных из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Без ограничения общности это переменные $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_{p_i}(i)}$, а каждая из переменных $x_{j_{p_i+1}(i)}, \ldots, x_{j_{t_i}(i)}$ (при $p_i < t_i$) принадлежит множеству $\{x_1, \ldots, x_k\}$. В случае $p_i \geqslant 3$ представим конъюнкцию K_i, $i = q, \ldots, r$, в виде $K_i^{(2)} \oplus \ldots \oplus K_i^{(p_i-1)} \oplus K_i^{(2)} \oplus \ldots \oplus K_i^{(p_i-1)} \oplus K_i$, где $K_i^{(s)} = x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_s(i)}$, $s = 2, \ldots, p_i - 1$ (конъюнкция первых s переменных из K_i). Тогда в случае А представление (9.9) примет вид

$$f = \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i \right) \oplus c, \tag{11.3}$$

а в случае Б представление (9.10) примет вид

$$f = K_1' \oplus \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i \right) \oplus c \tag{11.4}$$

(если $p_i \in \{1,2\}$, то полагаем $\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i = K_i$, а если $r < q$, то полагаем $\bigoplus\limits_{i=q}^{r} (\ldots) = 0$).

В случае А заметим, что

$$f(\tilde{\sigma}) = \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 0 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 0 \oplus 0 \right) \oplus c = c,$$

$$f(\tilde{1}^n) = \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) \oplus c,$$

а тогда в силу (11.1) имеем $\bigoplus\limits_{i=q}^{r} \left(\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) = 1$, следовательно, число слагаемых в выражении $\bigoplus\limits_{i=q}^{r} \left(\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i \right)$ (после раскрытия всех скобок) нечётно.

В случае Б заметим, что

$$f(\tilde{\sigma}) = 1 \oplus \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 0 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 0 \oplus 0 \right) \oplus c = 1 \oplus c,$$

$$f(\tilde{1}^n) = 0 \oplus \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) \oplus c = \bigoplus_{i=q}^{r} \left(\bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) \oplus c,$$

а тогда в силу (11.1) имеем $\bigoplus\limits_{i=q}^{r} \left(\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} 1 \oplus 1 \right) = 0$, следовательно, число слагаемых в выражении $K_1' \oplus \bigoplus\limits_{i=q}^{r} \left(\bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus \bigoplus\limits_{s=2}^{p_i-1} K_i^{(s)} \oplus K_i \right)$ (после раскрытия всех скобок) нечётно.

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B_4 в соответствии с представлением (11.3) в случае А и представлением (11.4) в случае Б. Конъюнкцию K_1' в случае Б реализуем цепочкой Z_1 из одного инвертора и k конъюнкторов, верхним элементом в которой является инвертор; на вход этого инвертора подадим переменную x_{k+1}, а на правые входы конъюнкторов — последовательно переменные $x_1, \ldots, x_k$. Каждую конъюнкцию K_i, $i = q, \ldots, r$ (при $r \geqslant q$), реализуем цепочкой Z_i из $t_i - 1$ конъюнкторов $E_{i,1}, \ldots, E_{i,t_i-1}$, занумерованных «сверху вниз», на входы которой последовательно подадим переменные $x_{j_1(i)}, \ldots, x_{j_{t_i}(i)}$ (в частности, переменная $x_{j_1(i)}$ будет подана на один из входов элемента $E_{i,1}$ — верхнего конъюнктора цепочки Z_i; в случае $t_i = 1$ в этой цепочке не содержится элементов, а её выход совпадает со входом «$x_{j_1(i)}$» схемы S).

Далее, для каждого $i \in \{q, \ldots, r\}$ (при $r \geqslant q$) такого, что $p_i \geqslant 3$, и для каждого $s \in \{2, \ldots, p_i - 1\}$ подадим на левый вход (нового) конъюнктора $E'_{i,s-1}$ переменную $x_{j_1(i)}$, а его правый вход соединим с выходом конъюнктора $E_{i,s-1}$ из цепочки Z_i (на котором, очевидно, реализуется функция $x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_s(i)} = K_i^{(s)}$). Тогда на выходе элемента $E'_{i,s-1}$ реализуется функция $x_{j_1(i)} \& (x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_s(i)}) = K_i^{(s)}$. Затем выходы всех цепочек $Z_1, \ldots, Z_r$ и выходы всех конъюнкторов $E_{i,s-1}$ и $E'_{i,s-1}$, где $i = q, \ldots, r$ таковы, что $p_i \geqslant 3$, и $s = 2, \ldots, p_i - 1$ (общее число этих выходов в силу сказанного выше нечётно) соединим со входами цепочки $Z_\oplus$, состоящей из (трёхвходовых) сумматоров и — в случае $c = 1$ — инвертора, вход которого соединён с выходом нижнего из этих сумматоров, причём в случае Б выход цепочки Z_1 соединим с одним из входов верхнего элемента цепочки $Z_\oplus$, если она непуста. Выход цепочки $Z_\oplus$ либо — если эта цепочка пуста — выход цепочки Z_1 объявим выходом схемы S.

Вид схемы S в случае Б показан на рисунке 11.1; в случае А все входы цепочки $Z_\oplus$ смещаются «на один влево» (в частности, выходы элементов $E'_{q,1}$ и $E_{q,1}$ будут соединены с левым и вторым слева входом верхнего сумматора цепочки $Z_\oplus$ соответственно) с учётом равенства $q = 1$.

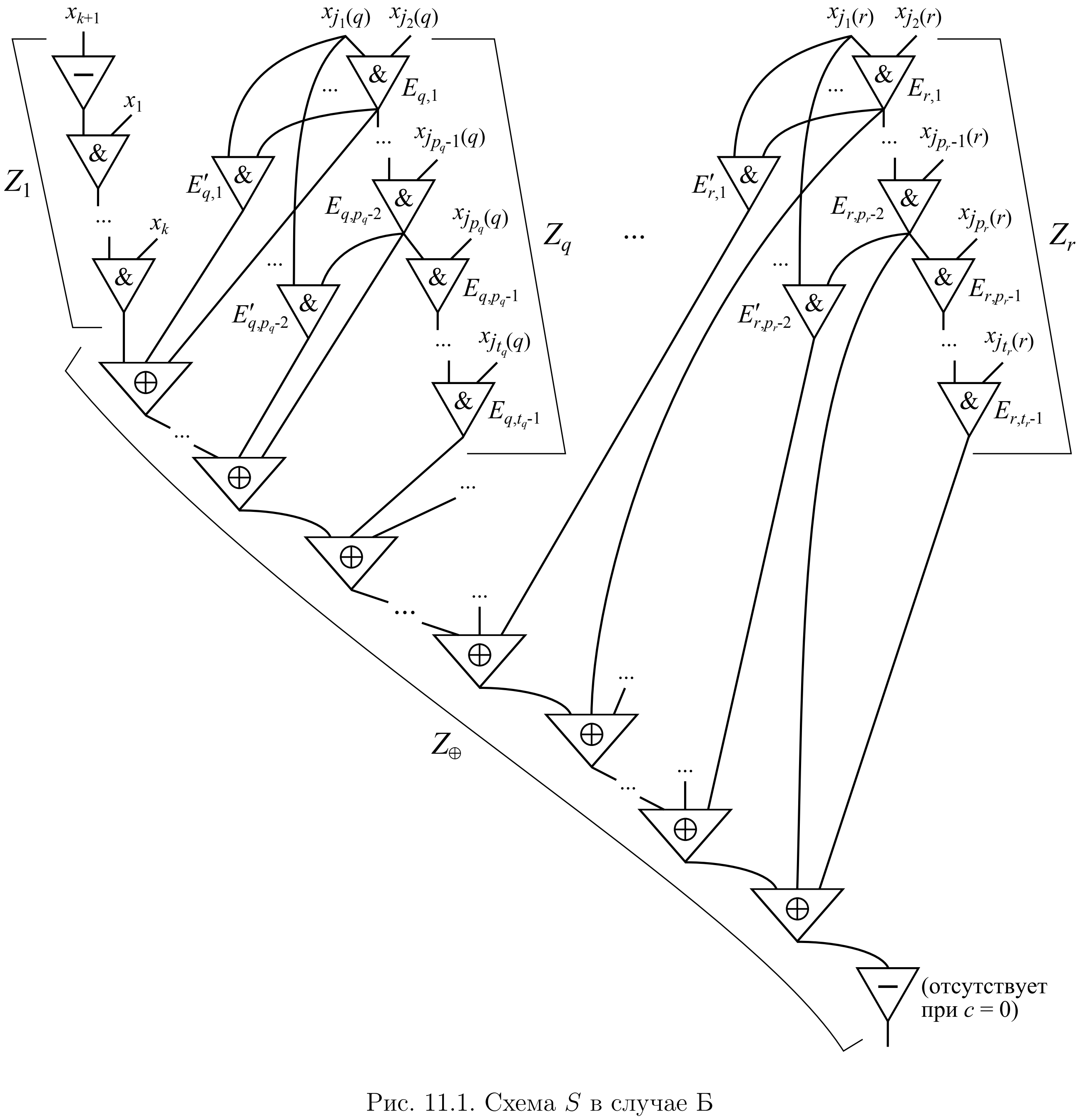

Рис. 11.1. Схема S в случае Б

Нетрудно убедиться, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Для этого достаточно заметить, что на выходе цепочки Z_1 в случае Б реализуется функция K_1'; на выходах конъюнкторов $E_{i,1}, \ldots, E_{i,p_i-2}$, а также на выходах конъюнкторов $E_{i,1}', \ldots, E_{i,p_i-2}'$ реализуются функции $K_i^{(2)}, \ldots, K_i^{(p_i-1)}$ соответственно (при $p_i \geqslant 3$), а на выходах цепочек $Z_q, \ldots, Z_r$ при $r \geqslant q$ — функции $K_q, \ldots, K_r$ соответственно.

Докажем, что схема S неизбыточна и множество $T = \{(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}\}$ является для неё ЕПТ. Множество всех конъюнкторов этой схемы, кроме конъюнкторов из цепочки Z_1 в случае Б, обозначим через M, а множество выходных конъюнкторов цепочек $Z_1, \ldots, Z_r$ и всех конъюнкторов $E_{i,s-1}$ и $E_{i,s-1}'$, где $i = q, \ldots, r;\ s = 2, \ldots, p_i - 1$ — через M'. Заметим, что выход каждого конъюнктора из множества M' соединён ровно с одним входом цепочки $Z_\oplus$.

В случае исправности всех элементов схемы S на наборе $\tilde{\sigma}$ на выходах всех конъюнкторов из множества M возникнут нули (здесь используется то свойство, что каждая переменная $x_{j_1(i)}$ входит в число переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$). Если какой-то из конъюнкторов $E_{i,s-1}$, где $s \geqslant p_i$, неисправен и выдаёт 1, то на наборе $\tilde{\sigma}$ на выходе выходного конъюнктора цепочки Z_i возникнет единица (поскольку на этом наборе $x_{j_{p_i+1}(i)} = \ldots = x_{j_{t_i}} = 1$ при $p_i < t_i$), а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся. Если же какой-то из конъюнкторов $E_{i,s-1}$ или $E_{i,s-1}'$, где $s \in \{2, \ldots, p_i - 1\}$ (при $p_i \geqslant 3$), неисправен и выдаёт 1, то на наборе $\tilde{\sigma}$ на выходе этого конъюнктора возникнет единица, а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся, поскольку на указанном наборе $x_{j_1(i)} = \ldots = x_{j_{p_i}(i)} = 0$. Учитывая, что выход единственного конъюнктора из множества M', на выходе которого вместо значения 0 возникает значение 1, соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_\oplus$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т. е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}$.

Далее, в случае исправности всех элементов схемы S на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходах всех конъюнкторов из множества M возникнут единицы. Если какой-то из конъюнкторов $E_{i,s-1}'$ неисправен и выдаёт 0, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходе этого конъюнктора возникнет нуль, а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся. Если какой-то из конъюнкторов $E_{i,s-1}$, где $s \geqslant p_i$, неисправен и выдаёт 0, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходе выходного конъюнктора цепочки Z_i возникнет нуль, а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся. Если же какой-то из конъюнкторов $E_{i,s-1}$, где $s \in \{2, \ldots, p_i - 1\}$ (при $p_i \geqslant 3$), неисправен и выдаёт 0, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходе выходного конъюнктора цепочки Z_i, а также на выходах конъюнкторов $E_{i,s-1}, E_{i,s}, \ldots, E_{i,p_i-2}$ и

$E'_{i,s-1}, E'_{i,s}, \ldots, E'_{i,p_i-2}$ (т. е. на выходе неисправного конъюнктора и на выходах всех конъюнкторов из множества M', расположенных в схеме S ниже неисправного), возникнут нули, а значения на выходах всех остальных конъюнкторов из множества M' не изменятся. Учитывая, что число возникших нулей равно $1+(p_i-s)+(p_i-s)$ и, как следствие, нечётно, а выход каждого конъюнктора из множества M' соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_\oplus$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе данной цепочки, т. е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $(\tilde{1}^n)$.

В случае Б, если все элементы схемы S исправны, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ (наборе $\tilde{\sigma}$) на выходах всех элементов, содержащихся в цепочке Z_1, возникнут нули (единицы), причём на правые входы всех конъюнкторов в этой цепочке будут подаваться единицы. Если некоторый элемент в указанной цепочке неисправен и выдаёт 1 (выдаёт 0), то на наборе $(\tilde{1}^n)$ (соответственно $\tilde{\sigma}$) на выходе этого и всех следующих за ним элементов цепочки Z_1, а значит, и на выходе данной цепочки, очевидно, возникнут единицы (нули). Учитывая, что выход цепочки Z_1 соединяется ровно с одним входом цепочки $Z_\oplus$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе этой цепочки, т. е. на выходе всей схемы S, изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на наборе $(\tilde{1}^n)$ (соответственно $\tilde{\sigma}$).

Осталось рассмотреть случай неисправности типа 0 или типа 1 некоторого элемента в цепочке $Z_\oplus$. Нетрудно заметить, что при отсутствии неисправностей в схеме S на наборе $(\tilde{1}^n)$ (наборе $\tilde{\sigma}$) на выходах всех сумматоров из этой цепочки возникнут единицы (нули) в случае А и нули (единицы) в случае Б (напомним, сумматоры трёхвходовые). Если какой-то из них неисправен, то на одном из наборов $(\tilde{1}^n)$, $\tilde{\sigma}$ значение на выходе данного сумматора изменится. Учитывая, что этот выход либо совпадает с выходом схемы S, либо соединяется ровно с одним входом некоторой нижней части цепочки $Z_\oplus$, реализующей линейную функцию от своих входов, значение на выходе схемы S изменится, поэтому рассматриваемая неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(\tilde{1}^n)$, $\tilde{\sigma}$.

Наконец, если неисправен выходной инвертор цепочки $Z_\oplus$ (в случае $c = 1$), то ф. н. схемы S равна тождественному нулю или тождественной единице, а каждую из этих функций можно отличить от функции f на одном из наборов $(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}$ в силу (11.1).

В итоге получаем, что любую ф. н. схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе из множества T. Это означает, что схема S неизбыточна и данное множество является для неё ЕПТ длины 2, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 2$. Теорема 11.2 доказана. $\square$

Результаты следующих трёх лемм будут использованы в §12.

Лемма 11.1. *Любую б. ф. от n переменных, принимающую разные значения на наборах $(\tilde{1}^n)$ и $(\tilde{0}^n)$, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_4, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}\}$, где $\tilde{\sigma}$ — произвольный n-набор, на котором каждая из конъюнкций в полиноме Жегалкина данной функции обращается в нуль.*

Лемма 11.1 следует из рассмотрения случая А в доказательстве теоремы 11.2.

Лемма 11.2 [167]. *Любую б. ф. от n переменных, принимающую разные значения на наборах $(\tilde{1}^n)$ и $(\tilde{0}^n)$, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_4, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\}$.*

Лемма 11.2 следует из леммы 11.1.

Лемма 11.3 [167]. *Любую неконстантную б. ф. от n переменных, принимающую одинаковые значения на наборах $(\tilde{1}^n)$ и $(\tilde{0}^n)$, самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина которой равна $x_1\&\ldots\&x_k$, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_4, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})\}$.*

Лемма 11.3 следует из рассмотрения случая Б в доказательстве теоремы 11.2.

Рассмотрим в качестве базиса множество $B_5' = \{h(x, y, z, t), x \oplus y \oplus z, \overline{x}\}$, где $h(x, y, z, t)$ — б. ф., заданная таблицей 11.1 (вместо звёздочки может стоять как 0, так и 1). Если вместо

Таблица 11.1

x	y	z	t	$h(x,y,z,t)$	x	y	z	t	$h(x,y,z,t)$
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	$*$	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

звёздочки стоит 0, то функция h может быть задана следующей несложной формулой:

$$h(x, y, z, t) = x(y \sim zt) \vee y\overline{z}.$$

Любой ФЭ, реализующий функцию $h(x, y, z, t)$ от своих входов, будем называть *контролирующим элементом* (КЭ).

Теорема 11.3 [159]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_5'; 01}_{\text{ПП (O)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \equiv 0 \text{ или } f \equiv 1, \\ 2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие 11.2 [159]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^{B_5'; 01}_{\text{ПП (O)}}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 11.3. Можно считать, что в базисе B_5' содержится функция $x \& y$: достаточно отождествить входы «x», «y» и «z» у произвольного КЭ и получить двухвходовой конъюнктор (это следует из равенств $h(0, 0, 0, 0) = h(0, 0, 0, 1) = h(1, 1, 1, 0) = 0$, $h(1, 1, 1, 1) = 1$), допускающий те же самые неисправности (а именно неисправности типов 0 и 1 на его выходе), что и исходный КЭ.

Если функция f представима в виде (8.1), то $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1. Пусть $f(\tilde{x}^n) \equiv \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$. Тогда $D(f) \geqslant 1$ в силу утверждения 8.4. Докажем неравенство $D(f) \leqslant 1$. Реализуем функцию f схемой S в базисе B_5', содержащей один инвертор и один КЭ. На вход инвертора подадим переменную x_1, его выход соединим со входом «t» и — в случае $\alpha = 1$ — со входом «y» КЭ; на входы «x», «z» и — в случае $\alpha = 0$ — на вход «y» этого КЭ подадим переменную x_1. Пользуясь таблицей 11.1, нетрудно проверить, что указанная схема реализует функцию $f \equiv \alpha$ и имеет две отличные от f ф. н. — константу $\overline{\alpha}$ и функцию x_1. Действительно, в случае $\alpha = 1$ схема S реализует функцию $h(x_1, \overline{x}_1, x_1, \overline{x}_1) \equiv 1$, а в случае $\alpha = 0$ — функцию $h(x_1, x_1, x_1, \overline{x}_1) \equiv 0$; при неисправности типа α (типа $\overline{\alpha}$) КЭ данная схема станет реализовывать функцию α (соответственно $\overline{\alpha}$); если же КЭ в схеме S исправен, то при неисправности типа β инвертора она станет реализовывать функцию

$$h(x_1, \beta, x_1, \beta) = \begin{cases} x_1, & \text{если } \beta = 0, \\ 1 = \alpha, & \text{если } \beta = 1, \end{cases}$$

в случае $\alpha = 1$ и функцию

$$h(x_1, x_1, x_1, \beta) = \begin{cases} 0 = \alpha, & \text{если } \beta = 0, \\ x_1, & \text{если } \beta = 1, \end{cases}$$

в случае $\alpha = 0$. Каждую из функций $\overline{\alpha}$, x_1 можно отличить от функции f на любом $(1, \overline{\alpha})$-наборе. Поэтому схема S допускает ППТ длины 1, откуда $D(f) \leqslant 1$. В итоге для $f \equiv 0$ и $f \equiv 1$ получаем равенство $D(f) = 1$.

Пусть теперь функция f не представима в виде (8.1) и отлична от констант. Тогда $D(f) \geqslant 2$ в силу утверждения 8.5. Докажем неравенство $D(f) \leqslant 2$. Некоторые идеи доказательства сходны с идеями, использованными при установлении такого же неравенства в доказательстве теоремы 11.2. Представим функцию f полиномом Жегалкина (9.9), где $m \geqslant 1$, $c \in \{0, 1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме. Пусть $K_i = x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_{t_i}(i)}$, $i = 1, \ldots, m$. Рассмотрим два случая.

Случай А. Пусть $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$. Положим $\tilde{\sigma} = (\tilde{0}^n)$. Тогда выполнено (11.1) и, кроме того, из представления (9.9) следует, что $f(\tilde{\sigma}) = c$, $f(\tilde{1}^n) = \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{m} \oplus c$, поэтому m нечётно.

Случай Б. Пусть $f(\tilde{1}^n) = f(\tilde{0}^n)$. Без ограничения общности будем считать, что $j_1(1) = 1, \ldots, j_k(1) = k$, где $k = t_1$, т. е. $K_1 = x_1 \& \ldots \& x_k$, и положим $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$. Тогда, поскольку K_1 — самая короткая конъюнкция в полиноме Жегалкина функции f, то в каждую конъюнкцию $K_2, \ldots, K_m$ входит хотя бы одна переменная из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Отсюда и из представления (9.9) следует, что $f(\tilde{0}^n) = c$, а $f(\tilde{\sigma}) = 1 \oplus \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m-1} \oplus c = \bar{c}$, т. е. $f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{\sigma})$. Тогда выполнено (11.1), в частности, $(\tilde{1}^n) \neq \tilde{\sigma}$, т. е. $k < n$. Если в полиноме Жегалкина функции f присутствует слагаемое $x_1 \& \ldots \& x_k \& x_{k+1}$, то будем без ограничения общности считать, что это слагаемое K_m. Представим K_1 в виде $K'_1 \oplus K_{m+1}$, где $K'_1 = x_1 \& \ldots \& x_k \& \overline{x}_{k+1}$, $K_{m+1} = x_1 \& \ldots \& x_k \& x_{k+1}$. Тогда верно соотношение (9.10), где $r = m - 1$ при $K_m = K_{m+1}$ и $r = m + 1$ при $K_m \neq K_{m+1}$ (в случае $r = 1$ полагаем $K_2 \oplus \ldots \oplus K_r = 0$). Заметим, что

$$c = f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{1}^n) = K'_1(\tilde{1}^n) \oplus K_2(\tilde{1}^n) \oplus \ldots \oplus K_r(\tilde{1}^n) \oplus c = 0 \oplus \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{r-1} \oplus c$$

в силу (9.9), (9.10) и предположения случая Б, откуда $\underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{r-1} = 0$, т. е. r нечётно. Из (9.10) вытекает равенство

$$f(\tilde{x}^n) = (K'_1 \oplus 1) \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_r \oplus \bar{c}. \tag{11.5}$$

Далее будем параллельно рассматривать случаи А и Б. Введём для удобства обозначение (11.2). В случае А положим $r = m$ и $k = 0$. Тогда в каждом из случаев А и Б выполнено соотношение (11.1), r нечётно и $\tilde{\sigma} = (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$. Как было отмечено выше, в случае Б в каждую конъюнкцию $K_i = x_{j_1(i)} \& \ldots \& x_{j_{t_i}(i)}$, где $i = q, \ldots, r$ (при $r \geqslant q$), входит хотя бы одна переменная из числа $x_{k+1}, \ldots, x_n$. Аналогичный факт, очевидно, верен и в случае А, в котором $q = 1$, $r = m$ и $k = 0$. Без ограничения общности $x_{j_1(i)}$ — одна из этих переменных.

Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B'_5 в соответствии с представлением (9.9) (где $m = r$) в случае А и представлением (11.5) в случае Б (см. рисунок 11.2). Каждую конъюнкцию K_i, $i = q, \ldots, r$ (при $r \geqslant q$), реализуем цепочкой Z_i из $t_i - 1$ конъюнкторов $E^{\&}_{i,1}, \ldots, E^{\&}_{i,t_i-1}$, занумерованных «сверху вниз», на входы которой последовательно подадим переменные $x_{j_1(i)}, x_{j_2(i)}, \ldots, x_{j_{t_i}(i)}$ (в частности, переменная $x_{j_1(i)}$ будет подана на один из входов элемента $E^{\&}_{i,1}$ — верхнего конъюнктора цепочки Z_i; в случае $t_i = 1$ в этой цепочке не содержится элементов, а её выход совпадает со входом «$x_{j_1(i)}$» схемы S). Слагаемое $K'_1 \oplus 1 = \overline{x_1 \& \ldots \& x_k \& \overline{x}_{k+1}}$ в случае Б реализуем цепочкой Z_1 из двух инверторов и k конъюнкторов, верхним и нижним элементами в которой являются инверторы; на вход верхнего инвертора подадим переменную x_{k+1}, а на правые входы конъюнкторов — последовательно переменные $x_1, \ldots, x_k$; выход нижнего конъюнктора соединим со входом нижнего инвертора.

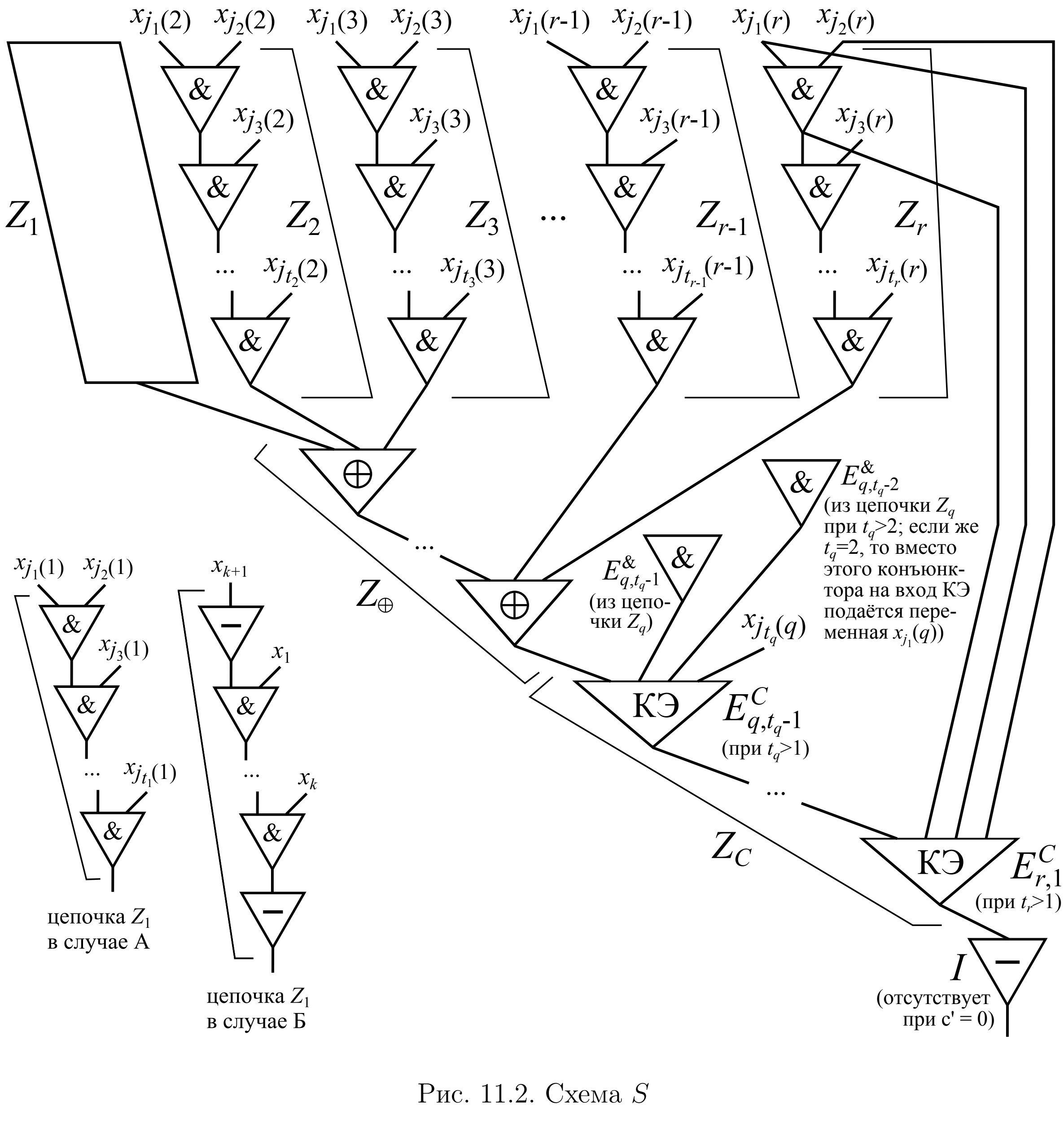

Рис. 11.2. Схема S

Затем выходы всех построенных цепочек $Z_1, \ldots, Z_r$ соединим со входами цепочки $Z_{\oplus}$, состоящей из $\frac{r-1}{2}$ сумматоров (напомним, что r нечётно; в случае $r \geqslant 3$ в этой цепочке все три входа верхнего сумматора и по два входа каждого из остальных $\frac{r-3}{2}$ сумматоров последовательно соединяются с выходами цепочек $Z_1, \ldots, Z_r$, в частности, выход цепочки Z_1 соединяется с одним из входов верхнего сумматора; в случае $r = 1$ в цепочке $Z_\oplus$ не содержится элементов, а её выход совпадает с выходом цепочки Z_1).

Далее, для каждого определённого выше конъюнктора $E^{\&}_{i,s}$, $i = q, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, t_i - 1$, построим КЭ $E^C_{i,s}$, вход «y» которого соединим с выходом этого конъюнктора, а входы «z» и «t» — с теми входами схемы S или выходами элементов, с которыми в цепочке Z_i соединяются входы конъюнктора $E^{\&}_{i,s}$, причём вход «z» КЭ $E^C_{i,s}$ соединим либо со входом «$x_{j_1(i)}$» схемы S (при $s = 1$), либо с выходом конъюнктора $E^{\&}_{i,s-1}$ (при $s > 1$). Затем соединим все построенные КЭ $E^C_{i,s}$ в цепочку Z_C через их входы «x», оставшиеся незанятыми; при этом вход «x» верхнего КЭ соединим с выходом цепочки $Z_\oplus$ (в случаях $r < q$ или $r \geqslant q$ и $t_q = \ldots = t_r = 1$ считаем, что цепочка Z_C не содержит элементов, а её выход совпадает с выходом цепочки $Z_\oplus$). Пусть элементы $E^C_{i,s}$ идут в цепочке Z_C «сверху вниз» в порядке возрастания индекса i, а для элементов $E^C_{i,s}$ с одинаковым индексом i — в порядке убывания индекса s. Таким образом, если, например, $t_q > 1$ и $t_r > 1$, то верхним элементом в цепочке Z_C будет являться E^C_{q,t_q-1}, а нижним — $E^C_{r,1}$.

Пусть

$$c' = \begin{cases} c & \text{в случае А,} \\ \bar{c} & \text{в случае Б.} \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$f(\tilde{\sigma}) = c' \tag{11.6}$$

в каждом из случаев А, Б.

Если $c' = 0$, то выход цепочки Z_C объявим выходом схемы S. Если же $c' = 1$, то подсоединим к выходу цепочки Z_C инвертор I, выход которого объявим выходом схемы S.

Докажем, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Легко видеть, что на выходе цепочки Z_i, $i = q, \ldots, r$, реализуется конъюнкция K_i, а на выходе цепочки Z_1 в случае Б — слагаемое $K'_1 \oplus 1$. Тогда на выходе цепочки $Z_\oplus$ в случае А реализуется функция $K_1 \oplus \ldots \oplus K_m$ (напомним, что в этом случае $r = m$), а в случае Б — функция $(K'_1 \oplus 1) \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_r$. В каждом из случаев А и Б данная функция равна $f(\tilde{x}^n) \oplus c'$ в силу (9.9), (11.5).

Рассмотрим далее произвольный КЭ $E^C_{i,s}$ из цепочки Z_C. Пусть на его входы «x», «y», «z» и «t» в схеме S подаются б. ф. φ_x, φ_y, φ_z и φ_t соответственно, тогда на его выходе реализуется функция $h(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_t)$. Как было отмечено выше, входы «z» и «t» элемента $E^C_{i,s}$ соединяются с теми же выходами элементов или входами схемы S, что и входы конъюнктора $E^\&_{i,s}$, выход которого соединён со входом «y» элемента $E^C_{i,s}$. Поэтому на выходе конъюнктора $E^\&_{i,s}$ в схеме S реализуется функция $\varphi_y = \varphi_z \& \varphi_t$, а на выходе КЭ $E^C_{i,s}$ — функция

$$h(\varphi_x, \varphi_z \& \varphi_t, \varphi_z, \varphi_t) \equiv \varphi_x \tag{11.7}$$

(данное соотношение следует из равенств

$$h(0,0,0,0) = h(0,0,0,1) = h(0,0,1,0) = h(0,1,1,1) = 0,$$
$$h(1,0,0,0) = h(1,0,0,1) = h(1,0,1,0) = h(1,1,1,1) = 1).$$

Таким образом, функция, реализуемая на выходе каждого КЭ в цепочке Z_C, совпадает с функцией, подающейся на его вход «x». В силу построения цепочки Z_C это означает, что на её выходе в схеме S реализуется та же б. ф., что и на выходе цепочки $Z_\oplus$, т. е. функция $f(\tilde{x}^n) \oplus c'$. Тогда в каждом из случаев $c' = 0$ и $c' = 1$ на выходе схемы S реализуется функция $f(\tilde{x}^n)$.

Докажем, что любую ф. н. схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе из множества $T = \{(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}\}$. Если в данной схеме присутствует и при этом неисправен инвертор I, то она реализует булеву константу и неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}$ в силу (11.1). Пусть теперь инвертор I, если он присутствует в схеме S, исправен. Тогда очевидно, что функция, реализуемая на выходе этой схемы, получается из функции, реализуемой на выходе цепочки Z_C, прибавлением по модулю 2 константы c'. Рассмотрим два случая.

1. Среди конъюнкторов $E^\&_{i,s}$ и КЭ $E^C_{i,s}$, $i = q, \ldots, r$; $s = 1, \ldots, t_i - 1$, есть хотя бы один неисправный элемент. Среди всех таких неисправных элементов выберем тот, у которого индекс i наибольший; если таких элементов несколько, выберем среди них тот, у которого индекс s наименьший; если таких элементов два (а именно $E^\&_{i,s}$ и $E^C_{i,s}$ для некоторых i и s), выберем из них КЭ $E^C_{i,s}$. Выбранный элемент обозначим через $E_{i,s}$ (без верхнего индекса $\&$ или C). Тогда в силу порядка расположения элементов в цепочке Z_C любой КЭ $E^C_{u,v}$, находящийся в этой цепочке ниже КЭ $E^C_{i,s}$, исправен, поскольку либо $u > i$, либо $u = i$ и $v < s$. Из этих же соотношений следует, что конъюнктор $E^\&_{u,v}$ исправен, поэтому на его выходе реализуется конъюнкция функций, подаваемых на его входы, а на выходе КЭ $E^C_{u,v}$ — функция, подаваемая на вход «x» данного КЭ, по аналогии с (11.7). Таким образом, на выходе цепочки Z_C будет реализована та же б. ф., что и на выходе элемента $E^C_{i,s}$. Возможны два подслучая.

1.1. Элемент $E_{i,s}$ — КЭ $E^C_{i,s}$. Так как он неисправен, то на его выходе, а значит, и на выходе цепочки Z_C будет реализована некоторая булева константа. Тогда и на выходе всей схемы S будет реализована булева константа вне зависимости от того, присутствует в ней инвертор I или нет, и неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}$ в силу (11.1).

1.2. Элемент $E_{i,s}$ — конъюнктор $E^{\&}_{i,s}$. Тогда в силу выбора элемента $E_{i,s}$ он неисправен, а КЭ $E^C_{i,s}$ и все конъюнкторы $E^{\&}_{i,1}, \dots, E^{\&}_{i,s-1}$, расположенные в цепочке Z_i выше элемента $E_{i,s}$ (при $s > 1$), исправны. Рассмотрим два подслучая.

1.2.1. Элемент $E_{i,s}$ реализует константу 0. На наборе $(\tilde{1}^n)$ на входы этого элемента в схеме S, очевидно, будут подаваться единицы. Тогда на входы «y», «z» и «t» КЭ $E^C_{i,s}$ на этом наборе поступят значения 0, 1 и 1 соответственно. Значит, на выходе элемента $E^C_{i,s}$ возникнет значение 0, поскольку $h(0,0,1,1) = h(1,0,1,1) = 0$. В силу написанного выше это значение «пройдёт» до выхода цепочки Z_C, а значение на выходе схемы S будет равно

$$0 \oplus c' = c' = f(\tilde{\sigma}) \neq f(\tilde{1}^n)$$

в силу (11.1), (11.6). Поэтому на наборе $(\tilde{1}^n)$ неисправность будет обнаружена.

1.2.2. Элемент $E_{i,s}$ реализует константу 1. На один из входов конъюнктора $E^{\&}_{i,1}$ по построению схемы S подаётся переменная $x_{j_1(i)} \in \{x_{k+1}, \dots, x_n\}$. На наборе $\tilde{\sigma}$ эта переменная примет значение 0, которое «пройдёт» по цепочке из исправных конъюнкторов вплоть до одного из входов конъюнктора $E^{\&}_{i,s}$. Тогда на входы «y» и «z» КЭ $E^C_{i,s}$ на этом наборе поступят значения 1 (с выхода конъюнктора $E^{\&}_{i,s}$) и 0 (с указанного входа этого конъюнктора) соответственно. Значит, на выходе элемента $E^C_{i,s}$ возникнет значение 1, поскольку

$$h(0,1,0,0) = h(0,1,0,1) = h(1,1,0,0) = h(1,1,0,1) = 1.$$

В силу написанного выше это значение «пройдёт» до выхода цепочки Z_C, а значение на выходе схемы S будет равно $1 \oplus c' \neq f(\tilde{\sigma})$ в силу (11.6). Поэтому на наборе $\tilde{\sigma}$ неисправность будет обнаружена. Случай 1 разобран.

2. Все конъюнкторы $E^{\&}_{i,s}$ и КЭ $E^C_{i,s}$, $i = q, \dots, r$; $s = 1, \dots, t_i - 1$, исправны. Рассмотрим два подслучая.

2.1. Неисправен хотя бы один сумматор из цепочки $Z_\oplus$. Пусть $E_\oplus$ — нижний из этих неисправных сумматоров, а на его выходе реализуется булева константа β. Легко видеть, что на те два входа каждого сумматора, расположенного в цепочке $Z_\oplus$ ниже элемента $E_\oplus$, которые соединены с выходами некоторых цепочек из $Z_2, \dots, Z_r$ (напомним, что выход цепочки Z_1 по построению соединён с одним из входов верхнего сумматора цепочки $Z_\oplus$), на наборах $(\tilde{1}^n)$

и $\tilde{\sigma}$ поступают значения $1, 1$ и $0, 0$ соответственно. Отсюда и из равенств $\beta \oplus 1 \oplus 1 = \beta \oplus 0 \oplus 0 = \beta$ следует, что значение на выходе нижнего сумматора цепочки $Z_{\oplus}$, т. е. на выходе самой этой цепочки, на каждом из наборов $(\tilde{1}^n)$, $\tilde{\sigma}$ равно β. В силу предположения случая 2 на выходе каждого элемента $E^{\&}_{i,s}$; $i = q, \ldots, r$, $s = 1, \ldots, t_i - 1$, реализуется конъюнкция функций, подаваемых на его входы, а на выходе каждого элемента $E^{C}_{i,s}$ — функция, подаваемая на вход «x» данного КЭ, по аналогии с (11.7). Таким образом, на выходе цепочки Z_C будет реализована та же б. ф., что и на выходе цепочки $Z_{\oplus}$, и на каждом из наборов $(\tilde{1}^n)$, $\tilde{\sigma}$ на выходе цепочки Z_C возникнет значение β. Тогда значение на выходе схемы S на обоих этих наборах будет равно $\beta \oplus c'$ и на одном из них неисправность будет обнаружена в силу (11.1).

2.2. Все сумматоры из цепочки $Z_{\oplus}$ исправны. Тогда неисправными могут быть только какие-то элементы из цепочки Z_1 в случае Б. При переходе от набора $(\tilde{1}^n)$ к набору $\tilde{\sigma}$ при отсутствии таких неисправностей меняется значение на входе верхнего инвертора этой цепочки (с 1 на 0), а значения на всех остальных её входах остаются равными 1. Поэтому при наличии неисправности хотя бы одного элемента в цепочке Z_1 переход от набора $(\tilde{1}^n)$ к набору $\tilde{\sigma}$ никак не отразится на значении, возникающем на её выходе. Пусть это значение равно β. Выход цепочки Z_1 по построению соединён с одним из входов верхнего сумматора цепочки $Z_{\oplus}$. Легко видеть, что на те два входа каждого сумматора цепочки $Z_{\oplus}$, которые соединены с выходами некоторых цепочек из $Z_2, \ldots, Z_r$, на наборах $(\tilde{1}^n)$ и $\tilde{\sigma}$ поступают значения $1, 1$ и $0, 0$ соответственно. Далее дословно повторяем рассуждения из подслучая 2.1, начиная со слов «Отсюда и из равенств …». Случай 2 разобран.

В итоге получаем, что в каждом из случаев А, Б любую ф. н. схемы S можно отличить от функции $f(\tilde{x}^n)$ хотя бы на одном наборе из множества T. Это означает, что указанное множество является для этой схемы ППТ длины 2, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 2$. Теорема 11.3 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь в качестве базиса множество $B_5 = \{h^{\sigma_1}(x, y, z, t), (x \oplus y \oplus z)^{\sigma_2}\}$, где $h(x, y, z, t)$ — та же б. ф., что и в базисе B_5', а σ_1, σ_2 — фиксированные булевы константы, хотя бы одна из которых равна 0.

Теорема 11.4 [159]. *Для любой б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *справедливо равенство*

$$D^{B_5;\,01}_{\text{ПП (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \textit{если } f \equiv 0 \textit{ или } f \equiv 1, \\ 2 & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следствие 11.3 [159]. *Для любого* $n \geqslant 1$ *справедливо равенство* $D^{B_5;\,01}_{\text{ПП (О)}}(n) = 2$.

Доказательство теоремы 11.4. Ограничимся рассмотрением случая $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; случаи $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0$ и $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ рассматриваются аналогично. Если функция f представима в виде (8.1), то $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1; если $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то неравенство $D(f) \geqslant 1$ вытекает из утверждения 8.4; в остальных случаях $D(f) \geqslant 2$ в силу утверждения 8.5.

Можно считать, что в базисе B_5 содержится функция $\overline{x}$: достаточно отождествить все входы у произвольного ФЭ, реализующего функцию вида $\overline{h}(x, y, z, t)$ или $\overline{x \oplus y \oplus z}$, и получить одновходовой инвертор, допускающий те же самые неисправности (а именно неисправности типов 0 и 1 на его выходе), что и исходный КЭ (здесь используется равенства $\overline{h}(0, 0, 0, 0) = 1$, $\overline{h}(1, 1, 1, 1) = 0$). Далее возьмём произвольный элемент, реализующий функцию вида $\overline{x \oplus y \oplus z}$ (вида $\overline{h}(x, y, z, t)$), и соединим его выход со входом инвертора. Полученный блок из двух элементов, очевидно, реализует б. ф. $x \oplus y \oplus z$ (б. ф. $h(x, y, z, t)$) от своих входов и имеет только две ф. н. — константы 0 и 1, поэтому можно рассматривать его как отдельный элемент-сумматор (КЭ) и считать, что в базисе B_5 содержится также функция $x \oplus y \oplus z$ (соответственно $h(x, y, z, t)$). В таком случае в базис B_5 входят все функции из базиса B'_5 и $D(f) \leqslant D^{B'_5;\,01}_{\text{ПП (О)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ в силу утверждения 8.8. Отсюда и из теоремы 11.3 следует, что $D(f) \leqslant 1$, если $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, и $D(f) \leqslant 2$, если функция f отлична от констант и переменных. Теорема 11.4 доказана. $\square$

Утверждение 11.1 [162]. *Пусть S — произвольная СФЭ, некоторые элементы в которой могут быть неисправны; Z — произвольная непустая цепочка из элементов в этой схеме; $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ — такие входные наборы схемы S, что на выходе верхнего элемента цепочки Z и на всех её входах, кроме, быть может, входов её верхнего элемента, на данных двух наборах возникают одинаковые значения. Тогда значения на выходах всех элементов этой цепочки на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ одинаковы.*

Доказательство. Пусть цепочка Z состоит из d элементов; занумеруем их сверху вниз числами от 1 до d. Докажем по индукции, что на значения на выходе i-го элемента на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ совпадают, где $i = 1, \ldots, d$.

База индукции. Пусть $i = 1$. На выходе первого элемента (т. е. верхнего элемента цепочки Z) по условию возникают одинаковые значения на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$. База индукции доказана.

Предположение и шаг индукции. Пусть $d \geqslant 2$ и утверждение доказано для $i = j < d$; докажем его для $i = j+1$. На тех входах $(j+1)$-го элемента, которые соединены в цепочке Z с выходом j-го элемента, на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$ возникнут одинаковые значения по предположению индукции. На всех остальных входах $(j+1)$-го элемента, т. е. на тех его входах, которые являются входами цепочки Z, значения на данных двух наборах по условию также совпадают. Тогда значения на выходе $(j+1)$-го элемента на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, очевидно, будут совпадать как в случае исправности, так и в случае неисправности этого элемента (когда на его выходе реализуется некоторая булева константа). Шаг индукции доказан. Утверждение 11.1 доказано. □

Рассмотрим базис $B_6 = \{\&, \vee, \oplus, 1\}$.

Лемма 11.4 [162]. *Любую б. ф. $f(\tilde{x}^t)$, где $t \geqslant 3$, для которой выполнены соотношения $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $f(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f(\tilde{1}^t)$, можно реализовать СФЭ в базисе B_6, допускающей ППТ $\{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$.*

Доказательство. Пусть

$$f'(\tilde{x}^t) = (x_1 \vee \ldots \vee x_t) \oplus x_1 \ldots x_t \oplus f(\tilde{x}^t). \tag{11.8}$$

Тогда

$$\begin{gathered} f'(\tilde{0}^t) = 0 \oplus 0 \oplus f(\tilde{0}^t) = f(\tilde{0}^t), \\ f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = 1 \oplus 0 \oplus f(1, \tilde{0}^{t-1}) = \overline{f}(1, \tilde{0}^{t-1}) = f(\tilde{0}^t), \\ f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = 1 \oplus 0 \oplus f(0, \tilde{1}^{t-1}) = \overline{f}(0, \tilde{1}^{t-1}) = f(\tilde{1}^t), \\ f'(\tilde{1}^t) = 1 \oplus 1 \oplus f(\tilde{1}^t) = f(\tilde{1}^t), \end{gathered}$$

откуда

$$f'(\tilde{0}^t) = f'(1, \tilde{0}^{t-1}), \tag{11.9}$$

$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = f'(\tilde{1}^t). \tag{11.10}$$

Представим функцию f' полиномом Жегалкина:

$$f'(\tilde{x}^t) = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c, \tag{11.11}$$

где $c \in \{0, 1\}$, а $K_1, \ldots, K_m$ — попарно различные конъюнкции переменных из множества $\{x_1, \ldots, x_t\}$ (в случае $m = 0$ полагаем $K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c = c$). Из соотношений (11.9), (11.11) следует, что

$$f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = f'(\tilde{0}^t) = \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m} \oplus c = c. \tag{11.12}$$

Если среди конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ присутствует слагаемое x_1, то на наборе $(1, \tilde{0}^{t-1})$ каждая из этих конъюнкций, кроме x_1, обратится в нуль, а слагаемое x_1 — в единицу, поэтому

$f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = 1 \oplus c$ в силу (11.11), однако это противоречит соотношению (11.12). Поэтому ни одна из конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ не равна x_1. Далее, пусть переменная x_1 входит в m_1 конъюнкций из числа $K_1, \ldots, K_m$ и не входит в остальные $m - m_1$ конъюнкций. Тогда из соотношения (11.11) следует, что

$$f'(\tilde{1}^t) = \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{m} \oplus c,$$

$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m_1} \oplus \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{m-m_1} \oplus c = \underbrace{1 \oplus \ldots \oplus 1}_{m-m_1} \oplus c,$$

а отсюда и из соотношения (11.10) — что числа m и $m - m_1$ одной чётности, т. е. число m_1 чётно.

Пусть $i_2, \ldots, i_t$ — попарно различные индексы от 2 до t, причём $i_2 < \ldots < i_k$ и $i_{k+1} < \ldots < i_t$, где $k \in \{2, \ldots, t-1\}$. Докажем тождество

$$x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \equiv (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}) \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \vee x_{i_{k+2}}) \oplus \\ \oplus \ldots \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_{t-1}} \vee x_{i_t}) \oplus x_1 x_2 \ldots x_t \oplus x_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus x_{i_t}. \quad (11.13)$$

Преобразуем его правую часть, используя очевидное тождество $x \vee y \equiv x \oplus y \oplus xy$ для $x, y \in \{0, 1\}$. Имеем:

$$(x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}) \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \vee x_{i_{k+2}}) \oplus \ldots \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_{t-1}} \vee x_{i_t}) \oplus \\ \oplus x_1 x_2 \ldots x_t \oplus x_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus x_{i_t} \equiv (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \oplus x_{i_{k+1}} \oplus x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}}) \oplus \\ \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} \oplus x_{i_{k+2}} \oplus x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} x_{i_{k+1}} x_{i_{k+2}}) \oplus \ldots \oplus \\ \oplus (x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_{t-1}} \oplus x_{i_t} \oplus x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_t}) \oplus x_1 x_2 \ldots x_t \oplus x_{i_{k+1}} \oplus \ldots \oplus x_{i_t}.$$

Нетрудно заметить, что после раскрытия всех скобок в правой части полученного тождества каждое слагаемое, кроме $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k}$, будет присутствовать в ней ровно два раза (с учётом того, что $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \ldots x_{i_t} \equiv x_1 x_2 \ldots x_t$), откуда следует справедливость соотношения (11.13).

Каждую из конъюнкций $K_1, \ldots, K_m$ из представления (11.11), содержащих переменную x_1, кроме $x_1 x_2 \ldots x_t$, перепишем в соответствии с (11.13) (напомним, что ни одна из них не равна x_1). Тогда равенство (11.11) примет вид

$$f'(\tilde{x}^t) = K'_1 \oplus \ldots \oplus K'_{m'} \oplus c, \quad (11.14)$$

где каждое из слагаемых $K'_1, \ldots, K'_{m'}$ является либо конъюнкцией переменных из множества $\{x_2, \ldots, x_t\}$, либо конъюнкцией $x_1 x_2 \ldots x_t$, либо имеет вид $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}$, где $k \in \{2, \ldots, t-1\}$ и $i_2, \ldots, i_k, i_{k+1} \in \{2, \ldots, t\}$, причём $i_2 < \ldots < i_k$ и i_{k+1} — минимальное число из множества $\{2, \ldots, t\} \setminus \{i_2, \ldots, i_k\}$. При этом слагаемое $x_1 x_2 \ldots x_t$ входит в правую часть представления (11.14) по одному разу за каждую конъюнкцию из множества $\{K_1, \ldots, K_m\}$, содержащую переменную x_1 (см. правую часть тождества (11.13)), число которых равно m_1 и, как показано выше, чётно. Следовательно, все слагаемые $x_1 x_2 \ldots x_t$ в правой части (11.14) можно взаимно уничтожить. Также в ней можно избавиться от всех остальных пар одинаковых слагаемых. Поэтому можно считать, что все слагаемые $K'_1, \ldots, K'_{m'}$ попарно различны и каждое из них либо является конъюнкцией переменных из множества $\{x_2, \ldots, x_t\}$, либо имеет вид $x_1 x_{i_2} \ldots x_{i_k} \vee x_{i_{k+1}}$ (в случае $m' = 0$ полагаем $K'_1 \oplus \ldots \oplus K'_{m'} \oplus c = c$).

В силу (11.8), (11.14) имеем

$$(x_1 \vee \ldots \vee x_t) \oplus x_1 \ldots x_t \oplus f(\tilde{x}^t) = K'_1 \oplus \ldots \oplus K'_{m'} \oplus c,$$

откуда

$$f(\tilde{x}^t) = (x_1 \vee \ldots \vee x_t) \oplus x_1 \ldots x_t \oplus K'_1 \oplus \ldots \oplus K'_{m'} \oplus c. \tag{11.15}$$

Реализуем функцию f схемой S в базисе B_6 в соответствии с представлением (11.15) (см. рисунок 11.3). Каждое слагаемое K'_j, $j \in \{1, \ldots, m'\}$, являющееся конъюнкцией каких-то переменных $x_{i_1(j)}, \ldots, x_{i_{k_j}(j)} \in \{x_2, \ldots, x_t\}$, реализуем цепочкой Z_j из $k_j - 1$ конъюнкторов, на входы которой подаются все указанные переменные (в случае $k_j = 1$ в эта цепочка пуста, а её выход совпадает с соответствующим входом схемы). Далее каждое слагаемое K'_j, $j \in \{1, \ldots, m'\}$, вида $x_1 x_{i_2(j)} \ldots x_{i_{k_j}(j)} \vee x_{i_{k_j+1}(j)}$, где $k_j \in \{2, \ldots, t-1\}$ и $i_2(j), \ldots, i_{k_j}(j), i_{k_j+1}(j) \in \in \{2, \ldots, t\}$, причём $i_2(j) < \ldots < i_{k_j}(j)$ и $i_{k_j+1}(j)$ — минимальное число из множества $\{2, \ldots, t\} \setminus \{i_2(j), \ldots, i_{k_j}(j)\}$, реализуем цепочкой Z_j из $k_j - 1$ конъюнкторов и одного дизъюнктора, нижним элементом в которой является дизъюнктор; на свободные входы конъюнкторов подаются переменные $x_1, x_{i_2(j)}, \ldots, x_{i_{k_j}(j)}$, а на свободный вход дизъюнктора — переменная $x_{i_{k_j+1}(j)}$, причём переменная x_1 подаётся на один из входов верхнего конъюнктора цепочки Z_j. Множество всех построенных к данному моменту ФЭ обозначим через M. В случае $m' = 0$ множество M пусто.

Выходы всех элементов из множества M и входы «x_1», …, «x_t» схемы S соединим со входами цепочки $Z_\&$ из конъюнкторов, причём входы «x_1» и «x_2» схемы соединим со входами верхнего конъюнктора этой цепочки. Затем выходы всех элементов из множества M и из цепочки $Z_\&$, а также входы «x_1», …, «x_t» схемы S соединим со входами цепочки $Z_\vee$ из дизъюнкторов, причём вход «x_1» схемы соединим с одним из входов верхнего, а вход «x_2» схемы — с одним из входов нижнего дизъюнктора этой цепочки. Наконец, выходы цепочек $Z_\vee, Z_\&, Z_1, \ldots, Z_{m'}$, а также — в случае $c = 1$ — выход элемента «константа 1» соединим со

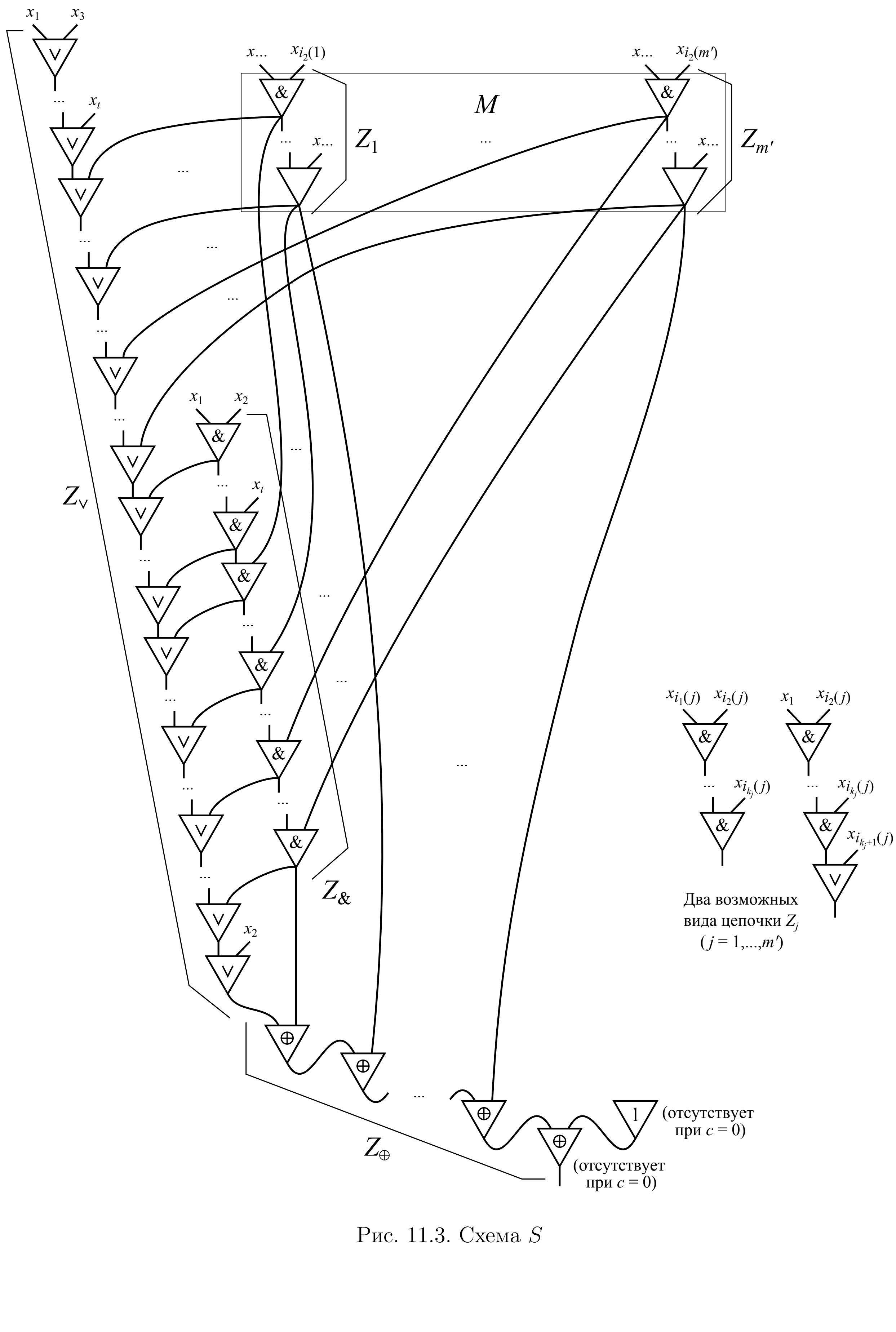

Рис. 11.3. Схема S

входами цепочки $Z_\oplus$ из сумматоров, причём выход цепочки $Z_\vee$ соединим с одним из входов верхнего сумматора. Выходом схемы S будем считать выход цепочки $Z_\oplus$.

Докажем, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^t)$. В силу (11.15) достаточно доказать, что на выходах цепочек $Z_\&$ и $Z_\vee$ реализуются функции $x_1 \dots x_t$ и $x_1 \vee \dots \vee x_t$ соответственно. На любом входном наборе схемы S, хотя бы одна компонента которого равна 0, на соответствующий вход схемы, а значит, и на некоторый вход цепочки $Z_\&$ поступит нуль, поэтому на выходе этой цепочки возникнет значение 0. В то же время на наборе $(\tilde{1}^t)$ на выходах всех элементов из множества M, как нетрудно видеть из их определения, возникнут единицы, поэтому на все входы цепочки $Z_\&$ поступят значения 1 и такое же значение возникнет на её выходе. Тем самым показано, что на выходе указанной цепочки реализуется в точности функция $x_1 \dots x_t$.

Далее, на любом входном наборе схемы S, хотя бы одна компонента которого равна 1, на соответствующий вход схемы, а значит, и на некоторый вход цепочки $Z_\vee$ поступит единица, поэтому на выходе этой цепочки возникнет значение 1. В то же время на наборе $(\tilde{0}^t)$ на выходах всех элементов из множества M и из цепочки $Z_\&$, как нетрудно видеть из их определения, возникнут нули, поэтому на все входы цепочки $Z_\vee$ поступят значения 0 и такое же значение возникнет на её выходе. Тем самым показано, что на выходе указанной цепочки реализуется в точности функция $x_1 \vee \dots \vee x_t$. Следовательно, схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^t)$.

Докажем, что множество $\{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является для данной схемы ППТ. Цепочку, представляющую собой объединение цепочек $Z_\vee$ и $Z_\oplus$, для удобства обозначим через $Z_{\vee,\oplus}$. Рассмотрим три случая.

1. Имеет место либо неисправность хотя бы одного элемента цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, либо неисправность типа 1 хотя бы одного элемента из множества M или из цепочки $Z_\&$. Нетрудно заметить, что для любого такого $j \in \{1, \dots, m'\}$, что цепочка Z_j непуста, на каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$ на всех входах этой цепочки, кроме, быть может, одного из входов её верхнего элемента, возникнут нули. По построению верхний элемент цепочки Z_j является конъюнктором и хотя бы на один из его входов подаётся переменная из множества $\{x_2, \dots, x_t\}$, равная 0 на каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$. Поэтому на выходе данного элемента на этих двух наборах возникнет одно и то же значение (нуль, если он исправен, либо некоторая булева константа, если он неисправен). Тогда по утверждению 11.1 на выходах всех элементов цепочки Z_j на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$ возникнут одинаковые значения.

Получаем, что при рассматриваемой неисправности элементов схемы S значения на выходе каждого элемента из множества M совпадают на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$. Отсюда следует, что на данных двух наборах на все входы цепочки $Z_\&$, кроме того входа её верхнего конъюнктора, который соединён со входом «x_1» схемы, поступят одинаковые значения. При этом на другой вход указанного конъюнктора подаётся переменная x_2, равная 0 на каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$. Поэтому на выходе данного конъюнктора на этих двух наборах возникнет одно и то же значение (нуль, если он исправен, либо некоторая булева константа, если он неисправен). Тогда по утверждению 11.1 на выходах всех элементов цепочки $Z_\&$ на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$ возникнут одинаковые значения.

Из сказанного выше и определения цепочек $Z_\vee$, $Z_\oplus$ следует, что на рассматриваемых двух наборах на все входы цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, кроме того входа её верхнего дизъюнктора, который соединён со входом «x_1» схемы S, поступят одинаковые значения (отметим, что при $c = 1$ указанное свойство справедливо и для того входа цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, который соединён с выходом элемента «константа 1», вне зависимости от исправности или неисправности этого элемента). Рассмотрим два подслучая.

1.1. Неисправен хотя бы один элемент E из цепочки $Z_{\vee,\oplus}$. Пусть Z — нижняя часть этой цепочки, верхним элементом которой является E. Тогда на выходе (неисправного) верхнего элемента цепочки Z на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$, очевидно, возникнет одно и то же значение, поэтому по утверждению 11.1 значения на выходах всех элементов этой цепочки, в том числе выходного, совпадающего с выходным элементом цепочек $Z_{\vee,\oplus}$, $Z_\oplus$ и, следовательно, с выходом схемы S, на данных двух наборах одинаковы. Таким образом, неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$, поскольку $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$ по условию леммы 11.4.

1.2. Все элементы цепочки $Z_{\vee,\oplus}$ исправны, но имеет место неисправность типа 1 хотя бы одного элемента E' из множества M или из цепочки $Z_\&$. По определению цепочки $Z_\vee$ выход элемента E' соединён со входов одного из её дизъюнкторов E. На каждом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$ на указанный вход поступит значение 1, поэтому на выходе дизъюнктора E на этих двух наборах возникнет единица. Пусть Z — нижняя часть цепочки $Z_{\vee,\oplus}$, верхним элементом которой является E. Тогда по утверждению 11.1 значения на выходах всех элементов цепочки Z, в том числе выходного, совпадающего с выходом схемы S, на наборах $(\tilde{0}^t)$ и $(1, \tilde{0}^{t-1})$ одинаковы. Таким образом, неисправность будет обнаружена на одном из этих двух наборов, поскольку $f(\tilde{0}^t) \neq f(1, \tilde{0}^{t-1})$. Случай 1 разобран.

2. Случай 1 не выполнен, но при этом имеет место неисправность типа 0 хотя бы одного

элемента из множества M или из цепочки $Z_\&$. Нетрудно заметить, что для любого такого $j \in \{1, \ldots, m'\}$, что слагаемое K'_j является конъюнкцией каких-то переменных из множества $\{x_2, \ldots, x_t\}$, на каждом из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$ при отсутствии неисправностей в цепочке Z_j на её выходе возникнет значение 1, а при наличии в ней неисправности типа 0 хотя бы одного элемента — значение 0 (отметим, что при указанном условии на j данная цепочка состоит только из конъюнкторов, а неисправности типа 1 элементов в ней невозможны в силу невыполнения случая 1). Для всех остальных $j \in \{1, \ldots, m'\}$ нижним элементом цепочки Z_j по построению является дизъюнктор, на один из входов которого подаётся переменная $x_{i_{k_j+1}(j)} \in \{x_2, \ldots, x_t\}$. На каждом из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$ на указанный вход поступит значение 1, поэтому на выходе цепочки Z_j на этих двух наборах возникнет одно и то же значение (единица, если выходной дизъюнктор данной цепочки исправен, либо нуль, если он неисправен).

На один из входов нижнего дизъюнктора цепочки $Z_\vee$ по построению подаётся переменная x_2, равная 1 на каждом из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$. Поэтому на выходе данной цепочки на обоих этих наборах возникнет значение 1. Наконец, в силу предположения случая 2 и определения цепочки $Z_\&$ либо один из её входов соединён с выходом неисправного и выдающего 0 элемента из множества M, либо имеет место неисправность типа 0 хотя бы одного элемента самой этой цепочки (либо и то, и другое), при этом в ней не может быть неисправности типа 1 ни одного элемента. Отсюда получаем, что на выходе цепочки $Z_\&$ реализуется тождественный нуль.

Из сказанного выше и определения цепочки $Z_\oplus$ следует, что на наборах $(0, \tilde{1}^{t-1})$ и $(\tilde{1}^t)$ на все входы цепочки $Z_\oplus$ поступят одинаковые значения. Тогда и значения на выходе схемы S на этих двух наборах совпадают, поскольку все элементы цепочки $Z_\oplus$ исправны в силу невыполнения случая 1. Таким образом, неисправность будет обнаружена на одном из наборов $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$ с учётом того, что $f(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f(\tilde{1}^t)$ по условию леммы 11.4. Случай 2 разобран.

3. Случаи 1 и 2 не выполнены, но при этом $c = 1$ и имеет место неисправность типа 0 элемента «константа 1». Тогда все остальные элементы в схеме S исправны и указанную неисправность можно обнаружить на любом из наборов $(\tilde{0}^t)$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$, $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(\tilde{1}^t)$. Случай 3 разобран.

Получаем, что любую неисправность схемы S можно обнаружить хотя бы на одном из этих четырёх наборов. Поэтому множество $\{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является для данной схемы ППТ. Лемма 11.4 доказана. $\square$

Теорема 11.5 [162]. *Для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B_6;\,01}_{\text{ПП (О)}}(f) \leqslant 4$.*

Доказательство. Пусть $n \geqslant 3$ и F_n — множество таких б. ф. от n переменных, каждая из которых принимает значение 1 ровно на 0, 1, 3 или 4 наборах из множества $A_i = \{(\tilde{0}^n), (\tilde{0}^{i-1}, 1, \tilde{0}^{n-i}), (\tilde{1}^{i-1}, 0, \tilde{1}^{n-i}), (\tilde{1}^n)\}$ для каждого $i = 1, \ldots, n$. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф., не принадлежащая множеству F_n. Докажем неравенство $D(f) \leqslant 4$. Существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что функция f принимает значение 1 ровно на двух наборах из множества A_i. Без ограничения общности $i = 1$, т. е. функция f принимает значение 1 ровно на двух наборах из множества $A_1 = \{(\tilde{0}^n), (1, \tilde{0}^{n-1}), (0, \tilde{1}^{n-1}), (\tilde{1}^n)\}$. Отсюда, в частности, следует соотношение

$$f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) \oplus f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n) = 0,$$

а из него — соотношение

$$f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n).$$

Возможны два случая.

1. Пусть $f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n) = 1$. Тогда $f(\tilde{0}^n) \neq f(1, \tilde{0}^{n-1})$ и $f(0, \tilde{1}^{n-1}) \neq f(\tilde{1}^n)$, а в таком случае неравенство $D(f) \leqslant 4$ следует из леммы 11.4 при $t = n$.

2. Пусть $f(\tilde{0}^n) \oplus f(1, \tilde{0}^{n-1}) = f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus f(\tilde{1}^n) = 0$. Тогда $f(\tilde{0}^n) = f(1, \tilde{0}^{n-1})$ и $f(0, \tilde{1}^{n-1}) = f(\tilde{1}^n)$. Рассмотрим функцию $f'(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1$. Имеем:

$$\begin{aligned}
f'(\tilde{0}^n) &= f(\tilde{0}^n) \oplus 0 = f(\tilde{0}^n) = f(1, \tilde{0}^{n-1}) \neq f(1, \tilde{0}^{n-1}) \oplus 1 = f'(1, \tilde{0}^{n-1}),\\
f'(0, \tilde{1}^{n-1}) &= f(0, \tilde{1}^{n-1}) \oplus 0 = f(0, \tilde{1}^{n-1}) = f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{1}^n) \oplus 1 = f'(\tilde{1}^n),
\end{aligned}$$

т. е. $f'(\tilde{0}^n) \neq f'(1, \tilde{0}^{n-1})$ и $f'(0, \tilde{1}^{n-1}) \neq f'(\tilde{1}^n)$. В таком случае в силу леммы 11.4 при $t = n$ функцию $f'(\tilde{x}^n)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B_6, для которой множество A_1 является ППТ. Выход схемы S' соединим с одним из входов (двухвходового) сумматора E, на другой вход которого подадим переменную x_1. Выход элемента E будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S. При отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе, очевидно, реализуется функция $f'(\tilde{x}^n) \oplus x_1 = f(\tilde{x}^n)$.

Если элемент E неисправен, то на выходе схемы S реализуется некоторая булева константа, которую можно отличить от функции f на наборах из множества A_1, поскольку данная функция на двух наборах из этого множества принимает значение 1, а на двух — значение 0. Если же элемент E исправен, а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен, то получающуюся ф. н. g подсхемы S' при $g \neq f'$ можно отличить от функции f' на каком-то наборе $\tilde{\sigma} \in A_1$, так как A_1 — ППТ для S'. Поэтому $g(\tilde{\sigma}) \neq f'(\tilde{\sigma})$. На выходе схемы S возникнет ф. н. $g \oplus x_1$, которую можно отличить от функции $f = f' \oplus x_1$ на наборе $\tilde{\sigma}$ в силу предыдущего соотношения. Тем самым доказано, что множество A_1 является ППТ для схемы S, откуда следует, что $D(f) \leqslant 4$. Случай 2 разобран. Неравенство $D(f) \leqslant 4$ полностью доказано.

Найдём мощность множества F_n. Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}$ обозначим через $F_n^{\alpha_1\alpha_2}$ подмножество множества F_n, состоящее из всех б. ф., принимающих на наборах $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$ значения α_1 и α_2 соответственно. В силу определения множества F_n для любого $i \in \{1, \ldots, n\}$ на паре наборов $((\tilde{0}^{i-1}, 1, \tilde{0}^{n-i}), (\tilde{1}^{i-1}, 0, \tilde{1}^{n-i}))$ любая функция из множества F_n^{00} должна принимать одну из пар значений $(0, 0)$, $(0, 1)$ или $(1, 0)$, любая функция из каждого из множеств F_n^{01}, F_n^{10} — одну из пар значений $(0, 0)$ или $(1, 1)$, а любая функция из множества F_n^{11} — одну из пар значений $(0, 1)$, $(1, 0)$ или $(1, 1)$. При этом на $2^n - 2n - 2$ двоичных наборах длины n, не принадлежащих множеству $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, любая функция из каждого из множеств F_n^{00}, F_n^{01}, F_n^{10}, F_n^{11} может принимать произвольные значения. Отсюда следуют соотношения

$$|F_n^{00}| = |F_n^{11}| = 3^n \cdot 2^{2^n - 2n - 2},$$

$$|F_n^{01}| = |F_n^{10}| = 2^n \cdot 2^{2^n - 2n - 2},$$

$$|F_n| = |F_n^{00}| + |F_n^{01}| + |F_n^{10}| + |F_n^{11}| = (2 \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n) \cdot 2^{2^n - 2n - 2} = (3^n + 2^n) \cdot 2^{2^n - 2n - 1},$$

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} = \frac{3^n + 2^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

т. е. отношение числа б. ф. из множества F_n к общему числу б. ф. от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. Выше было показано, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не принадлежащей множеству F_n, выполнено неравенство $D(f) \leqslant 4$, откуда следует справедливость теоремы 11.5. $\square$

Из теоремы 11.5 и утверждения 8.9 можно получить неравенство $D_{\text{ПП (О)}}^{B_6^*;\,01}(f) \leqslant 4$ для почти всех б. ф. f от n переменных, где $B_6^* = \{\&, \vee, \sim, 0\}$.

Рассмотрим базисы $B_6' = \{\&, \vee, \oplus, \to\}$, $B_6'' = \{x \& y, x \vee y, x \& \overline{y}, x \vee \overline{y}, \overline{x} \& \overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, x \oplus y, x \sim y, 1\}$.

Лемма 11.5 [162]. *Пусть б. ф. $f(\tilde{x}^t)$ можно реализовать СФЭ S в базисе B_6'', допускающей ППТ T. Тогда эту же функцию можно реализовать СФЭ в базисе B_6', допускающей ППТ T.*

Доказательство. Рассмотрим четыре случая.

1. В схеме S нет выходного элемента. Тогда её выход совпадает с одним из её входов, $f \in \{x_1, \ldots, x_t\}$ и функцию f можно реализовать схемой, не содержащей ФЭ; у такой схемы

нет ни одной ф. н., поэтому любое множество n-наборов, в том числе и T, является для неё ППТ.

2. В схеме S нет ни одного φ-элемента для каждой функции $\varphi(x, y) \in \{x\&\overline{y}, \overline{x}\&\overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, x \sim y\}$, а также ни одного элемента «константа 1». Тогда эта схема является схемой и в базисе B_6' (с учётом того, что $x \vee \overline{y} = y \to x$), откуда следует утверждение леммы.

3. Выходным элементом схемы S является элемент «константа 1». Тогда $f \equiv 1$ и неисправность типа 0 этого элемента должна обнаруживаться на каком-то наборе из множества T, поэтому $|T| \geqslant 1$. Рассмотрим схему в базисе B_6', состоящую из одного $(x \to y)$-элемента, на оба входа которого подаётся переменная x_1. Очевидно, что эта схема реализует функцию f и имеет две ф. н. — константы 1 и 0. Из них от функции $f \equiv 1$ отличается, причём на любом наборе из множества T, только константа 0, поэтому T является ППТ для рассматриваемой схемы.

4. Отрицание объединения случаев 1–3: в схеме S есть выходной элемент, не являющийся элементом «константа 1», и есть хотя бы один φ-элемент, где $\varphi(x, y) \in \{x\&\overline{y}, \overline{x}\&\overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, x \sim y\}$, либо хотя бы один элемент «константа 1». Для каждой функции φ из указанного множества заменим каждый φ-элемент схемы S на блок S_φ, состоящий из трёх ФЭ: $\overline{\varphi}$-элемента, $(x \to y)$-элемента E_1 (одного и того же для каждого блока S_φ), на оба входа которого подаётся переменная x_1, и сумматора, входы которого соединяются с выходами данных двух элементов; входами этого блока являются входы указанного $\overline{\varphi}$-элемента, а выходом — выход указанного сумматора. На выходе элемента E_1 реализуется функция $x_1 \to x_1 \equiv 1$, а на выходе блока S_φ — функция $\overline{\varphi} \oplus 1 = \varphi$ от его входов. Далее отождествим в схеме S все элементы «константа 1» и заменим их одним элементом E_1. Полученную схему обозначим через S'.

Заметим, что $\overline{\varphi}(x, y) \in \{\overline{x\&\overline{y}}, \overline{\overline{x}\&\overline{y}}, \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}, \overline{x \sim y}\} = \{x \to y, x \vee y, x\&y, x \oplus y\}$, поэтому S' является схемой в базисе B_6'. Каждый блок S_φ реализует ту же функцию, что и φ-элемент, а элемент E_1 — константу 1, поэтому схема S' реализует ту же функцию, что и схема S, т. е. функцию $f(\tilde{x}^t)$. Выход элемента E_1, а также выход выходного элемента схемы S' соединим со входами конъюнктора $E_\&$; выход этого конъюнктора будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S''. Очевидно, что она также является схемой в базисе B_6' и при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^t)$.

Докажем, что любая нетривиальная ф. н. схемы S'' является ф. н. схемы S. При произвольной неисправности элемента $E_\&$ и/или при неисправности типа 0 элемента E_1 схема S'' станет реализовывать некоторую булеву константу, но такая же константа возникнет на выходе схемы S при соответствующей неисправности её выходного элемента (здесь используется то, что не выполнен ни один из случаев 1, 3). Пусть теперь элемент $E_{\&}$ исправен, элемент E_1 реализует константу 1 (это может быть как при его исправности, так и при его неисправности типа 1), а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен и g' — получающаяся при этом ф. н. схемы S''. Легко видеть, что при произвольной неисправности $\overline{\varphi}$-элемента и/или сумматора в произвольном блоке S_φ схемы S'' на выходе этого блока реализуется некоторая булева константа. Тогда при соответствующих неисправностях φ-элементов схемы S, отсутствии неисправностей среди элементов «константа 1» и таких же неисправностях остальных элементов схемы S, как и в схеме S'', на выходе схемы S возникнет ф. н. g, удовлетворяющая тождеству $g\&1 \equiv g'$, т. е. совпадающая с функцией g'.

Тем самым показано, что любая нетривиальная ф. н. схемы S'' является ф. н. схемы S. Поэтому ППТ T для схемы S является ППТ и для схемы S'' в базисе B_6'. Лемма 11.5 доказана. □

Лемма 11.6 [162]. *Пусть для б. ф. $f(\tilde{x}^t)$, $t \geqslant 3$, существуют такие булевы константы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t$, что $f(\tilde{\sigma}_1) \neq f(\tilde{\sigma}_2)$ и $f(\tilde{\sigma}_3) \neq f(\tilde{\sigma}_4)$, где $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t)$, $\tilde{\sigma}_2 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t)$, $\tilde{\sigma}_3 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_t)$ и $\tilde{\sigma}_4 = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_t)$. Тогда функцию $f(\tilde{x}^t)$ можно реализовать СФЭ в базисе B_6', допускающей ППТ $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{\sigma}_4\}$.*

Доказательство. В силу леммы 11.5 достаточно доказать такое же утверждение для базиса B_6''. Рассмотрим функцию $f'(\tilde{x}^t) = f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t})$. Имеем:

$$f'(\tilde{0}^t) = f(0^{\sigma_1}, \ldots, 0^{\sigma_t}) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_t) = f(\tilde{\sigma}_4),$$
$$f'(1, \tilde{0}^{t-1}) = f(1^{\sigma_1}, 0^{\sigma_2}, \ldots, 0^{\sigma_t}) = f(\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_t) = f(\tilde{\sigma}_3),$$
$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = f(0^{\sigma_1}, 1^{\sigma_2}, \ldots, 1^{\sigma_t}) = f(\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_t) = f(\tilde{\sigma}_2),$$
$$f'(\tilde{1}^t) = f(1^{\sigma_1}, \ldots, 1^{\sigma_t}) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_t) = f(\tilde{\sigma}_1),$$

откуда

$$f'(\tilde{0}^t) = f(\tilde{\sigma}_4) \neq f(\tilde{\sigma}_3) = f'(1, \tilde{0}^{t-1}),$$
$$f'(0, \tilde{1}^{t-1}) = f(\tilde{\sigma}_2) \neq f(\tilde{\sigma}_1) = f'(\tilde{1}^t),$$

т. е. $f'(\tilde{0}^t) \neq f'(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $f'(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f'(\tilde{1}^t)$. Тогда в силу леммы 11.4 функцию $f'(\tilde{x}^t)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B_6, для которой множество $T' = \{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является ППТ.

Предположим, что в схеме S' не содержится выходного элемента. Тогда выход этой схемы совпадает с одним из её входов, $f' \in \{x_1, \ldots, x_t\}$ и

$$f(\tilde{x}^t) = f'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}) \in \{x_1, \ldots, x_t, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_t\}.$$

Если $f \in \{x_1, \ldots, x_t\}$, то функцию f можно реализовать схемой, не содержащей ФЭ; у этой схемы нет ни одной ф. н., поэтому множество $T = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{\sigma}_4\}$ является для неё ППТ. Если же $f = \overline{x}_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$, то функцию f можно реализовать схемой S, состоящей из элемента «константа 1» и сумматора, входы которого соединяются с выходом этого элемента и входом «x_i» схемы; у такой схемы, очевидно, есть три ф. н. — 0, 1 и x_i. Функцию $x_i = \overline{f}$ можно отличить от функции f на любом наборе из множества T, а функции 0 и 1 от функции f — на наборах $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \in T$ в силу соотношения $f(\tilde{\sigma}_1) \neq f(\tilde{\sigma}_2)$, поэтому T — ППТ для схемы S.

Далее будем считать, что в схеме S' содержится выходной элемент. Пусть X_0 — подмножество множества $\{x_1, \ldots, x_t\}$ входных переменных этой схемы, состоящее из всех таких переменных x_i, что $\sigma_i = 0$. Для каждой функции $\varphi(x, y) \in \{x \& y, x \vee y, x \oplus y\}$ заменим каждый φ-элемент схемы S', хотя бы на один вход которого подаётся переменная из множества X_0, на свой φ'-элемент, где $\varphi'(x, y) = \varphi(x^{\alpha_1}, y^{\alpha_2})$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0, 1\}$, причём $\alpha_1 = 0$ ($\alpha_2 = 0$) в том и только том случае, когда на вход «x» (соответственно «y») рассматриваемого φ-элемента подаётся переменная из множества X_0. Полученную схему обозначим через S; легко видеть, что она является схемой в базисе B_6'' — например,

$$x^{\alpha_1} \oplus y^{\alpha_2} = x \oplus \alpha \oplus 1 \oplus y \oplus \alpha_2 \oplus 1 \in \{x \oplus y, x \oplus y \oplus 1\} = \{x \oplus y, x \sim y\} \subset B_6''.$$

Также нетрудно заметить, что на выходе каждого элемента схемы S при отсутствии в ней неисправностей реализуется та же функция, что и на выходе соответствующего элемента схемы S' при подаче на входы схемы S', отвечающие переменным из множества X_0, отрицаний этих переменных — другими словами, при подаче на входы схемы S' вместо переменных $x_1, \ldots, x_t$ функций $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}$ соответственно. Отсюда следуют три утверждения:

1) на выходе схемы S реализуется функция $f'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}) = f(\tilde{x}^t)$;

2) при неисправностях некоторых элементов схемы S и таких же неисправностях соответствующих элементов схемы S' на выходе каждого (исправного или неисправного) элемента схемы S реализуется та же функция, что и на выходе соответствующего элемента схемы S' при подаче на входы схемы S' вместо переменных $x_1, \ldots, x_t$ функций $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}$ соответственно;

3) при возможном наличии неисправностей элементов в схеме S и таких же неисправностей соответствующих элементов в схеме S' при подаче на входы схемы S наборов $\tilde{\sigma}_1$, $\tilde{\sigma}_2$, $\tilde{\sigma}_3$ и $\tilde{\sigma}_4$ значения на выходе каждого (исправного или неисправного) элемента схемы S будут совпадать со значениями на выходе соответствующего элемента схемы S' на наборах $(\tilde{1}^t)$, $(0, \tilde{1}^{t-1})$, $(1, \tilde{0}^{t-1})$ и $(\tilde{0}^t)$ соответственно.

(В качестве пояснения к утверждению 3) можно написать, например, равенство $(\overline{\sigma}_1^{\sigma_1}, \sigma_2^{\sigma_2}, \ldots, \sigma_t^{\sigma_t}) = (0, \tilde{1}^{t-1})$.)

В свою очередь, из утверждения 2) вытекает, что если на выходе выходного элемента схемы S, т. е. на выходе всей этой схемы, при неисправностях некоторых её элементов возникает ф. н. $g(\tilde{x}^t)$, то при таких же неисправностях соответствующих элементов схемы S' на её выходе возникнет ф. н. $g'(\tilde{x}^t)$, удовлетворяющая условию $g'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}) = g(\tilde{x}^t)$. Докажем, что функцию g можно отличить от функции f на наборах из множества $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{\sigma}_4\}$, если $g \neq f$. Из последнего соотношения следует, что $g'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t}) \not\equiv f'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_t^{\sigma_t})$, значит, $g' \neq f'$. Множество $T' = \{(\tilde{0}^t), (1, \tilde{0}^{t-1}), (0, \tilde{1}^{t-1}), (\tilde{1}^t)\}$ является ППТ для схемы S', поэтому ф. н. g' этой схемы можно отличить от функции f' на наборах из T', т. е. выполнено хотя бы одно из неравенств

$$g'(\tilde{1}^t) \neq f'(\tilde{1}^t),$$
$$g'(0, \tilde{1}^{t-1}) \neq f'(0, \tilde{1}^{t-1}),$$
$$g'(1, \tilde{0}^{t-1}) \neq f'(1, \tilde{0}^{t-1}),$$
$$g'(\tilde{0}^t) \neq f'(\tilde{0}^t).$$

Из утверждения 3) вытекают равенства

$$g(\tilde{\sigma}_1) = g'(\tilde{1}^t),$$
$$g(\tilde{\sigma}_2) = g'(0, \tilde{1}^{t-1}),$$
$$g(\tilde{\sigma}_3) = g'(1, \tilde{0}^{t-1}),$$
$$g(\tilde{\sigma}_4) = g'(\tilde{0}^t),$$

а при отсутствии неисправностей в схемах S и S' — равенства

$$f(\tilde{\sigma}_1) = f'(\tilde{1}^t),$$
$$f(\tilde{\sigma}_2) = f'(0, \tilde{1}^{t-1}),$$
$$f(\tilde{\sigma}_3) = f'(1, \tilde{0}^{t-1}),$$
$$f(\tilde{\sigma}_4) = f'(\tilde{0}^t).$$

Сравнивая последние двенадцать соотношений между собой, заключаем, что выполнено хотя бы одно из неравенств $g(\tilde{\sigma}_1) \neq f(\tilde{\sigma}_1)$, $g(\tilde{\sigma}_2) \neq f(\tilde{\sigma}_2)$, $g(\tilde{\sigma}_3) \neq f(\tilde{\sigma}_3)$, $g(\tilde{\sigma}_4) \neq f(\tilde{\sigma}_4)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, множество $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3, \tilde{\sigma}_4\}$ является ППТ для схемы S в базисе B_6'', реализующей функцию $f(\tilde{x}^t)$. Лемма 11.6 доказана. $\square$

Далее вплоть до конца §11 будем рассматривать СФЭ, содержащие не более одной фиктивной входной переменной и реализующие заданные булевы функции (соответствующее определение см. на с. 22). Например, схема S, изображенная на рисунке 11.4, содержит одну фиктивную входную переменную x_0 и реализует функцию x_1x_2.

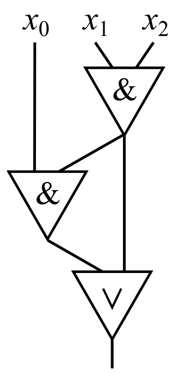

Рис. 11.4. Схема S

Ясно, что для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ и любого ф. п. базиса B выполнено соотношение

$$D_{\text{ПП (О)}}^{B;\,01\,(+1)}(f) \leqslant D_{\text{ПП (О)}}^{B;\,01\,(+0)}(f) = D_{\text{ПП (О)}}^{B;\,01}(f). \tag{11.16}$$

Теорема 11.6 [162]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D_{\text{ПП (О)}}^{B_6;\,01\,(+1)}(n) \leqslant 5$.*

Доказательство. Достаточно доказать неравенство $D(f) \leqslant 5$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. В силу (11.16) можно ограничиться рассмотрением случая $D_{\text{ПП (О)}}^{B_6;\,01}(f) \geqslant 6$ (отметим, что по теореме 11.5 доля таких функций f от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$). Тогда $n \geqslant 3$, поскольку в противном случае любая СФЭ без фиктивных входных переменных, реализующая любую б. ф. от $n \leqslant 2$ переменных, допускает тривиальный ППТ, состоящий из всех $2^n \leqslant 4$ двоичных наборов длины n. Пусть $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — б. ф., не зависящая существенно от переменной x_0 и равная функции $f(\tilde{x}^n)$; $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0$. Имеем:

$$f'(\tilde{0}^{n+1}) = f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1}) \oplus 0 = f^{(+1)}(1, \tilde{0}^n) \neq f^{(+1)}(1, \tilde{0}^n) \oplus 1 = f'(1, \tilde{0}^n),$$
$$f'(0, \tilde{1}^n) = f^{(+1)}(0, \tilde{1}^n) \oplus 0 = f^{(+1)}(\tilde{1}^{n+1}) \neq f^{(+1)}(\tilde{1}^{n+1}) \oplus 1 = f'(\tilde{1}^{n+1}),$$

т. е. $f'(\tilde{0}^{n+1}) \neq f'(1, \tilde{0}^n)$ и $f'(0, \tilde{1}^n) \neq f'(\tilde{1}^{n+1})$. В таком случае в силу леммы 11.4 при $t = n+1$ функцию $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B_6, для которой множество $T = \{(\tilde{0}^{n+1}), (1, \tilde{0}^n), (0, \tilde{1}^n), (\tilde{1}^{n+1})\}$ является ППТ. Выход схемы S' соединим с одним из входов сумматора E, на другой вход которого подадим переменную x_0. Выход элемента E будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S. При отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе, очевидно, реализуется функция $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0 = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Если элемент E исправен, а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен, то получающуюся ф. н. g подсхемы S' при $g \neq f'$ можно отличить от функции f' на каком-то наборе $\tilde{\sigma} \in T$, так как T — ППТ для S'. Поэтому $g(\tilde{\sigma}) \neq f'(\tilde{\sigma})$. На выходе схемы S возникнет ф. н. $g \oplus x_0$, которую можно отличить от функции $f^{(+1)} = f' \oplus x_0$ на наборе $\tilde{\sigma}$ в силу предыдущего соотношения. Если же элемент E неисправен, то на выходе схемы S реализуется некоторая булева константа. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{1}^n)$. Тогда

$$f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1}) = f(\tilde{0}^n) \neq f(\tilde{1}^n) = f^{(+1)}(\tilde{1}^{n+1}),$$

т. е. значения функции $f^{(+1)}$ на наборах $(\tilde{0}^{n+1})$ и $(\tilde{1}^{n+1})$ различаются, поэтому её можно отличить от любой из булевых констант на одном из наборов $(\tilde{0}^{n+1}), (\tilde{1}^{n+1}) \in T$. Тем самым доказано, что множество T является ППТ длины 4 для схемы S.

2. Пусть $f(\tilde{0}^n) = f(\tilde{1}^n)$. Функцию $f^{(+1)}$ можно отличить от константы $\overline{f^{(+1)}}(\tilde{0}^{n+1})$ на наборе $(\tilde{0}^{n+1}) \in T$, а от константы $f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1})$ в случае $f^{(+1)} \not\equiv f^{(+1)}(\tilde{0}^{n+1})$ — на любом наборе $\tilde{\pi}$ длины $n+1$, на котором функция $f^{(+1)}$ принимает значение $\overline{f^{(+1)}}(\tilde{0}^{n+1})$. Тем самым доказано, что множество $T \cup \{\tilde{\pi}\}$ является ППТ длины 5 для схемы S.

В каждом из случаев 1, 2 установлено, что схема S в базисе B_6, реализующая функцию $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, допускает ППТ длины не более 5, а отсюда и из определений этой функции и величины $D(f)$ следует неравенство $D(f) \leqslant 5$. Теорема 11.6 доказана. □

Теорема 11.7 [162]. *Для любого* $n \geqslant 0$ *справедливо неравенство* $D^{B_6';\,01\,(+1)}_{\text{ПП (О)}}(n) \leqslant 4$.

Доказательство. Достаточно доказать неравенство $D(f) \leqslant 4$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. В случае $n \leqslant 2$ любая СФЭ без фиктивных входных переменных, реализующая функцию $f(\tilde{x}^n)$, допускает тривиальный ППТ, состоящий из всех $2^n \leqslant 4$ двоичных наборов длины n, откуда следует требуемое неравенство. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$. Рассмотрим два случая.

1. Существуют такие булевы константы $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, что $f(\tilde{\sigma}_1) \neq f(\tilde{\sigma}_2)$ и $f(\tilde{\sigma}_3) \neq f(\tilde{\sigma}_4)$, где $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\tilde{\sigma}_2 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\tilde{\sigma}_3 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ и $\tilde{\sigma}_4 = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$. Тогда $D(f) \leqslant 4$ в силу леммы 11.6 при $t = n$ и соотношения (11.16), что и требовалось доказать.

2. Отрицание случая 1: для любых булевых констант $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ выполнено хотя бы одно из равенств $f(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_2)$, $f(\tilde{\sigma}_3) = f(\tilde{\sigma}_4)$, где $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, $\tilde{\sigma}_2 = (\overline{\sigma}_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$,

$\tilde{\sigma}_3 = (\sigma_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$ и $\tilde{\sigma}_4 = (\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$. Если $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$), то функцию f можно реализовать схемой, состоящей из одного элемента «константа 1» (соответственно состоящей из одного сумматора, на оба входа которого подаётся переменная x_1). Очевидно, что единственной отличной от f ф. н. такой схемы является константа 0 (соответственно 1), которую можно отличить от функции f на любом наборе, поэтому $D(f) \leqslant 1$.

Пусть теперь $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv 1$. Докажем, что функция f принимает различные значения на каких-то двух противоположных n-наборах. Существуют такие два n-набора $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$, различающиеся ровно в одной компоненте, что $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2)$. Без ограничения общности они различаются в первой компоненте. Пусть $\tilde{\pi}_1 = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$, тогда $\tilde{\pi}_2 = (\overline{\pi}_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$. В силу предположения случая 2 имеем $f(\tilde{\pi}_3) = f(\tilde{\pi}_4)$, где $\tilde{\pi}_3 = (\pi_1, \overline{\pi}_2, \ldots, \overline{\pi}_n)$, $\tilde{\pi}_4 = (\overline{\pi}_1, \overline{\pi}_2, \ldots, \overline{\pi}_n)$. Тогда либо $f(\tilde{\pi}_3) = f(\tilde{\pi}_4) \neq f(\tilde{\pi}_1)$, либо $f(\tilde{\pi}_3) = f(\tilde{\pi}_4) \neq f(\tilde{\pi}_2)$, откуда либо $f(\tilde{\pi}_4) \neq f(\tilde{\pi}_1)$, либо $f(\tilde{\pi}_3) \neq f(\tilde{\pi}_2)$. Заметим, что $\tilde{\pi}_4$ и $\tilde{\pi}_1$, а также $\tilde{\pi}_3$ и $\tilde{\pi}_2$ — противоположные наборы, поэтому существуют противоположные n-наборы $\tilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ и $\tilde{\tau}' = (\overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$, удовлетворяющие неравенству

$$f(\tilde{\tau}) \neq f(\tilde{\tau}'), \tag{11.17}$$

что и требовалось доказать.

Положим $\tilde{\tau}_0 = (0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tilde{\tau}_1 = (1, \tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\tilde{\tau}'_0 = (0, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$ и $\tilde{\tau}'_1 = (1, \overline{\tau}_1, \ldots, \overline{\tau}_n)$. Пусть $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — б. ф., не зависящая существенно от переменной x_0 и равная функции $f(\tilde{x}^n)$; $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0$. Имеем:

$$f'(\tilde{\tau}_0) = f^{(+1)}(\tilde{\tau}_0) \oplus 0 = f^{(+1)}(\tilde{\tau}_1) \neq f^{(+1)}(\tilde{\tau}_1) \oplus 1 = f'(\tilde{\tau}_1),$$
$$f'(\tilde{\tau}'_0) = f^{(+1)}(\tilde{\tau}'_0) \oplus 0 = f^{(+1)}(\tilde{\tau}'_1) \neq f^{(+1)}(\tilde{\tau}'_1) \oplus 1 = f'(\tilde{\tau}'_1),$$

т. е. $f'(\tilde{\tau}_0) \neq f'(\tilde{\tau}_1)$ и $f'(\tilde{\tau}'_0) \neq f'(\tilde{\tau}'_1)$. В таком случае в силу леммы 11.6 при $t = n + 1$ функцию $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ можно реализовать СФЭ S' в базисе B'_6, для которой множество $T = \{\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}'_0, \tilde{\tau}'_1\}$ является ППТ. Выход схемы S' соединим с одним из входов сумматора E, на другой вход которого подадим переменную x_0. Выход элемента E будем считать выходом полученной схемы, которую обозначим через S. При отсутствии неисправностей в схеме S на её выходе, очевидно, реализуется функция $f'(x_0, x_1, \ldots, x_n) \oplus x_0 = f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Если элемент E неисправен, то на выходе схемы S реализуется некоторая булева константа, которую можно отличить от функции $f^{(+1)}$ на наборах $\tilde{\tau}_0, \tilde{\tau}'_0 \in T$, поскольку

$$f^{(+1)}(\tilde{\tau}_0) = f(\tilde{\tau}) \neq f(\tilde{\tau}') = f^{(+1)}(\tilde{\tau}'_0)$$

в силу (11.17). Если же элемент E исправен, а хотя бы один элемент в подсхеме S' неисправен, то получающуюся ф. н. g подсхемы S' при $g \neq f'$ можно отличить от функции f' на каком-то наборе $\tilde{\sigma} \in T$, так как T — ППТ для S'. Поэтому $g(\tilde{\sigma}) \neq f'(\tilde{\sigma})$. На выходе схемы S возникнет ф. н. $g \oplus x_0$, которую можно отличить от функции $f^{(+1)} = f' \oplus x_0$ на наборе $\tilde{\sigma}$ в силу предыдущего соотношения. Тем самым доказано, что множество T является ППТ длины 4 для схемы S в базисе B_6', реализующей функцию $f^{(+1)}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Отсюда и из определений этой функции и величины $D(f)$ следует неравенство $D(f) \leqslant 4$. Теорема 11.7 доказана. □

§12. Диагностические тесты при произвольных константных неисправностях на выходах элементов

В данном параграфе рассматриваются единичные и полные диагностические тесты для СФЭ относительно ПКН на выходах элементов. Для любого ф. п. конечного базиса B при $n > m(B)$ доказано, что $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 3$ и для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(f) \geqslant 3$ (следствие 12.1). Д. С. Романов и Е. Ю. Романова привели пример базиса $\mathtt{B}_5$, состоящего из пяти б. ф. от не более чем девяти переменных, для которого $D^{\mathtt{B}_5;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) \leqslant 6$ при $n \geqslant 1$ [227, теорема 3]. В данной диссертации для более простого базиса B_7, состоящего из одной б. ф. от шести переменных, найдено точное значение величины $D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (теорема 12.3) и получено равенство $D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) = 3$ при $n \geqslant 2$ (следствие 12.3). Установлено также, что $D^{B_3;\,01}_{\text{ПД (О)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$ при $n \geqslant 1$, где $B_3 = \{\&, \neg\}$ (теорема 12.4).

Лемма 12.1. *Пусть B — произвольный ф. п. базис; $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф., отличная от констант и переменных; S — произвольная неизбыточная СФЭ в базисе B, реализующая функцию f и такая, что на выходе хотя бы одного её элемента E в этой схеме реализуется б. ф. $\psi(\tilde{x}^n)$, не принадлежащая множеству $\{0, 1, f, \overline{f}\}$. Тогда $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(S) \geqslant 3$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $|T| \geqslant 3$, где T — произвольный ЕДТ для схемы S. Очевидно, что в данной схеме содержится выходной элемент; при неисправности типа α, $\alpha \in \{0, 1\}$, этого элемента ф. н. схемы S тождественно равна α. Пусть при неисправности типа δ, $\delta \in \{0, 1\}$, элемента E ф. н. схемы S равна g_δ. Докажем, что $g_0 \neq g_1$. Пусть $\tilde{\tau}$ — произвольный n-набор, на котором $g_0(\tilde{\tau}) \neq f(\tilde{\tau})$ (такой набор существует, так как схема S неизбыточна). Тогда $\psi(\tilde{\tau}) = 1$, так как при выполнении равенства $\psi(\tilde{\tau}) = 0$ неисправность типа 0 элемента E нельзя было бы обнаружить на наборе $\tilde{\tau}$. Но в таком случае неисправность типа 1 элемента E нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\tau}$, поэтому $g_1(\tilde{\tau}) = f(\tilde{\tau}) \neq g_0(\tilde{\tau})$, т. е. $g_0 \neq g_1$, что и требовалось доказать.

Если ни одна из функций g_0, g_1 не равна булевой константе, то все функции $f, 0, 1, g_0, g_1$ попарно различны, следовательно, $|T| \geqslant 3$ (на двух наборах какие-то две из пяти указанных функций обязательно примут одинаковую пару значений, так как всего таких пар четыре — $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ и $(1,1)$).

Пусть теперь какая-то функция g_δ, $\delta \in \{0,1\}$, равна булевой константе α. Так как функции $f, 0, 1$ попарно различны, то в тесте T должен содержаться набор $\tilde{\pi}_1$, на котором $f(\tilde{\pi}_1) = \alpha$, и набор $\tilde{\pi}_2$, на котором $f(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha}$. Заметим, что

$$\psi(\tilde{\pi}_2) = \overline{\delta}, \tag{12.1}$$

так как при выполнении равенства $\psi(\tilde{\pi}_2) = \delta$ неисправность типа δ элемента E нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\pi}_2$ и

$$\alpha = g_\delta(\tilde{\pi}_2) = f(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha},$$

что невозможно. Если $\psi(\tilde{\pi}_1) = \overline{\delta}$, то неисправность типа $\overline{\delta}$ элемента E нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$, поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор, откуда $|T| \geqslant 3$, что и требовалось доказать. Пусть $\psi(\tilde{\pi}_1) = \delta$. Из (12.1) следует, что $g_{\overline{\delta}}(\tilde{\pi}_2) = f(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha}$.

Если $g_{\overline{\delta}} \not\equiv \overline{\alpha}$, то функции f, $\overline{\alpha}$ и $g_{\overline{\delta}}$ попарно различны, но на наборе $\tilde{\pi}_2$ принимают одно и тоже значение $\overline{\alpha}$. На наборе $\tilde{\pi}_1$ хотя бы две из этих функций также принимают одинаковое значение, поэтому в тесте T должен содержаться ещё какой-то набор и $|T| \geqslant 3$. Пусть $g_{\overline{\delta}} \equiv \overline{\alpha}$. Тогда для любого n-набора $\tilde{\pi}$, на котором $\psi(\tilde{\pi}) = \overline{\delta}$, имеем

$$\psi^{\overline{\delta}\oplus\alpha}(\tilde{\pi}) = \left(\overline{\delta}\right)^{\overline{\delta}\oplus\alpha} = \overline{\alpha} = g_{\overline{\delta}}(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\pi}), \tag{12.2}$$

так как неисправность типа $\overline{\delta}$ элемента E нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\pi}$. Далее, из соотношения $g_\delta \equiv \alpha$ следует, что для любого n-набора $\tilde{\pi}'$, на котором $\psi(\tilde{\pi}') = \delta$, справедливо соотношение

$$\psi^{\overline{\delta}\oplus\alpha}(\tilde{\pi}') = \delta^{\overline{\delta}\oplus\alpha} = \alpha = g_\delta(\tilde{\pi}') = f(\tilde{\pi}'). \tag{12.3}$$

Из (12.2) и (12.3) вытекает, что $\psi^{\overline{\delta}\oplus\alpha} = f$, т. е. $\psi \in \{f, \overline{f}\}$, однако это противоречит условию леммы. Неравенство $|T| \geqslant 3$, а вместе с ним лемма 12.1 доказаны. □

Рассмотрим произвольный ф. п. базис B. Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = \varphi^\sigma(y_1, \ldots, y_k), \tag{12.4}$$

где $\varphi(\tilde{x}^k)$ — произвольная функция из базиса B (с точностью до переименования переменных); $y_1, \ldots, y_k \in \{x_1, \ldots, x_n, 0, 1\}$ и $\sigma \in \{0,1\}$.

Теорема 12.1 [154]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не представимой в виде (12.4), при $n \geqslant 3$ справедливо неравенство $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(f) \geqslant 3$; такое же неравенство справедливо и при $n = 2$, если значение его левой части определено.*

Следствие 12.1 [154]. *Если B — произвольный ф. п. конечный базис и $n > m(B)$, то $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) \geqslant 3$ и для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(f) \geqslant 3$.*

Для доказательства следствия 12.1 достаточно заметить, что $n > m(B) \geqslant 2$, т. е. $n \geqslant 3$, а любая функция, представимая в виде (12.4), существенно зависит не более чем от $m(B)$ переменных.

Доказательство теоремы 12.1. Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф., не представимая в виде (12.4). Заметим, что

$$f \notin \{x_1, \ldots, x_n, 0, 1\}, \tag{12.5}$$

поскольку все функции из этого множества, как нетрудно видеть, представимы в виде (12.4) (в качестве φ можно взять любую функцию из базиса B, существенно зависящую хотя бы от одной переменной). Достаточно доказать, что $D(S) \geqslant 3$, где S — произвольная неизбыточная СФЭ в базисе B, реализующая функцию f, если такая схема существует (а при $n \geqslant 3$ она существует — см. замечание 8.1).

Из (12.5) следует, что в схеме S содержится выходной элемент, причём на его выходе в этой схеме реализуется неконстантная б. ф.. Среди всех элементов схемы S, на выходах которых реализуются неконстантные б. ф., выберем произвольный верхний элемент E; пусть он имеет k входов и реализует б. ф. $\varphi(\tilde{x}^k)$, где $x_1, \ldots, x_k$ — значения, подаваемые на эти входы. Каждый вход элемента E в схеме S соединён либо с каким-то входом схемы S, либо с выходом элемента, реализующего булеву константу. Поэтому на выходе элемента E в схеме S реализуется функция $\psi(\tilde{x}^n) = \varphi(y_1, \ldots, y_k)$, где $y_1, \ldots, y_k \in \{x_1, \ldots, x_n, 0, 1\}$. Так как функция f не представима в виде (12.4), то $\psi^\sigma \neq f$ для $\sigma = 0, 1$, т. е. $\psi \notin \{f, \overline{f}\}$. Кроме того, функция ψ отлична от констант в силу выбора элемента E. Тогда выполнены все условия леммы 12.1, из которой вытекает, что $D(S) \geqslant 3$. Теорема 12.1 доказана. $\square$.

Рассмотрим базис $B'_7 = \{\varphi(\tilde{x}^6), \overline{x}\}$, где $\varphi(\tilde{x}^6)$ — б. ф., принимающая значение 1 на наборах $(0,0,1,0,0,1), (0,1,0,0,1,0), (1,0,0,1,0,0), (0,0,0,1,1,1), (1,1,1,0,0,0)$, а также на всех наборах, соседних с набором $(0,1,1,0,1,1)$ или содержащих не менее пяти единиц, значение 0 на наборах $(0,1,1,0,1,1), (1,0,1,1,0,1), (1,1,0,1,1,0)$, а также на всех наборах, соседних с наборами $(1,0,0,1,0,0), (0,0,0,1,1,1), (1,1,1,0,0,0)$ или содержащих не менее пяти нулей, и произвольные значения на остальных 22 двоичных наборах длины 6.

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = \varphi^\sigma(x_{i_1}, \ldots, x_{i_6}), \tag{12.6}$$

где $i_1, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, n\}$ (индексы $i_1, \ldots, i_6$ не обязательно попарно различны) и $\sigma \in \{0,1\}$.

Отметим, что представление (8.1) является частным случаем представления (12.6) при $i_1 = \ldots = i_6 = i,\ \sigma = 1$.

Теорема 12.2 [157]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D_{\text{ЕД (О)}}^{B_7';\,01}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ представима в виде (12.6), но не в виде (8.1)}, \\ 3, & \text{если } f \text{ не представима в виде (12.6)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D_{\text{ЕД (О)}}^{B_7';\,01}(f)$ не определено.

Следствие 12.2 [157]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D_{\text{ЕД (О)}}^{B_7';\,01}(n) = 3$.*

Для доказательства следствия 12.2 достаточно заметить, что любая функция вида (12.6) принимает разные значения на наборах $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$, а, например, функция $x_1 \ldots x_n \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n$ при $n \geqslant 2$ не обладает этим свойством и отлична от констант.

Доказательство теоремы 12.2. В случаях $f \equiv 0$ и $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Далее будем считать, что функция f отлична от констант.

Если функция f представима в виде (8.1), то $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1. Пусть она представима в виде (12.6), но не в виде (8.1). Реализуем функцию $f(\tilde{x}^n)$ схемой S в базисе B_7' в соответствии с представлением (12.6). Переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_6}$ подадим на 1-й, …, 6-й входы φ-элемента соответственно. В случае $\sigma = 1$ выход этого элемента будем считать выходом схемы S, а в случае $\sigma = 0$ соединим его со входом инвертора, выход которого будем считать выходом схемы S. Очевидно, что построенная схема реализует функцию f, имеет только две ф. н. — константы 0 и 1 и, следовательно, неизбыточна, а множество, состоящее из любого одного единичного и любого одного нулевого набора функции $f(\tilde{x}^n)$, является для этой схемы ЕДТ длины 2. Поэтому $D(f) \leqslant 2$. С другой стороны, $D(f) \geqslant 2$ в силу утверждения 8.5. В итоге получаем, что $D(f) = 2$.

Пусть теперь функция f не представима в виде (12.6). Рассмотрим произвольную неизбыточную схему S в базисе B_7', реализующую данную функцию. В схеме S содержится хотя бы один элемент, так как функция f не представима в виде (8.1). Пусть E — произвольный верхний элемент этой схемы. На все его входы в схеме S подаются переменные, поэтому на его выходе в ней реализуется б. ф. $\psi(\tilde{x}^n)$, равная либо $\varphi(x_{i_1},\ldots,x_{i_6})$, если E — φ-элемент, либо $\overline{x}_{i_1} \equiv \overline{\varphi}(x_{i_1},\ldots,x_{i_1})$, если E — инвертор, где $i_1,\ldots,i_6 \in \{1,\ldots,n\}$. При этом $\psi \notin \{f,\overline{f}\}$, так как функция f не представима в виде (12.6), и функция ψ отлична от констант, поскольку $\varphi(\tilde{1}^6) \neq \varphi(\tilde{0}^6)$. Тогда выполнены всем условия леммы 12.1, из которой следует, что $D(S) \geqslant 3$. В силу произвольности схемы S справедливо неравенство $D(f) \geqslant 3$, если значение $D(f)$ определено.

Докажем, что это значение определено и $D(f) \leqslant 3$. Из определения функции $\varphi(\tilde{x}^6)$ нетрудно получить, что $\varphi(x,x,x,x,y,y) = x\&y$ и $\varphi(x,y,z,x,y,z) = x \oplus y \oplus z$. Поэтому можно считать, что в базисе B_7' содержатся функции $x\&y$ и $x \oplus y \oplus z$: достаточно отождествить соответствующие входы у произвольного φ-элемента и получить двухвходовой конъюнктор (трёхвходовой сумматор), допускающий те же самые неисправности, а именно неисправности типов 0 и 1 на его выходе, что и исходный элемент. Тогда в базисе B_7' содержатся все функции из базиса B_4.

Введём для удобства обозначение $a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$. Построим схему S в базисе B_7', реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ (см. рисунок 12.1). Схема S состоит из шести подсхем S_1–S_6, φ-элемента E, входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы S_1, …, 6-й вход — с выходом подсхемы S_6), а также — при $a = 1$ — из инвертора E'. Выходом схемы S является выход элемента E при $a = 0$ и выход элемента E' при $a = 1$. Строение подсхем S_1–S_6 зависит от того, какой из перечисленных ниже случаев А, Б, В имеет место. Представим функцию f полиномом Жегалкина (9.9), в котором $m \geqslant 1$, $c \in \{0,1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция. Без ограничения общности $K_1 = x_1\&\ldots\&x_k$.

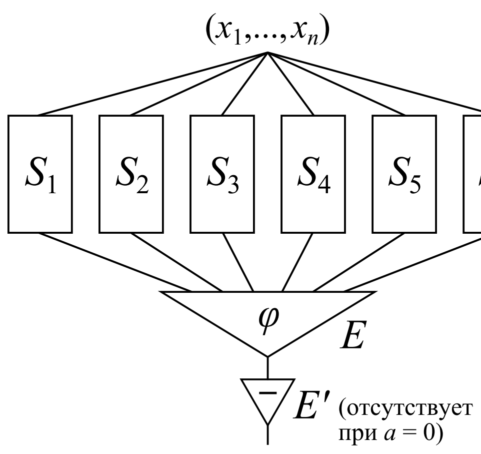

Рис. 12.1. Схема S

Все функции вида $f \oplus \ldots$, которые будут встречаться далее в доказательстве теоремы, зависят от переменных $x_1, \ldots, x_n$ (возможно, от некоторых из них несущественно).

Случай А. Пусть $f(\tilde{1}^n) = f(\tilde{0}^n)$. Тогда функцию $f \oplus I_{(\tilde{1}^n)} \oplus a$ (функцию $f \oplus I_{(\tilde{0}^n)} \oplus \oplus a$) в силу леммы 11.2 можно реализовать неизбыточной схемой S' (соответственно S'') в базисе B_4, а значит, и в базисе B_7', для которой множество $T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\}$ является ЕПТ. Пусть подсхемы S_1, S_2, S_3 — это три копии схемы S', а подсхемы S_4, S_5, S_6 — три копии схемы S''.

Случай Б. Пусть $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$ и $k < n$. Тогда в полиноме Жегалкина функции $f \oplus I_{(\tilde{1}^n)} \oplus a = f \oplus x_1 \ldots x_n \oplus a$ самой короткой конъюнкцией по-прежнему будет K_1, и в силу леммы 11.3 указанную функцию можно реализовать неизбыточной схемой S' в базисе B_4 (а значит, и B_7'), для которой множество $T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})\}$ является ЕПТ. Пусть подсхемы S_1, S_2, S_3 — это три копии схемы S'. Далее преобразуем функцию $f \oplus I_{(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})} \oplus a$ с учётом соотношения (9.9) и равенств $K_1 = x_1 \ldots x_k$, $I_{(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})} = x_1 \ldots x_k (1 \oplus x_{k+1}) \ldots (1 \oplus x_n)$:

$$f \oplus I_{(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})} \oplus a = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c \oplus x_1 \ldots x_k (1 \oplus x_{k+1}) \ldots (1 \oplus x_n) \oplus a =$$
$$= K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c \oplus x_1 \ldots x_k \oplus x_1 \ldots x_k x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_1 \ldots x_k x_n \oplus \ldots \oplus x_1 \ldots x_k x_{k+1} \ldots x_n \oplus a =$$
$$= K_2 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus x_1 \ldots x_k x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_1 \ldots x_k x_n \oplus \ldots \oplus x_1 \ldots x_k x_{k+1} \ldots x_n \oplus (c \oplus a)$$

(в случае $m = 1$ полагаем $K_2 \oplus \ldots \oplus K_m = 0$). Таким образом, все конъюнкции в полиноме Жегалкина функции $f \oplus I_{(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})} \oplus a$ имеют ранг не меньше k, причём среди них отсутствует конъюнкция K_1. Это означает, что на наборе $(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$ все конъюнкции в этом полиноме принимают значение 0. Тогда в силу леммы 11.1 указанную функцию можно реализовать неизбыточной схемой S'' в базисе B_4 (а значит, и B_7'), для которой множество T является ЕПТ. Пусть подсхемы S_4, S_5, S_6 — это три копии схемы S''.

Случай В. Пусть $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$ и $k = n$. Тогда функцию $f \oplus a$ (функцию $f \oplus I_{(\tilde{1}^n)} \oplus \oplus I_{(\tilde{0}^n)} \oplus a$) в силу леммы 11.2 можно реализовать неизбыточной схемой S' (соответственно S'') в базисе B_4 (а значит, и B_7'), для которой множество $T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\}$ является ЕПТ. Пусть подсхемы S_1, S_4 — это две копии схемы S', а подсхемы S_2, S_3, S_5, S_6 — четыре копии схемы S''.

Далее будем параллельно рассматривать случаи А, Б и В. Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. На любом n-наборе $\tilde{\pi}$, не принадлежащем множеству T (которое было определено в каждом из случаев А, Б, В), на выходе каждой из подсхем S_1–S_6, как нетрудно видеть, возникает значение $f(\tilde{\pi}) \oplus a$. Тогда на выходе элемента E возникнет значение $\varphi(f(\tilde{\pi}) \oplus a, \ldots, f(\tilde{\pi}) \oplus a) = f(\tilde{\pi}) \oplus a$, а на выходе схемы S с учётом возможного наличия в ней инвертора E' — значение $f(\tilde{\pi})$. Далее, в случаях А и Б на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходах подсхем S_1–S_6 возникают значения $f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a$ соответственно, т. е. значения $0, 0, 0, 1, 1, 1$ соответственно, поскольку $a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$. Тогда на выходе элемента E возникнет значение

$$\varphi(0, 0, 0, 1, 1, 1) = 1 = f(\tilde{1}^n) \oplus a,$$

а на выходе схемы S с учётом возможного наличия в ней инвертора E' — значение $f(\tilde{1}^n)$.

Заметим, что в случае Б $f(\tilde{1}^n) \neq f(\tilde{0}^n)$ и, кроме того,

$$f(\tilde{0}^n) = c \neq 1 \oplus c = f(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$$

в силу (9.9), поэтому $f(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k}) = f(\tilde{1}^n)$. В случае А на наборе $(\tilde{0}^n)$, а в случае Б на наборе $(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$ на выходе подсхем S_1–S_6 возникают значения $f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a$ соответственно, т. е. значения $1, 1, 1, 0, 0, 0$ соответственно. Тогда на выходе элемента E возникнет значение

$$\varphi(1, 1, 1, 0, 0, 0) = 1 = f(\tilde{1}^n) \oplus a,$$

а на выходе схемы S — значение $f(\tilde{1}^n)$, которое равно $f(\tilde{0}^n)$ в случае А и равно $f(\tilde{1}^k, \tilde{0}^{n-k})$ в случае Б. Таким образом, в случаях А и Б доказано, что на выходе схемы S реализуется в точности функция $f(\tilde{x}^n)$.

В случае В на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходах подсхем S_1–S_6 возникают значения $f(\tilde{1}^n) \oplus a$, $f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{1}^n) \oplus 1 \oplus a$ соответственно, т. е. значения $1, 0, 0, 1, 0, 0$ соответственно. Тогда на выходе элемента E возникнет значение

$$\varphi(1, 0, 0, 1, 0, 0) = 1 = f(\tilde{1}^n) \oplus a,$$

а на выходе схемы S — значение $f(\tilde{1}^n)$. Далее, на наборе $(\tilde{0}^n)$ на выходе подсхем S_1–S_6 возникают значения $f(\tilde{0}^n) \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus 1 \oplus a, f(\tilde{0}^n) \oplus 1 \oplus \oplus a$ соответственно, т. е. значения $0, 1, 1, 0, 1, 1$ соответственно, поскольку в указанном случае $f(\tilde{0}^n) = \overline{f}(\tilde{1}^n) = a$. Тогда на выходе элемента E возникнет значение

$$\varphi(0, 1, 1, 0, 1, 1) = 0 = f(\tilde{0}^n) \oplus a,$$

а на выходе схемы S — значение $f(\tilde{0}^n)$. В случае В также доказано, что на выходе схемы S реализуется функция $f(\tilde{x}^n)$.

Докажем теперь, что схема S неизбыточна и допускает ЕДТ длины 3. При неисправности элемента E или элемента E' данная схема, очевидно, станет реализовывать одну из булевых констант 0 или 1. При неисправности произвольного элемента в одной из подсхем S_1–S_6 на любом n-наборе $\tilde{\pi}$, не принадлежащем множеству T, на выходе не более одной из этих подсхем возникнет «неправильное» значение $f(\tilde{\pi}) \oplus 1 \oplus a$. Тогда как минимум на пять входов элемента E будет подано значение $f(\tilde{\pi}) \oplus a$, поэтому на его выходе в силу определения функции φ возникнет значение $f(\tilde{\pi}) \oplus a$, а на выходе схемы S — значение $f(\tilde{\pi})$. Таким образом, любая ф. н. схемы S, возникающая при неисправности какого-то элемента в одной из подсхем S_1–S_6, может отличаться от функции f только на наборах из множества T.

По построению это множество содержит два набора и является ЕПТ для каждой из указанных подсхем в каждом из случаев А, Б, В. Если при отсутствии неисправностей в схеме S на выходе некоторого элемента в одной из подсхем S_1–S_6 на двух наборах из множества T возникает одно и то же значение β, то неисправность типа β данного элемента нельзя обнаружить на наборах из множества T, однако это противоречит тому, что T — ЕПТ для каждой из подсхем S_1–S_6. Поэтому на выходе любого элемента E'' в любой из этих подсхем на двух наборах из множества T возникают различные значения. Тогда неисправность типа γ, $\gamma \in \{0, 1\}$, элемента E'' обнаруживается только на том наборе $\tilde{\sigma}_1$ из этого множества, на котором значение на выходе элемента E'' в отсутствие неисправностей равно $\overline{\gamma}$, и не обнаруживается на другом наборе $\tilde{\sigma}_2$ из T. Значит, на выходах всех шести подсхем S_1–S_6 при неисправности типа γ элемента E'' на наборе $\tilde{\sigma}_2$ возникнут те же значения, что и в отсутствие неисправностей. Следовательно, схема S выдаст «правильное» значение $f(\tilde{\sigma}_2)$.

С другой стороны, на наборе $\tilde{\sigma}_1$ при неисправности типа γ элемента E'' на выходе ровно одной из подсхем S_1–S_6 возникнет «неправильное» значение. Поэтому на входы φ-элемента E будет подан набор, соседний с одним из наборов $(0,0,0,1,1,1), (1,1,1,0,0,0), (1,0,0,1,0,0)$ или $(0,1,1,0,1,1)$ (только такие наборы могут возникать на входах элемента E при подаче на входы схемы S наборов из множества T и отсутствии в ней неисправностей — см. выше). В силу определения функции φ значение на выходе элемента E, а значит, и на выходе всей схемы S, изменится, т. е. неисправность будет обнаружена на наборе $\tilde{\sigma}_1 \in T$.

Приведённые выше рассуждения показывают, что схема S неизбыточна, а любая её ф. н., кроме, быть может, констант 0 и 1, отличается от функции $f(\tilde{x}^n)$ ровно на одном наборе из множества T и совпадает с ней на всех остальных наборах. Таким образом, все ф. н. схемы S принадлежат множеству $\{0, 1, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}\}$, где $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ — два различных набора из множества T. Выше было показано, что в случаях А и Б на обоих наборах из множества T функция f принимает значение $f(\tilde{1}^n)$. В таблице 12.1 приведены значения функции f и всех возможных ф. н. схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$. Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию f от одной из констант 0, 1. Добавим к

Таблица 12.1

	f	0	1	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}$
$\tilde{\sigma}_1$	$f(\tilde{1}^n)$	0	1	$\overline{f}(\tilde{1}^n)$	$f(\tilde{1}^n)$
$\tilde{\sigma}_2$	$f(\tilde{1}^n)$	0	1	$f(\tilde{1}^n)$	$\overline{f}(\tilde{1}^n)$

этим наборам ещё один набор $\tilde{\sigma}_3$, на котором функция f принимает значение, отличное от соответствующей константы (такой набор всегда найдётся, так как функция f отлична от констант). Полученное множество $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3\}$ будет являться ЕДТ длины 3 для схемы S.

В случае В на наборах из множества T функция f по определению этого случая принимает разные значения. Заметим, что $f(\tilde{x}^n) = x_1\& \ldots \& x_n \oplus c$, так как $k = n$. Поэтому одна из функций $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$, $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_2}$, а именно функция $f \oplus I_{(\tilde{1}^n)} = x_1 \ldots x_n \oplus c \oplus x_1 \ldots x_n = c$, совпадает с одной из функций 0 или 1. Кроме того, $f(\tilde{0}^n) = 0\& \ldots \& 0 \oplus c = c$ и $f(\tilde{1}^n) = 1\& \ldots \& 1 \oplus c = \overline{c}$. На наборе $\tilde{\rho} = (1, \tilde{0}^{n-1})$ функция f принимает значение $1\&\underbrace{0\& \ldots \& 0}_{n-1} \oplus c = c$ (отметим, что $n \geqslant 2$, так как данная функция отлична от констант и не представима в виде (12.6)). В таблице 12.2 приведены значения функции f и всех возможных ф. н. схемы S на наборах $(\tilde{1}^n)$, $(\tilde{0}^n)$ и $\tilde{\rho}$. Видно, что указанные три набора позволяют отличить функцию f и все ф. н. схемы S

Таблица 12.2

	f	0	1	$f \oplus I_{(\tilde{0}^n)}$
$(\tilde{1}^n)$	$\overline{c}$	0	1	$\overline{c}$
$(\tilde{0}^n)$	c	0	1	$\overline{c}$
$\tilde{\rho}$	c	0	1	c

друг от друга. Поэтому множество $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n), \tilde{\rho}\}$ является ЕДТ для этой схемы.

В каждом из случаев А, Б и В установлено, что схема S неизбыточна и допускает ЕДТ длины 3, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 3$. Теорема 12.2 доказана. $\square$

Рассмотрим базис $B_7 = \{\overline{\varphi}(\tilde{x}^6)\}$, где $\varphi(\tilde{x}^6)$ — функция из базиса B_7'.

Теорема 12.3 [157]. *Для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ представима в виде (12.6), но не в виде (8.1)}, \\ 3, & \text{если } f \text{ не представима в виде (12.6)}. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$ или $f \equiv 1$, то значение $D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(f)$ не определено.

Следствие 12.3 [157]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B_7;\,01}_{\text{ЕД}\,(\text{O})}(n) = 3$.*

Доказательства следствий 12.2 и 12.3 совпадают.

Доказательство теоремы 12.3. В случаях $f \equiv 0$ и $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Далее будем считать, что функция f отлична от констант. Если она представима в виде (8.1), то $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1.

Можно считать, что в базисе B_7 содержится функция $\overline{x}$: достаточно отождествить все входы у произвольного $\overline{\varphi}$-элемента и получить одновходовой элемент-инвертор, реализующий функцию вида $\overline{x}$ и допускающий те же самые неисправности (а именно неисправности типов 0 и 1 на его выходе), что и исходный элемент. Далее возьмём произвольный $\overline{\varphi}$-элемент и соединим его выход со входом инвертора. Полученный блок из двух элементов, очевидно, реализует функцию вида $\varphi(\tilde{x}^6)$ и имеет только две ф. н. — константы 0 и 1, поэтому его можно рассматривать как отдельный φ-элемент и считать, что в базисе B_7 содержится также функция $\varphi(\tilde{x}^6)$. В таком случае в базис B_7 входят все функции из базиса B_7'. Отсюда и из теоремы 12.2 и утверждения 8.8 следует, что $D(f) \leqslant 2$, если функция f представима в виде (12.6), но не в виде (8.1), и $D(f) \leqslant 3$, если функция f не представима в виде (12.6). В первом из этих случаев $D(f) \geqslant 2$ в силу утверждения 8.5. Во втором случае неравенство $D(f) \geqslant 3$ доказывается аналогично такому же неравенству в теореме 12.2 с той лишь разницей, что функция $\psi(\tilde{x}^n)$ из третьего абзаца доказательства теоремы 12.2 равна $\overline{\varphi}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_6})$, где $i_1, \ldots, i_6 \in \{1, \ldots, n\}$. Теорема 12.3 доказана. $\square$

Рассмотрим теперь базис $B_3 = \{\&, \neg\}$.

Теорема 12.4 [150]. *При $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^{B_3;\,01}_{\text{ПД}\,(\text{O})}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log n+2}}$.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 10.5. В случаях $n = 1$, $n = 2$ указанное неравенство следует, например, из соотношения $D(f) \geqslant 1$ при $f(\tilde{x}^n) = \overline{x}_1$, которое верно в силу утверждения 8.4. Далее будем считать, что $n \geqslant 3$.

По лемме 10.2 существует такая б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящая от всех своих переменных, что выполнено (10.14). Пусть S — произвольная СФЭ в базисе B_3, реализующая данную функцию. Предположим, что на некоторых входах этой схемы возникли неисправности типа 0. Тогда на все входы элементов схемы S, соединенные с неисправными входами схемы, будет подаваться константа 0 и на выходе каждого такого элемента по свойству функций $x\&y, \overline{x}$ будет реализована одна из булевых констант (хотя бы один такой элемент существует, так как функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит от всех своих n переменных и $n > 1$).

Таким образом, неисправности типа 0 любых входов схемы S можно «промоделировать» неисправностями типа 0 и 1 на выходах некоторых элементов этой схемы. Поэтому множество функций, получаемых при всевозможных неисправностях типа 0 на входах схемы S, содержится во множестве функций, получаемых при всевозможных ПКН на выходах элементов этой схемы, откуда следует неравенство $D(f) \geqslant D^0_{\text{ПД (Р)}}(f)$, а с учётом (10.14) — соотношение (10.15). Теорема 12.4 доказана. □

Замечание 12.1. Результат теоремы 12.4 остаётся справедлив при рассмотрении в качестве базиса B_3 любого базиса $\{x_1\&\ldots\&x_m, \overline{x_1\&\ldots\&x_l}\}$, где $m \geqslant 2$, $l \geqslant 1$, и даже бесконечного базиса $\{x_1\&\ldots\&x_m, \overline{x_1\&\ldots\&x_m} \mid m \geqslant 1\}$. Доказательство проводится аналогично.

Из теоремы 12.4 и следствия 8.1 можно получить неравенство $D^{B_3^*;\,01}_{\text{ПД (О)}}(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n+\frac{1}{2}\log n+2}}$ при $n \geqslant 1$ для базиса $B_3^* = \{\vee, \neg\}$.

§13. Проверяющие тесты при однотипных константных неисправностях на входах элементов

В данном параграфе рассматриваются k-проверяющие тесты для СФЭ относительно ОКН типа p, $p \in \{0,1\}$, на входах и выходах, а также только на входах элементов. Всюду в §§13–16 предполагается, что k — произвольное натуральное число, если явно не оговорено иное. Для базиса $B_8(k)$, состоящего из одной б. ф. от $\max(k+1,\,3)$ переменных и функции $\overline{x}$, найдены точные значения величин $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (I)}}(f)$ и $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (теоремы 13.1 и 13.2) и установлено, что $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (I)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 0$ (следствие 13.1), $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 1$ (следствие 13.2). В силу утверждения 8.9 и следствия 8.1 результаты, кратко сформулированные в предыдущем предложении, остаются верными при замене во всех местах верхнего индекса буквы D с «$B_8(k);\ 0$» на «$B_8^*(k);\ 1$».

Всюду ниже в данном параграфе, за исключением последнего абзаца, рассматривается случай $p = 0$. Пусть $\omega(\tilde{x}^t)$, где $t \geqslant 2$, — произвольная б. ф., принимающая значение 1 на наборе $(\tilde{1}^t)$ и значение 0 на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{1}^t)$, кроме него самого.

Лемма 13.1 [160]. *Любая схема S, состоящая только из входных переменных $x_1, \ldots, x_n$ и ФЭ, реализующих функцию вида $\omega(\tilde{x}^t)$, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента, k-неизбыточна и допускает k-ПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно IO-неисправностей.*

Доказательство. На наборе $(\tilde{1}^n)$ на всех t входах и на выходе каждого элемента схемы S возникнет значение 1, поскольку $\omega(\tilde{1}^t) = 1$. Предположим, что среди всех входов и выходов элементов схемы S есть не менее одного и не более k неисправных. Из всех элементов этой схемы, у которых хотя бы один вход и/или выход неисправны, выберем произвольный нижний элемент E.

Докажем, что значение на выходе элемента E на наборе $(\tilde{1}^n)$ в схеме S равно 0. Если неисправен выход этого элемента, то утверждение очевидно. Если же неисправен хотя бы один из входов элемента E, а его выход исправен, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ значения не менее чем на одном и не более чем на k входах этого элемента в схеме S отличны от «правильных», т. е. от единиц, поскольку всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся. Тогда в силу определения функции ω значение на выходе элемента E на наборе $(\tilde{1}^n)$ в схеме S равно 0, что и требовалось доказать.

Изменение значения на выходе элемента E на наборе $(\tilde{1}^n)$ в схеме S с «правильного» значения 1 на 0 пройдёт по цепочке до выхода схемы S (здесь снова используются тот факт, что всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся, и определение функции ω). Таким образом, неисправность схемы S будет обнаружена на наборе $(\tilde{1}^n)$. Отсюда следует, что данная схема k-неизбыточна и множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё k-ПТ. Лемма 13.1 доказана. □

Положим для удобства $m = \max(k+1, 3)$ и $\varphi(\tilde{x}^m) = x_1 \dots x_m \vee \overline{x}_1 \dots \overline{x}_m$. Рассмотрим базис $B_8(k) = \{\varphi(\tilde{x}^m), \overline{x}\}$.

Лемма 13.2 [160]. *Любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не представимую в виде (8.1), можно реализовать схемой в базисе $B_8(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-ПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно ІО-неисправностей, при которых — в случае $f(\tilde{1}^n) = 0$ — выход выходного элемента схемы исправен.*

Доказательство. Пусть $A = [\{\varphi(\tilde{x}^m)\}]$ — замыкание множества $\{\varphi(\tilde{x}^m)\}$ (см., например, [260, с. 33]), тогда $A \subseteq \mathsf{T}_1$, поскольку $\varphi(\tilde{1}^m) = 1$. Из определения функции φ нетрудно получить, что $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_{m}) \equiv 1$, $\varphi(\underbrace{x, \dots, x}_{m-1}, y) = x \sim y$, поэтому $1 \in A$ и $x \sim y \in A$. Далее, $xy = \varphi(x, y, \tilde{1}^{m-2}) \in A$ (поскольку $m \geqslant 3$) и $\overline{x} \vee y = xy \sim x \in A$. Таким образом, $\{\overline{x} \vee y, xy\} \subseteq A$, следовательно, $\mathsf{T}_1 = [\{\overline{x} \vee y, xy\}] \subseteq A$ (равенство $\mathsf{T}_1 = [\{\overline{x} \vee y, xy\}]$ установлено, например, в [241, с. 37]). Отсюда и из соотношения $A \subseteq \mathsf{T}_1$ получаем, что $A = \mathsf{T}_1$, т. е. любую б. ф. $h(\tilde{x}^n)$ из класса T_1 можно выразить формулой ϕ_h над множеством $\{\varphi(\tilde{x}^m)\}$. Тогда существует схема S_h в базисе $B_8(k)$, состоящая только из входных переменных $x_1, \dots, x_n$ и φ-элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента, моделирующая формулу ϕ_h.

Отметим, что функция $\varphi(\tilde{x}^m)$ принимает значение 1 только на наборах $(\tilde{0}^m)$ и $(\tilde{1}^m)$. Отсюда и из неравенства $k < m$ вытекает, что она принимает значение 0 на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{1}^m)$, кроме него самого. Поэтому к схеме S_h можно применить лемму 13.1, из которой следует, что данная схема k-неизбыточна и допускает k-ПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно IO-неисправностей. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{1}^n) = 1$. Тогда $f(\tilde{x}^n) \in \mathsf{T}_1$, схема S_f реализует функцию f, k-неизбыточна и допускает k-ПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно IO-неисправностей.

2. Пусть $f(\tilde{1}^n) = 0$. Тогда $\overline{f}(\tilde{x}^n) \in \mathsf{T}_1$, схема $S_{\overline{f}}$ реализует функцию $\overline{f}$, k-неизбыточна и допускает k-ПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно IO-неисправностей. Выход схемы $S_{\overline{f}}$ соединим со входом инвертора I, выход которого объявим выходом полученной схемы S. Очевидно, что схема S реализует функцию f, а множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ позволяет обнаружить любую неисправность этой схемы, при которой вход и выход инвертора I исправны. Если вход этого инвертора неисправен, а выход исправен, то на выходе схемы S реализуется константа 1, которую можно отличить от функции f на наборе $(\tilde{1}^n)$. Поэтому схема S является k-неизбыточной и допускает k-ПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно IO-неисправностей, при которых выход её выходного элемента исправен. Лемма 13.2 доказана. □

Утверждение 13.1 [160]. *Для любой k-неизбыточной схемы в базисе $B_8(k)$, реализующей б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не представимую в виде (8.1), любой k-ПТ относительно I-неисправностей содержит хотя бы один набор.*

Доказательство. Выход любой k-неизбыточной схемы, реализующей функцию f, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого ФЭ. Тогда при неисправности любого входа этого элемента получающаяся схема будет реализовывать нетривиальную ф. н., которую надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе. Утверждение 13.1 доказано. □

Теорема 13.1 [160]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.1)}. \end{cases}$$

Следствие 13.1 [160]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П (I)}}(n) = 1$.*

Доказательство теоремы 13.1. Равенство $D(f) = 0$ в случае, когда функция f представима в виде (8.1), следует из утверждения 8.1. Если же функция f не представима в виде (8.1), то неравенство $D(f) \leqslant 1$ следует из леммы 13.2, а неравенство $D(f) \geqslant 1$ — из утверждения 13.1. Теорема 13.1 доказана. □

Теорема 13.2 [160]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы 0, справедливо равенство*

$$D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П}\,(\text{IO})}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)}, \\ 1, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.1) и } f(\tilde{1}^n) = 1, \\ 2, & \text{если } f(\tilde{1}^n) = 0. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П}\,(\text{IO})}(f)$ не определено.

Следствие 13.2 [160]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо равенство $D^{B_8(k);\,0}_{k\text{-П}\,(\text{IO})}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 13.2. В случае $f \equiv 0$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Если функция f представима в виде (8.1), то $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1. Неравенство $D(f) \leqslant 1$ в случае, когда функция f не представима в виде (8.1) и $f(\tilde{1}^n) = 1$, следует из леммы 13.2.

Пусть $f \not\equiv 0$ и $f(\tilde{1}^n) = 0$. В силу леммы 13.2 функцию f можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе $B_8(k)$, допускающей k-ПТ из одного набора $(\tilde{1}^n)$ относительно IO-неисправностей, при которых выход выходного элемента схемы исправен. Добавим к этому набору любой единичный набор $\tilde{\sigma}$ функции $f(\tilde{x}^n)$. Тогда любую неисправность, при которой неисправен выход выходного элемента указанной схемы, можно обнаружить на наборе $\tilde{\sigma}$. Поэтому данная схема k-неизбыточна и допускает k-ПТ $\{(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma})\}$ длины 2 относительно IO-неисправностей, откуда следует, что $D(f) \leqslant 2$.

Неравенство $D(f) \geqslant 1$ в случае, когда функция f отлична от константы 0 и не представима в виде (8.1), вытекает из утверждения 13.1 (I-неисправности являются частным случаем IO-неисправностей).

Докажем неравенство $D(f) \geqslant 2$ в случае $f \not\equiv 0$ и $f(\tilde{1}^n) = 0$. Предположим, что оно неверно, т. е. $D(f) \leqslant 1$. Выше было показано, что $D(f) \geqslant 1$, поэтому $D(f) = 1$. Значит, функцию $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k-неизбыточной схемой S, допускающей k-ПТ из какого-то одного набора $\tilde{\pi}$. Пусть данная функция существенно зависит от s переменных; из соотношений $f \not\equiv 0$ и $f(\tilde{1}^n) = 0$ следует, что $1 \leqslant s \leqslant n$. Без ограничения общности это переменные $x_1, \ldots, x_s$. Очевидно, что каждая переменная x_i, $i = 1, \ldots, s$, обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы S. Тогда при неисправности этого входа получающаяся ф. н. g_i данной схемы не совпадает с f и её надо отличить от функции f хотя бы на одном наборе, причём функция g_i, очевидно, может отличаться от функции f только на $(i,1)$-наборах. Отсюда получаем, что первые s компонент набора $\tilde{\pi}$ равны единице. Функция $f(\tilde{x}^n)$ не зависит существенно от переменных $x_{s+1},\ldots,x_n$ (при $s<n$), поэтому $f(\tilde{\pi}) = f(\tilde{1}^n)=0$. Но тогда неисправность выхода выходного элемента схемы S нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\pi}$, т. е. множество $\{\tilde{\pi}\}$ не может являться k-ПТ для схемы S. Полученное противоречие означает, что $D(f)\geqslant 2$. Теорема 13.2 доказана. $\square$

Из следствий 13.1 и 13.2 с использованием следствия 8.1 можно получить соответственно равенство $D^{B_8^*(k);\,1}_{k\text{-П (I)}}(n)=1$ при $n\geqslant 0$ и равенство $D^{B_8^*(k);\,1}_{k\text{-П (IO)}}(n)=2$ при $n\geqslant 1$ для базиса $B_8^*(k)=\{\overline{x_1\ldots x_m\vee\overline{x}_1\ldots\overline{x}_m},\overline{x}\}$, где $m=\max(k+1,\,3)$.

§14. Диагностические тесты при однотипных константных неисправностях на входах элементов

В данном параграфе рассматриваются k-диагностические тесты для СФЭ относительно ОКН типа p, $p\in\{0,1\}$, на входах и выходах, а также только на входах элементов. Для базиса $B_9(k)$, состоящего из б. ф. от не более чем $2{,}5k+2$ переменных и отрицания этой функции, найдены точные значения величин $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (I)}}(f)$ и $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (IO)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (теоремы 14.1 и 14.2) и установлено, что $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (I)}}(n)=1$ и $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (IO)}}(n)=2$ при $n\geqslant 0$ (следствия 14.1 и 14.2). Указанные результаты в силу утверждения 8.9 и следствия 8.1 остаются верными при замене во всех местах верхнего индекса буквы D с «$B_9(k)$; 0» на «$B_9^*(k)$; 1».

Всюду ниже в данном параграфе, за исключением последнего абзаца, рассматривается случай $p=0$. Положим для удобства $q=2k+\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+2$. Тогда $q\leqslant 2{,}5k+2$, а в силу соотношения $\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1=\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil$ имеет место равенство $q=2k+\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil+1$. Пусть $\psi(\tilde{x}^q)$ — б. ф., удовлетворяющая следующим условиям:

(i) $\psi(\tilde{1}^q)=1$;

(ii) на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{1}^q)$, кроме него самого, функция ψ принимает значение 0;

(iii) на всех наборах, k-соседних с набором $\tilde{\sigma}_1=(\tilde{0}^{k+1},\tilde{1}^{k+\left\lceil\frac{k+1}{2}\right\rceil})$, функция ψ принимает значение 0;

(iv) на всех наборах, k-соседних с набором $\tilde{\sigma}_2 = (\tilde{1}^{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}, \tilde{0}^{2k+1})$, функция ψ принимает значение 1.

На всех остальных двоичных наборах длины q функция ψ может принимать произвольные значения.

Покажем, что данная функция определена корректно, т. е. множества наборов, на которых она принимает значения 0 и 1, не пересекаются. Заметим, что набор $\tilde{\sigma}_2$ отличается от набора $(\tilde{1}^q)$ в $2k+1$ компонентах, а от набора $\tilde{\sigma}_1$ — в

$$\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil + \left(k + \left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil\right) = k + 2\left\lceil \frac{k+1}{2} \right\rceil \geqslant 2k+1$$

компонентах, поэтому любой набор, k-соседний с набором $\tilde{\sigma}_2$, отличается от каждого из наборов $(\tilde{1}^q)$, $\tilde{\sigma}_1$ по крайней мере в $k+1$ компонентах, т. е. не может быть k-соседним ни с одним из этих наборов. Далее, набор $(\tilde{1}^q)$ отличается от набора $\tilde{\sigma}_1$ в $k+1$ компонентах, поэтому не является k-соседним с этим набором. Тем самым показано, что множества наборов, на которых функция $\psi(\tilde{x}^q)$ принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Рассмотрим базис $B_9(k) = \{\psi, \overline{\psi}\}$.

Утверждение 14.1 [160]. *Для любой k-неизбыточной схемы в базисе $B_9(k)$, реализующей б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не представимую в виде (8.1), любой k-ДТ относительно I-неисправностей содержит хотя бы один набор.*

Доказательство аналогично доказательству утверждения 13.1. □

Выделим возможное представление функции $f(\tilde{x}^n)$:

$$f(\tilde{x}^n) = x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_s}, \tag{14.1}$$

где $s \in \{1, \ldots, n\}$ и $i_1, \ldots, i_s$ — попарно различные индексы от 1 до n.

Отметим, что представление (8.1) является частным случаем представления (14.1).

Следующая лемма формулируется и доказывается почти точно так же, как лемма 9 работы [160].

Лемма 14.1. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать СФЭ в базисе $B_9(k)$, имеющей единственную ф. н. $f \oplus x_1 \ldots x_n$ относительно ІО-неисправностей, при которых выход выходного элемента схемы исправен*;

2) *если б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ представима в виде (14.1), то $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д}\,(\text{IO})}(f) \leqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $A = [\{\psi(\tilde{x}^q)\}]$ — замыкание множества $\{\psi(\tilde{x}^q)\}$, тогда $A \subseteq \mathsf{T}_1$ в силу условия (i). Из условий (i)–(iv) нетрудно получить, что $\psi(\underbrace{x, \ldots, x}_{q}) \equiv 1$, $\psi(x, y, \tilde{1}^{q-2}) = xy$ и $\psi(\underbrace{y, \ldots, y}_{k+1}, \underbrace{x, \ldots, x}_{k+\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}) = \overline{x} \vee y$, поэтому $\{\overline{x} \vee y, xy\} \subseteq A$ и $\mathsf{T}_1 = [\{\overline{x} \vee y, xy\}] \subseteq A$. Отсюда и из соотношения $A \subseteq \mathsf{T}_1$ получаем, что $A = \mathsf{T}_1$, т. е. любую б. ф. $h(\tilde{x}^n)$ из класса T_1 можно выразить формулой ϕ_h над множеством $\{\psi(\tilde{x}^q)\}$. Тогда существует схема S_h в базисе $B_9(k)$, состоящая только из входных переменных $x_1, \ldots, x_n$ и ψ-элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента, моделирующая формулу ϕ_h. С учётом условий (i), (ii) получаем, что к схеме S_h можно применить лемму 13.1, из которой следует, что данная схема k-неизбыточна и допускает k-ПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно IO-неисправностей.

Рассмотрим произвольную б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. Введём для удобства обозначение $a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$. Построим схему S в базисе $B_9(k)$, реализующую функцию f (см. рисунок 14.1). Схема S состоит из q подсхем S_1–S_q и элемента E, являющегося ψ-элементом при $a = 0$ и $\overline{\psi}$-элементом при $a = 1$, входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы S_1, …, q-й вход — с выходом подсхемы S_q). Выходом схемы S является выход элемента E. Каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$ представляет собой копию схемы $S_{f \oplus a}$, каждая из подсхем $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1}, \ldots, S_{k+1}$ — копию схемы $S_{h_\&}$, где $h_\&(\tilde{x}^n) = x_1 \& \ldots \& x_n$, а каждая из подсхем $S_{k+2}, \ldots, S_q$ — копию схемы $S_{f \oplus a \oplus h_\& \oplus 1}$. Отметим, что каждая из б. ф. $f \oplus a$, $h_\&$ и $f \oplus a \oplus h_\& \oplus 1$ принадлежит классу T_1: например,

$$(f \oplus a)(\tilde{1}^n) = f(\tilde{1}^n) \oplus a = \overline{a} \oplus a = 1.$$

Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Прежде всего заметим, что элемент E по определению реализует функцию вида $\psi \oplus a$ от своих входов. На любом n-наборе $\tilde{\tau}_a$, на котором функция f принимает значение a, на выходах подсхем S_1–$S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$, $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1}$–$S_{k+1}$, S_{k+2}–S_q возникнут значения 0, 0, 1 соответственно (здесь используется тот факт, что $\tilde{\tau}_a \neq (\tilde{1}^n)$, поскольку $f(\tilde{\tau}_a) = a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$). Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $\tilde{\sigma}_1$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\psi(\tilde{\sigma}_1) \oplus a = a = f(\tilde{\tau}_a)$ в силу условия (iii). Далее, на любом n-наборе $\tilde{\tau}_{\overline{a}}$, на котором функция f принимает значение $\overline{a}$, отличном от набора $(\tilde{1}^n)$, на выходах подсхем S_1–$S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$, $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1}$–$S_{k+1}$, S_{k+2}–S_q возникнут значения 1, 0, 0 соответственно. Тогда на входы элемента E будет подан набор $\tilde{\sigma}_2$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\psi(\tilde{\sigma}_2) \oplus a = \overline{a} = f(\tilde{\tau}_{\overline{a}})$ в силу условия (iv). Наконец, на наборе $(\tilde{1}^n)$ на выходах подсхем S_1–$S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}$, $S_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + 1}$–$S_{k+1}$, S_{k+2}–S_q возникнут значения 1, 1, 1 соответственно.

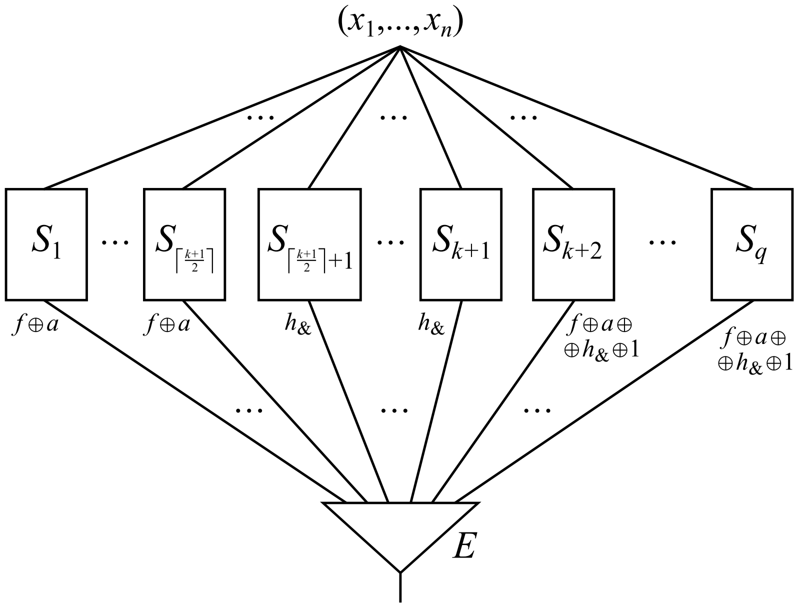

Рис. 14.1. Схема S

Тогда на входы элемента E будет подан набор $(\tilde{1}^q)$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\psi(\tilde{1}^q) \oplus a = \overline{a} = f(\tilde{1}^n)$ в силу условия (i). Таким образом, на выходе схемы S реализуется в точности функция $f(\tilde{x}^n)$.

Найдём все возможные ф. н. схемы S. Пусть выход элемента E исправен. При произвольной неисправности не менее одного и не более k входов/выходов элементов подсхем S_1–S_q и/или входов элемента E на любом входном наборе схемы S могут измениться значения не более чем на k входах элемента E. Поэтому на любом наборе $\tilde{\tau}_a$, на котором функция f принимает значение a, на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $\tilde{\sigma}_1$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $0 \oplus a = a = f(\tilde{\tau}_a)$ в силу условия (iii). Аналогично на любом наборе $\tilde{\tau}_{\overline{a}}$, на котором функция f принимает значение $\overline{a}$, отличном от набора $(\tilde{1}^n)$, на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $\tilde{\sigma}_2$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $1 \oplus a = \overline{a} = f(\tilde{\tau}_{\overline{a}})$ в силу условия (iv). Наконец, на наборе $(\tilde{1}^n)$ на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $(\tilde{1}^q)$. При этом хотя бы одна компонента указанного набора будет равна 0, поскольку множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является k-ПТ для каждой из подсхем S_1–S_q, а в случае исправности всех элементов каждая из этих подсхем на наборе $(\tilde{1}^n)$ выдаёт единицу. Следовательно, на выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $0 \oplus a = a = \overline{f}(\tilde{1}^n)$ в силу условия (ii). В итоге получаем, что на выходе схемы S возникнет ф. н. g_1, отличающаяся от функции f только на наборе $(\tilde{1}^n)$ (её можно записать в виде $g_1 = f \oplus x_1 \ldots x_n$). Тем самым утверждение 1) леммы доказано.

Докажем утверждение 2). Если функция f представима в виде (14.1) при $s = n$, а выход элемента E неисправен, то на выходе схемы S возникнет тождественный нуль, однако

$$g_1 = f \oplus x_1 \ldots x_n = x_1 \ldots x_n \oplus x_1 \ldots x_n \equiv 0.$$

Значит, g_1 — единственная ф. н. схемы S. Данную функцию можно отличить от функции f на наборе $(\tilde{1}^n)$, поэтому схема S является k-неизбыточной и допускает k-ДТ из одного набора относительно IO-неисправностей, откуда следует неравенство $D(f) \leqslant 1$ при $f(\tilde{x}^n) = x_1 \ldots x_n$. Заменяя n на s, получаем, что $D(f') \leqslant 1$ при $f'(\tilde{x}^s) = x_1 \ldots x_s$. Тогда существует схема S' в базисе $B_9(k)$, реализующая функцию $f'(\tilde{x}^s)$, k-неизбыточная и допускающая k-ДТ из одного набора относительно IO-неисправностей. Добавив в случае $s < n$ к схеме S' ни к чему не подсоединённые входы «x_{s+1}», …, «x_n», а к единственному тестовому набору справа произвольные $n-s$ компонент, получим, что $D(f) \leqslant 1$ при $f(\tilde{x}^n) = x_1 \ldots x_s$. Теперь утверждение 2) леммы следует из представления (14.1) и утверждения 8.10. Лемма 14.1 доказана. □

Теорема 14.1 [160]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \textit{если } f \textit{ не представима в виде } (8.1). \end{cases}$$

Следствие 14.1 [160]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 1$.*

Доказательство теоремы 14.1. Равенство $D(f) = 0$ в случае, когда функция f представима в виде (8.1), следует из утверждения 8.1. Если же функция f не представима в виде (8.1), то неравенство $D(f) \geqslant 1$ следует из утверждения 14.1, а неравенство $D(f) \leqslant 1$ — из утверждения 1) леммы 14.1 (функции f и $f \oplus x_1 \ldots x_n$ можно различить на наборе $(\tilde{1}^n)$). Теорема 14.1 доказана. □

Теорема 14.2 [160]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 0, *справедливо равенство*

$$D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (14.1), \textit{ но не в виде } (8.1), \\ 2, & \textit{если } f \textit{ не представима в виде } (14.1). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 0$, то значение $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 14.2 [160]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_9(k);\,0}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 14.2. В случае $f \equiv 0$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Далее считаем, что $f \not\equiv 0$. Если функция f представима в виде (8.1), то $D(f) = 0$ в силу утверждения 8.1. Неравенство $D(f) \leqslant 1$ в случае, когда функция f представима в виде (14.1), но не в виде (8.1), следует из утверждения 2) леммы 14.1.

Пусть функция f не представима в виде (14.1). В силу утверждения 1) леммы 14.1 её можно реализовать схемой S в базисе $B_9(k)$, единственной ф. н. которой при ІО-неисправностях, за исключением неисправности выхода выходного элемента, является функция $g_1 = f \oplus x_1 \ldots x_n$. Если же выход выходного элемента схемы S неисправен, то она станет реализовывать функцию $g_2 \equiv 0$. Пусть $\tilde{\sigma}$ — произвольный единичный набор функции $f(\tilde{x}^n)$, отличный от набора $(\tilde{1}^n)$; такой набор найдётся, поскольку $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv x_1 \ldots x_n$. Тогда функцию f можно отличить от функции g_1 на наборе $(\tilde{1}^n)$, а функцию g_2 можно отличить от каждой из функций f, g_1 на наборе $\tilde{\sigma}$. Поэтому схема S является k-неизбыточной и допускает k-ДТ $\{(\tilde{1}^n), \tilde{\sigma}\}$ относительно ІО-неисправностей, откуда следует, что $D(f) \leqslant 2$.

Неравенство $D(f) \geqslant 1$ в случае, когда функция f не представима в виде (8.1), вытекает из утверждения 14.1.

Осталось доказать неравенство $D(f) \geqslant 2$ в случае, когда функция f не имеет вид (14.1). Пусть S — произвольная k-неизбыточная схема, реализующая функцию f, и на входы её элементов подаются s переменных из числа $x_1, \ldots, x_n$. Поскольку функция f не представима в виде (14.1), а значит, и в виде (8.1), то $s \geqslant 1$ и, кроме того, в схеме S содержится выходной элемент. Пусть на входы элементов схемы S подаются переменные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$. При неисправности выхода выходного элемента данной схемы возникнет ф. н. $g \equiv 0$.

Очевидно, что функция $f(\tilde{x}^n)$ может зависеть существенно только от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$. Если на всех n-наборах, хотя бы одна из i_1-й, $\ldots$, i_s-й компонент которых равна 0, функция f принимает значение 0, то $f \equiv 0$ или $f \equiv x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_s}$ (т. е. имеет вид (14.1)), что невозможно по предположению. Поэтому на некотором n-наборе $\tilde{\pi}$, хотя бы одна из i_1-й, $\ldots$, i_s-й компонент которого равна 0, функция f принимает значение 1. Пусть j-я компонента набора $\tilde{\pi}$ равна 0, где $j \in \{i_1, \ldots, i_s\}$. Переменная x_j подаётся хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы S. При неисправности этого входа получающаяся ф. н. g' данной схемы в силу её k-неизбыточности не совпадает с f, однако указанную неисправность, очевидно, нельзя обнаружить на наборе $\tilde{\pi}$ (на этом наборе $x_j = 0$), поэтому $g'(\tilde{\pi}) = f(\tilde{\pi}) = 1$. Таким образом, функции f, g и g' попарно различны. Чтобы отличить эти функции друг от друга, необходимы по крайней мере два набора, откуда следует неравенство $D(f) \geqslant 2$. Теорема 14.2 доказана. $\square$

Из следствий 14.1 и 14.2 с использованием следствия 8.1 для базиса $B_9^*(k) = \{\psi^*, \overline{\psi^*}\}$ при $n \geqslant 0$ можно получить равенства соответственно $D^{B_9^*(k);\,1}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 1$ и $D^{B_9^*(k);\,1}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 2$.

§15. Проверяющие тесты при произвольных константных неисправностях на входах элементов

В данном параграфе рассматриваются k-проверяющие тесты для СФЭ относительно ПКН на входах и выходах, а также только на входах элементов. Для базиса $B_{10}(k)$, состоящего из четырёх б. ф. от не более чем $2k+2$ переменных, найдены точные значения величин $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (I)}}(f)$ и $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (теоремы 15.1 и 15.2) и установлено, что $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (I)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 0$ (следствие 15.1), $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 3$ при $n \geqslant 2$ (следствие 15.2).

Рассмотрим базис $B_{10}(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \psi(\tilde{x}^{k+1}), \overline{x}, 0\}$, где $\psi(\tilde{x}^{k+1}) = x_1 \ldots x_{k+1} \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_{k+1}$, а $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — произвольная несамодвойственная б. ф., для которой выполнены следующие условия:

(i) $\varphi(\tilde{\alpha}^{2k+2}) = \alpha$ для $\alpha = 0, 1$;

(ii) $\varphi(\tilde{\sigma}) = \overline{\alpha}$, где $\alpha = 0, 1$, а $\tilde{\sigma}$ — любой двоичный набор длины $2k+2$, k-соседний с набором $(\tilde{\alpha}^{2k+2})$, кроме него самого.

Отметим, что условия (i), (ii) однозначно определяют значения функции $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ на всех наборах, кроме наборов ровно с $k+1$ нулевой и $k+1$ единичной компонентами. Для выполнения условия несамодвойственности необходимо и достаточно, чтобы на каких-то двух противоположных наборах ровно с $k+1$ нулевой и $k+1$ единичной компонентами функция φ принимала одинаковые значения.

Легко видеть, что функция ψ обладает следующими свойствами:

(iii) $\psi(x, \underbrace{y, \ldots, y}_{k}) = x \oplus y \oplus 1$;

(iv) $\psi(\tilde{\sigma}') = 0$, где $\tilde{\sigma}'$ — любой двоичный набор длины $k+1$, отличный от наборов $(\tilde{0}^{k+1})$ и $(\tilde{1}^{k+1})$.

Утверждение 15.1 [166]. *Для любой k-неизбыточной схемы в базисе $B_{10}(k)$, реализующей б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не представимую в виде (10.8), любой k-ПТ относительно I-неисправностей содержит хотя бы два набора.*

Доказательство. Выход любой k-неизбыточной схемы S, реализующей функцию f, не может совпадать ни с одним из её входов, поэтому он является выходом некоторого ФЭ E, отличного от элемента «константа 0» и, как следствие, имеющего хотя бы один вход. Тогда при неисправности типа α, $\alpha \in \{0, 1\}$, любого фиксированного входа этого элемента получающаяся схема будет реализовывать нетривиальную ф. н., которая может отличаться от функции $f(\tilde{x}^n)$ только на тех наборах, на которых в случае отсутствия неисправностей в схеме S на указанном входе элемента E возникает значение $\overline{\alpha}$. Данные два множества наборов при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ не пересекаются, а в любой k-ПТ для схемы S относительно I-неисправностей должно входить хотя бы одному набору из каждого из этих множеств, откуда следует справедливость утверждения 15.1. □

Назовём б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ *палиндромной*, если на любой паре противоположных n-наборов она принимает одинаковые значения.

Лемма 15.1 [166]. *Любую не палиндромную б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать k-неизбыточной схемой в базисе $B_{10}(k)$, состоящей только из φ-элементов и инверторов и допускающей k-ПТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно I0-неисправностей, где $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ — произвольные два противоположных n-набора, такие, что $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$.*

Замечание 15.1. Существование таких наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ следует из того, что функция f не является палиндромной.

Доказательство леммы 15.1. Если функция f представима в виде (8.1), то её можно реализовать схемой, не содержащей ФЭ; у такой схемы нет ни одной ф. н., поэтому она k-неизбыточна и любое множество n-наборов, в том числе и $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$, является для неё k-ПТ. Если $f \in \{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$, то функцию f можно реализовать схемой в базисе $B_{10}(k)$, состоящей из одного инвертора; у такой схемы, очевидно, есть только две ф. н. — константы 0 и 1, которые можно отличить от функции f на наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_0$ соответственно, поэтому данная схема k-неизбыточна и допускает k-ПТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$.

Далее будем считать, что

$$f \notin \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}. \tag{15.1}$$

Пусть $A = [\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}]$ — замыкание множества $\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}$, тогда $A \subseteq \mathsf{T}_{01}$ в силу условия (i), где T_{01} — замкнутый класс б. ф., принимающих значение α на наборе, все компоненты которого равны α, для $\alpha = 0, 1$ (см., например, [241, с. 34]). Докажем, что $A = \mathsf{T}_{01}$. Как было отмечено выше, функция φ принимает одинаковые значения на каких-то двух противоположных наборах длины $2k+2$, содержащих $k+1$ нулевую и $k+1$ единичную компоненты. Без ограничения общности это наборы $(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1})$ и $(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1})$. Если $\varphi(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1}) = \varphi(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1}) = 0$, то из определения функции φ нетрудно получить, что $\varphi(\underbrace{x,\ldots,x}_{k+1}, \underbrace{y,\ldots,y}_{k+1}) = xy$,

$$\varphi(\underbrace{x,\ldots,x}_{k}, \underbrace{y,\ldots,y}_{k}, xy, xy) = x \vee y$$

и

$$\varphi(\underbrace{x,\ldots,x}_{k}, \underbrace{x \vee y,\ldots,x \vee y}_{k}, x \vee yz, x \vee yz) = x \vee y\overline{z}; \tag{15.2}$$

если же $\varphi(\tilde{0}^{k+1}, \tilde{1}^{k+1}) = \varphi(\tilde{1}^{k+1}, \tilde{0}^{k+1}) = 1$, то из определения функции φ нетрудно получить, что $\varphi(\underbrace{x,\ldots,x}_{k+1}, \underbrace{y,\ldots,y}_{k+1}) = x \vee y$,

$$\varphi(\underbrace{x,\ldots,x}_{k}, \underbrace{y,\ldots,y}_{k}, x \vee y, x \vee y) = xy$$

и выполнено соотношение (15.2). Таким образом, $\{x \vee y\overline{z}, xy\} \subseteq A$, следовательно, $\mathsf{T}_{01} = [\{x \vee y\overline{z}, xy\}] \subseteq A$ (равенство $\mathsf{T}_{01} = [\{x \vee y\overline{z}, xy\}]$ установлено, например, в [241, с. 41]). Отсюда и из соотношения $A \subseteq \mathsf{T}_{01}$ получаем, что $A = \mathsf{T}_{01}$, т. е. любую б. ф. $h(\tilde{x}^n)$ из класса T_{01} можно выразить формулой ϕ_h над множеством $\{\varphi(\tilde{x}^{2k+2})\}$. Тогда существует схема S_h в базисе $B_{10}(k)$, состоящая только из входных переменных $x_1, \ldots, x_n$ и φ-элементов, выход каждого из которых, кроме выходного, соединён ровно с одним входом ровно одного элемента, моделирующая формулу ϕ_h.

Далее используются идеи, сходные с идеями из доказательства леммы 13.1. На наборе $(\tilde{\alpha}^n)$ на всех $2k+2$ входах и на выходе каждого элемента схемы S_h в силу условия (i) возникнет значение α, где $\alpha = 0, 1$. Предположим, что среди всех входов и выходов элементов схемы S_h есть не менее одного и не более k неисправных. Из всех элементов этой схемы, у которых хотя бы один вход и/или выход неисправны, выберем произвольный нижний элемент E. Пусть значение на выходе элемента E, если он неисправен, либо значение на произвольном неисправном входе элемента E, если выход этого элемента исправен, равно $\overline{\delta}$, $\delta \in \{0, 1\}$.

Докажем, что значение на выходе этого элемента на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ в схеме S_h равно $\overline{\delta}$. Если неисправен выход элемента E, то утверждение очевидно. Если же указанный выход исправен, то хотя бы один из входов элемента E неисправен и значение на нём равно $\overline{\delta}$. Тогда на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ значения не менее чем на одном и не более чем на k входах этого элемента в схеме S_h отличны от «правильных», т. е. от δ, поскольку всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся. Тогда в силу условия (ii) значение на выходе элемента E на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ в схеме S_h равно $\overline{\delta}$, что и требовалось доказать.

Изменение значения на выходе элемента E на наборе $(\tilde{\delta}^n)$ в схеме S_h с «правильного» значения δ на $\overline{\delta}$ пройдёт по цепочке до выхода схемы S_h (здесь снова используются тот факт, что всего в этой схеме неисправны не более k входов/выходов элементов, а выходы элементов в ней не ветвятся, и условие (ii)). Таким образом, неисправность схемы S_h будет обнаружена на наборе $(\tilde{\delta}^n)$. Отсюда следует, что данная схема k-неизбыточна и множество $\{(\tilde{0}^n, \tilde{1}^n)\}$ является для неё k-ПТ.

Пусть $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $f'(\tilde{x}^n) = f(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$. Тогда $\tilde{\sigma}_0 = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$,

$$f'(\tilde{0}^n) = f(0^{\sigma_1}, \ldots, 0^{\sigma_n}) = f(\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n) = f(\tilde{\sigma}_0) = 0,$$
$$f'(\tilde{1}^n) = f(1^{\sigma_1}, \ldots, 1^{\sigma_n}) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1,$$

поэтому $f'(\tilde{x}^n) \in \mathsf{T}_{01}$. Значит, существует k-неизбыточная схема $S_{f'}$ в базисе $B_{10}(k)$, реализующая функцию f' и допускающая k-ПТ из наборов $(\tilde{0}^n)$ и $(\tilde{1}^n)$. Функция f' не представима в виде (8.1) в силу (15.1), поэтому в схеме $S_{f'}$ содержится выходной элемент. Преобразуем данную схему: для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ такого, что $\sigma_i = 0$, соединим каждый вход каждого её элемента, на который подавалась переменная x_i, с выходом (своего) инвертора, на вход которого подадим переменную x_i. Полученную схему (с тем же выходным элементом, что и у схемы $S_{f'}$) обозначим через S; легко видеть, что на её выходе реализуется функция $f'(x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}) = f(\tilde{x}^n)$.

Заметим, что неисправность на входе и/или выходе каждого «добавленного» инвертора схемы S равносильна некоторой неисправности на входе элемента, соединённого с выходом этого инвертора. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме S могут быть только входы/выходы элементов из её подсхемы $S_{f'}$. На наборе $\tilde{\sigma}_1$ на все входы подсхемы $S_{f'}$ по построению поступят единицы, а на наборе $\tilde{\sigma}_0$ — нули. Множество $\{(\tilde{0}^n), (\tilde{1}^n)\}$ позволяет обнаружить любую неисправность не более k входов/выходов элементов в этой подсхеме. Отсюда следует, что схема S является k-неизбыточной и допускает k-ПТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$. Лемма 15.1 доказана. □

Лемма 15.2 [166]. *Любую палиндромную б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличную от константы* 0, *можно реализовать схемой в базисе $B_{10}(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-ПТ длины* 2 *относительно IO-неисправностей, кроме неисправности типа* 1 *на выходе выходного элемента схемы.*

Доказательство. Существуют такие два противоположных n-набора, на каждом из которых функция f принимает значение 1, поскольку $f \not\equiv 0$. Обозначим тот из них, первая компонента которого равна единице, через $\tilde{\sigma}_1$, а другой — через $\tilde{\sigma}_0$. Пусть $\tilde{\sigma}_1 = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $\hat{f}(\tilde{x}^n) = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1$. Тогда $\sigma_1 = 1$, $\tilde{\sigma}_0 = (\overline{\sigma}_1, \ldots, \overline{\sigma}_n)$,

$$\hat{f}(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus \overline{\sigma}_1 \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$
$$\hat{f}(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus \sigma_1 \oplus 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$

поэтому $\hat{f}(\tilde{x}^n)$ — не палиндромная функция. Тогда в силу леммы 15.1 существует k-неизбыточная схема S' в базисе $B_{10}(k)$, реализующая функцию $\hat{f}$ и допускающая k-ПТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно IO-неисправностей. Соединим выход данной схемы с 1-м входом ψ-элемента E, а на все остальные входы этого элемента подадим переменную x_1. Выход элемента E объявим выходом полученной схемы, которую обозначим через S. В силу свойства (iii) она реализует функцию

$$\psi(\hat{f}(\tilde{x}^n), \underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{k}) = \hat{f}(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1 = f(\tilde{x}^n) \oplus x_1 \oplus 1 \oplus x_1 \oplus 1 = f(\tilde{x}^n).$$

При отсутствии неисправностей в схеме S в силу равенств $\hat{f}(\tilde{\sigma}_1) = 1$, $\sigma_1 = 1$ и $\hat{f}(\tilde{\sigma}_0) = 0$ на все входы элемента E на наборе $\tilde{\sigma}_1$ поступят единицы, а на наборе $\tilde{\sigma}_0$ — нули. Если выход элемента E исправен, а хотя бы один из его входов или из входов/выходов элементов подсхемы S' неисправен, то хотя бы на одном из этих наборов не менее чем на одном и не более чем на k входах элемента E возникнут «неправильные» значения, а тогда в силу свойства (iv) значение на выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S, изменится, поэтому неисправность будет обнаружена на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1$. Наконец, неисправность типа 0 на выходе элемента E обнаруживается на любом из этих двух наборов, так как $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Поэтому схема S является k-неизбыточной и допускает k-ПТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно IO-неисправностей, кроме неисправности типа 1 на выходе её выходного элемента. Лемма 15.2 доказана. □

Теорема 15.1 [166]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.8)},\\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (10.8)}. \end{cases}$$

Следствие 15.1 [166]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (I)}}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 15.1. Равенство $D(f) = 0$ в случае, когда f представима в виде (10.8), следует из утверждений 8.1 и 8.6. Если же функция f не представима в виде (10.8), то неравенство $D(f) \geqslant 2$ вытекает из утверждения 15.1, а неравенство $D(f) \leqslant 2$ — из лемм 15.1 и 15.2. Теорема 15.1 доказана. □

Очевидно, что никакая функция вида (8.1) не является палиндромной, а константа 0 является палиндромной функцией.

Теорема 15.2 [166]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 1, *справедливо равенство*

$$D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (8.1)},\\ 1, & \text{если } f \equiv 0,\\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (8.1) и не является палиндромной},\\ 3, & \text{если } f \text{ — палиндромная функция и } f \not\equiv 0. \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 15.2 [166]. *Для любого $n \geqslant 2$ справедливо равенство $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(n) = 3$.*

Доказательство теоремы 15.2. В случае $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Равенства $D(f) = 0$, если функция f представима в виде (8.1), и $D(f) = 1$, если $f \equiv 0$, следуют из утверждений 8.1 и 8.6 соответственно. В случае, когда функция f не представима в виде (8.1) и не является палиндромной, неравенство $D(f) \geqslant 2$ следует из утверждения 15.1, а неравенство $D(f) \leqslant 2$ — из леммы 15.1.

Пусть f — палиндромная функция и $f \not\equiv 0, 1$. В силу леммы 15.2 функцию f можно реализовать схемой S в базисе $B_{10}(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-ПТ длины 2 относительно IO-неисправностей, кроме неисправности типа 1 на выходе выходного элемента схемы. Добавим в этот тест любой нулевой набор функции $f(\tilde{x}^n)$. На нём обнаруживается неисправность типа 1 на выходе выходного элемента схемы S (возможно, при наличии в ней других неисправных входов/выходов элементов). Поэтому данная схема k-неизбыточна и допускает k-ПТ длины не более 3 относительно IO-неисправностей. Отсюда следует, что $D(f) \leqslant 3$.

Докажем, неравенство $D(f) \geqslant 3$. Предположим, что это не так, т. е. $D(f) \leqslant 2$. В силу утверждения 15.1 имеем $D(f) \geqslant 2$, поэтому $D(f) = 2$. Значит, существует k-неизбыточная схема S' в базисе $B_{10}(k)$, реализующая функцию f и допускающая k-ПТ из каких-то двух наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ — все существенные переменные функции f. Предположим, что i_j-е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают для некоторого $j \in \{1, \ldots, s\}$ и равны α. Переменная x_{i_j} обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы одного элемента схемы S', поскольку $x_{i_j} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$. Тогда неисправность типа α этого входа нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$; противоречие. Следовательно, наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в каждой из i_1-й, …, i_s-й компонент.

Далее, пусть $\tilde{\pi}_1'$ — набор, противоположный набору $\tilde{\pi}_1$. Тогда $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_1')$ в силу палиндромности функции f. Наборы $\tilde{\pi}_1'$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают в i_1-й, …, i_s-й компонентах, а функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит только от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, поэтому $f(\tilde{\pi}_1') = f(\tilde{\pi}_2)$. Таким образом, $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2)$. Отсюда следует, что неисправность типа $f(\tilde{\pi}_1)$ на выходе выходного элемента схемы S' нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$, т. е. множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ не является k-ПТ для этой схемы. Полученное противоречие означает, что $D(f) \geqslant 3$. Теорема 15.2 доказана. $\square$

Замечание 15.2. Среди всех схем, построенных при доказательстве верхних оценок величин $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (I)}}(f)$ и $D^{B_{10}(k);\,01}_{k\text{-П (IO)}}(f)$ в теоремах 15.1 и 15.2 соответственно, элемент «константа 0» использовался только в построении схем, реализующих тождественный нуль, а ψ-элемент — только в построении схем, реализующих отличные от нуля палиндромные функции (причём в единственном числе).

§16. Диагностические тесты при произвольных константных неисправностях на входах элементов

В данном параграфе рассматриваются k-диагностические тесты для СФЭ относительно ПКН на входах и выходах, а также только на входах элементов. Для базиса $B_{11}(k)$, состоящего из пяти б. ф. от не более чем $4k+2$ переменных, найдены точные значения величин $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (I)}}(f)$ и $D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(f)$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ (теоремы 16.1 и 16.2; во второй из них предполагается, что $k = 1$) и установлено, что $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 2$ при $n \geqslant 0$ (следствие 16.1), $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (IO)}}(n) = 4$ при $n \geqslant 3$, причём в случае $k \geqslant 2$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (IO)}}(f) = 4$ (теорема 16.3).

Пусть $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$, $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ — б. ф., удовлетворяющие следующим условиям при $\alpha = 0, 1$:

(v) $\xi(\tilde{\alpha}^{3k+2}) = \alpha$;

(vi) на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, кроме него самого, функция ξ принимает значение $\overline{\alpha}$;

(vii) на всех наборах, k-соседних с набором $\tilde{\rho}_\alpha = \left(\tilde{\alpha}^{k+1}, \tilde{\overline{\alpha}}^{2k+1}\right)$, функция ξ принимает значение α;

(viii) $\eta(\tilde{\alpha}^{4k+2}) = 1$;

(ix) на всех наборах, k-соседних с набором $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$, кроме него самого, функция η принимает значение 0;

(x) на всех наборах, k-соседних с набором $\tilde{\nu}_\alpha = \left(\tilde{\alpha}^{2k+1}, \tilde{\overline{\alpha}}^{2k+1}\right)$, функция η принимает значение α.

На всех остальных двоичных наборах длины $3k+2$ (длины $4k+2$) функция ξ (соответственно η) может принимать произвольные значения.

(Приведённая нумерация условий выбрана с целью избежания путаницы с условиями (i)–(iv) из §15: в текущем параграфе будет фигурировать функция $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ из §15, удовлетворяющая условиям (i) и (ii).)

Покажем, что каждая из функций $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$, $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ определена корректно, т. е. множества наборов, на которых она принимает значения 0 и 1, не пересекаются. Заметим, что для любого $\alpha \in \{0,1\}$ набор $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ отличается от каждого из наборов $\left(\tilde{\overline{\alpha}}^{3k+2}\right)$, $\tilde{\rho}_\alpha$ по крайней мере в $2k+1$ компонентах, поэтому любой набор, k-соседний с набором $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, отличается от каждого из наборов $\left(\tilde{\overline{\alpha}}^{3k+2}\right)$, $\tilde{\rho}_\alpha$ по крайней мере в $k+1$ компонентах, т. е. не может быть k-соседним ни с одним из этих наборов. Набор $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$ отличается от набора $\tilde{\rho}_{\overline{\alpha}}$ в $k+1$ компонентах, поэтому не является k-соседним с этим набором. Кроме того, наборы $\tilde{\rho}_0$ и $\tilde{\rho}_1$ различаются в $3k+2$ компонентах, поэтому никакой набор, k-соседний с набором $\tilde{\rho}_0$, не может быть k-соседним с набором $\tilde{\rho}_1$. Из приведённых рассуждений и условий (v)–(vii) следует, что множества наборов, на которых функция $\xi(\tilde{x}^{3k+2})$ принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Далее, для любого $\alpha \in \{0,1\}$ набор $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$ отличается от набора $\tilde{\nu}_1$ в $2k+1$ компонентах, поэтому никакой набор, k-соседний с набором $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$, не может быть k-соседним с набором $\tilde{\nu}_1$. Наборы $\tilde{\nu}_0$ и $\tilde{\nu}_1$ различаются в $4k+2$ компонентах, поэтому никакой набор, k-соседний с набором $\tilde{\nu}_0$, не может быть k-соседним с набором $\tilde{\nu}_1$. Кроме того, любые два из наборов $(\tilde{0}^{4k+2})$, $(\tilde{1}^{4k+2})$ и $\tilde{\nu}_0$ различаются по крайней мере в $2k+1$ компонентах, поэтому не являются k-соседними. Из приведённых рассуждений и условий (viii)–(x) следует, что множества наборов, на которых функция $\eta(\tilde{x}^{4k+2})$ принимает значения 0 и 1, не пересекаются, значит, она определена корректно.

Рассмотрим базис $B_{11}(k) = \{\varphi(\tilde{x}^{2k+2}), \xi(\tilde{x}^{3k+2}), \eta(\tilde{x}^{4k+2}), \overline{x}, 0\}$, где $\varphi(\tilde{x}^{2k+2})$ — б. ф. из базиса $B_{10}(k)$.

Утверждение 16.1 [166]. *Для любой k-неизбыточной схемы в базисе $B_{11}(k)$, реализующей б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не представимую в виде* (10.8), *любой k-ДТ относительно I-неисправностей содержит хотя бы два набора.*

Доказательство аналогично доказательству утверждения 15.1. $\square$

Лемма 16.1 [166]. *Любую не палиндромную б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, принимающую значения* 0 *и* 1 *на каких-то противоположных наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ соответственно, можно реализовать схемой в базисе $B_{11}(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-ДТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно ІО-неисправностей, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её ф. н. принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$.*

Доказательство. Пусть $f' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1$. Тогда справедливы соотношения

$$f'(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_0) \oplus 1 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \tag{16.1}$$

$$f'(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_1) \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \tag{16.2}$$

из которых следует, что функция $f'(\tilde{x}^n)$ не является палиндромной.

Построим схему S в базисе $B_{11}(k)$, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ (см. рисунок 16.1). Схема S состоит из $3k+2$ подсхем $S_1, \ldots, S_{3k+2}$ и выходного ξ-элемента E, входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы S_1, …, $(3k+2)$-й вход — с выходом подсхемы S_{3k+2}). Каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, а каждая из подсхем $S_{k+2}, \ldots, S_{3k+2}$ — функцию $f'(\tilde{x}^n)$, причём каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{3k+2}$ является k-неизбыточной схемой, состоящей только из φ-элементов и инверторов и допускающей k-ПТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно ІО-неисправностей; существование таких схем следует из леммы 15.1, того, что функции f и f' не являются палиндромными, и соотношений $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$, $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, а также (16.1) и (16.2).

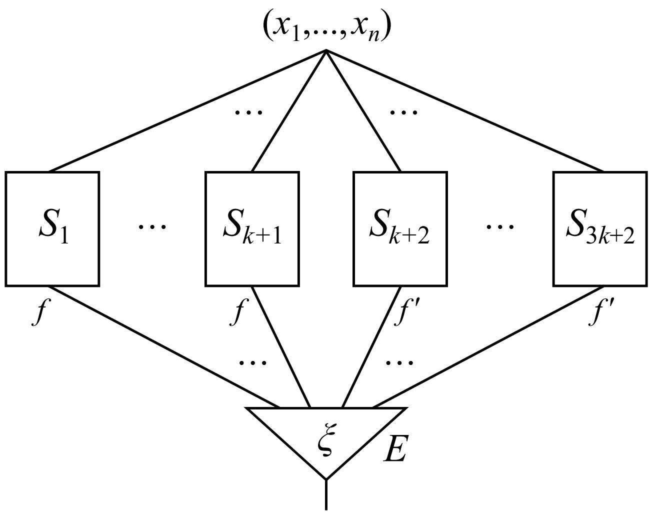

Рис. 16.1. Схема S

Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Всюду ниже в доказательстве леммы будет предполагаться, что α — произвольное число из множества $\{0, 1\}$. На любом n-наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, на котором функция f принимает значение α, отличном от набора $\tilde{\sigma}_\alpha$, на выходе каждой из подсхем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ возникнет значение α, а на выходе каждой из подсхем $S_{k+2}, \ldots, S_{3k+2}$ — значение

$$f'(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 = \overline{\alpha},$$

поскольку $\tilde{\tau}_\alpha \notin \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ (действительно, $\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_\alpha$ по определению и $\tilde{\tau}_\alpha \neq \tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}}$ в силу того, что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha \neq f(\tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}})$). Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $\tilde{\rho}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\xi(\tilde{\rho}_\alpha) = \alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (vii). Далее, на наборе $\tilde{\sigma}_\alpha$ на выходе каждой из подсхем $S_1, \ldots, S_{k+1}$ возникнет значение $f(\tilde{\sigma}_\alpha) = \alpha$, а на выходе каждой из подсхем $S_{k+2}, \ldots, S_{3k+2}$ — значение

$$f'(\tilde{\sigma}_\alpha) = f(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_\alpha}(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_{\overline{\alpha}}}(\tilde{\sigma}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 1 \oplus 0 \oplus 1 = \alpha.$$

Тогда на входы элемента E будет подан набор $(\tilde{\alpha}^{3k+2})$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\xi(\tilde{\alpha}^{3k+2}) = \alpha = f(\tilde{\sigma}_\alpha)$ в силу условия (v). Таким образом, на выходе схемы S реализуется в точности функция $f(\tilde{x}^n)$.

Найдём все возможные ф. н. схемы S относительно IO-неисправностей, при которых выход выходного элемента E схемы исправен. Неисправность на i-м входе элемента E равносильна неисправности такого же типа на выходе выходного элемента подсхемы S_i, где i — произвольный индекс от 1 до $3k+2$. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме S могут быть только входы/выходы элементов из её подсхем $S_1, \ldots, S_{3k+2}$. При произвольной неисправности не менее одного и не более k входов/выходов таких элементов на любом входном наборе схемы S могут измениться значения не более чем на k входах элемента E. Поэтому на любом наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, на котором функция f принимает значение α, отличном от набора $\tilde{\sigma}_\alpha$, на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $\tilde{\rho}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (vii).

На наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ на входы элемента E поступят наборы $\tilde{\pi}_0$ и $\tilde{\pi}_1$ длины $3k+2$, k-соседние с наборами $(\tilde{0}^{3k+2})$ и $(\tilde{1}^{3k+2})$ соответственно. При этом выполнено хотя бы одно из соотношений $\tilde{\pi}_0 \neq (\tilde{0}^{3k+2})$, $\tilde{\pi}_1 \neq (\tilde{1}^{3k+2})$, поскольку множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ является k-ПТ для каждой из k-неизбыточных схем $S_1, \ldots, S_{3k+2}$ (значение на выходе любой из этих схем, содержащей хотя бы один неисправный элемент, изменится хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$). Следовательно, значение на выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S, изменится хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$ в силу условий (v), (vi). Таким образом, на выходе схемы S возникнет ф. н., отличающаяся от функции f по крайней мере на одном из этих двух наборов и совпадающая с функцией f на всех n-наборах, отличных от указанных двух.

Тем самым показано, что все возможные ф. н. схемы S принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Каждую из них можно отличить от любой другой и от функции f

хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$, поэтому схема S является k-неизбыточной и допускает k-ДТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно 1О-неисправностей, при которых выход её выходного элемента исправен. Лемма 16.1 доказана. $\square$

Лемма 16.2 [166]. *Любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, для которой существуют такие два противоположных n-набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, что $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, можно реализовать схемой в базисе $B_{11}(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-ДТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно 1О-неисправностей, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её ф. н. принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$, а в случае $k = 1$ — множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$.*

Доказательство сходно с доказательством леммы 16.1. Пусть $f' = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$, $f'' = f \oplus \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1$. Тогда справедливы соотношения

$$f'(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_0) = 1 \oplus 1 = 0, \tag{16.3}$$

$$f'(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\sigma}_1) = 1 \oplus 0 = 1, \tag{16.4}$$

$$f''(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_0) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_0) \oplus 1 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0, \tag{16.5}$$

$$f''(\tilde{\sigma}_1) = f(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\sigma}_1) \oplus 1 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1, \tag{16.6}$$

из которых следует, что функции $f'(\tilde{x}^n)$ и $f''(\tilde{x}^n)$ не являются палиндромными.

Построим схему S в базисе $B_{11}(k)$, реализующую функцию $f(\tilde{x}^n)$ (см. рисунок 16.2). Схема S состоит из $4k+2$ подсхем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$ и выходного η-элемента E, входы которого соединяются с выходами этих подсхем (1-й вход — с выходом подсхемы S_1, ..., $(4k+2)$-й вход — с выходом подсхемы S_{4k+2}). Каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{2k+1}$ реализует функцию $f'(\tilde{x}^n)$, а каждая из подсхем $S_{2k+2}, \ldots, S_{4k+2}$ — функцию $f''(\tilde{x}^n)$, причём каждая из подсхем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$ является k-неизбыточной схемой, состоящей только из φ-элементов и инверторов и допускающей k-ПТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно 1О-неисправностей; существование таких схем следует из леммы 15.1, того, что функции f' и f'' не являются палиндромными, и соотношений (16.3)–(16.6).

Докажем, что построенная схема S в случае отсутствия в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Всюду ниже в доказательстве леммы будет предполагаться, что α — произвольное число из множества $\{0, 1\}$. На любом n-наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, на котором функция f принимает значение α, отличном от наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, на выходе каждой из подсхем $S_1, \ldots, S_{2k+1}$ возникнет значение

$$f'(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha \oplus 0 = \alpha,$$

а на выходе каждой из подсхем $S_{2k+2}, \ldots, S_{4k+2}$ — значение

$$f''(\tilde{\tau}_\alpha) = f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus 1 = \alpha \oplus 0 \oplus 1 = \overline{\alpha}.$$

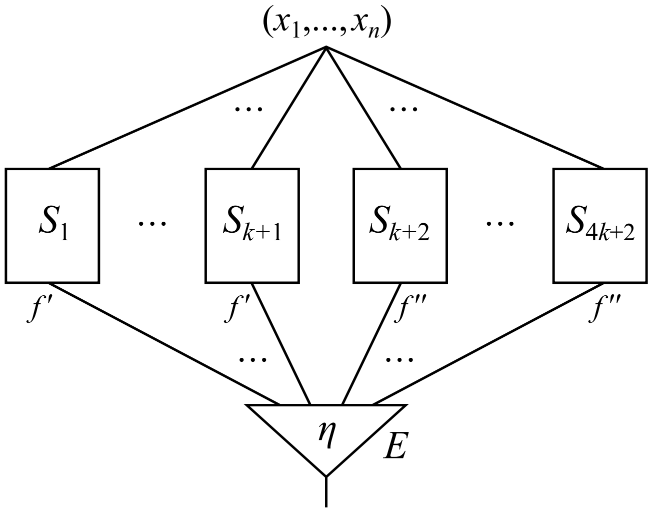

Рис. 16.2. Схема S

Тогда на входы элемента E будет подан в точности набор $\tilde{\nu}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\eta(\tilde{\nu}_\alpha) = \alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (x). Далее, на наборе $\tilde{\sigma}_\alpha$ на выходе каждой из подсхем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$ возникнет значение α в силу (16.3), (16.5) при $\alpha = 0$ и (16.4), (16.6) при $\alpha = 1$. Тогда на входы элемента E будет подан набор $(\tilde{\alpha}^{4k+2})$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\eta(\tilde{\alpha}^{4k+2}) = 1 = f(\tilde{\sigma}_\alpha)$ в силу условия (viii). Таким образом, на выходе схемы S реализуется в точности функция $f(\tilde{x}^n)$.

Найдём все возможные ф. н. схемы S относительно IO-неисправностей, при которых выход выходного элемента E схемы исправен. Неисправность на i-м входе элемента E равносильна неисправности такого же типа на выходе выходного элемента подсхемы S_i, где i — произвольный индекс от 1 до $4k+2$. Поэтому можно считать, что неисправными в схеме S могут быть только входы/выходы элементов из её подсхем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$. При произвольной неисправности не менее одного и не более k входов/выходов таких элементов на любом входном наборе схемы S могут измениться значения не более чем на k входах элемента E. Поэтому на любом наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, на котором функция f принимает значение α, отличном от наборов $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, на входы элемента E поступит набор, k-соседний с набором $\tilde{\nu}_\alpha$, а на его выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условия (x).

На наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$ на входы элемента E поступят наборы $\tilde{\pi}_0$ и $\tilde{\pi}_1$ длины $4k+2$, k-соседние с наборами $(\tilde{0}^{4k+2})$ и $(\tilde{1}^{4k+2})$ соответственно. При этом выполнено хотя бы одно из соотношений $\tilde{\pi}_0 \neq (\tilde{0}^{4k+2})$, $\tilde{\pi}_1 \neq (\tilde{1}^{4k+2})$, поскольку множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ является k-ПТ для каждой из k-неизбыточных схем $S_1, \ldots, S_{4k+2}$. Следовательно, значение на выходе элемента E, т. е. на выходе схемы S, изменится хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$ в силу условий (viii), (ix). Таким образом, на выходе схемы S возникнет ф. н., отличающаяся от функции f по крайней мере на одном из этих двух наборов и совпадающая с функцией f на всех n-наборах, отличных от указанных двух.

Тем самым показано, что все возможные ф. н. схемы S принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Каждую из них можно отличить от любой другой и от функции f хотя бы на одном из наборов $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$, поэтому схема S является k-неизбыточной и допускает k-ДТ $T = \{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно ІО-неисправностей, при которых выход её выходного элемента исправен.

Пусть $k = 1$. Если при отсутствии неисправностей в схеме S на некотором входе/выходе некоторого элемента этой схемы, кроме выхода элемента E, на двух наборах из множества T возникает одно и то же значение β, то неисправность типа β указанного входа/выхода нельзя обнаружить на наборах из данного множества, однако это противоречит тому, что T является k-ДТ для k-неизбыточной схемы S. Поэтому на любом входе/выходе любого элемента схемы S, за исключением выхода элемента E, на двух наборах из множества T возникают различные значения. Тогда неисправность типа γ, $\gamma \in \{0, 1\}$, любого входа/выхода любого элемента этой схемы, кроме выхода элемента E, обнаруживается только на том наборе $\tilde{\sigma}'$ из множества T, на котором значение на указанном входе/выходе в отсутствие неисправностей равно $\overline{\gamma}$, и не обнаруживается на другом наборе $\tilde{\sigma}''$ из данного множества. Значит, при рассматриваемой неисправности на наборе $\tilde{\sigma}'$ схема S выдаст значение $\overline{f}(\tilde{\sigma}')$, а на наборе $\tilde{\sigma}''$ — «правильное» значение $f(\tilde{\sigma}'')$.

Приведённые выше рассуждения показывают, что любая ф. н. схемы S отличается от функции $f(\tilde{x}^n)$ ровно на одном наборе из множества T и совпадает с ней на всех остальных наборах, т. е. принадлежит множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Лемма 16.2 доказана. □

Теорема 16.1 [166]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (I)}}(f) = \begin{cases} 0, & \text{если } f \text{ представима в виде (10.8)}, \\ 2, & \text{если } f \text{ не представима в виде (10.8)}. \end{cases}$$

Следствие 16.1 [166]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д (I)}}(n) = 2$.*

Доказательство теоремы 16.1. Равенство $D(f) = 0$ в случае, когда функция f представима в виде (10.8), следует из утверждений 8.1 и 8.6 соответственно. В противном случае неравенство $D(f) \geqslant 2$ вытекает из утверждения 16.1, а неравенство $D(f) \leqslant 2$ — из лемм 16.1 и 16.2. Стоит лишь отметить, что если f — не палиндромная функция, то существуют такие два противоположных n-набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, для которых $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$, а в случае, когда

f — палиндромная функция и $f \not\equiv 0$, существуют такие два противоположных n-набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, что $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Теорема 16.1 доказана. □

Лемма 16.3 [166]. *Любую не палиндромную б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать схемой в базисе $B_{11}(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-ДТ длины не более 4 относительно IO-неисправностей.*

Доказательство. Существуют такие противоположные n-наборы $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, что $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$ и $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. По лемме 16.1 функцию f можно реализовать схемой S в базисе $B_{11}(k)$, k-неизбыточной и допускающей k-ДТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно IO-неисправностей, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её ф. н. принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Если же указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы S возникнет ф. н., тождественно равная нулю (соответственно единице) и тем самым отличная от функции f, поскольку константы 0 и 1 являются палиндромными функциями. Таким образом, данная схема k-неизбыточна относительно IO-неисправностей. В таблице 16.1 приведены значения функции f и всех возможных ф. н. схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$. Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только функцию $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$

Таблица 16.1

	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	0	1	0	1	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	0	1

от константы 1, если $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \not\equiv 1$, а также функцию $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ от константы 0, если $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \not\equiv 0$. В случае $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \not\equiv 1$ добавим во множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ произвольный нулевой набор функции $(f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0})(\tilde{x}^n)$, а в случае $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \not\equiv 0$ добавим в полученное множество произвольный единичный набор функции $(f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1})(\tilde{x}^n)$. Итоговое множество будет являться k-ДТ длины не более 4 для схемы S относительно IO-неисправностей. Лемма 16.3 доказана. □

Лемма 16.4 [166]. *Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, где $s \geqslant 2$, — все существенные переменные б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, а n-наборы $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$, $\tilde{\pi}_3$ и числа $\alpha, \gamma \in \{0,1\}$, $j \in \{1, \ldots, s\}$ таковы, что i_j-я компонента каждого из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ равна γ, $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$, а $f(\tilde{\pi}_3) = \overline{\alpha}$. Пусть схема S в базисе $B_{11}(k)$ реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$, является k-неизбыточной и допускает k-ДТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$ относительно IO-неисправностей. Тогда на любом (i_j, γ)-наборе функция f принимает значение α.*

Доказательство. Переменная x_{i_j} обязана подаваться хотя бы на один вход v хотя бы одного элемента схемы S, поскольку $x_{i_j} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$. Тогда неисправность типа γ этого входа нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$, значит, она должна обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}_3$. Отсюда вытекает, что для получающейся ф. н. g схемы S справедливы равенства $g(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_1) = \alpha$, $g(\tilde{\pi}_2) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$ и $g(\tilde{\pi}_3) = \overline{f}(\tilde{\pi}_3) = \alpha$, т. е. функцию g нельзя отличить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$, $\tilde{\pi}_3$ от константы α, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа α на выходе её выходного элемента. С учётом того, что множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$ является k-ДТ для схемы S, это может быть только в том случае, когда $g \equiv \alpha$.

При подаче на входы схемы S произвольного (i_j, γ)-набора на вход v поступает значение γ, поэтому функция g, возникающая на выходе схемы при неисправности типа γ этого входа, на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция f. С учётом тождества $g \equiv \alpha$ получаем, что на любом (i_j, γ)-наборе функция f принимает значение α. Лемма 16.4 доказана. □

В следующей теореме рассмотрен случай IO-неисправностей при $k = 1$, т. е. когда неисправным может быть только один вход/выход только одного элемента.

Теорема 16.2 [166]. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличной от константы* 1, *справедливо равенство*

$$D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \textit{если } f \equiv 0, \\ 2, & \textit{если } f = \overline{x}_i \textit{ для некоторого } i \in \{1, \ldots, n\}, \\ 3, & \textit{если } f \textit{ — несамодвойственная функция и } f \not\equiv 0, \\ 4, & \textit{если } f \textit{ — самодвойственная функция и выполнено } (15.1). \end{cases}$$

Если же $f \equiv 1$, то значение $D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(f)$ не определено.

Следствие 16.2 [166]. *Для любого $n \geqslant 3$ справедливо равенство $D^{B_{11}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(n) = 4$.*

Для доказательства следствия 16.2 достаточно заметить, что функция $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$ является самодвойственной.

Доказательство теоремы 16.2. При $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Равенства $D(f) = 0$, если функция f представима в виде (8.1), и $D(f) = 1$, если $f \equiv 0$, следуют из утверждений 8.1 и 8.6 соответственно. Равенство $D(f) = 2$ в случае, когда $f = \overline{x}_i$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, n\}$, вытекает из утверждений 8.7 и 16.1.

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — произвольная б. ф., не принадлежащая множеству $\{0, 1, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$. Докажем неравенство $D(f) \geqslant 3$, если значение $D(f)$ определено. Предположим, что $D(f) \leqslant 2$. В силу утверждения 16.1 имеем $D(f) \geqslant 2$, поэтому $D(f) = 2$. Значит, существует неизбыточная схема S в базисе $B_{11}(1)$, реализующая функцию f и допускающая ЕДТ из каких-то двух n-наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$. Заметим, что

$$f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2), \tag{16.7}$$

поскольку в противном случае неисправность типа $f(\tilde{\pi}_1)$ на выходе выходного элемента схемы S нельзя было бы обнаружить ни на одном из этих двух наборов. Пусть x_i — произвольная существенная переменная функции f. Переменная x_i обязана подаваться хотя бы на один вход v хотя бы одного элемента схемы S. Если i-е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают и равны β, то неисправность типа β данного входа нельзя обнаружить на наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$; противоречие. Значит, i-е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ равны соответственно γ и $\overline{\gamma}$ для некоторого $\gamma \in \{0, 1\}$. Тогда неисправность типа γ входа v обнаруживается на наборе $\tilde{\pi}_2$ и не обнаруживается на наборе $\tilde{\pi}_1$, т. е. при рассматриваемой неисправности на наборе $\tilde{\pi}_1$ схема S выдаст значение $f(\tilde{\pi}_1)$, а на наборе $\tilde{\pi}_2$ — значение $\overline{f}(\tilde{\pi}_2)$, которое равно $f(\tilde{\pi}_1)$ в силу (16.7). Таким образом, полученную ф. н. g_1 схемы S нельзя отличить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ от константы $f(\tilde{\pi}_1)$, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа $f(\tilde{\pi}_1)$ на выходе её выходного элемента. С учётом того, что $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\}$ — ЕДТ для схемы S, это может быть только в том случае, когда $g_1 \equiv f(\tilde{\pi}_1)$. Аналогично при неисправности типа $\overline{\gamma}$ входа v на выходе схемы S возникнет ф. н. g_2, принимающая на наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ значения $\overline{f}(\tilde{\pi}_1)$ и $f(\tilde{\pi}_2) = \overline{f}(\tilde{\pi}_1)$ соответственно. Её нельзя отличить ни на одном из этих наборов от константы $\overline{f}(\tilde{\pi}_1)$, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа $\overline{f}(\tilde{\pi}_1)$ на выходе её выходного элемента, поэтому $g_2 \equiv \overline{f}(\tilde{\pi}_1)$.

Далее заметим, что при подаче на входы схемы S произвольного (i, γ)-набора на вход v поступает значение γ, поэтому функция g_1, возникающая на выходе схемы при неисправности типа γ этого входа, на любом таком наборе принимает то же значение, что и функция f. С учётом тождества $g_1 \equiv f(\tilde{\pi}_1)$ получаем, что на любом (i, γ)-наборе функция f принимает значение $f(\tilde{\pi}_1)$. Аналогично на любом $(i, \overline{\gamma})$-наборе функция g_2 принимает то же значение, что и функция f. С учётом тождества $g_2 \equiv \overline{f}(\tilde{\pi}_1)$ получаем, что на любом таком наборе функция f принимает значение $\overline{f}(\tilde{\pi}_1)$. Но тогда легко проверить, что на любом n-наборе функция f принимает то же значение, что и функция $x_i \oplus \gamma \oplus f(\tilde{\pi}_1)$, т. е. $f = x_i \oplus \gamma \oplus f(\tilde{\pi}_1)$. В таком случае либо $f = x_i$, либо $f = \overline{x}_i$, откуда $f \in \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$. Полученное противоречие означает, что $D(f) \geqslant 3$, если значение $D(f)$ определено.

Пусть f — несамодвойственная функция и $f \not\equiv 0, 1$. Докажем, что $D(f)$ определено и $D(f) \leqslant 3$; отсюда будет следовать равенство $D(f) = 3$. Функция f принимает одно и то же значение на каких-то двух противоположных n-наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Тогда по лемме 16.2 (при $k = 1$) функцию f можно реализовать схемой S' в базисе $B_{11}(1)$, неизбыточной и допускающей ЕДТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно IO-неисправностей, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её ф. н. принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. В случае же, если указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы S' возникнет ф. н., тождественно равная нулю (соответственно единице). Таким образом, данная схема неизбыточна относительно IO-неисправностей. В таблице 16.2 приведены значения функции f и всех возможных ф. н. схемы S' на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$. Видно, что указанные два набора не позволяют отличить

Таблица 16.2

	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	1	0	1	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	1

только функцию f от константы 1. Добавим к этим наборам произвольный нулевой набор функции $f(\tilde{x}^n)$. Полученное множество будет являться ЕДТ длины 3 для схемы S', откуда следует, что $D(f) \leqslant 3$. Случай 1 разобран.

2. Пусть $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 0$. Функция $\overline{f}$ принимает значение 1 на противоположных наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, поэтому по лемме 16.2 (при $k = 1$) её можно реализовать схемой $\hat{S}'$ в базисе $B_{11}(1)$, неизбыточной и допускающей ЕДТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно IO-неисправностей, при которых выход выходного элемента E схемы исправен, причём все ф. н. схемы $\hat{S}'$ принадлежат множеству $\{\overline{f} \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, \overline{f} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Соединим выход этой схемы со входом инвертора I, выход которого объявим выходом полученной схемы; обозначим её через S'. Тогда при неисправности любого входа/выхода любого элемента подсхемы $\hat{S}'$, кроме выхода элемента E, на выходе схемы S' возникнет одна из ф. н.

$$\overline{\overline{f} \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}} = f \oplus 1 \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus 1 = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0},$$
$$\overline{\overline{f} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}} = f \oplus 1 \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \oplus 1 = f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1},$$

а при произвольной неисправности входа или выхода элемента I либо выхода элемента E — одна из булевых констант. Таким образом, схема S' неизбыточна относительно IO-неисправностей. В таблице 16.3 приведены значения функции f и всех возможных ф. н. данной схемы на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$. Видно, что указанные два набора не позволяют отличить только

Таблица 16.3

	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	0	1	0	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	0	0	1	0	1

функцию f от константы 0. Добавим к этим наборам произвольный единичный набор функции $f(\tilde{x}^n)$. Полученное множество будет являться ЕДТ длины 3 для схемы S', откуда следует, что $D(f) \leqslant 3$. Случай 2 разобран. Равенство $D(f) = 3$ доказано.

Пусть теперь $f(\tilde{x}^n)$ — самодвойственная функция и выполнено (15.1). Неравенство $D(f) \leqslant 4$ следует из леммы 16.3 (при $k = 1$) и того, что функция f, очевидно, не является палиндромной. Докажем неравенство $D(f) \geqslant 4$. Предположим, что это не так, т. е. $D(f) \leqslant 3$. Выше было установлено, что $D(f) \geqslant 3$, поэтому $D(f) = 3$. Значит, существует неизбыточная схема S'' в базисе $B_{11}(1)$, реализующая функцию f и допускающая ЕДТ из каких-то трёх n-наборов. Данная функция не может принимать одинаковое значение β на всех этих наборах, поскольку в противном случае её нельзя было бы отличить на них от константы β, возникающей при неисправности типа β на выходе выходного элемента схемы S''. Поэтому на каких двух наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ из теста функция f принимает значение α, а на третьем наборе $\tilde{\pi}_3$ из теста — значение $\overline{\alpha}$, где $\alpha \in \{0, 1\}$.

Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ — все существенные переменные функции f. Предположим, что наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в каждой из i_1-й, …, i_s-й компонент. Пусть $\tilde{\pi}_1'$ — набор, противоположный набору $\tilde{\pi}_1$. Тогда $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_1')$ в силу самодвойственности функции f. Наборы $\tilde{\pi}_1'$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают в i_1-й, …, i_s-й компонентах, а функция $f(\tilde{x}^n)$ существенно зависит только от переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$, поэтому $f(\tilde{\pi}_1') = f(\tilde{\pi}_2)$. Таким образом, $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_2)$, однако это противоречит тому, что $f(\tilde{\pi}_1) = f(\tilde{\pi}_2) = \alpha$. Следовательно, наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают хотя бы в одной из i_1-й, …, i_s-й компонент; обозначим номер этой компоненты через i_j, а её значение в каждом из указанных наборов — через γ. Тогда выполнены все условия леммы 16.4 (при $S = S''$ и $k = 1$), из которой следует, что на любом (i_j, γ)-наборе функция f принимает значение α. В таком случае на любом $(i_j, \overline{\gamma})$-наборе данная функция в силу её самодвойственности принимает значение $\overline{\alpha}$. Но тогда легко проверить, что на любом n-наборе функция f принимает такое же значение, как и функция $x_{i_j} \oplus \gamma \oplus \alpha$, т. е. $f = x_{i_j} \oplus \gamma \oplus \alpha$. Это означает, что либо $f = x_{i_j}$, либо $f = \overline{x}_{i_j}$, поэтому соотношение (15.1) не выполняется; противоречие. Неравенство $D(f) \geqslant 4$ доказано.

В итоге получаем, что $D(f) = 4$. Теорема 16.2 доказана. □

Теорема 16.3 [166]. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д}\,(\mathrm{IO})}(n) = 4$ при $n \geqslant 3$, причём в случае $k \geqslant 2$ для почти всех б. ф. f от n переменных $D^{B_{11}(k);\,01}_{k\text{-Д}\,(\mathrm{IO})}(f) = 4$.*

Доказательство. Неравенство $D(n) \geqslant 4$ при $n \geqslant 3$ вытекает из следствия 16.2 (любой k-ДТ для любой k-неизбыточной схемы является ЕДТ для той же схемы, которая при этом неизбыточна). Докажем неравенство $D(n) \leqslant 4$. Для этого достаточно доказать неравенство $D(f) \leqslant 4$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, для которой определено значение $D(f)$. При $f \equiv 1$ оно не определено в силу утверждения 8.2; при $f \equiv 0$ указанное неравенство следует из утверждения 8.6, а в случае, когда функция f не палиндромная — из леммы 16.3.

Пусть f — палиндромная функция и $f \not\equiv 0, 1$. Тогда существуют такие два противоположных n-набора $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$, что $f(\tilde{\sigma}_0) = f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. По лемме 16.2 функцию f можно реализовать k-неизбыточной схемой S в базисе $B_{11}(k)$, допускающей k-ДТ $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ относительно IO-неисправностей, при которых выход выходного элемента схемы исправен, причём все её ф. н. принадлежат множеству $\{f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}, f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}\}$. Если же указанный выход неисправен и выдаёт 0 (выдаёт 1), то на выходе схемы S возникнет ф. н., тождественно равная нулю (соответственно единице). Таким образом, данная схема k-неизбыточна. В таблице 16.4 приведены значения функции f и всех возможных ф. н. схемы S на наборах $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_1$. Видно,

Таблица 16.4

	f	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	$f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$	0	1
$\tilde{\sigma}_0$	1	0	1	0	0	1
$\tilde{\sigma}_1$	1	1	0	0	0	1

что указанные два набора не позволяют отличить только функцию $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1}$ от константы 0, если $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \not\equiv 0$, а также функцию f от константы 1. Добавим во множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ произвольный нулевой набор функции $f(\tilde{x}^n)$, а в случае $f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1} \not\equiv 0$ добавим в полученное множество произвольный единичный набор функции $(f \oplus I_{\tilde{\sigma}_0} \oplus I_{\tilde{\sigma}_1})(\tilde{x}^n)$. Итоговое множество будет являться k-ДТ длины не более 4 для схемы S, откуда следует, что $D(f) \leqslant 4$. Неравенство $D(n) \leqslant 4$, а вместе с ним равенство $D(n) = 4$ при $n \geqslant 3$ доказаны.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $k \geqslant 2$, $n \geqslant 2$ и f — произвольная б. ф. от n переменных, не принадлежащая множеству $U = \{0, 1, x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$, для которой $D(f) \leqslant 3$. Покажем, что $f \in F_n$, где F_n — множество б. ф. от n переменных, каждая из которых при подстановке вместо каких-то двух её переменных каких-то булевых констант становится равна некоторой булевой константе. Из теоремы 16.2 следует, что $D(f) \geqslant 3$, поэтому $D(f) = 3$. Значит, существует неизбыточная схема S' в базисе $B_{11}(k)$, реализующая функцию f и допускающая k-ДТ из каких-то трёх n-наборов. Данная функция не может принимать одинаковое значение β на всех этих наборах, поскольку в противном случае её нельзя было бы отличить на них от константы β, возникающей при неисправности типа β на выходе выходного элемента схемы S'. Поэтому на каких двух наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ из теста функция f принимает значение α, а на третьем наборе $\tilde{\pi}_3$ из теста — значение $\overline{\alpha}$, где $\alpha \in \{0, 1\}$.

Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ — все существенные переменные функции f. Ясно, что $s \geqslant 2$. Если i_j-е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ совпадают для некоторого $j \in \{1, \ldots, s\}$, то выполнены все условия леммы 16.4 (при $S = S'$). Из неё следует, что на любом (i_j, γ)-наборе функция f принимает значение α. Но тогда при подстановке вместо переменной x_{i_j} константы γ, а вместо любой другой переменной из множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ произвольной булевой константы данная функция становится равна константе α, откуда вытекает, что $f \in F_n$, что и требовалось показать.

Пусть теперь наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ различаются в каждой из i_1-й, …, i_s-й компонент. Наборы $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_3$ различаются хотя бы в одной из этих компонент, поскольку $f(\tilde{\pi}_1) \neq f(\tilde{\pi}_3)$. Пусть они различаются в i_q-й компоненте, $q \in \{1, \ldots, s\}$, причём i_q-е компоненты наборов $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_3$ равны $\overline{\tau}_q$ и τ_q соответственно, где $\tau_q \in \{0, 1\}$. Тогда i_q-я компонента набора $\tilde{\pi}_2$ равна τ_q. Аналогично наборы $\tilde{\pi}_2$ и $\tilde{\pi}_3$ различаются в какой-то i_t-й компоненте, $t \in \{1, \ldots, s\}$, и их i_t-е компоненты равны $\overline{\tau}_t$ и τ_t соответственно, где $\tau_t \in \{0, 1\}$, а i_t-я компонента набора $\tilde{\pi}_1$ равна τ_t. При этом $t \neq q$, так как в противном случае i_q-я компонента набора $\tilde{\pi}_2$ была бы равна одновременно τ_q и $\overline{\tau}_q$. В таблице 16.5 для наглядности приведены значения i_q-й и i_t-й компонент наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ и $\tilde{\pi}_3$. Каждая из переменных x_{i_q}, x_{i_t} обязана подаваться хотя бы на один вход хотя бы

Таблица 16.5

	i_q	i_t
$\tilde{\pi}_1$	$\overline{\tau}_q$	τ_t
$\tilde{\pi}_2$	τ_q	$\overline{\tau}_t$
$\tilde{\pi}_3$	τ_q	τ_t

одного элемента схемы S', поскольку $x_{i_q}, x_{i_t} \in \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\}$; обозначим эти входы через v_q и

v_t соответственно. Тогда неисправность типа τ_q входа v_q нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_2$, $\tilde{\pi}_3$, так как их i_q-е компоненты равны τ_q. Значит, данная неисправность должна обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}_1$. Отсюда вытекает, что для получающейся ф. н. g_q схемы S' справедливы равенства $g_q(\tilde{\pi}_1) = \overline{f}(\tilde{\pi}_1) = \overline{\alpha}$. Если, помимо неисправности типа τ_q входа v_q, в схеме S' также имеет место неисправность типа τ_t входа v_t, то для получающейся ф. н. g_{qt} данной схемы справедливы равенства $g_{qt}(\tilde{\pi}_1) = g_q(\tilde{\pi}_1) = \overline{\alpha}$, поскольку на наборе $\tilde{\pi}_1$ на вход v_t в случае исправности этого входа и неисправности типа τ_q входа v_q подаётся i_t-я компонента набора $\tilde{\pi}_1$, которая равна τ_t и, следовательно, неисправность типа τ_t входа v_t никак не отразится на значении, выдаваемой схемой S' на этом наборе.

Далее, неисправность типа τ_t входа v_t нельзя обнаружить ни на одном из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_3$, так как их i_t-е компоненты равны τ_t. Значит, данная неисправность должна обнаруживаться на наборе $\tilde{\pi}_2$. Отсюда вытекает, что для получающейся ф. н. g_t схемы S' справедливы равенства $g_t(\tilde{\pi}_2) = \overline{f}(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha}$. Если, помимо неисправности типа τ_t входа v_t, в схеме S' также имеет место неисправность типа τ_q входа v_q, то для получающейся ф. н. g_{qt} данной схемы справедливы равенства $g_{qt}(\tilde{\pi}_2) = g_t(\tilde{\pi}_2) = \overline{\alpha}$ (рассуждения аналогичны рассуждениям из последнего предложения предыдущего абзаца).

В случае отсутствия неисправностей в схеме S' на наборе $\tilde{\pi}_3$ на входы v_q и v_t поступают значения τ_q и τ_t соответственно, поскольку i_q-я (i_t-я) компонента набора $\tilde{\pi}_3$ равна τ_q (соответственно τ_t). Поэтому одновременная неисправность входа v_q типа τ_q и входа v_t типа τ_t никак не отразится на значении, выдаваемой схемой S' на указанном наборе. Отсюда следуют равенства $g_{qt}(\tilde{\pi}_3) = f(\tilde{\pi}_3) = \overline{\alpha}$.

В итоге получаем, что ф. н. g_{qt} схемы S' принимает значение $\overline{\alpha}$ на каждом из наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{\pi}_2$ и $\tilde{\pi}_3$, поэтому её нельзя отличить ни на одном из этих наборов от константы $\overline{\alpha}$, возникающей на выходе данной схемы при неисправности типа $\overline{\alpha}$ на выходе её выходного элемента. С учётом того, что множество $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2, \tilde{\pi}_3\}$ является k-ДТ для схемы S', это может быть только в том случае, когда $g_{qt} \equiv \overline{\alpha}$.

Заметим, что при подаче на входы схемы S' произвольного n-набора, i_q-я компонента которого равна τ_q, а i_t-я компонента равна τ_t, на вход v_q поступает значение τ_q, а на вход v_t — значение τ_t, поэтому функция g_{qt}, возникающая на выходе схемы при одновременной неисправности входа v_q типа τ_q и входа v_t типа τ_t, на любом таком наборе принимает такое же значение, как и функция f. С учётом тождества $g_{qt} \equiv \overline{\alpha}$ получаем, что на любом n-наборе, i_q-я компонента которого равна τ_q, а i_t-я компонента равна τ_t, функция f принимает значение $\overline{\alpha}$. Следовательно, при подстановке вместо переменной x_{i_q} константы τ_q, а вместо переменной x_{i_t} константы τ_t данная функция становится равна константе $\overline{\alpha}$, т. е. $f \in F_n$, что и требовалось показать.

Тем самым установлено, что в случае $k \geqslant 2$ и $n \geqslant 2$ произвольная б. ф. f от n переменных, не принадлежащая множеству U, для которой $D(f) \leqslant 3$, принадлежит множеству F_n. Среди функций из множества U могут быть функции f от n переменных, для которых $D(f) \leqslant 3$ (и даже точно есть — см. утверждения 8.1, 8.6), но все они принадлежат F_n, поскольку $U \subseteq F_n$ в силу определений этих множеств. Значит, все б. ф. f от n переменных, где $n \geqslant 2$, для которых $D(f) \leqslant 3$, принадлежат множеству F_n.

Оценим величину $|F_n|$. Пусть $F_{n,j_1,j_2}^{\alpha_1,\alpha_2,\beta}$ — подмножество множества F_n, состоящее из всех б. ф., каждая из которых при подстановке вместо переменной x_{j_1} константы α_1, а вместо переменной x_{j_2} константы α_2, где $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n$, становится равна константе β. Любая функция из множества $F_{n,j_1,j_2}^{\alpha_1,\alpha_2,\beta}$ принимает значение β на любом из 2^{n-2} двоичных наборов длины n, j_1-я компонента которых равна α_1, а j_2-я — равна α_2, а на остальных $2^n - 2^{n-2}$ наборах может принимать произвольные значения, поэтому $|F_{n,j_1,j_2}^{\alpha_1,\alpha_2,\beta}| = 2^{2^n-2^{n-2}}$. Любая функция из множества F_n принадлежит множеству $F_{n,j_1,j_2}^{\alpha_1,\alpha_2,\beta}$ для некоторых j_1, j_2, α_1, α_2 и β, откуда следуют соотношения

$$F_n \subseteq \bigcup_{\substack{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n,\\ \alpha_1,\alpha_2,\beta \in \{0,1\}}} F_{n,j_1,j_2}^{\alpha_1,\alpha_2,\beta},$$

$$|F_n| \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n,\\ \alpha_1,\alpha_2,\beta \in \{0,1\}}} |F_{n,j_1,j_2}^{\alpha_1,\alpha_2,\beta}| = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant n,\\ \alpha_1,\alpha_2,\beta \in \{0,1\}}} 2^{2^n-2^{n-2}} = C_n^2 \cdot 2^3 \cdot 2^{2^n-2^{n-2}} = 4n(n-1) \cdot 2^{2^n-2^{n-2}},$$

$$\frac{|F_n|}{2^{2^n}} \leqslant \frac{4n(n-1) \cdot 2^{2^n-2^{n-2}}}{2^{2^n}} = \frac{4n(n-1)}{2^{2^{n-2}}} \to 0 \ \ (n \to \infty),$$

т. е. отношение числа б. ф. из множества F_n к общему числу б. ф. от n переменных стремится к 0 при $n \to \infty$. В силу доказанного выше это означает, что доля тех б. ф. f от n переменных, для которых $D(f) \leqslant 3$, стремится к 0 при $n \to \infty$. Следовательно, для почти всех б. ф. f от n переменных $D(f) \geqslant 4$. Осталось заметить, что при $f \not\equiv 1$ из неравенства $D(f) \geqslant 4$ вытекает равенство $D(f) = 4$ в силу доказанного соотношения $D(f) \leqslant 4$ для любой б. ф. f от n переменных, кроме константы 1, а $1 \in F_n$. Теорема 16.3 доказана. □

Замечание 16.1. Среди всех схем, построенных при доказательстве верхних оценок величин $D_{k\text{-Д (I)}}^{B_{11}(k);\,01}(f)$, $D_{\text{ЕД (IO)}}^{B_{11}(1);\,01}(f)$ и $D_{k\text{-Д (IO)}}^{B_{11}(k);\,01}(n)$ в теоремах 16.1, 16.2 и 16.3 соответственно, элемент «константа 0» использовался только в построении схем, реализующих тождественный нуль, ξ-элемент — только в построении схем, реализующих не палиндромные функции (теоремы 16.1, 16.3) либо самодвойственные функции (теорема 16.2), причём не более чем в единственном числе, а η-элемент — только в построении схем, реализующих палиндромные функции (теоремы 16.1, 16.3) либо несамодвойственные функции (теорема 16.2), причём не более чем в единственном числе.

§17. Полные диагностические тесты при инверсных неисправностях на выходах элементов

В данном параграфе рассматриваются полные диагностические тесты для СФЭ относительно ИН на выходах элементов, а в качестве базиса — множество $B_{12} = \{x\&y\&z, x \oplus y, 1\}$. Для любого $n \geqslant 0$ доказано соотношение $1 \leqslant D^{B_{12};\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) \leqslant 2$ (теорема 17.1). Ранее С. В. Коваценко для базиса $B_1 = \{\&, \oplus, 1, 0\}$ было установлено неравенство $D^{B_1;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) \leqslant 2^{n-2}$ при $n \geqslant 2$ [84], а Д. С. Романовым и Е. Ю. Романовой для бесконечного базиса $\mathtt{B}_8 = \{x_1\& \ldots \&x_t, x \oplus y, 1 \mid t = 2, 3, 4, \ldots\}$ — равенство $D^{\mathtt{B}_8;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 1$ [228].

Отметим, что при возникновении ИН на выходе любого элемента, реализующего б. ф. φ от своих входов, данный элемент начинает реализовывать функцию $\overline{\varphi} = \varphi \oplus 1$ от своих входов.

Теорема 17.1 [158]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливы неравенства* $1 \leqslant D^{B_{12};\,\mathrm{Inv}}_{\text{ПД (O)}}(n) \leqslant 2$.

Доказательство. Можно считать, что в базисе B_{12} содержится функция $x\&y$: достаточно отождествить входы «y» и «z» у произвольного трёхвходового конъюнктора и получить двухвходовой конъюнктор, допускающий ИН на своём выходе.

Для любого $n \geqslant 0$ существует б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, не представимая в виде (8.1). Тогда $D(n) \geqslant D(f) \geqslant 1$ в силу утверждения 8.4. Докажем неравенство $D(n) \leqslant 2$. Достаточно доказать, что любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать схемой в базисе B_{12}, допускающей ПДТ длины не более 2. Если $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$), то реализуем функцию f схемой, состоящей из одного элемента «константа 1» (соответственно из одного сумматора, на оба входа которого подаётся переменная x_1). Легко видеть, что построенная схема реализует функцию f, а единственной её ф. н. является $\overline{f}$. Отсюда следует, что множество, состоящее из любого одного n-набора, является для этой схемы ПДТ длины 1.

Пусть теперь функция $f(\tilde{x}^n)$ отлична от констант. Реализуем её схемой S_0 в базисе B_{12} в соответствии с представлением данной функции полиномом Жегалкина (9.9), где $m \geqslant 1$ и $c \in \{0, 1\}$. Каждую конъюнкцию K_i, $i = 1, \ldots, m$, ранга r_i реализуем цепочкой Z_i из $r_i - 1$ двухвходовых конъюнкторов; если при этом $r_i = 1$, то в цепочке Z_i не содержится элементов, а её выход совпадает со входом схемы, соответствующим конъюнкции K_i. Затем выходы всех построенных цепочек $Z_1, \ldots, Z_m$, а также — в случае $c = 1$ — выход элемента «константа 1» соединим цепочкой $Z_{\oplus}$ из сумматоров (если $m = 1$ и $c = 0$, то в этой цепочке не содержится элементов, а её выход совпадает с выходом цепочки Z_1). Выход цепочки $Z_{\oplus}$ объявим выходом схемы S_0.

Пусть в построенной схеме S_0 содержится ровно q двухвходовых конъюнкторов, не являющихся выходными элементами цепочек $Z_1, \ldots, Z_m$. В случае $q = 0$ легко видеть, что неисправность любого элемента схемы S_0 прибавляет по модулю 2 единицу к функции, реализуемой этой схемой (возможно, уже при наличии в ней неисправных элементов). Поэтому все ф. н. схемы S_0 принадлежат множеству $\{f, f \oplus 1\} = \{f, \overline{f}\}$. Отсюда следует, что множество, состоящее из любого одного n-набора, является для этой схемы ПДТ длины 1.

Далее будем считать, что $q \geqslant 1$. Обозначим указанные в предыдущем абзаце q двухвходовых конъюнкторов через $E_1, \ldots, E_q$ (в произвольном порядке). Построим схему S^* в базисе B_{12} с четырьмя входами «x», «y», «z» и «t» и одним выходом. Возьмём трёхвходовой конъюнктор, на входы которого подаются переменные x, y и z, и двухвходовой конъюнктор, на входы которого подаются переменные x и t. Выходы этих элементов, а также вход «x» схемы S^* соединим цепочкой из двух сумматоров, выход которой объявим выходом данной схемы. Легко видеть, что на этом выходе реализуется функция $h(x, y, z, t) = xyz \oplus xt \oplus x$, а все ф. н. схемы S^* принадлежат множеству $\{h, h \oplus 1\} = \{h, \overline{h}\}$.

Для каждого конъюнктора E_j, $j = 1, \ldots, q$, возьмём копию S_j схемы S^*, вход «t» которой соединим с выходом данного конъюнктора, а входы «y» и «z» — с теми входами схемы S_0 или выходами элементов, с которыми в схеме S_0 соединяются входы конъюнктора E_j. Затем соединим все построенные подсхемы $S_1, \ldots, S_q$ в цепочку Z_C через их входы «x», оставшиеся незанятыми; при этом вход «x» подсхемы S_1 соединим с выходом схемы S_0, а для каждого $j \in \{2, \ldots, q\}$ (при $q \geqslant 2$) вход «x» подсхемы S_j соединим с выходом подсхемы S_{j-1}. Выходом цепочки Z_C объявим выход подсхемы S_q. Полученную схему обозначим через S (см. рисунок 17.1; каждое из многоточий над верхними конъюнкторами обозначает либо вход схемы, либо выход предыдущего конъюнктора из той же цепочки и её верхнюю часть). Выходом схемы S будем считать выход цепочки Z_C.

Докажем, что построенная схема S при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. Эта функция по построению реализуется на выходе подсхемы S_0. Рассмотрим подсхему S_j, $j = 1, \ldots, q$. Пусть на её входы «x», «y», «z» и «t» в схеме S подаются б. ф. φ_x, φ_y, φ_z и φ_t соответственно, тогда на её выходе реализуется функция $h(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_t)$. Как было отмечено выше, входы «y» и «z» подсхемы S_j соединяются с теми же выходами элементов или входами подсхемы S_0 (а значит, и схемы S), что и входы конъюнктора E_j, выход которого соединён со входом «t» подсхемы S_j. Поэтому на выходе конъюнктора E_j в схеме S

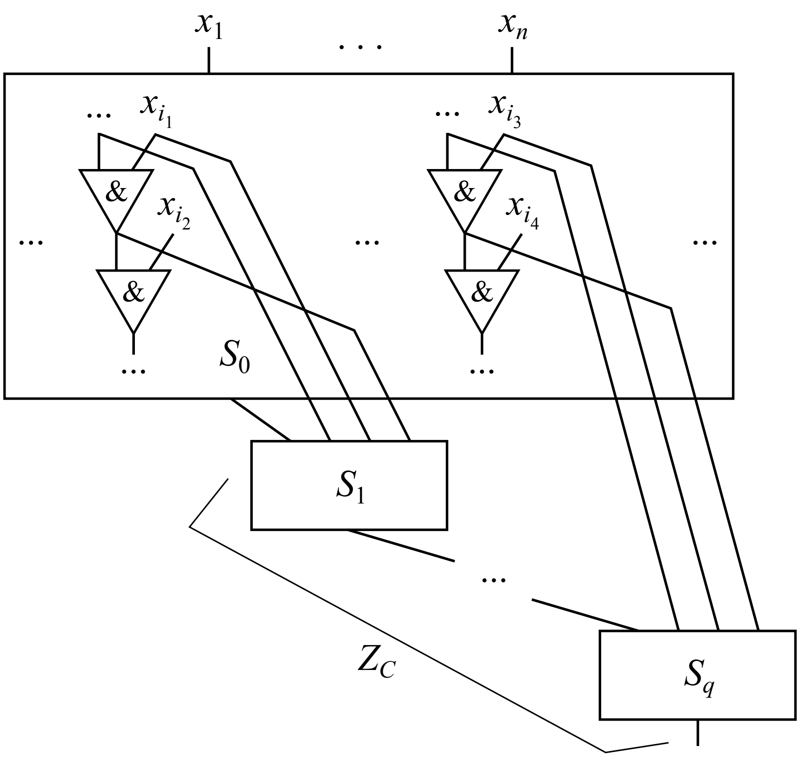

Рис. 17.1. Схема S

реализуется функция $\varphi_t = \varphi_y \& \varphi_z$, а на выходе подсхемы S_j — функция

$$h(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \varphi_y \& \varphi_z) = \varphi_x \varphi_y \varphi_z \oplus \varphi_x \varphi_y \varphi_z \oplus \varphi_x = \varphi_x. \tag{17.1}$$

Таким образом, функция, реализуемая на выходе каждой подсхемы в цепочке Z_C, совпадает с функцией, подающейся на вход «x» этой подсхемы. В силу построения цепочки Z_C это означает, что на её выходе в схеме S реализуется та же б. ф., что и на выходе подсхемы S_0, т. е. Функция $f(\tilde{x}^n)$, что и требовалось доказать.

Найдём все возможные ф. н. схемы S. Зафиксируем некоторую неисправность элементов этой схемы. Рассмотрим два случая.

1. Среди конъюнкторов $E_1, \ldots, E_q$ есть хотя бы один неисправный элемент. Среди всех таких неисправных элементов выберем элемент E_d с наибольшим нижним индексом. Тогда каждый двухвходовой конъюнктор E_j, $j = d+1, \ldots, q$ (при $d < q$), исправен, поэтому на его выходе реализуется конъюнкция функций, подаваемых на его входы, а на выходе подсхемы S_j — функция, подаваемая на вход «x» данной подсхемы, или отрицание этой функции, по аналогии с (17.1) и с учётом того, что схема S^* реализует функцию из множества $\{h, \overline{h}\}$. Таким образом, на выходе цепочки Z_C, т. е. на выходе схемы S, будет реализована та же б. ф., что и на выходе подсхемы S_d, или её отрицание.

Далее, пусть на входы «x», «y», «z» и «t» подсхемы S_d в схеме S подаются б. ф. φ'_x, φ'_y,

φ'_z и φ'_t соответственно, тогда на выходе подсхемы S_d с учётом возможных неисправностей внутри неё реализуется функция вида $h(\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z, \varphi'_t) \oplus \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$. Как было отмечено выше, входы «y» и «z» подсхемы S_d соединяются с теми же выходами элементов или входами схемы S, что и входы конъюнктора E_d, выход которого соединён со входом «t» подсхемы S_d. Так как конъюнктор E_d неисправен, то на его выходе в схеме S реализуется функция $\varphi'_t = \varphi'_y \varphi'_z \oplus 1$, а на выходе подсхемы S_d — функция

$$h(\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z, \varphi'_y\varphi'_z \oplus 1) \oplus \alpha = (\varphi'_x\varphi'_y\varphi'_z \oplus \varphi'_x(\varphi'_y\varphi'_z \oplus 1) \oplus \varphi'_x) \oplus \alpha \equiv 0 \oplus \alpha = \alpha.$$

Значит, функция, реализуемая на выходе схемы S, будет равна либо α, либо $\overline{\alpha}$, т. е. некоторой булевой константе. Случай 1 разобран.

2. Все конъюнкторы $E_1, \ldots, E_q$ исправны. Тогда на выходе каждого элемента E_j, $j = 1, \ldots, q$, реализуется конъюнкция функций, подаваемых на его входы, а на выходе подсхемы S_j — функция, подаваемая на вход «x» данной подсхемы, или отрицание этой функции, по аналогии с (17.1) и с учётом того, что схема S^* реализует функцию из множества $\{h, \overline{h}\}$. Таким образом, на выходе цепочки Z_C, т. е. на выходе схемы S, будет реализована та же б. ф., что и на выходе подсхемы S_0, или её отрицание. По предположению случая 2 в подсхеме S_0 могут быть неисправны только выходные двухвходовые конъюнкторы цепочек $Z_1, \ldots, Z_m$, сумматоры из цепочки $Z_\oplus$, а также элемент «константа 1». Легко видеть, что неисправность каждого такого элемента прибавляет по модулю 2 единицу к функции, реализуемой подсхемой S_0. Поэтому на выходе данной подсхемы будет реализована функция из множества $\{f, f \oplus 1\} = \{f, \overline{f}\}$, а на выходе схемы S — функция из этого же множества. Случай 2 разобран.

В итоге получаем, что все ф. н. схемы S принадлежат множеству $\{0, 1, f, \overline{f}\}$, при этом по предположению $f \notin \{0, 1\}$. Пусть $\tilde{\sigma}_0$, $\tilde{\sigma}_1$ — такие n-наборы, что $f(\tilde{\sigma}_0) = 0$, $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Тогда на наборе $\tilde{\sigma}_0$ каждую из функций $0, f$ можно отличить от каждой из функций $1, \overline{f}$, а на наборе $\tilde{\sigma}_1$ функцию f можно отличить от константы 0, а функцию $\overline{f}$ — от константы 1. Таким образом, множество $\{\tilde{\sigma}_0, \tilde{\sigma}_1\}$ является для схемы S ПДТ длины 2. Теорема 17.1 доказана. □

Замечание 17.1. В работе Д. С. Романова [219], посвящённой полным проверяющим тестам для СФЭ относительно ИН на выходах элементов, рассматривались только тестопригодные схемы, т. е. такие схемы, в которых любые допустимые неисправности элементов приводят к функциям неисправности, отличным от исходных функций, реализуемых данными схемами (понятие тестопригодных схем введено Романовым и является обобщением понятия неизбыточных схем на случай произвольного числа неисправных элементов). В то же время схема S, построенная в ходе доказательства теоремы 17.1, вообще говоря, не является тестопригодной, как и схема из доказательства основной теоремы упомянутой во вступлении к этому параграфу работы [228].

§18. Метод построения схем, допускающих короткие единичные диагностические тесты

В данном параграфе предложен метод построения СФЭ в произвольном ф. п. базисе, допускающих короткие единичные диагностические тесты относительно ОКН, ПКН либо ИН на входах и/или выходах элементов, основанный на существовании схем в том же базисе, допускающих короткие единичные проверяющие тесты относительно неисправностей такого же типа (теорема 18.1). С использованием этого метода получен ряд новых верхних оценок функций Шеннона длины ЕДТ для схем в различных базисах при различных неисправностях элементов (теоремы 18.2–18.6).

Пусть $f(\tilde{x}^n)$ — б. ф., T — множество (некоторых) n-наборов, $\alpha \in \{0, 1\}$. Будем говорить, что функция f *обладает* (T, α)*-свойством*, если существует n-набор, не принадлежащий множеству T, на котором данная функция принимает значение α.

Единичную неисправность ФЭ будем называть М,Н-*неисправностью элемента*, если возможные место и тип этой неисправности задаются значениями $\text{М} \in \{\text{I}, \text{O}, \text{IO}\}$ и $\text{Н} \in \{0, 1, 01, \text{Inv}\}$ соответственно. Например, в случае $\text{М} = \text{IO}$ и $\text{Н} = 01$ под М,Н-неисправностью элемента понимается ПКН на каком-то одном его входе/выходе.

Теорема 18.1 [167]. *Пусть для* $\text{М} \in \{\text{I}, \text{O}, \text{IO}\}$, $\text{Н} \in \{0, 1, 01, \text{Inv}\}$, *неконстантной б. ф.* $f(\tilde{x}^n)$ *и ф. п. базиса* B *существуют такие* $m \in \mathbb{N}$, *двоичные наборы* $\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, \ldots, c_{1,m})$, $\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, \ldots, c_{0,m})$, *б. ф.* $\varphi(\tilde{x}^m)$, *множество* $T = \{\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l\}$ *двоичных наборов длины* n, *где* $|T| < 2^n$, *подмножества* $M_1, \ldots, M_m$ *множества* T *и двоичные наборы* $\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_l$ *длины* m, *что выполнены следующие условия*:

1) *для любого* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *функцию* $f_i(\tilde{x}^n) = (c_{1,i} f \oplus c_{0,i} \overline{f} \oplus I_{M_i})(\tilde{x}^n)$ *можно реализовать СФЭ* S_i *в базисе* B, *неизбыточной и допускающей ЕПТ* T *относительно* М,Н-*неисправностей элементов*;

2) $\tilde{\pi}_j = (f_1(\tilde{\sigma}_j), \ldots, f_m(\tilde{\sigma}_j))$ *для любого* $j \in \{1, \ldots, l\}$;

3) *функцию* $\varphi(\tilde{x}^m)$ *можно реализовать СФЭ* S_φ *в базисе* B, *неизбыточной и допускающей ЕПТ* T_φ *относительно* М,Н-*неисправностей элементов, кроме, быть может, кон-*

стантных неисправностей на выходе выходного элемента схемы, где

$$T_\varphi = \begin{cases} \{\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_l, \tilde{c}_a\}, & \text{если функция } f \text{ не обладает } (T, \overline{a})\text{-свойством} \\ & \text{для некоторого } a \in \{0,1\}, \\ \{\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_l, \tilde{c}_1, \tilde{c}_0\} & \text{иначе;} \end{cases}$$

4) *функция $\varphi(\tilde{x}^m)$ принимает значение α на наборе $\tilde{c}_\alpha$ и всех соседних с ним наборах для любого $\alpha \in \{0,1\}$ такого, что функция f обладает (T, α)-свойством;*

5) *функция $\varphi(\tilde{x}^m)$ принимает значение $f(\tilde{\sigma}_j)$ на наборе $\tilde{\pi}_j$ и значение $\overline{f}(\tilde{\sigma}_j)$ на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_j$, для любого $j \in \{1, \ldots, l\}$.*

Тогда

$$D^{B;\,\text{Н}}_{\text{ЕД}\,(\text{М})}(f) \leqslant \begin{cases} |T| + 1, & \text{если функция } f \text{ не обладает } (T, \overline{a})\text{-свойством} \\ & \text{для некоторого } a \in \{0,1\}, \\ |T| + 2 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Входы схемы S_φ соединим с выходами схем $S_1, \ldots, S_m$ (1-й вход — с выходом схемы S_1, …, m-й вход — с выходом схемы S_m). Полученную схему с n входами, на которые подаются переменные $x_1, \ldots, x_n$, и выходом, совпадающим с выходом схемы S_φ, обозначим через S (см. рисунок 18.1); очевидно, что она является схемой в базисе B.

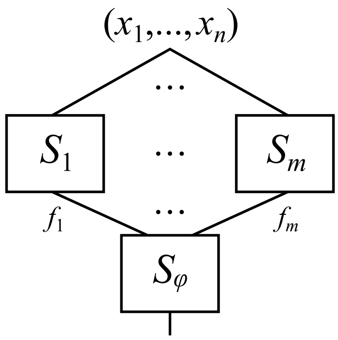

Рис. 18.1. Схема S

Докажем, что данная схема при отсутствии в ней неисправностей реализует функцию $f(\tilde{x}^n)$. На выходах подсхем $S_1, \ldots, S_m$ по условию 1) реализуются функции $f_1(\tilde{x}^n), \ldots, f_m(\tilde{x}^n)$ соответственно. На любом таком n-наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, не принадлежащем множеству T (а значит, и множеству M_i), что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha$, где $\alpha \in \{0,1\}$, на выходе подсхемы S_i, $i = 1, \ldots, m$, возникнет значение

$$f_i(\tilde{\tau}_\alpha) = c_{1,i} f(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{\tau}_\alpha) \oplus I_{M_i}(\tilde{\tau}_\alpha) = c_{1,i}\alpha \oplus c_{0,i}\overline{\alpha} \oplus 0 = c_{\alpha,i}.$$

Тогда на входы подсхемы S_φ поступит набор $\tilde{c}_\alpha$, а на её выходе, т. е. на выходе схемы S, возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условий 3), 4). Далее, для любого $j \in \{1, \ldots, l\}$ на наборе $\tilde{\sigma}_j$ на выходах подсхем $S_1, \ldots, S_m$ возникнут значения $f_1(\tilde{\sigma}_j), \ldots, f_m(\tilde{\sigma}_j)$ соответственно, поэтому на входы подсхемы S_φ поступит набор $\tilde{\pi}_j$, а на выходе схемы S возникнет значение $f(\tilde{\sigma}_j)$ в силу условий 2), 3), 5). Тем самым показано, что на любом n-наборе схема S выдаёт такое же значение, как и функция $f(\tilde{x}^n)$, т. е. реализует эту функцию, что и требовалось доказать.

Найдём все возможные ф. н. схемы S относительно М,Н-неисправности одного элемента и докажем, что она неизбыточна. Пусть сначала неисправный элемент содержится в какой-то подсхеме S_i, $i \in \{1, \ldots, m\}$. На любом входном наборе схемы S среди всех значений на входах подсхемы S_φ, очевидно, может измениться только значение на её i-м входе. Поэтому на любом таком n-наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, не принадлежащем множеству T, что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, на входы подсхемы S_φ поступит либо набор $\tilde{c}_\alpha$, либо набор, отличающийся от указанного только в i-й компоненте. Тогда на выходе схемы S возникнет значение $\alpha = f(\tilde{\tau}_\alpha)$ в силу условий 3), 4). Далее, множество T является ЕПТ для неизбыточной схемы S_i по условию 1), поэтому рассматриваемую неисправность можно обнаружить на каком-то наборе $\tilde{\sigma}_j \in T$, где $j \in \{1, \ldots, l\}$. Тогда на этом наборе на входы подсхемы S_φ поступит набор, отличающийся от набора $\tilde{\pi}_j$ только в i-й компоненте, а на выходе схемы S возникнет значение $\overline{f}(\tilde{\sigma}_j)$ в силу условий 3), 5).

Тем самым показано, что любая ф. н. схемы S, возникающая при М,Н-неисправности одного элемента в одной из подсхем $S_1, \ldots, S_m$, на всех n-наборах, не принадлежащих множеству T, принимает такое же значение, как и функция f, а хотя бы на одном наборе из множества T принимает значение, отличное от значения функции f на этом наборе. Нетрудно заметить, что любую такую ф. н. можно представить в виде $(f \oplus I_{T'})(\tilde{x}^n)$, где T' — некоторое непустое подмножество множества T. Этот вид является частным случаем (при $b_1 = 1$, $b_0 = 0$ и $T' \neq \varnothing$) более общего вида

$$(b_1 f \oplus b_0 \overline{f} \oplus I_{T'})(\tilde{x}^n), \tag{$*$}$$

в котором $b_1, b_0 \in \{0, 1\}$ и $T' \subseteq T$.

Пусть теперь неисправен какой-то один элемент в подсхеме S_φ. Если имеет место константная неисправность на выходе её выходного элемента, то на этом выходе, а значит, и на выходе схемы S, реализуется некоторая булева константа β, которая при этом отлична от функции f по условию теоремы и имеет вид ($*$): действительно,

$$\beta \equiv \beta f \oplus \beta \overline{f} \oplus I_{\varnothing}.$$

Рассмотрим любую другую М,Н-неисправность элемента в подсхеме S_φ. Пусть данная подсхема при этом реализует б. ф. $h(\tilde{x}^m)$ от своих входов. Все элементы в подсхемах $S_1, \ldots, S_m$ исправны, поэтому на любом входном наборе схемы S на входы подсхемы S_φ поступят «правильные» значения. Тогда на любом таком n-наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, не принадлежащем множеству T, что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, на входы указанной подсхемы поступит набор $\tilde{c}_\alpha$, а на выходе схемы S возникнет значение $h(\tilde{c}_\alpha)$, которое мы обозначим через b_α. (По крайней мере один n-набор не принадлежит множеству T в силу условия $|T| < 2^n$.) Далее, при подаче на входы схемы S наборов $\tilde{\sigma}_1, \ldots, \tilde{\sigma}_l$ на входы подсхемы S_φ поступят наборы $\tilde{\pi}_1, \ldots, \tilde{\pi}_l$ соответственно. Таким образом, при подаче на входы схемы S некоторых наборов на входы подсхемы S_φ поступят все наборы из множества T_φ в силу определения этого множества. Функцию h можно отличить от функции φ на наборах из множества T_φ по условию 3), поэтому рассматриваемая неисправность схемы S будет обнаружена хотя бы на одном её входном наборе.

Тем самым показано, что при рассматриваемой неисправности элемента в подсхеме S_φ ф. н. $g(\tilde{x}^n)$ схемы S на любом таком n-наборе $\tilde{\tau}_\alpha$, не принадлежащем множеству T, что $f(\tilde{\tau}_\alpha) = \alpha$, где $\alpha \in \{0, 1\}$, принимает значение b_α. Нетрудно заметить, что функцию g можно представить в виде $(*)$, где

$$T' = \{\tilde{\delta} \in T \mid g(\tilde{\delta}) = b_1 f(\tilde{\delta}) \oplus b_0 \overline{f}(\tilde{\delta}) \oplus 1\}.$$

В итоге получаем, что любая ф. н. схемы S при М,Н-неисправности одного элемента в этой схеме представима в виде $(*)$, где $b_1, b_0 \in \{0, 1\}$ и T' — некоторое подмножество множества T. Кроме того, из приведённых рассуждений вытекает, что значения функции f и любой ф. н. схемы S различаются хотя бы на одном наборе, поэтому данная схема неизбыточна (относительно М,Н-неисправностей элементов). Докажем, что она допускает ЕДТ длины не более

$$\begin{cases} |T| + 1, & \text{если функция } f \text{ не обладает } (T, \overline{a})\text{-свойством для некоторого } a \in \{0, 1\}, \\ |T| + 2 & \text{иначе;} \end{cases}$$

отсюда будет следовать справедливость теоремы 18.1.

Заметим, что функция f также имеет вид $(*)$ при $b_1 = 1$, $b_0 = 0$ и $T' = \varnothing$. Пусть g и $\hat{g}$ — две произвольные различные б. ф. вида $(*)$, причём $g(\tilde{x}^n) = (b_1 f \oplus b_0 \overline{f} \oplus I_{T'})(\tilde{x}^n)$, $\hat{g}(\tilde{x}^n) = (\hat{b}_1 f \oplus \hat{b}_0 \overline{f} \oplus I_{\hat{T}'})(\tilde{x}^n)$, где $b_1, b_0, \hat{b}_1, \hat{b}_0 \in \{0, 1\}$ и $T', \hat{T}' \subseteq T$. В силу условия $|T| < 2^n$ существует хотя бы один n-набор, не принадлежащий множеству T. Пусть значение функции f на нём равно a; обозначим указанный набор через $\tilde{\tau}_a$. Имеем

$$g(\tilde{\tau}_a) = b_1 f(\tilde{\tau}_a) \oplus b_0 \overline{f}(\tilde{\tau}_a) \oplus I_{T'}(\tilde{\tau}_a) = b_1 a \oplus b_0 \overline{a} \oplus 0 = b_a, \tag{18.1}$$

$$\hat{g}(\tilde{\tau}_a) = \hat{b}_1 f(\tilde{\tau}_a) \oplus \hat{b}_0 \overline{f}(\tilde{\tau}_a) \oplus I_{\hat{T}'}(\tilde{\tau}_a) = \hat{b}_1 a \oplus \hat{b}_0 \overline{a} \oplus 0 = \hat{b}_a. \tag{18.2}$$

Рассмотрим два случая.

1. На любом n-наборе, не принадлежащем множеству T, функция f принимает значение a. Тогда эта функция не обладает $(T,\overline{a})$-свойством, поэтому надо доказать неравенство $D(f) \leqslant |T|+1$. Если $b_a \neq \hat{b}_a$, то $g(\tilde{\tau}_a) \neq \hat{g}(\tilde{\tau}_a)$ в силу (18.1), (18.2) и функции g и $\hat{g}$ можно отличить друг от друга на наборе $\tilde{\tau}_a$. Если же $b_a = \hat{b}_a$, то по аналогии с (18.1), (18.2) можно доказать равенства $g(\tilde{\tau}'_a) = b_a$ и $\hat{g}(\tilde{\tau}'_a) = \hat{b}_a$, а значит, и равенство $g(\tilde{\tau}'_a) = \hat{g}(\tilde{\tau}'_a)$ для любого n-набора $\tilde{\tau}'_a$, не принадлежащего множеству T. Таким образом, функции $g(\tilde{x}^n)$ и $\hat{g}(\tilde{x}^n)$ могут различаться только на наборах из множества T и обязаны различаться хотя бы на одном таком наборе, поскольку $g \neq \hat{g}$. Получаем, что любые две различные функции g и $\hat{g}$ вида $(*)$ можно отличить друг от друга на наборах из множества $\{\tilde{\tau}_a\} \cup T$, откуда вытекает, что данное множество является ЕДТ длины $|T|+1$ для схемы S и требуемое утверждение доказано.

2. Существует такой n-набор $\tilde{\tau}_{\overline{a}}$, не принадлежащий множеству T, на котором функция f принимает значение $\overline{a}$. Тогда эта функция обладает (T,a)-свойством и $(T,\overline{a})$-свойством, поэтому надо доказать неравенство $D(f) \leqslant |T|+2$. Имеем

$$g(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) = b_1 f(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \oplus b_0 \overline{f}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \oplus I_{T'}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) = b_1\overline{a} \oplus b_0 a \oplus 0 = b_{\overline{a}},$$
$$\hat{g}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) = \hat{b}_1 f(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \oplus \hat{b}_0 \overline{f}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \oplus I_{\hat{T}'}(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) = \hat{b}_1\overline{a} \oplus \hat{b}_0 a \oplus 0 = \hat{b}_{\overline{a}}.$$

Если $b_a \neq \hat{b}_a$ или $b_{\overline{a}} \neq \hat{b}_{\overline{a}}$, то $g(\tilde{\tau}_a) \neq \hat{g}(\tilde{\tau}_a)$ или $g(\tilde{\tau}_{\overline{a}}) \neq \hat{g}(\tilde{\tau}_{\overline{a}})$ в силу (18.1), (18.2) и выписанных равенств, поэтому функции g и $\hat{g}$ можно отличить друг от друга хотя бы на одном из наборов $\tilde{\tau}_a$, $\tilde{\tau}_{\overline{a}}$. Если же $b_a = \hat{b}_a$ и $b_{\overline{a}} = \hat{b}_{\overline{a}}$, т. е. $b_1 = \hat{b}_1$ и $b_0 = \hat{b}_0$, то из определения функций g, $\hat{g}$ и соотношения $g \neq \hat{g}$ следует, что $T' \neq \hat{T}'$; в таком случае легко видеть, что функции g и $\hat{g}$ можно отличить друг от друга на наборах из множества $T' \triangle \hat{T}' \subseteq T$. Получаем, что любые две различные функции g и $\hat{g}$ вида $(*)$ можно отличить друг от друга на наборах из множества $\{\tilde{\tau}_a, \tilde{\tau}_{\overline{a}}\} \cup T$, откуда вытекает, что данное множество является ЕДТ длины $|T|+2$ для схемы S и требуемое утверждение, а вместе с ним теорема 18.1 доказаны. □

Далее рассмотрим различные приложения теоремы 18.1. Докажем сначала одно вспомогательное утверждение, которое будет использовано в доказательствах нижеследующих теорем 18.2, 18.6.

Лемма 18.1 [167]. *Пусть для* $\mathrm{M} \in \{\mathrm{I}, \mathrm{O}, \mathrm{IO}\}$, $\mathrm{H} \in \{0, 1, 01, \mathrm{Inv}\}$ *и ф. п. базиса B выполнены следующие условия*:

а) *любую б. ф. от n переменных, принимающую на наборе $(\tilde{1}^n)$ значение* 1, *можно реализовать СФЭ в базисе B, неизбыточной и допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно* М,Н-*неисправностей элементов*;

б) *любую неконстантную б. ф. от* n *переменных, принимающую на наборе* $(\tilde{1}^n)$ *значение* 0, *можно реализовать СФЭ в базисе* B, *неизбыточной и допускающей ЕПТ* $\{(\tilde{1}^n)\}$ *относительно* М,Н-*неисправностей элементов, кроме, быть может, константных неисправностей на выходе выходного элемента схемы.*

Тогда для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ *справедливо неравенство* $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{ЕД}\,(\text{М})}(f) \leqslant 3$.

Доказательство. Введём обозначение $a = f(\tilde{1}^n)$. Положим $m = 4$, $l = 1$,

$$\tilde{c}_a = (c_{a,1}, c_{a,2}, c_{a,3}, c_{a,4}) = (1, 0, 0, 0),$$

$$\tilde{c}_{\overline{a}} = (c_{\overline{a},1}, c_{\overline{a},2}, c_{\overline{a},3}, c_{\overline{a},4}) = (0, 0, 1, 1),$$

$$T = \{(\tilde{1}^n)\},$$

$$\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^4),$$

$$M_1 = \varnothing,$$

$$M_2 = M_3 = M_4 = T.$$

Тогда

$$|T| = 1 < 2^n, \tag{18.3}$$

поскольку $n \geqslant 1$ в силу соотношений $f \not\equiv 0$ и $f \not\equiv 1$ (неравенство $|T| < 2^n$ необходимо проверить для возможности применения в дальнейшем теоремы 18.1).

Пусть $\varphi(\tilde{x}^4)$ — б. ф., удовлетворяющая следующим условиям:

(i) на наборе $\tilde{c}_a$ и всех соседних с ним наборах функция φ принимает значение a;

(ii) на наборе $\tilde{c}_{\overline{a}}$ и всех соседних с ним наборах функция φ принимает значение $\overline{a}$;

(iii) $\varphi(\tilde{\pi}_1) = a$;

(iv) на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_1$, функция φ принимает значение $\overline{a}$.

На всех остальных двоичных наборах длины 4 функция φ может принимать произвольные значения.

Заметим, что набор $\tilde{c}_a$ отличается от каждого из наборов $\tilde{c}_{\overline{a}}$, $\tilde{\pi}_1$ в трёх компонентах, поэтому никакой набор, соседний с набором $\tilde{c}_a$, не может быть соседним ни с одним наборов $\tilde{\pi}_1$, $\tilde{c}_{\overline{a}}$. Кроме того, набор $\tilde{\pi}_1$ отличается от набора $\tilde{c}_{\overline{a}}$ в двух компонентах, поэтому не является соседним с этим набором. Тем самым показано, что множества наборов, на которых функция $\varphi(\tilde{x}^4)$ принимает значения a и $\overline{a}$, не пересекаются, т. е. она определена корректно.

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 18.1. Для любого $i \in$ $\in \{1, 2, 3, 4\}$ имеем

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} f(\tilde{1}^n) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{1}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = c_{1,i} a \oplus c_{0,i} \overline{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n). \tag{18.4}$$

При $i = 1$ указанное соотношение принимает вид

$$f_1(\tilde{1}^n) = c_{a,1} \oplus I_{M_1}(\tilde{1}^n) = 1 \oplus I_{\varnothing}(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 0 = 1,$$

а при $i = 2, 3, 4$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = 0 \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 1 = 1.$$

Тем самым для любого $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ доказано равенство $f_i(\tilde{1}^n) = 1$. Тогда по условию а) леммы функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать СФЭ в базисе B, неизбыточной и допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^n)\}$ относительно М,Н-неисправностей элементов, поэтому условие 1) выполнено. Из этого же равенства следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^4)$. Далее, в силу условий а), б) леммы функцию $\varphi(\tilde{x}^4)$ можно реализовать СФЭ в базисе B, неизбыточной и допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1\} \subset T_\varphi$ относительно М,Н-неисправностей элементов, кроме, быть может, константных неисправностей на выходе выходного элемента схемы, поэтому условие 3) также выполнено. Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii), (iv). Таким образом, выполнены все условия теоремы 18.1, из которой следует, что $D(f) \leqslant |T| + 2 = 3$. Лемма 18.1 доказана. □

Рассмотрим базис $B_8(1) = \{x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3, \overline{x}\}$, а в качестве неисправностей ФЭ — ОКН типа 0 на входах и выходах элементов.

Лемма 18.2 [167]. *Любую б. ф. от n переменных, принимающую на наборе $(\tilde{1}^n)$ значение* 1, *можно реализовать неизбыточной схемой в базисе* $B_8(1)$, *допускающей ЕПТ* $\{(\tilde{1}^n)\}$.

Лемма 18.2 следует из леммы 13.2 при $k = 1$ и того очевидного факта, что любую б. ф. вида (8.1) можно реализовать неизбыточной схемой, не содержащей ФЭ, для которой любое множество n-наборов, в том числе и $\{(\tilde{1}^n)\}$, является ЕПТ.

Лемма 18.3 [167]. *Любую б. ф. от n переменных, принимающую на наборе $(\tilde{1}^n)$ значение* 0, *можно реализовать неизбыточной схемой в базисе* $B_8(1)$, *допускающей ЕПТ* $\{(\tilde{1}^n)\}$ *относительно ІО-неисправностей, при которых выход выходного элемента схемы исправен.*

Лемма 18.3 следует из леммы 13.2 при $k = 1$.

Теорема 18.2 [167]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство* $D^{B_8(1);\,0}_{\text{ЕД}\,(\text{IO})}(n) \leqslant 3$.

Доказательство. Для М = ІО, Н = 0 и базиса $B = B_8(1)$ условие а) леммы 18.1 выполнено в силу леммы 18.2, а условие б) леммы 18.1 — в силу леммы 18.3. Из леммы 18.1

вытекает, что $D(f) \leqslant 3$ для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. В случае $f \equiv 1$ функцию f можно реализовать схемой, состоящей из одного трёхвходового элемента, реализующего функцию вида $x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, на все входы которого подаётся переменная x_1; действительно, $x_1x_1x_1 \vee \overline{x}_1\overline{x}_1\overline{x}_1 \equiv 1$. Легко видеть, что при неисправности выхода этого элемента схема будет реализовывать константу 0, а при неисправности любого его входа — функцию $\overline{x}_1$, поскольку $0x_1x_1 \vee 1\overline{x}_1\overline{x}_1 = \overline{x}_1$. Любые две из функций $1, 0, \overline{x}_1$ можно отличить друг от друга на множестве $\{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\}$, поэтому $D(f) \leqslant 2$. Наконец, если $f \equiv 0$, то значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Из приведённых рассуждений следует, что $D(n) \leqslant 3$ для любого $n \geqslant 0$. Теорема 18.2 доказана. $\square$

При $n \geqslant 0$ из теоремы 18.2 и следствия 8.1 можно получить неравенство

$$D^{B_8^*(1);\,1}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 3 \qquad (18.5)$$

для базиса $B_8^*(1) = \{\overline{x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3}, \overline{x}\}$, а из теоремы 18.2 и соотношения (18.5) — неравенства $D^{B_8(1);\,0}_{\text{ЕД (I)}}(n) \leqslant 3$, $D^{B_8^*(1);\,1}_{\text{ЕД (I)}}(n) \leqslant 3$, $D^{B_8(1);\,0}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 3$ и $D^{B_8^*(1);\,1}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 3$.

Рассмотрим базис Жегалкина $B_1' = \{\&, \oplus, 1\}$, а в качестве неисправностей ФЭ — ОКН типа 1 на выходах элементов. На научную новизну следующей леммы автор не претендует.

Лемма 18.4 [167]. *Любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, отличную от константы 1, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_1', допускающей ЕПТ $\{\tilde{\sigma}\}$, где $\tilde{\sigma}$ — нулевой набор этой функции, содержащий максимальное число единиц.*

Доказательство. В случае $f \equiv 0$ реализуем функцию f схемой в базисе B_1', состоящей из одного сумматора, на оба входа которого подаётся константа 1. У такой схемы, очевидно, есть только одна ф. н. — константа 1, поэтому множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является для неё ЕПТ, что и требовалось доказать. В случае же $f \not\equiv 0$ лемма 18.4 следует из доказательства основной теоремы работы [47] (в указанной работе, на самом деле, рассматривался базис $\{\&, \oplus, 1, 0\}$, но элемент «константа 0» из этого базиса использовался только при построении схемы, реализующей тождественный нуль.) $\square$

Теорема 18.3 [167]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D^{B_1';\,1}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 3$.*

Доказательство. Пусть f — произвольная б. ф. от n переменных. Докажем неравенство

$$D(f) \leqslant 3; \qquad (18.6)$$

из него будет следовать справедливость теоремы 18.3. Если $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$), то функцию f можно реализовать схемой в базисе B_1', состоящей из одного элемента «константа 1» (соответственно состоящей из одного сумматора, на оба входа которого подаётся константа 1).

У такой схемы нет ни одной ф. н. (соответственно есть только одна ф. н. — константа 1), поэтому множество, состоящее из любого одного n-набора, является для неё ЕДТ длины 1 и неравенство (18.6) выполнено.

Далее будем считать, что функция f отлична от констант. Тогда существует хотя бы один её нулевой набор и $n \geqslant 1$. Рассмотрим два случая.

1. Единственным нулевым набором функции $f(\tilde{x}^n)$ является набор $(\tilde{1}^n)$. Положим $m = 2$, $l = 1$,

$$\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}) = (1, 1),$$

$$\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}) = (0, 0),$$

$$T = \{(\tilde{1}^n)\},$$

$$\tilde{\pi}_1 = (0, 0),$$

$$M_1 = M_2 = \varnothing,$$

$$\varphi(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2.$$

Отметим, что имеет место соотношение (18.3). Оно также будет справедливо и в случае 2.

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 18.1. Для любого $i \in \{1, 2\}$ имеем

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} f(\tilde{1}^n) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{1}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = 1 \cdot 0 \oplus 0 \cdot 1 \oplus I_{\varnothing}(\tilde{1}^n) = 0.$$

Из равенств $f_i(\tilde{1}^n) = 0$, где $i = 1, 2$, и леммы 18.4 следует, что функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_1', для которой множество T является ЕПТ, и условие 1) выполнено. Из этих же равенств следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (0, 0)$. Набор $\tilde{\pi}_1$ является нулевым набором функции $\varphi(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$, содержащим максимальное число единиц, поэтому в силу леммы 18.4 данную функцию можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_1', допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1\} \subset T_\varphi$, и условие 3) также выполнено. Условия 4) и 5) следуют из свойств функции $x_1 \vee x_2$ и того факта, что функция f не обладает $(T, 0)$-свойством. Таким образом, выполнены все условия теоремы 18.1, из которой следует, что $D(f) \leqslant |T| + 1 < 3$. Случай 1 разобран.

2. Существует нулевой набор функции $f(\tilde{x}^n)$, отличный от набора $(\tilde{1}^n)$. Введём обозначение $a = f(\tilde{1}^n)$. Положим $m = 6$, $l = 1$,

$$\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5}, c_{1,6}) = (1, 1, 1, 0, 0, 0),$$

$$\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3}, c_{0,4}, c_{0,5}, c_{0,6}) = (\tilde{1}^6),$$

$$T = \{(\tilde{1}^n)\},$$

$$\tilde{\pi}_1 = (\tilde{0}^6),$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = T,$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = \begin{cases} T, & \text{если } a = 0, \\ \varnothing, & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

Пусть $\varphi(\tilde{x}^6)$ — произвольная б. ф., удовлетворяющая условиям (i)–(iv) (см. с. 328). Любые два из наборов $\tilde{c}_1, \tilde{c}_0, \tilde{\pi}_1$ отличаются друг от друга хотя бы в трёх компонентах, поэтому данная функция определена корректно.

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 18.1. Для любого $i \in \in \{1,2,3,4,5,6\}$ выполнено соотношение (18.4). При $i = 1,2,3$ оно принимает вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{a,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 0$, $i = 4,5,6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 4,5,6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 0 = 0.$$

Тем самым для любых $a \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ доказано равенство $f_i(\tilde{1}^n) = 0$. Тогда по лемме 18.4 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_1', для которой множество T является ЕПТ, и условие 1) выполнено. Из этого же равенства следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{0}^6)$. Набор $\tilde{c}_0$ в силу условия (i) является нулевым набором функции $\varphi(\tilde{x}^6)$, содержащим максимальное число единиц, поэтому по лемме 18.4 данную функцию можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_1', допускающей ЕПТ $\{\tilde{c}_0\} \subset T_\varphi$, и условие 3) также выполнено. (Включение $\{\tilde{c}_0\} \subset T_\varphi$ верно в силу определения множества T_φ в формулировке теоремы 18.1 и того факта, что функция f обладает $(T,0)$-свойством по предположению случая 2.) Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii), (iv). Таким образом, выполнены все условия теоремы 18.1, из которой следует, что $D(f) \leqslant |T| + 2 = 3$. Теорема 18.3 доказана. $\square$

Из теоремы 18.3 и следствия 8.1 можно получить неравенство $D^{B_1'^*;\,0}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 3$ при $n \geqslant 0$ для базиса $B_1'^* = \{\vee, \sim, 0\}$.

Рассмотрим в качестве неисправностей ФЭ ПКН на входах и выходах элементов, а в качестве базиса — множество $B_{10}(1) = \{\eta(\tilde{x}^4), x_1 \sim x_2, \overline{x}, 0\}$, где $\eta(\tilde{x}^4)$ — произвольная несамодвойственная б. ф., принимающая значение α на наборе $(\tilde{\alpha}^4)$ и значение $\overline{\alpha}$ на всех соседних с ним наборах для любого $\alpha \in \{0,1\}$.

Лемма 18.5 [167]. *Любую б. ф. от n переменных, принимающую разные значения на противоположных наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, можно реализовать неизбыточной схемой в базисе $B_{10}(1)$, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$.*

Лемма 18.5 следует из леммы 15.1 при $k = 1$ и $\varphi(\tilde{x}^{2k+2}) = \eta(\tilde{x}^4)$.

Лемма 18.6 [167]. *Любую б. ф. от n переменных, принимающую значение 1 на противоположных наборах $\tilde{\sigma}_1$ и $\tilde{\sigma}_2$, можно реализовать схемой в базисе $B_{10}(1)$, неизбыточной и допускающей ЕПТ $\{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\}$ относительно ІО-неисправностей, кроме неисправности типа 1 на выходе выходного элемента схемы.*

Лемма 18.6 доказывается по аналогии с доказательством леммы 15.2 при $k = 1$.

Теорема 18.4 [167]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство $D^{B_{10}(1);\,01}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 4$.*

Доказательство. Пусть f — произвольная б. ф. от n переменных. Если $f \equiv 1$, то значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Для любой другой функции f докажем неравенство $D(f) \leqslant 4$; из него будет следовать справедливость теоремы 18.4. В случае $f \equiv 0$ данное неравенство вытекает из утверждения 8.6, а в случае $n = 1$ и $f(x_1) \in \{x_1, \overline{x}_1\}$ — из утверждений 8.1 и 8.7. Далее будем считать, что $n \geqslant 2$ и функция f отлична от констант. Тогда существует такой n-набор $\tilde{\sigma}_1$, что $f(\tilde{\sigma}_1) = 1$. Пусть $\tilde{\sigma}_2$ — набор, противоположный набору $\tilde{\sigma}_1$. Введём обозначение $a = f(\tilde{\sigma}_2)$. Положим $m = 6$, $l = 2$,

$$\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5}, c_{1,6}) = (1,1,1,0,0,0),$$

$$\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3}, c_{0,4}, c_{0,5}, c_{0,6}) = (0,0,0,1,1,1),$$

$$T = \{\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2\},$$

$$\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6),$$

$$\tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6),$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } a = 0, \\ \{\tilde{\sigma}_2\}, & \text{если } a = 1, \end{cases}$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = \begin{cases} T, & \text{если } a = 0, \\ \{\tilde{\sigma}_1\}, & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

Тогда

$$|T| = 2 < 2^n, \tag{18.7}$$

поскольку $n \geqslant 2$.

Пусть $\varphi(\tilde{x}^6)$ — б. ф., удовлетворяющая следующим условиям:

(iii′) $\varphi(\tilde{\pi}_1) = 1$;

(iv′) на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_1$, функция φ принимает значение 0;

(v) $\varphi(\tilde{\pi}_2) = a$;

(vi) на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_2$, функция φ принимает значение $\overline{a}$,

а также условиям (i), (ii).

На всех остальных двоичных наборах длины 6 функция φ может принимать произвольные значения.

Любые два из наборов $\tilde{c}_1, \tilde{c}_0, \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2$ отличаются друг от друга хотя бы в трёх компонентах, поэтому данная функция определена корректно.

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 18.1. Для любого $i \in$ $\in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ имеем

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} f(\tilde{\sigma}_1) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{\sigma}_1) \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_1),$$

$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{1,i} f(\tilde{\sigma}_2) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{\sigma}_2) \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_2) = c_{1,i} a \oplus c_{0,i} \overline{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_2) = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{\sigma}_2).$$

При $a = 0$, $i = 1, 2, 3$ указанные соотношения принимают вид

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_{\varnothing}(\tilde{\sigma}_1) = 1 \oplus 0 = 1,$$

$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{0,i} \oplus I_{\varnothing}(\tilde{\sigma}_2) = 0 \oplus 0 = 0;$$

при $a = 0$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_T(\tilde{\sigma}_1) = 0 \oplus 1 = 1,$$

$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{\sigma}_2) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 1, 2, 3$ — вид

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_{\{\tilde{\sigma}_2\}}(\tilde{\sigma}_1) = 1 \oplus 0 = 1,$$

$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{1,i} \oplus I_{\{\tilde{\sigma}_2\}}(\tilde{\sigma}_2) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{\sigma}_1) = c_{1,i} \oplus I_{\{\tilde{\sigma}_1\}}(\tilde{\sigma}_1) = 0 \oplus 1 = 1,$$

$$f_i(\tilde{\sigma}_2) = c_{1,i} \oplus I_{\{\tilde{\sigma}_1\}}(\tilde{\sigma}_2) = 0 \oplus 0 = 0.$$

Тем самым для любых $a \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ доказаны равенства $f_i(\tilde{\sigma}_1) = 1$, $f_i(\tilde{\sigma}_2) = 0$. Тогда по лемме 18.5 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе $B_{10}(1)$, для которой множество T является ЕПТ, поэтому условие 1) выполнено. Из этих же равенств следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6)$, $\tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6)$.

В случае $a = 0$ в силу условий (iii′), (v) и леммы 18.5 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе $B_{10}(1)$, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\} \subset T_\varphi$. Если же $a = 1$, то из условий (iii′), (v) получаем, что $\varphi(\tilde{\pi}_1) = \varphi(\tilde{\pi}_2) = 1$; тогда в силу леммы 18.6 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать схемой в базисе $B_{10}(1)$, неизбыточной и допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\} \subset$ $\subset T_\varphi$ относительно IO-неисправностей, кроме неисправности типа 1 на выходе её выходного элемента. В каждом из случаев $a = 0$, $a = 1$ получаем, что условие 3) выполнено.

Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii′), (iv′), (v), (vi). Таким образом, выполнены все условия теоремы 18.1, из которой следует, что $D(f) \leqslant |T| + 2 =$ $= 4$. Теорема 18.4 доказана. $\square$

Из теоремы 18.4 вытекают неравенства $D^{B_{10}(1);\,01}_{\text{ЕД (I)}}(n) \leqslant 4$ и $D^{B_{10}(1);\,01}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 4$ для любого $n \geqslant 0$.

Рассмотрим базис $B_4 = \{x \& y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$, а в качестве неисправностей ФЭ — ПКН на выходах элементов.

Теорема 18.5 [167]. *Для любого $n \geqslant 1$ справедливо неравенство $D^{B_4;\,01}_{\text{ЕД (O)}}(n) \leqslant 4$.*

Доказательство. Пусть f — произвольная б. ф. от n переменных. В случаях $f \equiv 0$ и $f \equiv 1$ значение $D(f)$ не определено в силу утверждения 8.2. Для любой другой функции f докажем неравенство $D(f) \leqslant 4$; из него будет следовать справедливость теоремы 18.5. Если $n = 1$ и $f(x_1) \in \{x_1, \overline{x}_1\}$, то данное неравенство вытекает из утверждений 8.1 и 8.7. Далее можно считать, что $n \geqslant 2$. Введём обозначение $a = f(\tilde{1}^n)$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $f(\tilde{0}^n) = \overline{a}$. Положим $m = 6$, $l = 2$,

$$\tilde{c}_1 = (c_{1,1}, c_{1,2}, c_{1,3}, c_{1,4}, c_{1,5}, c_{1,6}) = (1, 1, 1, 0, 0, 0),$$

$$\tilde{c}_0 = (c_{0,1}, c_{0,2}, c_{0,3}, c_{0,4}, c_{0,5}, c_{0,6}) = (0, 0, 0, 1, 1, 1),$$

$$T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\},$$

$$\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6),$$

$$\tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6),$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = \begin{cases} T, & \text{если } a = 0, \\ \varnothing, & \text{если } a = 1, \end{cases}$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } a = 0, \\ T, & \text{если } a = 1. \end{cases}$$

Отметим, что имеет место соотношение (18.7). Оно также будет справедливо и в случае 2.

Пусть $\varphi(\tilde{x}^6)$ — б. ф., удовлетворяющая следующим условиям:

(v′) $\varphi(\tilde{\pi}_2) = \overline{a}$;

(vi′) на всех наборах, соседних с набором $\tilde{\pi}_2$, функция φ принимает значение a,

а также условиям (i)–(iv).

На всех остальных двоичных наборах длины 6 функция φ может принимать произвольные значения.

Проверим выполнение условий 1)–5) из формулировки теоремы 18.1. Для любого $i \in \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ выполнены соотношения (18.4) и

$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} f(\tilde{0}^n) \oplus c_{0,i}\overline{f}(\tilde{0}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{1,i}\overline{a} \oplus c_{0,i}a \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{\overline{a},i} \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n).$$

При $a = 0$, $i = 1, 2, 3$ они принимают вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 1 = 1,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} \oplus I_T(\tilde{0}^n) = 1 \oplus 1 = 0;$$

при $a = 0$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{0,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 0 = 1,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{0}^n) = 0 \oplus 0 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 1, 2, 3$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{1}^n) = 1 \oplus 0 = 1,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{0,i} \oplus I_\varnothing(\tilde{0}^n) = 0 \oplus 0 = 0;$$

при $a = 1$, $i = 4, 5, 6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} \oplus I_T(\tilde{1}^n) = 0 \oplus 1 = 1,$$
$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{0,i} \oplus I_T(\tilde{0}^n) = 1 \oplus 1 = 0.$$

Тем самым для любых $a \in \{0,1\}$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ доказаны равенства $f_i(\tilde{1}^n) = 1$, $f_i(\tilde{0}^n) = 0$, а значит, и неравенство $f_i(\tilde{1}^n) \neq f_i(\tilde{0}^n)$. Тогда по лемме 11.2 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_4, для которой множество T является ЕПТ, поэтому условие 1) выполнено. Из этих же равенств следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (\tilde{1}^6)$, $\tilde{\pi}_2 = (\tilde{0}^6)$.

В силу условий (iii), (v′) и леммы 11.2 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_4, допускающей ЕПТ $\{\tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2\} \subset T_\varphi$. Получаем, что условие 3) также выполнено. Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii), (iv), (v′), (vi′). Таким образом, выполнены все условия теоремы 18.1, из которой следует, что $D(f) \leqslant |T| + 2 = 4$. Случай 1 разобран.

2. Пусть $f(\tilde{0}^n) = a$. Положим $m = 6$, $l = 2$,

$$\tilde{c}_a = (c_{a,1}, c_{a,2}, c_{a,3}, c_{a,4}, c_{a,5}, c_{a,6}) = (\tilde{0}^6),$$

$$\tilde{c}_{\overline{a}} = (c_{\overline{a},1}, c_{\overline{a},2}, c_{\overline{a},3}, c_{\overline{a},4}, c_{\overline{a},5}, c_{\overline{a},6}) = (\tilde{1}^6),$$

$$T = \{(\tilde{1}^n), (\tilde{0}^n)\},$$

$$\tilde{\pi}_1 = (1,1,1,0,0,0),$$

$$\tilde{\pi}_2 = (0,0,0,1,1,1),$$

$$M_1 = M_2 = M_3 = \{(\tilde{1}^n)\},$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = \{(\tilde{0}^n)\}.$$

Б. ф. $\varphi(\tilde{x}^6)$ определим несколько позже.

Проверим выполнение условий 1), 2) из формулировки теоремы 18.1. Для любого $i \in$ $\in \{1,2,3,4,5,6\}$ имеем

$$f_i(\tilde{1}^n) = c_{1,i} f(\tilde{1}^n) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{1}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = c_{1,i} a \oplus c_{0,i} \overline{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{1}^n) = I_{M_i}(\tilde{1}^n),$$

$$f_i(\tilde{0}^n) = c_{1,i} f(\tilde{0}^n) \oplus c_{0,i} \overline{f}(\tilde{0}^n) \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{1,i} a \oplus c_{0,i} \overline{a} \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = c_{a,i} \oplus I_{M_i}(\tilde{0}^n) = I_{M_i}(\tilde{0}^n).$$

При $i = 1,2,3$ указанные соотношения принимают вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = I_{\{(\tilde{1}^n)\}}(\tilde{1}^n) = 1,$$

$$f_i(\tilde{0}^n) = I_{\{(\tilde{1}^n)\}}(\tilde{0}^n) = 0,$$

а при $i = 4,5,6$ — вид

$$f_i(\tilde{1}^n) = I_{\{(\tilde{0}^n)\}}(\tilde{1}^n) = 0,$$

$$f_i(\tilde{0}^n) = I_{\{(\tilde{0}^n)\}}(\tilde{0}^n) = 1.$$

Из последних равенств следует выполнение условия 2), поскольку $\tilde{\pi}_1 = (1,1,1,0,0,0)$, $\tilde{\pi}_2 = (0,0,0,1,1,1)$, и, кроме того, справедливость неравенства $f_i(\tilde{1}^n) \neq f_i(\tilde{0}^n)$ для любого $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Тогда по лемме 11.2 функцию $f_i(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_4, для которой множество T является ЕПТ, поэтому условие 1) также выполнено.

Рассмотрим два подслучая.

2.1. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ на наборах, не принадлежащих множеству T, принимает оба значения a, $\overline{a}$. Возьмём в качестве $\varphi(\tilde{x}^6)$ произвольную б. ф., удовлетворяющую условиям (i)–(vi).

Проверим выполнение условий 3)–5) из формулировки теоремы 18.1. В силу условий (i), (ii) и леммы 11.2 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_4, допускающей ЕПТ $\{\tilde{c}_a, \tilde{c}_{\overline{a}}\} \subset T_\varphi$, поэтому условие 3) выполнено. (Включение $\{\tilde{c}_a, \tilde{c}_{\overline{a}}\} \subset T_\varphi$ верно в силу определения множества T_φ в формулировке теоремы 18.1 и того факта, что функция f обладает (T,a)-свойством и $(T,\overline{a})$-свойством по предположению подслучая 2.1.) Условие 4) следует из условий (i), (ii), а условие 5) — из условий (iii)–(vi). Таким образом, выполнены все условия теоремы 18.1, из которой следует, что $D(f) \leqslant |T| + 2 = 4$. Подслучай 2.1 разобран.

2.2. Пусть функция $f(\tilde{x}^n)$ на любом наборе, не принадлежащем множеству T, принимает одно и то же значение. Это значение равно $\overline{a}$, поскольку $f \not\equiv a$, но $f(\tilde{1}^n) = f(\tilde{0}^n) = a$. Возьмём в качестве $\varphi(\tilde{x}^6)$ б. ф., принимающая значение a на наборах $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$ и значение $\overline{a}$ на всех остальных наборах. Представим её полиномом Жегалкина:

$$\varphi(\tilde{x}^6) = K_1 \oplus \ldots \oplus K_m \oplus c, \tag{18.8}$$

где $m \geqslant 1$, $c \in \{0,1\}$, а K_1 — самая короткая конъюнкция в этом полиноме.

Проверим выполнение условий 3)–5) из формулировки теоремы 18.1. Пусть $K_1 = x_{j_1}\&$ $\&\ldots\& x_{j_k}$. Ясно, что на наборе $(\tilde{0}^6)$ функция φ принимает значение $\underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m} \oplus c = c$, которое по определению этой функции равно $\overline{a}$, а на наборе $\tilde{\pi}$ длины 6, единичными компонентами которого являются в точности компоненты с номерами $j_1, \ldots, j_k$, она принимает значение $1 \oplus \underbrace{0 \oplus \ldots \oplus 0}_{m-1} \oplus c = 1 \oplus c$, которое, соответственно, равно a. Это означает, что $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1$ или $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_2$, а тогда $k = 3$, т. е. ранг самой короткой конъюнкции K_1 в правой части представления (18.8) равен 3. В эту часть обязательно входит слагаемое $x_1x_2x_3$, поскольку в противном случае на наборе $\tilde{\pi}_1$ все конъюнкции $K_1, \ldots, K_m$ обратились бы в нуль и значение $\varphi(\tilde{\pi}_1)$ было бы равно $c = \overline{a}$, что противоречит определению функции φ. Поэтому можно считать, что

$K_1 = x_1x_2x_3$. Тогда по лемме 11.3 функцию $\varphi(\tilde{x}^6)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_4, допускающей ЕПТ $\{(\tilde{1}^6), (1,1,1,0,0,0)\} = \{\tilde{c}_{\overline{a}}, \tilde{\pi}_1\} \subset T_\varphi$, и условие 3) выполнено. (Включение $\{\tilde{c}_{\overline{a}}, \tilde{\pi}_1\} \subset T_\varphi$ верно в силу определения множества T_φ в формулировке теоремы 18.1 и того факта, что функция f обладает $(T, \overline{a})$-свойством по предположению подслучая 2.2.)

Условия 4), 5) проверяются непосредственно с учётом определения функции φ и того, что функция f не обладает (T, a)-свойством по предположению подслучая. Таким образом, выполнены все условия теоремы 18.1, из которой следует, что $D(f) \leqslant |T|+1 < 4$. Теорема 18.5 доказана. $\square$

Рассмотрим базис Жегалкина B_1', а в качестве неисправностей ФЭ — ИН на входах и выходах элементов.

Следующее утверждение будет использовано для доказательства теоремы 18.6; однако оно имеет и самостоятельную ценность наряду с двумя получаемыми из него следствиями.

Утверждение 18.1 [167]. *Любую б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ можно реализовать неизбыточной схемой в базисе B_1', для которой множество $\{(\tilde{1}^n)\}$ является ЕПТ.*

Доказательство. Если $f \equiv 1$ ($f \equiv 0$), то функцию f можно реализовать схемой в базисе B_1', состоящей из одного элемента «константа 1» (соответственно состоящей из одного сумматора, на входы которого подаются два различных элемента «константа 1»). Легко проверить, что единственной ф. н. такой схемы является $\overline{f}$, и утверждение очевидно. Далее считаем, что функция f отлична от констант. Реализуем её стандартной схемой S в базисе B_1', моделирующей представление этой функции полиномом Жегалкина (см., например, [192, с. 114]; слагаемое c либо отсутствует, либо равно 1). Рассмотрим неисправность произвольного одного входа/выхода элемента схемы S. Если неисправен вход или выход какого-то конъюнктора, то на наборе $(\tilde{1}^n)$ значение на выходе цепочки из конъюнкторов, содержащей данный конъюнктор, изменится с 1 на 0. Это изменение, а также изменение значения на входе или выходе какого-то сумматора либо на выходе элемента «константа 1», в случае, если указанный вход/выход был неисправен, очевидно, пройдёт по цепочке из сумматоров до выхода схемы, и неисправность будет обнаружена на наборе $(\tilde{1}^n)$. Утверждение 18.1 доказано. $\square$

Следствие 18.1. *Для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ справедливо равенство*

$$D^{B_1';\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (IO)}}(f) = \begin{cases} 0, & \textit{если } f \textit{ представима в виде } (8.1), \\ 1, & \textit{если } f \textit{ не представима в виде } (8.1). \end{cases}$$

Следствие 18.1 вытекает из утверждений 18.1, 8.1 и 8.4.

Следствие 18.2. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо равенство* $D^{B_1'\,;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (IO)}}(n) = 1$.

Следствие 18.2 вытекает из следствия 18.1.

Из следствий 18.2 и 8.1 можно получить равенство $D^{B_1'^*\,;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕП (IO)}}(n) = 1$ при $n \geqslant 0$.

Теорема 18.6 [167]. *Для любого $n \geqslant 0$ справедливо неравенство* $D^{B_1'\,;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 3$.

Доказательство. Для M = IO, H = Inv и базиса $B = B_1'$ условия а) и б) леммы 18.1 выполнены в силу утверждения 18.1. Из этой леммы следует, что $D(f) \leqslant 3$ для любой неконстантной б. ф. $f(\tilde{x}^n)$. В случаях же $f \equiv 1$, $f \equiv 0$ очевидным образом получаем, что $D(f) \leqslant 1$ — см. начало доказательства утверждения 18.1. Из приведённых неравенств следует справедливость теоремы 18.6. □

При $n \geqslant 0$ из теоремы 18.6 и следствия 8.1 можно получить неравенство $D^{B_1'^*\,;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (IO)}}(n) \leqslant 3$, а отсюда и из указанной теоремы — неравенства $D^{B_1'\,;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (I)}}(n) \leqslant 3$ и $D^{B_1'^*\,;\,\mathrm{Inv}}_{\text{ЕД (I)}}(n) \leqslant 3$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассмотрены задачи реализации булевых функций легкотестируемыми контактными схемами и схемами из функциональных элементов. Получен ряд новых верхних и нижних оценок длин минимальных проверяющих и диагностических тестов для схем, реализующих заданные, произвольные или почти все булевы функции от n переменных; во многих случаях найдены точные значения этих длин. Результаты диссертации существенно расширяют известные ранее теоретические факты о возможностях реализации булевых функций легкотестируемыми схемами и могут найти применение на практике при проектировании современных цифровых устройств и схем, имеющих заданное функционирование и допускающих короткие тесты.

К основным нерешённым проблемам по тематике диссертации можно отнести следующие:

- нахождение точных значений длин минимальных единичного и полного проверяющих тестов замыкания при реализации произвольной булевой функции контактными схемами, т. е. нахождение для любой булевой функции $f(\tilde{x}^n)$ точных значений величин $D^1_{\text{ЕП}}(f)$ и $D^1_{\text{ПП}}(f)$ (они равны друг другу в силу соотношения (1.3)), как это сделано для величины $D^0_{\text{ЕП}}(f)$ в теореме 2.1;

- нахождение для любого натурального k точных значений или нетривиальных нижних оценок функций Шеннона длин k-диагностических тестов размыкания и замыкания для контактных схем, т. е. величин $D^0_{k\text{-Д}}(n)$ и $D^1_{k\text{-Д}}(n)$ (нетривиальные верхние оценки этих величин установлены в теоремах 3.2 и 5.3 соответственно);

- нахождение для любого натурального k нетривиальных верхних оценок функций Шеннона длин k-проверяющего и k-диагностического тестов для контактных схем при обрывах и замыканиях контактов, т. е. величин $D^{01}_{k\text{-П}}(n)$ и $D^{01}_{k\text{-Д}}(n)$ (в теоремах 6.3 и 7.2 для случая $k = 1$ установлено, что $D^{01}_{\text{ЕП}}(f) = 4$ и $D^{01}_{\text{ЕД}}(f) \leqslant 8$ для почти всех булевых функций f от n переменных, а в [192, с. 113, теорема 9] — достаточно тривиальное соотношение $D^{01}_{\text{ЕД}}(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$);

- нахождение единых константных верхних оценок функций Шеннона длин единичных проверяющих или диагностических тестов для схем из функциональных элементов при произвольных константных неисправностях на выходах элементов, т. е. величин $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (О)}}(n)$ и $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n)$, для любого полного базиса B (у автора есть гипотеза, что $D^{B;\,01}_{\text{ЕП (О)}}(n) \leqslant 3$ и $D^{B;\,01}_{\text{ЕД (О)}}(n) \leqslant 5$);

- нахождение нетривиальных верхних оценок функций Шеннона длин единичных проверяющих или диагностических тестов для схем из функциональных элементов в «простых» базисах при однотипных или произвольных константных неисправностях на входах и выходах либо только на входах элементов, т. е. величин $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$, где $\text{Т} \in \{\text{ЕП}, \text{ЕД}\}$, $\text{М} \in \{\text{I}, \text{IO}\}$, $\text{Н} \in \{0, 1, 01\}$ и B — полный базис, состоящий из функций от не более чем двух переменных (оценки такого рода для случая $\text{М} = \text{O}$ установлены в следствиях 9.1, 9.2, 10.1, 10.2, а также в некоторых работах Ю. В. Бородиной и Д. С. Романова — см. с. 39–41);

- нахождение нетривиальной по порядку (меньшей по порядку 2^n) верхней оценки функции Шеннона длины полного диагностического теста для схем из функциональных элементов, т. е. величины $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{ПД}\,(\text{М})}(n)$, хотя бы для какой-нибудь комбинации полного конечного базиса B, $\text{М} \in \{\text{I}, \text{O}, \text{IO}\}$ и $\text{Н} \in \{0, 1, 01\}$ (в теореме 17.1 такая оценка получена для случая $\text{Н} = \text{Inv}$).

Рассмотренные в диссертации постановки задач допускают различные обобщения:

- некоторые контакты либо функциональные элементы в схемах могут предполагаться надёжными, т. е. всегда исправными;

- можно рассматривать неисправности функциональных элементов, имеющие наиболее общий тип: каждый неисправный элемент реализует некоторую булеву функцию из заранее заданного множества, зависящего от функции, реализуемого этим элементом в исправном состоянии;

- можно рассматривать различные неисправности, связанные с изменением структуры схем (примеры таких неисправностей см. на с. 13–14, п. 3);

- базисы, в которых строятся схемы из функциональных элементов, могут не предполагаться функционально полными;

- можно рассматривать тесты для других классов логических устройств, например, для плоских прямоугольных [92] или вентильных [104] схем.

Таким образом, область исследований рассмотренных в данной диссертации задач и их обобщений является обширной и допускает дальнейшее развитие по многим направлениям.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

б. ф. — булева функция

б. п. — булева переменная

КС — контактная схема

ф. п. — функционально полный

СФЭ — схема из функциональных элементов

ФЭ — функциональный элемент

ф. н. — функция неисправности

ЕПТ — единичный проверяющий тест

ЕДТ — единичный диагностический тест

k-ПТ — k-проверяющий тест

ППТ — полный проверяющий тест

k-ДТ — k-диагностический тест

ПДТ — полный диагностический тест

ОКН — однотипные константные неисправности

ПКН — произвольные константные неисправности

ИН — инверсные неисправности

ОИКС — обобщённая итеративная контактная схема

ЭК — элементарная конъюнкция

д. н. ф. — дизъюнктивная нормальная форма

ЭД — элементарная дизъюнкция

к. н. ф. — конъюнктивная нормальная форма

МНМ — максимальное независимое множество

КЭ — контролирующий элемент

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Аксёнов С. И. О надёжности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Естеств. науки. — 2005. — № 6 (21). — С. 42–55.

[2] Алёхина М. А. О синтезе надёжных схем из функциональных элементов $x \mid y$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1991. — № 5. — С. 80–83.

[3] Алёхина М. А. О сложности надёжных схем из функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1992. — № 5. — С. 79–81.

[4] Алёхина М. А. О надёжности схем в базисе $\{x\&y, x\vee y, \overline{x}\}$ при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1992. — № 6. — С. 56–58.

[5] Алёхина М. А. О надёжности схем из ненадёжных функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискрет. матем. — 1993. — Т. 5, вып. 2. — С. 59–74.

[6] Алёхина М. А. О надёжности схем в базисах $\{x \mid y\}$, $\{x \downarrow y\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 2001. — Т. 8, № 2. — С. 3–14.

[7] Алёхина М. А. О надёжности схем в базисе $\{\vee, \&, {}^{-}\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. матем. — 2001. — Т. 13, вып. 3. — С. 75–80.

[8] Алёхина М. А. Нижние оценки ненадёжности схем в некоторых базисах при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 2002. — Т. 9, № 3. — С. 3–28.

[9] Алёхина М. А. Синтез и сложность надёжных схем из ненадёжных элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 11. — М.: Физматлит, 2002. — С. 193–218.

[10] Алёхина М. А. О надёжности схем в базисах $\{\rightarrow, {}^{-}\}$, $\{\rightarrow, 0\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 2003. — Т. 10, № 1. — С. 3–13.

[11] Алёхина М. А. Синтез и сложность надёжных схем в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$ при однотипных

константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. матем. — 2003. — Т. 15, вып. 1. — С. 98–109.

[12] Алёхина М. А. О надёжности схем в базисах $\{\nrightarrow, \rightarrow\}$, $\{\rightarrow, \oplus\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 2004. — Т. 11, № 1. — С. 3–12.

[13] Алёхина М. А. О сложности надёжных схем из ненадёжных элементов при однотипных константных неисправностях // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 2004. — Т. 11, № 2. — С. 3–17.

[14] Алёхина М. А. О надёжности и сложности схем в базисе $\{x \mid y\}$ при инверсных неисправностях элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 2005. — Т. 12, № 2. — С. 3–11.

[15] Алёхина М. А. О надёжности схем в базисе $\{x \vee y \vee z, x\&y\&z, \overline{x}\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Дискрет. матем. — 2006. — Т. 18, вып. 1. — С. 116–125.

[16] Алёхина М. А. О надёжности схем в базисе $\left\{\bigvee\limits_{i=1}^{k} x_i, \bigwedge\limits_{i=1}^{k} x_i, \overline{x}\right\}$ при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2007. — № 1. — С. 18–27.

[17] Алёхина М. А. О надёжности схем в базисах $\{\sim, \&, \oplus\}$, $\{\sim, \&, 0\}$, $\{\oplus, \&, 1\}$, $\{\oplus, \vee, 1\}$ при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискрет. матем. — 2009. — Т. 21, вып. 2. — С. 102–111.

[18] Алёхина М. А. О надёжности схем в произвольном полном конечном базисе при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Дискрет. матем. — 2012. — Т. 24, вып. 3. — С. 17–24.

[19] Алёхина М. А. Синтез надёжных схем при константных неисправностях на входах и выходах элементов // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2015. — № 2 (34). — С. 5–15.

[20] Алёхина М. А. Синтез надёжных схем при линейных слипаниях переменных в базисе «антиконъюнкция» // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2016. — № 1 (37). — С. 63–70.

[21] Алёхина М. А. Об асимптотически оптимальных по надёжности схемах при неисправностях элементов // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2016. — № 4 (40). — С. 60–67.

[22] Алёхина М. А. О надёжности схем при неисправностях типа 0 на выходах элементов в полном конечном базисе, содержащем линейную функцию двух переменных и обобщенную дизъюнкцию // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2019. — № 1 (49). — С. 56–62.

[23] Алёхина М. А. О надёжности схем во всех полных базисах из трёхвходовых элементов при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Прикл. дискрет. матем. — 2020. — № 49. — С. 98–107.

[24] Алёхина М. А., Аксёнов С. И, Васин А. В. О функциях и схемах, применяемых для повышения надёжности схем // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2008. — № 3. — С. 30–38.

[25] Алёхина М. А., Васин А. В. О надёжности схем в базисах, содержащих функции не более чем трёх переменных // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 2. — С. 25–35.

[26] Алёхина М. А., Васин А. В. Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными схемами с ненадёжностью 2ε // Изв. вузов. Матем. — 2010. — № 5. — С. 79–82.

[27] Алёхина М. А., Васин А. В. О базисах с коэффициентом ненадёжности 2 // Матем. заметки. — 2014. — Т. 95, вып. 2. — С. 170–201.

[28] Алёхина М. А, Грабовская С. М., Гусынина Ю. С. Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными по надёжности схемами с тривиальной оценкой ненадёжности при неисправностях типа 0 на выходах элементов // Прикл. дискрет. матем. — 2019. — № 45. — С. 44–54.

[29] Алёхина М. А., Гусынина Ю. С., Шорникова Т. А. Верхняя оценка ненадёжности схем в полном конечном базисе (в P_2) при произвольных неисправностях элементов // Изв. вузов. Матем. — 2017. — № 12. — С. 80–83.

[30] Алёхина М. А., Гусынина Ю. С., Шорникова Т. А. О надёжности схем при неисправностях типа 0 на выходах элементов в полном конечном базисе, содержащем особенную функцию // Изв. вузов. Матем. — 2019. — № 6. — С. 85–88.

[31] Алёхина М. А., Клянчина Д. М. Об асимптотически оптимальных по надёжности схемах в некоторых специальных базисах // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2010. — № 4 (16). — С. 3–13.

[32] Алёхина М. А., Курышева В. В. О надёжности схем в базисе «антиконъюнкция» при

константных неисправностях на входах элементов // Изв. вузов. Матем. — 2016. — № 7. — С. 3–9.

[33] Алёхина М. А., Лакомкина А. Е. О надёжности схем в базисе из ненадёжных и абсолютно надёжных элементов // Прикл. дискрет. матем. Приложение. — 2014. — № 7. — С. 111–112.

[34] Алёхина М. А., Логвина О. А. Ненадёжность схем при слипаниях входов элементов // Прикл. дискрет. матем. Приложение. — 2016. — № 9. — С. 98–100.

[35] Алёхина М. А., Чугунова В. В. Об асимптотически наилучших по надёжности схемах в базисе $\{\&, \vee, ^{-}\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 2006. — Т. 13, № 4. — С. 3–17.

[36] Андреев А. Е. Метод бесповторной редукции синтеза самокорректирующихся схем // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 283, № 2. — С. 265–269.

[37] Андреев А. Е. Универсальный принцип самокорректирования // Матем. сб. — 1985. — Т. 127(169), № 2(6). — С. 147–172.

[38] Антюфеев Г. В. О свойстве булевых функций, гарантирующем существование логарифмических диагностических тестов относительно сдвигов переменных // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. — 2014. — Вып. 4. — С. 71–77.

[39] Антюфеев Г. В. Обнаружение и диагностика неисправностей при сдвигах переменных в булевых функциях // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. — 2015. — Вып. 2. — С. 14–17.

[40] Антюфеев Г. В., Романов Д. С. Об оценках функции Шеннона длины диагностического теста при локальных константных неисправностях на входах схем // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. — 2016. — Вып. 2. — С. 49–51.

[41] Беджанова С. Р. О минимальных тестах для схем, реализующих дизъюнкцию // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2008. — Т. 15, № 2. — С. 3–11.

[42] Беджанова С. Р. Схемы для дизъюнкции, допускающие короткие единичные диагностические тесты // Дискрет. матем. — 2010. — Т. 22, вып. 4. — С. 43–54.

[43] Беджанова С. Р. Диагностика инверсных неисправностей на входах элементов схемы для дизъюнкции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2011. — № 3. — С. 44–46.

[44] Беджанова С. Р. Легкотестируемые схемы для линейных функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2011. — № 4. — С. 57–59.

[45] Беджанова С. Р. Тесты схем для некоторых классов булевых функций: дис. …канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Беджанова Светлана Руслановна. — М., 2011. — 96 с.

[46] Бородина Ю. В. О синтезе легкотестируемых схем в случае однотипных константных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2008. — № 1. — С. 40–44.

[47] Бородина Ю. В. О схемах, допускающих единичные тесты длины 1 при константных неисправностях на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2008. — № 5. — С. 49–52.

[48] Бородина Ю. В. Синтез легкотестируемых схем в базисе $\{\&, \vee, {}^{-}\}$ для систем булевых функций // Дискрет. матем. — 2012. — Т. 24, вып. 1. — С. 70–78.

[49] Бородина Ю. В. Нижняя оценка длины полного проверяющего теста в базисе $\{x \mid y\}$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2015. — № 4. — С. 49–51.

[50] Бородина Ю. В. Легкотестируемые схемы в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа «1» на выходах элементов // Дискрет. матем. — 2019. — Т. 31, вып. 2. — С. 14–19.

[51] Бородина Ю. В., Бородин П. А. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина при константных неисправностях типа 0 на выходах элементов // Дискрет. матем. — 2010. — Т. 22, вып. 3. — С. 127–133.

[52] Ваксов В. В. О тестах для бесповторных контактных схем // Автомат. и телемех. — 1965. — Т. 26, № 3. — С. 521–524.

[53] Варданян В. А. Об одном методе синтеза легко тестируемых схем // Автомат. и телемех. — 1987. — № 7. — С. 136–139.

[54] Вартанян С. М. Единичные диагностические тесты для последовательных блочных схем: дис. …канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Вартанян Сейран Мясникович. — М., 1987. — 114 с.

[55] Вартанян С. М. Единичный тест замыкания для блочных схем // Матем. заметки. — 1987. — Т. 41, № 4. — С. 564–572.

[56] Васин А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x\&y, x \vee y, \overline{x}\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2008. — № 4. — С. 2–16.

[57] Васин А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{x \mid y, x \downarrow y, x\&y, x \vee y,$

$\overline{x}\}$ // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2009. — № 1 (9). — С. 3–10.

[58] Васин А. В. Об асимптотически оптимальных схемах в базисе $\{\&, \neg\}$ при инверсных неисправностях на выходах элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2009. — Т. 16, № 6. — С. 12–22.

[59] Васин А. В. О базисах, в которых асимптотически оптимальные схемы функционируют с ненадёжностью 5ε // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2010. — № 1 (13). — С. 64–79.

[60] Васин А. В. Асимптотически оптимальные по надёжности схемы в некоторых базисах // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2013. — Т. 20, № 6. — С. 3–15.

[61] Васин А. В. О полных базисах с коэффициентом ненадёжности 5 // Прикл. дискрет. матем. Приложение. — 2014. — № 7. — С. 113–115.

[62] Васин А. В. О базисах с коэффициентом ненадёжности 1, содержащих функции, существенно зависящие не более чем от пяти переменных // Изв. вузов. Матем. — 2015. — № 9. — С. 3–11.

[63] Васин А. В. О широком классе базисов с коэффициентом ненадёжности, равным единице // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2015. — Т. 22, № 1. — С. 5–18.

[64] Вороненко А. А. Условное тестирование схем Кардо // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2020. — № 3. — С. 57–58.

[65] Гиндикин С. Г., Мучник А. А. Решение проблемы полноты для систем функций алгебры логики с ненадёжной реализацией // Пробл. киберн. Вып. 15. — М.: Наука, 1965. — С. 65–84.

[66] Глаголев В. В. Построение тестов для блочных схем // Докл. АН СССР. — 1962. — Т. 144, № 6. — С. 1237–1240.

[67] Глазунов Н. И., Горяшко А. П. Об оценках длин обнаруживающих тестов для классов неконстантных неисправностей входов комбинационных схем // Изв. АН СССР. Сер. «Техническая киберн.» — 1986. — № 3. — С. 197–200.

[68] Горелик Е. С. О сложности реализации элементарных конъюнкций и дизъюнкций в базисе $\{x \,|\, y\}$ // Пробл. киберн. Вып. 26. — М.: Наука, 1973. — С. 27–36.

[69] Горяшко А. П. О синтезе схем с минимальной трудоёмкостью тестирования // Автомат. и телемех. — 1981. — № 1. — С. 145–153.

[70] Горяшко А. П. Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств. — М.: Наука, 1987. — 288 с.

[71] Дмитриев А. Н., Журавлёв Ю. И., Кренделев Ф. П. О математических принципах классификации предметов и явлений // Дискрет. анализ. Вып. 7. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1966. — С. 3–15.

[72] Добрушин Р. Л., Ортюков С. И. О нижней оценке для избыточности самокорректирующихся схем из ненадёжных функциональных элементов // Пробл. передачи информ. — 1977. — Т. 13, вып. 1. — С. 82–89.

[73] Добрушин Р. Л., Ортюков С. И. Верхняя оценка для избыточности самокорректирующихся схем из ненадёжных функциональных элементов // Пробл. передачи информ. — 1977. — Т. 13, вып. 3. — С. 56–76.

[74] Долотова О. А. О сложности контроля логических схем типа Поста: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Долотова Оксана Александровна. — М., 1991. — 101 с.

[75] Долотова О. А. О сложности минимальных проверяющих тестов для классов Поста // Докл. РАН. — 1992. — Т. 324, № 4. — С. 730–733.

[76] Долотова О. А. О минимальных проверяющих тестах функций из классов Поста // Дискрет. матем. — 1993. — Т. 5, вып. 2. — С. 75–82.

[77] Икрамов А. А. О сложности тестирования логических устройств на некоторые типы неисправностей // Интеллект. системы. — 2013. — Т. 17, № 1–4. — С. 311–313.

[78] Касим-Заде О. М. Общая верхняя оценка сложности схем в произвольном бесконечном полном базисе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1997. — № 4. — С. 59–61.

[79] Касим-Заде О. М. Об одном методе получения оценок сложности схем над бесконечными базисами // Матем. вопросы киберн. Вып. 11. — М.: Физматлит, 2002. — С. 247–254.

[80] Касим-Заде О. М. Об одном методе получения оценок сложности схем над произвольным бесконечным базисом // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 2004. — Т. 11, № 2. — С. 41–65.

[81] Касим-Заде О. М. О порядках роста функций Шеннона сложности схем над бесконечными базисами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2013. — № 3. — С. 55–57.

[82] Кириенко Г. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов // Пробл. киберн. Вып. 12. — М.: Наука, 1964. — С. 29–37.

[83] Кириенко Г. И. Синтез самокорректирующихся схем из функциональных элементов

для случая растущего числа ошибок в схеме // Дискрет. анализ. Вып. 16. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970. — С. 38–43.

[84] Коваценко С. В. Синтез легкотестируемых схем в базисе Жегалкина для инверсных неисправностей // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2000. — № 2. — С. 45–47.

[85] Коган И. В. О тестах для бесповторных контактных схем // Пробл. киберн. Вып. 12. — М.: Наука, 1964. — С. 39–44.

[86] Коляда С. С. О единичных проверяющих тестах для константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2011. — № 6. — С. 47–49.

[87] Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов: дис. …канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Коляда Сергей Сергеевич. — М., 2013. — 77 с.

[88] Коляда С. С. Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2013. — № 4. — С. 32–34.

[89] Коляда С. С. Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисах из элементов, имеющих не более двух входов // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2013. — Т. 20, № 2. — С. 58–74.

[90] Королёва З. Е. Доказательство минимальности контактных схем некоторого типа // Дискрет. анализ. Вып. 14. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1969. — С. 18–27.

[91] Кочергина Г. А. О сложности реализации элементарных конъюнкций и дизъюнкций схемами в некоторых полных базисах // Матем. вопросы киберн. Вып. 11. — М.: Физматлит, 2002. — С. 219–246.

[92] Кравцов С. С. О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Пробл. киберн. Вып. 19. — М.: Наука, 1967. — С. 285–292.

[93] Краснов В. М. О сложности самокорректирующихся схем для одной последовательности булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2009. — № 5. — С. 55–57.

[94] Кудрявцев В. Б., Гасанов Э. Э., Долотова О. А., Погосян Г. Р. Теория тестирования логических устройств. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 160 с.

[95] Кузнецов И. А., Романов Д. С. О полных проверяющих тестах относительно локальных слипаний переменных в булевых функциях // Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2009. — Т. 151, кн. 2. — С. 90–97.

[96] Курбацкая В. К. О тестах относительно некоторых типов неисправностей на входах схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2019. — № 3. — С. 29–35.

[97] Латыпов Р. Х. Легкотестируемая реализация схемы на основе полиномиального представления выходных функций // Автомат. и телемех. — 2001. — № 12. — С. 95–99.

[98] Ложкин С. А. Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем: дис. . . . д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09 / Ложкин Сергей Андреевич. — М., 1998. — 99 с.

[99] Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики (учебное пособие для студентов). — М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004. — 251 с.

[100] Лупанов О. Б. О синтезе контактных схем // Докл. АН СССР. — 1958. — Т. 119, № 1. — С. 23–26.

[101] Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Изв. вузов. Радиофизика. — 1958. — Т. 1, № 1. — С. 120–140.

[102] Лупанов О. Б. О принципе локального кодирования и реализации функций из некоторых классов схемами из функциональных элементов // Докл. АН СССР. — 1961. — Т. 140, № 2. — С. 322–325.

[103] Лупанов О. Б. О синтезе схем из пороговых элементов // Пробл. киберн. Вып. 26. — М.: Наука, 1973. — С. 109–140.

[104] Лупанов О. Б. О вентильных схемах // Acta Cybernetica. — 1980. — No. 4. — P. 311–315. URL: http://acta.bibl.u-szeged.hu/12293/1/cybernetica_004_fasc_004_311-315.pdf

[105] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 138 с.

[106] Любич И. Г., Романов Д. С. О единичных диагностических тестах относительно инверсных неисправностей элементов в схемах над некоторыми базисами // Прикл. матем. и информ. Вып. 58. — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 47–61.

[107] Мадатян Х. А. О синтезе схем, корректирующих размыкание контактов // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 159, № 2. — С. 290–293.

[108] Мадатян Х. А. Полный тест для бесповторных контактных схем // Пробл. киберн. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 103–118.

[109] Мадатян Х. А. О полных проверяющих тестах для квазибесповторных контактных схем // Дискрет. матем. — 1996. — Т. 8, вып. 3. — С. 111–118.

[110] Морозов Е. В. О единичных диагностических тестах относительно слипаний переменных в булевых функциях // Прикл. матем. и информ. Вып. 44. — М.: МАКС Пресс, 2013. — С. 103–113.

[111] Морозов Е. В. О тестах относительно множественных линейных слипаний переменных в булевых функциях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2014. — № 1. — С. 22–25.

[112] Морозов Е. В. О тестах относительно множественных монотонных симметрических слипаний переменных в булевых функциях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2014. — № 4. — С. 20–27.

[113] Морозов Е. В. О полных тестах относительно вытесняющих неисправностей входов схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2015. — № 1. — С. 55–59.

[114] Морозов Е. В. О тестах для почти всех булевых функций относительно некоторых неисправностей входов схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2015. — № 1. — С. 37–41.

[115] Морозов Е. В., Романов Д. С. Проверяющие тесты для булевых функций при линейных локальных неисправностях входов схем // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2015. — Т. 22, № 1. — С. 51–63.

[116] Мошков М. Ю. Диагностика константных неисправностей схем из функциональных элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 9. — М.: Физматлит, 2000. — С. 79–100.

[117] Нечипорук Э. И. О корректировании замыканий в контактных схемах // Матем. заметки. — 1967. — Т. 2, № 1. — С. 15–24.

[118] Нечипорук Э. И. О корректировании обрывов в вентильных и контактных схемах // Кибернетика. — 1968. — № 5. — С. 40–48.

[119] Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Докл. АН СССР. — 1968. — Т. 179, № 4. — С. 790–793.

[120] Нечипорук Э. И. О топологических принципах самокорректирования // Пробл. кибернет. Вып. 21. — М.: Наука, 1969. — С. 5–102.

[121] Носков В. Н. Диагностические тесты для входов логических устройств // Дискрет. анализ. Вып. 26. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. — С. 72–83.

[122] Носков В. Н. О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем // Дискрет. анализ. Вып. 27. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1975. — С. 23–51.

[123] Носков В. Н. О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем // Матем. заметки. — 1975. — Т. 18, № 1. — С. 137–150.

[124] Носков В. Н. О длинах минимальных единичных диагностических тестов, контролирующих работу входов логических схем // Методы дискрет. анализа в синтезе управл. систем. Вып. 32. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1978. — С. 40–51.

[125] Носков В. Н. Об универсальных тестах для диагностики одного класса неисправностей комбинационных схем // Методы дискрет. анализа в решении экстрем. задач. Вып. 33. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1979. — С. 41–52.

[126] Носков В. Н. Метод синтеза контролепригодных схем из функциональных элементов // Методы дискрет. анализа в изуч. булевых функций и графов. Вып. 48. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989. — С. 52–69.

[127] Носков В. Н. Самокорректирующиеся комбинационные схемы, допускающие простой контроль // Методы дискрет. анализа в оптимиз. управл. систем. Вып. 49. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1989. — С. 42–59.

[128] Носков В. Н. Метод синтеза удобных для контроля комбинационных схем // Дискрет. матем. — 1993. — Т. 5, вып. 4. — С. 3–23.

[129] Носков В. Н. Диагностика частей схем из функциональных элементов // Сибир. журн. исслед. опер. — 1994. — Т. 1, № 3. — С. 60–96.

[130] Носков В. Н. Преобразование схем из функциональных элементов к виду, удобному для контроля // Тр. ИМ СО РАН. — 1994. — Т. 27. — С. 142–165.

[131] Носков В. Н. О преобразованиях комбинационных схем, повышающих надёжность их частей // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 1996. — Т. 3, № 2. — С. 33–61.

[132] Носков В. Н. О восстановлении правильной работы неисправных частей комбинационных схем // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 1997. — Т. 4, № 4. — С. 47–74.

[133] Носков В. Н. О построении контролируемых схем с небольшим числом дополнительных полюсов // Дискрет. анализ и исслед. опер. Сер. 1. — 2003. — Т. 10, № 4. — С. 79–102.

[134] Нурмеев Н. Н. Об универсальных диагностических тестах для одного класса неисправностей комбинационных схем // Вероятностные методы и киберн. Вып. 18. — Казань: Изд-во КазГУ, 1982. — С. 73–76.

[135] Ортюков С. И. К вопросу о синтезе асимптотически безызбыточных самокорректирующихся схем из ненадёжных функциональных элементов // Пробл. передачи информ. — 1977. — Т. 13, вып. 4. — С. 3–8.

[136] Ортюков С. И. Метод синтеза асимптотически оптимальных самокорректирующихся схем, исправляющих близкую к линейной долю ошибок // Пробл. передачи информ. — 1981. — Т. 17, вып. 4. — С. 84–97.

[137] Петри Н. В. О сложности реализации функций алгебры логики контактными схемами из ненадёжных контактов при высокой требуемой надёжности // Пробл. киберн. Вып. 21. — М.: Наука, 1969. — С. 159–169.

[138] Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976. — 593 с.

[139] Погосян Г. Р. О длине проверяющих тестов для логических схем // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 263, № 3. — С. 546–550.

[140] Погосян Г. Р. О проверяющих тестах для логических схем. — М.: ВЦ АН СССР, 1982. — 57 с.

[141] Попков К. А. Диагностика состояний контактов // Дискрет. матем. — 2013. — Т. 25, вып. 4. — С. 30–40.

[142] Попков К. А. Оценки длин проверяющих и диагностических тестов для функциональных элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2014. — Т. 21, № 6. — С. 73–89.

[143] Попков К. А. Проверяющие и диагностические тесты для конъюнкторов, дизъюнкторов и инверторов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2014. — № 6. — С. 40–44.

[144] Попков К. А. Проверяющие и диагностические тесты для функциональных элементов // Дискрет. матем. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 83–99.

[145] Попков К. А. О единичных тестах для контактов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2015. — № 5. — С. 13–18.

[146] Попков К. А. О единичных тестах для функциональных элементов // Дискрет. матем. — 2015. — Т. 27, вып. 2. — С. 73–93.

[147] Попков К. А. О проверяющих и диагностических тестах для контактов и функцио-

нальных элементов: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Попков Кирилл Андреевич. — М., 2015. — 119 с.

[148] Попков К. А. Оценки длин проверяющих и диагностических тестов для контактов // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2015. — № 2 (34). — С. 108–121.

[149] Попков К. А. Оценки длин тестов для функциональных элементов при большом числе допустимых неисправностей // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2015. — Т. 22, № 5. — С. 52–70.

[150] Попков К. А. Нижние оценки длин полных диагностических тестов для схем и входов схем // Прикл. дискрет. матем. — 2016. — № 4 (34). — С. 65–73.

[151] Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в базисе Жегалкина // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2016. — № 3 (39). — С. 3–18.

[152] Попков К. А. О тестах замыкания для контактных схем // Дискрет. матем. — 2016. — Т. 28, вып. 1. — С. 87–100. (Перевод: Popkov K. A. Tests of contact closure for contact circuits // Discrete Math. Appl. — 2016. — Vol. 26, No. 5. — P. 299–308.)

[153] Попков К. А. Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисе «конъюнкция-отрицание» // Прикл. дискрет. матем. — 2017. — № 38. — С. 66–88.

[154] Попков К. А. Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // Дискрет. матем. — 2017. — Т. 29, вып. 2. — С. 53–69. (Перевод: Popkov K. A. Lower bounds for lengths of single tests for Boolean circuits // Discrete Math. Appl. — 2019. — Vol. 29, No. 1. — P. 23–33.)

[155] Попков К. А. О проверяющих тестах размыкания для контактных схем // Дискрет. матем. — 2017. — Т. 29, вып. 4. — С. 66–86. (Перевод: Popkov K. A. On fault detection tests of contact break for contact circuits // Discrete Math. Appl. — 2018. — Vol. 28, No. 6. — P. 369–383.)

[156] Попков К. А. О точном значении длины минимального единичного диагностического теста для одного класса схем // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 80–103. (Перевод: Popkov K. A. On the exact value of the length of the minimal single diagnostic test for a particular class of circuits // J. Appl. Ind. Math. — 2017. — Vol. 11, No. 3. — P. 431–443.)

[157] Попков К. А. Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // Дискрет. матем. — 2018. — Т. 30, вып. 3. — С. 99–116. (Перевод: Popkov K. A. Short single tests for circuits with arbitrary stuck-at faults at outputs of gates // Discrete Math. Appl. — 2019. — Vol. 29, No. 5. — P. 321–333.)

[158] Попков К. А. Полные диагностические тесты длины 2 для схем при инверсных неисправностях функциональных элементов // Тр. МИАН. — 2018. — Т. 301. — С. 219–224. (Перевод: Popkov K. A. Complete diagnostic length 2 tests for logic networks under inverse faults of logic gates // Proc. Steklov Inst. Math. — 2018. — Vol. 301. — P. 207–212.)

[159] Попков К. А. Полные проверяющие тесты длины два для схем при произвольных константных неисправностях элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2018. — Т. 25, № 2. — С. 62–81. (Перевод: Popkov K. A. Complete fault detection tests of length 2 for logic networks under stuck-at faults of gates // J. Appl. Ind. Math. — 2018. — Vol. 12, No. 2. — P. 302–312.)

[160] Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Интеллект. системы. Теория и приложения. — 2018. — Т. 22, вып. 3. — С. 131–147.

[161] Попков К. А. Короткие единичные проверяющие тесты для контактных схем при обрывах и замыканиях контактов // Интеллект. системы. Теория и приложения. — 2019. — Т. 23, вып. 3. — С. 97–130.

[162] Попков К. А. Короткие полные проверяющие тесты для схем из двухвходовых функциональных элементов // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2019. — Т. 26, № 1. — С. 89–113. (Перевод: Popkov K. A. Short complete fault detection tests for logic networks with fan-in two // J. Appl. Ind. Math. — 2019. — Vol. 13, No. 1. — P. 118–131.)

[163] Попков К. А. Минимальные полные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в стандартном базисе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2019. — № 4. — С. 54–57. (Перевод: Popkov K. A. Minimal complete fault detection tests for circuits of functional elements in standard basis // Mosc. Univ. Math. Bull. — 2019. — Vol. 74, No. 4. — P. 171–173.)

[164] Попков К. А. О диагностических тестах размыкания для контактных схем // Дискрет. матем. — 2019. — Т. 31, вып. 2. — С. 124–143. (Перевод: Popkov K. A. On diagnostic tests of contact break for contact circuits // Discrete Math. Appl. — 2020. — Vol. 30, No. 2. — P. 103–116.)

[165] Попков К. А. О полных диагностических тестах для контактных схем при обрывах и/или замыканиях контактов // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2019. — № 3 (51). — С. 3–24.

[166] Попков К. А. Синтез легкотестируемых схем при произвольных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Прикл. дискрет. матем. — 2019. — № 43. — С. 78–100.

[167] Попков К. А. Метод построения легко диагностируемых схем из функциональных элементов относительно единичных неисправностей // Прикл. дискрет. матем. — 2019. — № 46. — С. 38–57.

[168] Попков К. А. Короткие единичные диагностические тесты для контактных схем при обрывах и замыканиях контактов // Интеллект. системы. Теория и приложения. — 2020. — Т. 24, вып. 1. — С. 143–152.

[169] Попков К. А. Короткие тесты замыкания для контактных схем // Матем. заметки. — 2020. — Т. 107, вып. 4. — С. 591–603. (Перевод: Popkov K. A. Short tests of closures for contact circuits // Math. Notes. — 2020. — Vol. 107, No. 4. — P. 653–662.)

[170] Попков К. А. Оценки функций Шеннона длин тестов замыкания для контактных схем // Дискрет. матем. — 2020. — Т. 32, вып. 3. — С. 49–67.

[171] Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Материалы Междунар. молодёжного науч. форума «Ломоносов-2016» (Москва, 11–15 апреля 2016 г.) [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2016. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2016/data/8438/uid25014_report.pdf

[172] Попков К. А. О единичных диагностических тестах для схем из функциональных элементов в некоторых базисах // Материалы XII Междунар. семинара «Дискрет. матем. и её приложения» имени акад. О. Б. Лупанова (Москва, 20–25 июня 2016 г.). — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2016. — С. 153–155.

[173] Попков К. А. О единичных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов при однотипных константных неисправностях на выходах элементов // Материалы Междунар. молодёжного науч. форума «Ломоносов-2017» (Москва, 10–14 апреля 2017 г.) [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2017. — 1 электрон.

опт. диск (DVD-ROM). URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2017/data/10843/uid25014_report.pdf

[174] Попков К. А. Некоторые вопросы теории контроля и диагностики схем из функциональных элементов // Материалы XVIII Междунар. конф. «Пробл. теоретической киберн.» (Пенза, 19–23 июня 2017 г.). — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 194–197.

[175] Попков К. А. Тесты для схем при однотипных константных неисправностях на входах и выходах элементов // Тр. X Междунар. конф. «Дискрет. модели в теории управл. систем» (Москва и Подмосковье, 23–25 мая 2018 г.). — М.: МАКС Пресс, 2018. — С. 225–228.

[176] Попков К. А. Короткие единичные диагностические тесты для схем из функциональных элементов // Материалы Междунар. молодёжного науч. форума «Ломоносов-2019» (Москва, 8–12 апреля 2019 г.) [Электронный ресурс]. — М.: МАКС Пресс, 2019. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM). URL: https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2019/data/16177/88131_uid25014_report.pdf

[177] Попков К. А. О проверяющих и диагностических тестах для контактных схем // Материалы XIII Междунар. семинара «Дискрет. матем. и её приложения» имени акад. О. Б. Лупанова (Москва, 17–22 июня 2019 г.). — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 2019. — С. 137–140.

[178] Попков К. А. О возможностях реализации булевых функций схемами, допускающими короткие тесты // Материалы заочн. семинара XIX междунар. конф. «Пробл. теоретической киберн.». — Казань, 2020. — С. 91–95.

[179] Попков К. А. Об оценках функций Шеннона длин тестов замыкания для контактных схем // Материалы заочн. семинара XIX междунар. конф. «Пробл. теоретической киберн.». — Казань, 2020. — С. 96–98.

[180] Потапов Ю. Г., Яблонский С. В. О синтезе самокорректирующихся контактных схем // Докл. АН СССР. — 1960. — Т. 134, № 3. — С. 544–547.

[181] Рабинович В. М. О самокорректирующихся схемах для счётчика чётности // Пробл. киберн. Вып. 17. — М.: Наука, 1966. — С. 227–231.

[182] Редькин Н. П. Доказательство минимальности некоторых схем из функциональных элементов // Пробл. киберн. Вып. 23. — М.: Наука, 1970. — С. 83–101.

[183] Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем // Пробл. киберн. Вып. 33. — М.: Наука, 1978. — С. 119–138.

[184] Редькин Н. П. О самокорректировании контактных схем. II // Пробл. киберн. Вып. 36. — М.: Наука, 1979. — С. 195–208.

[185] Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискрет. анализа в исслед. экстрем. структур. Вып. 39. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. — С. 80–87.

[186] Редькин Н. П. О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискрет. анализа в оптимиз. управл. систем. Вып. 40. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. — С. 87–99.

[187] Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1986. — № 1. — С. 72–74.

[188] Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при однотипных константных неисправностях на входах элементов // Изв. вузов. Матем. — 1988. — № 7. — С. 57–64.

[189] Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие тесты // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1988. — № 2. — С. 17–21.

[190] Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 2. — М.: Наука, 1989. — С. 198–222.

[191] Редькин Н. П. О схемах, допускающих короткие единичные диагностические тесты // Дискрет. матем. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 71–76.

[192] Редькин Н. П. Надёжность и диагностика схем. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. — 192 с.

[193] Редькин Н. П. О единичных диагностических тестах для однотипных константных неисправностей на выходах функциональных элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1992. — № 5. — С. 43–46.

[194] Редькин Н. П. Об одной математической модели неисправностей контактных схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1993. — № 1. — С. 42–49.

[195] Редькин Н. П. Единичные тесты для связных неисправностей контактных схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1993. — № 2. — С. 20–27.

[196] Редькин Н. П. Асимптотически минимальные самокорректирующиеся схемы для одной последовательности булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 1996. — Т. 3, № 2. — С. 62–79.

[197] Редькин Н. П. Об асимптотически минимальных самокорректирующихся схемах для

одной последовательности булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1996. — № 3. — С. 3–9.

[198] Редькин Н. П. О проверяющих тестах для схем при константных неисправностях на входах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1997. — № 1. — С. 12–18.

[199] Редькин Н. П. О единичных проверяющих тестах схем при инверсных неисправностях элементов // XII Междунар. конф. по пробл. теоретической киберн. (Нижний Новгород, 1999). Тезисы докладов. — М.: Изд-во механико-математического ф-та МГУ, 1999. — С. 196.

[200] Редькин Н. П. Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 12. — М.: Физматлит, 2003. — С. 217–230.

[201] Редькин Н. П. О сложности булевых функций с малым числом единиц // Дискрет. матем. — 2004. — Т. 16, вып. 4. — С. 20–31.

[202] Редькин Н. П. О синтезе легкотестируемых схем в одном бесконечном базисе // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2007. — № 3. — С. 29–33.

[203] Редькин Н. П. Дискретная математика. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 264 с.

[204] Редькин Н. П. О сложности реализации булевых функций с малым числом единиц самокорректирующимися контактными схемами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2011. — № 1. — С. 19–21.

[205] Редькин Н. П. К вопросу о длине диагностических тестов для схем // Матем. заметки. — 2017. — Т. 102, вып. 4. — С. 624–627.

[206] Редькин Н. П. О диагностических тестах для контактных схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2019. — № 2. — С. 35–37.

[207] Редькин Н. П. Минимальные контактные схемы для симметрических пороговых функций // Матем. заметки. — 2020. — Т. 108, вып. 3. — С. 397–411.

[208] Редькин Н. П. Минимальные контактные схемы для характеристических функций сфер // Дискрет. матем. — 2020. — Т. 32, вып. 3. — С. 68–75.

[209] Романов Д. С. Построение тестов и оценка их параметров для некоторых классов контактных схем: дис. . . . канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Романов Дмитрий Сергеевич. — М., 2000. — 114 с.

[210] Романов Д. С. Об оценках функций Шеннона длины единичных тестов относительно

транспозиций переменных // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2007. — № 2. — С. 23–29.

[211] Романов Д. С. О диагностических тестах относительно локальных слипаний переменных в булевых функциях // Прикл. матем. и информ. Вып. 36. — М.: МАКС Пресс, 2010. — С. 91–98.

[212] Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем в одном базисе, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 2012. — № 2. — С. 24–29.

[213] Романов Д. С. О тестах относительно перестановок переменных в булевых функциях // Прикл. матем. и информ. Вып. 41. — М.: МАКС Пресс, 2012. — С. 113–121.

[214] Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов // Дискрет. матем. — 2013. — Т. 25, вып. 2. — С. 104–120.

[215] Романов Д. С. Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискрет. матем. — 2014. — Т. 26, вып. 2. — С. 100–130.

[216] Романов Д. С. О проверяющих тестах для константных неисправностей на входах схемы счётчика чётности // Прикл. матем. и информ. Вып. 46. — М.: МАКС Пресс, 2014. — С. 128–136.

[217] Романов Д. С. О синтезе контактных схем, допускающих короткие проверяющие тесты // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2014. — Т. 156, кн. 3. — С. 110–115.

[218] Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в базисе Жегалкина, допускающих единичные диагностические тесты длины один // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2015. — № 4 (36). — С. 38–54.

[219] Романов Д. С. О синтезе схем, допускающих полные проверяющие тесты константной длины относительно инверсных неисправностей на выходах элементов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2015. — № 1. — С. 30–37.

[220] Романов Д. С. Метод синтеза неизбыточных схем в стандартном базисе, допускающих единичные диагностические тесты длины два // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2016. — № 3 (39). — С. 56–72.

[221] Романов Д. С. О тестах для схем при неисправностях на выходах элементов // Материалы XVIII Междунар. конф. «Пробл. теоретической киберн.» (Пенза, 19–23 июня 2017 г.). — М.: МАКС Пресс, 2017. — С. 213–216.

[222] Романов Д. С. Об оценках длин минимальных тестов для логических схем: дис. … д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09 / Романов Дмитрий Сергеевич. — М., 2019. — 350 с.

[223] Романов Д. С., Антюфеев Г. В. О тестах относительно примитивных сдвигов переменных в булевых функциях // Вопросы радиоэлектроники. Сер. ЭВТ. — 2013. — Вып. 2. — С. 64–68.

[224] Романов Д. С., Романова Е. Ю. О единичных проверяющих тестах для схем переключательного типа // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2015. — № 1 (33). — С. 5–23.

[225] Романов Д. С., Романова Е. Ю. О единичных проверяющих тестах константной длины для обобщённых итеративных контактных схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. — 2015. — № 3. — С. 42–50.

[226] Романов Д. С., Романова Е. Ю. Короткие тесты для схем в базисе Жегалкина // Интеллект. системы. Теория и приложения. — 2016. — Т. 20, вып. 3. — С. 73–78.

[227] Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих короткие единичные диагностические тесты при константных неисправностях на выходах элементов // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2016. — № 2 (38). — С. 87–102.

[228] Романов Д. С., Романова Е. Ю. Короткий диагностический тест для одного класса схем // XXI век: итоги прошлого и пробл. настоящего плюс. Сер.: Технические науки. Информ., вычисл. техника и управл. — 2017. — № 04 (38). — С. 91–93.

[229] Романов Д. С., Романова Е. Ю. Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // Дискрет. матем. — 2017. — Т. 29, вып. 4. — С. 87–105.

[230] Рыбко А. И. О контактных схемах, корректирующих замыкания и допускающих контроль // Матем. вопросы киберн. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 168–190.

[231] Соловьёв Н. А. Проверяющие тесты для суперпозиций булевых функций от элементарных однородных функций // Дискрет. матем. — 1996. — Т. 8, вып. 2. — С. 117–132.

[232] Сопруненко Е. П. О минимальной реализации некоторых функций схемами из функциональных элементов // Пробл. киберн. Вып. 15. — М.: Наука, 1965. — С. 117–134.

[233] Тарасов В. В. К проблеме полноты для систем функций алгебры логики с ненадёжной реализацией // Матем. сб. — 1975. — Т. 98(140), № 3(11). — С. 378–394.

[234] Тарасов В. В. К синтезу надёжных схем из ненадёжных элементов // Матем. заметки. — 1976. — Т. 20, № 3. — С. 391–400.

[235] Темербекова Г. Г., Романов Д. С. О единичных проверяющих тестах относительно замен элементов на инверторы // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2020. — Т. 162, кн. 3. — С. 359–366.

[236] Тоноян Р. Н. О единичных тестах для контактных схем, реализующих линейные функции // Изв. АН Арм. ССР. — 1971. — Т. VI, № 1. — С. 61–66.

[237] Турдалиев Н. И. О самокорректировании схем для некоторых последовательностей булевых функций // Дискрет. матем. — 1989. — Т. 1, вып. 3. — С. 77–86.

[238] Турдалиев Н. И. О самокорректирующихся схемах из функциональных элементов для линейной функции // Дискрет. матем. — 1990. — Т. 2, вып. 2. — С. 150–154.

[239] Угольников А. Б. О реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов в полном базисе // Докл. АН СССР. — 1983. — Т. 271, № 1. — С. 49–51.

[240] Угольников А. Б. О реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов // Матем. вопросы киберн. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 89–113.

[241] Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие. — М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом ф-те МГУ, 2008. — 64 с.

[242] Улиг Д. О синтезе самокорректирующихся схем из функциональных элементов с малым числом надёжных элементов // Матем. заметки. — 1974. — Т. 15, № 6. — С. 937–944.

[243] Улиг Д. Самокорректирующиеся контактные схемы, исправляющие большое число ошибок // Докл. АН СССР. — 1978. — Т. 241, № 6. — С. 1273–1276.

[244] Хахулин В. Г. О проверяющих тестах для счётчика чётности // Дискрет. матем. — 1995. — Т. 7, вып. 4. — С. 51–59.

[245] Чашкин А. В. Самокорректирующиеся схемы для функций полиномиального веса // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех. — 1997. — № 5. — С. 64–66.

[246] Чегис И. А., Яблонский С. В. Логические способы контроля работы электрических схем // Тр. МИАН. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.

[247] Чугунова В. В. О надёжности схем в некоторых приводимых полных базисах // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2007. — № 2. — С. 26–39.

[248] Чугунова В. В. О реализациях булевых функций асимптотически оптимальными по надёжности схемами // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2008. — Т. 15, № 6. — С. 63–89.

[249] Чугунова В. В. Об одном множестве функций // Изв. высш. учебн. завед. Поволж. регион. Физ.-матем. науки. — 2009. — № 2 (10). — С. 2–13.

[250] Чугунова В. В. Об асимптотически оптимальных по надёжности схемах в базисе $\{x_1\&x_2\&x_3, x_1 \vee x_2 \vee x_3, \overline{x}_1\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89, вып. 3. — С. 440–458.

[251] Шевченко В. И. О синтезе самокорректирующихся схем с малой трудоёмкостью тестирования // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. — Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1985. — С. 133–143.

[252] Шевченко В. И. О сложности диагностики одного типа неисправностей схем из функциональных элементов с помощью условных тестов // Комбинаторно-алгебр. и вероятностные методы в прикл. матем.: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. — Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1988. — С. 86–97.

[253] Шевченко В. И. О сложности диагностики неисправностей типа «$\oplus$» схем из функциональных элементов // Комбинаторно-алгебр. методы дискрет. анализа: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. — Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1989. — С. 129–140.

[254] Шевченко В. И. О сложности диагностики неисправностей типов «0», «1», «&» и «$\vee$» схем из функциональных элементов // Комбинаторно-алгебр. и вероятностные методы и их применение: Межвуз. тематич. сб. науч. тр. — Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1990. — С. 125–150.

[255] Шевченко В. И. О глубине условных тестов для контроля неисправностей типа «отрицание» в схемах из функциональных элементов // Сибир. журн. исслед. опер. — 1994. — Т. 1, № 1. — С. 63–74.

[256] Шевченко В. И. Исследование сложности условных тестов для диагностики неисправностей схем из функциональных элементов: дис. …канд. физ.-мат. наук: 05.13.17 / Шевченко Владимир Иванович. — Нижний Новгород, 1995. — 149 с.

[257] Шевченко В. И. О глубине условных тестов для диагностики неисправностей в схемах

из функциональных элементов // Вестн. ВВО АТН РФ. № 1. — Нижний Новгород, 1995. — С. 113–118.

[258] Эренфест П. Реферат на книгу: Л. Кутюра. Алгебра логики. Переводъ съ французскаго съ прибавленіями проф. И. Слешинскаго // Журналъ Русскаго физикохимическаго общества. Физическій отд. — 1910. — Т. 42, отд. 2. — С. 382–387.

[259] Яблонский С. В. Асимптотически наилучший метод синтеза надёжных схем из ненадёжных элементов // Banach center publ. — 1982. — Vol. 7. — P. 11–19.

[260] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. — 384 с.

[261] Яблонский С. В. Надёжность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюз. семинара по дискрет. матем. и её приложениям (Москва, 31 января–2 февраля 1984 г.). — М.: Изд-во Моск. ун-та. — 1986. — С. 7–12.

[262] Яблонский С. В. Некоторые вопросы надёжности и контроля управляющих систем // Матем. вопросы киберн. Вып. 1. — М.: Наука, 1988. — С. 5–25.

[263] Яблонский С. В., Чегис И. А. О тестах для электрических схем // Успехи матем. наук. — 1955. — Т. 10, вып. 4 (66). — С. 182–184.

[264] Alekhina M. A. Synthesis and complexity of asymptotically optimal circuits with unreliable gates // Fundamenta Informaticae. — 2010. — Vol. 104, No. 3. — P. 219–225.

[265] Bhattacharjee P. R, Basu S. K., Paul J. C. A novel design of a combinational network to facilitate fault detection // Proc. of the IEEE. — 1987. — Vol. 75, No. 9. — P. 1335–1336.

[266] Bhattacharya B. B, Gupta B. Anomalous effect of a stuck-at fault in a combinational logic circuit // Proc. of the IEEE. — 1983. — Vol. 71, No. 6. — P. 779–780.

[267] Bhattacharya B. B, Gupta B., Sarkar S., Choudhury A. K. Testable design of RMC networks with universal tests for detecting stuck-at and bridging faults // IEE Proc. E (Comput. and Digital Techniques). — 1985. — Vol. 132, No. 3. — P. 155–162.

[268] Breuer M. A. Generation of fault tests for linear logic networks // IEEE Trans. Comput. — 1972. — Vol. C-21, No. 1. — P. 79–83.

[269] Cardot C. Quelques résultats sur l'application de l'algèbre de Boole à la synthèse des circuits à relais // Annales des Télécommunications. — 1952. — Vol. 7, No. 2. — P. 75–84.

[270] Cheng W.-T., Patel J. H. A minimum test set for multiple fault detection in ripple carry adders // IEEE Trans. Comput. — 1987. — Vol. C-36, No. 7. — P. 891–895.

[271] Choudhury M. R., Mohanram K. Reliability analysis of logic circuits // IEEE Trans.

Comput.-Aided Design of Integrated Circuits and Syst. — 2009. — Vol. 28, No. 3. — P. 392–405.

[272] Damarla T. R. Fault detection in Reed-Muller canonical (RMC) networks // Proc. IEEE Energy and Inform. Technologies in the Southeast. — IEEE, 1989. — Vol. 1. — P. 192–196.

[273] DasGupta S., Hartmann C. R. P., Rudolph L. D. Dual-mode logic for function-independent fault testing // IEEE Trans. Comput. — 1980. — Vol. C-29, No. 11. — P. 1025–1029.

[274] Dickinson W. E., Walker R. M. Reliability improvement by the use of multiple-element switching circuits // IBM Journ. of Research and Development — 1958. — Vol. 2, No. 2. — P. 142–147.

[275] Duffus D., Frankl P., Rödl V. Maximal independent sets in the covering graph of the cube // Discrete Applied Math. — 2013. — Vol. 161, No. 9. — P. 1203–1208.

[276] Fujiwara H. On closedness and test complexity of logic circuits // IEEE Trans. Comput. — 1981. — Vol. C-30, No. 8. — P. 556–562.

[277] Gál A. Lower bounds for the complexity of reliable Boolean circuits with noisy gates // Proc. 32nd Ann. Symp. Foundations Comput. Sci. — IEEE, 1991. — P. 594–601.

[278] Gásc P., Gál A. Lower bounds for the complexity of reliable Boolean circuits with noisy gates // IEEE Trans. Inform. Theory. — 1994. — Vol. 40, No. 2. — P. 579–583.

[279] Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N. Analysis of different type of faults in a class of Boolean circuits // Intern. Journ. of Engineer. and Innov. Techn. (IJEIT). — 2012. — Vol. 2, No. 4. — P. 145–149.

[280] Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N. Single network structure for stuck-at and bridging fault analysis and diagnosis for exclusive-OR sum of products in Reed-Muller canonical circuits // Elixir Elec. Engg. — 2013. — Vol. 57. — P. 14080–14085.

[281] Geetha V., Devarajan N., Neelakantan P. N. Network structure for testability improvement in exclusive-OR sum of products Reed-Muller canonical circuits // Intern. Journ. of Engineer. Research and General Sci. — 2015. — Vol. 3, No. 3. — P. 368–378.

[282] Hayes J. P. On realizations of Boolean functions requiring a minimal or near-minimal number of tests // IEEE Trans. Comput. — 1971. — Vol. C-20, No. 12. — P. 1506–1513.

[283] Hayes J. P. On modifying logic networks to improve their diagnosability // IEEE Trans. Comput. — 1974. — Vol. C-23, No. 1. — P. 56–62.

[284] Hirayama T., Koda G., Nishitani Y., Shimizu K. Easily testable realization based on single-

rail-input OR-AND-EXOR expressions // IEICE Trans. Inf. & Syst. — 1999. — Vol. E-82D, No. 9. — P. 1278–1286.

[285] Inose H., Sakauchi M. Synthesis of automatic fault diagnosable logical circuits by function conversion method // Proc. First USA-Japan Comput. Conf. — 1972. — P. 426–430.

[286] Kajihara S., Sasao T. On the adders with minimum tests // Proc. 6th Asian Test Symp. — IEEE, 1997. — P. 10–15.

[287] Kalay U., Hall D. V., Perkovski M. A. A minimal universal test set for self-test of EXOR-Sum-of-Products circuits // IEEE Trans. Comput. — 2000. — Vol. 49, No. 3. — P. 267–276.

[288] Karpovsky M. Universal tests for detection of input/output stuck-at and bridging faults // IEEE Trans. Comput. — 1983. — Vol. C-32, No. 12. — P. 1194–1198.

[289] Karpovsky M., Levitin L. Detection and identification of input/output stuck-at and bridging faults in combinational and sequential VLSI networks by universal tests // Integration, the VLSI Journ. — 1983. — Vol. 1, No. 2–3. — P. 211–232.

[290] Kleitman D., Leighton T., Ma Y. On the design of reliable Boolean circuits that contain partially unreliable gates // Journ. of Comput. and Syst. Sci. — 1997. — Vol. 55, No. 3. — P. 385–401.

[291] Kodandapani K. L. A note on easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1974. — Vol. C-23, No. 3. — P. 332–333.

[292] Liu Y. Design for test methods to reduce test set size: PhD (Doctor of Philosophy) thesis. — Univ. of Iowa, 2018. — 96 p.

[293] Moore E. F, Shannon C. E. Reliable circuits using less reliable relays // Journ. of the Franklin Institute. — 1956. — Vol. 262, No. 3. — P. 191–208; Vol. 262, No. 4. — P. 281–297. (Перевод: Шеннон К. Э. Надёжные схемы из ненадёжных реле // Работы по теории информ. и киберн. — М.: Изд-во иностр. литер., 1963. — С. 114–153.)

[294] Muller D. E. Complexity in electronic switching circuits // IRE Trans. Electronic Comput. — 1956. — Vol. EC-5, No. 1. — P. 15–19.

[295] Neelakantan P. N., Jeyakumar A. E. Single stuck-at fault diagnosing circuit of Reed-Muller canonical exclusive-or sum of product Boolean expressions // Journ. of Comput. Sci. — 2006. — Vol. 2, No. 7. — P. 595–599.

[296] von Neumann J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata studies (AM-34). Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. — P. 43–98. (Перевод: Дж. Нейман. Вероятностная логика и синтез надёжных организмов

из ненадёжных компонент // Автоматы. Сб. статей. — М.: Изд-во иностр. литер., 1956. — С. 68–139.)

[297] Pan Zh. Testable realizations for ESOP expressions of logic functions // Proc. 11th Asian Test Symp. — IEEE, 2002. — P. 140–144.

[298] Pan Zh. Bridging fault detections for testable realizations of logic functions // Proc. 16th Intern. Conf. on VLSI Design. — IEEE, 2003. — P. 423–427.

[299] Pan Zh., Chen G. Fault detection test set for testable realizations of logic functions with ESOP expressions // Journ. of Electronics (China). — 2007. — Vol. 24, No. 2. — P. 238–244.

[300] Perkowski M. A., Csanky L., Sarabi A., Schäfer I. Fast minimization of mixed-polarity AND/XOR canonical networks // Proc. 1992 IEEE Intern. Conf. on Comput. Design: VLSI in Computers and Processors. — IEEE, 1992. — P. 33–36.

[301] Pippenger N. On networks of noisy gates // Proc. 26th Ann. Symp. Foundations Comput. Sci. — IEEE, 1985. — P. 30–38.

[302] Pippenger N., Stamoulis G. D., Tsitsiklis J. N. On a lower bound for the redundancy of reliable networks with noisy gates // IEEE Trans. Inform. Theory — 1991. — Vol. 37, No. 3. — P. 639–643.

[303] Pradhan D. K. Universal test sets for multiple fault detection in AND-EXOR arrays // IEEE Trans. Comput. — 1978. — Vol. C-27, No. 2. — P. 181–187.

[304] Rahagude N. P. Integrated enhancement of testability and diagnosability for digital circuits: Dissert. . . . Master of Sci. in Electric. and Comput. Engineer. — Blacksburg, Virginia, 2010. — 75 p.

[305] Rahaman H., Das D. K. Bridging fault detection in Double Fixed-Polarity Reed-Muller (DFPRM) PLA // Proc. 2005 Asia and South Pacific Design Automation Conf. — IEEE, 2005. — P. 172–177.

[306] Rahaman H., Das D. K. Universal test set for detecting stuck-at and bridging faults in double fixed-polarity Reed-Muller programmable logic arrays // IEE Proc. — Comput. and Digital Techniques. — 2006. — Vol. 153, No. 2. — P. 109–116.

[307] Rahaman H., Das D. K., Bhattacharya B. B. Easily testable realization of GRM and ESOP networks for detecting stuck-at and bridging faults // Proc. 17th Intern. Conf. on VLSI Design. — IEEE, 2004. — P. 487–492.

[308] Rahaman H., Das D. K., Bhattacharya B. B. Testable design of GRM network with EXOR-

tree for detecting stuck-at and bridging faults // Proc. 2004 Asia and South Pacific Design Automation Conf. — IEEE, 2004. — P. 224–229.

[309] Rahaman H., Das D. K., Bhattacharya B. B. Testable design of AND-EXOR logic networks with universal test sets // Comput. and Electric. Engineer. — 2009. — Vol. 35, No. 5. — P. 644–658.

[310] Reddy S. M. Easily testable realizations for logic functions // IEEE Trans. Comput. — 1972. — Vol. C-21, No. 11. — P. 1183–1188.

[311] Reischuk R., Schmeltz B. Reliable computation with noisy circuits and decision trees — a general $n \log n$ lower bound // Proc. 32nd Ann. Symp. Foundations Comput. Sci. — IEEE, 1991. — P. 602–611.

[312] Saluja K. K., Reddy S. M. On minimally testable logic networks // IEEE Trans. Comput. — 1974. — Vol. C-23, No. 5. — P. 552–554.

[313] Saluja K. K., Reddy S. M. Fault detecting test sets for Reed-Muller canonic networks // IEEE Trans. Comput. — 1975. — Vol. C-24, No. 10. — P. 995–998.

[314] Sasao T. Easily testable realizations for generalized Reed-Muller expressions // Proc. 3rd Asian Test Symp. — IEEE, 1994. — P. 157–162.

[315] Seth S. C., Kodandapani K. L. Diagnosis of faults in linear tree networks // IEEE Trans. Comput. — 1977. — Vol. C-26, No. 1. — P. 29–33.

[316] Shannon C. E. A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. AIEE. — 1938. — Vol. 57. — P. 713–723.

[317] Shannon C. E. The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Techn. J. — 1949. — Vol. 28, No. 1. — P. 59–98.

[318] Singh S. P., Sagar B. B. Fault detection at minimization of multiple output function of Reed-Muller canonical form in logical networks // Intern. Journ. of Advanced Research in Comput. Sci. and Software Engineer. — 2013. — Vol. 3, No. 9. — P. 266–270.

[319] Singh S. P., Sagar B. B. Stuck-at fault detection in combinational network coefficients of the RMC with fixed polarity (Reed-Muller coefficients) // Intern. Journ. of Emerg. Trends in Electrical and Electronics (IJETEE). — 2013. — Vol. 1, No. 3. — P. 93–96.

[320] Timoshkin A. I. Testable logical circuit of a binary array multiplier in nonstandard basis // Austrian Journ. of Techn. and Natural Sci. — 2018. — No. 11–12. — P. 46–49.

[321] Uhlig D. Reliable networks from unreliable gates with almost minimal complexity //

Fundamentals of Computation Theory. FCT 1987. Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 278. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1987. — P. 462–469.

[322] Uhlig D. Reliable networks for Boolean functions with small complexity // Parcella 1988. Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 342. — Berlin, Heidelberg: Springer, 1988. — P. 366–371.

[323] Vardanian V. A. On the complexity of terminal stuck-at fault detection tests for monotone Boolean functions // Proc. IEEE VLSI Test Symp. — IEEE, 1994. — P. 182–185.

[324] Weiss C. D. Bound of the length of terminal stuck-fault tests // IEEE Trans. Comput. — 1972. — Vol. C-21, No. 3. — P. 305–309.

Приложение А (справочное). Сводная таблица результатов по тематике главы 1

Таблица А.1

Вид неисправностей	Тип теста	Ранее известные результаты	Результаты диссертации
обрывы контактов	ЕПТ, k-ПТ или ППТ	$D(n) \leqslant 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$ [186]	$\underline{\underline{D(n) = n}}$ (теорема 2.1 [155] и следствие 2.1 [155]), $\underline{D(f) = 2}$ (следствие 2.2 [155])
	ЕДТ	$D(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$ (доказывается по аналогии с [192, с. 113, теорема 9])	———
	k-ДТ	———	$D(n) \leqslant n + k(n-2)$ (следствие 3.1 [164]), $\underline{D(f) \leqslant 2k+2}$ при $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ (теорема 3.3 [164])
	ПДТ	$D(n) \geqslant 2^{n-1}$ [108], $D(n) \leqslant 2^n - 2$ [206]	$D(n) = 2^{n-1}$ (следствие 3.4 [165]); получена асимптотическая нижняя оценка числа б. ф. f от n переменных, для которых $D(f) = 2^{n-1}$ (следствие 3.5 [165])
замыкания контактов	ЕПТ, k-ПТ или ППТ	$D(n) \lesssim 2^{\frac{n}{1+\frac{1}{2\log n}}+\frac{5}{2}}$ [186]	$D(n) = n$ (теорема 4.4 [170]), $\underline{D(f) = 2}$ (теорема 4.2 [169])
	ЕДТ	$D(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$ (доказывается по аналогии с [192, с. 113, теорема 9])	———
	k-ДТ	———	$D(n) \leqslant n + k(n-2)$ (следствие 5.2 [170]), $\underline{D(f) \leqslant 2k+2}$ при $k = k(n) \leqslant 2^{n-4}$ (теорема 5.1 [169])
	ПДТ	$D(n) \geqslant 2^{n-1}$ [108], $D(n) \leqslant 2^n - 2$ [206]	$D(n) = 2^{n-1}$ (следствие 5.4 [165]); получена асимптотическая нижняя оценка числа б. ф. f от n переменных, для которых $D(f) = 2^{n-1}$ (следствие 5.5 [165])

Продолжение на следующей странице

Вид неисправностей	Тип теста	Ранее известные результаты	Результаты диссертации
обрывы и замыкания контактов	ЕПТ	$D(n) \geqslant n+2$ [225]	$\underline{D(f)=4}$ (теорема 6.3 [161]); описаны все б. ф. f, для которых $D(f)=0$, $D(f)=1$, $D(f)=2$ и $D(f)=3$ (теорема 6.1 [161])
	ППТ	$D(n) \leqslant \frac{15}{16} \cdot 2^n$ при $n \geqslant 4$ [185]	———
	ЕДТ	$D(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$ [192, с. 113, теорема 9])	$\underline{D(f) \leqslant 8}$ (теорема 7.2 [168])
	ПДТ	$D(n) = 2^n$ [108]	получена нижняя оценка $4 \cdot 2^{2^{n-2}} - 6$ числа б. ф. f от n переменных, для которых $D(f) = 2^n$ (следствие 7.1 [165])

В таблице А.1 для простоты верхние и нижние индексы у каждой величины вида $D_{\text{Т}}^{\text{Н}}(n)$ или $D_{\text{Т}}^{\text{Н}}(f)$ опущены; они однозначно восстанавливаются по первым двум столбцам таблицы. Кроме того, в таблицах А.1 и Б.1 (см. приложение Б) для краткости приняты следующие условности.

1. В таблицах присутствуют только результаты, касающиеся величин видов $D_{\text{Т}}^{\text{Н}}(n)$, $D_{\text{Т}}^{\text{Н}}(f)$, $D_{\text{Т (М)}}^{B;\,\text{Н}}(n)$ и $D_{\text{Т (М)}}^{B;\,\text{Н}}(f)$, кроме случаев, когда f — конкретная б. ф. (например, $f(\tilde{x}^n) = x_1 \vee \ldots \vee x_n$), и только те комбинации вида неисправностей и типа теста, для которых известен ранее или получен автором хотя бы один такой результат.

2. Из каждой серии результатов, соответствующих разным графам таблиц и получаемых друг из друга очевидными соображениями (например, таким, что любой диагностический тест является проверяющим, или с использованием утверждения 8.9 и следствия 8.1), в таблицах присутствует только один результат, за исключением случаев, когда результат более старой работы улучшался в более новой.

3. Наличие в таблицах любого равенства, содержащего $D(n)$ и дважды подчёркнутого снизу, означает, что, помимо точного значения величины $D(n)$, для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$ найдено точное значение величины $D(f)$.

4. Каждое соотношение в таблицах, содержащее $D(f)$ и подчёркнутое снизу, верно для почти всех б. ф. f от n переменных.

5. Каждое соотношение в таблицах, содержащее $D(n)$, справедливо при $n \geqslant 2$ и — для случая k-ПТ или k-ДТ — при любом $k \in \mathbb{N}$, если явно не указано иное (некоторые из этих соотношений также справедливы при $n \in \{0, 1\}$).

Приложение Б (справочное). Сводная таблица результатов по тематике главы 2

Таблица Б.1

Вид неисправностей	Тип теста	Ранее известные результаты	Результаты диссертации
ОКН типа 0 на выходах элементов	ЕПТ	———	$\underline{\underline{D(n) = 3}}$, базис $\{\&, \neg\}$ (теорема 9.6 [153] и следствие 9.2 [153])
	ППТ	$\underline{\underline{D(n) = 1}}$, базис $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ [51]	———
	ЕДТ	$D(n) \lesssim \frac{2^n}{n}$, любой ф. п. базис (доказывается по аналогии с [192, с. 113, теорема 9])	$D(n) \geqslant 2$ при $n > m$, причём $\underline{D(f) \geqslant 2}$; любой (N, m)-базис, где $N \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$ (теорема 10.1 [154]); $\underline{\underline{D(n) = 2}}$, базис $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ или $\{\&, \oplus, 1\}$ (теорема 10.3 [151], следствие 10.2 и замечание 10.1)
ОКН типа 1 на выходах элементов	ЕПТ	$\underline{\underline{D(n) = 1}}$, базис $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ [47]	$D(n) = 2$, любой ф. п. базис специального вида (теорема 9.3 [154]); $\underline{\underline{D(n) = 3}}$, базис $\{\&, \neg\}$ (теорема 9.5 [153] и следствие 9.1 [153])
	ППТ	$D(n) \leqslant n$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ [189]; $D(n) = 2$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ [46]; $D(n) \geqslant n + 1$, базис $\{x \mid y\}$ [49]; описаны все б. ф. f, для которых $D(f) = 1$, базис $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ [50]	$\underline{\underline{D(n) = 2}}$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ (теорема 9.4 [163])
	ЕДТ	$D(n) \leqslant 2n+1$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ [193]; $D(n) \leqslant 2 \log\lceil n + 1\rceil + 1$, базис $\{x_1 \& \ldots \& x_t, x_1 \vee \ldots \vee x_t, \overline{x} \mid t = 2, 3, 4, \ldots\}$ [202]	$\underline{\underline{D(n) = 2}}$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ (теорема 10.2 [156] и следствие 10.1 [156]); $D(n) \leqslant 3$, базис $\{\&, \oplus, 1\}$ (теорема 18.3 [167])
	ПДТ	$D(n) \leqslant 2^{n-1}$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ [205]	$D(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$, базис $\{x \mid y\}$ (теорема 10.5 [150])

Продолжение на следующей странице

Вид неисправностей	Тип теста	Ранее известные результаты	Результаты диссертации
ПКН на выходах элементов	ЕПТ	$D(n) \leqslant n+3$, базис $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ [192, с. 116, теорема 10]; $D(n) \leqslant n+3$ при $n \geqslant 3$, любой ф. п. конечный базис [86]–[89]; $2 \leqslant D(n) \leqslant 4$, базис $\{\&, \oplus, \sim\}$, $\{\&, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{x \mid y\}$, $\{x \downarrow y\}$, $\{\overline{x}, x\&\overline{y}\}$, $\{\overline{x}, x \vee \overline{y}\}$ или любой ф. п. базис, содержащий константы 0 и 1 [215]	$D(n) \geqslant 3$ при $n \geqslant 3$, причём $\underline{D(f) \geqslant 3}$; любой $(N, 2)$-базис, не содержащий констант 0 и 1, где $N \in \mathbb{N}$ (теорема 11.1 и замечание 11.1); $\underline{\underline{D(n) = 2}}$, базис $\{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$ (теорема 11.2 [157] и следствие 11.1 [157])
	k-ПТ	$D(n) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\lfloor \log k \rfloor + 1} C_n^i + 3$, базис $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ [87, глава 3]	———
	ППТ	$D(n) \leqslant 2\left(2^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} + 2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} + n\right)$, любой ф. п. конечный базис [187, 190]; $2 \leqslant D(n) \leqslant 4$, $(N, 7)$-базис, где $N \leqslant 46$ [214]; $D(n) \geqslant n+1$, базис $\{\&, \neg\}$ [49]	$\underline{\underline{D(n) = 2}}$, $(2, 4)$-базис (теорема 11.4 [159] и следствие 11.3 [159]); $\underline{D(f) \leqslant 4}$, базис $\{\&, \vee, \oplus, 1\}$ (теорема 11.5 [162])
	ЕДТ	$D(n) \lesssim \frac{2^{n+1}}{n}$, любой ф. п. базис [192, с. 113, теорема 9]; $D(n) \leqslant 22$, базис $\{\&, \oplus, 1\}$ или $\{\&, \oplus, \sim\}$ [227]; $D(n) \leqslant 6$, $(5, 9)$-базис [227]	$D(n) \geqslant 3$ при $n > m$, причём $D(f) \geqslant 3$ для любой б. ф. $f(\tilde{x}^n)$, существенно зависящей от всех своих переменных; любой (N, m)-базис, где $N \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$ (следствие 12.1 [154]); $\underline{\underline{D(n) = 3}}$, $(1, 6)$-базис (теорема 12.3 [157] и следствие 12.3 [157]); $D(n) \leqslant 4$, базис $\{x\&y, \overline{x}, x \oplus y \oplus z\}$ (теорема 18.5 [167])
	ПДТ	———	$D(n) > \frac{2^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt[4]{n}}{2\sqrt{n + \frac{1}{2}\log n + 2}}$, базис $\{\&, \neg\}$ (теорема 12.4 [150])

Продолжение на следующей странице

Вид неисправностей	Тип теста	Ранее известные результаты	Результаты диссертации
ОКН типа 0 на входах элементов	k-ПТ	———	$\underline{\underline{D(n)=1}}$, (2, $\max(k+1,\,3)$)-базис (теорема 13.1 [160] и следствие 13.1 [160])
	ППТ	$D(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ [188]	———
	ЕДТ	$D(n) \lesssim 4\left(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}\right)$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ [191]	———
	k-ДТ	———	$\underline{\underline{D(n)=1}}$, (2, $2k+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2$)-базис (теорема 14.1 [160] и следствие 14.1 [160])
ПКН на входах элементов	k-ПТ	———	$\underline{\underline{D(n)=2}}$, (4, $2k+2$)-базис (теорема 15.1 [166] и следствие 15.1 [166])
	ППТ	$D(n) = O(\frac{2^n}{\sqrt{\log n}})$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ [198]	———
	k-ДТ	———	$\underline{\underline{D(n)=2}}$, (5, $4k+2$)-базис (теорема 16.1 [166] и следствие 16.1 [166])
ОКН типа 0 на входах и выходах элементов	k-ПТ	———	$\underline{\underline{D(n)=2}}$, (2, $\max(k+1,\,3)$)-базис (теорема 13.2 [160] и следствие 13.2 [160])
	ЕДТ	$D(n) = O(2^{\frac{n}{2}})$, базис $\{\&, \vee, \neg\}$ [191]	$D(n) \leqslant 3$, базис $\{x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3, \overline{x}\}$ (теорема 18.2 [167])
	k-ДТ	———	$\underline{\underline{D(n)=2}}$, (2, $2k+\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 2$)-базис (теорема 14.2 [160] и следствие 14.2 [160])
ПКН на входах и выходах элементов	ЕПТ	$D(n) \leqslant n+3$, базис $\{\&, \oplus, 1, 0\}$ [192, с. 116]; $D(n) \leqslant 16$, базис $\{\&, \oplus, 1\}$ или $\{\&, \oplus, \sim\}$ [226, 229]	———
	k-ПТ	———	$\underline{\underline{D(n)=3}}$, (4, $2k+2$)-базис (теорема 15.2 [166] и следствие 15.2 [166])
	ЕДТ	———	$\underline{\underline{D(n)=4}}$ при $n \geqslant 3$, $(5, 6)$-базис (теорема 16.2 [166] и следствие 16.2 [166]); $D(n) \leqslant 4$, $(4, 4)$-базис (теорема 18.4 [167])
	k-ДТ	———	$D(n) = 4$ при $n \geqslant 3$, причём $\underline{D(f) = 4}$ при $k \geqslant 2$; (5, $4k+2$)-базис (теорема 16.3 [166])

Продолжение на следующей странице

Вид неисправностей	Тип теста	Ранее известные результаты	Результаты диссертации
ИН на выходах элементов	ЕПТ	$\underline{\underline{D(n)=1}}$, базис $\{\&,\oplus,1,0\}$ [84]; $D(n)\leqslant 2$, базис $\{\&,\vee,\neg\}$ [199]; $D(n)\leqslant 3$, любой ф. п. базис [200]	———
	ППТ	$D(n)\leqslant 4$, $(N,9)$-базис, где $N\leqslant 21$ [219]	———
	ЕДТ	$D(n)\leqslant n+1$, базис $\{\&,\oplus,1,0\}$ [84]; $\underline{\underline{D(n)=1}}$, базис $\{\&,\oplus,1\}$ [218]; $\underline{\underline{D(n)=2}}$, базис $\{\&,\vee,\neg\}$ [220]; $D(n)\leqslant 4$, любой ф. п. базис, содержащий хотя бы одну из функций $x\&y$, $x\vee y$, $x\,|\,y$, $x\downarrow y$ [106]	———
	ПДТ	$D(n)\leqslant 2^{n-2}$, базис $\{\&,\oplus,1,0\}$ [84]; $\underline{\underline{D(n)=1}}$, базис $\{x_1\&\ldots\&x_t, x\oplus y, 1\mid t=2,3,4,\ldots\}$ [228]	$1\leqslant D(n)\leqslant 2$, базис $\{x\&y\&z, x\oplus y, 1\}$ (теорема 17.1 [158])
ИН на входах и выходах элементов	ЕПТ	———	$\underline{\underline{D(n)=1}}$, базис $\{\&,\oplus,1\}$ (следствия 18.1 и 18.2; автор не претендует на научную новизну этих результатов)
	ЕДТ	———	$D(n)\leqslant 3$, базис $\{\&,\oplus,1\}$ (теорема 18.6 [167])

В таблице Б.1 для простоты все верхние и нижние индексы у каждой величины вида $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(n)$ или $D^{B;\,\text{Н}}_{\text{Т}\,(\text{М})}(f)$ опущены; они однозначно восстанавливаются по первым двум столбцам таблицы и базису, указанному сразу после соответствующего результата (в предположении, что этот базис обозначен через B). Кроме того, в таблице приняты условности 1–5 (см. с. 373), а также следующие условности.

6. Всюду под (N,m)-базисом понимается некоторый полный базис, состоящий из N б. ф., максимальное число существенных переменных у которых равно m. Например, базис $\{\&,\vee,\neg\}$ является $(3,2)$-базисом.

7. Для краткости в таблице отсутствуют результаты, касающиеся тестов для входов схем.