

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

На правах рукописи



Елохин Антон Вадимович

**СИНТЕЗ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В АНТЕННЫХ
РЕШЕТКАХ НА ОСНОВЕ СВОЙСТВ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА
КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ**

01.04.03 – Радиофизика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Доктор физ.-мат наук, проф. Флакман А.Г.

Нижний Новгород – 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1 Метод минимального многочлена для оценки числа близкорасположенных источников сигналов	15
1.1 Минимальный многочлен корреляционной матрицы сигналов в антенной решетке	15
1.2 Метод оценки числа источников сигналов	21
1.3 Результаты численного моделирования эффективности метода	31
1.4 Заключение по первой главе	36
2 Сверхразрешающие методы минимального многочлена корреляционной матрицы входного процесса в антенной решетке	37
2.1 Псевдоспектральный и корневой методы	37
2.1.1 Псевдоспектральный метод	37
2.1.2 Корневой метод	42
2.2 Обобщение методов на случай коррелированных источников сигналов	48
2.3 Результаты численного моделирования эффективности методов	56
2.4 Заключение по второй главе	64
3 Результаты натуральных экспериментов на автомобильном радиолокаторе	66
3.1 Обработка сигналов в ЛЧМ-ММО-радиолокаторе	66
3.2 Статические сценарии (полигон)	74
3.3 Динамические сценарии (полигон)	88
3.4 Сценарии на реальной дороге	93
3.5 Заключение по третьей главе	95
4 Заключение	98
5 Список использованных сокращений	100
6 Список используемой литературы	101

Введение

Актуальность темы диссертационной работы

В настоящее время наблюдается интенсивное развитие методов адаптивной пространственной обработки сигналов в многоэлементных антенных решетках (АР), которые находят применение в системах радиолокации [1-12], радиосвязи [13-19], гидроакустической локации [20, 21], и ряде других областей. При разработке перспективных радиолокационных систем актуальными являются проблемы оценки числа действующих источников сигналов и их угловых положений, когда источники расположены в пределах ширины луча АР («сверхразрешение» близкорасположенных источников).

Данные задачи решаются на основе приема и обработки выборки входного процесса в элементах АР и являются статистическими. Как правило, статистические методы основаны на анализе функции правдоподобия и не дают максимально правдоподобной оценки числа источников сигналов, так как функция правдоподобия не имеет экстремума по числу источников. Поэтому предложено модифицировать эту функцию путем добавления к ней некоторой корректирующей (так называемой «штрафной») функции. Положение максимума модифицированной функции правдоподобия в зависимости от числа источников и является оценкой этого числа. Однако статистически строгое обоснование корректирующей функции отсутствует. Данная функция формируется обычно на основе критериев АИС (Akaike's Information Criterion) или MDL (Minimum Description Length) [7, 8, 22, 23]. Отметим также пошаговый метод оценивания числа источников сигналов по пространственно-временной выборке в АР, который относится к методам параметрического спектрального анализа [24-26].

В [27, 28] предложен проекционный метод минимального многочлена, основанный на оценке параметров (степень и корни) минимального многочлена корреляционной матрицы (КМ) сигналов в элементах АР. Метод основан на статистически обоснованном критерии минимума функционала среднеквадратиче-

ской ошибки (СКО) аппроксимации минимального многочлена. Данный критерий тесно связан с критериями минимума информационного расстояния и максимума функции правдоподобия [29]. Однако при исследовании эффективности метода минимального многочлена основное внимание уделялось случаю длинной выборки входного процесса, когда число выборочных векторов больше числа элементов AP. Кроме этого в [27, 28] уровень порога, необходимого для реализации критерия минимума функционала СКО, выбирался на основе априорной информации о собственных шумах приемных устройств и вероятности «ложной тревоги» при обнаружении источников сигналов. Такой подход обеспечивает эффективное обнаружение достаточно слабых источников. В то же время для проблемы сверхразрешения наибольший интерес представляет оценка числа близкорасположенных источников сигналов.

Для оценки угловых координат близкорасположенных источников сигналов используются методы сверхразрешения. Данное название связано с тем, что с их помощью можно превзойти рэлеевский предел углового разрешения, равный ширине луча AP. К таким методам относятся методы Кейпона, MUSIC (MUltiple Signal Classification), ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques), RARE (Rank Reduction), пошагового оценивания, максимально правдоподобной классификации сигналов и минимального многочлена корреляционной матрицы (KM) входных сигналов в AP [7, 8, 24-28, 30-34].

Существует две классификации данных методов. Во-первых, их можно разделить на два класса – непараметрические и параметрические [8]. Для параметрических методов необходимо построить математическую сигнальную модель на основе имеющихся априорных данных. Например, часто делается предположение о малом угловом размере источников сигналов (точечные или дискретные источники), типе волнового фронта (плоский, цилиндрический, сферический), характере многолучевости и рассеяния в пространственном канале. Неизвестными являются число источников сигналов, их мощности и угловые направления, которые являются числовыми параметрами в модели. Задача параметрических методов заключается в оценке этих параметров по принятой реализации входного

процесса в АР. Непараметрические методы не предполагают построение сигнальной модели, а основаны на непосредственном анализе входного процесса в АР.

Одним из популярных сверхразрешающих методов является непараметрический метод Кейпона [7, 34]. Из достаточно большого количества параметрических методов наибольшей эффективностью обладают проекционные методы, основанные на построении матричного проектора на шумовое подпространство. К ним можно отнести методы максимально правдоподобной оценки, MUSIC с его модификациями [7, 8], проекционный метод, основанный на оценке степени и корней минимального многочлена корреляционной матрицы (КМ) входного процесса в АР [27, 28].

Во-вторых, сверхразрешающие методы разделяются по способам обзора пространства на методы с последовательной и параллельной пеленгацией источников сигналов [8]. При использовании методов первого класса необходимо вначале сформировать функцию угловых координат (так называемую псевдоспектральную функцию), а затем оценить направления на источники по соответствующим максимумам этой функции. Недостатками последовательной пеленгации являются относительно низкая скорость обзора пространства и высокая вычислительная сложность алгоритмов формирования псевдоспектральной функции и поиска ее экстремумов, особенно в случае многоэлементных АР с узким лучом. Отмеченные выше методы Кейпона, MUSIC и минимального многочлена обеспечивают последовательную пеленгацию источников сигналов. Корневой метод MUSIC (root MUSIC) и метод ESPRIT относятся ко второму классу. При их использовании вместо экстремумов псевдоспектральной функции отыскиваются корни соответствующих полиномов и в рамках единой вычислительной процедуры находятся угловые координаты всех источников. Отметим, что корневой метод MUSIC обеспечивает более высокую точность оценки угловых координат по сравнению со спектральным методом MUSIC [7, 8].

На практике часто используются АР с большим числом элементов, когда трудно получить длинную выборку, например, из-за нестационарности сигнальной обстановки. Поэтому актуален случай короткой выборки, когда число L вы-

борочных векторов меньше числа N элементов AP ($L < N$). Более того, для многоэлементных AP выборка может быть «сверхкороткой», когда длина L значительно меньше числа N элементов AP ($L \ll N$). Представляет интерес обобщение и анализ эффективности сверхразрешающего спектрального метода минимального многочлена на случай короткой выборки входного процесса.

Источники сигналов могут быть как некоррелированными, так коррелированными между собой. Например, в канале с многолучевым распространением сигналов один источник создает несколько волновых фронтов, приходящих на AP с различных направлений. Такую ситуацию можно рассматривать как прием сигналов от нескольких коррелированных источников. При этом некоторые из сигнальных собственных чисел точной КМ \mathbf{M} становятся близкими к шумовому собственному числу, что затрудняет оценку числа источников, связанную с разделением собственных чисел выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$ на сигнальные и шумовые. Ситуация с коррелированными источниками может возникать, когда сигнал первичного источника излучения испытывает отражение от близкорасположенных объектов и приходит на антенную решётку с разных направлений, что характерно, например, для систем активной радиолокации. Однако в [27, 28] эффективность метода минимального многочлена для решения проблемы «сверхразрешения» анализировалась только для некоррелированных источников. При этом направления на источники оценивались по максимумам псевдоспектральной функции. Поэтому актуальным является разработка корневого метода минимального многочлена и исследование его эффективности для некоррелированных и коррелированных источников сигналов, а также при произвольной длине выборки входного процесса в AP.

В настоящее время активно разрабатываются продвинутое системы помощи водителю (Advanced Driver Assistance Systems – ADAS) и соответствующие стандарты для взаимодействия таких систем [35-38]. В ADAS-систему входят различные устройства, которые осуществляют поддержку в управлении автомобилем, в том числе радиолокаторы. Наиболее распространенными являются автомобильные радиолокаторы миллиметрового диапазона, которые используют им-

пульсы с линейной частотной модуляцией (Frequency-Modulated Continuous-Wave (FMCW) Radar) [39-42]. В этих радиолокаторах используются передающая и приемная АР (так называемые ММО-радиолокаторы) для измерения углового положения автомобилей [40, 43-48].

Сигналы передающих антенн кодируются ортогональными кодами, то есть являются взаимно ортогональными. При отражении от цели данные сигналы суммируются в приемных антеннах со своими фазовыми сдвигами, которые зависят от взаимного положения передающих и приемных антенн. Взаимная ортогональность кодированных сигналов обеспечивает отсутствие их интерференции, а также возможность их разделения в приемных антеннах и когерентной обработки. В результате формируется эквивалентная приемная АР, состоящая из реальных и виртуальных антенн, то есть имеющая большее число элементов и, следовательно, степеней свободы, по сравнению с реальной решеткой. Представляют несомненный интерес сравнительные результаты численных и натурных экспериментов по применению «сверхразрешающих» методов в таком ММО-радиолокаторе.

Таким образом, тема данной диссертации, посвященной разработке новых эффективных методов пространственной обработки сигналов в адаптивных АР на основе свойств минимального многочлена корреляционной матрицы входных сигналов, является актуальной. Актуальность выбранной темы диссертации подтверждается также активной работой в области применения адаптивных АР ведущими компаниями-производителями радиолокационного оборудования, а также большим объемом публикаций в научно-технических журналах, посвященных данным вопросам.

Целью работы является создание и исследование новых высокоэффективных методов пространственной обработки сигналов в АР систем радиолокации для повышения вероятности правильной оценки числа близкорасположенных источников сигналов и их угловых положений в сложных условиях короткой выборки входного процесса и произвольной корреляции этих источников.

Задачи диссертационной работы

1. Обобщение метода минимального многочлена КМ сигналов в элементах АР для оценки числа близкорасположенных некоррелированных источников сигналов на случай короткой выборки входного процесса.
2. Разработка сверхразрешающего корневого метода минимального многочлена и анализ его эффективности при некоррелированных источниках сигналов и произвольной длине выборки входного процесса в АР.
3. Обобщение спектрального и корневого методов минимального многочлена на случай близкорасположенных и произвольно коррелированных источников сигналов.
4. Проведение натуральных экспериментов и обработка результатов по разрешению двух близкорасположенных источников сигналов на автомобильном радиолокаторе миллиметрового диапазона длин волн с широкополосными линейно–частотно модулированными импульсами для сравнительного анализа эффективности разработанных и известных методов.

Методы исследований

При решении поставленных задач использовались методы статистической радиофизики, теории информации, высшей алгебры, векторного анализа и теории матриц, численное моделирование, а также натурные экспериментальные исследования.

Научная новизна работы определяется полученными оригинальными результатами и заключается в следующем:

1. Выполнено обобщение сверхразрешающего метода минимального многочлена КМ сигналов в элементах АР на случай произвольной (в том числе короткой) длины входного процесса в АР. Показано, что обобщенный метод обеспечивает высокоэффективные оценки числа близкорасположенных источников сигналов при произвольной длине входного процесса в АР.

2. Разработан сверхразрешающий корневой метод минимального многочлена и показана его высокая эффективность при некоррелированных источниках сигналов и произвольной длине входного процесса в АР. Метод обеспечивает оценку числа и угловых координат некоррелированных источников сигналов на основе поиска корней соответствующих полиномов в рамках единой (одноэтапной) вычислительной процедуры.

3. Выполнено обобщение спектрального и корневого методов минимального многочлена на случай произвольным образом коррелированных источников сигналов. Показано, что эффективность методов значительно увеличивается за счет использования процедуры пространственного сглаживания и соответствующего выбора порога при оценке степени минимального многочлена КМ.

4. Проведенные экспериментальные результаты по сверхразрешению двух близкорасположенных источников сигналов, выполненные на автомобильном радиолокаторе миллиметрового диапазона длин волн в условиях полигона и реальных дорожных ситуаций, подтвердили высокую эффективность разработанных методов.

Краткое содержание диссертации

Настоящая диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка используемой литературы, и приложения со списком условных обозначений.

Во введении освещается современное состояние методов обработки сигналов в антенных решетках радиолокационных систем с точки зрения проблемы сверхразрешения близкорасположенных источников сигналов, обосновывается актуальность темы диссертации, кратко излагается содержание работы.

В первой главе рассмотрен сверхразрешающий метод минимального многочлена КМ сигналов в АР, основанный на оценке степени и коэффициентов этого многочлена. Основное внимание уделяется двум случаям. Первый – близкорасположенные источники с взаимным углом расстоянием меньше ширины луча АР, второй – короткая выборка входного процесса, когда число выборочных векторов меньше числа элементов АР.

В разделе 1.1 рассмотрены основные свойства минимального многочлена КМ сигналов в АР при наличии J произвольным образом коррелированных источников сигналов.

В разделе 1.2 исследована проблема оценки степени и коэффициентов минимального многочлена КМ сигналов в АР. Показано, что предложенный подход к выбору порога при оценке степени минимального многочлена обеспечивает высокую вероятность правильной оценки числа близкорасположенных некоррелированных источников сигналов в случае произвольной (в том числе и короткой) выборки входного процесса.

В разделе 1.3 приводятся результаты численного моделирования эффективности метода минимального многочлена. Сравняется эффективность этого методов с эффективностью критериев АИС и MDL по оценке числа близкорасположенных источников сигналов.

В разделе 1.4 сформулированы основные выводы, вытекающие из проведенного в первой главе исследования.

Во второй главе рассматриваются сверхразрешающие методы минимального многочлена корреляционной матрицы сигналов в АР, основанные на оценке степени и коэффициентов этого многочлена. Исследуются эффективность двух методов минимального многочлена – псевдоспектрального и корневого. Основное внимание уделяется случаю короткой выборки входного процесса, когда число выборочных векторов меньше числа элементов АР, и обобщению спектрального и корневого методов минимального многочлена на случай произвольным образом коррелированных источников сигналов.

В разделе 2.1 разработан «сверхразрешающий» корневой метод минимального многочлена при некоррелированных источниках сигналов и произвольной длине выборки входного процесса в АР.

В разделе 2.2 получено обобщение спектрального и корневого методов минимального многочлена на случай, когда близкорасположенные источники сигналов произвольным образом коррелированы между собой.

В разделе 2.3 приведены результаты выполненного численного моделирования эффективности методов при произвольной длине выборки входного процесса, а также при некоррелированных и коррелированных источниках сигналов.

В разделе 2.4 сформулированы основные выводы, вытекающие из проведённого во второй главе исследования.

В третьей главе приводится описание натуральных экспериментов, выполненных на автомобильном ММО-радиолокаторе миллиметрового диапазона длин. Приводятся сравнительные результаты по сверхразрешению двух близкорасположенных источников сигналов, полученные на этом радиолокаторе с помощью разработанных методов минимального многочлена и других известных методов.

В разделе 3.1 анализируются особенности временной обработки сигналов в радиолокаторе, рассматривается формирование виртуальных приемных антенн и особенности пространственного сглаживания КМ входного процесса.

В разделе 3.2 дано краткое описание статических сценариев с неподвижными источниками отраженных сигналов и радиолокатором и приведены экспериментальные результаты по сверхразрешению двух близкорасположенных источников сигналов, а также их сравнение с результатами, полученными другими известными методами.

В разделе 3.3 приводятся результаты экспериментов для динамических сценариев с подвижным радиолокатором. Приводятся сравнительные результаты, полученные методом сканирования главным лучом диаграммы направленности полной антенной решётки (метод Фурье), спектральным и корневым методами минимального многочлена.

В разделе 3.4 рассматриваются результаты экспериментов для сценариев на реальной дороге, когда два автомобиля–цели были не разрешимы по дальности и скорости.

В разделе 3.5 сформулированы основные выводы, вытекающие из проведённого в третьей главе рассмотрения.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе, и сделаны исходя из них теоретические и практические выводы.

В приложении приведен список используемых сокращений.

Практическая значимость результатов

Созданные и представленные в диссертации высокоэффективные методы «сверхразрешения» близкорасположенных источников сигналов в АР могут быть использованы при совершенствовании современных и проектировании перспективных систем радиолокации нового поколения.

Обоснованность и достоверность

Обоснованность и достоверность научных положений и выводов, сформулированных в настоящей диссертации, подтверждается их сравнением с результатами компьютерного моделирования и натуральных экспериментов, соответствием с опубликованными ранее результатами в данной области, отсутствием противоречий результатов диссертации с известными теоретическими положениями статистической радиофизики и теории информации, а также сравнением полученных теоретических результатов с результатами проведенных экспериментов.

Апробация результатов

Диссертационная работа выполнена на кафедре статистической радиофизики и мобильных систем связи радиофизического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского. Ее основные результаты докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

- X-ая и XII-ая Всероссийские конференции «Радиолокация и радиосвязь», ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Москва, 2016 и 2018 гг.

- XXI-ая научная конференция по радиофизике, ННГУ, Нижний Новгород, 2017 г.

- XXIII-ая международная конференция «Информационные системы и технологии» ИСТ-2017, НГТУ, Нижний Новгород, 2017 г.
- III-ая научно-техническая конференция «Радиолокация. Теория и практика», АО ФНПЦ «ННИИРТ», Нижний Новгород, 2017 г.

Публикации

Основные материалы диссертации опубликованы в 10 работах. Среди них 3 статьи [49-51] в журналах, включенных в библиографическую базу данных Web of Science, 1 статья [52] включена в базу данных RSCI (Russian Science Citation Index), и 6 работ [53-58], представляющие собой опубликованные материалы докладов на научных конференциях.

Положения, выносимые на защиту

1. Высокоэффективная оценка числа близкорасположенных некоррелированных источников сигналов и их угловых координат может быть выполнена с помощью AP на основе метода минимального многочлена при произвольной (в том числе короткой) длине выборки входного процесса в элементах AP.
2. Сверхразрешающий корневой метод минимального многочлена обеспечивает высокоэффективную оценку угловых координат некоррелированных источников сигналов при произвольной длине выборки входного процесса в AP на основе поиска корней соответствующих полиномов в рамках единой вычислительной процедуры.
3. Спектральный и корневой методы минимального многочлена обеспечивают определение угловых координат близкорасположенных и коррелированных источников сигналов в AP с высокой точностью за счет использования процедуры пространственного сглаживания с коррекцией порогового подхода к оценке степени минимального многочлена КМ сигналов в AP.
4. Полученные на автомобильном ММО-радиолокаторе миллиметрового диапазона длин волн экспериментальные результаты по сверхразрешению близ-

корасположенных источников сигналов подтверждают высокую эффективность разработанных методов минимального многочлена.

1 **Метод минимального многочлена для оценки числа близкорасположенных источников сигналов**

Проблему сверхразрешения источников излучения с помощью АР можно разделить на две задачи. Первая из них заключается в оценке числа источников сигналов, а вторая – в оценке параметров каждого из этих сигналов (угловых координат, мощностей и корреляционных функции). В первой главе диссертации рассматривается задача оценки числа источников сигналов на основе метода минимального многочлена корреляционной матрицы входного процесса в АР. Основное внимание уделяется двум случаям. Первый – близкорасположенные источники с углом расстоянием между ними меньшим ширины луча АР, второй – короткая выборка входного процесса, когда число выборочных векторов меньше числа элементов АР. Приводятся результаты численного моделирования эффективности метода.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [49, 53, 55].

1.1 Минимальный многочлен корреляционной матрицы сигналов в антенной решетке

Рассмотрим N -элементную АР, на входе которой имеются узкополосные сигналы от J точечных источников. Выборку вектора $\mathbf{X}(l)$ входного процесса в l -ый момент времени можно представить в виде

$$\mathbf{X}(l) = \sum_{j=1}^J a_j(l) \mathbf{S}_j + \mathbf{Z}(l), \quad (1.1.1)$$

где \mathbf{S}_j – вектор комплексных амплитуд колебаний, возбуждаемых j -ым источником в элементах АР, $a_j(l)$ – комплексная амплитуда сигнала этого источника в элементах АР, $\mathbf{Z}(l)$ – вектор собственных шумов приемных устройств. Далее будем называть вектор \mathbf{S}_j вектором j -го источника.

Будем считать $a_j(l)$ и $\mathbf{Z}(l)$ гауссовыми комплексными шумовыми процессами. Выборочные векторы $\mathbf{X}(l)$ выбираются через временной интервал Δt обратный ширине полосы Δf приемных устройств ($\Delta t \approx 1/\Delta f$), что обеспечивает статистическую независимость выборок по времени. Без ограничения общности мощность собственных шумов можно полагать единичной, а среднее значение – равным нулю.

Пусть источники расположены достаточно далеко от апертуры АР, то есть их волновые фронты являются плоскими. Тогда для АР произвольной конфигурации n -я компонента вектора \mathbf{S}_j равна $(S_j)_n = \exp[-j(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_n)]$, где вектор $\boldsymbol{\rho}_n$ задает положение n -го элемента АР в трехмерной системе координат (x, y, z) , начало которой совмещено с первым элементом, \mathbf{k} – волновой вектор, задающий направление распространения волны, $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\rho}_n)$ – скалярное произведение векторов \mathbf{k} и $\boldsymbol{\rho}_n$ [59]. Соответствующие геометрические пояснения даны на Рисунок 1.1.

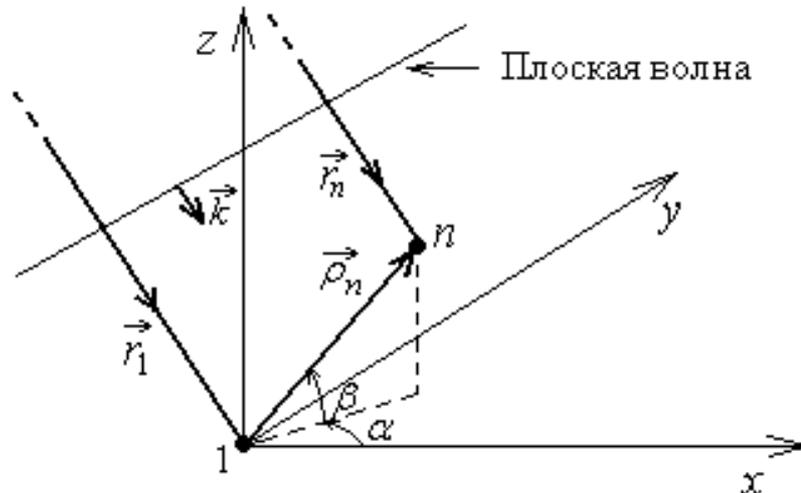


Рисунок 1.1 Геометрические пояснения для АР произвольной конфигурации

Для линейной и эквидистантной АР n -ая компонента вектора \mathbf{S}_j равна

$$(\mathbf{S}_j)_n = \exp[j(n-1)2\pi(d/\lambda)\sin\varphi_j], \quad (1.1.2)$$

где φ_j – угловая координата j -го источника, отсчитываемая от нормали к АР, d – период АР, λ – длина волны.

Статистическую связь источников зададим матрицей \mathbf{B} с элементами $\mathbf{B}_{jq} = \langle a_j(l)a_q^*(l) \rangle = \sqrt{v_j v_q} \rho_{jq}$, где v_j – мощность сигнала j -го источника в элементах АР, ρ_{jq} – коэффициент корреляции комплексных амплитуд j -го и q -го источников, $(\cdot)^*$ – комплексное сопряжение, $\langle \cdot \rangle$ – статистическое среднее. При единичной мощности собственных шумов величина v_j представляет собой отношение сигнала j -го источника к шуму (ОСШ). При некоррелированных источниках матрица \mathbf{B} становится диагональной и состоит из мощностей источников: $\mathbf{B} = \text{diag}\{v_1, v_2, \dots, v_J\}$.

Статистические свойства совокупности гауссовых комплексных величин $\mathbf{X}(l)$ определяются КМ входного процесса $\mathbf{M} = \langle \mathbf{X}(l)\mathbf{X}(l)^H \rangle$ размерности $N \times N$, которая равна [5,7,8]

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{S}^{(0)} \mathbf{B} \mathbf{S}^{(0)H}, \quad (1.1.3)$$

где \mathbf{I} – единичная КМ некоррелированных собственных шумов, $\mathbf{S}^{(0)} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_J]$ – матрица векторов источников сигналов, где $(\cdot)^H$ – эрмитово сопряжение. Столбцами матрицы $\mathbf{S}^{(0)}$ являются векторы \mathbf{S}_j ($j = 1, 2, \dots, J$), компоненты которых зависят от углового расположения соответствующих источников относительно АР и для линейной и эквидистантной АР даны в (1.1.2). Матрица \mathbf{M} является эрмитовой и положительно определенной.

В случае некоррелированных источников сигналов матрица \mathbf{B} в (1.1.3) становится диагональной, а общая КМ является суммой КМ отдельных источников. Выражение (1.1.3) упрощается и принимает следующий вид:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \sum_{i=1}^J v_i \mathbf{S}_i \mathbf{S}_i^H. \quad (1.1.4)$$

Точная КМ \mathbf{M} входного процесса в N элементах АР имеет характеристический многочлен $\psi_N(\lambda)$ степени N и N собственных чисел, которые ранжируем в порядке убывания ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$). Характеристический многочлен КМ \mathbf{M} можно записать в виде

$$\psi_N(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_N). \quad (1.1.5)$$

Будем рассматривать представляющий практический интерес случай, когда число источников сигналов меньше числа элементов АР ($J < N$). Тогда характеристический многочлен $\psi_N(\lambda)$ имеет кратные корни. В задачах сверхразрешения обычно рассматриваются два источника одинаковой мощности, расположенные в пределах ширины диаграммы направленности АР и произвольным образом коррелированные между собой. При этом имеется два сигнальных собственных числа $\lambda_1 > \lambda_2$, и одно шумовое число кратности $N-2$, равное мощности шума ($\lambda_3=1$). Выражения собственных чисел λ_1 и λ_2 КМ \mathbf{M} имеют вид [67, 72]

$$\lambda_{1,2} = 1 + vN(1 + |g_{12}| |\rho_{12}| \cos \alpha_{12}) \pm \pm vN \sqrt{(1 + |g_{12}| |\rho_{12}| \cos \alpha_{12})^2 - (1 - |g_{12}|^2)(1 - |\rho_{12}|)^2}, \quad (1.1.6)$$

где $\rho_{12} = |\rho_{12}| \exp(j\alpha_{12})$ – коэффициент корреляции источников, $g_{12} = \mathbf{S}_2^H \mathbf{S}_1 / N$ – коэффициент рассогласования волновых фронтов источников сигналов. Учитывая (1.1.2) получим, что модуль коэффициента рассогласования равен

$$|g_{12}| = \left| \frac{\sin(Nx)}{N \sin x} \right|, \quad x = \frac{\pi d}{\lambda} (\sin \phi_1 - \sin \phi_2). \quad (1.1.7)$$

При некоррелированных источниках сигнальные собственные числа КМ \mathbf{M} в (1.1.4) будут равны [67]

$$\lambda_{1,2} = 1 + N \frac{v_1 + v_2}{2} \pm N \sqrt{\frac{(v_1 - v_2)^2}{4} + v_1 v_2 |g_{12}|^2}, \quad (1.1.8)$$

Согласно теореме Гамильтона - Кэли [60, 61] произвольная матрица \mathbf{M} удовлетворяет своему характеристическому многочлену. Следовательно, при подстановке в (1.1.5) получается нулевая матрица, то есть $\psi_N(\mathbf{M}) = [\mathbf{0}]$ или

$$\mathbf{M}^N - \beta_1 \mathbf{M}^{N-1} - \beta_2 \mathbf{M}^{N-2} - \dots - \beta_N \mathbf{I} = [\mathbf{0}]. \quad (1.1.9)$$

Другими словами, многочлен $\psi_N(\lambda)$ аннулирует КМ \mathbf{M} .

В том случае, когда КМ \mathbf{M} имеет кратные собственные числа, кроме характеристического многочлена $\psi_N(\lambda)$ существует минимальный многочлен $\psi_m(\lambda)$ степени m , корнями которого являются неравные между собой собственные числа $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$ матрицы \mathbf{M} [60-63]. Минимальный многочлен является делителем характеристического многочлена, имеет наименьшую степень и единичный коэффициент при старшем члене. Его можно записать в виде

$$\psi_m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\dots(\lambda - \lambda_m). \quad (1.1.10)$$

Важным свойством минимального многочлена является то, что его степень определяется числом источников сигналов помехи ($m = J+1$). Исключением является ситуация, когда источники имеют одинаковую мощность и расположены относительно АР так, что векторы направлений на эти источники ортогональны между собой [64]. Тогда число корней минимального многочлена становится меньше числа источников. Однако вероятность появления на практике такой специфической ситуации является пренебрежимо малой. Наименьшее (шумовое) собственное число λ_{J+1} связано с собственным шумом и равно его мощности ($\lambda_{J+1} = 1$), а остальные (сигнальные) J собственных чисел зависят от параметров источников сигналов (угловых координат, мощностей и коэффициентов корреляции амплитуд сигналов на входе АР).

Согласно теореме Гамильтона – Кэли [60,62] произвольная матрица \mathbf{M} удовлетворяет своему минимальному многочлену, то есть $\psi_m(\mathbf{M}) = [\mathbf{0}]$, где $[\mathbf{0}]$ – нулевая матрица, все элементы которой равны нулю. Отсюда имеем, что

$$\psi_m(\mathbf{M}) = (\mathbf{M} - \lambda_1 \mathbf{I})(\mathbf{M} - \lambda_2 \mathbf{I})\dots(\mathbf{M} - \lambda_m \mathbf{I}) = [\mathbf{0}]. \quad (1.1.11)$$

Другими словами, многочлен $\psi_{J+1}(\lambda)$ аннулирует (зануляет) КМ \mathbf{M} . Поэтому матрица \mathbf{M}^m выражается в виде линейной комбинации степенных матриц \mathbf{I} , \mathbf{M} , \mathbf{M}^2 , ..., \mathbf{M}^{m-1} . Отсюда следует, что обратная КМ может быть представлена в виде конечного разложения по этим матрицам.

На практике точная КМ \mathbf{M} является неизвестной и вместо нее используется максимально правдоподобная оценка $\hat{\mathbf{M}}$, полученная по L выборочным статистически независимым векторам $\mathbf{X}(l)$ входного процесса в АР и равная [30, 65]

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l)\mathbf{X}(l)^H. \quad (1.1.12)$$

Статистические свойства выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$ зависят не только от сигнально-шумовой обстановки, но и от соотношения между числом L выборок входного процесса и числом N элементов АР. Следует выделить случаи длинной выборки, когда число выборочных векторов $\mathbf{X}(l)$ больше числа элементов АР ($L > N$), и короткой выборки с числом выборочных векторов $\mathbf{X}(l)$ меньшим числа элементов АР ($L < N$). Отметим, что для многоэлементных АР выборка может быть «сверхкороткой», когда длина L значительно меньше числа N ($L \ll N$).

При длинной выборке матрица $\hat{\mathbf{M}}$ имеет N положительных неравных между собой собственных чисел $\mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_N > 0$. Вероятность равенства некоторых собственных чисел является пренебрежимо малой, то есть шумовое собственное число λ_{J+1} точной КМ \mathbf{M} расщепляется на $N-J$ шумовых собственных чисел $\mu_{J+1} > \dots > \mu_N$ выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$. Это является следствием того, что минимальный многочлен точной КМ \mathbf{M} переходит в характеристический многочлен выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$, который состоит из N сомножителей и может быть представлен в виде $\psi_N(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \dots (\mu - \mu_N)$.

В случае короткой выборки входного процесса ($L < N$) выборочная КМ $\hat{\mathbf{M}}$ является вырожденной и имеет L положительных и $N-L$ нулевых собственных чисел. Ее минимальный многочлен также переходит в характеристический, который имеет степень равную числу L выборок и его можно записать в виде $\psi_L(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) \dots (\mu - \mu_L)$ [64]. Отличие сигнальных собственных чисел точной и выборочной КМ, а также разброс шумовых собственных чисел возрастают с уменьшением длины L входного процесса в элементах АР.

Таким образом, при переходе от точной к выборочной КМ минимальный многочлен переходит в характеристический. Его степень равна либо числу N элементов АР (длинная выборка) или числу L выборочных векторов (короткая выборка), то есть перестает зависеть от числа J источников сигналов.

1.2 Метод оценки числа источников сигналов

Рассмотрим метод определения числа источников сигналов, который основан на оценке параметров (степени и коэффициентов) минимального многочлена КМ сигналов в элементах АР [27, 28].

Разделим минимальный многочлен (1.1.11) точной КМ \mathbf{M} на неравное нулю произведение собственных чисел $(-1)^m \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$. В результате получим нулевую матрицу $(\mathbf{I} - \gamma_1 \mathbf{M})(\mathbf{I} - \gamma_2 \mathbf{M}) \dots (\mathbf{I} - \gamma_m \mathbf{M}) = [\mathbf{0}]$, где коэффициенты γ_n являются обратными значениями собственных чисел выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$ ($\gamma_n = 1/\lambda_n$).

Подстановка выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$ в (1.1.11) даст матрицу $\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})$, которая не будет являться нулевой матрицей, то есть для выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$ будем иметь матричный многочлен вида

$$\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}}) = (\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})(\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}}) \dots (\mathbf{I} - \gamma_m \hat{\mathbf{M}}). \quad (1.2.1)$$

С помощью многочлена (1.2.1) можно построить статистически обоснованную процедуру для аппроксимации минимального многочлена точной КМ некоторым многочленом [27, 28]. Этот многочлен должен иметь минимальную степень, и обеспечивать отличие от минимального многочлена, не превышающее (в среднеквадратическом смысле) некоторое пороговое значение Th , которое можно выбрать на основе имеющей априорной информации о сигнально-шумовой обстановке.

Из сравнения (1.2.1) и (1.1.11) следует, что квадрат евклидовой нормы $\|\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})\|^2$ многочлена $\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})$ представляет собой функционал СКО аппроксимации минимального многочлена КМ \mathbf{M} многочленом некоторой степени m . Учтем,

что норма произвольной эрмитовой матрицы \mathbf{A} равна $\|\mathbf{A}\|^2 = Sp(\mathbf{A}^2)$, где $Sp(\cdot)$ – след матрицы. Тогда минимум квадрата $I^{(m)}$ евклидовой нормы этого многочлена можно обеспечить путем выбора степени m и коэффициентов γ_n ($n=1,2,\dots,m$):

$$I^{(m)} = \min_{m, \gamma_k} Sp \left[\prod_{k=1}^m (\mathbf{I} - \gamma_k \widehat{\mathbf{M}})^2 \right]. \quad (1.2.2)$$

Таким образом, величина $I^{(m)}$ представляет собой минимальную СКО аппроксимации минимального многочлена КМ \mathbf{M} многочленом минимальной степени. Коэффициенты γ_n являются оценками обратных значений собственных чисел выборочной КМ $\widehat{\mathbf{M}}$ ($\gamma_n=1/\mu_n$).

Физический смысл процедуры аппроксимации поясним для сигнальной обстановки, рассматриваемой ниже. Пусть имеется два источника сигналов, то есть минимальный многочлен точной КМ \mathbf{M} имеет степень равную трем. При аппроксимации этого многочлена некоторым многочленом первой степени СКО будет принимать наибольшее значение. Значение СКО будет определяться двумя факторами – недостаточной степенью аппроксимирующего многочлена и отличием выборочной КМ $\widehat{\mathbf{M}}$ от точной КМ \mathbf{M} . Поэтому СКО будет достаточно сильно уменьшаться при увеличении степени аппроксимирующего многочлена от одного до двух и от двух до трех. При степени равной $J+1$ (в нашем примере $J+1=3$) СКО зависит только от отличия между матрицами $\widehat{\mathbf{M}}$ и \mathbf{M} . При дальнейшем увеличении степени аппроксимирующего многочлена СКО будет медленно уменьшаться.

На Рисунок 1.2 показана СКО в зависимости от степени аппроксимирующего многочлена для следующих параметров: число элементов АР $N=20$, шаг $d=0.5\lambda$, число источников $J = 2$, их мощность $\nu=20$ дБ, относительное угловое расстояние между ними $\delta\varphi=0.5$ (слева) и $\delta\varphi=1.0$ (справа), число выборок $L=10$ (короткая выборка) и $L=40$ (длинная выборка). Точки соответствуют отдельным 100 реализациям, а кривые дают средние значения СКО. Видно, что СКО аппроксимации практически одинаковая для разных L при недостаточной степени ($m=1$ и

$m=2$) аппроксимирующего многочлена. При большей степени СКО аппроксимации остается значительно большей для короткой выборки.

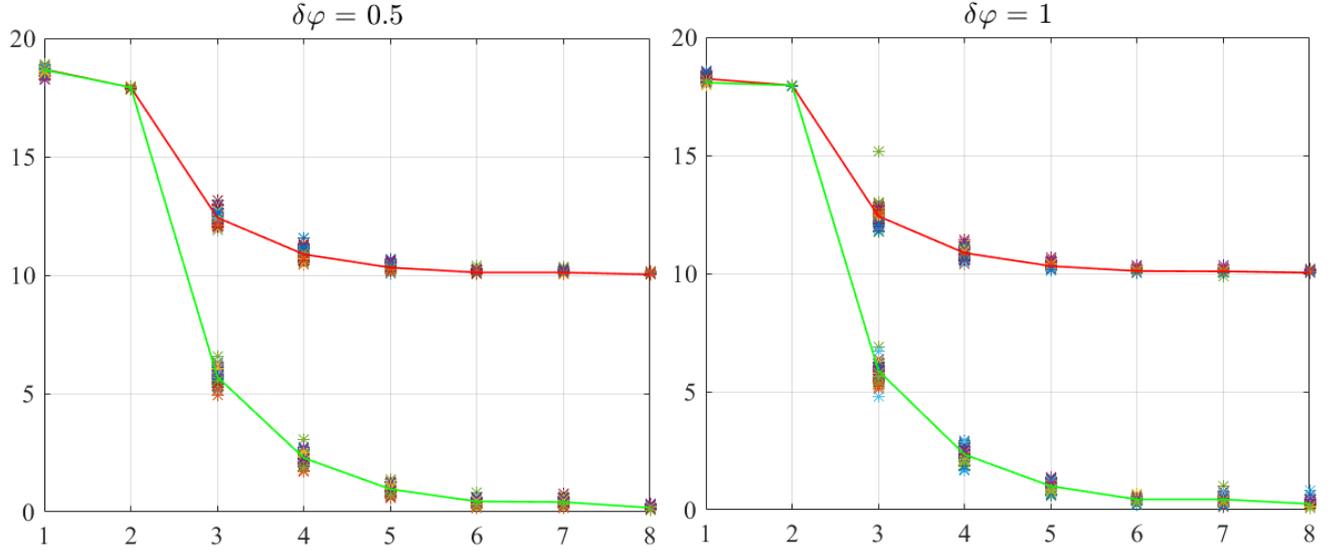


Рисунок 1.2 СКО в зависимости от степени аппроксимирующего многочлена при $N=20$, $J=2$, $v=20$ дБ, $\delta\varphi=0.5$ (слева) и $\delta\varphi=1.0$ (справа), $L=10$ (верхние кривые) и $L=40$ (нижние кривые)

Для коэффициентов γ_n обратных собственным числам КМ в [27, 28] получена система нелинейных уравнений вида

$$\gamma_n = Sp \left[\widehat{\mathbf{M}} \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{I} - \gamma_p \widehat{\mathbf{M}})^2 \right] \left\{ Sp \left[\widehat{\mathbf{M}}^2 \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{I} - \gamma_p \widehat{\mathbf{M}})^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (1.2.3)$$

Для решения системы (1.2.3) можно использовать итерационную процедуру, которая начинается со значения $m=1$. При этом m чисел γ_n , вычисленных для функционала $\mathbf{I}^{(m)}(\widehat{\mathbf{M}})$, будем считать начальными приближениями для вычисления $(m+1)$ чисел γ_n для функционала $\mathbf{I}^{(m+1)}(\widehat{\mathbf{M}})$.

Значение $m=1$ соответствует аппроксимации минимального многочлена многочленом первой степени. Функционал СКО равен $I^{(1)} = \min_{\gamma_1} Sp[(\mathbf{I} - \gamma_1 \widehat{\mathbf{M}})^2]$. Дифференцируя $I^{(1)}$ по γ_1 получим, что

$$\gamma_1 = \frac{Sp \widehat{\mathbf{M}}}{Sp \widehat{\mathbf{M}}^2}, \quad I^{(1)} = Sp \left[\left(\mathbf{I} - \frac{Sp \widehat{\mathbf{M}}}{Sp \widehat{\mathbf{M}}^2} \widehat{\mathbf{M}} \right)^2 \right]. \quad (1.2.4)$$

Если функционал $I^{(1)}$ меньше порога Th ($I^{(1)} < Th$), то итерационный процесс завершается, и оценка степени минимального многочлена $\hat{m} = 1$. Это означает, что в АР имеется только собственный шум, то есть оценка числа источников сигналов равна нулю ($\hat{J} = \hat{m} - 1 = 0$). В противоположном случае ($I^{(1)} > Th$) итерационный процесс продолжается и задается $m = 2$.

При $m = 2$ функционал

$$I^{(2)} = \min_{\gamma_1, \gamma_2} \text{Sp}[(\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})^2 (\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}})^2]. \quad (1.2.5)$$

Дифференцируя $I^{(2)}$ по γ_1 и γ_2 и приравнивания производные к нулю, получим, что

$$\gamma_1 = \frac{\text{Sp}[\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}}]^2 \hat{\mathbf{M}}}{\text{Sp}[(\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}})^2 \hat{\mathbf{M}}^2]}, \quad \gamma_2 = \frac{\text{Sp}[\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}}]^2 \hat{\mathbf{M}}}{\text{Sp}[(\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})^2 \hat{\mathbf{M}}^2]}. \quad (1.2.6)$$

В качестве начального значения для решения (1.2.6) выберем значение γ_1 из (1.2.4) и подставим во вторую формулу в (1.2.6) для нахождения коэффициента γ_2 . Затем это значение γ_2 подставим в первую формулу (1.2.6) и найдем следующее приближение γ_1 . Такие взаимные подстановки выполняются несколько раз, пока значения γ_1 и γ_2 не перестанут практически изменяться.

Затем находится функционал $I^{(2)}$ и сравнивается с порогом Th . Если $I^{(2)} < Th$, то итерационная процедура завершается и делается заключение о том, что степень минимального многочлена $\hat{m} = 2$, то есть имеется один источник ($\hat{J} = \hat{m} - 1 = 1$). Если $I^{(2)} > Th$, то процедура продолжается и задается значение $m = 3$. Данная процедура продолжается до тех пор, пока значение функционала $I^{(m)}$ при некотором $m = \hat{m}$ не станет меньше порога. Практика вычислений показывает, что итерационный процесс сходится достаточно быстро. Например, достаточно не более 4–5 итераций, чтобы значения γ_n были вычислены с точностью 10^{-4} при $m = 4$.

Полученное значение \hat{m} принимается за оценку степени минимального многочлена, а найденные числа γ_n дают оценки величин, обратных собственным

числам выборочной КМ $\widehat{\mathbf{M}}$ ($\mu_n = 1/\gamma_n$). Таким образом, мы получаем оценку минимального многочлена точной КМ \mathbf{M} . Оценка числа источников определяется степенью этого многочлена ($\widehat{J} = \widehat{m} - 1$). Пороговое значение Th можно выбрать на основе априорной информации о сигнально-шумовой обстановке.

Отметим, что для уменьшения вычислительных затрат можно использовать другой способ вычисления коэффициентов γ_n вместо решения системы (1.2.2) нелинейных уравнений [51]. Сделаем в (1.2.2) замену переменных с помощью формул Виета [66]:

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m), \\ a_2 &= \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \dots + \gamma_1\gamma_m + \gamma_2\gamma_3 + \dots + \gamma_{m-1}\gamma_m, \\ &\dots \\ a_m &= (-1)^m \gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

В результате (1.2.2) принимает вид:

$$I^{(m)} = \min_{a_k} Sp \left(\mathbf{I} + \sum_{k=1}^m a_k \widehat{\mathbf{M}}^k \right)^2 \quad (1.2.8)$$

Продифференцируем функционал $I^{(m)}$ по параметрам a_k , приравняем полученные производные к нулю и введем обозначение $b^{(k)} = Sp(\widehat{\mathbf{M}}^k)$. В результате получим систему уравнений для коэффициентов a_k , которая является линейной, и выражение для СКО $I^{(m)}$:

$$\sum_{k=1}^m b^{(k+q)} a_k + b^{(q)} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, m), \quad (1.2.9)$$

$$I^{(m)} = N + 2 \sum_{k=1}^m a_k b^{(k)} + \sum_{k=1}^m \sum_{q=1}^m a_k a_q b^{(k+q)}. \quad (1.2.10)$$

Теперь необходимо найти параметры γ_i . В силу того, что преобразования (1.2.7) являются формулами Виета, они могут быть вычислены как корни полинома:

$$\gamma^n + a_1\gamma^{n-1} + a_2\gamma^{n-2} + \dots + a_n = 0. \quad (1.2.11)$$

В случае, когда число источников не превосходит трех ($J \leq 3$), корни полинома (1.2.11) можно найти аналитически [66]. В остальных случаях для их поиска необходимо применять численные методы. Учтем, что для проблемы сверхразрешения близкорасположенных источников наиболее актуальным является ситуация с двумя источниками.

В [27, 28] предложено пороговое значение Th находить на основе априорной информации о КМ собственных шумов приемных устройств и заданной вероятности «ложной тревоги». Под ложной тревогой понимается ситуация, когда имеется оценка о наличии хотя бы одного источника сигналов ($\hat{J} \geq 1$) в случае, когда имеется только собственные шумы приемных устройств. Если шумы имеют единичную КМ, то априори известно, что при отсутствии источников ($J = 0$) степень минимального многочлена $m = 1$. Обозначим функционал $I^{(1)}$ при наличии только шума через $I_0^{(1)}$ и порог выберем равным

$$Th = \langle I_0^{(1)} \rangle + \chi\sigma_1, \quad (1.2.12)$$

где σ_1 – среднеквадратическое отклонение функционала $I_0^{(1)}$, а параметр χ в принципе можно найти, задавая вероятность «ложной тревоги», обусловленной влиянием шумов. Полагая в (1.2.3) $m = 1$, будем иметь, что [27]

$$\langle I_0^{(1)} \rangle = \frac{N^2 - 1}{N + L}, \quad \sigma_1^2 = 2 \frac{(N^2 - 1)}{(N + L)^2} \left[1 + \frac{(2N^2 - 3)}{NL} \right]. \quad (1.2.13)$$

Пороговое значение (1.2.12) зависит от числа N элементов АР и числа L выборок входного процесса. Как правило, выполняется условие $N^2 \gg 1$. Если также выборка является «сверхкороткой» ($L \ll N$), то выражения (1.2.13) существенно упрощаются и принимают вид: $\langle I_0^{(1)} \rangle \approx N$ и $\sigma_1^2 \approx 4(N/L)$. Таким образом, при уменьшении длины выборки пороговое значение увеличивается за счет второго слагаемого в (1.2.12). При увеличении длины выборки ($L \rightarrow \infty$) порог стремится к нулю. На Рисунок 1.3 показаны пороговые значения в зависимости от

числа выборок L для АР с числом элементов $N=50$ и $N=20$. Параметр χ в (1.2.12) равен 0, 1 или 2. Видно, что значения порога достаточно слабо зависят от этого параметра.

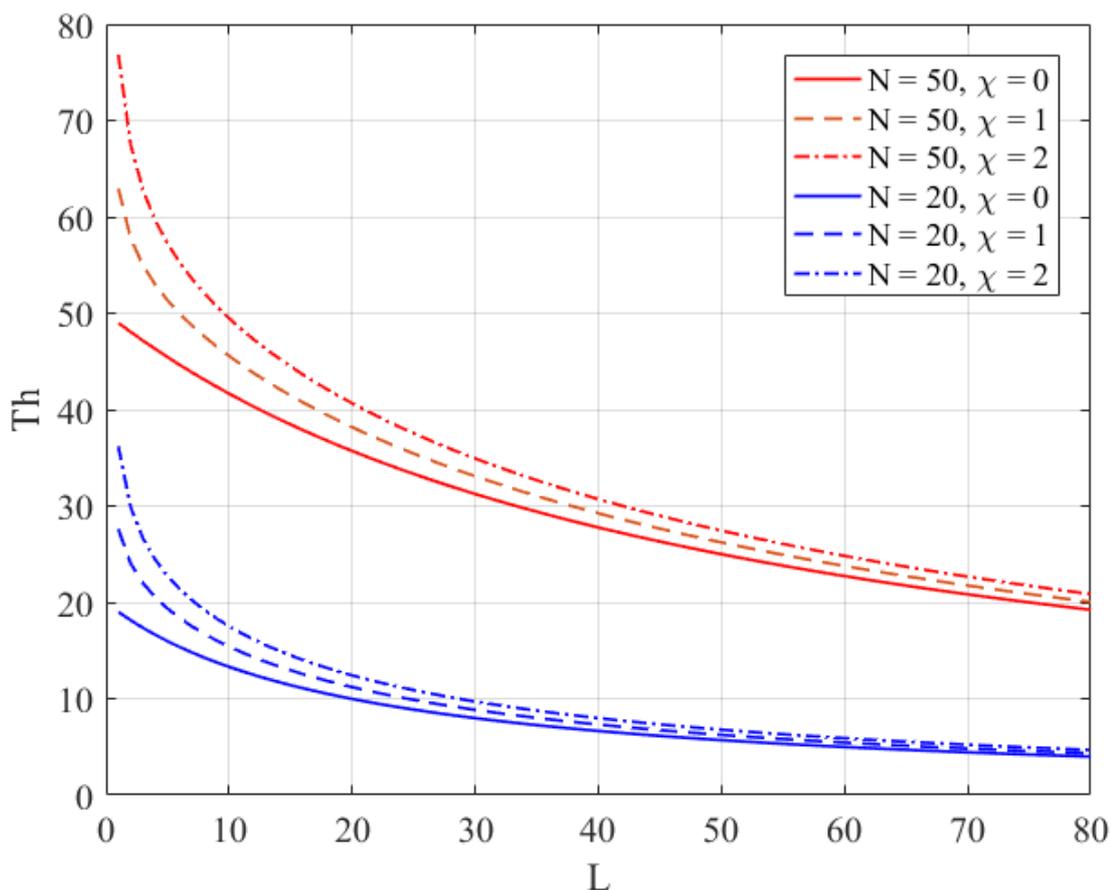


Рисунок 1.3 Пороговое значение в зависимости от числа выборок L для разных значений N и χ

Выбор порога Th на основе априорной информации о собственных шумах и вероятности «ложной тревоги», который был предложен в [27, 28], обеспечивает эффективное обнаружение достаточно слабых источников. Отметим два обстоятельства. Во-первых, в [27, 28] не было показано, как можно получить значение параметра χ задавая вероятность «ложной тревоги». Во-вторых, в задаче сверхразрешения, как правило, представляют интерес разрешение, а не обнаружение, близкорасположенных источников и оценка их угловых координат. Поэтому, рассмотрим другой подход к выбору порога [55], основанный на статистических свойствах функционала СКО и не требующий задания вероятности «ложной тревоги».

Для точной КМ \mathbf{M} в случае одного источника ($J = 1$) степень этого многочлена равна двум ($m = 2$). Максимальное (сигнальное) собственное число КМ \mathbf{M} в (1.1.4) равно $\lambda_1 = 1 + \nu_1 \mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_1$, а шумовое собственное число равно $\lambda_2 = 1$. Для линейной и эквидистантной АР вектор \mathbf{S}_1 источника сигналов приведен в (1.1.2), а $\lambda_1 = 1 + \nu_1 N$. Если аппроксимировать минимальный многочлен точной КМ многочленом первой степени от этой матрицы, то из (1.2.4) получим, что СКО аппроксимации будет равна

$$I^{(1)} = N - \frac{N(\nu_1 + 1)^2}{\nu_1(\nu_1 N + 2) + 1}. \quad (1.2.14)$$

При достаточно большом ОСШ ($\nu_1 \gg 1$) значение функционала СКО $I^{(1)} \approx (N-1)$, то есть зависит только от числа элементов АР.

В случае одного источника ($J = 1$) при аппроксимации минимального многочлена точной КМ \mathbf{M} многочленом второй степени СКО $I^{(2)}$ будет равна нулю.

В случае двух источников ($J = 2$) степень минимального многочлена увеличивается до трех ($m = 3$). При некоррелированных источниках сигнальные собственные числа КМ \mathbf{M} приведены в (1.1.8). При одинаковой мощности источников ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$), собственные числа $\lambda_{1,2} = 1 + \nu N (1 \pm |g_{12}|)$. Как правило, справедливо условие $\nu N \gg 1$. Тогда сигнальные собственные числа значительно превышают шумовое собственное число равное единице ($\lambda_1, \lambda_2 \gg 1$), а СКО аппроксимации минимального многочлена многочленом первой степени будет равна

$$I^{(1)} \approx N - 1 - \frac{2\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \approx N - 1 - \frac{(1 - |g_{12}|^2)}{(1 + |g_{12}|^2)}. \quad (1.2.15)$$

Выражение для СКО аппроксимации минимального многочлена точной КМ многочленом второй степени является громоздким. Поэтому приведем результаты расчетов, полученные с помощью выражений (1.2.5) и (1.2.6) для АР с числом элементов $N=20$ и периодом $d=0.5\lambda$. Два источника одинаковой мощности $\nu=20$ дБ расположены симметрично относительно нормали к АР ($\varphi_1 = -\varphi_2$). Введем

нормированное угловое расстояние между источниками $\delta\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2| / \Delta\varphi_{beam}$, где $\Delta\varphi_{beam}$ – ширина диаграммы направленности по уровню половинной мощности. Пусть $\delta\varphi$ принимает значения $\delta\varphi = 0.25; 0.5; 0.75$ и 1.0 ($|g_{12}| = 0.92; 0.72; 0.43$ и 0.14). Тогда получим, что СКО $I^{(1)}$ всегда равна 19.0, а СКО $I^{(2)} = 17.8; 17.9; 18.0$ и 18.0 . То есть СКО $I^{(1)} \approx N-1$ и СКО $I^{(2)} \approx N-2$ и практически зависит только от числа элементов АР. При аппроксимации минимального многочлена точной КМ многочленом третьей степени СКО будет равна нулю ($I^{(3)}=0$).

Приведем для данной АР результаты моделирования СКО аппроксимации минимального многочлена для выборочной КМ (1.1.12) при наличии одного и двух источников сигналов. Случайный вектор $\mathbf{X}(l)$ для l -ой выборки входного процесса зададим в виде (1.1.1), число выборочных векторов в (1.1.12) составляет $L=40$ (длинная выборка) или $L=10$ (короткая выборка).

В случае одного источника ($J=1$) мощностью $\nu=20$ дБ, расположенного в направлении нормали к АР, на Рисунок 1.4 приведены гистограммы для СКО $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ аппроксимации минимального многочлена КМ, построенные по 500 экспериментам при $L=10$ (слева) и $L=40$ (справа). Из приведенных результатов следует, что СКО $I^{(1)} \approx 19.0$ ($L=40$) и $I^{(1)} \approx 19.0$ ($L=10$), а СКО $I^{(2)}$ не равна нулю из-за конечной длины выборки входного процесса, а находится в пределах $[4.9 \div 7.3]$ ($L=40$) и $[12.0 \div 13.7]$ ($L=10$). Поэтому для правильной оценки числа источников пороговое значение можно выбрать в пределах $13.7 \div 19.0$.

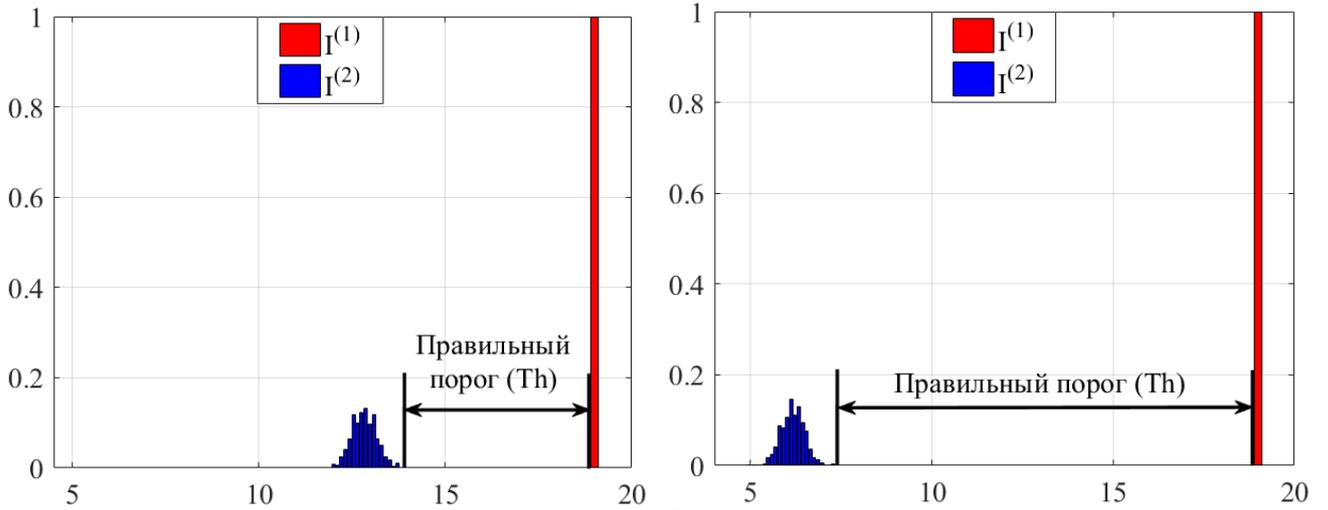


Рисунок 1.4 Гистограммы для СКО $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ при $J = 1$, $\nu=20$ дБ, $N=20$, $L=10$ (слева) и $L=40$ (справа)

В случае двух ($J=2$) источников одинаковой мощности $\nu=20$ дБ, расположенных симметрично относительно нормали к АР, гистограммы для СКО $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ и $I^{(3)}$ при относительном угловом расстоянии между источниками $\delta\varphi=0.5$ показаны на Рисунок 1.5 при $L=10$ (слева) и $L=40$ (справа). Аналогичные гистограммы при $\delta\varphi=0.25$ приведены на Рисунок 1.6.

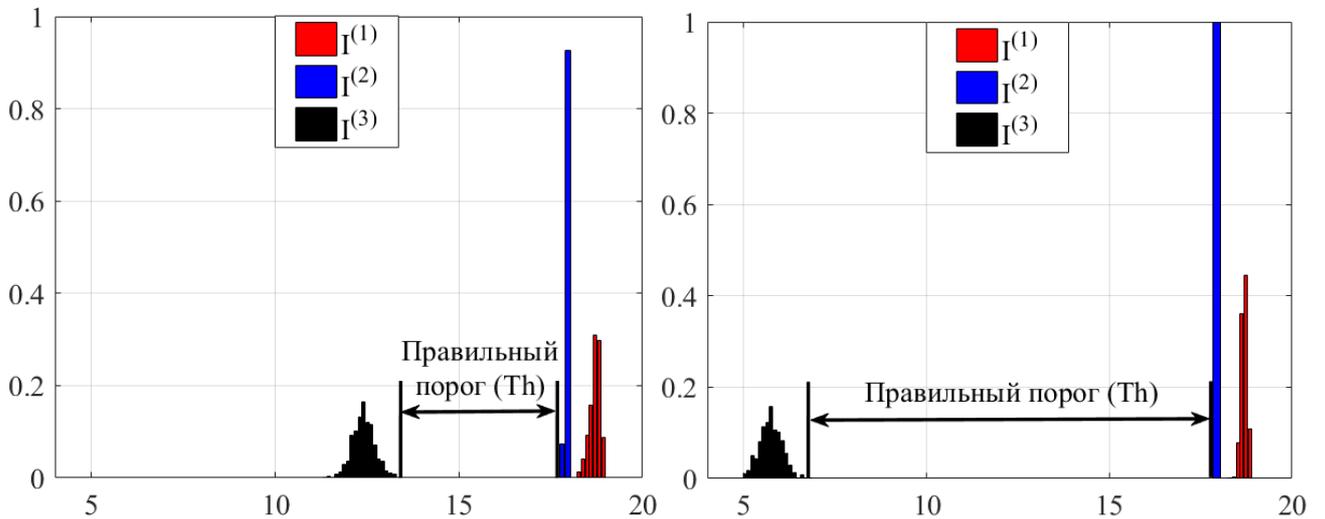


Рисунок 1.5 Гистограммы для СКО $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ при $J = 2$, $\nu=20$ дБ, $N=20$, $\delta\varphi=0.5$, $L=10$ (слева) и $L=40$ (справа)

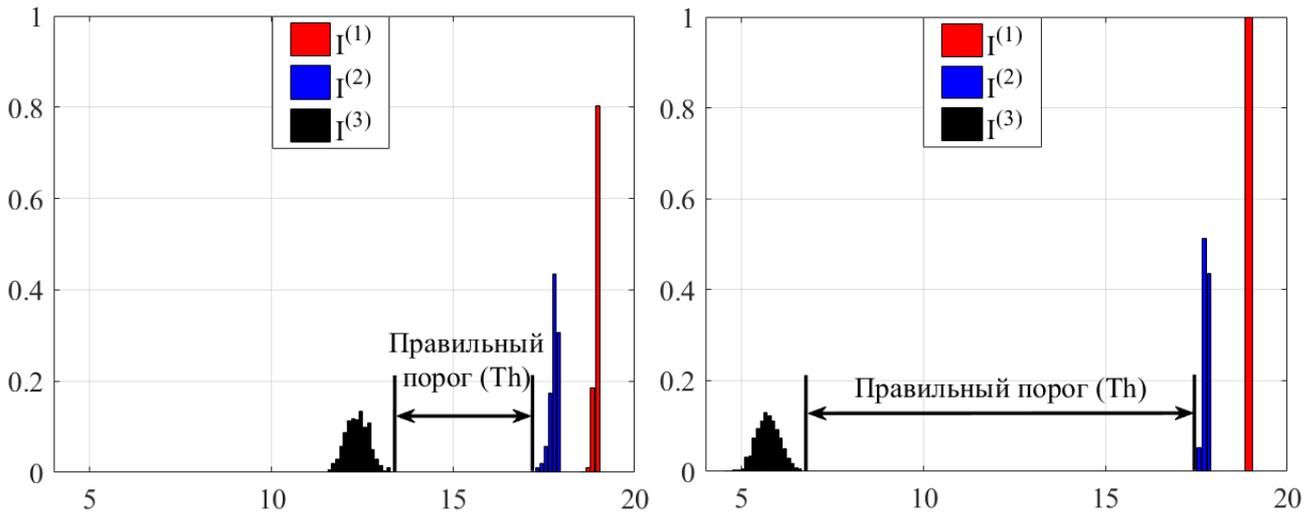


Рисунок 1.6 Гистограммы для СКО $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ при $J = 2$, $\nu=20$ дБ, $N=20$, $\delta\phi=0.25$, $L=10$ (слева) и $L=40$ (справа)

Из Рисунок 1.5 и Рисунок 1.6 следует, что гистограммы для СКО $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ и $I^{(3)}$ изменились незначительно при сближении источников сигналов ($I^{(1)} \approx 19.0$, $I^{(2)} \approx 17.5 \div 18.0$, $I^{(3)} \approx 11.7 \div 13.4$ при $L=10$ и $I^{(3)} \approx 4.9 \div 6.4$ при $L=40$). Следовательно, в случае короткой выборки ($L=10$) порог можно выбрать в пределах $13.3 \div 17.4$. Из (1.2.12) следует, что порог $Th=13.3$ при $\chi=0$, $Th=15.4$ при $\chi=0.1$ и $Th=17.5$ при $\chi=2$, то есть параметр χ можно выбрать в пределах от 0 до 2.

Проведенные моделирования при других параметрах также показали, что мощность источников слабо влияет на гистограммы (а, следовательно, на уровень порога). Уменьшение длины L выборки входного процесса также слабо влияет на СКО $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$, но приводит к смещению гистограммы для СКО $I^{(3)}$ вправо, то есть к сужению возможных значений порога.

1.3 Результаты численного моделирования эффективности метода

Одним из наиболее часто используемых сверхразрешающих методов являются псевдоспектральный и корневой методы MUSIC [7,8]. Однако эти методы не дают возможности оценить число источников сигналов. Поэтому, для использования методов MUSIC необходимо предварительно сделать оценку числа источников сигналов.

Максимально правдоподобной оценки числа источников не существует, так как функция правдоподобия не имеет экстремума по этому аргументу. Поэтому, оценка числа источников сигналов выполняется обычно на основе критериев AIC (Akaike's Information Criterion) или MDL (Minimum Description Length). В соответствии с этими критериями за оценку числа источников принимается положение минимума модифицированной функции правдоподобия по переменной J .

Модифицированная функция правдоподобия имеет вид [7,8,22,68-70]

$$F(J) = L(N - J) \lg \left(\frac{f_1(J)}{f_2(J)} \right) + f_3(J), \quad (1.3.1)$$

где функции $f_1(J)$ и $f_2(J)$ представляют собой соответственно арифметическое и геометрическое среднее шумовых собственных чисел выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$. Функция $f_3(J)$ называется «штрафной» функцией. Ее значения представляют собой «плату» за дополнительный источник сигналов. В случае некоррелированных источников функция $f_3(J)$ для AIC и MDL равна

$$f_3(J) = \begin{cases} J(2N - J), & (AIC) \\ 0.5J(2N - J) \cdot \lg L & (MDL) \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Сравним эффективность метода минимального многочлена с эффективностью критериев AIC или MDL по оценке числа некоррелированных источников.

Пусть линейная и эквидистантная АР состоит из $N = 50$ элементов, расположенных с шагом $d = 0.5 \lambda$. Ширина диаграммы направленности по уровню половинной мощности составляет $\Delta\varphi_{beam} = 2.0^\circ$. Вектор $\mathbf{X}(l)$ входного процесса зададим в виде (1.1.1), где случайная величина $a_j(l)$ имеет нулевое среднее и дисперсию ν_j , а мощность гауссовых собственных шумов равна единице. В каждом эксперименте сформируем L выборок входного процесса, а число экспериментов для усреднения результатов моделирования зададим равным 500. Основное внимание будем уделять вопросу оценки числа источников сигналов в случае «сверхкороткой» выборки входного процесса ($L \ll N$).

В случае одного источника сигналов ($J=1$) гистограммы функционалов $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ показаны на Рисунок 1.7. Мощность источника $\nu = 5$ дБ, число выборок $L = 5, 10$ и 20 (гистограммы 1–3 соответственно для $I^{(2)}$), то есть отношение числа выборок к числу элементов АР равно $0.1, 0.2$ и 0.4 , соответственно. Правая гистограмма построена для функционала $I^{(1)}$ и практически одинакова для всех L . Гистограммы функционала $I^{(2)}$ смещаются влево при увеличении L . Пунктирными линиями показаны пороги, найденные с помощью (1.2.12) при $\chi = 0.1$. Из Рисунок 1.7 следует, что СКО аппроксимации минимального многочлена $I^{(1)} > Th$, а $I^{(2)} < Th$ с вероятностью, близкой к единице. Поэтому вероятность правильной оценки числа источников будет также близка к единице ($\hat{J}=1$).

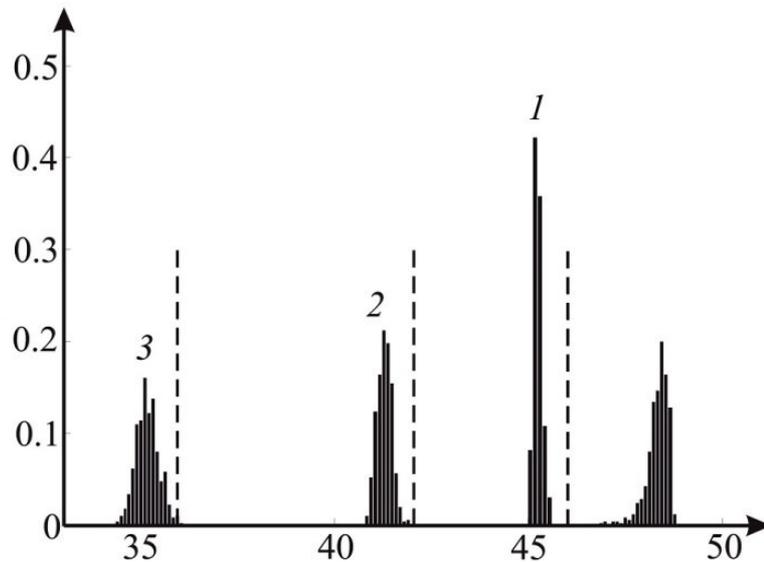


Рисунок 1.7 Гистограммы функционалов $I^{(1)}$ и $I^{(2)}$ при $L = 5, 10$ и 20 (гистограммы 1–3 соответственно для $I^{(2)}$). Пунктирными линиями показаны пороги.

На Рисунок 1.8 даны сравнительные вероятности правильной оценки числа источников в зависимости от мощности ν источника для метода минимального многочлена и критериев MDL и AIC при длине выборки $L = 10$. Видно, что в области малых ν ($\nu < -2$ дБ) метод минимального многочлена обеспечивает более высокую вероятность правильной оценки числа источников (в данном случае одного источника). Зададим вероятность правильной оценки числа источников равную 80% . Тогда требуемая мощность источника в элементах АР будет составлять

–8.0 дБ для метода минимального многочлена, –5.7 дБ для критерия MDL и –1.2 дБ для критерия AIC.

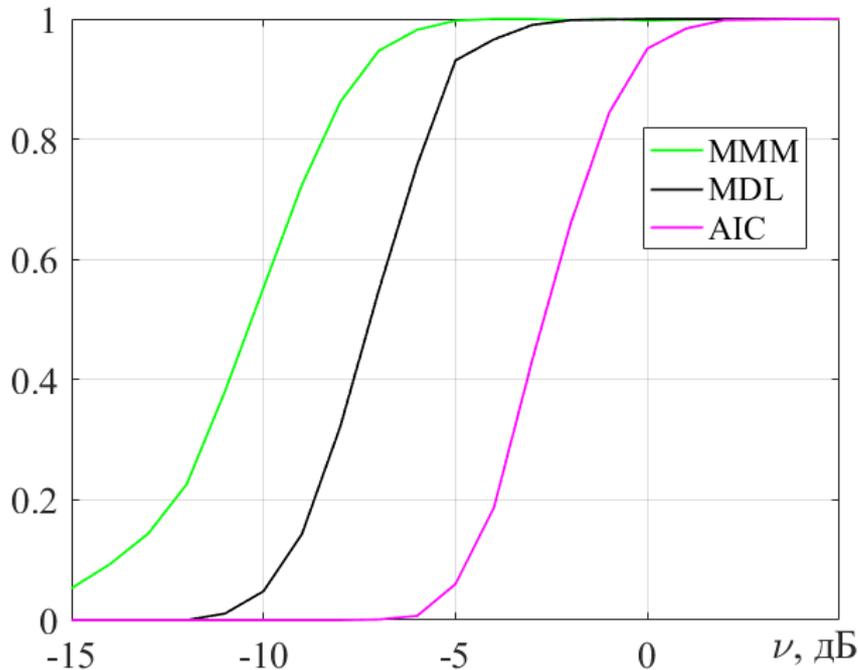


Рисунок 1.8 Вероятность правильной оценки числа источников для метода минимального многочлена (MMM) и критериев MDL и AIC при длине выборки $L = 10$

В случае двух источников, расположенных симметрично относительно нормали к АР ($\varphi_1 = -\varphi_2$), гистограммы для функционалов $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ и $I^{(3)}$ (гистограммы 1–3 соответственно) показаны на Рисунок 1.9. Мощность источников $\nu = 5$ дБ, число выборок входного процесса $L = 10$ (короткая выборка $L/N = 0.2$). Пунктирной линией показан найденный с помощью (1.2.12) порог Th при $\chi = 0.1$. Из Рисунок 1.9 следует, что значения $I^{(1)} > Th$, $I^{(2)} > Th$, а $I^{(3)} < Th$ с вероятностью, близкой к единице. Поэтому вероятность правильной оценки числа источников будет также близка к единице, то есть оцененное число источников будет равно двум ($\hat{J} = 2$).

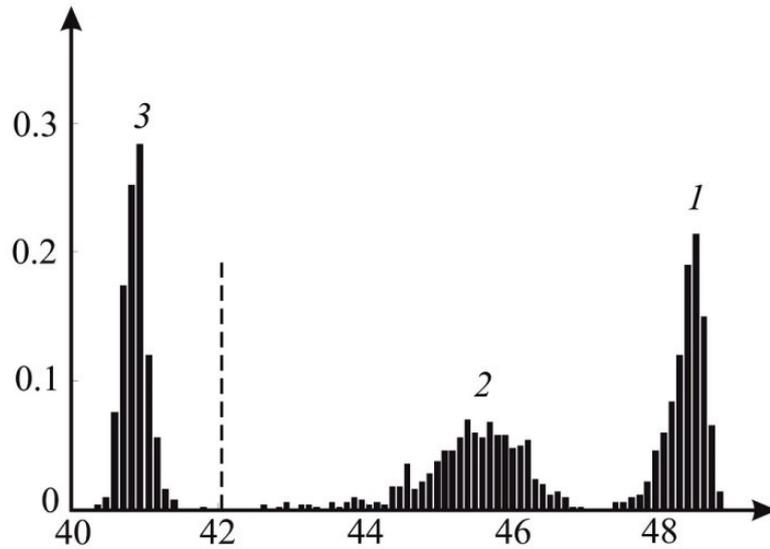


Рисунок 1.9 Гистограммы функционалов $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ и $I^{(3)}$ (гистограммы 1–3 соответственно) при числе выборок $L = 10$

На Рисунок 1.10 приведены вероятности правильной оценки числа источников в зависимости от их мощности при $L = 10$, полученные с помощью метода минимального многочлена (МММ) и критериев MDL и AIC. Относительное угловое расстояние между источниками $\delta\varphi=0.5$ (слева) и $\delta\varphi=0.25$ (справа). Видно, что метод минимального многочлена и критерий MDL при некоррелированных источниках имеют примерно одинаковую эффективность, значительно превышающую эффективность критерия AIC, применение которого требует увеличения мощности источников в элементах AP примерно на 4–5 дБ.

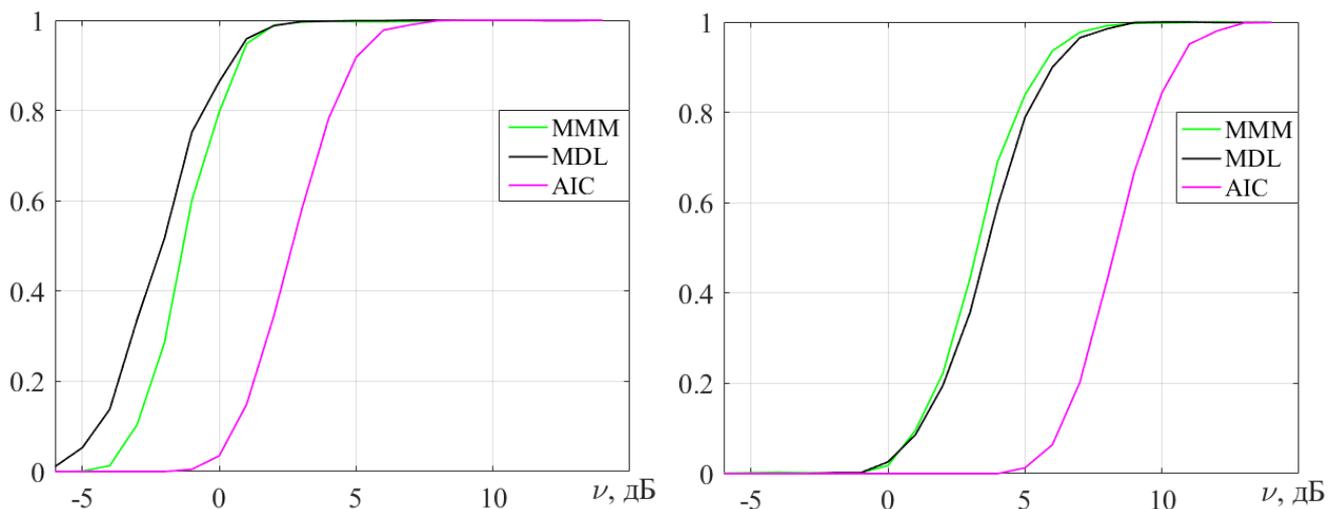


Рисунок 1.10 Вероятность правильной оценки числа источников для метода минимального многочлена (МММ) и критериев MDL и AIC при $\delta\varphi=0.5$ (слева) и $\delta\varphi=0.25$ (справа)

1.4 Заключение по первой главе

В первой главе диссертации рассмотрена проблема оценки числа близкорасположенных источников с помощью метода минимального многочлена корреляционной матрицы сигналов в АР. Метод основан на аппроксимации точной КМ сигналов в АР минимальным многочленом по критерию минимума СКО. Основное внимание уделено случаю короткой и выборки входного процесса, когда число выборочных векторов меньше числа антенн.

В первом разделе рассмотрены основные свойства минимального многочлена точной КМ сигналов в АР. Отмечено, что степень этого многочлена связана с числом источников сигналов. При переходе от точной к выборочной КМ минимальный многочлен переходит в характеристический. Степень этого многочлена равна либо числу элементов АР (длинная выборка) или числу выборочных векторов (короткая выборка), то есть перестает зависеть от числа источников сигналов.

Во втором разделе выполнено обобщение метода минимального многочлена КМ сигналов в элементах АР для оценки числа близкорасположенных некоррелированных источников сигналов на случай короткой выборки входного процесса. Предложен новый подход к выбору порога при аппроксимации минимального многочлена КМ по критерию минимума функционала СКО.

В третьем разделе на основе результатов выполненного сравнительного моделирования показана высокая эффективность обобщенного метода минимального многочлена. В случае одного источника метод обеспечивает более высокую вероятность правильной оценки числа источников, чем критерии MDL и AIC. При двух близкорасположенных некоррелированных источниках метод минимального многочлена и критерий MDL имеют примерно одинаковую эффективность, которая превышает эффективность критерия AIC.

2 **Сверхразрешающие методы минимального многочлена корреляционной матрицы входного процесса в антенной решетке**

Во второй главе диссертации исследуются эффективность двух сверхразрешающих методов минимального многочлена – псевдоспектрального и корневого. Основное внимание уделяется случаю короткой выборки входного процесса, когда число выборочных векторов меньше числа элементов АР. Получено обобщение спектрального и корневого методов минимального многочлена на случай произвольным образом коррелированных источников сигналов, которое заключается в выборе новых порогового значения для оценки степени минимального многочлена и, следовательно, для оценки числа источников сигналов. Приводятся результаты численного моделирования эффективности методов.

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [50, 54, 56, 57].

2.1 **Псевдоспектральный и корневой методы**

2.1.1 **Псевдоспектральный метод**

Обозначим через $\mathbf{S}(\varphi)$ фазирующий вектор (или вектор поиска), соответствующий некоторому направлению φ , n -ая компонента которого определяется выражением (1.1.2) при $\varphi_j = \varphi$. Псевдоспектральный метод минимального многочлена основан на свойстве ортогональности векторов источников сигналов шумовому подпространству. Норма проекции фазирующего вектора на шумовое подпространство равна

$$\xi(\varphi) = \|\mathbf{P}_{noise} \mathbf{S}(\varphi)\|^2 = \mathbf{S}^H(\varphi) \mathbf{P}_{noise}^H \mathbf{P}_{noise} \mathbf{S}(\varphi) \quad (2.1.1)$$

где \mathbf{P}_{noise} – матрица-проектор на шумовое подпространство.

Угловое положение источников определяется с помощью поиска нулей разрешающей функции $\mu(\varphi)$. В силу положительной определённости этой функ-

ции нули являются ее минимумами. Линейная независимость фазирующих векторов гарантирует наличие ровно J нулей функции $\mu(\varphi)$.

Таким образом, для решения проблемы сверхразрешения близкорасположенных источников сигналов необходимо найти матрицу-проектор \mathbf{P}_{noise} на шумовое подпространство. Для точной КМ \mathbf{M} матрица-проектор имеет размерность $N - J$ и ее можно представить в виде [71]

$$\mathbf{P}_{noise} = \left[\prod_{p=1}^J (\mathbf{M} - \lambda_p \mathbf{I}) \right] \left[\prod_{p=1}^J (1 - \lambda_p) \right]^{-1}. \quad (2.1.2)$$

Доля выходной мощности AP , соответствующая подпространству собственного шума при сканировании лучом AP , равна

$$\mu(\varphi) = \mathbf{S}^H(\varphi) \mathbf{P}_{noise}^H \mathbf{P}_{noise} \mathbf{S}(\varphi). \quad (2.1.3)$$

При использовании выборочной корреляционной матрицы (1.1.12) для построения проектора на шумовое подпространство разрешающая функция (2.1.3) для угловых координат источников будет отлична от нуля, однако глубокие минимумы в окрестностях этих точек будут сохраняться.

Функция $\mu(\varphi)$ в окрестности углового положения источников сигналов является достаточно гладкой, что затрудняет поиск координат её минимумов. Поэтому, для увеличения точности оценки угловых координат обычно используют инвертированную функцию $\eta(\varphi)$ равную [7,8]

$$\eta(\varphi) = \frac{1}{\mathbf{S}^H(\varphi) \mathbf{P}_{noise}^H \mathbf{P}_{noise} \mathbf{S}(\varphi)}. \quad (2.1.4)$$

Если направление на i -ый источник определяется углом φ_i и AP согласована с этим источником (то есть $\mathbf{S}(\varphi) = \mathbf{S}_i$), то вектор $\mathbf{S}(\varphi)$ будет принадлежать сигнальному подпространству, а его проекция на шумовое подпространство будет равна нулю. В этом случае функция $\eta(\varphi)$ вида (2.1.4) в точке φ_i будет иметь особенность типа 0^{-1} . По этим пикам определяются угловые положения источников

сигналов. Ширина и высота пиков зависит от мощности ν источников, числа N элементов AP и числа L выборок сигнала [5,7,8].

После оценки степени и коэффициентов минимального многочлена КМ можно построить оценку матрицы-проектора на шумовое подпространство в виде

$$\hat{\mathbf{P}}_{noise} = \left[\prod_{p=1}^{\hat{J}} (\mathbf{I} - \gamma_p \hat{\mathbf{M}}) \right] \left[\prod_{p=1}^{\hat{J}} \left(1 - \frac{\gamma_p}{\gamma_{\hat{J}+1}} \right) \right]^{-1} \quad (2.1.5)$$

и псевдоспектральные функции угловой координаты

$$\mu(\varphi) = \mathbf{S}^H(\varphi) \hat{\mathbf{P}}_{noise}^H \hat{\mathbf{P}}_{noise} \mathbf{S}(\varphi), \quad \eta(\varphi) = \frac{1}{\mathbf{S}^H(\varphi) \hat{\mathbf{P}}_{noise}^H \hat{\mathbf{P}}_{noise} \mathbf{S}(\varphi)}. \quad (2.1.6)$$

Заметим, что целью применения сверхразрешающих методов, как правило, является не расчёт спектра как такового, а определение угловых направлений источников сигналов. Поэтому получаемая с помощью таких методов зависимость функции $\mu(\varphi)$ от угловой координаты называется пространственным псевдоспектром.

Для 8 реализаций входного процесса (1.1.1) псевдоспектральная разрешающая функция $\eta(\varphi)$ в (2.1.6) приведена на Рисунок 1.1 для достаточно большой мощности близкорасположенных источников ($\nu = 30$ дБ) и на Рисунок 1.3 для значительно меньшей мощности ($\nu = 2.5$ дБ). Значения остальных параметров следующие: $N = 20$, $d = 0.5\lambda$, $L = 10$, $J = 2$, $\varphi_{1,2} = \pm 1.5^\circ$ ($\delta\varphi=0.6$). Видно, что при больших мощности источников ($\nu = 30$ дБ) метод обеспечивает эффект сверхразрешения и достаточно точные оценки углового положения источников (см. Рисунок 1.1). Однако при низких $\nu = 2.5$ дБ ситуация меняется. Возможны случаи, когда псевдоспектр имеет меньшее число пиков, чем число источников (один вместо двух).

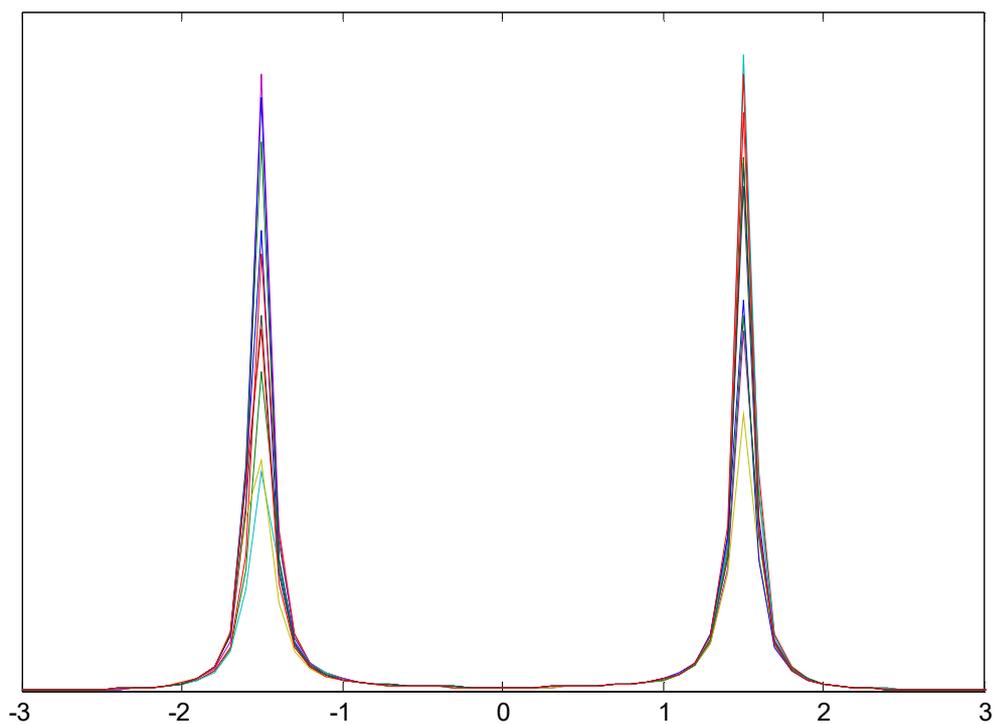


Рисунок 2.1 Псевдоспектральная функция $\eta(\varphi)$ (8 реализаций) при $N = 20$,
 $d = 0.5\lambda$, $L = 10$, $J = 2$, $\delta\phi = 0.6$; $\nu = 30$ дБ

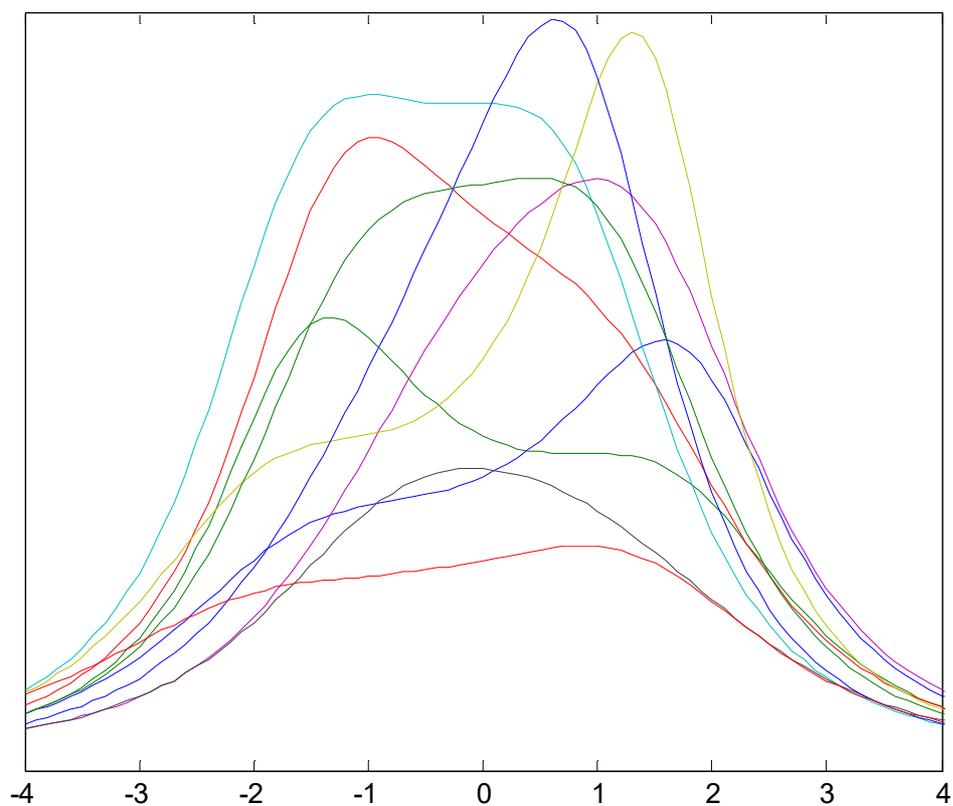


Рисунок 2.2 Псевдоспектральная функция $\eta(\varphi)$ (8 реализаций), $N = 20$,
 $d = 0.5\lambda$, $L = 10$, $J = 2$, $\delta\phi = 0.6$; $\nu = 2.5$ дБ

Из приведенных результатов следует, что использование псевдоспектрального метода минимального многочлена приводит к следующей проблеме. В начале производится оценка числа источников по методике, изложенной выше в подразделе 1.1. Из результатов, приведенных на Рисунок 1.5 следует, что вероятность правильной оценки числа источников (в нашем случае двух) близка к единице при их мощности $\nu = 2.5$ дБ, хотя результаты моделирования на Рисунок 1.5 получены для более близкого расположения источников ($\delta\varphi=0.5$ вместо $\delta\varphi=0.6$ на Рисунок 1.3). Однако псевдоспектр имеет только один максимум. Поэтому при использовании псевдоспектрального метода минимального многочлена оценку числа источников приходится делать по числу «пигов» в псевдоспектре. Кроме увеличения вероятности ошибки в определении числа источников, это обстоятельство приводит к значительному увеличению объема вычислений при нахождении положения «пигов» в области видимости, особенно для многоэлементных АР с достаточно узким лучом.

Таким образом при использовании спектрального метода минимального многочлена необходимо выполнить следующие операции: оценить параметры этого многочлена (степень и коэффициенты), сформировать матрицу-проектор (2.1.5) на шумовое подпространство, получить псевдоспектральную функцию (2.1.6) угловой координаты и найти число и положение «пигов» этой функции.

Такую пеленгацию источников сигналов по способу обзора пространства принято называть последовательной или двух этапной – вначале получается функция угловых координат (псевдоспектральная функция), а затем оценивается число источников и их угловые координаты по числу и положению соответствующих «пигов» этой функции [8]. Недостатками последовательной пеленгации являются достаточно низкая скорость обзора пространства и высокая вычислительная сложность алгоритмов формирования псевдоспектральной функции и поиска ее экстремумов, особенно в случае многоэлементных АР с узким лучом.

2.1.2 Корневой метод

В связи с отмеченной выше проблемой при использовании спектрального метода минимального (число «пиков» псевдоспектральной функции может не совпадать с оценкой числа источников сигналов) представляет интерес разработка корневого метода минимального многочлена [50]. Отметим, что данный метод, аналогично корневому методу MUSIC [7,8], может быть применен в случае, когда AP является линейной и эквидистантной.

Для такой AP вместо действительной переменной φ можно ввести комплексную переменную $z = \exp[j2\pi(d/\lambda)\sin\varphi]$. Тогда вектор поиска, который определяется выражением (1.1.2) при $\varphi_j = \varphi$, будет равен $\mathbf{S}(z) = (1, z, z^2, \dots, z^{N-1})^T$ (где $\langle \cdot \rangle^T$ – транспонирование), а вектор $\mathbf{S}^H(z) = (1, z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-(N-1)})^T$.

Обозначим знаменатель разрешающей псевдоспектральной функции $\eta(\varphi)$ в (2.1.6), который становится функцией аргумента z , через $f(z)$ и преобразуем (2.1.6) к виду

$$f(z) = \mathbf{S}^H(\varphi) \mathbf{P}_{noise}^H \mathbf{P}_{noise} \mathbf{S}(\varphi) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_k z^k. \quad (2.1.7)$$

Коэффициенты полинома a_m являются суммами соответствующих побочных диагоналей матрицы $\mathbf{P}_{noise}^H \mathbf{P}_{noise}$ и равны

$$a_m = \sum_{k=1}^{N-m} (\mathbf{P}_{noise}^H \mathbf{P}_{noise})_{k, k+m}, \quad a_{-m} = \sum_{k=1}^{N-m} (\mathbf{P}_{noise}^H \mathbf{P}_{noise})_{k+m, k} \quad (m \geq 0). \quad (2.1.8)$$

В случае $m = 0$ коэффициент a_0 равен сумме элементов главной диагонали (следу) матрицы $\mathbf{P}_{noise}^H \mathbf{P}_{noise}$. Вследствие эрмитовости этой матрицы коэффициенты a_m удовлетворяет условию $a_{-m} = a_m^*$.

Таким образом, функция $f(z)$ является полиномом степени $(2N-2)$, коэффициенты которого представляют собой сумму элементов соответствующих диагоналей матрицы $\mathbf{P}_{noise}^H \mathbf{P}_{noise}$. При $m=0$ суммирование проводится вдоль главной диа-

гонали, при отрицательных m – вдоль диагоналей, лежащих ниже главной, а при положительных m – вдоль диагоналей, лежащих выше главной диагонали.

Суть корневого метода заключается в поиске корней функции $f(z)$.

Корни полинома $f(z)$ можно разбить на пары, так как если z_1 – корень полинома $f(z)$, то $1/(z_1)^*$ – также его корень. Это следует из выражения

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} a_m z^m = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} a_m^* (z^*)^m = \\ &= \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} a_{-m} \left(\frac{1}{z^*}\right)^{-m} = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} a_n \left(\frac{1}{z^*}\right)^n = f\left(\frac{1}{z^*}\right) \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Один из парных корней находится снаружи окружности единичного радиуса на комплексной плоскости z , а другой – внутри нее. Оба корня имеют одинаковые аргументы, поэтому для оценки угловых координат источников можно использовать любую из них.

Для точного проектора \mathbf{P}_{noise} , соответствующего точной КМ \mathbf{M} вида (1.1.3), из общего числа $(2N-2)$ корней функции $f(z)$ имеется $2J$ сигнальных корней, которые лежат на единичной окружности. Угол j -го источника находится по формуле

$$\sin \varphi_j = \frac{\arg(z_j) \cdot \lambda}{2\pi d}, \quad (2.1.10)$$

где $\arg(z_j)$ – фаза z_j .

Положение корней полинома $f(z)$ на комплексной плоскости в случае точной корреляционной матрицы показано на Рисунке 2.3 при $N = 20$; $d = 0.5\lambda$; $J = 2$; $\varphi_{1,2} = \pm 1.5^\circ$ ($\delta\varphi=0.6$), мощности источников $\nu=5$ дБ, где красным цветом показаны сигнальные корни, а синим цветом – шумовые.

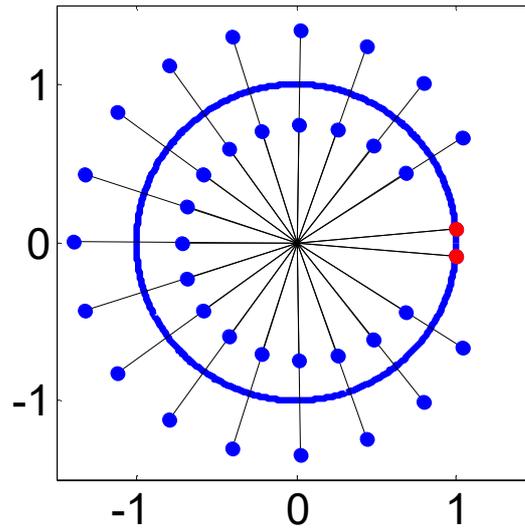


Рисунок 2.3 Положение корней полинома $f(z)$ на комплексной плоскости, $N = 20$, $d = 0.5\lambda$, $J = 2$, $\delta\phi = 0.6$

При подстановке в выражение (2.1.7) оценки $\hat{\mathbf{P}}_{noise}$ проектора на шумовое подпространство, полученного на основе выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$, сигнальные корни начинают «уходить» от единичной окружности и размываться в «облака». Учтем заранее полученную оценку \hat{J} числа сигналов и выберем \hat{J} корней наиболее близко расположенных к единичной окружности и находящихся либо снаружи, либо внутри нее.

Положение корней полинома $f(z)$ в случае конечной длины входного процесса приведено на Рисунок 2.4 при $N = 20$, $d = 0.5\lambda$, $L = 10$, $J = 2$, $\phi_{1,2} = \pm 1.5^\circ$ ($\delta\phi = 0.6$), $\nu = 5$ дБ. Видно, что, несмотря на отличие амплитуды сигнальных корней от единицы, значение их аргумента по-прежнему находится в окрестности значений, соответствующих истинному положению источников. Следовательно, разрешение источников возможно и в случае конечной длины входного процесса. Отметим, что в рассмотренном примере выборка является короткой, так как $L < N$ ($L = 10$, $N = 20$).

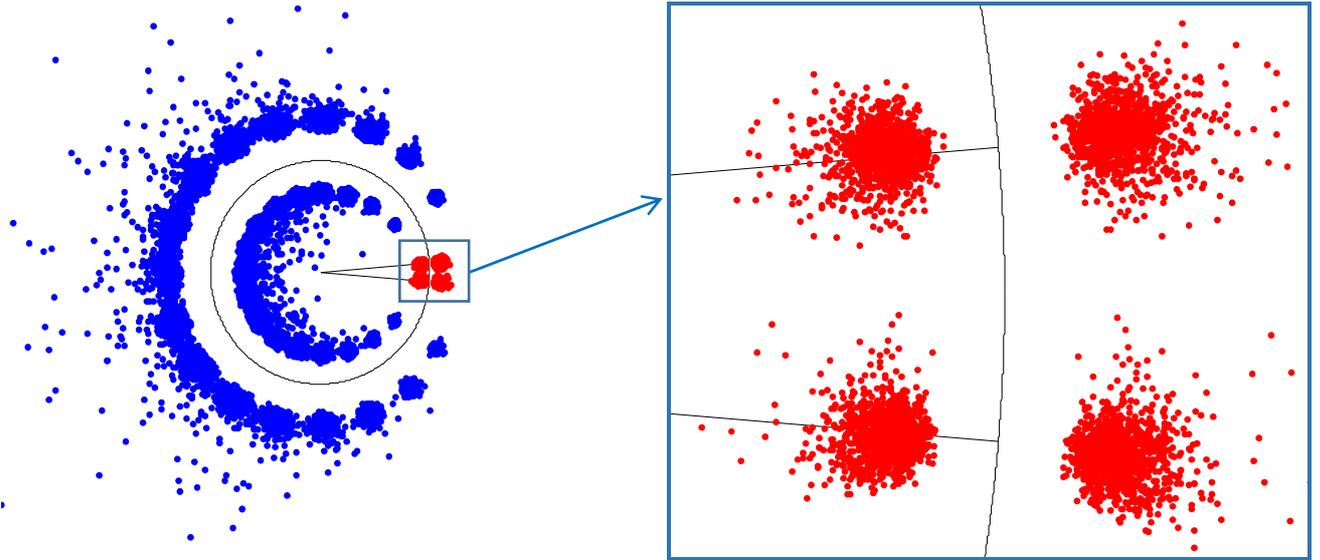


Рисунок 2.4 Положение корней полинома $f(z)$ при оценке проектора $\hat{\mathbf{P}}_{noise}$ при $N = 20$, $d = 0.5\lambda$, $L = 10$, $J = 2$; $\delta\varphi = 0.6$; ОСШ = 5 дБ; 1000 реализаций

Рассмотрим результаты моделирования для 8 реализаций входного процесса, на основе которых были построены Рисунок 1.1 и Рисунок 1.3. Положение корней функции $f(z)$ в (2.1.7) на комплексной плоскости приведены на Рисунок 2.5 для мощности $\nu = 30$ дБ (слева) и для мощности $\nu = 2.5$ дБ (справа). Видно, что предварительно выполненная оценка числа источников дает возможность найти положение двух сигнальных корней и, тем самым, оценить угловое положение этих источников.

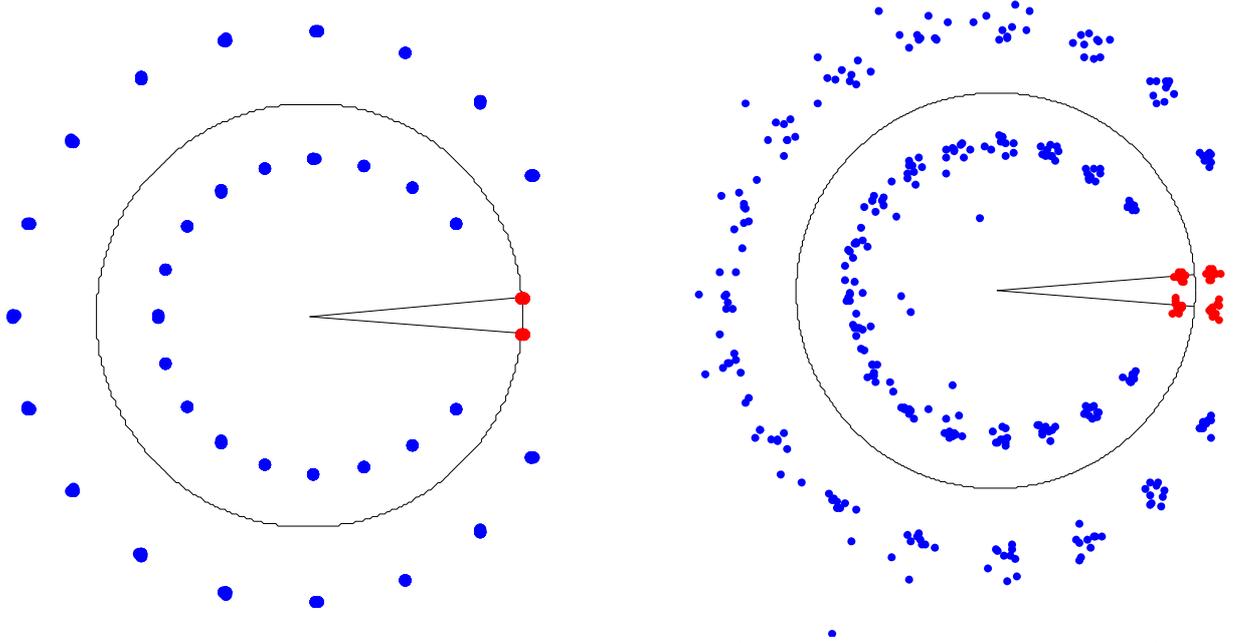


Рисунок 2.5 Корни полинома $f(z)$ на комплексной плоскости (8 реализаций) при $N = 20$, $d = 0.5\lambda$, $L = 10$, $J = 2$, $\delta\varphi=0.6$; $\nu = 30$ дБ (слева) и $\nu = 2.5$ дБ (справа)

Рассмотрим модификацию корневого метода минимального многочлена, которая позволяет уменьшить степень полинома в два раза и, тем самым, уменьшить число искомых корней с $(2N-2)$ до $(N-1)$.

Полином $f(z)$ в (2.1.7) имеет степень равную $(2N-2)$. Равенство нулю этого полинома означает, что проекция вектора $\mathbf{S}(\varphi)$ на шумовое подпространство также равна нулю. Другими словами, скалярное произведение проекции $\mathbf{P}_{noise}\mathbf{S}(\varphi)$ фазирующего вектора на шумовое подпространство с самим собой $[\mathbf{P}_{noise}\mathbf{S}(\varphi)]^H \mathbf{P}_{noise}\mathbf{S}(\varphi)$ дает нулевую величину.

Модификация метода заключается в замене в этом скалярном произведении одного из векторов на некоторый другой вектор, также принадлежащий шумовому подпространству. В качестве такого вектора можно взять любой из векторов, являющихся столбцами матрицы-проектора \mathbf{P}_{noise} . В результате вместо полинома $f(z)$ в (2.1.7) получим усеченный полином вида

$$\tilde{f}(z) = (\mathbf{P}_{noise})_q^H \mathbf{P}_{noise} \mathbf{S}(z), \quad (2.1.11)$$

где $(\mathbf{P}_{noise})_q$ – q -ый столбец матрицы-проектора \mathbf{P}_{noise} .

Полином $\tilde{f}(z)$ в (2.1.11) имеет в два раза меньшую степень, равную $(N-1)$, чем полином $f(z)$ в (2.1.7). Среди корней полинома $\tilde{f}(z)$ необходимо отобрать J корней, лежащих на единичной окружности и затем найти угловое положение источников с помощью (2.1.4). При использовании оценки $\hat{\mathbf{P}}_{noise}$ матрицы-проектора необходимо использовать оценку \hat{J} числа источников, то есть отобрать \hat{J} корней, наиболее близких к единичной окружности, и затем получить оценки углового положения источников.

Таким образом при использовании корневого метода минимального многочлена необходимо выполнить следующие операции: оценить параметры этого многочлена (степень \hat{m} и коэффициенты), сформировать матрицу-проектор (2.1.5) на шумовое подпространство, найти корни функции $f(z)$ в (2.1.7), выбрать из них $\hat{J} = \hat{m} - 1$ корней, наиболее близких единичной окружности, и найти угловые координаты источников с помощью формулы (2.1.10).

Такую пеленгацию источников сигналов по способу обзора пространства принято называть параллельной или одно этапной, когда вместо экстремумов псевдоспектральной функции отыскиваются корни соответствующих полиномов и в рамках единой вычислительной процедуры находятся угловые координаты всех источников [8].

В заключении этого подраздела оценим объем вычислений, необходимого для реализации спектрального и корневого методов минимального многочлена [57]. Основной объем вычислений для многоэлементной АР ($N \gg 1$) связан с оценкой (2.1.5) матричного проектора $\hat{\mathbf{P}}_{noise}$ на шумовое подпространство, которая предполагает, в свою очередь, решение системы нелинейных уравнений (1.2.3).

Для формирования коэффициентов γ_n ($n=1,2,\dots,m$), которые являются обратными собственными числами КМ входного процесса, необходимо вычислить след степенных матриц \mathbf{M} , $\mathbf{M}^2, \dots, \mathbf{M}^{2(m+1)}$. Эти матрицы можно найти последовательно с помощью итерационной процедуры, которая следует из (1.1.12) и имеет вид:

$$\widehat{\mathbf{M}}^k = L^{-1} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l) \mathbf{X}(l)^H \widehat{\mathbf{M}}^{k-1}. \quad (2.1.12)$$

Каждый шаг этой процедуры предполагает выполнение LN^2 операций комплексного умножения. Поэтому, для вычисления всех $2(m+1)$ степенных матриц необходимо выполнить $2(m+1)LN^2$ комплексных умножений. Таким образом, для оценки матричного проектора $\widehat{\mathbf{P}}_{noise}$ требуется объем вычислений пропорциональный квадрату числа элементов AP ($\sim N^2$). В то же время оценка этого проектора на основе поиска собственных чисел и векторов в соответствии с методом MUSIC требует выполнения числа комплексных умножений, пропорционального кубу числа элементов AP ($\sim N^3$).

2.2 Обобщение методов на случай коррелированных источников сигналов

Корреляция источников сигналов при практическом применении сверхразрешающих методов может изменяться в достаточно широких пределах. В радиолокации в качестве источников сигналов часто рассматриваются источники активных шумовых помех, которые являются некоррелированными между собой. Однако для автомобильного радиолокатора источниками сигналов могут являться две цели, например, два автомобиля, расположенные близко друг к другу и имеющие произвольный (часто достаточно высокий) коэффициент корреляции. Корреляция источников сигналов приводит к снижению эффективности сверхразрешающих методов минимального многочлена [54,57]. Это можно объяснить поведением собственных чисел КМ входного процесса в элементах AP.

Точная КМ \mathbf{M} определяется формулой (1.1.3). Выражения для сигнальных собственных чисел λ_1 и λ_2 этой матрицы в случае двух коррелированных источников одинаковой мощности ($\nu_1 = \nu_2 = \nu$) приведены в (1.1.6).

При некоррелированных источниках ($|\rho_{12}| = 0$) сигнальные собственные числа $\lambda_{1,2} = 1 + \nu N (1 \pm |g_{12}|)$. Если источники полностью коррелированные ($|\rho_{12}| = 1$), то из (1.1.6) будем иметь, что

$$\lambda_1 = 1 + 2\nu N [1 + |g_{12}| \cos(\alpha_{12})], \quad \lambda_2 = 1. \quad (2.2.1)$$

Следовательно, второе сигнальное собственное число становится равным шумовому собственному числу. Из (1.1.6) также следует, что значения собственных чисел инвариантны к одновременной замене $|g_{12}|$ на $|\rho_{12}|$ и $|\rho_{12}|$ на $|g_{12}|$. Поэтому увеличение степени корреляции источников (увеличение величины $|\rho_{12}|$) можно интерпретировать как угловое сближение этих источников (увеличение величины $|g_{12}|$). Следовательно, корреляция источников сигналов приводит к снижению эффективности сверхразрешающих методов.

Средние значения собственных чисел выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$ (1.1.12) показаны на Рисунок 2.6 для разных значений модуля коэффициента корреляции при числе элементов АР $N = 20$, периоде $d = 0.5\lambda$; угловом положении источников $\varphi_{1,2} = \pm 1.5^\circ$ (нормированное к ширине луча угловое расстояние $\delta\varphi = 0.6$) и мощности $\nu = 5$ дБ. В каждом численном эксперименте для $L = 10$ выборок входного процесса задавалось случайное значение фазы коэффициента корреляции с равномерным распределением в интервале от 0 до 2π для разных экспериментов. Затем проводилось усреднение по 3000 независимым экспериментам. Видно, что с увеличением уровня корреляции между источниками сигнальные собственные числа начинают расходиться. При этом второе собственное число λ_2 приближается к шумовым собственным числам и может становиться неотличимым от них, что будет приводить к уменьшению вероятности правильной оценки числа источников.

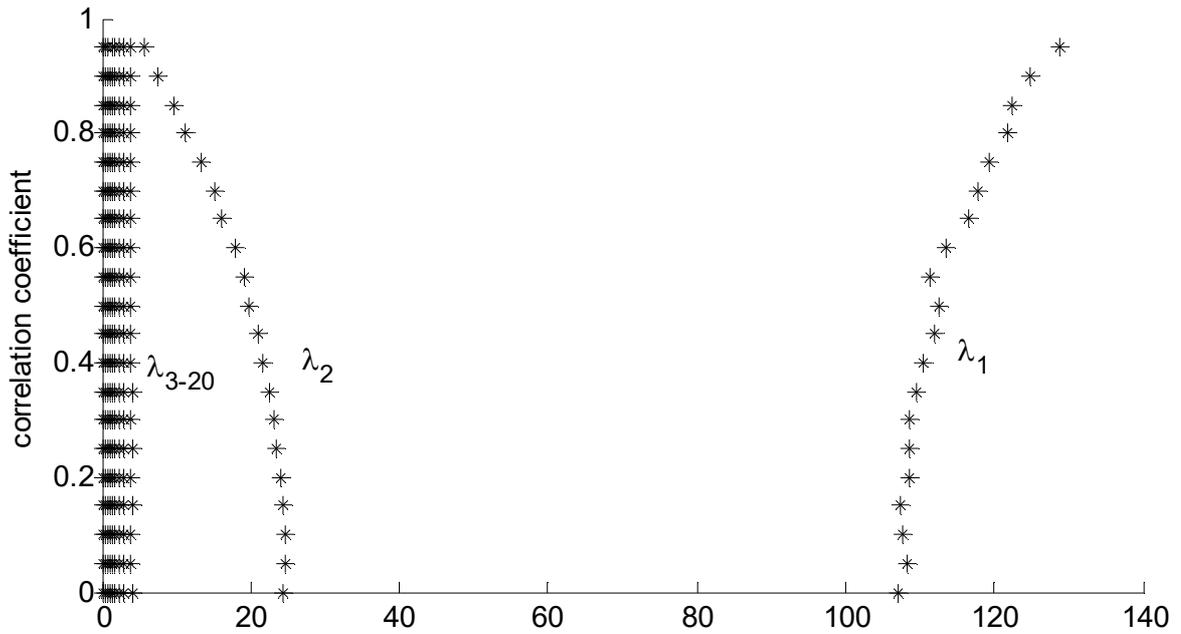


Рисунок 2.6 Средние значения собственных чисел выборочной КМ, $N = 20$; $d = 0.5\lambda$; $\delta\varphi = 0.6$, $\nu = 5$ дБ, $L = 10$

Для борьбы с негативным эффектом, вызванным корреляцией источников излучения, применяется процедура пространственного сглаживания КМ (SS – Spatial Smoothing). Она основана на разбиении АР на перекрывающиеся подрешетки, состоящие из Q соседних элементов и сдвинутые на один элемент относительно друг друга. Число таких подрешеток $K = N - Q + 1$. Существует несколько модификаций процедуры сглаживания: прямое (forward smoothing), обратное (backward smoothing) и совместное (forward-backward smoothing) [7,8,22,73]. На Рисунок 2.7 показана схема формирования подрешеток.

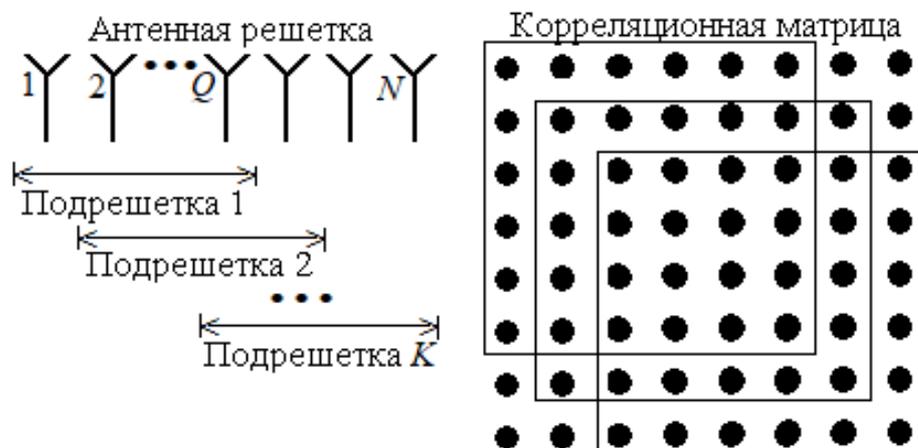


Рисунок 2.7 Упрощенная схема формирования подрешеток

При использовании пространственного сглаживания совместно с методами минимального многочлена необходимо найти новые пороговые значения для оценки степени минимального многочлена и, следовательно, для оценки числа источников сигналов. Эффективность методов минимального многочлена при достаточно высокой степени корреляции источников сигналов исследовалась в работах [49-51, 54, 57].

При **прямом сглаживании** (forward smoothing) подрешетки формируются, начиная с первого элемента АР. На выходе i -ой подрешетки КМ будет равна [50]

$$\vec{\mathbf{M}}_{(Q,Q)}^{\{i\}} = \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}} \mathbf{M} \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}H}, \quad (2.2.2)$$

где $\mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}} = [\mathbf{0}_1, \dots, \mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{I}_Q, \mathbf{0}_{i+Q}, \dots, \mathbf{0}_N]$ – матрица размерности $Q \times N$, которая состоит из первых $i-1$ и последних $N-Q-i+1$ нулевых столбцов и единичной матрицы размерности $Q \times Q$ между ними, $\mathbf{0}_l$ – l -ый нулевой столбец. Для сглаженной КМ будем иметь

$$\mathbf{M}^{(f)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{U} \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}} \mathbf{M} \mathbf{I}_{(Q,N)}^{\{i\}H}. \quad (2.2.3)$$

Если коэффициент корреляции j -го и q -го источников сигналов равен ρ_{jq} , то после процедуры сглаживания вперед эффективный коэффициент корреляции станет равным [57]

$$\rho_{jq}^{(f)} = \gamma_{jq}^{(f)} \rho_{jq}, \quad \gamma_{jq}^{(f)} = \frac{\sin K b_{jq}}{K \sin b_{jq}} e^{i(K-1)b_{jq}}, \quad b_{jq} = \pi \frac{d}{\lambda} (\sin \varphi_j - \sin \varphi_q). \quad (2.2.4)$$

Коэффициент $\gamma_{jq}^{(f)}$ представляет собой коэффициент декорреляции источников сигналов за счет прямого сглаживания.

Из (2.2.4) следует, что для $q = j$ коэффициент $\rho_{jq} = 1$, т.е. пространственное сглаживание не меняет эффективную мощность источников. При $q \neq j$ модуль $|\gamma_{jq}^{(f)}| < 1$, что означает уменьшение эффективной взаимной корреляции между источниками после процедуры сглаживания. Декорреляции источников зависит от

их углового положения и числа K подрешеток. Чем больше подрешеток, тем сильнее коэффициент декорреляции между источниками. Однако при увеличении K уменьшается размер Q подрешеток ($Q = N - K + 1$), что в свою очередь приводит к уменьшению разрешающей способности подрешеток. Для достижения наилучшего эффекта при сверхразрешении коррелированных источников рекомендуется выбирать значение $Q \approx 0.7N$ [7,74-77].

При **обратном сглаживании** (backward smoothing) подрешетки формируются, начиная с последнего элемента AP , и используются комплексно сопряженные выборки входного процесса. Следовательно, вместо вектора $\mathbf{X}(l)$ l -ой выборки входного процесса используется вектор $\mathbf{Y}(l) = \mathbf{U}\mathbf{X}^*(l)$, где \mathbf{U} – матрица перестановок, состоящая из единичных элементов на главной побочной диагонали и нулевых на остальных.

На выходе i -ой подрешетки КМ $\tilde{\mathbf{M}}_{(Q,Q)}^{(i)} = \mathbf{U}\mathbf{I}_{(Q,N)}^{(i)}\mathbf{M}^*\mathbf{I}_{(Q,N)}^{(i)H}\mathbf{U}$ и для сглаженной КМ получим [50]

$$\mathbf{M}^{(b)} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \mathbf{U}\mathbf{I}_{(Q,N)}^{(i)}\mathbf{M}^*\mathbf{I}_{(Q,N)}^{(i)H}\mathbf{U}. \quad (2.2.5)$$

Коэффициент корреляции j -го и q -го источников сигналов при обратном сглаживании удобно выразить через коэффициент корреляции при прямом сглаживании. В результате получим, что

$$\rho_{jq}^{(b)} = \gamma_{jq}^{(b)} \rho_{jq}^*, \quad \gamma_{jq}^{(b)} = \gamma_{jq}^{(f)*} \exp[-i2(Q-1)b_{jq}]. \quad (2.2.6)$$

Отсюда следует, что модули коэффициентов декорреляции при прямом и обратном сглаживании совпадают ($|\gamma_{jq}^{(b)}| = |\gamma_{jq}^{(f)}|$). Поэтому, эффективность прямого и обратного сглаживаний является одинаковой.

При **совместном (прямом и обратном) сглаживании** результирующая КМ равна полусумме КМ при прямом и обратном сглаживании, то есть

$$\mathbf{M}^{(f+b)} = 0.5(\mathbf{M}^{(f)} + \mathbf{M}^{(b)}). \quad (2.2.7)$$

С помощью (2.2.3) и (2.2.5) для коэффициента корреляции получим [50, 78, 76]

$$\rho_{jq}^{(f+b)} = 0.5 \left\{ \rho_{jq}^{(f)} + \rho_{jq}^{(f)*} \exp \left[-2j(Q-1)b_{jq} \right] \right\}. \quad (2.2.8)$$

Подставляя (2.1.4) и (2.1.6) в (2.1.8), получим, что

$$\rho_{jq}^{(f+b)} = 0.5 \frac{\sin Kb_{jq}}{K \sin b_{jq}} e^{i(K-1)b_{jq}} \left\{ \rho_{jq} + e^{-i2(N-1)b_{jq}} \rho_{jq}^* \right\}. \quad (2.2.9)$$

Отсюда для модуля коэффициента декорреляции j -го и q -го источников найдем, что

$$\left| \gamma_{jq}^{(f+b)} \right| = \left| \frac{\sin Kb_{jq}}{K \sin b_{jq}} \right| \left| \cos \left[(N-1)b_{jq} + \arg(\rho_{jq}) \right] \right|, \quad (2.2.10)$$

где $\arg(\rho_{jq})$ – фаза коэффициента корреляции сигналов двух источников. Совместное сглаживание является наиболее эффективным, так как $\left| \gamma_{jq}^{(f+b)} \right| \leq \left| \gamma_{jq}^{(f)} \right|$.

Из (2.2.10) следует, что коэффициент декорреляции зависит от числа подрешеток (или размера каждой из них), а также от фазы $\arg(\rho_{jq})$ коэффициента корреляции. Если считать фазу случайной величиной, распределённой равномерно на интервале от 0 до 2π , то в результате статистического усреднения получим, что модуль среднего коэффициента декорреляции будет равен:

$$\langle \left| \gamma_{jq}^{(f+b)} \right| \rangle = \frac{2}{\pi K} \left| \frac{\sin \left(\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \theta_j - \sin \theta_q) K \right)}{\sin \left(\pi \frac{d}{\lambda} (\sin \theta_j - \sin \theta_q) \right)} \right|. \quad (2.2.11)$$

На Рисунок 2.8 приведены графики для модуля коэффициента декорреляции в при прямом и совместном сглаживании в зависимости от относительного углового расстояния $\delta\theta$ между источниками, а также график для усредненного по фазе модуля коэффициента декорреляции при $N=20$, $Q=14$, $d = 0.5\lambda$, $\arg(\rho_{jq})=0$. Видно, что сближение источников приводит к плавному увеличению коэффици-

ента декорреляции при прямом сглаживании, а при совместном – к осциллирующему увеличению.

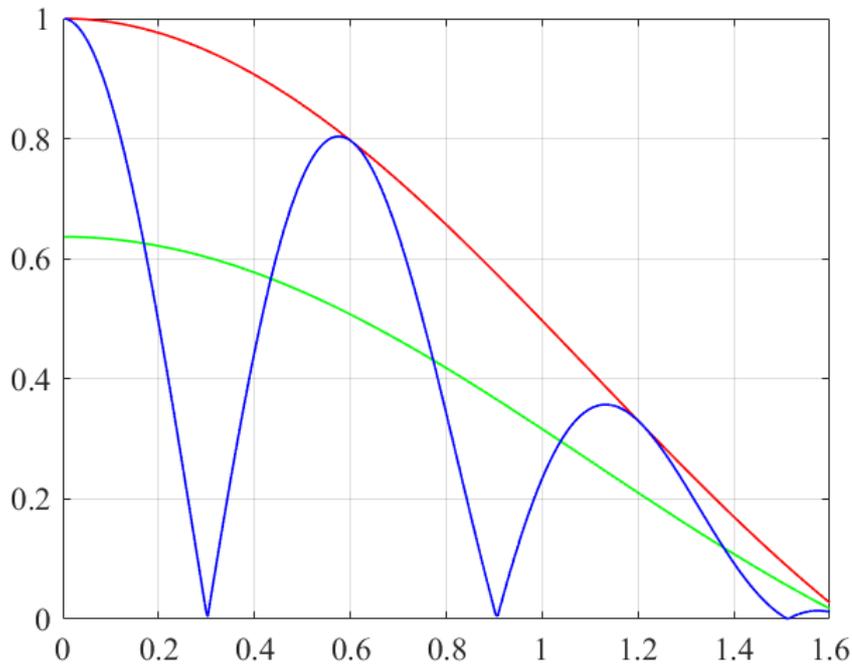


Рисунок 2.8 Модуль коэффициента декорреляции (прямое и совместное сглаживание) и средний коэффициент декорреляции (2.1.11) в зависимости от нормированного углового расстояния $\delta\varphi$, при $N=20$, $K=7$, $d = 0.5\lambda$, $\arg(\rho_{jq})=0$

Приведенные выше выражения получены для точной КМ. При наличии выборочных векторов $\mathbf{X}(l)$ входного процесса для каждой подрешетки с помощью (1.1.12) находится максимально правдоподобная оценка КМ размерности $Q \times Q$. Необходимо учесть, что при обратном сглаживании подрешетки формируются, начиная с последнего элемента AP , и используются комплексно сопряженные выборки. То есть вектор $\mathbf{X}(l)$ l -ой выборки входного процесса заменяется на вектор $\mathbf{Y}(l)=\mathbf{U}\mathbf{X}^*(l)$, преобразованный с помощью матрицы перестановок \mathbf{U} . Затем вычисляется средняя КМ на основе выражения (2.2.7).

Покажем, что результирующая КМ $\mathbf{M}^{(f+b)}$ в (2.2.7) является не только эрмитовой (аналогично КМ \mathbf{M}), но и персимметричной (симметричной относительно побочной диагонали). Для этого найдем элементы матрицы $\mathbf{M}^{(b)}$. Имеем, что

$$(\mathbf{M}^{(b)})_{pq} = \sum_{m=1, n=1}^Q \mathbf{U}_{pm} (\mathbf{M}^{(f)*})_{mn} \mathbf{U}_{mq}. \quad (2.2.12)$$

Сделаем замену индексов: $u=Q-m+1$, $v=Q-q+1$. Из свойств матрицы \mathbf{U} следует, что $\mathbf{U}_{p,m} = \mathbf{U}_{p,Q-u+1} = \delta_{p,u}$, где $\delta_{p,u}$ – символ Кронекера. Тогда (2.2.12) запишется в виде

$$(\mathbf{M}^{(b)})_{pq} = \sum_{m=1, n=1}^Q \mathbf{U}_{p,Q-u+1} (\mathbf{M}^{(f)*})_{Q-u+1, Q-v+1} \mathbf{U}_{Q-v+1, q} = (\mathbf{M}^{(f)*})_{Q-p+1, Q-q+1}. \quad (2.2.13)$$

Подставим (2.2.13) в (2.2.7). Получим, что

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}^{(f+b)})_{pq} &= 0.5 \left((\mathbf{M}^{(f)})_{pq} + (\mathbf{M}^{(f)*})_{Q-p+1, Q-q+1} \right) = \\ &= 0.5 \left((\mathbf{M}^{(f)})_{pq} + (\mathbf{M}^{(f)})_{Q-q+1, Q-p+1} \right). \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Отсюда следует персимметричность КМ $\mathbf{M}^{(f+b)}$ в (2.2.7).

Процедура пространственного сглаживания имеет два преимущества. Первое из них обусловлено увеличением (удвоением) эффективного числа выборок, а второе – уменьшением коэффициента корреляции источников сигналов. К недостаткам этой процедуры следует отнести уменьшение эффективной апертуры АР, и, следовательно, расширение главного луча АР, при ее использовании.

Использование процедуры пространственного сглаживания предполагает изменение порога при оценке степени минимального многочлена, то есть при оценке числа близкорасположенных и коррелированных источников сигналов. В первой главе при оценке степени минимального многочлена при некоррелированных источниках значение порога приведено в выражениях (1.2.12) и (1.2.13). Порог зависит от числа N элементов АР и числа L выборок входного процесса. В случае коррелированных источников эти формулы остаются справедливыми. Однако в них заменить число N на число Q элементов в каждой из подрешеток, и вместо числа L использовать эффективное число выборок $L_{eff} = (N-Q-1)L$, равное числу подрешеток, которое можно сформировать на апертуре АР при выполнении процедуры пространственного сглаживания. Значение коэффициента χ остается в пределах от 0 до 2. Так при коэффициенте $\chi=0$ будем иметь, что порог равен

$$Th = \frac{Q^2 - 1}{Q + L(N - Q + 1)}. \quad (2.2.15)$$

2.3 Результаты численного моделирования эффективности методов

Приведем сравнительные результаты моделирования эффективности методов минимального многочлена и метода MUSIC. Отметим, что для метода MUSIC необходимо сначала выполнить оценку \hat{J} числа источников J с помощью критериев MDL или AIC, а затем построить матрицу-проектор $\hat{\mathbf{P}}_{noise}$ на шумовое подпространство. Эта матрица равна

$$\hat{\mathbf{P}}_{noise} = \mathbf{I} - (\hat{\mathbf{U}}_1 \hat{\mathbf{U}}_1^H + \hat{\mathbf{U}}_2 \hat{\mathbf{U}}_2^H + \dots + \hat{\mathbf{U}}_J \hat{\mathbf{U}}_J^H), \quad (2.3.1)$$

где $\hat{\mathbf{U}}_j$ – собственные векторы выборочной КМ $\hat{\mathbf{M}}$, соответствующие сигнальным собственным числам этой матрицы [60,61].

1. Некоррелированные источники. Пусть АР состоит из $N = 50$ элементов и период $d = 0.5 \lambda$. Ширина диаграммы направленности по уровню половинной мощности составляет $\Delta\varphi_{beam} = 2.0^\circ$. Вектор $\mathbf{X}(l)$ входного процесса зададим в виде (1.1.1), где случайная гауссова величина $a_j(l)$ имеет нулевое среднее и дисперсию v_j , а мощность гауссовых собственных шумов равна единице. В каждом эксперименте сформируем L выборок входного процесса, а число экспериментов для усреднения результатов моделирования зададим равным 500. Основное внимание будем уделять вопросу оценки числа источников сигналов в случае короткой выборки входного процесса ($L < N$).

На Рисунок 2.9 приведена СКО оценки угловой координаты единственного источника сигнала, расположенного в направлении нормали к АР, в зависимости от мощности ν для спектрального метода минимального многочлена и MUSIC (вместе с MDL) при длине входного процесса $L = 10$. Кривые построены в области, в которой вероятность правильной оценки превышает 80%. При вычислении СКО учитывались только те эксперименты, в которых обеспечивалась правильная оценка числа источников ($\hat{J} = 1$). Видно, что оба метода обеспечивают практиче-

ски одинаковую СКО. Пунктирная кривая дает потенциальную СКО (границы Крамера–Рао), которая составляет $\sqrt{0.2\Delta\varphi_{beam}}/\sqrt{\nu_1 NL}$ [1,5]. Из рисунка следует, что полученные результаты близки к потенциально достижимым.

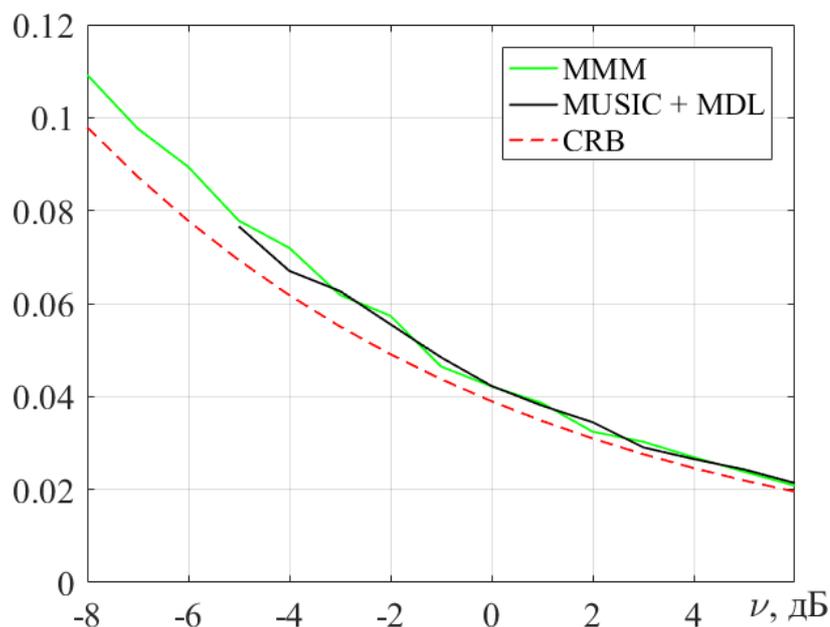


Рисунок 2.9 СКО оценки угловой координаты источника для спектрального метода минимального многочлена (MMM) и MUSIC при длине выборки $L = 10$. Пунктирная кривая – граница Крамера–Рао

Сравним теперь эффективность спектрального и корневого методов минимального многочлена. Рассмотрим теперь АР, состоящую из $N = 20$ элементов и период $d=0.5\lambda$. Ширина луча $\Delta\varphi_{beam}=5.0^\circ$. Длину выборки входного процесса зададим равной $L=10$ (короткая выборка). Оценку числа источников будем проводить двумя способами: на основе оценки степени минимального многочлена или числа пиков псевдоспектральной функции (2.1.6). Оценку угловых координат источников также проведем двумя способами – на основе вычисления корней минимального многочлена или по положениям максимумов псевдоспектральной функции. При моделировании будем проводить 1000 независимых экспериментов для каждого набора параметров.

В случае одного источника сигналов СКО оценки угловой координаты в зависимости от мощности ν , полученная с помощью корневого и спектрального методов минимального многочлена (кривые 2 и 3, соответственно) приведена на

Рисунок 2.10. Кривая 1 показывает потенциальную СКО (границы Крамера-Рао). Видно, что оба метода дают практически одинаковую СКО, близкую к потенциально достижимой. Вероятность правильной оценки числа источников, то есть вероятность получения правильной оценки ($\hat{J} = 1$), также практически одинакова для обоих методов и превышает $p=80\%$ при мощности $\nu > -9$ дБ.

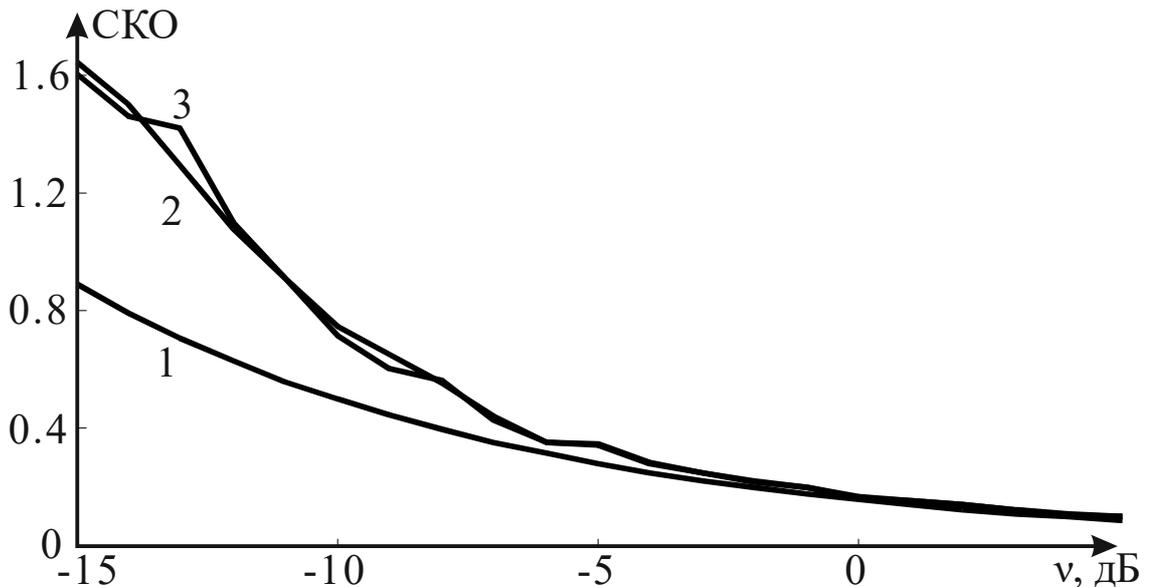


Рисунок 2.10 СКО оценки угловой координаты источника для корневого и спектрального методов минимального многочлена (кривые 2 и 3, соответственно) при длине выборки $L = 10$. Кривая 1 – граница Крамера–Рао

В случае двух источников одинаковой мощности ν , расположенных симметрично относительно нормали к АР ($\varphi_{1,2} = \pm 1.5^\circ$) с относительным угловым расстоянием равным $\delta\varphi = 0.6$, пороговое значение зададим равным среднему значению функционала $I_0^{(1)}$ в (1.2.13), то есть $Th = (N^2 - 1)/(N + L)$. Вычисление средних значений $\langle \varphi_1 \rangle$ и $\langle \varphi_2 \rangle$ и СКО оценки углового положения источников будем проводить для мощностей источников, при которых вероятность правильной оценки числа источников ($\hat{J} = 2$) превышает 80%.

Результаты моделирования для вероятности p правильной оценки числа источников в зависимости от мощности ν , то есть вероятность оценки $\hat{J} = 2$, полученные с помощью корневого и спектрального методов минимального многочлена (кривые 1 и 2, соответственно), показаны на Рисунок 2.11. Видно, что кор-

невой метод является более эффективным. Например, вероятность $p=80\%$ обеспечивается для мощности $\nu=-0.2$ дБ (корневой метод) и $\nu=7.2$ дБ (спектральный метод).

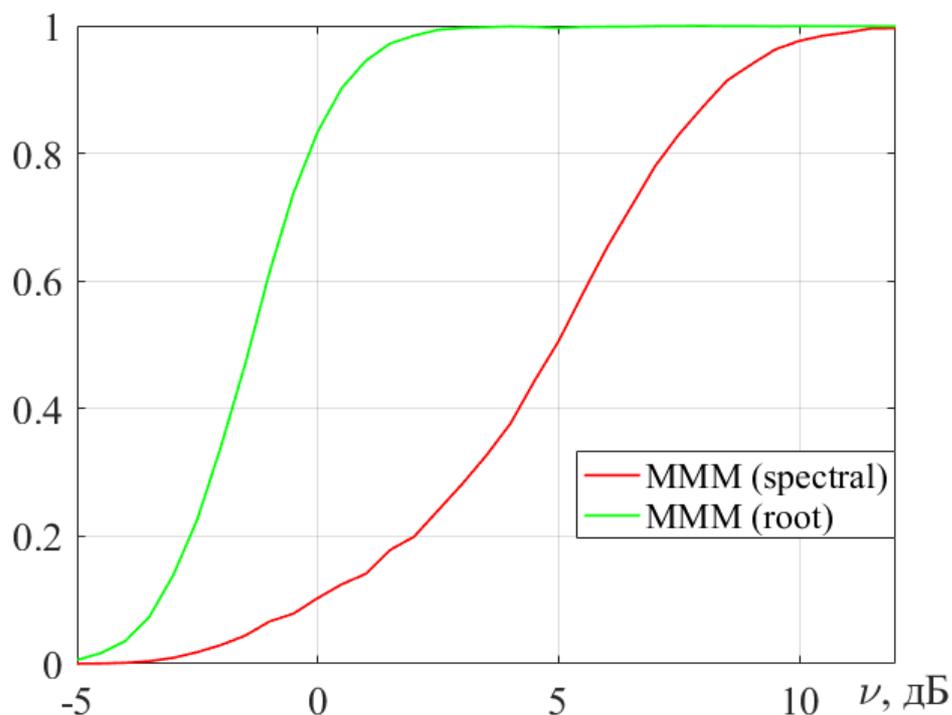


Рисунок 2.11 Вероятности правильной оценки числа источников для корневого и спектрального методов минимального многочлена (MMM)

В Таблица 2.1 приведены средние значения $\langle\varphi_1\rangle$ и $\langle\varphi_2\rangle$ и СКО оценки углового положения источников (град), полученные с помощью корневого и спектрального методов минимального многочлена и корневого метода MUSIC. Отметим, что для метода MUSIC число источников считалось известным, а не оценивалось с помощью критерия MDL. Из полученных результатов следует, что в области достаточно малых мощностей источников сигнал корневой метод минимального многочлена обеспечивает наименьшую СКО.

Таблица 2.1

ν , дБ	Псевдоспектральный метод минимального многочлена			Корневой метод минимального многочлена			Корневой метод MUSIC		
	$\langle\varphi_1\rangle$	$\langle\varphi_2\rangle$	σ	$\langle\varphi_1\rangle$	$\langle\varphi_2\rangle$	σ	$\langle\varphi_1\rangle$	$\langle\varphi_2\rangle$	σ
0	-	-	-	-1.53	1.52	0.57	-1.54	1.53	0.76

2.5	-	-	-	-1.53	1.52	0.42	-1.52	1.53	0.54
5.0	-	-	-	-1.54	1.54	0.28	-1.53	1.54	0.36
7.5	-1.30	1.30	0.23	-1.55	1.54	0.19	-1.54	1.54	0.24
10.0	-1.38	1.38	0.17	-1.54	1.54	0.14	-1.54	1.53	0.17
12.5	-1.44	1.44	0.11	-1.53	1.53	0.10	-1.53	1.53	0.13
15.0	-1.47	1.47	0.08	-1.52	1.52	0.07	-1.52	1.52	0.09
17.5	-1.49	1.49	0.06	-1.52	1.52	0.05	-1.52	1.52	0.07
20.0	-1.50	1.50	0.04	-1.52	1.52	0.04	-1.52	1.52	0.05

Из представленных результатов следует, что корневой метод минимального многочлена обладает рядом достоинств, по сравнению со псевдоспектральным. Во-первых, точность определения углового положения источников сигналов корневым методом превосходит точность псевдоспектрального метода. Во-вторых, он обладает лучшей разрешающей способностью. Корневой метод даёт два различных пеленга при верной оценке числа источников ($J = 2$) даже если псевдоспектр имеет только один пик, что наглядно видно из сравнения Рисунок 1.3 и Рисунок 2.5 (правая часть). В-третьих, корневой метод обеспечивает параллельную пеленгацию источников сигналов в рамках единой вычислительной процедуры, так как одновременно оценивается число источников сигналов и их угловые координаты. Сканирование области видимости, необходимое для оценки числа и положения «пику», при использовании псевдоспектрального метода, не производится. К недостаткам корневого метода следует отнести его применимость только для линейных и эквидистантных АР.

2. Коррелированные источники. Рассмотрим результаты моделирования, когда два источника одинаковой мощности ν достаточно сильно коррелированы между собой. Выберем 20-элементную АР с периодом $d=0.5\lambda$ (ширина луча $\Delta\varphi_{beam} = 5.0^\circ$) и зададим угловые координаты источников равными $\varphi_{1,2}=\pm 1.51^\circ$ ($\delta\varphi = 0.6$). Если пространственное сглаживание не применяется, то порог определим из (1.2.12) и (1.2.13) при параметре $\chi=0$, а при использовании сглаживания соответствующее значение порога зададим из (2.2.15). Размер подрешеток выберем

равным $Q=15$, а длину выборки входного процесса – $L=10$ (короткая выборка). Вычисление средних значений $\langle \varphi_1 \rangle$ и $\langle \varphi_2 \rangle$ и СКО оценки углового положения источников будем проводить для мощностей, при которых вероятность правильной оценки числа источников $p > 80\%$.

Модуль коэффициента корреляции будем считать постоянным и равным $|\rho|=0.9$. Фазу ($\arg(\rho)$) коэффициента корреляции зададим постоянной при формировании входного процесса в каждом численном эксперименте. Для разных экспериментов фаза будет считаться случайной величиной, равномерно распределенной в интервале $[0 \div 2\pi]$. Физически это означает, что имеется два квазикогерентных источника, сигналы которых имеют одинаковый в каждом эксперименте фазовый сдвиг равный $\arg(\rho)$. Вначале оценим число \hat{J} источников, а затем – их угловые координаты. Оценку числа источников будем проводить двумя способами: на основе оценки степени минимального многочлена или числа пиков псевдоспектральной функции $\eta(\varphi)$. Оценку угловых координат источников также проведем двумя способами – на основе вычисления аргументов корней минимального многочлена или по положениям максимумов псевдоспектральной функции. При моделировании будем проводить 1000 независимых численных экспериментов для каждого набора параметров.

На Рисунок 2.12 приведены вероятности правильной оценки числа источников в зависимости от их мощности ν . Сплошные кривые соответствуют оценке, полученной корневым методом минимального многочлена, а пунктирные – псевдоспектральным методом минимального многочлена. Кривые 1 построены для совместного (прямого и обратного) сглаживания, кривые 2 – при отсутствии сглаживания. Из приведенных результатов следует, что в случае поиска корней обеспечивается вероятность p правильной оценки числа источников для меньших мощностей сигналов, чем в случае поиска «пиков» псевдоспектральной функции. Вероятность $p=80\%$ обеспечивается при $\nu=4.1$ и 5.6 дБ (со сглаживанием), и при $\nu=6.2$ и 14.2 дБ (без сглаживания). Для корневого метода применение процедуры совместного сглаживания уменьшает требуемую мощность на 2.1 дБ.

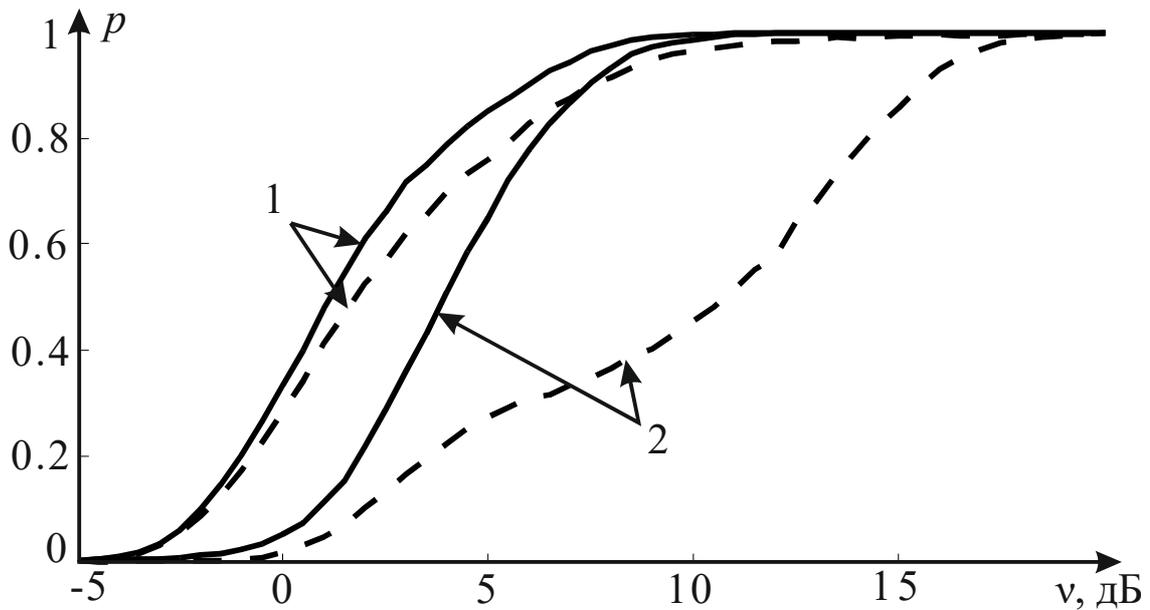


Рисунок 2.12 Вероятность правильной оценки числа источников в зависимости от их мощности при совместном сглаживании (кривые 1) и без сглаживания (кривые 2), $N=20$, $d=0.5\lambda$, $\delta\varphi = 0.6$

В Таблица 2.2 приведены средние значения $\langle\varphi_1\rangle$ и $\langle\varphi_2\rangle$ и СКО оценки углового положения источников (град), полученные с помощью корневой и спектрального методов минимального многочлена, а также корневой метода MUSIC. Верхняя строка соответствует применению пространственного сглаживания, а нижняя – его отсутствию. Из полученных результатов следует, что без пространственного сглаживания корневой метод минимального многочлена обеспечивает наименьшую СКО. Применение процедуры сглаживания значительно увеличивает эффективность рассматриваемых методов, особенно в области малых мощностей сигналов. В этой области корневой метод минимального многочлена и корневой метод MUSIC обеспечивают практически одинаковую систематическую ошибку и СКО. Однако метод минимального многочлена обеспечивает оценку числа источников с вероятностью правильной оценки $p > 80\%$, а для метода MUSIC число источников считалось известным и не оценивалось. Отметим, что при оценках средних значений и СКО методами минимального многочлена учитывались только ситуации с правильной оценкой числа источников.

Таблица 2.2

Совместное сглаживание / Без сглаживания									
Методы минимального многочлена									
	Псевдоспектральный			Корневой			Корневой MUSIC (при известном числе источников)		
ν , дБ	$\langle\varphi_1\rangle$	$\langle\varphi_2\rangle$	σ	$\langle\varphi_1\rangle$	$\langle\varphi_2\rangle$	σ	$\langle\varphi_1\rangle$	$\langle\varphi_2\rangle$	σ
5.0	-	-	-	-1.54	1.53	0.38	-1.54	1.53	0.38
	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.5	-1.47	1.47	0.30	-1.51	1.51	0.31	-1.51	1.52	0.31
	-	-	-	-1.51	1.52	0.78	-1.58	1.58	0.87
10.0	-1.48	1.48	0.24	-1.52	1.51	0.24	-1.51	1.51	0.24
	-	-	-	-1.50	1.50	0.61	-1.47	1.49	0.68
12.5	-1.49	1.50	0.18	-1.51	1.51	0.17	-1.51	1.51	0.17
	-	-	-	-1.50	1.50	0.41	-1.50	1.49	0.47
15.0	-1.50	1.50	0.13	-1.51	1.51	0.13	-1.51	1.51	0.13
	-1.34	1.34	0.27	-1.52	1.52	0.26	-1.52	1.51	0.30
17.5	-1.51	1.50	0.10	-1.51	1.51	0.10	-1.51	1.51	0.10
	-1.39	1.39	0.20	-1.53	1.53	0.17	-1.53	1.52	0.20
20.0	-1.51	1.51	0.07	-1.51	1.51	0.07	-1.51	1.51	0.07
	-1.44	1.44	0.13	-1.52	1.52	0.11	-1.52	1.52	0.14
22.5	-1.51	1.51	0.05	-1.51	1.51	0.05	-1.51	1.51	0.05
	-1.48	1.48	0.08	-1.52	1.52	0.08	-1.52	1.52	0.10

На Рисунок 2.13 приведены вероятности правильной оценки числа источников в зависимости от их мощности ν для разных модулей коэффициентов корреляции источников $|\rho_{1,2}| = 0, 0.7, 0.9$ и 0.95 при длине входного процесса $L = 10$. Фаза коэффициента корреляции задавалась постоянной в каждом эксперименте и равномерно распределенной в интервале $[0, 2\pi]$ для разных экспериментов, число которых составляло 500. Число элементов $N = 50$, период $d = 0.5 \lambda$. Ширина диаграммы направленности АР составляет $\Delta\varphi_{beam} = 2.0^\circ$, угловые координаты источников $\varphi_{1,2} = \pm 1^\circ$ ($\delta\varphi = 1.0$). Размер подрешеток при пространственном сглаживании $Q = 30$. При этом ширина луча каждой подрешетки увеличивается до 3.3° .

Сплошные кривые получены с помощью пространственного сглаживания, а пунктирные – без нее. Видно, что пространственное сглаживание эффективно для высоких коэффициентов корреляции ($|\rho_{1,2}| > 0.7$), когда преобладает эффект уменьшения коэффициента корреляции. При меньших коэффициентах корреляции уменьшение размерности сглаженной КМ является определяющим и приводит к снижению эффективности процедуры сглаживания.

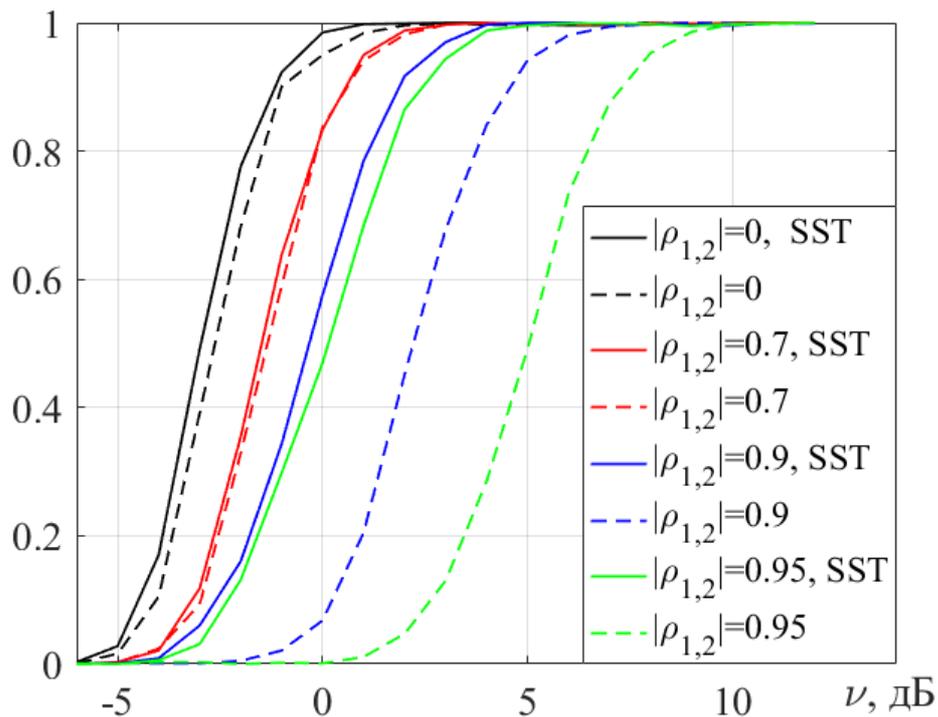


Рисунок 2.13 Вероятность правильной оценки числа источников методом минимального многочлена для $|\rho_{1,2}| = 0, 0.7, 0.9$ и 0.95 . Сплошные кривые получены с помощью процедуры пространственного сглаживания, пунктирные – без нее.

2.4 Заключение по второй главе

Во второй главе диссертации рассмотрены сверхразрешающие методы минимального многочлена КМ сигналов в АР, основанные на аппроксимации минимального многочлена КМ, то есть на оценке степени и коэффициентов этого многочлена. Исследуются эффективность двух методов минимального многочлена – псевдоспектрального и корневого. Основное внимание уделяется случаю короткой выборки входного процесса, когда число выборочных векторов меньше числа элементов АР.

В первом разделе разработан «сверхразрешающий» корневой метод минимального многочлена при некоррелированных источниках сигналов и произвольной длине выборки входного процесса в АР. При пеленгации источников сигналов с помощью данного метода вместо поиска «пиков» псевдоспектральной функции отыскиваются корни соответствующих полиномов и в рамках единой вычислительной процедуры находятся угловые координаты всех источников. Показано, что реализация корневого метода предполагает выполнение меньшего объема вычислений (пропорционально квадрату числа элементов АР) по сравнению с корневым методом MUSIC (пропорционально кубу числа элементов АР).

Во втором разделе получено обобщение спектрального и корневого методов минимального многочлена на случай, когда близкорасположенные источники сигналов являются произвольным образом коррелированными между собой. Применение пространственного сглаживания с разбиением АР на перекрывающиеся подрешетки предполагает коррекцию уровня порога при оценке степени минимального многочлена и найдено новое значение порога. При этом вероятность правильной оценки числа источников значительно увеличивается, особенно при достаточно высоких коэффициентах корреляции (>0.7).

В третьем разделе приведены результаты выполненного численного моделирования эффективности спектрального и корневого методов минимального многочлена при некоррелированных и коррелированных источниках сигналов. Показано, что в области достаточно малых мощностей источников точность определения углового положения источников корневым методом превосходит точность псевдоспектрального метода и совпадает с точностью известного корневого метода MUSIC при условии, что метод MUSIC «знает» истинное число источников сигналов.

3 Результаты натурных экспериментов на автомобильном радиолокаторе

В третьей главе рассматриваются результаты натурных экспериментов, выполненных на автомобильном радиолокаторе миллиметрового диапазона длин, в состав которого входили передающая и приемная АР (так называемый ММО-радиолокатор). Радиолокатор использовал непрерывное излучение широкополосных импульсов с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). Кратко анализируются особенности временной обработки сигналов. Обсуждаются вопросы формирования виртуальных приемных антенн. Описываются сценарии различных экспериментов: статические сценарии с неподвижным радиолокатором и источниками отраженных сигналов; динамические сценарии с подвижным радиолокатором и неподвижными источниками отраженных сигналов; сценарии на реальной дороге. Проведенные эксперименты характеризовались высоким уровнем корреляции близкорасположенных источников сигналов и предельно короткой длиной (одна выборка) входного процесса в приемных антеннах. Приводятся сравнительные результаты по сверхразрешению двух близкорасположенных источников сигналов, полученные на этом радиолокаторе с помощью разработанных методов минимального многочлена и других известных методов.

Основные результаты второй главы опубликованы в работах [51, 52, 54, 57, 58].

3.1 Обработка сигналов в ЛЧМ-ММО-радиолокаторе

Эксперименты проводились на автомобильном радиолокаторе миллиметрового диапазона длин волн (77 ГГц). Данный радиолокатор относится к классу так называемых ММО-радиолокаторов, в которых используется несколько передающих и приемных антенн. Сигналы передающих антенн кодируются ортогональными кодами и, поэтому, становятся взаимно ортогональными. При отражении от цели эти сигналы суммируются со своими фазовыми сдвигами, которые зависят не только от взаимного расположения приемных антенн, но и от располо-

жения передающих антенн в единой системе координат. В результате формируются дополнительные (виртуальные) приемные антенны, то есть увеличивается число степеней свободы и размеры приемной АР.

Радиолокатор относится к классу CS-FMCW (Chirp Sequence – Frequency Modulated Continuous Wave) радаров, которые используют широкополосные импульсы (chirps) с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). Мгновенная частота импульса на интервале времени $-0.5T_{ch} \leq t \leq 0.5T_{ch}$ изменяется по линейному закону $f(t) = f_c + \alpha t$ в интервале частот от $f_c - 0.5B$ до $f_c + 0.5B$, где T_{ch} – длительность импульса, $\alpha = B/T_{ch}$ – наклон частотной характеристики, f_c – центральная частота, B – ширина полосы. Излучаемый сигнал имеет вид [40,42,80] $x(t) = A(t)\cos[\varphi(t)]$, где фаза $\varphi(t) = 2\pi(f_c t + 0.5\alpha t^2)$, $A(t)$ – амплитуда.

Рассмотрим вначале систему с одной передающей и одной приемной антенной. Сформированные ЛЧМ-импульсы разделяются на две ветви, одна из которых соединяется с передающей антенной, а другая – со смесителем в цепи приемной антенны. Отраженный от цели сигнал усиливается и смешивается с передаваемым сигналом для формирования низкочастотного сигнала биений. Упрощенная структурная схема ЛЧМ радиолокатора приведена на Рисунок 3.1, где ГУН – генератор, управляемый напряжением, АЦП – аналого-цифровой преобразователь, ЦОС – блок цифровой обработки сигналов.

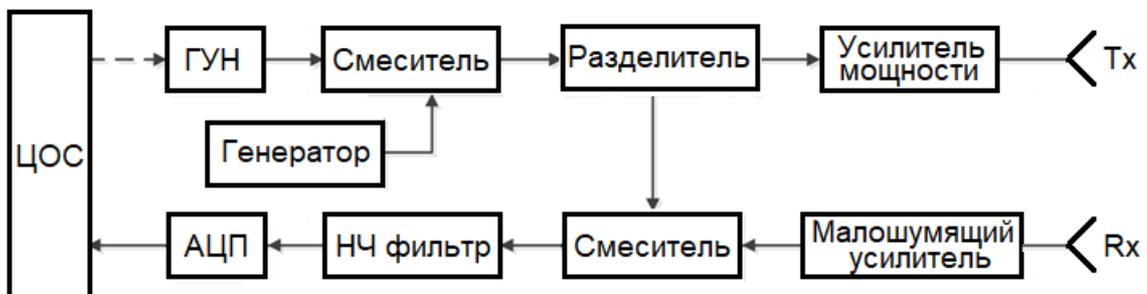


Рисунок 3.1 Упрощенная структурная схема ЛЧМ радиолокатора

Если цель находится на расстоянии r от радара и движется с радиальной скоростью v , то принятый эхо-сигнал имеет задержку $\tau = 2(r+vt)/c$ (c – скорость

света) и с точностью до комплексного множителя, зависящего от различных факторов (мощность передатчика, ослабление сигнала в пространстве, усиление антенн, эффективная поверхность отражения цели и т.д.) может быть записан как $y(t) = A(t - \tau) \cos[\varphi(t - \tau)]$. Далее выходе смесителя формируется сигнал $x(t)y(t)$ и затем с помощью низкочастотного фильтра выделяется сигнал биений $z_b(t) = \cos[\varphi(t)\varphi(t - \tau)] = \cos[\varphi_b(t)]$. Фаза этого сигнала равна

$$\varphi_b(t) = 2\pi(f_c \tau + \alpha t \tau - 0.5\alpha \tau^2). \quad (3.1.1)$$

Подставим в (3.1.1) время задержки τ . В результате имеем [80], что

$$\varphi_b(t) = 2\pi \frac{2}{c} \left[f_c r \left(1 - \alpha \frac{r}{f_c c} \right) + f_c v t + \alpha r t \left(1 + \frac{v t}{r} - \frac{2v}{c} - \frac{v v t}{c r} \right) \right]. \quad (3.1.2)$$

Это выражение можно упростить, если учесть возможные дальности до целей и их скорости движения, а также параметры радара. Можно показать, что в (3.1.2) слагаемые $\alpha \frac{r}{f_0 c} \ll 1$, $\frac{v t}{r} \ll 1$, $\frac{2v}{c} \ll 1$, и $\frac{v v t}{c r} \ll 1$, то есть являются пренебрежимо малыми. Тогда (3.1.2) значительно упрощается и принимает вид

$$\varphi_b(t) = 2\pi \left(\frac{2f_c r}{c} + \frac{2\alpha r}{c} t + \frac{2f_c v}{c} t \right). \quad (3.1.3)$$

Отсюда следует, что частота биений будет определяться суммой двух компонент. Одна из которых (f_r) зависит от дальности до цели, а вторая (f_v) – от радиальной скорости цели, то есть

$$f_b = f_r + f_v = \frac{2\alpha r}{c} + \frac{2v}{\lambda}. \quad (3.1.4)$$

Таким образом, однозначное измерение дальности и скорости одной цели не может быть произведено с помощью одного импульса.

Из (3.1.4) следует, что от наклона α частотной характеристики зависит только первая компонента (f_r) в частоте биений, а вторая (f_v) – не зависит. Если

выбрать наклон α достаточно большим, таким что компонента f_v будет пренебрежимо малой ($f_r \gg f_v$), то дальность можно измерить с помощью одного импульса. Такой радиолокатор принято называть радиолокатором с «короткими» импульсами [80, 83]. Для измерения скорости используется последовательность N_{ch} импульсов.

Дальность цели для l -го импульса равна $r_l = r_0 + vT_1l$, где r_0 – начальная дальность, T_1 – период повторения импульсов. Учтем, что для современных параметров радаров и скоростей движения целей изменение дальности за время всей последовательности импульсов меньше дальности ($vT_1N_{ch} \ll r_0$). Тогда, для сигнала биений для l -го импульса будем иметь [80, 81]

$$z_{b,l}(t) = \cos \left[\frac{2\pi}{c} (2f_c r_0 + 2f_c v T_1 l + 2\alpha r_0 t) \right]. \quad (3.1.5)$$

Классический подход к разделению нескольких целей и оценке их дальностей заключается в преобразовании измеренных сигналов в частотную область с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ). Каждой отдельной цели соответствует частота биений, из которой можно найти дальность, если используются «короткие» импульсы с достаточно большим наклоном частотной характеристики. Затем можно оценить сдвиг фазы за период повторения ЛЧМ-импульсов и, следовательно, радиальную скорость. Для этого выполняется второе БПФ

Таким образом, первое БПФ выполняется по выборкам отдельно для каждого импульса (по «быстрому» времени) и дает частоту биений. Выход первого БПФ используется в качестве входа для второго БПФ, которое выполняется по «медленному» времени и дает доплеровскую частоту. В результате получается двумерный спектр («Дальность – Скорость»).

В результате двух преобразований Фурье находится максимальный сигнал в плоскости «Дальность – Скорость». Для обнаружения цели значение этого сигнала сравнивается с порогом, выбранным исходя из вероятности ложной тревоги. Упрощенная структурная схема обработки сигналов в приемной антенне показана на Рисунок 3.2, где длительность окна равна $T_c = N_{ch} T_1$. На Рисунок 3.3 показаны

основные преобразования сигналов в процессе временной обработки сигналов для случая двух целей.

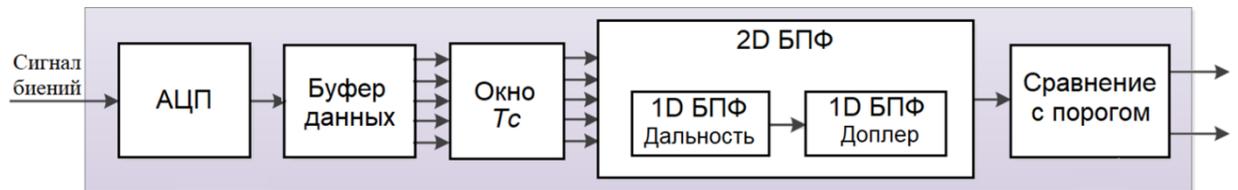


Рисунок 3.2 Структурная схема временной обработки в приемной антенне

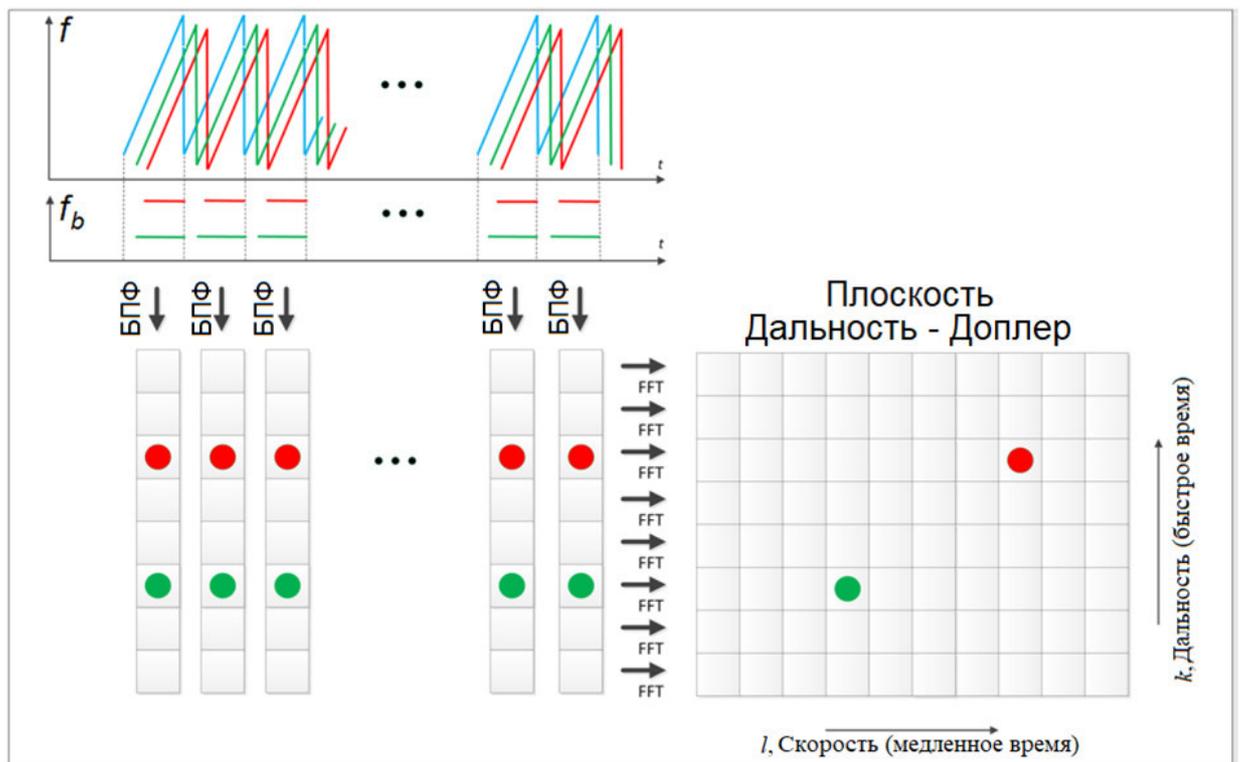


Рисунок 3.3 Преобразования сигналов в процессе временной обработки

Рассмотрим теперь ММО-радиолокатор с несколькими передающими и приемными антеннами. Важное свойство ММО-радиолокатора заключается в возможности увеличения числа степеней свободы и размеров апертуры приемной АР за счет формирования дополнительных (виртуальных) антенн. Импульсы в передающих антеннах кодируются ортогональными кодами, и поэтому, становятся взаимно ортогональными. В качестве таких кодов использовались коды Уолша.

Пространственные координаты виртуальных антенн определяются сверткой взаимных координат передающих и приемных антенн [9]. Обозначим на плоскости (x, y) координаты p -ой передающей и q -ой приемной антенн, соответ-

ственно через $(x, y)_{Tx}^{(p)}$, $(x, y)_{Rx}^{(q)}$. Тогда координаты виртуальных антенн будут равны

$$(x, y)_{virt}^{(p,q)} = (x, y)_{Tx}^{(p)} + (x, y)_{Rx}^{(q)}, \quad p=1,2,\dots, N_{Tx}, \quad q=1,2,\dots, N_{Rx}, \quad (3.1.6)$$

где N_{Tx} и N_{Rx} – число передающих и реальных приемных антенн.

Максимальное число приемных антенн не превышает значения $N_{Tx}N_{Rx}$. Поэтому, число виртуальных антенн не превышает величины $N_{Rx}(N_{Tx}-1)$. Некоторые из виртуальных антенн могут иметь одинаковые координаты (совпадать друг с другом в пространстве). При этом принятые сигналы в этих антеннах будут суммироваться с учетом их фаз.

В состав рассматриваемого ММО-радиолокатора входили 3 передающие и 4 приемные антенны. На Рисунок 3.4 (слева) показано расположение передающих (Tx1, Tx2 и Tx3) и приемных (Rx1, Rx2, Rx3 и Rx4) антенн. Для формирования виртуальных антенн использовались ортогональные коды Уолша длиной равной 4. Для первой передающей антенны применялся код (1,1,1,1), для второй – (1,1,-1,-1) и для третьей – (1,-1,1,-1). Кодирование сигналов передающих антенн приводит к их относительному смещению по частоте. Для первой антенны частотное смещение равно нулю, для второй – составляет величину $1/2T$, для третьей – величину $1/T$. На Рисунок 3.4 (справа) показаны соответствующие коды длиной равной 4, которые повторяются так, что общая длина каждого из них равна числу импульсов излучаемых антеннами.

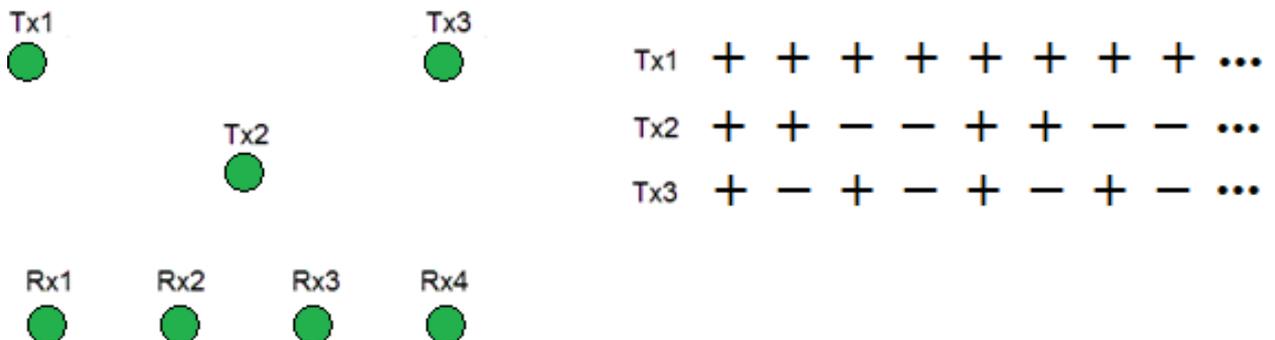


Рисунок 3.4 Расположение передающих и приемных антенн (слева) и кодовые последовательности для передающих антенн (справа)

Взаимная ортогональность кодированных сигналов обеспечивает отсутствие их интерференции, а также возможность их разделения в каждой приемной антенне и дальнейшей когерентной обработки. Таким образом, на выходе каждой из четырех приемных антенн имелось 3 разделенных сигнала, а на выходе всех 4 приемных антенн формировалось $3 \times 4 = 12$ сигналов. На Рисунке 3.5 (сверху) показана приемная АР ММО-радиолокатора, состоящая из реальных (а, b, c и d) и виртуальных (номера 1–7) антенн. Обозначение (Txp, Rxq) дает номера передающей антенны (p -ая) и приемной антенны (q -ая), формирующих соответствующие сигналы. Из рисунка видно, что две виртуальные антенны располагались в одном месте. Таким образом, результирующая приемная АР радара состояла из 2 строк. В верхней строке имелось 7 антенн, расположенных с шагом 1.1λ , в нижней – 4 антенны, расположенные с таким же шагом. Расстояние между верхними и нижними строками составляло 0.74λ .

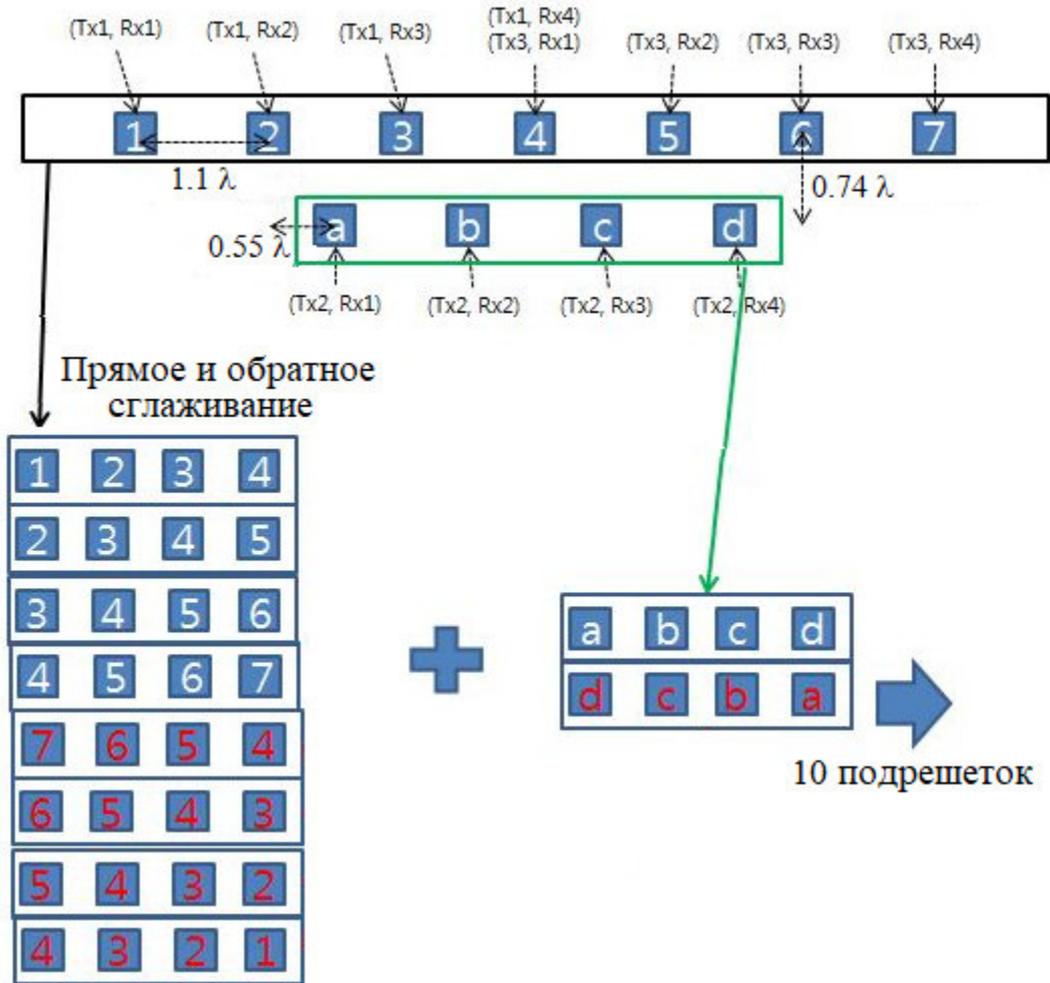


Рисунок 3.5 Схема формирования виртуальных антенн и процедуры сглаживания

При обработке результатов экспериментов применялась процедура пространственного (прямого и обратного) сглаживания корреляционной матрицы, описанная в подразделе 2.2. Антенная решетка разделялась на эквидистантные подрешетки по 4 элемента в каждой. На Рисунок 3.5 показана схема формирования подрешеток. Таким образом, было сформировано 10 подрешеток (по 5 для прямого и обратного сглаживаний) с одинаковым шагом 1.1λ .

В силу специфических особенностей временной обработки сигналов в радиолокаторе на выходе каждой из антенн регистрировалась только одна выборка входного процесса, соответствующая максимальному значению сигнала в плоскости «Дальность – Скорость», то есть входной процесс состоял из одной выборки ($L = 1$). В результате процедуры пространственного сглаживания, показанной на Рисунок 3.5 (внизу), эта выборка сигналов в 11-элементной AP породила матрицу сигналов размерности 4×10 вида:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_a & x_7^* & x_6^* & x_5^* & x_4^* & x_d^* \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_b & x_6^* & x_5^* & x_4^* & x_3^* & x_c^* \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_c & x_5^* & x_4^* & x_3^* & x_2^* & x_b^* \\ x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_d & x_4^* & x_3^* & x_2^* & x_1^* & x_a^* \end{bmatrix}. \quad (3.1.6)$$

Матрицу (3.1.6) можно рассматривать как матрицу 5 дублированных временных выборок в 4-х элементных подрешетках, сформированных в АР в результате пространственного сглаживания. Таким образом, при заданной конфигурации АР и параметрах процедуры пространственного сглаживания эффективное число элементов решётки $N_{ef}=4$, а эффективная длина входного процесса $L_{ef} = 5$.

Для пеленгации источников сигналов с помощью предложенного корневого метода минимального многочлена необходимо найти $(2N-2)$ корней полинома $f(z)$ вида (2.1.7). Поиск корней представляет собой достаточно сложную с вычислительной точки зрения проблему, особенно для многоэлементных АР. Как отмечалось выше, все подрешетки после процедуры прямого и обратного пространственного сглаживания состояли из 4 элементов. Поэтому, число искомых корней составляет 6. Аналитических выражений для искомых корней в этом случае не существует. Для уменьшения числа корней в 2 раза (с 6 до 3) использовался модифицированный корневой метод минимального многочлена на основе поиска корней усеченного полинома третьей степени вида (2.1.11). Это дало возможность использовать известные [66] аналитические выражения для искомых корней.

3.2 Статические сценарии (полигон)

Для практической проверки эффективности методов сверхразрешения был проведен ряд экспериментов на полигоне, который представлял собой ровную асфальтированную поверхность. В экспериментах были реализованы статические и динамические сценарии с неподвижным и подвижным радиолокатором, соответственно. В качестве целей (вторичных источников сигналов) применялись широко используемые в радиолокации уголкового отражатели треугольной формы, которые возвращают после трехкратного отражения падающий луч в направлении ис-

точника излучения [82], а также автомобили. Отражатели и АР радиолокатора располагались на высоте ≈ 0.5 м над поверхностью земли. На Рисунок 3.6 показана светлым цветом антенна радиолокатора, встроенная в автомобиль, а на Рисунок 3.7 – уголкового отражателя.



Рисунок 3.6 Антенна радиолокатора



Рисунок 3.7 Уголкового отражатель

Теоретическая диаграмма направленности АР в азимутальной плоскости без учёта диаграммы направленности (ДН) отдельных элементов приведена на

Рисунок 3.8. Ширина главного луча ДН АР по уровню половинной мощности (-3 дБ) составляла $\Delta\varphi_{beam} = 7.7^\circ$. Отдельные антенны являлись слабонаправленными, поэтому практически не влияли на ширину главного луча ДН АР.

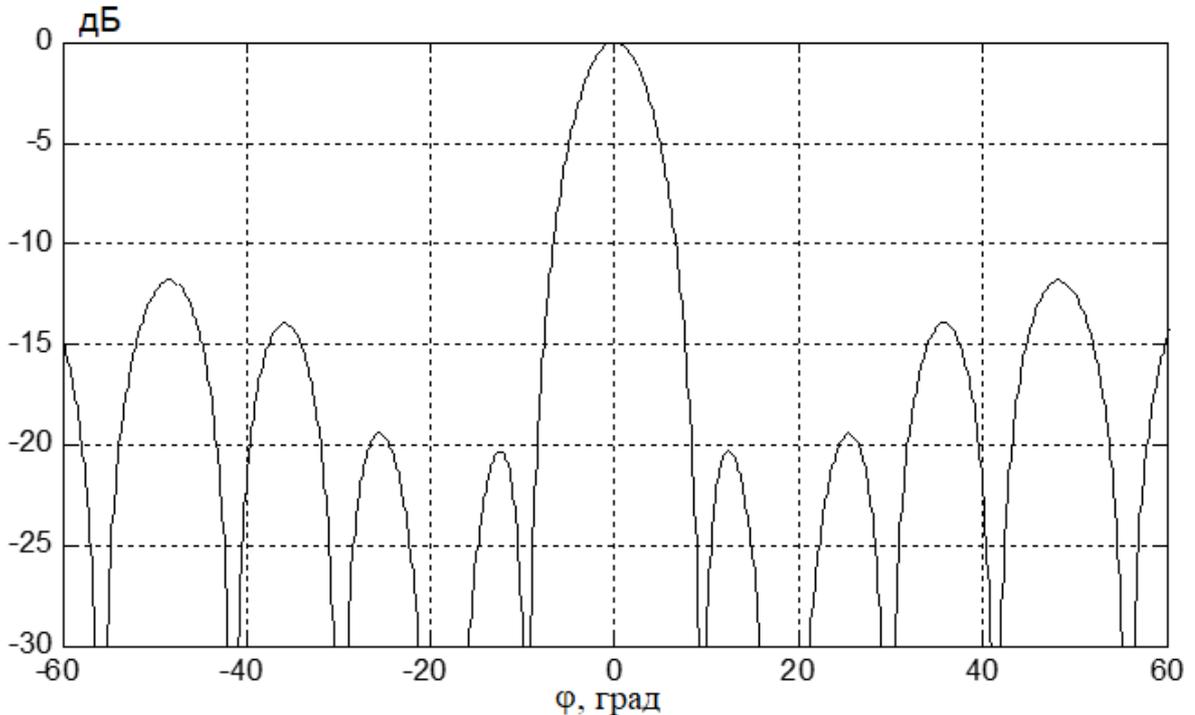


Рисунок 3.8 ДН АР в азимутальной плоскости

Пространственная обработка сигналов производилась в два этапа. Вначале выполнялось обычное сканирование ДН АР, показанной на Рисунок 3.8, во всей заданной области азимутальных углов. В результате находилась одна или несколько подобластей, в которых имелись цели. Затем сверхразрешающие методы применялись для оценки числа целей и их координат в каждой из таких подобластей. При выбранных в экспериментах расположениях угловых отражателей получалась одна подобласть.

Для обработки полученных данных использовались спектральный и корневой методы минимального многочлена, а также корневой метод MUSIC в совокупности с критерием MDL. Для сокращения объёма вычислений использовался обычный корневой метод минимального многочлена, основанный на поиске корней многочлена (2.1.7) 6-ой степени, а также его модификация, основанная на по-

иске корней усеченного многочлена (2.1.11) 3-ей степени. При этом в (2.1.11) был выбран первый столбец матрицы-проектора на шумовое подпространство.

В общем, алгоритм пространственной обработки сигналов в радиолокаторе состоял из нескольких шагов:

1. Сканирование лучом АР в азимутальной области.
2. Реализация пространственного сглаживания.
3. Оценка числа целей с помощью метода минимального многочлена или критерия MDL (при использовании метода MUSIC).
4. Оценка проектора на шумовое подпространство с помощью метода минимального многочлена или метода MUSIC.
5. Определение углового положения целей с помощью спектрального и корневого методов минимального многочлена, а также на основе корневого метода MUSIC.

Полученные в результате многократных независимых экспериментов, выполненных в каждом сценарии (от 233 до 1063), данные (оценка числа целей и их угловое положение) обрабатывались с помощью методов математической статистики.

Статических сценариев было 13. Рассмотрим вначале первые 9 сценариев. В первом из них был один уголкового отражатель, расположенный по нормали к АР. В остальных 8 сценариях имелись два отражателя, расположенные симметрично относительно нормали к АР. Для каждого сценария задавались дальность R до уголков и расстояние $2D$ между ними. Схема экспериментальных сценариев показана на Рисунке 3.9.

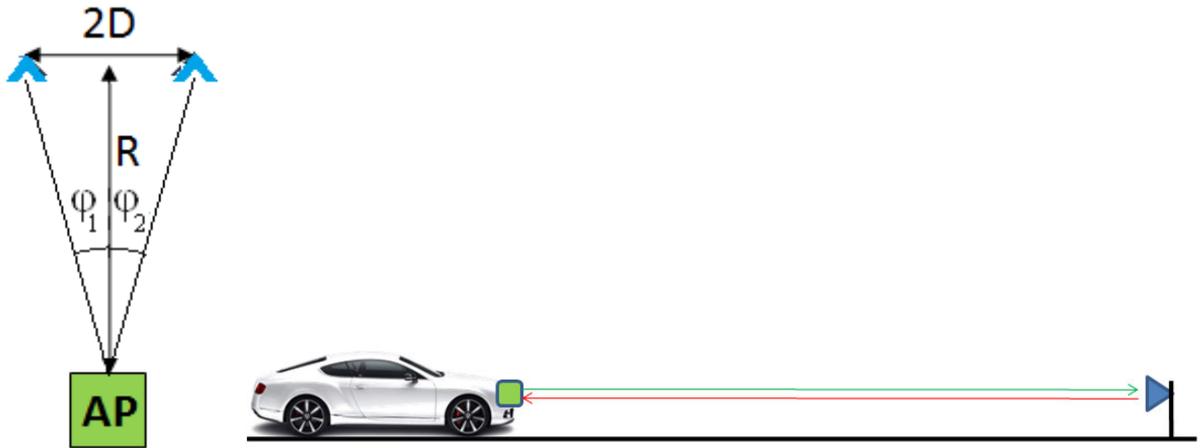


Рисунок 3.9 Схема экспериментальных сценариев, вид сверху (слева) и сбоку (справа)

Параметры первых 9 статических сценариев представлены в Таблица 3.1, где $\delta\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2| / \Delta\varphi_{beam}$ – угловое расстояние между уголковыми отражателями, вычисленное из геометрических данных и нормированное к ширине $\Delta\theta_{beam}$ луча AP по уровню половинной мощности, равной 7.7 град. Видно, что соответствующая величина $\delta\varphi$ была значительно меньше ширины луча $\Delta\theta_{beam}$ во всех статических сценариях.

Таблица 3.1 Параметры статических сценариев

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
D , м	-	1.5	1.5	2.0	1.8	1.8	2.0	2.3	2.8
R , м	63	63	63	78	63	63	63	63	63
$\Delta\varphi$	-	2.7	2.7	2.9	3.3	3.3	3.7	4.2	5.1
$\delta\varphi$	-	0.35	0.35	0.37	0.42	0.42	0.47	0.54	0.65
$\delta\varphi_{ss}$	-	0.23	0.23	0.25	0.28	0.28	0.31	0.36	0.44

Отметим, что непосредственно оценка угловых координат близкорасположенных источников производилась после процедуры пространственного сглаживания, которая приводит к расширению луча в отдельных подрешетках. Поэтому угловое расстояние между уголковыми отражателями можно нормировать также на ширину луча $\Delta\varphi_{beam-ss}$ подрешеток, полученных в результате пространственного сглаживания. В нашем случае эта ширина увеличивается до $\Delta\varphi_{beam-ss} = 11.5$

град, то есть в 1.5 раза. Соответствующая нормированная величина $\delta\varphi_{ss}$ становится в 1.5 раза меньше (см. последнюю строку в Таблица 3.1)

При проведении экспериментов плоскость AP ориентировалась приблизительно, поэтому уголки располагались неточно относительно нормали к AP и дальности до уголков могли различаться на величину превышающую длину волны (3.9 мм). Следовательно, фаза коэффициента корреляции вторичных источников сигналов в каждом статическом сценарии принимала постоянное значение, которое было произвольным в интервале $[0 \div 2\pi]$ для разных сценариев. Поэтому, источники сигналов были коррелированы с некоторым (неизвестным) коэффициентом корреляции, близким к единице по амплитуде и имеющим произвольную фазу.

Оценка числа источников сигналов. Оценка числа источников при обработке экспериментальных результатов производилась с помощью критерия MDL и методом минимального многочлена.

На Рисунок 3.10 и Рисунок 3.11 представлены экспериментальные гистограммы для среднеквадратичной ошибки аппроксимации минимального многочлена КМ сигналов в AP в случае одного ($J = 1$) и двух ($J = 2$) источников, соответственно. На гистограммах изображены три метрики $I^{(1)}$, $I^{(2)}$ и $I^{(3)}$. Гистограмма для $J = 1$ строилась по данным, полученным при наличии одного уголка, расположенного по нормали к AP (сценарий 1), а для $J = 2$ – по объединённым данным сценариев 2–9. Средние значения и СКО для метрик представлены в Таблица 3.2. Эти результаты согласуются с приведенными выше теоретическими данными (см. подраздел 1.1). Наличие нескольких максимумов в гистограмме для одной и той же метрики при двух источниках объясняется разбросом ОСШ в различных сценариях.

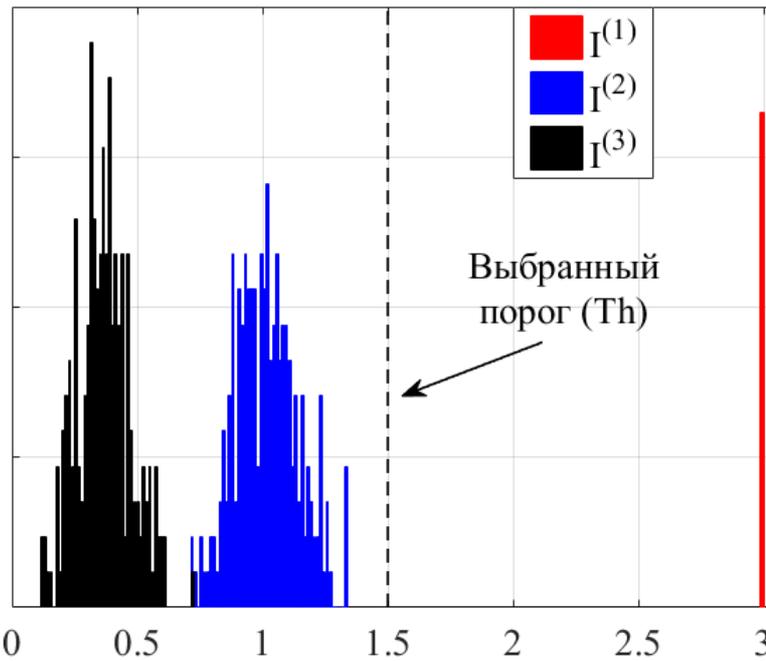


Рисунок 3.10 Гистограммы для метрик метода минимального многочлена (одна цель)

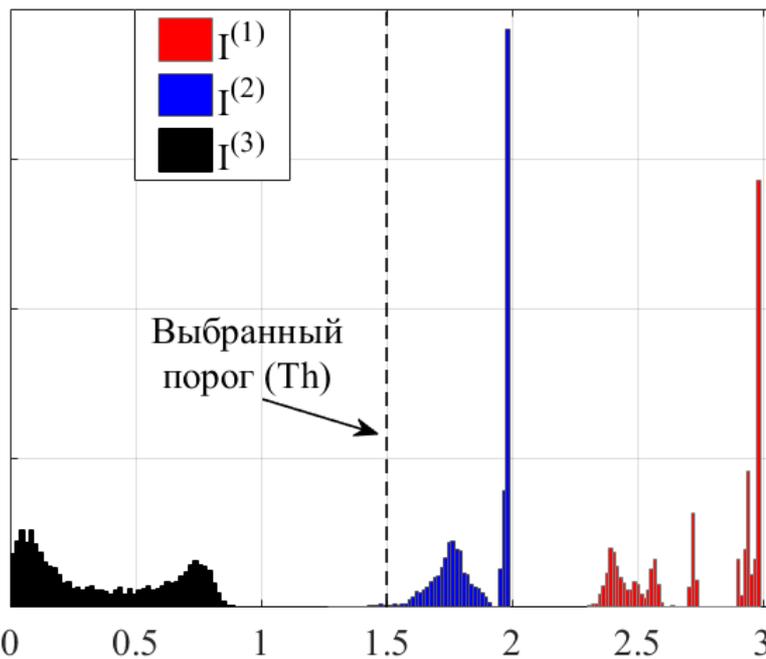


Рисунок 3.11 Гистограммы для метрик метода минимального многочлена (две цели)

Таблица 3.2 Статистические параметры метрик

	$I^{(1)}$		$I^{(2)}$		$I^{(3)}$	
	$\langle I^{(1)} \rangle$	СКО	$\langle I^{(2)} \rangle$	СКО	$\langle I^{(3)} \rangle$	СКО
$J=1$	3.0	0.0	1.0	0.1	0.4	0.1
$J=2$	2.8	0.2	1.9	0.1	0.4	0.3

Исходя из полученных результатов, для обработки экспериментальных данных был выбран порог $Th = 1.5$. Такой порог, как будет показано ниже, позволил достигнуть наиболее высокой вероятности правильного определения числа источников во всех экспериментах. Отметим, что формула (1.2.12) при $N_{ef} = 4$ и $L_{ef} = 5$, $\chi = 0$, дает близкое значение порога, равное 1.67.

Процент правильной оценки числа источников приведен в Таблица 3.3 для метода минимального многочлена и критерия MDL. В каждом сценарии проводилось достаточно большое число независимых измерений (от 233 до 1063) и затем результаты усреднялись. Видно, что метод минимального многочлена обеспечил значительно более высокую вероятность правильной оценки числа источников по сравнению с критерием MDL.

Таблица 3.3 Процент правильной оценки числа целей

Сценарий	2	3	4	5	6	7	8	9
$\delta\varphi$	0.35	0.35	0.37	0.42	0.42	0.47	0.54	0.65
$\delta\varphi_{ss}$	0.23	0.23	0.25	0.28	0.28	0.31	0.36	0.44
Метод минимального многочлена, %	100	100	100	100	100	100	100	100
MDL, %	99	63	95	48	–	100	–	64

Точность пеленгации целей. Результаты пеленгации целей для статических сценариев приведены в Таблица 3.4. При пеленгации использовался «усечённый» полином (2.1.11) третьей степени. Его корни искались аналитически с помощью известных формул [66]. При проведении экспериментов плоскость антенной решётки ориентировалась приближенно, поэтому в таблице для каждого сценария приведены оценки среднего углового разнесения $\langle \Delta\varphi \rangle = |\varphi_1 - \varphi_2|$ угловых отражателей и среднеквадратичное отклонение (СКО) оценки координат каждого уголка.

Таблица 3.4 Результаты пеленгации для «усечённого» полинома

Сценарий	Параметры			Корневой метод минимального многочлена		Корневой MUSIC	
	$\Delta\varphi$	$\delta\varphi$	$\delta\varphi_{ss}$	$\langle\Delta\varphi\rangle$	СКО	$\langle\Delta\varphi\rangle$	СКО
1	-	-	-	-	0.04	-	0.05
2	2.7	0.35	0.23	1.76	0.18	1.75	0.18
3	2.7	0.35	0.23	2.63	0.25	2.86	0.10
4	2.9	0.37	0.25	3.70	0.18	3.70	0.18
5	3.3	0.42	0.28	2.24	0.19	2.22	0.18
6	3.3	0.42	0.28	3.29	0.12	-	-
7	3.7	0.47	0.31	3.94	0.07	3.94	0.07
8	4.2	0.54	0.36	4.38	0.05	-	-
9	5.1	0.65	0.44	5.09	0.14	5.25	0.07

Из полученных результатов следует, что при использовании полинома третьей степени средняя ошибка оценки углового разнесения отражателей, усредненная по сценариям 2–9, составила 0.59° для метода минимального многочлена и 0.68° для корневого метода MUSIC, а СКО оценки координат отражателей получились равными 0.16° и 0.14° , соответственно. Различие в полученных результатах в разных сценариях можно объяснить различным входным ОСШ и наличием местных помех в том же элементе дальности и скорости, но с отличающимся угловым положением. Положение корней усечённого полинома на комплексной плоскости изображено на Рисунок 3.12 для сценариев 2 и 3. На рисунке отмечена единичная окружность $|z| = 1$, а также шумовые (зеленый цвет) и сигнальные (сиреневый цвет) корни полинома.

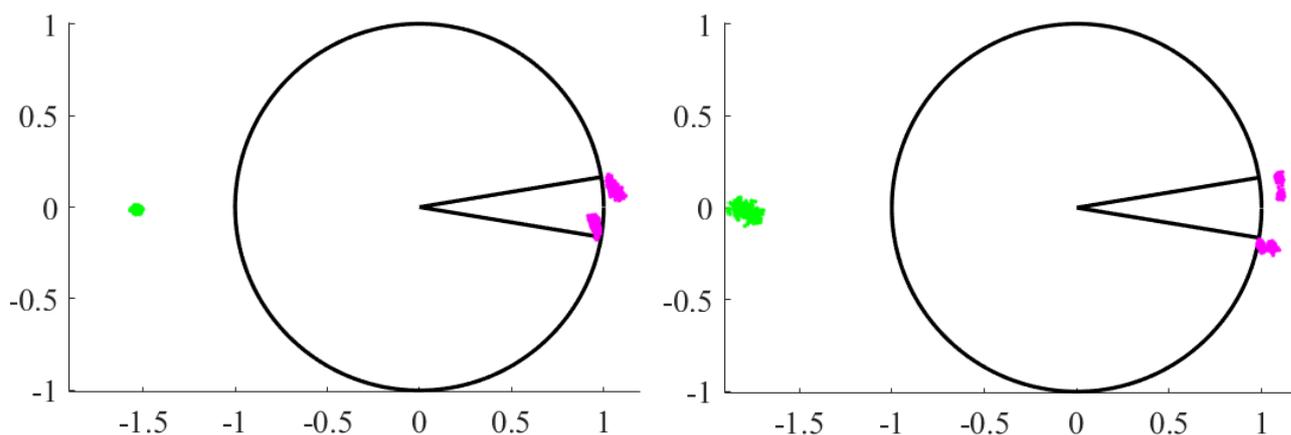


Рисунок 3.12 Положение корней усечённого полинома (сценарии 2 и 3)

Для проверки работы предложенного корневого подхода с усечённым полиномом (2.1.11) экспериментальные данные были также обработаны с помощью стандартного корневого подхода на основе полного полинома (2.1.7) шестой степени. Результаты приведены в Таблица 3.5.

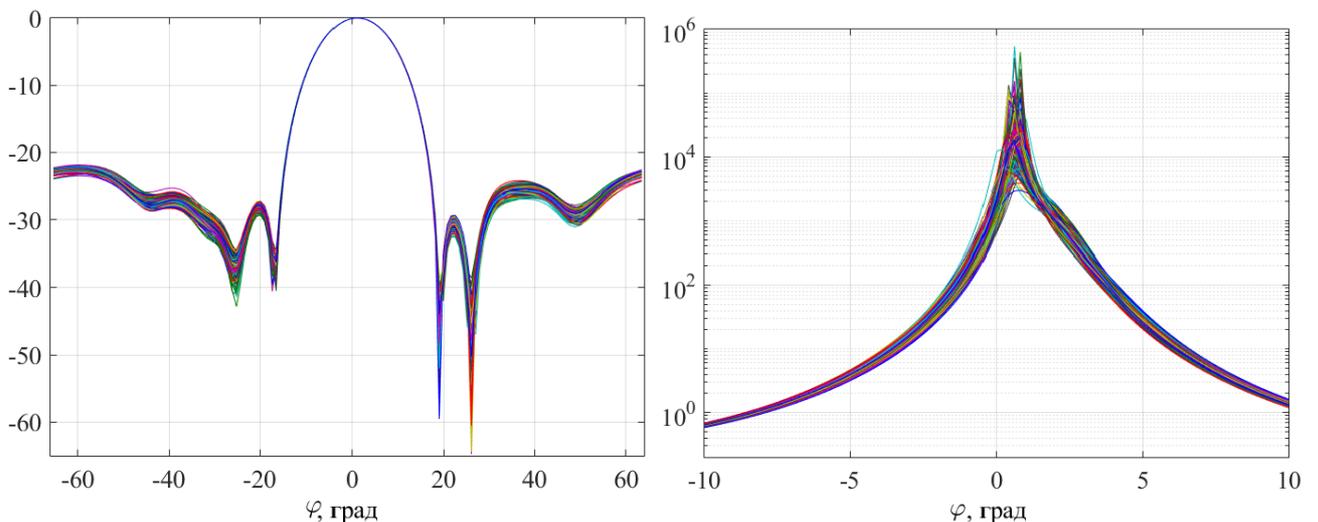
Таблица 3.5 Результаты пеленгации для полного полинома

Сценарий	Параметры		Корневой метод минимального многочлена		Корневой MUSIC	
	$\Delta\varphi$	$\delta\varphi_{ss}$	$\langle\Delta\varphi\rangle$	СКО	$\langle\Delta\varphi\rangle$	СКО
1	-	-	-	0.03	-	0.04
2	2.7	0.23	2.09	0.15	2.09	0.15
3	2.7	0.23	2.13	0.22	2.16	0.16
4	2.9	0.25	3.26	0.25	3.25	0.24
5	3.3	0.28	2.97	0.17	2.93	0.16
6	3.3	0.28	2.28	0.16	-	-
7	3.7	0.31	4.01	0.07	3.95	0.07
8	4.2	0.36	4.44	0.05	-	-
9	5.1	0.44	5.11	0.14	5.27	0.07

При использовании полинома шестой степени средняя ошибка равна 0.52° (корневой метод минимального многочлена) и 0.41° (корневой метод MUSIC), а СКО практически не изменилась и составила 0.16° и 0.15° , соответственно.

Из представленных результатов видно, что во всех сценариях удалось добиться углового разрешения близкорасположенных источников с помощью метода минимального многочлена. Точность пеленгации корневого метода минимального многочлена близка к точности корневого метода MUSIC. Эффективность пеленгации методом минимального многочлена с «усечённым» полиномом практически совпала с эффективностью стандартного корневого метода с полным полиномом.

Рассмотрим экспериментальные результаты для других статических сценариев (сценарии 10–13). В этих 4 сценариях угловые положения близкорасположенных источников сигналов были, соответственно, равны $\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=2.5^\circ$; $\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=2.9^\circ$; $\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=3.6^\circ$; $\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=4.6^\circ$. При ширине луча полной АР равной 7.7° (ширина луча подрешеток при пространственном сглаживании равна 11.5°) источники были неразрешимыми по Рэлею. Приведем сравнительные результаты для метода сканирования главным лучом диаграммы направленности полной АР (метод Фурье) [2]), спектрального и корневого методов минимального многочлена (с усечённым полиномом (2.1.11) третьей степени). В левой верхней части рисунков: Рисунок 3.13, Рисунок 3.14, Рисунок 3.15, и Рисунок 3.16 представлены результаты, полученные сканированием лучом АР, в правой верхней части – спектральным методом минимального многочлена, в нижней части – корневым методом минимального многочлена.



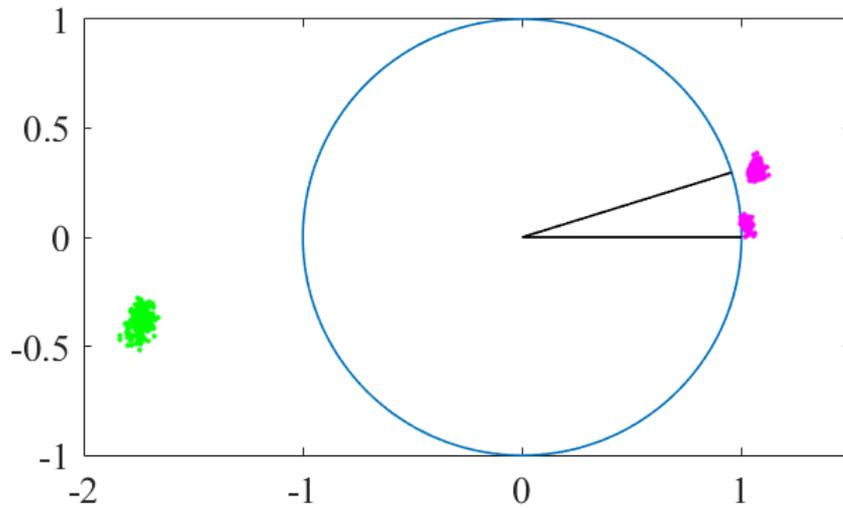


Рисунок 3.13 Сканирование лучом АР (слева, сверху), спектральный (справа, сверху) и корневой (внизу) методы минимального многочлена ($\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=2.5^\circ$)

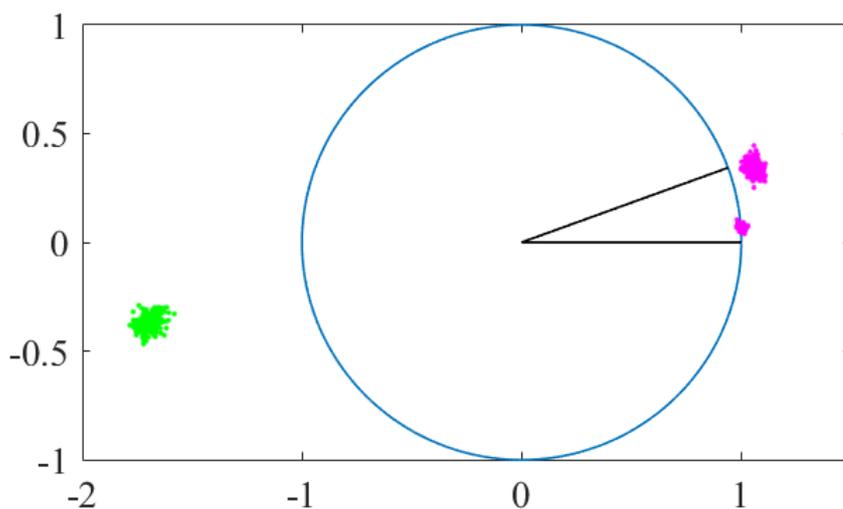
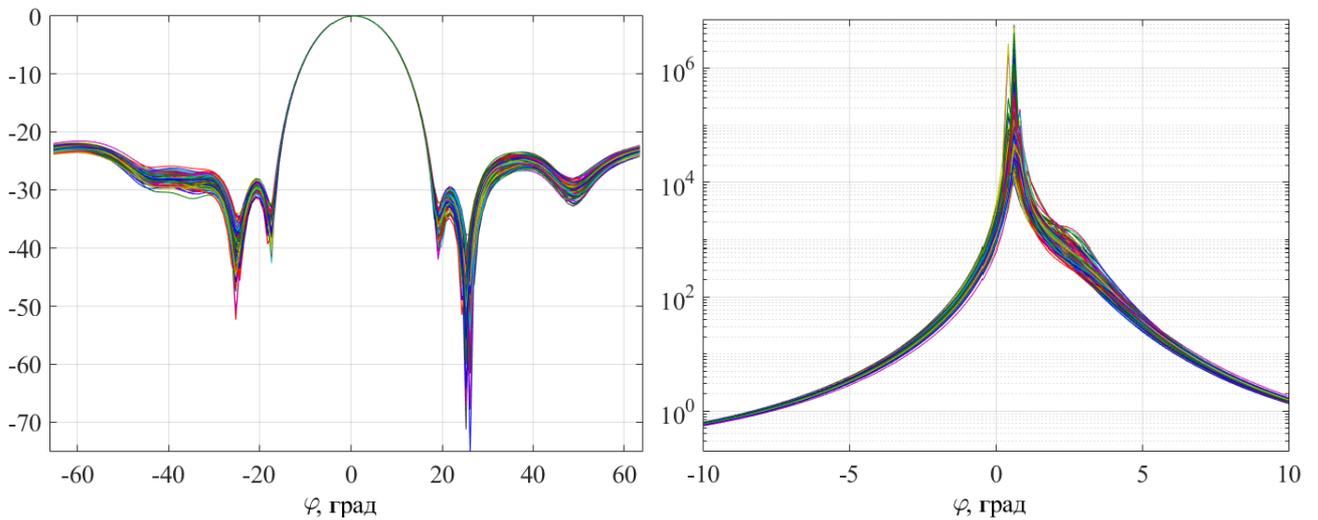


Рисунок 3.14 Сканирование лучом АР (слева, сверху), спектральный (справа, сверху) и корневой (внизу) методы минимального многочлена ($\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=2.9^\circ$)

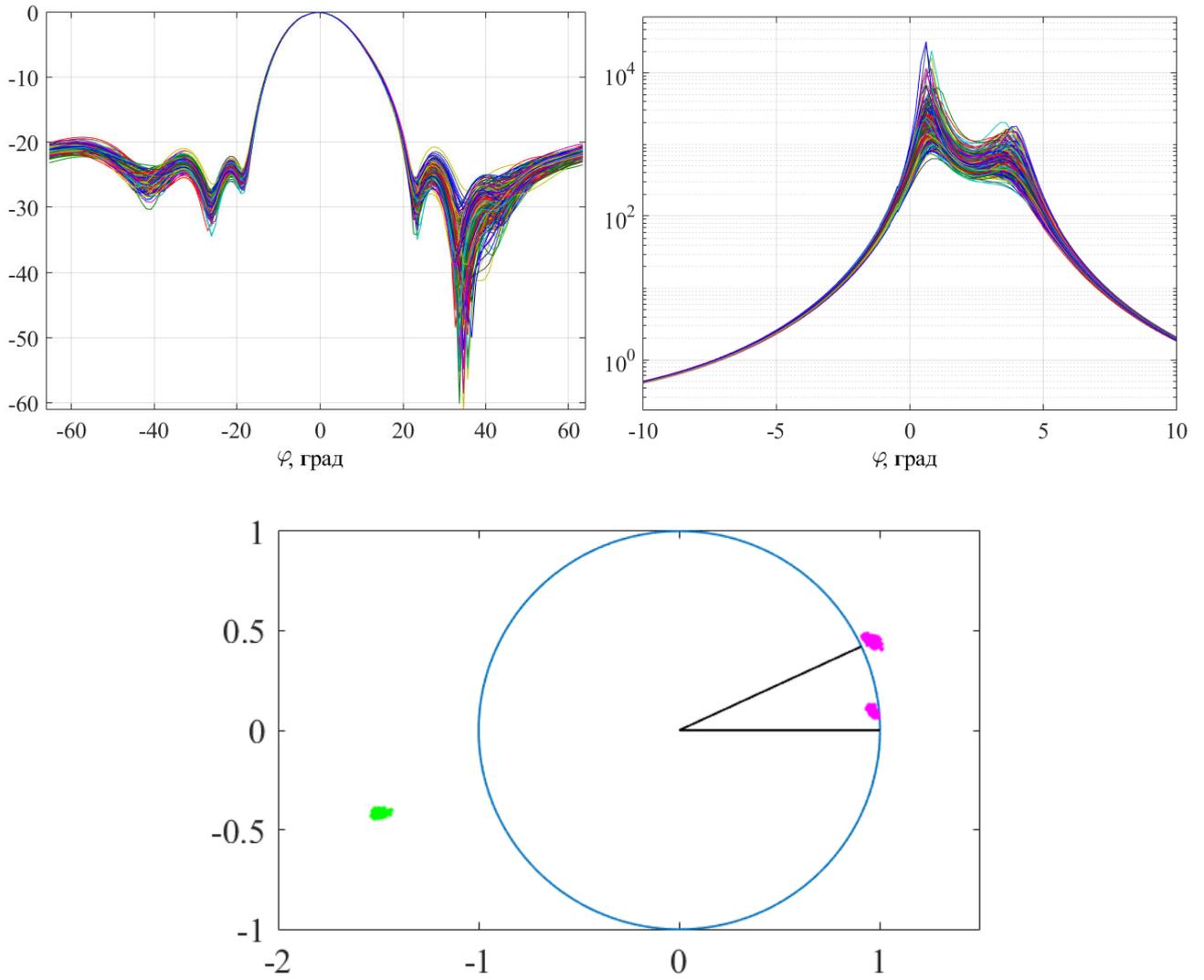
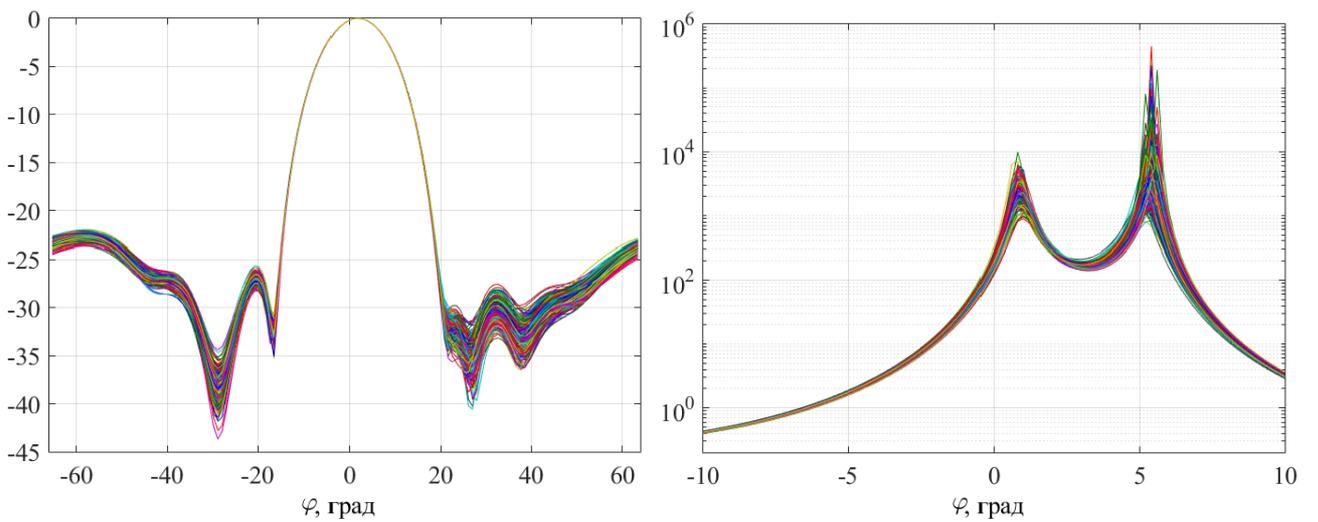


Рисунок 3.15 Сканирование лучом АР (слева, сверху), спектральный (справа, сверху) и корневой (внизу) методы минимального многочлена ($\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=3.6^\circ$)



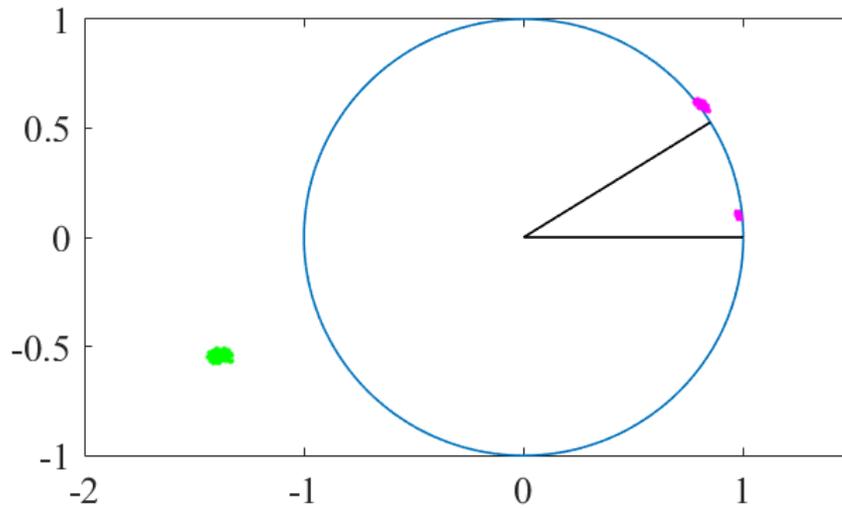


Рисунок 3.16 Сканирование лучом AP (слева, сверху), спектральный (справа, сверху) и корневой (внизу) методы минимального многочлена ($\varphi_1=0^\circ$, $\varphi_2=4.6^\circ$)

Из этих результатов следует, что сканирование лучом AP не обеспечило угловое разрешение этих источников. Спектральный метод минимального многочлена не разрешил источники при их угловом расстоянии 2.5° и 2.9° (сценарии 10 и 11) и разрешил их при угловом расстоянии 3.6° и 4.6° (сценарии 12 и 13). Корневой метод минимального многочлена обеспечил разрешение источников во всех четырех сценариях.

Оценка углового расстояния между источниками составила 1.83, 2.04, 2.85 и 4.47 град. для сценариев 10, 11, 12 и 13, соответственно. Следовательно, были получены меньшие величины по сравнению с реальными, что является характерным для сверхразрешающих методов.

СКО измерения координат источников сигналов, полученная с помощью корневого метода минимального многочлена, составила 0.16, 0.17, 0.13 и 0.09 град. для сценариев 10, 11, 12 и 13, соответственно, то есть не превышала 2% от ширины луча AP.

3.3 Динамические сценарии (полигон)

В динамических сценариях в качестве целей использовались либо уголко-вые отражатели, либо легковые автомобили. Автомобиль с радиолокатором приближался к целям по прямой линии со скоростью примерно 5 км/ч. Для каждого сценария задавалось расстояние между уголками или автомобилями (целями). Координаты уголков равнялись ± 1.5 м (сценарий 1) и ± 2.0 м (сценарий 2). Расстояние между автомобилями (целями) составляло 4 м (сценарии 3 и 4, при этом в сценарии 4 автомобили располагались не симметрично относительно нормали к АР радиолокатора). При обработке экспериментальных данных для визуального анализа работы применяемых методов пеленгации были построены треки целей в декартовой системе координат.

Для оценки эффекта сверхразрешения обработка экспериментальных данных была проведена методом сканирования главным лучом полной АР (метод Фурье) [2], а также методами минимального многочлена. Результаты обработки экспериментальных данных представлены на Рисунок 3.17 (сценарий 1) и Рисунок 3.18 (сценарий 2). На левой части рисунков представлены результаты, полученные сканированием АР, в центре – спектральным методом минимального многочлена, в правой части – корневым методом минимального многочлена (с усечённым полиномом). Синим цветом отмечены случаи, когда пеленговалось две цели, красным – одна.

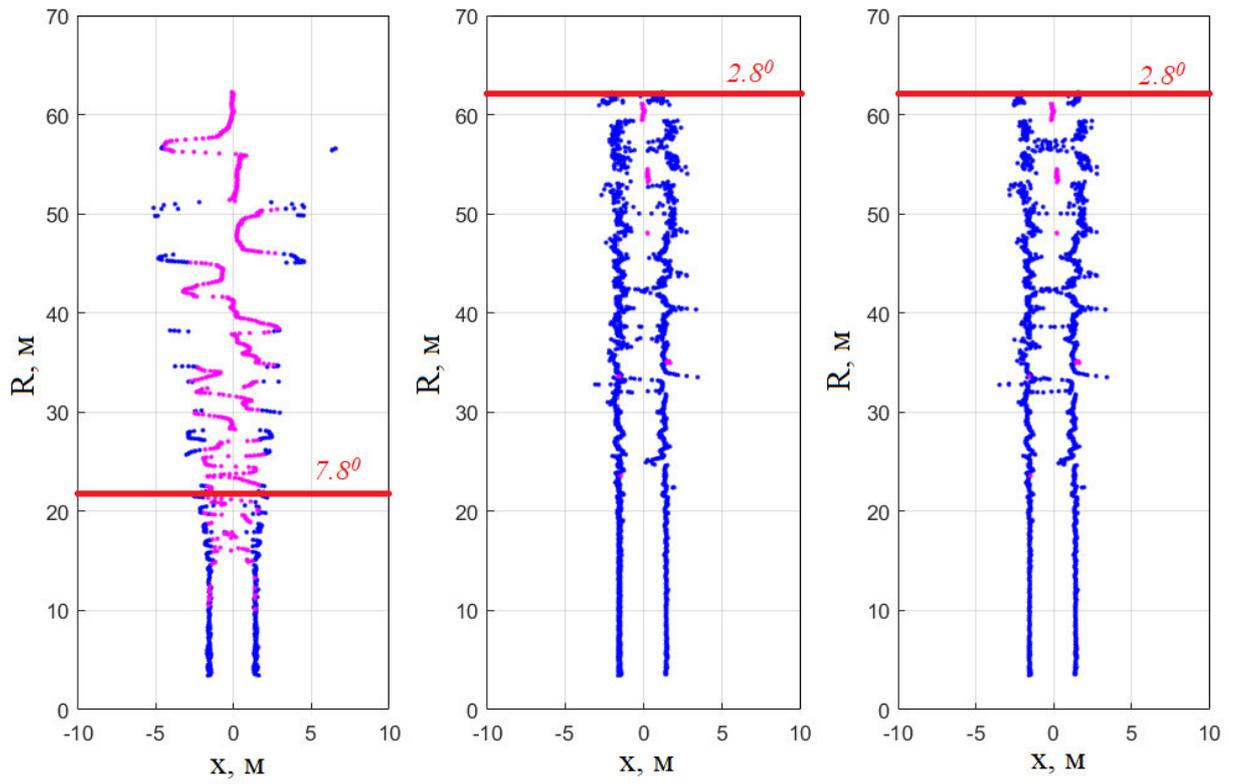


Рисунок 3.17 Оценённое положение целей для сценария 1. Сканирование лучом AP (слева), спектральный (в центре) и корневой (справа) методы минимального многочлена

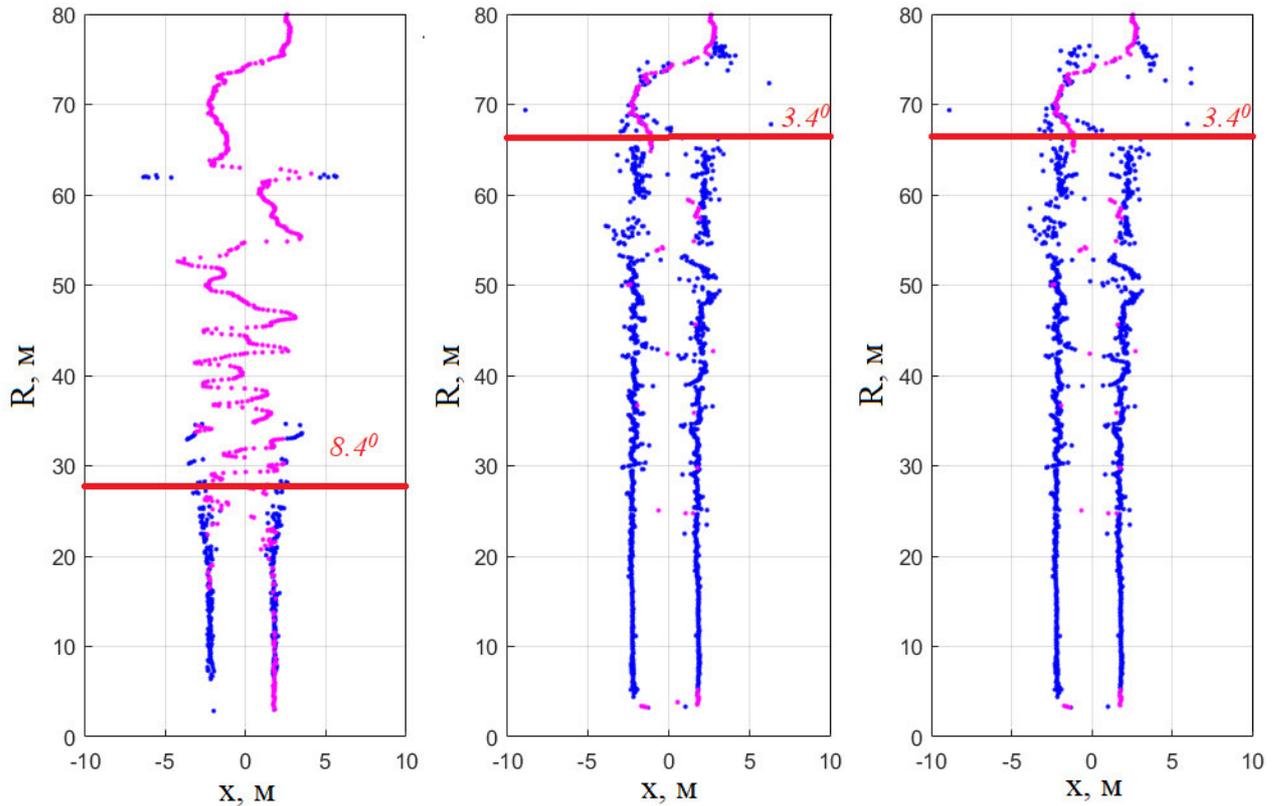


Рисунок 3.18 Оценённое положение целей для сценария 2. Сканирование лучом AP (слева), спектральный (в центре) и корневой (справа) методы минимального многочлена

Из представленных результатов следует, что оба метода минимального многочлена дали практически одинаковые результаты. Для сценария 1 разрешение обеспечивалось на всех дальностях до $R=63$ м (угловое расстояние $\Delta\varphi/\Delta\varphi_{beam} = 0.35$, $\Delta\varphi/\Delta\varphi_{beam-ss} = 0.23$). Для сценария 2 эффект разрешения наступал при $R = 66$ м (угловое расстояние $\Delta\varphi/\Delta\varphi_{beam} = 0.45$, $\Delta\varphi/\Delta\varphi_{beam-ss} = 0.30$). Процент правильной оценки числа источников методами минимального многочлена составила 96% и 87% для сценариев 1 и 2, соответственно. Угловое расстояние между целями, равное ширине луча полной AP $\Delta\theta_{beam} = 7.7^\circ$, достигается при $R_0 \approx 22$ м и $R_0 \approx 29$ м для сценариев 1 и 2, соответственно. На рисунке видно, что устойчивое разрешение целей методом сканирования главным лучом AP выполняется при расстояниях R близких к указанным значениям.

Ухудшение точности определения положения уголков на некоторых дальностях, например, при $R=55\div 60$ м на Рисунок 3.17, объясняется уменьшением ве-

личины ОСШ из-за интерференции прямого и отраженного от земли лучей. Зависимость ОСШ от расстояния до целей представлена на Рисунок 3.19.

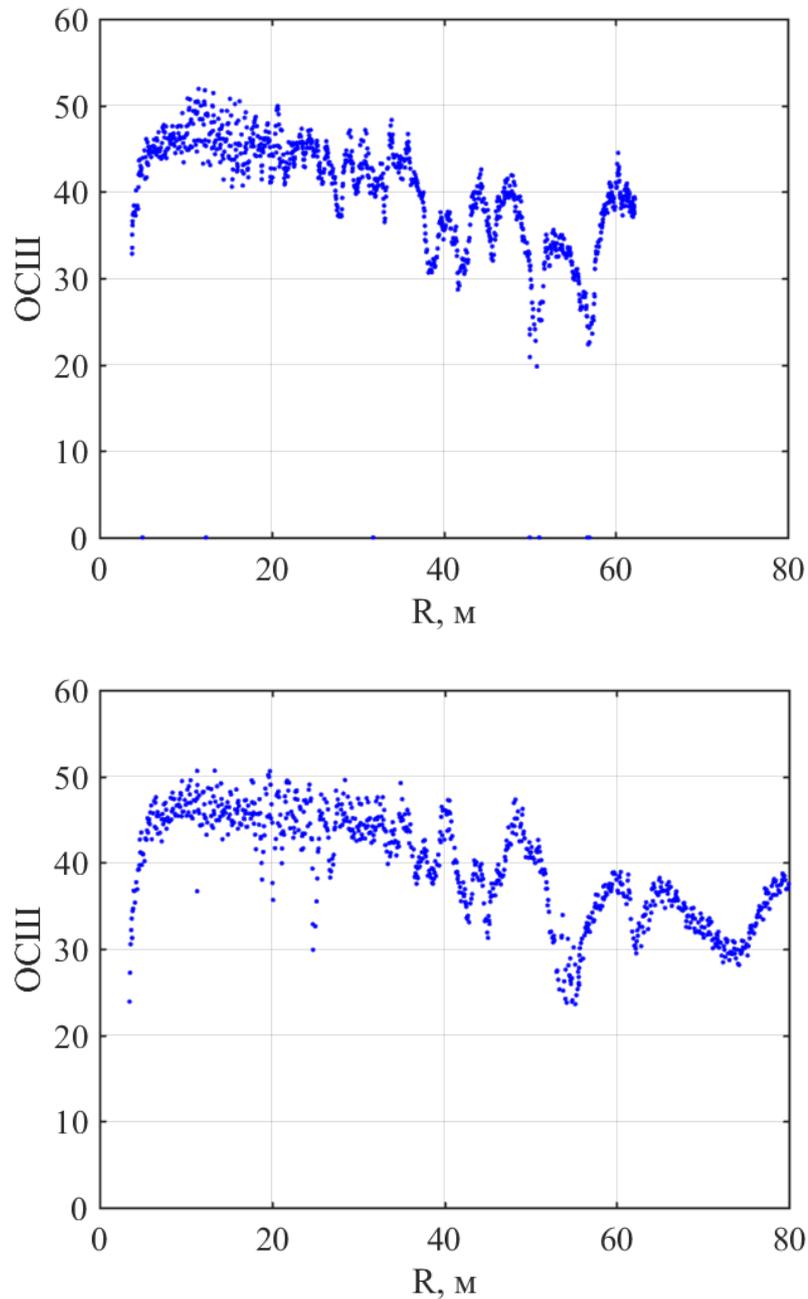


Рисунок 3.19 Зависимость ОСШ (дБ) от расстояния до целей-уголков.
Сценарии 1 (сверху) и 2 (снизу)

Результаты обработки экспериментальных данных сверхразрешающим корневым методом минимального многочлена (с усечённым полиномом) представлены на Рисунок 3.20 и Рисунок 3.21 для целей-автомобилей. Видно, что обеспечивается разрешение целей на всех дальностях. Отметим, что разброс дорожек увеличился по сравнению с сценариями с точечными целями. Это можно

объяснить тем, что автомобили являются распределенными целями, для которых характерны флуктуации центра эффективной поверхности отражения и, следовательно, флуктуации ОСШ при движении радара [2].

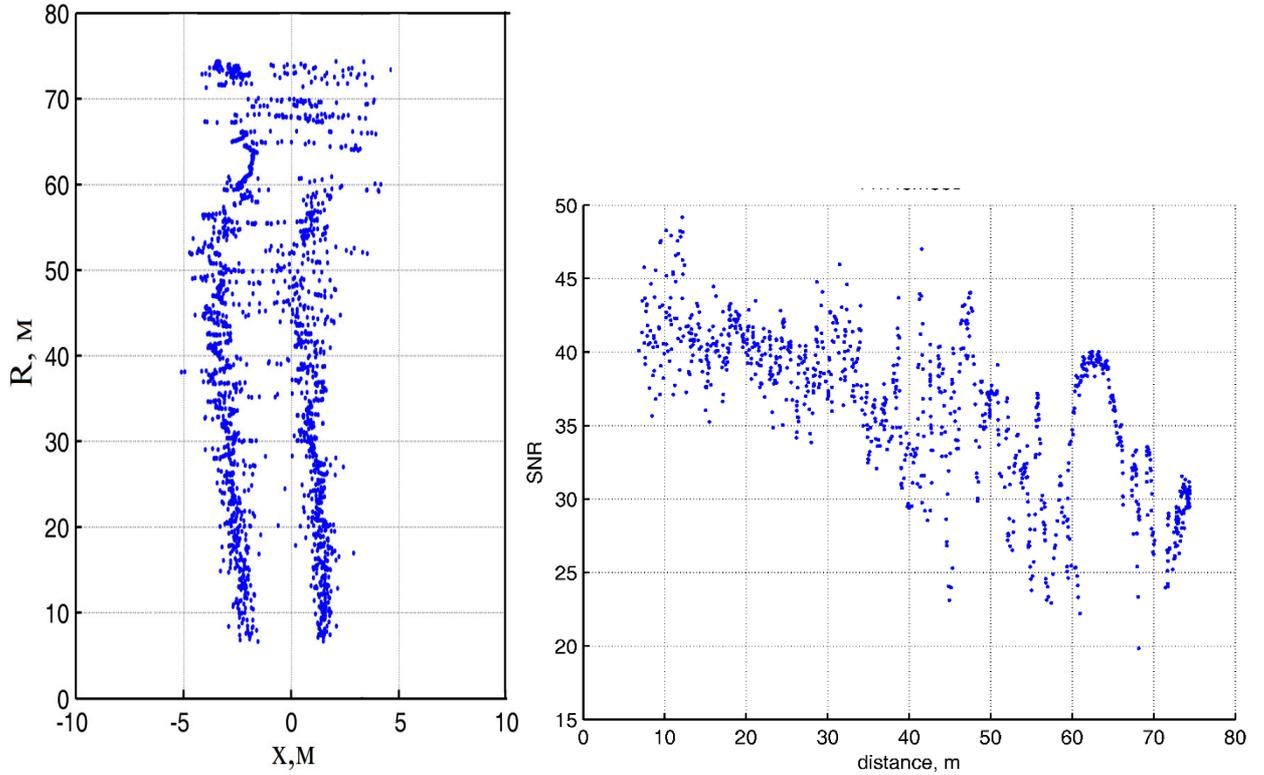


Рисунок 3.20 Оценённое положение целей-автомобилей и зависимость ОСШ от расстояния до целей-автомобилей. Сценарий 3

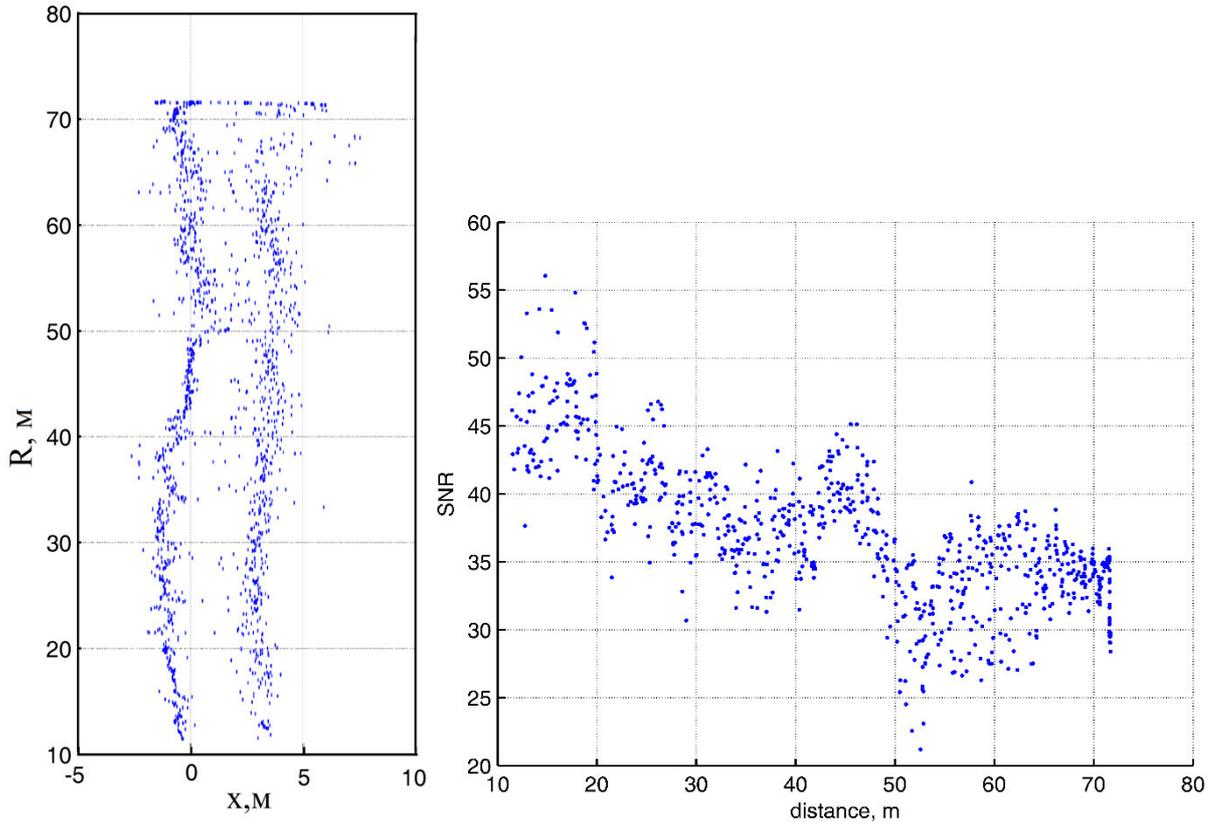


Рисунок 3.21. Оценённое положение целей-автомобилей в декартовой системе координат и зависимость ОСШ от расстояния до целей-автомобилей. Сценарий 4

3.4 Сценарии на реальной дороге

Часть экспериментов была проведена на реальной дороге в городских условиях. На Рисунок 3.22 показана дорожная ситуация с двумя автомобилями, находящимися на одной дальности и движущимися с одинаковыми скоростями. На Рисунок 3.23 (слева) показана плоскость «Дальность–Азимут», полученная на основе сканирования лучом AP, а на этом рисунке справа – эта же плоскость, полученная с использованием корневого метода минимального многочлена. При ширине полосы движения равной ≈ 350 см угловое расстояние между центрами автомобилей составляет примерно 16 град. Видно, что сканирование лучом AP не разрешает цели, а корневой метод минимального многочлена обеспечивает разрешение целей (внизу, справа). Аналогично построены Рисунок 3.24 и Рисунок 3.25 для другой дорожной ситуации, при которой угловое расстояние между центрами автомобилей составляет примерно 3–4 град. Корневой метод минимального

многочлена обеспечивает разрешение целей, в то время как сканирование лучом AP эти цели не разрешает.



Рисунок 3.22 Дорожная ситуация с двумя автомобилями

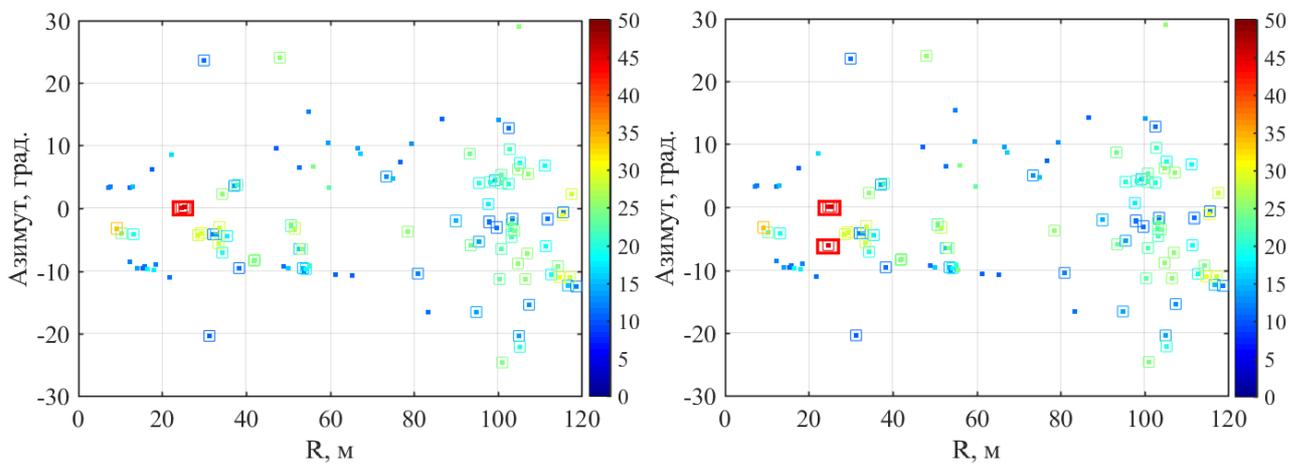


Рисунок 3.23 Цели на плоскости «Дальность–Азимут» при сканировании лучом AP (слева) и при использовании метода минимального многочлена (справа)



Рисунок 3.24 Дорожная ситуация с двумя автомобилями

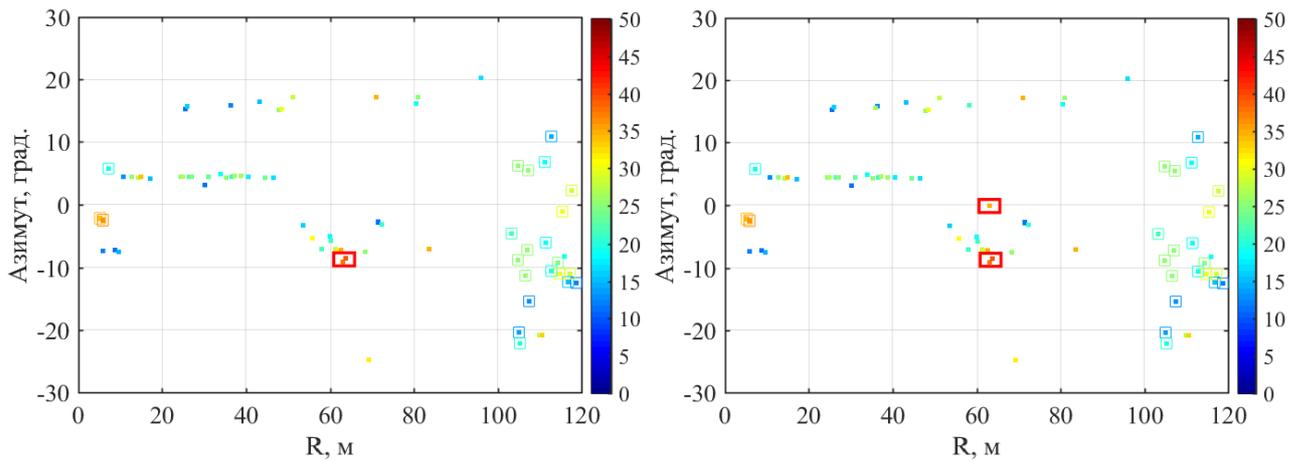


Рисунок 3.25 Цели на плоскости «Дальность–Азимут» при сканировании лучом АР (слева) и при использовании метода минимального многочлена (справа)

3.5 Заключение по третьей главе

В третьей главе приведены результаты натуральных экспериментов, полученные на автомобильном радиолокаторе миллиметрового диапазона с ЛЧМ широкополосными импульсами.

В первом разделе анализируются особенности временной обработки сигналов, в результате которой производится обнаружение целей и находится поло-

жение целей на плоскости «Дальность–Доплер». Рассмотрена процедура формирования виртуальных приемных антенн, в результате которой в АР, состоящей из 3 передающих и 4 приемных антенн была сформирована приемная АР радара, состоящая из 2 строк (7 антенн в верхней строке и 4 антенны в нижней строке) с шириной луча 7.7 град. В результате пространственного (прямого и обратного) сглаживания корреляционной матрицы входного процесса в такой АР было сформировано 10 подрешеток (5 для прямого и 5 обратного сглаживаний) по 4 элемента в каждой с шириной луча 11.5 град. Отмечено, что проведенные эксперименты характеризовались высоким уровнем коррелированности сверхразрешаемых источников сигналов и предельно короткой длиной (одна выборка) входного процесса в приемных антеннах.

Во втором разделе дано краткое описание статических сценариев с неподвижными источниками отраженных сигналов и радиолокатором и приведены экспериментальные результаты по сверхразрешению двух близкорасположенных источников сигналов. Обработка полученных данных производилась с помощью корневого метода минимального многочлена, критерия MDL и корневого метода MUSIC. Показано, что метод минимального многочлена обеспечивает значительно более высокую вероятность правильной оценки числа источников по сравнению с критерием MDL во всем рассматриваемом интервале углового расстояния между источниками. С его помощью во всех сценариях удалось получить процент правильной оценки числа близкорасположенных источников равный 100 %, то есть добиться их углового сверхразрешения. Точность пеленгации корневого метода минимального многочлена близка к корневому методу MUSIC при условии, что метод MUSIC «знал» истинное число источников.

В третьем разделе рассмотрены результаты экспериментов для динамических сценариев, когда автомобиль с радиолокатором приближался к целям, в качестве которых использовались уголкового отражатели или легковые автомобили. Для оценки эффекта сверхразрешения обработка экспериментальных данных была проведена методом сканирования главным лучом диаграммы направленности полной АР (метод Фурье), спектральным и корневым методами минимального

многочлена. Показано, что оба метода минимального многочлена дали практически одинаковые результаты и обеспечили сверхразрешение источников до углового расстояния ≈ 3 град. по сравнению с ≈ 8 град. для методом сканирования.

В четвертом разделе рассмотрены сценарии на реальной дороге, когда два автомобиля–цели, находились на соседних полосах дороги и имели одинаковую скорость (не разрешались в плоскости «Дальность – Скорость») и также не разрешались при сканировании лучом AP. Корневой метод минимального многочлена обеспечил разрешение этих автомобилей целей для дорожной ситуации, при которой угловое расстояние между их центрами составляло примерно 3–4 град.

Таким образом, в случае предельно короткого входного процесса в AP (одна выборка) и высокой корреляции близкорасположенных двух источников корневой метод минимального многочлена обеспечивал:

- процент правильной оценки числа источников равный 100% во всех сценариях, и существенно более высокий по сравнению с критерием MDL;
- сверхразрешение источников при угловом расстоянии в 4–5 раз меньшем ширины диаграммы направленности полной AP или в 6–7 раз меньшем ширины диаграммы направленности подрешеток, сформированных в результате пространственного сглаживания.

Эффективность данного метода по точности оценки координат источников сигналов практически совпала с эффективностью корневого метода MUSIC при условии, что метод MUSIC «знал» истинное число источников сигналов.

4 Заключение

Основные результаты диссертационной работы и следующие из них теоретические и практические выводы могут быть сформулированы следующим образом:

1. Проведено обобщение метода минимального многочлена КМ в элементах АР, используемого для оценки числа «сверхразрешаемых» некоррелированных источников сигналов. Предложенный подход к выбору порога при аппроксимации минимального многочлена точной КМ обеспечивает высокую эффективность по оценке числа источников в случае произвольной (в том числе и короткой) выборке входного процесса.

2. Предложен «сверхразрешающий» корневой метод минимального многочлена и показана его высокая эффективность при некоррелированных источниках сигналов и произвольной длине выборки входного процесса в АР. Оценка угловых координат источников основана на поиске корней соответствующих полиномов в рамках единой (одноэтапной) вычислительной процедуры.

3. Выполнено обобщение спектрального и корневого методов минимального многочлена на случаи близкорасположенных и произвольным образом коррелированных источников сигналов. Предложено использовать процедуру пространственного сглаживания и получено модифицированное пороговое значение для аппроксимации минимального многочлена сглаженной точной КМ.

4. Экспериментальные результаты по сверхразрешению двух близкорасположенных источников сигналов, полученные на автомобильном радиолокаторе миллиметрового диапазона длин волн, подтвердили высокую эффективность разработанных методов. Метод минимального многочлена обеспечил более высокую вероятность правильной оценки числа источников по сравнению с известными критериями MDL и AIC. Точность определения азимутальных угловых координат источников сигналов корневым методом минимального многочлена практически

совпала с эффективностью корневого метода MUSIC при условии, что метод MUSIC «знал» истинное число источников сигналов.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю профессору, д.ф.-м.н. Флакману А.Г. за помощь и содействие в подготовке данной работы; профессору, д.т.н. Ермолаеву В.Т. за сотрудничество и поддержку в проведении исследований; аспиранту О.А. Шмонину за помощь в обработке экспериментальных результатов.

5 Список использованных сокращений

АР	Антенная Решетка
БПФ	Быстрое Преобразование Фурье
ДН	Диаграмма Направленности
КМ	Корреляционная Матрица
ЛЧМ	Линейная Частотная Модуляция
МММ	Метод Минимального Многочлена
ОСШ	Отношение Сигнал Шум (сигнал / шум)
СКО	Среднеквадратическая Ошибка
ADAS	Advanced Driver Assistance Systems
AIC	Akaike's Information Criterion
BER	Bit Error Rate
CS-FMCW	Chirp Sequence – Frequency Modulated Continuous Wave
ESPRIT	Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques
FMCW	Frequency-Modulated Continuous-Wave
MUSIC	MUltiple Signal Classification
MIMO	Multiple Input – Multiple Output Systems
MDL	Minimum Description Length)
RARE	Rank Reduction
SS	Spatial Smoothing

6 Список используемой литературы

1. Караваев, В.В. Статистическая теория пассивной локации. / В.В. Караваев, В.В. Сазонов. – М.: Радио и связь, 1987. – 240 с.
2. Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория: справочник / под ред. Я.Д. Ширмана. – М.: Радиотехника, 2007. – 512 с.
3. Черняк, В.С. Многопозиционная радиолокация. / В.С. Черняк. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.
4. Ратынский, М.В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. / М.В. Ратынский. – М.: Радио и связь, 2003. – 200 с.
5. Турчин В.И. Введение в современную теорию оценки параметров сигналов. / В.И. Турчин. – Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005. – 116 с.
6. Li, J. MIMO Radar Signal Processing. / J. Li, and P. Stoica. – Hoboken, N.J.: Wiley-IEEE Press, 2008. – 448 pp.
7. Godara, L.C. Smart antennas. / L.C. Godara. – CRC Press, 2004. – 472 pp.
8. Tuncer, E. Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation. / E. Tuncer, B. Friedlander. – Elsevier Inc. ed. 2009. – 429 pp.
9. Bergin, J. MIMO Radar. Theory and Application. / J. Bergin, J.R. Guerci. – Artech House, 2018. – 229 pp.
10. Кошелев, В.И. Актуальные вопросы радиолокации. / В.И. Кошелев, В.В. Кирдяшкин, М.И. Сычев, Д.А. Ясенцев; под редакцией П.А. Бакулева. – Москва, 2016. – 216 с.
11. Vaseghi, S.V. Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction. / S.V. Vaseghi. – John Wiley & Sons, Ltd, 2006. – 480 pp.
12. Пистолькорс, А.А. Введение в теорию адаптивных антенн. / А.А. Пистолькорс, О.С. Литвинов. – М.: Наука, 1991. – 200 с.

13. Бакулин, М.Г. Технология MIMO: принципы и алгоритмы. / М.Г. Бакулин, Л.А. Варукина, В.Б. Крейнделин. – М.: Горячая линия - Телеком, 2014. – 242 с.
14. Björnson, E. Massive MIMO Networks: Spectral, Energy, and Hardware Efficiency. / E. Björnson, J. Hoydis, L. Sanguinetti. // Now Foundations and Trends. –2017. – Vol. 11, No. 3-4. – P. 154–655.
15. Biglieri, E. MIMO Wireless Communication. / E. Biglieri, R. Calderbank, A. Constantinides, A. Goldsmith, A. Paulraj, H.V. Poor – UK: Cambridge Univ. Press, 2007. – 323 pp.
16. Hanzo, L. MIMO-OFDM for LTE, Wi-Fi and WiMAX Coherent versus Non-Coherent and Cooperative Turbo-transceivers. / L. Hanzo, J. Akhtman, L. Wang, M. Jiang, – UK, Chichester: John Wiley & Sons, 2011. – 658 p.
17. Paylraj, A. Introduction to space-time wireless communications. / A. Paylraj, R. Nabar, D. Gore. – Cambridge university press, 2003. – 278 p.
18. Space-Time Processing for MIMO Communications / Editors A.B. Gershman, N.D. Sidoropoulos. – Wiley&Sons, 2005. – 370 p.
19. Ермолаев, В.Т. Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи: монография / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман. – Н. Новгород: ННГУ, 2011. – 368 с.
20. Малышкин, Г.С. Оптимальные и адаптивные методы обработки гидроакустических сигналов (обзор) / Г.С. Малышкин, Г.Б. Сидельников // Акустический журнал. – 2014. – Т. 60. № 5. – С. 526–545.
21. Сазонтов, А.Г. Согласованная пространственная обработка сигналов в подводных звуковых каналах (обзор) / А.Г. Сазонтов, А.И. Малеханов // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61. № 2. – С. 233–253.
22. Wax, M. Detection of signals by information theoretic criteria / M. Wax, T. Kailath // IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Process. – 1985. – V. 33. – P. 387–392.

23. Xu, G. Detection of number of sources via exploitation of centro-symmetry property / G. Xu, R.H. Roy, T. Kailath // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1994. – V. 42. No. 1. – P. 102–112.
24. Сычев, М.И. Оценивание числа и угловых координат близко расположенных источников излучения по пространственно-временной выборке: автореферат дис. ... доктора технических наук: 05.12.14. / Сычев Михаил Иванович. – Москва: Московский государственный авиационный институт, 2011 – 33 с.
25. Сычев, М.И. Пространственно-временная обработка радиосигналов на основе параметрического спектрального анализа. / М.И. Сычев. – Антенны, 2001. № 1. – С. 70-77.
26. Сычев, М.И. Оценивание числа и угловых координат близко расположенных источников излучения по пространственно-временной выборке. / М.И. Сычев. – М.: Радиотехника, 2009. № 12. – С. 64-73.
27. Ермолаев, В.Т. Оценивание параметров минимального многочлена сигнальной корреляционной матрицы многоканальной адаптивной приемной системы / В.Т. Ермолаев // Изв. вузов. Радиофизика. – 1995. Т. 38. № 8. – С. 841–859.
28. Ермолаев, В.Т. Оценивание параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.А. Анурин // Изв. вузов. Радиофизика. – 1996. Т. 39 № 9. – С. 1144–1160.
29. Кульбак, С. Теория информации и статистики. / С. Кульбак, – М.: Наука. 1967. – 408 с.
30. Уидроу, Б. Адаптивная обработка сигналов. Пер. с англ. / Б. Уидроу, С. Стирнз – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.
31. Mestre, X. Modified subspace algorithms for DoA estimation with large arrays. / X. Mestre, M.A. Lagunas // IEEE Trans. Signal Processing. – 2008. – vol. 56, no. 2. – P. 598–614.

32. Mestre, X. Improved estimation of eigenvalues and eigenvectors of covariance matrices using their sample estimates. / X. Mestre // *IEEE Trans. Information Theory*. – 2008. – vol. 54, no. 11. – P. 5113–5129.
33. Родионов, А.А. Обработка сигналов в антенных решётках на основе модели помехи, включающей корреляционную матрицу неполного ранга / А.А. Родионов, В.И. Турчин // *Изв. вузов. Радиофизика*. – 2017. – Т. 60. № 1. – С. 60-71.
34. Кейпон, Дж. Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением / Дж. Кейпон // *ТИИЭР*. – 1969. – Т. 57, № 8. – С. 59-69.
35. Arena, F. An Overview of Vehicular Communications / F. Arena, G. Pau. // *Future Internet*. – 2019. – vol. 11, no. 27. – 12 pp.
36. Molina-Masegosa, R. LTE-V for Sidelink 5G V2X Vehicular Communications: A New 5G Technology for Short-Range Vehicle-to-Everything Communications. / R. Molina-Masegosa, J. Gozalvez, // *IEEE Veh. Technol. Mag.* – 2017. – vol. 12, no. 4. – P. 30–39.
37. Han, C. Analytical Study of the IEEE 802.11p MAC Sublayer in Vehicular Networks. / C. Han, M. Dianati, R. Tafazolli, R. Kernchen, X. Shen // *IEEE Trans. Intell. Transp. Syst.* – 2012. – vol. 13, no. 2. – P. 873–886.
38. Bazzi, A. On the Performance of IEEE 802.11p and LTE-V2V for the Cooperative Awareness of Connected Vehicles. / A. Bazzi, B.M. Masini, A. Zanella, I. Thibault // *IEEE Trans. Veh. Technol.* – 2017. – vol. 66, no. 11. – P. 10419–10432.
39. Patole, S. Automotive Radars. A review of signal processing techniques / S. Patole, M. Torlak, D. Wang, M. Ali // *IEEE Signal Processing Magazine*. – 2017. – vol. 34, no. 2. – P. 22-35.
40. Richards, M. *Fundamentals of Radar Signal Processing*. / M. Richards. – New York: McGraw-Hill, 2014. – 656 p.
41. Meinel, H.H. Automotive radar: From its origin to future directions, / H.H. Meinel, J. Dickman // *Microwave Journal*. – 2013 – vol. 56, no. 9. – P. 24–40.

42. Aydogdu, C. Radar Interference Mitigation for Automated Driving: Exploring Proactive Strategies. / C. Aydogdu, G.K. Carvajal, O. Eriksson, H. Hellsten, H. Herbertsson, M.F. Keskin, E. Nilsson, M. Rydström, K. Vanäs, H. Wymeersch // IEEE Signal Processing Magazine. – 2020. – vol. 37, no. 4. – P. 72-84.
43. Черняк, В.С. О новом направлении радиолокации: МИМО РЛС / В.С. Черняк // Прикладная радиоэлектроника. – 2009. – Т. 8, № 4. – С. 477-489.
44. Черняк, В.С. О новых и старых идеях в радиолокации: МИМО РЛС / В.С. Черняк // Успехи современной радиоэлектроники. – 2011. – №2. – С. 5-20.
45. Черняк, В.С. Многопозиционные радиолокационные системы на основе МИМО РЛС / В.С. Черняк // Успехи современной радиоэлектроники. – 2012. – № 8. – С. 29–47.
46. Myakinkov, A.V. Space-time processing in multi-static forward scatter radar with moving airborne transmitters / A.V. Myakinkov, D.M. Smirnova, R.S. Fadeev // Proceedings International Radar Symposium, Dresden. – 2015. – P. 622-627.
47. Myakinkov, A.V. The Distributed Radar System for Monitoring the Surrounding Situation for the Intelligent Vehicle / A.V. Myakinkov, S.B. Sidorov, S.V. Shishanov, S.A. Shabalin // 19th International Radar Symposium (IRS). – 2018. – P. 1-8.
48. Рындык, А.Г. Система определения геометрических размеров объектов впереди транспортного средства на основе сверхширокополосных приемопередающих модулей / А.Г. Рындык, А.В. Мякинков, С.В. Шишанов // Информационно измерительные и управляющие системы. – 2017. – Т.15, №8. – С. 19–25.
49. Ермолаев, В.Т. Метод минимального многочлена для оценки параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.В. Елохин, В.В. Купцов // Акустический журнал. – 2018. – Т. 64, № 1. – С. 78-85
50. Ермолаев, В.Т. Угловое сверхразрешение сигналов в антенной решётке с помощью корневого метода минимального многочлена корреляционной матри-

- цы / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин. // Изв. вузов. Радиофизика. – 2018. – Т. 61, № 3. – С. 261-272.
51. Ермолаев, В.Т. Экспериментальное исследование углового сверхразрешения двух коррелированных сигналов методом минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин // Изв. вузов. Радиофизика. – 2018. – Т.61. № 11. – С. 945-957.
52. Аверин, И.М. Экспериментальное исследование углового сверхразрешения коррелированных источников сигналов методом минимального многочлена / И.М. Аверин, А.В. Елохин, А.Г. Флакман // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. – 2021. – №2. – 15 с.
53. Ермолаев, В.Т. Метод минимального многочлена для оценки числа источников сигналов в антенной решетке / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.В. Елохин, В.В. Купцов // Сборник трудов X Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь». М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. 2016. – С. 100-103.
54. Ермолаев, В.Т. Оценка числа коррелированных источников сигналов в антенной решетке методом минимального многочлена. / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.В. Елохин, В.В. Купцов // Труды XXIII-й международной конференции «Информационные системы и технологии» (ИСТ-2017). – Н. Новгород: НГТУ 2017. – С. 1093-1098.
55. Ермолаев, В.Т. Пороговая техника для оценки числа источников радиоизлучения методом минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин // Труды XXI Научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: ННГУ, 2017. – С. 319-322.
56. Ермолаев, В.Т. Оценка параметров источников сигнала методом минимального многочлена с поиском корней псевдоспектральной функции / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин // Труды XXI Научной конференции по радиофизике. – Н. Новгород: ННГУ, 2017. – С. 365-368.

57. Ермолаев, В.Т. Эффективность оценки числа и угловых координат близко-расположенных коррелированных источников сигналов в антенной решетке с помощью корневого метода минимального многочлена. / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин // Труды III научно-технической конференции «Радиолокация. Теория и практика». – Н. Новгород: АО ФНПЦ «ННИИРТ», 2017.
58. Ермолаев, В.Т. Экспериментальные результаты углового сверхразрешения коррелированных источников сигналов с помощью метода минимального многочлена / В.Т. Ермолаев, А.Г. Флакман, А.В. Елохин, О.А. Шмонин. // Труды XII Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь» – М.: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 2018. – С. 69-73.
59. Марков, Г.Т. Антенны. / Г.Т. Марков, Д.М. Сазонов. – М.: Энергия, 1975. – 528 с.
60. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц. / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
61. Воеводин, В.В. Линейная алгебра. / В.В. Воеводин. – М.: Наука, 1980. – 400 с.
62. Ланкастер, П. Теория матриц. / П. Ланкастер. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
63. Хорн, Р. Матричный анализ. / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
64. Ermolayev, V.T. Signal processing in adaptive arrays using power basis / V.T. Ermolayev, A.G. Flaksman // International Journal of Electronics. – 1993. – vol. 75, no. 4. – P. 753-765.
65. Монзинго, Р.А. Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию. / Р.А. Монзинго, Т.У. Миллер. – М.: Радио и связь, 1986. – 448 с.
66. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры. / А.Г. Курош. СПб.: Лань, 2008. – 432 с.
67. Гершман, А.Б. Анализ собственных чисел корреляционной матрицы входных колебаний адаптивной антенной решетки и возможности углового сверхразрешения в условиях коррелированных внешних источников / А.Б. Гершман, В.Т. Ермолаев // Изв. вузов. Радиофизика. 1988. – Т. 31. № 10. – С. 1236-1240.

68. Akaike, H. A new look at the statistical model identification. / H. Akaike // IEEE Trans. Automat. Control. –1974. – vol. 19, no. 6. – P. 716-723.
69. Rissanen, J. Modeling by the shortest data description. / J. Rissanen // Automatica. – 1978. – vol. 14, no. 5. – P. 465–471.
70. Wang, H. On the performance of signal-subspace processing: Part I: Narrowband systems. / H. Wang, M. Kaveh // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1986. – vol. 34, no. 5. – P. 1201–1209.
71. Анго, А. Математика для электро- и радиоинженеров. / А. Анго, Пер. с франц. – М.: Наука, 1967. – 780 с.
72. Ermolaev, V.T. Eigenvalue analysis of spatial covariance matrices for correlated signals / V.T. Ermolaev, A.B. Gershman // The Institution of Electrical Engineers – 1992. – vol. 28, no. 12. – P. 1114-1115.
73. Маврычев, Е.А. Пространственное сглаживание для оценивания параметров коррелированных сигналов в антенных решетках подрешетках с частичной калибровкой / Е.А. Маврычев // Труды Нижегородского государственного технического университета им. Р.Е. Алексеева. – 2010. – № 1(80), – С. 20-27.
74. Gershman, A.B. Optimal subarray size for spatial smoothing. / A.B. Gershman, V.T. Ermolaev // IEEE Signal Processing Letters. – 1995.– vol. 2, no. 2. – P. 28-30.
75. Гершман, А.Б. Анализ методов пространственного сглаживания в связи с угловой корреляцией сигналов. / А.Б. Гершман, В.Т. Ермолаев, Г.В. Серебряков – М.: Радиотехника, 1990. – С. 11-14.
76. Serebryakov, G.V. Adaptive array utilizing improved spatial averaging technique. / G.V. Serebryakov // Electronics Letters. – 2000. – vol. 36, no. 5. – P. 471-472.
77. Serebryakov, G.V. Direction-of-arrival estimation of correlated sources by adaptive beamforming. / G.V. Serebryakov // IEEE Transactions on Signal Processing. – 1995. – vol. 43, no. 11. – P. 2782-2787.

78. Li, X. Super-Resolution TOA Estimation with Diversity for Indoor Geolocation / X. Li, K. Pahlavan // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2004. – vol. 3, no. 1. – P. 224-234.
79. Shan, T. Adaptive beamforming for coherent signals and interference / T. Shan, T. Kailath // IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Proc. – 1985. – vol. 33, no. 3. – P. 527-536.
80. Meinel, F. Signal Processing Architectures for Automotive High-Resolution MIMO Radar Systems: dissertation ... Ph.D: DDC: 621,3 / Meinel Frank. – Hannover: Gottfried Wilhelm Leibniz Universität, 2020. – 191 p.
81. Lutz, S. On fast chirp modulations and compressed sensing for automotive radar applications / S. Lutz, D. Ellenrieder, T. Walter, R. Weigel // 15th Int. Radar Symp. (IRS).– 2014. – P. 1–6.
82. Кобак, В.О. Радиолокационные отражатели./ В.О. Кобак. – М.: Советское радио, 1975. – 348 с.
83. Winkler, V. Range Doppler detection for automotive FMCW radars / V. Winkler // European microwave conference. – 2007. – P. 166–169.