

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

На правах рукописи



Болотов Максим Ильич

**Коллективная динамика в ансамблях нелокально связанных
фазовых осцилляторов**

Специальность 1.3.4 — «Радиофизика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Осипов Григорий Владимирович

Нижний Новгород — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	5
Глава 1. Пространственно-однородные и частично синхронные режимы в распределенном ансамбле неидентичных фазовых осцилляторов	18
1.1 Введение	18
1.2 Модель	20
1.3 Состояния с равномерно распределенной по ансамблю степенью фазовой синхронизации соседних осцилляторов	28
1.3.1 Однородные состояния	28
1.3.2 Градиентные состояния	29
1.3.3 Устойчивость частично синхронных однородных и градиентных состояний	33
1.4 Стационарные неоднородные решения	38
1.4.1 Поиск неоднородных решений	41
1.5 Неоднородные пространственно-временные режимы	46
1.5.1 Кластерная синхронизация и бризерные режимы	46
1.5.2 Режимы перемежаемости и пространственно-временного хаоса	49
1.6 Выводы по первой главе	53
Глава 2. Пространственно-временные режимы в распределенном ансамбле нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов с нелинейным фазовым сдвигом	54
2.1 Введение	54
2.2 Описание модели	54
2.3 Пространственно-однородные режимы	56
2.4 Градиентные режимы	57
2.5 Стационарные химерные режимы	62
2.5.1 Поиск химерных структур	62
2.5.2 Анализ устойчивости	64

	Стр.
2.6	Регулярные химерные режимы 65
2.6.1	Стационарные химеры 65
2.6.2	Бризерные химеры 67
2.7	Турбулентные химеры 73
2.8	Выводы по второй главе 74
Глава 3. Синхронизация и регуляризация химерных режимов	
внешним периодическим воздействием в распределенном	
ансамбле идентичных фазовых осцилляторов 76	
3.1	Введение 76
3.2	Описание модели 77
3.3	Стационарные захваченные химеры и их устойчивость 81
3.4	Влияние периодической силы на химерные режимы
	различного типа 86
3.4.1	Химерные режимы различных типов в автономном случае . 86
3.4.2	Синхронизация устойчивой химеры 86
3.4.3	Стабилизация бризерной химеры 88
3.4.4	Регуляризация турбулентной химеры 94
3.5	Выводы по третьей главе 94
Глава 4. Синхронизация и химерные состояния в ансамблях	
импульсно-связанных осцилляторов 97	
4.1	Введение 97
4.2	Описание модели 100
4.3	Синхронизация в ансамбле импульсно-связанных через общее
	поле фазовых осцилляторов 101
4.3.1	Описание модели 101
4.3.2	Переход к синхронизации 103
4.4	Вырожденное химерное состояние в ансамбле импульсно
	связанных осцилляторов 105
4.4.1	Описание модели 105
4.4.2	Захват частот макроскопических полей 107
4.4.3	Вырожденное химерное состояние 109
4.5	Выводы по четвертой главе 114

	Стр.
Заключение	116
Список литературы	119
Приложение А. Анализ устойчивости стационарных химерных состояний	134
Приложение Б. Анализ устойчивости градиентных состояний	137
Приложение В. Алгоритм поиска стационарных химерных структур в среде с внешним периодическим воздействием	139
Приложение Г. Построение языка Арнольда для захваченных химерных состояний	141
Приложение Д. Анализ устойчивости стационарных химерных состояний в среде с внешним периодическим воздействием	143

Введение

Исследование больших систем взаимодействующих автоколебательных элементов — популярное и активно развивающееся направление нелинейной динамики. В большом ряде случаев изучение ансамблей автоколебательных элементов самой различной природы может быть сведено к исследованию систем фазовых осцилляторов [1—6]. Именно такие системы определяют временные характеристики коллективного поведения рассматриваемых популяций. Помимо чисто академического интереса данные исследования находят многообещающие приложения в различных областях современной науки и техники. С их помощью удастся адекватно описывать механические объекты (в частности, взаимодействующие маятники [5; 7], закрепленные на общей основе метрономы [8]), разнообразные процессы в электрических (в том числе силовых) сетях [9; 10], системах фазовой автоподстройки частоты (системах фазовой синхронизации) [5; 7] и т. д. В физике подобного рода модели активно используются при рассмотрении динамики массивов из джозефсоновских контактов [11—15], гранулированных сверхпроводников [16] и полупроводниковых лазеров [17; 18], а также при анализе свойств ансамблей спиновых нано-осцилляторов [19; 20], оптомеханических [21; 22] и электрохимических генераторов [23; 24], твердотельных структур [14; 25]. Стоит отметить биологические приложения, среди которых особое место занимают исследования механизмов возникновения циркадных ритмов [26; 27] и изучение поведения популяций бактерий [28; 29], возбудимых клеток, динамики групп нейронов [30; 31], молекулярных цепочек [32; 33], биологических популяций клеток, химических реакций [34—37].

Изучение эволюции сложных сетей представляет собой достаточно трудоемкую задачу. Сложность сети проистекает из ее структуры и свойств индивидуальных элементов. Ключевым вопросом с точки зрения нелинейной динамики здесь является следующий: как ансамбль взаимодействующих осцилляторов будет вести себя как коллектив, учитывая индивидуальную динамику и структуру связей? Среди механизмов, которые приводят к возникновению коллективной динамики, важную роль играет синхронизация в ее различных проявлениях. И именно фазовая динамика взаимодействующих элементов указывает на синхронное или асинхронное поведение сложных сетей связанных осцилляторов. Особый интерес исследователей привлекают условия существования

и устойчивости в данных системах синхронных коллективных режимов. К таким режимам можно отнести глобальную синхронизацию ансамблей, а также локальную (кластерную) синхронизацию, когда различные части сети демонстрируют синхронизацию на различных частотах, спонтанную кратковременную синхронизацию, переходную — чередующуюся во времени и пространстве синхронизацию, химерные состояния и др. Тематика исследования синхронизации в системах различной природы получила широкое развитие в работах В.С. Анищенко, В.С. Афраймовича, В.Н. Белых, М.В. Иванченко, А.А. Корновского, В.Б. Казанцева, С.П. Кузнецова, Й. Курамото, Ю. Куртца, П.С. Ланды, К. Лейнга, Ю.Л. Майстеренко, В.В. Матросова, Е. Мозекильде, Ю.И. Неймарка, В.И. Некоркина, Г.В. Осипова, Л. Пекора, А.С. Пиковского, М.И. Рабиновича, М.Г. Розенблюма, С. Строгаца, А.Е. Храмова, В.Д. Шалфеева, Б. Эрментроута и др.

Фазовые модели нашли свое применение в различных областях исследований [1; 2; 5; 38; 39]. Конкретные приложения определяют тип связей между элементами популяций: (а) локальная или (б) нелокальная (в том числе глобальная). В случае нелокального взаимодействия также возможна реализация сложных многослойных структур связей между элементами [40; 41], а также изменяющихся во времени адаптивных связей [42—45]. Нелокальную связь в распределенных средах математически можно представить в виде оператора свертки. Ядро этого оператора полностью определяет свойства взаимодействия внутри осцилляторной среды. Исследователями был изучен достаточно широкий спектр возможных вариантов нелокального взаимодействия, в том числе, и дальнедействующие связи [46], спадающие по степенному закону. Однако наиболее интересные с точки зрения возможных динамических эффектов результаты были получены для ядер конечного радиуса, а также с экспоненциально убывающими «хвостами» [47—49]. Наряду с традиционными исследованиями синхронного поведения в популяциях осцилляторов, повышенный интерес проявляется к изучению процессов образования *идентичными* элементами химерных состояний, которые характеризуются сосуществованием в ансамбле синхронных и асинхронных групп осцилляторов. В работе Курамото и Баттогтоха [50] было впервые описано сосуществование когерентных и некогерентных групп элементов в цепочке нелокально связанных фазовых осцилляторов. Интерес этого явления обусловлен тем, что формирование химер происходит в результате фундаментального явления нарушения симметрии [51], которое в распределен-

ных популяциях проявляется в том, что когда однородное полностью синхронное состояние существует и устойчиво, система в процессе долговременной эволюции может прийти к более сложному режиму, когда наряду с группами взаимно синхронных элементов имеется значительная часть асинхронных осцилляторов. Более простой случай такого нарушения симметрии было получен Абрамсом и др. [52], которые изучали химерное состояние в двух связанных популяциях идентичных элементов, где величина внутренних связей отличалась от величины внешних. Возникновение химерных состояний остается одним из привлекательных и необычных эффектов для многих исследователей в области нелинейной динамики (см. недавние обзоры [47—49; 53—55]) и публикации [41; 56; 57]. Химерные режимы долгое время наблюдались только в рамках численного моделирования осцилляторных популяций. Однако, за последнее десятилетие данные режимы также были обнаружены в ряде экспериментальных работ [58—62]. В частности, в химических средах [58; 59], электрохимических ансамблях [60; 63; 64], оптических системах [61; 65; 66], электронных и оптоэлектронных осцилляторах и цепях [67—70], механических системах [62; 71].

Нетривиальные режимы в средах, состоящих из фазовых осцилляторов с нелокальной связью, могут быть описаны как стационарные структуры с пространственно-неоднородным профилем комплексного параметра порядка, который определяется локально как мера степени когерентности группы элементов в окрестности каждой точки среды. В частности, для химерных состояний в распределенных системах абсолютное значение такого локального комплексного параметра порядка обращается тождественно в единицу на участках, где соседние осцилляторы синхронны, и меньше единицы в областях с асинхронным поведением элементов [47—49; 53; 55; 56; 72—75]. Для анализа подобных пространственно-неоднородных режимов можно эффективно использовать методику Отта—Антонсена [76—78], которая позволяет получить самосогласованные динамические уравнения для усредненных полей, одним из которых является локальный параметр порядка.

Среди проводимых исследований отдельного внимания заслуживают исследования систем, состоящих из *неидентичных* осцилляторов [6; 46; 76—85]. В таких популяциях каждый осциллятор обладает своей собственной частотой, значение которой зависит от свойств данного элемента. При рассмотрении популяции с нелокальным взаимодействием можно ожидать возникновение более сложных режимов, чем в случае идентичных осцилляторов. В частности, хи-

мерные режимы при этом трансформируются в частично синхронные состояния с несколькими участками, где осцилляторы демонстрируют высокую степень когерентности, и которые в пределе нулевого разброса частот переходят в кластеры полностью синхронных элементов. От степени пространственного беспорядка также зависят бифуркационные значения других величин, при которых происходит качественное изменение поведения системы. Однако, с другой стороны появляется возможность развития аналитического описания исследуемых сред с помощью усредненных полей. Данный момент связан с тем, что полностью когерентный режим не существует в подобных системах. Поэтому вырожденная ситуация, когда модуль локального комплексного параметра порядка тождественно обращается в единицу, становится невозможной. Данный факт существенно упрощает анализ укороченных уравнений относительно усредненных полей исследуемой среды.

Целью данной работы является анализ условий существования, механизмов возникновения и устойчивости пространственно-однородных и неоднородных структур (частично синхронных и химерных), а также их характеристик в ансамблях нелинейных фазовых элементов (как неидентичных, так и идентичных) с нелокальной связью.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Определить условия существования и устойчивости стационарных с точки зрения локального параметра порядка пространственно-временных режимов в ансамбле нелокально связанных фазовых осцилляторов Курамото—Баттогтоха с неидентичными собственными частотами, удовлетворяющими распределению Лоренца. Определить механизмы возникновения сложной динамики системы при развитии неустойчивости стационарных структур (бризерные режимы, режимы с перемежаемостью, хаотические пространственно-временные режимы).
2. Определить механизмы возникновения бризерных химер и влияние нелинейности фазового сдвига на возможность реализации неоднородных режимов (в том числе химерных) в системе нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов.
3. Определить влияние внешнего периодического воздействия на стационарные химерные режимы в системе нелокально связанных идентичных

осцилляторов Курамото—Баттогтоха. Установить возможность синхронизации стационарных и регуляризации бризерных и хаотических химер.

4. Описать переход к синхронизации в ансамбле ротаторов, глобально связанных через импульсное поле. Установить возможность реализации вырожденных химерных режимов в двух ансамблях импульсно-связанных осцилляторов при синхронизации частот их общих полей.

Научная новизна: Диссертационная работа посвящена решению принципиально новых задач анализа синхронных, частично синхронных и химерных состояний в ансамблях нелокально связанных осцилляторов с экспоненциально спадающими ядрами, определяющими взаимодействие в системе, а также в популяциях с импульсной связью. Полученные результаты являются новыми. Совокупность результатов диссертации позволяет существенно расширить представления о механизмах формирования, структуре и свойствах различных пространственно-неоднородных режимов. Результаты диссертации находятся в соответствии с уже установленными представлениями в этой области знаний, гармонично расширяя и дополняя их. Новизна основных результатов работы подтверждается их публикацией в целом ряде научных статей в высокорейтинговых отечественных и зарубежных физических журналах с высоким импакт-фактором, входящих в международные и российские системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ.

В работе впервые получены следующие научные результаты:

1. Для систем нелокально связанных фазовых осцилляторов с экспоненциальным ядром, определяющим связь, были получены уравнения Отта—Антонсена относительно локального комплексного параметра порядка, характеризующего степень фазовой скоррелированности элементов в малой окрестности произвольной точки среды.
2. Предложен метод эффективного поиска стационарных (равномерно вращающихся) неоднородных пространственных структур, основанный на построении замкнутых траекторий в фазовом пространстве вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Разработана процедура расчета непрерывной и дискретной составляющих спектра собственных значений линеаризованного в окрестности стационарных решений интегро-дифференциального уравнения Отта—Антонсена, определяющих устойчивость неоднородных решений.

3. Установлено, что в системе нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов можно выделить два вида стационарных (равномерно вращающихся) режимов с постоянным по модулю значением локального параметра порядка: однородные и градиентные. Определены области их существования и устойчивости.
4. Установлено, что в среде нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов с экспоненциальным типом взаимодействия среди неоднородных состояний со статичным распределением областей с повышенной и пониженной степенью синхронизации устойчивыми являются только те режимы, для которых у профиля локального параметра порядка имеется только один максимум. Среди остальных структур встречаются слабо неустойчивые (переходные) образования. Определены области существования и устойчивости режимов бризерной кластерной синхронизации и пространственно-временного хаоса.
5. Показано, что нелинейность фазового сдвига в системе нелокально связанных идентичных осцилляторов с экспоненциальным типом взаимодействия приводит к возможности реализации однородного частично синхронного градиентного состояния и гибридной химеры, состоящей из двух областей с высокой степенью когерентности поведения элементов. В случае длинной среды регулярные состояния становятся неустойчивыми, а в системе реализуются режимы с хаотическим поведением модуля локального параметра порядка. Впервые показана возможность реализации бризерной химеры, возникающей в результате развития неустойчивости стационарного химерного режима.
6. Показано, что в ансамбле нелокально связанных идентичных осцилляторов Курамото—Баттогтоха при воздействии внешнего периодического воздействия на устойчивую стационарную химеру существует область захвата, в которой частота химеры совпадает с частотой внешнего сигнала. Продемонстрирован эффект регуляризации неустойчивых химер (бризерных или хаотических), когда внутри соответствующей области захвата существуют подобласти, где внешнее воздействие стабилизирует стационарную химеру при достаточно большой амплитуде внешнего воздействия.
7. Показано, что в системе двух связанных ансамблей осцилляторов типа накопление-сброс режим захвата частот $2 : 1$ средних полей не влечет

синхронизации между индивидуальными элементами каждой из популяций. При этом реализуется нетривиальное химерное состояние, когда часть одного из ансамблей формирует кластер идентичных элементов, в то время как другие не являются когерентными по фазе, хотя средние частоты всех осцилляторов одинаковы. Второй ансамбль при этом демонстрирует частично синхронную динамику.

Практическая значимость работы состоит в развитии теории структурообразования в ансамблях и средах нелокально связанных осцилляторов. Полученные результаты существенно расширяют представления современной нелинейной динамики о возможности формирования режимов пространственно-временной динамики в системах нелокально связанных осцилляторов.

Результаты исследования носят не только фундаментальный научный характер, но имеют и существенное прикладное значение, т. к. задача формирования структур возникает в широком спектре физических, биологических и социо-экономических систем, где динамику каждого элемента возможно описывать в фазовом приближении и связь между элементами не является локальной. Например, процессы формирования частично синхронных и химерных структур наблюдаются в электрохимических реакциях, лежащих в основе важных физиологических процессов, например, циркадных ритмов или передаче кальциевых сигналов, где связь между компонентами среды носит нелокальный характер. Также наблюдение в головном мозге пространственно-локализованных кластеров когерентных нейронов связывают с наличием в подобных областях ячеек памяти.

Разработанные в ходе исследования программные модули могут быть использованы при моделировании поведения сложных многокомпонентных систем.

Методология и методы исследования. В ходе выполнения диссертационного исследования были использованы комбинации разнообразных (аналитических и численных) методов математической физики, бифуркационного и статистического анализа. Решение поставленных задач предполагало теоретическое описание конкретных моделей ансамблей нелинейных осцилляторных элементов, проведение детальных численных расчетов в рамках этих моделей, аналитическое обоснование полученных результатов. Эффективным методом анализа в случае исследования ансамблей нелокально связанных осцилляторов представляется подход Отта—Антонсена, который дает возможность получить замкнутые системы уравнений для комплексного параметра порядка и свести исследуемую проблему к задаче эволюции макроскопических полей. В данной

ситуации можно переформулировать исходную задачу в терминах образования пространственных структур. Редукция Отта—Антонсена является достаточно универсальным инструментарием, позволяющим вывести укороченные уравнения для основных характеристик исследуемых структур, а также предсказать и спрогнозировать сценарии глобальной эволюции системы в целом. Важным и неоспоримым преимуществом данного метода выступает то, что удается упростить анализ и уменьшить вычислительную сложность задачи за счет перехода к гладким благодаря процессу усреднения макроскопическим полям (к которым принадлежит комплексный параметр порядка) или значительно понизить размерность системы уравнений.

Для исследования устойчивости стационарных структур использован метод, основанный на дискретизации уравнений в вариациях и численной оценке спектров собственных значений, возникающих при дискретизации матриц. Метод направлен на решение проблемы разделения дискретных и непрерывных составляющих спектра (только первые могут приводить к неустойчивости, в то время как при дискретизации собственные значения, соответствующие непрерывной части спектра, могут иметь ложные положительные вещественные части).

Для моделирования динамики популяций фазовых осцилляторов с композитной топологией связей и расчета макроскопических полей на базе уравнения для комплексного параметра порядка использованы прямые явные схемы типа метода Рунге—Кутты четвертого и пятого порядков.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В системе нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов существует два типа стационарных режимов равномерного вращения с постоянным по модулю значением локального параметра порядка: однородные и градиентные. При больших значениях полуширины функции распределения собственных частот реализуется только полностью асинхронный режим с нулевым средним полем. Если же полуширина случайного разброса меньше некоторой пороговой величины, то данное состояние перестает быть устойчивым, и в системе могут наблюдаться как однородные, так и градиентные частично синхронные режимы в зависимости от размеров среды и фазового сдвига. Градиентные режимы устойчивы, начиная с некоторого критического значения длины, либо на некотором отрезке длин.

2. В среде нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов с экспоненциальным типом взаимодействия среди неоднородных состояний со статичным распределением областей с повышенной и пониженной степенью синхронизации устойчивыми являются только те режимы, для которых у профиля локального параметра порядка имеется только один максимум. Среди остальных структур встречаются слабо неустойчивые (переходные) образования. Данные квазихимерные режимы (как предельные, так и переходные) играют важную роль в динамике ансамбля из большого числа элементов, т. к. одни из них устанавливаются и в последствии не разрушаются, а другие возникают в виде переходных продолжительных процессов между интервалами со сложным нерегулярным поведением усредненных полей. При нарушении устойчивости стационарных неоднородных режимов в системе реализуется бризерный кластерный режим, а в случае больших длин сред нерегулярный режим с хаотическим поведением усредненных полей.
3. В системе нелокально связанных идентичных осцилляторов с экспоненциальным типом взаимодействия наличие нелинейной зависимостью фазового сдвига от степени когерентности элементов среды приводит к возможности реализации однородного частично синхронного состояния, неоднородного частично синхронного режима и «гибридной» химеры, состоящей из двух областей с высокой степенью когерентности элементов. В случае длинной среды регулярные режимы становятся неустойчивыми, и в системе реализуются режимы пространственно-временного хаоса.
4. В ансамбле распределенных на кольце идентичных элементов с экспоненциальным типом взаимодействия возможна реализация бризерной химеры, возникающей в результате развития неустойчивости стационарного химерного режима. Ключевую роль при этом играет наличие нелинейного фазового сдвига, зависящего от степени когерентности осцилляторов.
5. В ансамбле нелокально связанных идентичных осцилляторов Курамото—Баттогтоха при воздействии внешнего периодического воздействия на устойчивую стационарную химеру существует область захвата, в которой химеры синхронизируется внешним воздействием. В области захвата для слабо неустойчивой (эволюционирующей к бризерной)

химеры существуют подобласти соответствующие реализации как устойчивой и бризерной химер, так и хаотической динамики. В области захвата сильно неустойчивой (эволюционирующей к хаотическому пространственно-временному режиму) химеры существует домен устойчивых однокластерных химер, что означает возможность регуляризации внешним периодическим воздействием необходимой частоты и амплитуды.

6. В системе двух связанных ансамблей осцилляторов типа «накопление-сброс» при захвате частот $2 : 1$ средних полей реализуется нетривиальное химерное состояние: часть одного из ансамблей формирует кластер идентичных элементов, в то время как другие не являются когерентными по фазе, хотя средние частоты всех осцилляторов одинаковы. Второй ансамбль при этом демонстрирует частично синхронную динамику.

Достоверность полученных результатов подтверждена их воспроизводимостью в ходе численного моделирования с использованием различных математических моделей и хорошим соответствием экспериментальным и численным результатам, известным из литературы.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на международных научных семинарах, конференциях и симпозиумах: «Russian-Dutch/EU Workshop on Computational Biomedicine» (г. Амстердам, Нидерланды, 2014), «International Conference-School Shilnikov WorkShop» (Нижний Новгород, 2015, 2016, 2017, 2018), «Dynamics, Bifurcations and Chaos» (г. Нижний Новгород, 2016, 2018), «Хаотические автоколебания и образование структур» (г. Саратов, 2016), «The conference on Analysis and Modeling of Complex Oscillatory System (AMCOS)» (г. Барселона, Испания, 2018), «Volga Neuroscience Meeting 2018» (г. Нижний Новгород, 2018), «School and Workshop on Patterns of Synchrony: Chimera States and Beyond» (г. Триест, Италия, 2019), «Нелинейные волны» (г. Нижний Новгород, 2016, 2018, 2020), а также научных конференциях по радиофизике (г. Нижний Новгород, 2013, 2014, 2015, 2018, 2019).

Материалы диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры теории управления и динамики систем и лаборатории управляемых динамических систем ННГУ им. Н. И. Лобачевского, кафедры статистической физики и теории хаоса Потсдамского университета (Германия).

Исследования, результаты которых вошли в диссертационную работу, выполнялись при поддержке грантов РФФИ (проекты № 14-12-00811 «Фазовая динамика осцилляторных сред», № 14-41-00044 «Динамика и бифуркации диссипативных и консервативных систем», № 17-12-01534 «Коллективная неравновесная динамика в сложных системах», № 19-12-00367 «Динамика нестационарных осцилляторных сетей»), РФФИ (проекты № 18-32-00973 «Исследование сложных пространственно-временных структур в среде нелокально связанных фазовых осцилляторов с нелинейной задержкой», № 18-29-10068 «Синхронизация локализованных структур в импульсных нейронных сетях», № 19-52-12053 «Пространственные структуры и волны синхронизации»), Министерства науки и высшего образования (госзадание № 0729-2020-0036 «Математическая теория динамического хаоса и живые системы», проект № 14.Y26.31.0022), а также поддержке Научно-образовательного математического центра «Математика технологий будущего».

Личный вклад. Диссертант принимал непосредственное участие, как в постановке задач, так и в аналитических расчетах, обсуждении и интерпретации результатов. Результаты моделирования получены диссертантом лично посредством самостоятельно созданных программных комплексов.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 22 печатных изданиях, 7 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 9 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 15 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и 5 приложений. Полный объем диссертации составляет 145 страниц, включая 42 рисунка. Список литературы содержит 170 наименований.

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулированы цель работы и задачи исследований, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Введение содержит основные результаты и положения, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

В **первой главе** рассмотрены пространственно-временные структуры в системе неидентичных осцилляторов Курамото—Баттогтоха, соответствующие различным синхронным и асинхронным режимам. Раздел 1.1 — введение. Математическая постановка изучаемой проблемы приводится в разделе 1.2. Простейшие решения с постоянным по модулю значением параметра порядка

описаны в разделе 1.3. Здесь речь идет об асинхронных и частично синхронных однородных режимах, а также о градиентных состояниях. В разделе 1.4 приводятся сначала базовые сведения и соотношения, лежащие в основе предлагаемого нами метода поиска стационарных (равномерно вращающихся) неоднородных решений уравнения Отта—Антонсена с периодическими граничными условиями. Далее представлены ключевые аспекты линейного анализа устойчивости данных нетривиальных пространственных структур, которым можно поставить в соответствие квазихимерные статические состояния исходной фазовой модели. Затем обсуждаются основные моменты и преимущества процедуры построения семейств подобных образований с разным числом областей повышенной и пониженной когерентности и формулируются полученные в рамках такого подхода результаты. Кроме того, сделанные выводы подкрепляются прямым численным моделированием динамики распределенных фаз и локального комплексного параметра порядка. Классы возможных наблюдаемых режимов с более сложным (периодическим или нерегулярным) поведением (как в пространстве, так и во времени) мезоскопических (усредненных) полей обсуждаются в разделе 1.5.

Во **второй главе** рассматриваются пространственно-однородные и стационарные неоднородные структуры в одномерной среде идентичных нелокально связанных осцилляторов с нелинейным фазовым сдвигом, при этом основное внимание уделяется химерным состояниям. Раздел 2.1— введение. В разделе 2.2 приводится описание модели связанных фазовых осцилляторов и ее описание в терминах уравнений Отта—Антонсена относительно усредненных мезоскопических полей. В разделе 2.3 описываются однородные решения уравнений Отта—Антонсена и их устойчивость. В разделе 2.4 рассматриваются градиентные состояния. Далее в разделе 2.5 описывается процедура поиска стационарных неоднородных режимов и проводится анализ их устойчивости. В разделе 2.6 описаны следующие регулярные химерные режимы: стационарные однокластерные химеры, гибридные химеры с двумя участками осцилляторов с высокой степенью когерентности элементов, также приводится подробное обсуждение бризерных химер и механизма их возникновения. Турбулентные химеры и слабо хаотические режимы рассмотрены в разделе 2.7.

В **третьей главе** исследуется влияние однородного в пространстве внешнего периодического воздействия на химерные структуры в одномерной среде идентичных нелокально связанных фазовых осцилляторов. Раздел 3.1— введение. Математическое описание модели представлено в разделе 3.2, где также

обсуждаются базовые свойства химер на макроскопическом, мезоскопическом и микроскопическом уровнях описания системы. В разделе 3.3 описывается метод поиска и определения устойчивости захваченных внешним воздействием химер посредством сведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Затем в разделе 3.4 описываются различные стационарные, периодические и турбулентные химерные состояния, наблюдаемые при воздействии на среду внешним периодическим воздействием, подробно рассмотрены эффекты синхронизации и регуляризации.

В четвертой главе рассматриваются переход к когерентной динамике в ансамбле глобально связанных через общее импульсное поле активных ротаторов, а также вырожденные химерные состояния в двух связанных ансамблях осцилляторов типа «накопление-сброс». Раздел 4.1 — введение. В разделе 4.2 приведено математическое описание модели осцилляторов, связанных через общее импульсное поле. В разделе 4.3 рассмотрен переход к синхронизации в ансамбле глобально связанных активных ротаторов, описан эффект мультистабильности частично синхронных режимов. Далее в разделе 4.4 для распределенных ансамблей импульсно связанных осцилляторов типа «накопление-сброс» описывается эффект взаимной синхронизации средних полей, генерируемых популяциями, в области параметров, где их частоты существенно отличаются. При этом в системе наблюдается вырожденное химерное состояние, подробное описание которого приведено в пункте 4.4.3.

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и выводы.

Глава 1. Пространственно-однородные и частично синхронные режимы в распределенном ансамбле неидентичных фазовых осцилляторов

1.1. Введение

На данный момент распределенные системы, состоящие из неидентичных нелокально связанных фазовых осцилляторов, активно изучаются с различных точек зрения. Из большого числа публикаций, вышедших за последние два десятилетия по данному направлению исследования, здесь выделено лишь несколько ключевых работ [79; 82—86]. В [79; 87] описаны долгоживущие состояния, которые характеризуются присутствием областей с разной степенью когерентности элементов. Подобные пространственные структуры представляют собой аналогичные химерам режимы и трансформируются в них в пределах нулевого пространственного беспорядка. Так же там впервые показано, что для анализа данных режимов можно эффективно использовать методику Отта—Антонсена [76—78], которая позволяет получить самосогласованные динамические уравнения для мезоскопических комплексных полей, одним из которых является локальный параметр порядка. В статье [82] описывается обобщенная фазовая модель, которая может быть использована для описания сетей нелокально взаимодействующих между собой элементов, индивидуальные свойства которых различаются. При этом имеет место наличие в связи между двумя парами элементов запаздывания, выбираемого случайным образом, что вносит дополнительный беспорядок в рассматриваемую систему. Было показано, что если значения параметров близки к критическим, при которых однородное частично синхронное состояние становится неустойчивым, то исследуемый ансамбль осцилляторов в целом ряде случаев приходит к переходным режимам, которые отличаются наличием нескольких экстремумов в пространственном профиле усредненных величин, что указывает на то, что среда разбивается на регулярные (во времени) чередующиеся (в пространстве) участки с повышенной и пониженной степенью когерентности. В [88; 89] (в случае, когда среда состоит из идентичных элементов, см., например, публикации [83; 84]) проанализирован еще один из возможных типичных режимов, на который может выйти ансамбль осцилляторов. Далее будем называть его градиентным, т. к. при нем в среднем фаза в результате обхода замкнутой в кольцо системы увеличивается на $2\pi q$, где q — целое число. В статье [86] описаны состояния с нерегулярным поведением мезоскопических полей.

А так же предпринята попытка классифицировать наблюдаемые турбулентные режимы. В недавней работе [85] обсуждалось существование структурные особенности бризерных квазихимерных режимов в случае среды неидентичных фазовых элементов, которые характеризуются периодическим изменением во времени амплитуд комплексных мезоскопических полей в каждой точке пространства, и сосуществованием областей с повышенной и пониженной степенью когерентности. Кроме того, в большинстве из перечисленных публикаций в качестве ядер интегрального оператора, описывающего нелокальное взаимодействие, использовались либо функции с конечным числом членов в соответствующем ряде Фурье, либо прямоугольные распределения конечной ширины.

В данной главе наряду с изложением оригинальных результатов для ядер с экспоненциально спадающими хвостами предпринята так же попытка некоторой систематизации и обобщения ранее полученных данных и встречающихся в литературе сведений. В ней рассматриваются синхронные и асинхронные режимы и соответствующие им пространственно-временные структуры в ансамбле слабонеидентичных нелокально связанных фазовых осцилляторов, равномерно распределенных на кольце [90—92]. При теоретическом исследовании используется подход Отта—Антонсена [76—78]. Характер взаимодействия экспоненциального типа внутри среды позволяет перейти от интегро-дифференциального уравнения для параметра порядка к самосогласованной системе дифференциальных уравнений в частных производных для двух комплексных полей аналогично тому, как это было сделано в [73]. Численное моделирование проводится как в рамках исходной модели популяции, состоящей из большого количества фазовых осцилляторов с собственными частотами, выбранными случайно согласно распределению Лоренца, так и на базе замкнутых самосогласованных уравнений для усредненных величин.

Математическая постановка изучаемой проблемы приводится в разделе 1.2. Простейшие решения с постоянным по модулю значением параметра порядка описаны в разделе 1.3. Здесь речь идет об асинхронных и частично синхронных однородных режимах, а также о градиентных состояниях. В разделе 1.4 приводятся сначала базовые сведения и соотношения, лежащие в основе предлагаемого нами метода поиска стационарных (равномерно вращающихся) неоднородных решений уравнения Отта—Антонсена с периодическими граничными условиями. Далее представлены ключевые аспекты линейного анализа устойчивости данных нетривиальных пространственных структур, которым можно поставить

в соответствие квазихимерные статические состояния исходной фазовой модели. Затем обсуждаются основные моменты и преимущества процедуры построения семейств подобных образований с разным числом областей повышенной и пониженной когерентности и формулируются полученные в рамках такого подхода результаты. Кроме того, сделанные выводы подкрепляются прямым численным моделированием динамики распределенных фаз и локального комплексного параметра порядка. Классы возможных наблюдаемых режимов с более сложным (периодическим или нерегулярным) поведением (как в пространстве, так и во времени) мезоскопических полей обсуждаются в разделе 1.5. В Заключении подводятся итоги проведенного исследования.

1.2. Модель

Рассмотрим ансамбль из N нелокально связанных неидентичных осцилляторов ($n = 1, 2, \dots, N$), равномерно распределенных на отрезке длины L с периодическими граничными условиями на концах [79; 82; 84—87]. Данную систему будем описывать в рамках фазового приближения с помощью динамических переменных $\varphi_n(t)$, изменение каждой из которых во времени задается уравнением

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = \omega_n + \text{Im} \left(H_n(t) e^{-i\varphi_n(t)} \right), \quad (1.1)$$

где ω_n ($n = 1, 2, \dots, N$) — собственные частоты осцилляторов. Как и в большинстве работ [79; 80; 82; 84—87], предполагается, что величины ω_n выбраны случайным образом и имеют функцию распределения Лоренца (или Коши)

$$\pi g(\omega) = \gamma / \left((\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2 \right) \quad (1.2)$$

со средним значением ω_0 и полушириной γ .

Действующее на осцилляторы поле $H_n(t)$ имеет общий для всех элементов фазовый сдвиг α и определяется через дискретный оператор свертки:

$$H_n(t) = e^{-i\alpha} \frac{L}{N} \sum_{\tilde{n}=1}^N G \left(L(n - \tilde{n})/N \right) e^{i\varphi_{\tilde{n}}(t)}. \quad (1.3)$$

Его ядро $G(x)$ характеризует взаимодействие внутри обсуждаемой среды и удовлетворяет требованию единичной нормировки. В качестве $G(x)$ выбрана функция

$$G(x) = \kappa \cosh \left(\kappa(|x| - L/2) \right) / 2 \sinh \left(\kappa L/2 \right), \quad (1.4)$$

хорошо аппроксимирующая случай слабой нелокальной связи [73]. Она достаточно адекватно описывает эффекты, связанные с влиянием на произвольно выделенный элемент не только его ближайших соседей, но также и других (более далеких) осцилляторов. Естественно предположить, что это влияние относительно быстро уменьшается с увеличением расстояния между частицами. Особо подчеркнем, что выражение (1.4) в пределе $\kappa L \rightarrow +\infty$ переходит в экспоненциальное ядро $G_{\text{КВ}}(x) = \kappa \exp(-\kappa|x|/2)$ из классической работы Курамото и Баттогтоха [50]. Фактически, и $G_{\text{КВ}}(x)$, и $G(x)$ в форме (1.4) являются функцией Грина неоднородного уравнения Гельмгольца с источником в правой части. Однако в первом случае система считается распределенной на всем (бесконечном) интервале от $-\infty$ до $+\infty$, а вторая же ситуация отвечает среде конечной длины, замкнутой в кольцо, т. е. для которой выполнены периодические граничные условия.

Сделаем еще ряд замечаний, которые позволяют сократить число параметров в рассматриваемой системе. Так, например, совокупность соотношений (1.3) и (1.4) инвариантно относительно масштабных преобразований. Благодаря данному обстоятельству без ограничения общности коэффициент κ можно принять равным единице. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $\kappa = 1$, а сила связи между элементами, фактически, определяется длиной среды L . Кроме того, путем перехода во вращающуюся с угловой скоростью ω_0 систему координат несложно исключить ω_0 из обсуждения с точки зрения управляющих параметров. Следовательно, уже на этапе постановки задачи целесообразно положить значение ω_0 равным нулю, т. е. ниже $\omega_0 = 0$. Таким образом, для характерных режимов долговременной эволюции обсуждаемого ансамбля нелокально взаимодействующих осцилляторов определяющими являются три величины L , γ и α .

Сформулированная выше модель, состоящая из конечного числа N осцилляторов и описываемая уравнениями (1.1)–(1.4) имеет достаточно широкий спектр практических приложений в различных областях науки и техники [1; 2]. Однако для более глубокого понимания полученных в ходе расчетов результатов нередко бывает полезен и даже чаще всего оказывается необходим анализ динамических свойств и структурных особенностей изучаемой системы в термодинамическом пределе, когда считается, что в ней содержится бесконечно большое количество элементов, т. е. $N \rightarrow \infty$. В этом случае от выражений (1.1) и

(1.3) переходят к континуальному варианту их записи:

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t} = \omega + \text{Im} \left(H(x,t) e^{-i\varphi(x,t)} \right), \quad (1.5)$$

$$H(x,t) = e^{-i\alpha} \int_0^L G(x - \tilde{x}) e^{i\varphi(\tilde{x},t)} d\tilde{x}. \quad (1.6)$$

Здесь согласно нашему предположению в полном соответствии с исходной дискретной моделью величина ω в каждой точке x интервала от 0 до L задается независимо случайным образом с использованием вероятностного распределения (1.2). Обратим внимание также на то, что интеграл в представлении (1.6) комплексного поля $H(x,t)$, отвечающего за нелокальное взаимодействие, стоит воспринимать как предел интегральных сумм Лебега [93]. Таким образом, в (1.5) и (1.6) не требуется гладкости функции $\varphi(x,t)$ по пространственной координате x . Данной чертой отсутствия гладкости обладают все обсуждаемые режимы поведения среды фазовых осцилляторов, что существенно затрудняет задачу их анализа и классификации на микроскопическом уровне рассмотрения, ограничивающемся только соотношениями (1.1)–(1.6). Однако переход к мезоскопическим полям в пределе $N \rightarrow \infty$ дает возможность значительно продвинуться в решении этой задачи. Основные моменты такого перехода состоят в следующем.

С одной стороны с помощью процедуры усреднения (см., например, [49; 76–78; 94]) можно определить локальный параметр порядка $Z(x,t) = \langle e^{i\varphi} \rangle_{loc}$, представляющий собой непрерывную комплексную функцию координаты x и времени t и удовлетворяющую неравенству $|Z(x,t)| \leq 1$. В случае, когда $|Z(x,t)| = 1$, все осцилляторы, находящиеся вблизи точки x , синхронны по фазе. При выполнении условия $0 < |Z(x,t)| < 1$ принято говорить, что наблюдается режим частичной синхронизации. В этой ситуации в движении частиц наблюдаются корреляции. Равенство $|Z(x,t)| = 0$ указывает на то, что элементы ансамбля вращаются полностью асинхронно. Таким образом, как и для систем с глобальным взаимодействием, при исследовании систем с нелокальной связью комплексный параметр порядка $Z(x,t)$ играет важную роль, т.к. его амплитуда характеризует степень локальной синхронизации в популяции, а фаза дает представление о среднем значении, вокруг которого разбросана величина φ в окрестности точки с координатой x .

С другой стороны, ключевые аспекты эволюции осцилляторной среды в рамках обсуждаемой фазовой модели в термодинамическом пределе могут быть

описаны путем введения плотности вероятности $\rho(\varphi, \omega, x, t)$ распределения динамической переменной φ при заданном ω и определенных x, t . В частности, очевидно, что $Z(x, t)$ определяется непосредственно с помощью $\rho(\varphi, \omega, x, t)$ как

$$Z(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} \rho(\varphi, \omega, x, t) e^{i\varphi(x, t)} d\varphi d\omega. \quad (1.7)$$

В свою очередь, действительная функция $\rho(\varphi, \omega, x, t)$ должна удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\omega \rho + \text{Im}(H e^{-i\varphi}) \rho) = 0. \quad (1.8)$$

В работах [76; 77] для данного уравнения с $H = H(t)$ найдено притягивающее многообразие. В последствии разработанный в [76; 77] подход и полученные там результаты были обобщены на случай, когда действующее на элементы ансамбля поле H зависит не только от времени t , но и от пространственной координаты x , т. е. в (1.8) в такой ситуации $H = H(x, t)$ (см., например, ссылки [78; 79], а также обзор [49]). Здесь лишь кратко остановимся на базовой идеи этого метода и вытекающих из него следствиях.

Принимая во внимание то, что собственные частоты фазовых осцилляторов и в (1.1), и в (1.5) выбираются независимо, а также учитывая условие цикличности $\rho(\varphi, \omega, x, t) = \rho(\varphi + 2\pi, \omega, x, t)$, решение уравнения (1.8) целесообразно искать в виде разложения

$$\rho(\varphi, \omega, x, t) = \frac{g(\omega)}{2\pi} \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} [a_m(\omega, x, t) e^{im\varphi} + \text{c.c.}] \right), \quad (1.9)$$

являющегося, фактически, рядом Фурье по динамической переменной φ . В формуле (1.9) для комплексно сопряженных слагаемых использовано стандартное обозначение с. с. Для интересующего нас многообразия Отта—Антонсена (называемого так по фамилиям авторов статей [76; 77]) в спектральном представлении (1.9) все коэффициенты $a_m(\omega, x, t)$ с индексами $m > 1$ выражаются через множитель $a_1(\omega, x, t)$, стоящий при первой гармонике, путем возведения его в соответствующую степень:

$$a_m(\omega, x, t) = a_1^m(\omega, x, t). \quad (1.10)$$

При этом поведение $a_1(\omega, x, t)$ описывается уравнением

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} = -i\omega a_1 + \frac{1}{2} (H^* - H a_1^2), \quad (1.11)$$

в чем несложно убедиться с помощью прямой подстановки (1.9) совместно с (1.10) в (1.8).

Далее, следуя предложенной в [76; 77] (см. также [49; 78; 79]) общей концепции и задействовав в равенстве (1.7) разложение (1.9), легко устанавливается связь между $a_1(\omega, x, t)$ и $Z(x, t)$, из которой, воспользовавшись сделанным нами ранее предположением о том, что функция $g(\omega)$ имеет форму распределения Коши (1.2), после интегрирования по ω вытекает, что в данной ситуации $Z(x, t) = a_1^*(-i\gamma, x, t)$. Отметим, что здесь учтено, что $\omega_0 = 0$. Тогда, исходя из (1.11), для локального комплексного параметра порядка $Z(x, t)$ получаем эволюционное интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = -\gamma Z + \frac{1}{2}(H - H^* Z^2), \quad (1.12)$$

где $H(x, t)$ выражается уже непосредственно через $Z(x, t)$ с помощью оператора свертки:

$$H(x, t) = e^{-i\alpha} \int_0^L G(x - \tilde{x}) Z(\tilde{x}, t) d\tilde{x}, \quad (1.13)$$

а интеграл по пространству в (1.13) следует уже воспринимать в смысле Римана (в отличие от соотношения (1.6)). Кроме того, на многообразии Отта—Антонсена с учетом (1.2) по $Z(x, t)$ можно восстановить плотность вероятности $f(\varphi, x, t)$ разброса φ при определенных x и t [79; 87]:

$$\begin{aligned} f(\varphi, x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\varphi, \omega, x, t) d\omega = \\ &= \begin{cases} \delta(\varphi - \arg(Z)), & \text{если } |Z| = 1, \\ \frac{1 - |Z|^2}{2\pi(1 - 2|Z| \cos(\varphi - \arg(Z)) + |Z|^2)}, & \text{если } |Z| < 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (1.14)$$

применив формулу для суммы тригонометрической прогрессии. Это означает, что профилю $Z(x, t)$ можно поставить в соответствие распределение фаз $\varphi(x, t)$ (и наоборот, естественно, тоже) в любой заданный момент времени.

Все перечисленные выше обстоятельства делают методы, базирующиеся на идеях работ [76—78] и основное внимание уделяющие анализу поведения мезоскопических полей $Z(x, t)$ и $H(x, t)$, весьма эффективным инструментом изучения и предсказания возможных ключевых режимов поведения интересующей нас многочастичной модели (1.1)–(1.4). В представляемом далее материале нами сделан еще один шаг, позволяющий упростить исследование пространственной

структуры $Z(x,t)$ и $H(x,t)$. Используя для ядра $G(x)$ конкретный вид (1.4), от соотношения (1.13) несложно перейти к эквивалентному ему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - H = -Ze^{-i\alpha} \quad (1.15)$$

с периодическими граничными условиями на концах интервала $[0, L]$, а именно

$$H(0,t) = H(L,t), \quad \frac{\partial H}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial H}{\partial x}(L,t) = 0. \quad (1.16)$$

Таким образом, для исходной задачи (1.1)–(1.4) в пределе $N \rightarrow \infty$, построена редукция, заключающаяся в переходе от рассмотрения негладких профилей фаз к работе с непрерывными (на характерных масштабах среды) распределениями $Z(x,t)$ и $H(x,t)$. Как будет показано ниже, при анализе коллективных эффектов в системе (1.1)–(1.4), содержащих большое число элементов N , для более глубокого понимания протекающих процессов целесообразно изучать как динамику ансамбля фазовых осцилляторов, так и эволюцию комплексного локального параметра порядка $Z(x,t)$, задаваемого системой дифференциальных уравнений в частных производных (1.12), (1.15) с граничными условиями (1.16).

Прежде чем переходить к последовательному и подробному изложению материала кратко обозначим типичные устанавливающиеся в ходе численных расчетов режимы поведения замкнутой в кольцо среды нелокально взаимодействующих элементов. Выполненный в рамках модели (1.1)–(1.4) и проведенный на базе самосогласованных уравнений (1.12), (1.15) анализ показал существование следующих устойчивых структурно различных состояний:

- 1) полностью асинхронное состояние (рисунок 1.1,а,б);
- 2) однородное частично синхронное состояние (рисунок 1.1,в,г);
- 3) частично синхронное состояние с градиентным распределением фаз (рисунок 1.1,д,е);
- 4) пространственно-неоднородное кластерное частично синхронное состояние (рисунок 1.1,ж,з), в котором явным образом выделяется несколько (чаще всего статичных) участков с большей или меньшей степенью когерентности осцилляторов;
- 5) бризерный кластерный режим, когда сосуществует несколько синхронных кластеров с различной средней частотой (рисунок 1.1,и,к);

б) режим перемежаемости, когда на пространственно-временной диаграмме интервалы с нерегулярной динамикой усредненных полей сменяются продолжительными участками с их регулярным поведением (что можно трактовать как области кластерной синхронизации) (рисунок 1.1, л, м);

7) режим пространственно-временного со сложным нерегулярным поведением средних полей системы, когда не удается выделить протяженные временные интервалы, в течении которых наблюдается квазистатическая структура пространственных областей с различной степенью когерентности (рисунок 1.1, н, о).

Отметим, что первый и второй виды состояний в пределе бесконечно малого разброса собственных частот ($\gamma \rightarrow 0$) трансформируются в полностью синхронные, а образования, описанные в третьем и четвертом пунктах, для идентичных частиц превращаются в стационарные и бризерные химеры [49; 72; 73]. Подчеркнем также то, что рисунок 1.1 не полностью отражает все особенности последних двух из перечисленных режимов. Однако несложно заметить, что для таких состояний ансамбля с конечным количеством элементов N уровень фазовой когерентности меняется со временем в окрестности каждой пространственной точки, а в распределении средних частот не выделяются синхронные кластеры, состоящие из макроскопического числа осцилляторов.

Ниже, для того чтобы понять и объяснить специфику и условия установления каждого из режимов, наблюдаемых при прямом моделировании системы (1.1)–(1.4), будем придерживаться следующей стратегии. В первую очередь попытаемся найти в термодинамическом пределе соответствующие решения уравнения Отта—Антонсена (1.12), (1.15), (1.16) и проанализировать их устойчивость, а затем проведем проверку полученных аналитических результатов численно в рамках исходной модели (1.1)–(1.4).

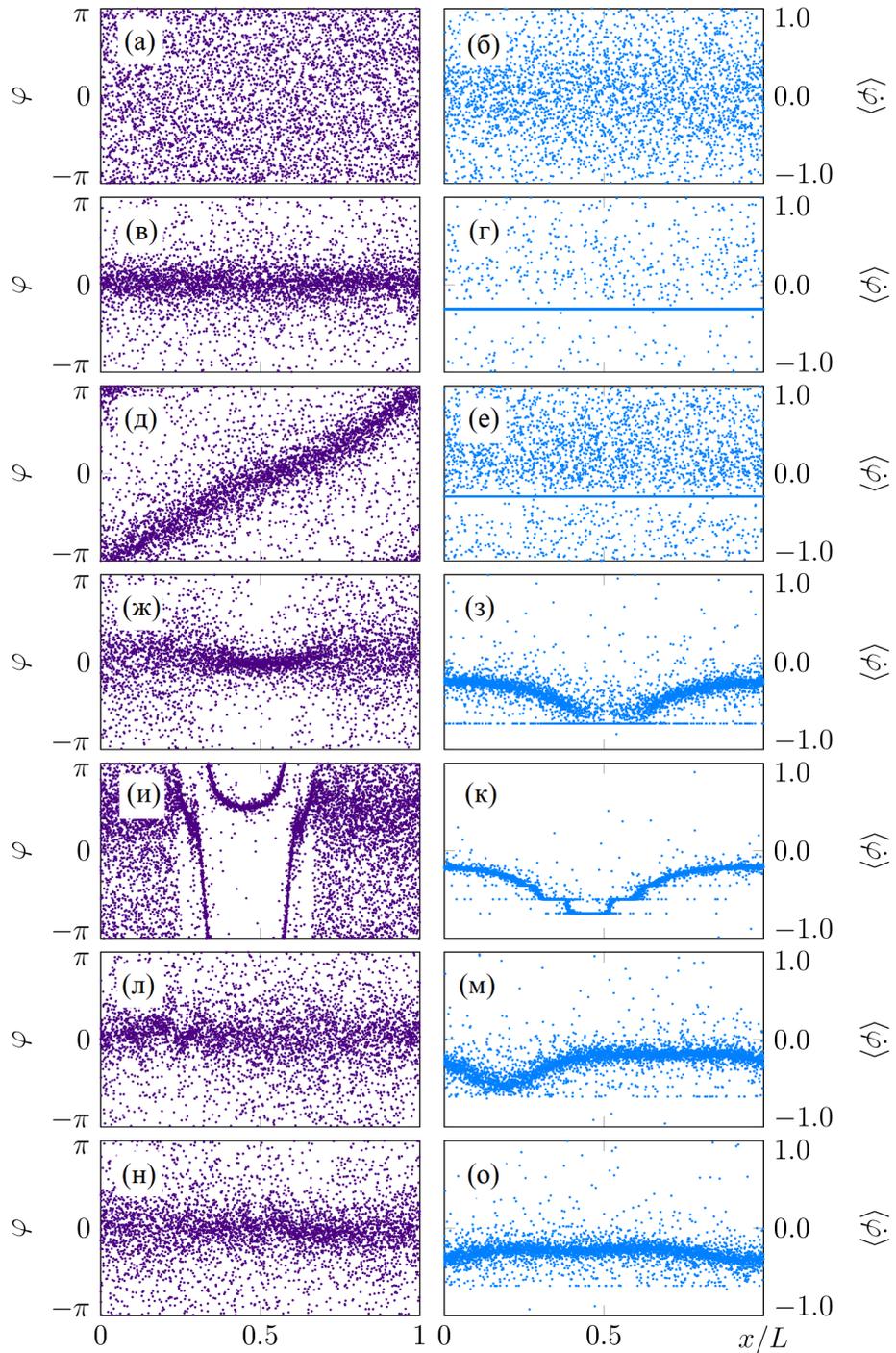


Рис. 1.1 — Режимы, реализующиеся в системе (1.1)–(1.4). Левая колонка — мгновенные снимки фаз φ_n . Правая колонка — средние частоты осцилляторов $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$. (а, б) Полностью асинхронное состояние при $\alpha = 0.2$, $\gamma = 0.5$, $L = 5.0$. (в, г) Однородный частично синхронный режим при $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.25$, $L = 6.0$. (д, е) Частично синхронный градиентный режим при $\alpha = 0.4$, $\gamma = 0.25$, $L = 25.0$. (ж, з) Режим кластерной синхронизации при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.02$, $L = 6.0$. (и, к) Бризерный кластерный режим при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.002$, $L = 7.005$. (л, м) Режим перемежаемости при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.02$, $L = 8.837$. (н, о) Пространственно-временной хаос при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.02$, $L = 16.655$

1.3. Состояния с равномерно распределенной по ансамблю степенью фазовой синхронизации соседних осцилляторов

1.3.1. Однородные состояния

Начнем наш анализ с рассмотрения наиболее простого класса решений самосогласованной системы уравнений (1.12), (1.15) с граничными условиями (1.16). Речь идет о стационарных однородных решениях, для которых модуль локального комплексного параметра порядка $Z(x,t)$ представляет собой постоянную величину, а фаза растет линейно со временем и не зависит от пространственной координаты x . При этом в исходной модели (1.1)–(1.4) наблюдается в среднем равномерное вращение значительной группы осцилляторов, а степень когерентности элементов в каждой точке среды одинакова. В данном случае функции $Z(x,t)$ и $H(x,t)$ будем искать в виде

$$Z(x,t) = z_0 e^{i\Omega t}, \quad H(x,t) = h_0 e^{i\Omega t}, \quad (1.17)$$

где с помощью z_0 и h_0 обозначены неизменные (согласно нашему предположению) амплитуды усредненных полей, Ω (здесь и в других ситуациях далее) играет роль параметра, который задает их общую несущую частоту. После подстановки (1.17) в соотношения (1.12) и (1.15) получим следующую связь между z_0 , h_0 и Ω :

$$2z_0(i\Omega + \gamma) = z_0(h_0 - h_0^* z_0^2), \quad h_0 = z_0 e^{-i\alpha}. \quad (1.18)$$

В первую очередь стоит отметить, что если $z_0 = h_0 = z_{as} = 0$, то очевидно, что алгебраические равенства (1.18) выполняются при любых α и γ и независимо от длины среды L . Кроме того, величина Ω остается неопределенной, т. е. существует некий произвол в ее выборе (в том числе Ω можно положить равной нулю). Такое тривиальное решение уравнений Отта—Антонсена (1.12), (1.15) отвечает полностью асинхронному поведению элементов в обсуждаемом ансамбле, когда фазы осцилляторов распределены равномерно в интервале от $-\pi$ до π в каждый момент времени.

Однако нас прежде всего интересуют установившиеся режимы, для которых мезоскопические характеристики распределенной популяции имеют конечные значения, что указывает на присутствие корреляций в движении соседних элементов. Из соотношений (1.18) непосредственно следует, что подобные частично синхронные состояния можно найти в рамках рассматриваемого здесь класса стационарных однородных решений. Существуют данные коллективные моды, когда

управляющие параметры α и γ удовлетворяют условию $2\gamma < \cos \alpha$ (т. к. γ является полушириной распределения собственных частот, то $\gamma \geq 0$). В этом случае легко убедиться в том, что равенствам (1.18) можно удовлетворить, если

$$|z_0|^2 = r_{hps}^2 = 1 - 2\gamma / \cos \alpha, \quad \Omega_{hps} = \gamma \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha. \quad (1.19)$$

Подчеркнем, что для (1.19) очевидным образом выполняется требование $|z_0| \leq 1$, которое вытекает из определения локального параметра порядка. Отметим также, что согласно выражениям (1.19) длина L системы не оказывает влияния на само наличие однородных частично когерентных режимов. Несмотря на то, что результаты численного моделирования во многом согласуются со сделанными в ходе проведенного выше анализа выводами (в частности, уровень синхронизации, вычисленный по данным расчетов в рамках модели (1.1)–(1.4), с достаточно хорошей степенью точности совпадает с оценкой (1.19)) для целого ряда ситуаций, когда, например, величина фазовой расстройки α близка к $\pi/2$ ($\alpha \lesssim \pi/2$), а γ чуть меньше $\cos \alpha/2$ ($\gamma \lesssim \cos \alpha/2$), однородные частично синхронные состояния перестают наблюдаться, начиная с некоторого значения L . Ниже будет представлено объяснение и сформулированы причины такого поведения исходной системы (1.1)–(1.4) на базе линейного анализа устойчивости стационарных решений (1.19) уравнений Отта—Антонсена (1.12), (1.15). Но перед этим рассмотрим еще один класс режимов, для которых уровень когерентности осцилляторов оказывается одинаковым вдоль всей среды.

1.3.2. Градиентные состояния

В случае идентичных осцилляторов, когда $\gamma = 0$, обсуждаемые в предыдущем разделе однородные частично когерентные состояния переходят в полностью синхронные, для которых $|Z(x,t)| = 1$ при каждом x в любой момент времени t , что непосредственно видно из соотношений (1.19) в пределе $\gamma \rightarrow 0$. Однако для распределенного в пространстве ансамбля, состоящего из нелокально взаимодействующих частиц с одинаковыми индивидуальными характеристиками, есть еще один режим с $|Z(x,t)| = 1$ всюду. Отличительной чертой данного режима является наличие постоянной разности фаз при переходе от точки к точке (для произвольно выбранного n выполняется равенство $\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t) = \Delta\varphi = \operatorname{const} \neq 0$), так что полный набег фазы при прохождении вдоль всей среды отличен от нуля. Подобное состояние в англоязычной литературе называют «*splay state*» [83; 88; 89].

Вполне естественно ожидать присутствия их аналогов при $\gamma \neq 0$ для исследуемой нами модели (1.1)–(1.4). Случайный разброс собственных частот осцилляторов конечно должен привести к тому, что распределение фаз тоже станет нерегулярным. Однако, несмотря на видимый беспорядок, степень которого зависит от γ , поведение мезоскопических полей останется тем же, что и при $\gamma = 0$, и в среднем общие тенденции (прежде всего наклон) в профиле $\varphi(x,t)$ (или $\varphi_n(t)$) сохранятся. Поэтому такие состояния далее будем называть градиентными. Отметим, что ранее уже предпринимались попытки их изучения, но для ядер $G(x)$ другого вида (см., например, [83; 84; 88; 89]).

Учитывая то, что для градиентных режимов, также как и для рассмотренных выше однородных состояний, характерно постоянное значением модуля локального параметра порядка $Z(x,t)$ по всей длине среды, будем искать поля $Z(x,t)$ и $H(x,t)$ в схожем с (1.17) виде

$$Z(x,t) = z_0 e^{i\Omega t - iQx}, \quad H(x,t) = h_0 e^{i\Omega t - iQx}, \quad (1.20)$$

с тем лишь отличием, что в (1.20) в показателе экспоненты появляется дополнительное слагаемое, пропорциональное пространственной координате x и ответственное за общий наклон фазового фронта функций $Z(x,t)$ и $H(x,t)$. Коэффициент Q такой линейной зависимости в силу периодических граничных условий должен быть определен как $Q = 2\pi q/L$, где целое (в интересующей нас здесь ситуации отличное от нуля) число q ($q = \pm 1, \pm 2, \dots$) указывает на количество оборотов на 2π , которое совершит усредненная фаза при полном обходе системы. Подставив (1.20) в уравнения Отта—Антонсена (1.12), (1.15) получим два алгебраических равенства

$$2(i\Omega + \gamma)z_0 = h_0 - h_0^* z_0^2, \quad (1 + Q^2)h_0 = z_0 e^{-i\alpha}, \quad (1.21)$$

для которых легко находится нетривиальное решение

$$|z_0|^2 = r_{gps}^2 = 1 - \frac{2\gamma(1+Q^2)}{\cos \alpha}, \quad \Omega_{gps} = \gamma \operatorname{tg} \alpha - \frac{\sin \alpha}{1+Q^2}, \quad (1.22)$$

отвечающее градиентным состояниям. Непосредственно из выражений (1.22) следует, что для наличия такого рода режимов необходимо, чтобы $\cos \alpha > 2\gamma$. Кроме того, из требования $r_{gps}^2 > 0$ вытекает условие на протяженность L распределенной популяции фазовых осцилляторов. Согласно этому условию градиентные состояния с числом оборотов q существуют, только когда размер L замкнутого в кольцо

ансамбля превышает критическое значение $L_{gps}(q)$, т. е.

$$L > L_{gps}(q) = 2\pi q \sqrt{2\gamma / (\cos \alpha - 2\gamma)}. \quad (1.23)$$

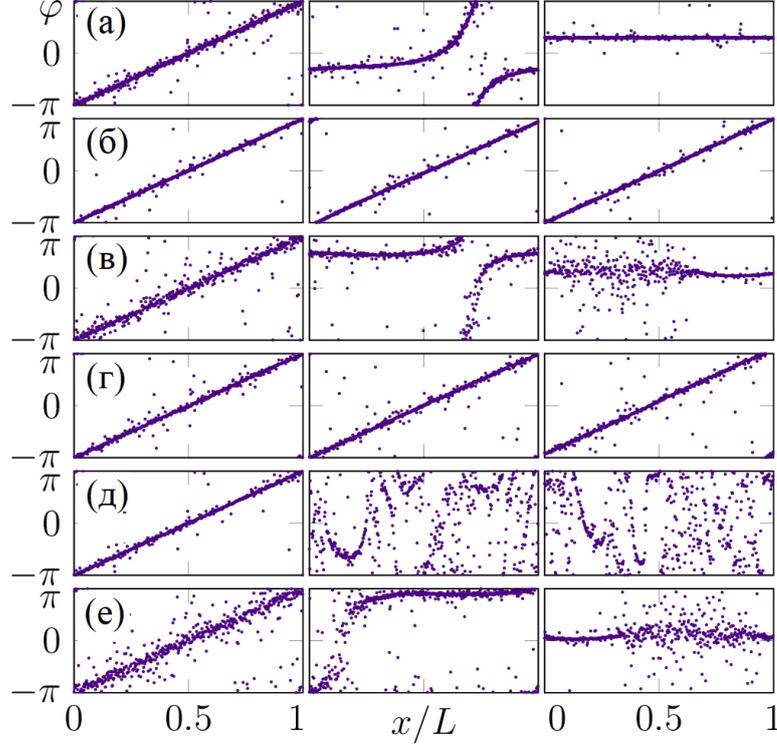


Рис. 1.2 — Эволюция градиентного частично синхронного режима. Результаты прямого численного моделирования системы (1.1)–(1.4) при $\alpha = 1.457$. Мгновенные снимки фаз φ_n для областей, представленных на рисунке 1.3. Область A : (а) неустойчивое ГС, эволюционирующее к однородному режиму с $|z| = r_{ps}$ при $\gamma = 0.001$, $L = 4$, (б) устойчивое ГС при $\gamma = 0.001$, $L = 14$; область B : (в) неустойчивое ГС, эволюционирующее к неоднородному режиму при $\gamma = 0.003$, $L = 4$, (г) устойчивое ГС при $\gamma = 0.003$, $L = 12$, (д) неустойчивое ГС, эволюционирующее к неоднородному режиму при $\gamma = 0.003$, $L = 28$; область C : (е) неустойчивое ГС, эволюционирующее к неоднородному режиму при $\gamma = 0.005$, $L = 4$

Заметим, что если формально в (1.22) положить q равным нулю, то выражения (1.22) совпадут с соотношениями (1.19). Данное обстоятельство лишний раз подтверждает взаимосвязь частично синхронных однородных и градиентных состояний. Однако их все-таки стоит выделять в два различных классов режимов.

В частности, в пользу подобной точки зрения говорит то, что такая важная в теории синхронизации характеристика как глобальный параметр порядка

$$\bar{\mathcal{Z}}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n}, \quad (1.24)$$

который в пределе $N \rightarrow \infty$ можно рассчитывать по формуле

$$\bar{\mathcal{Z}}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L Z(\tilde{x}, t) d\tilde{x}, \quad (1.25)$$

для однородных частично синхронных состояний его модуль принимает конечные значения, а для градиентных режимов всегда равен нулю, в чем несложно убедиться воспользовавшись (1.20). Подчеркнем также еще один момент, что для фиксированных α и γ в первом случае степень локальной когерентности всегда выше по сравнению со второй.

Численные расчеты, выполненные в рамках исходной модели (1.1)–(1.4), при определенном выборе пары значений α и γ демонстрируют хорошее согласие с рассмотренным выше описанием. Во-первых, выражается это в том, что частично синхронные градиентные состояния наблюдаются в течении длительных промежутков времени и остаются невосприимчивыми по отношению к малым возмущениям, т. е. представляют собой возможные стабильные варианты вращения фазовых осцилляторов (см. рисунок 1.1, д и 1.2). Во-вторых, степень локальной когерентности, о которой можно судить по абсолютной величине комплексного параметра порядка, вычисленного с помощью процедуры мезоскопического усреднения результатов прямого моделирования, достаточно адекватно воспроизводится формулой (1.22). Кроме того, точность оценки (1.22) становится выше с ростом числа N элементов в системе. Однако в численных расчетах не при всех $L > L_{gps}(q)$ удастся реализовать градиентные режимы. Так, например, на рисунке 1.2, а и 1.2, б показаны две ситуации, которые отвечают одному и тому же выбору α и γ ($\alpha = 1.457$ и $\gamma = 0.001$), но разным $L > L_{gps} \approx 0.841$ ($L = 4$ (рисунок 1.2, а) и $L = 14$ (рисунок 1.2, б)). Видно, что при $L = 4$ (рисунок 1.2, а) состояние с $q = 1$ числом оборотов средней фазы на 2π относительно быстро распадается и трансформируется в частично синхронный однородный режим. Когда же $L = 14$ (рисунок 1.2, б) такого процесса не происходит, и характерные особенности пространственного распределения динамических переменных $\varphi_n(t)$ не претерпевают существенных изменений на протяжении сколь угодно длительных временных отрезков. Похожий эффект, заключающийся в разрушении градиентного состояния,

несмотря на то, что размер среды L удовлетворяет условию существования (1.23), присутствует для $\alpha = 1.457$ и $\gamma = 0.003$ (см. рисунок 1.2, в, г, д). Хотя стоит отметить, что здесь в отличие от случая $\alpha = 1.457$ и $\gamma = 0.001$ разрушение сформированного в соответствии с (1.20), (1.22) и (1.14) профиля фаз происходит как в сравнительно коротких ($L = 4$, рисунок 1.2, в), так и протяженных популяциях ($L = 28$, рисунок 1.2, д), и лишь в некотором интервале длин L градиентные состояния оказываются устойчивыми. Для того чтобы объяснить теоретически наблюдаемые в численных расчетах особенности эволюции обсуждаемых режимов, требуется линейный анализ их устойчивости.

1.3.3. Устойчивость частично синхронных однородных и градиентных состояний

В данном разделе в термодинамическом пределе на базе редукции Отта—Антонсена проведем линейный анализ устойчивости рассмотренных выше режимов поведения системы нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов. Это позволит разрешить отмеченные ранее кажущиеся (но не существующие на самом деле) противоречия между развитым теоретическим описанием и проведенными численными расчетами. Указанный анализ выполним в рамках единого формализма, который является общим и может быть применен как для однородных, так и для градиентных состояний. Отметим, что для удобства и наглядности ниже будет использована эквивалентность уравнения (1.15) с периодическими граничными условиями (1.16) и оператора свертки с ядром (1.13).

Для того чтобы исследовать аналитически устойчивость обсуждаемых распределений осцилляторов во времени представим комплексные поля $Z(x, t)$ и $H(x, t)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} Z(x, t) &= \left(z_0 + \mathcal{Z}(x, t) \right) e^{i\Omega t - iQx}, \\ H(x, t) &= \left(h_0 + \mathcal{H}(x, t) \right) e^{i\Omega t - iQx}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Здесь явным образом учтены ключевые особенности интересующих нас профилей фаз, которым при фиксированной длине среды L отвечают стационарные решения уравнений Отта—Антонсена (1.12), (1.15), характеризующиеся параметрами Ω и Q . В выражениях (1.26) функции $\mathcal{Z}(x, t)$ и $\mathcal{H}(x, t)$ играют роль слабых (периодических по пространственной координате x) возмущений к однородному

состоянию при $Q = 0$ или к градиентному решению с $Q \neq 0$. Подставив (1.26) в соотношения (1.12), (1.13) и линеаризовав их вблизи z_0 и h_0 с учетом малости $\mathcal{Z}(x,t)$ и $\mathcal{H}(x,t)$, получим линейное интегро-дифференциальное уравнение с независимыми от x и t коэффициентами:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t} = -\left(\gamma + i\Omega + \frac{e^{i\alpha}|z_0|^2}{1+Q^2}\right)\mathcal{Z} + \frac{1}{2}(\mathcal{H} - |z_0|^2\mathcal{H}^*), \quad (1.27)$$

$$\mathcal{H}(x,t) = e^{-i\alpha} \int_0^L G(x-\tilde{x})e^{iQ(x-\tilde{x})}\mathcal{Z}(\tilde{x},t)d\tilde{x}. \quad (1.28)$$

Далее, следуя одному из вариантов стандартной процедуры анализа на устойчивость пространственно-временных структур, будем искать $\mathcal{Z}(x,t)$ как суперпозицию двух ортогональных компонент, записанных в факторизованной форме:

$$\mathcal{Z}(x,t) = \mathcal{A}(x)e^{\Lambda t} + \mathcal{B}^*(x)e^{\Lambda^*t}, \quad (1.29)$$

где комплексное число Λ , имеющее в общем случае как действительную, так и мнимую составляющие, полностью характеризует динамику каждого из слагаемых в сумме (1.29). В силу предположения о том, что рассматриваемая нами система замкнута в кольцо, т. е. на концах отрезка $[0, L)$ выполняются периодические граничные условия, а также благодаря постоянству множителей во всех членах с \mathcal{Z} и \mathcal{H} в соотношении (1.29), в качестве $\mathcal{A}(x)$ и $\mathcal{B}(x)$ можно выбрать функции, пропорциональные e^{iKx} :

$$\mathcal{A}(x) = ae^{iKx}, \quad \mathcal{B}(x) = be^{iKx}, \quad (1.30)$$

где волновые числа $K = 2\pi k/L$ с $k = 0, 1, 2, \dots$ определяют пространственный период моды, который не превосходит продольный размер L системы. Тогда после подстановки (1.29), (1.30) в (1.27), (1.28) останется рассчитать постоянные комплексные амплитуды a и b , а требование существования нетривиальных решений, для которых хотя бы одна из этих амплитуд отлична от нуля, позволит определить соответствующие величины Λ . В результате получим задачу на собственные вектора $\boldsymbol{\xi} = (a, b)^T$ и собственные значения Λ 2×2 — матрицы $\hat{\mathbf{P}}$:

$$\Lambda \boldsymbol{\xi} = \hat{\mathbf{P}} \boldsymbol{\xi}, \quad \hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad (1.31)$$

где

$$\begin{aligned}
 p_{11} &= -\gamma - i\Omega - \frac{e^{i\alpha}|z_0|^2}{1+Q^2} + \frac{e^{-i\alpha}}{2(1+(K-Q)^2)}, \\
 p_{12} &= -\frac{e^{i\alpha}|z_0|^2}{2(1+(K+Q)^2)}, \quad p_{21} = -\frac{e^{-i\alpha}|z_0|^2}{2(1+(K-Q)^2)}, \\
 p_{22} &= -\gamma + i\Omega - \frac{e^{-i\alpha}|z_0|^2}{1+Q^2} + \frac{e^{i\alpha}}{2(1+(K+Q)^2)}.
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Из (1.31) непосредственно вытекает, что для нахождения Λ требуется решить квадратное уравнение, пара корней которого записывается напрямую через след $\text{Tr } \hat{\mathbf{P}}$ и детерминант $\det \hat{\mathbf{P}}$ только что введенной матрицы $\hat{\mathbf{P}}$:

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{Tr } \hat{\mathbf{P}} \pm \sqrt{(\text{Tr } \hat{\mathbf{P}})^2 - 4 \det \hat{\mathbf{P}}} \right). \tag{1.33}$$

Исходя из последнего выражения, несложно сделать вывод об устойчивости режимов с однородным распределением модуля комплексного параметра порядка. Если действительная часть Λ_1 или Λ_2 оказывается положительной, то согласно (1.29) малые возмущения должны экспоненциально нарастать с течением времени.

Теперь на основе выработанного выше критерия определим характер поведения отклонений $\mathcal{Z}(x,t)$ от z_0 , отвечающих одному из трех рассмотренных ранее режимов, а именно, полностью асинхронному, частично синхронному однородному и градиентному состояниям. Резюмирующим отражением описанных выше результатов служит рисунок 1.3.

Полностью асинхронный режим с $|z_0| = z_{as}$ притягивает к себе лежащие вблизи траектории системы, если $\cos \alpha < 2\gamma$, при любой длине среды L , так что в процессе долговременной эволюции реализуется ситуация, при которой отсутствуют какие-либо корреляции фаз отдельных элементов. В противном случае, когда $\cos \alpha > 2\gamma$, асинхронный режим оказывается неустойчивым (рисунок 1.3,а,б). К развитию данной неустойчивости приводят однородные по пространству линейные моды с $K = 0$. Отметим, что данный результат является универсальным для стандартных видов ядер, используемых для описания нелокального взаимодействия между элементами популяции, что полностью совпадает с выводом работы [84], где подробно обсуждалась динамика тривиального режима с $|z_0| = z_{as} = 0$ для функции связи $G(x)$ прямоугольной формы. Отметим также, что такого рода неустойчивость достаточно распространена в нелинейных распределенных моделях и носит имя Экхауса в честь автора монографии [95].

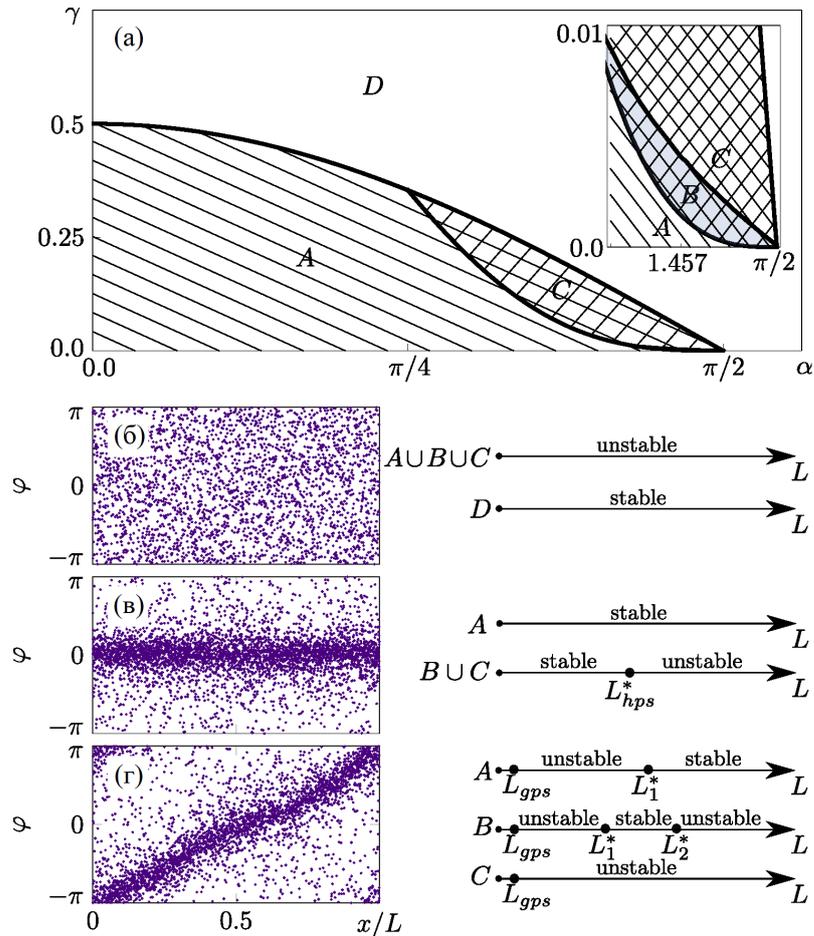


Рис. 1.3 — (а) Области (на плоскости от параметров α и γ) существования и устойчивости режимов с равномерным распределением по ансамблю уровнем синхронизации. Для таких режимов амплитуда локального параметра порядка $Z(x,t)$ одинакова для любой точки среды в каждый момент времени. (б) Асинхронное состояние существует при всех α и γ вне зависимости от длины среды. Неустойчиво в областях A (часть плоскости α, γ с одинарной штриховкой), B (затененная область с двойной штриховкой) и C (светлая область с двойной штриховкой) и устойчиво в области D (часть области α, γ без штриховки). (в) Однородное частично синхронное состояние существует и устойчиво при всех L , если пара величин α и γ выбрана из области A . Если же точка α, γ лежит в областях B или C , то существует критическое значение, начиная с которого данный режим становится неустойчивым. В области D такие состояния отсутствуют. (г) Градиентное частично синхронное состояние существует только в областях A, B и C , когда $L > L_{gps}$. Этот режим устойчив в областях A и B , если $L > L_1^*$ и $L_1^* < L < L_2^*$, соответственно. В области C градиентное состояние всюду неустойчиво

Для частично когерентных состояний с $Q = 0$, $|z_0| = r_{hps}$ и $\Omega = \Omega_{hps}$ (см. формулу (1.19)), возникающих при тех же условиях, при которых асинхронный режим теряет свою устойчивость, аналогичным образом несложно изучить поведение малых возмущений $\mathcal{Z}(x, t)$ в форме (1.29), (1.30). Воспользовавшись выражениями (1.19), (1.31), (1.32) и (1.33), после ряда алгебраических преобразований получим

$$\begin{aligned} \Lambda_{1,2} = & \gamma - \cos \alpha (1 - I(K)/2) \pm \\ & \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I(K)(1 - 2\gamma/\cos \alpha))^2 - (2\gamma \operatorname{tg} \alpha - I(K) \sin \alpha)^2}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

где $I(K) = (1 + K^2)^{-1}$ представляет собой коэффициент, к умножению на который сводится оператор свертки в (1.28), если считать, что $\mathcal{H}(x, t) \sim e^{iKx}$ так же как и $\mathcal{Z}(x, t)$ пропорционально e^{iKx} . Анализ выражений (1.34) показывает, что при $\gamma < (\cos \alpha)^3$ однородный частично синхронный режим является устойчивым для любого значения L . В случае, когда $\gamma > (\cos \alpha)^3$, для подобного состояния, существующего лишь при $\gamma < \cos \alpha$, условие $\operatorname{Re} \Lambda < 0$ оказывается выполненным, только если $K = 2\pi m/L$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) больше некоторого критического значения $K_{hps}^*(\alpha, \gamma)$. Это означает, что имеется предельная длина $L_{hps}^*(\alpha, \gamma)$, при превышении которой соответствующие пространственно-однородные режимы поведения системы неустойчивы

$$L_{hps}^* = 2\pi \sqrt{\frac{\cos^4 \alpha - 2\gamma \cos^3 \alpha + \gamma^2}{(\cos \alpha - 2\gamma)(\gamma - \cos^3 \alpha)}}. \quad (1.35)$$

Что касается градиентных состояний, каждое из которых определяется своим $Q = 2\pi q/L$ ($q = \pm 1, \pm 2, \dots$) и формулами (1.22) для $|z_0| = r_{gps}$ и Ω_{gps} , то исследование их устойчивости и соответствующие результаты выглядят несколько сложнее. Так, детальный анализ собственных значений $\Lambda_{1,2}$ показывает, что в зависимости от значений параметров α и γ можно выделить различные ситуации, качественное отображение которых представлено на рисунке 1.3,г. На рисунке 1.3,а для случая $q = \pm 1$ указаны границы областей, отвечающих данным трем ситуациям. Если α и γ выбирать из той части плоскости, которая имеет одинарную штриховку (область А), то существует критическая длина L_1^* такая, что при $L < L_1^*$ градиентный режим неустойчив, а при $L > L_1^*$, наоборот, устойчив. Это подтверждают и прямые численные расчеты в рамках модели (1.1)–(1.4) (см., например, рисунок 1.2,а,б). Для тонкого слоя В имеется два критических значения длины L_1^* и L_2^* . При этом состояние с набегом фазы на 2π устойчиво в интервале

$L_1^* < L < L_2^*$ (рисунок 1.2,г) и неустойчиво при $L < L_1^*$ (рисунок 1.2,в), $L > L_2^*$ (рисунок 1.2,д). В области C градиентный режим неустойчив для любого значения L (рисунок 1.2,е). Отметим, что здесь выписать явные выражения для L_1^* , L_2^* не удастся, и приходится их находить численно.

В заключении данного раздела подчеркнем, что найденные условия существования и устойчивости режимов с пространственно-однородной степенью синхронизации фазовых осцилляторов, а также наличие различных критических значений для длины среды теперь хорошо объясняют поведение системы (1.1)–(1.4), демонстрируемое при прямых численных расчетах (см. рисунок 1.2). Однако в процессе долговременной эволюции также могут устанавливаться и менее тривиальные состояния, речь о которых пойдет в следующих параграфах.

1.4. Стационарные неоднородные решения

Исследуем в общем виде стационарные (по модулю) решения, для которых комплексные функции $Z(x,t)$ и $H(x,t)$ имеют следующий вид:

$$Z(x,t) = z(x)e^{i\Omega t}, \quad H(x,t) = h(x)e^{i\Omega t}. \quad (1.36)$$

Данные решения представляют собой равномерно вращающиеся с частотой Ω пространственные структуры.

Представим далее процедуру построения вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, периодические решения которой определяют профиль решений $z(x)$, $h(x)$. Аналогичный метод разработан и использовался нами в [73]. Для начала подставим выражения (1.36) для функций $Z(x,t)$ и $H(x,t)$ в уравнения (1.12) и (1.15) и перейдем к следующей системе:

$$\begin{aligned} 2(-i\Omega - \gamma)z + h - h^*z^2 &= 0, \\ h'' - h + ze^{-i\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Здесь штрихом обозначена производная по координате x . Выразим h из первого уравнения системы (1.37)

$$h = 2 \left(\frac{i\Omega}{1 + |z|^2} + \frac{\gamma}{1 - |z|^2} \right) z \quad (1.38)$$

и представим комплексную переменную $z(x)$ в виде

$$z(x) = r(x)e^{i\theta(x)}, \quad (1.39)$$

где функции $r(x)$ и $\theta(x)$ являются действительными. Тогда

$$h = 2re^{i\theta} \left(\frac{i\Omega}{1+r^2} + \frac{\gamma}{1-r^2} \right). \quad (1.40)$$

Подставим (1.40) во второе уравнение системы (1.37), разделим мнимую и действительную часть и перейдем к системе двух уравнений 2-го порядка:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma(1+r^2)}{(1-r^2)^2} r'' - \frac{\Omega r}{1+r^2} \theta'' - \frac{2\Omega(1-r^2)}{(1+r^2)^2} r' \theta' + \\ & + \frac{2\gamma r(r^2+3)}{(1-r^2)^3} (r')^2 - \frac{\gamma r}{1-r^2} (\theta')^2 = \frac{\gamma r}{1-r^2} - \frac{r}{2} \cos(\alpha), \\ & \frac{\Omega(1-r^2)}{(1+r^2)^2} r'' + \frac{\gamma r}{1-r^2} \theta'' + \frac{2\gamma(1+r^2)}{(1-r^2)^2} r' \theta' + \\ & + \frac{2\Omega r(r^2-3)}{(1+r^2)^3} (r')^2 - \frac{\Omega r}{1+r^2} (\theta')^2 = \frac{\Omega r}{1+r^2} + \frac{r}{2} \sin(\alpha). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Сделаем замену $v = r^2 \theta'$, $u = r'$, тогда система (1.41) будет иметь вид

$$\begin{aligned} r' &= u, \\ u' &= \frac{1}{\gamma^2(1+r^2)^4 + \Omega^2(1-r^2)^4} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{-2ru^2(\gamma^2(r^2+3)(1+r^2)^4 + \Omega^2(r^2-3)(1-r^2)^4)}{1-r^4} - \right. \\ & - 8\gamma\Omega vu(1-r^4) + \frac{v^2+r^4}{r^3} (\gamma^2(1+r^2)^2 + \Omega^2(1-r^2))(1-r^4) + \\ & \left. + \frac{r}{2} (-\gamma(1+r^2)\cos(\alpha) + \Omega(1-r^2)\sin(\alpha))(1-r^4)^2 \right], \\ v' &= \frac{1}{\gamma^2(1+r^2)^4 + \Omega^2(1-r^2)^4} \cdot \\ & \cdot \left[\frac{4vru^2(\Omega^2(1-r^2)^5 - \gamma^2(1+r^2)^5)}{1-r^4} + 4\gamma\Omega(3r^2u^2 + v^2 + r^4)(1-r^4) + \right. \\ & \left. + \frac{r^2}{2} (\Omega(1-r^2)^3 \cos(\alpha) + \gamma(1+r^2)^3 \sin(\alpha))(1-r^4) \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Система (1.42) представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений 3-го порядка с параметрами Ω , α , γ . Отметим, что понижение размерности системы (1.41) удастся осуществить за счет того, что функция $\theta(x)$ определена с точностью до постоянного слагаемого. По этой же причине без ограничения общности можно положить $\theta(0) = 0$. В силу периодических граничных условий (1.16), в системе (1.42) нас будут интересовать периодические

решения. Ограничимся случаем симметричных периодических решений, удовлетворяющих следующим условиям

$$r(0) = r(L), \quad v(0) = v(L) = 0, \quad u(0) = u(L) = 0. \quad (1.43)$$

Данные решения соответствуют пространственным профилям $z(x)$ и $h(x)$, которые вместе с соответствующим значением параметра Ω определяют вид стационарного решения (1.36). Длина периодической траектории L представляет собой длину среды, где реализуется решение (1.36).

Не все решения системы (1.42), подчиняющиеся условиям (1.43), являются физически реализуемыми. Должно выполняться условие $|r| \leq 1$, так как, очевидно, $|z| \leq 1$. Таким образом, задача о нахождении симметричных стационарных решений (1.36) системы (1.12), (1.15) с граничными условиями (1.16) может быть сведена к нахождению периодических траекторий системы (1.42), для которых выполняются условия (1.43).

Проведем далее линейный анализ устойчивости во времени стационарных состояний (1.36). Для этого линеаризуем интегро-дифференциальное уравнение (1.12) вблизи одного из его стационарных решений (1.36), характеризующихся параметром Ω и длиной L . Для этого представим $Z(x,t)$ в виде

$$Z(x,t) = (z(x) + \mathcal{Z}(x,t)) e^{i\Omega t}, \quad (1.44)$$

где $\mathcal{Z}(x,t)$ описывает периодические по x малые отклонения от профиля $z(x)$ [72; 73]. Аналогично представим $H(x,t)$ в виде

$$H(x,t) = (h(x) + \mathcal{H}(x,t)) e^{i\Omega t}. \quad (1.45)$$

В результате линеаризации получаем выражение, определяющее динамику $\mathcal{Z}(x,t)$:

$$\frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t} = -(\gamma + i\Omega + h^* z) \mathcal{Z} + \frac{1}{2} (\mathcal{H} - \mathcal{H}^* z^2), \quad (1.46)$$

где $\mathcal{H}(x,t)$ связано с $\mathcal{Z}(x,t)$ аналогично (1.13). Выделим мнимую и действительную компоненты $\mathcal{Z}(x,t) = \xi_1(x,t) + i\xi_2(x,t)$ и перепишем уравнение (1.46) как систему уравнений относительно вещественной вектор-функции $\xi(x,t) = (\xi_1(x,t), \xi_2(x,t))^T$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi(x,t) = [\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}] \xi(x,t), \quad (1.47)$$

где $\hat{\mathbf{M}}$ и $\hat{\mathbf{K}}$ — мультипликативный и интегральный операторы, соответственно:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mu_1(x) & -\mu_2(x) \\ \mu_2(x) & \mu_1(x) \end{pmatrix}, \quad (1.48)$$

$$\hat{\mathbf{K}} \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \varkappa_{11}(x) & \varkappa_{12}(x) \\ \varkappa_{21}(x) & \varkappa_{22}(x) \end{pmatrix} \int G(x - \tilde{x}) \boldsymbol{\xi}(\tilde{x}) d\tilde{x},$$

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= -\operatorname{Re}(z(x)h^*(x)) - \gamma, \\ \mu_2(x) &= -\operatorname{Im}(z(x)h^*(x)) - \Omega, \\ \varkappa_{11}(x) &= (\cos \alpha - \operatorname{Re}(e^{i\alpha}z^2(x)))/2, \\ \varkappa_{12}(x) &= (\sin \alpha - \operatorname{Im}(e^{i\alpha}z^2(x)))/2, \\ \varkappa_{21}(x) &= \varkappa_{12} - \sin \alpha, \\ \varkappa_{22}(x) &= \cos \alpha - \varkappa_{11}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Для определения поведения возмущений $\mathcal{Z}(x, t)$ достаточно найти собственные значения λ оператора $[\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}]$. Известно, что спектр собственных значений λ данного оператора состоит из существенной λ_e и точечной λ_p составляющих, причем существенная составляющая λ_e совпадает со спектром собственных значений оператора $\hat{\mathbf{M}}$ [72—74]. Несложно проверить, что собственные значения λ_e удовлетворяют условию $\operatorname{Re}(\lambda_e) < 0$. Следовательно, за линейную устойчивость пространственного профиля $z(x)$, $h(x)$ отвечают только значения точечного спектра λ_p .

1.4.1. Поиск неоднородных решений

Приведем процедуру поиска неоднородных стационарных состояний (1.36), основанную на определении периодических траекторий системы (1.42), удовлетворяющих условию (1.43). Система (1.42) представляет собой систему ОДУ третьего порядка с параметрами Ω , α , γ . Для её анализа будем рассматривать сечение Пуанкаре $u = 0$, $u' > 0$. Интегрируя систему (1.42) с начальными условиями, удовлетворяющими $u(0) = 0$ и $q(0) = 0$, будем отображать все точки, для которых $u = 0$, $u' > 0$ на плоскости (r, v) . Неподвижные точки периода p построенного отображения будут соответствовать искомым периодическим траекториям системы (1.42) и, следовательно, симметричным пространственно-неоднородным решениям (1.36) с p максимумами модуля параметра порядка $|z(x)|$. Длина найденной траектории L совпадает с длиной среды, в которой может реализоваться

данное решение. Заметим, что в случае стремления параметра неоднородности γ к нулю, неоднородные решения могут трансформироваться в состояния, для которых существуют области с полностью синхронными элементами, т.е. так называемым химерным состоянием. Случай $\gamma = 0$ (там сечением была плоскость $(r = |h|, v)$) был исследован в [73], однако в том случае значения функции $|h(x)|$ не были ограничены, и анализ сечения Пуанкаре значительно усложнялся. При $\gamma > 0$ множество $|r| = 1$ является недостижимым, поэтому для интересующих нас решений выполняется условие $|r| < 1$, что позволяет нам значительно сократить область поиска неподвижных точек.

В качестве примера исследуем неподвижные точки отображения Пуанкаре для фиксированных значений $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.02$ и различных Ω (см. рисунок 1.4). Для данных значений параметров в системе существует однородное частично синхронное состояние с $\Omega = \Omega_{hps} \approx -0.81854$. На сечении Пуанкаре (r, v) ему соответствует неподвижная точка с координатами $(r_{hps}, 0)$. При уменьшении значения параметра Ω данная неподвижная точка претерпевает бифуркацию, в результате которой возникают 3 неподвижные точки: эллиптическая $(r_1, 0)$ периода $p = 1$ и две седловые точки (r_2, v_2) , $(r_2, -v_2)$, при этом замкнутым инвариантным траекториям отвечают квазипериодические решения системы (1.42) (рисунок 1.4,а). Неподвижная точка $(r_1, 0)$ соответствует неоднородному частично синхронному состоянию $z = z_1(x)$ с одним максимумом модуля параметра порядка $|z(x)|$. При дальнейшем увеличении параметра Ω на инвариантных траекториях в результате резонансов возникают периодические точки различных периодов (рисунок 1.4,б). Причем в случае перекрытия резонансов образуются области хаотической динамики [96]. На отображении Пуанкаре рядом с сепаратрисами седловых точек при этом можно наблюдать так называемые стохастические слои (рисунок 1.4,б,в). Далее при $\Omega \approx 0.648$ из точки $(r_1, 0)$ рождается две эллиптические точки, а она при этом становится седловой (рисунок 1.4,в). Обратим внимание, что существует множество неподвижных точек отображения Пуанкаре с координатами $(r, 0)$, которым соответствуют различные стационарные решения системы (1.12) и (1.15).

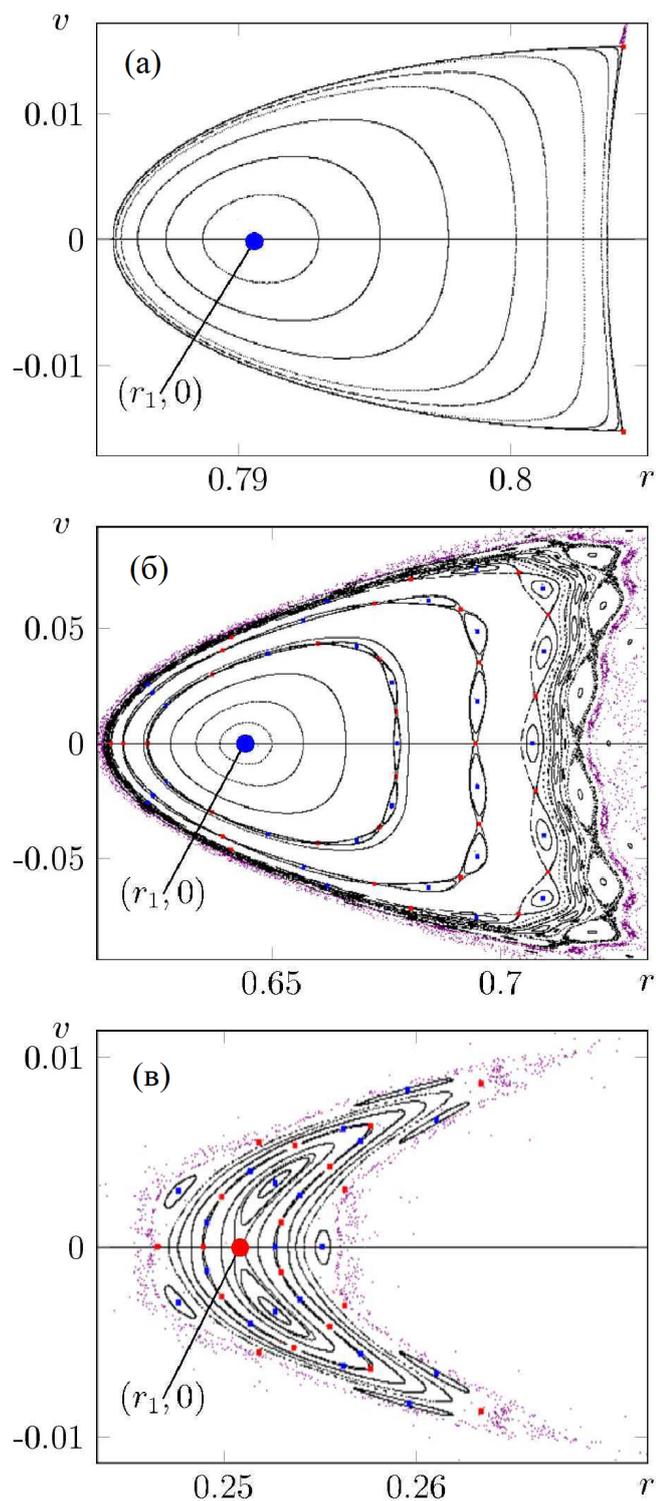


Рис. 1.4 — Отображение Пуанкаре для системы (1.42) при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.020$. Условия для сечения: $u = 0$, $u' > 0$. Эллиптические (синие маркеры) и гиперболические седловые (красные маркеры) неподвижные точки. (а) $\Omega = -0.8185$. (б) $\Omega = -0.78$. (в) $\Omega = -0.647$. Неподвижная точка $(r_1, 0)$ соответствует неоднородному решению (1.36) с одним максимумом $|z(x)|$. Черные (фиолетовые) точки обозначают траектории, не покидающие (покидающие) области на плоскости (r, v) , отображаемые на фрагментах (а — в)

При дальнейшем увеличении параметра Ω все траектории (кроме устойчивых сепаратрис) вблизи седловой точки $(r_1, 0)$ быстро покидают ее окрестность. Поиск неподвижной точки с помощью описанного метода усложняется в силу того, что ее максимальный по модулю мультипликатор значительно превышает единицу. Аналогичное поведение наблюдается в окрестности остальных седловых точек большего периода, которые расположены на оси $v = 0$.

Полученные распределения использовались для задания начальных условий при моделировании исходной системы. На рисунке 1.5 представлена бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (L, Ω) для однородных частично синхронных (ветвь A) и простейших неоднородных с одним (ветвь B_1), двумя (ветви C_1 и C_2) и тремя (ветви D_1 и D_2) максимумами модуля параметра порядка $|z(x)|$ стационарных решений для $\alpha = 1.457$ и нескольких значений γ . Ветвь неоднородного частично синхронного режима B_1 рождается из однородного частично синхронного режима при потере им устойчивости ($L = L_{hps}$). Ветвь B_2 (B_3) соответствует удвоенному (утроенному) неоднородному режиму с ветви B_1 , расположенному соответствующее число раз в среде с удвоенной (утроенной) длиной. Решения с ветви C_1 удовлетворяют условию $|z(x)| > 0$. Данный режим при возрастании длины L рождается из ветви B_2 и переходит в ветвь C_2 . Ветвь C_2 обозначает неоднородные режимы с $p = 2$, для которых существует две точки в пространстве с $|z| = 0$. Ветви D_1 и D_2 соответствуют режимам с $p = 3$ и рождаются из ветви B_3 . Среди данных обнаруженных неоднородных состояний устойчивым оказался лишь режим с $p = 1$ при некоторых значениях параметров (см. рисунок 1.5).

Следует отметить, что в зависимости от величины γ переходы от однородного частично синхронного к кластерному режиму существенно отличаются. В случае сильных частотных расстройек (большие γ) (рисунок 1.5,б,в) переход происходит мягко. В случае слабых частотных расстройек (малые γ) переход является жестким, имеет место гистерезис (рисунок 1.5,а, см. переход от ветви A к ветви B_1).

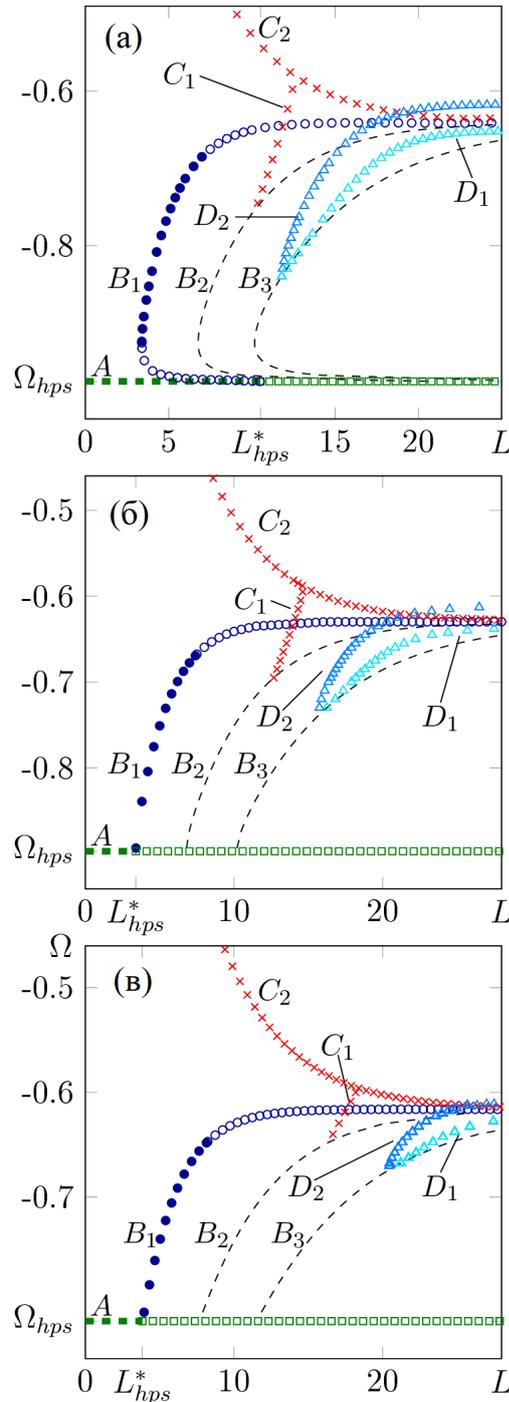


Рис. 1.5 — Бифуркационная диаграмма стационарных решений (1.36) уравнений Отта—Антонсена (1.12), (1.13) при $\alpha = 1.457$. (а) $\gamma = 0.002$. (б) $\gamma = 0.011$. (в) $\gamma = 0.020$. Пунктиром (A) — однородное частично синхронное состояние. Круглые маркеры (B_1) — неоднородное частично синхронное состояние с одним максимумом $|z(x)|$, х-маркеры (C_1, C_2) — с двумя максимумами, треугольные маркеры (D_1, D_2) — с тремя максимумами $|z(x)|$. Закрашенные (пустые) маркеры — устойчивые (неустойчивые) режимы. Линии B_2 и B_3 — неоднородное частично синхронное состояние с одним максимумом $|z(x)|$ с удвоенной и утроенной длиной среды, соответственно

1.5. Неоднородные пространственно-временные режимы

Перейдем далее к описанию стационарных режимов с неоднородным распределением параметра порядка $Z(x, t)$ по пространству. В данном разделе приведем результаты прямого численного моделирования исходной системы фазовых уравнений (1.1)–(1.4). Реализующиеся при этом динамические режимы будут проинтерпретированы как с точки зрения локального параметра порядка, так и с точки зрения свойств движения отдельных осцилляторов.

1.5.1. Кластерная синхронизация и бризерные режимы

Рассмотрим сначала неоднородные решения с числом максимумов $p = 1$. Как было указано ранее, им на бифуркационной диаграмме (рисунок 1.5) соответствуют ветви B_1 . Местоположение каждого максимума соответствует местоположению кластера частично синхронных осцилляторов (рисунок 1.1, д, е), т.е. элементов, часть которых имеет одинаковую среднюю частоту $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$, а остальные могут от нее отличаться (для кластера полностью синхронных элементов с $|z| = 1$ все средние частоты осцилляторов совпадают и равняются Ω). При этом чем ближе величина максимума к единице, тем более выражена синхронность осцилляторов в кластере.

Останавливаясь далее на значении параметра фазового сдвига $\alpha = 1.457$, рассмотрим случай $\gamma = 0.002$ (рисунок 1.5, а). При этом ветвь B_1 возникает при $\Omega = \Omega_{hps} = -0.9276$ из однородного частично синхронного режима. На данной ветви существует устойчивый интервал $-0.9241 < \Omega < -0.6851$ ($3.3882 < L < 7.0$). На рисунке 1.6, а представлены профили $|z(x)|$ и $|h(x)|$, а на рисунке 1.6, б соответствующее им распределение мгновенных фаз φ_n для $\Omega = -0.7$. Рисунок 1.6, в содержит спектр собственных значений λ_e и λ_p , где в силу инвариантности к сдвигу по пространству $x \rightarrow x + x_0$ системы (1.12), (1.15) существует одно нулевое собственное значение, при этом для остальных выполняется условие $\text{Re} \lambda_p < 0$, что соответствует устойчивости исследуемого решения $Z(x, t)$. На рисунке 1.6, г изображена пространственно-временная динамика величины $|Z(x, t)|$, полученная в результате прямого численного моделирования системы (1.1)–(1.4) с конечным числом элементов. На рисунке 1.6, д представлены средние частоты осцилляторов $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$. Отчетливо виден один кластер частично синхронных элементов, расположенных посередине и соответствующий максимуму профиля $|z(x)|$

параметра порядка. Данный режим при $\gamma = 0$ трансформируется в однокластерную химеру и подробно описан в работах [73; 97].

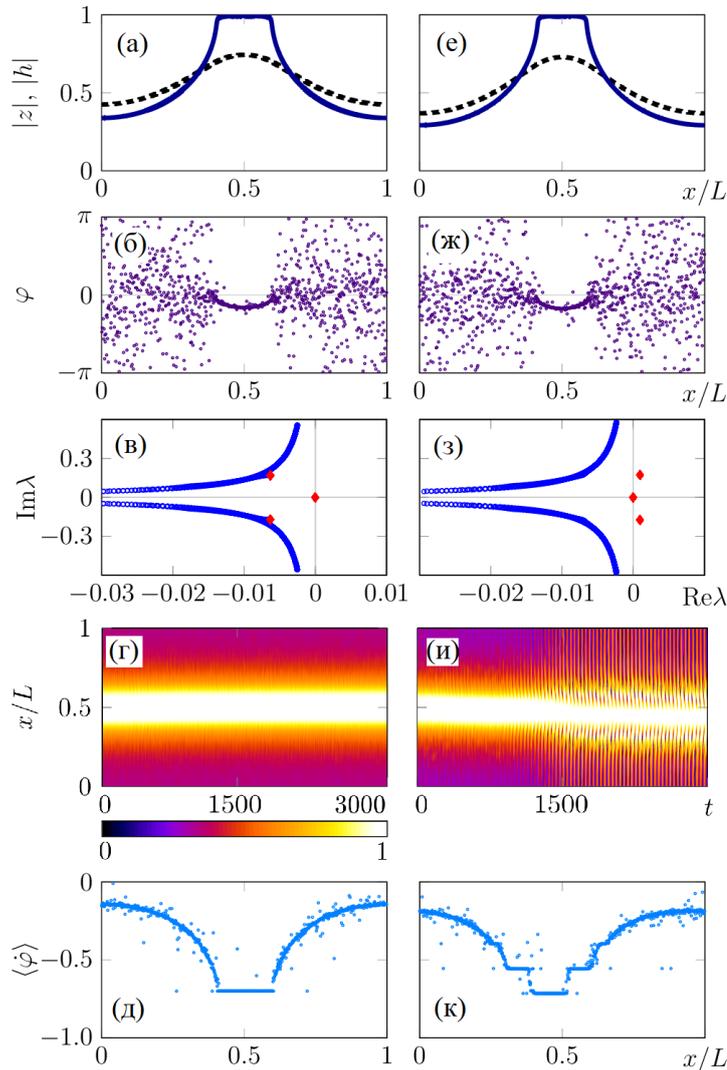


Рис. 1.6 — (а — д) Устойчивое неоднородное состояние при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.002$, $\Omega = -0.70$, $L \approx 6.4135$. (е) — (к) Неустойчивое неоднородное состояние эволюционирует к бризерному режиму при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.002$, $\Omega = -0.685$, $L \approx 7.0047$. Начальные условия соответствуют ветви B_1 бифуркационной диаграммы на рисунке 1.5,а. (а, е) Профили $|z|$ (синяя сплошная линия), $|h|$ (черная штриховая линия), определенные методом, описанным в разд. 1.5. (б, ж) Начальные распределения фаз φ_n , которые восстановлены по локальным параметрам порядка $Z(x)$. (в, з) Спектр λ линейных возмущений для соответствующих стационарных решений $Z(x)$ уравнений Отта—Антонсена. Существенная λ_e (круглые синие маркеры) и точечная λ_p (красные маркеры в виде ромбов) составляющие спектра λ . (г, д, и, к) Результаты прямого численного моделирования системы (1.1)–(1.4). (г, и) Поведение во времени абсолютной величины комплексного поля $Z(x_n, t)$. (д, к) Средние частоты осцилляторов $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$

При критическом значении $\Omega_1^* \approx -0.6851$ ($L_1^* \approx 7.0$) стационарный неоднородный режим теряет устойчивость (см. рисунок 1.6,е — к). Два комплексно сопряженных собственных значения из спектра λ_p при этом пересекают мнимую ось (рисунок 1.6,з). Система при этом переходит к бризерному кластерному режиму, когда существует несколько частично синхронных кластеров (рисунок 1.6,к). Причем мгновенные частоты $\dot{\varphi}_n$ осцилляторов и величины $|H(x,t)|$, $|Z(x,t)|$ испытывают периодические колебания (рисунок 1.6,и). Заметим, что данные решения в случае идентичных элементов среды ($\gamma = 0$) трансформируются в бризерные химеры, которые были обнаружены в системах с различным видом ядра, определяющего связь: экспоненциальным [97; 98], гармоническим [49; 72], ядром в виде ступеньки [99]. Для систем с Лоренцевым распределением частот подобные решения с периодическим поведением локального параметра были рассмотрены в работах [79; 85]. В [85] показано, что такие бризерные режимы реализуются в наиболее широких диапазонах управляющих параметров, если распределение собственных частот имеет более узкую ширину (малые γ), что справедливо и для системы, исследуемой в этой работе. Также бризерные режимы наблюдались в двумерных решетках связанных осцилляторов [100; 101].

При дальнейшем увеличении длины среды система начинает демонстрировать сложную пространственно-временную динамику с нерегулярным поведением комплексного поля $H(x,t)$.

При увеличении γ степень когерентности частично синхронного кластера уменьшается, т.е. все меньшее число элементов в нем имеют равные средние частоты. Рассмотрим, например, случай $\gamma = 0.02$ (см. рисунок 1.5,в). При этом данный режим устойчив при $L_{hps}^* < L < L_1^*$, где $L_{hps}^* = 3.83422$, $L_1^* = 8.232$. Случай $\Omega = -0.68$, $L = 6.5861$ представлен на рисунке 1.7,а — д. При потере устойчивости неоднородного режима величина $|Z(x,t)|$ в каждый момент времени имеет один максимум и демонстрирует перемежаемость: на коротких временных промежутках времени нерегулярной длины имеет место периодическая динамика (бризерный кластерный режим). По окончании данного промежутка времени максимум $|Z(x,t)|$ резко изменяет свое положение в пространстве нерегулярным образом, после чего следует следующий промежуток периодической динамики (рисунок 1.7,и).

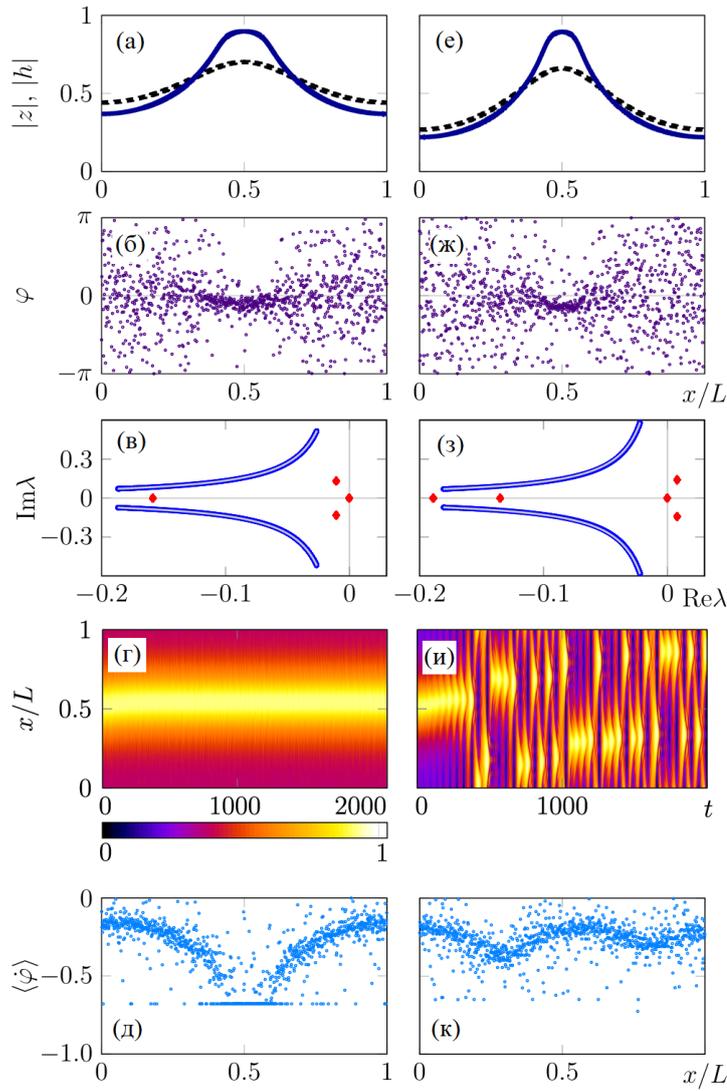


Рис. 1.7 — То же, что на рисунке 1.6. (а — д) Устойчивое неоднородное состояние при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.02$, $\Omega = -0.68$, $L \approx 6.5861$. (е — к) Неустойчивое неоднородное состояние эволюционирует к режиму перемежаемости при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.02$, $\Omega = -0.64$, $L \approx 8.8373$. Начальные условия соответствуют ветви B_1 бифуркационной диаграммы на рисунке 1.5,в

1.5.2. Режимы перемежаемости и пространственно-временного хаоса

Рассмотрим далее режимы в средах большей длины при $\gamma = 0.011$. Неоднородные с двумя максимумами $|z(x)|$ (ветви C_1 и C_2) представлены на рисунке 1.8. Данные режимы являются неустойчивыми, и ансамбль фазовых осцилляторов демонстрирует переход к сложной пространственно-временной динамике. Однако несложно заметить, что на достаточно продолжительных временных интервалах динамика возвращается к состояниям, в которых выделяется две области с высокой степенью когерентности и два участка с практически асинхронным поведением осцилляторов (рисунок 1.8,г,и). Причем на данных интервалах вре-

мени поле $H(x,t)$ совершает колебания (бризерный кластерный режим). Таким образом, система демонстрирует перемежаемость регулярных и хаотических осцилляций. Это связано с тем, что решениям уравнений (1.12), (1.15), отвечающим ветвям C_1 и C_2 на рисунке 1.5, соответствуют слабонеустойчивые распределения фаз, которым могут быть сопоставлены относительно простые переходные долгоживущие режимы движения. На профиле средних частот $\langle \dot{\varphi}_n \rangle$ (рисунок 1.8, д, к) в данном случае нельзя выделить кластеры частично синхронных осцилляторов, т.к. за достаточно продолжительный промежуток времени каждый элемент бывает как в областях с высокой степенью когерентности фаз, так и в практически асинхронных участках среды. Это приводит к тому, что средние частоты имеют практически однородный профиль.

Если профиль $|z(x)|$, определяющий начальным значениям фаз является сильно неустойчивым, то локальный параметр порядка демонстрирует хаотическую пространственную динамику. В качестве примера продемонстрируем случай $\gamma = 0.02$ для неустойчивых неоднородных состояний с тремя максимумами $|z(x)|$. Рисунок 1.9, а — д соответствуют решению, расположенному на ветви D_1 , а рисунок 1.9, е — к — решению, расположенному на ветви D_2 . Здесь состояние, соответствующее трехкластерному режиму достаточно быстро разрушается, и параметр порядка начинает демонстрировать нерегулярную динамику (рисунок 1.9, г, и).

Таким образом для описанных выше значений γ при $\alpha = 1.457$ в системе (1.1)–(1.4) с длинами $L > L_1^*$ не наблюдаются устойчивые неоднородные стационарные режимы, при этом реализуются сложные пространственно-временные решения с нерегулярным поведением параметра порядка $Z(x,t)$ двух типов. В первом случае имеет место перемежаемость хаотических осцилляций с бризерным режимом, во втором — чисто хаотический режим.

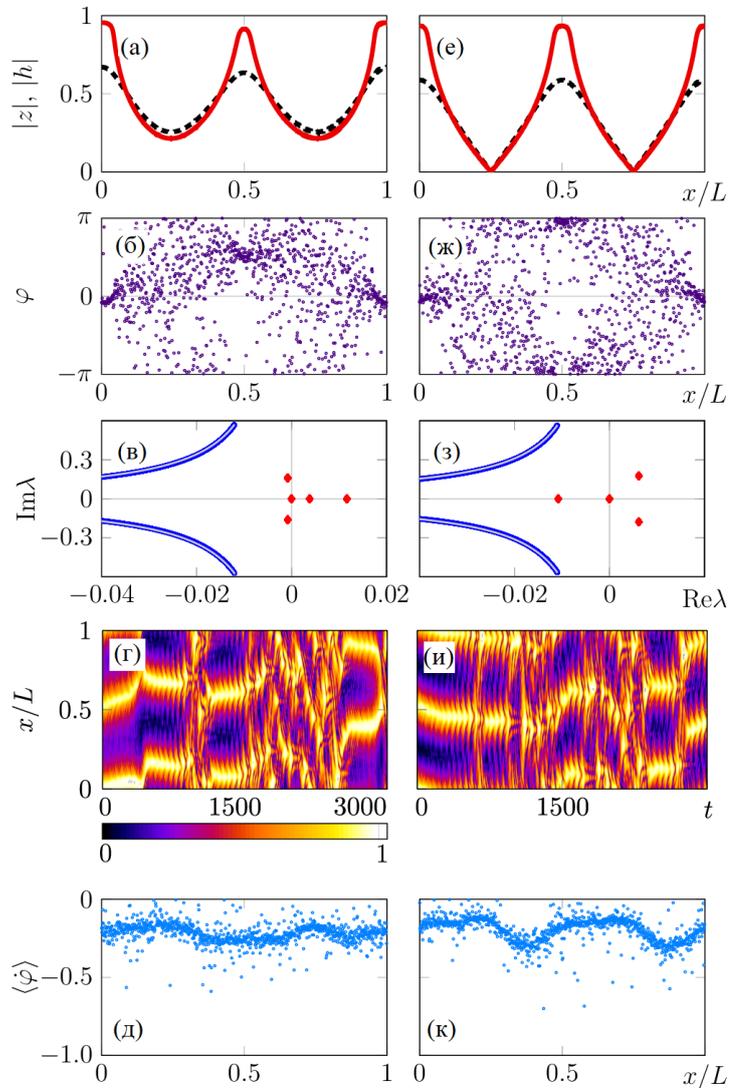


Рис. 1.8 — То же, что на рисунке 1.6. Неустойчивые неоднородные решения с двумя максимумами $|z(x)|$ (для разных значений Ω и L) эволюционируют к режиму перемежаемости при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.011$. Начальные условия соответствуют ветви C_1 при $\Omega = -0.625$, $L \approx 14.1367$ (а — д) и C_2 при $\Omega = -0.566$, $L \approx 12.7904$ (е — к) бифуркационной диаграммы на рисунке 1.5,б

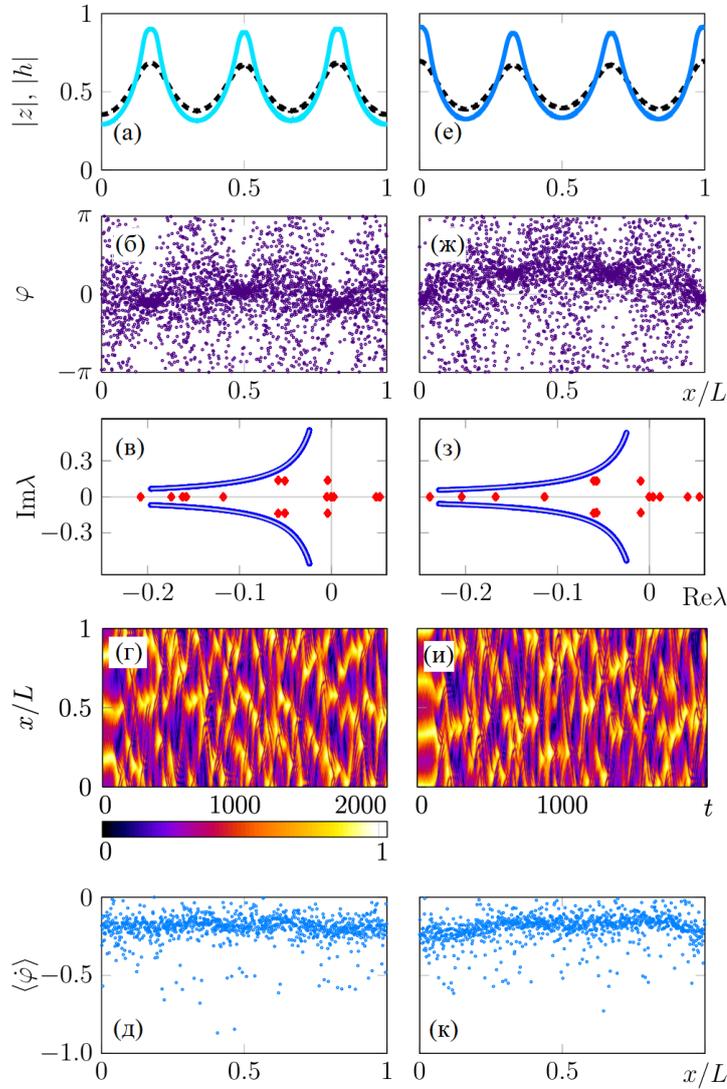


Рис. 1.9 — То же, что на рисунке 1.6. Неустойчивые неоднородные решения с тремя максимумами $|z(x)|$ (для разных значений Ω и L) эволюционируют к турбулентному режиму при $\alpha = 1.457$, $\gamma = 0.020$. Начальные условия соответствуют ветви D_1 при $\Omega = -0.66$, $L \approx 21.9922$ (а — д) и D_2 при $\Omega = -0.66$, $L \approx 20.7145$ (е — к) бифуркационной диаграммы на рисунке 1.5,в

1.6. Выводы по первой главе

Таким образом, в системе нелокально связанных фазовых осцилляторов с периодическими граничными условиями и индивидуальными частотами, удовлетворяющими распределению Лоренца, были рассмотрены основные простейшие с точки зрения динамики локального параметра порядка решения. С помощью процедуры редукции Отта—Антонсена были получены уравнения для комплексного локального параметра порядка. Исследован класс простейших стационарных решений редуцированной системы. Для однородного состояния показано, что в области его существования оно устойчиво для любых длин среды, либо до достижения некоторой критической длины. Градиентные решения могут быть неустойчивыми, устойчивыми, начиная с порогового значения длины, либо устойчивыми на некотором интервале длин.

Для поиска неоднородных решений системы использовался оригинальный метод поиска периодических траекторий вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка, использовавшийся в работах [73; 97; 98]. Показано, что в системе существует множество неоднородных режимов с различным числом максимумов модуля локального параметра порядка. Возникновение данных решений связано с появлением резонансных орбит на инвариантных траекториях соответствующего отображения Пуанкаре.

Продемонстрированы стационарные неоднородные решения с одним частично синхронным кластером, которые в пределе идентичных собственных частот представляют собой химерные режимы. Для случая большей длины в системе наблюдается сложная динамика с нерегулярным поведением локального параметра порядка, когда в системе наблюдаются хаотические по пространству движения, а также перемежаемость хаоса с бризерными режимами с различным числом кластеров. Существование таких интервалов с бризерной динамикой обусловлено наличием соответствующих слабонеустойчивых стационарных неоднородных режимов.

Глава 2. Пространственно-временные режимы в распределенном ансамбле нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов с нелинейным фазовым сдвигом

2.1. Введение

Значительный прогресс в теоретических исследованиях пространственно-временных режимов в распределенных ансамблях фазовых осцилляторов был достигнут благодаря описанию динамики рассматриваемых систем в терминах локального комплексного параметра порядка с использованием уравнений в частных производных [79; 102]. В частности, в работе [73] задача поиска стационарных химер в модели Курамото—Баттогтоха была сведена к задаче нахождения периодических решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этих периодических решений, кроме того, можно рассчитать спектр устойчивости линейных возмущений и таким образом идентифицировать устойчивые стационарные химерные состояния.

В этой главе будет использован подход из [73] к обобщенной модели Курамото—Баттогтоха, предложенной впервые в работе [102]. Особенность рассматриваемой модели заключается в нелинейной связи между осцилляторами: фазовый сдвиг в связи, который в модели Курамото—Баттогтоха предполагается постоянным, теперь зависит от амплитуды среднего поля (в [103; 104] представлена экспериментальная реализация такой связи в ансамбле глобально связанных элементов). Рассматривается несколько нетривиальных динамических режимов в модели с нелинейной связью: бризерные химеры, неоднородные частично синхронные состояния, а также слабо и сильно турбулентные химеры [97; 98; 105—111].

2.2. Описание модели

Рассмотрим среду нелокально связанных фазовых осцилляторов, расположенных на отрезке длины L и удовлетворяющих на его концах периодическим граничным условиям, что эквивалентно случаю, когда элементы располагаются на кольце. Каждый осциллятор движется под воздействием комплексного поля

$H(x,t)$ и удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \varphi(x,t) = \omega + \text{Im} \left[H e^{-i\varphi - i\alpha(H)} \right], \quad (2.1)$$

где $\alpha(H) = \alpha_0 + \alpha_1 |H|^2$. Модель, рассмотренная Курамото и Баттогтохом [50], соответствовала случаю постоянного фазового сдвига (т.е. $\alpha_1 = 0$), ситуация, когда фазовый сдвиг нелинейно зависит от комплексного поля была сформулирована в работе [102]. Определяющую связь между элементами среды поле H связано с осцилляторами посредством следующего дифференциального уравнения

$$\partial_{xx} H - \kappa^2 H = -\kappa^2 e^{i\varphi}, \quad (2.2)$$

решение которого может быть записано через интеграл

$$H(x,t) = \int_0^L G(x - \tilde{x}) e^{i\varphi(\tilde{x},t)} d\tilde{x}, \quad (2.3)$$

с ядром $G(x)$

$$G(x) = \frac{\kappa}{2 \sinh(\kappa L/2)} \cosh(\kappa (|x| - L/2)), \quad -L/2 \leq x \leq L/2. \quad (2.4)$$

Уравнения (2.1), (2.2) (или, эквивалентно, уравнения (2.1), (2.3) и (2.4)) полностью описывают динамику рассматриваемой системы и подходят для определения дискретного варианта модели и дальнейшего прямого численного моделирования. Однако, они менее удобны для аналитического исследования, поскольку функция фазового поля $\varphi(x,t)$, вообще говоря, не является непрерывной функцией координаты x . Поэтому удобно ввести локальный (усредненный в малой окрестности $x - \delta < \tilde{x} < x + \delta$) комплексный параметр порядка

$$Z(x,t) = \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{i\varphi(\tilde{x},t)} d\tilde{x}, \quad (2.5)$$

представляющий собой непрерывную функцию координаты x . Также, аналогично методу, рассмотренному в Главе 1, можно добиться редукции основных фазовых уравнений, если дополнительно предположить [76], что средние значения высших гармоник фаз могут быть выражены через этот параметр порядка как

$$\frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{in\varphi(\tilde{x},t)} d\tilde{x} = [Z(x,t)]^n, \quad n \geq 1. \quad (2.6)$$

Это свойство инвариантно по времени, и, следовательно, многообразие Отта—Антонсена, определенное согласно (2.6), инвариантно. Поэтому подход Отта—Антонсена [76] использовался во многих ситуациях, в том числе при исследовании химерных состояний [47]. Однако его обоснованность не совсем ясна, так как это сильно связано со свойствами устойчивости многообразия Отта—Антонсена (2.6), которые окончательно не установлены. Известно, что это многообразие не является притягивающим для ансамблей идентичных осцилляторов с глобальной связью [112], т.е. для элементов, находящихся под воздействием общего поля. В нашем случае мы рассматриваем среду идентичных осцилляторов в неоднородном поле $H(x,t)$. Это позволяет предположить, по крайней мере, слабую устойчивость многообразия Отта—Антонсена, в силу эффекта эффективного усреднения по различным полям в уравнении (2.6). В силу данного замечания можно рассматривать применение подстановки Отта—Антонсена как подходящей для описания долговременной динамики [74; 112].

Динамика локального параметра порядка на многообразии Отта—Антонсена (2.6) удовлетворяет следующему уравнению [47; 76]:

$$\partial_t Z = i\omega Z + \frac{1}{2} \left(e^{-i\alpha(H)} H - e^{i\alpha(H)} H^* Z^2 \right), \quad (2.7)$$

для комплексного поля H из (2.2) получаем следующее уравнение

$$\partial_{xx} H - \kappa^2 H = -\kappa^2 Z. \quad (2.8)$$

Прежде чем обсуждать решения системы (2.7), (2.8), отметим, что есть два управляющих параметра, имеющих размерность длины: длина среды L и диапазон действия силы связи κ^{-1} . Изменяя масштаб, мы всегда можем установить κ^{-1} равным единице, так что единственным параметром можно принять L .

2.3. Пространственно-однородные режимы

Анализ пространственно-однородных равномерно вращающихся состояний в уравнениях (2.7), (2.8) является достаточно простым (аналогично случаю ансамбля глобально связанных элементов с нелинейной связью [113; 114]). Подставляя $Z(x,t) = H(x,t) = h_0 e^{i(\omega+\Omega)t}$ в (2.7), (2.8), получаем уравнение для $|h_0|$ и Ω :

$$h_0 \left(|h_0|^2 \exp[i(\alpha_0 + \alpha_1 |h_0|^2)] + 2i\Omega - \exp[-i(\alpha_0 + \alpha_1 |h_0|^2)] \right) = 0. \quad (2.9)$$

Для всех значений управляющих параметров существует полностью синхронное $|h_0| = 1$ и полностью асинхронное состояние $h_0 = 0$. При $0 < (\pi/2 - |\alpha_0|)|\alpha_1|^{-1} < 1$ существует также частично синхронное состояние с $|h_0|^2 = (\pi/2 - |\alpha_0|)|\alpha_1|^{-1}$ и $\Omega = -0.5(1 + |h_0|^2)$.

Далее мы ограничимся областью параметров $0 \leq \alpha_0, \alpha_1 < \pi/2$. Здесь анализ устойчивости однородных состояний, представленный в Приложении А, дает следующие результаты:

- 1) Полностью асинхронное состояние всегда неустойчиво, потому что линейная часть связи является притягивающей $0 \leq \alpha_0 < \pi/2$ (см. (А.4)).
- 2) Полностью синхронное состояние устойчиво, если частично синхронное состояние не существует, т.е. при $\alpha_0 + \alpha_1 < \pi/2$, и неустойчиво в противном случае (см. (А.5)).
- 3) Устойчивость однородного частично синхронного состояния зависит от длины волны k периодического в пространстве возмущения поля Z . Это состояние всегда неустойчиво для малых длин волн $k < k_c = \sqrt{\frac{\pi - 2\alpha_0}{\alpha_0 + \alpha_1 - \pi/2}}$, т.е. оно неустойчиво в достаточно длинных средах с $L > L_c = 2\pi/k_c$ (см. (А.6)).

Таким образом при наличии нелинейной связи может возникнуть ситуация, когда все однородные состояния являются неустойчивыми. Как будет показано ниже, среди устойчивых неоднородных состояний при этом могут существовать глобально устойчивые химерные состояния.

2.4. Градиентные режимы

В данном разделе мы рассмотрим градиентные состояния [84; 88; 89]. Полностью когерентное градиентное состояние в системе фазовых осцилляторов, распределенных на кольце, реализуется если разность фаз между соседними элементами постоянна, то есть профиль фазы имеет постоянный градиент. В случае частично когерентного градиентного состояния фазы осцилляторов равномерно отклоняются от полностью упорядоченного градиентного фазового распределения, однако при этом фаза локального параметра порядка продолжает иметь постоянный градиент. Полностью когерентное градиентное состояние наблюдалось в системах идентичных фазовых осцилляторов [88; 89]. Частично когерентное градиентное состояние описывалось для популяции с неидентичными собственными частотами [84]. В данном разделе описаны как полностью когерентные,

так и частично когерентные градиентные состояния в системе идентичных фазовых элементов с нелинейной нелокальной связью. Полностью когерентное градиентное состояние в системе (2.1), (2.2) реализуется, если фазовый профиль $\varphi(x,t)$ является линейной функцией от x , удовлетворяющей граничному условию: $\varphi(x,t) = \varphi(0,t) + 2\pi mx/L$ (здесь $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ – число оборотов фазы). Для частично когерентного градиентного состояния фазы отдельных элементов могут отклоняться от градиентного распределения, однако локально усредненная по пространству фаза, т.е. $\arg Z(x,t)$, аргумент локального параметра порядка, имеет градиентный профиль. Характерной особенностью этих режимов является то, что модуль параметра порядка $|Z(x,t)|$ во всех точках среды имеет постоянное значение, которое соответствует одинаковой степени локальной когерентности осцилляторов, однако при этом фаза $Z(x,t)$ совершает целое число оборотов по кольцу. Глобальный параметр порядка $\int_0^L e^{i\varphi(x,t)} dx$ обращается в нуль для градиентных состояний. Для равномерно вращающихся градиентных состояний решения $Z(x,t)$ и $H(x,t)$ определяются следующими выражениями:

$$Z(x,t) = z(x)e^{i(\omega+\Omega)t}, \quad H(x,t) = h(x)e^{i(\omega+\Omega)t}, \quad (2.10)$$

$$z(x) = z_0 e^{-iqx}, \quad h(x) = h_0 e^{-iqx}, \quad (2.11)$$

где $z_0 = \text{const}$, $h_0 = \text{const}$, $q = 2\pi m/L$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$, Ω – частота вращения. Ограничимся случаем $m = 1$ и значениями параметров, удовлетворяющими условию: $0 \leq \alpha_0, \alpha_1 \leq \pi/2$. Подставляя (2.10) и (2.11) в (2.8), получаем выражения, связывающие значения h_0 и z_0

$$h_0 = \frac{z_0}{1 + q^2}. \quad (2.12)$$

Чтобы найти параметры z_0 и h_0 , подставим (2.10), (2.11), (2.12) в (2.7), из чего получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \sin \alpha(H) \left(-\frac{1 + |z_0|^2}{1 + q^2} \right) &= 2\Omega, \\ \cos \alpha(H) \left(\frac{1 - |z_0|^2}{1 + q^2} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Система (2.13) имеет два решения. Первое решение

$$z_0 = z_s = 1, \quad h_0 = h_s = \frac{1}{1 + q^2} \quad (2.14)$$

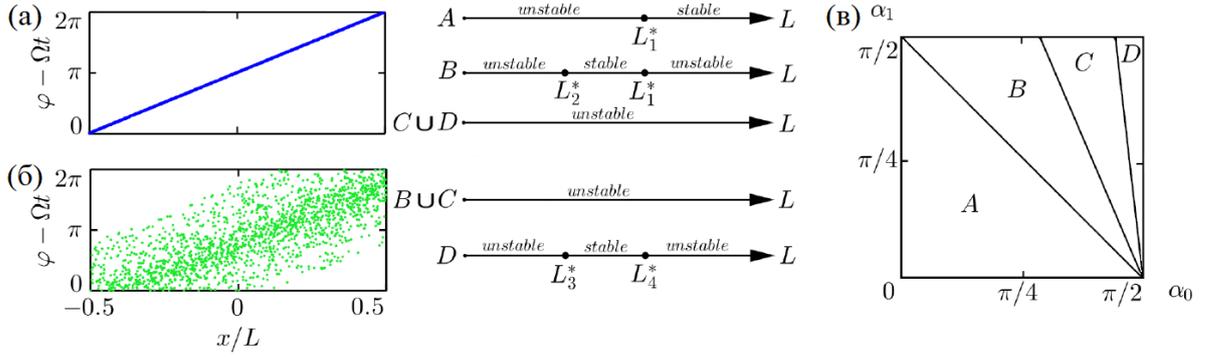


Рис. 2.1 — На панелях (а) и (б) показаны мгновенные снимки фаз $\varphi(x,t)$, соответствующие градиентным состояниям. (а) Полностью когерентное градиентное состояние для $\alpha_1 = 0.7853$, $\alpha_0 = 0.7853$, $L = 12$, $z_s = 1$, $h_s = 0.785$. (б) Частично когерентное градиентное состояние для $\alpha_1 = 1.57$, $\alpha_0 = 1.468$, $L = 7.85$, $z_{ps} = 0.42$, $h_{ps} = 0.256$. На панели (в) отображены области существования и устойчивости градиентных состояний на плоскости параметров (α_0, α_1) . Область A : $0 < \alpha_1 < \pi/2 - \alpha_0$, ПКГС устойчиво при $L > L_1^*$, ЧКГС не существует. Область B : $\pi/2 - \alpha_0 < \alpha_1 < 9(\pi/2 - \alpha_0)/4$, ПКГС Устойчиво при $L_2^* < L < L_1^*$, ЧКГС неустойчиво для любого L . Область C : ПКГС и ЧКГС неустойчивы для любого L . Область D : ПКГС неустойчиво для любого L , ЧКГС устойчиво при $L_3^* < L < L_4^*$. Средние панели (стрелки) иллюстрируют зависимость устойчивости различных ГС в зависимости от длины среды L

соответствует полностью когерентному градиентному состоянию (ПКГС) (рис. 2.1,а). Он существует для всех значений α_0, α_1 . Второе решение

$$z_0 = z_{ps} = (1 + q^2) \sqrt{\frac{\pi - 2\alpha_0}{2\alpha_1}}, \quad h_0 = h_{ps} = \sqrt{\frac{\pi - 2\alpha_0}{2\alpha_1}} \quad (2.15)$$

соответствует частично когерентному градиентному состоянию (ЧКГС) (рис. 2.1,б). Область существования этого состояния определяется неравенством $\alpha_1 > \pi/2 - \alpha_0$.

Анализ устойчивости градиентных состояний подробно описан в Приложении Б, где показано, что ее определяет набор решений $\lambda(n)$ вспомогательной задачи на собственные значения (Б.8), где n – номер соответствующей гармоники возмущения. Рассмотрим для начала ПКГС, когда $h_0 = h_s$, $z_0 = z_s$. Для него действительные части собственных значений, определяющих устойчивость имеют вид

$$\text{Re } \lambda_1 = -\frac{L^2 \cos(\alpha)}{L^2 + 4\pi^2}, \quad (2.16)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_2(n) = -\frac{4L^2 n^2 \pi^2 (L^2 - 12\pi^2 + 4\pi^2 n^2) \cos(\alpha)}{(L^2 + 4\pi^2)(L^2 + 4\pi^2 - 8\pi^2 n + 4\pi^2 n^2)(L^2 + 4\pi^2 + 8\pi^2 n + 4\pi^2 n^2)}. \quad (2.17)$$

Нетрудно показать, что в этом случае устойчивость определяется собственными значениями с $n = 1$, т.е. первой гармоникой возмущения. Анализ выражений (2.16) и (2.17) показывает, что существуют три характерные области значений параметров (α_0, α_1) . В первой области $0 < \alpha_1 < \pi/2 - \alpha_0$ (рис. 2.1,в, область A) полностью когерентное градиентное состояние устойчиво при $L > L_1^*$, где $L_1^* = 2\sqrt{2}\pi$. Во второй области $\pi/2 - \alpha_0 < \alpha_1 < 9(\pi/2 - \alpha_0)/4$ (рис. 2.1,в, область B) это состояние устойчиво, когда L принадлежит интервалу $L_2^* < L < L_1^*$, где $L_2^* = \left(\sqrt{2\alpha_1/(\pi - 2\alpha_0)} - 1\right)^{-1/2}$. В третьей области $9(\pi/2 - \alpha_0)/4 < \alpha_1 < \pi/2$ (рис. 2.1,в, область $C \cup D$) этот режим неустойчив для любого L . Проиллюстрируем приведенные выше соображения аналитической устойчивости с помощью прямого численного моделирования на рис. 2.2. Здесь показаны мгновенные снимки фаз в различные моменты времени и спектр собственных значений полностью когерентных градиентных состояний. В случае неустойчивости эти состояния переходят в различные неоднородные или турбулентные режимы.

Рассмотрим далее ЧКГС. Численно анализируя собственные значения $\lambda(n)$ задачи (Б.8) при $h_0 = h_{ps}$, $z_0 = z_{ps}$, находим, что частично когерентное градиентное состояние неустойчиво для любого L в области $B \cup C$ (рис. 2.1,в) и устойчиво для $L_3^* < L < L_4^*$ в области D (рис. 2.1,в). Примечательно, что в этом случае на устойчивость градиентного состояния могут влиять также гармоники возмущений с $n > 1$. Временная эволюция устойчивых и неустойчивых частично когерентных градиентных состояний проиллюстрирована на рис. 2.3, где показаны фазовые снимки для разных моментов времени и спектр собственных значений. Таким образом, было показано, что частично когерентное градиентное состояние может быть реализовано в системе идентичных нелокально связанных осцилляторов. Более того, не существует таких областей параметров системы α_0, α_1, L , где это состояние могло бы сосуществовать с полностью когерентным градиентным состоянием.

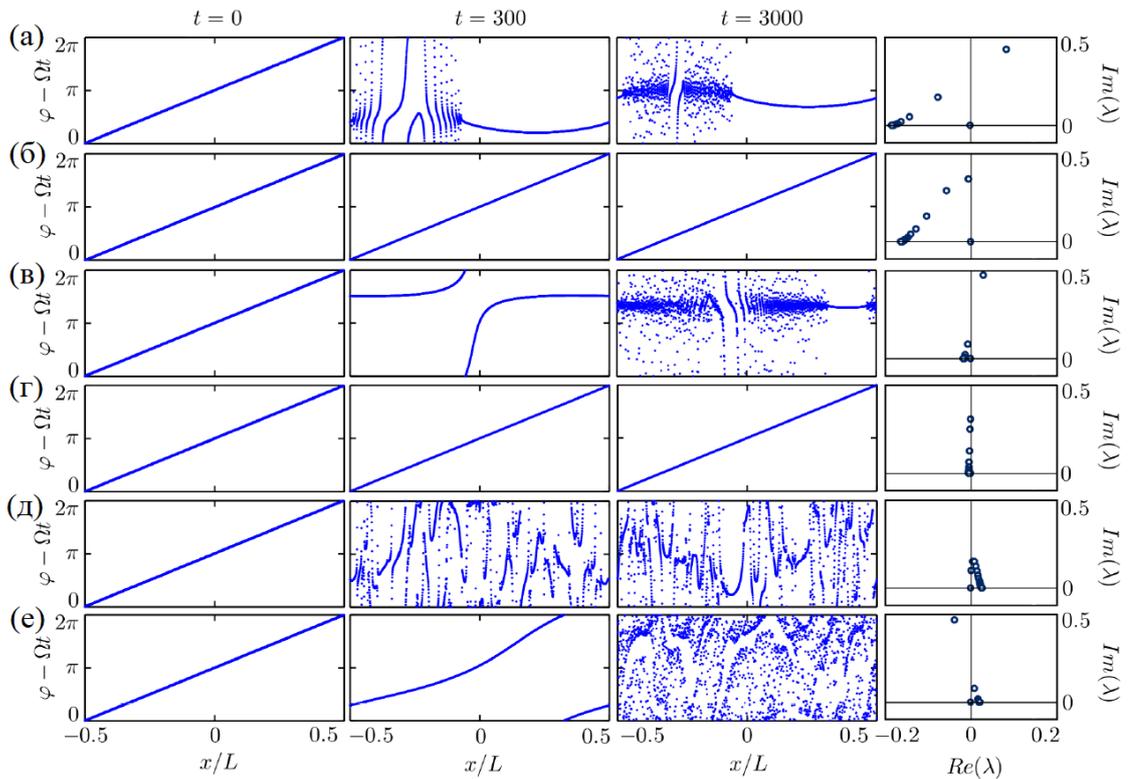


Рис. 2.2 — Полностью когерентное градиентное состояние. Левый и центральный столбцы: результаты прямого численного моделирования ансамбля $N = 2048$ осцилляторов, в различные моменты времени. На правом столбце показан спектр линейных возмущений $\lambda_{1,2}(n)$ для $n = 0, 1, 2, \dots, 100$. (а) Область A . Параметры: $\alpha_1 = 0.7853$, $\alpha_0 = 0.7853$, $L = 5.0$, $z_s = 1$, $h_s = 0.388$. Неустойчивое градиентное состояние эволюционирует к неоднородному режиму. (б) Область A . Параметры: $\alpha_1 = 0.7853$, $\alpha_0 = 0.7853$, $L = 10.0$, $z_s = 1$, $h_s = 0.717$. Устойчивое градиентное состояние. (в) Область B . Параметры: $\alpha_1 = 0.15$, $\alpha_0 = 1.457$, $L = 3.0$, $z_s = 1$, $h_s = 0.185$. Неустойчивое градиентное состояние эволюционирует к неоднородному режиму. (г) Область B . Параметры: $\alpha_1 = 0.15$, $\alpha_0 = 1.457$, $L = 10.0$, $z_s = 1$, $h_s = 0.717$. Устойчивое градиентное состояние. (д) Область B . Параметры: $\alpha_1 = 0.15$, $\alpha_0 = 1.457$, $L = 25.0$, $z_s = 1$, $h_s = 0.94$. Неустойчивое градиентное состояние эволюционирует к турбулентному режиму. (е) Область $C \cup D$. Параметры: $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_0 = 1.457$, $L = 3.0$, $z_s = 1$, $h_s = 0.185$. Неустойчивое наклонное состояние эволюционирует к турбулентному режиму

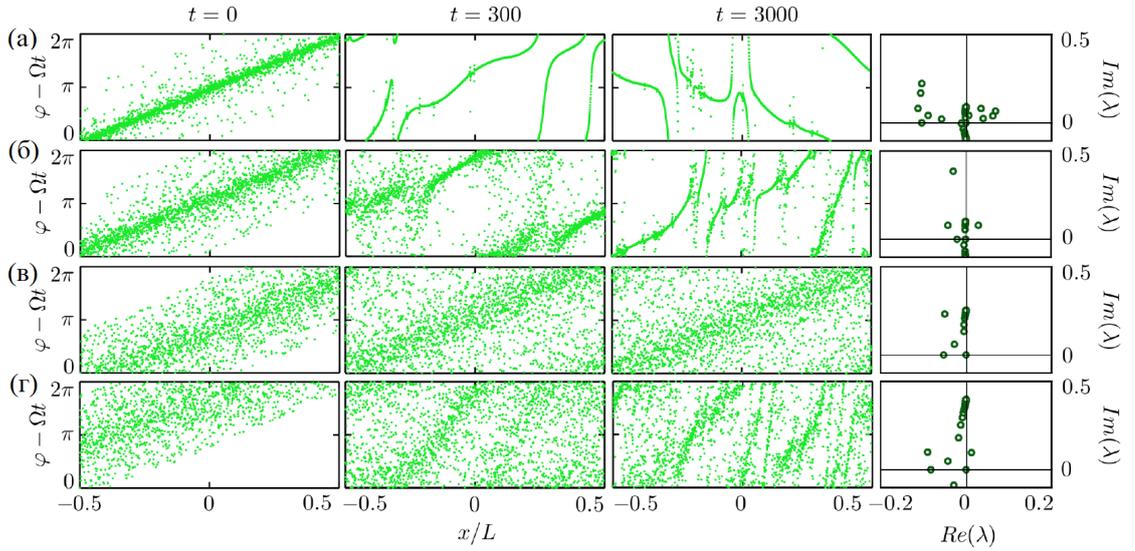


Рис. 2.3 — Частично когерентное градиентное состояние. Панели обозначают то же, что на Рис. 2.2. (а) Область $B \cup C$. Параметры: $\alpha_1 = 1.2$, $\alpha_0 = 1.0$, $L = 12.0$, $z_{ps} = 0.879$, $h_{ps} = 0.716$. Неустойчивое градиентное состояние эволюционирует к турбулентному режиму. (б) Область D . Параметры: $\alpha_1 = 1.57$, $\alpha_0 = 1.468$, $L = 4.85$, $z_{ps} = 0.685$, $h_{ps} = 0.275$. Неустойчивое градиентное состояние эволюционирует к турбулентному режиму. (в) Область D . Параметры: $\alpha_1 = 1.57$, $\alpha_0 = 1.468$, $L = 7.85$, $z_{ps} = 0.42$, $h_{ps} = 0.288$. Устойчивое градиентное состояние. (г) Область D . Параметры: $\alpha_1 = 1.57$, $\alpha_0 = 1.468$, $L = 15.7$, $z_{ps} = 0.297$, $h_{ps} = 0.294$. Неустойчивое градиентное состояние эволюционирует к турбулентному режиму

2.5. Стационарные химерные режимы

2.5.1. Поиск химерных структур

Рассмотрим пространственно-неоднородные, равномерно вращающиеся решения системы (2.7), (2.8):

$$Z(x,t) = z(x)e^{i(\omega+\Omega)t}, \quad H(x,t) = h(x)e^{i(\omega+\Omega)t}, \quad (2.18)$$

где Ω есть частота вращения пространственной структуры. Уравнение (2.8) после подстановки в него (2.7) сводится к алгебраическому уравнению, из которого функцию $z(x)$ можно выразить через $h(x)$ следующим образом:

$$z(x) = -ie^{-i\alpha_0 - i\alpha_1|h|^2} \frac{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - |h|^2}}{h^*}. \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в уравнение (2.8), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно комплексной функции $h(x)$:

$$h'' - h = ie^{-i\alpha_0 - i\alpha_1|h|^2} \frac{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - |h|^2}}{h^*}. \quad (2.20)$$

Данное уравнение инвариантно относительно фазовых сдвигов $\arg(h) \rightarrow \arg(h) + \text{const}$, что позволяет редуцировать его к системе третьего порядка. Для этого введем вещественные переменные (r, q) и замену переменных $h = re^{i\theta}$, $q = r^2\theta'$, приводящую (2.20) к виду

$$\begin{aligned} r'' &= r + \frac{q^2}{r^3} + \frac{\Omega}{r} \sin(\alpha_0 + \alpha_1 r^2) - \frac{\sqrt{r^2 - \Omega^2}}{r} \cos(\alpha_0 + \alpha_1 r^2), \\ q' &= \Omega \cos(\alpha_0 + \alpha_1 r^2) + \sqrt{r^2 - \Omega^2} \sin(\alpha_0 + \alpha_1 r^2), \end{aligned} \quad (2.21)$$

и

$$\begin{aligned} r'' &= r + \frac{q^2}{r^3} + \frac{\Omega + \sqrt{\Omega^2 - r^2}}{r} \sin(\alpha_0 + \alpha_1 r^2), \\ q' &= (\Omega + \sqrt{\Omega^2 - r^2}) \cos(\alpha_0 + \alpha_1 r^2). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Система (2.21) определена в области $|r| \geq |\Omega|$, где осцилляторы полностью синхронны с $|z| = 1$, а система (2.22) в домене $|r| < |\Omega|$ с частично синхронной динамикой элементов ($|z| < 1$).

Задача поиска стационарных химер таким образом сводится к определению периодических (с периодом L) решений системы (2.21), (2.22). Подобные решения существуют только для определенных значений Ω . Для удобства будем фиксировать не длину L , а параметр Ω , и будем рассматривать L как функцию от Ω . В частности, для поиска режимов, представленных на рисунках 2.4–2.11 ниже, сначала мы фиксировали Ω и находили стационарный профиль пространственных структур, как показано на панелях а этих рисунков. Период этого профиля L , округленный до трех-четырех значащих цифр, использовался в расчетах устойчивости и при прямом численном моделировании.

В общем случае, система (2.21), (2.22) имеет много периодических и хаотических решений. При этом много формальных решений могут быть исключены в силу физического ограничения $|r| < 1$. Далее мы остановимся на рассмотрении лишь простейших периодических орбит системы (2.21), (2.22), поскольку только они имеют отношения к небольшим значениям L (относительно короткие среды), соответствующим устойчивым структурам. Исследуемая система (2.21), (2.22) обладает симметрией $x \rightarrow -x$, $r \rightarrow r$, $q \rightarrow -q$, что позволяет искать симметричные периодические решения с начальными условиями $r(0) = r_0$, $r'(0) = q(0) = 0$. Варьируя параметр r_0 можно определить периодические траектории системы (2.21), (2.22), удовлетворяющие условиям $r(0) = r(L)$, $r'(0) = q(0) = r'(L) = q(L) = 0$.

2.5.2. Анализ устойчивости

Для определения устойчивости пространственно-неоднородных решений, алгоритм нахождения которых описан в предыдущем разделе, мы перейдем в системе (2.7), (2.8) во вращающуюся (с частотой Ω) систему координат и линеаризуем ее в окрестности решения (2.18) как $Z(x,t) = (z(x) + \mathcal{Z}(x,t)) e^{i(\omega+\Omega)t}$, $H(x,t) = (h(x) + \mathcal{H}(x,t)) e^{i(\omega+\Omega)t}$, получив интегро-дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{Z} = & -[i\Omega + e^{i\alpha} z(x) h^*(x)] \mathcal{Z} + \frac{1}{2} (e^{-i\alpha} \mathcal{H} - e^{i\alpha} z^2(x) \mathcal{H}^*) - \\ & - \frac{i\alpha_1}{2} (h(x) \mathcal{H}^* + h^*(x) \mathcal{H}) [h(x) e^{-i\alpha} + h^*(x) z^2(x) e^{i\alpha}] , \end{aligned} \quad (2.23)$$

где $\mathcal{H} = \int_0^L G(x-\tilde{x}) \mathcal{Z}(\tilde{x},t) d\tilde{x}$. Определим вещественные переменные $\tilde{Z} = \xi_1 + i\xi_2$ и перепишем линейное уравнение (2.23) как систему (см. приложение А)

$$\partial_t \xi = [\hat{M} + \hat{K}] \xi , \quad (2.24)$$

где \hat{M} и \hat{K} мультипликативный и интегральный оператор, соответственно:

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \mu_1(x) & -\mu_2(x) \\ \mu_2(x) & \mu_1(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{K} \xi = \begin{pmatrix} K_{11}(x) & K_{12}(x) \\ K_{21}(x) & K_{22}(x) \end{pmatrix} \int_0^L G(x-\tilde{x}) \xi(\tilde{x}) d\tilde{x}.$$

Выражения для μ_1, μ_2 имеют достаточно простой вид: при $|h| \geq |\Omega|$ $\mu_1 = -\sqrt{|h|^2 - \Omega^2}$ и $\mu_2 = 0$; при $|h| < |\Omega|$ $\mu_2 = -\sqrt{\Omega^2 - |h|^2}$ и $\mu_1 = 0$. Выражения для K_{ij} довольно длинные, и представлены в Приложении А.

Общие свойства спектральной задачи (2.24) вытекают из свойств операторов \hat{M} и \hat{K} [72; 74]. Существенным является спектр мультипликативного оператора \hat{M} , который имеет Т-образную форму (если $\mu_{1,2} \neq 0$): часть его находится на мнимой оси, а часть – на действительной отрицательной полуоси. Этот существенный спектр не способствует развитию неустойчивости. Устойчивость определяется дискретным спектром. Численно разделение дискретной и существенной спектральных компонент представляется довольно сложной задачей, потому что из-за дискретизации ветвь существенного спектра не лежит точно на мнимой оси, но имеет ненулевые действительные части. Поэтому мы применяем подход, предложенный в работе [73]: если сдвигать сетку, используемую при дискретизации интегрального оператора \hat{K} , на окружности $0 \leq x < L$, то компоненты непрерывного спектра изменяются, а дискретный спектр остается неподвижными.

2.6. Регулярные химерные режимы

В данном разделе представлены примеры регулярных пространственно-неоднородных состояний. Во всех случаях пространственные химерные профили $z(x)$ и их устойчивость определяются с помощью представленных выше методов. Далее эти решения демонстрируются с использованием прямого численного моделирования дискретного варианта системы (2.1), (2.3), (2.4).

2.6.1. Стационарные химеры

Опишем здесь три типичных примера стационарных устойчивых неоднородных состояний (рисунки 2.4, 2.5, 2.6). На рисунке 2.4 показано стандартное

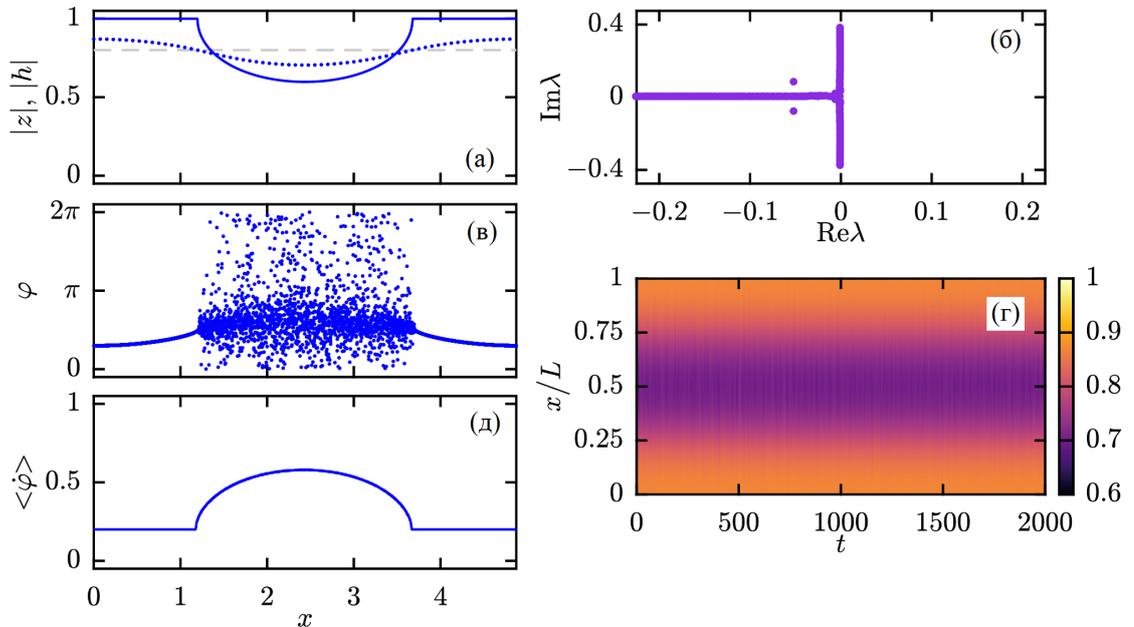


Рис. 2.4 — Стационарная химера при $\alpha_0 = 0.3\pi$, $\alpha_1 = 0.65$, $\Omega = -0.8$, $L \approx 4.874$. (а) пространственные профили $|z|$ (сплошная линия) и $|h|$ (пунктирная линия), найденные с помощью метода, описанного в разделе 2.5.1. Прямая пунктирная линия показывает значение частоты $|\Omega|$: синхронный участок соответствует области, где $|H| > |\Omega|$. (б) Спектр линейных возмущений, отчетливо видны дискретные собственные значения λ_p с отрицательными действительными частями. (в–д) Результаты прямого численного моделирования дискретного варианта системы (2.1), (2.3), (2.4) из $N = 4096$ осцилляторов. (в) Фазы осцилляторов $\varphi_n(t)$ при $t = 2000$. (г) Модуль комплексного поля $H(x,t)$. (д) Значения средних частот осцилляторов $\langle \dot{\varphi} \rangle$

однокластерное химерное состояние, аналогичное впервые описанному Курамото и Баттогтохом в работе [50]. Здесь есть один домен, в котором осцилляторы синхронны, и один домен с частично синхронными элементами. Очень похожим на это состояние является неоднородный режим, показанный на рисунке 2.5, где, однако, нет синхронной области: только степень фазовой когерентности изменяется вдоль пространства. Такие состояния были недавно обнаружены в работе [115] для модели фазовых осцилляторов, где параметр сдвига фазы α не зависит от поля H , но явно зависит от пространственной координаты x . Заметим, что имеет место разница в непрерывной части спектра пространственных профилей (рисунок 2.5,б): поскольку синхронная область отсутствует, непрерывный спектр не обладает T-образной формой, а лежит полностью на мнимой оси.

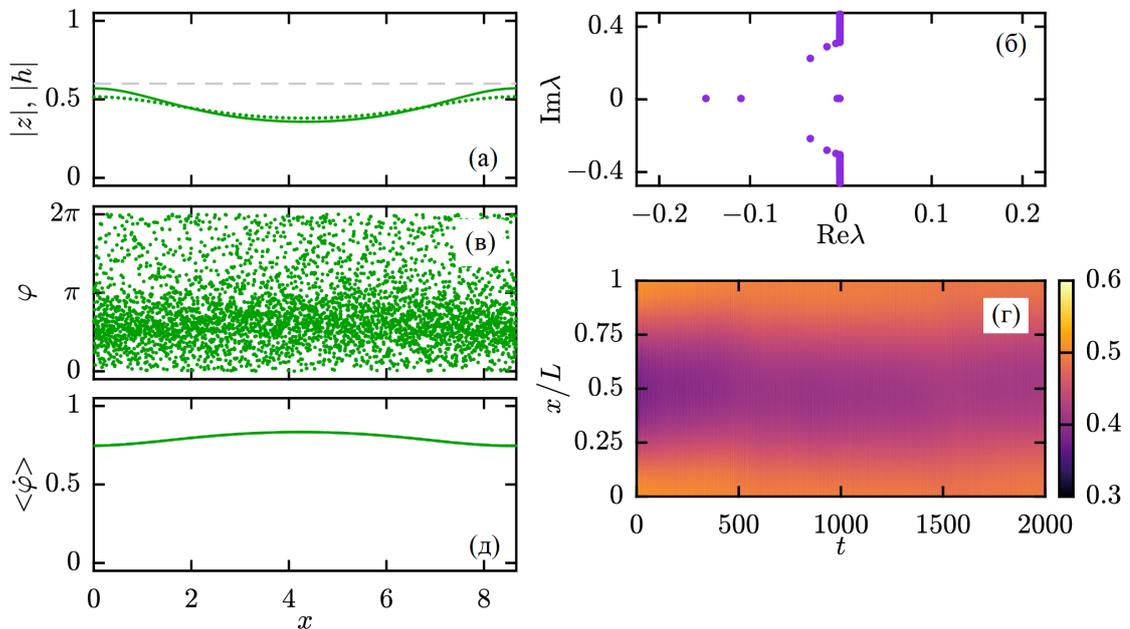


Рис. 2.5 — Устойчивое неоднородное состояние без синхронного домена. (а–д) То же, что на рисунке 2.4, но при $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 1.5$, $\Omega = -0.6$, $L \approx 8.662$

Устойчивое гибридное химерное состояние, которое можно рассматривать как комбинацию двух режимов, представленных на рисунках 2.4 и 2.5, проиллюстрировано на рисунке 2.6. Здесь периодический по пространству профиль пространственной структуры (характеризующийся локальными значениями $|z|$ и $|h|$) имеет два максимума. Один из этих максимумов соответствует синхронному кластеру с $|z| = 1$, а другой — частично синхронной области с повышенной степенью когерентности, где $|z| < 1$. Примечательно, что фазы осцилляторов в областях, соответствующих двум максимумам, сдвинуты на угол π друг относительно друга.

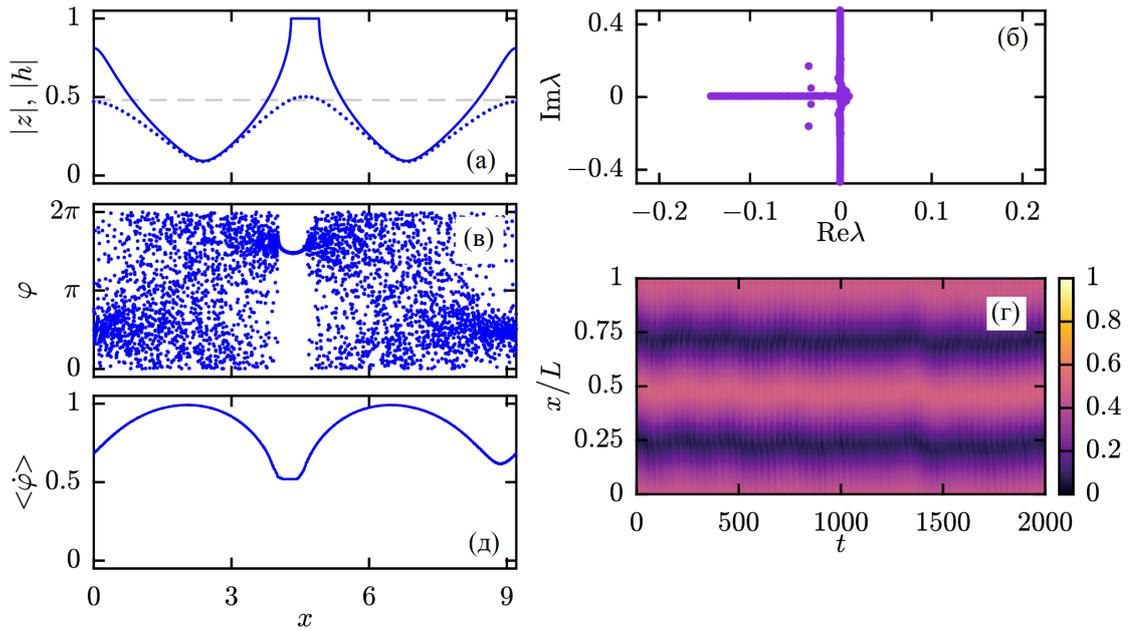


Рис. 2.6 — Устойчивое гибридное химерное состояние. (а–д) То же, что на рисунке 2.4, но при $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 1.5$, $\Omega = -0.48$, $L \approx 9.206$

2.6.2. Бризерные химеры

В данном разделе рассмотрим бризерные режимы, возникающие в результате развития неустойчивости режимов, представленных на рисунках 2.4 и 2.5. Бризерная химера показана на рисунке 2.7. На панелях а и б представлена стационарная химера, существующая для этого значения длины среды L , и ее спектр: можно наблюдать два дискретных комплексно сопряженных собственных значения с положительными действительными частями, означающих колебательную неустойчивость пространственной структуры. Прямые численные расчеты показывают, что при этом реализуется устойчивая бризерная химера (панель г). Здесь поля $H(x,t)$ и $Z(x,t)$ периодически изменяются во времени, при этом каждый момент времени существует полностью синхронная область, где $|Z| = 1$.

Интересное явление происходит в полностью синхронной области, близкой к частично синхронной. Здесь непрерывный профиль фаз не сохраняется постоянно: существуют моменты времени, в которое имеют место разрывы, проводящие к проскокам фаз. В середине синхронной области это происходит один раз за период модуляции, ближе к частично синхронному режиму проскальзывания происходят несколько раз в течение периода модуляции (эти сдвиги лучше всего видны на пространственно-временной диаграмме фаз на рисунке 2.7,е). Из-за этих проскальзываний в частотном профиле, показанном на рисунке 2.7,д, наблюдается не только одно частотное плато, соответствующее синхронной области, но

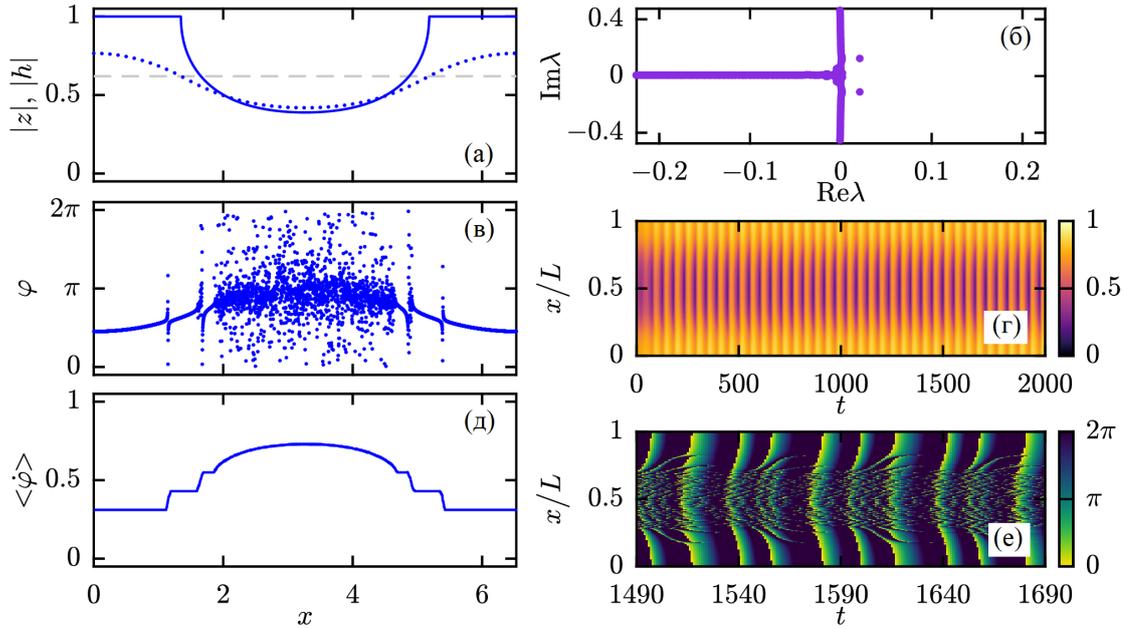


Рис. 2.7 — Бризерное химерное состояние. (а–д) То же, что на рисунке 2.4, но при $\alpha_0 = 0.3\pi$, $\alpha_1 = 0.65$, $\Omega = -0.62$, $L \approx 6.528$. (е) Фазовое поле $\varphi(x,t)$, отчетливо наблюдаются проскоки фаз

и два дополнительных, смещенных по частоте модуляции и ее второй гармонике. Отметим, что проскальзывания можно также рассматривать как единичные нарушения синхронизации, например, комплексный параметр порядка, определяемый около положения проскальзывания, уменьшается по модулю при каждом событии проскальзывания. Этот эффект недавно был обнаружен в [100] для двумерных спиральных химерных режимов, когда в области между асинхронным ядром и когерентной периферией наблюдаются осцилляторы, демонстрирующие периодическую динамику, как на рисунке 2.7,в.

Рассмотрим подробнее связь бризерного химерного режима со стационарными химерами. Результаты проведенного нами численного анализа отображены на рисунке 2.8 с помощью маркеров разного типа. Закрашенные точки отвечают устойчивым стационарным неоднородным решениям, а незакрашенные — неустойчивым. Например, на рисунке 2.8,а, соответствующем случаю существования устойчивого полностью синхронного режима, видно, что, когда размер L осцилляторной среды становится равным $L_{1a} \approx 3.127$, появляются две ветви $\Omega(L)$ однокластерных химер. Одна из них расположена почти вплотную к прямой $\Omega = \Omega_s$ и тянется вдоль нее до $L_{2a} \approx 10.418$. Все принадлежащие данной ветви решения неустойчивы. Вторая из отмеченных на рисунке 2.8, а химерных структур (см. рисунок 2.8,в) оказывается устойчивой в интервале от L_{1a} до

$L_{3a} \approx 6.403$. Фактический, при L_{1a} происходит бифуркация аналогичная седло-узловой. Похожая картина наблюдается и в ситуации, показанной на рисунке 2.8,б, соответствующем случаю неустойчивого полностью синхронного режима. Однако в этом случае вблизи $L_{1b} \approx 4.241$ возникают неустойчивое нехимерное состояние (см. рисунок 2.8,д) и устойчивая химера (см. рисунок 2.8,г). Первый класс решений сливается с однородным частично синхронным состоянием при длине L_{2b} , совпадающей с $L_{cr} \approx 4.443$. Стационарные же химеры теряют свою устойчивость при $L_{3b} \approx 6.902$.

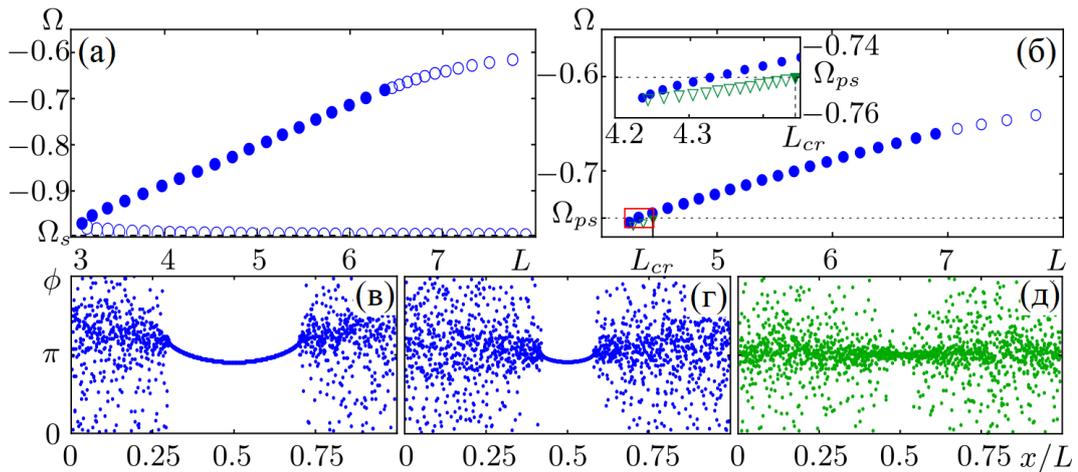


Рис. 2.8 — (а, б) Зависимости $\Omega(L)$ для стационарных неоднородных решений уравнения Отта—Антонсена при (а) $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$ и (б) $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$. Круглые маркеры отвечают однокластерным химерам, а треугольные маркеры — частично синхронным состояниям системы. Закрашенными точками отмечены устойчивые структуры, а незакрашенными — неустойчивые. (в, г, д) Пространственные распределения фазовых осцилляторов, которые восстановлены по локальным параметрам порядка $z(x)$, рассчитанным при (в) $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$, $\Omega = -0.7$, (г) $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$, $\Omega = -0.7$ и (д) $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$, $\Omega = -0.755$. На фрагментах (в) и (г) показаны устойчивые однокластерные химеры, имеющие соответственно длины $L \approx 6.147$ и $L \approx 5.668$. Фрагмент (д) демонстрирует характерный вид неоднородного частично синхронного состояния (размер среды в данном случае равен $L \approx 4.253$)

Проведенное непосредственно в рамках дискретного аналога модели (2.1),(2.3),(2.4) прямое численное моделирование подтверждает, что, как только размер L осцилляторной среды превышает зависящее от коэффициентов α_0 и α_1 критическое значение L_* , найденные с помощью редукции Отта—Антонсена химерные распределения действительно утрачивают свою устойчи-

вость. В частности, L_* при $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$ совпадает с L_{3a} , а при $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$ равно L_{3b} . Рисунки 2.9 и 2.10 демонстрируют процесс разрушения стационарных химер при $L > L_*(\alpha_0, \alpha_1)$ соответственно для каждого из данных наборов α_0, α_1 . Согласно детальным расчетам в ограниченном диапазоне $L_*(\alpha_0, \alpha_1) < L < L_{**}(\alpha_0, \alpha_1)$ этот процесс происходит по одному и тому же сценарию для различных комбинаций α_0, α_1 . В результате развития неустойчивости система фазовых осцилляторов переходит в режим, который характеризуется периодическим изменением во времени пространственной структуры (в том числе, интегральной величины $H(x, t)$) и одновременным наличием областей с синхронным и асинхронным поведением элементов среды (см. рисунок 2.9, г, д и 2.10, г, д). Обнаруженные осциллирующие (бризерные) химерные состояния существуют в течение длительного временного интервала и не распадаются при добавлении малых отклонений. Схема возникновения такого рода динамики во многом похожа на бифуркацию Андронова—Хопфа в сосредоточенных моделях, когда при изменении управляющих параметров из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый предельный цикл, а само оно становится неустойчивым. Однако в нашей ситуации не наблюдается типичный непрерывный переход пары собственных чисел из левой комплексной полуплоскости в правую, а скорее ответственные за неустойчивость точки изолированного спектра λ_p линейных возмущений стационарных химер выделяются из мнимой оси (см. рисунок 2.9, в, е, и и 2.10, в, е, и).

Увеличение размера L в пределах от $L_*(\alpha_0, \alpha_1)$ до $L_{**}(\alpha_0, \alpha_1)$ приводит к тому, что у формирующегося в итоге осциллирующего химерного режима возрастает период колебаний. Начиная с $L_{**}(\alpha_0, \alpha_1)$ ($L_{**} = L_{4a} \approx 7.012$ при $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$, $L_{**} = L_{4b} \approx 7.767$ при $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$), стационарные химеры перестают трансформироваться в бризерные. При $\alpha_1 < \pi/2 - \alpha_0$ и $L > L_{**}(\alpha_0, \alpha_1)$ в процессе разрушения фундаментальных химер сначала наблюдаются структурные осцилляции, а затем происходит синхронизация всех элементов среды (см. рисунок 2.9, ж, з), что вполне ожидаемо, т. к. однородное синхронное распределение в этом случае устойчиво. Когда же $\alpha_1 > \pi/2 - \alpha_0$ и $L > L_{**}(\alpha_0, \alpha_1)$, все исследованные нами выше состояния оказываются неустойчивыми. Прямое численное моделирование показывает, что в данной ситуации система переходит в сложные пространственно-временные режимы, когда синхронные и асинхронные области эволюционируют во времени нерегулярным образом (см. рисунок 2.10, ж, з).

Бризерное неоднородное состояние без синхронных кластеров (рисунок 2.11) возникает при развитии неустойчивости частично синхронного стационарного состояния, представленного на рисунке 2.5. Этот режим очень похож на бризерный химерный режим (рисунок 2.7). Однако здесь отсутствуют проскоки фаз, поскольку здесь нет синхронной области, и профиль частот остается плавным.

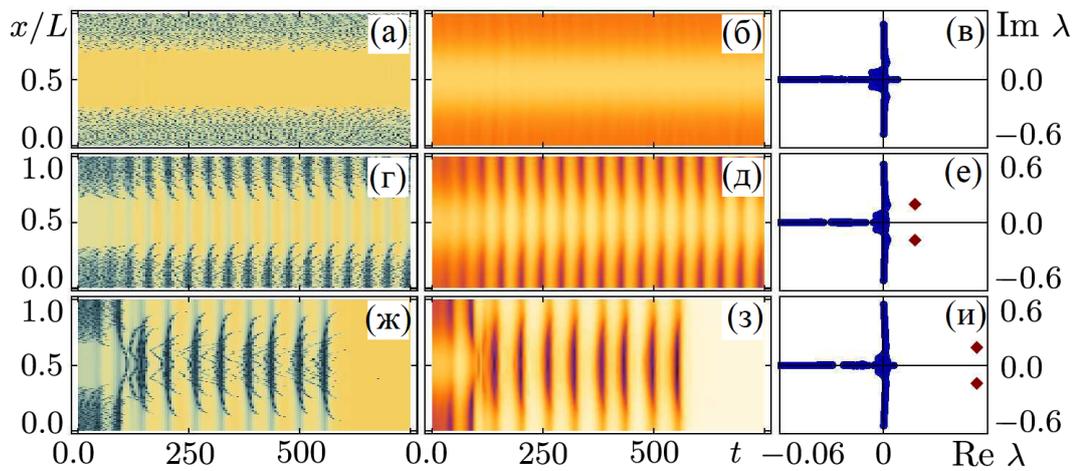


Рис. 2.9 — (а, г, ж) Динамика пространственного распределения индивидуальных частот $\partial_t \varphi(x, t)$ фазовых осцилляторов. На данных фрагментах отчетливо видны области с синхронным и асинхронным движением соседних элементов среды. (б, д, з) Поведение во времени абсолютной величины комплексного поля $H(x, t)$. Представленные результаты получены непосредственно с помощью прямого численного моделирования в рамках дискретного аналога исходной модели (2.1), (2.3), (2.4) при $\omega = 1$, $\alpha_0 = 1.1$, $\alpha_1 = 0.4$ и размерах системы: (а, б) $L \approx 6.147$, (г, д) $L \approx 6.668$ и (ж, з) $L \approx 7.231$. Для каждого из расчетов в качестве начальных условий выбиралось состояние, близкое к однокластерной химере при заданной длине L . (в, е, и) Спектр λ линейных возмущений для соответствующих стационарных неоднородных решений уравнения Отта—Антонсена (2.7), (2.8). Круглыми маркерами нанесены собственные значения, отвечающие существенной части спектра λ_e . Из-за проблем обусловленных дискретизацией это множество состоит не только из отрицательных действительных и чисто мнимых чисел, хотя и имеет характерную T -форму. Маркерами в виде ромбов отмечены собственные значения, которые принадлежат точечному спектру λ_p , ответственному за неустойчивость

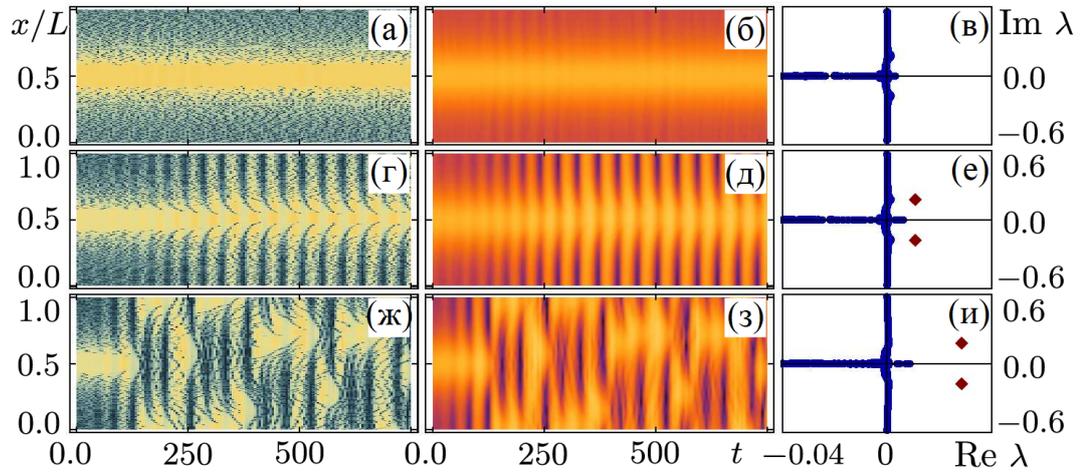


Рис. 2.10 — То же, что и на рисунке 2.9, но при $\omega = 1$, $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 0.2\pi$ и значениях длины среды: (а, б, в) $L \approx 6.899$, (г, д, е) $L \approx 7.2905$ и (ж, з, и) $L \approx 7.767$

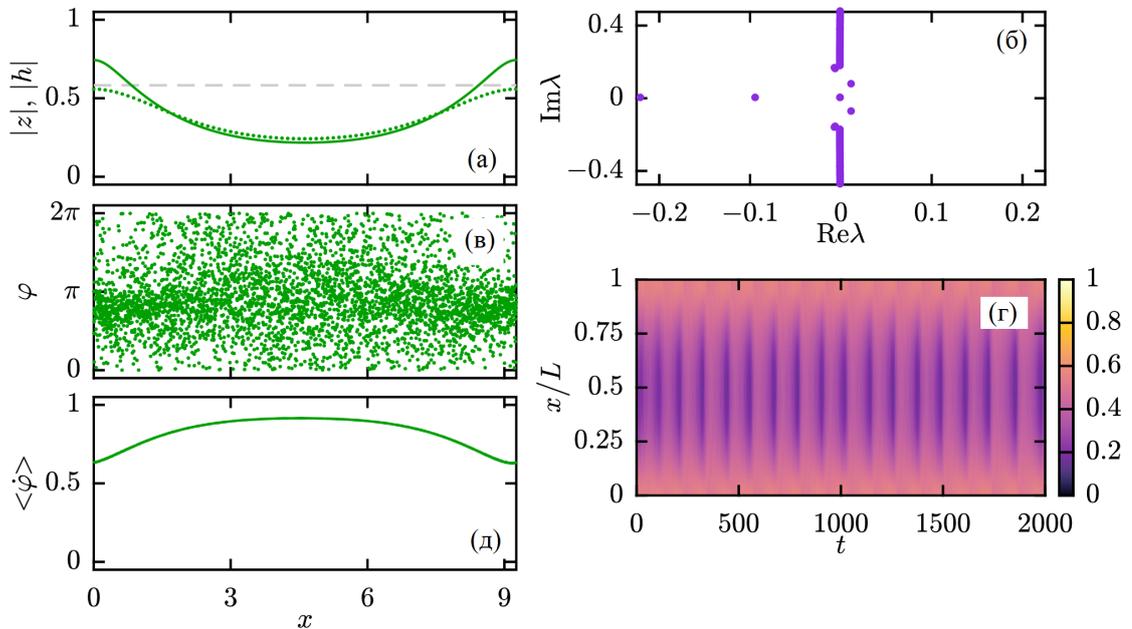


Рис. 2.11 — Бризерное неоднородное состояние без синхронной области. (а–д) То же, что на рисунке 2.4, но при $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 1.5$, $\Omega = -0.583$, $L \approx 9.26$

2.7. Турбулентные химеры

Далее проиллюстрируем нерегулярные состояния, которые реализуются при относительно больших значениях длины L . Для промежуточных значений L они могут сосуществовать с более простыми состояниями, описанными выше. На рисунке 2.12 показана слабо нерегулярная бризерная химера, которая похожа на состояние, представленное на рисунке 2.11. Колебания при этом апериодичны, но в остальном пространственный профиль поля $H(x,t)$ довольно регулярный.

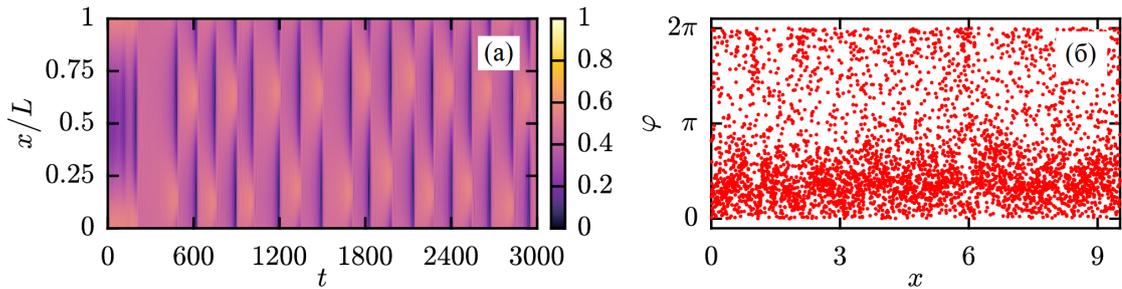


Рис. 2.12 — Слабо нерегулярное неоднородное состояние при $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 1.5$, $L \approx 9.52$ (длина системы L немного превышает длину среды, представленную на рисунке 2.11). (а) Модуль комплексного поля $H(x,t)$. (б) Фазы осцилляторов $\varphi_n(t)$ при $t = 3000$

Сильно турбулентное состояние показано на рисунке 2.13. Здесь поле $H(x,t)$ сильно нерегулярно. Тем не менее, в каждый фиксированный момент времени (панель б) можно выделить области, где профиль фаз является локально довольно гладким, таким образом их можно отнести к синхронным кластерам. В долговременном масштабе динамика всех осцилляторов нерегулярна, и симметрия в системе восстанавливается, хотя и в статистическом смысле. Стоит сравнить эти турбулентные состояния с описанными ранее режимами. В работе [102], были получены нерегулярные пространственно-временные режимы для аналогичной модели, а также для цепочки идентичных осцилляторов Стюарта—Ландау (показывая, что эта реализация данного режима не ограничивается цепочками фазовых осцилляторов). В работе [86] была исследована среда неидентичных осцилляторов с индивидуальными частотами, удовлетворяющими распределению Лоренца. В такой системе химерные состояния с областями когерентной динамики невозможны. Однако, при численном моделировании уравнений Отта—Антонсена для среды с прямоугольным ядром $G(x)$ были обнаружены режимы амплитудной и фазовой турбулентности [86]. Амплитуда параметра порядка всюду

не превышает единицы из-за неупорядоченности частот осциллятора. На рисунке 2.13 видно, что в среде существуют области с синхронными профилями фазы (видны как кусочки линий на панели б), что означает, что в случае идентичных элементов для модели из [86] параметр порядка в турбулентном состоянии может достичь значения равного единице.

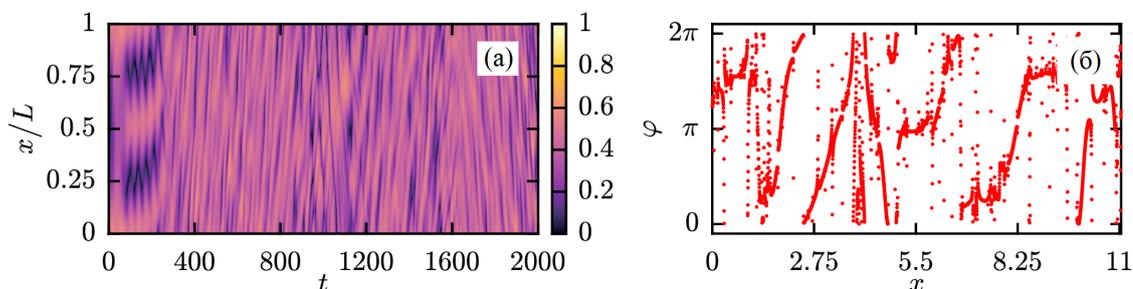


Рис. 2.13 — Сильно нерегулярное неоднородное состояние при $\alpha_0 = 0.4\pi$, $\alpha_1 = 1.5$, $L \approx 11.04$ (длина системы L немного превышает длину среды, представленную на рисунке 2.12). (а) Модуль комплексного поля $H(x,t)$. (б) Фазы осцилляторов $\varphi_n(t)$ при $t = 2000$

2.8. Выводы по второй главе

В рамках данной главы были рассмотрены различные химерные состояния в одномерной среде нелинейно связанных фазовых осцилляторов. Постановка модели почти идентична системе Курамото—Баттогтоха, за исключением нелинейности в связи [102]. Эта нелинейность приводит к новым эффектам. Во-первых, в данной системе возможно существование однородного частично синхронного состояния, которое, однако, становится неустойчивым в длинных средах. В классе стационарных (равномерно вращающихся) пространственно-неоднородных режимов наряду с классической химерой Курамото—Баттогтоха также существует неоднородное частично синхронное состояние и гибридная химера, состоящая из двух областей с высокой степенью когерентности элементов — одна состоит из полностью синхронных элементов, а другая из частично синхронных. Кроме того, найдены не наблюдавшиеся ранее осциллирующие (бризерные) химеры. Отметим, что в статьях [52; 116] уже указывалось на возможность существования модулированных химерных режимов, но не в сплошной среде, а в дискретных популяциях. В [52] изучалась конфигурация из двух взаимодействующих между собой групп глобально связанных фазовых осцилляторов. В свою очередь в [116]

обсуждалось обобщение этой конфигурации на случай трех таких популяций. Используя подход Отта—Антонсена, авторам работ [52; 116] удалось перейти от исходной проблемы к задаче исследования поведения во времени соответственно двух или трех параметров порядка, динамика которых описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями низкого порядка. Анализ показал, что отвечающие химерам состояния равновесия у данных уравнений могут претерпевать бифуркацию Андронова—Хопфа и трансформироваться в устойчивые предельные циклы, которые были сопоставлены специфическим режимам с периодически изменяющейся степенью синхронизации осцилляторов одной из групп.

Найденные бризерные химеры дают положительный ответ на поставленный в [52] вопрос о их наличии в системе идентичных фазовых осцилляторов, распределенных на кольце. Подчеркнем также, что похожий эффект был обнаружен в работе [79]. Однако в ней для формирования осцилляций у химерных состояний искусственно вводилась неоднородная задержка $\alpha = \alpha(x)$, а также использовалось другое ядро $G(x)$ и предполагалось, что элементы среды имеют случайный разброс по собственным частотам. В [79] отличная от постоянного значения зависимость $\alpha = \alpha(x)$ удовлетворяла условиям периодичности на границах рассматриваемого пространственного интервала. Подобным свойством обладает и используемая нами нелинейная функция $\alpha(h)$. По-видимому, данное обстоятельство играет ключевую роль в формировании бризерных химер. Показано, как развитие неустойчивости стационарных химер приводит к возникновению периодически модулированных по времени химер. При этом синхронный кластер разбивается на подобласти, имеющие различные средние частоты, а разность данных частот представляет собой частоту модуляции.

В средах большой длины регулярные режимы обычно неустойчивы, и в системе реализуется либо слабо хаотическое состояние (апериодическая бризерная химера), либо сильно нерегулярный режим.

Глава 3. Синхронизация и регуляризация химерных режимов внешним периодическим воздействием в распределенном ансамбле идентичных фазовых осцилляторов

3.1. Введение

Химеры в ансамблях нелокально связанных идентичных фазовых осцилляторов – это структуры, сочетающие в себе синхронные и асинхронные участки. Со времени первого наблюдения Курамото и Баттогтохом [50] был достигнут значительный прогресс в теоретическом и экспериментальном исследовании химер (см. недавние обзоры [47; 49]). На микроскопическом уровне химера в модели Курамото—Баттогтоха представляет собой сосуществующие кластеры когерентных и некогерентных осцилляторов: соседние элементы либо полностью синхронизированы, либо частично скоррелированы. На мезоскопическом уровне, где можно ввести локальный параметр порядка, химера является неоднородной структурой с непрерывным профилем комплексного параметра порядка, который имеет абсолютное значение равное единице в когерентных по фазам кластерах и меньше единицы в некогерентных областях. На макроскопическом уровне химеру можно рассматривать как неоднородную колебательную структуру.

В однородной среде, в силу инвариантности к сдвигам по пространству и времени, химерный режим, как ожидается, будет чувствителен к слабо неоднородному по пространству или к небольшому по амплитуде воздействию, зависящему от времени. Первый вариант был рассмотрен в работах [117; 118], где было показано, что слабая неоднородность может управлять положением химеры в пространстве. Здесь мы остановимся на периодическом, равномерном по пространству воздействии. Основным ориентиром является то, что химера на макроскопическом уровне является объектом, совершающим колебания, и, таким образом, подобно простым самосогласованным осцилляторам, она может синхронизироваться по фазе и частоте. В частности, две связанные химеры могут синхронизироваться в смысле увлечения их средних частот, при этом внутренняя неоднородная структура химеры сохраняется [119; 120].

В рамках данной главы будут исследованы свойства синхронизации химерных структур, подверженных периодической по времени и однородной по пространству внешней силе [121; 122]. Будет использован подход, описанный в предыдущих главах, позволяющий сводить задачу нахождения химер к задаче

нахождения периодических траекторий в системе обыкновенных дифференциальных уравнений. На макроскопическом уровне будут определены устойчивые и неустойчивые химеры с различными фазовыми сдвигами относительно внешнего силового воздействия и области их существования (языки Арнольда) на плоскости управляющих параметров частота-амплитуда внешней силы. На мезоскопическом уровне захваченные химеры могут быть стационарными, бризерными или турбулентными, характеризующимися соответственными распределениями средних частот осцилляторов. За пределами области захвата могут наблюдаться интересные микроскопические структуры, где частоты некоторых кластеров когерентных осцилляторов могут захватываться внешней силой, в то время как химера в целом нет.

3.2. Описание модели

В качестве базовой модели используем систему фазовых осцилляторов Курамото—Баттогтоха [50] с дополнительным периодическим воздействием. Мы предполагаем, что N осцилляторов, описываемых их фазами φ_n , расположены в кольце и нелокально связаны за счет ядра связи $G_{n,\tilde{n}} = LG(L(n - \tilde{n})/N) / N$:

$$\frac{d\varphi_n}{dt} = \text{Im} \left(e^{-i(\varphi_n + \alpha)} \sum_{\tilde{n}=1}^N G_{n,\tilde{n}} e^{i\varphi_{\tilde{n}}} + \varepsilon e^{i(\Omega t - \varphi_n)} \right). \quad (3.1)$$

Дискретный вариант модели (3.1) будет использоваться в рамках прямого численного моделирования. Однако для теоретического описания удобно перейти к ее пространственно-непрерывному варианту, рассматривая $x = Ln/N$ как непрерывную координату. Тогда модель будет представлять собой одномерную замкнутую в кольцо длины L среду, описываемую фазами $\varphi(x, t)$, которые связаны нелокально. Эта среда дополнительно подвергается воздействию однородной силы с амплитудой ε и частотой Ω :

$$\partial_t \varphi = \text{Im} \left(e^{-i(\varphi + \alpha)} \int_0^L G(x - \tilde{x}) e^{i\varphi(\tilde{x}, t)} d\tilde{x} + \varepsilon e^{i(\Omega t - \varphi)} \right). \quad (3.2)$$

Ядро

$$G(x) = \cosh(|x| - L/2) / 2 \sinh(L/2) \quad (3.3)$$

есть регуляризованная (для периодических граничных условий) версия экспоненциального ядра, использованная Курамото и Баттогтохом [50; 73].

Следует отметить, что ядро $G(x)$, определяемое выражением (3.3), является обратным к оператору $(\partial_{xx} - 1)$ в замкнутой в кольцо среде длины L , тогда как экспоненциальное ядро является обратным в среде бесконечной длины (см. уравнение (3.6) ниже).

Для первого этапа анализа введем локальный параметр порядка $Z(x,t) = \langle e^{i\varphi(x,t)} \rangle_\delta$ за счет усреднения в малой окрестности точки δ [73; 76; 87; 102]. Комплексный локальный параметр порядка $Z(x,t)$ удовлетворяет уравнению Отга—Антонсена [73; 76; 87; 102]

$$\partial_t Z = (e^{-i\alpha} H - e^{i\alpha} H^* Z^2)/2, \quad (3.4)$$

$$H(x,t) = \varepsilon e^{i(\Omega t + \alpha)} + \int_0^L G(x - \tilde{x}) Z(\tilde{x}, t) d\tilde{x}. \quad (3.5)$$

Здесь введено вспомогательное макроскопическое поле $H(x,t)$, которое описывает силу, действующую на осцилляторы в небольшой окрестности точки x со стороны всей среды. Используя конкретную форму (3.3) для ядра $G(x)$ и интегральное соотношение (3.5) между $Z(x,t)$ и $H(x,t)$, можно записать следующее дифференциальное уравнение:

$$\partial_{xx}^2 H - H = -Z - \varepsilon e^{i(\Omega t + \alpha)}. \quad (3.6)$$

Таким образом, задача поиска химерных состояний, захваченных внешней силой, может быть сформулирована как задача нахождения нетривиальных пространственных структур в системе уравнений в частных производных (3.4), (3.6). Ниже мы зафиксируем значение параметра $\alpha = 1.457$ (принятое в [50]).

Выше мы ввели иерархию уравнений, описывающих динамику ансамбля нелокально связанных фазовых осцилляторов. Важно описать подробно эти уровни и наметить возможные подходы к исследованию химер на каждом из них.

На *макроскопическом* уровне можно рассматривать химеру как периодическое по времени (с некоторой частотой Ω_0) решение макроскопических уравнений (3.4), (3.5), имеющее нетривиальную пространственную структуру профиля комплексного параметра порядка $Z(x,t)$. Если рассматривать это решение в качестве предельного цикла в бесконечномерном фазовом пространстве можно ожидать, что воздействие периодической силы на химеру будет аналогично известным свойствам синхронизации внешним воздействием периодических самосогласованных осцилляторов. А именно, на плоскости управляющих параметров будет существовать область синхронизации (язык Арнольда), внутри

которого решение остается в основном таким же, как и в отсутствие внешнего воздействия, в то время как его частота будет захвачена частотой внешнего воздействия Ω . Практически, поиск химерного решения представляет собой нетривиальную проблему. В работе [72] эта задача была сформулирована как нелинейная задача на собственные значения, и приведены примеры различных макроскопических решений для кусочно-постоянного и гармонических ядер связи (где был применен метод Галеркина для уменьшения размерности бесконечномерной задачи). Химерные режимы для экспоненциального ядра были найдены как решения нелинейного самосогласованного уравнения в работе [50]. В публикации [73] был использован альтернативный подход для ядра вида (3.3). Здесь задача поиска сводится к решению системы уравнений в частных производных, которая для равномерно вращающихся структур дополнительно сводится к системе уравнений, содержащей только пространственные производные. В результате задача нахождения равномерно вращающихся структур сводится к нахождению периодических решений трехмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это гораздо более простая задача, чем поиск неподвижных точек для многомерного приближения Галеркина в бесконечномерной нелинейной задаче на собственные значения. Действительно, таким образом, многие пространственные профили для химер были найдены в [73]. Ниже мы покажем, как этот подход может быть обобщен для химер, находящихся под внешним периодическим воздействием (потенциально, методы Галеркина для решения нелинейной задачи на собственные значения могут быть обобщены для систем под внешним воздействием).

На *мезоскопическом* уровне учитывается также сложная пространственно-временная динамика решения, которая, тем не менее, остается на уровне грубого описания в терминах локального параметра порядка $Z(x,t)$, удовлетворяющего системе (3.4), (3.5). Здесь, в частности, свойства устойчивости полученных решений являются существенными. Выделяются стационарные химеры с независимым от времени (во вращающейся системе координат с частотой Ω_0) профилем параметра порядка; бризерные химеры с периодически модулированным параметром порядка; а также турбулентные химеры. Два последних состояния не могут быть интерпретированы как (многомерные) предельные циклы, они скорее соответствуют квазипериодическим и хаотическим аттракторам. Синхронные свойства таких решений достаточно нетривиальны. Будет показано, что здесь захват основной частоты химеры (понимаемой как одной из базовых частот

в квазипериодическом случае, и средней частоты глобального параметра порядка в турбулентном случае, последняя ситуация соответствует так называемой фазовой синхронизации хаотических осцилляторов [123]) также может быть достигнута путем внешнего воздействия. Кроме того, внутри соответствующей области захвата (которую также можно назвать языком Арнольда) свойства устойчивости могут регулироваться внешним воздействием: захваченная бризерная химера может стать стационарной или турбулентной, а турбулентная химера стационарной (регуляризация).

Наконец, опишем химерное состояние на микроскопическом уровне, где рассмотрим динамику отдельных осцилляторов в большом, но конечном ансамбле осцилляторов (3.1). Переход на этот уровень весьма нетривиален по двум причинам. Во-первых, даже если рассматривать систему в непрерывном пределе (3.2), то стационарная химера не является больше периодической структурой, а представляет собой квазипериодическое решение с бесконечным числом частот (все осцилляторы в когерентной области имеют базовую частоту Ω_0 , но все частоты в некогерентной области различны и заполняют некоторый непрерывный интервал). Нам неизвестна какая-либо математическая теория синхронизации для таких объектов. Практически мы можем охарактеризовать синхронизацию на микроскопическом уровне, определяя средние частоты для всех осцилляторов. Интересной, как сообщается ниже, особенностью химерных режимов является появление нескольких плато в профилях средних частот для режимов вне основного языка Арнольда. Во-вторых, понятие стационарной химеры должно быть пересмотрено, если вместо непрерывного предела рассматривать конечный набор из N осцилляторов. Известно, что в такой системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.1) химера является хаотическим состоянием с ненулевым старшим показателем Ляпунова [124; 125]. Таким образом, даже синхронизация стационарной химеры формально должна рассматриваться как фазовая синхронизация хаотических колебаний [123]. Также заметим, что слабо хаотическая химера обладает очень большим временным масштабом когерентности, который расходится в непрерывном пределе, но ограничен для конечных размеров системы N . Из-за хаоса когерентная область в химере выполняет случайное блуждание, так что на больших временных масштабах каждый осциллятор в некоторые промежутки времени относится к когерентной области, а в некоторые к некогерентной. Это случайное блуждание восстанавливает симметрию пространственных сдвигов: теперь средние частоты всех осцилляторов равны, и эта частота не совпадает с ос-

новой частотой Ω_0 стационарной химеры. Однако мы не будем исследовать такие длительные временные масштабы, которые выходят за пределы вычислительной доступности для размеров ансамбля $N = 4096$ и $N = 8192$, используемых при прямом численном моделировании ниже.

3.3. Стационарные захваченные химеры и их устойчивость

В этом разделе мы опишем численные процедуры для нахождения стационарных химерных состояний системы (3.4), (3.6) и определения устойчивости этих структур. Эти химеры являются периодическими по пространству решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих пространственные профили структур, вращающихся с внешней частотой Ω . Этот подход позволяет нам (с желаемой точностью) определить границы области существования (языка Арнольда) химер, захваченных внешним периодическим воздействием, для фиксированной длины среды L . Ниже мы опишем основные этапы данного метода (подробности обсуждаются в Приложениях В, Г, и Д).

Будем искать захваченные стационарные структуры, равномерно вращающиеся с частотой внешнего воздействия Ω :

$$Z(x,t) = z(x)e^{i\Omega t}, \quad H(x,t) = h(x)e^{i\Omega t}. \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.4), (3.6), получим систему уравнений для пространственных профилей $z(x)$ и $h(x)$:

$$e^{i\alpha} h^* z^2 + 2i\Omega z - e^{-i\alpha} h = 0, \quad h'' - h = -z - \varepsilon e^{i\alpha}. \quad (3.8)$$

Здесь и далее, штрихи обозначают производные по пространственной координате x . Первое алгебраическое уравнение позволяет выразить z через h (где один из двух корней выбирается в соответствии с условием локальной устойчивости [49; 72; 73; 126; 127]). Таким образом, мы получаем следующее обыкновенное дифференциальное уравнение для комплексной функции $h(x)$:

$$h'' - h = \left(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - |h|^2} \right) e^{i\beta} / h^* - i\varepsilon e^{-i\beta}, \quad (3.9)$$

где для удобства дальнейших обозначений мы определим параметр $\beta = \pi/2 - \alpha$, означающий отклонение значения α от $\pi/2$. Также отметим, что на границах интервала $[0, L)$ должны быть выполнены периодические граничные условия $h(0) = h(L)$ и $h'(0) = h'(L)$.

Чтобы найти химерные состояния, описываемые формулой (3.9), представим комплексное поле $h(x)$ в виде

$$h(x) = r(x)e^{i\theta(x)}, \quad (3.10)$$

где $r(x)$ и $\theta(x)$ – действительные переменные, зависящие от x . Однако, в отличие от классического экспоненциального представления формы комплексной функции, мы допускаем, что $r(x)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, тогда $\theta(x)$ не подвергается скачкам на $\pm\pi$ в точках, где $r(x)$ становится равным нулю, но зато остается гладкой функцией в этих точках.

Подставляя (3.10) в (3.9), приравнивая нулю действительные и мнимые части полученного выражения и вводя для удобства новую переменную $q(x) = r^2(x)\theta'(x)$, получим следующую систему вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка с параметрами β , Ω и ε :

$$\begin{aligned} r'' &= r + \frac{q^2}{r^3} + \frac{\Omega}{r} \cos \beta - \frac{\sqrt{r^2 - \Omega^2}}{r} \sin \beta - \varepsilon \sin(\theta + \beta), \\ q' &= \Omega \sin \beta + \sqrt{r^2 - \Omega^2} \cos \beta - \varepsilon r \cos(\theta + \beta), \\ \theta' &= q/r^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

в области синхронного поведения соседних осцилляторов, где $|r(x)| \geq |\Omega|$, и

$$\begin{aligned} r'' &= r + \frac{q^2}{r^3} + \frac{\Omega + \sqrt{r^2 - \Omega^2}}{r} \cos \beta - \varepsilon \sin(\theta + \beta), \\ q' &= \left(\Omega + \sqrt{r^2 - \Omega^2} \right) \sin \beta - \varepsilon r \cos(\theta + \beta), \\ \theta' &= q/r^2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

в домене с асинхронной динамикой элементов $|r(x)| < |\Omega|$. При построении решений мы переключаемся между (3.11) и (3.12) при $|r(x)| = |\Omega|$. Заметим, что единственность решений не нарушается, поскольку не существует решений, касающихся множества $|r(x)| = |\Omega|$. Уравнения (3.9), (3.11) и (3.12) для автономного случая ($\varepsilon = 0$) были исследованы в [73; 127] в контексте поиска химерных структур. Основное отличие от случая без внешнего воздействия состоит в том, что слагаемое, характеризующее внешнюю силу, нарушает инвариантность сдвига фаз $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$, где θ_0 – произвольная постоянная. Данная инвариантность позволяла в автономном случае свести полную систему четвертого порядка (3.11), (3.12) к системе третьего порядка.

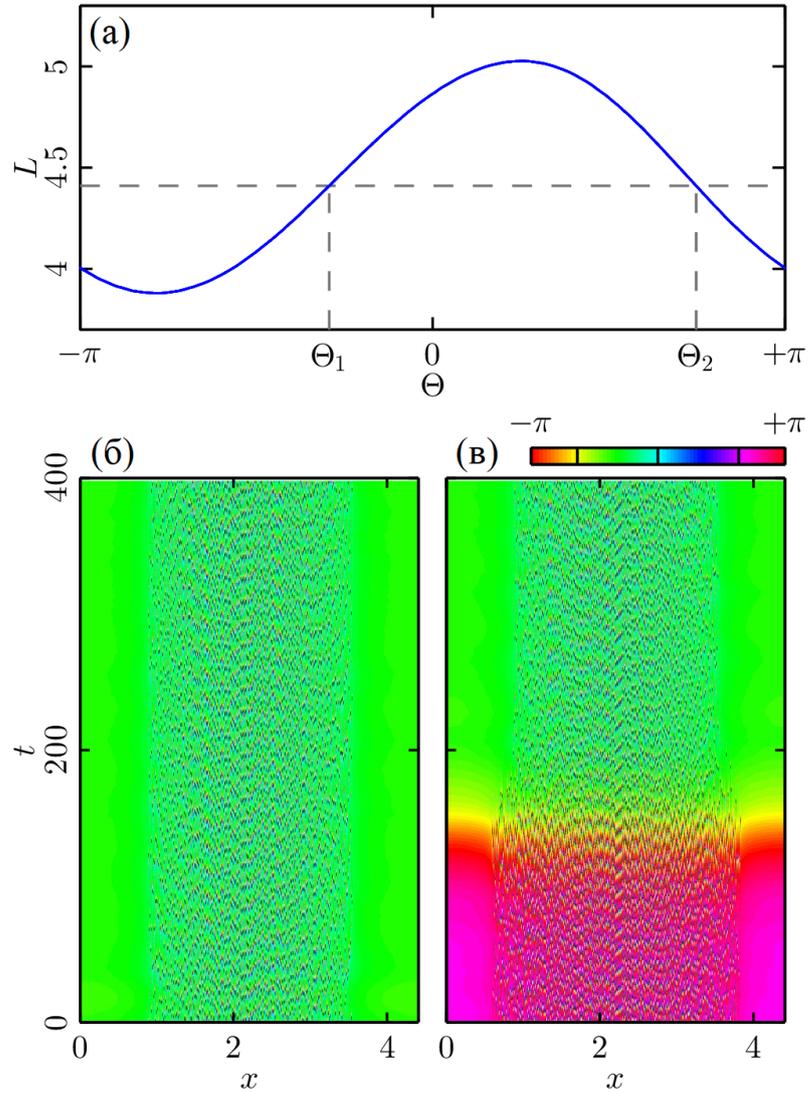


Рис. 3.1 — (а) Зависимость длины $L(\Theta)$ химерной структуры от параметра сдвига фазы $\theta(0) = \Theta$ при $\Omega = -0.8$ и $\varepsilon = 0.025$. Горизонтальная штриховая прямая соответствует $L = \bar{L} = 4.41$. Вертикальные пунктирные линии показывают значения $\Theta_1 = -0.92$ and $\Theta_2 = 2.35$. Фрагмент (б, в): Результаты прямого численного моделирования системы из $N = 4096$ осцилляторов, выполненные в рамках фазовой модели (3.1). На пространственно-временных диаграммах показаны фазы осцилляторов $\varphi_n(t)$ в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью Ω для (б) $\Theta = \Theta_1$ (устойчивый фазовый сдвиг) и (в) $\Theta = \Theta_2$ (неустойчивый фазовый сдвиг)

Наша стратегия (более подробно описанная в Приложениях В, Г) состоит в том, чтобы найти для каждой пары значений ε , Ω симметричное периодическое решение (3.11), (3.12), начиная с состояния $r(0) = R$, $\theta(0) = \Theta$, $r'(0) = 0$, $\theta'(0) = 0$. Начальное значение $r(0) = R$ варьируется для нахождения периодического решения, период которого L будет зависеть от начальной фазы $\theta(0) = \Theta$.

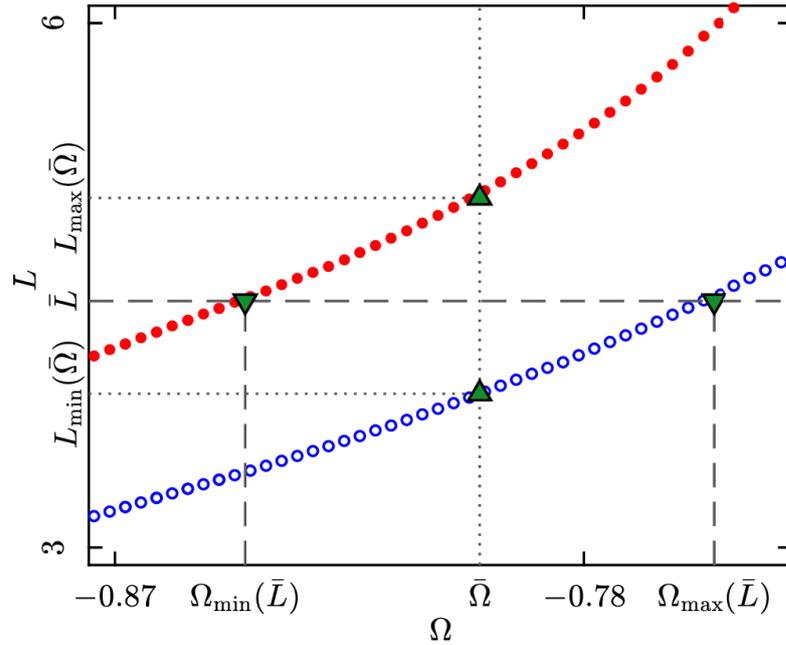


Рис. 3.2 — Зависимости $L_{\max}(\Omega)$ (заполненные красные маркеры) и $L_{\min}(\Omega)$ (полые синие маркеры), определенные численно при $\varepsilon = 0.025$. Ориентированные вверх треугольные маркеры отображают значения L_{\min} и L_{\max} при $\Omega = \bar{\Omega} = -0.8$. Ориентированные вниз треугольные маркеры показывают значения Ω_{\min} и Ω_{\max} для фиксированной длины среды $L = \bar{L} = 4.41$. Диапазон между Ω_{\max} и Ω_{\min} определяет ширину языка Арнольда при $\varepsilon = 0.025$ в случае $L = \bar{L} = 4.41$

Поскольку зависимость $L(\Theta)$ является 2π -периодической функцией Θ , в определенном диапазоне длин системы L мы будем иметь как минимум два решения для каждого L (на самом деле, во всех случаях, представленных ниже, это число равно двум, потому что мы рассматриваем только случай синхронизации 1:1). Проиллюстрируем это на рисунке 3.1, где также показана эволюция в течение длительного времени пространственных профилей для двух возможных химерных состояний при $L = 4.41$. Хорошо видно, что одно из них (что соответствует сдвигу фаз $\Theta = \Theta_1 = -0.92$) является устойчивым (рисунок 3.1,б), а другое (которое соответствует фазовому сдвигу $\Theta = \Theta_2 = 2.35$) проявляет неустойчивое поведение (оно эволюционирует к первому из-за соответствующего развития неустойчивости (рисунок 3.1,в)). Это наблюдение полностью соответствует общим свойствам синхронизации 1:1, когда существует два захваченных решения: одно с устойчивым смещением фазы, а другое с неустойчивым.

Следующим шагом определим из данных на рисунке 3.1,а значения $L_{\min}(\varepsilon, \Omega)$ и $L_{\max}(\varepsilon, \Omega)$ в диапазоне частот внешнего воздействия Ω при фиксированном ε . Искомые зависимости проиллюстрированы на рисунке 3.2. Для

определения границ языка Арнольда, т.е. области синхронизации, для фиксированного значения длины среды L найдем обратные зависимости $\Omega_{\min}(\varepsilon, L)$ и $\Omega_{\max}(\varepsilon, L)$ (подробно см. рисунок 3.2 и приложение Г). Тогда захваченные внешним периодическим воздействием стационарные химерные решения существуют в языке Арнольда, определяемого неравенством $\Omega_{\min}(\varepsilon, L) < \Omega < \Omega_{\max}(\varepsilon, L)$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ этот язык вырождается в точку $\Omega_0(L)$, соответствующую автономной химере с частотой Ω_0 . Примеры языков Арнольда представлены на рисунке 3.3 (детали реализующихся внутри языка динамических режимов описаны в разделе 3.4).

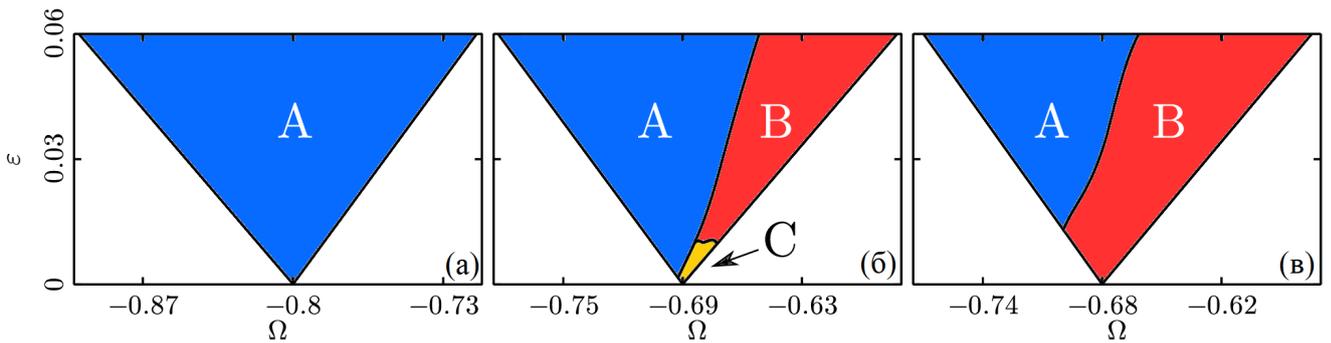


Рис. 3.3 — Области существования химерных состояний, захваченных внешней периодической силой, при (а) $L = 4.41$, (б) $L = 6.854$ и (в) $L = 7.332$. Соответствующие собственные частоты автономных стационарных химер равны (а) $\Omega_0 = -0.8$ (устойчивая), (б) $\Omega_0 = -0.69$ (неустойчивая, эволюционирует к бризерной) и (в) $\Omega_0 = -0.68$ (неустойчивая, эволюционирует к турбулентной), см. рисунок 3.4. Внутри каждого представленного языка Арнольда, в области A (синий цвет) одна из двух существующих захваченных химер устойчива. В областях B, C (красный и желтый цвет, соответственно), все стационарные химеры неустойчивы, и наблюдаемый режим является либо турбулентным в области B , либо периодическим по времени (бризерная химера) в области C

Кроме того, мы должны проанализировать устойчивость найденных структур. Для этого линеаризуем полную систему (3.4), (3.6) и решим соответствующую задачу на собственные значения. На практике это можно сделать с помощью конечно-разностного представления, описанного в [73; 97; 98; 127] (см. более подробное обсуждение в Приложении Д), что позволяет свести задачу к поиску собственных значений матриц большой размерности. Данный метод дает надежную оценку дискретных собственных значений, ответственных за возможное возникновение неустойчивости (см. подробное обсуждение в [72; 126]).

3.4. Влияние периодической силы на химерные режимы различного типа

3.4.1. Химерные режимы различных типов в автономном случае

Для начала обсудим различные типы автономных химер, а затем опишем влияние на них внешней периодической силы. Анализ устойчивости, как описано в Приложении Д, может также применяться к химерам в автономной модели [73; 97; 98; 127]. Соответственно, различают устойчивые и неустойчивые химеры. Последние обычно при развитии неустойчивости эволюционируют к бризерным (периодическим по времени) [97—99; 128] или турбулентным химерам [97; 102]. Данные три возможных режима проиллюстрированы на рисунке 3.4, где представлены результаты прямого численного моделирования (панели а, б и в) в рамках системы фазовых осцилляторов (3.1) для параметров, соответствующих случаям нулевой внешней силы $\varepsilon = 0$, т.е. расположенных в основании языка Арнольда. На рисунке 3.4 также изображены пространственные профили функций $|z(x)|$ и $|h(x)|$ (панели г, д, е), а также соответствующие спектры собственных значений λ (панели ж, з, и). Собственные значения λ_p (красные ромбы) довольно хорошо отделены от непрерывного (существенного) спектра λ_c (фиолетовые маркеры), который не имеет точно T -образной формы [72; 126], т.к. искажается из-за эффектов конечного приближения (см. Приложение Д). Для $\Omega_0 = -0.8$ точечный спектр λ_p удовлетворяет условию $\text{Re}(\lambda_p) < 0$ (рисунок 3.4,ж) и устойчивая однокластерная химера реализуется в фазовой модели (3.1) (рисунок 3.4,а). Для $\Omega_0 = -0.69$ существует пара комплексно-сопряженных собственных чисел из точечного спектра с $\text{Re}(\lambda_p) > 0$ (рисунок 3.4,з), поэтому стационарная химера неустойчива, и в системе (3.1) наблюдается бризерная химера (рисунок 3.4,б). Для $\Omega_0 = -0.68$ пара комплексно-сопряженных собственных значений имеет еще большие действительные части (рисунок 3.4,и), здесь неустойчивая стационарная химера эволюционирует к турбулентному режиму с нерегулярной динамикой фаз (рисунок 3.4,в). Ниже мы покажем, какое влияние оказывает внешнее воздействие на эти состояния.

3.4.2. Синхронизация устойчивой химеры

Рассмотрим влияние внешнего периодического воздействия на устойчивую стационарную химеру. Проиллюстрируем этот случай для значений параметров $L_0 = 4.41$, $\Omega_0 = -0.8$ (рисунок 3.4,а,г,ж). Для малых амплитуд внешнего воздей-

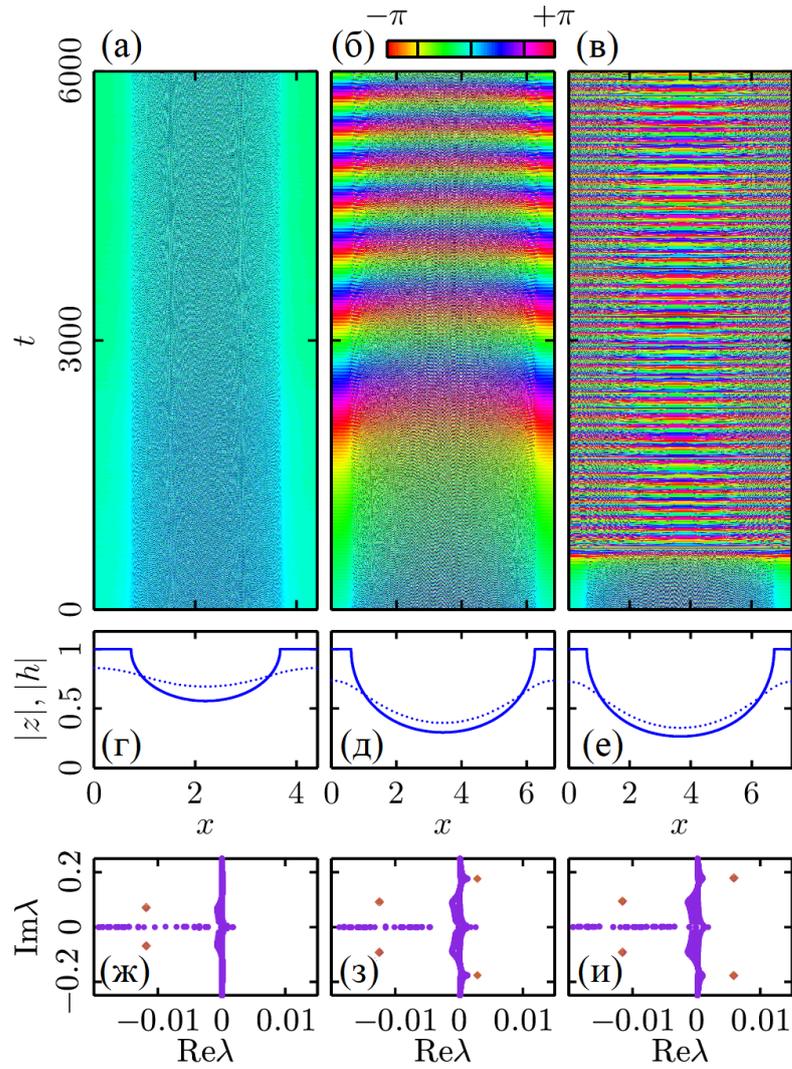


Рис. 3.4 — Результаты прямого численного моделирования модели (3.1) в автономном случае $\varepsilon = 0$. Фрагменты (а, б, в) демонстрируют пространственно-временные диаграммы фаз $\varphi_n(t)$ в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью Ω_0 . Фрагменты (г, д, е) показывают пространственные профили $|z(x)|$ (сплошная линия) и $|h(x)|$ (пунктирная линия), полученные с помощью метода, описанного в разделе 3.3, и определяющие начальные распределения фаз для прямого численного моделирования. Фрагменты (ж, з, и) демонстрируют спектры λ линейных возмущений решений (3.7) системы (3.4), (3.5). Фиолетовые маркеры — собственные значения матрицы дискретизации композитного оператора $\hat{M} + \hat{K}$ (см. Приложение Д), не соответствующие дискретной части спектра. Из-за конечной дискретизации это множество состоит не только из чисто вещественных отрицательных и чисто мнимых чисел, хотя и имеет характерную T -образную форму. Красные ромбы — собственные значения, принадлежащие точечному спектру λ_p , ответственные за возникновение неустойчивости. (а, г, ж) Устойчивая химера при $\Omega_0 = -0.8$, $L = 4.41$. (б, д, з) Бризерная химера при $\Omega_0 = -0.69$, $L = 6.854$. (в, е, и) Турбулентный режим при $\Omega_0 = -0.68$, $L = 7.332$

ствия $\varepsilon \lesssim 0.05$ мы получаем стандартный язык Арнольда на плоскости (ε, Ω) , внутри которого химера с захваченной частотой устойчива (см. рисунок 3.3,а). Динамика захвата фазы проиллюстрирована на рисунке 3.5,б, где показаны фазы осцилляторов в состоянии свободного вращения до момента времени $t_0 = 500$, при котором к среде начинает применяться внешнее периодическое воздействие с частотой $\Omega = -0.83$ и амплитудой $\varepsilon = 0.025$. Фазы осцилляторов изображены во вращающейся с частотой Ω системе координат, таким образом, при $t < t_0$ наблюдается вращение фазы синхронной области. Эффект синхронизации проявляется по разности между фазой внешней силы и фазой вращения когерентной области при $t > t_0$: в захваченном состоянии она становится постоянной. Это соответствует смещению профиля средних частот всех осцилляторов (рисунок 3.5,д): весь профиль сдвигается так, что частота когерентной области становится точно равной внешней (пунктирная линия). Заметим, что размер когерентного кластера при синхронизации увеличивается.

За пределами области синхронизации (т. е. для достаточно большой расстройки между Ω и Ω_0) наблюдаются незахваченные квазипериодические режимы (рисунок 3.5,а,в). При $\Omega < \Omega_0$ все осцилляторы имеют частоты больше, чем Ω , при этом можно четко видеть плато на частоте модуляции и его гармоники в профиле средних частот (рисунок 3.5,г). Для $\Omega > \Omega_0$ основная часть когерентных осцилляторов имеет частоту меньше, чем Ω , но существует кластер с частотой равной частоте внешнего воздействия (рисунок 3.5,е). Примечательно, что фазы этих осцилляторов в системе отсчета, вращающейся с частотой Ω , не являются постоянными, а испытывают довольно большие изменения (см. рисунок 3.6) (тем не менее, они идеально захвачены частотой внешней силы). Существование нескольких плато в профиле частот напоминает бризерные химеры [49; 97; 98; 128]. В последнем случае, однако, появляется дополнительная частота модуляции из-за неустойчивости стационарной химеры; в нашем случае частота модуляции обусловлена неполным захватом внешним воздействием.

3.4.3. Стабилизация бризерной химеры

Далее мы рассмотрим воздействие внешней силы на бризерную химеру. Бризерный режим реализуется при значениях параметров $L_0 = 6.854$, $\Omega_0 = -0.69$. В данном случае стационарная химера является слабо неустойчивой, ее спектр

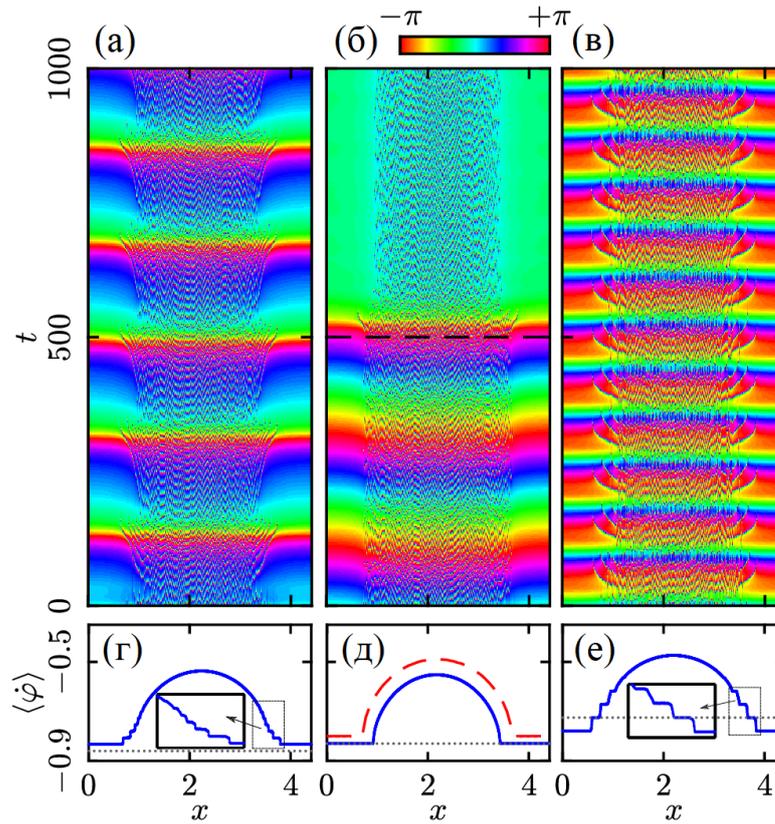


Рис. 3.5 — Захваченная устойчивая химера. Прямое численное моделирование системы из $N = 4096$ осцилляторов выполненных в рамках фазовой модели (3.1) при фиксированном значении параметра $\varepsilon = 0.025$ и различных частотах внешнего воздействия: (а, г) $\Omega = -0.86$, (б, д) $\Omega = -0.83$ и (в, е) $\Omega = -0.725$. Фрагменты (а, б, в) демонстрируют пространственно-временные диаграммы фаз $\varphi_n(t)$ в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью Ω . Фрагменты (г, д, е) демонстрируют средние частоты элементов (синие линии) и частоту внешнего воздействия Ω (серая пунктирная линия); на вставках к панелям (г, е) показаны увеличенные плато на частотных профилях. В каждом случае начальное состояние системы было взято близко к случаю автономной химеры при длине $L = 4.41$ и соответствующей собственной частоте $\Omega_0 = -0.8$. Для ситуаций, изображенных на панелях (а) и (в), внешняя сила на систему воздействовала в течение всего времени моделирования. В случае, показанном на панели (б), сила была включена в момент времени $t_0 = 500$ (черная пунктирная прямая на панели (б)). Красная пунктирная кривая на панели (д) обозначает профиль средних частот осцилляторов для автономной химеры

содержит два комплексно-сопряженных собственных значения с положительной вещественной частью, и в системе реализуется бризерная химера. Соответствующий язык Арнольда может быть построен аналогично случаю, описанному

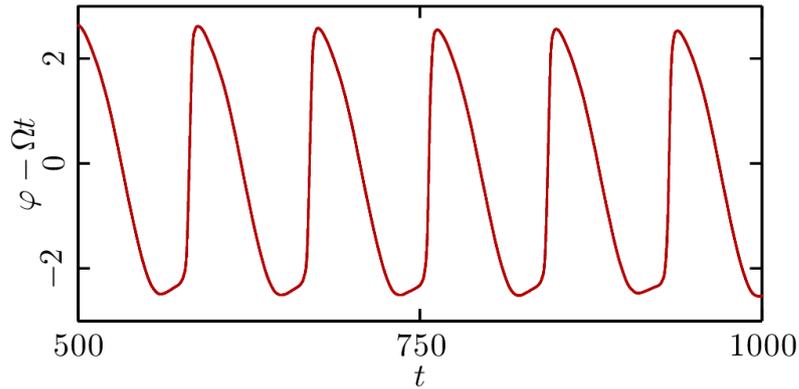


Рис. 3.6 — Зависимость фазы (в системе отсчета, вращающейся с частотой силы Ω) от времени для осциллятора, принадлежащего когерентному кластеру, захваченному внешней силой. На рисунке показано поведение во времени элемента, расположенного в точке $x = 0.64$, в ходе прямого численного моделирования, соответствующего рисунку 3.5,в,е

в предыдущем разделе. Однако только в подобласти A этой замкнутой области стационарное химерное состояние является устойчивым. В подобласти B языка Арнольда, окрашенной в красный цвет на рисунке 3.3,б, стационарная химера неустойчива и эволюционирует к турбулентной химере. Проиллюстрируем эти две ситуации на рисунке 3.7. На нем показаны два режима: один устойчивая захваченная внешним воздействием химера (панели а, в, д), а другая - неустойчивая химера (панели б, г, е) для двух точек внутри языка Арнольда (рисунок 3.3,б).

При малой амплитуде воздействия захваченная химера наследует неустойчивость автономной химеры и эволюционирует к бризерной химере (желтая область C рядом с основанием языка на рисунке 3.3,б). На рисунке 3.8 мы проиллюстрируем фазы $\varphi_n(t) - \Omega t$ (панель а) и локальный параметр порядка $Z(x, t)$ (панель б), для бризерной химерной структуры переходящую в устойчивую стационарную химеру для большей амплитуды внешнего воздействия. Можно четко наблюдать автономную бризерную химеру до момента времени $t_0 = 1000$, при котором на среду подается внешнее воздействие. Затем при $t > t_0$ средняя частота захватывается внешней силой, и периодические модуляции параметра порядка исчезают, что означает установление стационарного химерного состояния.

На рисунке 3.9 представлены более подробные характеристики режимов для больших значений параметра ε . Свойства синхронизации химерного режима характеризуются фазой глобального параметра порядка $\bar{\mathcal{Z}} = N^{-1} \sum_{n=1}^N e^{i\varphi_n} = \bar{\mathcal{R}} e^{i\bar{\Theta}}$. Определена наблюдаемая частота глобального параметра порядка $\Omega_{obs} =$

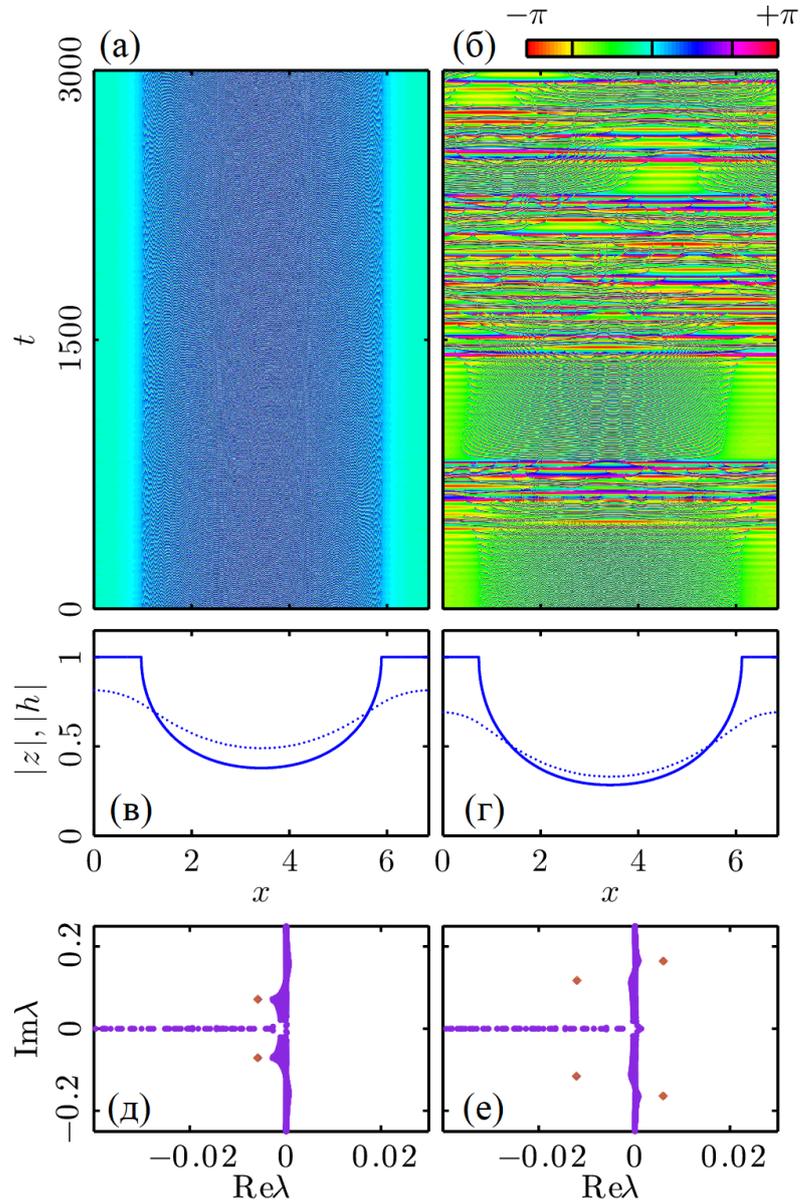


Рис. 3.7 — На панелях (а, б) представлены пространственно-временные диаграммы фаз $\varphi_n(t)$ в системе отсчета, вращающейся с частотой внешнего воздействия Ω при $L = 6.854$. Панели (в, г) изображают пространственные профили $|z(x)|$ (сплошная линия) и $|h(x)|$ (пунктирная линия), найденные с помощью метода, представленного в разделе 3.3 и определяющие начальное распределение фаз φ_n для прямого численного моделирования. Панели (д, е) демонстрируют спектр λ линейных возмущений для соответствующих решений. Фиолетовые маркеры – собственные значения матрицы дискретизации композитного оператора $\hat{M} + \hat{K}$ (см. Приложение Д), не соответствующие дискретной части спектра. Красные ромбы – собственные значения, принадлежащие точечному спектру λ_p , ответственные за возникновение неустойчивости. (а, в, д) Устойчивая химера при $\Omega = -0.74$, $\varepsilon = 0.05$. (б, г, е) Турбулентный режим при $\Omega = -0.63$, $\varepsilon = 0.05$

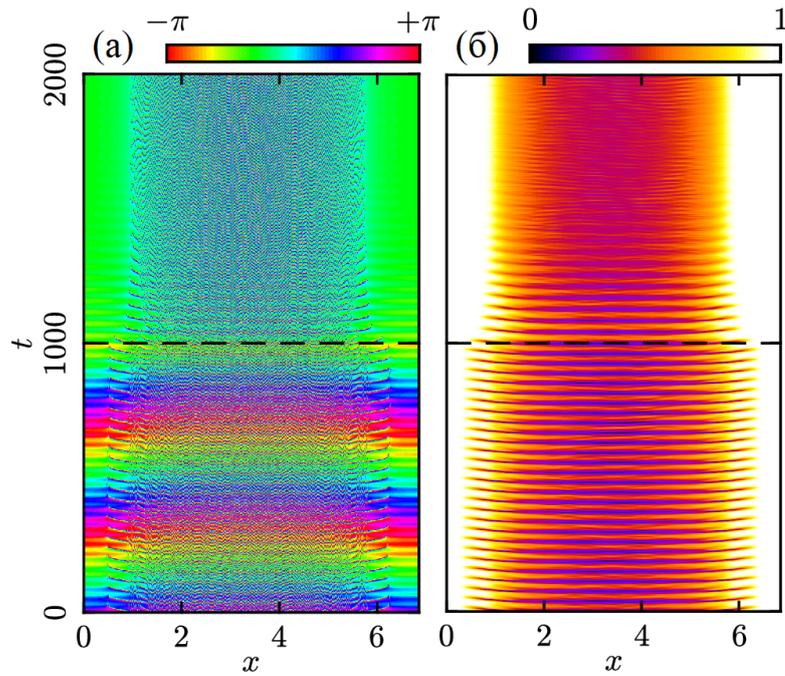


Рис. 3.8 — Синхронизация бризерной химеры при $L = 6.854$. (а) Пространственно-временная диаграмма фаз $\varphi_n(t)$ в системе отсчета, вращающейся с частотой внешнего воздействия Ω . (б) Абсолютное значение $|Z(x,t)|$ локального параметра порядка. Численное моделирование системы $N = 8192$ осцилляторов проводилось в рамках фазовой модели (3.1) при $\varepsilon = 0.06$, $\Omega = -0.69$. В качестве начальных условий выбрано бризерное химерное состояние для автономной системы. Внешнее воздействие было включено в момент времени $t_0 = 1000$, отмеченное черной пунктирной линией. Локальный параметр порядка $Z(x,t)$ вычислялся методом локального усреднения с гауссовым ядром $\exp(-x^2/2\zeta^2)$ с $\zeta = 0.1$

$\langle \dot{\Theta} \rangle$ и соотнесена с внешней частотой Ω , а также вычислено стандартное отклонение амплитуды глобального параметра порядка $\bar{\mathcal{R}}$ относительно его среднего значения. Последний параметр обеспечивает надежную характеристику регулярности наблюдаемой химеры, для регулярных структур она очень мала, в то время как для турбулентных и периодических во времени режимов имеет конечные значения. Из рисунке 3.9 видно, что области частотной синхронизации (где $\Omega_{obs} = \Omega$) и регулярности химеры совпадают. Это означает, что в турбулентном состоянии внутри области B на рисунке 3.3,б химера в среднем не захвачена, хотя на некоторых интервалах времени могут наблюдаться захваченные внешним воздействием когерентные участки (см. рисунок 3.7,б).

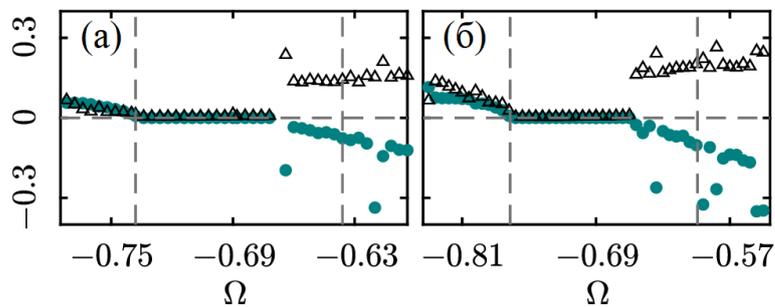


Рис. 3.9 — Зависимости разности частот $\Omega_{obs} - \Omega$ (темные маркеры) и стандартного отклонения модуля глобального параметра порядка $\bar{\mathcal{R}}$ (треугольные маркеры) для случая бризерной химеры на рисунке 3.3,б в ансамбле из $N = 4096$ элементов. Фрагмент (а): $\varepsilon = 0.03$, фрагмент (б): $\varepsilon = 0.05$. Пунктирная горизонтальная линия показывает нулевой уровень; пунктирные вертикальные линии – границы существования захваченного решения (черные жирные линии на рисунке 3.3,б). Видно, что переход к турбулентности (в правой части панелей) происходит довольно резко и сразу приводит к отклонению наблюдаемой частоты Ω_{obs} от внешней Ω

3.4.4. Регуляризация турбулентной химеры

Теперь рассмотрим влияние внешнего периодического воздействия на турбулентную химеру, наблюдаемую при значении параметров $L_0 = 7.332$, $\Omega_0 = -0.68$. В данном случае неустойчивость стационарного химерного режима настолько сильна, что в системе реализуется режим с нерегулярной пространственно-временной динамикой. Соответствующий язык Арнольда представлен на рисунке 3.3,в. Опять же, область существования захваченной стационарной химеры выглядит как стандартная треугольная область синхронизации, но только в относительно небольшой ее подобласти A (синяя область) это решение устойчиво. Проиллюстрируем эту ситуацию на примере эволюции локального параметра порядка $Z(x,t)$ на рисунке 3.10,б. Здесь турбулентная химера наблюдается до момента включения внешней силы при $t_0 = 1500$, после чего она переходит в устойчивую стационарную химеру.

Для больших значений частоты внешнего воздействия (красная область B на рисунке 3.3,в) захваченные решения обычно наследуют неустойчивость автономной химеры, при этом реализуются турбулентные состояния (рисунок 3.10,а). Зависимости частоты фазы глобального параметра порядка Ω_{obs} и стандартного отклонения его амплитуды $\bar{\mathcal{R}}$ аналогичны представленным на рисунке 3.9. Здесь мы подчеркнем, что при достаточно больших амплитудах воздействия наблюдаемое турбулентное состояние является переходным и эволюционирует после долгого нерегулярного переходного процесса к полностью синхронному режиму.

3.5. Выводы по третьей главе

В рамках данной главы было исследовано влияние внешнего периодического воздействия на химерные состояния в одномерной среде нелокально связанных осцилляторов. Стационарные химеры, захваченные внешним воздействием, были определены как замкнутые траектории вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Самый простой вариант динамики наблюдается, если автономная химера устойчива. Тогда макроскопический эффект воздействия на него очень похож на синхронизацию автономного осциллятора: существует область захвата, в которой частота химеры синхронизируется частотой воздействия, в то время как за пределами языка Арнольда наблюдается квазипериодическая динамика. Внутри языка Арнольда на мезоскопическом

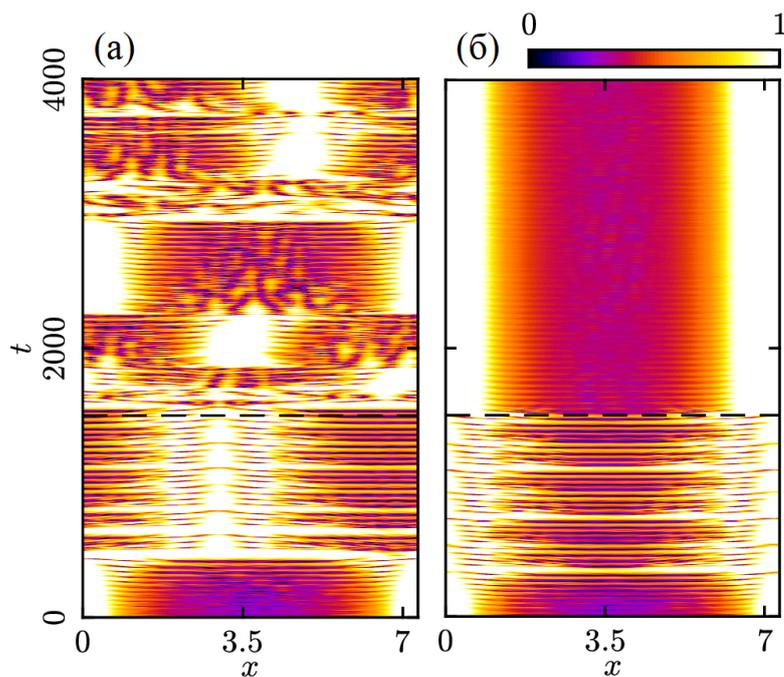


Рис. 3.10 — Синхронизация турбулентной химеры при $L = 7.332$. Динамика амплитуды локального комплексного параметра порядка $|Z(x,t)|$ вычислена так же как на рисунке 3.8 в ходе прямого численного моделирования системы из $N = 8192$ осцилляторов в рамках фазовой модели (3.1) при (а) $\varepsilon = 0.03$, $\Omega = -0.68$ и (б) $\varepsilon = 0.06$, $\Omega = -0.68$. Начальные условия были выбраны в виде стационарной химеры, которая вследствие неустойчивости переходит в турбулентное состояние. Внешнее воздействие включено в момент времени $t_0 = 1500$, который отмечен черной пунктирной линией. Видно, что достаточно большое по амплитуде воздействие может стабилизировать и упорядочить поведение системы, которая переходит в стационарный химерный режим (см. фрагмент б)

уровне наблюдается увеличение когерентной области. На микроскопическом уровне отдельных осцилляторов никаких существенных изменений внутри языка Арнольда не наблюдается. Тем не менее, динамика на микроскопическом уровне становится нетривиальной вне языка Арнольда с появлением нескольких кластеров когерентных осцилляторов. В частности, было обнаружено, что, хотя основная частота химеры не захвачена, некоторые кластеры осцилляторов могут быть синхронизированы внешней частотой, и для этих элементов наблюдаются довольно большие отклонения их фаз от внешней, несмотря на захват частоты.

На мезоскопическом уровне пространственно-временной динамики локального параметра порядка был описан эффект регуляризации неустойчивых химер (бризерных или турбулентных); такого эффекта не существует в рамках задачи синхронизации автономного осциллятора. Здесь внутри языка Арнольда имеют-

ся подобласти, где внешнее воздействие стабилизирует стационарную химеру при достаточно большой амплитуде внешнего воздействия. И напротив, в некоторых подобластях слабо нестационарная (бризерная) химера может стать турбулентной из-за внешнего воздействия.

Метод нахождения химерных режимов, используемый при исследовании, основан на явном построении решений с захваченной частотой и анализе их устойчивости. Полученные результаты далее проверяются в рамках прямого численного моделирования в рамках системы фазовых уравнений. Таким образом, данное исследование отличается от [119; 120], где было проведено комплексное прямое численное моделирование двух связанных химерных ансамблей и определены режимы фазовой синхронизации между ними (по их средним полям). Прямое моделирование химерных режимов, по-видимому, является единственной возможностью в тех случаях, когда трудно найти пространственные профили химер и проанализировать их устойчивость, как в примере, изученном в [129; 130].

Обобщение представленного подхода на случаи, когда ядро взаимодействия является не экспоненциальным, а представляет собой сумму нескольких гармоник Фурье (как в [101]), потенциально может упростить анализ устойчивости. Кроме того, потенциально могут существовать языки Арнольда более высокого порядка (для другой модели они наблюдались в [129; 130]), но построение таких решений вряд ли возможно с использованием описанного метода, поскольку они не являются стационарными во вращающейся системе координат.

Глава 4. Синхронизация и химерные состояния в ансамблях импульсно-связанных осцилляторов

4.1. Введение

Задача формирования сложных синхронных режимов в ансамблях нелинейных глобально или нелокально связанных осцилляторов рассматривалась не только для элементов с синусоидальной связью, но и для случая импульсной связи. Системы импульсно-связанных осцилляторов являются моделями реальных нейронных популяций [131]. Многие системы в нейробиологии и биологии функционируют на разных уровнях посредством взаимодействующих периодических процессов [3]. Сети связанных осцилляторов предоставляют модели для таких систем. Каждый узел в сети представляет собой отдельный осциллятор, при этом структура сети кодирует, какие осцилляторы взаимодействуют друг с другом [132]. В нейробиологии индивидуальные осцилляторы могут представлять либо отдельные нейроны либо целые популяции нейронов на макроскопическом уровне [133]. Другими примерами осциллирующих объектов в биологии являются, например, мигающие светлячки [134], движущиеся реснички и жгутики [135], клетки супрахиазматического ядра в мозге [136], генерирующие главные часы циркадного ритма [136; 137], гормональные ритмы [138].

Правильное функционирование или дисфункция этих сетей зависит от коллективной динамики взаимодействующих колебательных элементов. Следовательно, одна из основных проблем — понять, как лежащая в основе сеть формирует эту коллективную динамику. Интересно, как взаимодействие свойств сети (например, топология связи и сила межэлементного взаимодействия) и характеристик отдельных узлов формируют возникающую динамику. Вопрос о взаимосвязи сетевой структуры и динамики особенно уместен при изучении крупномасштабной динамики мозга: например, можно исследовать, как функциональная связность возникает из определенных структурных составляющих [139; 140]. Прогресс в этом направлении заключается не только в возможности определения того, как позитивная или патологическая динамика связана со структурой сети, но и в разработке новых подходов к управлению динамикой таких систем [141—143].

Один из наиболее заметных коллективных эффектов в осцилляторных сетях происходит, когда узлы синхронизируются и колеблются в едином ритме [4; 144; 145]. Действительно, большинство из приведенных выше примеров демонстри-

руют синхронность в той или иной форме, которая кажется существенной для правильного функционирования биологических процессов. Синхронизация может иметь множество типов, включая фазовую синхронизацию, когда состояния разных осцилляторов когерентны, или частотную синхронизацию, когда частоты осцилляторов совпадают. Синхронность может быть глобальной по всей сети или локализованной в определенной ее части.

Общий подход при моделировании рассматриваемых биологических систем состоит в том, чтобы упростить описание каждого колебательного элемента до его простейшей формы — фазового осциллятора. В редуцированной системе состояние каждого осциллятора описывается единственной периодической фазовой переменной, которая задает состояние периодического процесса. В этом случае биологически важные детали фиксируются эволюцией фазовой переменной и ее взаимодействием с фазами других элементов.

Типичные ансамбли идентичных осцилляторов либо полностью синхронны, либо асинхронны, в зависимости от того, является ли связь притягивающей или нет. Явление, когда осцилляторы генерируют макроскопическое среднее поле в отсутствие полной синхронизации, называется частичной синхронизацией [113; 146] (в работе [103] описано экспериментальное наблюдение частичной синхронизации). Заметим, что частичная синхронизация может быть объяснена в рамках модели простейших одномерных осцилляторов, заданных как фазовые элементы [113] или элементы типа «накопление-сброс» [146].

Совсем недавно исследование химерных состояний в популяциях связанных осцилляторов стало привлекать большой интерес. В пионерской работе Курамото и Баттогтоха [50] было описано сосуществование когерентных и некогерентных групп элементов в цепочке нелокально связанных осцилляторов, которое можно понимать как потерю симметрии. Более простой случай такого нарушения симметрии было получено Абрамсом и др. [52], которые изучали химерное состояние в двух связанных популяциях идентичных элементов, где величина внутренних связей отличалась от величины внешних. В общем, в этой модели также наблюдается квазипериодическое химерное состояние [112], когда одна субпопуляция частично синхронизирована, а другая полностью синхронна. В работах [52; 112] были рассмотрены фазовые осцилляторы, похожие на осцилляторы из оригинального примера Курамото—Баттогтоха. В [147] изучены две одинаковые популяции одномерных элементов типа «накопления-сброс», очень похожие на введенные в [146], в которых наблюдалось химерное состояние: од-

на популяция была полностью синхронна, в то время как другая была частично синхронной. Недавний обзор текущего состояния исследований в данной области дан в работе [47]. Химерные состояния могут наблюдаться и при глобальной связи в ансамбле идентичных элементов (однако не задаваемых одномерными фазовыми моделями; только для осцилляторов, описываемых уравнениями, имеющими порядок выше, чем один) [64; 148; 149].

Полезно сравнить свойства симметрии различных моделей, в которых химерные состояния были обнаружены. Модель Курамото и Баттогтоха [50] сформулирована как однородная цепочка элементов первого порядка, симметричная относительно пространственных сдвигов $\theta_k \rightarrow \theta_{k+1}$. Она обладает пространственно-однородным синхронным состоянием, и возникновение химерного состояния можно объяснить нарушением пространственной однородности. В моделях, рассматриваемых в [52; 147], изучаются две субпопуляции $\theta_k^{(1)}$ и $\theta_k^{(2)}$ с различными внешними и взаимными связями. Система обладает симметрией относительно перестановки субпопуляций $1 \leftrightarrow 2$, она также симметрична относительно перестановки любых двух единиц внутри каждой субпопуляции $\theta_k^{(1,2)} \leftrightarrow \theta_j^{(1,2)}$. Однако в ней нет симметрии относительно перестановки элементов из разных популяций. Химерное состояние здесь соответствует потере симметрии между популяциями $1 \leftrightarrow 2$, при этом симметрия внутри каждого ансамбля сохраняется (все элементы внутри одной субпопуляции синхронны, все элементы другой субпопуляции асинхронны и имеют одинаковые свойства). Внешние силы, воздействующие на две субпопуляции различны в химерном состоянии. В работе [64] рассматриваются глобально связанные идентичные элементы. Модель симметрична относительно перестановки любых двух элементов $x_k \leftrightarrow x_j$. В химерном состоянии часть элементов синхронна и образует кластер, пока остальные остаются асинхронными. Так как внешнее воздействие на элементы одинаковое, этот режим требует бистабильности идентично связанных элементов. Нарушение симметрии в пределах одного ансамбля глобально связанных идентичных элементов первого порядка (например, фазовые осцилляторы или осцилляторы типа «накопление-сброс») ранее не наблюдалось.

В данной главе рассмотрены ансамбли осцилляторов, глобально связанных через среднее поле. В качестве модели отдельного элемента будут использованы ротатор и линейный осциллятор типа «накопление-сброс». Для ансамбля идентичных импульсно-связанных ротаторов рассмотрены особенности перехода к когерентной коллективной динамике [150—154]. Для случая линейных осцил-

ляторов типа «накопление-сброс» рассмотрен нетривиальный эффект для двух взаимосвязанных ансамблей: при захвате частот $2 : 1$ двух макроскопических средних полей элементы одного ансамбля формируют кластер и вырожденную устойчивую распределенную группу [155—157]. Это означает, что нетривиальные химерные состояния могут иметь место в ансамблях глобально связанных идентичных элементов первого порядка с одинаковым внешним воздействием (в предыдущих рассмотренных химерных состояниях [52; 147] внешнее воздействие на элементы не было одинаковым). Основной целью соответствующего раздела является описание этого состояния и объяснение того, как динамика среднего поля создает бистабильность в таких ансамблях, возникающую самоогласованным образом.

Прежде чем перейти к описанию модели, отметим, что взаимное влияние двух или нескольких ансамблей осцилляторов, создающее макроскопические средние поля на существенно различных частотах, было изучено недавно в контексте динамики модели типа Курамото [158—160]. Здесь мы распространяем эти исследования на реалистичные нейронные модели популяций элементов типа «накопление-сброс» для объяснения перекрестных связей между мозговыми волнами. Действительно, в мозге наблюдаются макроскопические колебания в различных частотных диапазонах [161], и эти относительно регулярные средние поля не являются связанными с синхронностью отдельных нейронов, а связаны скорее с временной организацией моментов их импульсов. Таким образом, модель частичной синхронизации, рассматриваемая ниже, является более адекватной для моделирования динамики нейронной активности, чем модель фазовых осцилляторов Курамото.

4.2. Описание модели

Рассмотрим ансамбль N глобально связанных через общее импульсное поле осцилляторов [146; 162]:

$$\dot{\varphi}_n = F(\varphi_n) + gE(t), \quad (4.1)$$

где циклическая переменная φ_n задает состояние n -го осциллятора, функция $F(x)$ задает собственную динамику осциллятора, $E(t)$ определяет величину общего импульсного поля, а параметр g означает силу связи между элементами.

Уравнение (4.1) определяет динамику осцилляторов φ_n на интервале $[0; 1)$ (или любом другом замкнутом в кольцо интервале фиксированной длины в зависимости от выбора функции $F(\varphi)$, например $[0; 2\pi)$). Когда φ_n в некоторый момент времени $t = t_m$ для n -го осциллятора достигает значения 1 , его значение сбрасывается до 0 , а в общее поле $E(t)$ поступает импульс экспоненциальной формы $E_m = \alpha^2(t - t_m)e^{-\alpha(t - t_m)}/N$, где $1/\alpha$ – ширина импульса. Это равносильно утверждению, что среднее поле $E(t)$ эволюционирует в соответствии с уравнением [163]

$$\ddot{E}(t) + 2\alpha\dot{E}(t) + \alpha^2E(t) = \frac{\alpha^2}{N} \sum_{m|t_m < t} \delta(t - t_m), \quad (4.2)$$

где правая часть представляет собой сумму импульсов, полученных полем до момента времени t ($t_m < t$).

Далее в качестве функции $F(\varphi)$, определяющей динамику индивидуальных осцилляторов, рассмотрим случай ротатора и линейной функции типа «накопление-сброс».

4.3. Синхронизация в ансамбле импульсно-связанных через общее поле фазовых осцилляторов

4.3.1. Описание модели

Рассмотрим ансамбль N идентичных импульсно-связанных через общее поле элементов, задаваемых уравнениями (4.1), (4.2), где в качестве модели осциллятора будем рассматривать ротатор, т.е. $F(\varphi) = \gamma - \sin \varphi$. Тогда динамика каждого элемента задается уравнением

$$\dot{\varphi}_n = \gamma - \sin \varphi_n + gE(t). \quad (4.3)$$

Уравнение (4.3) моделирует поведение ансамбля активных ротаторов [164; 165], где состояние n -го ротатора ансамбля задается переменной φ_n , которая принимает значения из отрезка $[0; 2\pi]$. Как только φ_n достигает значения 2π , с n -го осциллятора в уравнение для общего поля подается импульсное воздействие с амплитудой β . Уравнение (4.2), задающее эволюцию поля ансамбля при этом имеет вид

$$\ddot{E} + 2\alpha\dot{E} + \alpha^2E = \beta \sum_{m|t_m < t} \delta(t - t_m). \quad (4.4)$$

Введем следующую переменную $Q = \alpha E + \dot{E}$. При интегрировании уравнения (4.4) от момента времени t_m до момента $t < t_m + 1$ получается

$$E(t) = (E(t_m) + (t - t_m)Q(t_m))e^{-\alpha(t-t_m)},$$

$$Q(t) = Q(t_m)e^{-\alpha(t-t_m)}.$$

В момент времени t_{m+1} значение переменной $Q(t)$ определяется следующим образом:

$$Q(t_{m+1}) = Q(t_m)e^{-\alpha(t_{m+1}-t_m)} + \beta, \quad (4.5)$$

где первое слагаемое отвечает за затухание поля $E(t)$, а второе слагаемое – за величину внешнего импульсного воздействия, т.е. в момент времени поступления импульса производная общего поля $\dot{E}(t)$ получает импульсную добавку, амплитуда которой равна β . При этом общее поле $E(t)$ является непрерывной величиной.

Таким образом, рассматривается система ротаторов, на каждый из которых подается внешнее воздействие, которое определяется текущим состоянием всех ротаторов.

Будем считать динамику элементов ансамбля синхронной, если разность между переменными состояниями индивидуальных осцилляторов мала, т.е. $\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx \dots \approx \varphi_N$. Введем параметр синхронности μ следующим образом:

$$\mu = 1 - \frac{\sum_{n_1, n_2} \rho(\varphi_{n_1} - \varphi_{n_2})}{N \sum_{\varphi_{n_1}^l - \varphi_1^l}, \quad (4.6)$$

где $\rho(\varphi_{n_1}, \varphi_{n_2}) = |\varphi_{n_1} - \varphi_{n_2}| \bmod 2\pi$ – расстояние между φ_{n_1} и φ_{n_2} на окружности $[0, 2\pi)$, φ_n^l – состояние n -го осциллятора, соответствующее линейному распределению фаз на $[0, 2\pi]$ (полностью некогерентный режим). Данный параметр синхронности выбран таким образом, чтобы линейному распределению фаз ротаторов на отрезке $[0, 2\pi)$, т.е. состоянию, при котором среднее расстояние от фазы каждого ротатора до фазы другого ротатора было наибольшим, соответствовало наименьшее значение параметра синхронности (в данном случае $\mu = 0$), а состоянию, когда фазы всех ротаторов совпадают, наибольшему значению параметра синхронности ($\mu = 1$). Таким образом, $\mu = 0$ соответствует полностью асинхронному режиму, а $\mu = 1$ – полностью синхронному.

4.3.2. Переход к синхронизации

Исследуем свойства синхронности поведения ротаторов в зависимости от величины параметра импульсного воздействия β . Зафиксируем значения параметров $N = 100$, $\gamma = 1.03$, $g = 1.0$, $\alpha = 1.5$. При $\gamma = 1.03$ правая часть уравнения (4.3) принимает малые значения, когда фаза ротатора φ_n близка к $\pi/2$. Следовательно, фаза каждого осциллятора проводит долгое время в окрестности $\pi/2$.

На динамику ансамбля существенно влияет начальное распределение фаз ротаторов. Будем рассматривать случай линейного распределения фаз на отрезке $[0, \varphi_{max}^0]$ в начальный момент времени. Тогда при малых значениях параметра импульсного воздействия $\beta < 0.0625$ каждому начальному распределению фаз однозначно соответствует свой устойчивый асинхронный режим динамики, синхронный режим при этом является неустойчивым. Асинхронному режиму с наименьшими значениями параметра синхронности соответствует поле, значение которого близко к постоянному с малыми отклонениями, другим асинхронным режимам – поле периодическое с малой амплитудой. При больших значениях β ($\beta > 0.0625$) синхронный режим становится устойчивым, при этом ансамбль эволюционирует к синхронному режиму для всех $0 \leq \varphi_{max}^0 \leq \varphi_s^0$. При $\varphi_{max}^0 > \varphi_s^0$ динамика ансамбля асинхронная, и каждому начальному распределению фаз соответствует свой устойчивый режим. При $\beta > 0.0836$ ансамбль эволюционирует к полностью синхронному режиму для любого начального распределения фаз. Поле ансамбля в случае синхронной динамики периодическое с большой амплитудой. Обнаружено, что при переходе к синхронному режиму наблюдается гистерезис. На рис. 4.1 представлены значения параметра синхронности в зависимости от силы импульсного воздействия β .

При дальнейшем увеличении значения величины внешнего воздействия β происходит постепенное увеличение среднего значения поля E , которое при этом остается периодическим, элементы ансамбля совершают синхронные вращения. При приближении к критическому значению $\beta = 0.14$ среднее значение поля начинает резко увеличиваться (рис. 4.2). При достижении параметром β критического значения наступает ситуация, когда поле $E(t)$ резко растет во времени, при этом импульс, прикладываемый к полю (получаемый при достижении фазы некоторого ротатора значения 2π), дает прибавку к полю больше, чем убывает его значение в межимпульсный интервал из-за затухания (второе слагаемое в уравнении (4.5) больше первого слагаемого, т.е. величина Q , а следовательно, и величина

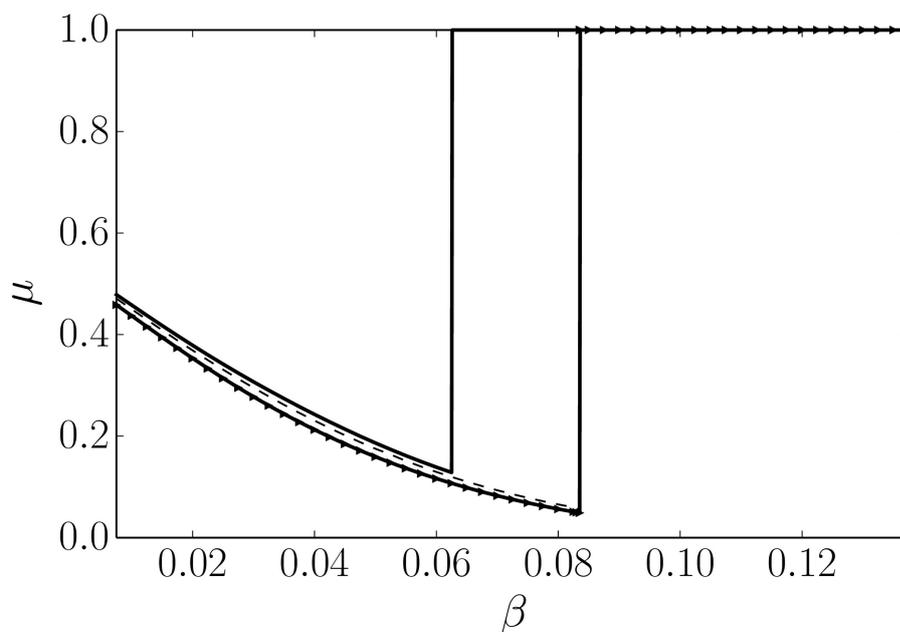


Рис. 4.1 — Значения параметра синхронности μ для режимов с наименьшим (линия с маркерами), некоторым промежуточным (штриховая линия) и наибольшим (сплошная линия) значением параметра μ при $N = 100$, $\gamma = 1.03$, $g = 1.0$, $\alpha = 1.5$ в зависимости от β

общего поля E растут со временем) при $\beta > 0.14$, т.е. затухание не успевает компенсировать внешнего воздействия. Вращения элементов ансамбля при этом несинхронизированы. Рост общего поля E приводит к росту частоты вращений каждого ротатора, что в свою очередь ведет к дальнейшему росту поля.

Данный эффект можно объяснить следующим образом. При $\gamma > 1$ уравнение (4.3) можно усреднить за период 2π . После усреднения $\sin \varphi_n = 0$ и уравнение приобретает вид $\dot{\varphi} = \gamma + gE$, где в рассматриваемом приближении $\dot{\varphi}$ представляет собой усредненную за период фазовую скорость ротатора. Из этого уравнения видно, что при увеличении поля E усредненная фазовая скорость растет, а значит, растет и частота вращения ротатора, что и требовалось доказать.

В результате численного исследования динамики ансамбля было установлено существование мультистабильности в системе, в частности имеет место множество асинхронных режимов, когда элементы ансамбля асинхронны, а среднее поле либо постоянное с малыми возмущениями, либо периодическое с малой амплитудой; синхронного режима, при котором элементы ансамбля полностью синхронны, а среднее поле периодическое с большой амплитудой, а также режима, когда рост общего поля приводит к росту частоты каждого ротатора.

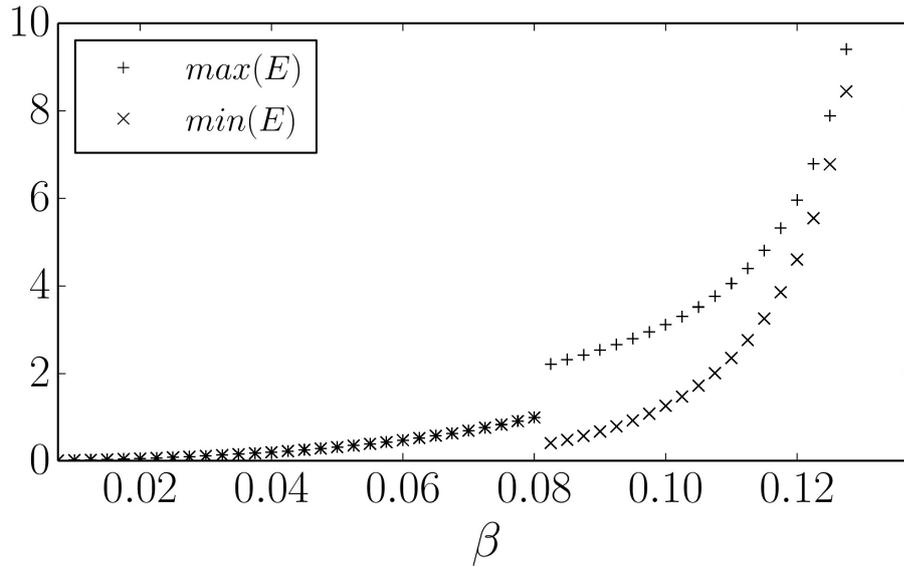


Рис. 4.2 — Переход от асинхронной динамики к синхронной в зависимости от величины импульсного воздействия β при $N = 100$, $\gamma = 1.03$, $g = 1.0$, $\alpha = 1.5$. Значения локальных максимумов и минимумов поля E , соответствующие режиму с наименьшим значением параметра синхронности μ

4.4. Вырожденное химерное состояние в ансамбле импульсно связанных осцилляторов

4.4.1. Описание модели

Рассмотрим далее два ансамбля, основанных на одной модели глобально связанных осцилляторов типа «накопление-сброс» – примере генерирования нетривиальных средних полей в режиме частичной синхронизации [146]. Динамика одного такого ансамбля была исследована в [146; 163; 166]. Для системы (4.1) это будет соответствовать следующему виду функции $F(\varphi) = a - \varphi$. Тогда переменная состояния φ_n каждого осциллятора описывается следующим уравнением:

$$\dot{\varphi}_n = a - \varphi_n + gE, \quad (4.7)$$

где среднее поле E формируется импульсными вкладами от каждого осциллятора и задается уравнением:

$$\ddot{E} + 2\alpha\dot{E} + \alpha^2 E = \frac{\alpha^2}{N} \sum_{m|t_m < t} \delta(t - t_m). \quad (4.8)$$

Переменная состояния n -го осциллятора возрастает от 0 до порогового значения 1, $a > 1$ – пороговый параметр осциллятора, E – внешнее воздействие на осциллятор (поле). Когда состояние осциллятора достигает значения 1 в момент

времени t_m с осциллятора поступает импульс в поле E , и состояние осциллятора сбрасывается в 0. Линейное уравнение (4.8) описывает последовательность так называемых α -импульсов, создаваемых осцилляторами. Анализ системы уравнений (4.7) и (4.8) показал (см. [146; 163; 166]), что при больших значениях величины параметра связи g (при фиксированном значении α) осцилляторы асинхронны: интервалы времени между импульсами двух осцилляторов являются равными (не зависят от n), и поле E принимает почти постоянное значение (с небольшими флуктуациями $\sim N^{-1}$). При некотором критическом значении переменной силы связи g этот режим становится неустойчивым, осцилляторы начинают формировать группы с меньшим интервалом между импульсами, в результате среднее поле демонстрирует макроскопические почти периодические колебания [146; 166]. Такой режим называется частичной синхронизацией, потому что осцилляторы никогда не синхронны полностью (никогда не производят импульс одновременно). Действительно, в этом режиме динамика системы, строго говоря, квазипериодическая, так как частота испускания импульсов осциллятором ω (она одна для всех осцилляторов, т.к. они идентичны) несоизмерима с частотой макроскопических колебаний среднего поля Ω .

В этом параграфе рассмотрим два связанных ансамбля осцилляторов описанного типа. В отличие от модели, рассматриваемой в [147], где два ансамбля идентичны, мы изучаем два различных ансамбля (осцилляторы внутри каждого ансамбля идентичны). Изменим немного обозначения: переменные состояния осцилляторов в ансамблях обозначим как x_n и y_n , среднее поле, генерируемое ими, как X и Y , соответственно. Взаимодействие формируется за счет суперпозиции средних полей каждого ансамбля: на осцилляторы x действует поле $E_x = (1 - \varepsilon)X + \varepsilon Y$, на осцилляторы y поле $E_y = (1 - \varepsilon)Y + \varepsilon X$. Параметр ε описывает связь между ансамблями. Эквивалентно, можно рассматривать эти системы как одну с двумя действующими средними полями (E_x, E_y) , формируемыми импульсами от двух ансамблей: каждый импульс осциллятора x вносит дельта-импульс амплитуды $(1 - \varepsilon)$ в поле E_x и дельта-импульс амплитуды ε в поле E_y , аналогично для нейрона y . Физический смысл введенного параметра ε состоит в том, что два ансамбля пространственно разделены, поэтому взаимодействие внутри ансамбля отличается от взаимодействия между ансамблями (для $\varepsilon < 0.5$ взаимодействие между ансамблями слабее, чем взаимодействие внутри ансамбля). Мы будем предполагать, что оба ансамбля имеют одинаковое число осцилляторов N .

Уравнения модели в данном случае имеют следующий вид

$$\dot{x}_n = a_x - x_n + g_x((1 - \varepsilon)X + \varepsilon Y) , \quad (4.9)$$

$$\dot{y}_n = a_y - y_n + g_y((1 - \varepsilon)Y + \varepsilon X) , \quad (4.10)$$

$$\ddot{X} + 2\alpha_x \dot{X} + \alpha_x^2 X = \frac{\alpha_x^2}{N} \sum_{mx|t_{mx} < t} \delta(t - t_{mx}) , \quad (4.11)$$

$$\ddot{Y} + 2\alpha_y \dot{Y} + \alpha_y^2 Y = \frac{\alpha_y^2}{N} \sum_{my|t_{my} < t} \delta(t - t_{my}) . \quad (4.12)$$

Интегрирование этих уравнений можно произвести аналитически (см. [163]).

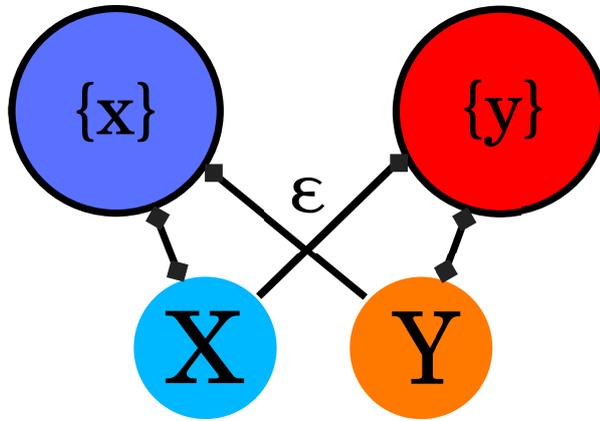


Рис. 4.3 — Схема связей в системе (4.9)–(4.12). На каждый осциллятор ансамбля подается внешнее воздействие, которое определяется текущим состоянием всех осцилляторов в обоих ансамблях. Поле каждого ансамбля формируется только осцилляторами из соответствующего ансамбля. Квадратные маркеры обозначают компонент системы, на который поступает воздействие от элемента, располагающегося на противоположной стороне соответствующей линии

В моменты времени между импульсами уравнения для X и Y являются линейными, и их решение может быть записано явно: подстановка этих решений в уравнения (4.9) и (4.10) позволяет также получить аналитическое решение для x_k и y_k . Трансцендентное уравнение для определения момента следующего импульса решается численно с использованием метода Ньютона.

4.4.2. Захват частот макроскопических полей

В этом разделе мы рассмотрим эффект захвата частот макроскопических полей двух взаимодействующих ансамблей. Как уже было замечено, один ансамбль

демонстрирует макроскопические колебания с частотой Ω ; два невзаимодействующих ансамбля демонстрируют различные макроскопические частоты Ω_x, Ω_y . Покажем, что взаимодействие может привести к довольно нетривиальным эффектам захвата частот этих осцилляторов (режим с захватом частот 1 : 1 двух симметричных популяций элементов типа «накопление-сброс» был рассмотрен в [147]). На рисунке 4.4 показаны частоты двух ансамблей для значений параметров $a_x = 1.5, g_x = 0.35, a_y = 1.21, g_y = 0.09, \alpha_x = \alpha_y = 10, N = 50$. Этот рисунок отображает соотношение макроскопических частот как функцию переменной связи ε . Легко видеть интервал $\varepsilon \in [0.25; 0.33]$, где $\Omega_x = 2\Omega_y$. Вне этой резонансной области наблюдается макроскопический квазипериодический режим с иррациональным соотношением частот, что можно увидеть на плоскости (X, Y) на рисунке 4.5. Легко отличить состояние захвата частот при $\varepsilon = 0.3$ от квазипериодического режима при значениях $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 0.4$ по виду кривых Лиссажу. Более того, вне резонансной зоны обе популяции x и y частично синхронны: значения переменных состояния всех осцилляторов различны, но распределение этих значений не равномерно, макроскопическое поле демонстрирует при этом колебания. Обратим внимание, что режим при $\varepsilon = 0.5$, когда обе популяции испытывают одинаковое внешнее воздействие, также квазипериодический.

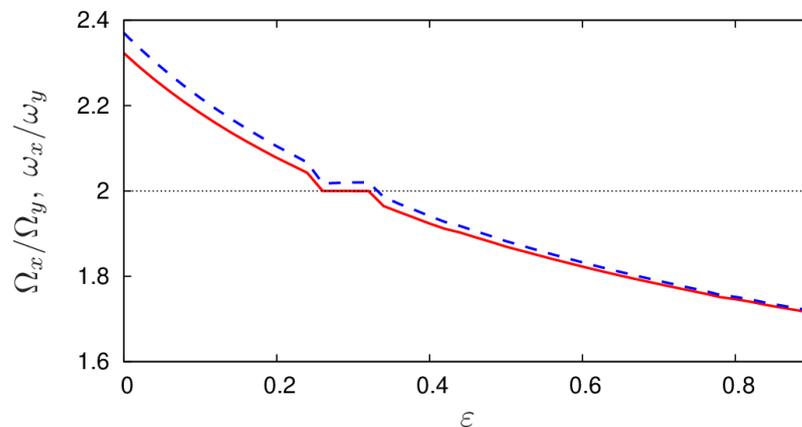


Рис. 4.4 — Соотношение частот Ω_x/Ω_y (сплошная линия) и ω_x/ω_y (пунктирная линия). Захват частот 2 : 1 наблюдается для $\varepsilon \in [0.25; 0.33]$, но в этом случае

$$\omega_x/\omega_y \text{ не равно } 2$$

Захват частот средних полей X и Y не означает, что индивидуальные осцилляторы в двух ансамблях также имеют захваченные частоты. Продемонстрируем динамику индивидуального осциллятора на рисунке 4.6 для $\varepsilon = 0.3$. Здесь мы стробоскопически наблюдаем за состоянием осциллятора в момент времени,

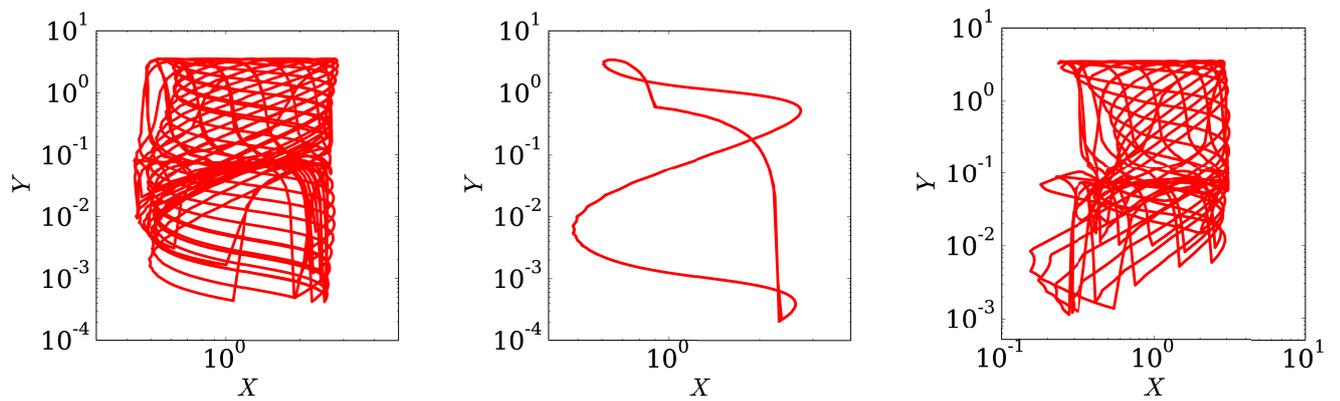


Рис. 4.5 — Проекция фазовых портретов на плоскость (X, Y) при $\varepsilon = 0.2$ (левая панель), $\varepsilon = 0.3$ (центральная панель) и $\varepsilon = 0.4$ (правая панель)

когда $X = 1.5$, $\dot{X} = 1.5$. Можно легко сравнить свойства захвата частот двух ансамблей. В ансамбле x состояния всех осцилляторов различны, что соответствует несоизмеримости частоты ω_x частоте Ω_x среднего поля $X(t)$. В противовес этому, в ансамбле y переменные состояния совпадают (они принимают два различных значения, так как соотношение частот $2 : 1$, среднее поле X демонстрирует за время между наблюдениями два периода колебаний, а среднее поле Y один), это соответствует тому, что частоты осцилляторов в этом ансамбле захвачены частотой среднего поля $Y(t)$, импульсы с осцилляторов этого ансамбля поступают с периодом поля $Y(t)$, т.е. $\Omega_y = \omega_y$. Это свойство объясняет значения соотношений частот осцилляторов на рисунке 4.4 в области параметров, где имеет место захват частот $2 : 1$ макроскопических полей X и Y , там соотношение частот ω_x/ω_y испускания импульсов осцилляторами становится также постоянным, но не равным 2, хотя оно не сильно превышает это значение из-за небольшой разницы между ω_x и Ω_x .

4.4.3. Вырожденное химерное состояние

Захват частоты осцилляторов ансамбля y при $\varepsilon = 0.3$ позволяет предположить, что эти осцилляторы формируют полностью синхронный кластер. Однако, это не так. На рисунке 4.7 мы изображаем состояния всех осцилляторов в двух ансамблях в фиксированный момент времени при $\varepsilon = 0.3$, соответствующий захвату частот. В ансамбле x все состояния различны, что соответствует квазипериодическому режиму частичной синхронизации. Осцилляторы в ансамбле y находятся в химерном состоянии: часть из них образует полностью синхронный кластер

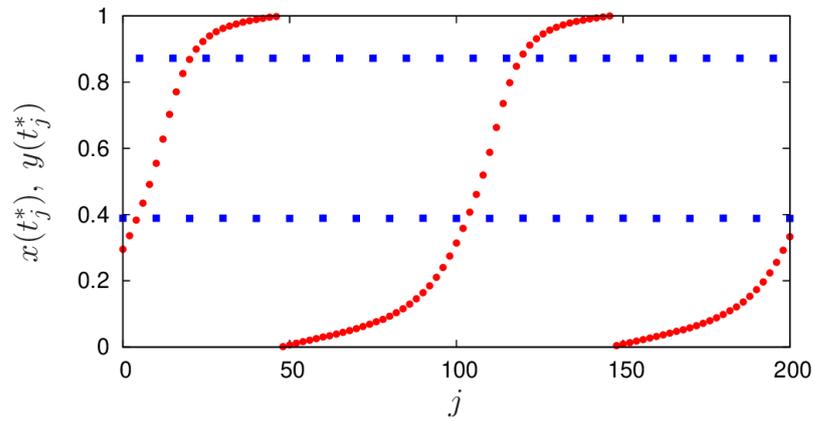


Рис. 4.6 — Стробоскопическое наблюдение за состояниями двух осцилляторов в двух ансамблях, проводимое при $X(t_j^*) = 1.5$, $\dot{X} > 0$. Красные круги: значения $x(t_j^*)$, синие квадраты: значения $y(t_j^*)$. Не все точки изображены для лучшего восприятия

$y_1 = y_2 = \dots = y_m$, когда как все осцилляторы $y_k, k > m$, распределены на некотором отрезке.

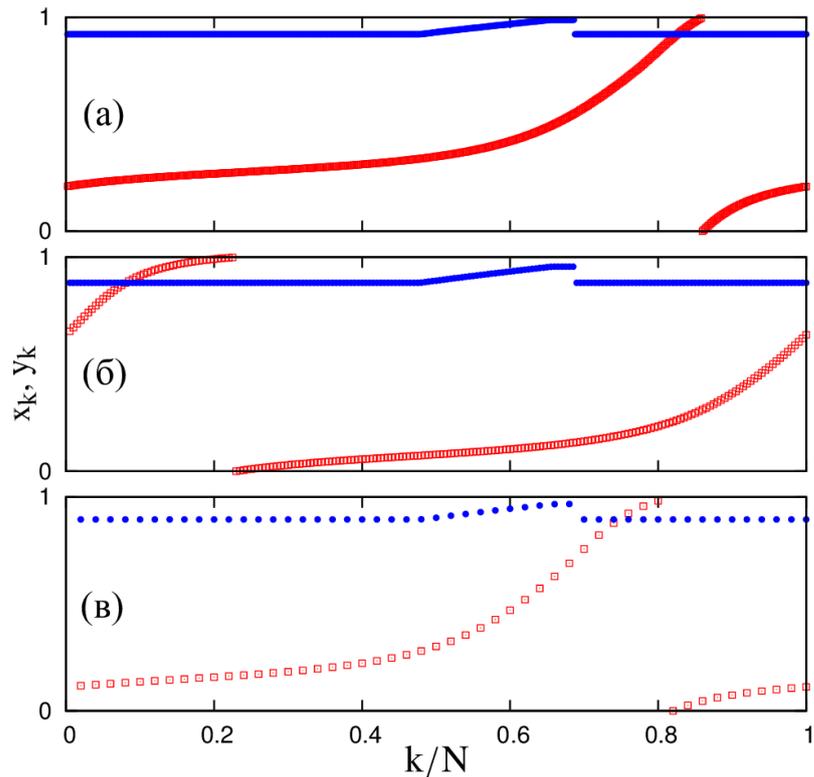


Рис. 4.7 — Состояние осцилляторов x_k (красные квадраты) и y_k (синие круги) в случае захвата частот 2 : 1 при $\varepsilon = 0.3$ и различных размерах ансамбля в момент времени T_{tr} : (а) $N = 500$, $T_{tr} = 4.19 \cdot 10^8$; (б) $N = 200$, $T_{tr} = 1.67 \cdot 10^9$; (в) $N = 50$, $T_{tr} = 1.67 \cdot 10^9$. Пока все значения x_k различны, в ансамбле y часть ансамбля формирует кластер

Наличие кластера проявляет себя в специфическом образе испускания импульсов в двух ансамблях. Проиллюстрируем это на рисунке 4.8, где мы сравниваем ситуацию режима химеры с режимом частичной синхронизации. Можно видеть, что ансамбль y , находящийся в химерном режиме, производит пачку импульсов, после которого все элементы кластера испускают импульс одновременно (это происходит в моменты времени $t \approx 1.44$ и $t \approx 2.98$; одновременные импульсы перекрывают друг друга на рисунке). Стоит отметить, что здесь ансамбль испускающих импульсы осцилляторов функционирует как производитель пачек импульсов, в противовес обычной пачечной активности, где один осциллятор функционирует в смешанном режиме, когда возникновение группы импульсов чередуется с продолжительными промежутками времени без импульсов.

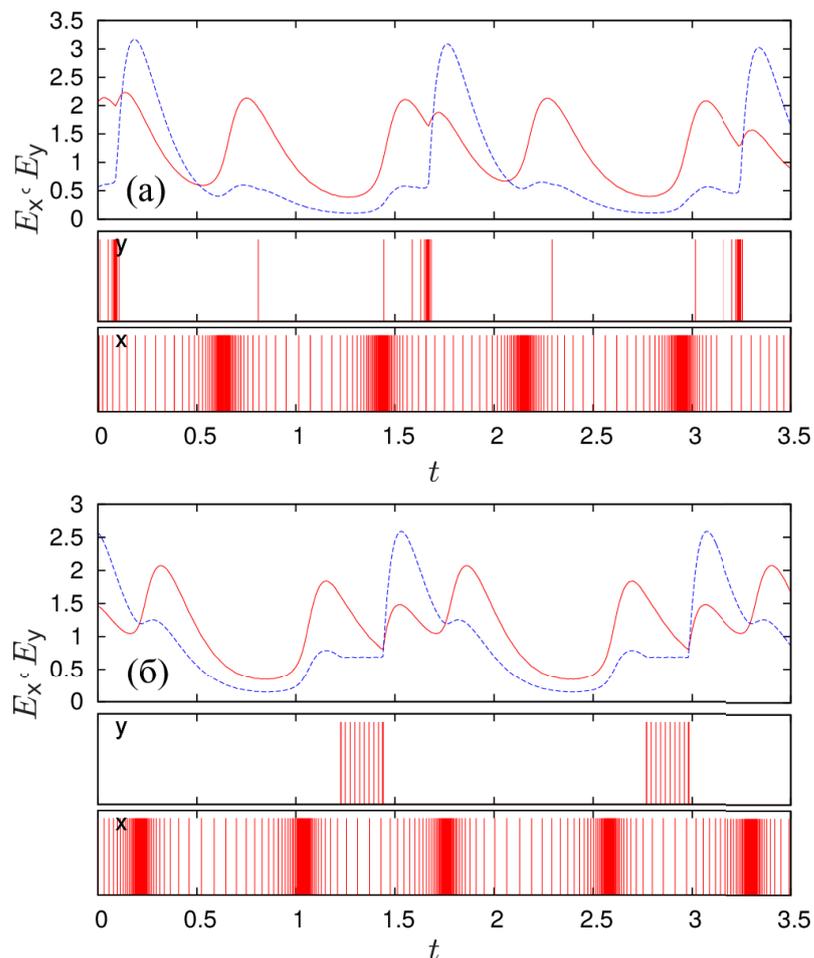


Рис. 4.8 — Поля E_x (сплошная линия) и E_y (пунктирная линия) и моменты времени испускания импульсов в обоих ансамблях, при $N = 50$ и двух значениях силы связи ε : (а) $\varepsilon = 0.2$, квазипериодический режим без химеры; (б) $\varepsilon = 0.3$, случай захвата частот с химерой

Для того, чтобы проверить, что данное состояние является устойчивым, а не переходным, были произведены расчеты при различных размерах ансам-

блей (от 50 до 500) и различных временах интегрирования (до 1.67×10^9), во всех рассмотренных случаях наблюдалось маргинальное химерное состояние. Два примера для $N = 200$ и для $N = 500$ представлены на рисунке 4.7. Более того, аналогичный режим наблюдается, если размеры ансамблей x и y различны. Примечательно, что химерное состояние может наблюдаться также при очень малых размерах ансамблей, начиная с $N = 3$. Для этого минимального размера, для которого может быть определено химерное состояние, в ансамбле y существует два элемента с одинаковыми состояниями $y_1 = y_2$, и один элемент с другим значением переменной состояния $y_3 \neq y_{1,2}$; в ансамбле x все три элемента различны. На рисунке 4.9 мы показываем, что химерное состояние встречается для всех $3 \leq N \leq 100$, размер синхронного кластера N_{cl} изменяется на отрезке $2/3 \lesssim N \lesssim 4/5$. Более того, химерное состояние имеет место в случае захвата частот 3 : 1 при значениях параметров системы $a_x = 1.5$, $g_x = 0.36$, $a_y = 1.07$, $g_y = 0.05$, $\alpha_x = \alpha_y = 10$, $\varepsilon = 0.35$.

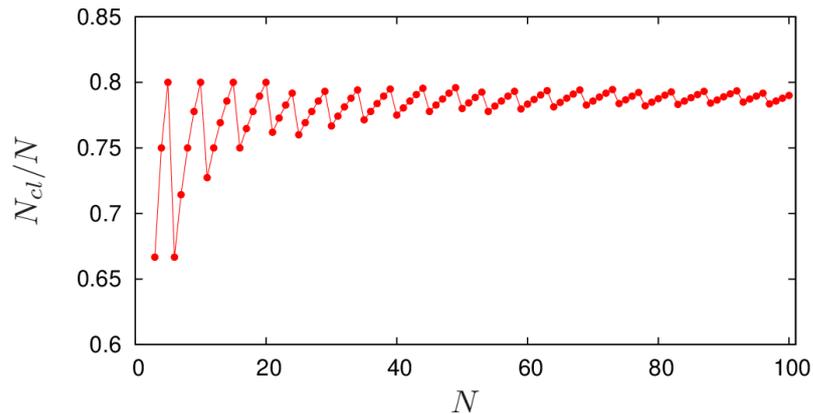


Рис. 4.9 — Сравнение размера кластера N_{cl}/N в зависимости от размера ансамбля N для различных значений параметра (как на рисунке 4.7). Осцилляторы относятся к кластеру, если их состояния в момент времени после переходного режима $t = 5 \cdot 10^6$ ближе, чем 10^{-10} друг к другу

С первого взгляда, химерное состояние в ансамбле идентичных элементов, описываемых уравнениями первого порядка (подобные уравнениям (4.9) и (4.10) нашей модели), невозможно. В самом деле, в случае взаимной периодичности полей $(X(t), Y(t))$ уравнение (4.10), задающее динамику осцилляторов ансамбля y , можно редуцировать к отображению окружности первого порядка. Это отображение одинаково для всех осцилляторов в ансамбле y . В соответствии с общей теорией отображения окружности первого порядка все осцилляторы имеют одинаковую частоту (потому что число вращения отображения первого порядка не зависит от начальных условий). Более того, для общего отображения первого

порядка свойственна дихотомия [167]: (а) либо существует равное количество устойчивых и неустойчивых орбит, первые притягивают все точки, лежащие на окружности, за исключением лежащих на неустойчивых орбитах; (б) динамика квазипериодическая, а отображение в соответствии с теоремой Данжуа можно редуцировать к простому сдвигу окружности, тогда изначально различные состояния остаются различными. Такая двойственность допускает существование квазипериодического режима (частичная синхронизация) и полностью синхронного режима, но, казалось бы, исключает существование химерного режима.

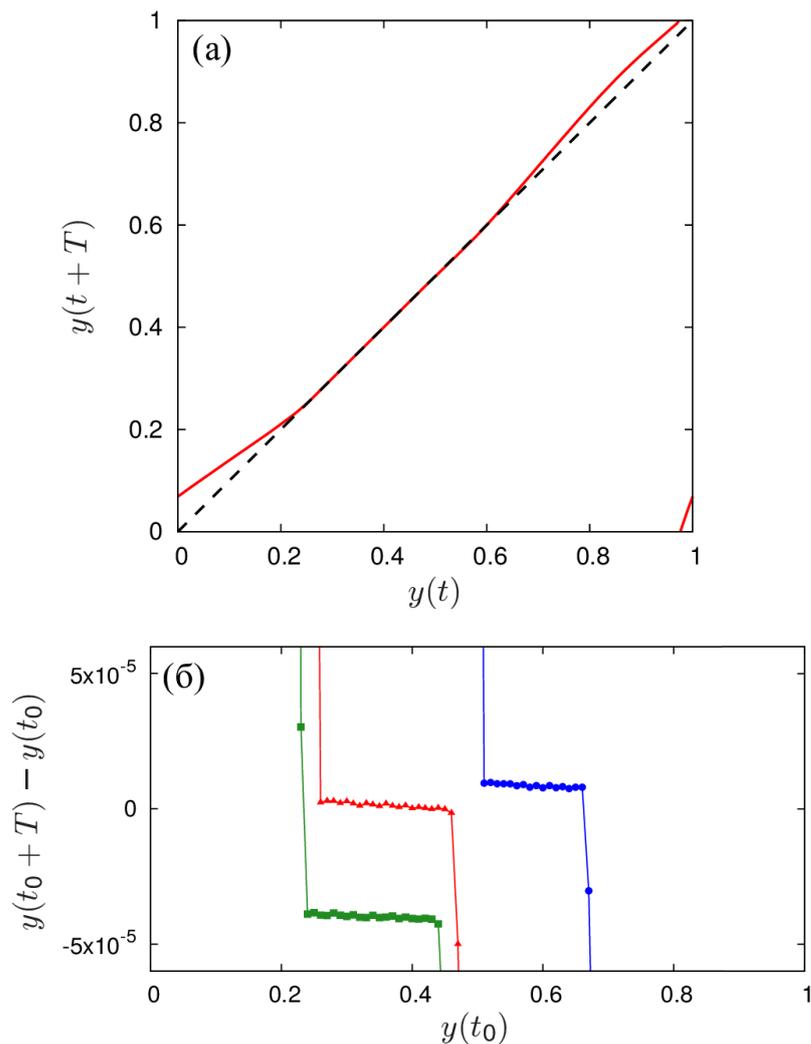


Рис. 4.10 — (а) Стробоскопическое отображение $y(t) \rightarrow y(t+T)$ для осцилляторов в ансамбле y в случае режима захвата частот при $\varepsilon = 0.3$. Для выбранной фазы поля в области $0.25 \lesssim y \lesssim 0.45$ отображение близко к идентичному. Эта область приближена на панели (б), где изображены значения $y(t_0+T) - y(t_0)$ в зависимости от $y(t_0)$ при различном выборе t_0 . Малые вертикальные сдвиги происходят из-за небольшой доли квазипериодичности в полях $X(t), Y(t)$

Динамика ансамбля y нарушает описанную выше дихотомию. Чтобы прояснить этот момент, мы определим следующее стробоскопическое отображение $y(t_0) \rightarrow y(t_0 + T)$, где T – период поля $Y(t)$ (рисунок 4.10,а), и $0 \leq y(t_0) < 1$. Можно видеть, что это отображение вырождено, т.к. существует интервал (назовем его маргинальным доменом), где $y(t_0 + T) \approx y(t_0)$ с высокой точностью. Это можно увидеть на рисунке 4.10,б, где маргинальный домен увеличен. Здесь отклонение $y(t + T) - y(t)$ имеет порядок 10^{-5} . Кроме того, это отклонение периодически изменяет знак, если стробоскопическое отображение строить для различных фаз t_0 средних полей $X(t_0), Y(t_0)$. Эти колебания отклонений обусловлены тем, что поле Y , строго говоря, не является периодическим. Действительно, из-за квазипериодичности ансамбля x поля X, Y квазипериодические, хотя отклонения от чистой периодичности достаточно малы и не видны на рисунке 4.5. Эта квазипериодичность может быть видна, если при заданном значении Y стробоскопически наблюдать значения \dot{Y} . Значения \dot{Y} распределены на небольшом интервале. Благодаря этому небольшому распределению, отклонения отображения от идентичного колеблются в маргинальном домене.

Существование маргинального домена вместе с дополнительным интервалом, где $y(t_0 + T) \neq y(t_0)$, объясняет наблюдаемое химерное состояние: осцилляторы, начальные условия которых находятся не в маргинальном домене, притягиваются к одному состоянию и формируют кластер, в то время как остальные осцилляторы из маргинального домена остаются распределенными и формируют некогерентную группу. Обратим внимание, что описанные частные свойства динамики проявляются самосогласованным образом в системе связанных ансамблей, так как поля X, Y формируются вкладами от всех индивидуальных осцилляторов. Довольно неожиданно, эти средние поля организовываются таким образом, что один ансамбль чисто квазипериодический, пока как другой сочетает свойства устойчивой и вырожденной динамики и, как результат, образует химерное состояние.

4.5. Выводы по четвертой главе

В данной главе был рассмотрен переход к синхронизации в ансамбле глобально связанных через общее среднее поле ротаторов. Было установлено существование мультистабильности в системе, в частности имеет место мно-

жество асинхронных режимов, когда элементы ансамбля асинхронны, а среднее поле либо постоянное с малыми возмущениями, либо периодическое с малой амплитудой; синхронного режима, при котором элементы ансамбля полностью синхронны, а среднее поле периодическое с большой амплитудой, а также режима, когда рост общего поля приводит к росту частоты каждого ротатора.

Также было рассмотрено два ансамбля осцилляторов типа «накопление-сброс», имеющих генерируемые элементами самих ансамблей средние поля с существенно различными частотами. Показано, что из-за взаимной связи режим захвата частот $2 : 1$ средних полей может наблюдаться без синхронизации между индивидуальными осцилляторами. Заметим, что поведение осцилляторов в двух ансамблях различно в случае режима захвата частот полей: пока в одном ансамбле они не синхронны с собственным полем и имеют различные с ним частоты, в другом ансамбле период испускания импульсов осцилляторами совпадает с периодом собственного среднего поля. Однако, это синхронное состояние весьма нетривиально: идентичные осцилляторы в синхронном ансамбле образуют химерное состояние; одна часть ансамбля формирует кластер идентичных элементов, пока остальные осцилляторы остаются разрозненными. Мы объясняем этот режим как самосогласованную вырожденную динамику осцилляторов: соответствующее стробоскопическое отображение первого порядка имеет домен, где оно близко к идентичному. Эта вырожденность, возможно, единственная возможность достижения бистабильности в одномерном отображении, так как период здесь должен быть независимым от начальных условий. Это еще одна особенность вырожденного химерного состояния: в других случаях, когда химерное состояние наблюдается в группах идентичных элементов, частоты кластера и распределенной группы различны [64; 148; 149].

Заключение

Получены следующие основные результаты:

1. Получены динамические уравнения Отта—Антонсена для локального комплексного параметра порядка и среднего поля, определяющих степень локальной когерентности элементов среды, для случая *экспоненциального* типа нелокального взаимодействия для (а) ансамбля неидентичных осцилляторов со случайными частотами, распределенными по закону Лоренца, (б) популяции идентичных частиц с нелинейным сдвигом фазы в связи, зависящим от степени локальной когерентности элементов, и для (в) системы идентичных осцилляторов с постоянным фазовым сдвигом, находящихся под внешним периодическим воздействием.
2. Показано, что в системе нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов с индивидуальными частотами, удовлетворяющими распределению Лоренца, и экспоненциальной связью однородное состояние устойчиво для любых длин среды, либо до достижения некоторой критической длины. Градиентные решения могут быть (а) неустойчивыми, (б) устойчивыми, начиная с порогового значения длины, и (в) устойчивыми на некотором интервале длин.
3. Установлено, что в системе нелокально связанных неидентичных фазовых осцилляторов с экспоненциальной связью среди неоднородных решений уравнений Отта—Антонсена устойчивыми являются только те режимы, для которых у профиля локального параметра порядка есть только один максимум. Причем среди остальных структур встречаются слабо неустойчивые (переходные) образования. Показано, что обсуждаемые квазихимерные режимы вращения возникают в виде продолжительных процессов между интервалами со сложным нерегулярным поведением усредненных полей. Кроме того, описаны такие состояния долговременной эволюции изучаемой системы, как бризерная кластерная синхронизация и пространственно-временной хаос.
4. Показано, что нелинейность фазового сдвига в системе нелокально связанных идентичных осцилляторов с экспоненциальным типом взаимодействия приводит к возможности реализации (а) однородного частично

синхронного состояния, устойчивого в средах с короткой длиной, (б) неоднородного частичного синхронного режима и (в) гибридной химеры, состоящей из двух областей с высокой степенью когерентности элементов. С увеличением длины среды регулярные режимы становятся неустойчивыми, а в системе реализуются режимы пространственно-временного хаоса.

5. Впервые обнаружен режим глобально устойчивой бризерной химеры в ансамбле распределенных на кольце идентичных элементов с экспоненциальным типом взаимодействия, возникающей в результате развития неустойчивости стационарного химерного режима.
6. Для ансамбля нелокально связанных идентичных осцилляторов Курамото—Баттогтоха разработан метод определения области существования (язык Арнольда) стационарных химерных режимов с захваченной внешним периодическим воздействием частотой. Построены языки Арнольда для реализующихся в стационарном случае режимов (а) устойчивой стационарной химеры, (б) слабо неустойчивой химеры (эволюционирующей к бризерной химере) и (в) сильно неустойчивой химеры (переходящей к хаотическому режиму). Продемонстрирована возможность захвата частоты стационарной химеры, а также регуляризации неустойчивой химеры за счет внешнего воздействия.
7. Для ансамбля глобально связанных через общее импульсное поле идентичных ротаторов установлено существование (а) мультистабильности, когда имеет место множество асинхронных режимов, где элементы ансамбля асинхронны, а среднее поле либо постоянное с малыми возмущениями, либо периодическое с малой амплитудой; и (б) синхронного режима, при котором элементы ансамбля полностью синхронны, а среднее поле периодическое с большой амплитудой.
8. Показано, что в системе двух ансамблей осцилляторов типа накопление-сброс при захвате частот $2 : 1$ средних полей может наблюдаться нетривиальное химерное состояние: часть одного из ансамблей формирует кластер полностью синхронных элементов, в то время как другие не являются когерентными по фазе, хотя средние частоты всех осцилляторов одинаковы. Второй ансамбль при этом демонстрирует частично синхронную динамику.

В завершение настоящей диссертационной работы хочу выразить искреннюю благодарность и глубокую признательность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Григорию Владимировичу Осипову за многолетнюю плодотворную совместную работу, всестороннюю поддержку, понимание и неоценимую помощь в подготовке данной работы.

Особо хочу поблагодарить д.ф.-м.н., профессора Аркадия Самуиловича Пиковского и к.ф.-м.н. Льва Александровича Смирнова за огромную помощь в подготовке данной работы, за ценные советы и критические замечания, которые способствовали существенному улучшению диссертационной работы.

Список литературы

1. *Pikovsky, A.* Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge University Press, 2001. — P. 411.
2. *Kuramoto, Y.* Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence. Vol. 19 / Y. Kuramoto. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1984. — (Springer Series in Synergetics).
3. *Winfrey, A. T.* Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators / A. T. Winfrey // *Journal of Theoretical Biology.* — 1967. — Vol. 16, no. 1. — P. 15—42.
4. *Strogatz, S.* Sync: The emerging science of spontaneous order / S. Strogatz. — Penguin UK, 2004.
5. *Osipov, G. V.* Synchronization in Oscillatory Networks / G. V. Osipov, J. Kurths, C. Zhou. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007. — (Springer Series in Synergetics).
6. *Pikovsky, A.* Dynamics of globally coupled oscillators: Progress and perspectives / A. Pikovsky, M. Rosenblum // *Chaos.* — 2015. — Vol. 25, no. 9.
7. *Stability, Structures and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks.* Vol. 6 / V. S. Afraimovich [et al.]. — World Scientific, 1995. — (World Scientific Series on Nonlinear Science Series A).
8. Targeted synchronization in an externally driven population of mechanical oscillators / S. Chhabria [et al.] // *Chaos.* — 2018. — Vol. 28, no. 11. — P. 111102.
9. Power system dynamics : stability and control / J. Machowski [et al.]. — P. 855.
10. How dead ends undermine power grid stability / P. J. Menck [et al.] // *Nature Communications.* — 2014. — Vol. 5, no. 1. — P. 3969.
11. Vortex Dynamics and Phase Transitions in a Two-Dimensional Array of Josephson Junctions / C. Leemann [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 1986. — Mar. — Vol. 56, issue 12. — P. 1291—1294.
12. *Denniston, C.* Phases of Josephson Junction Ladders / C. Denniston, C. Tang // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Nov. — Vol. 75, issue 21. — P. 3930—3933.

13. *Kim, B. J.* Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson-junction ladders under magnetic frustration / B. J. Kim, S. Kim, S. J. Lee // *Phys. Rev. B.* — 1995. — Apr. — Vol. 51, issue 13. — P. 8462—8466.
14. *Ryu, S.* Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladder / S. Ryu, W. Yu, D. Stroud // *Physical Review E.* — 1996. — Vol. 53, no. 3. — P. 2190—2195.
15. *Qian, M.* Transitions in two sinusoidally coupled Josephson junction rotators / M. Qian, J.-Z. Wang // *Annals of Physics.* — 2008. — Vol. 323, no. 8. — P. 1956—1962.
16. *Fishman, R. S.* Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors / R. S. Fishman, D. Stroud // *Phys. Rev. B.* — 1988. — July. — Vol. 38, issue 1. — P. 290—296.
17. Synchronization of Delay-Coupled Oscillators: A Study of Semiconductor Lasers / H.-J. Wünsche [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — Apr. — Vol. 94, issue 16. — P. 163901.
18. *Clerkin, E.* Multistabilities and symmetry-broken one-color and two-color states in closely coupled single-mode lasers / E. Clerkin, S. O'Brien, A. Amann // *Phys. Rev. E.* — 2014. — Mar. — Vol. 89, issue 3. — P. 032919.
19. Fractional Synchronization of Spin-Torque Nano-Oscillators / S. Urazhdin [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Aug. — Vol. 105, issue 10. — P. 104101.
20. On the synchronization phenomenon of a parallel array of spin torque nano-oscillators / B. Sturgis-Jensen [et al.] // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2019. — Vol. 396. — P. 70—81.
21. Self-Organized Synchronization of Phonon Lasers / J. Sheng [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2020. — Feb. — Vol. 124, issue 5. — P. 053604.
22. *Djorwé, P.* Self-organized synchronization of mechanically coupled resonators based on optomechanics gain-loss balance / P. Djorwé, Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani // *Phys. Rev. B.* — 2020. — Oct. — Vol. 102, issue 15. — P. 155410.
23. Inferring Phase Equations from Multivariate Time Series / I. T. Tokuda [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Aug. — Vol. 99, issue 6. — P. 064101.
24. *Miethe, I.* Irregular Subharmonic Cluster Patterns in an Autonomous Photoelectrochemical Oscillator / I. Miethe, V. García-Morales, K. Krischer // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — May. — Vol. 102, issue 19. — P. 194101.

25. *Zheng, Z.* Spatiotemporal dynamics of discrete sine-Gordon lattices with sinusoidal couplings / Z. Zheng, B. Hu, G. Hu // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 57, no. 1. — P. 1139—1144.
26. *Daido, H.* Why Circadian Rhythms are Circadian: Competitive Population Dynamics of Biological Oscillators / H. Daido // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — July. — Vol. 87, issue 4. — P. 048101.
27. *Nieto, P. S.* Translational thresholds in a core circadian clock model / P. S. Nieto, C. A. Condat // *Phys. Rev. E*. — 2019. — Aug. — Vol. 100, issue 2. — P. 022409.
28. *Merritt, J.* Frequency- and Amplitude-Dependent Microbial Population Dynamics during Cycles of Feast and Famine / J. Merritt, S. Kuehn // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — Aug. — Vol. 121, issue 9. — P. 098101.
29. Cooperation in Microbial Populations: Theory and Experimental Model Systems / J. Cremer [et al.] // *Journal of Molecular Biology*. — 2019. — Vol. 431, no. 23. — P. 4599—4644. — Underlying Mechanisms of Bacterial Phenotypic Heterogeneity and Sociobiology.
30. *Goriely, A.* Neuronal Oscillations on Evolving Networks: Dynamics, Damage, Degradation, Decline, Dementia, and Death / A. Goriely, E. Kuhl, C. Bick // *Phys. Rev. Lett.* — 2020. — Sept. — Vol. 125, issue 12. — P. 128102.
31. *Montbrió, E.* Kuramoto Model for Excitation-Inhibition-Based Oscillations / E. Montbrió, D. Pazó // *Phys. Rev. Lett.* — 2018. — June. — Vol. 120, issue 24. — P. 244101.
32. *Homma, S.* A Coupled Base-Rotator Model for Structure and Dynamics of DNA: Local Fluctuations in Helical Twist Angles and Topological Solitons / S. Homma, S. Takeno // *Progress of Theoretical Physics*. — 1984. — Vol. 72, no. 4. — P. 679—693.
33. *Takeno, S.* Kinks and Breathers Associated with Collective Sugar Puckering in DNA / S. Takeno, S. Homma // *Progress of Theoretical Physics*. — 1987. — Vol. 77, no. 3. — P. 548—562.
34. Oscillatory cluster patterns in a homogeneous chemical system with global feedback / V. K. Vanag [et al.] // *Nature*. — 2000. — Vol. 406, no. 6794. — P. 389—391.
35. *Vanag, V. K.* Stationary and Oscillatory Localized Patterns, and Subcritical Bifurcations / V. K. Vanag, I. R. Epstein // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92, issue 12. — P. 128301.

36. *Vanag, V. K.* Localized patterns in reaction-diffusion systems / V. K. Vanag, I. R. Epstein // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2007. — Vol. 17, no. 3. — P. 037110.
37. *Smelov, P. S.* Controllable switching between stable modes in a small network of pulse-coupled chemical oscillators / P. S. Smelov, I. S. Proskurkin, V. K. Vanag // *Phys. Chem. Chem. Phys.* — 2019. — Vol. 21, issue 6. — P. 3033—3043.
38. *Brown, E.* On the Phase Reduction and Response Dynamics of Neural Oscillator Populations / E. Brown, J. Moehlis, P. Holmes // *Neural Computation*. — 2004. — Vol. 16, no. 4. — P. 673—715.
39. *Laing, C. R.* The Dynamics of Networks of Identical Theta Neurons / C. R. Laing // *The Journal of Mathematical Neuroscience*. — 2018. — Vol. 8, no. 1. — P. 4.
40. Emergence of a multilayer structure in adaptive networks of phase oscillators / V. Makarov [et al.] // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2016. — Vol. 84. — P. 23—30.
41. Macroscopic chimera-like behavior in a multiplex network / N. S. Frolov [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2018. — Vol. 98, issue 2. — P. 022320.
42. Self-organized emergence of multilayer structure and chimera states in dynamical networks with adaptive couplings / D. V. Kasatkin [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2017. — Vol. 96, issue 6. — P. 062211.
43. *Kasatkin, D. V.* The effect of topology on organization of synchronous behavior in dynamical networks with adaptive couplings / D. V. Kasatkin, V. I. Nekorkin // *European Physical Journal: Special Topics*. — 2018. — T. 227, № 10/11. — C. 1051—1061.
44. *Maslennikov, O. V.* Hierarchical transitions in multiplex adaptive networks of oscillatory units / O. V. Maslennikov, V. I. Nekorkin // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2018. — Vol. 28, no. 12. — P. 121101.
45. Hierarchical frequency clusters in adaptive networks of phase oscillators / R. Berner [et al.] // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 10. — P. 103134.
46. *Chowdhury, D.* Synchronization of oscillators with long-range power law interactions / D. Chowdhury, M. C. Cross // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 82, no. 1. — P. 016205.

47. *Panaggio, M. J.* Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators / M. J. Panaggio, D. M. Abrams // *Nonlinearity*. — 2015. — Vol. 28, no. 3. — R67—R87.
48. *Yao, N.* Chimera states in spatiotemporal systems: Theory and Applications / N. Yao, Z. Zheng // *International Journal of Modern Physics B*. — 2016. — Vol. 30, no. 07. — P. 1630002.
49. *Omel'chenko, O. E.* The mathematics behind chimera states / O. E. Omel'chenko // *Nonlinearity*. — 2018. — Vol. 31, no. 5. — R121—R164.
50. *Kuramoto, Y.* Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators / Y. Kuramoto, D. Battogtokh // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* — 2002. — Vol. 5, no. 4. — P. 380—385.
51. *Motter, A. E.* Spontaneous synchrony breaking / A. E. Motter // *Nature Physics*. — 2010. — Vol. 6, no. 3. — P. 164—165.
52. Solvable model for chimera states of coupled oscillators / D. M. Abrams [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2008. — Vol. 101, no. 8.
53. Chimera states in neuronal networks: A review / S. Majhi [et al.] // *Physics of Life Reviews*. — 2019. — Vol. 28. — P. 100—121.
54. *Schöll, E.* Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics / E. Schöll // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2016. — Vol. 225, no. 6/7. — P. 891—919.
55. *Zakharova, A.* Chimera patterns in networks : interplay between dynamics, structure, noise, and delay / A. Zakharova. — Springer, 2020. — P. 243.
56. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing / V. A. Maksimenko [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2016. — Vol. 94, issue 5. — P. 052205.
57. *Dmitrichev, A.* Cloning of Chimera States in a Large Short-term Coupled Multiplex Network of Relaxation Oscillators / A. Dmitrichev, D. Shchapin, V. Nekorkin // *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. — 2019. — Vol. 5. — P. 9.
58. *Tinsley, M. R.* Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators / M. R. Tinsley, S. Nkomo, K. Showalter // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8, no. 9. — P. 662—665.

59. *Nkomo, S.* Chimera States in Populations of Nonlocally Coupled Chemical Oscillators / S. Nkomo, M. R. Tinsley, K. Showalter // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 110, no. 24. — P. 244102.
60. *Wickramasinghe, M.* Spatially Organized Dynamical States in Chemical Oscillator Networks: Synchronization, Dynamical Differentiation, and Chimera Patterns / M. Wickramasinghe, I. Z. Kiss // *PLoS ONE* / ed. by B. Ermentrout. — 2013. — Vol. 8, no. 11. — e80586.
61. Experimental observation of chimera and cluster states in a minimal globally coupled network / J. D. Hart [et al.] // *Chaos*. — 2016. — Vol. 26, no. 9. — P. 094801.
62. Imperfect chimera states for coupled pendula / T. Kapitaniak [et al.] // *Scientific Reports*. — 2015. — Vol. 4, no. 1. — P. 6379.
63. *Wickramasinghe, M.* Spatially organized partial synchronization through the chimera mechanism in a network of electrochemical reactions / M. Wickramasinghe, I. Z. Kiss // *Phys. Chem. Chem. Phys.* — 2014. — Vol. 16, no. 34. — P. 18360—18369.
64. Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling / L. Schmidt [et al.] // *Chaos*. — 2014. — Vol. 24, no. 1. — P. 013102.
65. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices / A. M. Hagerstrom [et al.] // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8, no. 9. — P. 658—661.
66. Coherence and Incoherence in an Optical Comb / E. A. Viktorov [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2014. — Vol. 112, no. 22. — P. 224101.
67. *Larger, L.* Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems / L. Larger, B. Penkovsky, Y. Maistrenko // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 111, no. 5. — P. 054103.
68. *Larger, L.* Laser chimeras as a paradigm for multistable patterns in complex systems / L. Larger, B. Penkovsky, Y. Maistrenko // *Nature Communications*. — 2015. — Vol. 6, no. 1. — P. 7752.
69. Two-dimensional spatiotemporal complexity in dual-delayed nonlinear feedback systems: Chimeras and dissipative solitons / D. Brunner [et al.] // *Chaos*. — 2018. — Vol. 28, no. 10. — P. 103106.

70. Experimental investigation of chimera states with quiescent and synchronous domains in coupled electronic oscillators / L. V. Gambuzza [et al.] // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, no. 3. — P. 032905.
71. Chimera states in mechanical oscillator networks. / E. A. Martens [et al.] // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. — 2013. — Vol. 110, no. 26. — P. 10563—7.
72. *Omel'chenko, O. E.* Coherence–incoherence patterns in a ring of non-locally coupled phase oscillators / O. E. Omel'chenko // *Nonlinearity*. — 2013. — Vol. 26, no. 9. — P. 2469—2498.
73. *Smirnov, L.* Chimera patterns in the Kuramoto–Battogtokh model / L. Smirnov, G. Osipov, A. Pikovsky // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. — 2017. — Vol. 50, no. 8. — 08LT01.
74. Spectral properties of chimera states / M. Wolfrum [et al.] // *Chaos*. — 2011. — Vol. 21, no. 1. — P. 013112.
75. Chimera-like behavior in a heterogeneous Kuramoto model: The interplay between attractive and repulsive coupling / N. Frolov [et al.] // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2020. — Vol. 30, no. 8. — P. 081102.
76. *Ott, E.* Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators / E. Ott, T. M. Antonsen // *Chaos*. — 2008. — Vol. 18, no. 3. — P. 037113.
77. *Ott, E.* Long time evolution of phase oscillator systems / E. Ott, T. M. Antonsen // *Chaos*. — 2009. — Vol. 19, no. 2. — P. 023117.
78. *Pietras, B.* Ott-Antonsen attractiveness for parameter-dependent oscillatory systems / B. Pietras, A. Daffertshofer // *Chaos*. — 2016. — Vol. 26, no. 10. — P. 103101.
79. *Laing, C. R.* Chimera states in heterogeneous networks / C. R. Laing // *Chaos*. — 2009. — Vol. 19, no. 1. — P. 013113.
80. *Gupta, S.* *Statistical Physics of Synchronization* / S. Gupta, A. Campa, S. Ruffo. — Cham : Springer International Publishing, 2018. — (SpringerBriefs in Complexity).
81. *Ermentrout, G. B.* Stable Periodic Solutions to Discrete and Continuum Arrays of Weakly Coupled Nonlinear Oscillators / G. B. Ermentrout // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1992. — Vol. 52, no. 6. — P. 1665—1687.

82. Dynamics and pattern formation in large systems of spatially-coupled oscillators with finite response times / W. S. Lee [et al.] // *Chaos*. — 2011. — Vol. 21, no. 2. — P. 023122.
83. *Medvedev, G. S.* Stability of Twisted States in the Kuramoto Model on Cayley and Random Graphs / G. S. Medvedev, X. Tang // *Journal of Nonlinear Science*. — 2015. — Vol. 25, no. 6. — P. 1169—1208.
84. *Omel'chenko, O. E.* Partially coherent twisted states in arrays of coupled phase oscillators / O. E. Omel'chenko, M. Wolfrum, C. R. Laing // *Chaos*. — 2014. — Vol. 24, no. 2. — P. 023102.
85. *Omel'chenko, O. E.* Nonstationary coherence–incoherence patterns in nonlocally coupled heterogeneous phase oscillators / O. E. Omel'chenko // *Chaos*. — 2020. — Vol. 30, no. 4. — P. 043103.
86. *Wolfrum, M.* Turbulence in the Ott–Antonsen equation for arrays of coupled phase oscillators / M. Wolfrum, S. V. Gurevich, O. E. Omel'chenko // *Nonlinearity*. — 2016. — Vol. 29, no. 2. — P. 257—270.
87. *Laing, C. R.* The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks / C. R. Laing // *Physica D*. — 2009. — Vol. 238, no. 16. — P. 1569—1588.
88. *Girnyk, T.* Multistability of twisted states in non-locally coupled Kuramoto-type models / T. Girnyk, M. Hasler, Y. Maistrenko // *Chaos*. — 2012. — Vol. 22, no. 1. — P. 013114.
89. *Wiley, D. A.* The size of the sync basin / D. A. Wiley, S. H. Strogatz, M. Girvan // *Chaos*. — 2006. — Vol. 16, no. 1. — P. 015103.
90. Пространственно-временные режимы в системе неидентичных осцилляторов Курамото-Баттогтоха / М. И. Болотов [и др.] // *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. — 2021. — Т. 132. — С. 150—175.
91. Пространственно-временные структуры в системе осцилляторов Курамото-Баттогтоха / Е. С. Бубнова [и др.] // *Труды XXII научной конференции по радиофизике*. — 2018. — С. 245—248.
92. Homogeneous states in the system of nonidentical phase oscillators / E. S. Bubnova [et al.] // *Dynamics, Bifurcations and Chaos 2018, Book of Abstracts*. — 2018. — P. 9.

93. *Pesin, I. N.* Classical and modern integration theories / I. N. Pesin, S. Kotz. — Academic Press, 1970. — P. 195.
94. *Watanabe, S.* Integrability of a globally coupled oscillator array / S. Watanabe, S. H. Strogatz // *Physical Review Letters*. — 1993. — Vol. 70, no. 16. — P. 2391—2394.
95. *Eckhaus, W.* Studies in Non-Linear Stability Theory / W. Eckhaus. — Springer Berlin Heidelberg, 1965.
96. *Moon, F. C.* Chaotic vibrations : an introduction for applied scientists and engineers / F. C. Moon. — Wiley-Interscience, 2004. — P. 309.
97. Simple and complex chimera states in a nonlinearly coupled oscillatory medium / M. I. Bolotov [et al.] // *Chaos*. — 2018. — Vol. 28. — P. 045101.
98. Бризерные химеры в системе фазовых осцилляторов / М. И. Болотов [и др.] // *Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*. — 2017. — Т. 106. — С. 368—374.
99. *Suda, Y.* Breathing multichimera states in nonlocally coupled phase oscillators / Y. Suda, K. Okuda // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 97, no. 4. — P. 042212.
100. *Xie, J.* Twisted chimera states and multicore spiral chimera states on a two-dimensional torus / J. Xie, E. Knobloch, H.-C. Kao // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 92, no. 4. — P. 042921.
101. *Omel'chenko, O. E.* Stability of Spiral Chimera States on a Torus / O. E. Omel'chenko, M. Wolfrum, E. Knobloch // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. — 2018. — Vol. 17, no. 1. — P. 97—127.
102. *Bordyugov, G.* Self-emerging and turbulent chimeras in oscillator chains / G. Bordyugov, A. Pikovsky, M. Rosenblum // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 82, no. 3. — P. 035205.
103. Experiments on oscillator ensembles with global nonlinear coupling / A. A. Temirbayev [et al.] // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85, no. 1. — P. 015204.
104. Autonomous and forced dynamics of oscillator ensembles with global nonlinear coupling: An experimental study / A. A. Temirbayev [et al.] // *Physical Review E*. — 2013. — Vol. 87, no. 6. — P. 062917.

105. Twisted states in a system of nonlinearly coupled phase oscillators / D. I. Bolotov [et al.] // *Regular and Chaotic Dynamics*. — 2019. — Vol. 24. — P. 717—724.
106. Complex chimera states in a nonlinearly coupled oscillatory medium / M. I. Bolotov [et al.] // *2018 2nd School on Dynamics of Complex Networks and their Application in Intellectual Robotics, DCNAIR 2018*. — 2018. — P. 57—59.
107. Chimera States in a Nonlinearly Coupled Oscillatory Network / M. I. Bolotov [et al.] // *Opera Medica Et Physiologica*. — 2018. — P. 40—41.
108. Simple and complex chimera states in a nonlinearly coupled oscillatory medium / M. I. Bolotov [et al.] // *Dynamics, Bifurcations and Chaos 2018, Book of Abstracts*. — 2018. — P. 8.
109. Simple and complex chimera states in a nonlinearly coupled oscillatory medium / M. I. Bolotov [et al.] // *Book of abstract «The conference on Analysis and Modeling of Complex Oscillatory Systems (AMCOS)»*. — 2018. — P. 42.
110. Бризерные химеры в системе связанных осцилляторов / М. И. Болотов [и др.] // *Тезисы докладов Научной Школы «Нелинейные Волны—2018»*. Институт Прикладной Физики РАН. Нижний Новгород. — 2018. — С. 20—22.
111. Breather chimeras in the system of phase oscillators / M. I. Bolotov [et al.] // *Book of abstract «International Conference-School Shilnikov WorkShop 2017»*. — 2017. — P. 8—9.
112. *Pikovsky, A.* Partially integrable dynamics of hierarchical populations of coupled oscillators / A. Pikovsky, M. Rosenblum // *Physical Review Letters*. — 2008. — Vol. 101, no. 26.
113. *Rosenblum, M.* Self-Organized Quasiperiodicity in Oscillator Ensembles with Global Nonlinear Coupling / M. Rosenblum, A. Pikovsky // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 98, no. 6. — P. 064101.
114. *Pikovsky, A.* Self-organized partially synchronous dynamics in populations of nonlinearly coupled oscillators / A. Pikovsky, M. Rosenblum // *Physica D*. — 2009. — Vol. 238, no. 1.
115. *Choe, C. U.* Chimera and modulated drift states in a ring of nonlocally coupled oscillators with heterogeneous phase lags / C. U. Choe, R. S. Kim, J. S. Ri // *Physical Review E*. — 2017. — Vol. 96, no. 3.

116. *Martens, E. A.* Bistable chimera attractors on a triangular network of oscillator populations / E. A. Martens // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 82, no. 1. — P. 016216.
117. *Bick, C.* Controlling chimeras / C. Bick, E. A. Martens // *New Journal of Physics*. — 2015. — Vol. 17, no. 3. — P. 033030.
118. Controlling chimera states via minimal coupling modification / G. Ruzzene [et al.] // *Chaos*. — 2019. — Vol. 29, no. 5.
119. *Andrzejak, R. G.* Generalized synchronization between chimera states / R. G. Andrzejak, G. Ruzzene, I. Malvestio // *Chaos*. — 2017. — Vol. 27, no. 5.
120. Mean field phase synchronization between chimera states / R. G. Andrzejak [et al.] // *Chaos*. — 2018. — Vol. 28, no. 9.
121. Locking and regularisation of chimeras by periodic forcing / M. I. Bolotov [et al.] // *Phys. Rev. E*. — 2020. — Vol. 102. — P. 042218.
122. Стабилизация химерных состояний внешним периодическим воздействием / М. И. Болотов [и др.] // Тезисы докладов Научной Школы «Нелинейные Волны–2020». Институт Прикладной Физики РАН. Нижний Новгород. — 2020. — С. 60–61.
123. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving / A. S. Pikovsky [et al.] // *Physica D*. — 1997. — Vol. 104, no. 3/4.
124. *Omel'Chenko, O. E.* Chimera states as chaotic spatiotemporal patterns / O. E. Omel'Chenko, M. Wolfrum, Y. L. Maistrenko // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 81, no. 6.
125. *Wolfrum, M.* Chimera states are chaotic transients / M. Wolfrum, O. E. Omel'Chenko // *Physical Review E*. — 2011. — Vol. 84, no. 1.
126. *Xie, J.* Multicluster and traveling chimera states in nonlocal phase-coupled oscillators / J. Xie, E. Knobloch, H. C. Kao // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, no. 2.
127. *Smirnov, L. A.* Chimera Patterns in One-Dimensional Oscillatory Medium / L. A. Smirnov, G. V. Osipov, A. Pikovsky // *Nonlinear Waves and Pattern Dynamics*. — Cham : Springer International Publishing, 2018. — P. 159–180.
128. A classification scheme for chimera states / F. P. Kemeth [et al.] // *Chaos*. — 2016. — Vol. 26, no. 9.

129. Delayed-feedback chimera states: Forced multiclusters and stochastic resonance / V. Semenov [et al.] // EPL. — 2016. — Vol. 115, no. 1.
130. Delay controls chimera relay synchronization in multiplex networks / J. Sawicki [et al.] // Physical Review E. — 2018. — Vol. 98, no. 6.
131. *Izhikevich, E.* Dynamical Systems in Neuroscience / E. Izhikevich. — MIT Press, 2007. — (Computational neuroscience Dynamical systems in neuroscience).
132. *Strogatz, S. H.* Exploring complex networks / S. H. Strogatz // nature. — 2001. — Vol. 410, no. 6825. — P. 268—276.
133. *Breakspear, M.* Dynamic models of large-scale brain activity / M. Breakspear // Nature neuroscience. — 2017. — Vol. 20, no. 3. — P. 340—352.
134. *Buck, J.* Mechanism of Rhythmic Synchronous Flashing of Fireflies: Fireflies of Southeast Asia may use anticipatory time-measuring in synchronizing their flashing / J. Buck, E. Buck // Science. — 1968. — Vol. 159, no. 3821. — P. 1319—1327.
135. *Gilpin, W.* The multiscale physics of cilia and flagella / W. Gilpin, M. S. Bull, M. Prakash // Nature Reviews Physics. — 2020. — Vol. 2, no. 2. — P. 74—88.
136. Cellular construction of a circadian clock: period determination in the suprachiasmatic nuclei / C. Liu [et al.] // Cell. — 1997. — Vol. 91, no. 6. — P. 855—860.
137. *Leloup, J.-C.* Modeling the circadian clock: from molecular mechanism to physiological disorders / J.-C. Leloup, A. Goldbeter // Bioessays. — 2008. — Vol. 30, no. 6. — P. 590—600.
138. Mathematical modelling of endocrine systems / E. Zavala [et al.] // Trends in Endocrinology & Metabolism. — 2019. — Vol. 30, no. 4. — P. 244—257.
139. Network structure of cerebral cortex shapes functional connectivity on multiple time scales / C. J. Honey [et al.] // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2007. — Vol. 104, no. 24. — P. 10240—10245.
140. *Honey, C. J.* Can structure predict function in the human brain? / C. J. Honey, J.-P. Thivierge, O. Sporns // Neuroimage. — 2010. — Vol. 52, no. 3. — P. 766—776.
141. *Fornito, A.* The connectomics of brain disorders / A. Fornito, A. Zalesky, M. Breakspear // Nature Reviews Neuroscience. — 2015. — Vol. 16, no. 3. — P. 159—172.

142. *Bassett, D. S.* Network neuroscience / D. S. Bassett, O. Sporns // Nature neuroscience. — 2017. — Vol. 20, no. 3. — P. 353—364.
143. Seizure prediction—ready for a new era / L. Kuhlmann [et al.] // Nature Reviews Neurology. — 2018. — Vol. 14, no. 10. — P. 618—630.
144. *Glass, L.* Synchronization and rhythmic processes in physiology / L. Glass // Nature. — 2001. — Vol. 410, no. 6825. — P. 277—284.
145. *Dörfler, F.* Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey / F. Dörfler, F. Bullo // Automatica. — 2014. — Vol. 50, no. 6. — P. 1539—1564.
146. *Vreeswijk, C. van.* Partial synchronization in populations of pulse-coupled oscillators / C. van Vreeswijk // Physical Review E. — 1996. — Vol. 54, no. 5.
147. *Olmi, S.* Collective chaos in pulse-coupled neural networks / S. Olmi, A. Politi, A. Torcini // EPL. — 2010. — Vol. 92, no. 6.
148. *Sethia, G. C.* Chimera States: The Existence Criteria Revisited / G. C. Sethia, A. Sen // Physical Review Letters. — 2014. — Vol. 112, no. 14. — P. 144101.
149. *Yeldesbay, A.* Chimeralike States in an Ensemble of Globally Coupled Oscillators / A. Yeldesbay, A. Pikovsky, M. Rosenblum // Physical Review Letters. — 2014. — Vol. 112, no. 14. — P. 144103.
150. *Болотов, М. И.* Коллективная динамика ротаторов, связанных общим импульсным полем / М. И. Болотов, Г. В. Осипов // Письма в Журнал Технической Физики. — 2016. — Т. 42, № 23. — С. 28—34.
151. *Bolotov, M. I.* Collective Dynamics of Rotators Coupled by a Common Pulsed Field / M. I. Bolotov, G. V. Osipov // Book of abstract «International Conference-School Shilnikov WorkShop 2016». — 2016. — P. 3—4.
152. *Болотов, М. И.* Collective Dynamics of Rotators Coupled by a Common Pulsed Field / М. И. Болотов, Г. В. Осипов // Материалы 11-й Международной школы-конференции «Хаос-2016». — 2016. — С. 77.
153. *Bolotov, M. I.* Collective dynamics of rotators coupled via common impulse field / M. I. Bolotov, G. V. Osipov // Dynamics, Bifurcations and Chaos 2016, Book of Abstracts. — 2016. — P. 3.
154. *Болотов, М. И.* Динамика ансамбля импульсно-связанных активных ротаторов / М. И. Болотов, Г. В. Осипов // Труды XIX научной конференции по радиофизике. — 2015. — С. 105—106.

155. *Bolotov, M. I.* Marginal chimera state at cross-frequency locking of pulse-coupled neural networks / M. I. Bolotov, G. V. Osipov, A. Pikovsky // *Phys. Rev. E.* — 2016. — Vol. 93. — P. 032202.
156. *Болотов, М. И.* Маргинальное химерное состояние в синхронных импульсно-связанных нейроноподобных сетях / М. И. Болотов, Г. В. Осипов, А. Пиковский // Тезисы докладов Научной Школы «Нелинейные Волны–2016». Институт Прикладной Физики РАН. Нижний Новгород. — 2016. — С. 36.
157. *Bolotov, M. I.* Marginal chimera state at cross-frequency locking of pulse-coupled neural networks / M. I. Bolotov, G. V. Osipov, A. Pikovsky // *International Conference-School Shilnikov WorkShop 2015, Book of Abstracts.* — 2015. — P. 3.
158. *Komarov, M.* Effects of nonresonant interaction in ensembles of phase oscillators / M. Komarov, A. Pikovsky // *Physical Review E.* — 2011. — Vol. 84, no. 1. — P. 016210.
159. *Komarov, M.* Dynamics of Multifrequency Oscillator Communities / M. Komarov, A. Pikovsky // *Physical Review Letters.* — 2013. — Vol. 110, no. 13. — P. 134101.
160. *Komarov, M.* Intercommunity resonances in multifrequency ensembles of coupled oscillators / M. Komarov, A. Pikovsky // *Physical Review E.* — 2015. — Vol. 92, no. 1. — P. 012906.
161. *Buzsáki, G.* Rhythms of the Brain / G. Buzsáki. — Oxford University Press, 2009. — P. 1–464.
162. *Abbott, L.* Asynchronous states in networks of pulse-coupled oscillators / L. Abbott, C. van Vreeswijk // *Physical Review E.* — 1993. — Vol. 48, no. 2. — P. 1483.
163. Stability of the splay state in pulse-coupled networks / R. Zillmer [et al.] // *Physical Review E.* — 2007. — Vol. 76, no. 4. — P. 046102.
164. *Park, S. H.* Noise-induced phase transitions in globally coupled active rotators / S. H. Park, S. Kim // *Phys. Rev. E.* — 1996. — Vol. 53, issue 4. — P. 3425–3430.
165. *Kanamaru, T.* Analysis of globally connected active rotators with excitatory and inhibitory connections using the Fokker-Planck equation / T. Kanamaru, M. Sekine // *Phys. Rev. E.* — 2003. — Vol. 67, issue 3. — P. 031916.

166. *Mohanty, P. K.* A new approach to partial synchronization in globally coupled rotators / P. K. Mohanty, A. Politi // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 2006. — Vol. 39, no. 26. — P. L415—L421.
167. *Hasselblatt, B.* A First Course in Dynamics / B. Hasselblatt, A. Katok. — Cambridge University Press, 2003.
168. *Bolotov, M. I.* Collective dynamics of rotators coupled by a common pulsed field / M. I. Bolotov, G. V. Osipov // *Technical Physics Letters*. — 2017.
169. Simple and complex chimera states in a nonlinearly coupled oscillatory medium / M. Bolotov [et al.] // *Chaos*. — 2018.
170. *Numerical Recipes The Art of Scientific Computing Third Edition* / W. H. Press [et al.]. — 2007.

Приложение А

Анализ устойчивости стационарных химерных состояний

В данном приложении представлен подробный анализ устойчивости стационарных (во вращающейся системе координат) пространственных структур, включая пространственно-однородных, в системе нелокально связанных осцилляторов с нелинейным фазовым сдвигом. Начальным в анализе является уравнение (2.23):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{Z}}{\partial t} = & - \left[i\Omega + e^{i\alpha(|h|)} z(x) h^*(x) \right] \mathcal{Z} + \frac{e^{-i\alpha(|h|)}}{2} \mathcal{H} - \frac{e^{i\alpha(|h|)}}{2} z^2(x) \mathcal{H}^* - \\ & - \frac{i\alpha_1}{2} (h(x) \mathcal{H}^* + h^*(x) \mathcal{H}) \left[h(x) e^{-i\alpha(|h|)} + h^*(x) z^2(x) e^{i\alpha(|h|)} \right], \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

где $\mathcal{H}(x, t) = \int_0^L G(x - \tilde{x}) \mathcal{Z}(\tilde{x}, t) d\tilde{x}$. Представим (A.1) в виде системы относительно двух вещественных функций $\mathcal{Z}(x, t) = \xi_1(x, t) + i\xi_2(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} = & \mu_1(x) \xi_1 - \mu_2(x) \xi_2 + K_{11}(x) \int_0^L G(x - \tilde{x}) \xi_1(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \\ & + K_{12}(x) \int_0^L G(x - \tilde{x}) \xi_2(\tilde{x}, t) d\tilde{x}, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} = & \mu_2(x) \xi_1 + \mu_1(x) \xi_2 + K_{21}(x) \int_0^L G(x - \tilde{x}) \xi_1(\tilde{x}, t) d\tilde{x} + \\ & + K_{22}(x) \int_0^L G(x - \tilde{x}) \xi_2(\tilde{x}, t) d\tilde{x}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где для удобства представления введены следующие функции:

$$\begin{aligned} K_{11}(x) = & \frac{1}{2} (\cos \alpha - \eta_1(x)) + \alpha_1 (\cos \alpha (\chi_1(x) + 2 \operatorname{Im} z(x) (\operatorname{Re} h(x))^2 \operatorname{Re} z(x)) + \\ & + \sin \alpha (\chi_2(x) - (\operatorname{Re} h(x))^2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{12}(x) = & \frac{1}{2} (\sin \alpha - \eta_2(x)) + \alpha_1 (\cos \alpha (\chi_3(x) + (\operatorname{Im} h(x))^2) + \sin \alpha (-\chi_1(x) + \\ & + 2 \operatorname{Im} z(x) (\operatorname{Im} h(x))^2 \operatorname{Re} z(x))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{21}(x) = & -\frac{1}{2} (\sin \alpha + \eta_2(x)) + \alpha_1 (\cos \alpha (-\chi_2(x) - (\operatorname{Re} h(x))^2) + \sin \alpha (\chi_1(x) + \\ & + 2 \operatorname{Im} z(x) (\operatorname{Re} h(x))^2 \operatorname{Re} z(x) - 2 \operatorname{Im} h(x) \operatorname{Re} h(x))), \end{aligned}$$

$$K_{22}(x) = \frac{1}{2}(\cos \alpha + \eta_1(x)) + \alpha_1(\cos \alpha(\chi_1(x) - 2 \operatorname{Im} z(x)(\operatorname{Im} h(x))^2 \operatorname{Re} z(x) - \\ - 2 \operatorname{Im} h(x) \operatorname{Re} h(x)) + \sin \alpha(\chi_3(x) - (\operatorname{Im} h(x))^2)),$$

$$\mu_1(x) = \begin{cases} -\sqrt{|h(x)|^2 - \Omega^2}, & |h(x)| \geq \Omega, \\ 0, & |h(x)| < \Omega, \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 0, & |h(x)| \geq \Omega, \\ -\sqrt{\Omega^2 - |h(x)|^2}, & |h(x)| < \Omega, \end{cases}$$

$$\eta_1(x) = (\operatorname{Re} z(x))^2 \cos \alpha - (\operatorname{Im} z(x))^2 \cos \alpha - 2 \operatorname{Re} z(x) \operatorname{Im} z(x) \sin \alpha,$$

$$\eta_2(x) = (\operatorname{Re} z(x))^2 \sin \alpha - (\operatorname{Im} z(x))^2 \sin \alpha + 2 \operatorname{Re} z(x) \operatorname{Im} z(x) \cos \alpha,$$

$$\chi_1(x) = \operatorname{Im} h(x) \operatorname{Re} h(x) + \operatorname{Im} h(x)(\operatorname{Im} z(x))^2 \operatorname{Re} h(x) - \\ - \operatorname{Im} h(x) \operatorname{Re} h(x)(\operatorname{Re} z(x))^2,$$

$$\chi_2(x) = -(\operatorname{Im} z(x))^2(\operatorname{Re} h(x))^2 + 2 \operatorname{Im} h(x) \operatorname{Im} z(x) \operatorname{Re} h(x) \operatorname{Re} z(x) + \\ + (\operatorname{Re} z(x))^2(\operatorname{Re} h(x))^2,$$

$$\chi_3(x) = (\operatorname{Im} h(x))^2(\operatorname{Im} z(x))^2 + 2 \operatorname{Im} h(x) \operatorname{Im} z(x) \operatorname{Re} h(x) \operatorname{Re} z(x) - \\ - (\operatorname{Im} h(x))^2(\operatorname{Re} z(x))^2.$$

Уравнение (A.2) является уравнением (2.24) в основном тексте.

Обсудим далее устойчивость пространственно-однородных состояний, используя уравнение (A.2). В этом случае решениями являются плоские волны $\xi(x, t) = \mathbf{A}e^{-ikx + \lambda t}$, $\mathbf{A} = (A_1, A_2)^T$, и задача на собственные значения λ имеют следующий вид

$$\lambda \mathbf{A} = (\hat{\mathbf{M}}_0 + I(k)\hat{\mathbf{K}}_0)\mathbf{A}, \quad (\text{A.3})$$

где $I(k) = \int_{-L/2}^{L/2} G(x)e^{ikx} dx = \frac{1}{1+k^2}$. Операторы $\hat{\mathbf{M}}_0$ и $\hat{\mathbf{K}}_0$ определены в соответствии с формулой (2.24) и вышеприведенных выражений, индекс 0 означает, что в качестве аргументов операторов подставлены соответствующие стационарным решениям уравнений (2.9) функции z_0 и h_0 .

Для полностью асинхронного состояния имеем $Z_{as} = z_0 = h_0 = 0$, $\alpha = \alpha_0$. Для него собственные значения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(1+k^2)^{-1} \cos(\alpha_0) \pm i \sqrt{\left| \frac{1}{2} \sin(\alpha_0) + \Omega \right|}. \quad (\text{A.4})$$

Для полностью синхронного режима $Z_s = e^{i(\omega + \Omega_s)t}$ с $\Omega_s = -\sin(\alpha_0 + \alpha_1)$, $z_0 = 1$, $h_0 = 1$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$ задача на собственные решения имеет следующие решения

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\cos(\alpha_0 + \alpha_1), \\ \lambda_2 &= -\cos(\alpha_0 + \alpha_1)(1 - (1 + k^2)^{-1}).\end{aligned}\quad (\text{A.5})$$

Для частично синхронного решения $Z_{ps} = r_{ps}e^{i(\omega + \Omega_{ps})t}$, где $r_{ps} = \sqrt{\frac{\pi/2 - \alpha_0}{\alpha_1}}$ с $z_0 = r_{ps}$, $h_0 = r_{ps}$, $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 r_{ps}^2$, $\Omega_{ps} = -(1 + r_{ps}^2)/2$ собственные значения определяются

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{(\pi/2 - \alpha_0)(\pi/2 - \alpha_0 - \alpha_1)}{2\alpha_1(1 + k^2)} \pm \\ &\pm \frac{1}{2} \left[\frac{(\pi/2 - \alpha_0)^2(\pi/2 - \alpha_0 - \alpha_1)^2}{\alpha_1^2(1 + k^2)^2} - \frac{\alpha_1^2 - \alpha_0^2 - (\pi/2)^2 + \pi\alpha_0}{\alpha_1^2} \frac{k^4}{(1 + k^2)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\pi/2 - \alpha_0)(\alpha_1 + \alpha_0 - \pi/2)}{\alpha_1^2} \frac{2k^2}{(1 + k^2)} \right]^{1/2}.\end{aligned}\quad (\text{A.6})$$

При этом условие $\lambda_1 = 0$ дает следующее критическое значение волнового числа $k_c^2 = \frac{\pi - 2\alpha_0}{\alpha_1 - \pi/2 + \alpha_0}$.

Приложение Б

Анализ устойчивости градиентных состояний

В данном приложении представлен анализ устойчивости градиентных стационарных (во вращающейся системе координат) состояний в ансамбле идентичных нелокально связанных фазовых осцилляторов с нелинейным фазовым сдвигом.

Устойчивость стационарного градиентного состояния (2.10), (2.11) можно проанализировать с помощью линеаризации уравнения (2.7). Для этого выполним следующую подстановку в уравнение Отта—Антонсена (2.7)

$$Z(x,t) = (z_0 + \mathcal{Z}(x,t))e^{-iqx+i(\omega+\Omega)t}, \quad (\text{Б.1})$$

где $\mathcal{Z}(x,t)$ – периодическое по x малое возмущение. Аналогично представим $H(x,t)$ в виде

$$H(x,t) = (h_0 + \mathcal{H}(x,t))e^{-iqx+i(\omega+\Omega)t}. \quad (\text{Б.2})$$

В результате линеаризации получаем уравнение, определяющее динамику \mathcal{Z} :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{Z} = & - \left(i\Omega + e^{i\alpha} \frac{r^2}{1+q^2} \right) \mathcal{Z} + \frac{1}{2} \left(e^{-i\alpha} \mathcal{H} - e^{i\alpha} r^2 \mathcal{H}^* \right) - \\ & - \frac{i\alpha_1 r^2}{2(1+q^2)^2} \left(\mathcal{H}^* + \mathcal{H} \right) \left(e^{-i\alpha} + r^2 e^{i\alpha} \right), \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

где

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{r^2}{(1+q^2)^2}, \quad (\text{Б.4})$$

$$\mathcal{H}(x,t) = \int_0^L G(x-\tilde{x}) e^{iq(x-\tilde{x})} \mathcal{Z}(\tilde{x},t) d\tilde{x}. \quad (\text{Б.5})$$

Воспользуемся методом Боголюбова и представим возмущение $\mathcal{Z}(x,t)$ в виде

$$\mathcal{Z}(x,t) = a e^{\lambda t - ik_n x} + b^* e^{\lambda^* t + ik_n x}, \quad (\text{Б.6})$$

где $k_n = 2\pi n/L$, n – номер гармоники возмущения \mathcal{Z} . Тогда $\mathcal{H}(x,t)$ задается выражением

$$\mathcal{H}(x,t) = \frac{a^* e^{\lambda t - ik_n x}}{1 + (q + k_n)^2} + \frac{b^* e^{\lambda^* t + ik_n x}}{1 + (q - k_n)^2}. \quad (\text{Б.7})$$

Подставляя (Б.6), (Б.7) в (Б.3), получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\lambda^{(n)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad (\text{Б.8})$$

где

$$M_{11} = - \left(i\Omega + e^{i\alpha} \frac{r^2}{1+q^2} \right) + \frac{e^{-i\alpha}}{2(1+(q+k_n)^2)} - \frac{i\alpha_1 r^2 (e^{-i\alpha} + r^2 e^{i\alpha})}{2(1+q^2)^2(1+(q+k_n)^2)}, \quad (\text{Б.9})$$

$$M_{12} = - \frac{e^{i\alpha} r^2}{2(1+(q-k_n)^2)} - \frac{i\alpha_1 r^2 (e^{-i\alpha} + r^2 e^{i\alpha})}{2(1+q^2)^2(1+(q-k_n)^2)}, \quad (\text{Б.10})$$

$$M_{21} = - \frac{e^{-i\alpha} r^2}{2(1+(q+k_n)^2)} + \frac{i\alpha_1 r^2 (e^{i\alpha} + r^2 e^{-i\alpha})}{2(1+q^2)^2(1+(q+k_n)^2)}, \quad (\text{Б.11})$$

$$M_{22} = - \left(-i\Omega + e^{-i\alpha} \frac{r^2}{1+q^2} \right) + \frac{e^{i\alpha}}{2(1+(q-k_n)^2)} + \frac{i\alpha_1 r^2 (e^{i\alpha} + r^2 e^{-i\alpha})}{2(1+q^2)^2(1+(q-k_n)^2)}. \quad (\text{Б.12})$$

Приложение В

Алгоритм поиска стационарных химерных структур в среде с внешним периодическим воздействием

Опишем в данном Приложении численный метод поиска химерных структур, основанный на уравнениях (3.11), (3.12). Задача состоит в том, чтобы найти решения $r(x)$, $r'(x)$, $q(x)$, и $\theta(x)$ с периодом L . (Заметим, что здесь мы ограничимся анализом стационарных профилей макроскопических полей без проскоков фазы при прохождении через всю среду, т. е. только случаи, когда $\theta(L) = \theta(0)$. Однако, в общем случае решения с $\theta(L) = \theta(0) + 2\pi m$, где m является целым числом, также допустимы). Кроме того, в силу инвариантности относительно пространственных сдвигов, а также симметричности химер в автономной системе, будем искать решения в классе симметричных функций $r(x)$, $\theta(x)$ и антисимметричных функций $r'(x)$, $q(x)$, где симметрия определена относительно точки $x = L/2$. Для таких решений системы (3.11), (3.12) в силу периодических граничных условий должны выполняться равенства $r(0) = r(L)$ и $q(0) = q(L)$, только если $r'(x)$ и $q(x)$ обращаются в нуль в точках $x = 0$, $x = L/2$ и $x = L$. В наших предыдущих работах [73; 127; 168; 169] было показано, что в случае отсутствия внешней силы т. е. $\varepsilon = 0$ для фиксированного параметра Ω эти ограничения определяют значение L и возможный вид функций $r(x)$, $r'(x)$ и $q(x)$ (а следовательно, и $\theta(x)$ и комплексного поля $h(x)$). Как это было показано в [73; 127; 168; 169] для автономного случая $\varepsilon = 0$ удобно фиксировать основную частоту пространственной структуры Ω и находить периодические решения, период которых $L(\Omega)$ является функцией этого параметра.

В случае $\varepsilon = 0$ размерность системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений (3.11), (3.12) может быть уменьшена, т. к. уравнение (3.9) инвариантно к постоянному фазовому сдвигу комплексного поля $h(x)$. Следовательно, функция $\theta(x)$ определяется с точностью до произвольного постоянного сдвига θ_0 . Внешняя периодическая сила с амплитудой $\varepsilon \neq 0$ и частотой Ω в правой части уравнения (3.2) нарушает фазовую инвариантность уравнения (3.9). Если выполняется условие $\varepsilon \neq 0$, то необходимо рассматривать полную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3.11), (3.12) четвертого порядка

и вести поиск ее периодических решений. Процедура поиска состоит из двух основных этапов.

Сначала производится поиск симметричных периодических траекторий в фазовом пространстве системы (3.11), (3.12) для фиксированных значений параметров ε , Ω и для фиксированного значения Θ фазы при $x = 0$. Используется процедура стрельбы [170]: дифференциальные уравнения (3.11), (3.12) решаются численно (с использованием метода Рунге—Кутты четвертого порядка [170]) с начальными условиями $r(0) = R$, $r'(0) = 0$, $q(0) = 0$ и $\theta(0) = \Theta$ в начальной точке $x = 0$. Интегрирование заканчивается в точке $x = \ell$, где выполняется условие $r'(\ell) = 0$. Чтобы выполнить условие $q(\ell) = 0$, нужно варьировать оставшийся свободный параметр R . Его значение можно найти с помощью метода нахождения корней нелинейного уравнения [170]. Это найденное значение R определяет пространственные профили $r(x)$, $r'(x)$, $q(x)$ и $\theta(x)$, которые являются периодическими функциями с длиной $L = 2\ell$. Эта длина L зависит от параметров ε , Ω (а также α) уравнений (3.11), (3.12) и от значения начальной фазы Θ . Таким образом, можно определить длину химеры как функцию $L(\varepsilon, \Omega, \Theta)$ трех переменных. Пример такого расчета приведен на рис. 3.1,а.

На следующем этапе численной процедуры принимаем L равным 2ℓ , подставляем ранее выбранные значения ε , Ω в уравнение (3.9) и решаем его численно на интервале $[0, L)$, взяв $h(0) = Re^{i\Theta}$ и $h'(0) = 0$ в качестве начальных условий. В результате находим профиль $h(x)$, который соответствует химерному состоянию для системы локально связанных фазовых осцилляторов, непрерывно распределенных на отрезке длины $L = 2\ell$ с периодическими граничными условиями.

Следует отметить, что функция $h(x)$ должна удовлетворять условиям периодичности $h(L) = h(0) = Re^{i\Theta}$ и $h'(L) = h'(0) = 0$. Таким образом, этот факт позволяет дополнительно проверить, что решение $h(x)$, полученное нами численно, соответствует системе, замкнутой в кольцо. Наконец, отметим, что предложенный метод может быть применен к химерным состояниям с любым числом синхронных областей, выбирая соответствующую точку, где $r'(x)$ и $q(x)$ одновременно обращаются в нуль.

Приложение Г

Построение языка Арнольда для захваченных химерных состояний

В данном Приложении описывается, как найденные химерные структуры соотносятся с определенными областями на плоскости параметров (Ω, ε) при заданной длине L . В соответствии с Приложением В, зависимость $L(\varepsilon, \Omega, \Theta)$ есть 2π -периодическая функция аргумента Θ , если выполняется условие $\varepsilon \neq 0$. Следовательно, в определенном диапазоне длин системы $L_{\min}(\varepsilon, \Omega) < L < L_{\max}(\varepsilon, \Omega)$ у нас есть как минимум два решения для каждого L (см., например, рис. 3.1,а). С другой стороны, в отсутствие внешней силы, т. е. при $\varepsilon = 0$, система (3.11), (3.12) обладает свойством инвариантности относительно фазового сдвига $\theta \rightarrow \theta + \theta_0$, так что функция $L(0, \Omega, \Theta)$ не зависит от начальной фазы Θ в точке $x = 0$. В этой ситуации при фиксированном значении $\Omega = \Omega_0$ мы можем установить $\Theta = 0$ и рассматривать решения только с $L = L(0, \Omega_0, 0)$. Это определяет связь между частотой Ω_0 равномерно вращающейся автономной химеры и длиной среды L .

Затем фиксируем значение \bar{L} , при котором существует автономное химерное состояние (устойчивое или неустойчивое) с базовой частотой Ω_0 . Таким образом, из найденных структур необходимо выбрать химеры с периодом \bar{L} . Для фиксированных параметров ε, Ω это сводится к дополнительной одномерной задаче поиска корней, которую легко решить [170]. Например, на рис. 3.1,а значение $\bar{L} = 4.41$, соответствующее частоте $\Omega_0 = \bar{\Omega} = -0.8$, изображено горизонтальной штриховой прямой. Легко заметить, что существует два значения фазы $\Theta_1 = -0.92$ и $\Theta_2 = 2.35$, для которого $L(\varepsilon, \Omega, \Theta) = \bar{L}$. Наличие как минимум двух решений является необходимым, так как при синхронизации периодических колебаний внешней силой обычно существует два захваченных решения (одно устойчивое и одно неустойчивое). Примеры устойчивой и неустойчивой структур, синхронизированных внешним воздействием, продемонстрированы на рис. 3.1,б и рис. 3.1,в, соответственно.

Для определения границ областей существования захваченных химер при фиксированном L определим функции $L_{\min}(\varepsilon, \Omega)$ и $L_{\max}(\varepsilon, \Omega)$ как минимум и максимум зависимостей $L(\varepsilon, \Omega, \Theta)$ для фиксированных Ω, ε . Затем для заданной длины L обратим эти зависимости как $\Omega_{\min}(L, \varepsilon)$ и $\Omega_{\max}(L, \varepsilon)$, которые соответствуют левой и правой границам области захвата химеры внешним перио-

дическим воздействием, соответственно (см. рис. 3.2). Другими словами, если для фиксированных значений ε , Ω и некоторого L выполняются неравенства $\Omega_{\min}(L, \varepsilon) < \Omega(L) < \Omega_{\max}(L, \varepsilon)$, то точка (ε, Ω) лежит в области захвата автономной химеры, существующей в среде длины L . Собственная частота этой химеры Ω_0 определяется из условия $L = L(0, \Omega_0, 0)$. На рис. 3.3 представлено три варианта областей синхронизации (языки Арнольда) для стационарных химер в средах с тремя различными длинами.

Приложение Д

Анализ устойчивости стационарных химерных состояний в среде с внешним периодическим воздействием

В данном Приложении представлен линейный анализ устойчивости стационарных химерных структур в системе нелокально связанных фазовых осцилляторов с внешним периодическим воздействием.

Устойчивость во времени химерных режимов (3.7), равномерно вращающихся с частотой Ω , может быть определена с помощью линеаризации интегро-дифференциального уравнения (3.4), (3.5) в окрестности решения (3.7). Для этого представим локальный параметр порядка $Z(x,t)$ в следующем виде:

$$Z(x,t) = (z(x) + \mathcal{Z}(x,t))e^{i\Omega t}, \quad (\text{Д.1})$$

где $\mathcal{Z}(x,t)$ представляет собой периодическое по x малое возмущение профиля $z(x)$. После подстановки выражения (Д.1) в уравнение (3.4) и линеаризации относительно функции $\mathcal{Z}(x,t)$, получаем уравнение

$$\partial_t \mathcal{Z} = -\left(i\Omega + e^{i\alpha} z(x) h^*(x)\right) \mathcal{Z} + \left(e^{-i\alpha} \mathcal{H} - e^{i\alpha} z^2(x) \mathcal{H}^*\right) / 2, \quad (\text{Д.2})$$

где $\mathcal{H}(x,t)$ поле, задаваемое малым возмущением $\mathcal{Z}(x,t)$, и определяемое с помощью оператора свертки

$$\mathcal{H}(x,t) = \int_0^L G(x - \tilde{x}) \mathcal{Z}(\tilde{x},t) d\tilde{x}. \quad (\text{Д.3})$$

Далее перепишем уравнение (Д.2) вместе с (Д.3) в форме линейного операторного уравнения

$$\partial_t \zeta = \left(\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}\right) \zeta \quad (\text{Д.4})$$

для двухкомпонентной вектор-функции $\zeta(x,t)$, содержащей вещественную $\zeta_1(x,t)$ и мнимую $\zeta_2(x,t)$ части комплексной функции $\mathcal{Z}(x,t) = \zeta_1(x,t) + i\zeta_2(x,t)$. Здесь $\hat{\mathbf{M}}$ – мультипликативный оператор

$$\hat{\mathbf{M}}\zeta = \begin{pmatrix} \mu_1(x) & -\mu_2(x) \\ \mu_2(x) & \mu_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1(x,t) \\ \zeta_2(x,t) \end{pmatrix} \quad (\text{Д.5})$$

и $\hat{\mathbf{K}}$ – интегральный оператор

$$\hat{\mathbf{K}}\zeta = \begin{pmatrix} \varkappa_{11}(x) & \varkappa_{12}(x) \\ \varkappa_{21}(x) & \varkappa_{22}(x) \end{pmatrix} \int_0^L G(x-\tilde{x}) \left(\zeta_1(\tilde{x},t) \zeta_2(\tilde{x},t) \right) d\tilde{x}. \quad (\text{Д.6})$$

Для удобства и краткости представления описанных выше операторов $\hat{\mathbf{M}}$ и $\hat{\mathbf{K}}$, введем две вещественных функции в (Д.5):

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= -\text{Re}(e^{i\alpha} z(x) h^*(x)), \\ \mu_2(x) &= -\text{Im}(e^{i\alpha} z(x) h^*(x)) - \Omega \end{aligned} \quad (\text{Д.7})$$

и следующие обозначения в (Д.6):

$$\begin{aligned} \varkappa_{11}(x) &= (\cos \alpha - \text{Re}(e^{i\alpha} z^2(x))) / 2, \\ \varkappa_{12}(x) &= (\sin \alpha - \text{Im}(e^{i\alpha} z^2(x))) / 2, \\ \varkappa_{21}(x) &= \varkappa_{12}(x) - \sin \alpha, \quad \varkappa_{22}(x) = \cos \alpha - \varkappa_{11}(x). \end{aligned} \quad (\text{Д.8})$$

Примечательно, что для рассматриваемых нами непрерывных пространственных профилей $z(x)$ и $h(x)$ и для любого кусочно-непрерывного ядра $G(x)$, определения (Д.5) и (Д.6) обозначают, что оба оператора $\hat{\mathbf{M}}$ и $\hat{\mathbf{K}}$ являются ограниченными, а интегральный оператор $\hat{\mathbf{K}}$ компактным [72].

В соответствии с уравнением (Д.4) устойчивость химерных режимов определяется спектром собственных значений λ линейного не зависящего от времени композитного оператора $\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}$. Как следует из общей спектральной теории линейных операторов, этот спектр λ является симметричным относительно вещественной оси на комплексной плоскости и содержит две различные части: непрерывный спектр λ_c и точечный спектр λ_p (см. для деталей, например, [72; 126]). Причем устойчивость во времени стационарных химерных состояний определяется только точечным спектром λ_p композитного оператора $\hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{K}}$. Для идентификации точечного спектра использовался предложенный ранее в публикациях [73; 127] метод, который в дальнейшем успешно применялся также в работах [99; 168; 169]. Основная идея данного метода заключается в использовании процедуры дискретизации по пространству и замене интегралов матрицами большой размерности (с различными сетками дискретизации), что практически не влияет на дискретные собственные значения λ_p . Это свойство λ_p позволяет определять точечный спектр λ_p надежно для большинства значений параметров L , α , ε и Ω модели (3.1) путем многократного решения приближенной матричной задачи на собственные значения (см. ссылки [73; 127]).

Следует отметить, что альтернативный подход к исследованию спектра возмущений для химерных состояний, основанный на галеркинском приближении решения с некоторыми базисными функциями, изложен в [72]. Однако, насколько нам известно, этот метод был успешно применен к химерным режимам только в моделях с нелокальным взаимодействием, определяемым гармоническими ядрами, когда бесконечномерная задача на собственные значения может быть сведена к конечномерной.