ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

(НИИМ Нижегородского университета)

На правах рукописи

ЖЕСТКОВ МАКСИМ НИКОЛАЕВИЧ

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТЫХ ТЕЛ И УСТОЙЧИВОСТИ ГУСТО ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических
наук, профессор
Баженов Валентин Георгиевич

Нижний Новгород - 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Конструирование различных гидро- и газораспределительных конструкций и устройств шумоподавления основано на использовании густо перфорированных пластин и оболочек, которые подвергаются различным видам механического воздействия. В последние годы появляется повышенный интерес к пористым металлам, которые, сохраняя достоинства материала основы, обладают малым весом, низкой тепло- и электропроводностью и имеют отличные демпфирующие свойства. В связи с этим актуальной задачей при проектировании устройств с использованием густо перфорированных пластин или оболочек и конструкций из пористых металлов является расчет напряженно-деформированного состояния при различных видах нагружения. Прямое моделирование процессов деформирования густо перфорированных пластин, оболочек и пористых тел возможно выполнить методом конечных элементов, который позволяет учесть все геометрические неоднородности конструкции, но для этого требуется огромное количество вычислительных и временных ресурсов. Существующие упрощенные методы расчёта в большинстве своём основаны на принципе осреднения, который позволяет перейти от перфорированной или пористой конструкции к сплошному материалу с эффективными механическими характеристиками. Использование такого подхода ограничено рассмотрением задач в упругой постановке. При упругопластическом деформировании уже на ранних этапах нагружения вблизи отверстий или пор величина напряжения значительно превышает предел текучести. В этом случае при построении математической модели необходимо учитывать возникновение локальных пластических деформаций. В связи с этим необходима разработка другого подхода, который учитывал бы неоднородность поля напряжений и деформаций и позволял производить расчеты с применением меньшего объема вычислительных ресурсов.

При численном моделировании деформирования пористых материалов с учетом геометрических неоднородностей актуальной является задача определения истинных диаграмм деформирования упругопластической основы. Определение механических характеристик материала основы из экспериментальных исследований на растяжение и ударное нагружение сопряжено с проблемами, вызванными в основном существенной неоднородностью и неодоосностью напряженно-деформированного состояния в образцах. Поэтому для идентификации диаграмм деформирования упругопластических материалов основы важно развивать экспериментально-расчетные методы, позволяющие учесть неодноосность и неоднородность напряженно-деформированного состояния без введения упрощающих гипотез, которые используются в экспериментально-аналитических подходах. Используемый в работе метод основывается на итерационном уточнении истинной диаграммы деформирования материала основы, исходя из сравнения данных эксперимента и результатов численного моделирования процессов деформирования испытуемых образцов.

<u>Степень разработанности темы</u>

Исследования деформирования густо перфорированных пластин и оболочек описаны в ряде работ. Аналитическими методами произведены оценки напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек, ослабленных одним или небольшим количеством вырезов или отверстий. Большинство авторов сводят исследования к двум основным задачам: определение эффективных упругих параметров сплошной пластины и оценка коэффициента интенсивности напряжений в перемычках между вырезами. Аналитические методы исследования позволяют неплохо оценить величину упругой деформации и соответствующего им напряжения. В случае упругопластического деформирования применение аналитических оценок затруднено, т.к. уже на ранних стадиях деформирования около отверстий формируются области пластических деформаций.

На данный момент для исследования устойчивости перфорированных тонкостенных конструкций наиболее полно разработана теория тонких упругих пластин и оболочек с небольшим количеством малых вырезов. Расчет локальной потери устойчивости в перегородках, которая имеет место при рассмотрении густо перфорированных пластин или оболочек, требует построение численной модели, учитывающей неоднородность напряженно-деформированного состояния в структурном элементе. В литературе проблема устойчивости густо перфорированных тонкостенных конструкции освещена мало, а в имеющихся исследованиях авторы ограничиваются лишь двумя близлежащими вырезами.

Большинство исследований деформирования пористых сред сводятся к эмпирическому определению эквивалентных эффективных механических характеристик сплошного материала, которым заменяют исходную пористую структуру. В этом случае учитывается лишь коэффициент пористости, и расчеты осуществляются без учета неоднородностей напряженно-деформированного состояния около полостей. Рядом исследователей отмечается зависимость механических свойств от формы и расположения пор относительно направления нагружения. Таким образом, при расчетах деформирования пористого материала желательно учитывать геометрические особенности материала и возникающую вследствие этого неоднородность напряженно-деформированного состояния. Этот вопрос в литературе мало изучен и требует более детального исследования.

Моделирование деформирования пористых сред с учетом геометрической неоднородности требует знания истинных диаграмм деформирования материала основы. В расчетах используют механические свойства, полученные при испытании материала до формирования пористой структуры. В процессе формирования пористой среды материал основы подвергается различным химическим и тепловым воздействиям (отжиг, спекание), что может привести к изменению его истинной диаграммы деформирования. Получение механических свойств материалы основы из экспериментальных исследований на растяжение и ударное нагружение сопряжено с проблемами, вызванными в основном существенной неоднородностью и неодоосностью напряженно-деформированного состояния, вызванных наличием большого количества полостей и пор. В связи с этим целесообразно развивать экспериментально-расчетный подход, который позволяет в полной мере учитывать указанные факторы.

<u>Цели и задачи диссертационной работы</u>

Задачами диссертационной работы являются исследования упругопластических густо перфорированных пластин, оболочек и пористых металлов под действием различных видов нагружения.

Для достижения поставленных целей были решены следующие основные задачи:

1. Определение упругих свойств ортотропии и коэффициентов концентрации напряжений для густо перфорированных пластин и оболочек.
2. Верификация параметров ортотропии на примере численного исследования изгиба цилиндрической полосы и пластины, перфорированных одним рядом отверстий.
3. Исследование при помощи теории оболочек типа Тимошенко в совокупности с ортотропной моделью материала устойчивости упругих цилиндрических густо перфорированных оболочек различной пористости и длины под действием внешнего давления.
4. Исследование области применимости теории пластин и оболочек, основанной на соотношениях Тимошенко, для моделирования изгиба упругопластических перфорированных тонкостенных конструкций.

5. Исследование применимости принципа двумерного подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе при изгибе и устойчивости упругопластических густо перфорированных пластин и оболочек.
6. Построение при помощи экспериментально-расчетного метода истинных диаграмм деформирования материала основы в экспериментах на статическое сжатие пористых образцов в жесткой обойме.
7. Построение численной модели пористого материала на основе принципа трехмерного подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе для расчета статического сжатия образца со свободными боковыми поверхностями.

Научная новизна

В зависимости от степени пористости определены параметры ортотропии при деформировании густо перфорированных пластин и оболочек. Рассмотрены пластины и оболочки с коэффициентами пористости в диапазоне от 0 до 0,71. Верификация полученных параметров ортотропии проведена на примере задачи упругого изгиба пластины и цилиндрической оболочки, перфорированных одним рядом отверстий. С использованием ортотропной модели материала и теории оболочек, основанной на соотношениях Тимошенко, проведено исследование устойчивости упругой густо перфорированной цилиндрической оболочки под действием внешнего давления. По результатам моделирования определена зависимость критической нагрузки и формы потери устойчивости от пористости конструкции и длины упругой цилиндрической оболочки, находящейся под действием внешнего давления.

Численно исследована область применимости теории Тимошенко для изгиба густо перфорированных пластин и оболочек отдельно для упругой и упругопластической деформаций.

На основе двумерного принципа подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе проведены исследования изгиба и устойчивости густо перфорированных упругопластических пластин и цилиндрических оболочек. Оценена эффективность принципа для этого класса задач.

Разработан экспериментально-расчетный метод определения истинной диаграммы деформирования материала основы на базе данных об испытаниях на сжатие пористых образцов в жесткой обойме.

На основе принципа трехмерного подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе построена компьютерная модель деформирования пористого материала. Эффективность предложенной модели показана на примере сжатия пористых образцов в жесткой обойме и со свободными боковыми поверхностями.

Теоретическая значимость

Численное моделирование методом конечных элементов позволяет уточнить результаты аналитических оценок эффективных упругих свойств сплошной пластины и определить область применимости теории пластин и оболочек типа Тимошенко в зависимости от толщины и пористости конструкции.

Принцип подобия позволяет осуществить расчет деформирования густо перфорированных пластин, оболочек и пористых тел с учетом неоднородности напряженно-деформированного состояния в структурном элементе.

Развитие экспериментально-расчетного подхода для определения истинной диаграммы деформирования материала основы позволяет существенно расширить возможности экспериментальных методик. Описанный способ позволяет осуществлять идентификацию механических свойств материала основы для испытывающих большие деформации изначально структурированных пористых образцов, в которых реализуется неоднородное напряженно-деформированное состояние (сдвиг, растяжение, сжатие).

Практическая значимость

Применение численного моделирования и итерационного метода идентификации диаграмм деформирования позволяют изучать свойства материалов основы на базе экспериментальных данных, полученных на пористых образцах. Применение принципа подобия позволяет оценить неоднородность напряженно-деформированного состояния в структурных элементах, вызванных наличием вырезов и полостей, и существенно сократить количество требуемых вычислительных ресурсов и позволит осуществлять исследования густо перфорированных пластин, оболочек и пористых тел на персональном компьютере.

Методология и методы диссертационного исследования

Численное моделирование упругопластического деформирования сплошной среды выполнено с применением метода конечных элементов. При проведении исследования густо перфорированных пластин, оболочек и пористых тел применен принцип подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе. В работе использован экспериментально-расчетный метод идентификации истинной диаграммы деформирования упругопластических материалов при неоднородном напряженно-деформированном состоянии, разработанным в НИИМ ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. результаты исследования параметров ортотропии и коэффициентов концентрации напряжения для упругих густо перфорированных пластин и оболочек с коэффициентом пористости от 0 до 0,71;
2. результаты исследования устойчивости упругих цилиндрических густо перфорированных оболочек под действием внешнего давления в зависимости от длины и пористости;
3. оценка области применимости модели Тимошенко для задач упругого и упругопластического изгиба густо перфорированных пластин и оболочек;
4. исследование эффективности применения принципа двумерного подобия при численном моделировании изгиба и устойчивости упругопластических густо перфорированных пластин и оболочек с учетом неоднородности напряженно-деформированного состояния в структурных элементах;
5. расчетно-экспериментальный метод идентификации механических свойств материала основы на базе экспериментальных данных об испытаниях на сжатие пористых образцов в жесткой обойме;
6. компьютерная модель деформирования пористых образцов, построенная на основе принципа трехмерного подобия напряженно-деформированного состояния в структурных элементах.

Степень достоверности результатов

Достоверность результатов, вынесенных на защиту, подтверждается исследованиями сходимости метода конечных элементов и сравнением экспериментальных данных с результатами, полученными при численном моделировании.

Апробация результатов

Основные результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях:

- 5-ая и 8-ая конференция «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (МКМК – 2015, МКМК – 2018) (Москва, 2015, 2017, 2018);
- XI, XII международная конференция по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016, NPNJ'2018) (Алушта, 2016, 2018);

- XX, XXIII, XXVII международный симпозиум “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” (Москва, 2014,2017, 2021);
- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019);

Публикации

Основные выводы и положения диссертации, выносимые на защиту, представлены в 14 публикациях [161, 162, 168-177, 183-184] из них 3 [167, 168, 177] опубликованы в ведущих научных журналах (ВАК) и 4 статьи [162, 168, 174, 176] – в журналах, индексируемых в международных базах цитирования Scopus и/или Web of Science.

Личный вклад

- проведение расчетов с помощью вычислительного программного комплекса Abaqus (лицензия № 200000000050225) [161, 162, 168-177, 183-184];
- анализ результатов моделирования деформирования густо перфорированных пластин или оболочек и пористых материалов [161, 162, 168-177, 183-184];
- определение и верификация параметров ортотропии густо перфорированных упругих пластин и оболочек [161, 162, 168-170, 183];
- исследование при помощи теории оболочек типа Тимошенко в совокупности с ортотропной моделью материала устойчивости цилиндрической густо перфорированной оболочки под действием внешнего давления [162, 168-170, 183];
- оценка области применимости модели Тимошенко для изгиба упругопластических густо перфорированных пластин и оболочек [171, 174];
- исследование применимости принципа двумерного подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе в задачах изгиба и устойчивости упругопластических густо перфорированных пластин и оболочек [172-175, 183];
- разработка и реализация экспериментально-расчетного метода идентификации свойств материала основы пористых образцов [176-177, 184];
- построение численной модели пористого материала на основе принципа подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе [176-177, 184].

В работах В.Г. Баженову принадлежит постановка задачи, общее руководство численными исследованиями и анализ результатов; А.И. Кибцу принадлежит анализ результатов; А.А. Артемьевой, М.С. Барановой и Е.В. Нагорных, А.А. Антипову, В.А.

Иванову, И.А. Фроловой и Т.В. Кузьмичевой помощь в подготовке экспериментальных данных и итоговых расчетных результатов.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. Работа содержит 117 листов машинописного текста, 66 рисунков, 184 наименований библиографического списка литературы.

Диссертационная работа выполнена при поддержке

Работа выполнена при поддержке Государственного задания Минобрнауки России (№ 0729 – 2020 – 0054)

Благодарности

Автор выражает благодарность А.А. Артемьевой, М.С. Барановой и сотрудникам НИИМ ННГУ им. Н. И. Лобачевского В.Г. Баженову, А.И. Кибцу, Е.В. Нагорных за консультации при проведении численных расчетов и подготовке экспериментальных данных, Д.А.Казакову за помощь в проведении эксперимента по сжатию образцов из пористого алюминия. Автор выражает благодарность родным и близким за всестороннюю поддержку.

1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА

1.1. Исследования деформирования оболочек и пластин, ослабленных вырезами

При проектировании летательных аппаратов, различных инженерных конструкций и деталей машин возникает задача обеспечения прочности тонкостенных деформируемых конструкций. Бурное развитие методов обработки и технологий изготовления разнообразных материалов породило множество новых интересных задач, целью которых является оценка поведения конструкций под воздействием различных видов нагружения. Внимание исследователей направлено на оценку прочности изделия в зависимости от конструкционных особенностей, примером которых являются различные отверстия и вырезы. Особый интерес вызывают густо перфорированные пластины и оболочки, т.к. в этом случае наблюдается концентрация напряжений и деформаций вблизи отверстия оказывает существенное влияния на поведение материала. Современные методы численного моделирования деформированных систем, ослабленных отверстиями, позволяют подходить к вопросу проведения экспериментальных работ более основательно. Изучение поведения перфорированных пластин и оболочек важно для понимания прочностных характеристик изделия и возможности использования их в различных газораспределительных и шумопоглощающих системах.

В связи с актуальностью проблемы прочности густо перфорированных платин и оболочек имеется множество работ посвященных экспериментальным и аналитическим исследованиям тонкостенных конструкций, ослабленных отверстиями. Н. Н. Лебедев [1] и Савин Г.Н.[2] одними из первых, кто провел экспериментальные исследования неоднородного распределения напряжений в пластине с двумя и четырьмя одинаковыми круглыми отверстиями. В своей работе [3] Л. Г. Афендик оптическим методом исследовал напряжения в пластине с двумя одинаковыми квадратными вырезами. В.Е. Жуков [4] тем же экспериментальным методом исследует распределение напряжений в диске, ослабленном отверстиями, располагающимися по окружности. Д. Манцелла [5] определяет величину напряжения в полосе с одним, двумя и тремя отверстиями. В работе приведены графики распределения напряжений вдоль контура отверстий в зависимости от геометрических параметров конструкции.

В работе Ю. А. Смоленцева [6] приведены результаты экспериментального исследования параметров жесткости различных решёток. Рассмотрены равномерно перфорированные образцы с шахматной, квадратной и правильной треугольной сетками. По результатам исследования сделан вывод о слабой зависимости вида перфорации на жесткость конструкции. Наиболее сильное влияние на жесткость решёток оказывает отношение диаметра отверстия к шагу перфорации.

Исследование упругих перфорированных пластин и оболочек в различной литературе часто сводится к задаче определения приведенных характеристик жесткости сплошной конструкции. И. Малкин [7] один из первых исследователей, который сводит сложную треугольную решётку к эквивалентной раме, состоящей из балок, сходящихся в одной точке под углом 120^0. Аналогичные конструкции изучает Н.П. Мельников [8] с учётом более тонких эффектов, влияющих на жесткость конструкций.

В работе А. И. Лурье [9] приведено обобщение решения задачи Кирша на упругие цилиндрические оболочки с малым круговым отверстием. В работах Г.Н. Савина [10-13], Д. В. Вайнберга и А. А. Сииявского [14], Ю. Леккеркеркера [15] приведены результаты исследования распределения напряжений в цилиндрической оболочке, ослабленной большим отверстием. В докладе А. Л. Гольденвейзера [16] приведена классификация отверстий и указаны упрощения уравнений, определяющих неоднородное напряженное состояние, вызванное наличием выреза.

В работе Э.И. Григолюка и Л.А. Фильштинского [17] изложены основные подходы к анализу прочности густо перфорированных упругих пластин и оболочек. Этой работой осуществлено обобщение накопленного на тот момент опыта аналитических расчётов тонкостенных конструкций, ослабленных вырезами и отверстиями. В работе под густо перфорированными пластинами и оболочками понимаются пластины и оболочки, ослабленные двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий. В работе расчёт на прочность густо перфорированных тонкостенных конструкций сводится к решению двух проблем. Первая задача состоит в определении эффективных упругих параметров сплошной пластины, обладающей той же жесткостью, что и решетка. Вторая представляет собой определение оценки локального распределения напряжений в опасных зонах (перемычках). В работе представлены исследования пластин и оболочек для различных конструктивно возможных показателей пористости. Полученные авторами результаты можно применять для подтверждения корректности численных методов расчёта, которые в последнее время приобретают всё большую популярность по сравнению с аналитическими исследованиями.

Сведение расчёта на прочность густо перфорированных пластин и оболочек к сплошной среде с эффективными свойствами с указанием коэффициентов концентрации напряжений возможно для упругой постановки. В случае упругопластического деформирования уже на ранних этапах нагружения вблизи отверстий напряжения значительно превышают предел текучести. В этом случае при построении численной модели необходимо учитывать возникновение локальных пластических деформаций.

1.2.Исследования устойчивости пластин и оболочек, ослабленных отверстиями

Практическое использование густо перфорированных тонкостенных конструкций в составе газораспределительных и шумопоглощающих механизмов привело к появлению большому направлению исследований, связанных с устойчивостью пластин и оболочек, ослабленных отверстиями.

Одной из основных работ, посвященных устойчивости сплошных пластин, можно назвать исследование, которое осуществлено С. П. Тимошенко и К. Маргером [18]. В книге описаны результаты исследования потери устойчивости квадратной пластины, для которой заданы равномерные краевые перемещения. В работе приведены аналитические выражения для определения критического перемещения края пластины.

В литературе в основном рассмотрены прямоугольные и круглые пластины с отверстиями такой же формы. Н.Л. Воробкова в своей работе [19] одной из первых использовала численные методы для исследования устойчивости прямоугольной пластины с отверстиями. Автор приводит результаты расчета прямоугольной пластины с центральным квадратным вырезом с различными граничными условиями.

В монографии [20], используя энергетический метод, исследователи представили аналитическое решение устойчивости прямоугольной, шарнирно опертой по наружному контуру пластины с неподкрепленным центральным прямоугольным вырезом, стороны которого параллельны граням пластины. Упругая тонкостенная конструкция подвергалась сжатию с четырех сторон. В исследовании принято допущение, что до потери устойчивости возмущение напряженно-деформированного состояния, вызванное вырезом, можно не учитывать. Потеря устойчивости носит общий, а не локальный характер. В работе приведено сравнение коэффициента снижения жесткости с трудами Г.П. Зиненко [21]. Различие результатов составило 15%.

В работе [22] методом конечных элементов осуществлено исследование механической и температурной устойчивости прямоугольных пластин с квадратным или круглым центральным отверстием. Расчёты проведены в рамках исследования применимости пластин с отверстиями для аэрокосмической отрасли. В работе приведена оценка влияния граничных условий, размеров конструкции на устойчивость пластины, находящейся под действием сжимающих осевых нагрузок или при нагреве. Отмечено, что термоустойчивость пластины можно повысить, увеличив размер отверстия. При определённых условиях закрепления и соотношениях сторон пластины устойчивость к нагрузкам может возрасти при увеличении размера отверстия. Проведена оценка влияния формы одинаковых по площади отверстий на значение критической нагрузки. Отмечено, что пластина с вырезом квадратного сечения по устойчивости незначительно превосходит тонкостенную конструкцию с круглым отверстием.

В статье [23] продемонстрированы результаты численного исследования устойчивости пластины с квадратными вырезами, находящейся под действием сжимающих сил. В работе рассмотрены различные типы граничных условий, заданных на краях тонкостенной конструкции. Рассмотрены конструкции с вырезами, размеры которых варьируются в диапазоне от 0 до 0,8 стороны пластины. Результаты показывают, что отверстия оказывают значительное влияние на критическую нагрузку, собственные частоты и формы потери устойчивости. Показано, что влияние выреза возрастает при высоких модах, т.к. усложняются формы потери устойчивости. Отмечено, что при жесткой заделке всех краёв критическая нагрузка возрастает при размере выреза более 0,4 стороны пластины.

Первыми исследователями устойчивости прямоугольной пластины с центральным круглым отверстием являются С. Леви, Р.М. Воллей, В.Д. Кроль [24] и Т. Кумай [25]. В работе [26] приведены экспериментальные данные в сравнении с теоретическими результатами. Во всех работах рассматривались прямоугольные пластины, ослабленные одним круговым центральным отверстием. К пластинам вдоль двух параллельных противоположных краёв прикладывалась равномерная нагрузка. А.Л. Шлэк [27] вывел выражения для вычисления критических величин свободно опертой пластинки с круговым отверстием. В работе рассмотрено одноосное перемещение края пластины. В учебнике И. Н. Преображенского [20] рассмотрена похожая задача и описаны аналитические, численные и экспериментальные методы определения критических нагрузок пластин и оболочек с отверстиями, выведены окончательные соотношения для отдельных случаев.

И.А. Биргер [28] в своей работе приводит аналитические выражения для критической нагрузки и формы потери устойчивости кольцевой пластины, которая находится под действием равномерной нагрузки, приложенной к внутреннему и наружному контурам. В статье представлены формулы для различных конфигураций граничных условий. Исследовано влияние геометрических характеристик пластины на значение критической нагрузки.

Кольцевые пластины и их несущая способность исследованы в книге К. Г. Чижевского [29]. Автором приведены выражения для определения критических параметров кольцевых пластин с постоянной толщиной. Рассмотрены осесимметрично нагруженные пластины с различными граничными условиями. Предложенные формулы позволяют получить результаты с точностью, достаточной для проведения инженерных расчётов.

В представленных работах исследовано влияние единичного отверстия или выреза различной формы и размеров на критическую нагрузку пластины при разнообразных граничных условиях. В такой постановке не учитываются влияния соседних отверстий на несущую способность тонкостенной конструкции. Для учёта взаимодействия вырезов различными исследователями были рассмотрены перфорированные пластины и оболочки.

В работе [20] оценена устойчивость упругой перфорированной прямоугольной пластины, шарнирно опертой по наружному контуру и находящейся под воздействием сжимающих или растягивающих усилий вдоль двух направлений. В пластине имелось несколько неподкрепленных прямоугольных вырезов, стороны которых располагались параллельно сторонам пластины. В данной работе перфорированная пластина заменялась на сплошную с эффективными свойствами жесткости, которые определялись с учётом размеров вырезов. Для исследования перфорированной пластины использовался метод Бубнова-Галёркина. Полученные данные сравнивались с решением аналогичной задачи методом конечных разностей [21]. По результатам анализа предложено использовать полученные данные для практических расчётов. Дополнительно отмечено, что увеличение количества степеней свободы пластины не приводит к повышению точности расчёта.

Результаты экспериментального исследования устойчивости конических и цилиндрических оболочек с вырезами круглой и квадратной формы при осевом сжатии посвящена работа Ю. Л. Голда, И. Н. Преображенского и В. С. Штукарева [30]. Проведена оценка влияния формы и величины выреза, длины оболочки на значение критической нагрузки. Для удобства сравнения одинаковых оболочек с квадратными и круглыми вырезами, диаметр отверстия был равен стороне квадратного выреза. Рассмотрены оболочки с расположенными в её центральной части одним и двумя отверстиями. В работе отмечается, что потеря устойчивости рассмотренных оболочек происходила в области упругих деформаций. При проведении эксперимента нагружение осуществлялось непрерывно. Резкое падение величины осевой нагрузки определяло момент потери устойчивости. Отмечено, что потеря устойчивости для большинства испытаний сопровождалась хлопком и образованием вмятин.

В результате проведённых опытов установлено, что по мере уменьшения размеров отверстий форма потери устойчивости и критическая нагрузка стремятся к аналогичным значениям для оболочки без вырезов. Характер потери устойчивости носил общий характер. По мере увеличения вырезов наблюдается переход к локальной потере устойчивости. При этом появляются вмятины, наибольший прогиб которых располагается на границе выреза. Вмятина распространяются от отверстия в окружном направлении на расстояние не более двух размеров выреза. Качественные картины потери устойчивости совпадали для образцов с одним и двумя одинаковыми вырезами. Во всех экспериментах область вмятин не достигала торцов оболочки. Из чего авторы делают вывод, что влиянием длины оболочки на критическую нагрузку можно пренебречь.

В работе [31] исследована устойчивость оболочки при внешнем гидростатическом давлении в зависимости от геометрических параметров и размеров прямоугольных вырезов. Показана область применимости теории оболочек, основанной на предположении о преимущественном изгибе в окружном направлении для тонкостенных конструкций с прямоугольными вырезами.

Испытаниям подвергались оболочки с двумя диаметрально расположенными симметричными прямоугольными вырезами, вытянутыми вдоль оси оболочки. Рассмотренные оболочки имели одинаковые толщину и радиус, и различные размеры вырезов. Торцы цилиндрической оболочки были закреплены таким образом, чтобы обеспечивать их круговую форму. Испытания конструкции осуществлялось путём откачки воздуха из внутреннего пространства оболочки. При проведении эксперимента отверстия герметизировались тонкой резиновой пленкой. В процессе проведения испытаний производилось измерение радиальных перемещений в отдельных точках оболочки.

Данные эксперимента показали, что на характер деформирования влияет краевой эффект, возникающий у границ, расположенных вдоль оси оболочки. Авторами делается вывод, что наличие неподкрепленного выреза значительно влияет на несущую способность конструкции, при этом определяющим параметром в данном случае является относительные размеры выреза. Для более длинных оболочек одинаковые вырезы в большей степени снижают критическую нагрузку.

Результаты исследования влияния отверстий круглой формы на устойчивость цилиндрической оболочек при воздействии внешнего давления и кручения приведены в статье Ю. Г. Коноплёва и А. Л. Тильша [32]. Эксперименты показали, что под действием внешнего давления сплошная оболочка теряет устойчивость хлопком. При этом реализуется 3 форма потери устойчивости в окружном направлении. Оболочка, ослабленная небольшим круговым отверстием, ведёт себя аналогичным образом. Снижения значения критической нагрузки не наблюдается. Процесс формирования полуволн безразличен к наличию отверстия. С увеличением размеров выреза при потере устойчивости отверстие располагается на гребне полуволны. Сравнение результатов исследования несущей способности оболочки с вырезом [33] показало, что влияние отверстий в значительной степени сказывается при потере устойчивости при внешнем давлении, чем при осевом сжатии. В случае внешнего давления для увеличения прогибов необходимо повышать нагрузку, в случае осевого сжатия деформирование в закритичном состоянии происходит при падении внешней нагрузки. Экспериментальные данные по нагружению цилиндрических оболочек осевой силой опубликованы в работе [33]. При таком воздействии вдоль образующей оболочки наблюдается появление большого числа полуволн. В работе отмечается независимость значения критической нагрузки от вида граничных условий. Сплошная оболочка теряет устойчивость хлопком, что сопровождается резким снижением осевой нагрузки. В работе отмечается, что наличие небольших отверстий приводит к значительному падению величины критической нагрузки. Вне зависимости от размера отверстия наблюдается локальная потеря устойчивости в виде образования ромбовидных вмятин по обеим сторонам отверстия вдоль образующей оболочки. Перед значительным падением нагрузки наблюдается значительной изменение формы оболочки около отверстия, что вызвано наличием концентрации напряжения.

Анализируя рассмотренные в литературе материалы, стоит отметить, что в настоящее время для расчёта перфорированных тонкостенных конструкций наиболее полно разработана теория тонких упругих пластин и оболочек с малыми вырезами. Наиболее хорошо изучены вопросы деформирования пластин и оболочек с одним или малым количеством вырезов. Вопросы распределения напряжений и деформация при наличии множества близлежащих отверстий в литературе рассмотрены мало. Расчёты подобных конструкций в большинстве случаев сводиться к рассмотрению сплошных пластин и оболочек с эффективными параметрами материала. Локальное повышение напряжений вблизи отверстий оценивается коэффициентом концентрации напряжений. Такая методика расчёта применима в случае упругого деформирования. В случае упругопластической постановки задачи необходимо учитывать геометрию густо перфорированной пластины явным образом, что приводит к необходимости использовать численные методы с привлечением больших вычислительных ресурсов. Таким образом, актуальной задачей является разработка нового подхода к моделированию процессов деформирования густо перфорированных пластин и оболочек, который позволит определять упругопластические деформации и учитывать существенную неоднородность распределения напряжений в конструкции.

1.3.Технологии формирования пористых металлов

В последние годы появляется повышенный интерес к пористым металлам, которые, сохраняя достоинства исходного материала, обладают малым весом, низкой тепло- и электропроводностью и имеют отличные демпфирующие свойства. Существует несколько групп пористых металлов: собственно пористые (коэффициент пористости от 0,3 до 0,98) металлы, основа которого представляет собой сплошной массив сложной конструкции, волокнистые и сетчатые материалы.

Пористые сетчатые материалы получают при помощи вязания из проволоки диаметром 0,03-20 мм плоских или круговых сеток. Способ получения пористых волокнистых материалов напоминает формирование войлока, основой которого является мелкая проволока, которую получают двумя способами. В одном случае режется на куски определенной длины тонкая проволока или стружка. Второй вариант основан на выдавливании расплавов различных металлов через отверстие диаметром 50-90 мкм. Далее полученную массу подвергают валянию, при котором заготовке придают необходимую форму и ориентировку волокон. Полученную массу подвергают прессованию, прокатке или спеканию [34, 35].

Производство пористых порошковых металлов в основном состоит из трех стадий: приготовление зерен, формирование и спекание. Формирование порошка осуществляется при помощи физического измельчения стружки, губки, гранул металла или посредством химико-физических методов. Первый метод является менее энергозатратный и формирует порошок с довольно большим диапазоном размеров гранул от 0,1 мкм до 2,5 мм. Химико-физические методы более дорогие, но позволяют формировать мелкие, однородные частицы (от 0,1мкм до 10 мкм) с развитой поверхностью и в некоторых случаях позволяют управлять размером зерен.

После рассева с целью стабилизации, восстановления оксидов и снятия наклёпа частицы подвергают отжигу при температуре $0{,}4 - 0{,}6T_{плавления}$[36]. Для повышения степени прессуемости частицы покрывают различными пластификаторами (парафин, воск, смесь каучука и бензина). Частицы менее 40 мкм подвергаются процессу гранулирования для получения зерен размером порядка 1 мм, что позволяет предотвратить расслоение смеси [37].

Следующим этапом является процесс формирования, который осуществляется обычной засыпкой или с приложением статического или высокоскоростного давления. Затем происходит спекание массы либо с образованием жидкой фазы, либо без неё в случае применения защитных сред [38-41].

Одним из достоинств пористых материалов является малый удельный вес, который достигается при формировании высокопористых ячеистых материалов со значениями коэффициента пористости 0,8-0,98. Одним из способов формирования в этом случае является дублирование ячеистой структуры из полимера, в частности пенополиуретана [42]. Ячеистую структуру пропитывают суспензией металлического порошка, при помощи отжатия добиваются необходимой плотности. Затем полученную заготовку сушат путём продувания воздуха температурой 25 - 40^{0}С со скоростью 0,5 - 2 м/с [36]. Удаление полимера осуществляется поднятием температуры с 200 до 600 ^{0}С в течение 4 часов. При достижении температуры 550 ^{0}С в заготовке остаётся порядка 1-1,5% исходной массы пенополиуретана. При такой температуре металлическая основа не теряет своей формы. После удаления пенополиуретана и органики происходит процесс спекания.

Формирование пористой среды путем дублирования ячеистой структуры позволяет добиться однородности материала с малым диаметром пор и малой дисперсией [43,44].Расположение ячеек близко к плотной укладке шаров.

Еще одним способом получения пористых металлов является порошковая технология, при использовании которой в массе порошка обеспечивается более равномерное распределение пенообразователя, что приводит к получению материала с высокой степенью изотропности. Главным преимуществом этой технологии является возможность получения образцов любой формы. Исходный состав закладывают в литейную форму и нагревают. В результате чего материал расширяется и принимает необходимую геометрию. При этой технологии в состав исходной смеси входит подготовленный металлический порошок и небольшое количество (менее 1%) пенообразователя (пороформа). Смесь уплотняют в матрице для устранения остаточной пористости. Далее полученную заготовку нагревают до температуры близкой к температуре плавления, одновременно подвергая её процессу прокатки. Пороформ под действием нагрева разлагается, в результате чего выделяется газ, который формирует пенную структуру. Процесс нагрева осуществляют до момента достижения необходимого объема. Далее заготовку охлаждают, тем самым фиксируя получившуюся структуру. Управляя типом пенообразователя, его массой, температурой нагрева, можно создавать пористые металлы различной плотности. Описанная технология наиболее подходит для цинка, бронзы, алюминия, олова [45] – материалов с низкой температурой плавления. Для этих материалов гораздо проще подобрать соответствующий пороформ, т.к. температуры разложения большинства пенообразователей близки к 600 ^{0}С. При помощи порошковой технологии изготавливается пенистый алюминий с плотностью в диапазоне 400 – 1000 кг/м^3, при этом разброс диаметра поры составляет 0,9 – 2,7 мкм, а коэффициент пористости варьируется в пределах 0,8 – 0,97 [46,47]. На рисунке 1.3.1. представлена типичная структура вспененного алюминия.

Рисунок 1.3.1 – Вспененный алюминий.

После вспенивания толщина листового алюминиевого профиля увеличивалась в 3-5 раз. При этом увеличивалась только высота заготовок, остальные размеры изменялись в пределах 5% [47]. После вспенивания появлялись поры различной формы с характерными размерами от 0,01 до 3 мм. В ходе исследования [47] параметров получаемого материала было установлена связь между массой образца, приходящегося на единицу площади, коэффициента вспенивания $k = h_{сп}/h_{вс}$ ($h_{сп}$ – толщина сплошного материала, $h_{вс}$ – толщина вспененного алюминия) и плотностью пористого материала.

Для производства вспененных материалов применяют различные технологии смешивания газа (аргон, воздух, кислород, азот) и расплавленного металла. Преждевременное газовыделение предотвращается добавлением в состав расплава компонентов, повышающих вязкость, например Ca [48].

Еще одним способом получения металлической пены является заливка расплава с исчезающей формой. Искусственно созданная пористая структура с открытой системой пор заливается гипсом или другим жаростойким материалом. Каркас из искусственного материала удаляется путём выжигания, гипсовая форма заполняется металлическим расплавом. После удаления гипсовой структуры металлическая пена полностью повторяет каркас из искусственного материала [49]. Коэффициент пористости при таком способе формирования достигает 0,94.

В основном для производства металлических пен используют алюминий. В некоторых областях от пористого материала требуется повышенная прочность и температурная устойчивость. Поэтому существующие технологии вспенивания были доработаны на предмет используемого пороформа, температур спекания и применены к другим металлам и их сплавам. Исследования показывают, что стальные пены характеризуются пределом прочности втрое выше, чем для вспененного алюминия. Достоинством пен из стали является их низкая стоимость [50]. Основное применение стальных пенных сред — фильтры, поглотители энергии и вентиляционные приборы [51].

1.4.Характеристики пространственной структуры пористого металла

В качестве характеристик неоднородных тел применяют понятие о средней плотности: $\rho_{cp} = \sum a_i \rho_i$, где a_i – доля объема i-ого материала с плотностью ρ_i.

Пористые материалы зачастую разделяют на классы по механизму образования (материалы с переменным коэффициентом пористости) и по структурному признаку (упорядоченное или неупорядоченное расположение элементов структуры). Основным геометрическим параметром пористого тела является характеристический размер поры, которая определяется $l_{cp} = \frac{\sum \frac{4S_i}{P_i}}{n}$, где S_i – площадь, а P_i – периметр пересечения плоскости с пустотами в материале, n - количество сечений.

Выделяется следующая классификация пористых материалов в зависимости от размера пор: микропористые (l_{cp}<1нм,), мезопористые (1 <l_{cp}< 50нм) и макропористые (l_{cp} >50нм) [52,53]. Изучение микро и мезопор затруднено из-за очень маленьких размеров исследуемых объектов. Макропористые материалы исследуются различными способами, основанными на оптических, транспирационных, акустических и электрографических эффектах [54]. Многие исследователи разделяют пористости на три вида: сквозная, тупиковая и закрытая. В работе [55] отмечается, что с увеличением пористости более, чем на 0,2объем сквозных пор значительно увеличивается [55]. Значение пористости определяется следующим образом: $\gamma = V_n/V$ (где V_n - объем пор, V– объем образца).

При описании пористого материала исследователи сталкиваются с проблемой существенного различия радиуса пор. Для описания структуры вводят функцию распределения, в качестве которой используют функцию плотности вероятности Ф (r, r_{cp}, D), где r – радиус поры, r_{cp} – средний радиус поры, D – дисперсия. Ф (r, r_{cp}, D) можно определить при помощи металлографических методов исследования. В работах [70, 71] при помощи эксперимента показано, что, начиная с пористости 0,07, происходит образование кластеров, а с повышением пористости растет доля открытых пор.

Характеристику пространственной структуры пористого материала можно восстановить с помощью анализа последовательных плоских сечений образца или на основе других статистических методов. Полученные данные помогут определить геометрию представительного объёма, которая будет характеризовать осредненные данные о геометрической структуре материала [56, 57]. Форма структурного элемента может быть применена для определения напряженно-деформированного состояния пористого образца при расчёте на прочность. Для вспененного алюминия [58] отмечается отсутствие статистических данных о структуре, т.к. исследователям приходится сталкиваться с массой трудностей при воспроизведении и анализе внутренней геометрии образцов.

1.5.Исследования деформирования пористых металлов

Описание механических свойств пористых материалов во многих работах производится по аналогии со сплошными материалами. Из полученной в ходе испытаний на растяжение истинной диаграммы деформирования выделяют модуль упругости Юнга, пределы текучести и прочности, относительное удлинение образца при разрыве и сужение поперечного сечения. Как показывают экспериментальные исследования, на прочность пористых материалов в основном влияют механические свойства материала основы, размер и форма частиц, пористость и технология формирования.

В работе [55] указано, что при увеличении пористости отношение предела текучести к пределу прочности возрастает и стремится к 1 при коэффициенте Пуассона равном 0,3. Отмечается, что при коэффициенте пористости менее 0,3 разрушающими напряжениями являются касательные, а при коэффициенте пористости более 0,3 – растягивающие. Снижение температуры испытаний ведёт к повышению прочности, при этом, чем меньше начальная пористость, тем интенсивнее возрастает прочность. При уменьшении вдвое размеров спекаемых частиц наблюдается повышение прочности материала на 40-50%.

На процесс деформирования пористого материала влияет множество характеристик, касающихся пространственной структуры пор. В работе [59] отмечается, что деформацию пористого материала значительно отличает от сплошного материала несохранение объема. Сжатие материала приводит к схлопыванию пор, а растяжении сопровождается удлинением отдельно стоящих пор. При деформировании пористого материала наблюдается изменение объема и последующая локальная потеря устойчивости в перемычках между полостями.

В литературе представлен ряд эмпирических зависимостей, при помощи которых можно оценить изменение предела прочности пористого материала при известных параметрах сплошного материала [55,53]:

$$\sigma_{пм} = \sigma_{см}(100-\varphi)^{\gamma}, \gamma = 3 \div 6$$

$$\sigma_{пм} = \sigma_{см}e^{(-B\cdot\varphi)}, B = 4 \div 7$$

$$\sigma_{пм} = \sigma_{см}\frac{(1-1{,}5\cdot\varphi)}{(1-1{,}5\cdot\beta\rho)},$$

где β – коэффициент, учитывающий неоднородность распределения напряжений по сечению;

γ, B – эмпирические коэффициенты;

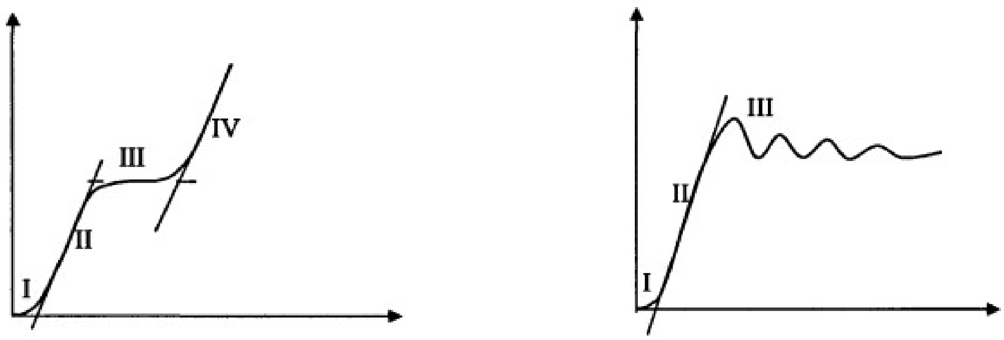
φ - коэффициент пористости;

$\sigma_{пм}, \sigma_{см}$- пределы прочности пористого и сплошного материалов. Указанные зависимости имеют ограниченные области применимости при коэффициенте пористости в диапазоне от 0,2 до 0,4, а при $\varphi \geq 0{,}66$ они не применимы. В работах [54, 53, 60-67] предложены различные зависимости предела прочности, коэффициента Пуассона, модуля упругости *E*, модуля сдвига *G* и модуля всестороннего сжатия *K* в зависимости от различных геометрических характеристик пор, коэффициента пористости, усреднённого коэффициента концентрации напряжений.

Интересным является анализ диаграмм деформирования высокопористых материалов при сжатии, который представлен в работе [36]. На графике, представленном на рисунке1.5.1 а) можно выделить 4 стадии деформирования пористой структуры:

1. деформирование слабых элементов пористого материала;
2. упругое деформирование при сжатии и изгибе перемычек пор;
3. потеря устойчивости перемычек между порами;
4. уплотнение пористого материала.

Для образцов с коэффициентом пористости более 0,95 и для материалов, созданных на базе частиц из хрупких материалов, наблюдается отсутствие четвертой стадии (рисунок 1.5.1 б).



а. пластичные материалы с $\varphi < 0{,}95$ б. хрупкие материалы

Рисунок 1.5.1 – Диаграммы деформирования высокопористых материалов

При помощи этих диаграмм определяют эффективные значения предела прочности$\sigma_{Tпм}$, предела пропорциональности $\sigma_{0,2пм}$, и модуля упругости $E_{пм}$. В работах [52, 68] указано, что для жесткопластических пористых материалов (без учета упрочнения основы) характерна поверхность текучести в виде эллипса.

В работе [68] представлены результаты исследования влияния скорости деформации при сжатии пористого сплава 6061-А1 с закрытыми порами. При деформации менее 0,05 и значении плотности 520 кг/м^3 максимальная прочность наблюдается при скоростях порядка 1000 с$^{-1}$. Этот показатель втрое выше предела прочности при квазистатическом процессе нагружения$\sigma_{пмКС}$. Повышение скорости деформации до 2000 с$^{-1}$ приводит к снижению предела прочности и равен $0{,}5\sigma_{пмКС}$.

Очевидно, что механические свойства среды зависят от пористости материала, который можно представить в виде двухфазной структуры, в которой одна из составляющей является пустота. Моделирование деформирования материала можно осуществлять методами, разработанными для композитных сред. В этом случае поры в материале рассматривают в виде регулярных вкраплений, которые геометрически представляют собой кубы, шестигранники, шары и т.д. Авторы [69] критикуют подобный подход, т.к. в реальности во вспененном материале поры образуют сложную сеть полостей, которые объединяются в кластеры. Отсутствие указанных структур приводит к отсутствию эффективных свойств. Эти зависимости хорошо описываются математической теорией перколяции, в которой эффективные свойства структуры сводятся к нулю при пороговом значении P_c. Зависимость свойства описывается законом:

$$K \sim (P-P_c)^{\alpha},$$

где K – это эффективное свойство;

P – объёмная доля пор;

α – постоянный показатель экспоненты.

Установлено, что пористая среда может быть представлена в виде сети пор, построение которой осуществляется на основании законов теории перколяции. Увеличение пористости приводит к снижению модуля упругости по экспоненциальному закону, что подтверждается экспериментальными данными [69].

Плотность пористого металла оказывает значительное влияние на прочностных характеристики. В работе [67] Гибсон и Эшби вывели для пенного металла с закрытыми порами зависимость между напряжением, пределом текучести сплошного материала и относительной плотности. Согласно исследованиями при увеличении плотности прочность при сжатии также возрастает. Аналогичные по характеру зависимости получены в работе [72] на образцах, изготовленных порошковым способом.

При построении кинематической модели релаксации напряжений в твердых пористых средах авторы работы [73] использовали статические соотношения между предельным давлением и коэффициентом пористости материала, который представлял собой совокупность вещества и полостей. Наиболее важной характеристикой, определяющей сопротивление при сжатии, является сдвиговая прочность каркаса. В [74] отмечено, что касательные напряжения релаксируют на микроструктурном уровне. Поэтому, определение необходимых данных для математического моделирования можно осуществить на основе результатов эксперимента по ударному и статическому сжатию пористых образцов. В работе [73] авторы указывают, что при динамическом сжатии результаты сильно зависят от начальной пористости образцов. Динамические кривые для материалов с различными показателями пористости пересекаются с увеличением давления, что подтверждается с данными исследования, представленными в [75].

Разрушение пен интегральным методом акустической эмиссии исследовано в работе [76]. Авторы выделяют три последовательные стадии разрушения пен из алюминия:

- выгибание перемычек между полостями;
- пластическая деформация стенок между порами;
- разрушение стенок полостей

Помимо плотности на механические свойства значительно влияет микроструктура и ориентация пор относительно направления нагрузки. В действительности поры не являются идеально круглыми. Такая ситуация возникает из-за особенностей процесса формирования, в результате которого поры вытягиваются вдоль направления вспенивания [77]. В работе авторы провели испытания образцов вдоль и поперек направления вытянутости пор. Показано, что при нагружении материала вдоль направления вспенивания прочность более высокая, нежели в перпендикулярном деформировании. Установлено, что более плоская пора чувствительнее реагирует на деформацию [78].

На механические свойства пористого металла влияет также химический состав и способы термообработки в процессе формирования материала (спекание, отжиг). В работах [79, 58, 80 - 87] исследованы механические и теплофизические свойства определённых сплавов. Показана зависимость химического состава материала на трещиностойкость и ползучесть. Отмечается, что наблюдается влияние неидеальности пор на параметры прочности. В работе [79] параметры неидеальности пор, формирующихся в пенном металле, разделены на 4 категории:

1. стенки полостей плавные;
2. на перегородках между порами имеются характерные выступы и изгибы;
3. места соприкосновения нескольких пор имеют высокую плотность;
4. в перегородках между порами имеются дополнительные пустоты.

В зависимости от типа неидеальности определены прочностные характеристики материала.

Различными авторами предпринимались множество попыток построить модель деформирования пористой среды [67,88]. Как отмечалось ранее, математическая модель в основном зависит от химического состава основы и неоднородности структуры. Если химический состав достаточно точно можно определить исходя из технологического процесса формирования металлической пены, то оценка влияния неоднородности структуры затруднена по ряду причин. Во-первых, необходимо определить размеры пор и толщину стенок между ними. Существующие методы формирования пористых металлов не гарантируют заранее определённые геометрические параметры пор. Во-вторых, слабо развиты методы, позволяющие оценить статистические параметры пористого образца. В-третьих, полностью отсутствуют математические модели деформирования сильно неоднородных, высокопористых материалов. В-четвертых, при осуществлении испытании на сжатие пористого образца происходит не разрушения, сплющивание пор с последующим уплотнением материала основы.

В технических расчётах пористый материал часто представляется как сплошная среда с эффективными свойствами. Подобный подход применяется при расчёте композитных материалов, когда вводят усредненные по объему свойства материала[95].

В работе [89] построена двумерная математическая модель пористой среды, которая позволяет описать разрушение. В данной модели среда представляет собой массив материальных точек, связь между которыми осуществляется посредством нелинейных скачкообразных перемещающихся жестких границ. В статье [80] получена трехмерная модель деформирования, основанная на зависимости $\sigma(\varepsilon)$, и определено энергопоглощение рассмотренных структур. Численные результаты, полученные авторами, при качественном совпадении с экспериментальными данными оказались несколько ниже в количественном отношении. Указана четкая зависимость между плотностью материала и локализацией полос разрушения. Математическая модель [80] построена на следующих положениях:

- материал является непрерывным с неоднородным распределением плотности;
- области повышенной плотности имеют изотропно распределённую массу;
- свойства таких областей определяются моделью, предложенной Гибсоном и Эшби;
- материал без областей повышенной плотности деформируется по линейному закону;
- не учитывается упрочнение материала;
- поведение пены описывается законом Гука;
- при малых деформации коэффициент Пуассона равен 0.

В работе [91] построена модель пористого тела, учитывающая геометрию пор. Автор представляет пористый материал в виде набора однородных, плотно упакованных частиц изометрической формы. Частицы укладываются таким образом, что после деформирования они принимают форму многогранника и образуют похожие на кристаллографические регулярные решетчатые структуры. В работе рассмотрены недеформированные поры различных конфигураций: сферические, цилиндрические, эллиптические и кубические. На основе разработанной модели получены изменения коэффициента пористости в зависимости от давления упругопластического сжатия материала в пресс-форме, проведено сравнение с результатами, полученными по формулам из [92]. Автором указывается, что кривые для различных геометрий поры имеют схожий характер, хорошо согласуясь как между собой, так и с решением из [92].

В работе [93] описана математическая модель, которая позволяет смоделировать деформирование сферического тела из пористого материала. Поведение полностью сжатого каркаса описывается диаграммой упрочняющегося упругопластического материала. Сжатие пористой среды при моделировании поделено на два этапа: деформирование пористой структуры, которое считается упругим, и упругопластическое деформирование сжатой основы. Считается, что достижение пористости равной нулю происходит одновременно для всех пор при упругом деформировании. На первом этапе деформирования связь между напряжениями и деформациями соответствует линейному закону без учета поперечного расширения, на втором этапе упругие деформации сжатой основы изменяются по закону Гука для несжимаемого тела. В зоне упругопластического деформирования сжатого скелета используется модель несжимаемого упрочняющегося материала.

В диссертации [94] приведен алгоритм описания статистических характеристик пористых структур, влияющих на диаграмму деформирования. Определено влияние этих параметров на механические свойства материала. Предложена модель высокоэнергетического демпфирования пористых металлов. Разработанная численная модель позволила строить средние зависимости сжатия-растяжения как функцию статистических характеристик: объемной доли и дисперсии неоднородности локальной плотности. Модель позволяет оценить механические характеристики материала в зависимости от заданного распределения локальных неоднородностей. Модельные результаты подтверждены экспериментально.

Рассмотренные в литературе математические модели деформирования пористых материалов в основном сводятся к сплошной среде с эффективными свойствами. Такой подход не отражает сильную неоднородность распределения напряжений и деформаций при высокой пористости материала. Учёт полной геометрической неоднородности возможен, но при существующем развитии вычислительных ресурсов крайне затруднён. Поэтому необходима разработка редуцированного метода расчёта, который позволили бы оценить вызванную наличием пор неоднородность НДС при упругопластическом деформировании.

1.6.Экспериментально-расчетные методы идентификации диаграмм деформирования

В процессе исследования деформирования различных конструкций возникает проблема идентификации упругопластических свойств материала при неоднородном НДС. Илюшиным А. А. впервые был предложен экспериментально-расчетный метод (СН-ЭВМ) [127 - 129], который заключается в сравнении результатов численного моделирования и экспериментальных данных в условиях сложного нагружения. Весь путь нагружения разделялся на заранее определённое количество шагов. Для каждого шага осуществлялся численный расчет на основе определенной математической модели, включающей в себя ряд упрощений. Далее проводилось сравнение численно полученных и экспериментальных данных, и, в случае несоответствия результатов, выполнялась корректировка соотношений, определяющих свойства материала. Затем происходит переход на следующий шаг нагружения и т.д. Для упрощения процедуры идентификации свойств материала был предложен теоретический метод [130, 131] , в котором используются соотношения из частных теорий пластичности, предназначенных для описания соответствующего нагружения.

Широкое применение в механике композитных материалов получили методы построения истинных диаграмм деформирования на основе экспериментальных данных. В работах [132-135] осуществлена идентификация механических свойств материала на примере растяжения прямоугольных образцов. Корректировка диаграммы деформирования осуществлялась путем сравнения осевых усилий и изменений размеров поперечного сечения образца в шейке с соответствующими параметрами, полученными при помощи аналитических соотношений из [136] для сплошных цилиндрических образцов. Результаты исследований хорошо согласовались с экспериментальными данными.

В работе [139] исследован процесс формовки пластин и оболочек. Авторы для определения параметров модели сверхпластичности [137, 138] использовали экспериментально-расчетный метод идентификации необходимых величин. Авторы работ [140, 141] на основе экспериментальных значений напряжений и скорости деформации детально описали методику, при помощи которой определялись свойства материала. Определение параметров математической модели сверхпластичности описаны в [142]. Авторы осуществляли идентификацию свойств на базе экспериментальных данных формовки сферических и цилиндрических оболочек из листовых заготовок. Путем сравнения численных и экспериментальных данных, осуществлялась корректировка коэффициента скоростного упрочнения. В работе отмечается, что применяемый метод идентификации параметров математической модели позволяет сократить количество экспериментов до двух-трех. При этом точность получаемых численных результатов достаточна для инженерных расчетов.

На данный момент активно используется запатентованный экспериментально-расчетный метод для идентификации диаграмм деформирования упругопластических материалов [143-147]. Результаты, получаемые посредством этого метода верифицированы на примере исследования деформирования, предельных состояний и разрушения испытываемых образцов и элементов конструкций [144-150]. Построение истинной диаграммы деформирования материала основы производилось итерационным путем. В каждой итерации осуществлялась коррекция зависимости интенсивности истинных напряжений σ_i от интенсивности логарифмических деформаций ε_i таким образом, чтобы удовлетворить с заданной точностью экспериментальной зависимости сжимающей силы от перемещения захватного приспособления испытательной машины. В работе [147] указано, что итерационный процесс быстро сходится при использовании в качестве начальной выпуклой диаграммы деформирования упрочняющегося.Необходимое количество корректировочных итераций слабо зависит от начального приближения. Описанный в работе [147] метод последовательной корректировки истинной диаграммы деформирования по своей сути идентичен численному методу хорд, который используется при решении нелинейных алгебраических уравнений [179]. Программные вычислительные комплексы, использующие метод конечных элементов, помогают проводить численное моделирование процессов деформирования испытательных образцов и в отличие от аналитических подходов позволяют учесть переменное напряженно-деформированное состояние конструктивно неоднородного материала. Таким образом, развитие расчетно-экспериментального метода является перспективной задачей при исследовании механических свойств различных материалов.

1.7. Численные методы моделирования процесса деформирования упругопластических сплошных сред

Моделирование процессов деформирования упругопластических сплошных сред осуществляют при помощи множества различных численных методов [96 - 102]. Универсального метода для решения подобного класса задач не существует, т.к. все используемые численные схемы наряду с положительными особенностями зачастую обладают и недостатками. Наиболее часто используемыми на данный момент являются метод конечных разностей, метод конечного элемента и вариационно-разностный метод.

В основе метода конечных разностей [103-106] лежит замена исходных дифференциальных уравнений в частных производных на соответствующий им набор конечно-разностных выражений. Моделируемая область представляется в виде набора точек, которые определяют дискретную сетку. Решение представляет собой набор численных значений неизвестных функций в точках построенной расчетной сетки. При аппроксимировании частных производных широкое применение получила схема «крест» [107].

Применение неоднородных сеток в случае простейших аппроксимаций численных схем связано с большими трудностями. Устранение проблем осуществляется посредством введения «естественной» аппроксимации частных производных [108, 109]. При задании на границе расчетной области значения производной для конечно-разностного метода возникают сложности явного задания условия. Эту проблему решают заданием интегральной характеристики на границе.

При использовании метода конечных элементов [110 - 115] расчетная область разбивается на конечные элементы, внутри которых распределение неизвестных параметров определяется при помощи функций форм. Неизвестные коэффициенты функции форм определяются путем решения задачи минимизации вариационной задачи. Метод конечных элементов не требует формулирования краевой задачи для системы дифференциальных уравнений. Это является существенным плюсом при выборе численного метода решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих деформирование сплошной среды. Крупные разработчики в области создания программных средств прочностного анализа (ANSYS, ABAQUS, LS-DYNA, NASTRAN) используют метод конечных элементов.

Вариационно-разностный метод [106, 116-118] использует смешанный подход, который заключается в построении конечно-разностных соотношений для вариационного уравнения. Этот метод имеет широкое применение при моделировании деформирования тел со сложной геометрической формой, для детального описания которой используют неоднородную или нерегулярную сетку [181].

В основном для интегрирования динамических уравнений, описывающих деформирование сплошной среды, используют явные [109, 119], неявные [109, 120] и смешанные [121, 122] схемы. При моделировании процессов, в которых ярко выражены высокочастотные процессы, эффективнее использовать явные схемы интегрирования с достаточно мелким шагом по времени, а для более низкочастотных процессов целесообразно применять неявные схемы. Определение шага по времени при использовании явной схемы осуществляется исходя из условия Куранта, которое определяется при помощи коэффициента запаса и соотношения между скоростью звука в материале и характерного размера конечного элемента. В явных схемах шаг по времени определяется из условия необходимой точности. Смешанные схемы интегрирования применяют в редких случаях, т.к. это часто связано с проблемами стыковки решения в отдельных зонах расчетной области.

При численном моделировании процессов деформирования сплошной среды используют либо подход Лагранжа [109, 105], либо подход Эйлера [105, 124]. При формулировании задачи в переменных Лагранжа задача рассматривается в системе координат, относительно которой происходит деформирование конечно-элементной сетки. В эйлеровом подходе конечно-элементная сетка не изменяется относительно рассматриваемой системы координат. Каждый подход имеет свои преимущества и свои недостатки, которые описаны в [123 – 126].

1.8.Выводы из обзора

Анализ источников показывает, что исследование деформирования перфорированных пластин, оболочек и пористых материалов зачастую сводится к рассмотрению конструкции без отверстий и пор с механическими свойствами, учитывающими понижение жесткости. При таком подходе возникают две дополнительные задачи, которые состоят в поиске эффективных свойств и оценке концентрации напряжения, возникающей вследствие конструктивной неоднородности конструкции. С ростом пористости (степени перфорации) показатели прочности снижаются. Результаты, представленные в литературе, ограничиваются значением пористости 0,64 для перфорированных пластин и оболочек. В случае пористых материалов исследования снижения прочностных характеристик проводят экспериментальным способом, который позволяет рассматривать конструкции с любым содержанием пор. Аналитические методы ограничены и не позволяют исследовать конструкции с высокими показателями пористости. Численное моделирование дает возможность рассматривать перфорированные пластины, оболочки и пористые материалы с любыми конструктивно возможными значениями пористости. В связи с этим для оценки изменения механических свойств материалов с большим числом вырезов и полостей целесообразно развивать подход с использованием численного моделирования.

Переход к сплошной конструкции с эффективными свойствами при расчете перфорированных пластин, оболочек и пористых материалов ограничивается областью упругого деформирования. В случае упругопластических деформаций такой подход не применим, т.к. уже на ранних этапах вблизи концентраторов напряжений возникают пластические деформации, которые необходимо учитывать при анализе прочности. Моделирование процессов деформирования с полным учетом всех геометрических неоднородностей возможно, но требует огромного количества вычислительных и временных ресурсов. В этой связи необходимо рассмотреть другой подход, который учитывал бы неоднородность поля напряжений и деформаций и позволял производить расчеты в условиях ограниченности вычислительных ресурсов.

Для проведения численного моделирования нелинейного поведения материалов требуется истинные диаграммы деформирования упругопластических материалов. В случае пористых материалов определение механических характеристик материала основы из экспериментальных исследований на растяжение и ударное нагружение сопряжено с проблемами, вызванными в основном существенной неоднородностью и неодоосностью напряженно-деформированного состояния в образцах. Развитие расчетно-экспериментального подхода позволит получать достоверные данные об истинных диаграммах деформирования упругопластической основы пористого материала.

2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТЫХ МЕТАЛЛОВ И ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

2.1. Определяющая система уравнений для сплошной среды

Численное моделирование задач осуществлялось с использованием метода конечного элемента. Расчетная область, занимаемая сплошной средой, представляет собой область Ω, ограниченную поверхностью G.

Движение среды описывается в переменных Лагранжа уравнениями, следующими из вариационного принципа Даламбера-Лагранжа в форме Журдена, в неподвижной системе координат *Oxyz*[180]:

$$\iiint\limits_{\Omega} \sigma_{ij}\delta \dot{e}_{ij} d\Omega + \iiint\limits_{\Omega} \rho \ddot{u}_i \delta \dot{u}_i d\Omega - \iint\limits_{G} q_i \delta \dot{u}_i dS = 0 \tag{2.1.1}$$

$\sigma_{ij}, \dot{e}_{ij}$ – компоненты тензора напряжений Коши и скоростей деформации;

$\dot{u}_i$ - компоненты скоростей перемещений;

q_i - компоненты поверхностной нагрузки.

Геометрическая нелинейность учитывается путем перестройки во времени формы конечных элементов, формирующих расчетную область [181]. Тензор скоростей деформации для задач в постановке теории сплошной среды определяется через скорости перемещений в метрике текущего состояния в общей системе координат *Oxyz*:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) \tag{2.1.2}$$

Используя (2.1.2), запишем (2.1.3) при помощи вариаций скоростей перемещений.

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left(\delta\dot{u}_{i,j} + \delta\dot{u}_{j,i}\right) + \rho\ddot{u}_i\delta\dot{u}_i\right) d\Omega - \iint\limits_{G} q_i\delta\dot{u}_i dS = 0 \tag{2.1.3}$$

Тензоры напряжений и деформаций определяются следующим образом:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}, \sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.1.4}$$

Для моделирования тонкостенных конструкций применялись уравнения теории оболочек типа Тимошенко. Оболочкой называется тонкое тело, ограниченное двумя близкими криволинейными поверхностями, расстояние между которыми (толщина оболочки) мало по сравнению с характерными размерами самих поверхностей. Поверхность, которая делит толщину оболочки пополам, называется срединной.

Для построения геометрических соотношений использовалась кинематическая модель С.П. Тимошенко [157], в которой смещение произвольной точки в пластине определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u(x,y) + z\gamma_1(x,y), \\ v(x,y,z) &= v(x,y) + z\gamma_2(x,y), \\ w(x,y,z) &= w(x,y) \end{aligned} \qquad (2.1.5)$$

x, y – координаты срединной поверхности;

z – координата, направленная по нормали к срединной поверхности;

u, v –тангенциальные перемещения точек координатной поверхности;

w – нормальное перемещение точки координатной поверхности (прогиб);

γ_1 и γ_2 – углы поворота нормали в плоскостях *xz* и *yz* соответственно.

Упругопластические свойства материалов определялись теорией течения с изотропным упрочнением.

Скорость деформаций представлялась в следующем виде:

$$\dot{e}_{ij} = \dot{e}^{y}_{ij} + \dot{e}^{p}_{ij}, \qquad (2.1.6)$$

где $\dot{e}^{y}_{ij}, \dot{e}^{p}_{ij}$ – скорости упругих и пластических деформаций.

Скорости шаровых составляющих тензоров напряжений и деформаций связаны по линейному закону:

$$\dot{\sigma} = 3K\dot{e}, \quad \dot{e}^{p}_{xx} + \dot{e}^{p}_{yy} + \dot{e}^{p}_{zz} = 0 \qquad (2.1.7)$$

где K - модуль объемного сжатия;

$\dot{\sigma} = \frac{1}{3}\left(\dot{\sigma}_{xx} + \dot{\sigma}_{yy} + \dot{\sigma}_{zz}\right)$ – скорость шаровой составляющей тензора напряжений;

$\dot{e} = \frac{1}{3}\left(\dot{e}_{xx} + \dot{e}_{yy} + \dot{e}_{zz}\right)$ – скорость шаровой составляющей тензора деформаций;

Скорость девиатора тензора напряжений $\dot{\sigma}'_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \delta_{ij}\dot{\sigma}$ определяется через скорость упругих составляющих девиатора тензора деформаций $\dot{e}'^{y}_{ij} = \dot{e}_{ij} - \delta_{ij}\dot{e} - \dot{e}^{p}_{ij}$ в виде:

$$\begin{aligned} D_j\sigma'_{ij} &= 2G\dot{e}'^{y}_{ij} \\ D_j\sigma'_{ij} &= \dot{\sigma}'_{ij} - \dot{\omega}_{ik}\sigma'_{ij} - \dot{\omega}_{jk}\sigma'_{ik} \end{aligned} \qquad (2.1.8)$$

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} - \dot{u}_{j,i}\right)$$

где D_j – производная по Яуманну, учитывающая поворот частицы среды как жесткого целого [152];

G – модуль сдвига;

δ_{ij} – символ Кронекера.

В данной работе моделируются процессы простого активного нагружения. В этом случае достаточно использовать модель изотропного упрочнения, которая не учитывает изменение поверхности текучести, известное как эффект Баушингера. Поверхность текучести определялась по закону Мизеса. Ниже представлены соотношения теории течения с изотропным упрочнением:

$$\dot{e}_{ij}^{p} = \dot{\lambda} s_{ij}, s_{ij} s_{ij} = \frac{2}{3} C(æ)^2, s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma, \tag{2.1.9}$$

где $C(æ)$ $-$ радиус поверхности текучести;

$æ = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\dot{e}_{ij}^{p} \dot{e}_{ij}^{p}} dt$ $-$параметр Одквиста;

При наличии пластических деформаций параметр $\dot{\lambda}$ определяется через необратимую часть элементарной работы $\dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij} \dot{e}_{ij}^{p}}{C^2}$, а при деформировании материала только в упругой области $\dot{\lambda} = 0$. Зависимость $C(æ)$ определяется по результатам испытаний материала [153-156]. Для задания механических свойств материала используется истинная диаграмма деформирования $\sigma_i(æ)$.

Описанная выше система дифференциальных уравнений представляет собой математическую модель упругопластического деформирования сплошной среды. Для корректной постановки задачи необходимо указать начальные и граничные условия. Начальные условия представляют собой распределение скоростей перемещений и компоненты тензора напряжений. В качестве граничных условий задаются величина скорости перемещений и/или значения поверхностной нагрузки в зависимости от времени.

2.2. Вариационно-разностный метод численного решения и алгоритм расчета

Система уравнений, моделирующая процесс деформирования сплошной среды при заданных начальных и граничных условиях, решается методом конечных элементов [111-115] с применением явной схемы интегрирования по времени типа «крест». Все определяющие соотношения этого метода записываются в переменных Лагранжа. Расчетная область разбивается в случае использования соотношений теории пластин и оболочек на 4-угольные элементы и 8-угольные элементы при моделировании деформирования сплошной среды в трехмерной постановке. В узлах каждого конечного элемента определяются перемещения U, скорости $\dot{U}$ и ускорения $\ddot{U}$ в общей системе координат $X = [xyz]^T = [x_1 x_2 x_3]^T$. Для универсальности при формировании определяющих конечных соотношений вводится локальный прямоугольный базис x для каждого деформированного элемента [182]. Трехмерный элемент отображается на единичный куб $-1 < \xi_i \leq 1 \ (i = \overline{1,3})$, а оболочечный – на единичный квадрат $-1 < \xi_i \leq 1 \ (i = \overline{1,2})$ с помощью полилинейного изопараметрического преобразования. Далее будут приведены преобразования для трехмерных конечных элементов. Для элементов, используемых при моделировании деформирования пластин и оболочек, получаются аналогичным способом, учитывая отсутствие одной из координат.

$$x_i = \sum_{k=1}^{8} x_i^k N_k(\xi_1 \xi_2 \xi_3), \quad N_k = \frac{\left(1 + \frac{\xi_1}{\xi_1^k}\right)\left(1 + \frac{\xi_2}{\xi_2^k}\right)\left(1 + \frac{\xi_3}{\xi_3^k}\right)}{8} \tag{2.2.1}$$

где x_i^k, ξ_i^k – координаты узлов в базисе x, ξ.

Скорости сплошной среды в узлах конечного элемента проектируются в местный базис и рассчитываются внутри элемента с помощью функций формы N_k:

$$\dot{u}_i = \sum_{k=0}^{N} \dot{u}_i^k N_k(\xi_1 \xi_2 \xi_3) \ , \ N = 8 \tag{2.2.2}$$

Соотношения (2.2.1), (2.2.2) для 8-узловых элементов можно преобразовать к виду:

$$x_i = a_i^0 + a_i^1 \xi_1 + a_i^2 \xi_1 + a_i^4 \xi_1 \xi_2 + a_i^5 \xi_2 \xi_3 + a_i^6 \xi_3 \xi_1 + a_i^7 \xi_1 \xi_2 \xi_3, \ a_i^l = \left(\sum_{k=1}^{8} \Gamma_k^l x_i^k\right) \Big/ 8 \tag{2.2.3}$$

$$\dot{u}_i = d_i^0 + d_i^1 \xi_1 + d_i^2 \xi_1 + d_i^4 \xi_1 \xi_2 + d_i^5 \xi_2 \xi_3 + d_i^6 \xi_3 \xi_1 + d_i^7 \xi_1 \xi_2 \xi_3,$$

$$d_i^l = \left(\sum_{k=1}^{8} \Gamma_k^l \dot{u}_i^k\right) \Big/ 8 \tag{2.2.4}$$

$$\Gamma^0 = [1,1,1,1,1,1,1,1], \Gamma^1 = [-1,1,1,-1,1,1,1,-1],$$

$$\Gamma^2 = [1,1,1,1,-1,-1,-1,-1], \Gamma^3 = [-1,-1,1,1,-1,-1,1,1], \tag{2.2.5}$$
$$\Gamma^4 = [-1,1,1,-1,1,-1,-1,1], \Gamma^5 = [-1,-1,1,1,1,1,-1,-1],$$
$$\Gamma^6 = [1,-1,1,-1,1,-1,1,-1], \Gamma^7 = [1,-1,1,-1,-1,1,-1,1].$$

Матрица Якоби J для преобразования (3.2.1), (3.2.3) имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \tag{2.2.6}$$

Для вычисления градиента скорости перемещений $\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_k}$ в локальной системе координат xопределяется обратная матрица J^{-1}.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_3} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial \xi_3} \end{bmatrix}, \quad J^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} J_{11} & J_{21} & J_{31} \\ J_{12} & J_{22} & J_{32} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{pmatrix}, |J| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{2.2.7}$$

где

$$J_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}, J_{12} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}), J_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31},$$
$$J_{21} = -(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}), J_{22} = a_{11}a_{33} + a_{13}a_{31}, J_{23} = -(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}),$$
$$J_{31} = a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}, J_{32} = -(a_{11}a_{23} + a_{21}a_{13}), J_{33} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

В каждом узле конечно-элементной сетки определяется силовой и массовый вклады сплошной среды в каждый расчетный узел j. Для внутренних узлов конечно-элементной сетки силы $(B_x^l)_j, (B_y^l)_j, (B_z^l)_j$ вычисляются на основе значений тензора деформаций, для поверхностных узлов $(C_x^l)_j, (C_y^l)_j, (C_z^l)_j$ – на основе значений нагрузки, заданной на границе расчетной области. Массовый вклад в расчетный узел определяется на основе значения плотности сплошной среды. Вклады сплошной среды в каждый расчетный узел определяются по квадратурной формуле Ньютона-Котеса [167]:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} H_iH_jH_k f\left(x_1^i, x_2^j, x_3^k\right) \tag{2.2.8}$$

где $H_iH_jH_k$ – коэффициенты в квадратурной формуле Ньютона-Котеса,

x_1, x_2, x_3 – координаты расчетного узла j,

x_1^i, x_2^j, x_3^k – координаты узлов, соседних с узлом j,

l – номер конечного элемента, одной из вершин которого является узел j,

N – количество узлов, соседних к узлу j.

Формулы, по которым вычисляются силы и моменты, сосредоточенные в узлах конечно-элементной сетки, запишем в следующем виде:

для внутренних узлов сплошной среды [180]

$$(F_\alpha)_j = \sum_{i=1}^{w} (B_\alpha^l)_j\,, \quad \alpha = x, y, z \tag{2.2.9}$$

$$(M)_j = \sum_{i=1}^{w} (M^l)_j \tag{2.2.10}$$

для узлов на границе G сплошной среды

$$(F_\alpha)_j = \sum_{i=1}^{w} [(B_\alpha^l) + (C_\alpha^l)]_j\,, \quad \alpha = x, y, z \tag{2.2.11}$$

$$(M)_j = \sum_{i=1}^{w} (M^l)_j \tag{2.2.12}$$

Далее силы в узлах конечно-элементной сетки проецируются в общую систему координат. Полученные в итоге уравнения представляют дискретный аналог вариационного принципа баланса виртуальных мощностей:

$$\begin{cases} (M\ddot{u}_x)_j = (F_x)_j \\ \left(M\ddot{u}_y\right)_j = \left(F_y\right)_j \\ (M\ddot{u}_z)_j = (F_z)_j \\ \quad j = \overline{1, N} \end{cases} \tag{2.2.13}$$

M – масса;

$\ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{u}_z$ – компоненты ускорений;

$(F_x)_j, \left(F_y\right)_j, (F_z)_j$ –силы, сосредоточенные в узле j.

Из указанной системы дискретных уравнений путем интегрирования по времени определяются скорости перемещений, перемещения и текущие координаты узлов конечно-элементной сетки. Перемещения, скорости определяются в узлах сетки. Внутри конечного элемента перемещения вычисляются при помощи функции форм, а деформации и напряжения определяются дифференцированием функции форм.

2.3.Принцип подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе

Исследования напряженно-деформированного состояния в пластинах и оболочках, ослабленных различными вырезами и отверстиями, описаны во множестве работ. Определены особенности деформирования пластин и оболочек, ослабленных одним или небольшим количеством вырезов или отверстий. В работе [17] осуществлено обобщение аналитических исследований, посвященных расчетам перфорированных тонкостенных конструкций, под которыми понимаются пластины и оболочки, ослабленные двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий. В работе оценка напряженно-деформированного состояния в пластинах и оболочках сводится к решению двух проблем. Первая задача состоит в определении эффективных упругих параметров сплошной пластины, обладающей той же жесткостью, что и решетка. Вторая - представляет собой оценку локального распределения напряжений в опасных зонах (перемычках). В работе представлены исследования пластин и оболочек для показателей пористости от 0 до 0,64. Аналитические методы исследования позволяют неплохо оценить величину упругой деформации и соответствующего им напряжения. В случае упругопластического деформирования применение аналитических оценок затруднено, т.к. необходимо учитывать локальную неоднородность напряженно-деформированного состояния, вызванного наличием отверстий.

Анализ литературных источников посвященных исследованиям устойчивости перфорированных тонкостенных конструкций [18-33] показал, что наиболее полно разработана теория тонких упругих пластин и оболочек с небольшим количеством малых вырезов. В случае густо перфорированных пластин и оболочек имеет место локальная потеря устойчивости, которая наблюдается в тонких перегородках между отверстиями. Для того чтобы смоделировать возможную локальную потерю устойчивости необходимо учитывать неоднородность напряженно-деформированного состояния, вызванную наличием отверстий. В литературе эта проблема освещена мало и при исследованиях авторы ограничиваются лишь двумя близлежащими отверстиями.

Во множестве научных работ, посвященных пористым материалам, исследуются зависимости изменения пределов текучести и прочности в зависимости от коэффициента пористости [62]. Диаграммы деформирования материалов с коэффициентом пористости менее 0,95 по своему характеру схожи с диаграммами для сплошных материалов. Можно выделить механические характеристики материала [60-67]: модуль Юнга, предел текучести, предел прочности и т.д. Эти исследования позволяют построить эмпирические зависимости механических свойств от коэффициента пористости. В работах [55,53] для материалов с коэффициентами пористости от 0,2 до 0,4 предложены ряд эмпирических зависимостей изменения предела прочности, зная параметры сплошного материала. Результаты подобных исследований предполагают заменить пористую структуру сплошным материалом с эффективными свойствами. Такой подход не учитывает неоднородность напряженно-деформированного состояния вблизи полостей. Тем не менее, ряд научных работ отмечают зависимость механических свойств от ориентированности поры относительно направления нагружения [77,78] и различных параметров неидеальности полостей [79].

Таким образом, сведение расчёта на прочность густо перфорированных пластин, оболочек и пористых тел к сплошной среде с эффективными свойствами с указанием коэффициентов концентрации напряжений возможно для упругой постановки. В случае упругопластического деформирования уже на ранних этапах нагружения вблизи отверстий и пор напряжения значительно превышают предел текучести. В этом случае необходимо учитывать геометрию густо перфорированной пластины или пористого тела явным образом. Моделирование процесса деформирования на базе точной геометрической модели требует огромного объема вычислительных ресурсов [165, 166]. В работе [165] для описания геометрической модели пористой структуры кубика размером 0,4 x 0,4 x 0,4 мм потребовалось порядка 800 тыс. конечных элементов. Расчет деформирования реальной конструкции подобным способом неэффективен с практической точки зрения.

Если представить густо перфорированные пластины, оболочки и пористые тела в качестве набора одинаковых структурных элементов, то оценить неоднородность напряженно-деформированного состояния в упругопластическом материале при наличии вырезов или полостей можно с использованием принципа трехмерного подобия. В основе идеи лежит закон подобия для упругих тел, сформулированный В. Л. Кирпичевым [158], и его распространение на упругопластические тела, предложенное Ф. Киком в 1885 г. Принцип трехмерного подобия можно сформулировать следующим образом: при деформировании в подобных условиях нагружения геометрически подобных тел из одинакового материала напряжения и деформации, возникающие в конструкции, идентичны. Этот принцип позволяет заменить набор одинаковых представительных объемов на один геометрически подобный им структурный элемент (см. рисунки 2.3.1 - 2.3.2), в котором при моделировании реализуется среднее по этому набору напряженно-деформированное состояние. Такой подход учитывает неоднородность напряженно-деформированного состояния в структурном элементе при сохранении величины пористости и характерных размеров деформируемого тела. Дополнительно появляется возможность управлять объемом вычислительных ресурсов посредством варьирования количеством структурных элементов.

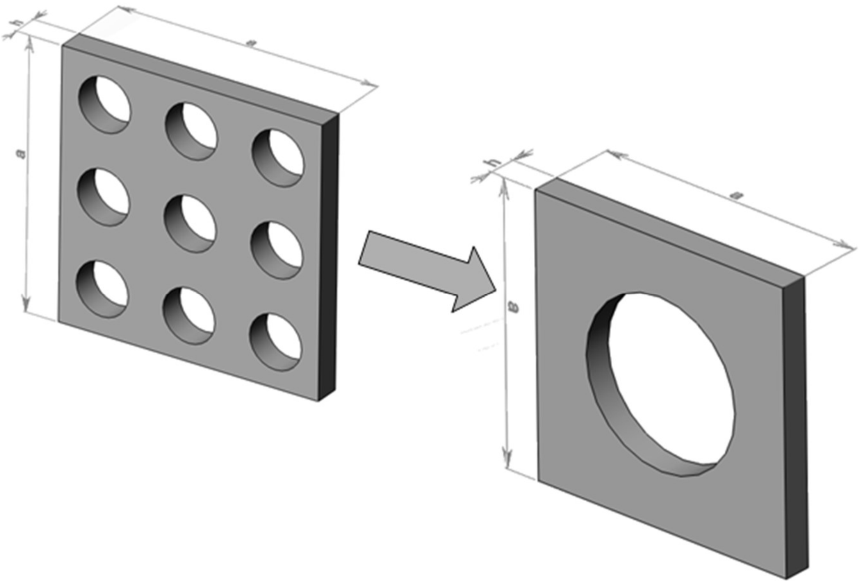


Рисунок 2.3.1 – Принцип двумерного подобия для пластин и оболочек

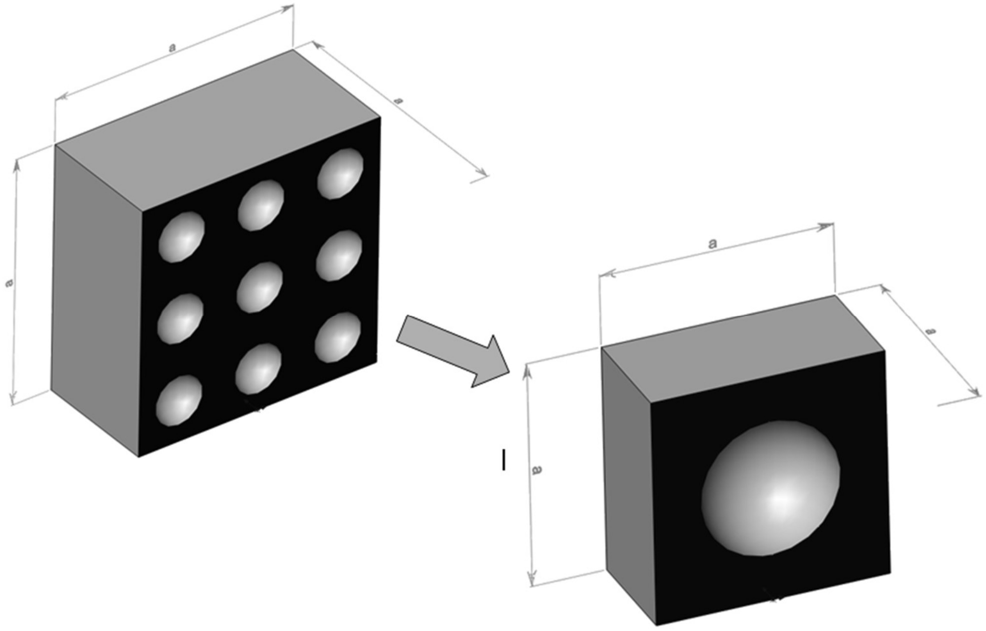


Рисунок 2.3.2 – Принцип трехмерного подобия для пористых тел

В случае густо перфорированных пластин и оболочек выполняется геометрическое подобие только для двух направлений, так как обычно пренебрегают зависимостью перемещений от координаты, нормальной к срединной поверхности тонкостенной конструкции. Для пористых материалов использование принципа требует выполнения полного геометрического подобия.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ГУСТО ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН И ОБОЛОЧЕК

3.1. Определение параметров ортотропии и коэффициентов концентрации напряжений для перфорированных пластин и оболочек

Моделирование упругого деформирования густо перфорированных пластин и оболочек можно свести к рассмотрению сплошной тонкостенной конструкции с эквивалентными жесткостными характеристиками. Определить снижение жесткости за счет конструктивных особенностей можно на примере одного структурного элемента. Предполагалось, что перфорация вдоль осей Ox и Oy одинаковая. Структурный элемент в этом случае представлял собой параллелепипед с квадратным основанием, сторона которого равна а, и высотой *h* (рисунок 3.1.1).

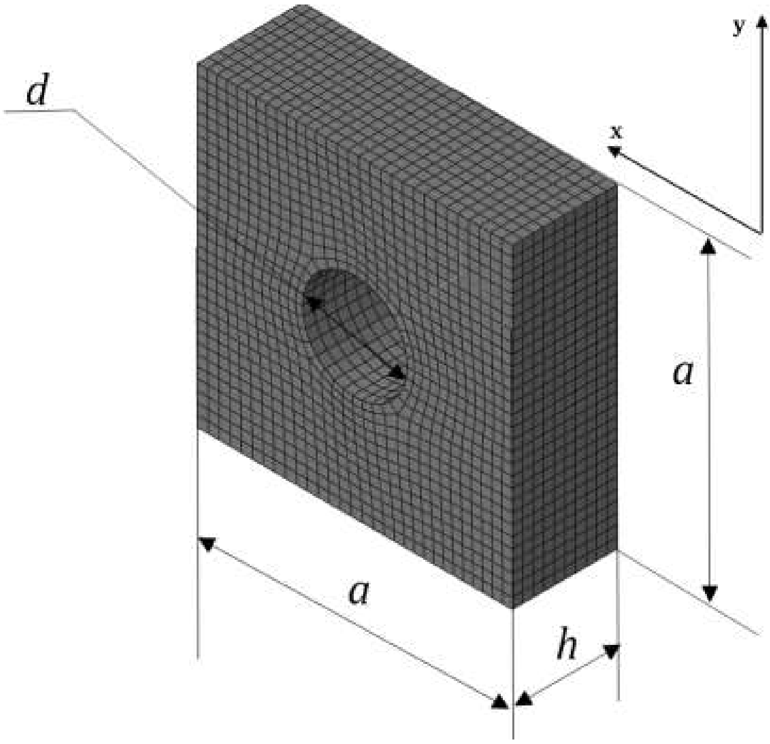


Рисунок 3.1.1 – Структурный элемент густо перфорированной пластины и оболочки

В центре элемента располагается отверстие диаметром *d*. Изменение пористости конструкции осуществлялось путем варьирования размером квадратного основания при постоянном значении диаметра. Толщина структурного элемента также оставалась неизменной и равной диаметру отверстия ($h/d = 1$). Определим пористость оболочки или пластины, как отношение площади отверстия к общей площади лицевой плоскости структурного элемента:

$$\gamma = \frac{\pi d^2}{4a^2} \text{ – пористость} \qquad (3.1.1)$$

Вместе с перфорированными структурными элементами рассматривались сплошные элементы идентичных размеров. Сравнивая результаты численного моделирования статического упругого растяжения и сдвига сплошной конструкции и структурного элемента с отверстием, получили коэффициенты снижения жесткости перфорированной пластины или оболочки. Все численные расчеты проведены с использованием расчетного комплекса Abaqus (лицензия № 200000000050225) [159]. В первом случае моделирование проведено с использованием соотношений теории сплошной среды в трехмерной постановке. Во втором варианте расчет проведен на основе соотношений теории пластин и оболочек типа Тимошенко. Зная коэффициенты снижения жесткости, можно определить эффективные значения механических свойств ортотропной среды и заменить исходную густо перфорированную тонкостенную конструкцию на сплошную пластину или оболочку.

Очевидно, что параметры ортотропии, выраженные в качестве матрицы жесткости D, будут зависеть от коэффициента пористости оболочки или пластины. Одинаковая перфорация в двух перпендикулярных направлениях оболочки или пластины и симметричность матрицы D позволяет сократить количество определяемых компонент матрицы до 6 штук. Компоненты матрицы можно выразить через модули упругости и коэффициенты Пуассона [160]:

$$\begin{cases} D_{11} = D_{22} = E_1(1 - v_{23}v_{32})\beta \\ D_{33} = E_3(1 - v_{12}v_{21})\beta \\ D_{12} = E_1(v_{21} + v_{31}v_{23})\beta = E_2(v_{12} + v_{32}v_{13})\beta \\ D_{13} = D_{23} = E_1(v_{31} + v_{21}v_{32})\beta = E_3(v_{13} + v_{12}v_{23})\beta \\ D_{44} = G_{12} \\ D_{55} = D_{66} = G_{13} \\ \beta = \frac{1}{1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{31}v_{13} - 2v_{21}v_{32}v_{13}} \end{cases} \qquad (3.1.2)$$

где E_{i} – модуль упругости вдоль i-ой оси, Па;

v_{ij} - коэффициент Пуассона при растяжении вдоль i-ой оси.

Для определения коэффициентов снижения жесткости конструктивно-ортотропного материала проведено моделирование одноосного растяжения и чистого сдвига структурного элемента с отверстием и сплошной конструкции. При моделировании деформирования структурного элемента рассматривался материал с модулем Юнга E = 166 ГПа и коэффициентом Пуассона $v = 0{,}3$.

На границах элемента задавались кинематические условия, которые показаны на рисунках 3.1.2 – 3.1.4.

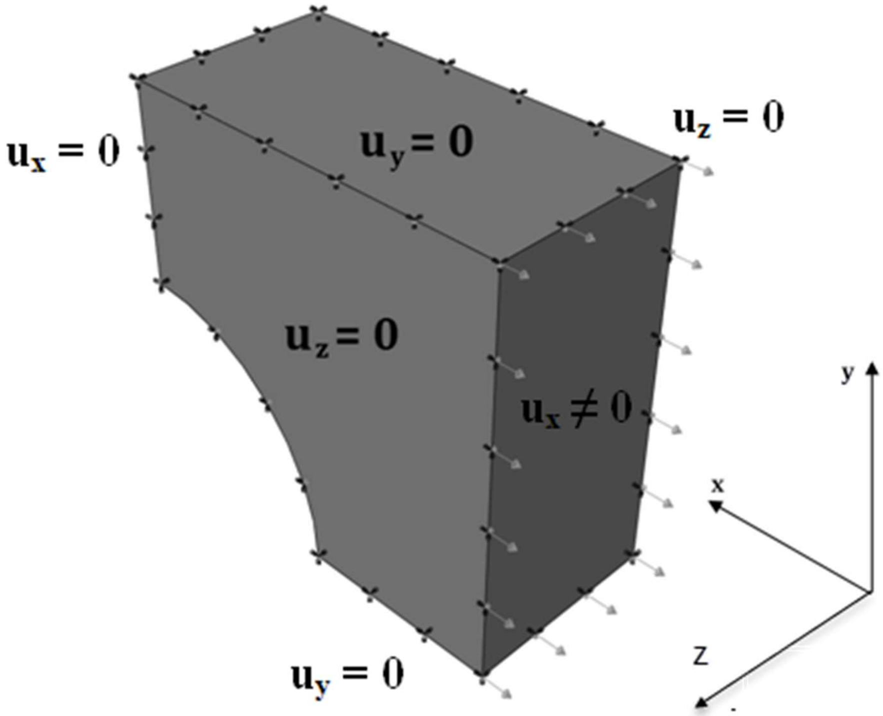


Рисунок 3.1.2 – Граничные условия при одноосном растяжении вдоль Ox

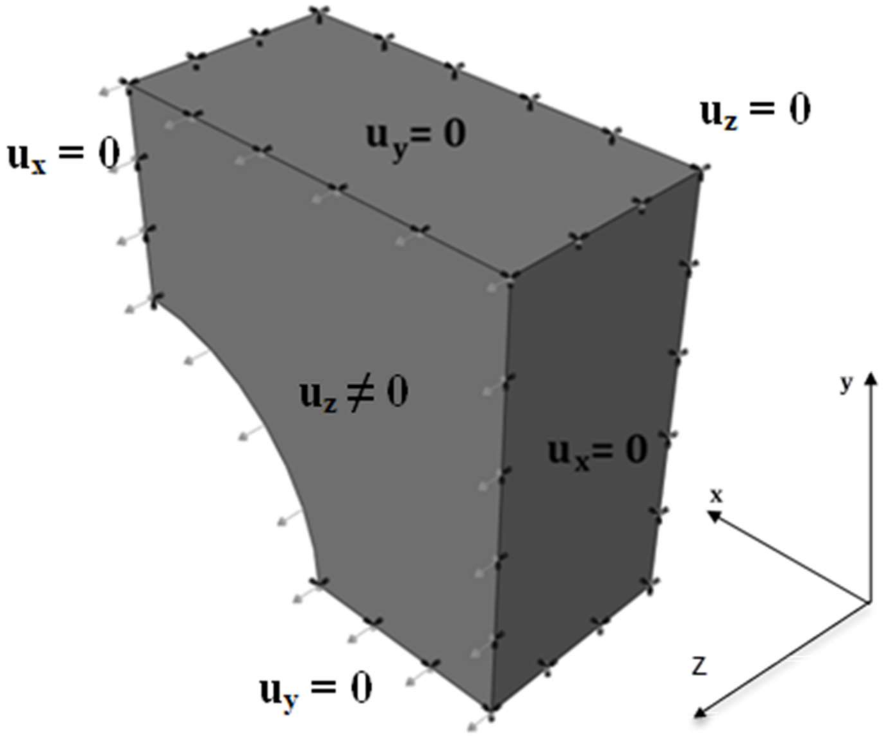


Рисунок 3.1.3 – Граничные условия при одноосном растяжении вдоль Oz

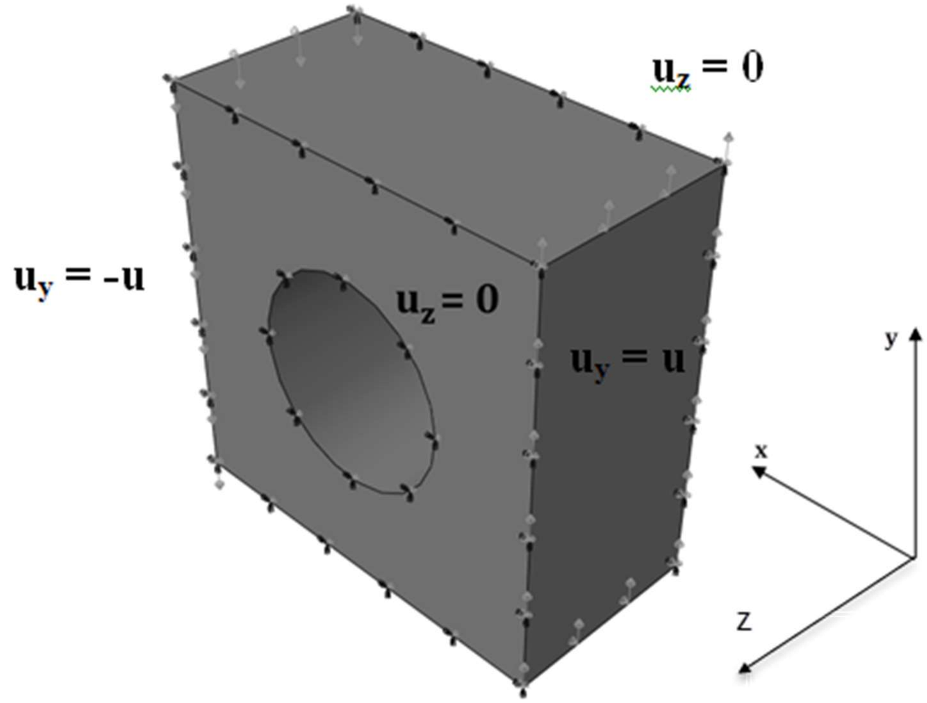


Рисунок 3.1.4 – Граничные условия при чистом сдвиге вдоль пластины

В силу симметрии растяжение моделировалось для 1/8 части структурного элемента. Конечно-элементная модель в этом случае состояла из 1080 расчетных ячеек. Общее количество конечных элементов для моделирования сдвига составляло 4320. В результате расчетов были получены силы реакции, на всех поверхностях структурного элемента. На основе полученных данных определялись величины эффективных механических свойств ортотропного материала.

Результаты исследования приведены на рисунках 3.1.5 – 3.1.6 в виде зависимости коэффициента снижения жесткости от пористости структурного элемента. Коэффициенты снижения жесткости определялись по формулам:

$$r_E = \frac{E_1}{E} = \frac{E_2}{E}, r_v = \frac{v_{12}}{v}, r_G = \frac{G_{12}}{G}, r_C = \frac{C^*}{C}, \tag{3.1.3}$$

где E – модуль Юнга материала основы;

E_1 – усредненный модуль Юнга для структурного элемента с отверстием;

v – коэффициент Пуассона материала основы;

v_{12} – усредненный коэффициент Пуассона для структурного элемента с отверстием;

G – модуль сдвига материала основы;

G_{12} – усредненный модуль сдвига для структурного элемента с отверстием;

C – жесткость при изгибе для материала основы;

C^* – усредненная жесткость при изгибе структурного элемента с отверстием

На графике приведены результаты численного исследования для двух постановок в сравнении с аналитическими оценками, полученными Э.И. Григолюком и Л.А. Фильштинским [17].

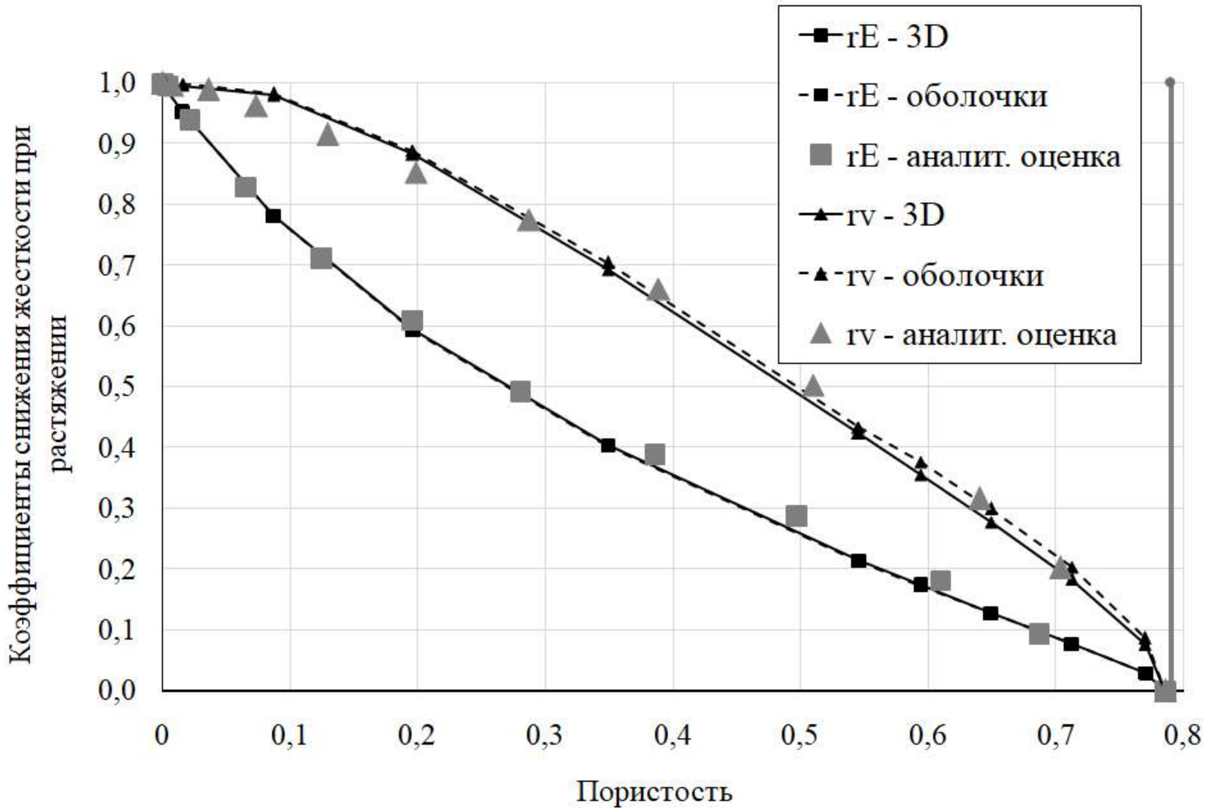


Рисунок 3.1.5 – Коэффициенты уменьшения величины модуля Юнга и коэффициента Пуассона

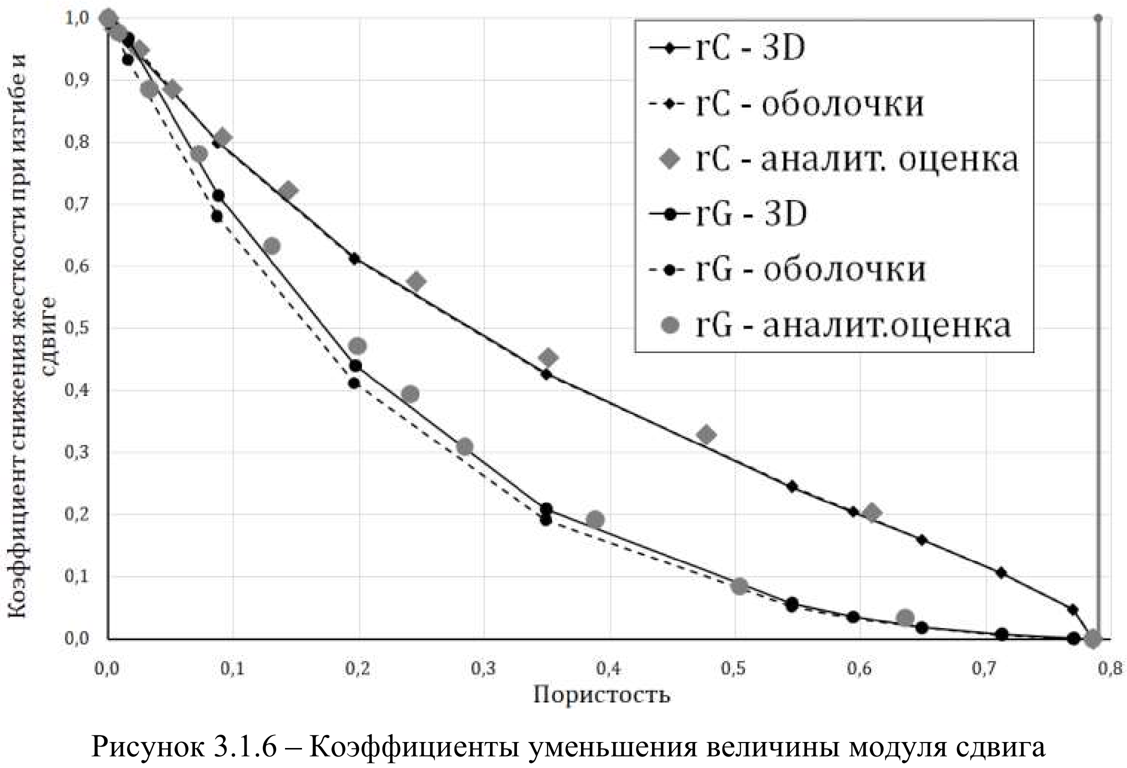


Рисунок 3.1.6 – Коэффициенты уменьшения величины модуля сдвига и жесткости при изгибе

Из рисунков видно, что коэффициенты снижение жесткостей на растяжения и изгиб для трехмерной и оболочечной модели близки друг к другу. Для пористости менее 0,5 разница между двумя постановками задачи не превышает 1,5% [168]. При более высоких показателях перфорации различие коэффициентов r_v и r_G для трехмерного расчета и теории оболочек типа Тимошенко превышают 5%. Логично предположить, что результаты моделирования в полной трехмерной постановке даёт более точный результат, нежели расчет по соотношениям теории пластин и оболочек типа Тимошенко. Таким образом, определять коэффициенты снижения жесткости для густо перфорированных пластин и оболочек с показателями пористости менее 0,5 можно, используя теорию пластин и оболочек типа Тимошенко [168]. При более высоких показателях перфорации необходимо производить расчет в полной трехмерной постановке.

Графики показывают хорошее совпадение аналитических [17] и численно полученных результатов. Максимальные отличия составляют порядка 10% для модуля E и изгибной жесткости. Таким образом, результаты, полученные при помощи численного моделирования с использованием метода конечных элементов дают верные результаты и позволяют уточнить имеющиеся аналитические оценки. В [17] отмечается, что определение эффективных упругих свойств аналитическим методом связано с решением бесконечной системы линейных уравнений. Для пористостей менее 0,5 систему можно уменьшить до двух уравнений, что подтверждается многочисленными расчетами и объясняется тем, что коэффициент перфорации входит в уравнения с высоким показателем степени. При показателях пористости более 0,5 определение упругих эффективных свойств значительно усложняется, а принятие упрощающих гипотез приводит к значительным ошибкам. Численное моделирование в этом случае имеет значительное преимущество, т.к. не зависит от степени перфорации пластины или оболочки.

Оценка неоднородности распределения напряжений в густо перфорированных пластинах и оболочках проведена с помощью коэффициента концентрации напряжений вблизи отверстия. Были рассмотрены два вида нагружения: растяжение и изгиб (рисунки 3.1.7, 3.1.8).

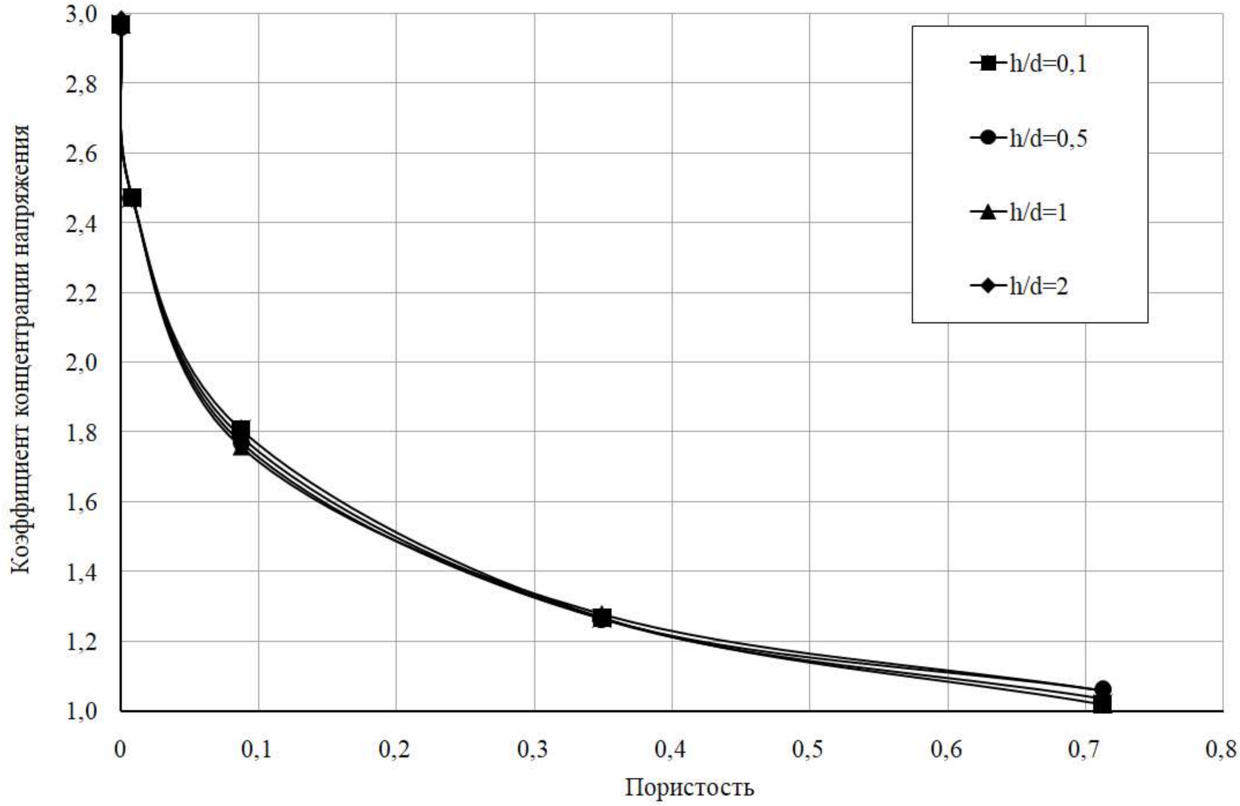


Рисунок 3.1.7 – Изменение коэффициента концентрации напряжений при растяжении в зависимости от пористости пластины

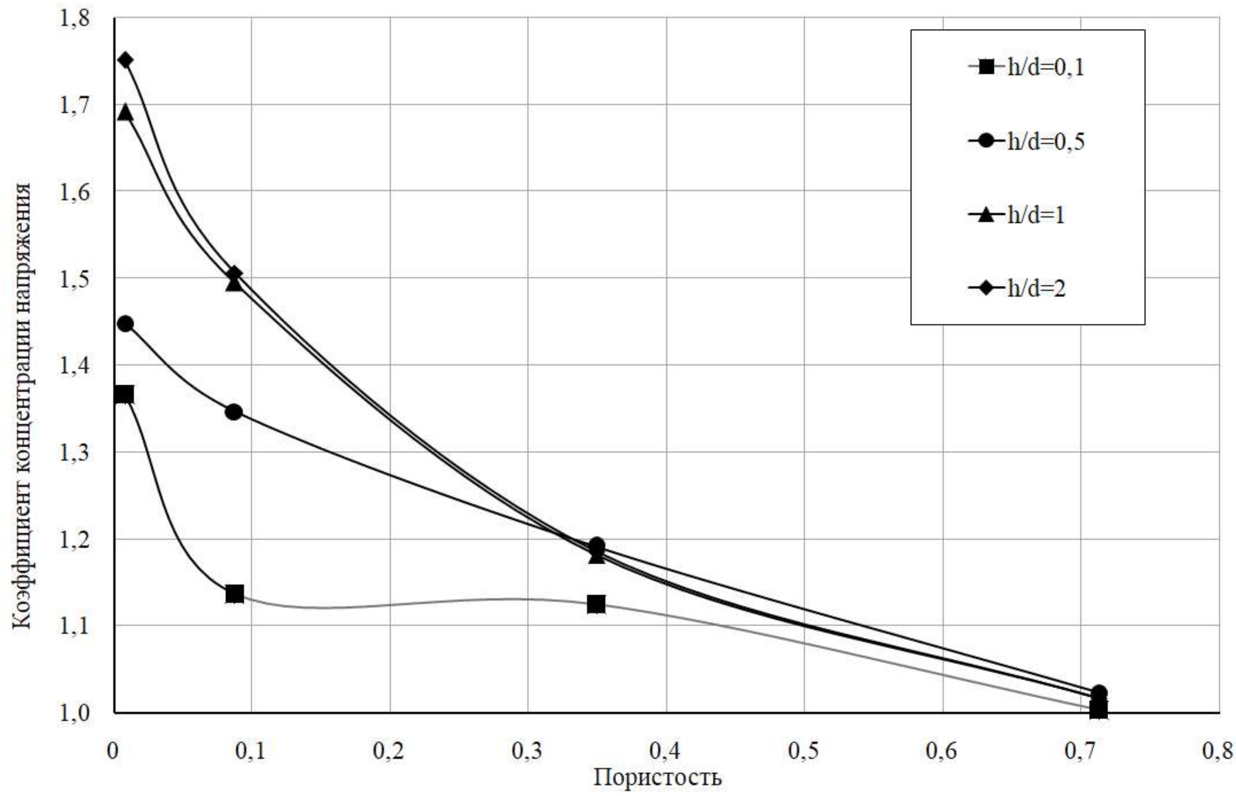


Рисунок 3.1.8 - Изменение коэффициента концентрации напряжений при изгибе в зависимости от пористости пластины

Графики показывают, что по мере приближения пористости к предельному значению, равному $\gamma_{max} = 0,785$, коэффициент концентрации напряжений стремится к 1как в случае растяжения, так и в случае изгиба. По мере уменьшения ширины перегородок между отверстиями формируется напряженно-деформированное состояние, соответствующее растяжению и изгибу простой упругой балки. При стремлении пористости к 0 коэффициент концентрации напряжения при растяжении стремится к 3, что полностью соответствует аналитическим и экспериментальным данным, полученным при растяжении бесконечной пластины с отверстием. Из рисунка 3.1.7 видно, что коэффициент концентрации напряжения при растяжении слабо зависит от толщины пластины. Численное моделирование позволило определить значение коэффициента концентрации напряжений для случая изгиба бесконечной пластины с отверстием. Эта величина получена для материала с коэффициентом Пуассона равным 0,3 и составляет 1,79, что соответствует $К = \left.\frac{5+3v}{3+v}\right|_{v=0.3} = 1,79$ [63]. В литературе не удалось найти аналитических или экспериментальных оценок этой величины. При изгибе структурного элемента наблюдается сильная зависимость коэффициента концентрации напряжений от толщины пластины. Для тонких пластин ($h/d < 1$) коэффициент концентрации напряжений значительно ниже. Для более толстостенных пластин с $h/d > 1$ характер изменения коэффициента концентрации напряжений слабо зависит от толщины. Как и в случае растяжения при приближении пористости к предельному значению коэффициент концентрации напряжений стремится к 1, т.к. в тонких перегородках между отверстиями реализуется напряженно-деформированное состояние, соответствующее чистому изгибу балки.

Для верификации полученных параметров ортотропии были решены две задачи. Одна состояла в моделировании изгиба пластины длины *L*, перфорированной одним рядом отверстий [161]. Вторая – моделирование изгиба ¼ части цилиндрической полосы, также перфорированной одним рядом отверстий [162].

Задача упругого изгиба пластины, перфорированной одним рядом отверстий, решена в двух постановках. В первом случае моделирование проведено в трехмерной постановке с применением соотношений механики сплошной среды. В расчете использовалась геометрическая модель с учетом всех отверстий. Во втором варианте пластина и оболочка рассматривались, как сплошные, а снижение жесткости, вызванное наличием отверстий, учитывалось при помощи конструктивно ортотропной модель материала. Моделирование деформирования тонкостенной конструкции описывалось теорией пластин и оболочек, основанной на соотношениях Тимошенко. Геометрическая модель и граничные условия, используемые в расчете, показаны на рисунке 3.1.9.

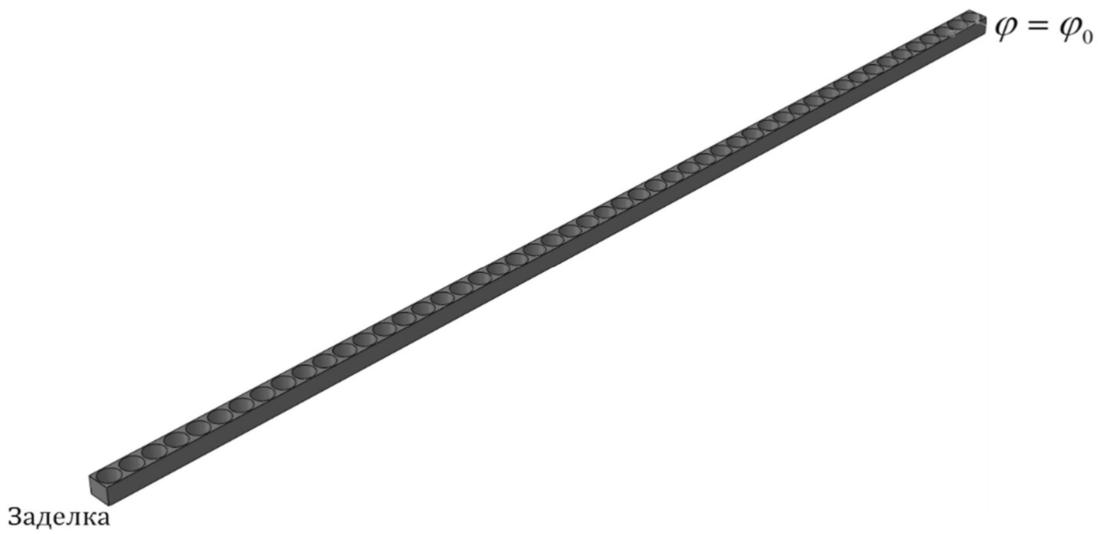


Рисунок 3.1.9 – Геометрическая модель и граничные условия при расчете изгиба густо перфорированной пластины в трехмерной постановке

При использовании соотношений Тимошенко рассмотрена сплошная пластина, ослабление жесткости от наличия отверстий в которой учтено заданием характеристик ортотропного материала. Геометрия и граничные условия, используемые при расчете с применением соотношений Тимошенко, показаны на рисунке 3.1.10.

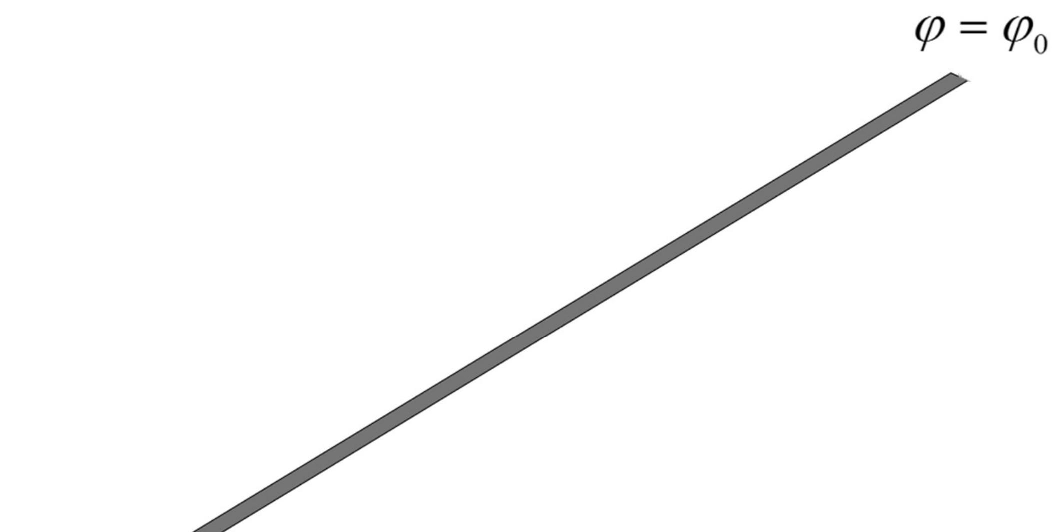


Рисунок 3.1.10 – Геометрическая модель и граничные условия при расчете изгиба густо перфорированной пластины с использованием соотношений Тимошенко

При расчете изгиба пластины, перфорированной одним рядом отверстий, методами сплошной среды использовалась расчетная сетка из 1500 ячеек на один структурный элемент, а в случае использовании теории пластин и оболочек – 100 ячеек.

В обоих случаях на одном конце пластины задавались условия заделки – отсутствие перемещений и углов поворота. На противоположном конце задавалось постоянное значение угла поворота. На боковых границах определено условие симметрии. По результатам расчета определено значение момента реакции, возникающего в заделке.

На рисунке 3.1.11 представлены графики изменения безразмерного момента реакции, возникающего в заделке, ${M_{\text{р}}}/{\text{М}_{\text{сплош}}}$ ($M_{\text{р}}$момент в заделке для пластины с отверстиями, $\text{М}_{\text{сплош}}$ – момент в заделке для сплошной пластины) от безразмерной длины ${L}/{a}$ (L – длина пластины, a – размер структурного элемента). На рисунке для сравнения представлены результаты решения задач в трехмерной постановке и с применением теории пластин и оболочек, основанной на соотношениях Тимошенко.

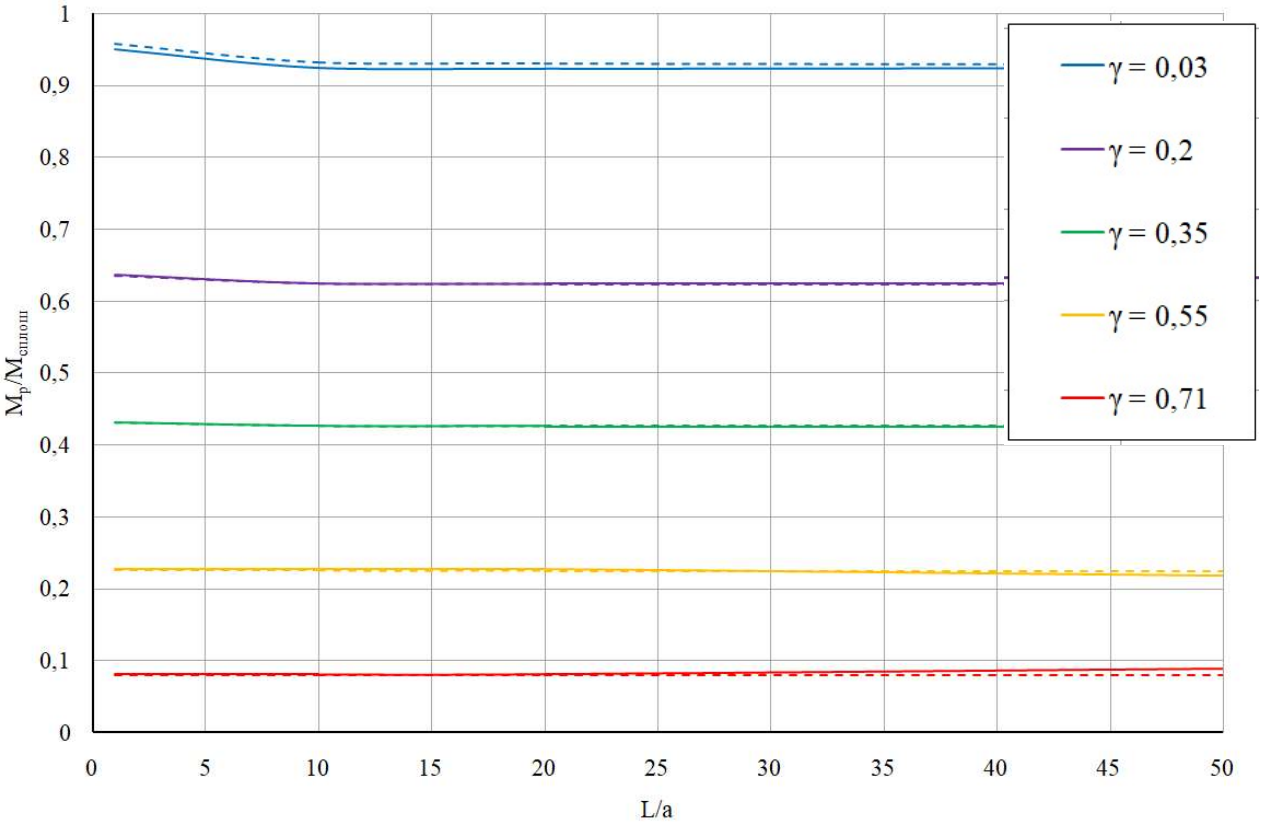


Рисунок 3.1.11 - Безразмерный реактивный момент в зависимости от длины и пористости пластины (сплошная линия – 3D; пунктирная линия – теория пластин Тимошенко)

Разница между двумя различными постановками не превышает 3% вне зависимости от величины пористости. При решении задачи с использованием теории пластин и оболочек размерность конечно-элементной сетки в 15 раз меньше, чем в случае полностью трехмерного расчета. Результаты исследования показывают, что использование теории пластин и оболочек, основанной на соотношениях Тимошенко, в совокупности с конструктивно ортотропной модель материала, параметры которой определены из решения трехмерной задачи растяжения и сдвига характерного структурного элемента, правомерно при моделировании изгиба упругой густо перфорированной пластины.

Проведена оценка учета геометрической нелинейности на решение задачи. Сравнение решений в геометрически линейной и геометрически нелинейной постановках показало, что разница между двумя подходами не превышает 1%. Для густо перфорированных пластин влияние геометрически нелинейной постановки проявляется при локальной потере устойчивости в тонких перегородках между отверстиями при больших показателях пористости. Результаты моделирования показали, что для густо перфорированных пластин с пористостью в диапазоне от 0 до 0,71 в пределах упругого деформирования локальная потеря устойчивости не наблюдается.

Как и в случае изгиба густо перфорированной упругой пластины , моделирование изгиба ¼ части цилиндрической упругой полосы, перфорированной одним рядом отверстий, в трехмерной постановке механики сплошной среды и с использованием теории оболочек, основанной на соотношениях Тимошенко, в совокупности с конструктивно ортотропной моделью материала. Схема нагружения и фрагмент конечно-элементной модели для трехмерного расчета представлена на рисунке 3.1.12.

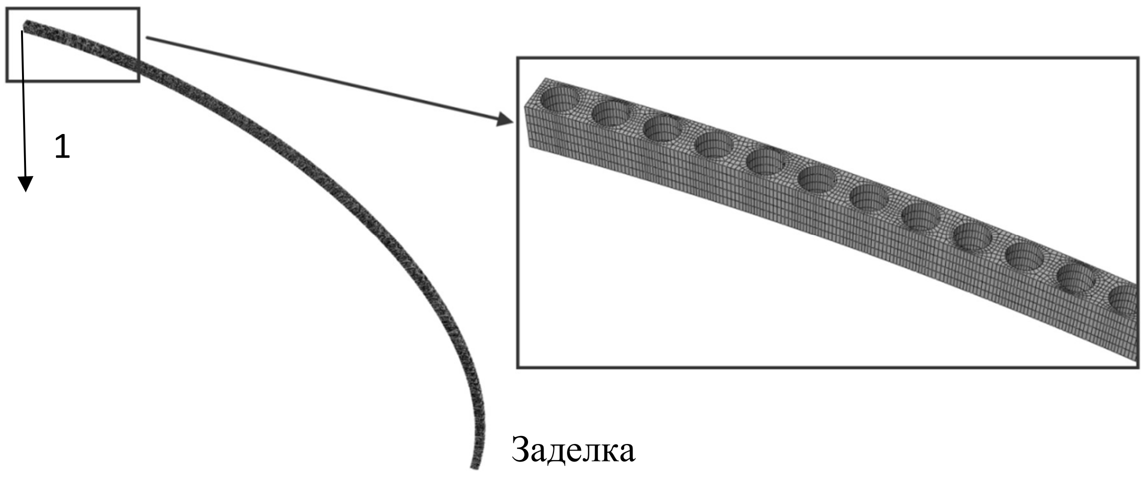


Рисунок 3.1.12 - Геометрическая модель при расчете изгиба ¼ части цилиндрической густо перфорированной оболочки в трехмерной постановке

Схема нагружения и фрагмент конечно-элементной модели для расчета изгиба цилиндрической упругой густо перфорированной оболочки с использованием соотношений Тимошенко в совокупности с ортотропной моделью материала представлена на рисунке 3.1.13.

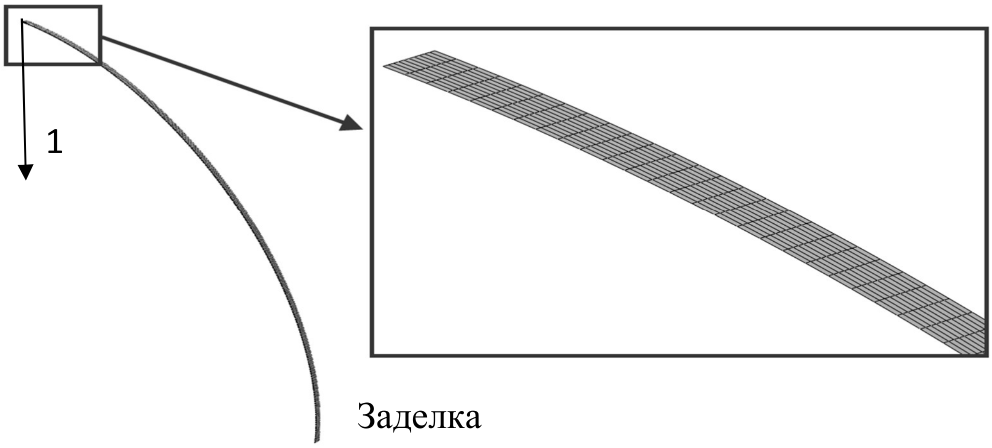


Рисунок 3.1.13 - Геометрическая модель при расчете изгиба ¼ части цилиндрической густо перфорированной оболочки с применением соотношений Тимошенко и ортотропной моделью материала

Один конец оболочки жестко защемлен, а на противоположном конце приложена единичная сила. На боковых сторонах полосы задавалось условие симметрии.

На рисунке 3.1.14 представлены эпюры вертикальных перемещений вдоль линии дуги. На рисунке приведены графики для густо перфорированной оболочки со значением пористости 0,77, которое являлось максимальным в рамках данного исследования.

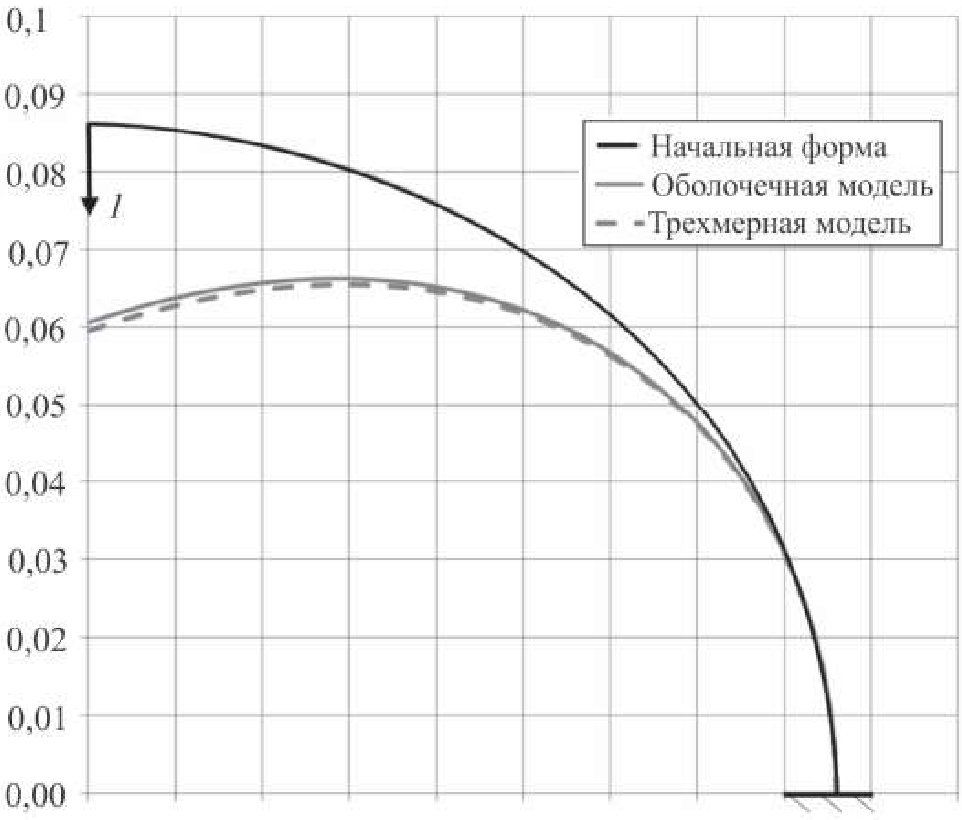


Рисунок 3.1.14 - Эпюра вертикальных перемещений для пористости 0,77

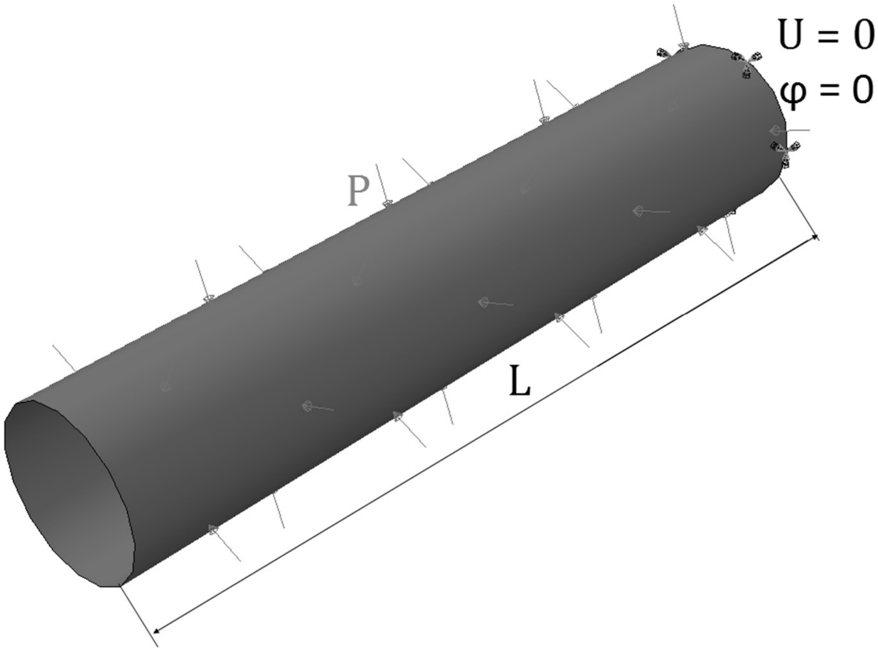
Как в случае изгиба густо перфорированных пластин, разница между результатами для полностью трехмерной постановки и решением, полученным с использованием теории оболочек, основанной на соотношениях Тимошенко, не превышала 5 % для значений пористости от 0 до 0,77. Предельное значение пористости густо перфорированной оболочки при равномерном расположении отверстий составляет 0,785. Использование теории оболочек в совокупности в ортотропной моделью материала для расчета изгиба густо перфорированной цилиндрической упругой оболочки позволяет сократить размерность конечно-элементной сетки до 15 раз в зависимости от пористости конструкции.

Таким образом, параметры ортотропии, определенные из решения трехмерной задачи растяжения и сдвига структурного элемента, определены верно и могут быть применены для расчета упругих густо перфорированных пластин и оболочек, длина волны прогиба которых значительно превышает размер структурного элемента.

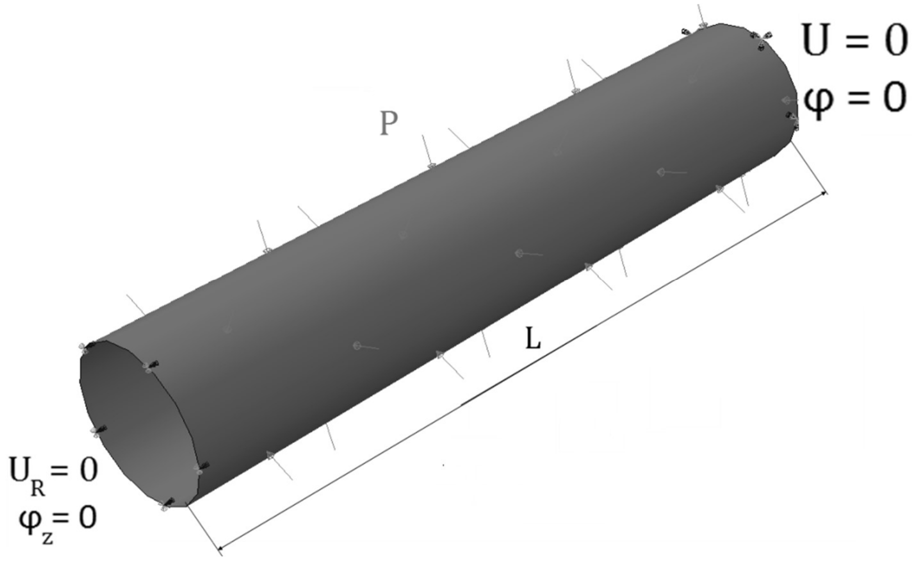
3.2.Исследование устойчивости упругой цилиндрической перфорированной оболочки под действием внешнего давления

Рассмотрена задача устойчивости упругой густо перфорированной цилиндрической оболочки для двух вариантов граничных условий. В первом варианте один из торцов оболочки был жестко заделан, а другой – свободен. Во втором варианте один из торцов оболочки был также жестко заделан, а на другом задавались нулевые значения радиального перемещения, угла поворота и осевой силы. Расположение граничных условий и приложенная нагрузка показаны на рисунке 3.2.1 а-б.

Решение задачи устойчивости упругой цилиндрической густо перфорированной оболочки осуществлено с применением теории пластин и оболочек типа Тимошенко в совокупности с использованием ортотропного материала, характеристики которого определены по формулам (3.1.2). Для моделирования использовался 4-узловой оболочечный элемент, который в программном комплексе Abaqus обозначается S4R [165].



а) вариант 1



б) вариант 2

Рисунок 3.2.1 – Расположение граничных условий и приложенная нагрузка

В результате были получены критические значения давлений $P_{кр}$ и соответствующие формы потери устойчивости. Безразмерное критическое давление выражается формулой [163]:

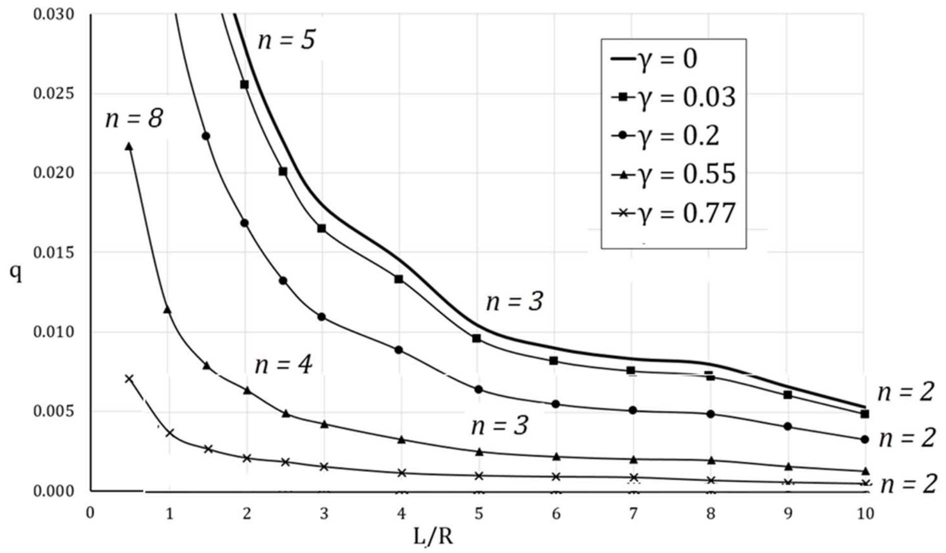
$$q = \frac{P_{кр}}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2 \tag{3.2.1}$$

На рисунке 3.2.2 представлены зависимости безразмерного критического давления q от безразмерной длины цилиндрической оболочки L/R при значениях пористости $\gamma = 0 \div 0{,}77$.

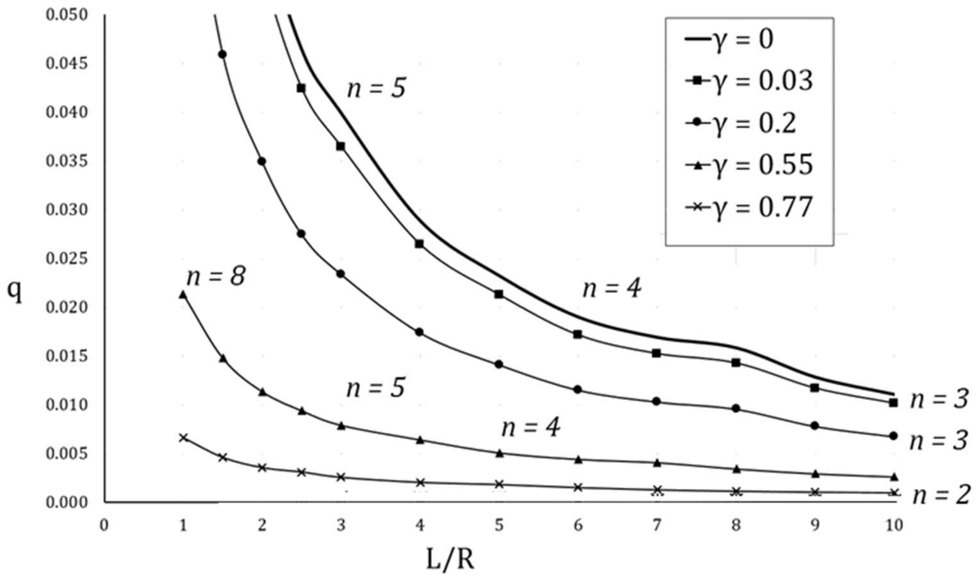
При пористости γ = 0 для длинной оболочки (L/R = 100) критическое давление совпадает с аналитическим выражением для изотропной сплошной оболочки [169]:

$$q = \frac{h}{4R(1-v^2)} \tag{3.2.2}$$

На графике дополнительно цифрами n = 2÷8 отображены номера форм потери устойчивости в окружном направлении при различных значениях длины и пористости оболочки. Видно, что при больших значениях пористости для малых длин оболочки потеря устойчивости происходит по более низким формам. Этот эффект обусловлен снижением жесткости всей оболочки вследствие увеличения густоты перфорации.



а) вариант 1



б) вариант 2

Рисунок3.2.2 - Безразмерное критическое давление в зависимости от длины и степени пористости оболочки

На рисунках 3.2.3 – 3.2.4 представлены формы потери устойчивости для двух вариантов закрепления в зависимости от длины и пористости оболочки.

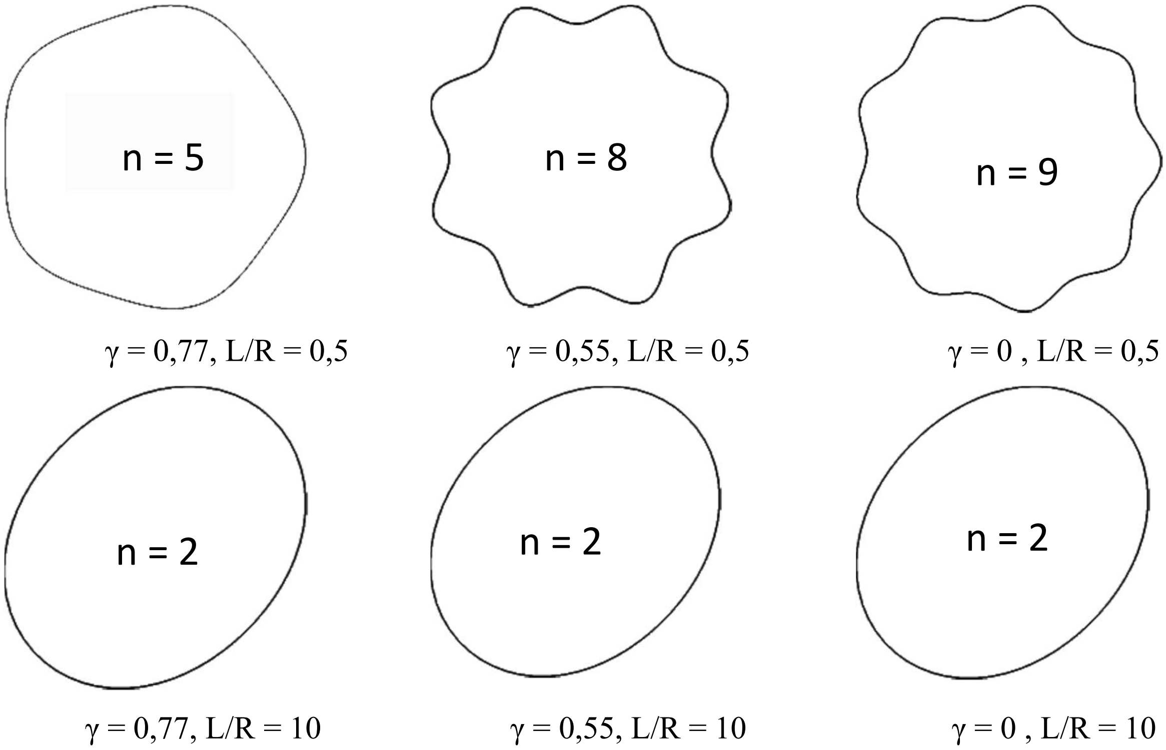


Рисунок 3.2.3 – Формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении в зависимости от пористости и длины (вариант 1).

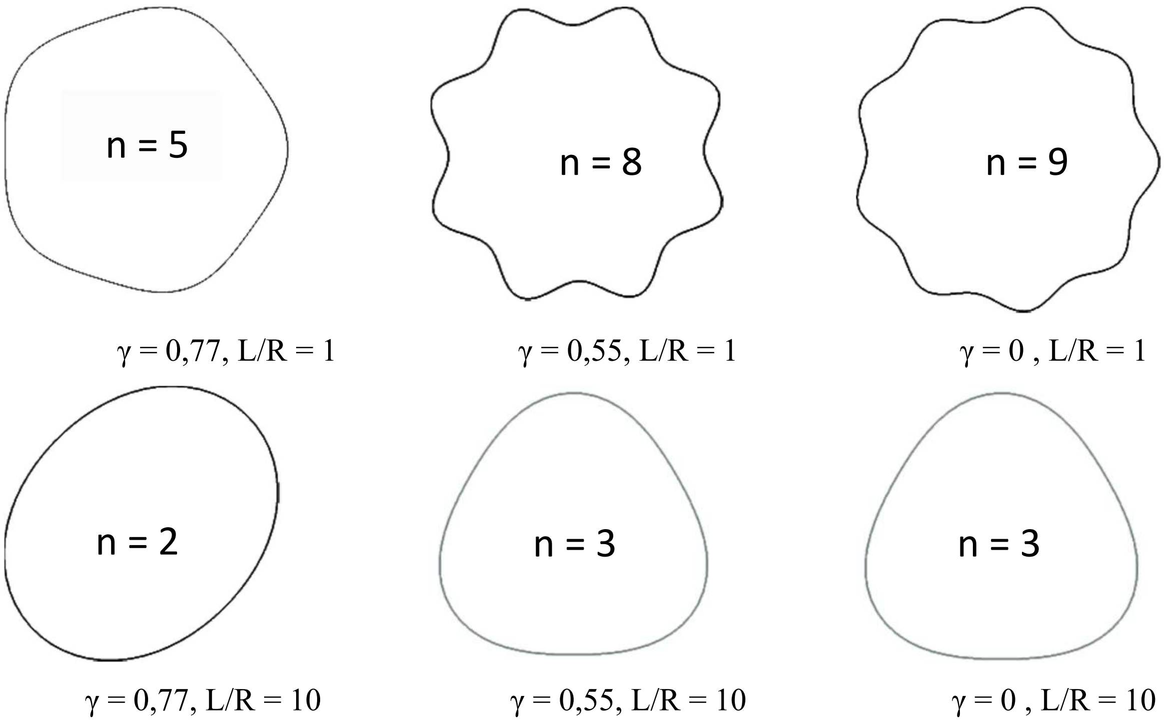


Рисунок 3.2.4 – Формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении в зависимости от пористости и длины (вариант 2).

3.3. Исследование применимости теории Тимошенко для упругопластических перфорированных пластин и оболочек

Пределы применимости теории пластин типа Тимошенко для густо перфорированных конструкций определены на примере циклически повторяющегося структурного элемента под действием изгибающего момента. Перфорация пластины в двух перпендикулярных направлениях одинаковая. В этом случае структурный элемент представляет собой параллелепипед в квадратным основанием. Сторона основания равна a, а толщина параллелепипеда - h (рисунок 3.1.1). В центре элемента располагается отверстие диаметром d_o. Задача изгиба структурного элемента густо перфорированной пластины была рассмотрена отдельно в упругой и упругопластической постановках. При моделировании использовался материал АМГ6 с модулем Юнга E = 70 ГПа и коэффициентом Пуассона $v = 0{,}3$. При расчете в упругопластической постановке использовалась истинная диаграмма деформирования, представленная на рисунке 3.3.1. Предел текучести равен σ_T = 170 МПа [164].

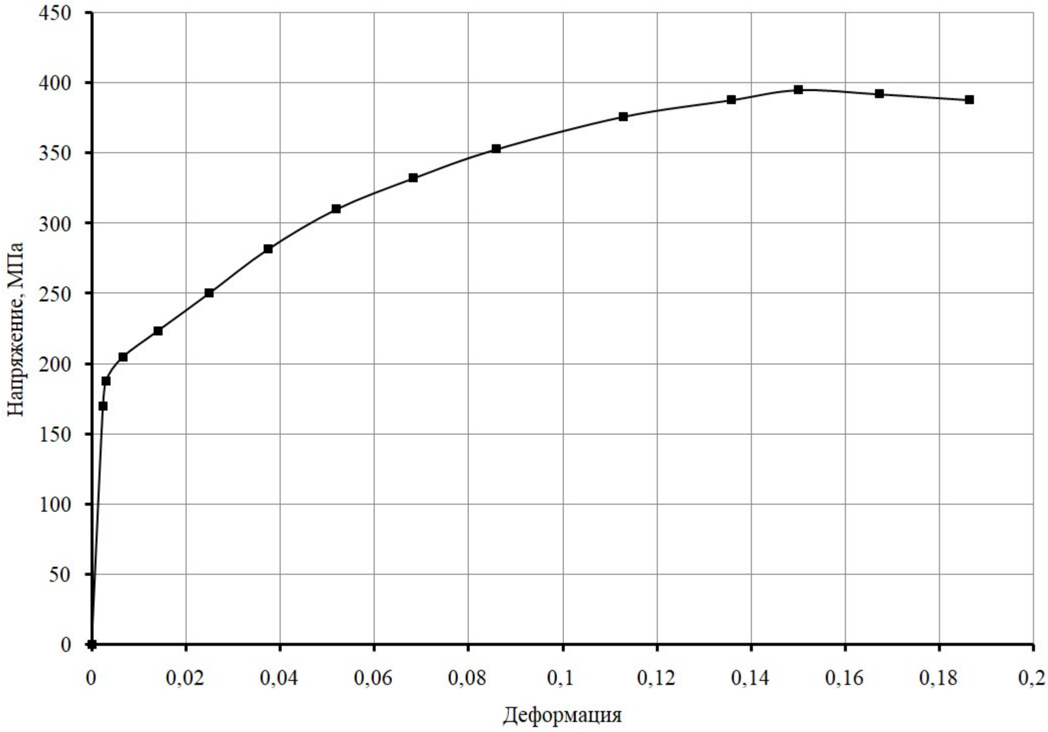


Рисунок 3.3.1 – Истинная диаграмма деформирования

Наличие осей симметрии позволило рассмотреть лишь ¼ часть структурного элемента. На одной боковой грани структурного элемента прикладывался изгибающий момент. Для упругопластической постановки величина момента выбиралась таким образом, чтобы максимальные пластические деформации вблизи отверстия составляли порядка 10%. На остальных боковых гранях задавалось условие симметрии, которое подразумевает задание нулевых нормальных перемещений и касательных напряжений. На рисунке 3.3.2 представлено расположение граничных условий при численном моделировании.

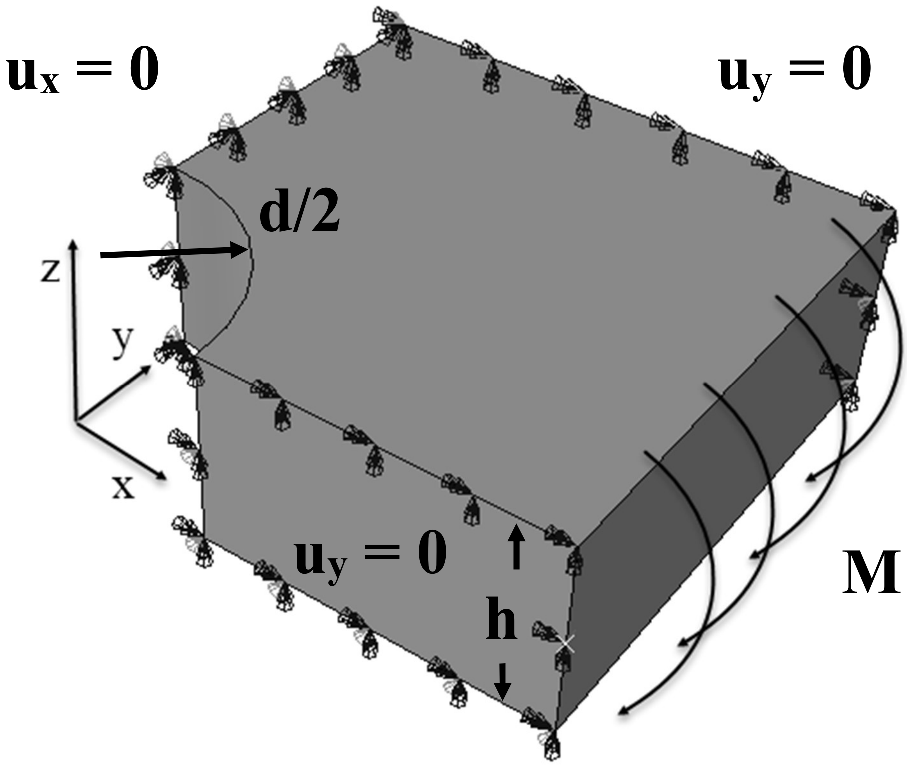


Рисунок 3.3.2 – Граничные условия при исследовании применимости теории пластин и оболочек типа Тимошенко для задач изгиба

В качестве результата исследования рассматривалось значение угла поворота грани, на которой задано значение изгибающего момента. Исследованы две постановки задачи. В первом случае при моделировании использовались соотношения теории пластин и оболочек, основанной на соотношениях Тимошенко. Во втором варианте задача решена методами сплошной среды. Рассмотрены структурные элементы с различным значением пористости и толщины. По результатам исследования определены зависимость угла поворота от пористости и толщины упругой и упругопластической пластины. Результаты, полученные при полном трехмерном моделировании, использовались в качестве эталонного результата. Отличием решения, полученного по теории пластин и оболочек, более чем на 5 % от эталонного решения определялись пределы применимости.

На рисунке 3.3.3 представлены графики изменения погрешности расчета изгиба упругого структурного элемента, выполненного с использованием теории пластин и оболочек типа Тимошенко, в зависимости от толщины и пористости пластины.

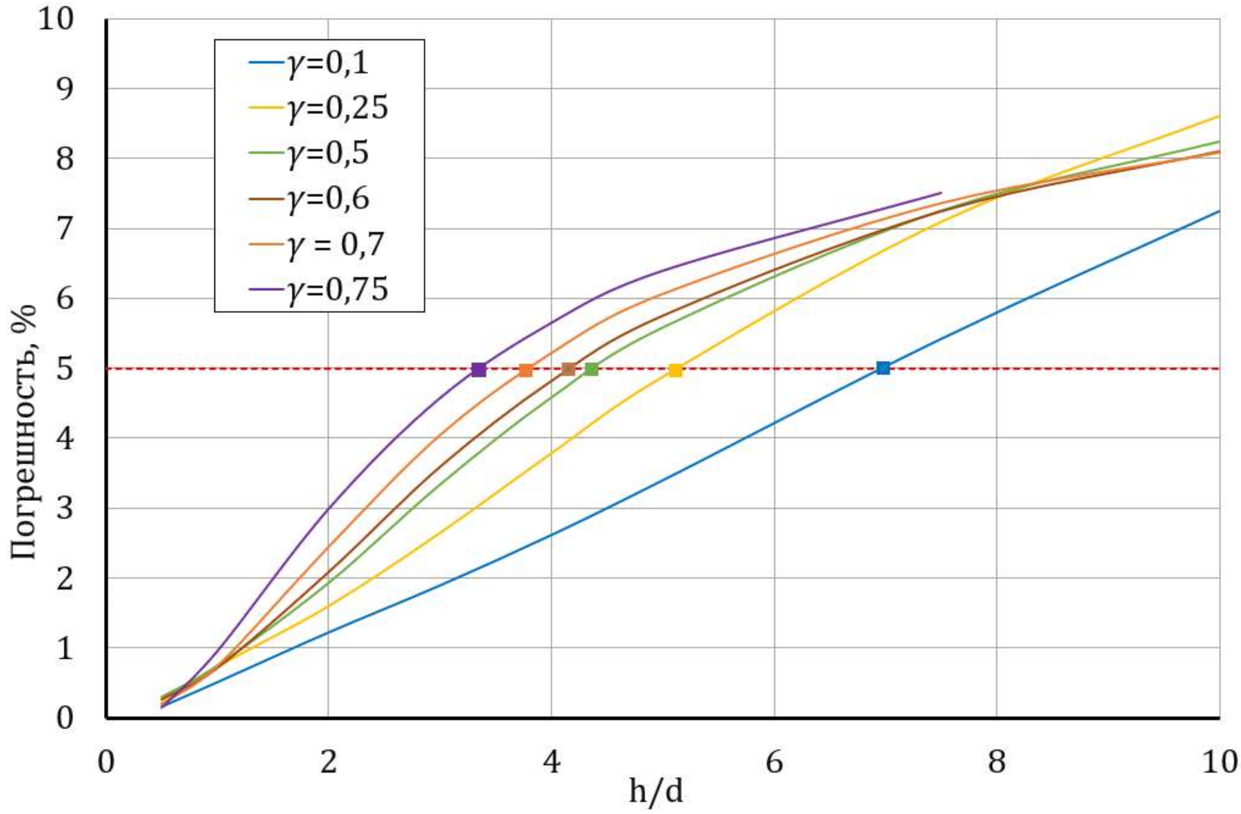


Рисунок 3.3.3 – Графики изменения погрешности расчета изгиба упругого структурного элемента, выполненного при помощи теории пластин и оболочек типа Тимошенко, от трехмерной постановки.

Графики наглядно показывают, что с увеличением пористости и толщины структурного элемента погрешность теории пластин и оболочек возрастает. На рисунке красной пунктирной линией показана предельная погрешность в 5%, которая является приемлемой для расчетов. Точки пересечения графиков с линией предельной погрешности определяют для каждого значения пористости максимальную толщину структурного элемента, при которой теория пластин и оболочек типа Тимошенко даёт приемлемый результат.

На рисунке 3.3.4 представлены графики изменения погрешности расчета изгиба упругопластического структурного элемента, выполненного с использованием теории пластин и оболочек типа Тимошенко, в зависимости от толщины и пористости пластины.

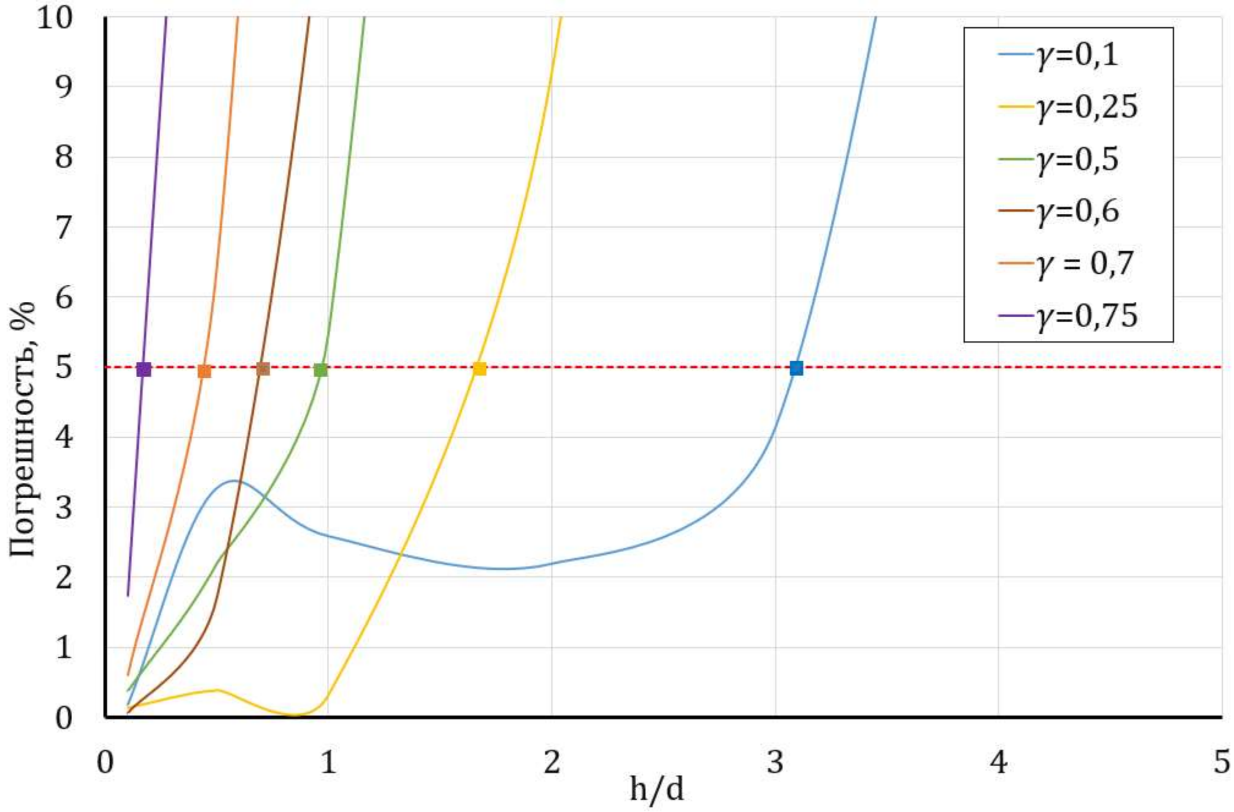


Рисунок 3.3.4 – Графики изменения погрешности расчета изгиба упругопластического структурного элемента, выполненного при помощи теории пластин и оболочек типа Тимошенко, от трехмерной постановки.

Графики демонстрируют более интенсивное по сравнению с упругой постановкой возрастание погрешностей при увеличении пористости и толщины структурного элемента.

На рисунке 3.3.5 представлены итоговые кривые, описывающие границы применимости теории пластин типа Тимошенко в задачах упругопластического изгиба структурного элемента густо перфорированных пластин.

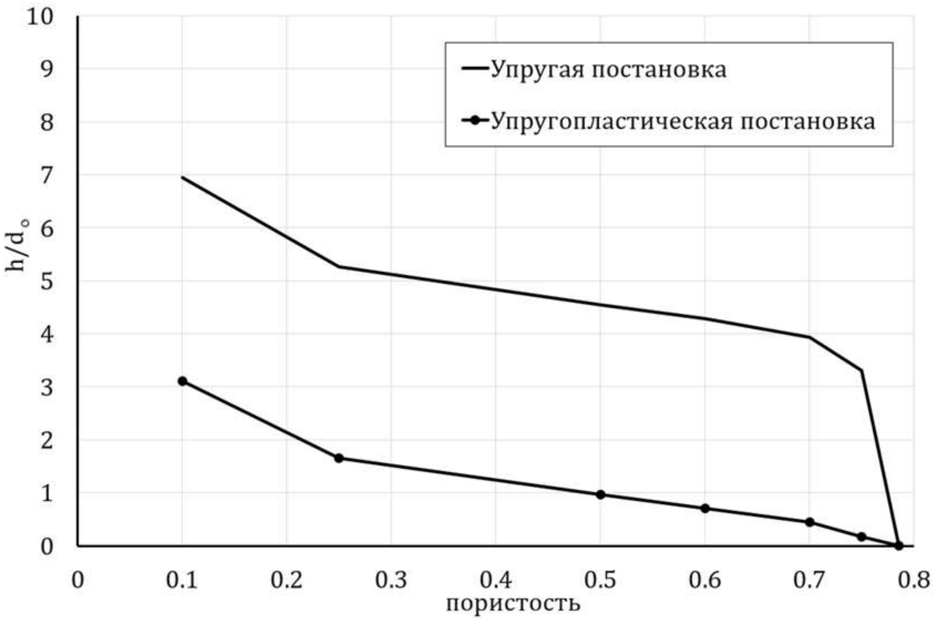


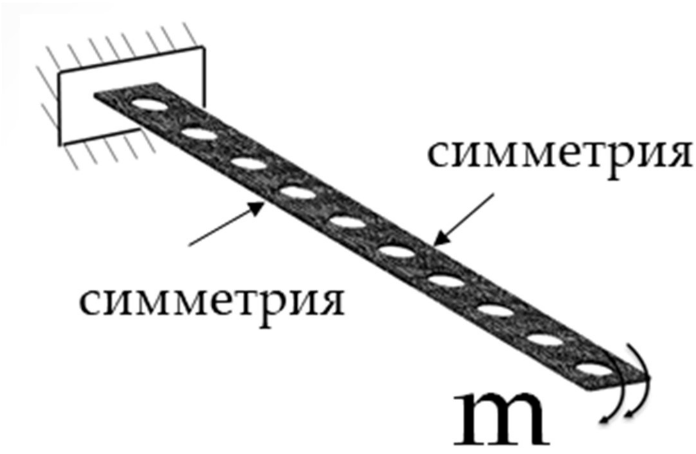
Рисунок 3.3.5 - Границы применимости теории пластин типа Тимошенко в задачах изгиба густо перфорированных пластин

Параметры, расположенные ниже каждого из графиков, относятся к области применимости теории пластин типа Тимошенко в задачах изгиба густо перфорированных пластин. Очевидно, что предел применимости для упругой постановки значительно шире, чем для упругопластической. Результаты исследований показали, что при уменьшении пористости область применимости теории пластин и оболочек типа Тимошенко расширяется.

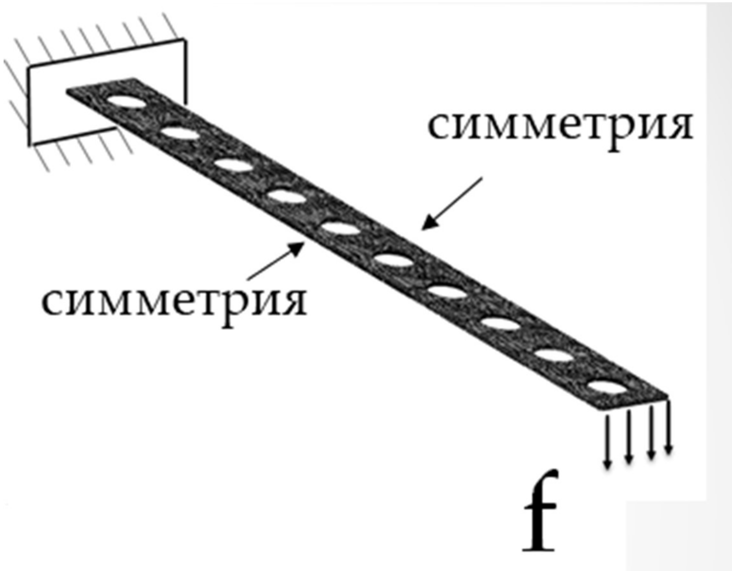
3.4. Исследование применимости принципа двумерного подобия в задаче упругопластического изгиба густо перфорированной пластины

Проведены исследования применимости принципа двумерного подобия для задачи упругопластического изгиба густо перфорированной пластины. Для этого была рассмотрена пластина длиной L = 1 м и толщиной h = 10 мм, перфорированная одним рядом отверстий. Пластина представлена, как ряд структурных элементов в виде параллелепипедов с квадратным основанием и круглым отверстием в центре. Диаметр отверстия и величина площади основания структурного элемента определяли пористость конструкции. Принцип подобия позволяет заменить набор структурных элементов конструкции на один подобный структурный элемент, в котором будет реализовываться среднее по этому набору напряженно-деформированное состояние. Для исследования пределов применимости указанного принципа были рассмотрены пластины неизменной пористости, но с различным количеством структурных элементов. Исследованы пластины с пористостью 0,1 и 0,65.

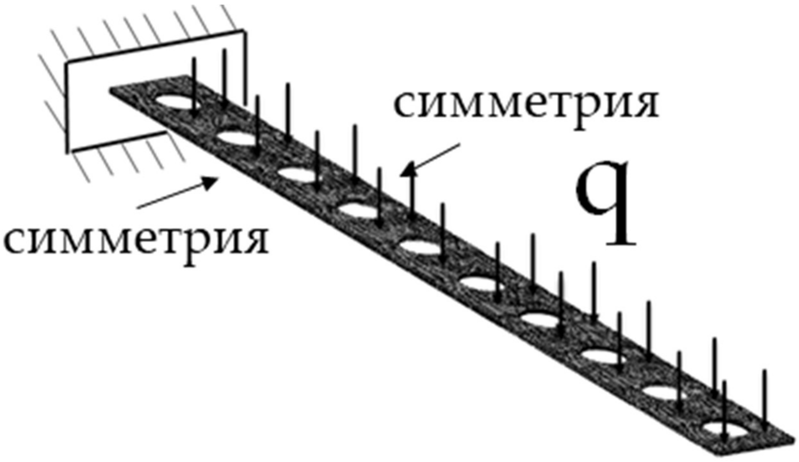
Отдельно друг от друга рассмотрены задачи упругопластического изгиба густо перфорированной жестко защемленной пластины под действием момента, силы и распределённой по поверхности пластины нагрузке. На рисунке 3.4.1 представлены расчетные схемы всех рассмотренных вариантов.



а) изгибающий момент



б) изгибающая сила



в) распределенная по поверхности нагрузка

Рисунок 3.4.1 – Расчетные схемы для задачи упругопластического изгиба густо перфорированной пластины

На боковых гранях пластины задавалось условие симметрии – равенство нулю нормальных перемещений и касательных напряжений. Значения изгибающего момента, силы и распределенной нагрузки выбраны таким образом, чтобы в заделке формировался одинаковый по величине момент реакции. Для описания поведения упругопластического материала использовалась диаграмма деформирования, представленная на рисунке 3.3.1. Максимальные пластические деформации, возникающие в конструкции, составляли 0,024, что соответствовало максимальным напряжениям 1,6σ_T.

Основываясь на принципе подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе, были рассмотрены пластины с 5, 10, 20 и 50 отверстиями. При варьировании количеством отверстий изменялась ширина пластины, но оставалась постоянной пористость, длина и толщина. В качестве результатов моделирования принимались прогиб и угол поворота свободного от закрепления конца пластины и максимальное напряжение, возникающее в конструкции. Решение, полученное для пластины, перфорированной 50 отверстиями, было принято, как эталонное. В результате получено изменение погрешности вычислений в зависимости от количества используемых структурных элементов. Погрешность определялась по формуле:

$$\delta = \frac{|f_i - f_{50}|}{f_{50}} \cdot 100\%, \text{ где}$$

f_i – значение прогиба или угла поворота свободного конца пластины;

f_{50} – значение прогиба или угла поворота свободного конца пластины с 50 отверстиями.

На рисунках 3.4.2 – 3.4.4 представлены изменение погрешности результатов моделирования изгиба густо перфорированной пластины пористостью 0,1 в зависимости от количества структурных элементов и вида нагружения.

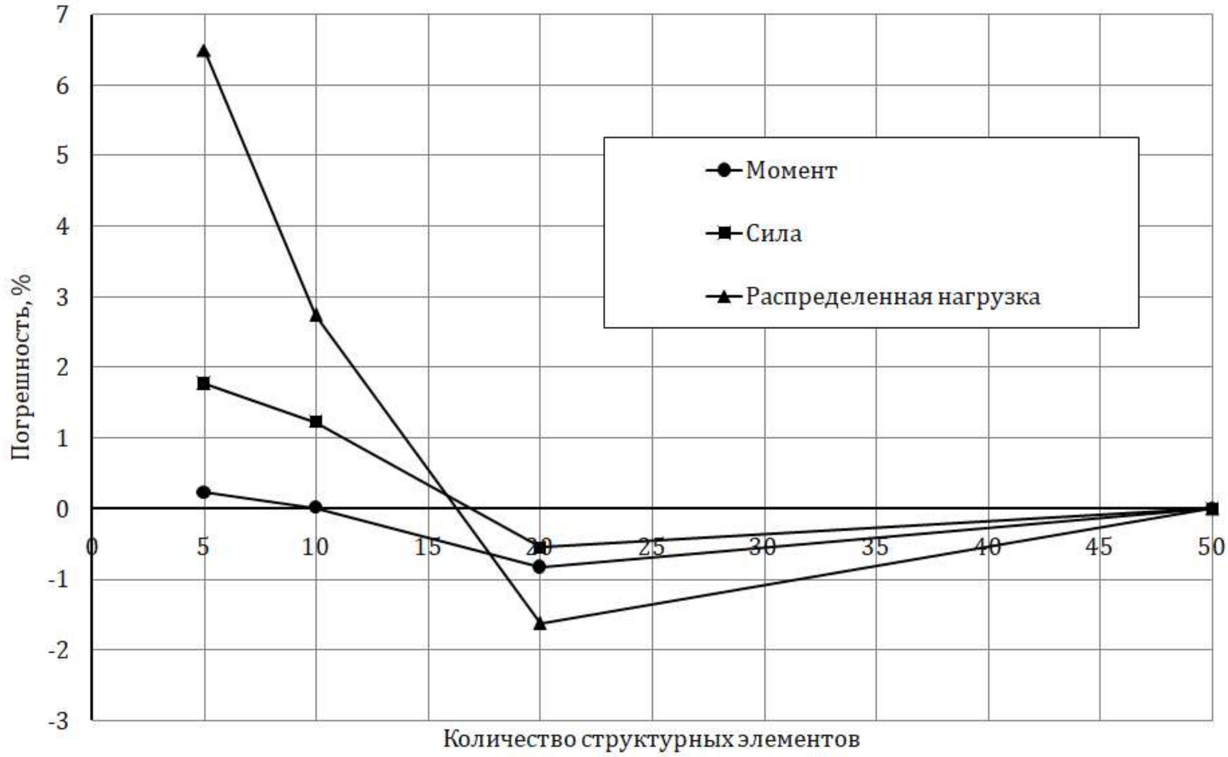


Рисунок 3.4.2 – Изменение погрешности вычисления прогиба свободного конца пластины (γ = 0,1) в зависимости от количества структурных элементов и вида нагружения

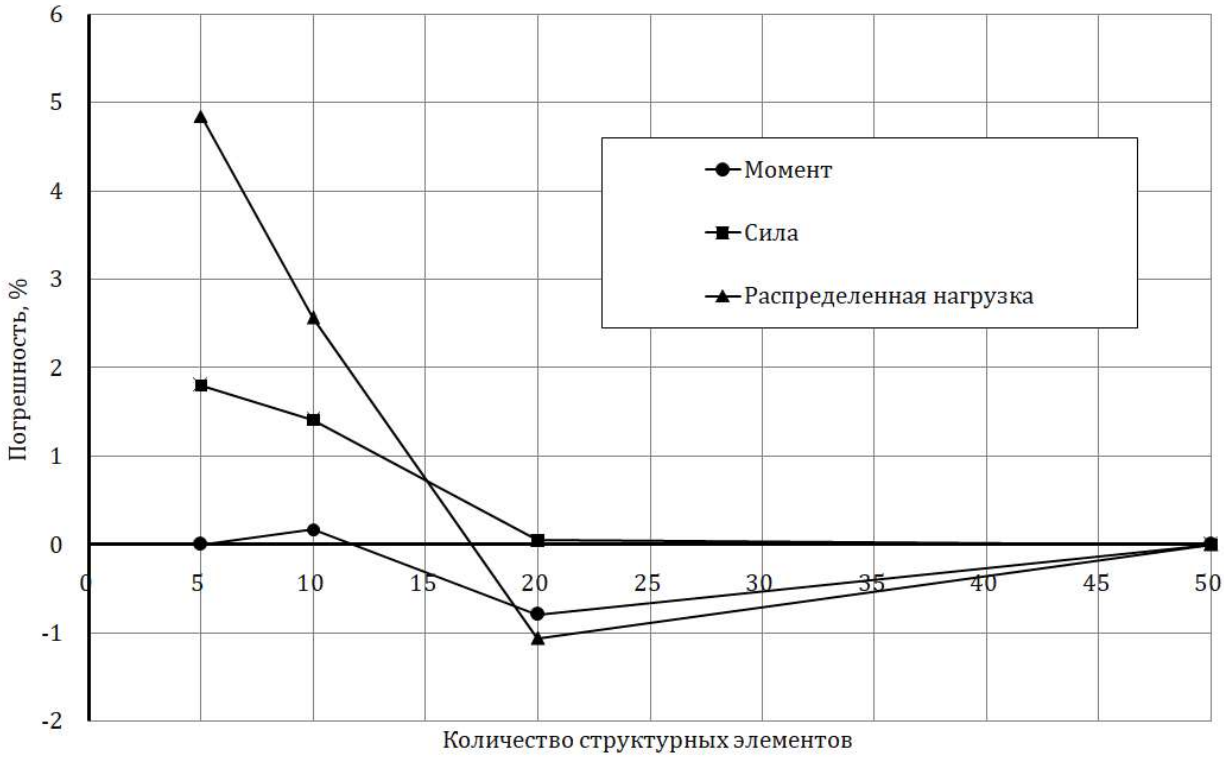


Рисунок 3.4.3 – Изменение погрешности вычисления угла поворота свободного конца пластины (γ = 0,1) в зависимости от количества структурных элементов и вида нагружения

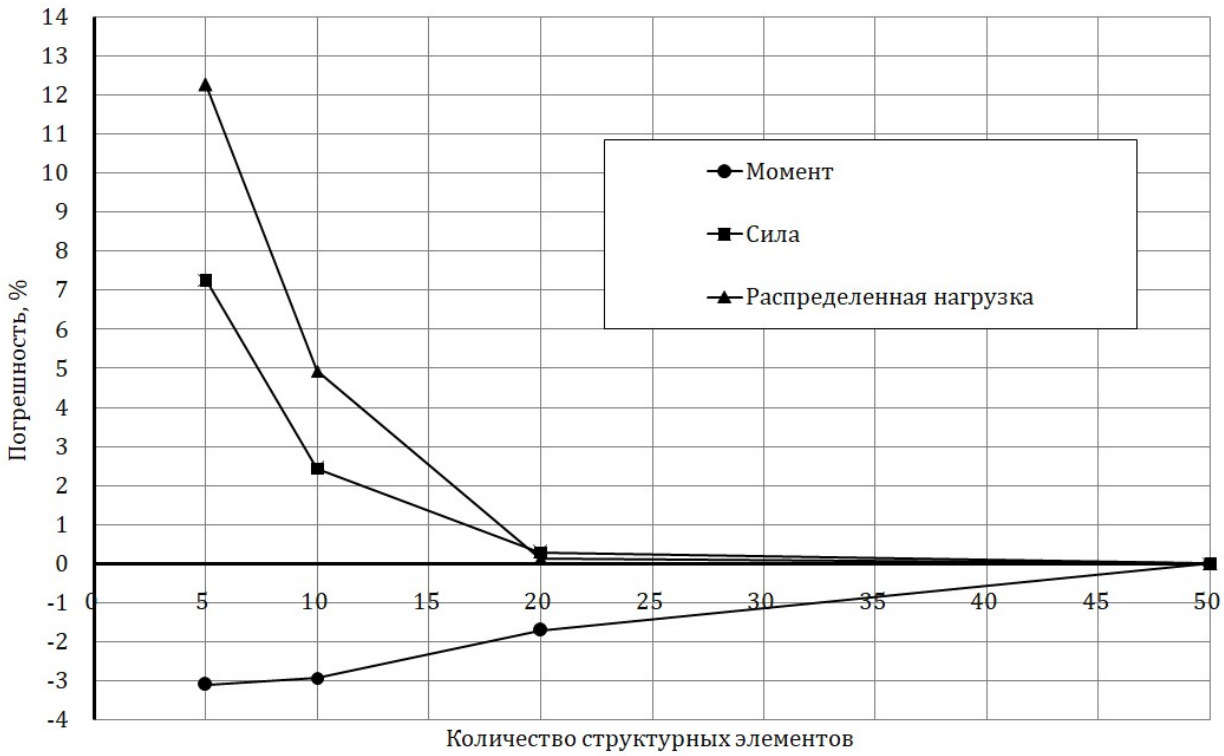
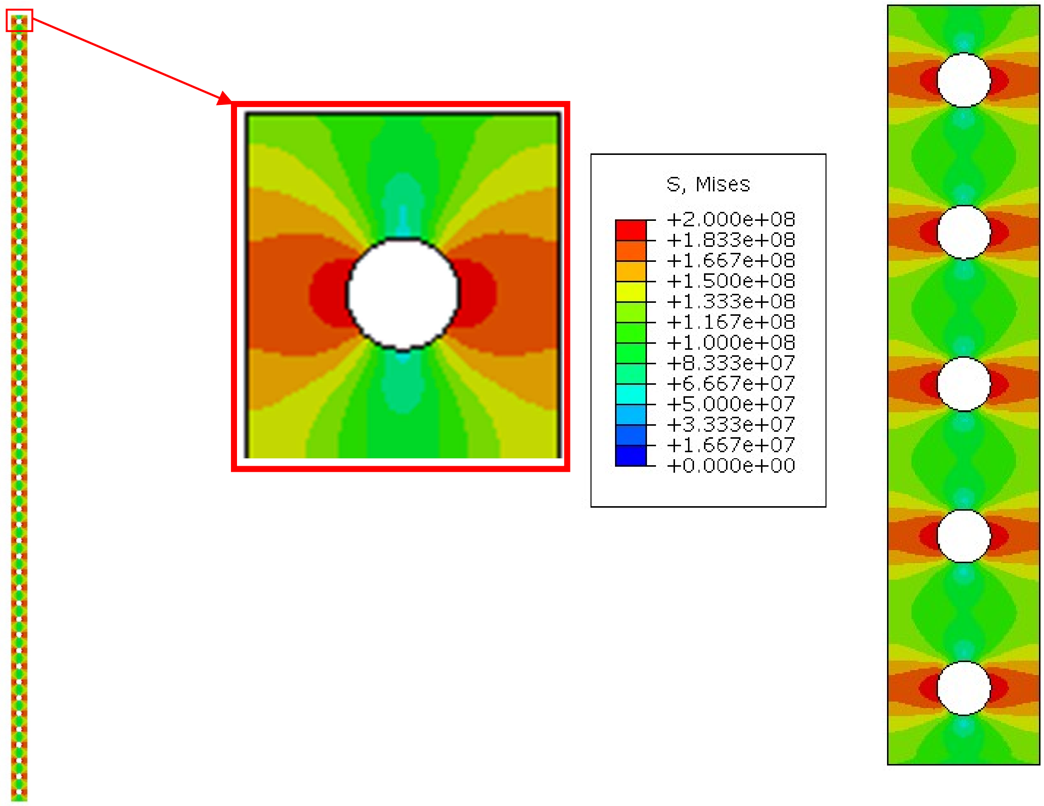


Рисунок 3.4.4 – Изменение погрешности вычисления максимального напряжения (γ = 0,1) в зависимости от количества структурных элементов и вида нагружения

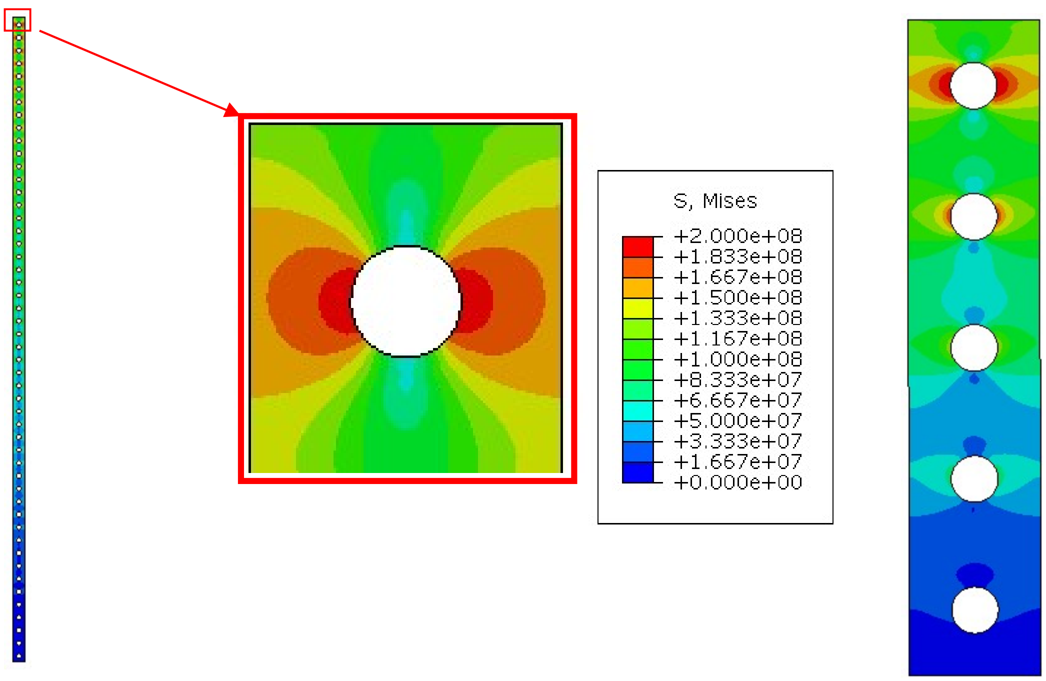
Представленные графики показывают, что при нагружении густо перфорированной пластины изгибающим моментом, результат не зависит от количества структурных элементов, т.к. погрешности вычислений менее 3%. Для варианта с изгибающей силой погрешности чуть выше, но не превышают 5%. В случае пластины с распределенной нагрузкой наблюдаются погрешности более 5% при снижении количества структурных элементов до 5 штук. Рост погрешности в зависимости от типа нагружения связан с тем, что внутренний изгибающий момент имеет переменное значение вдоль пластины. При действии распределенной нагрузки зависимость квадратичная, при воздействии силы – линейная, а при нагружении моментом – константная. Таким образом, принцип двумерного подобия позволяет сократить количество структурных элементов в густо перфорированной пластине при моделировании изгиба от 5 до 10 раз в зависимости от типа нагружения.

На рисунках 3.4.5 – 3.4.7 представлены для сравнения распределения напряжений в пластине с 5 и 50 структурными элементами.



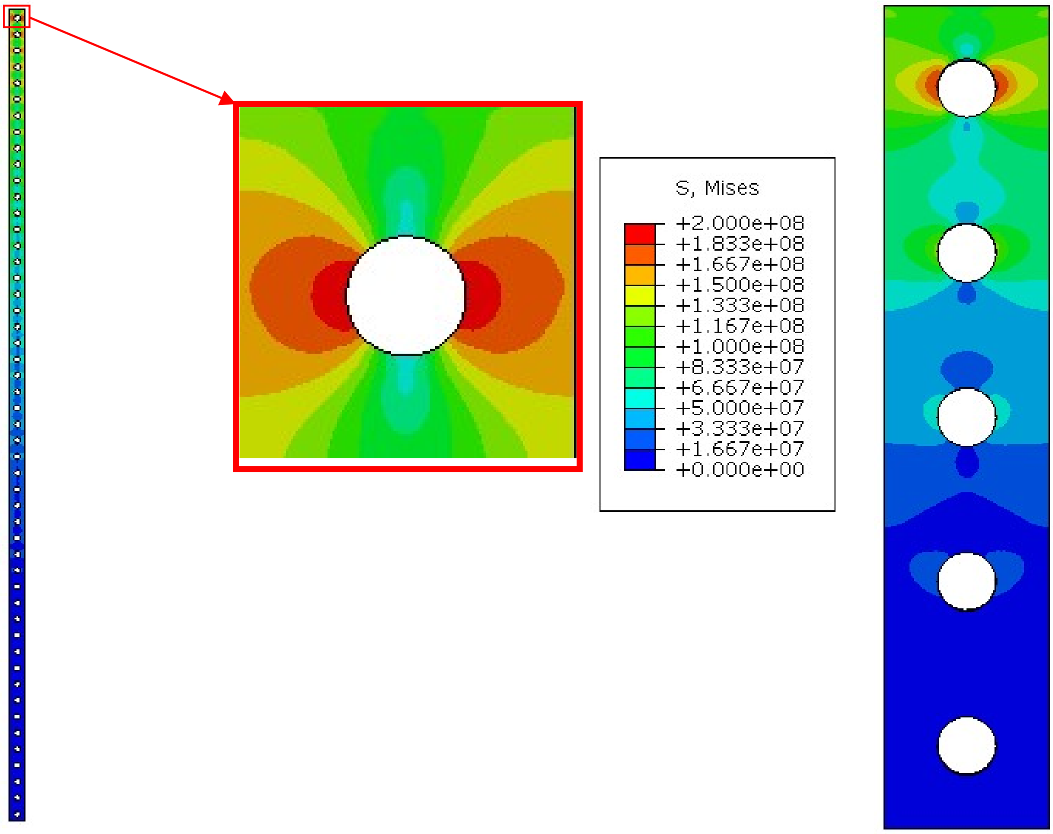
50 структурных элементов 5 структурных элементов

Рисунок 3.4.5 – Распределение напряжений по Мизесу при нагружении густо перфорированной пластины изгибающим моментом (γ = 0,1).



50 структурных элементов 5 структурных элементов

Рисунок 3.4.6 – Распределение напряжений по Мизесу при нагружении густо перфорированной пластины изгибающей силой (γ = 0,1).



50 структурных элементов 5 структурных элементов

Рисунок 3.4.7 – Распределение напряжений по Мизесу при нагружении густо перфорированной пластины распределенной нагрузкой (γ = 0,1).

Рисунок 3.4.5 показывает, что при воздействии на пластину изгибающим моментом напряженно-деформированные состояния в структурном элементе не зависит от их количества. Для пластин, нагруженных изгибающей силой и распределённой нагрузкой, распределение напряжения зависит от расположения структурного элемента в пластине. Поэтому в этих случаях не наблюдается полной идентичности в распределении напряжений при изменении количества структурных элементов в пластине.

На рисунках 3.4.8 – 3.4.10 представлены графики изменения погрешности контрольных величин в зависимости от количества использованных структурных элементов при пористости конструкции 0,65.

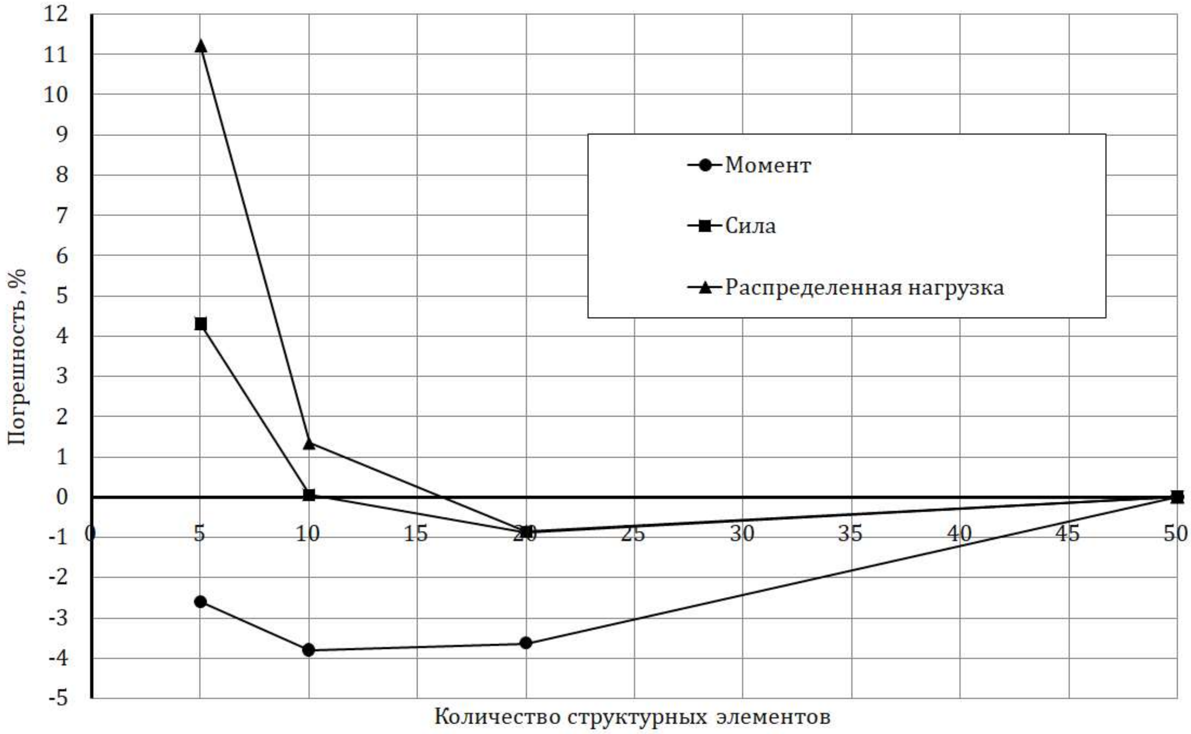


Рисунок 3.4.8 - Изменение погрешности вычисления прогиба свободного края пластины (γ = 0,65) в зависимости от количества структурных элементов и вида нагружения

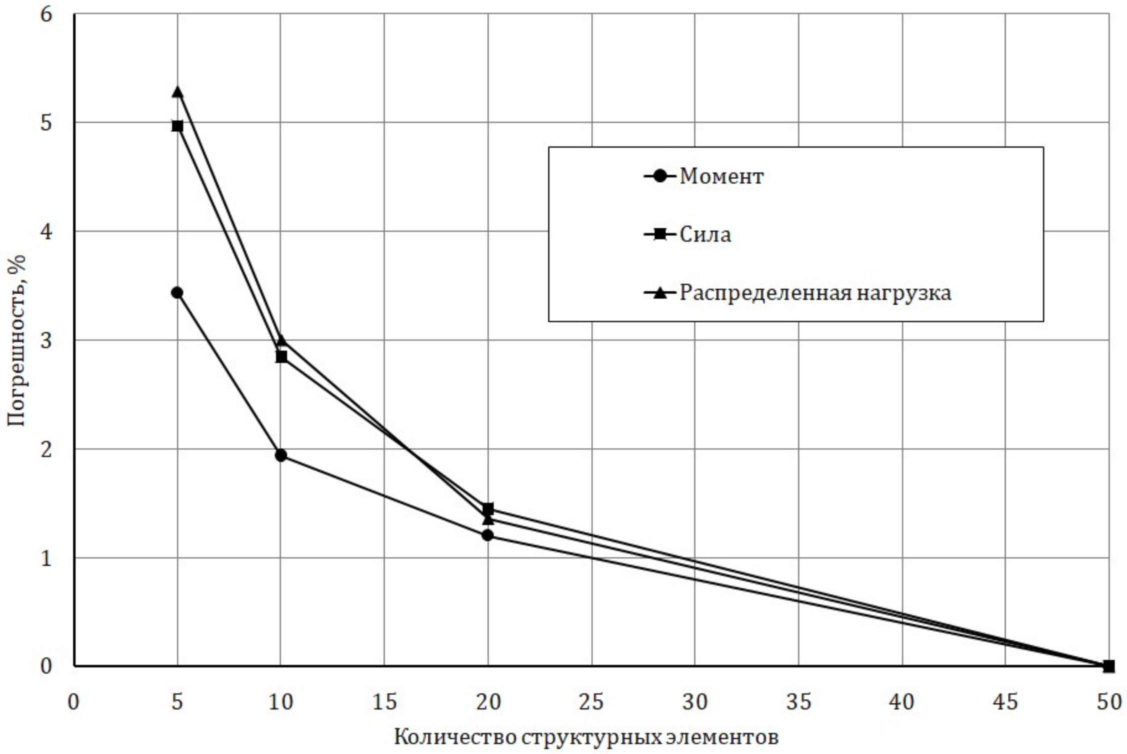


Рисунок 3.4.9– Изменение погрешности вычисления угла поворота свободного края пластины (γ = 0,65) в зависимости от количества структурных элементов и вида нагружения

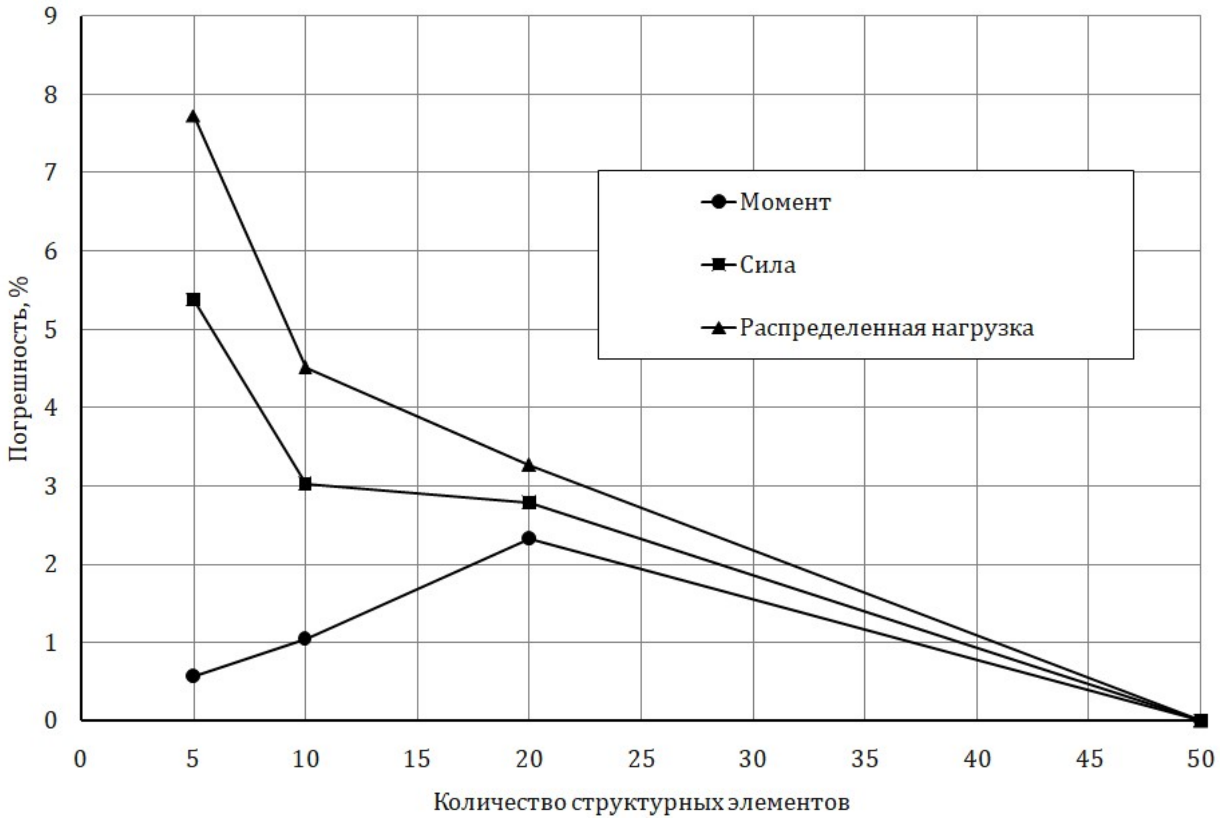
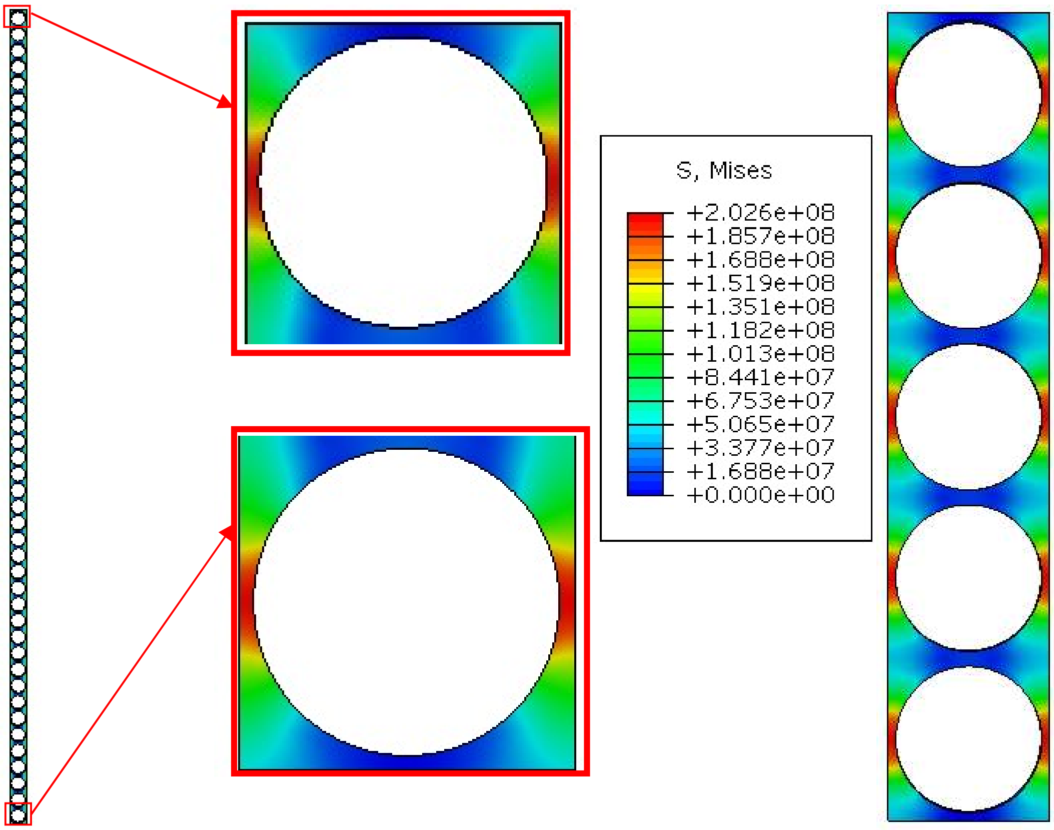


Рисунок 3.4.10 – Изменение погрешности вычисления максимального напряжения (γ = 0,1) в зависимости от количества структурных элементов и вида нагружения

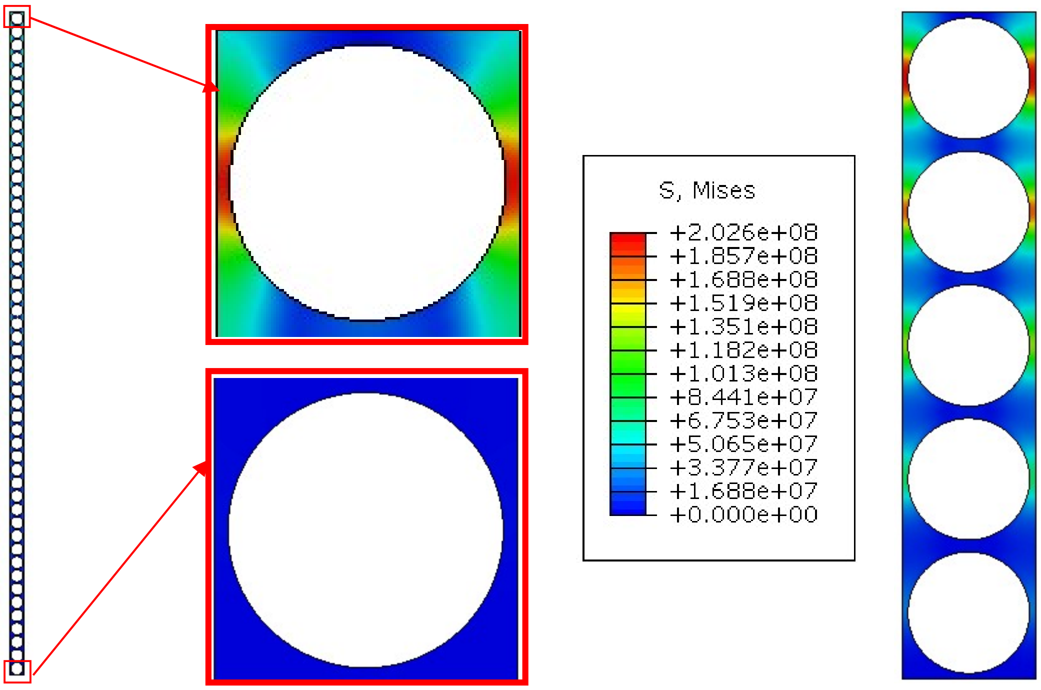
Представленные результаты весьма схожи с данными, полученными при изгибе пластины малой пористости, равной 0,1. Погрешности более 5% наблюдаются при действии распределенной нагрузки на пластину с 5-ью структурными элементами. Во всех остальных вариантах отличия не превышают 5%, что говорит о хорошей эффективности принципа двумерного подобия для задач изгиба густо перфорированных пластин.

На рисунках 3.4.11 – 3.4.13 представлены для сравнения распределения напряжений в пластине с 5 и 50 структурных элементов.



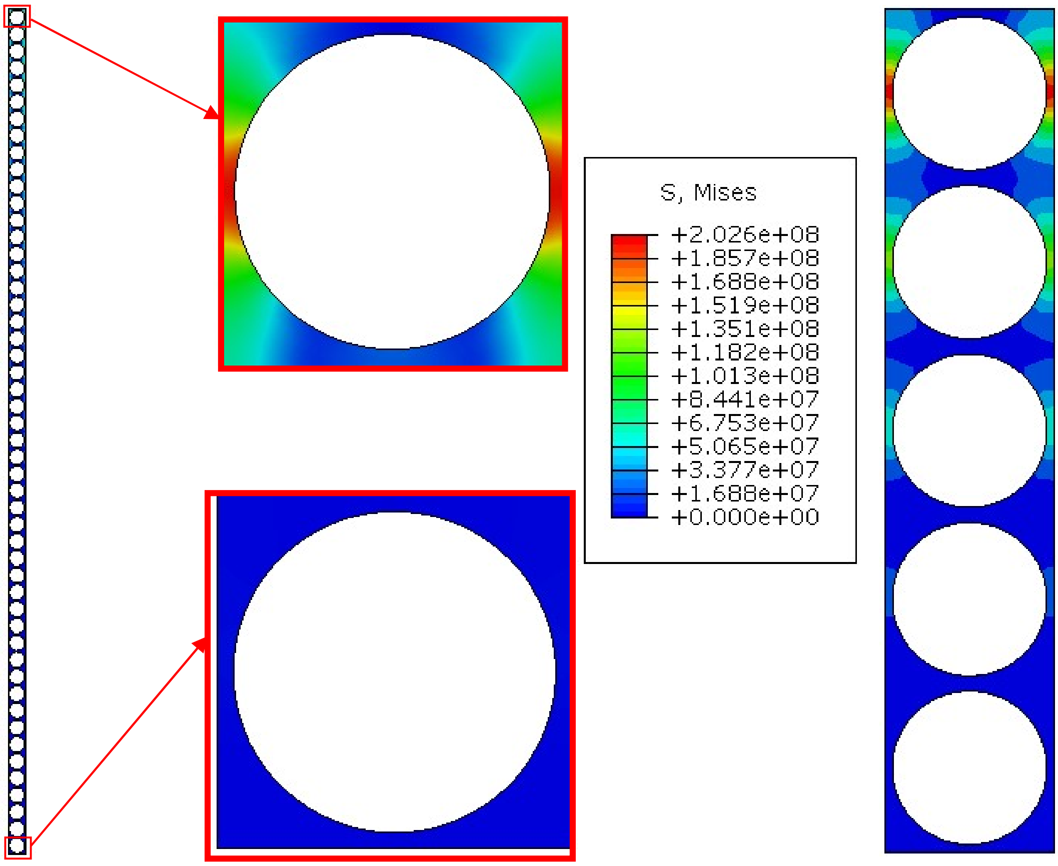
50 структурных элементов 5 структурных элементов

Рисунок 3.4.11 – Распределение напряжений по Мизесу при нагружении густо перфорированной пластины изгибающим моментом (γ = 0,65).



50 структурных элементов 5 структурных элементов

Рисунок 3.4.12 – Распределение напряжений по Мизесу при нагружении густо перфорированной пластины изгибающей силой (γ = 0,65).



50 структурных элементов 5 структурных элементов

Рисунок 3.4.13 – Распределение напряжений по Мизесу при нагружении густо перфорированной пластины распределенной нагрузкой (γ = 0,65).

Также как и для пористости 0,1 при нагружении пластины изгибающим моментом распределение напряжений не зависит от количества структурных элементов в пластине. В случае изгибающей силы и распределенной нагрузки не наблюдается идентичности в распределении напряжений при изменении количества структурных элементов в пластине.

3.5. Исследование применимости принципа двумерного подобия при расчете устойчивости густо перфорированной упругопластической цилиндрической оболочки под действием осевого сжатия

Проведены исследования устойчивости упругопластической цилиндрической густо перфорированной оболочки при осевом сжатии. Рассмотрена оболочка радиусом R = 636,5 мм и длиной L = 500 мм. Моделирование выполнено в нестационарной упругопластической постановке теории сплошной среды. Рассмотрена густо перфорированная цилиндрическая оболочка, один торец которой неподвижен, а на другом задана осевая скорость перемещений и нулевые значения радиального и окружного перемещений. Для исследования статической устойчивости густо перфорированной цилиндрической оболочки величина скорости равнялась 1 мм/с, что позволило пренебречь силами инерции. Для избавления от ударных эффектов задавалось начальное распределение скорости перемещений по линейному закону. В заделке начальная скорость равнялась нулю, а на подвижном конце – 1 мм/с. Из всей цилиндрической оболочки был выделен сектор, содержащий один ряд структурных элементов. Такая постановка при малых размерах отверстий позволила получать формы потери устойчивости близкие к осесимметричным. На рисунке 3.5.1 представлена схема нагружения густо перфорированной цилиндрической оболочки при исследовании устойчивости при осевом сжатии.

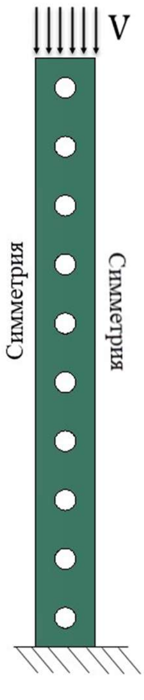
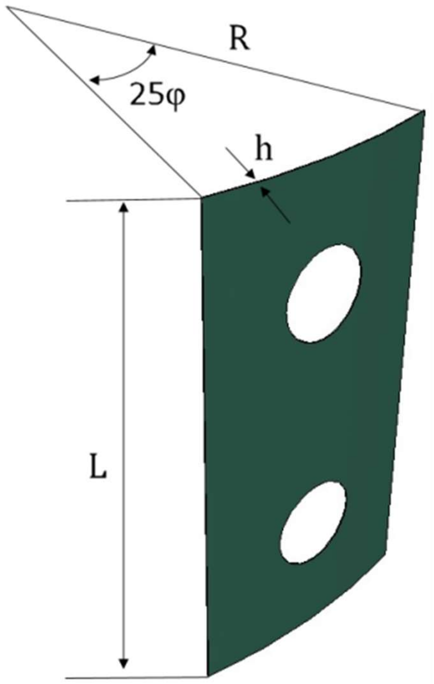
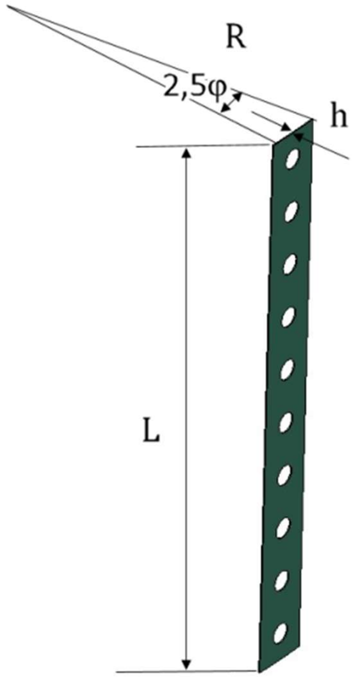


Рисунок 3.5.1 – Схема граничных условий при исследовании устойчивости цилиндрической густо перфорированной оболочки

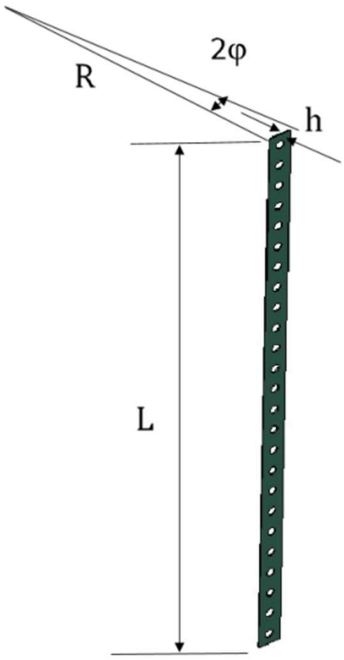
Количество структурных элементов вдоль оси варьировалось. При этом значение пористости, толщина и длина оболочки оставались неизменными. Угол сектора изменялся пропорционально увеличению размеров структурного элемента. Рассмотрены геометрические модели с 2, 10, 25 и 50 отверстиями вдоль оси цилиндрической оболочки.



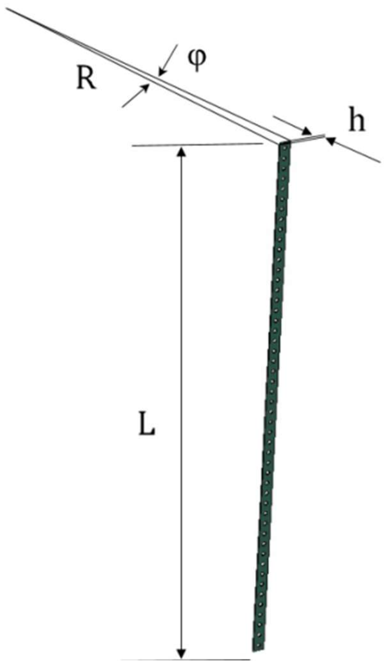
2 отверстия



10 отверстий



25 отверстий



50 отверстий

Рисунок 3.5.2 – Геометрические модели густо перфорированной цилиндрической оболочки

Были исследованы оболочки с коэффициентом пористости 0,1;0,4 и 0,65 и толщинами 1, 5 и 10 мм.

Конечно-элементная сетка была одинаковой внутри одного структурного элемента во всех рассматриваемых вариантах. На рисунке 3.5.3 представлена конечно-элементная сетка, используемая при расчетах. Один представительный объем разделен на 4360 конечных элементов. Толщина оболочки разделена на 5 конечных элементов.

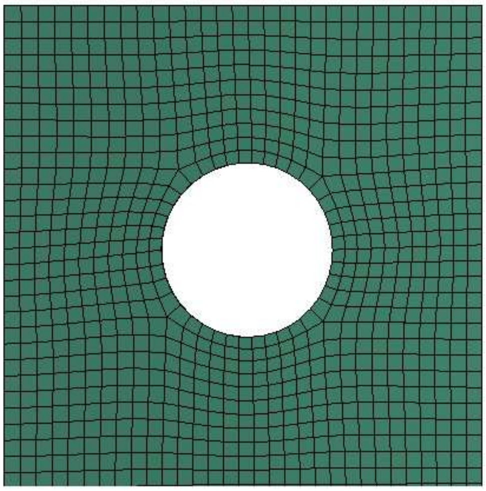


Рисунок 3.5.3 – Конечно-элементная сетка в структурном элементе

Для описания поведения упругопластического материала использовалась диаграмма деформирования, представленная на рисунке 3.3.1.

На рисунках 3.5.4 – 3.5.12 представлены графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца в зависимости от толщины и коэффициента пористости оболочки.

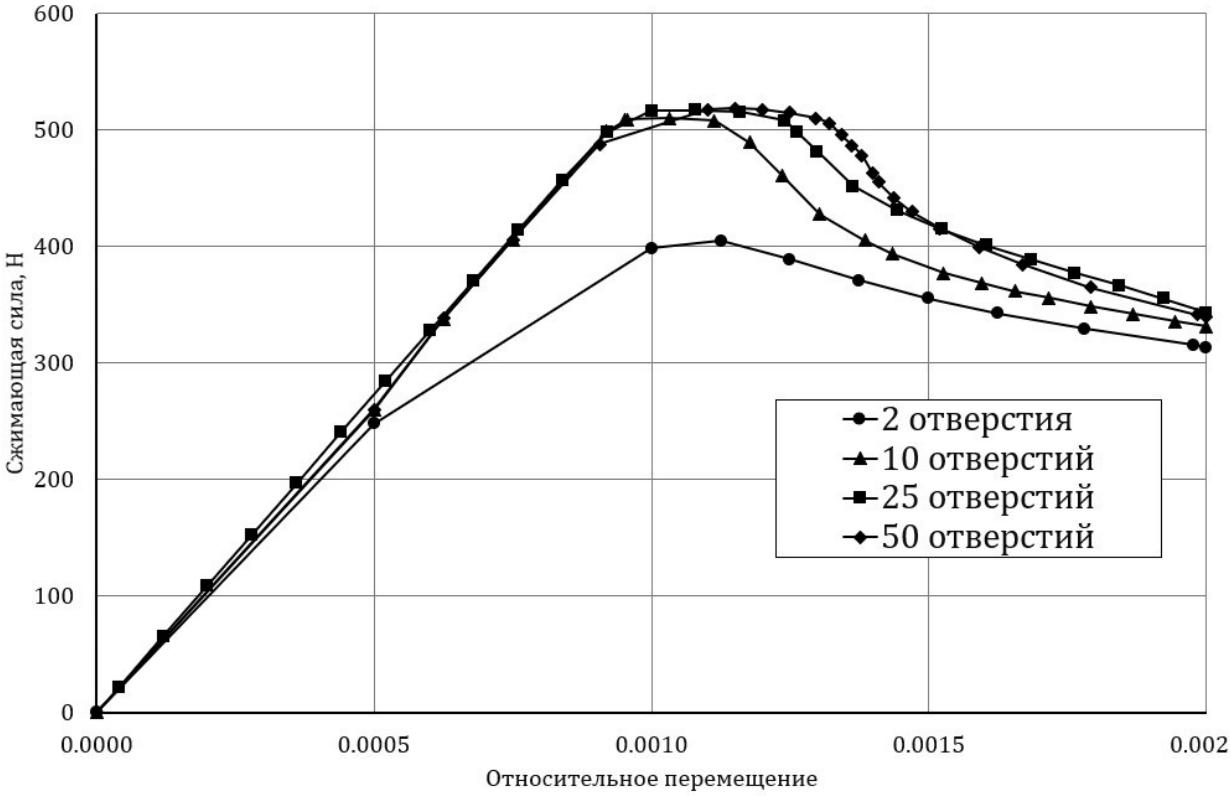


Рисунок 3.5.4 – Графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца оболочки (V = 1 мм/с, h = 1 мм, γ = 0,1)

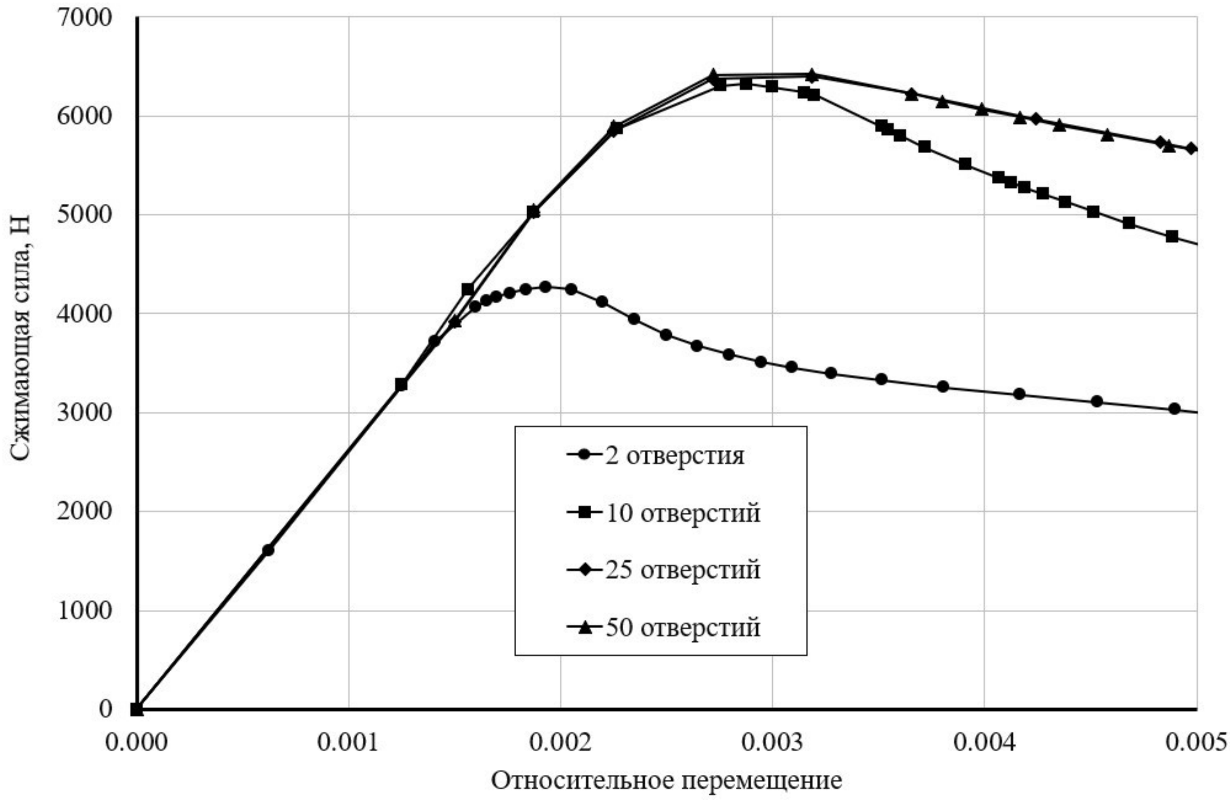


Рисунок 3.5.5 – Графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца оболочки (V = 1 мм/с, h = 5 мм, γ = 0,1)

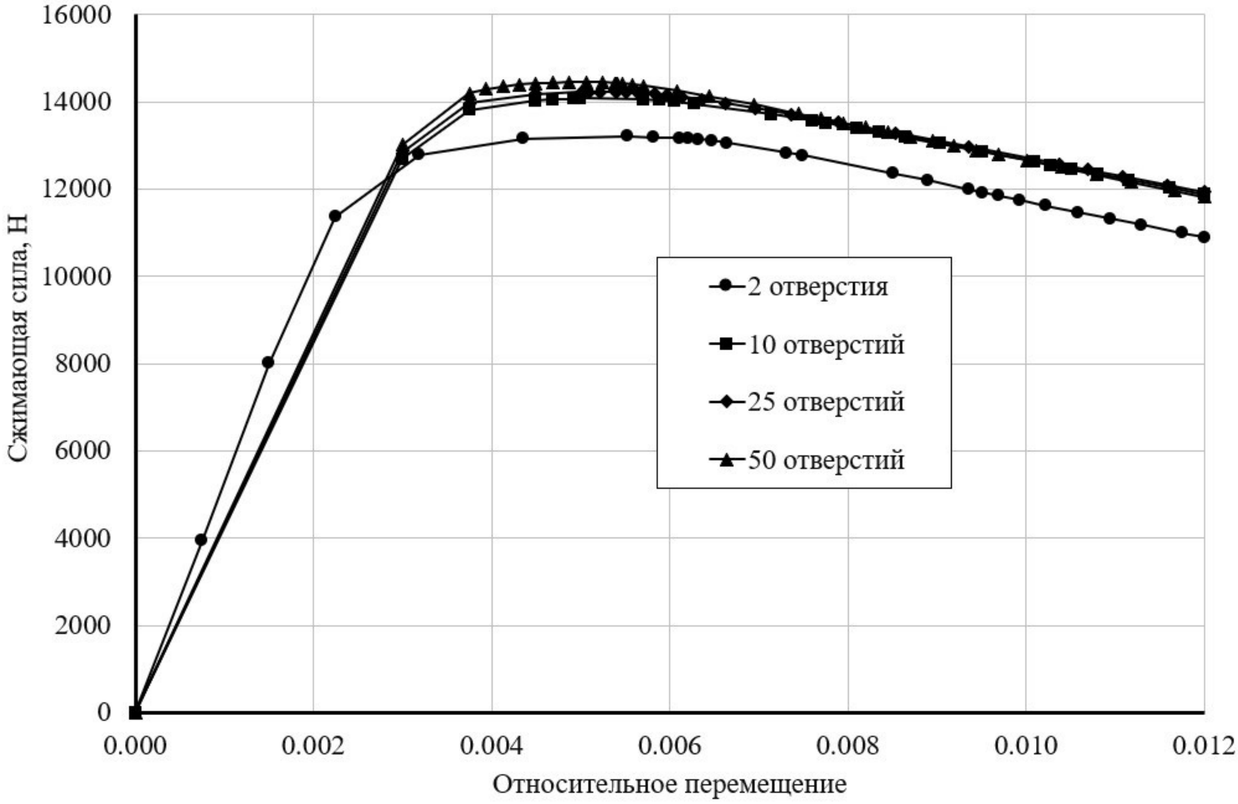


Рисунок 3.5.6 – Графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца оболочки (V = 1 мм/с, h = 10 мм, γ = 0,1)

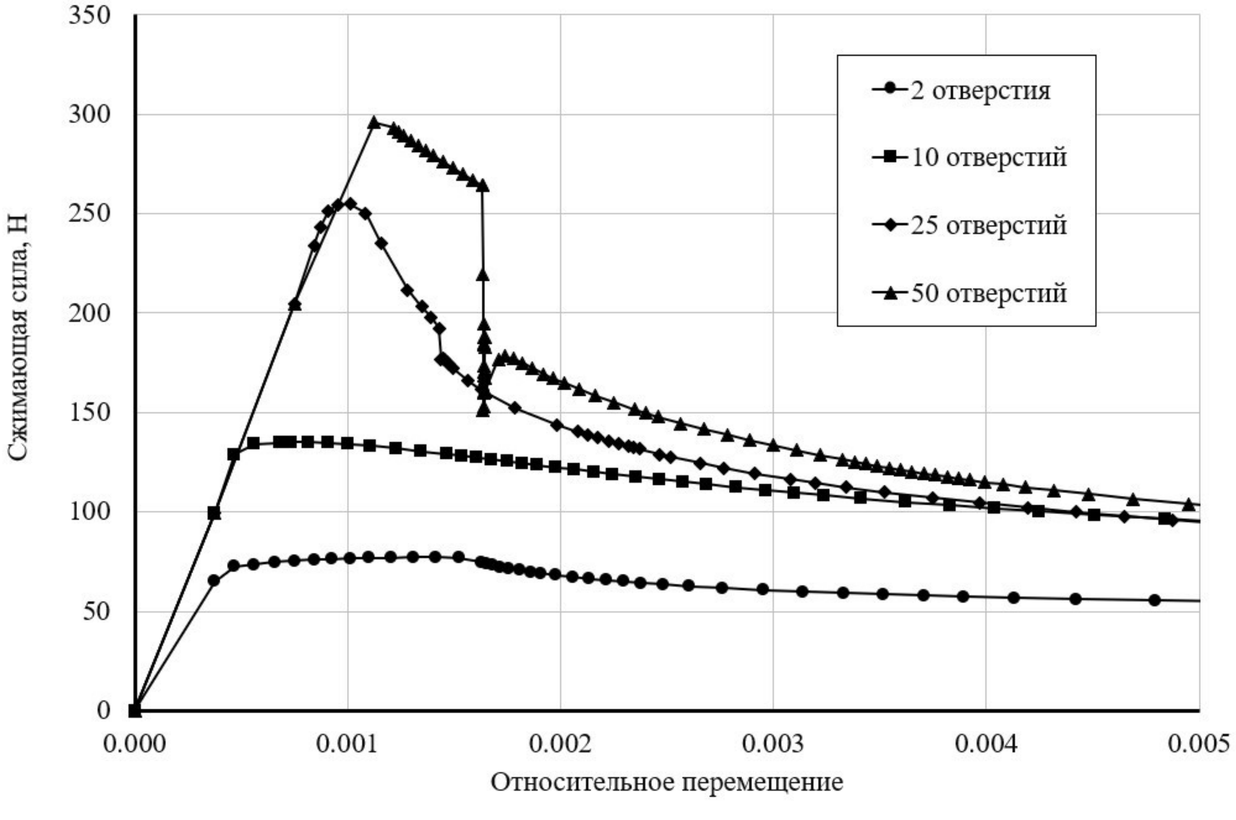


Рисунок 3.5.7 – Графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца оболочки (V = 1 мм/с, h = 1мм, γ = 0,4)

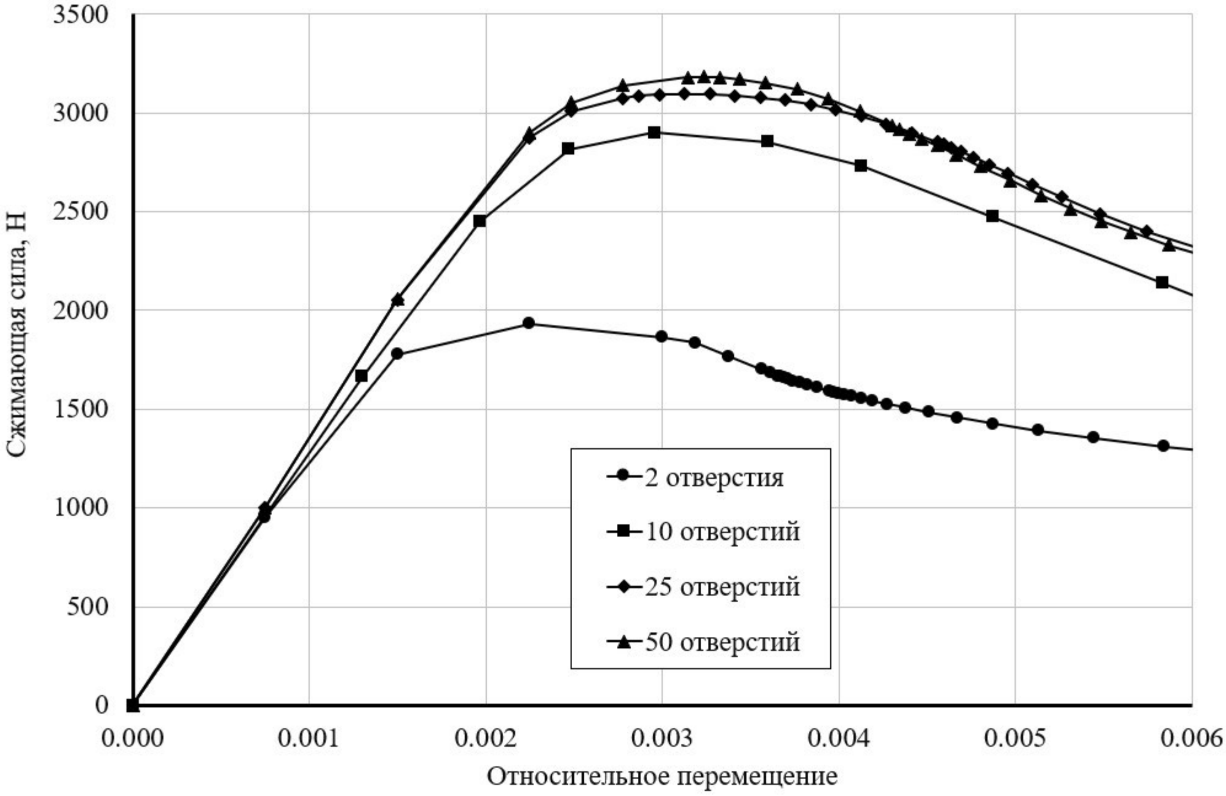


Рисунок 3.5.8 – Графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца оболочки (V = 1 мм/с, h = 5 мм, γ = 0,4)

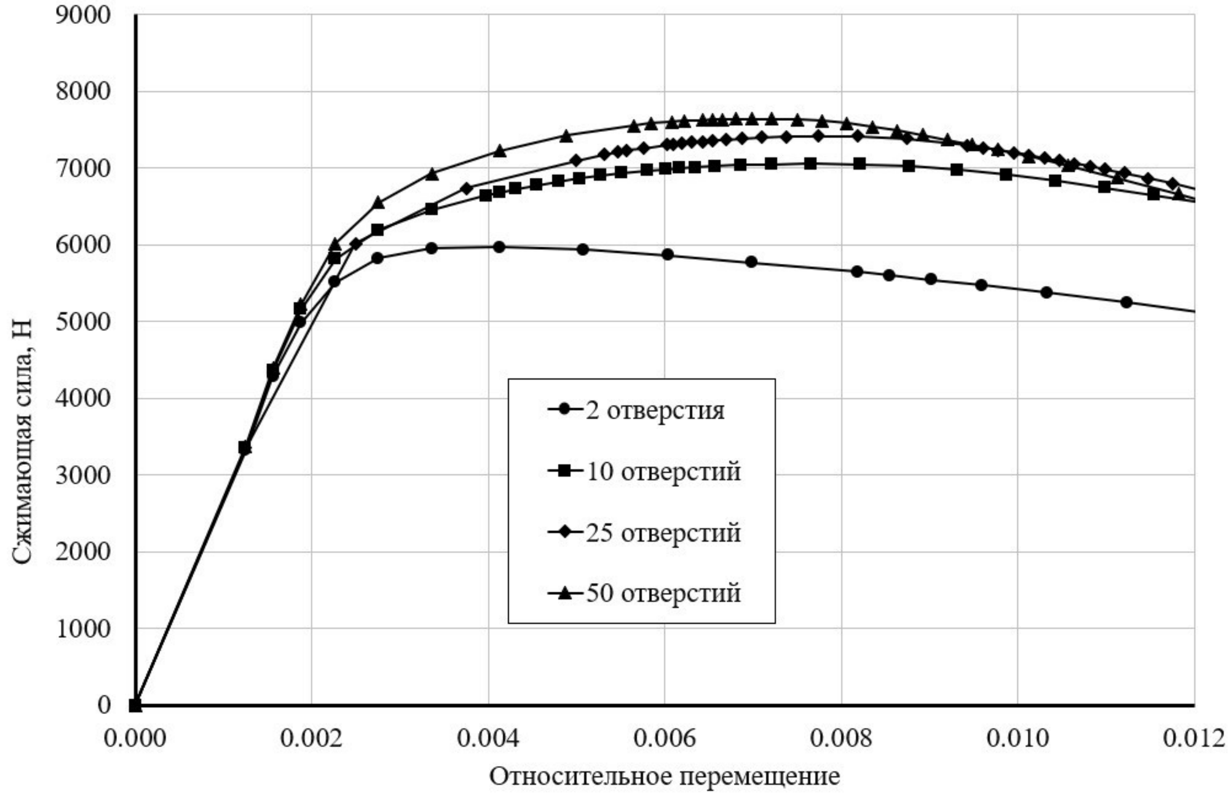


Рисунок 3.5.9 – Графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца оболочки (V = 1 мм/с, h = 10 мм, γ = 0,4)

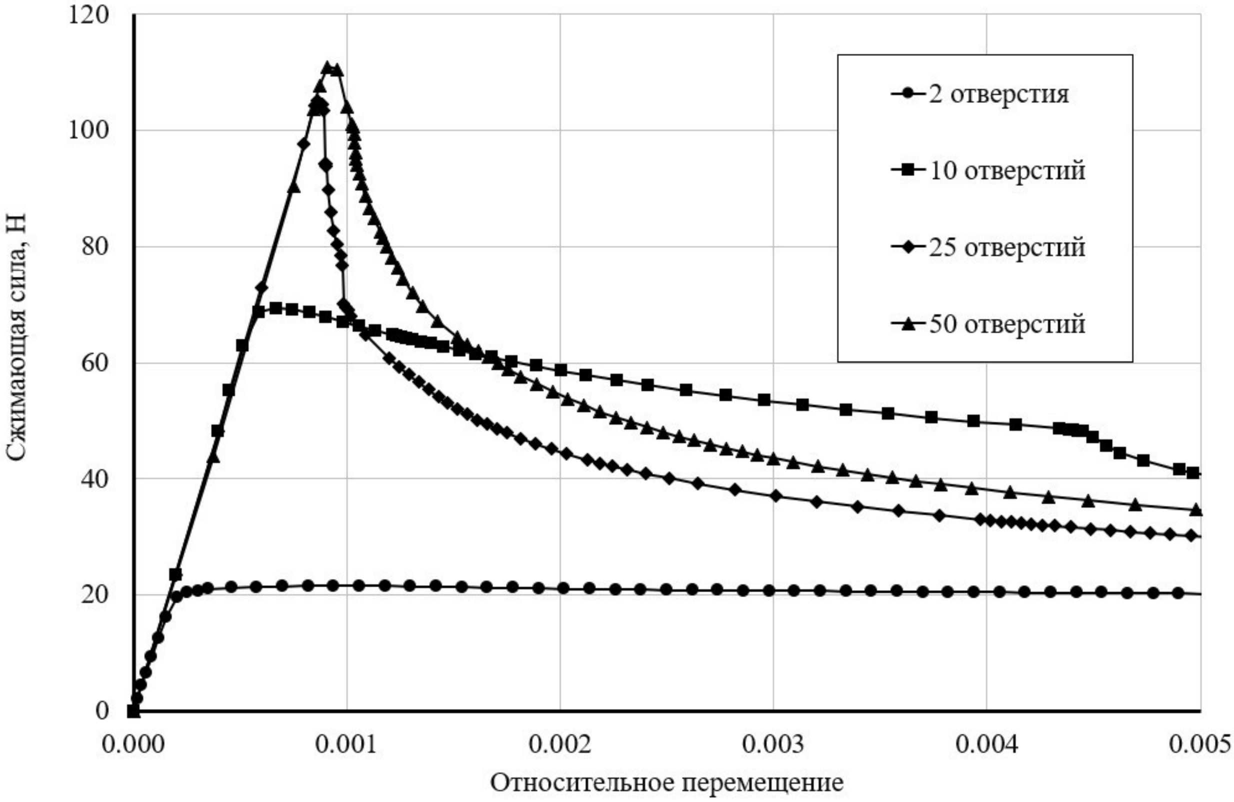


Рисунок 3.5.10 – Графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца оболочки (V = 1 мм/с, h = 1 мм, γ = 0,65)

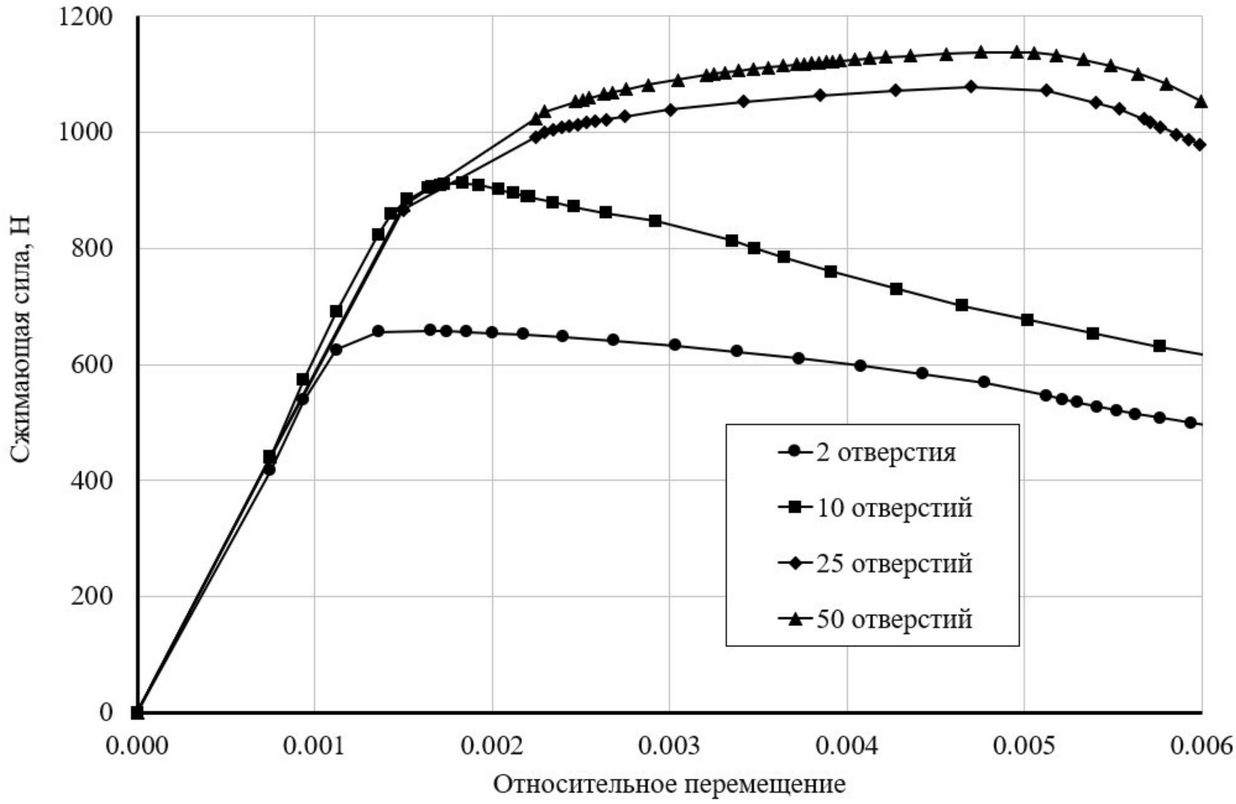


Рисунок 3.5.11 – Графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца оболочки (V = 1 мм/с, h = 5 мм, γ = 0,65)

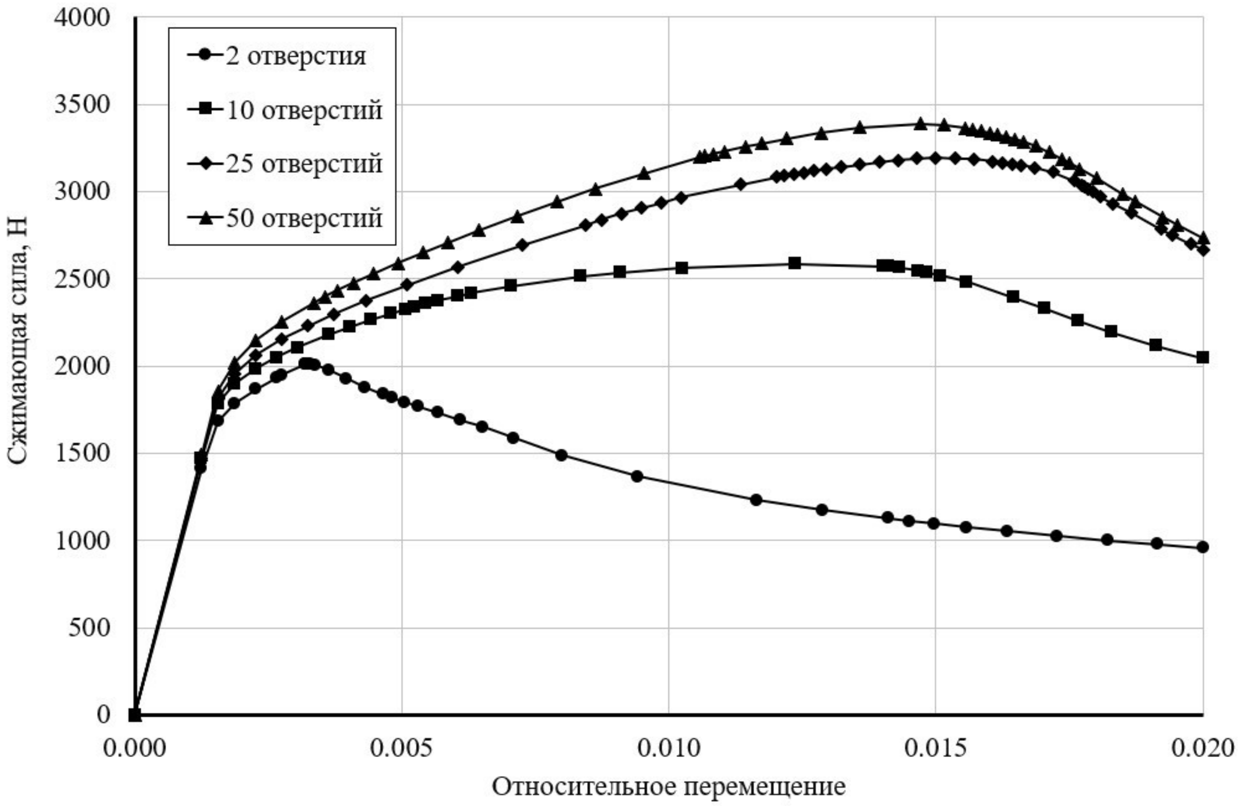


Рисунок 3.5.12 – Графики изменения сжимающей силы от относительного перемещения свободного торца оболочки (V = 1 мм/с, h = 10 мм, γ = 0,65)

Анализ графиков показывает, что результаты для моделей с 25 и 50 отверстиями близки друг к другу для всех рассмотренных значений коэффициента пористости и толщин оболочки более 5 мм. Для тонких оболочек с толщиной 1 мм и пористости более 0,4 наблюдается сильная зависимость от количества структурных элементов вдоль длины.

На рисунках 4.5.13 – 4.5.15 для каждой пористости представлены графики зависимости погрешности вычислений критической нагрузки в зависимости от количества структурных элементов вдоль длины густо перфорированной оболочки. В качестве критической нагрузки принималась максимальное значение сжимающей силы. Погрешность определения критической нагрузки вычислялась по формуле:

$$\delta = \frac{|F_i - F_{50}|}{F_{50}} \cdot 100\%,$$, где

F_i - критическое значение сжимающей силы для оболочки с количеством структурных элементов вдоль длины равным i, Н;

F_{50} - значение критической нагрузки для оболочки с 50 отверстиями, которое принимается в качестве эталонного, Н.

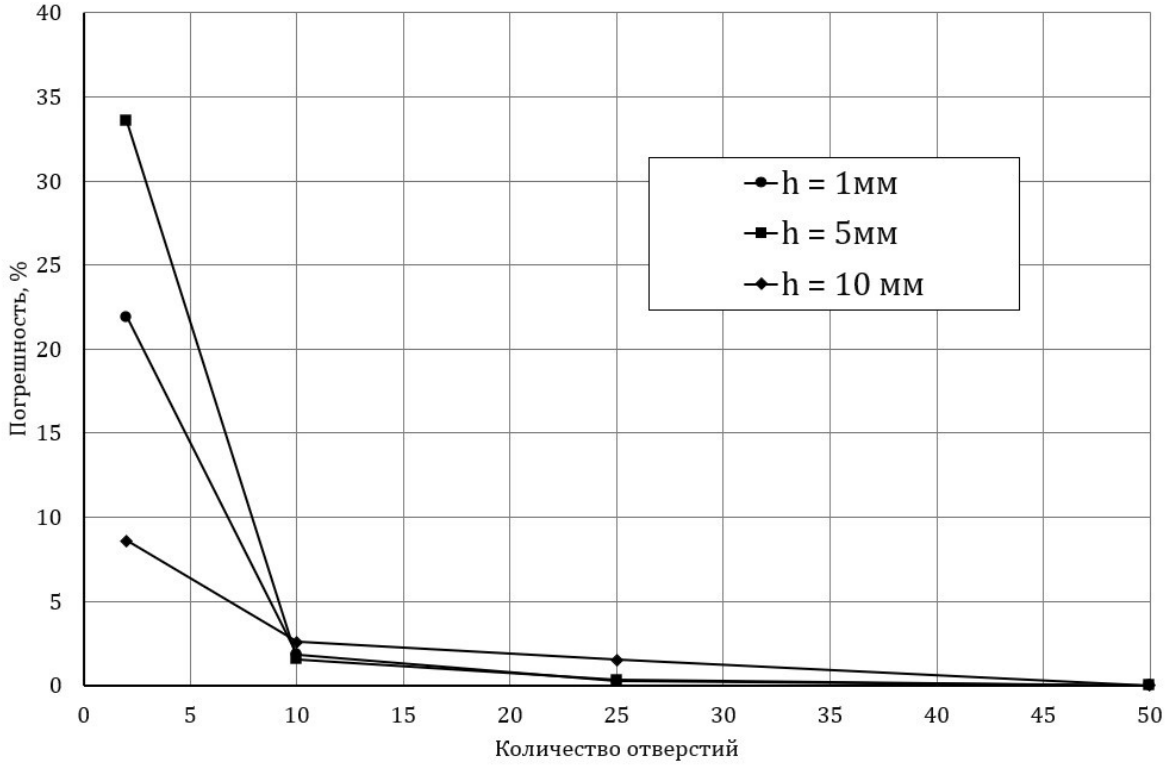


Рисунок 3.5.13 – Графики изменения погрешности критической нагрузки в зависимости от количества отверстий (V = 1 мм/с, γ = 0,1)

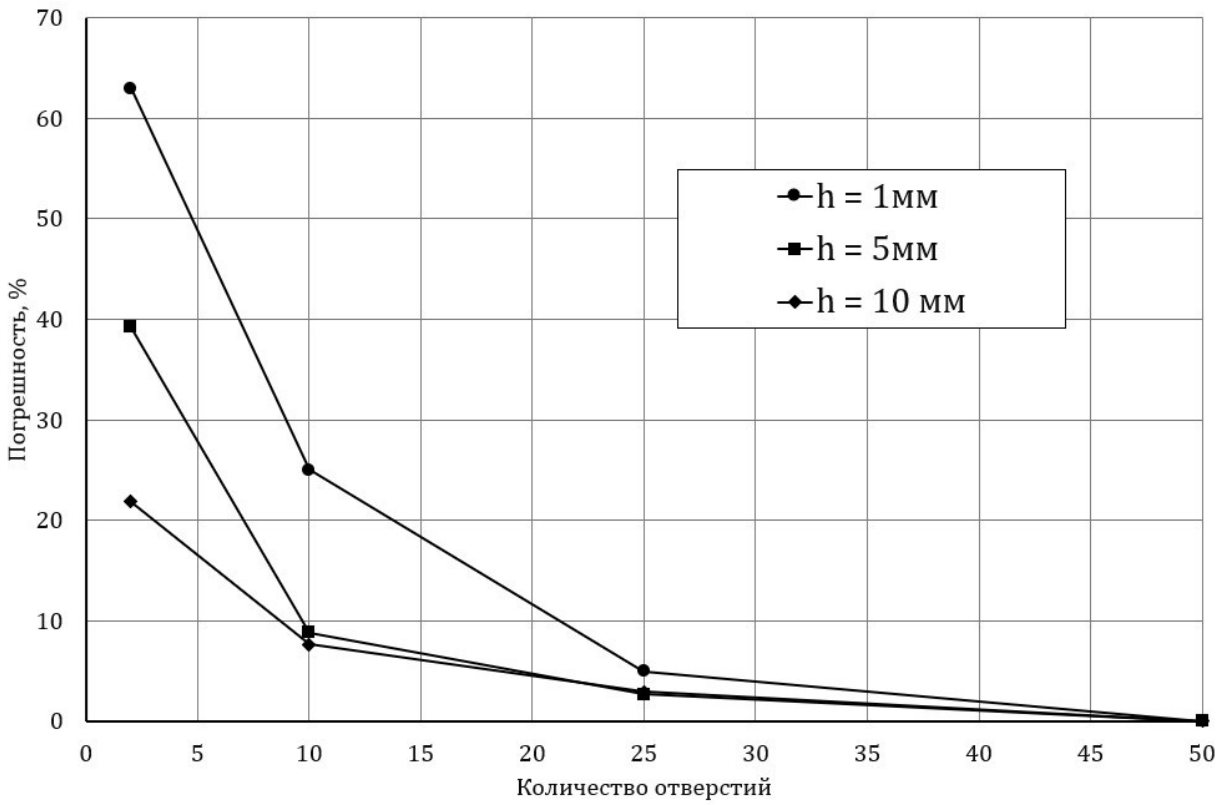


Рисунок 3.5.14 – Графики изменения погрешности критической нагрузки в зависимости от количества отверстий (V = 1 мм/с, γ = 0,4)

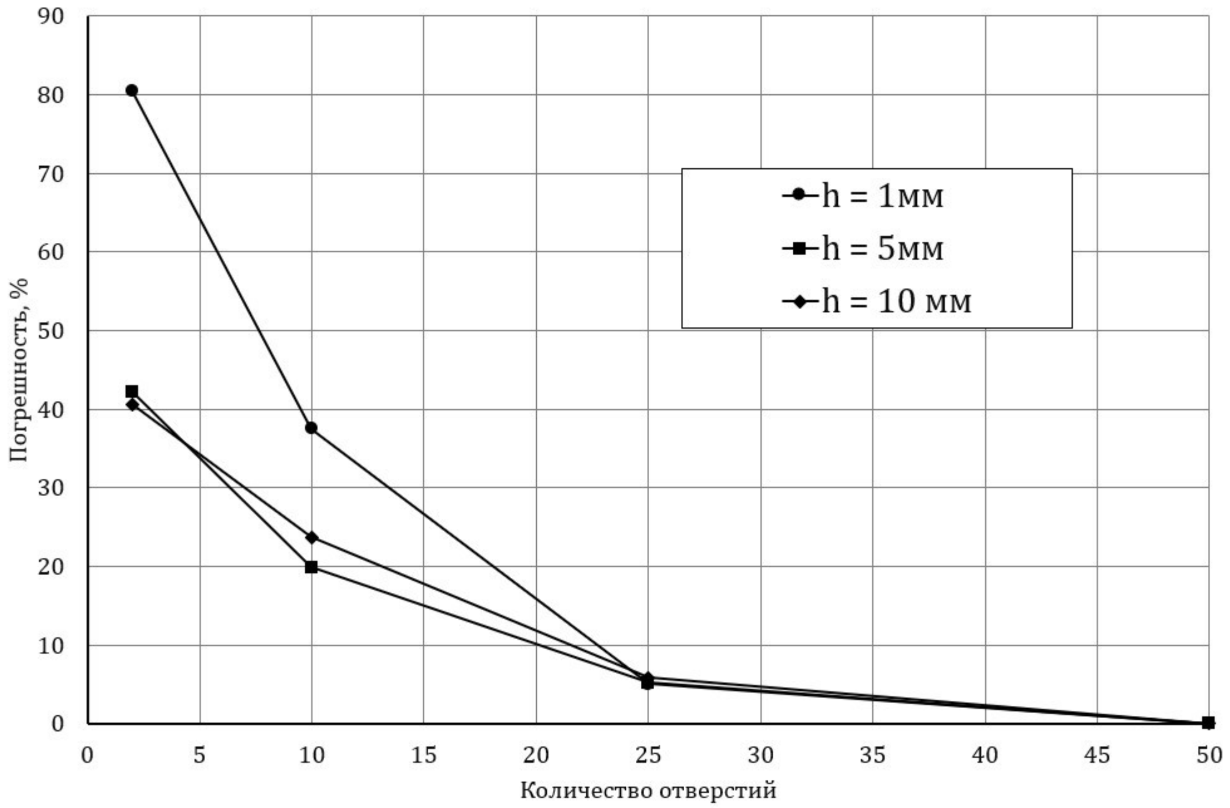
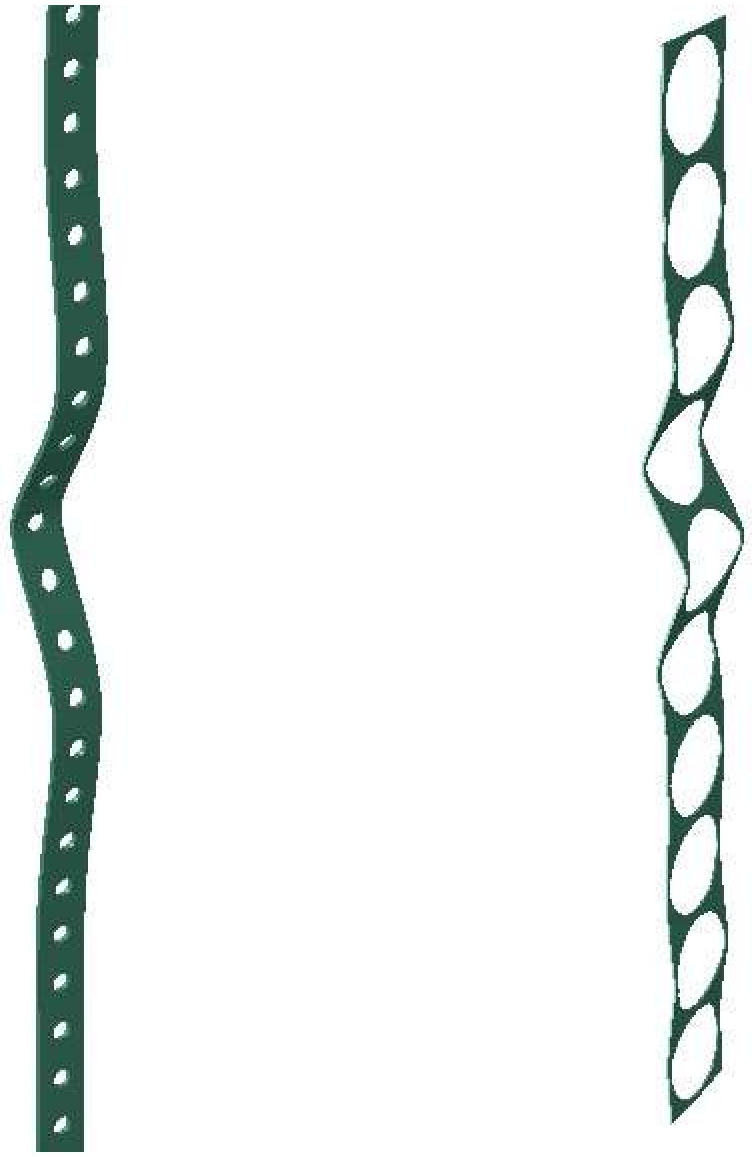


Рисунок 3.5.15 – Графики изменения погрешности критической нагрузки в зависимости от количества отверстий (V = 1 мм/с, γ = 0,65)

При пористости менее 0,1 принцип двумерного подобия позволяет уменьшить количество структурных элементов до 5 раз. При этом различия между результатами расчетов не будут превышать 5%. Для коэффициентов пористости более 0,4 принцип подобия позволяет вдвое сократить количество структурных элементов в густо перфорированной оболочке. Область применимости принципа двумерного подобия расширяется при мере уменьшения коэффициента пористости. Представленные графики показывают, что по мере увеличения толщины оболочки погрешности вычислений снижаются. Связано это с тем, что в зависимости от толщины оболочки меняется форма потери устойчивости. Для тонких оболочек с малым количеством отверстий характерна локальная потеря устойчивости, которая реализуется в окружных перегородках между отверстиями (рисунок 3.5.16,б). По мере увеличения количества отверстий и толщины оболочки форма потери устойчивости представляет собой полуволну, которая реализуется на нескольких структурных элементах. Анализ форм потери устойчивости показал, что сократить количество структурных элементов без потери точности (менее 5%) вычислений возможно в том случае, если полуволна изгиба реализуется на протяжении нескольких структурных элементах (рисунок 3.5.16,а). При потере устойчивости в пределах одного структурного элемента (рисунок 3.5.16,б) принцип двумерного подобия приводит к существенным ошибкам.



а) потеря устойчивости на протяжении нескольких структурных элементах

б) потеря устойчивости в пределах одного элемента

Рисунок 3.5.16 – Различные формы потери устойчивости густо перфорированных цилиндрических оболочек

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОРИСТОГО МЕТАЛЛА

4.1.Идентификация диаграммы деформирования материала основы по экспериментальным данным на сжатие образцов-таблеток

Для осуществления численного моделирования нелинейного поведения пористой структуры требуется знание истинной диаграммы деформирования упругопластического материала основы. В ходе формирования пористой структуры материал основы подвергается различным тепловым и химическим воздействиям (отжиг, спекание), которые могут повлиять на механические свойства. Определение прочностных характеристик материала основы из экспериментальных исследований на сжатие пористых образцов сопряжено с проблемами, вызванными в основном существенной неоднородностью и неодоосностью напряженно-деформированного состояния. Построение истинной диаграммы деформирования материала основы на базе результатов эксперимента на растяжение или сжатие пористого образца можно осуществить при помощи расчетно-экспериментального метода, используя метод конечного элемента.

Идентификация диаграммы деформирования материала основы осуществлена на базе экспериментальных данных о статическом сжатии пористого образца в жесткой обойме. При испытании использовался цилиндрический образец из пористого алюминия диаметром 30 мм и высотой 20 мм. Начальная пористость образца в эксперименте определялась, как отношение плотностей пористого и сплошного образцов, и составляла 0,64. Максимальные значения условной деформаций образца при сжатии достигали 45%. При этом контактного взаимодействия берегов пор не наблюдалось. Восстановление диаграммы деформирования материала основы осуществлялось посредством методики, предложенной в работах [147,178].Построение истинной диаграммы деформирования материала основы производилось итерационным путем. В каждой итерации осуществлялась коррекция зависимости интенсивности истинных напряжений σ_i от интенсивности логарифмических деформаций ε_i таким образом, чтобы удовлетворить с заданной точностью экспериментальной зависимости сжимающей силы от перемещения захватного приспособления испытательной машины. С этой целью строится корректировочная функция α (е)

$$\alpha(e) = \frac{F_э(e)}{F_{чм}(e)} \;, \qquad (4.1.1)$$

$F_э(e)$ – экспериментальная зависимость сжимающей силы от относительного изменения длины образца, Н;

$F_{чм}(e)$ – зависимость сжимающей силы от относительного изменения длины образца, полученная при численном моделировании , Н;

$e = \frac{u}{L}$ – относительное изменение длины образца;

u – перемещение верхнего торца образца, м;

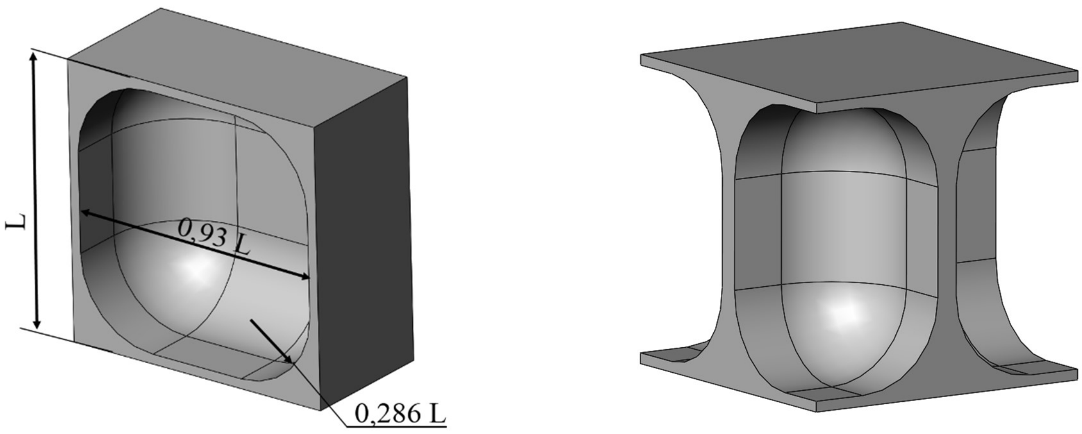
L - начальная длина образца, м;

По результатам численного моделирования устанавливается функциональная зависимость максимального значения интенсивности деформаций $\varepsilon_i^{max}(e)$от относительного изменения длины образца. Корректировка истинной диаграммы деформирования осуществляется по формуле:

$$\overline{\sigma}_i(\varepsilon_i^{max}) = \alpha\sigma_i(\varepsilon_i^{max}) \qquad (4.1.2)$$

Итерационный процесс корректировки продолжается до тех пор, пока зависимости $F_э(e)$и $F_{чм}(e)$не совпадут с точностью 5%. В работе [147] указано, что для первой итерации корректировки даже при больших деформациях можно использовать любую выпуклую диаграмму деформирования упрочняющегося материала. В данном исследовании в качестве начальной была принята диаграмма деформирования для пористого образца, полученная из экспериментальных данных в предположении, что образец состоит из сплошного материала. Описанный метод последовательной корректировки истинной диаграммы деформирования по своей сути идентичен численному методу хорд, который используется при решении нелинейных алгебраических уравнений [179].Выпуклость функции, описывающей зависимость осевой силы от перемещения обеспечивает монотонную сходимость итерационного процесса. От выбора начальной диаграммы деформирования зависит только число итераций, которое обычно не превышает 10.

Пористый алюминий из-за наличия полостей имеет геометрически сложную внутреннюю структуру, и вследствие этого - переменное поперечное к оси нагружения сечение, как в недеформированном состоянии, так и в процессе сжатия. В расчетах пористый материал представлялся, как набор структурированных элементов, в качестве которого выбран куб с шаровидной порой внутри. Коэффициент пористости определялся, как отношение объемов полости и куба, ограничивающего структурный элемент. При испытаниях на сжатие начальная пористость образца составляла 0,64, что не позволяло использовать структурный элемент в виде куба со сферической полостью, т.к. для такой геометрии значение максимальной пористости не превышает 0,5236. Необходимое значение пористости достигнуто путём построения полости в виде куба со скругленными ребрами и вершинами. На рисунке 4.1.1 представлены возможные геометрические модели структурного элемента.



а. структурный элемент (вариант 1) б. структурный элемент (вариант 2)

Рисунок 4.1.1. – Структурный элемент

Объект, представленный на рисунке 4.1.1а, не подходит для процедуры восстановления диаграммы деформирования, т.к. граничные условия симметрии на его боковых гранях не позволяют учесть локальную потерю устойчивости в перегородках. Структурный элемент на рисунке 4.1.1б лишен указанных недостатков и использовался для идентификации диаграммы деформирования материала основы.

При моделировании статического сжатия пористого образца в жесткой обойме предполагалось, что все структурные элементы деформируются одинаково. Поэтому для проведения вычислений использовался только один столбец из пяти представительных объёмов (рисунок 4.1.2).Количество структурных элементов в столбце выбрано таким образом, чтобы исключить влияние константных граничных условий на жесткость конструкции.

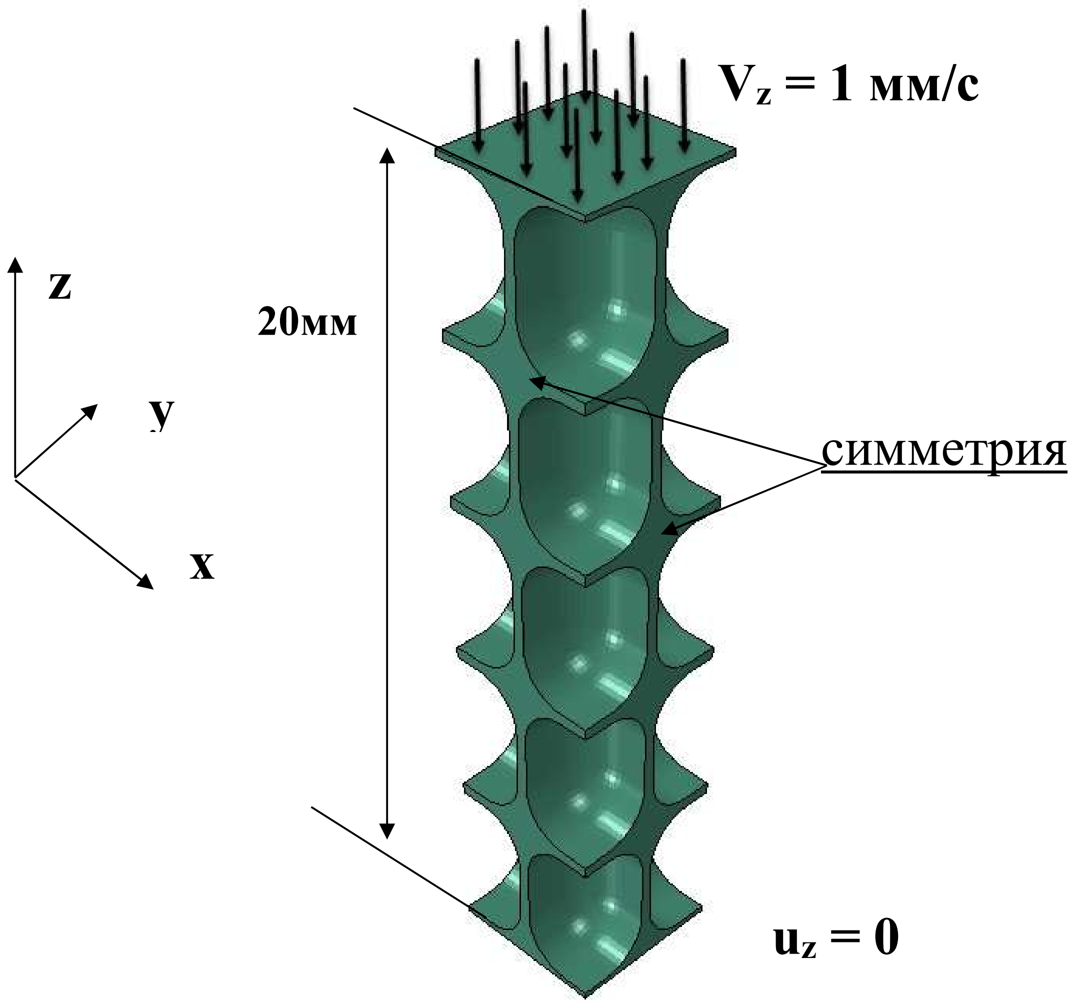


Рисунок 4.1.2 – Схема нагружения столбца из 5 структурных элементов

Высота столбца составляла 20 мм. Моделирование сжатия пористой структуры осуществлено методом конечных элементов с использование программного комплекса Abaqus (лицензия № 200000000050225) [165]. Конечно-элементная модель одного структурного элемента состояла из 14240 расчетных ячеек. Для моделирования использован лагранжев конечный элемент с восемью узлами. В программном комплексе Abaqus такой тип конечного элемента имеет обозначение C3D8R. На нижнем торце рассмотренного столбца из структурных элементов задавалось нулевое значение вертикальных перемещений, на верхнем торце – постоянная скорость вертикальных перемещений. Величина скорости сжатия равнялась 1 мм/с, что позволяло пренебречь нестационарными эффектами. В расчёте на боковых поверхностях задавались нулевые значения нормальных перемещений и касательных напряжений.

На рисунке 4.1.3 представлены кривые, описывающие диаграммы деформирования материала основы, для 4-х итераций корректировки, а на рисунке 4.1.4 представлены соответствующие зависимости сжимающей силы от относительного перемещения верхнего торца образца.

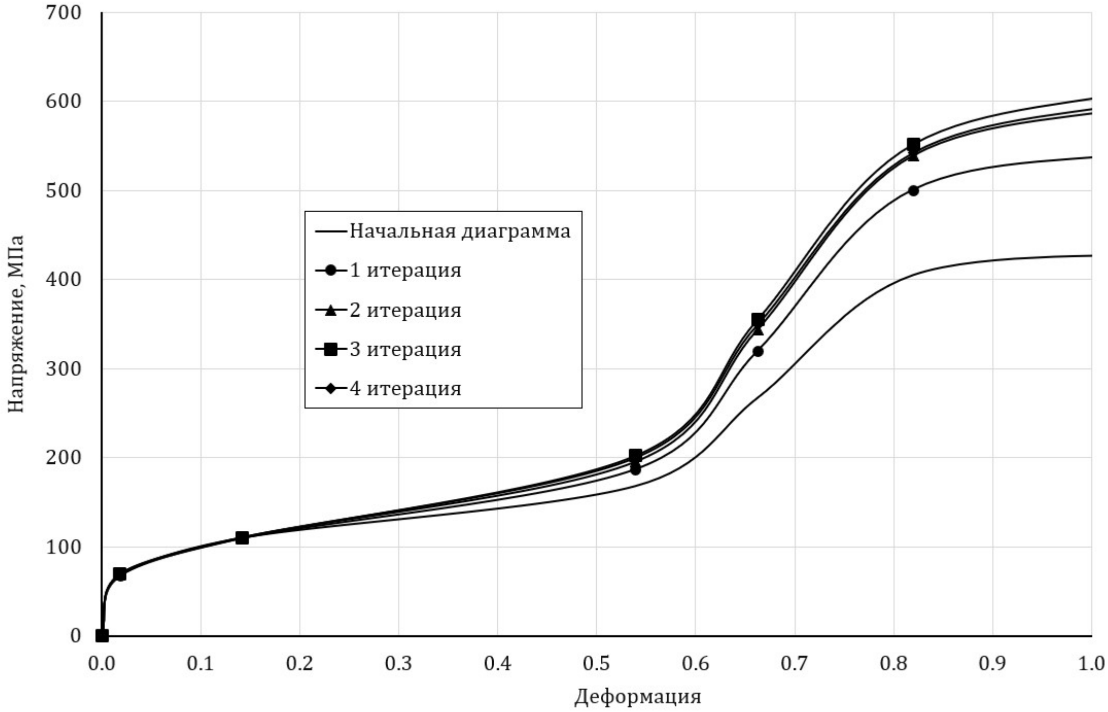


Рисунок 4.1.3 – Корректировка истинной диаграммы деформирования материала основы

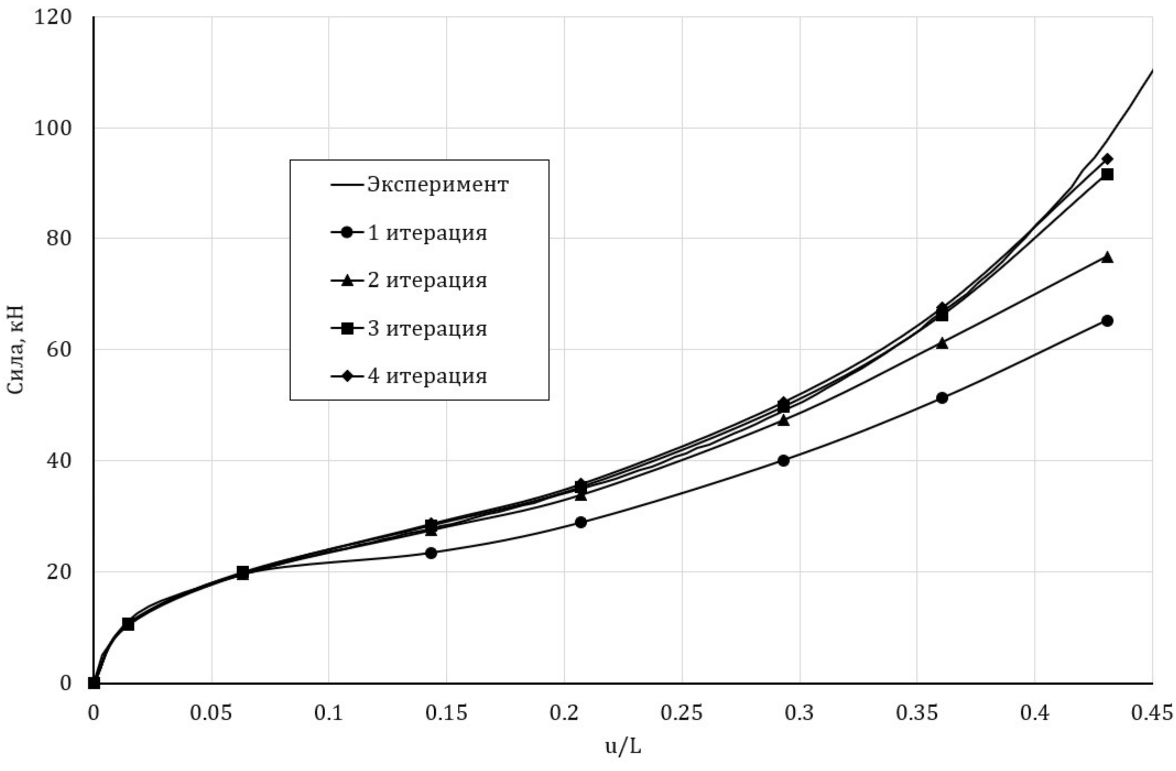
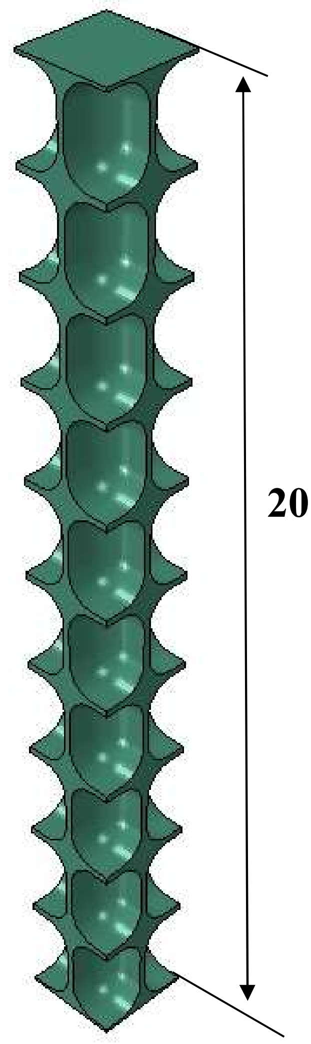


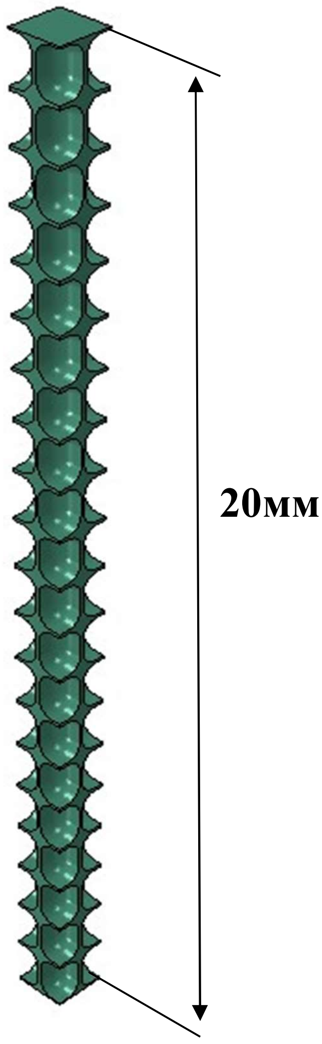
Рисунок 4.1.4 – График сжимающей силы от относительного перемещения верхнего торца для 4 итераций корректировки

Очевидна быстрая сходимость итерационного процесса, поскольку достаточно 4-х итераций для достижения погрешности менее 5%. Описанный способ позволяет осуществлять идентификацию диаграммы деформирования материала основы для пористых образцов первоначально однородной структуры при больших деформациях и неоднородном напряженно-деформированном состоянии различного вида (растяжение, сжатие, сдвиг). При учете контактного взаимодействия берегов пор возможно построение диаграммы деформирования до момента схлопывания пор и далее с учётом трения контактирующих поверхностей.

Для проверки достаточной точности построенной диаграммы деформирования с использованием 5 структурных элементов было проведено численное моделирование сжатия столбцов из 10 и 20 представительных объемов (рисунок 4.1.5).



а) 10 представительных объемов



б) 20 представительных объемов

Рисунок 4.1.5 – Геометрические модели с различным количеством структурных элементов

Размеры структурных элементов выбирались таким образом, чтобы высота столбца равнялась 20 мм независимо от количества структурных элементов. Связь между истинными напряжениями и деформациями в материале основы описывалась восстановленной истинной диаграммой деформирования. Постановка задачи численного моделирования аналогична постановке для столбца из 5 структурных элементов в жесткой обойме. На рисунке 4.1.6 представлен график изменения сжимающей силы, приведенной к площади поперечного сечения экспериментального образца, от относительного перемещения верхнего торца и количества структурных элементов вдоль оси сжатия.

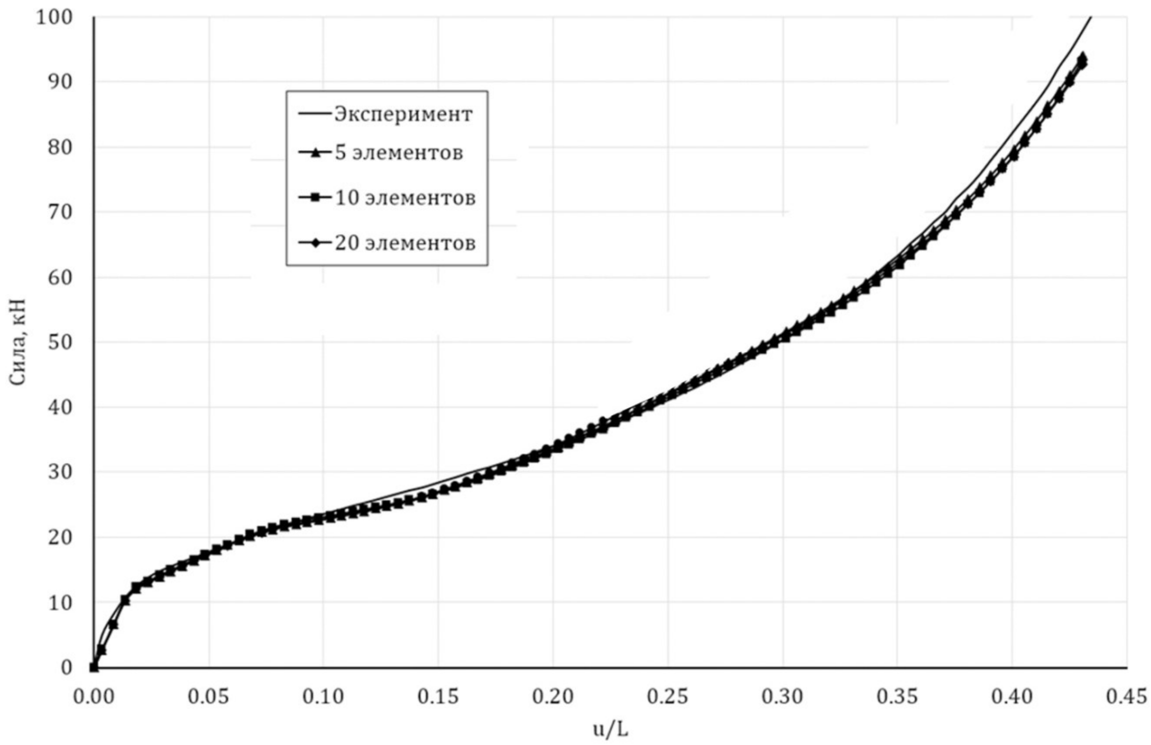
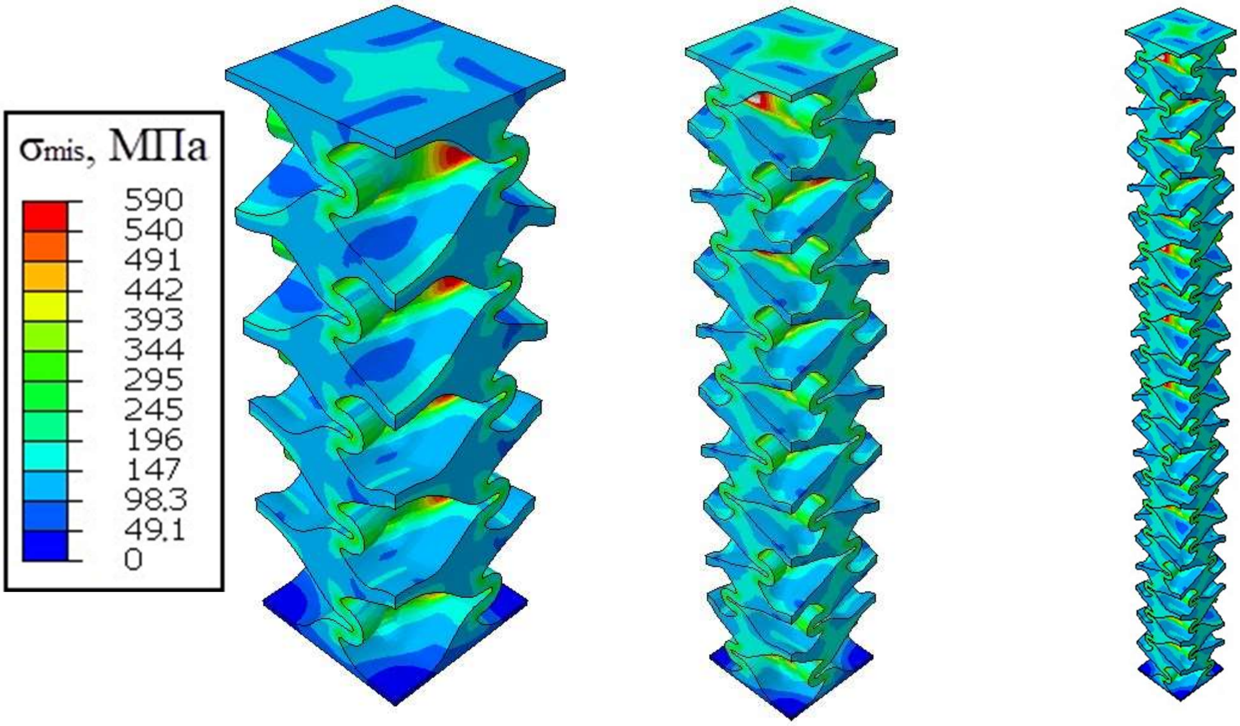


Рисунок 4.1.6 – Изменение сжимающей силы от относительного перемещения верхнего торца образца в зависимости от количества структурных элементов (образец с обоймой)

Результаты расчетов с 5, 10 и 20 структурными элементами различаются менее чем на 1%, при этом отличие усилий не превышает 5% от экспериментальных данных. Таким образом, для восстановления диаграммы деформирования материала основы достаточно столбца из 5 структурных элементов. Численное моделирование показало, что для геометрических моделей с количеством представительных объемов более 5 получаемое напряженно-деформированное состояние во всех структурных элементах одинаковы кроме граничных, в которых нарушается принцип трехмерного подобия из-за задания на их торцах постоянных скоростей перемещения. Для моделей с 10 и 20 структурными элементами наблюдается периодичное чередование форм локальной потери устойчивости вдоль длины образца.



а) 5 структурных элементов

а) 10 структурных элементов

а) 20 структурных элементов

Рисунок 5.1.7 – Распределение напряжения по Мизесу для пористых образцов с различным количеством структурных элементов

При сжатии происходит локальная потеря устойчивости в перегородках между порами при относительном перемещении подвижного торца 0,1. Локальная потеря устойчивости происходит во всех внутренних структурных элементах одновременно.

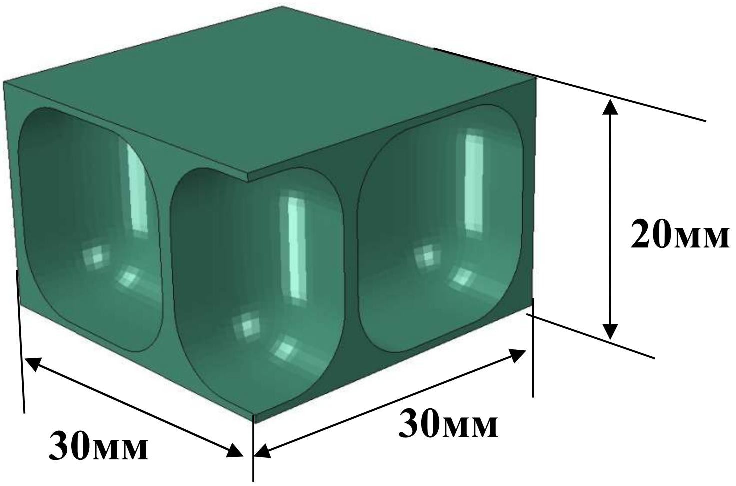
Средний размер структурного элемента в испытуемом образце составлял приблизительно 0,3 мм. Применение принципа трехмерного подобия для пористого материала позволило осуществить процедуру идентификации диаграммы деформирования материала основы с использованием столбца из 5 структурных элементов. Без использования принципа подобия для пористого образца высотой 20 мм потребовалось бы рассмотреть столбец из 67 структурных элементов размером 0,3 мм каждый.

4.2.Построение численной модели деформирования пористого металла

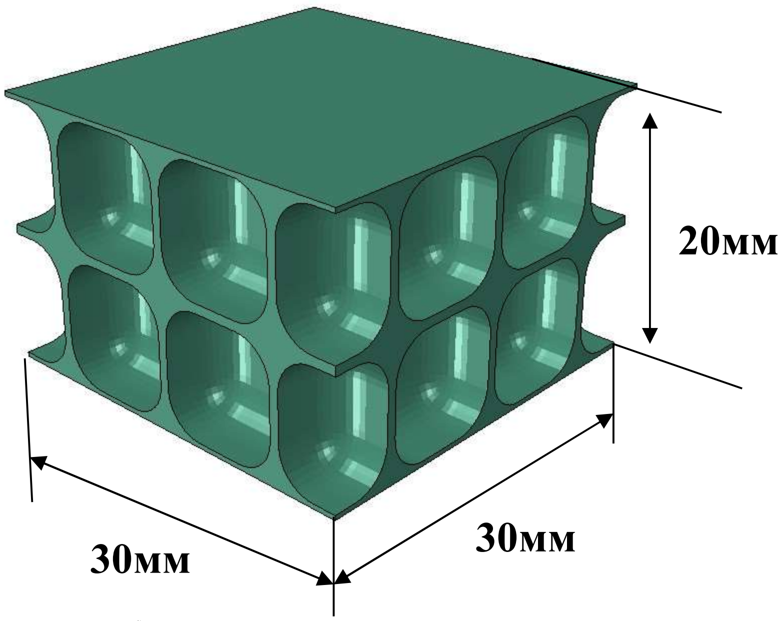
Построение численной модели пористого металла основано на применении принципа трехмерного подобия, позволяющий заменить набор одинаковых представительных объемов на один подобный структурный элемент, в котором реализуется среднее по набору напряженно-деформированное состояние. Эффективность и адекватность построенной численной модели продемонстрирована на примере сжатия пористых образцов со свободными боковыми поверхностями.

Экспериментальное исследование статического сжатия пористого тела со свободными боковыми поверхностями проведено с использованием цилиндрического образца высотой 20 мм и диаметром 70 мм. Как и в случае сжатия образца в жесткой обойме, максимальные значения деформаций не достигали уровня, вызывающего контактного взаимодействия берегов пор. Начальная пористость образца составляла 0,64.

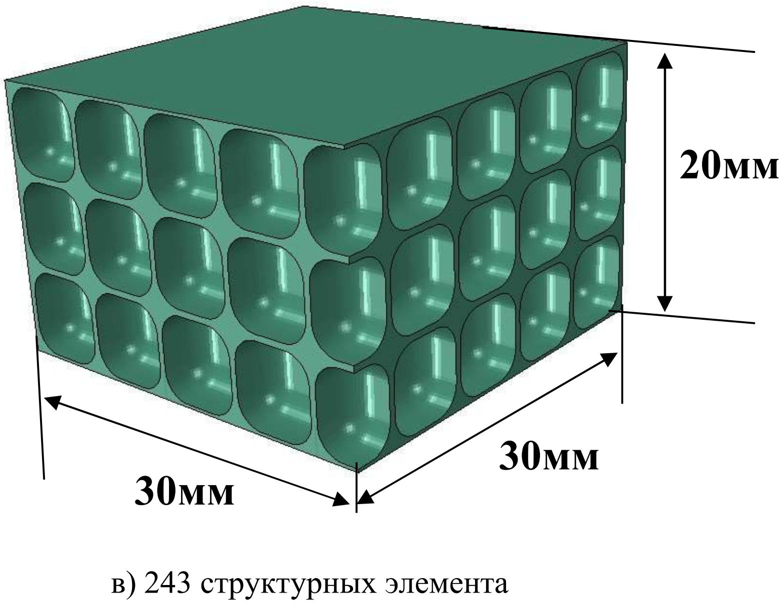
Геометрические модели для расчетов построены исходя из формы структурного элемента (рисунок 4.1.1а) и геометрических характеристик экспериментального образца. Форма структурного элемента позволяет построить расчетную область в виде параллелепипеда. Поэтому геометрические модели были построены таким образом, чтобы высота составляла 20 мм, а площади поперечных сечений построенной расчетной области и экспериментального образца максимально соответствовали друг другу. Удалось построить геометрическую модель, площадь поперечного сечения которой отличалась от экспериментального образца на 6%. Рассмотрены геометрические модели с 9, 72 и 243 структурными элементами. Для снижения вычислительных затрат учтена геометрическая симметрия сжимаемой структуры и рассмотрена ¼ часть конструкции. Расположение структурных элементов выбрано таким образом, чтобы вырезающие ¼ часть образца поверхности проходили через центры полостей. В этом случае геометрическая модель пористой структуры позволяет учитывать локальную потерю устойчивости при сжатии в перегородках между рассеченными порами. На рисунке 4.2.1 представлены рассмотренные геометрические модели пористого образца.



а) 9 структурных элементов



б) 72 структурных элемента



в) 243 структурных элемента

Рисунок 4.2.1 – Геометрические модели пористого образца

Моделирование сжатия пористых образцов выполнено с использованием двух абсолютно твердых тел, расположенных на торцах образца. Одно из абсолютно твердых тел двигалось со скоростью 1 мм/с, а второе было неподвижно. На поверхностях тел и расчетной области, соприкасающихся друг с другом, определено условие контактного взаимодействия с учетом трения, которое определяется законом Кулона со значением коэффициента трения равным 0,1. На поверхностях, вырезающих ¼ часть расчетной области, задавалось равенство нулю нормальных перемещений и касательных напряжений. На рисунке 4.2.2 представлена схема нагружения.

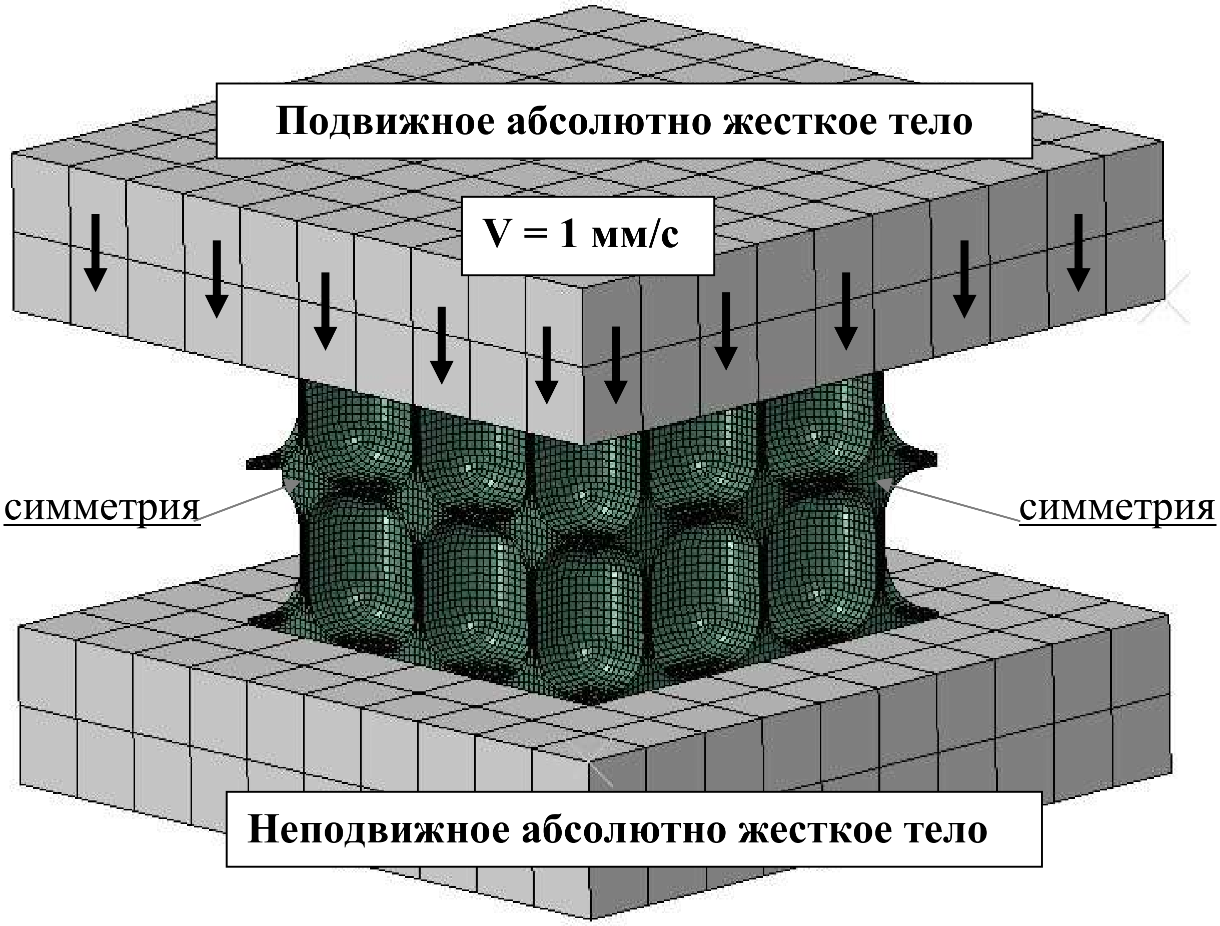


Рисунок 4.2.2 – Схема нагружения при моделировании сжатия пористых образцов со свободными боковыми поверхностями

Поведение упругопластического материала основы описывалось истинной диаграммой деформирования, идентификация которой осуществлена на базе экспериментальных данных о сжатии пористого образца в жесткой обойме (рисунок 4.1.3).

На рисунке 4.2.3 представлена зависимость сжимающей силы, приведенной к площади поперечного сечения экспериментального образца, от относительного перемещения верхнего торца и количества структурных элементов.

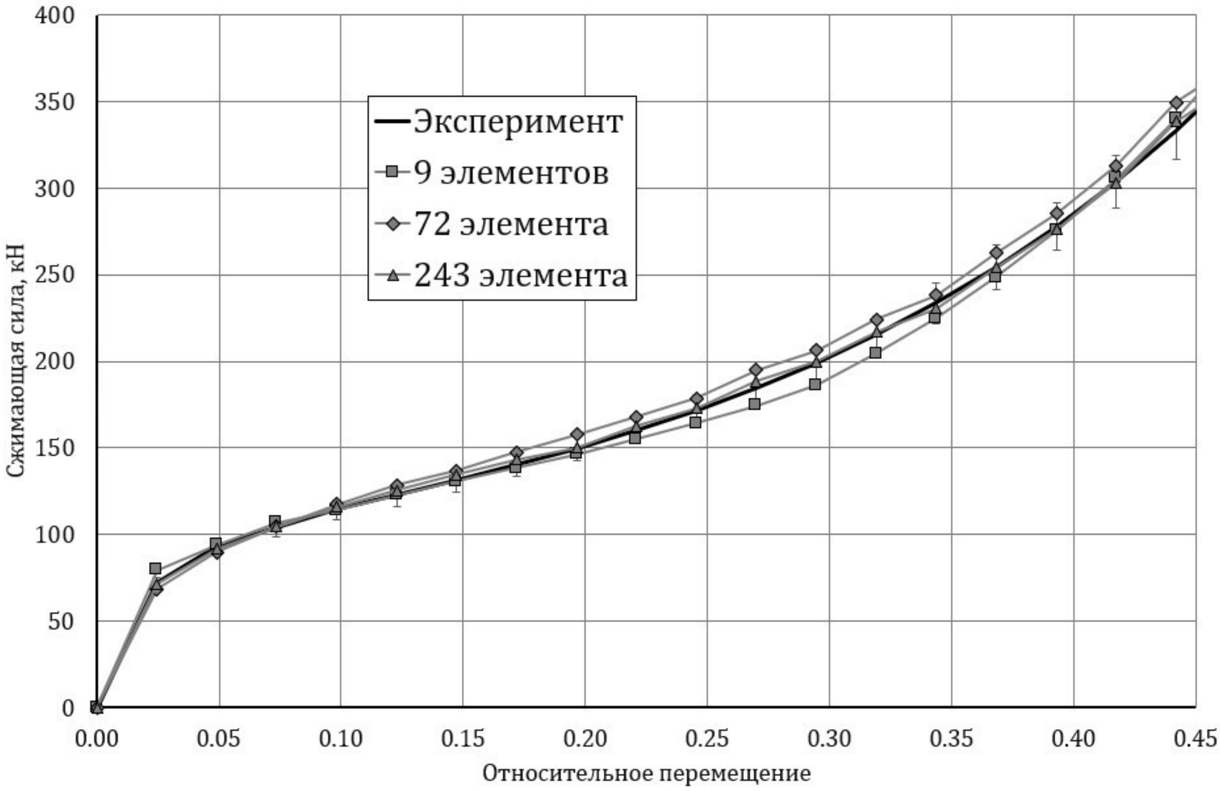


Рисунок 4.2.3 – Изменение сжимающей силы от относительного перемещения верхнего торца образца со свободными боковыми поверхностями

Максимальные погрешности наблюдаются для модели с 9 структурными элементами и составляют 6%. Для моделей с 72 и 243 структурными элементами погрешность вычислений сжимающей силы не превышают 5%. Численное моделирование показало, что для геометрических моделей с 72 и 243 представительными объемами наблюдаются различия напряженно-деформированного состояния в структурных элементах по мере удаления от центра геометрической модели. Локальная потеря устойчивости в перегородках происходит при относительном перемещении подвижного торца 0,06. Сначала теряют устойчивость перегородки в структурных элементах, прилежащих к боковым свободным поверхностям. При дальнейшем сжатии образца наблюдается потеря устойчивости во внутренних структурных элементах. В последний момент теряют устойчивость перегородки в структурных элементах, расположенных в центре геометрической модели. Результаты расчетов с 9, 72 и 243 структурными элементами различаются между собой не более чем на 9%, при этом отличие усилий от экспериментальных данных не превышает 6%.

Для проведения численного расчета сжатия пористого образца со свободными боковыми поверхностями с учетом реального размера представительного объема, равного 0,3 мм, потребовалось бы порядка 187 тыс. структурных элементов. Принцип трехмерного подобия позволил произвести расчет сжатия пористого образца с использованием 9 структурных элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В работе определены параметры ортотропии густо перфорированных упругих пластин и оболочек при равномерном в двух направлениях расположении отверстий. Исследование снижение жесткости проведено в трехмерной постановке механики сплошных сред и с использованием теории пластин и оболочек, основанной на соотношениях Тимошенко. Матрица жесткости эквивалентного ортотропного материала в зависимости от пористости конструкции определена по результатам моделирования растяжения и сдвига структурного элемента в упругой постановке. Расчеты показали, что отличия между трехмерным расчетом и оболочечной моделью не превышают 5% для пористости не превышающей 0,5. На примере упругого изгиба густо перфорированных пластины и цилиндрической оболочки произведена верификация полученных параметров ортотропного эквивалентного материала. Показано, что параметры ортотропии, определенные из решения трехмерной задачи растяжения и сдвига структурного элемента с одним отверстием, определены верно и могут быть применены для расчета упругих густо перфорированных пластин и оболочек, длина волны прогиба которых значительно превышает размер структурного элемента.
2. Выполнено исследование напряжённо-деформированного состояния в структурном элементе с отверстием в упругой постановке. Получены зависимости коэффициентов концентрации напряжения от степени перфорации при изгибе и растяжении.
3. На основе теории Тимошенко в совокупности с конструктивно-ортотропной моделью проведено исследование устойчивости упругих перфорированных цилиндрических оболочек под действием внешнего давления с различной степенью перфорации. Получены критические значения давления и формы потери устойчивости в зависимости от пористости и длины цилиндрической оболочки.
4. С использованием конечно-элементного анализа определена область применимости теории Тимошенко для задач упругого и упругопластического изгиба густо перфорированных пластин и оболочек в зависимости от толщины и коэффициента пористости.
5. Проведено исследование применимости принципа двумерного подобия для задач изгиба и устойчивости густо перфорированных упругопластических пластин и цилиндрических оболочек. Установлено, что принцип двумерного подобия позволяет сократить количество вычислительных ресурсов от 2 до 10 раз в зависимости от коэффициента пористости и вида нагружения.

6. Предложен метод определения истинных диаграмм деформирования материала основы на базе экспериментальных данных об испытаниях на сжатие пористых образцов в жесткой обойме. Метод основывается на численном моделировании деформирования пористой структуры с учётом неоднородностей напряженно-деформированного состояния в структурном элементе, вызванном наличием полостей. Итерационным путем осуществлялась коррекция зависимости интенсивности истинных напряжений σ_i от интенсивности логарифмических деформаций ε_i таким образом, чтобы удовлетворить с заданной точностью экспериментальной зависимости сжимающей силы от относительного изменения длины образца. Определено достаточное количество структурных элементов для идентификации механических свойств материала основы.
7. На основе принципа трехмерного подобия построена компьютерная модель пористого материала, которая позволяет учесть неоднородность напряженно-деформированного состояния в структурном элементе. Исследована эффективность применения принципа при численном моделировании сжатия образцов из пористого алюминия. Предложенная компьютерная модель позволяет сократить объем вычислительных ресурсов путем варьирования количеством структурных элементов, сохраняя коэффициент пористости и характерные размеры конструкции. Показано, что при численном моделировании сжатия цилиндрического образца из пористого алюминия в жесткой обойме с использованием явной схемы интегрирования по времени применение принципа трехмерного подобия позволило сократить на два порядка объем вычислительных ресурсов, а при моделировании сжатия образца со свободными боковыми поверхностями – на 5 порядков. Это позволило за 4 часа осуществить расчеты неоднородного напряжено-деформированного состояния образцов из пористого алюминия на локальном четырехъядерном персональном компьютере.
8. Методика расчета, основанная на принципе подобия напряженно-деформированного состояния в структурном элементе конструкции, в дальнейшем будет использована при исследовании деформирования густо перфорированных пластин, оболочек и пористых тел при динамических нагрузках. Принцип трехмерного подобия в совокупности с учетом контактного взаимодействия берегов пор позволит исследовать процесс деформирования пористых материалов до момента схлопывания пор и далее с учётом трения контактирующих поверхностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лебедев Н.Н. Исследование напряжений в пластинке с отверстиями с помощью односторонней поляризованной установки. Сб. «Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций в упругой и пластической зонах». ОНТИ, Л. – М., 1935, 212-223
2. Савин Г.Н., Концентрация напряжений около отверстий. Гостехиздат, М., 1951
3. Афендик Л.Г., Применение оптического метода для выяснения распределения напряжений возле некоторых горных выработок. Горный ж., №5, 1938, 1-7
4. Жуков В.Е., Исследование напряжений в турбинных дисках, ослабленных круговыми отверстиями. Труды конференции по оптическому методу изучения напряжений. ОНТИ, Л.-М., 1937, 107-117
5. Manzella G., Sullo scarico delle tesioni in piastre forate soggette a trazione. Tech. ital., 1956, vol. 21, №5, 309-317
6. Смоленцев Ю.А., Экспериментальное определение коэффициентов ослабления растягиваемых перфорированных пластин. «Химическое и нефтяное машиностроение», 1966, №6, 12-13
7. Malkin I., Notes on a theoretical basis for design of tube sheets of triangular layout. Transactions of the American Society of Mechanical Engineers., 1952, vol. 74. №3, 387-396
8. Мельников Н.П., Теоретическое и экспериментальное исследование напряженного состояния перфорированных плит. Сб. «Материалы по стальным конструкциям». 1957. т.1, М., 11-53.
9. Лурье А.И., Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра. Прикладная математика и механика, 1946, 10, 397 – 405
10. Савин Г. Н., Распределение напряжений в тонкой оболочке, ослабленной каким-либо отверстием. Сб. «проблемы механики сплошной среды». М., АН СССР, 1961, 338-358
11. Савін Г. Н., Про концентрацію напряжень навколо отворів у тонких пружиниих оболонках. Прикладная механіка, 1961, т. 7, № 1, 3-15
12. Savin G. N., Stress concentration around holes in thin shells. Bul. Inst. Politechn. Iasi, 1961, Vol. 7, №3-4, 315-324
13. Савин Г. Н., Концентрация напряжений около отверстий в оболочках. Труды II Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. АН УССР, Киев, 1962, 70-85

14. Вайнберг Д. В., Синявский А. А., Приближенный расчёт оболочек с вырезами методами теории потенциала. Сб. «Проблемы механики сплошной среды». М. изд. АН СССР, 1961, 73-82
15. Lekkerkerker J. G., On the stress distribution in cylindrical shells weakened by a circular hole. Uitgeverij Waltman. Delft., 1965, 99 p.p.
16. Гольденвейзер А. Л., Методы исследования напряженного состояния вблизи отверстия в тонкой упругой оболочке // VВсесоюзная конференция по теории пластин и оболочек, 1965, Аннотация докладов, М., 1965, 17
17. Григолюк Э. И., Фильштинский Л.А., Перфорированные пластины и оболочки // изд. «НАУКА», М., 1970
18. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1955. 567 с
19. Воробкова Н. Л., Преображенский И. Н. Обзор исследований по устойчивости пластинок и оболочек, ослабленных отверстиями // Расчёт пространственных конструкций. 1973. С. 89-112
20. Преображенский И. Н. Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями. М.: Машиностроение, 1981. 191 с.
21. Зиненко Г. П. Устойчивости и колебания прямоугольных трёхслойных пластин с большими вырезами // Прикл. механика. 1966. Т. 2, № 8.С. 59-66.
22. Ko W. L. Mechanical- and Thermal-Buckling Behavior of RectangularPlates With Different Central Cutouts: Tech. Rep. NASA/TM-1998-206542.Edwards, California: Dryden Flight Research Center, 1998. —March.
23. Srivastava A. K. L., Datta P. K. Elastic Stability of Square Stiffened Plates with Cutouts Under Biaxial Loading // Int. J. of Applied Mechanics and Engineering. 2006. Vol. 11, no. 2. Pp. 421-433.
24. Levy S., Wolley R. M., Kroll W. D. Instability of simply supported square plate with reinforced circular hole in edge compression // Journal of Research of the National Bureau of Standarts. 1947. Vol. 39. Pp. 571-577.
25. Kumai T. Elastic stability of the square plate thrust // Proceedings of the First Japan National Congress of Applied Mechanics. 1951. Pp. 81-86.
26. Schlack A. L. Elastic stability of pierced square plates // Experimental Mechanics. 1964. Vol. 4, no. 6. Pp. 167-172.
27. Schlack A. L. Experimental critical' loads for perforated square plates //Experimental Mechanics. 1968. Vol. 8, no. 2. Pp. 69-74.
28. Биргер И. А., Пановко Я. Г. Прочность. Устойчивость. Колебания. М.: Машиностроение, 1968. Т. 2,3.

29. Чижевский К. F. Расчёт круглых и кольцевых пластин. Л.: «Машиностроение» Ленинградское отделение, 1977. 184 с.

30. Голда Ю. Л., Преображенский И. Н., Штукарев В. С. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек с отверстиями // Прикладная Механика. 1973.

31. Андреев Л. В., Ободан Н. И., Фридман А. Д., Шерстюк Г. Г. Экспериментальное исследование несущей способности цилиндрических оболочек с прямоугольными вырезами//Проблемы прочности. 1982. №4. С. 77-79.

32. Коноплев Ю. Г., Тильш А. Л. Устойчивость цилиндрических оболочек с вырезами при кручении и внешнем давлении // Сборник аспирантских работ Теория пластин и оболочек. 1972. С. 159-164.

33. Коноплев Ю. Г., Тильш А. Л. Устойчивость цилиндрических оболочек с вырезами при осевом сжатии, кручении и внешнем давлении // Сборник аспирантских работ Теория пластин и оболочек. 1973. С. 3-13.

34. Михайлов К.Д., Харитонов Л.Ф., Гусев А.А. «Технология трикотажа».- М.:Гизлегпром, 1956, 827 с.

35. Францевич И. Н., Карпинос Д. И., Композиционные материалы волокнистого строения // Киев, Наукова Думка, 1970,403 с.

36. Белов С.В. Пористые проницаемые материалы //М.:Металлургия, 1987, с.

37. Григорьев А.К., Грохольский Б.П. // Порошковая металлургия и применение порошковых материалов. -Л.- Лениздат, 1982, 143 с

38. Витязь А.А., Капцевич В.М., Косторнов А.Г. и др. //Формирование структуры и свойств пористых порошковых материалов. М.: Металлургия, 1993 -240 с.

39. Скороход В.В. // Реологические основы спекания. Киев, Наукова Думка, 1972-152 с.

40. Ивенсен В.А. // Кинетика уплотнения металлических порошков при спекании. М.: Металлургия, 1971- 269 с

41. Либенсон Г.А., Никифоров О.А. // Теория процессов формования и спекания порошков. Спекание порошков. М., МИСиС, 1975, 132 с.

42. Булатов Г.А. // Пенополиуретаны в машиностроении и строительстве М.: Машиностроение, 1978 —184 с

43. Анциферов В.Н., Храмцов В.Д., Питеримов О.М., Шурик А.Г. // Порошковая металлургия, 1980, №12, с. 20-24.

44. K. E. Evans, M.A. Nkansah, I.J. Hutchinson // Auxetic foams: modelling negative poisson's ratios Acta metall. mater. V. 42, n. 4, pp. 1289-1294,1994

45. Yu Chin Jye (Mike), Eifert H.H., Bamhart J., Baumaister J. // Metall Foams Adv. Mater- And Process. V.154, №5, p. 45-47, 1998.
46. T.G. Nieh, J.H. Kinney, J.Wadsworth // Morphology and elastic properties of aluminum foams produced by casting Technique Scripta Mat., V.38, №10, p. 1487-1494, 1998.
47. Арбузова Л.А., Бондарев Б.И., Зенина М.В.//Технология легких сплавов. 1996, №2, с. 47-51.
48. Stephan Huschka // Modellierung eines Matenalgesetzes zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften von Aluminiumschaum. Diss., Fort.-Ber. VDI ReiheS Nr.525; 1998
49. 0.V.: Aluminium schaume, Merkblatt W 17-1. Auflage, Aluminium Zentrale e.V.(Hrsg.), Dusseldorf, Aluminium-Verlag, 1999
50. C. Park, S. R. Nutt // PM synthesis and properties of steel foams// Materials Science ang Engmeering, A288,2000, 111-118
51. H. D. Kunze, M. Kniiwer // About the foam ability of iron-carbon alloys. Steel Research, vol.70, Nr. 12, 1999, 513-518
52. Черемской П.Г., Слезов В.В., Бетехтин В.И. // Поры в твердом теле. М.: Энергоатомиздат, 1990 - 376с
53. IUPAC Manual of Simbols and Terminogy, Appendix 2, Colloid and Surface Chemistry. Pure Appl. Chem., 31, 578,(1972)
54. Черемской П.Г. // Методы исследования пористости твердых тел М.: Энергоатомиздат, 1985
55. Витязь А.А., Капцевич В.М., Косторнов А.Г. // Формирование структуры и свойств пористых порошковых материалов. М.: Металлургия, 1993 -240 с
56. Чернявский К.С. // Стереология в металловедении. М.: Металлургия, 1977, 280 с
57. Р. Бедфорд, Т. М. Дофине, Х. Престон-Томас // Приборы и методы физического металловедения. т.1,2.М.: Мир, 1973, 786 с.
58. U. Mosler, U. Martin, N. Losseva, H. Oettel // A statistic approach to estimate the compression strenght of Al-foams in Cellular Metals and Metal FoamingTechnology, Metfoam 2003, Verlag MIT Publishing,387, (2003)
59. Штремель М.А. // Прочность сплавов. Ч. 2. М., МИСИС, 1997, 527 с.
60. Красовский А. Л. //Порошковая металлургия, 1964, №1, с. 2-6;
61. Красовский А. Л. // Порошковая металлургия, 1964, №4, с. 3-7;
62. Лебедев А.В., Устойчивость тонких пластин и оболочек, ослабленных отверстиями // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Санкт-Петербург 2010, 113 с.

63. Изгиб пластины [электронный ресурс]. – http://www.soprotmat.ru/m8r/c8.htm. Дата обращения: 07.04.2021

64. Ковальченко М.С. // Реологические модели и процессы деформирования пористых порошковых и композиционных материалов, Киев, Наукова Думка, 1985.

65. Шермергор Т.Д.// Теория упругости микронеоднородных сред,М.: Наука,1977 -323с.

66. Друянов Б.А. «Прикладная теория пластичности пористых тел» М.:Машиностроение, 1989.

67. Gibson L.J., Ashby M.F. // Cellular Solids structure and properties. Pergamon Press.,Oxford, 1988.

68. 1.W. Hall, M. Guden, C.-J. Yu // Crusing of aluminum closed cell foams: density and strein rate effects, Scripta Materialia, V. 43, n.6, 2000, p. 515-521

69. J. Kovacik, F. Simancik // Aluminium foam - modulus of elasticity and electrical conductivity according to percolation theory, Scripta materialia, V. 39, n. 2, pp.239-246, 1998.

70. Поляков В.В., Головин А.В.// Модули упругости пористых материалов, ФММ,РАН, т.79,в. 2, 1995, с. 57-60

71. Поляков В.В., Головин А.В. Влияние пористости на упругие характеристики металла // Металлы, №4, 1995.

72. E. Andrews, W. Sanders, L. J. Gibson Compressive and tensile behaviour of aluminium foams. // Materials Science and Engineering, A270, 1999, p. 113-124

73. Быченков В.А., Л.В. Хардина и др. Кинетическая модель релаксации напряжений в сплошных и пористых твердых телах//Вестник Челябинского ун-та, сер. 6 Физика, № 1(1), 1997, с. 14-26.

74. Мержиевский Л.А., Тягельский А.В. Моделирование динамического сжатия пористого железа//ФГВ, 1994, №4, с. 124-133.

75. Степанов Г.В., Зубов В.И. Расчеты уплотнения пористого железа при сжатии. Сообщение 3: Динамическое уплотнение пористого железа//Проблемы прочности, 1993, №6, с.24-29.

76. H.-J. Schwalbe, F. Baumgartner, Ch. Beichelt Investigations on the failurebehaviour of aluminium foams // ALUMINIUM, 77,2001,1/2

77. J. Bamhart, J. Baumeister: Deformation characteristics of metal foams // Journal of mat. Science, V. 33, (1998) p. 1431-1440.

78. H. Bart-Smith, A.F. Bastawros, A.G. Evans and other, Compressive deformation and yielding mechanisms in cellular Al alloys determined using X-ray tomografy and surface strain mapping// Acta mat., V.46, n.10, 1998, pp. 3583-3592.

79. Y. Sugimura, J. Meyer, M.Y. He, H. Bart-Smith, J. Grenstedt and A.G. Evans, Onthe mechanical performans of closed cell Al alloy foams. // Acta mater. V. 45, n. 12,pp. 5245-5259,1997
80. B. Kriszt, B. Foroughi, K. Faure, H. P. Degischer: Behaviour of aluminium foamunder uniaxial compression. // Materials Science and Technology, vol.16, no. 7/8,2000,792-796
81. A.E. Markaki, T.W. Clyne, The effect of cell wall microstructure on the deformationand fracturee of aluminium-based foams// Acta Mat., V. 49,2001, p. 1677-1686.
82. U. Mosler, A. Miiller, H. Baum, U. Martin, H. Oettel Microstructure of formableprecursor and foamed aluminium material // Metal foams and porous metalstructures, Metfoam 2001, Verlag MITPublishing, 233, (2001).
83. U. Mosler, A. MUller, U. Martin, H.Oettel, A. Schone, N. BungenerGefiigeentwicklung eines metallischen Schaums unter Drukbelastung // Sonderbande der Praktischen Metalographie, Fortschritte in der Metalographie, ed. P.Portella, 33,361 (2002), Frankfurt
84. U. Mosler, J. Heinzel, U. Martin, H. Oettel Quantitative Charakterisierung derzelularen Struktur von Aluminium-Schaumen, // Sonderbande der PraktischenMetalographie, 32, 121,2001.
85. Fusheng Han, Znengang Zhu, J. Gao Comperssive deformation and energyabsorbing charakteristics of foamed aluminum// Metal. And Mat. TransactionsA" V. 29A, October 1998, p. 2497-2502/
86. Andrews E.W., Gibson L.J., Ashby M.F.The creep of cellular solids. // Actamater.- 1999,47. № ю , pp. 2853-2863.
87. Andrews E.W., Huang J.-S., Gibson L.J. Creep behaviour of a closed-cell aluminum foam."// Acta mater.- 1999,47, № 10, pp. 2927-2935.
88. Лихачев В. А., Малинин В. Г. Структурно-аналитическая теория прочности. // СПб.: Наука, 1993.
89. T.J. Lu, J.M. Ong Characterization of close-celled cellular aluminum alloys//J. of Mat. Science, v. 36,2001,2773-2786.
90. T. Daxner, H.J. Bohm, F.G. Rammerstorfer//Comput. Mater. Sci., 1999, V.16, p. 61-91
91. Киселев СП., Руев Г.А., Трунев А.П., Фомин В.И., Шавалиев М.Ш. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. // Новосибирск, Наука, Сиб. отд., 1992. - 261 с.
92. Скрипняк В.А., Потекаев А.И. О сдвиговой прочности металлов за фронтом ударных волн//Изв. ВУЗов,Физика, 1995,т.38, № 16, с.62-65.
93. Thouvenin J. Actia d'une onde de choc sur un solide poroux//J. Phys. — 1966,V. 27, №3-4, p. 183-189.

94. Филиппова В.Б. Структурные факторы деформации и разрушения пористых материалов // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук, М. 2004, 132 с.
95. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та. 1984. – С.71 - 74.
96. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций. Изв. РАН МТТ, 2001, №5, С.156-173.
97. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Наука, 1987, 600 с.
98. Годунов С.К., Забродин А.В. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976, 400 с.
99. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики, М.: Наука, 1980, 536 с.
100. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1981.
101. Кукуджанов В.Н. Численное моделирование динамических процессов деформирования и разрушения упругопластических сред. Успехи механики, т.8, №4, 1985, С.21-65.
102. Угодчиков А.Г., Баженов В.Г., Рузанов А.И. О численных методах и результатах решения нестационарных задач теории упругости и пластичности. Численные методы механики сплошной среды, СО АН СССР, т.16, №4, Новосибирск, 1985, С.129-149
103. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977, 440 с.
104. Кукуджанов В.Н., Кондауров В.И. Численное решение неодномерных задач динамики твердого тела. Пробл. динамики упругопластических сред. М.: Мир, 1975, С.39-84.
105. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972, 418с.
106. Самарский А.А. Теория разностных схем, 3-е изд., испр., М.: Наука. Гл. ред. физ. - мат. лит. ,1989, 616 с.
107. Курант Р., Фридрихс, Леви Г. О разностных уравнениях математической физики. Успехи математических наук, 1940, вып.8, С.112-125.
108. Нох В.Ф. СЭЛ - совместный эйлеро-лагранжев метод для расчета нестационарных двумерных задач. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, С.128-184.

109. Уилкинс М.Л. Расчет упругопластических течений. Вычислительные методы в гидродинамике, М.: Мир, 1967, С.212-263.

110. Голованов А.И., Бережной Д.В. Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань, 2001, 301с.

111. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. Пер. с англ. под ред. Н.С. Бахвалова, М.: Мир, 1986, 318с.

112. Метод конечных элементов в механике твердых тел. Под общ. ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. Киев: Вища школа, Головное изд-во, 1982, 480 с. 150. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976, 464с.

113. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов, М.: Мир, 1977, 349 с.

114. Belytschko, T., Liu, W. K. and Moran, B. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. J. Wiley & Sons, New York, 2000, P.600.

115. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Volumes 1, 2, 5th Edition London, 2000, P. 712.

116. Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики тонкостенных конструкций при импульсных воздействиях. Прикл. пробл. прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб., Горьк. ун-т., 1981, вып.18, С.57-66.

117. Баженов В.Г. Численное исследование нестационарных процессов деформации упругопластических оболочек. Проблемы прочности, 1984, №11, С.51-54.

118. Дресвянников В.И. О численной реализации нелинейных уравнений динамики упругопластических оболочек. Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб., Горьк. ун-т. Горький, 1976, вып.3, С.82-90.

119. Баженов В.Г., Кибец А.И. Численное моделирование трехмерных задач нестационарного деформирования упругопластических конструкций методом конечного элемента. Изв. РАН МТТ, 1994, №1, С.52-59.

120. Капустин С.А., Латухин А.Ю. О применении неявных схем для исследования нестационарного поведения криволинейных стержней с учетом геометрической нелинейности. Прикладные проблемы прочности и пластичности. Алгоритмизация и автоматизация решения задач упругости и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. /Горьк. ун-т, 1980, С.68-75

121. Belytchko T., Mullen R. Stability explicit-implicit mesh partitions in time integrations. Int. J. Num. Meth. in Eng., 1979, v.12, P.1575-1586.

122. Huges T.J.R., Pister K.S., Taylor R.L. Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 1979, v.17-18, №1, P.159-182.

123. Шульц У.Д. Двумерные конечно-разностные уравнения в переменных Лагранжа. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967. С.9-54.

124. Баженов В.Г., Белевич С.М., Коротких Ю.Г., Санков Е.И., Угодчиков А.Г. Методы численного анализа волновых процессов в сплошных средах и тонкостенных конструкциях с учетом сопутствующих явлений. Нелинейные и тепловые эффекты при переходных волновых процессах: Тр. симпозиума. Горький - Таллин, 1973, Ч. 1, С.135-165.

125. Баженов В.Г., Рузанов А.И., Угодчиков А.Г. О численных методах и результатах решения нестационарных задач теории упругости и пластичности. Численные методы механики сплошной среды, 1985, т.16, №4, С.129-149.

126. Харлоу Ф.Х. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. Вычислительные методы в гидродинамике. М.: Мир, 1967, С.316-342.

127. Ильюшин А.А. Пластичность: Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963, 272 с.

128. Ильюшин А.А. Метод СН-ЭВМ в теории пластичности. Проблемы прикладной математики и механики. М.: Наука, 1971, С.166-178

129. Ильюшин А.А. Об одной модели, поясняющей аппроксимационный метод СНЭВМ в теории пластичности. Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 1971, вып.1, С.52-58.

130. Ленский В.С. Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах. Упругость и неупругость. М.:Изд-во МГУ, 1978, вып.5, С. 65-96

131. Ильюшин А.А., Ленский В.С. О соотношениях и методах современной теории пластичности. Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975, С.240-255.

132. Zhang Z. L., Odegard J., Hauge M. P., Thaulow C. A notches cross weld tensile testing method for determining true stress-strain curves for weldments. Engineering Fracture Mech, 2002, 69, P.353-366.

133. Zhang Z. L., Odegard J., Hauge M. P., Thaulow C. Determining material true stress-strain curve from tensile specimens with rectangular cross-section. Int. J. Solids and Struct, 1999, 36, P.3497-3516.

134. Zhang Z. L., Odegard J., Sovik O. P. Determining true stress-strain curve for isotropic and anisotropic materials with rectangular tensile bars: method and verifications. Comput. Mater. Sci., 2001, 20, №1, P.77-85.

135. Zhang Z. L., Odegard J., Sovik O. P., Thaulow C. A study on determining true stressstrain curve for anisotropic materials with rectangular tensile bars. Int. J. Solids and Struct., 2001, 38, №26-27, P.4489-4505

136. Биджмен П. Исследования больших пластических деформаций и разрыва. М.: Изд-во иностр. лит., 1955, 444 с.

137. Backofen W.A., Turner I.R., Avery D.H. Superplasticity in an Al-Zn Alloy. Trans. ASME, 1964, Vol. 57, P. 980-990.

138. Васин Р.А., Еникеев Ф.У. Введение в механику сверхпластичности. В 2 ч, Ч. I, Уфа: Гилем, 1998, 280 с.

139. Тулупова О.П., Ганиева В.Р., Круглов А.А., Еникеев Ф.У. Новая методика идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов. Письма о материалах, 2017, Т. 7, №1, С. 68-71.

140. Ганиева В.Р, Кутлуева А.Н., Еникеев Ф.У Методика определения параметров точки перегиба сигмоидальной кривой сверхпластичности. Проблемы машиностроения и автоматизации, 2012, №1, С. 132-138.

141. Самойлова А.Ю., Ганиева В.Р, Еникеев Ф.У., Круглов А.А. Методика расчета значений реологических параметров для сверхпластичных материалов. Письма о материалах. 2012, Т. 2, №4, С. 240-244.

142. Васин РА., Еникеев Ф.У., Круглов А.А., Сафиулин Р.В. Об идентификации определяющих соотношений по результатам технологических экспериментов. Механика деформируемого твердого тела, 2003, №2, С. 111-123.

143. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Крамарев Л.Н., Осетров С.Л., Павленкова Е.В. Способ определения деформационных и прочностных свойств материалов при больших деформациях и неоднородном напряженно-деформированном состоянии. Патент на изобретение №2324162. Заявка №2006115805. Опубликовано 10.05.2008, бюлл.№13.

144. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Осетров С.Л. Экспериментально-расчетный метод построения истинных диаграмм деформирования при больших деформациях на основе испытаний на твердость. Доклады академии наук, 2006, т.407, №2, С.183-185.

145. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Осетров С.Л. Экспериментально-расчетный метод идентификации деформационных и прочностных свойств материалов. Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2006, т.72, №9, С. 39-45.

146. Баженов В.Г., Зефиров С.В., Осетров С.Л. Метод идентификации деформационных и прочностных свойств металлов и сплавов. Деформация и разрушение материалов, 2007, № 3,С.43-48.

147. Баженов В.Г., Ломунов В.К., Осетров С.Л., Павленкова Е.В. Экспериментально-расчетный метод исследования больших упругопластических деформаций цилиндрических оболочек при растяжении до разрыва и построение диаграмм деформирования при неоднородном напряженно-деформированном состоянии. Прикладная механика и техническая физика, 2013, Т.54, № 1, С.116-124.

148. Баженов В.Г., Кибец. А.И., Лаптев П.В., Осетров С.Л. Экспериментально-теоретическое исследование предельных состояний упругопластических стержней различного поперечного сечения при растяжении. Проблемы механики. Сб. статей к 90-летию со дня рождения А.И. Ишлинского. Под ред. Климова Д.М. и др., М.: Физматлит, 2003, С.116-123.

149. Баженов В.Г., Жегалов С.В., Зефиров С.В. Осетров С.Л. Упругопластическое деформирование и предельные состояния цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления при различных граничных условиях. Вестник ННГУ. Серия Механика, Вып. 1(5), Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003, С.90-94.

150. Баженов В.Г., Крамарев Л.Н., Осетров С.Л. Экспериментальное и теоретическое исследование упругопластического деформирования и разрушения стального шара при сжатии между пластинами. Межвузовский сборник Проблемы прочности и пластичности, Вып.65, Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2003, С.85-91.

151. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966.

152. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория - М.:Высшая школа, 1983. - 399с.

153. Коротких Ю.Г. Математическая модель упругопластической среды, основанная на концепции кинематического и изотропного упрочнения и ее реализация в статических и кинематических задачах. Труды II Всесоюз. Конф. по числ. методам решения задач теории упругости и пластичности. Новосибирск: Изд. ВЦ СО АН СССР, 1971, С.156-169.

154. Коротких Ю.Г. О базовом эксперименте для модели термовязкопластичности. Прикладные проблема прочности и пластичности, 1977, №6, С.3-20.

155. Коротких Ю.Г. О некоторых проблемах численного исследования упругопластических волн в твердых телах. Методы решения задач упругости и пластичности: Учен. зап. /Горьк. ун-т, 1971, вып.134(4), сер. механика, С.69-90.

156. Коротких Ю.Г., Маковкин Г.А. О моделировании процессов непропорционального упругопластического деформирования на базе уравнений пластичности с комбинированным упрочнением. Прикладные проблемы прочности и пластичности. М.: Товарищество научных изданий КМК, 1997, С.5-10.

157. Тимошенко С.П. и Войноровский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636с.

158. Кирпичёв В. Л. О подобии при упругих явлениях. Журнал Русского физико-химического общества, 1874. Т. 6, вып. 9., С. 90 – 120.

159. Abaqus Analysis User's Guide. Abaqus Theory Guide. // Simulia Abaqus. - 2016.

160. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. литры,1950, С. 33–35.

161. Антипов А. А., Жестков М.Н., Иванов В.А., Фролова И.А. Численное моделирование изгиба густо перфорированных пластин. Проблемы прочности и пластичности, 2015,Вып. 77 (4), С.363— 365.

162. Bazhenov V. G., Zhestkov M. N. Applicability of a structurally orthotropic model in problems on tension, bending, and stability of densely perforated plates and shells, Mechanics of composite materials, 2017,T.53, №2, P. 159 – 164.

163. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М. Наука, 1967. – С. 545 – 546

164. Крамарев Л.Н., Жегалов Д.В. Экспериментальное и численное исследование упругопластических процессов пенетрирования, Проблемы прочности и пластичности, 2008г,Вып. 70., С. 79-88.

165. Dorozhko M., Seweryn A. Finite Element Modeling of Anisotropic Deformation Behavior of the Porous Materials Based on Microtomographic Images. AIP Conference Proceedings 1780, 2016, P. 060001

166. Dorozhko M., Seweryn A. Pore-scale numerical modelling of large deformation behaviour of sintered porous metals under compression using computed microtomography. Mechanics of Materials,2019, ISSN 0167-6636, e-ISSN 1872-7743, PP. 1 – 18.

167. Bathe K. - Y. Finite element procedure. New Jersey: Upper SaddleRiver «Prentice Hall», 1996. – 1037 p.

168. Антипов А. А., Артемьева А. А., Баженов В. Г., Жестков М. Н., Кибец А. И. Численное моделирование задачи устойчивости перфорированных оболочек. Вестник пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика,2015, №1 – С. 21 – 30

169. Баженов В. Г., Баранова М. С., Жестков М. Н., Кузьмичева Т. В. Математическая модель и численное решение задачи устойчивости густо перфорированной цилиндрической оболочки под действием внешнего давления. Материалы XX международного симпозиума "динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" имени А.Г. Горшкова, 2014, С. 12 - 13
170. Баженов В. Г., Жестков М. Н. Исследование применимости конструктивно-ортотропной модели в задачах растяжения и изгиба густо перфорированных пластин и оболочек. Материалы XI международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2016), 2016, С. 485 – 487.
171. Баженов В. Г., Жестков М. Н. О пределах применимости теории пластин и оболочек при решении задач изгиба густо перфорированных элементов конструкции. Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXIII международного симпозиума им. А.Г. Горшкова, 2017, С. 28 – 29
172. Баженов В. Г., Жестков М. Н. Исследование применимости принципа подобия в задачах упругопластического изгиба и устойчивости при осевом сжатии густо перфорированных пластин и оболочек. Материалы XII международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (NPNJ'2018), 2018, С. 326 – 328.
173. Баженов В. Г., Жестков М. Н. Исследование применимости принципа двумерного подобия в задачах упругопластического изгиба и устойчивости при осевом сжатии густо перфорированных пластин и оболочек. Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Тезисы докладов 8-й Всероссийской научной Конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, 2018, С. 14
174. Bazhenov V. G., Zhestkov M. N. About the applicability limits of the Tymoshenko model and the principle of two-dimensional similarities in problems of elastic plastic bending and stability of densely perforated plates and shells. Institute of Physics Publishing Journal of physics: conference series, 2019, P. 022022
175. Баженов В. Г., Жестков М. Н. Численное моделирование задач растяжения, изгиба и устойчивости густо перфорированных пластин, оболочек и пористых тел. XII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов, 2019, С. 1072 – 1074.

176. Bazhenov V. G., Zhestkov M. N. Numerical modeling of large deformations for porous metals and identification of carcass deformation diagrams. Mechanics of composite materials, 2020, Vol. 56, No. 6., P. 747-754.

177. Баженов В. Г., Жестков М. Н. Трехмерное моделирование больших деформаций пористых металлов и построение их диаграмм деформирования. Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева, Серия: Механика предельного состояния, 2020, №3(45). С. 56–63

178. Bazhenov V.G., Osetrov S. L., Osetrov D. L., Artemyeva A. A. Influence of the type of stress-strain state on the true stress-strain curve for the elastoplastic materials. Materials physics and mechanics, 2016,№1-2, Т.28. P. 53-56.

179. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики, М.: Наука, 1966, С. 119-123.

180. Дюкина Н. С. Численное моделирование взаимодействия заглубленных сооружений с грунтовым основанием при сейсмических воздействиях// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Н. Новгород 2009, 131 с.

181. Осетров Д. Л. Идентификация прочностных характеристик металлов и сплавов при больших деформациях и неоднородном НДС с учетом сил инерции и трения// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Н. Новгород 2019, 129 с.

182. Гоник Е.Г. Экспериментальный и теоретический анализ изгиба и упругопластического выпучивания тонкостенных цилиндрических оболочек с сыпучим наполнителем// Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, Н. Новгород 2019, 128 с.

183. Баженов В.Г., Жестков М. Н. Численное моделирование НДС и устойчивости густо перфорированных пластин и оболочек при растяжении и изгибе. Сборник материалов Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред». 2015г, С. 47-48

184. Жестков М.Н. Численное моделирование упругопластического деформирования густо перфорированных пластин, оболочек и пористых материалов. Сборник трудов конференции «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред Материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова», Москва, 2021, С 44-45.