

БОНДАРЕВ АНДРЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

**Проекционно-разностные методы приближенного
решения параболического уравнения с
периодическим условием на решение**

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж – 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет».

Научный руководитель:

Смагин Виктор Васильевич,
д.ф.-м.н., профессор

Официальные оппоненты:

Нестеров Павел Николаевич,
д.ф.-м.н., доцент, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова», декан математического факультета

Поляков Дмитрий Михайлович,
к.ф.-м.н., Южный математический институт, филиал ФГБОУН ФНЦ «Владикавказский научный центр Российской академии наук», старший научный сотрудник

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет» (НИУ «БелГУ»).

Защита состоится 26 мая 2022 г. в 16.00 на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского» по адресу: 603022, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д.23.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГАОУ ВО «Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского» и на официальном сайте организации: <https://diss.unn.ru/files/2022/1195/diss-Bondarev-1195.pdf>

Автореферат разослан «____» _____ 2022 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.166.20,
к.ф.-м.н

Бирюков Руслан Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая работа посвящена теоретическому обоснованию применения проекционно-разностных методов к приближённому решению параболических уравнений. При этом параболические задачи удобно трактовать в вариационной постановке.

Изучение разрешимости подобных задач в вариационной постановке наиболее последовательно представлено, например, в монографиях Ж.-Л.Лионса, Р.Темама. Отметим также работу Й.Фуджи и Х.Танабе, в которой исследуется квазилинейная задача Коши.

В диссертационной работе рассматривается абстрактное линейное параболическое уравнение в вариационной форме с периодическим условием на решение. Поднимаются вопросы разрешимости данной задачи и теоретического обоснования сходимости проекционно-разностных методов приближённого решения как с гладкими, так и с негладкими данными, прослежена зависимость порядка скорости сходимости погрешности к нулю от гладкости решения.

Напомним, что проекционно-разностные методы приближённого решения являются методами полной дискретизации и сводят задачу к конечной системе линейных алгебраических уравнений.

При этом очевидна зависимость таких методов как от аппроксимационных свойств проекционных подпространств, так и от способа аппроксимации производной по времени. Из монографий, рассматривающих подобные вопросы, отметим работы Г.И.Марчука, В.И.Агошкова, Х.Гаевского, К.Грёгера, К.Захариаса, Ю.М.Лаевского, К.Флетчера, О.А.Ладыженской, Н.Н.Уральцевой, В.А.Солонникова, И.Бабушки.

Обратим внимание, что имеется достаточно много результатов, полученных для проекционно-разностного метода решения задачи Коши для параболических уравнений, к примеру, этому посвящены работы П.Е.Соболевского,

А.А.Злотника, С.В.Поборчег, П.В.Виноградовой. Из работ, изучающих проекционно-разностный метод для параболических уравнений в вариационном виде, выделим работы В.В.Смагина. Обратим внимание также на работы И.В.Тихонова, В.К.Иванова, И.В.Мельниковой, А.И.Филинкова, Ю.С.Эйдельмана, В.В.Шелухина, А.Р.Ханалыева, А.О.Ашыралиева, С.З.Джамалова, в которых изучаются вопросы разрешимости параболических уравнений с нелокальными условиями. В частности, В.В.Шелухин в качестве примера рассматривает нестационарную модель Стокса вязкой несжимаемой однородной жидкости, которую можно свести к абстрактному параболическому уравнению с периодическим условием на решение.

В работах J.-J.Casanova изучается линеаризованное уравнение Навье-Стокса, моделирующее движение крови по артериям, с периодическим по времени условием.

Целью данной работы является получение и теоретическое обоснование результатов о разрешимости абстрактного параболического уравнения с периодическим условием на решение, а также о сходимости проекционно-разностных методов как с неявной схемой Эйлера, так и со схемой Кранка-Николсон по времени. Ставилась также задача установления оценок погрешностей, ориентированных на проекционные подпространства типа "конечных элементов", причем такие оценки должны быть точными по порядку аппроксимации.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Вопросы существования более гладкого, чем установленное Ж.-Л.Лионсом, решения параболической задачи с периодическим условием на решение, а также сходимости проекционно-разностных методов как с неявной схемой Эйлера, так и со схемой Кранка-Николсон по времени рассматриваются, судя по всему, впервые. Полученные результаты по пространственным переменным ориентированы на проекционные подпространства типа "конечных элементов". Аппроксимационные свойства таких подпространств позволяют помимо

сходимости приближённых решений получать и порядки скорости сходимости.

Практическая значимость. Работа носит теоретический характер. В то же время, результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при приближённом решении конкретных параболических задач с периодическими по времени условиями на решение.

Методология и методы исследования. В диссертации использованы методы теории дифференциальных уравнений, а также методы функционального анализа.

При рассмотрении проекционных и проекционно-разностных методов формулировка задачи в вариационной форме является наиболее подходящим способом ее интерпретации. При этом разрешимость задачи в различных классах решений устанавливается с помощью проекционного метода: доказываются различные априорные оценки приближённых решений, затем приводится обоснование соответствующего слабого предельного перехода. Также априорные оценки приближённых решений играют важную роль в получении оценок погрешности приближенного решения в проекционно-разностных методах.

Существенным обстоятельством в обосновании оценок погрешности является методика первоначального сравнения приближённого решения не с точным решением, а с его проекцией на проекционное подпространство в соответствующем гильбертовом пространстве. В результате получается некоторая базовая оценка погрешности, установленная в условиях разрешимости исходной задачи.

Далее, из оценок погрешности для предельно плотной в соответствующем пространстве последовательности проекционных подпространств получается сходимость погрешности к нулю. А также из этих оценок получаются, в предположении выполнения некоторых аппроксимационных свойств проекционных подпространств, оценки с порядком скорости сходимости как по времени, так и по пространству.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Теоремы о гладкой и обобщённой разрешимости вариационной параболической задачи с периодическим по времени условием.

2. Вопросы сходимости приближённого решения вариационной параболической задачи с периодическим по времени условием, найденного при помощи проекционно-разностных методов как с неявной схемой Эйлера, так и со схемой Кранка-Николсон по времени, к точному решению в различных нормах, а также обоснования скорости сходимости, зависящей от гладкости исходного решения и аппроксимационных свойств проекционных подпространств.

Достоверность. Теоретические результаты получены путем корректного применения проекционно-разностных методов приближённого решения абстрактного параболического уравнения с периодическим условием на решение, а именно — метода Галёркина по пространству, а также неявной схемы Эйлера и схемы Кранка-Николсон по временной переменной. Заключение диссертационной работы основаны на строгих математических доказательствах и согласуются с результатами работ, опубликованных по данной тематике, что свидетельствует о достоверности полученных результатов.

Апробация работы. Результаты настоящей работы докладывались и обсуждались на Международной открытой конференции "Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях" – 2014, г. Воронеж; Воронежской зимней математической школе С.Г.Крейна – 2014 и 2016; Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам – 2016, г. Суздаль; молодёжной международной научной конференции "Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения" – 2016, г. Воронеж; Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам – 2017, г. Симферополь; международной научной конференции "Колмогоровские чтения – VIII. Общие проблемы теории управления и их приложения" – 2018, г. Там-

бов; молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2018", г. Казань; ежегодных научных сессиях, семинаре под руководством проф. Б.Н.Садовского при кафедре функционального анализа и операторных уравнений, семинаре по теории операторов под руководством проф. А.Г.Баскакова при кафедре системного анализа и управления в Воронежском государственном университете; семинаре "Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ" под руководством проф. А.В.Калинина при кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, а также на семинаре научно-образовательного математического центра "Математика технологий будущего" в Национальном исследовательском Нижегородском государственном университете им. Н.И.Лобачевского.

Публикации. В общей сложности по теме диссертации автором было опубликовано 14 работ, из них работы [1], [4], [8], [9], [11], [14] — в журналах, рекомендованных ВАК. В работах [1] и [9] постановка задачи принадлежит В.В.Смагину, основные же результаты получены автором.

Структура и объем работы диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Полный объём диссертационной работы составляет 98 страниц.

Содержание работы

Во **введении** приводятся исторические и библиографические сведения о предмете исследования, определяются основные понятия и обозначения, встречающиеся в тексте диссертационной работы. Дано общее описание изучаемой задачи, приводятся основные направления и методы исследования. Характеризуются полученные в диссертации результаты, приводятся модельные задачи, также рассматриваются некоторые задачи, которые могут быть сведены к изучаемым.

Нумерация приводимых ниже теорем и следствий совпадает с их нумерацией в диссертации.

В §1.1 **первой главы** диссертационной работы приводится постановка задачи. Изучается тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – сопряжённое к V , а H отождествляется со своим сопряжённым. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассматривается полуторалинейная по $u, v \in V$ форма $a(t, u, v)$, измеримая по $t \in [0, T]$. Для $u, v \in V$ и п. в. $t \in [0, T]$ выполнены оценки $|a(t, u, v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V$ и $\operatorname{Re} a(t, u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2$, где $\alpha > 0$. Форма $a(t, u, v)$ при п.в. $t \in [0, T]$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \rightarrow V'$, такой, что $(A(t)u, v) = a(t, u, v)$, где выражение типа (z, v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$.

Рассмотрим в V' на $[0, T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \quad (1)$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщённом смысле.

В монографии Ж.-Л.Лионса, Э.Мадженеса "Неоднородные граничные задачи и их приложения" приводится (без доказательства)

Теорема 1.1. *Для заданного $f \in L_2(0, T; V')$ существует (и притом единственное) решение $u(t)$ задачи (1), называемое слабым, такое, что $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u' \in L_2(0, T; V')$.*

В §1.2 диссертации проводится доказательство данной теоремы, основанное на применении метода Галёркина с обоснованием последующего слабого предельного перехода к точному решению. При доказательстве **теоремы 1.1** получены априорные оценки решения, необходимые в дальнейшем для получения условий более гладкой разрешимости задачи (1).

Параграф 1.3 посвящен вопросу гладкой разрешимости задачи (1). Будем считать, что форма $a(t, u, v)$ абсолютно непрерывна по $t \in [0, T]$ и для формы

$a_1(t, u, v) = \partial a(t, u, v) / \partial t$ почти при всех $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$|a_1(t, u, v)| \leq \mu_1 \|u\|_V \|v\|_V \quad (u, v \in V). \quad (2)$$

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1, условие (2) и $a(0, u, v) = a(T, u, v)$ для всех $u, v \in V$. Пусть $f' \in L_2(0, T; V')$ и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда слабое решение задачи (1) будет таким, что $u' \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u'' \in L_2(0, T; V')$.

В §1.4 **первой главы** диссертации при условии симметричности формы $a(t, u, v)$, то есть при $u, v \in V$ и п.в. $t \in [0, T]$ $a(t, u, v) = \overline{a(t, v, u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряжённому числу, доказана обобщённая разрешимость задачи (1).

Теорема 1.3. Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и условие (2), форма $a(t, u, v)$ симметрична и $a(0, u, v) = a(T, u, v)$ для всех $u, v \in V$. Пусть функция $t \rightarrow f(t) \in H$ такая, что $f \in L_2(0, T; H)$. Тогда слабое решение $u(t)$ задачи (1) будет таким, что $u', Au \in L_2(0, T; H)$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена проекционно-разностному методу решения задачи (1) с неявной схемой Эйлера по времени.

В §2.1 определяются проекционные подпространства V_h как конечномерные подпространства пространства V , где $h > 0$. Оператор ортогонального проектирования $P_h : H \rightarrow V_h$ допускает расширение по непрерывности до ограниченного оператора $\overline{P}_h : V' \rightarrow V'_h$, где пространство V'_h можно определить, задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V'_h} = \sup |(u_h, v_h)|$, где точная верхняя граница берётся по всем $v_h \in V_h$, $\|v_h\|_V = 1$.

Опишем изучаемую приближённую задачу. Для $k = \overline{1, N}$

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_k^h u_k^h = f_k^h, \quad u_0^h = u_N^h, \quad (3)$$

где $N \in \mathbb{N}$, $T = \tau N$, $t_k = k\tau$; $u_k^h \in V_h$; $f_k^h \in V_h$. Указанные параметры используются во всех приведённых ниже приближённых задачах. Операторы $A_k^h : V_h \rightarrow V_h$ определяются следующим образом: $A_k^h = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h A(t) dt$.

Результаты об энергетической сходимости проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени представлены в §2.2. Они установлены для задачи (3), в которой $f_k^h = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} f(t) dt$.

Для сходимости проекционно-разностного метода предположим, что задана последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$, предельно плотная в V при $h \rightarrow 0$, то есть $\|(I - Q_h)v\|_V \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и любом $v \in V$, где Q_h – ортогональный проектор пространства V на V_h .

Предположим также, что подпространства V_h удовлетворяют условиям:

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leq r_1 h \|v\|_V, \quad (4) \quad \|v_h\|_V \leq r_2 h^{-1} \|v_h\|_H, \quad (5)$$

где r_1 и r_2 не зависят от $v \in V$, $v_h \in V_h$ и h .

Теорема 2.2. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1), а $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ – решение задачи (3). Пусть $\{V_h\}$ предельно плотная в V последовательность, для которой верно (4) и (5), и пусть $\tau = o(h^2)$. Тогда при $h \rightarrow 0$

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u_k^h\|_V^2 dt \rightarrow 0. \quad (6)$$

В следующих утверждениях показано, что при дополнительных предположениях на гладкость решения задачи (1) требование $\tau = o(h^2)$ в **теореме 2.2** можно существенно ослабить. Так, в **следствии 2.3** при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ вместе с (6) справедлива и сходимость $\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau \rightarrow 0$, при этом согласования параметров не требуется.

Для получения порядка скорости сходимости по пространственным переменным предположим существование гильбертова пространства E , такого, что $E \subset V$ и $V = [E, H]_{1/2}$. Пусть подпространства $V_h \subset V$ такие, что

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq r h \|v\|_E, \quad (7)$$

где r не зависит от $v \in E$ и h .

В предположениях выполнения аппроксимационных свойств (5) и (7), а

также дополнительной гладкости решения, установлены порядки скорости сходимости как по времени, так и по пространству (**теорема 2.3 – теорема 2.5**).

В §2.3 **второй главы** диссертационной работы установлена энергетическая сходимость погрешности приближённых решений к нулю в условиях гладкой разрешимости задачи (1) без дополнительных предположений (4) и (5) на подпространства V_h .

В условиях гладкой разрешимости приближённая задача имеет вид:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h A(t_k) u_k^h = \overline{P}_h f(t_k), \quad u_0^h = u_N^h.$$

Из утверждения **теоремы 2.6** в предположении предельной плотности последовательности $\{V_h\}$ в V следует при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ сходимость

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau \rightarrow 0$$

Порядки скорости сходимости установлены в **теореме 2.7** при дополнительном предположении гладкости решения $u \in L_2(0, T; E)$, а также выполнении аппроксимационного свойства (7).

Далее в пространстве V' рассматривается периодическая задача

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \quad (8)$$

Здесь форма, порождающая оператор A , не зависит от времени и симметрична.

Для оператора A , порожденного симметричной формой $a(u, v)$, сепарабельное гильбертово пространство E определим так, что $D[A] \subset E \subset V$, где $D[A] = \{v \in V : Av \in H\}$, и $V = [E, H]_{1/2}$. Пусть выполняется оценка

$$\|u\|_E \leq \delta \|Au\|_H \quad (u \in D[A], \delta > 0) \quad (9)$$

Параграф 2.4 посвящен среднеквадратичной сходимости приближённых решений к точному в условиях слабой разрешимости задачи (8). В подпространстве $V_h \subset V$ рассматривается следующая приближённая задача:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h A u_k^h = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) dt, \quad u_0^h = u_N^h.$$

Согласно **теореме 2.8**, $\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau \rightarrow 0$ для $\{V_h\}$ – предельно плотной в V последовательности и $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$. При выполнении аппроксимационного свойства (7) подпространств V_h и условия (9) установлена (**следствие 2.4**) и скорость сходимости приближённых решений к точному.

В §2.5 для задачи (8) в условиях гладкой разрешимости рассматривается приближённая задача:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h A u_k^h = \overline{P}_h f(t_k), \quad u_0^h = u_N^h.$$

В условиях дополнительной гладкости $u'' \in L_p(0, T; H)$, где $1 \leq p \leq 2$, и в предположении предельной плотности в V последовательности $\{V_h\}$ при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$ доказана сходимость погрешности в сильных нормах

$$\max_{0 \leq k \leq N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \|u'(t_k) - (u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_H^2 \tau \rightarrow 0$$

и получены результаты о порядке сходимости погрешности (**следствие 2.5**).

Третья глава посвящена проекционно-разностному методу со схемой Кранка-Николсон по времени. В §3.1 для гладко разрешимой задачи (1) в подпространстве $V_h \subset V$ рассматривается приближённая задача:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_k^h(u_k^h + u_{k-1}^h)2^{-1} = f_k^h, \quad u_0^h = u_N^h,$$

где $A_k^h = \overline{P}_h(A(t_k) + A(t_{k-1}))2^{-1}$.

Обратим внимание, что если для схемы Эйлера скорость сходимости приближённого решения к точному получается не более чем с первым порядком по времени, то для схемы Кранка-Николсон сходимость в случае гладкого решения установлена по времени со вторым порядком.

В §3.2 в предположении $f_k^h = 2^{-1}\overline{P}_h(f(t_k) + f(t_{k-1}))$ доказана сходимость приближённых решений к точному (**следствие 3.1**): если $\{V_h\}$ предельно плотна в V , то при $\tau \rightarrow 0$ и $h \rightarrow 0$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1}))}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \rightarrow 0.$$

Также установлены порядки скорости сходимости, точные как по времени, так и по пространству (**следствие 3.2 – следствие 3.5**).

В §3.3 рассматривается в условиях слабой разрешимости задача (8), для которой в подпространстве V_h приводится приближённая задача:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h A(u_k^h + u_{k-1}^h)2^{-1} = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t) dt, \quad u_0^h = u_N^h.$$

В предположениях гладкости $u \in L_2(0, T; E)$ решения задачи (8) установлена среднеквадратичная сходимость погрешностей к нулю (**теорема 3.4**). При дополнительных предположениях гладкости $u' \in L_p(0, T; V)$, $u'' \in L_p(0, T; H)$, где $1 \leq p \leq 2$, а также выполнении условий (7) и (9) получены (**следствие 3.6**) оценки погрешности со вторым порядком при $p = 2$ скорости сходимости как по временной, так и по пространственным переменным:

$$\sum_{k=1}^N \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \leq M \left\{ \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p dt \right)^{2/p} + h^4 \int_0^T \|u(t)\|_E^2 dt \right\}.$$

В §3.4 в подпространстве V_h для гладко разрешимой задачи (8) рассматривается приближённая задача следующего вида:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + \overline{P}_h A(u_k^h + u_{k-1}^h)2^{-1} = \overline{P}_h (f(t_k) + f(t_{k-1}))2^{-1}, \quad u_0^h = u_N^h.$$

В предположениях гладкости $u \in C([0, T], E)$, $u''' \in L_p(0, T; H)$ ($1 \leq p \leq 2$), а также выполнении условий (7) и (9) установлена (**следствие 3.7**) сходимость в сильных нормах с порядком $\tau^{5-2/p}$ по времени приближенного решения к точному:

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \rightarrow 0.$$

Список публикаций по теме диссертации

[1] Бондарев, А. С. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с периодическим условием на ре-

шение / А. С. Бондарев, В. В. Смагин // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. – Воронеж, 2014. – №2. – С. 81-94.

[2] Бондарев, А. С. Параболическое уравнение с периодическим условием на решение и проекционно-разностный метод его приближённого решения / А. С. Бондарев // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции. – №4, часть 2. – 2014. – С. 69-72.

[3] Бондарев, А. С. Проекционно-разностный метод решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2014" / под ред. В.А.Костина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". – 2014. – С. 62-65.

[4] Бондарев, А. С. Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. – Воронеж, 2015. – №4. – С. 78-88.

[5] Бондарев, А. С. Среднеквадратичная сходимость проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2016" / под ред. В.А.Костина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". – 2016. – С. 94-97.

[6] Бондарев, А. С. О проекционно-разностном методе решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов, Суздаль, 8-12 июля 2016 г. – Суздаль, 2016. – С. 30-31.

[7] Бондарев, А. С. Приближённое решение параболического уравнения с

периодическим условием на решение проекционно-разностным методом / А. С. Бондарев // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы молодежной международной научной конференции "Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения". – Воронеж, 2016. – Вып. 5, ч. 1. – С. 64-66.

[8] Бондарев, А. С. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон по времени для параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. – Белгород, 2017. – Вып. 46, №6(255). – С. 72-80.

[9] Бондарев, А. С. Решение вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение проекционно-разностным методом со схемой Кранка-Николсон по времени / А. С. Бондарев, В. В. Смагин // Сибирский математический журнал. – Новосибирск, 2017. – Т. 58, №4. – С. 761 — 770. (Перевод: Bondarev, A. S. Solving a Variational Parabolic Equation with the Periodic Condition by a Projection-Difference Method with the Crank-Nicolson Scheme in Time / A. S. Bondarev, V. V. Smagin // Siberian Mathematical Journal. – Новосибирск, 2017. – Vol. 58, №4. – С. 591-599.)

[10] Бондарев, А. С. О сходимости проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон по времени для параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017): сборник материалов международной конференции. – Симферополь, 2017. – С. 33-36.

[11] Бондарев, А. С. Оценки в сильных нормах проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. – Воро-

неж, 2018. – №2. – С. 129-139.

[12] Бондарев, А. С. Сходимость в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. – Тамбов, 2018. – Т. 23, №124. – С. 617-623.

[13] Бондарев, А. С. Приближённое решение проекционно-разностным методом со схемой Кранка-Николсон по времени параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского: материалы 17-ой молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения-2018" (Казань, 23-28 ноября 2018 г.). – Казань, 2018. – Т. 56. – С. 69-73.

[14] Бондарев, А. С. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – Москва, 2020. – Т. 175. – С. 118-123.