МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

на правах рукописи

БОНДАРЕВ АНДРЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

Проекционно-разностные методы приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор В.В.Смагин

Воронеж – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертационной работы

Одним из эффективных методов приближённого решения начально-краевых задач для параболических уравнений является проекционно-разностный метод. При этом такие задачи удобно трактовать в вариационной постановке.

Изучение разрешимости подобных задач наиболее последовательно представлено, например, в монографиях [1]–[6], работах [7]–[10].

В данной работе рассматривается абстрактное линейное параболическое уравнение в вариационной форме с периодическим условием на решение. Поднимаются вопросы разрешимости данной задачи и теоретического обоснования сходимости проекционно-разностных методов приближённого решения как с гладкими, так и с негладкими данными, прослежена зависимость порядка скорости сходимости погрешности к нулю от гладкости решения.

Напомним, что проекционно-разностные методы приближённого решения являются методами полной дискретизации и сводят задачу к конечной системе линейных алгебраических уравнений.

При этом очевидна зависимость таких методов как от аппроксимационных свойств проекционных подпространств, так и от способа аппроксимации производной по времени. Из монографий, рассматривающих подобные вопросы, отметим [6], [11]–[27].

Обратим внимание, что имеется достаточно много результатов, полученных для проекционно-разностного метода решения задачи Коши для параболических уравнений, к примеру, [28]–[33]. Из новейших работ, изучающих проекционно-разностный метод для параболических уравнений в вариационном виде, выделим работы [34]–[38] (см. также имеющуюся там библиографию), в которых для параболических уравнений рассматривается, как правило, задача

Коши. Отметим, кроме того, наиболее близкие по тематике работы [39], [40], где периодическая задача для параболического уравнения решается приближённо полудискретным методом Галёркина. В работе И.В.Тихонова [41] для краевой задачи с нелокальным условием наиболее общего вида установлен критерий единственности решения в терминах собственных значений при самых общих предположениях относительно оператора A. В [42, §5, с. 61], [43] для уравнения типа (3) в банаховом пространстве исследовалась разрешимость нелокальной краевой задачи с условием

$$\mu u(0) - u(T) = u_0,$$

близким к периодическому. Коэрцитивная разрешимость нелокальной краевой задачи с условием

$$u(0) = u(\lambda) + \mu \quad (0 < \lambda \leq 1)$$

для параболических уравнений установлена в работах [44]–[47]. Вопрос о разрешимости также изучался, к примеру, для конкретной нелокальной краевой задачи второго порядка в статье С.З.Джамалова [48].

Цель и задачи исследования

Целью данной работы является получение и теоретическое обоснование результатов о разрешимости абстрактного параболического уравнения с периодическим условием на решение, а также о сходимости проекционно-разностных методов как с неявной схемой Эйлера, так и со схемой Кранка-Николсон по времени. Ставилась также задача установления оценок погрешностей, ориентированных на проекционные подпространства типа "конечных элементов", причем такие оценки должны быть точными по порядку аппроксимации.

Научная новизна

Результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Вопросы существования более гладкого, чем установленное Ж.-Л.Лионсом, решения параболической задачи с периодическим условием на решение, а также сходимости проекционно-разностных методов как с неявной схемой Эйлера, так и со схемой Кранка-Николсон по времени рассматриваются, судя по всему, впервые. Полученные результаты по пространственным переменным ориентированы на проекционные подпространства типа "конечных элементов". Аппроксимационные свойства таких подпространств позволяют помимо сходимости приближённых решений получать и порядки скорости сходимости.

Практическая значимость полученных результатов

Работа носит теоретический характер. В то же время, результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы при приближённом решении конкретных параболических задач с периодическими по времени условиями на решение.

Примерами задач, сводящихся к абстрактному параболическому уравнению с периодическим условием на решение, могут служить классические задачи теплопроводности, а также нестационарная модель Стокса вязкой несжимаемой однородной жидкости [49] и уравнение движения крови по артериям (линеаризованное уравнение Навье-Стокса) [50].

Методология и методы исследования

В диссертации использованы методы теории дифференциальных уравнений, а также методы функционального анализа. Соответствующие факты и утверждения можно найти в указанных выше монографиях, а также в [51]–[54].

При рассмотрении проекционных и проекционно-разностных методов формулировка задачи в вариационной форме является наиболее подходящим способом ее интерпретации. При этом разрешимость задачи в различных классах решений устанавливается с помощью проекционного метода: доказываются различные априорные оценки приближённых решений, после чего приводится обоснование соответствующего слабого предельного перехода. При рассмотрении проекционно-разностных методов априорные оценки приближённых решений играют важную роль в получении оценок погрешности приближенного решения.

Существенным обстоятельством в обосновании оценок погрешности является методика первоначального сравнения приближённого решения не с точным решением, а с его проекцией на проекционное подпространство в соответствующем гильбертовом пространстве. В результате получается некоторая базовая оценка погрешности, установленная в условиях разрешимости исходной задачи.

Далее, из оценок погрешности для предельно плотной в соответствующем пространстве последовательности проекционных подпространств получается сходимость погрешности к нулю. А также из этих оценок получаются, в предположении выполнения некоторых аппроксимационных свойств проекционных подпространств, оценки с порядком скорости сходимости как по времени, так и по пространству.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Теоремы о гладкой и обобщённой разрешимости вариационной параболической задачи с периодическим по времени условием.

2. Вопросы сходимости приближённого решения вариационной параболической задачи с периодическим по времени условием, найденного при помощи проекционно-разностных методов как с неявной схемой Эйлера, так и со схемой Кранка-Николсон по времени, к точному решению в различных нормах, а также обоснования скорости сходимости, зависящей от гладкости исходного решения и аппроксимационных свойств проекционных подпространств.

Достоверность результатов диссертации

Теоретические результаты получены путем корректного применения проекционно-разностных методов приближённого решения абстрактного параболического уравнения с периодическим условием на решение, а именно — метода Галёркина по пространству, а также неявной схемы Эйлера и схемы Кранка-Николсон по временной переменной. Заключения диссертационной работы основаны на строгих математических доказательствах и согласуются с результатами работ, опубликованных по данной тематике, что свидетельствует о достоверности полученных результатов.

Основные результаты работы

Для начала приведём сведения для описания пространств, некоторых операторов и их свойств, которые понадобятся в дальнейшем изложении материала.

Для банахова пространства X под пространством $L_p(0,T;X)$, где $1 \leq p < \infty$, будем понимать пространство функций $t \to u(t) \in X$, измеримых на отрезке $[0,T]$ и таких, что $\|u(t)\|_X^p$ суммируема на отрезке $[0,T]$ по Лебегу. Норма в пространстве $L_p(0,T;X)$ определена следующим образом:

$$\|u(t)\|_{L_p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Под пространством $C([0,T],X)$ понимается пространство функций $t \to u(t) \in X$, непрерывных на отрезке $[0,T]$, с нормой

$$\|u(t)\|_{C([0,T],X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X.$$

Определим также множество $C_0^\infty(0,T)$ бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0,T]$ функций $t \to u(t)$ с носителем, лежащим в $(0,T)$.

Возникающую далее в работе для функции $f \in L_1(0,T;X)$ производную по времени будем понимать в обобщённом смысле. Так по каждой функции

$\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ определим отображение f следующим образом

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt, \tag{1}$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера [5, с. 152]. Таким образом, функция $f \in L_1(0,T;X)$ определяет на $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ по правилу (1) отображение $f(\varphi)$, которое назовём обобщённой функцией.

Обобщённая производная $df/\,dt$ определяется для $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$ как

$$\frac{df}{dt}(\varphi) = -\int_0^T f(t)\varphi'(t)\,dt.$$

В случае, когда существует функция $g \in L_1(0,T;X)$, такая, что

$$\frac{df}{dt}(\varphi) = \int_0^T g(t)\varphi(t)\,dt = g(\varphi),$$

говорят, что обобщённые функции $df/\,dt$ и g равны и $df/\,dt \in L_1(0,T;X)$.

Приведём весьма важный факт из [6, с.201].

Лемма 1. *Пусть – X банахово пространство с сопряжённым X^* и пусть f и g – функции, принадлежащие $L_1(0,T;X)$. Тогда следующие три условия эквивалентны:*

(a) f почти всюду равна первообразной от g:

$$f(t) = \xi + \int_0^t g(s)\,ds, \quad \xi \in X, \textit{для п. в. } t \in [0,T];$$

(b) для каждой пробной функции $\varphi \in C_0^\infty(0,T)$

$$\int_0^T f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_0^T g(t)\varphi(t)\,dt;$$

(c) для каждого $\eta \in X^*$

$$\frac{d}{dt}(f,\eta) = (g,\eta),$$

в смысле скалярных обобщённых функций на $[0,T]$, где выражение типа (g,η) есть значение функционала $\eta \in X^*$ на элементе $g \in X$.

Если условия (a)–(c) выполнены, то f, в частности, п. в. равна некоторой абсолютно непрерывной функции из $[0,T]$ в X.

Опишем изучаемую вариационную задачу. Рассмотрим тройку сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – сопряжённое к V, а пространство H, согласно теореме Ф.Рисса, отождествляется со своим сопряжённым. Оба вложения плотны и непрерывны. Плотность вложения, например, $V \subset H$, означает, что для любого элемента $u \in H$ существует последовательность $\{u_n\} \subset V$, такая, что $\|u - u_n\|_H \to 0$ при $n \to \infty$. Непрерывность же вложения $V \subset H$ понимается как существование неотрицательной константы c, такой, что для любого элемента $u \in V$ выполнено $\|u\|_H \leq c\|u\|_V$.

Пусть дана полуторалинейная по $u, v \in V$ форма $a(t, u, v)$, измеримая по $t \in [0, T]$. Пусть для $u, v \in V$ и п. в. $t \in [0, T]$

$$|a(t, u, v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(t, u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \tag{2}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(t, u, v)$ при п.в. $t \in [0, T]$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \to V'$, такой, что $(A(t)u, v) = a(t, u, v)$, где выражение типа (z, v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z, v) – скалярное произведение в H [25, гл.2].

Рассмотрим в пространстве V' на $[0, T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \tag{3}$$

Здесь и далее, как отмечено выше, производные функций понимаются в обобщённом смысле.

Уравнение в (3) можно записать в следующем вариационном виде [1]: для всякого $v \in V$

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(t, u(t), v) = (f(t), v).$$

В [1, с.289] приводится (без доказательства)

Теорема 1. *Для заданного $f \in L_2(0, T; V')$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0, T; V) \bigcap C([0, T], H)$ задачи (3), называемое слабым решением, причем $u' \in L_2(0, T; V')$.*

В первой главе настоящей работы приведено доказательство данной теоремы с помощью метода Галёркина. Оценки, полученные при доказательстве теоремы, используются в дальнейшем в этой главе для получения условий гладкой разрешимости задачи (3). Кроме того, установлена оценка гладкого решения рассматриваемой задачи. В случае, когда форма $a(t, u, v)$ симметрична, доказана обобщённая разрешимость задачи (3) и приведены соответствующие оценки на решение.

Примеры параболических уравнений, сводящихся к вариационной постановке, можно найти, например, в [2, с. 114]. Для полноты изложения укажем модельные параболические задачи, к которым применимы результаты настоящей работы. В модельных задачах для простоты считаем все функции вещественнозначными.

Пусть $t \in [0, T]$ и $x \in [a, b]$. Рассмотрим задачу:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(p(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right) + q(t,x)u(t,x) = f(t,x) \tag{4}$$

$$u(0,x) = u(T,x) \tag{5}$$

$$u(t,a) = u(t,b) = 0. \tag{6}$$

Определим пространства $H = L_2[a,b], V = \overset{\circ}{W}{}_2^1 [a,b], V' = W_2^{-1}[a,b]$ (см., например, [25, с.68]). Под пространством $\overset{\circ}{W}{}_2^1 [a,b]$ будем понимать пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $u(t)$, таких, что $u' \in L_2[a,b]$, а $u(a) = u(b) = 0$.

В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1 [a,b]$ рассмотрим форму:

$$a(t,u,v) = \int\limits_a^b \left(p(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} + q(t,x)u(x)v(x)\right) dx, \tag{7}$$

где $t \in [0,T], u, v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 [a,b]$.

Предположим, что функции $p(t,x)$ и $q(t,x)$ в прямоугольнике $\mathcal{Q} = [0,T] \times [a,b]$ принадлежат пространству $L_\infty(\mathcal{Q})$ и, кроме того, $p(t,x) \geq p_0 > 0$,

$q(t,x) \geq q_0 > 0$. Учитывая сделанные о функциях $p(t,x)$ и $q(t,x)$ предположения, нетрудно показать, что форма (7) удовлетворяет условиям (2), и тогда задача (4)–(5)–(6) сводится к операторному виду (3), где для $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1[a,b]$ оператор

$$A(t)u(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(t,x)\frac{du}{dx}\right) + q(t,x)u(x).$$

В задаче (4)–(5)–(6) считается, что $f \in L_2(0,T;W_2^{-1}[a,b])$.

Можно также рассмотреть параболическую задачу с третьим краевым условием по переменной $x \in [a,b]$. А именно, в задаче (4)–(5)–(6) вместо условия (6) положим

$$\frac{\partial}{\partial x}u(t,a) + \alpha u(t,a) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,b) + \beta u(t,b) = 0, \tag{6'}$$

где $\alpha \leq 0$, $\beta \geq 0$, а функции $p(t,x)$ и $q(t,x)$ такие же, как в уравнении (4), кроме того, функция $p(t,x)$ непрерывна по $x \in [a,b]$ при п.в. $t \in [0,T]$. Тогда $H = L_2[a,b], V = W_2^1[a,b]$.

В пространстве $W_2^1[a,b]$ рассмотрим форму:

$$a(t,u,v) = -\alpha p(t,a)u(t,a)v(t,a) + \beta p(t,b)u(t,b)v(t,b)+$$
$$\int\limits_a^b \left(p(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\frac{\partial v(t,x)}{\partial x} + q(t,x)u(x)v(x)\right)dx. \tag{7'}$$

Билинейная форма (7′) удовлетворяет условиям (2), и задача (4)–(5)–(6′) также сводится к операторному виду (3), где $f \in L_2(0,T;V')$.

В двух следующих главах описаны приближённые задачи. Для нахождения приближённого решения применяется проекционно-разностный метод — с использованием по времени неявной схемы Эйлера во второй главе и схемы Кранка-Николсон — в третьей. Аппроксимация задачи по пространственным переменным ориентирована на метод конечных элементов, который является весьма удобным для численной реализации (см. [16], [26], [27]). Проекционно-разностный метод сводит исходную задачу к линейной системе алгебраических уравнений, то есть является методом полной дискретизации. Получены оценки погрешностей приближённых решений и сходимость приближённых решений к точному в случаях слабой и гладкой разрешимости вариационной задачи, а также среднеквадратичная сходимость и сходимость в сильных нормах для задачи с симметричным оператором. Установлена скорость сходимости приближённых решений к точному как по временной, так и по пространственной переменной. Заметим, что схема Кранка-Николсон для гладких решений дает второй порядок сходимости, в то время как схема Эйлера лишь первый, поэтому в главе 3 наиболее значимые результаты получены в предположениях достаточной гладкости решения.

Перейдем к описанию проекционно-разностных методов приближённого решения задачи (3). Пусть V_h, где h — положительный параметр, есть конечномерное подпространство пространства V. Элементы V_h можно рассматривать в нормах пространств H, V и V'. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму

$$\|u_h\|_{V_h'} = \sup_{v_h \in V_h, \|v_h\|_V = 1} |(u_h, v_h)|.$$

Заметим, что $\|u_h\|_{V_h'} \leq \|u_h\|_{V'}$.

Пусть P_h — ортопроектор в пространстве H на V_h. Как замечено в [55], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P_h} : V' \to V_h$, причем для любого $u \in V'$ справедлива оценка $\|\overline{P_h} u\|_{V_h'} \leq \|u\|_{V'}$. Кроме того, для $u \in V'$ и $v \in H$ справедливо важное соотношение $(\overline{P_h} u, v) = (u, P_h v)$ [34].

Рассмотрим в V_h для задачи (3) приближённую задачу, изучаемую в главе 2. Для $k = \overline{1, N}$ определим

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h u_k^h = f_k^h, \qquad u_0^h = u_N^h, \tag{8}$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, причем $t_k - t_{k-1} = \tau = T/N$; $u_k^h \in V_h$. То есть дискретизация по временной переменной проводится с помощью неявной схемы

Эйлера.

В условиях слабой разрешимости задачи (3) будем предполагать в задаче (8)

$$A_k^h = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} A(t)\,dt, \qquad f_k^h = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,dt,$$

тогда в вариационной форме уравнение (8) примет следующий вид:

$$\left(\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}, v_h\right) + \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} a(t, u_k^h, v_h)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (f(t), v_h)\,dt,$$

где $k = \overline{1, N}$, а v_h — произвольный элемент из V_h.

Для задачи (3) с гладкими данными задача (8) будет иметь более простой вариационный вид. Здесь $A_k^h = \overline{P_h}A(t_k)$, $f_k^h = \overline{P_h}f(t_k)$, тогда имеем

$$\left(\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}, v_h\right) + a(t_k, u_k^h, v_h) = (f(t_k), v_h) \qquad (k = \overline{1, N}).$$

Для построения приближённых решений с помощью схемы Кранка-Николсон по времени возьмем, как и выше, равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ отрезка $[0, T]$, где $N \in \mathbb{N}$. В подпространстве $V_h \subset V$ рассмотрим разностную задачу

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} = f_k^h \quad (k = \overline{1, N}), \quad u_0^h = u_N^h, \tag{9}$$

где $t_k - t_{k-1} = \tau = T/N$, $u_k^h \in V_h$, $A_k^h = (A(t_k) + A(t_{k-1}))2^{-1}$, $f_k^h = (f(t_k) + f(t_{k-1}))2^{-1}$.

В вариационной форме уравнение (9) будет записано следующим образом. Для $k = \overline{1, N}$

$$\left(\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}, v_h\right) + \frac{1}{2}\left[a\left(t_k, \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}, v_h\right) + a\left(t_{k-1}, \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}, v_h\right)\right] = \left(\frac{f(t_k) + f(t_{k-1})}{2}, v_h\right),$$

где $v_h \in V_h$ — произвольный элемент.

Для получения сходимости приближённых решений к точному будем рассматривать последовательность подпространств $\{V_h\} \subset V$. Такую последовательность будем называть предельно плотной в пространстве V, если при $h \to 0$

для любого элемента $v \in V$ выполняется $\|(I - Q_h)v\|_V \to 0$, где Q_h – ортопроектор в пространстве V на V_h.

Чтобы получить скорость сходимости по пространственным переменным, необходимо иметь какие-то аппроксимационные свойства подпространств V_h.

Например, можно предположить, что существует гильбертово пространство E такое, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ [1, с.23]. Заметим, что для модельной задачи (4)–(5)–(6) пространство $E = W_2^2[a, b] \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1\, [a, b]$ [1, с. 275], а для задачи (4)–(5)–(6′) $E = W_2^2[a, b]$ [1, с. 276]. Пусть тогда подпространства $V_h \subset V$ такие, что для $v \in E$

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leq rh\|v\|_E\,. \tag{10}$$

Последняя оценка типична для метода конечных элементов [16, с. 143–144]. Из оценки (10) следует [37] оценка

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leq r_1 h\|v\|_V. \tag{11}$$

В некоторых случаях имеет смысл предполагать, что выполнено

$$\|v_h\|_V \leq r_2 h^{-1}\|v_h\|_H, \tag{12}$$

что в методе конечных элементов означает равномерное разбиение области изменения пространственной переменной [26]. Константы r, r_1 и r_2 в (10), (11) и (12) соответственно не зависят от $v \in V$, $v_h \in V_h$ и h.

В качестве конечномерных подпространств $V_h \in V$ при решении модельных задач проекционно-разностным методом возможно использовать подпространства кусочно-линейных функций, которые определяются следующим образом. Введем в рассмотрение на отрезке $[a, b]$ равномерную сетку $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$. Обозначим $h = \frac{b-a}{m}$. Узлам сетки поставим в соответствие на $[a,b]$ следующие функции:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h}, & \text{если } x \in [x_{i-1}; x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & \text{если } x \in [x_i; x_{i+1}], \\ 0, & \text{если } x \notin [x_{i-1}; x_{i+1}]. \end{cases}$$

для любого $i = \overline{0,m}$.

Используемое в данной работе конечномерное подпространство $V_h \subset V = \overset{\circ}{W}{}_2^1 [a,b]$ для задачи (4)–(5)–(6) можно определить как линейную оболочку системы функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m-1}$.

Для задачи (4)–(5)–(6′) подпространство $V_h \subset V = W_2^1[a,b]$ будет представлять собой линейную оболочку системы функций $\{\varphi_i\}_{i=0}^{m}$.

Обратим внимание также на то, что оценки погрешности приближённых решений и скорость сходимости, установленные в работе, являются точными по порядку аппроксимации как по времени, так и по пространству.

Результаты, полученные в диссертации, позволяют рассматривать также уравнения вида

$$(u'(t),v) + a(t,u(t),v) = (f(t),v) \qquad u(0) - u(T) = \bar{u}, \tag{13}$$

где $v \in V$ – произвольный элемент, $\bar{u} \in V$. Задача (13) может быть сведена к задаче с периодическим условием. Рассмотрим функцию $w(t) = tT^{-1}\overline{u}$. При помощи замены

$$u(t) = z(t) - w(t)$$

в задаче (13) получим для функции $z(t)$ следующую периодическую задачу

$$(z'(t),v) + a(t,z(t),v) = (\psi(t),v) \qquad z(0) = z(T),$$

где $\psi(t) = f(t) + T^{-1}\bar{u} + tT^{-1}A(t)\bar{u}$, а $v \in V$ — произвольный элемент.

Личный вклад соискателя

Изложенные в диссертации результаты являются новыми, получены автором самостоятельно и опубликованы в работах [56]–[69]. В работах [56], [64] постановка задачи принадлежит научному руководителю, В.В.Смагину, основные же доказательства проведены соискателем.

Апробация результатов диссертации

Результаты настоящей работы докладывались и обсуждались на Международной открытой конференции "Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях" – 2014, г. Воронеж; Воронежской зимней математической школе С.Г.Крейна – 2014 и 2016; Международной конференций по дифференциальным уравнениям и динамическим системам – 2016, г. Суздаль; молодёжной международной научной конференции "Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения" – 2016, г. Воронеж; Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам – 2017, г. Симферополь; международной научной конференции "Колмогоровские чтения – VIII. Общие проблемы теории управления и их приложения" – 2018, г. Тамбов; молодежной школе-конференции "Лобачевские чтения – 2018", г. Казань; ежегодных научных сессиях Воронежского государственного университета, семинаре под руководством проф. Б.Н.Садовского при кафедре функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, семинаре по теории операторов под руководством проф. А.Г.Баскакова при кафедре системного анализа и управления Воронежского государственного университета, семинаре "Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ" под руководством проф. А.В.Калинина при кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Национального исследовательского Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского, а также на семинаре научно-образовательного математического центра "Математика технологий будущего" на базе Национального исследовательского Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского.

Публикации

Результаты, приведённые в данной работе, опубликованы в [56]–[69], из них работы [56], [59], [63], [64], [66], [69] опубликованы в журналах, входящих в Перечень ВАК; статья [67] – в прочих научных изданиях; работы [57], [58], [60]–[62], [65], [68] представляют собой тезисы докладов и выступлений на конференциях.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, включающего 69 источников.

Полный объём диссертационной работы составляет 98 страниц.

1. О РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

1.1. Постановка задачи

Пусть даны сепарабельные гильбертовы пространства $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – сопряжённое к V, а пространство H отождествляется со своим сопряжённым. Оба вложения плотны и непрерывны. Рассмотрим полуторалинейную по $u, v \in V$ форму $a(t,u,v)$, измеримую по $t \in [0,T]$. Пусть для $u, v \in V$ и п. в. $t \in [0,T]$

$$|a(t,u,v)| \leq \mu \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(t,u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \tag{1.1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(t,u,v)$ при п.в. $t \in [0,T]$ порождает линейный ограниченный оператор $A(t) : V \to V'$, такой, что $(A(t)u, v) = a(t,u,v)$, где выражение типа (z,v) есть значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Если $z \in H$, то (z,v) – скалярное произведение в H [25, гл.2].

Рассмотрим в V' на $[0,T]$ параболическую задачу:

$$u'(t) + A(t)u(t) = f(t), \quad u(0) = u(T). \tag{1.2}$$

Здесь и далее производные функций понимаются в обобщённом смысле. Уравнение в (1.2) можно записать в следующем виде [1]: для всякого $v \in V$

$$\frac{d}{dt}(u(t),v) + a(t,u(t),v) = (f(t),v).$$

В [1, с.289] приводится (без доказательства)

Теорема 1.1. *Для заданного $f \in L_2(0,T;V')$ существует (и притом единственное) решение $u \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$ задачи (1.2), называемое слабым решением, причём $u' \in L_2(0,T;V')$.*

Следуя Ж.-Л.Лионсу, будем называть решение $u(t)$ задачи (1.2) слабым, если $u \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H), u' \in L_2(0,T;V')$; условия теоремы 1.1 будем называть условиями слабой разрешимости задачи (1.2).

Отметим [39] оценку слабого решения задачи (1.2)

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \left(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2 \right) dt \le C \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt. \tag{1.3}$$

В дальнейшем сформулируем и докажем теоремы о разрешимости, устанавливающие условия существования более гладкого, чем в утверждении теоремы 1.1, решения задачи (1.2). Данные теоремы ориентированы на исследования в последующих главах сходимости проекционно-разностных методов в сильных нормах.

1.2. Слабая разрешимость параболического уравнения с периодическим условием на решение

Подобно доказательству теоремы о слабой разрешимости для задачи Коши в [2], проведем доказательство теоремы 1.1, воспользовавшись методом Галёркина. Полученные при доказательстве этой теоремы априорные оценки приближённых решений далее будем использовать для установления гладкой и обобщённой разрешимости задачи (1.2).

Доказательство теоремы 1.1. Выберем в пространстве V полную линейно независимую систему элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Заметим, что система $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ также полна в пространствах H и V'. Определим конечномерное подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$. Введем пространство V'_m, задав на $u_m \in V_m$ двойственную норму

$$\|u_m\|_{V'_m} = \sup_{\substack{v_m \in V_m,\\ \|v_m\|_V = 1}} |(u_m, v_m)|.$$

Через P_m обозначим ортопроектор в пространстве H на V_m. Как замечено в [55], оператор P_m допускает расширение по непрерывности до $\overline{P_m} : V' \to V_m$, причем для $u \in V'$ справедливо $\|\overline{P_m}u\|_{V'_m} \leq \|u\|_{V'}$ и $\|\overline{P_m}u\|_{V'} \leq \|P_m\|_{V\to V}\|u\|_{V'}$. Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\overline{P_m}u, v) = (u, P_m v)$.

Определённую п.в. на $[0, T]$ функцию $u_m(t) \in V_m$ назовём приближённым решением задачи (1.2), найденным по методу Галёркина, если $u_m(t)$ является решением задачи

$$u'_m(t) + \overline{P_m}A(t)u_m(t) = \overline{P_m}f(t), \qquad u_m(0) = u_m(T). \tag{1.4}$$

Задача (1.4) сводится к конечной линейной системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$(u'_m(t), \varphi_i) + a(t, u_m(t), \varphi_i) = (f(t), \varphi_i) \quad (i = \overline{1, m}), \quad u_m(0) = u_m(T). \tag{1.5}$$

Докажем существование решения задачи (1.4). Всякое решение уравнения в (1.4) представимо в виде

$$u_m(t) = U_m(t, 0)u_m(0) + \int_0^t U_m(t, s)\overline{P_m}f(s)\, ds,$$

где $U_m(t, s)$ – разрешающий оператор задачи (1.4).

Найдем значение $u_m(0)$. Используя периодическое условие, запишем равенство:

$$u_m(T) = U_m(T, 0)u_m(0) + \int_0^T U_m(T, s)\overline{P_m}f(s)\, ds = u_m(0)$$

или

$$(I - U_m(T, 0))u_m(0) = \int_0^T U_m(T, s)\overline{P_m}f(s)\, ds.$$

Покажем, что оператор $I - U_m(T, 0)$ непрерывно обратим. Для этого достаточно установить, что $\|U_m(T, 0)\|_{V_m\to V_m} < 1$. Здесь норма в V_m определяется нормой пространства H.

Рассмотрим однородную задачу Коши

$$v'_m(t) + \overline{P_m}A(t)v_m(t) = 0, \qquad v_m(0) = v^0_m \in V_m. \tag{1.6}$$

Решение этой задачи можно записать в виде $v_m(t) = U_m(t,0)v_m^0$. Умножим обе части уравнения в (1.6) скалярно на $v_m(t)$:

$$(v_m'(t), v_m(t)) + (\overline{P_m}A(t)v_m(t), v_m(t)) = 0. \tag{1.7}$$

Отметим, что, по свойству оператора $\overline{P_m}$,

$$(\overline{P_m}A(t)v_m(t), v_m(t)) = a(t, v_m(t), v_m(t)).$$

Тогда, взяв две действительные части в равенстве (1.7) и воспользовавшись неравенством из (1.1), получим:

$$\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|_H^2 + 2\alpha\|v_m(t)\|_V^2 \leq 0.$$

Из непрерывности вложения $V \subset H$ следует, что $\|u\|_H \leq c\|u\|_V$ для всех $u \in V$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\|v_m(t)\|_H^2 + \frac{2\alpha}{c^2}\|v_m(t)\|_H^2 \leq 0.$$

Из последнего дифференциального неравенства получим:

$$\|v_m(t)\|_H^2 \leq e^{-2\lambda t}\|v_m(0)\|_H^2,$$

где $\lambda = 2\alpha/c^2$. Тогда, так как $v_m(t) = U_m(t,0)v_m^0$, то $\|U_m(t,0)v_m^0\|_H \leq e^{-\lambda t}\|v_m^0\|_H$. Значит, $\|U_m(T,0)\|_{V_m \to V_m} \leq e^{-\lambda T} < 1$. Следовательно, задача (1.4) имеет единственное решение.

Для решения задачи (1.4) справедливо равенство:

$$(u_m'(t), u_m(t)) + a(t, u_m(t), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)).$$

Отсюда, с учетом (1.1), следует

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \alpha\|u_m(t)\|_V^2 \leq \frac{1}{\alpha}\|f(t)\|_{V'}^2.$$

Последнее неравенство проинтегрируем по t от 0 до T. Получим

$$\|u_m(T)\|_H^2 - \|u_m(0)\|_H^2 + \alpha\int_0^T \|u_m(t)\|_V^2\,dt \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^T \|f(s)\|_{V'}^2\,ds.$$

Поскольку $u_m(0) = u_m(T)$, то

$$\int_0^T \|u_m(t)\|_V^2\,dt \le \frac{1}{\alpha^2}\int_0^T \|f(s)\|_{V'}^2\,ds. \tag{1.8}$$

Из оценки (1.8) следует, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;V)$. Значит, существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}$, слабо сходящаяся в пространстве $L_2(0,T;V)$ к некоторой функции $u(t)$ из этого пространства. Покажем, что эта функция является решением задачи (1.2).

Для $j = \overline{1,\mu}$ получим

$$(u'_\mu(t),\varphi_j) + a(t,u_\mu(t),\varphi_j) = (f(t),\varphi_j).$$

Умножим последнее равенство на скалярную функцию $\psi \in C^1[0,T]$, такую, что $\psi(0) = \psi(T)$, и проинтегрируем полученное выражение по t от 0 до T:

$$\int_0^T (u'_\mu(t),\varphi_j)\psi(t)\,dt + \int_0^T a(t,u_\mu(t),\varphi_j)\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t),\varphi_j)\psi(t)\,dt.$$

После интегрирования по частям первого слагаемого получим:

$$(u_\mu(T),\varphi_i)\psi(T) - (u_\mu(0),\varphi_i)\psi(0) -$$

$$\int_0^T (u_\mu(t),\varphi_j)\psi'(t)\,dt + \int_0^T a(t,u_\mu(t),\varphi_j)\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t),\varphi_j)\psi(t)\,dt.$$

Учитывая, что $\psi(0) = \psi(T)$ и $u_\mu(0) = u_\mu(T)$, получим

$$-\int_0^T (u_\mu(t),\varphi_j)\psi'(t)\,dt + \int_0^T a(t,u_\mu(t),\varphi_j)\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t),\varphi_j)\psi(t)\,dt.$$

Заметим, что $\psi'(t)\varphi_j, \psi(t)\varphi_j \in L_2(0,T;V)$, то есть интегралы в последнем равенстве определены. При стремлении $\mu \to \infty$ для всех $j \in \mathbb{N}$ получим, в силу непрерывности функционалов $F_1(z) = \int_0^T (z(t),\varphi_j)\psi'(t)\,dt$ и $F_2(z) = \int_0^T a(t,z(t),\varphi_j)\psi'(t)\,dt$ по $z \in L_2(0,T;V)$, что

$$-\int_0^T (u(t),\varphi_j)\psi'(t)\,dt + \int_0^T a(t,u(t),\varphi_j)\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t),\varphi_j)\psi(t)\,dt. \tag{1.9}$$

Ввиду полноты системы $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ в пространстве V предельным переходом из (1.9) следует равенство:

$$-\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt + \int_0^T a(t,u(t),v)\psi(t)\,dt = \int_0^T (f(t),v)\psi(t)\,dt$$

для всех $v \in V$. Последнее равенство означает, что в смысле обобщённых функций выполнено следующее:

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(t, u(t), v) = (f(t), v).$$

Таким образом, функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению в (1.2).

Теперь покажем, что для $u(t)$ справедливо равенство $u(0) = u(T)$.

Рассмотрим гильбертово пространство $W(0,T) = \{u : u \in L_2(0,T;V), u' \in L_2(0,T;V')\}$ [1, с. 109] со скалярным произведением

$$(u, v)_{W(0,T)} = (u, v)_{L_2(0,T;V)} + (u', v')_{L_2(0,T;V')} =$$
$$\int_0^T (u(t), v(t))_V \, dt + \int_0^T (u'(t), v'(t))_{V'} \, dt.$$

Заметим, что $u'(t) = f(t) - A(t)u(t) \in L_2(0,T;V')$ и, значит, $u(t)$ принадлежит $W(0,T)$. Тогда в (1.9) можно интегрировать по частям [5, с.177], где считаем, что $\psi \in C^1[0,T]$, такая, что $\psi(0) = \psi(T)$.

$$-(u(T), \varphi_i)\psi(T) + (u(0), \varphi_i)\psi(0) + \int_0^T \frac{d}{dt}(u(t), \varphi_j)\psi'(t)\, dt$$
$$+ \int_0^T a(t, u(t), \varphi_j)\psi(t)\, dt = \int_0^T (f(t), \varphi_j)\psi(t)\, dt,$$

откуда следует, что

$$(u(0), \varphi_i) = (u(T), \varphi_i), \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Значит, $u(0) = u(T)$.

Покажем, что решение задачи (1.2) единственно. Предположим противное: пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ – два решения задачи (1.2). Тогда функция $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ является решением однородной задачи с периодическим условием:

$$u'(t) + A(t)u(t) = 0, \quad u(0) = u(T). \tag{1.10}$$

Умножим равенство в (1.10) скалярно на $u(t)$ и проинтегрируем по t от 0 до T:

$$\int_0^T (u'(t), u(t))\, dt + \int_0^T a(t, u(t), u(t))\, dt = 0. \tag{1.11}$$

Воспользуемся формулой (1.61) из [5, с.177]. Тогда

$$\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2 = 2\operatorname{Re}\int_0^T (u'(t), u(t))\,dt.$$

Учитывая периодическое условие $u(0) = u(T)$, из равенства (1.11) получим

$$2\operatorname{Re}\int_0^T a(t, u(t), u(t))\,dt = 0.$$

Из (1.1) тогда следует, что

$$\alpha\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt \le 0,$$

то есть п. в. на $[0,T]$ $u(t) = 0$ или $u_1(t) = u_2(t)$ при п. в. $t \in [0,T]$. Поскольку $u_1(t), u_2(t) \in C([0,T], H)$, то $u_1(t) = u_2(t)$ при всех $t \in [0,T]$. Следовательно, решение задачи (1.2) единственно.$\square$

1.3. Гладкая разрешимость параболического уравнения с периодическим условием на решение

Для получения более гладких, чем слабое, решений, сделаем дополнительные предположения об исходных данных задачи (1.2). Считаем, что функция $t \to a(t, u, v)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$ и для формы $a_1(t, u, v) = \partial a(t, u, v)/\partial t$ почти при всех $t \in [0,T]$ справедлива оценка

$$|a_1(t, u, v)| \le \mu_1 \|u\|_V \|v\|_V \qquad (u, v \in V). \tag{1.12}$$

Тогда для $u \in V$ функция $t \to A(t)u \in V'$ слабо дифференцируема на $[0,T]$ и $a_1(t, u, v) = (A'(t)u, v)$. Кроме того, для $u \in V$ функция $t \to A'(t)u \in V'$ слабо измерима, а значит, поскольку пространство V' сепарабельно, измерима и справедлива оценка $\|A'(t)u\|_{V'} \le \mu_1 \|u\|_V$.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1, условие (1.12) и $a(0, u, v) = a(T, u, v)$ для всех $u, v \in V$. Пусть обобщённая производная*

$f' \in L_2(0,T;V')$ и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда слабое решение задачи (1.2) будет таким, что $u' \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$, причем справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T} \|u'(t)\|_H^2 + \int_0^T \Big(\|u''(t)\|_{V'}^2 + \|u'(t)\|_V^2 \Big)\, dt \le$$

$$C \int_0^T \Big(\|f'(t)\|_{V'}^2 + \|f(t)\|_{V'}^2 \Big)\, dt. \tag{1.13}$$

Доказательство. Установим для решения задачи (1.4) $u_m(t)$ новые априорные оценки. Продифференцируем уравнение (1.5) по t. Для любого $v_m \in V_m$ получим соотношение

$$(u_m''(t), v_m) + a(t, u_m'(t), v_m) = (f'(t), v_m) - a_1(t, u_m(t), v_m). \tag{1.14}$$

В (1.14) положим $v_m = u_m'(t)$, возьмём удвоенную вещественную часть и проинтегрируем по t от 0 до T. Левую часть полученного выражения оценим снизу. Заметим, что $u_m'(0) = \overline{P_m} f(0) - \overline{P_m} A(0) u_m(0) = \overline{P_m} f(T) - \overline{P_m} A(T) u_m(T) = u_m'(T)$.

$$2\operatorname{Re} \int_0^T (u_m''(t), u_m'(t))\, dt + 2\int_0^T \operatorname{Re} a(t, u_m'(t), u_m'(t))\, dt \ge$$

$$\|u_m'(T)\|_H^2 - \|u_m'(0)\|_H^2 + 2\alpha \int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2\, dt = 2\alpha \int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2\, dt.$$

Правую часть оценим сверху.

$$2\operatorname{Re} \int_0^T (f'(t), u_m'(t))\, dt - 2\operatorname{Re} \int_0^T a_1(t, u_m(t), u_m'(t))\, dt \le$$

$$2\int_0^T \|f'(t)\|_{V'} \|u_m'(t)\|_V\, dt + 2\mu_1 \int_0^T \|u_m(t)\|_V \|u_m'(t)\|_V\, dt \le$$

$$2\alpha^{-1} \int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2\, dt + \alpha \int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2\, dt + 2\mu_1^2 \alpha^{-1} \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2\, dt.$$

Таким образом,

$$\int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2\, dt \le 2\alpha^{-2} \int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2\, dt + 2\mu_1^2 \alpha^{-2} \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2\, dt.$$

Учитывая (1.8), получим
$$\int_0^T \|u_m'(t)\|_V^2\,dt \le C\int_0^T \left(\|f'(t)\|_{V'}^2+\|f(t)\|_{V'}^2\right)dt. \qquad (1.15)$$

Из ограниченности последовательностей $\{u_m(t)\}$ и $\{u_m'(t)\}$ в пространстве $L_2(0,T;V)$ следует, что существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}$ последовательности $\{u_m(t)\}$, слабо сходящаяся в $L_2(0,T;V)$ к решению $u(t)$ уравнения (1.2), причём последовательность $\{u_\mu'(t)\}$ слабо сходится в пространстве $L_2(0,T;V)$ к некоторой функции $z(t)$. Покажем, что $z(t)=u'(t)$.

Возьмем скалярную функцию $\psi(t)\in C_0^\infty(0,T)$. Тогда для фиксированного i и $\mu>i$, интегрируя по частям, получим:
$$-\int_0^T (u_\mu'(t),\varphi_i)\psi(t)\,dt=\int_0^T (u_\mu(t),\varphi_i)\psi'(t)\,dt.$$
При $\mu\to\infty$ ввиду непрерывности функционалов $\Psi_1(\eta)=\int_0^T(\eta(t),\varphi_i)\psi(t)\,dt$, $\Psi_2(\eta)=\int_0^T(\eta(t),\varphi_i)\psi'(t)\,dt$ по $\eta\in L_2(0,T;V)$
$$-\int_0^T (z(t),\varphi_i)\psi(t)\,dt=\int_0^T (u(t),\varphi_i)\psi'(t)\,dt.$$
Ввиду полноты системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ в пространстве V' и непрерывности функционалов $\Phi_1(\eta)=\int_0^T(z(t),\eta(t))\psi(t)\,dt$ и $\Phi_2(\eta)=\int_0^T(u(t),\eta(t))\psi'(t)\,dt$ по $\eta\in V'$ предельным переходом из последнего равенства получим
$$-\int_0^T (z(t),v)\psi(t)\,dt=\int_0^T (u(t),v)\psi'(t)\,dt,$$
где v – произвольный элемент из V'. Последнее равенство означает, что в смысле обобщённых функций выполнено
$$(z(t),v)=\frac{d}{dt}(u(t),v).$$
Отсюда следует, что $z(t)=u'(t)$.

Поскольку слабым пределом последовательности $\{u_\mu'(t)\}$, для которой справедлива оценка (1.15), является функция $u'\in L_2(0,T;V)$, то из (1.15) следует
$$\int_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt \le C\int_0^T \left(\|f'(t)\|_{V'}^2+\|f(t)\|_{V'}^2\right)dt. \qquad (1.16)$$

Из уравнения (1.2) получаем $u'(t) = f(t) - A(t)u(t) \in V'$. Отсюда следует существование

$$u''(t) = f'(t) - A(t)u'(t) - A'(t)u(t) \in V'.$$

Теперь, учитывая (1.1) и (1.12), нетрудно установить оценку

$$\int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2\,dt \le C\Big\{\int_0^T \|f'(t)\|_{V'}^2\,dt + \int_0^T \Big(\|u'(t)\|_V^2 + \|u(t)\|_V^2\Big)\,dt\Big\}.$$

Учитывая (1.3) и (1.16), получим оценку (1.13) для $\int_0^T \|u''(t)\|_{V'}^2\,dt$.

Установили, что $u' \in L_2(0,T;V), u'' \in L_2(0,T;V')$. Отсюда следует, что $u' \in C([0,T],H)$ [2, гл. 3, теорема 1.1] и справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T} \|u'(t)\|_H^2 \le C\int_0^T \Big(\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt,$$

из которой (1.13) следует и для $\max_{0\le t\le T}\|u'(t)\|_H^2$. $\square$

Слабое решение $u(t)$ задачи (1.2) будем называть гладким, если $u' \in L_2(0,T;V)\bigcap C([0,T],H), u'' \in L_2(0,T;V')$; условия теоремы 1.2 будем называть условиями гладкой разрешимости задачи (1.2).

1.4. Обобщённая разрешимость параболического уравнения с симметричным оператором и периодическим условием на решение

Продолжим изучение задачи (1.2) в пространстве V'. Укажем для неё условия так называемой обобщённой разрешимости.

Будем предполагать, что форма $a(t,u,v)$ является симметричной, то есть при п.в. $t \in [0,T]$

$$a(t,u,v) = \overline{a(t,v,u)}, \qquad (u,v \in V) \tag{1.17}$$

где черта над комплексным числом означает переход к сопряжённому числу.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и условие (1.12), форма $a(t,u,v)$ удовлетворяет условию (1.17) и $a(0,u,v) = a(T,u,v)$ для всех*

$u, v \in V$. Пусть функция $t \to f(t) \in H$ такая, что $f \in L_2(0,T;H)$. Тогда слабое решение $u(t)$ задачи (1.2) будет таким, что $u', Au \in L_2(0,T;H)$, и справедлива оценка

$$\int_0^T \left(\|u'(t)\|_H^2 + \|A(t)u(t)\|_H^2 \right) dt \leq C \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt. \tag{1.18}$$

Доказательство. Для решения задачи (1.4) $u_m(t)$ справедливо равенство:

$$\|u_m'(t)\|_H^2 + a(t, u_m(t), u_m'(t)) = (f(t), u_m'(t)). \tag{1.19}$$

Рассмотрим

$$\frac{d}{dt} a(t, u_m(t), u_m(t)) = \frac{\partial}{\partial t} a(t, u_m(t), u_m(t)) + a(t, u_m'(t), u_m(t)) +$$

$$a(t, u_m(t), u_m'(t)) = a_1(t, u_m(t), u_m(t)) + 2 \operatorname{Re} a(t, u_m(t), u_m'(t)).$$

Взяв две вещественные части от обеих частей равенства (1.19) и учитывая последнее тождество, получим:

$$2\|u_m'(t)\|_H^2 + \frac{d}{dt} a(t, u_m(t), u_m(t)) = a_1(t, u_m(t), u_m(t)) + 2 \operatorname{Re}(f(t), u_m'(t)).$$

Проинтегрируем последнее равенство по t от 0 до T:

$$2 \int_0^T \|u_m'(t)\|_H^2 \, dt + a(T, u_m(T), u_m(T)) - a(0, u_m(0), u_m(0)) =$$

$$\int_0^T a_1(t, u_m(t), u_m(t)) \, dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T (f(t), u_m'(t)) \, dt.$$

Учитывая периодичность формы и периодическое условие в задаче (1.4), из предыдущего равенства получим:

$$2 \int_0^T \|u_m'(t)\|_H^2 \, dt = \int_0^T a_1(t, u_m(t), u_m(t)) \, dt + 2 \operatorname{Re} \int_0^T (f(t), u_m'(t)) \, dt.$$

Проведём в последнем равенстве соответствующие оценки:

$$2 \int_0^T \|u_m'(t)\|_H^2 \, dt \leq \mu_1 \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \, dt + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt + \int_0^T \|u_m'(t)\|_H^2 \, dt.$$

Отсюда следует

$$\int_0^T \|u_m'(t)\|_H^2 \, dt \leq \mu_1 \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \, dt + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt.$$

Воспользуемся оценкой (1.8). Тогда, учитывая непрерывность вложения $H \subset V'$, получим:

$$\int_0^T \|u_m'(t)\|_H^2\, dt \le C \int_0^T \|f(t)\|_H^2\, dt. \tag{1.20}$$

Из (1.8) следует, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;V)$, а из (1.20) – что последовательность $\{u_m'(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;H)$.

Было показано, что существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}$ последовательности $\{u_m(t)\}$, которая слабо сходится в $L_2(0,T;V)$ к функции $u \in L_2(0,T;V)$, слабому решению задачи (1.2). Можно считать, что $\{u_\mu'(t)\}$ одновременно слабо сходится в $L_2(0,T;H)$ к некоторой функции $y \in L_2(0,T;H)$, то есть при $\mu \to \infty$ для любого $v \in L_2(0,T;H)$

$$\int_0^T \Big(u_\mu'(t) - y(t), v(t)\Big)\, dt \to 0.$$

Как и ранее в §1.3, отсюда следует, что $u'(t) = y(t)$. Тогда $u' = y \in L_2(0,T;H)$ и оценка (1.18) выполняется для $\int_0^T \|u'(t)\|_H^2\, dt$.

Из уравнения (1.2) тогда видно, что $Au \in L_2(0,T;H)$ и

$$\int_0^T \|A(t)u(t)\|_H^2\, dt \le C \left(\int_0^T \|u'(t)\|_H^2\, dt + \int_0^T \|f(t)\|_H^2\, dt\right).$$

Таким образом, оценка (1.18) выполнена и для $\int_0^T \|A(t)u(t)\|_H^2\, dt$. $\square$

Слабое решение $u(t)$ задачи (1.2) будем называть обобщённым, если $u', Au \in L_2(0,T;H)$; условия теоремы 1.3 будем называть условиями обобщённой разрешимости задачи (1.2).

Положим

$$D[A(t)] = \{v \in V : A(t)v \in H\}.$$

Пусть существует сепарабельное гильбертово пространство E, такое, что $D[A(t)] \subset E \subset V$ и $V = [E,H]_{1/2}$, где $[E,H]_{1/2}$ – интерполяционное пространство между E и H [1, с.21-23]. Пусть для всех $t \in [0,T]$ выполняется типичная для эллиптических операторов оценка

$$\|u\|_E \le \delta \|A(t)u\|_H \qquad (u \in D[A(t)]), \tag{1.21}$$

где $\delta > 0$. Например, если параболическое уравнение в области с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ определено равномерно эллиптическим дифференциальным оператором второго порядка $A(t)$ и краевым условием Дирихле, то рассматриваются пространства: $H = L_2(\Omega), V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), V' = W_2^{-1}(\Omega), E = W_2^2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если же на границе области Ω задаётся условие Неймана, то пространства следующие: $H = L_2(\Omega), V = W_2^1(\Omega), E = W_2^2(\Omega)$.

Следствие 1.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.3, а также условие (1.21). Тогда решение $u(t)$ задачи (1.2) дополнительно к утверждению теоремы 1.3 такое, что $u \in L_2(0,T;E) \bigcap C([0,T],V)$, и справедлива оценка*

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_V^2 + \int_0^T \left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2 \right) dt \le C \int_0^T \|f(t)\|_H^2 \, dt. \tag{1.22}$$

Доказательство. Установим измеримость функции $t \to u(t) \in E$. В силу сепарабельности пространства E достаточно установить измеримость функции $t \to (v, u(t))$ для любых $v \in E'$, где E' – сопряжённое к E пространство, причем $E \subset H \subset E'$. Поскольку вложение $H \subset E'$ плотно и непрерывно, то для всякого $v \in E'$ найдется последовательность $\{v_n\} \in H$, что $\|v_n - v\|_{E'} \to 0$ при $n \to \infty$. Функции $t \to (v_n, u(t))$ непрерывны на $[0,T]$ как скалярное произведение элементов из H и, значит, измеримы.

Из (1.18) и (1.21) следует конечность п. в. функции $t \to \|u\|_E$, поэтому и функция $t \to (v, u(t))$ конечна п. в. Кроме того, п. в. на $[0,T]$ при $n \to \infty$

$$|(v_n, u(t)) - (v, u(t))| \le \|v_n - v\|_{E'} \|u(t)\|_E \to 0.$$

Таким образом, функция $t \to u(t)$ измерима.

Из (1.18) и (1.21) следует, что функция $u \in L_2(0,T;E)$ и для $\int_0^T \|u(t)\|_E^2 \, dt$ выполнено (1.22). Так как $u \in L_2(0,T;E), u' \in L_2(0,T;H)$ и $V = [E,H]_{1/2}$, то

$u \in C([0,T],V)$ [1] и справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_V^2 \le M \int_0^T \left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2 \right) dt,$$

откуда с учётом (1.18) следует оценка (1.22) в полном объёме. □

Результаты, полученные в этом параграфе, дают обоснования предположениям о гладкости решения задачи (1.2), накладываемым в утверждениях о сходимости проекционно-разностных методов дополнительно к условиям слабой и гладкой разрешимости в следующих главах диссертации.

2. РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ С НЕЯВНОЙ СХЕМОЙ ЭЙЛЕРА ПО ВРЕМЕНИ

2.1. Описание приближённой задачи

Пусть V_h, где h — положительный параметр, есть конечномерное подпространство пространства V. Элементы V_h можно рассматривать в нормах пространств H, V и V'. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму

$$\|u_h\|_{V_h'} = \sup_{\substack{v_h \in V_h \\ \|v_h\|_V = 1}} |(u_h, v_h)|.$$

Заметим, что $\|u_h\|_{V_h'} \leq \|u_h\|_{V'}$.

Рассмотрим приближённый проекционно-разностный метод решения задачи (1.2), который является методом полной дискретизации. При этом по времени используем неявную схему Эйлера. В результате сведём решение задачи (1.2) к нахождению решения конечных линейных систем алгебраических уравнений.

Пусть P_h — ортопроектор в пространстве H на V_h. Как замечено в [55], оператор P_h допускает расширение по непрерывности до $\overline{P_h} : V' \to V_h$, причём для любого $u \in V'$

$$\|\overline{P_h} u\|_{V_h'} \leq \|u\|_{V'} \tag{2.1}$$

и

$$\|u_h\|_{V'} \leq \|P_h\|_{V \to V} \|u_h\|_{V_h'}, \qquad (u_h \in V_h) \tag{2.2}$$

а также для всех $v \in V'$

$$\|\overline{P_h} v\|_{V'} \leq \|P_h\|_{V \to V} \|v\|_{V'}. \tag{2.3}$$

Кроме того, для $u \in V'$ и $v \in H$ справедливо [34]:

$$(\overline{P_h}u, v) = (u, P_h v). \tag{2.4}$$

Рассмотрим в V_h для задачи (1.2) приближённую задачу. Для $k = \overline{1, N}$

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h u_k^h = f_k^h, \qquad u_0^h = u_N^h, \tag{2.5}$$

где $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$, причём $T = \tau N$, $t_k = k\tau$; $u_k^h \in V_h$; $A_k^h = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} A(t)\, dt$, $f_k^h \in V_h$ определим позже.

Лемма 2.1. *Задача (2.5) однозначно разрешима.*

Доказательство. Так как задача (2.5) конечномерна, то достаточно установить, что однородная задача имеет только нулевое решение.

Пусть $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение однородной задачи

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h u_k^h = 0 \quad (k = \overline{1, N}), \qquad u_0^h = u_N^h.$$

Умножим скалярно в H первое уравнение на τu_k^h и возьмём удвоенную вещественную часть. Получим

$$2\mathrm{Re}\left(u_k^h - u_{k-1}^h, u_k^h\right) + 2\mathrm{Re}(A_k^h u_k^h, u_k^h)\tau = 0. \tag{2.6}$$

Заметим, что в (2.6) первое слагаемое

$$2\mathrm{Re}(u_k^h - u_{k-1}^h, u_k^h) = \|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2. \tag{2.7}$$

Оценим второе слагаемое в (2.6).

$$2\mathrm{Re}(A_k^h u_k^h, u_k^h)\tau = 2\int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{Re}\, a(t, u_k^h, u_k^h)\, dt \geq 2\alpha \|u_k^h\|_V^2 \tau. \tag{2.8}$$

Из (2.6) с учётом (2.7) и (2.8) следует

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + 2\alpha \|u_k^h\|_V^2 \tau \leq 0.$$

Последние неравенства суммируем по $k = \overline{1, N}$.

$$\|u_N^h\|_H^2 - \|u_0^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + 2\alpha \sum_{k=1}^{N} \|u_k^h\|_V^2 \tau \leq 0.$$

Так как $u_0^h = u_N^h$, то получим $u_k^h = 0$ для всех $k = \overline{0, N}$. $\square$

2.2. Энергетическая сходимость в случае слабой разрешимости

Установим модифицированные энергетические оценки решения задачи (2.5) в условиях слабой разрешимости исходной задачи и произвольного проекционного подпространства V_h, которые используем в дальнейшем для получения базовой оценки погрешности.

Лемма 2.2. *Пусть* $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ *– решение задачи (2.5). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\|u_k^h\|_V^2 \tau + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V_h'}^2 \tau \right) \leq C \sum_{k=1}^{N} \|f_k^h\|_{V_h'}^2 \tau. \tag{2.9}$$

Доказательство. Умножим уравнение в (2.5) скалярно в H на τu_k^h и возьмём удвоенную вещественную часть. Учитывая (1.1) и (2.7), получим оценку

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + 2\alpha \|u_k^h\|_V^2 \tau \leq 2\|f_k^h\|_{V_h'} \|u_k^h\|_V \tau. \tag{2.10}$$

Так как

$$2\|f_k^h\|_{V_h'} \|u_k^h\|_V \tau \leq \alpha \|u_k^h\|_V^2 \tau + \frac{1}{\alpha} \|f_k^h\|_{V_h'}^2 \tau\,,$$

то из (2.10) следует

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + \alpha \|u_k^h\|_V^2 \tau \leq \frac{1}{\alpha} \|f_k^h\|_{V_h'}^2 \tau. \tag{2.11}$$

Суммируя оценки (2.11) по $k = \overline{1, N}$, получим

$$\sum_{k=1}^{N} \Big(\|u_k^h - u_{k-1}^h\|_H^2 + \alpha \|u_k^h\|_V^2 \tau \Big) \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{N} \|f_k^h\|_{V_h'}^2 \tau. \tag{2.12}$$

Заметим теперь, что

$$\left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V_h'}^2 \tau = \|f_k^h - A_k^h u_k^h\|_{V_h'}^2 \tau \leq 2 \left(\|f_k^h\|_{V_h'}^2 + \|A_k^h u_k^h\|_{V_h'}^2 \right) \tau. \tag{2.13}$$

Из определения оператора A^h_k, оценок (1.1) и (2.1) следует

$$\|A^h_k u^h_k\|^2_{V'_h}\tau \le \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P_h} A(t) u^h_k\|^2_{V'_h}\, dt \le \mu^2 \|u^h_k\|^2_V \tau. \tag{2.14}$$

Таким образом, из (2.12), (2.13) и (2.14) получим

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{u^h_k - u^h_{k-1}}{\tau} \right\|^2_{V'_h} \tau \le 2 \left(\sum_{k=1}^{N} \|f^h_k\|^2_{V'_h} + \mu^2 \sum_{k=1}^{N} \|u^h_k\|^2_V \right) \tau \le C \sum_{k=1}^{N} \|f^h_k\|^2_{V'_h} \tau. \tag{2.15}$$

Оценка (2.9) следует теперь из (2.12) и (2.15). □

Лемма 2.3. *Пусть для* $k = \overline{0, N}$ *элементы* $v^h_k \in V_h$. *Пусть* $N\tau = T$. *Тогда*

$$\max_{0\le k\le N} \|v^h_k\|^2_H \le 2 \left(1 + \frac{c^2}{T}\right) \sum_{k=1}^{N} \Big(\|v^h_{k-1}\|^2_V + \|v^h_k\|^2_V \Big)\tau +$$
$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{v^h_k - v^h_{k-1}}{\tau} \right\|^2_{V'_h} \tau\,, \tag{2.16}$$

где константа $c > 0$ *такая, что* $\|v\|_H \le c\|v\|_V$ *для всех* $v \in V$.

Доказательство. Определим непрерывную кусочно-линейную функцию $v^h(t)$ со значениями в V_h, которая в $t \in [t_{k-1}, t_k]$ задаётся формулой

$$v^h(t) = v^h_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}(v^h_k - v^h_{k-1})\,.$$

Поскольку функция $\|v^h(t)\|^2_H$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$, то для всех $t_0, t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$\|v^h(t_0)\|^2_H = \|v^h(t)\|^2_H + \int_t^{t_0} \frac{d}{ds}\big\|v^h(s)\big\|^2_H\, ds\,. \tag{2.17}$$

Так как $d\|v^h(s)\|^2_H/\,ds = 2\mathrm{Re}(v^h(s)\,,\, dv^h(s)/\,ds)$ п. в. на $[0, T]$, то из (2.17) следует оценка

$$\|v^h(t_0)\|^2_H \le \|v^h(t)\|^2_H + 2 \left| \int_t^{t_0} \|v^h(s)\|_V \left\| \frac{d}{ds} v^h(s) \right\|_{V'_h} ds \right| \le$$
$$\|v^h(t)\|^2_H + \int_0^T \|v^h(s)\|^2_V\, ds + \int_0^T \left\| \frac{d}{ds} v^h(s) \right\|^2_{V'_h} ds\,. \tag{2.18}$$

Интегрируем (2.18) по t от 0 до T.

$$T\|v^h(t_0)\|_H^2 \le \int_0^T \|v^h(t)\|_H^2\,dt + T\int_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds + T\int_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_{V_h'}^2 ds\,. \quad (2.19)$$

В силу непрерывного вложения $V \subset H$ получим $\|v^h(s)\|_H \le c\|v^h(s)\|_V$. Тогда из (2.19) следует

$$T\|v^h(t_0)\|_H^2 \le (c^2+T)\int_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds + T\int_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_{V_h'}^2 ds\,.$$

Учитывая, что $t_0 \in [0,T]$ произвольно, из последней оценки получим

$$\max_{0\le t\le T}\|v^h(t)\|_H^2 \le \frac{c^2+T}{T}\int_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds + \int_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_{V_h'}^2 ds\,. \quad (2.20)$$

Заметим, что

$$\int_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|v^h(s)\|_V^2\,ds\,.$$

Проведем оценку

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|v^h(s)\|_V^2\,ds = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|v_{k-1}^h + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}(v_k^h - v_{k-1}^h)\right\|_V^2 ds =$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|\frac{t-t_{k-1}}{\tau}\,v_k^h + \left(1-\frac{t-t_{k-1}}{\tau}\right)v_{k-1}^h\right\|_V^2 ds \le$$

$$2\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|v_k^h\|_V^2\,ds + 2\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|v_{k-1}^h\|_V^2\,ds = 2(\|v_{k-1}^h\|_V^2 + \|v_k^h\|_V^2)\tau.$$

Итак, получаем оценку

$$\int_0^T \|v^h(s)\|_V^2\,ds \le 2\sum_{k=0}^N \Big(\|v_{k-1}^h\|_V^2 + \|v_k^h\|_V^2\Big)\tau. \quad (2.21)$$

Рассмотрим теперь

$$\int_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_{V_h'}^2 ds = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2 ds = \sum_{k=1}^N \left\|\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2 \tau\,. \quad (2.22)$$

Осталось заметить, что $v^h(t_k) = v_k^h$ для $k = \overline{0,N}$. Поэтому

$$\max_{0\le k\le N}\|v_k^h\|_H^2 \le \max_{0\le t\le T}\|v^h(t)\|_H^2\,. \quad (2.23)$$

В результате оценка (2.16) следует из (2.23), (2.20), (2.21) и (2.22). □

Следствие 2.1. *Пусть* $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ *– решение задачи (2.5). Тогда вместе с оценкой (2.9) выполняется оценка*

$$\max_{0\le k\le N} \|u_k^h\|_H^2 \le C \sum_{k=1}^{N} \|f_k^h\|_{V_h'}^2 \tau. \tag{2.24}$$

Доказательство. Напомним, что $u_0^h = u_N^h$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N} \Big(\|u_{k-1}^h\|_V^2 + \|u_k^h\|_V^2 \Big) \tau = 2 \sum_{k=1}^{N} \|u_k^h\|_V^2 \tau\,.$$

Отсюда, учитывая оценки (2.9) и (2.16), получаем оценку (2.24). □

Положим далее $f_k^h = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} f(t)\, dt$. Решение $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ задачи (2.5) будем называть приближённым решением задачи (1.2).

Для того, чтобы доказать теорему о базовой оценке погрешности в энергетических нормах, сформулируем и докажем вспомогательное утверждение, в котором проведем сравнение решения задачи (2.5) не с решением задачи (1.2), а с его проекцией на проекционное подпространство V_h.

Лемма 2.4. *Пусть* $u(t)$ *– слабое решение задачи (1.2), а* $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ *– решение задачи (2.5). Тогда для* $z_k^h = P_h u(t_k) - u_k^h$ *справедлива оценка*

$$\max_{0\le k\le N} \|z_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \left(\|z_k^h\|_V^2 \tau + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V_h'}^2 \tau \right) \le$$

$$C \left(\int_0^T \big\|(I - P_h) u(t)\big\|_V^2 \, dt + \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big\| P_h [u(t_k) - u(t)] \big\|_V^2 \, dt \right). \tag{2.25}$$

Доказательство. К (1.2) применим оператор $\overline{P}_h$, полученное равенство интегрируем по t от t_{k-1} до t_k и делим на τ. Учитывая далее (2.5), получим тождество

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h z_k^h = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} A(t) [P_h u(t_k) - u(t)]\, dt\,. \tag{2.26}$$

Заметим, что $z_0^h = z_N^h$. Тогда (2.26) можно рассматривать как задачу типа (2.5), а для z_k^h будут выполнены оценки, подобные (2.9) и (2.24), то есть

$$\max_{0\le k\le N}\|z_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\left(\|z_k^h\|_V^2\tau+\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_H^2+\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2\tau\right)\le$$

$$C\sum_{k=1}^{N}\left\|\varphi_k^h\right\|_{V_h'}^2\tau\,, \tag{2.27}$$

где $\varphi_k^h=\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P_h}A(t)[P_hu(t_k)-u(t)]\,dt$.

Учитывая (2.1) и (1.1), получим оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\varphi_k^h\right\|_{V_h'}^2\tau\le\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|A(t)[P_hu(t_k)-u(t)]\right\|_{V'}^2dt\le$$

$$\mu^2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|P_hu(t_k)-u(t)\right\|_V^2dt\,. \tag{2.28}$$

Заметим, что $P_hu(t_k)-u(t)=(P_h-I)u(t)+P_h[u(t_k)-u(t)]$. С учётом последнего замечания оценка (2.25) следует непосредственно из (2.27) и (2.28). $\square$

Перед формулировкой утверждения о погрешности отметим, что решение задачи (1.2) $u\in L_2(0,T;V)$ и, вообще говоря, значение в точке (на множестве меры нуль) $u(t_k)\in V$ не определено. Поэтому вместо $\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau$ имеет смысл оценивать

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(t)\,dt-u_k^h\right\|_V^2\tau\le\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t)-u_k^h\right\|_V^2dt.$$

Теорема 2.1. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2), а $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ – решение задачи (2.5). Тогда справедливы оценки*

$$\max_{0\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2\le C\left(\max_{0\le t\le T}\left\|(I-P_h)u(t)\right\|_H^2+\right.$$

$$\left.\int_0^T\left\|(I-P_h)u(t)\right\|_V^2dt+\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|P_h[u(t_k)-u(t)]\right\|_V^2dt\right), \tag{2.29}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t)-u_k^h\right\|_V^2dt\le$$

$$C\left(\int_0^T \left\|(I-P_h)u(t)\right\|_V^2 dt + \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|P_h[u(t_k)-u(t)]\right\|_V^2 dt\right), \tag{2.30}$$

$$\sum_{k=1}^N \left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau \le$$

$$2\int_0^T \left\|(I-\overline{P}_h)u'(t)\right\|_{V'}^2 dt + 2\sum_{k=1}^N \left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau\,. \tag{2.31}$$

Доказательство. Оценка (2.29) следует из неравенства треугольника и оценки (2.25).

Оценка (2.30) следует из равенства

$$u(t) - u_k^h = (I-P_h)u(t) + P_h[u(t)-u(t_k)] + z_k^h\,,$$

неравенства треугольника и оценки (2.25).

Для получения оценки (2.31) воспользуемся равенством

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (I-\overline{P}_h)u'(t)\,dt + \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau},$$

из которого следует оценка

$$\sum_{k=1}^N \left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau \le$$

$$2\sum_{k=1}^N \left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} (I-\overline{P}_h)u'(t)\,dt\right\|_{V'}^2 \tau + 2\sum_{k=1}^N \left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau \le$$

$$2\int_0^T \left\|(I-\overline{P}_h)u'(t)\right\|_{V'}^2 dt + 2\sum_{k=1}^N \left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau\,. \quad \square$$

Перейдем к условиям, позволяющим из оценок (2.29), (2.30) и (2.31) сделать вывод о сходимости погрешностей в соответствующих нормах к нулю.

Предположим, что задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств пространства V, которая является предельно плотной в V при $h \to 0$. Это означает, что для любого $v \in V$ при $h \to 0$

$$\|(I-Q_h)v\|_V \to 0\,, \tag{2.32}$$

где Q_h – ортогональный проектор пространства V на V_h.

Заметим, что такая последовательность $\{V_h\}$ также является предельно плотной в H и V' последовательностью [39].

Предположим далее, что подпространства V_h удовлетворяют условиям:

$$\|(I - Q_h)v\|_H \le r_1 h \|v\|_V, \tag{2.33}$$

$$\|v_h\|_V \le r_2 h^{-1} \|v_h\|_H, \tag{2.34}$$

где r_1 и r_2 не зависят от $v \in V$, $v_h \in V_h$ и h.

Условие (2.33) типично для метода конечных элементов, а условие (2.34) в приложениях метода конечных элементов означает равномерное разбиение области пространственных переменных. Заметим, что в простейшем одномерном случае такими являются, например, подпространства непрерывных кусочно линейных на равномерной сетке функций [16], [26].

Из (2.33) и (2.34) следуют [39] необходимые в дальнейшем оценки:

$$\|\overline{P}_h\|_{V' \to V'} \le \|P_h\|_{V \to V} \le r_1 r_2 + 1\,, \tag{2.35}$$

$$\|v_h\|_H \le r_2 h^{-1} \|v_h\|_{V_h'}\,. \tag{2.36}$$

Теорема 2.2. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2), а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение задачи (2.5). Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (2.33) и (2.34). Наконец, пусть τ и h такие, что $\tau h^{-2} \to 0$ при $h \to 0$. Тогда при $h \to 0$*

$$\max_{0 \le k \le N} \left\|u(t_k) - u_k^h\right\|_H + \left(\sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|u(t) - u_k^h\right\|_V^2 dt \right)^{1/2} +$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\, dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \right)^{1/2} \longrightarrow 0. \tag{2.37}$$

Доказательство. С учётом (2.34) и (2.36) получим при п.в. $t \in [t_{k-1},\, t_k]$ оценку

$$\|P_h[u(t_k)-u(t)]\,\|_V^2 = \left\|\int_t^{t_k} \overline{P}_h u'(s)\,ds\right\|_V^2 \le$$

$$r_2^4 h^{-4}\left\|\int_t^{t_k} \overline{P}_h u'(s)\,ds\right\|_{V_h'}^2 \le r_2^4\,\tau\,h^{-4}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(t)\|_{V'}^2 dt.$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k)-u(t)]\,\|_V^2\,dt \le r_2^4\,\tau^2\,h^{-4}\int_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2 dt. \tag{2.38}$$

Заметим также, что для любого $v \in V$ при $h \to 0$

$$\|(I-P_h)v\|_V = \|(I-P_h)(v-Q_hv)\|_V \le$$

$$(1+\|P_h\|_{V\to V})\;\|(I-Q_h)v\|_V \to 0. \tag{2.39}$$

Из оценок (2.29), (2.30), (2.38) и (2.39) теперь следует сходимость к нулю первых двух слагаемых в (2.37).

Перейдем к рассмотрению последнего в (2.37) слагаемого. Из (2.2) и (2.35) для $v_h \in V_h$ следует оценка $\|v_h\|_{V'} \le (r_1r_2+1)\|v_h\|_{V_h'}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2\tau \le (r_1r_2+1)^2\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V_h'}^2\tau\,. \tag{2.40}$$

Оценку (2.40) подставим в оценку (2.31) и воспользуемся оценкой (2.25). Заметим, что, в силу предельной плотности последовательности $\{V_h\}$ в V', для любого $v \in V'$ при $h \to 0$

$$\|(I-\overline{P}_h)v\|_{V'} \le (1+\|P_h\|_{V\to V})\;\|(I-S_h)v\|_{V'} \to 0\,, \tag{2.41}$$

где S_h – ортогональный проектор пространства V' на V_h. Таким образом, стремление к нулю третьего слагаемого в (2.37) следует из (2.31), (2.25), (2.38), (2.39), (2.40) и (2.41). $\Box$

Далее покажем, что при условии дополнительной гладкости решения $u(t)$ из оценок теоремы 2.1 следует, что требование $\tau = o(h^2)$ в (2.37) можно существенно ослабить.

Следствие 2.2. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2) – обладает дополнительной гладкостью*

$$u' \in L_p(0,T;H) \qquad (1 \le p \le 2)\,, \tag{2.42}$$

а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение задачи (2.5). Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (2.33), (2.34). Наконец, пусть τ и h такие, что $\tau^{3/2-1/p}h^{-1} \to 0$ при $h \to 0$. Тогда вновь выполняется сходимость (2.37).

Доказательство. Как видно из доказательства теоремы 2.2, следует лишь модернизировать оценку (2.38).

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k)-u(t)]\,\|_V^2\,dt \le r_2^2h^{-2}\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\int_t^{t_k}P_hu'(s)ds\right\|_H^2 dt \le$$

$$r_2^2h^{-2}\tau\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_H\,ds\right)^2 \le r_2^2\,\tau^{3-2/p}h^{-2}\left(\int_0^T\|u'(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}. \quad \square \tag{2.43}$$

Теперь предположим, что слабое решение задачи (1.2) $u(t)$ обладает дополнительной гладкостью

$$u' \in L_p(0,T;V) \qquad (1 \le p \le 2)\,. \tag{2.44}$$

В этом случае кроме (2.37) имеет смысл рассмотреть сходимость к нулю и выражения $\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau$. При этом не требуется согласования параметров τ и h.

Следствие 2.3. *Пусть для $u(t)$ – слабого решения задачи (1.2) – выполняется (2.44), а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение задачи (2.5). Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (2.33) и (2.34). Тогда при $\tau \to 0$ и $h \to 0$ вновь выполняется сходимость (2.37), а также*

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau\right)^{1/2} \longrightarrow 0\,. \tag{2.45}$$

Доказательство. Для получения сходимости (2.37) следует, как и в следствии 2.2, модернизировать оценку (2.38).

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t_k)-u(t)]\,\|_V^2\,dt \le (r_1r_2+1)^2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\int_t^{t_k}u'(s)\,ds\right\|_V^2 dt \le$$

$$(r_1r_2+1)^2\tau^{3-2/p}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_V^p\,ds\right)^{2/p} \le$$

$$(r_1r_2+1)^2\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u'(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p}. \qquad (2.46)$$

Чтобы получить (2.45), рассмотрим оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau \le 2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u(t)\|_V^2dt + 2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2dt \le$$

$$2\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u'(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p} + 2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2dt\,. \qquad (2.47)$$

В правой части (2.47) первое слагаемое стремится к нулю при $\tau \to 0$, а сходимость к нулю второго слагаемого установлена выше. □

Покажем теперь, что из оценок (2.29)–(2.31) следуют и порядки скорости сходимости не только по времени, но и по пространству. В каждом из следующих утверждений настоящего параграфа усовершенствуем одну из оценок (2.29)–(2.31), пользуясь условиями теоремы 2.2 и её следствий, а также приведёнными ниже аппроксимационными свойствами подпространств V_h.

Предполагаем далее, что существует гильбертово пространство E, такое, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$.

Пусть теперь подпространства $V_h \subset V$ такие, что для $v \in E$

$$\|(I-Q_h)v\|_V \le rh\|v\|_E\,. \qquad (2.48)$$

Условие (2.48), как и (2.33), типично для метода конечных элементов [16].

В [37] показано, что из (2.48) для $v \in V$ следует оценка (аналог леммы Обена-Нитше)

$$\|(I - Q_h)v\|_H \le rh\|(I - Q_h)v\|_V\,, \tag{2.49}$$

из которой очевидным образом следует (2.33) с $r_1 = r$.

Отметим также, что для $v \in H$ из (2.48) следует [39] оценка

$$\|(I - P_h)v\|_{V'} \le rh\|(I - P_h)v\|_H\,. \tag{2.50}$$

Теорема 2.3. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2), а $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ – решение задачи (2.5). Пусть $\{V_h\}$ – последовательность конечномерных подпространств пространства V, для которой выполняются условия (2.48) и (2.34). Предположим, что решение $u(t)$ такое, что выполнено (2.42) с $p = 2$ и*

$$u \in L_2(0, T; E)\,. \tag{2.51}$$

Тогда

$$\max_{0\le k\le N} \left\|u(t_k) - u_k^h\right\|_H^2 \le$$
$$C\left\{h^2\int_0^T\left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\right)dt + \tau^2 h^{-2}\int_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt\right\}. \tag{2.52}$$

Если же дополнительно предположить свойство (2.44), то

$$\max_{0\le k\le N} \left\|u(t_k) - u_k^h\right\|_H^2 \le$$
$$C\left\{h^2\int_0^T\left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\right)dt + \tau^{3-2/p}\left(\int_0^T \|u'(t)\|_V^p\,dt\right)^{2/p}\right\}. \tag{2.53}$$

Доказательство. Прежде всего заметим [2, гл. 3, теорема 1.1], что если функция $v(t)$ такая, что $v \in L_2(0, T; V)$ и $v' \in L_2(0, T; V')$, то $v \in C([0, T], H)$ и выполняется оценка

$$\max_{0\le t\le T} \|v(t)\|_H^2 \le C\int_0^T\left(\|v(t)\|_V^2 + \|v'(t)\|_{V'}^2\right)dt\,.$$

В таком случае,

$$\max_{0\le t\le T}\|(I-P_h)u(t)\|_H^2 \le C\int_0^T\left(\|(I-P_h)u(t)\|_V^2+\|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\right)dt\,. \quad (2.54)$$

Следовательно, оценка (2.29), с учетом (2.54) и (2.43), будет иметь вид

$$\max_{0\le k\le N}\left\|u(t_k)-u_k^h\right\|_H^2 \le C_1\int_0^T\left(\|(I-P_h)u(t)\|_V^2+\|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2\right)dt+$$
$$C_2\tau^2h^{-2}\int_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt\,. \quad (2.55)$$

Оценка (2.52) следует теперь из (2.55), (2.39), (2.35), (2.48) и (2.50).

Оценка (2.53) устанавливается аналогично. Следует только вместо (2.43) воспользоваться оценкой (2.46). □

Теорема 2.4. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2), а $(u_0^h,u_1^h,\dots,u_N^h)$ – решение задачи (2.5). Пусть $\{V_h\}$ – последовательность конечномерных подпространств пространства V, для которой выполняются условия (2.48) и (2.34). Предположим, что решение $u(t)$ такое, что выполнено (2.51) и (2.42) с $p=2$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|u(t)-u_k^h\right\|_V^2dt \le C\left\{h^2\int_0^T\|u(t)\|_E^2\,dt+\tau^2h^{-2}\int_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt\right\}. \quad (2.56)$$

Если же предположить свойства (2.51) и (2.44), то

$$\sum_{k=1}^N\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau \le$$
$$C\left\{h^2\int_0^T\|u(t)\|_E^2dt+\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u'(t)\|_V^pdt\right)^{2/p}\right\}. \quad (2.57)$$

Доказательство. Для доказательства (2.56) следует воспользоваться оценками (2.30), (2.39), (2.35), (2.48) и (2.43).

Оценка (2.57) следует из оценок (2.47), (2.30), (2.35), (2.48) и (2.46). □

Теорема 2.5. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2), а $(u_0^h,u_1^h,\dots,u_N^h)$ – решение задачи (2.5). Пусть $\{V_h\}$ – последовательность* *конечномерных подпространств пространства V, для которой выполняются условия (2.48) и (2.34). Предположим, что решение $u(t)$ такое, что выполнено (2.51) и (2.42) с $p = 2$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\, dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \le$$

$$C \left\{ h^2 \int_0^T \left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2 \right) dt + \tau^2 h^{-2} \int_0^T \|u'(t)\|_H^2 \, dt \right\}. \qquad (2.58)$$

Если же дополнительно предположить свойство (2.44), то

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\, dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \le$$

$$C \left\{ h^2 \int_0^T \left(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2 \right) dt + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u'(t)\|_V^p dt \right)^{2/p} \right\}. \qquad (2.59)$$

Доказательство. Воспользуемся оценкой (2.31), в которой первое слагаемое в правой части оценим, используя (2.50). В оценке второго слагаемого с помощью (2.2) и (2.35) переходим к норме пространства V_h'. Затем воспользуемся (2.25), и с учётом (2.39), (2.35), (2.48) и (2.43) получим окончательную оценку (2.58).

Доказательство (2.59) проводим подобным образом. Нужно только вместо (2.43) воспользоваться оценкой (2.46). $\square$

2.3. Энергетическая сходимость для гладко разрешимого уравнения

Предположим, что для задачи (1.2) выполнены условия теоремы 1.2, обеспечивающие существование у задачи (1.2) гладких решений. Это предположение позволит отказаться от ограничений (2.33) и (2.34) на подпространства V_h.

В подпространстве V_h, учитывая сильную непрерывность по $t \in [0, T]$ оператора $A(t)$, рассмотрим разностную задачу в следующей форме: для

$k = \overline{1, N}$

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P_h} A(t_k) u_k^h = \overline{P_h} f(t_k), \qquad u_0^h = u_N^h, \tag{2.60}$$

где все параметры такие же, как в задаче (2.5). Решение $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ задачи (2.60) будем называть приближённым решением задачи (1.2).

Задача (2.60), как и задача (2.5), имеет единственное решение, для которого справедливы оценки (2.9) и (2.24). Пользуясь данными оценками, установим энергетические оценки погрешности при условиях гладкой разрешимости задачи (1.2).

Теорема 2.6. *Пусть $u(t)$ – гладкое решение задачи (1.2), а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение задачи (2.60). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\le k\le N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(u'(t) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) dt \right\|_H^2 +$$

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau \le C \Bigg\{ \max_{0\le t\le T} \|(Q_h - I)u(t)\|_H^2 + \int_0^T \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2\, dt +$$

$$\int_0^T \|(I - Q_h)u'(t)\|_H^2\, dt + \tau^2 \int_0^T \left(\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2 \right) dt \Bigg\}. \tag{2.61}$$

Доказательство. Обозначим $z_k^h = Q_h u(t_k) - u_k^h$. Тогда

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h z_k^h = \overline{P_h} A(t_k)(Q_h - I)u(t_k) +$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h[u'(t) - u'(t_k)]\, dt + \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (Q_h - P_h) u'(t)\, dt. \tag{2.62}$$

Отметим, что равенство (2.62) имеет смысл, поскольку $u \in C([0, T], V)$, $u' \in C([0, T], H)$. К соотношению (2.62) применим оценки (2.9) и (2.24):

$$\max_{0\le k\le N} \|z_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \|z_k^h\|_V^2 \tau + \left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V_h'}^2 \tau \right) \le$$

$$C \left(\sum_{k=1}^N \|(Q_h - I)u(t_k)\|_V^2 \tau + \tau^2 \int_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\, dt + \int_0^T \|(Q_h - I)u'(t)\|_{V'}^2\, dt \right).$$

Заметим теперь, что

$$u(t_k) - u_k^h = (I - Q_h)u(t_k) + z_k^h;$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right)dt=\int_{t_{k-1}}^{t_k}(I-Q_h)u'(t)\,dt+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\,dt.$$

Далее, используя неравенство треугольника, последнее неравенство для z_k^h и оценивая соответствующие слагаемые, получим оценку (2.61). □

Для сходимости погрешности к нулю достаточно предположить, что задана последовательность подпространств $\{V_h\}$, предельно плотная в V. Тогда в условиях теоремы 2.6 при $\tau \to 0$ и $h \to 0$

$$\max_{0\le k\le N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H+\left(\sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right)\,dt\right\|_H^2\right)^{1/2}+$$
$$\left(\sum_{k=1}^N\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau\right)^{1/2}\to 0.$$

Из оценки (2.61) следует первый порядок сходимости погрешности к нулю по времени. Далее получим порядок скорости сходимости и по пространственным переменным.

Теорема 2.7. *Пусть $u(t)$ – гладкое решение задачи (1.2), обладающее дополнительной гладкостью $u \in L_2(0,T;E)$, а $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ – решение задачи (2.60). Пусть для последовательности конечномерных подпространств $\{V_h\}$ справедливо условие (2.48). Тогда*

$$\max_{0\le k\le N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right)\,dt\right\|_H^2+$$
$$\sum_{k=1}^N\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau\le C\left\{h^2\left[\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_V^2+\int_0^T\left(\|u(t)\|_E^2+\|u'(t)\|_V^2\right)dt\right]+\right.$$
$$\left.\tau^2\int_0^T\left(\|u'(t)\|_V^2+\|u''(t)\|_{V'}^2\right)dt\right\}. \tag{2.63}$$

Доказательство. Оценка (2.63) получается путём применения к трем первым слагаемым в правой части (2.61) оценок (2.48) и (2.49).□

2.4. Среднеквадратичная сходимость для уравнения с симметричным оператором

Предположим, что форма $a(t,u,v)$ не зависит от $t \in [0;T]$ и является симметричной, то есть $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$, где черта над комплексным числом означает переход к сопряжённому числу.

Рассмотрим в V' задачу

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad u(0) = u(T), \tag{2.64}$$

приближённая задача примет вид: для $k = \overline{1,N}$

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + A_h u_k^h = f_k^h, \quad u_0^h = u_N^h, \tag{2.65}$$

где $N \in \mathbb{N}, T = \tau N, t_k = k\tau, u_k^h \in V_h, A_h = \overline{P_h}A,$ f_k^h определим позже.

Заметим, что теорема 1.1 даёт условия слабой разрешимости задачи (2.64) и что задача (2.65), как и задача (2.5), однозначно разрешима.

В настоящем параграфе установим так называемую среднеквадратичную сходимость для задачи (2.64) и приближённой задачи (2.65), а также оценки скорости сходимости, эффективные как по времени, так и по пространству. Заметим, что эти результаты получаются при меньших ограничениях на точное решение задачи (2.64), нежели для энергетической сходимости.

Из предположения симметричности формы и условия (1.1) следует положительная определённость и самосопряжённость оператора $A_h : V_h \to V_h$. Покажем это. Заметим, что второе неравенство в (1.1) при условии симметричности формы принимает вид $a(u,u) \geq \alpha \|u\|_V^2$. Возьмём произвольные $u_h, v_h \in V_h$:

$$(A_h u_h, u_h) = (\overline{P_h}Au_h, u_h) = a(u_h,u_h) \geq \alpha\|u_h\|_V^2 \geq 0;$$

$$(A_h u_h, v_h) = (\overline{P_h}Au_h, v_h) = a(u_h, v_h) = \overline{a(v_h,u_h)} =$$

$$\overline{(\overline{P_h}Av_h, u_h)} = (u_h, \overline{P_h}Av_h) = (u_h, A_h v_h).$$

Таким образом, $A_h = A_h^*$.

Значит, существует самосопряжённый положительно определённый оператор $A_h^{1/2} : V_h \to V_h$, а также $A_h^{-1}, A_h^{-1/2} : V_h \to V_h$. Приведём необходимое в дальнейшем утверждение [34]:

Лемма 2.5. *Для любых $u_h \in V_h$ выполняются оценки:*

$$\alpha\|u_h\|_V^2 \le \|A_h^{1/2}u_h\|_H^2 \le \mu\|u_h\|_V^2, \tag{2.66}$$

$$\alpha\|A_h^{-1/2}u_h\|_H^2 \le \|u_h\|_{V_h'}^2 \le \mu\|A_h^{-1/2}u_h\|_H^2. \tag{2.67}$$

Определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u, v \in V|(u, v)_{V(A)} = a(u, v)\}.$$

Из (1.1) следует, что нормы в пространствах V и $V(A)$ эквивалентны, а именно

$$\alpha^{1/2}\|u\|_V \le \|u\|_{V(A)} \le \mu^{1/2}\|u\|_V \quad (u \in V). \tag{2.68}$$

Пользуясь неравенством (2.68), докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 2.6. *Для $u \in V$ справедлива оценка*

$$\|[I - Q_h(A)]u\|_V \le \alpha^{-1/2}\|[I - Q_h(A)]u\|_{V(A)} \le \alpha^{-1/2}\mu^{1/2}\|(I - Q_h)u\|_V, \tag{2.69}$$

где $Q_h(A)$ – ортопроектор в $V(A)$ на V_h, а Q_h – ортопроектор в V на V_h.

Доказательство следует из оценок (1.1) и (2.68):

$$\|[I - Q_h(A)]u\|_V \le \alpha^{-1/2}\|[I - Q_h(A)]u\|_{V(A)} = \alpha^{-1/2}\min_{u_h \in V_h}\|u - u_h\|_{V(A)} \le$$

$$\alpha^{-1/2}\mu^{1/2}\min_{u_h \in V_h}\|u - u_h\|_V = \alpha^{-1/2}\mu^{1/2}\|(I - Q_h)u\|_V.\square$$

Приведём необходимое в дальнейшем равенство из [36]:

$$\overline{P_h}Au = A_hQ_h(A)u, \tag{2.70}$$

справедливое для всех $u \in V$.

Пусть далее в задаче (2.65) $f_k^h = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P_h}f(t)\,dt$. Решение $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ задачи (2.65) будем называть приближённым решением задачи (2.64).

Как и в §2.2, прежде чем сформулировать и доказать утверждение о сходимости погрешности, установим оценки разности между решением задачи (2.65) и проекцией решения задачи (1.2) на подпространство V_h.

Лемма 2.7. *Пусть для задачи (2.64) выполнены все сделанные выше предположения. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2.64), а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение задачи (2.65). Тогда для $z_k^h = u_k^h - P_h u(t_k)$ справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\|z_k^h\|_H^2 \tau + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_{V_h'}^2 \right) \le$$

$$C \left\{ \int_0^T \|(Q_h(A) - I)u(t)\|_H^2 \, dt + \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u(t_k)\|_H^2 \, dt \right\}. \tag{2.71}$$

Доказательство. Применим оператор $\overline{P_h}$ к тождеству (2.64), проинтегрируем его по t от t_{k-1} до t_k и разделим на τ. Из равенства (2.65) вычтем полученное выражение. Тогда

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P_h} A_h z_k^h = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} A[u(t) - \overline{P_h} u(t_k)] \, dt. \tag{2.72}$$

Умножим (2.72) скалярно в H на $\tau A_h^{-1} z_k^h$ и возьмём две вещественные части. Отметим, что $2\,\mathrm{Re}(A_h z_k^h, \tau A_h^{-1} z_k^h) = 2\tau \|z_k^h\|_H^2$ и

$$2\,\mathrm{Re}(z_k^h - z_{k-1}^h, A_h^{-1} z_k^h) =$$

$$(A_h^{-1/2} z_k^h, A_h^{-1/2} z_k^h) - (A_h^{-1/2} z_{k-1}^h, A_h^{-1/2} z_k^h) + (A_h^{-1/2} z_k^h, A_h^{-1/2} z_k^h) -$$

$$(A_h^{-1/2} z_k^h, A_h^{-1/2} z_{k-1}^h) = \|A_h^{-1/2} z_k^h\|_H^2 + \|A_h^{-1/2}(z_k^h - z_{k-1}^h)\|_H^2 - \|A_h^{-1/2} z_{k-1}^h\|_H^2.$$

Тогда из (2.72) получаем:

$$\|A_h^{-1/2} z_k^h\|_H^2 + \|A_h^{-1/2}(z_k^h - z_{k-1}^h)\|_H^2 - \|A_h^{-1/2} z_{k-1}^h\|_H^2 + 2\tau \|z_k^h\|_H^2 =$$

$$2\,\mathrm{Re} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} A[u(t) - \overline{P_h} u(t_k)] \, dt, A_h^{-1} z_k^h \right). \tag{2.73}$$

Оценим правую часть последнего равенства, используя (2.70):

$$2\,\mathrm{Re} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} [\overline{P_h} A[u(t) - \overline{P_h} u(t_k)] \, dt, A_h^{-1} z_k^h \right) =$$

$$2\,\mathrm{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(A_hQ_h(A)u(t),A_h^{-1}z_k^h\right)\,dt-2\,\mathrm{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(A_h\overline{P_h}u(t_k),A_h^{-1}z_k^h\right)\,dt=$$

$$2\,\mathrm{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(Q_h(A)u(t),z_k^h)\,dt-2\,\mathrm{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(u(t_k),z_k^h)\,dt=$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}(u(t)-u(t_k))\,dt,z_k^h\right)+2\,\mathrm{Re}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}[Q_h(A)-I]u(t)\,dt,z_k^h\right)=I_1+I_2.$$

Оценим слагаемые $I_j (j=1,2)$:

$$I_1\le\frac{1}{\varepsilon_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt+\tau\varepsilon_1\|z_k^h\|_H^2;$$

$$I_2\le\frac{1}{\varepsilon_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u(t)\|_H^2\,dt+\tau\varepsilon_2\|z_k^h\|_H^2.$$

Положим $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2$. Также учтём, что из (2.66) следует оценка

$$\|A_h^{-1/2}(z_k^h-z_{k-1}^h)\|_H^2\ge\mu^{-1}\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_{V_h'}^2.$$

Тогда из (2.73) получаем:

$$\|A_h^{-1/2}z_k^h\|_H^2-\|A_h^{-1/2}z_{k-1}^h\|_H^2+\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_{V_h'}^2+\tau\|z_k^h\|_H^2\le$$

$$C\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u(t)\|_H^2\,dt+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt\right). \tag{2.74}$$

Просуммировав неравенства (2.74) по $k=\overline{1,N}$ и учитывая периодическое условие, получим необходимое неравенство (2.71). $\square$

Приведём теперь лемму из [34], которой воспользуемся при доказательстве приведённого ниже утверждения о среднеквадратичной сходимости.

Лемма 2.8. *Пусть выполнены условия слабой разрешимости задачи (2.64). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt\le\tau C\left\{\int_0^T\|f(t)\|_{V'}^2\,dt+\int_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt\right\}. \tag{2.75}$$

Теорема 2.8. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2.64), а $(u_0^h,u_1^h,\dots,u_N^h)$ – решение задачи (2.65). Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная* *в V последовательность конечномерных подпространств. Тогда при $\tau \to 0$ и $h \to 0$*

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau\right)^{1/2} \to 0. \qquad (2.76)$$

Доказательство. Из (2.75) следует сходимость к нулю последнего слагаемого в правой части неравенства (2.71). Сходимость к нулю первого слагаемого следует из (2.69), предельной плотности последовательности $\{V_h\}$ в V и непрерывности вложения $V \subset H$.

Стремление к нулю (2.76) теперь следует из предельной плотности $\{V_h\}$ в H, неравенства (2.71) и тождества

$$u(t_k) - u_k^h = (I - P_h)u(t_k) + P_h u(t_k) - u_k^h = (I - P_h)u(t_k) - z_k^h. \quad \square$$

Перейдём теперь к получению скорости сходимости приближённых решений к точному. Напомним множество $D(A) = \{u \in V : Au \in H\}$. Пусть существует гильбертово пространство E такое, что $D(A) \subset E \subset V$ и выполняется оценка (1.21).

Пусть подпространства V_h обладают свойством (2.48). В [35] показано, что из (1.21) и (2.48) следует оценка:

$$\|[I - Q_h(A)]v\|_H \leq r\mu\alpha h \|(I - Q_h)v\|_V. \qquad (2.77)$$

Следствие 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.8 и условия (1.21), (2.48). Тогда*

$$\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau \leq$$

$$C\left\{h^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt + \tau\left(\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt + \int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt\right)\right\}. \qquad (2.78)$$

Если же решение задачи обладает дополнительной гладкостью $u \in L_2(0,T;E)$, $u' \in L_2(0,T;H)$, то справедлива следующая оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau \leq C\left\{h^4 \int_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt + \tau^2 \int_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt\right\}. \qquad (2.79)$$

Доказательство. Запишем оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\tau \le 2\sum_{k=1}^{N}\|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2\tau + 2\sum_{k=1}^{N}\|z_k^h\|_H^2\tau, \tag{2.80}$$

где $z_k^h = u_k^h - P_h u(t_k)$. Оценим первое слагаемое в правой части (2.80)

$$2\sum_{k=1}^{N}\|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2\tau = \sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2\,dt \le$$

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(2\|u(t_k)-u(t)\|_H^2 + 2\|(I-P_h)u(t)\|_H^2\Big)\,dt =$$

$$2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u(t)\|_H^2\,dt + 2\int_0^T\|(I-P_h)u(t)\|_H^2\,dt. \tag{2.81}$$

Оценка (2.78) следует из (2.80), (2.81), (2.71), (2.77) и (2.75).

Далее заметим, что для $t\in[t_{k-1},t_k]$

$$\|u(t_k)-u(t)\|_H^2 = \left\|\int_t^{t_k}u'(s)\,ds\right\|_H^2 \le \tau\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_H^2\,ds.$$

Отсюда получим

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u(t)\|_H^2\,dt \le \tau^2\int_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt. \tag{2.82}$$

Оценка (2.79) следует из (2.80), (2.81), (2.82), (2.71), (2.48) и (2.77). □

2.5. Сходимость в сильных нормах для уравнения с симметричным оператором

Для задачи (2.64) в условиях гладкой разрешимости в $V_h\subset V$ рассмотрим периодическую разностную задачу: для $k=\overline{1,N}$

$$\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau} + A_h u_k^h = \overline{P_h}f(t_k), \quad u_0^h = u_N^h, \tag{2.83}$$

где $\tau N = T, t_k = k\tau, A_h = \overline{P_h}A, u_k^h\in V_h$. Решение $(u_0^h, u_1^h,\dots,u_N^h)$ задачи (2.83) будем называть приближённым решением задачи (2.64).

Однозначная разрешимость задачи (2.83) установлена в лемме 2.1.

В настоящем параграфе для задачи (2.64) и приближённой задачи (2.83) будут проведены оценки погрешности в более сильных, чем в предыдущих параграфах, нормах, установлена сходимость, а также скорость сходимости как по временной переменной, так и по пространственным переменным. Для получения этих результатов необходимо предположить большую гладкость точного решения, нежели в §2.2–2.4.

Как и в предыдущем параграфе, определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u, v \in V | (u, v)_{V(A)} = a(u, v)\}.$$

Как и ранее, справедливы соотношение (2.68) и лемма 2.6.

Проведем необходимую для установления базовой оценки погрешности оценку решения задачи (2.83).

Лемма 2.9. *Пусть для* $k = \overline{0, N}$ *элементы* $v_k^h \in V_h$, $N\tau = T$. *Тогда*

$$\max_{0 \le k \le N} \|v_k^h\|_V^2 \le C\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\Big(\|A_h v_{k-1}^h\|_H^2 + \|A_h v_k^h\|_H^2\Big)\tau + \sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 \tau\Bigg\}. \tag{2.84}$$

Доказательство. Определим на $[0, T]$ непрерывную кусочно-линейную функцию $v^h(t)$ со значениями в V_h, которая в $t \in [t_{k-1}, t_k]$ задана формулой

$$v^h(t) = v_{k-1}^h + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}(v_k^h - v_{k-1}^h) \quad (k = \overline{1, N}).$$

Поскольку функция $\|v^h(t)\|_{V(A)}^2 = a(v^h(t), v^h(t))$ абсолютно непрерывна на $[0, T]$, то для всех $t_0, t \in [0, T]$ выполняется равенство

$$\|v^h(t_0)\|_{V(A)}^2 = \|v^h(t)\|_{V(A)}^2 + \int_t^{t_0} \frac{d}{ds}\|v^h(s)\|_{V(A)}^2\, ds\,. \tag{2.85}$$

Заметим, что

$$\frac{d}{ds}\|v^h(s)\|_{V(A)}^2 = 2\mathrm{Re}\left(v^h(s)\,, \frac{d}{ds}v^h(s)\right)_{V(A)} = 2\mathrm{Re}\, a\left(v^h(s)\,, \frac{d}{ds}v^h(s)\right) =$$

$$2\mathrm{Re}\left(Av^h(s)\,,\frac{d}{ds}v^h(s)\right)_H \le 2\|A_h v^h(s)\|_H \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_H$$

п. в. на $[0,T]$. Тогда из (2.85) следует оценка

$$\|v^h(t_0)\|^2_{V(A)} \le \|v^h(t)\|^2_{V(A)} + 2\left|\int_t^{t_0} \|A_h v^h(s)\|_H \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|_H ds\right| \le$$

$$\|v^h(t)\|^2_{V(A)} + \int_0^T \|A_h v^h(s)\|^2_H\, ds + \int_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|^2_H ds\,. \tag{2.86}$$

Интегрируем (2.86) по t от 0 до T.

$$T\|v^h(t_0)\|^2_{V(A)} \le \int_0^T \|v^h(t)\|^2_{V(A)}\, dt +$$

$$T\int_0^T \|A_h v^h(s)\|^2_H\, ds + T\int_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|^2_H ds\,. \tag{2.87}$$

Установим оценку для $u_h \in V_h$

$$\|u_h\|^2_{V(A)} = a(u_h,u_h) = (Au_h,u_h) = (A_h u_h,u_h) \le \|\overline{P_h}Au_h\|_H\|u_h\|_H.$$

В силу непрерывности вложения $V \subset H$ и неравенства (2.68) получим

$$\|u_h\|^2_H \le c^2\|u_h\|^2_V \le c^2\alpha^{-1}\|u_h\|^2_{V(A)}.$$

Таким образом, $\|u_h\|_{V(A)} \le C\|A_h u_h\|_H$. Тогда из (2.87) следует

$$T\|v^h(t_0)\|^2_{V(A)} \le (C^2+T)\int_0^T \|A_h v^h(s)\|^2_H\, ds + T\int_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|^2_H ds\,.$$

Учитывая, что $t_0 \in [0,T]$ произвольно, из последней оценки получим

$$\max_{0\le t\le T}\|v^h(t)\|^2_{V(A)} \le \frac{C^2+T}{T}\int_0^T \|A_h v^h(s)\|^2_H\, ds + \int_0^T \left\|\frac{d}{ds}v^h(s)\right\|^2_H ds\,. \tag{2.88}$$

Заметим, что

$$\int_0^T \|A_h v^h(s)\|^2_H\, ds = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A_h v^h(s)\|^2_H\, ds\,,$$

Проведем оценку

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A_h v^h(s)\|^2_H\, ds = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|A_h\left[v^h_{k-1} + \frac{s-t_{k-1}}{\tau}(v^h_k - v^h_{k-1})\right]\right\|^2_H ds =$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| \frac{s-t_{k-1}}{\tau}\, A_h v_k^h + \left(1 - \frac{s-t_{k-1}}{\tau}\right) A_h v_{k-1}^h \right\|_H^2 ds \le$$

$$2\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A_h v_k^h\|_H^2\, ds + 2\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|A_h v_{k-1}^h\|_H^2\, ds = 2\left(\|A_h v_{k-1}^h\|_H^2 + \|A_h v_k^h\|_H^2\right)\tau.$$

Итак, получаем оценку

$$\int_0^T \|A_h v^h(s)\|_H^2\, ds \le 2\sum_{k=1}^N \Big(\|A_h v_{k-1}^h\|_H^2 + \|A_h v_k^h\|_H^2\Big)\tau. \tag{2.89}$$

Рассмотрим теперь

$$\int_0^T \left\|\frac{d}{ds} v^h(s)\right\|_H^2 ds = \sum_{k=1}^N \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\|\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 ds = \sum_{k=1}^N \left\|\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 \tau\,. \tag{2.90}$$

Осталось заметить, что $v^h(t_k) = v_k^h$ для $k = \overline{0, N}$. Поэтому

$$\max_{0\le k\le N} \|v_k^h\|_{V(A)}^2 \le \max_{0\le t\le T} \|v^h(t)\|_{V(A)}^2\,. \tag{2.91}$$

В результате оценка (2.84) следует из (2.68), (2.91), (2.88), (2.89) и (2.90). $\square$

Как и ранее, воспользуемся методикой сравнения решения задачи (2.83) с проекцией решения задачи (2.64) на проекционное подпространство, необходимой для установления базовой оценки погрешности в сильных нормах.

Теорема 2.9. *Пусть для задачи (2.64) выполнены условия теоремы 1.2. Пусть $u(t)$ – решение задачи (2.64), обладающее дополнительной гладкостью $u'' \in L_p(0,T;H)$, где $1 \le p \le 2$, а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение задачи (2.83). Тогда для $z_k^h = Q_h(A)u(t_k) - u_k^h$ справедлива оценка*

$$\max_{0\le k\le N} \|z_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \left(\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 \tau + \|z_k^h - z_{k-1}^h\|_V^2 \right) \le$$

$$C\left\{ \int_0^T \|[I - Q_h(A)]u'(t)\|_H^2\, dt + \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p\, dt\right)^{2/p} \right\}. \tag{2.92}$$

Доказательство. Нетрудно установить тождество

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P_h} A z_k^h = P_h \left\{ \frac{Q_h(A)[u(t_k) - u(t_{k-1})]}{\tau} - u'(t_k) \right\}. \tag{2.93}$$

Умножим (2.93) скалярно в H на $(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}$. Преобразуем выражение:

$$\left(P_h\left\{\frac{Q_h(A)[u(t_k)-u(t_{k-1})]}{\tau} - u'(t_k)\right\}, \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right) =$$

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left([Q_h(A)-I]u'(t), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt + \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-u'(t_k), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt.$$

Получим

$$\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 + a\left(z_k^h, \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left([Q_h(A)-I]u'(t), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt +$$

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-u'(t_k), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt. \qquad (2.94)$$

Заметим, что

$$a\left(z_k^h, (z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\right) =$$

$$(2\tau)^{-1}[a(z_k^h - z_{k-1}^h, z_k^h - z_{k-1}^h) + a(z_k^h, z_k^h) - a(z_{k-1}^h, z_{k-1}^h) + \operatorname{Im} a(z_{k-1}^h, z_k^h)].$$

Возьмём от (2.94) удвоенную вещественную часть. Тогда

$$2\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 + \frac{1}{\tau}\left(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_{V(A)}^2 + \|z_k^h\|_{V(A)}^2 - \|z_{k-1}^h\|_{V(A)}^2\right) =$$

$$\frac{2}{\tau}\mathrm{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left([Q_h(A)-I]u'(t), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt +$$

$$\frac{2}{\tau}\mathrm{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(u'(t)-u'(t_k), \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt = I_1 + I_2. \qquad (2.95)$$

Оценим слагаемые в правой части (2.95).

$$I_1 \le \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H dt \le$$

$$\frac{1}{\tau\varepsilon_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H^2\,dt + \varepsilon_1\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2.$$

Оценим I_2.

$$I_2 = \frac{2}{\tau}\mathrm{Re}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\int_{t_k}^{t} u''(s)\,ds, \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right)dt \le$$

$$2\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H\,ds\left\|\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H \le$$

$$\frac{1}{\varepsilon_2}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H\,ds\right)^2+\varepsilon_2\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\le$$

$$\frac{\tau^{2-2/p}}{\varepsilon_2}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H^p\,ds\right)^{2/p}+\varepsilon_2\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2$$

В левой части (2.95) с помощью (2.68) оценим снизу

$$\frac{1}{\tau}\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_{V(A)}^2\ge\frac{1}{\tau}\alpha\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_V^2.$$

Положим $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2$. Тогда из (2.95) получим неравенство

$$\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2+\frac{1}{\tau}\big(\alpha\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_V^2+\|z_k^h\|_{V(A)}^2-\|z_{k-1}^h\|_{V(A)}^2\big)\le$$

$$C\left\{\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H^2\,dt+\tau^{2-2/p}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}\right\}. \qquad (2.96)$$

Умножим (2.96) на τ и просуммируем по $k=\overline{1,N}$. Заметим, что, в силу периодических условий задач (2.64) и (2.83), $z_0^h=z_N^h$. Получим

$$\sum_{k=1}^N\left(\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_V^2\right)\le$$

$$C\left\{\int_0^T\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_V^2\,dt+\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}\right\}. \qquad (2.97)$$

Проведем оценку $\max_{0\le k\le N}\|z_k^h\|_V^2$. Для этого воспользуемся леммой 2.9 и учтём периодическое условие.

$$\max_{0\le k\le N}\|z_k^h\|_V^2\le C\left\{2\sum_{k=1}^N\|\overline{P_h}Az_k^h\|_H^2\tau+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\right\}. \qquad (2.98)$$

Установим оценку для $\|\overline{P_h}Az_k^h\|_H^2$. Из (2.93) получим

$$\overline{P_h}Az_k^h=P_h\left\{\frac{Q_h(A)[u(t_k)-u(t_{k-1})]}{\tau}-u'(t_k)\right\}-\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}.$$

Тогда

$$\|\overline{P_h}Az_k^h\|_H^2\tau\le2\left\|P_h\left\{\frac{Q_h(A)[u(t_k)-u(t_{k-1})]}{\tau}-u'(t_k)\right\}\right\|_H^2\tau+2\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

Оценим первое слагаемое в правой части последнего неравенства.

$$\left\|P_h\left\{\frac{Q_h(A)[u(t_k)-u(t_{k-1})]}{\tau}-u'(t_k)\right\}\right\|_H^2\tau\le$$

$$\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[Q_h(A)-I]u'(t)\,dt-\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[u'(t)-u'(t_k)]\,dt\right\|_H^2\tau\leq$$
$$\frac{2}{\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}[Q_h(A)-I]u'(t)\,dt\right\|_H^2+\frac{2}{\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{t_k}^{t}u''(s)\,ds\,dt\right\|_H^2\leq$$
$$2\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H^2\,dt+2\tau^{3-2/p}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}. \tag{2.99}$$

С учётом (2.99) неравенство (2.98) преобразуется к виду

$$\max_{0\leq k\leq N}\|z_k^h\|_V^2\leq C\Bigg\{\int_0^T\|[Q_h(A)-I]u'(t)\|_H^2\,dt+$$
$$\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\Bigg\}. \tag{2.100}$$

Теперь (2.92) следует из (2.97) и (2.100). □

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия теоремы 2.9. Пусть $u(t)$ – решение задачи (2.64), а $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ – решение задачи (2.83). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\leq k\leq N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+$$
$$\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\leq C\Bigg\{\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+$$
$$\int_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2\,dt+\max_{0\leq t\leq T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\Bigg\}. \tag{2.101}$$

Доказательство. Оценку (2.92) преобразуем к виду, который позволил бы оценить погрешность

$$z_k=u(t_k)-u_k^h=z_k^h+[I-Q_h(A)]u(t_k).$$

С учётом утверждения леммы 2.6 получим

$$\max_{0\leq k\leq N}\|z_k\|_V^2\leq 2\max_{0\leq k\leq N}\|z_k^h\|_V^2+2\alpha^{-1}\mu\max_{0\leq t\leq T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2. \tag{2.102}$$

Рассмотрим теперь соотношение

$$z_k-z_{k-1}=(z_k^h-z_{k-1}^h)+\int_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt.$$

Из последнего равенства следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{z_k - z_{k-1}}{\tau} \right\|_H^2 \tau \le$$

$$2 \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 + \frac{2\mu}{\alpha} \int_0^T \| [I - Q_h(A)] u'(t) \|_H^2 \, dt. \qquad (2.103)$$

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{z_k - z_{k-1}}{\tau} \right\|_H^2 \tau = \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) \, dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau.$$

Для завершения оценки (2.92) осталось рассмотреть слагаемое

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| u'(t_k) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \le 2 \sum_{k=1}^{N} \left\| u'(t_k) - \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) \, dt \right\|_H^2 \tau +$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) \, dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau = I_1 + I_2. \qquad (2.104)$$

Оценка слагаемого I_2 уже установлена в (2.103). Рассмотрим слагаемое

$$I_1 = 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} [u'(t_k) - u'(t)] \, dt \right\|_H^2 \le$$

$$2\tau \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u''(s)\|_H \, ds \right)^2 \le 2\tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u''(s)\|_H^p \, ds \right)^{2/p}. \qquad (2.105)$$

Оценка (2.101) теперь следует из оценок (2.102) – (2.105) и (2.92). □

Из оценки (2.101) естественным образом получается сходимость погрешности к нулю. Для этого достаточно предположить, что задана предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$. Тогда при $\tau \to 0$ и $h \to 0$

$$\max_{0 \le k \le N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V + \left(\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t) \, dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \right)^{1/2} +$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \left\| u'(t_k) - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \right)^{1/2} \to 0. \qquad (2.106)$$

Оценка (2.101) позволяет получить скорость сходимости и по пространственным переменным.

Следствие 2.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.10. Пусть также выполнено условие (1.21) и решение $u(t)$ задачи (2.64) такое, что $u \in C([0,T],E)$. Пусть подпространства V_h обладают свойством (2.48). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\le k\le N} \|u(t_k)-u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \left\| \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau +$$

$$\sum_{k=1}^N \left\| u'(t_k) - \frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \le C\Bigg\{ \tau^{3-2/p}\left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p} +$$

$$h^2\left(\int_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt + \max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_E^2\right)\Bigg\}. \tag{2.107}$$

Доказательство оценки (2.107) следует из оценки (2.101). При этом следует воспользоваться оценками (2.48) и (2.70). $\square$

3. РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ СО СХЕМОЙ КРАНКА-НИКОЛСОН ПО ВРЕМЕНИ

Для доказательства сходимости приближённых решений к точному решению исходной задачи со вторым порядком по времени будем использовать по времени схему Кранка-Николсон. Заметим, что схема Кранка-Николсон даёт второй порядок убывания погрешностей приближённых решений только при условии достаточной гладкости точного решения.

3.1. Описание приближённой задачи

Рассмотрим задачу (1.2). Считаем, что эта задача удовлетворяет условиям теоремы 1.2, обеспечивающим существование у задачи (1.2) гладкого решения. Напомним эти условия. Функция $t \to a(t,u,v)$ абсолютно непрерывна на $[0,T]$, $a(0,u,v) = a(T,u,v)$, для формы $a_1(t,u,v) = \partial a(t,u,v)/\partial t$ справедлива оценка (1.12), обобщённая производная $f' \in L_2(0,T;V')$, и выполняется равенство $f(0) = f(T)$. Тогда задача (1.2) гладко разрешима, т.е. решение $u(t)$ задачи (1.2) таково, что $u' \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$.

Для построения приближённых решений возьмём равномерное разбиение $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ отрезка $[0,T]$, где $N \in \mathbb{N}$. В подпространстве $V_h \subset V$ рассмотрим разностную задачу

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} = f_k^h \quad (k = \overline{1,N}), \quad u_0^h = u_N^h, \tag{3.1}$$

где $\tau N = T, t_k = k\tau$, $A_k^h = \overline{P_h}(A(t_k) + A(t_{k-1}))2^{-1}$, f_k^h определим позже.

Лемма 3.1. *Задача (3.1) однозначно разрешима.*

Доказательство. Учитывая конечномерность задачи (3.1), достаточно доказать, что однородная задача имеет только нулевое решение. Итак, рассмотрим задачу

$$\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau} + A_k^h \frac{v_k^h + v_{k-1}^h}{2} = 0, \quad (k = \overline{1, N}), \quad v_0^h = v_N^h. \tag{3.2}$$

Умножим уравнение (3.2) на $(v_k^h + v_{k-1}^h)\tau$ скалярно в H. Заметим, что

$$(v_k^h - v_{k-1}^h, v_k^h + v_{k-1}^h) = \|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + i \cdot 2\,\mathrm{Im}(v_k^h, v_{k-1}^h),$$

где i – мнимая единица. Тогда из (3.2) получим

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + i \cdot 2\,\mathrm{Im}(v_k^h, v_{k-1}^h) + \Big(A_k^h \frac{v_k^h + v_{k-1}^h}{2}, v_k^h + v_{k-1}^h\Big)\tau = 0.$$

Перейдём к вещественной части последнего равенства.

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + \frac{\tau}{4}\mathrm{Re}\Big[a(t_k, v_k^h + v_{k-1}^h, v_k^h + v_{k-1}^h) + a(t_{k-1}, v_k^h + v_{k-1}^h, v_k^h + v_{k-1}^h)\Big] = 0.$$

Отсюда и из условия (1.1) следует оценка

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + \frac{\alpha}{2}\|v_k^h + v_{k-1}^h\|_V^2 \tau \le 0.$$

Суммируем последние неравенства по всем $k = \overline{1, N}$. Учитывая, что $v_0^h = v_N^h$, получим $\sum_{k=1}^N \|v_k^h + v_{k-1}^h\|_V^2 \tau = 0$. Следовательно, $v_k^h + v_{k-1}^h = 0$ для всех $k = \overline{1, N}$. Подставив последнее равенство в (3.1), получим $v_k^h - v_{k-1}^h = 0$. Из периодического условия тогда следует, что $v_k^h = 0$ для всех $k = \overline{0, N}$.

Итак, задача (3.1) имеет единственное решение $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$. □

Далее будут установлены в соответствующих нормах априорные оценки решения задачи (3.1), которые являются вспомогательными для доказательства базовых оценок погрешности.

Лемма 3.2. *Для решения $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ задачи (3.1) справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^N \Big(\Big\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2 + \Big\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_{V_h'}^2\Big)\tau \le C \sum_{k=1}^N \|f_k^h\|_{V_h'}^2 \tau. \tag{3.3}$$

Доказательство. Умножим уравнение в (3.1) на $(u_k^h + u_{k-1}^h)\tau$ скалярно в H. Заметим вновь, что

$$(u_k^h - u_{k-1}^h, u_k^h + u_{k-1}^h) = \|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + i \cdot 2\,\mathrm{Im}(u_k^h, u_{k-1}^h),$$

и перейдём, учитывая (3.1), к вещественной части

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}(A_k^h(u_k^h + u_{k-1}^h), u_k^h + u_{k-1}^h)\tau = \mathrm{Re}(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h)\tau.$$

Воспользовавшись (1.1), получим

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + 2\alpha \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \leq \mathrm{Re}(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h)\tau.$$

Оценим правую часть последнего неравенства:

$$\mathrm{Re}(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h)\tau \leq |(f_k^h, u_k^h + u_{k-1}^h)|\tau \leq \frac{1}{\alpha}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau + \alpha \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau,$$

откуда следует для $k = \overline{1, N}$

$$\|u_k^h\|_H^2 - \|u_{k-1}^h\|_H^2 + \alpha \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \leq \frac{1}{\alpha}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau.$$

Суммируя последние неравенства по $k = \overline{1, N}$, получим

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_V^2 \tau \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{N} \|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau.$$

Оценка выражения $\sum_{k=1}^N \left\|(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}\right\|_{V_h'}^2 \tau$ теперь следует непосредственно из уравнения (3.1). $\square$

Лемма 3.3. *Для решения $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ задачи (3.1) справедлива оценка*

$$\max_{1\leq k\leq N} \left\| \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \leq C \sum_{k=1}^{N} \|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau. \tag{3.4}$$

Доказательство. В лемме 2.3 для произвольных $v_h^k \in V_h$, где $k = \overline{0, N}$ и $N\tau = T$, получена оценка (2.16).

По решению $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ задачи (3.1) определим элемент $u_{-1}^h = u_{N-1}^h$. Положим $v_k^h = (u_k^h + u_{k-1}^h)2^{-1}$, где $k = \overline{1, N}$, соответственно получим $v_0^h =$

$(u_0^h + u_{-1}^h)2^{-1} = (u_N^h + u_{N-1}^h)2^{-1}$. К элементам v_k^h применим оценку (2.16).

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 \le C\sum_{k=1}^{N}\Big(\Big\|\frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2}\Big\|_V^2 + \Big\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\Big)\tau +$$
$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\Big(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} - \frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2}\Big)\Big\|_{V_h'}^2\tau. \tag{3.5}$$

Заметим, что, в силу задания, $u_{-1}^h = u_{N-1}^h$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2}\Big\|_V^2\tau = \sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\tau.$$

Теперь рассмотрим

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\Big(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} - \frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2}\Big)\Big\|_{V_h'}^2\tau \le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_{V_h'}^2\tau +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_{k-1}^h - u_{k-2}^h}{\tau}\Big\|_{V_h'}^2\tau.$$

Здесь $(u_0^h - u_{-1}^h)\tau^{-1} = (u_N^h - u_{N-1}^h)\tau^{-1}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_{k-1}^h - u_{k-2}^h}{\tau}\Big\|_{V_h'}^2\tau = \sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_{V_h'}^2\tau.$$

В результате из (3.5) получается оценка

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 \le 2C\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\tau + \sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_{V_h'}^2\tau.$$

Оценка (3.4) следует теперь из (3.3). $\square$

3.2. Энергетическая сходимость для гладко разрешимого уравнения

Пусть далее $f_k^h = \overline{P_h}(f(t_k) + f(t_{k-1}))2^{-1}$. Решение $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ задачи (3.1) будем называть приближённым решением задачи (1.2).

Перейдём к установлению базовой оценки погрешности в энергетических нормах, а также к доказательству утверждения о сходимости приближённых решений к точному.

Теорема 3.1. *Пусть* $u(t)$ *– гладкое решение задачи (1.2), а* $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ *– решение задачи (3.1). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2+\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\tau+$$

$$\sum_{k=1}^N\Big\|Q_h\frac{u(t_k)-u(t_{k-1})}{\tau}-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_{V_h'}^2\tau\le C\Big\{\int_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\int_0^T\|(I-Q_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt+\tau^4\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(2t-t_{k-1}-t_k)u'(t)\,dt\Big\|_V^2+\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1}-2t+t_k)u''(t)\,dt\Big\|_{V'}^2\Big\},\quad(3.6)$$

Доказательство. Обозначим $z_k^h=Q_hu(t_k)-u_k^h$. Из (1.2) получим

$$P_hu'(t_k)+\overline{P_h}A(t_k)u(t_k)=\overline{P_h}f(t_k)\quad(k=\overline{1,N}).$$

Возьмём полусумму $k-1$-ого и k-ого равенств, разделим полученное выражение на τ и вычтем из него равенство (3.1), получим:

$$\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+A_k^h\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}=A_k^h(Q_h-I)\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}+$$

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(Q_h-P_h)u'(t)\,dt+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\Big(u'(t)-\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}\Big)\,dt-$$

$$4^{-1}\overline{P_h}[A(t_k)-A(t_{k-1})][u(t_k)-u(t_{k-1})].\quad(3.7)$$

Применим к соотношению (3.7) оценки (3.3) и (3.4).

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2+\sum_{k=1}^N\Big(\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2+\Big\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_{V_h'}^2\Big)\tau\le$$

$$C\Big\{\sum_{k=1}^N\Big\|(Q_h-I)\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big\|_V^2\tau+\int_0^T\|(Q_h-I)u'(t)\|_{V'}^2dt+$$

$$\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(u'(t)-\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}\Big)\,dt\Big\|_{V'}^2+$$

$$\sum_{k=1}^N\|[A(t_k)-A(t_{k-1})][u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_{V'}^2\tau\Big\}=C\sum_{i=1}^4 I_i.\quad(3.8)$$

Оценим слагаемые I_i в правой части (3.8).

Для оценки слагаемого I_3 заметим, что в результате замены порядка интегрирования

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(u'(t)-\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}\Big)\,dt=\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big[\int_{t_{k-1}}^{t}u''(s)\,ds-\int_{t}^{t_k}u''(s)\,ds\Big]\,dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u''(s)\Big(\int_{s}^{t_k}dt-\int_{t_{k-1}}^{s}dt\Big)\,ds=\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1}-2s+t_k)u''(s)\,ds. \tag{3.9}$$

Таким образом,

$$I_3\le\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1}-2t+t_k)u''(t)\,dt\Big\|_{V'}^{2}.$$

Обратимся к слагаемому I_1.

$$I_1\le 2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big\|(Q_h-I)\int_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\Big)\,dt\Big\|_{V}^{2}+$$

$$2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(Q_h-I)u(t)\,dt\Big\|_{V}^{2}.$$

Проведя здесь преобразование, подобное (3.9), получим

$$I_1\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(2t-t_{k-1}-t_k)u'(t)\,dt\Big\|_{V}^{2}+2\int_0^T\|(Q_h-I)u(t)\|_V^2\,dt.$$

Перейдём к слагаемому I_4. Для произвольных $u,v\in V$ рассмотрим

$$\Big|\Big([A(t_k)-A(t_{k-1})]u,v\Big)\Big|=\big|a(t_k,u,v)-a(t_{k-1},u,v)\big|=\Big|\int_{t_{k-1}}^{t_k}a_1(s,u,v)\,ds\Big|\le$$

$$\mu_1\tau\|u\|_V\|v\|_V.$$

Отсюда следует оценка

$$\big\|[A(t_k)-A(t_{k-1})]u\big\|_{V'}\le\mu_1\tau\|u\|_V.$$

Таким образом, для I_4 получим

$$I_4\le\mu_1^2\sum_{k=1}^{N}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt\Big\|_{V}^{2}\tau^3\le\mu_1^2\tau^4\int_0^T\|u'(t)\|_V^2dt.$$

Итак, доказана оценка третьего слагаемого в левой части (3.6).

Для оценки первого и второго слагаемых в левой части (3.6) заметим, что

$$\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}=(I-Q_h)\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}+\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}.$$

Тогда оценка второго слагаемого в левой части (3.6) следует из оценки

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\tau\le$$

$$2\sum_{k=1}^{N}\Big\|(Q_h-I)\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big\|_V^2\tau+2\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\tau.$$

Для первого слагаемого в левой части (3.6) получим

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\le 2\max_{1\le k\le N}\Big\|(Q_h-I)\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big\|_H^2+$$

$$2\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\le\max_{0\le t\le T}\|(Q_h-I)u(t)\|_H^2+2\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2.$$

Заметим здесь, что если функция $v\in L_2(0,T;V)$ и производная $v'\in L_2(0,T;V')$, то функция $v\in C([0,T],H)$ [2, гл. 3, теорема 1.1] и справедлива оценка

$$\max_{0\le t\le T}\|v(t)\|_H^2\le C(T)\int_0^T\Big(\|v(t)\|_V^2+\|v'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt. \tag{3.10}$$

Так как $(Q_h-I)u(t)\in L_2(0,T;V)$, а $(Q_h-I)u'(t)\in L_2(0,T;V')$, то

$$\max_{0\le t\le T}\|(Q_h-I)u(t)\|_H^2\le C\int_0^T\Big(\|(Q_h-I)u(t)\|_V^2+\|(Q_h-I)u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt.$$

Таким образом, оценка (3.6) установлена и для первого слагаемого в левой части (3.6). $\square$

Следствие 3.1. *Пусть $u(t)$ – гладкое решение задачи (1.2), а $(u_0^h,u_1^h,\dots,u_N^h)$ – решение задачи (3.1). Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств. Тогда при $\tau\to 0$ и $h\to 0$*

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H+$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\tau\Big)^{1/2}+$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{N}\Big\|Q_h\frac{u(t_k)-u(t_{k-1})}{\tau}-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_{V_h'}^2\tau\Big)^{1/2}\to 0. \qquad (3.11)$$

Доказательство. Заметим, что для $t\in[t_{k-1},t_k]$ выполняется $|2t-t_{k-1}-t_k|\le\tau$. Поэтому, оценивая предпоследнее слагаемое в правой части (3.6), получим

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(2t-t_{k-1}-t_k)u'(t)\,dt\Big\|_V^2\le\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k}|2t-t_{k-1}-t_k|\|u'(t)\|_V\,dt\Big)^2\le$$

$$\tau\sum_{k=1}^{N}\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(t)\|_V\,dt\Big)^2\le\tau^2\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt. \qquad (3.12)$$

Аналогично оценивается и последнее слагаемое в правой части (3.6).

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1}-2t+t_k)u''(t)\,dt\Big\|_{V'}^2\le\tau^2\int_0^T\|u''(t)\|_{V'}^2\,dt. \qquad (3.13)$$

Теперь сходимость (3.11) следует из предельной плотности подпространств $\{V_h\}$ в V и непрерывности вложений $V\subset H\subset V'$. $\square$

Из оценок (3.6), (3.12) и (3.13) видно, что сходимость приближённых решений к точному получается только с первым порядком по времени. Для получения сходимости с большим порядком по времени, вплоть до второго, будем предполагать, что точное решение более гладкое, чем в теореме 3.1.

Следствие 3.2. *Пусть $u(t)$ – гладкое решение задачи (1.2), обладающее дополнительной гладкостью $u''\in L_p(0,T;V)$, $u'''\in L_p(0,T;V')$, где $1\le p\le 2$, а $(u_0^h,u_1^h,\dots,u_N^h)$ – решение задачи (3.1). Тогда справедливы оценки*

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(2t-t_{k-1}-t_k)u'(t)\,dt\Big\|_V^2\le\frac{1}{16}\tau^{5-2/p}\Big(\int_0^T\|u''(t)\|_V^p\,dt\Big)^{2/p}, \qquad (3.14)$$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1}-2t+t_k)u''(t)\,dt\Big\|_{V'}^2\le\frac{1}{16}\tau^{5-2/p}\Big(\int_0^T\|u'''(t)\|_{V'}^p\,dt\Big)^{2/p}. \qquad (3.15)$$

Доказательство. В отличие от следствия 3.1, здесь иначе оценим последние два слагаемых в правой части (3.6).

Установим, например, (3.15). Для начала интегрированием по частям преобразуем интеграл

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2t + t_k) u''(t)\, dt = \frac{1}{4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u''(t)\, d[t^2 - (t_{k-1} - 2t + t_k)^2] =$$

$$\frac{1}{4} \int_{t_{k-1}}^{t_k} [(t_{k-1} - 2t + t_k)^2 - \tau^2] u'''(t)\, dt.$$

Поскольку $|(t_{k-1} - 2t + t_k)^2 - \tau^2| \leq \tau^2$ для $t \in [t_{k-1}, t_k]$, то

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\tau} \Big\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_{k-1} - 2t + t_k) u''(t)\, dt \Big\|_{V'}^2 \leq \frac{\tau^3}{16} \sum_{k=1}^{N} \Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'''(t)\|_{V'}\, dt \Big)^2 \leq$$

$$\frac{1}{16} \tau^{5-2/p} \sum_{k=1}^{N} \Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'''(t)\|_{V'}^p\, dt \Big)^{2/p} \leq \frac{1}{16} \tau^{5-2/p} \Big(\int_0^T \|u'''(t)\|_{V'}^p\, dt \Big)^{2/p}.$$

Аналогично доказывается и (3.14). □

Заметим, что при $p = 2$ в (3.14) и (3.15) сходимость приближённых решений, как следует из (3.6), происходит со вторым порядком по времени.

Далее покажем, что в случае, если известны аппроксимационные свойства подпространств V_h, из (3.6) можно получить скорость сходимости и по пространственным переменным.

Следствие 3.3. *Пусть $u(t)$ – гладкое решение задачи (1.2), обладающее дополнительной гладкостью $u \in L_2(0, T; E)$, а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение задачи (3.1). Пусть подпространства V_h удовлетворяют условию (2.48). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1 \leq k \leq N} \Big\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \Big\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \Big\|_V^2 \tau \leq$$

$$C \Big\{ h^2 \int_0^T \Big(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_V^2 \Big)\, dt + \tau^2 \int_0^T \Big(\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2 \Big)\, dt \Big\}. \quad (3.18)$$

Доказательство следует из (3.6), (3.13), (3.14), (3.16), (3.18) и непрерывности вложения $H \subset V'$. □

Следствие 3.4. *Пусть выполнены условия следствия 3.3. Пусть дополнительно решение $u(t)$ задачи (1.2) такое, что $u'' \in L_p(0,T;V)$, $u''' \in L_p(0,T;V')$, где $1 \le p \le 2$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2+\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\tau \le$$

$$C\Big\{h^2\int_0^T\Big(\|u(t)\|_E^2+\|u'(t)\|_V^2\Big)\,dt+\tau^4\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\tau^{5-2/p}\Big[\Big(\int_0^T\|u''(t)\|_V^p\,dt\Big)^{2/p}+\Big(\int_0^T\|u'''(t)\|_{V'}^p\,dt\Big)^{2/p}\Big]\Big\}. \tag{3.19}$$

Доказательство (3.19) проводится как и доказательство (3.18), но вместо оценок (3.12) и (3.13) следует использовать оценки (3.14) и (3.15). □

Для задачи (1.2) можно получить оценки погрешностей и в точках $t_{k-1/2}=(t_{k-1}+t_k)/2$. Заметим, что

$$u(t_{k-1/2})-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}=\Big(u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big)+$$

$$\Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big). \tag{3.20}$$

Оценки второго слагаемого в правой части (3.20) уже установлены выше. Поэтому достаточно проверить, что первое слагаемое в правой части (3.19) даёт в соответствующих условиях тот же порядок по τ.

Для получения оценки, подобной (3.19), воспользуемся представлением

$$u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1/2}}(t_{k-1}-t)u''(t)\,dt+\int_{t_{k-1/2}}^{t_k}(t-t_k)u''(t)\,dt\Big). \tag{3.21}$$

Из (3.21) при выполнении условий следствия 3.4 получим

$$\sum_{k=1}^N\Big\|u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big\|_V^2\tau\le\tau^{5-2/p}\Big(\int_0^T\|u''(t)\|_V^p\,dt\Big)^{2/p}.$$

Таким образом, в условиях следствия 3.4 справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^N\Big\|u(t_{k-1/2})-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\tau\le C\Big\{h^2\int_0^T\Big(\|u(t)\|_E^2+\|u'(t)\|_V^2\Big)\,dt+$$

$$\tau^{5-2/p}\Big[\Big(\int_0^T \|u''(t)\|_V^p\,dt\Big)^{2/p}+\Big(\int_0^T \|u'''(t)\|_{V'}^p\,dt\Big)^{2/p}\Big]+\tau^4\int_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Big\}. \quad (3.22)$$

Предположим теперь, что условия следствия 3.4 выполняются с $p = 2$. Тогда функция $u'' \in C([0,T],H)$ и, как в (3.10), выполняется оценка

$$\max_{0\le t\le T}\|u''(t)\|_H^2 \le C_1\int_0^T \Big(\|u''(t)\|_V^2+\|u'''(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt. \quad (3.23)$$

Теперь из (3.21) и (3.23) получим

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big\|_H^2 \le \tau^4\max_{0\le t\le T}\|u''(t)\|_H^2 \le$$

$$\tau^4 C_1\int_0^T \Big(\|u''(t)\|_V^2+\|u'''(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt. \quad (3.24)$$

Следствие 3.5. *Пусть выполнены условия следствия 3.3. Пусть дополнительно решение $u(t)$ задачи (1.2) такое, что $u'' \in L_2(0,T;V)$, $u''' \in L_2(0,T;V')$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|u(t_{k-1/2})-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2+\sum_{k=1}^N\Big\|u(t_{k-1/2})-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2\tau \le$$

$$C\Big\{h^2\int_0^T \Big(\|u(t)\|_E^2+\|u'(t)\|_V^2\Big)\,dt+\tau^4\int_0^T \Big(\|u'(t)\|_V^2+\|u''(t)\|_V^2+\|u'''(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt\Big\}.$$

Доказательство следует из (3.6), (3.19), (3.22) и (3.24). □

3.3. Среднеквадратичная сходимость для уравнения с симметричным оператором

Рассмотрим задачу (2.64). Будем предполагать, что исходные данные этой задачи удовлетворяют требованиям, обеспечивающим существование у задачи (2.64) слабого решения. Пусть форма $a(u,v)$ обладает свойством симметричности.

Сопоставим задаче (2.64) в пространстве V_h разностную задачу

$$\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}+A_h\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}=f_k^h \quad (k=\overline{1,N}), \quad u_0^h=u_N^h, \quad (3.25)$$

где $N \in \mathbb{N}, \tau N = T, t_k = k\tau, A_h = \overline{P_h}A, u_k^h \in V_h, f_k^h$ определим позже. В настоящем параграфе для решения задачи (1.2) и решения задачи (3.25) установим среднеквадратичную сходимость, а также порядки скорости сходимости как по временной, так и по пространственным переменным.

Отметим, что лемма 3.1 гарантирует существование у задачи (3.25) единственного решения. Как было установлено в §2.4, оператор A_h является самосопряжённым и положительно определённым и для него выполнены оценки (2.66) и (2.67) из леммы 2.5.

Как и в §2.4, определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u, v \in V | (u, v)_{V(A)} = a(u, v)\}.$$

Как и ранее, справедливы соотношение (2.68) и лемма 2.6.

Установим базовую оценку погрешности приближённого решения. Положим $f_k^h = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} f(t)\,dt$. Решение $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ задачи (3.25) будем называть приближённым решением задачи (2.64).

Теорема 3.2. *Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2.64), а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение задачи (3.25). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \le C \left\{ \int_0^T \|[I - Q_h(A)]u(t)\|_H^2\,dt + \right.$$
$$\left. \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{N} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 \right\}. \tag{3.26}$$

Доказательство. Применим к равенству (2.64) оператор $\overline{P_h}$, проинтегрируем полученное тождество по t от t_{k-1} до t_k, разделим на τ. Вычтем из (3.25) полученное соотношение и для $z_k^h = u_k^h - P_h u(t_k)$ получим:

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + A_h \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} = A_h P_h \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} A u(t)\,dt. \tag{3.27}$$

Преобразуем правую часть (3.27):

$$A_h P_h \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P_h} A u(t)\,dt =$$

$$\frac{1}{\tau}A_hP_h\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]\,dt+\frac{1}{\tau}\overline{P_h}A\int_{t_{k-1}}^{t_k}(P_h-I)u(t)\,dt=I_1+I_2.$$

Учитывая последнее равенство, умножим (3.27) на $A_h^{-1}(z_k^h+z_{k-1}^h)2^{-1}$ скалярно в H.

$$\left(\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau},A_h^{-1}\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right)+\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2=\left(I_1+I_2,A_h^{-1}\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right).\quad(3.28)$$

Преобразуем первое слагаемое в левой части (3.28).

$$\left(\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau},A_h^{-1}\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right)=\frac{1}{2\tau}\Bigg[\|A_h^{-1/2}z_k^h\|_H^2-\|A_h^{-1/2}z_{k-1}^h\|_H^2+$$

$$2i\,\mathrm{Im}(A_h^{-1/2}z_k^h,A_h^{-1/2}z_{k-1}^h)\Bigg].$$

Возьмем две вещественные части (3.28), умноженные на τ. Получим

$$\|A_h^{-1/2}z_k^h\|_H^2-\|A_h^{-1/2}z_{k-1}^h\|_H^2+2\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau=$$

$$2\,\mathrm{Re}\left(I_1+I_2,A_h^{-1}\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right)\tau.\quad(3.29)$$

Оценим слагаемые в правой части (3.29).

$$2\,\mathrm{Re}\left(A_hP_h\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]\,dt,A_h^{-1}\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right)\le$$

$$\frac{1}{\varepsilon_1\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]\,dt\right\|_H^2+\varepsilon_1\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau.\quad(3.30)$$

Воспользовавшись равенством (2.70) во втором слагаемом в правой части (3.29), получим

$$2\,\mathrm{Re}\left(\overline{P_h}A\int_{t_{k-1}}^{t_k}[P_h-Q_h(A)]u(t)\,dt,A_h^{-1}\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right)\le$$

$$\frac{1}{\varepsilon_2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[I-Q_h(A)]u(t)\|_H^2\,dt+\varepsilon_2\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau.\quad(3.31)$$

Положим в оценках (3.30) и (3.31) $\varepsilon_1=\varepsilon_2=1/2$. Тогда из равенства (3.29) и оценок (3.30) и (3.31) получим

$$\|A_h^{-1/2}z_k^h\|_H^2-\|A_h^{-1/2}z_{k-1}^h\|_H^2+\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau\le$$

$$\frac{2}{\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]\,dt\right\|_H^2+2\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|[I-Q_h(A)]u(t)\|_H^2\,dt.$$

Просуммировав последние оценки по $k=\overline{1,N}$, получим

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau\le\frac{2}{\tau}\sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]\,dt\right\|_H^2+$$

Для завершения доказательства теоремы рассмотрим оценку

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau\le$$

$$3\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau+3\sum_{k=1}^N\left\|(I-P_h)\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(t)\,dt\right]\right\|_H^2\tau+$$

$$3\sum_{k=1}^N\left\|(I-P_h)\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u(t)\,dt\right\|_H^2\tau=3\sum_{k=1}^N\left\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau+$$

$$\frac{3}{\tau}\sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right)\,dt\right\|_H^2+3\int_0^T\|(I-P_h)u(t)\|_H^2\,dt. \qquad (3.33)$$

Теперь из оценок (3.33) и (3.32) следует искомая оценка (3.26).□

Из оценки (3.26) получим оценки погрешности с порядком скорости сходимости по времени.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (2.64), такое, что $u'\in L_p(0,T;H)$, где $1\le p\le 2$. Пусть $(u_0^h,u_1^h,\ldots,u_N^h)$ – решение задачи (3.25). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau\le$$

$$C\left\{\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u'(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+\int_0^T\|[I-Q_h(A)]u(t)\|_H^2\,dt\right\}. \qquad (3.34)$$

Доказательство. Оценим первое слагаемое в правой части (3.26). Заметим, что

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]\,dt\right\|_H^2\le$$

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right\|_H^2 dt.$$

Проведем оценку подынтегрального выражения

$$\left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right\|_H^2 = \left\| \frac{1}{2} \int_t^{t_k} u'(s)\, ds - \frac{1}{2} \int_{t_{k-1}}^{t} u'(s)\, ds \right\|_H^2 \le$$

$$\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(s)\|_H \, ds \right)^2 \le \tau^{2-2/p} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(s)\|_H^p \, ds \right)^{2/p}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{N} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 \le$$

$$\tau^{3-2/p} \sum_{k=1}^{N} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(s)\|_H^p \, ds \right)^{2/p} \le \tau^{3-2/p} \left(\int_0^T \|u'(t)\|_H^p \, dt \right)^{2/p}. \qquad (3.35)$$

Теперь оценка (3.34) следует из оценок (3.26) и (3.35). □

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Пусть* $u(t)$ *– слабое решение задачи (2.64), такое, что* $u' \in L_p(0,T;V), u'' \in L_p(0,T;H)$*, где* $1 \le p \le 2$*. Пусть* $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ *– решение задачи (3.25). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \le$$

$$C \left\{ \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p \, dt \right)^{2/p} + \int_0^T \|[I - Q_h(A)]u(t)\|_H^2 \, dt \right\}. \qquad (3.36)$$

Доказательство. Оценим первое слагаемое в правой части (3.26). Воспользуемся равенством

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right) dt = \frac{1}{8} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (\tau^2 - [2t - t_{k-1} - t_k]^2) u''(t)\, dt.$$

В таком случае

$$\frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{N} \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - u(t) \right] dt \right\|_H^2 \le$$

$$\frac{1}{64\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}(\tau^2-[2t-t_{k-1}-t_k]^2)u''(t)\,dt\right\|_H^2.$$

Поскольку $|\tau^2-[2t-t_{k-1}-t_k]^2|\le\tau^2$ для $t\in[t_{k-1},t_k]$, то получим оценку

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\right]\,dt\right\|_H^2\le\frac{\tau^3}{64}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_H\,dt\right)^2\le$$

$$\frac{\tau^{5-2/p}}{64}\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}\le\frac{\tau^{5-2/p}}{64}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}. \qquad (3.37)$$

Теперь оценка (3.36) следует из (3.26) и (3.37). □

Для сходимости погрешности к нулю достаточно предположить, что задана предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$. Тогда в условиях теоремы 3.3 или теоремы 3.4 при $\tau\to0$ и $h\to0$

$$\left(\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau\right)^{1/2}\to0.$$

Оценки (3.34) и (3.36) позволяют получить оценки погрешности с порядком скорости сходимости и по пространственным переменным. Для этого в (3.34) и (3.36) необходимо оценить слагаемое $\int_0^T\|[I-Q_h(A)]u(t)\|_H^2\,dt$.

Следствие 3.6. *Пусть подпространства V_h обладают свойством (2.48), а для оператора A выполняется требование (1.21).*

Тогда в случае выполнения условий теоремы 3.3 справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau\le$$

$$M\left\{\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u'(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+h^2\int_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt\right\}. \qquad (3.38)$$

Если же выполнены условия теоремы 3.4 и решение $u(t)$ задачи (2.64) дополнительно такое, что $u\in L_2(0,T;E)$, то справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau\le$$

$$M \left\{ \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p \, dt \right)^{2/p} + h^4 \int_0^T \|u(t)\|_E^2 \, dt \right\}. \qquad (3.39)$$

Доказательство оценки (3.38) следует из оценок (3.34) и (2.77), а доказательство (3.39) – из (3.36), (2.77) и (2.48). □

Замечание 3.1. В условиях теорем 3.3 и 3.4 можно рассмотреть и оценку погрешности

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau \le 2 \sum_{k=1}^{N} \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \right\|_H^2 \tau +$$

$$2 \sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \right\|_H^2 \tau. \qquad (3.40)$$

Оценки второго слагаемого в правой части (3.40) установлены в (3.34) и (3.36). Поэтому достаточно проследить, что первое слагаемое можно оценить в аналогичных условиях с тем же порядком по τ. Например, в условиях теоремы 3.4. из представления

$$u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} =$$

$$\frac{1}{2} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_{k-1/2}} (t_{k-1} - t) u''(t) \, dt + \int_{t_{k-1/2}}^{t_k} (t - t_k) u''(t) \, dt \right)$$

следует оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| u(t_{k-1/2}) - \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} \right\|_H^2 \tau \le \tau^{5-2/p} \left(\int_0^T \|u''(t)\|_H^p \, dt \right)^{2/p}.$$

3.4. Сходимость в сильных нормах для уравнения с симметричным оператором

Пусть для задачи (2.64) выполнены условия, обеспечивающие существование гладкого решения, то есть справедлива теорема 1.2. Пусть форма $a(u, v)$ обладает свойством симметричности. Рассмотрим приближённую задачу

(3.25) из предыдущего параграфа. Проведём для данной приближённой задачи оценки погрешности в сильных нормах, из которых будет следовать сходимость с порядком скорости сходимости как по времени, так и по пространству.

Как и в предыдущем параграфе, определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u, v \in V | (u, v)_{V(A)} = a(u, v)\}.$$

Как и ранее, справедливы соотношения (2.68) и (2.70), леммы 2.6 и 2.9. Установим априорные оценки решения задачи (3.25), необходимые в дальнейшем для доказательства утверждения о погрешности приближённых решений.

Лемма 3.4. *Для решения* $(u_0^h, u_1^h, \dots, u_N^h)$ *задачи (3.25) справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 \tau \le \sum_{k=1}^{N} \|f_k^h\|_H^2 \tau. \tag{3.41}$$

Доказательство. Умножим уравнение (3.25) скалярно в H на $(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1}$:

$$\left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 + \frac{1}{2\tau}(A(u_k^h + u_{k-1}^h), u_k^h - u_{k-1}^h) = \left(f_k^h, \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right). \tag{3.42}$$

Рассмотрим второе слагаемое в (3.42):

$$\frac{1}{2\tau}\big(A(u_k^h + u_{k-1}^h), u_k^h - u_{k-1}^h\big) =$$

$$\frac{1}{2\tau}\big(a(u_k^h, u_k^h) - a(u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) + 2i \cdot \mathrm{Im} a(u_{k-1}^h, u_k^h)\big), \tag{3.43}$$

где i – мнимая единица.

Возьмём от (3.42) удвоенную вещественную часть. Учитывая (3.43), получим

$$2\left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2 + \frac{1}{\tau} a(u_k^h, u_k^h) - \frac{1}{\tau} a(u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) = 2\mathrm{Re}\left(f_k^h, \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right).$$

Оценим правую часть последнего равенства:

$$2\mathrm{Re}\left(f_k^h, \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right) \le \|f_k^h\|_H^2 + \left\| \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_H^2.$$

Тогда

$$\left\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2 + \frac{1}{\tau}a(u_k^h, u_k^h) - \frac{1}{\tau}a(u_{k-1}^h, u_{k-1}^h) \leq \|f_k^h\|_H^2.$$

Умножим на τ и просуммируем последние неравенства по $k = \overline{1, N}$. Учитывая периодическое условие, получим необходимую оценку (3.41). □

Лемма 3.5. *Для решения* $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ *задачи (3.25) справедлива оценка*

$$\max_{1 \leq k \leq N}\left\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2 \leq C\sum_{k=1}^N \|f_k^h\|_H^2. \tag{3.44}$$

Доказательство. По решению $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ задачи (3.25) определим элемент $u_{-1}^h = u_{N-1}^h$. Положим $v_k^h = (u_k^h + u_{k-1}^h)2^{-1}$ для $k = \overline{1, N}$, соответственно получим $v_0^h = (u_0^h + u_{-1}^h)2^{-1} = (u_N^h + u_{N-1}^h)2^{-1} = v_N^h$. К элементам v_k^h применим оценку (2.84).

$$\max_{1 \leq k \leq N}\left\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2 \leq C\Bigg\{\sum_{k=1}^N\Big(\left\|A_h\frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2}\right\|_H^2 + \left\|A_h\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\Big)\tau +$$

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\Big(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} - \frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2}\Big)\right\|_H^2\tau\Bigg\}. \tag{3.45}$$

Так как $(u_0^h + u_{-1}^h)2^{-1} = (u_N^h + u_{N-1}^h)2^{-1}$, то

$$\sum_{k=1}^N\left\|A_h\frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2}\right\|_H^2\tau = \sum_{k=1}^N\left\|A_h\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau.$$

Из (3.25) следует, что

$$\left\|A_h\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\right\|_H^2\tau \leq 2\|f_k^h\|_H^2\tau + 2\left\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

Теперь рассмотрим

$$\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\Big(\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} - \frac{u_{k-1}^h + u_{k-2}^h}{2}\Big)\right\|_H^2\tau \leq$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^N\left\|\frac{u_{k-1}^h - u_{k-2}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau.$$

Здесь $(u_0^h - u_{-1}^h)\tau^{-1} = (u_N^h - u_{N-1}^h)\tau^{-1}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_{k-1}^h - u_{k-2}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau = \sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau.$$

В результате из (3.45) получается оценка

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2 \le C\Big\{\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_H^2\tau + \sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau\Big\}.$$

Оценка (3.44) следует теперь из (3.41). □

Положим далее $f_k^h = \overline{P_h}[f(t_k) + f(t_{k-1})]2^{-1}$. Решение $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ задачи (3.25) будем называть приближённым решением задачи (2.64).

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия настоящего параграфа. Пусть $u(t)$ – решение задачи (2.64), а $(u_0^h, u_1^h, \ldots, u_N^h)$ – решение задачи (3.25). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau \le$$

$$C\Big\{\max_{0\le t\le T}\|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 + \int_0^T \|[I - Q_h(A)]u'(t)\|_H^2\,dt +$$

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h\left(\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} - u'(t)\right)\,dt\Big\|_H^2\Big\}. \tag{3.46}$$

Доказательство. Обозначим $z_k^h = Q_h(A)u(t_k) - u_k^h$. Из (2.64) и (3.25) получим

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + A_h\frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} =$$
$$A_hQ_h(A)\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} + Q_h(A)\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau} - f_k^h. \tag{3.47}$$

Из уравнений (2.64) и задания f_k^h следует

$$f_k^h = \frac{1}{2}P_h[u'(t_k) + u'(t_{k-1})] + \frac{1}{2}\overline{P_h}A[u(t_k) + u(t_{k-1})].$$

Воспользуемся равенством (2.70). Тогда (3.47) преобразуется к виду

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P_h}A\frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} = Q_h(A)\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau} - P_h\frac{u'(t_k) + u'(t_{k-1})}{2} =$$

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)\,dt. \qquad (3.48)$$

Применим к соотношению (3.48) оценки (3.41) и (3.44).

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2+\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau\le C\Big\{\int_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2dt+$$

$$\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\Big\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\Big(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\Big)\,dt\Big\|_H^2\Big\}. \qquad (3.49)$$

Заметим, что

$$\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}=[I-Q_h(A)]\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}+\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2};$$

$$\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}=\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}+\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt.$$

Тогда, воспользовавшись (2.103), имеем

$$\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2+\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau\le$$

$$2\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2+2\max_{1\le k\le N}\Big\|[I-Q_h(A)]\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big\|_V^2+$$

$$2\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau+2\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[I-Q_h(A)]u'(t)\,dt\Big\|_H^2\tau\le$$

$$2\max_{1\le k\le N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_V^2+2\max_{0\le t\le T}\|[I-Q_h(A)]u(t)\|_V^2+2\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{z_k^h-z_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau+$$

$$\int_0^T\|[I-Q_h(A)]u'(t)\|_H^2dt.$$

Из последнего неравенства с учётом (2.69) и (3.49) следует оценка (3.46).□

Проведём оценки погрешности, следующие из (3.46), с порядком сходимости по времени и по пространству.

Следствие 3.7. *Пусть выполнены условия теоремы 3.5 и условие (1.21). Пусть решение $u(t)$ задачи (2.64) такое, что $u\in C([0,T],E)$. Пусть подпространства V_h обладают свойством (2.48).*

Тогда в случае, если $u'' \in L_p(0,T;H)$, где $1 \le p \le 2$, справедлива оценка

$$\max_{1\le k\le N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau+$$

$$\sum_{k=1}^N\left\|u'(t_k)-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\le C\left\{\tau^{3-2/p}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+\right.$$

$$\left.h^2\left(\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_E^2\right)\right\}. \tag{3.50}$$

Если же решение $u(t)$ задачи (2.64) таково, что $u''' \in L_p(0,T;H)$, где $1 \le p \le 2$, то справедлива оценка

$$\max_{1\le k\le N}\left\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\right\|_V^2+\sum_{k=1}^N\left\|\frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_H^2\tau\le$$

$$C\left\{\tau^{5-2/p}\left(\int_0^T\|u'''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}+h^2\left(\int_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\max_{0\le t\le T}\|u(t)\|_E^2\right)\right\}. \tag{3.51}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством (3.9):

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)\,dt=\frac{1}{2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}(2t-t_{k-1}-t_k)u''(t)\,dt.$$

Из оценки $|2t-t_{k-1}-t_k|\le\tau$ для $t\in[t_{k-1},t_k]$ получим

$$\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)\,dt\right\|_H^2\le$$

$$\frac{\tau^{3-2/p}}{4}\left(\int_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p}. \tag{3.52}$$

Обоснование оценки третьего слагаемого в левой части (3.50) проводится, как в теореме 2.10, в силу оценок (2.104) и (2.105).

Теперь (3.50) следует из (3.46) с учетом (2.48), (3.52) и (2.77).

Из равенства, полученного из (3.9) путем интегрирования по частям:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)\,dt=\frac{1}{8}\int_{t_{k-1}}^{t_k}[\tau^2-(2t-t_{k-1}-t_k)^2]u'''(t)\,dt$$

и оценки $|\tau^2-(2t-t_{k-1}-t_k)^2|\le\tau^2$ для $t\in[t_{k-1},t_k]$ получим

$$\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\left\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}P_h\left(\frac{u'(t_k)+u'(t_{k-1})}{2}-u'(t)\right)\,dt\right\|_H^2\le\frac{\tau^{5-2/p}}{64}\left(\int_0^T\|u'''(t)\|_H^p\,dt\right)^{2/p},$$

что вместе с оценками (2.48) и (2.77) доказывает неравенство (3.51). □

Заметим, что из оценок (3.50) и (3.51) следует сходимость в сильных нормах погрешности приближённых решений задачи (2.64) к нулю при $\tau \to 0$ и $h \to 0$, причем из оценки (3.51) при $p = 2$ получается сходимость приближённых решений к точному со вторым порядком по τ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе для задач параболического типа с периодическим условием на решение построена теория проекционно-разностного метода решения. При этом по времени используется как неявная схема Эйлера, так и схема Кранка-Николсон. Для каждой из указанных схем доказаны энергетическая, среднеквадратичная сходимость, а также сходимость в более сильных нормах. Кроме того, получены эффективные оценки скорости сходимости приближённых решений, точные по порядку аппроксимации как по времени, так и по пространству.

Результаты, касающиеся сходимости проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени, опубликованы в работах [56], [66], [69]. Вопросы сходимости проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон по времени освещены в работах [63], [64].

Кроме результатов о сходимости проекционно-разностного метода, в диссертации приводятся вспомогательные теоремы о разрешимости, утверждения которых обосновывают корректность условий, накладываемых в теоремах о сходимости. Данные результаты о разрешимости рассматриваемой параболической задачи опубликованы в [59].

Результаты, полученные в диссертации, позволяют рассматривать, помимо уравнений с периодическим условием, также уравнения вида

$$(u'(t), v) + a(t, u(t), v) = (f(t), v) \qquad u(0) - u(T) = \bar{u}, \tag{4.1}$$

где $v \in V$ – произвольный элемент, $\bar{u} \in V$.

Естественным продолжением исследований данной диссертационной работы может служить рассмотрение параболической задачи с интегральным условием :

$$\int_0^T p(t)u'(t)\,dt = \overline{u}, \tag{4.2}$$

которое при $p(t) \equiv 1$ приводит к задаче (4.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес.. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

[2] Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 415 с.

[3] Дюво, Г. Неравенства в механике и физике / Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

[4] Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. — М.: Мир, 1972. — 588 с.

[5] Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

[6] Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М.: Мир, 1981. — 408 с.

[7] Fujie, Y. On some parabolic equations of evolution in Hilbert space / Y. Fujie, H. Tanabe // Osaka Journal of Mathematics. — 1973. — №10(1). — P. 115 — 130

[8] Ханалыев, А. Р. О коэрцитивной разрешимости параболических уравнений с переменным оператором / А. Р. Ханалыев// Современная математика. Фундаментальные направления. — 2016. — Т.61. — С. 164 — 181.

[9] Скубачевский, А. Л. Неклассические краевые задачи. I / А. Л. Скубачевский // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Т.26. — С. 3 — 132.

[10] Скубачевский, А. Л. Неклассические краевые задачи. II / А. Л. Скубачевский // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — Т.33. — С. 3 — 179.

[11] Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева.. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

[12] Бабушка, И. Численные процессы решения дифференциальных уравнений / И. Бабушка, Э. Витасек, М. Прагер. — М.: Мир, 1969. — 368 с.

[13] Babushka, I. Servey lectures on the mathematical foundations of the FFM / I. Babushka, A. K. Aziz // The mathematical foundations of the FFM with applications to partial differential equations. — N.-Y.-London: Academic Press, 1972. — 359 p.

[14] Варга, Р. Функциональный анализ и теория аппроксимаций в численном анализе / Р. Варга. — М.: Мир, 1974. — 128 с.

[15] Стренг, Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М.: Мир, 1977. — 352 с.

[16] Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

[17] Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. — М.: Наука, 1989. — 608 с.

[18] Митчелл, Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уайт. — М.: Мир, 1981. — 216 с.

[19] Флетчер, К. Численные методы на основе метода Галёркина / К. Флетчер. — М.: Мир, 1988. — 352 с.

[20] Лаевский, Ю. М. Проекционно-сеточные методы решения двумерных параболических уравнений / Ю. М. Лаевский. — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987. — 139 с.

[21] Thomee, V. Galerkin finite element methods for parabolic problems / V. Thomee. — Berlin: Springer-Verlag, 1984. — 235 p.

[22] Ильин, В. П. Методы и технологии конечных элементов / В. П. Ильин. — Новосибирск: ИВМИМГ, 2007. — 370 с.

[23] Бате, К.-Ю. Методы конечных элементов / К.-Ю. Бате. — М.: Физматлит, 2010. — 1022 с.

[24] Ashyralyev, A. New Difference Schemes for Partial Differential Equations / A. Ashyralyev, P. E. Sobolevskii. – Birkhaüser Verlag: Basel, Boston, Berlin, 2004. — 445 p.

[25] Обэн, Ж.-П. Приближённое решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М.:Мир, 1977. — 384 с.

[26] Оганесян, Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. — Ереван, 1979. — 236 с.

[27] Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. — М.: Мир, 1980. — 512 с.

[28] Смагин, В. В. Оценки скорости сходимости проекционно-сеточного метода приближённого решения системы Навье-Стокса / В. В. Смагин, П. Е. Соболевский // Докл. АН Укр. ССР. Сер. А. — 1968. — №10. — С. 18 — 20.

[29] Соболевский, П. Е. Теорема о смешанных производных и оценка скорости сходимости метода Эйлера-Галёркина для параболических уравнений

/ П. Е. Соболевский // Нелинейные краевые задачи. Институт математики АН Укр. ССР. Киев. — 1989. — №1. — С. 97 — 102.

[30] Поборчий, С. В. О скорости сходимости проекционно-разностного метода решения абстрактного параболического уравнения в случае нестационарного оператора / С. В. Поборчий // Вестник Ленинградского университета — 1973. — №13. — С. 69 — 73.

[31] Злотник, А. А. Оценки скорости сходимости в L_2 проекционно-разностных схем для параболических уравнений / А. А. Злотник // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1978. — Т. 18, — №6. — С. 1454 — 1465.

[32] Злотник, А. А. Оценка скорости сходимости в $V_2(Q_T)$ проекционно-разностных схем для параболических уравнений / А. А. Злотник // Вестник МГУ. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 1980. — №1. — С. 27 — 35.

[33] Виноградова, П. В. Об одном численном методе решения задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения / П. В. Виноградова // Сибирский журнал индустриальной математики — 2010. — Т.13. — №1(41). — С. 34 — 45.

[34] Смагин, В. В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т.188, — №3. — С.143 — 160.

[35] Смагин, В. В. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Журн. вычислит. математ. и математ. физики. — 2000. — Т.40, №6. — С.908 — 919.

[36] Смагин, В. В. Оценки в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений с модифицированной схемой Кранка-Николсон / В. В. Смагин // Матем. заметки. — 2003. — Т.74, №6. — С.913 – 923.

[37] Смагин, В. В. Проекционно-разностные методы приближённого решения параболических уравнений с несимметричными операторами / В. В. Смагин // Дифференц. ур-ния. 2001. Т. 37, № 1. С. 115 – 123.

[38] Смагин, В. В. Проекционно-разностный метод со схемой Кранка-Николсон по времени приближённого решения параболического уравнения с интегральным условием на решение / В. В. Смагин // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т.51, №1. — С.116 – 126.

[39] Смагин, В. В. Сходимость метода Галеркина приближённого решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / В. В. Смагин // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. — 2013. — №1. — С.222 — 231.

[40] Соболевский, П. Е. Теорема о смешанных производных и оценка скорости сходимости метода Галёркина для параболических уравнений / П. Е. Соболевский // ДАН Укр. ССР. Сер. А — 1987. — №8. — С.12 — 16.

[41] Тихонов, И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений / И. В. Тихонов // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — Т.67. — №2. — С. 133 — 166.

[42] Иванов, В. К. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи / В. К. Иванов, И. В. Мельникова, А. И. Филинков. — М.: Наука, 1995. — 176 с.

[43] Эйдельман, Ю. С. Двухточечная краевая задача для дифференциального уравнения с параметром / Ю. С. Эйдельман // Докл. АН Укр. ССР. Сер. А. — 1983. — №4. — С. 15 — 18.

[44] Ханалыев, А. Р. О коэрцитивной разрешимости нелокальных краевых задач для параболических уравнений / А. Р. Ханалыев // Труды МФТИ. Информатика, вычислительная техника и управление. — 2016. — Т.8. — №3. — С. 98 — 108.

[45] Россовский, Л. Е. Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений / Л. Е. Россовский, А. Р. Ханалыев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2016. — Т.62. — С. 140 — 151.

[46] Ashyralyev, A. Coercive solvability of the nonlocal boundary value problem for parabolic differential equation / A. Ashyralyev, A. Hanalyev, P. E. Sobolevskii // Abstract and Applied Analysis. — 2001. — V.6. — №1. — P. 53 — 61.

[47] Ashyralyev, A. Coercive solvability of parabolic differential equations with dependent operators / A. Ashyralyev, A. Hanalyev // TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics. — 2012. — V.2. — №1. — P. 75 — 93.

[48] Джамалов, С. З. Об одной нелокальной краевой задаче с постоянными коэффициентами для уравнения смешанного типа второго рода второго порядка в прямоугольнике / С. З. Джамалов // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т.19. — №4. — С. 12 — 22.

[49] Шелухин, В. В. Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений / В. В. Шелухин // Сибирский математический журнал. — 1993. — Т. 34. — №2. — С. 191 — 207.

[50] Casanova, J.-J. Existence of time-periodic solutions to a fluid-structure system / J.-J. Casanova // Discrete & Continious Dinamical Systems. — 2019. — 39 (6) — P. 3291 — 3313.

[51] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

[52] Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М.А.Красносельский, П.П.Забрейко, Е.И.Пустыльник и др. — М.: Наука, 1966. — 500 с.

[53] Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

[54] Като, К. Теория возмущения линейных операторов / К. Като. — М.: Мир, 1972. - 740 с.

[55] Вайникко, Г. М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя// Дифференц. уравнения. — 1975. — Т.11. — №7. — С.1269 — 1277.

[56] Бондарев, А. С. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев, В. В. Смагин // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. — Воронеж, 2014. — №2. — С.81 — 94.

[57] Бондарев, А. С. Параболическое уравнение с периодическим условием на решение и проекционно-разностный метод его приближённого решения / А. С. Бондарев // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно-практической конференции. — №4, часть 2. — 2014. — С.69 — 72.

[58] Бондарев, А. С. Проекционно-разностный метод решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2014"/ под ред. В.А.Костина. — Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". — 2014. — С.62 — 65.

[59] Бондарев, А. С. Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. — Воронеж, 2015. — №4. — С.78 — 88.

[60] Бондарев, А. С. Среднеквадратичная сходимость проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна – 2016"/ под ред. В.А.Костина. — Воронеж: Издательско-полиграфический центр "Научная книга". — 2016. — С.94 — 97.

[61] Бондарев, А. С. О проекционно-разностном методе решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов, Суздаль, 8-12 июля 2016 г. — Суздаль, 2016. — С.30 — 31.

[62] Бондарев, А. С. Приближённое решение параболического уравнения с периодическим условием на решение проекционно-разностным методом / А. С. Бондарев // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы молодежной международной научной конференции "Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения". — Воронеж, 2016. — Вып. 5, ч. 1. — С.64 — 66.

[63] Бондарев, А. С. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон по времени для параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия Математика. Физика. — Белгород, 2017. — Вып. 46, №6(255). — С.72 — 80.

[64] Бондарев, А. С. Решение вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение проекционо-разностным методом со схемой Кранка-Николсон по времени / А. С. Бондарев, В. В. Смагин // Сибирский математический журнал. — Новосибирск, 2017. — Т. 58, №4. — С.761 — 770. (Англ. версия: Bondarev. A. S. Solving a Variational Parabolic Equation with the Periodic Condition by a Projection-Difference Method with the Crank-Nicolson Scheme in Time / A. S. Bondarev, V. V. Smagin // Siberian Mathematical Journal. — Новосибирск, 2017. — Vol. 58, №4. — С.591 — 599.)

[65] Бондарев, А. С. О сходимости проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон по времени для параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017): сборник материалов международной конференции. — Симферополь, 2017. — С.33 — 36.

[66] Бондарев, А. С. Оценки в сильных нормах проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Вестник ВГУ. Серия Физика. Математика. — Воронеж, 2018. — №2. — С.129 — 139.

[67] Бондарев, А. С. Сходимость в сильных нормах погрешности проекционно-разностного метода решения параболического уравнения с периодическим

условием на решение / А. С. Бондарев // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. — Тамбов, 2018. — Т. 23, №124. — С.617 — 623.

[68] Бондарев, А. С. Приближённое решение проекционно-разностным методом со схемой Кранка-Николсон по времени параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского: материалы 17-ой молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения-2018" (Казань, 23-28 ноября 2018 г.). — Казань, 2018. — Т. 56. — С.69 — 73.

[69] Бондарев, А. С. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с периодическим условием на решение / А. С. Бондарев // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — Москва, 2020. — Т. 175. — С. 118—123.