На правах рукописи

ПЕТРОВА АНАСТАСИЯ АЛЕКСАНДРОВНА

Разрешимость и приближенное решение параболического уравнения с интегральным условием на решение

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Воронеж 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Воронежский государственный университет»

Научный руководитель: **Смагин Виктор Васильевич**
д.ф.-м.н., профессор

Официальные оппоненты: **Демьянович Юрий Казимирович**
д.ф.-м.н., профессор, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», заведующий кафедрой параллельных алгоритмов

Пастухова Светлана Евгеньевна
д.ф.-м.н., профессор, ФГБОУ ВО «МИРЭА - Российский технологический университет», профессор кафедры высшей математики и программирования

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»

Защита состоится 26 мая 2022 года в 16:00 на заседании диссертационного совета Д.212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» по адресу 603022, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, корп. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского» и на официальном сайте https://diss.unn.ru.

Автореферат разослан 2022 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.212.166.20,
к.ф.-м.н. Бирюков Руслан Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. При приближённом решении параболических уравнений весьма эффективны проекционные и проекционно-разностные методы. Параболические начально-краевые задачи при этом удобно рассматривать в вариационной постановке. Такой подход к изучению параболических задач использовали в своих монографиях, например, Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Р. Темам, Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас.

В настоящей диссертационной работе рассматривается абстрактное линейное параболическое уравнение в вариационной постановке с весовым интегральным условием на решение. Изучаются вопросы разрешимости представленной задачи, найдены условия, позволяющие повысить гладкость её решения. Также исследуются два метода приближённого решения изучаемой задачи: проекционный метод Галёркина, сводящий задачу к конечной линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, и проекционно-разностный метод с неявной схемой Эйлера по времени, который сводит задачу к конечной системе линейных алгебраических уравнений.

Вопросы разрешимости и приближённого решения хорошо изучены для параболических задач с начальным условием по времени. Рассмотрению проекционных и проекционно-разностных приближённых методов решений для этих задач посвящены работы Г.И. Марчука, В.И. Агошкова, Г.М. Вайникко, Ю.К. Демьяновича, С.В. Поборчего, П.Е. Соболевского. Из работ, использующих для изучения данных вопросов вариационную постановку параболического уравнения, выделим работы В.В. Смагина.

Параболические уравнения с нелокальными, в частности, с интегральными, условиями изучены значительно хуже. Среди работ по данной тематике стоит отметить работы И.В. Тихонова, В.Е. Фёдорова, Н.Д. Ивановой, Ю.Ю. Фёдоровой, А.И. Кожанова, Ю.Т. Сильченко. В указанных работах, как правило, разрешимость рассматриваемых задач устанавливается с использованием теории полугрупп операторов, при этом от неоднородности в уравнении требуется достаточно высокая гладкость. Выделим также работы В.В. Шелухина и Нгуен Тьюнг Хуен, в которых для доказательства разрешимости задачи рассматриваются в вариационной форме.

Отметим, что в работах В.В. Шелухина приводится пример нестационарного уравнения Стокса с интегральным условием на решение, описывающего движение вязкой несжимаемой однородной жидкости. Это уравнение с нелокальным условием также используется автором в модели для изучения распространения радионуклидов в стоксовых жидкостях.

Целью работы является получение новых результатов о разрешимости абстрактного линейного параболического уравнения в вариационной форме с весовым интегральным условием на решение и исследование сходимости приближённых методов его решения: проекционного метода Галёркина и проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени, а также получение оценок скорости сходимости приближённых решений к точному для этих методов. Причём оценки скорости сходимости должны быть точными по порядку аппроксимации по пространственной переменной, а для проекционно-разностного метода – и по временной переменной.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертационной работе, для параболических уравнений в вариационной постановке с весовым интегральным условием на решение являются новыми. Получены новые результаты о разрешимости и гладкости решения задачи. Исследована сходимость проекционного метода Галёркина и проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени для случаев различной гладкости решения задачи. В каждом из случаев, при наделении проекционных подпространств необходимыми аппроксимационными свойствами, получены также порядки скорости сходимости приближённых решений к точному.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер. Но имеют и практическую значимость при приближённом решении уравнений в частных производных.

Методология и методы исследования. В данной работе параболическое уравнение рассматривается в вариационной постановке, поскольку такой подход весьма удобен для изучения рассматриваемых приближённых методов решения.

Разрешимость задачи устанавливается с помощью метода Галёркина: сначала устанавливаются необходимые априорные оценки приближённых решений, после чего даётся обоснование соответствующего слабого предельного перехода.

Получению результатов о сходимости предшествует получение соответствующих базовых оценок погрешности, в которых приближённое решение сравнивается с проекцией точного решения в соответствующем гильбертовом пространстве на проекционное подпространство. Для доказательства сходимости приближённых решений к точному рассматривается предельно плотная в соответствующем пространстве последовательность конечномерных подпространств, а для установления оценок с порядками скорости сходимости дополнительно требуется выполнение некоторых аппроксимационных свойств для этих подпространств.

Отметим, что в данной работе, кроме методов исследования дифференциальных уравнений, существенно применяются методы функционального анализа.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Теоремы о слабой, обобщённой и гладкой разрешимости для параболического уравнения в вариационной постановке с весовым интегральным условием на решение.

2. Результаты о сходимости приближённых решений абстрактного параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение, найденных полудискретным методом Галёркина, к точному решению в различных нормах.

Оценки скорости сходимости данного метода, зависящие как от гладкости решения, так и от аппроксимационных свойств проекционных подпространств.

3. Результаты о сходимости приближённых решений абстрактного параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение, найденных проекционно-разностным методом с неявной схемой Эйлера по времени, к точному решению в различных нормах. Оценки скорости сходимости данного метода, зависящие как от гладкости решения, так и от аппроксимационных свойств проекционных подпространств.

Достоверность результатов обеспечивается чёткой постановкой задачи, строгостью математических доказательств и корректностью применения теорем и методов дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались и обсуждались на «Воронежских зимних математических школах», конференции «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях» (Воронеж, 2014 г.), «Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам» (Суздаль, 2016), международной научной конференции «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения» (Воронеж, 2016), «Двадцать восьмой Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017)» (г. Симферополь), международной конференции «Колмогоровские чтения-VII. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2018)» (г. Тамбов), 17-ой молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения - 2018» (г. Казань), на ежегодных научных сессиях Воронежского государственного университета, на семинаре под руководством профессора А.Г.Баскакова в Воронежском государственном университете, на семинаре «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ» под руководством проф. А.В. Калинина при кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа «Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского», на семинаре научно-образовательного математического центра "Математика технологий будущего"на базе Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И.Лобачевского.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ, 5 из которых — в журналах, рекомендованных ВАК ([1], [4], [5], [10], [13]). В совместных работах [1] и [5] постановка задачи принадлежит научному руководителю В.В. Смагину, основные же доказательства получены автором самостоятельно.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 84 наименования источников. Общий объём работы – 114 страниц.

Содержание работы

Во **введении** даётся общая характеристика поставленной задачи, производится краткий обзор литературы по рассматриваемой тематике, вводятся необходимые обозначения, а также приводится аннотация работы.

В **первой главе**, состоящей из трёх параграфов, приводится постановка изучаемой задачи и рассматриваются вопросы её разрешимости.

Пусть задана тройка вложенных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' – двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u, v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что выполняется соотношение $a(u, v) = (Au,\, v)$. Здесь под выражением типа $(z,\, v)$ понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе

$v \in V$. Для $z \in H$ выражение $(z,\, v)$, в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H. Из определения оператора A следует оценка $\|A\|_{V \to V'} \leqslant M$.

В пространстве V' на $[0, T]$ рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \int_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}\,. \tag{2}$$

В (2) на $[0, T]$ заданы функция $t \to f(t) \in V'$ и функция $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$, а также элемент $\overline{u}$. Производные функций в настоящей работе понимаются в обобщённом смысле.

Задачу (2) можно рассматривать также в вариационной форме:

$$(u'(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v), \qquad \int_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}$$

для любого $v \in V$.

В **параграфе 1.1** доказана теорема о слабой разрешимости задачи (2).

Теорема 1.1. *Пусть в задаче (2) выполнены условия (1). Пусть также функция $f \in L_1(0, T; H) \cap L_2(0, T; V')$, а функция $p(t)$ является абсолютно непрерывной на $[0, T]$, невозрастающей и принимает положительные значения на $[0, T]$. Предположим, что $\overline{u} \in D(A) = \{v \in V | Av \in H\}$. Тогда существует единственная функция $u(t)$, такая что $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u' \in L_2(0, T; V')$, удовлетворяющая в (2) уравнению почти всюду на $[0, T]$ и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T \Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt \leqslant$$

$$C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int_0^T \|f(t)\|_H\,dt\Big)^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}.$$

Решение задачи (2), существование которого обусловлено теоремой 1.1, будем называть *слабым.*

В **параграфе 1.2** для получения более гладкого решения задачи (2) накладываются дополнительные условия на исходные данные: $f' \in L_2(0, T; V')$,

$f(0) \in H$ и $Af \in L_1(0,T;H)$, а элемент $\overline{u} \in D(A^2)$. В этом случае задача будет иметь так называемое *гладкое* решение $u(t)$, то есть такое что $u' \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T],H)$, а $u'' \in L_2(0,T;V')$.

Другим предположением, позволяющим увеличить гладкость решения задачи (2), полученную в теореме 1.1, является симметричность формы $a(u,v)$, означающая, что для всех $u, v \in V$ $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$ (черта над комплексным числом обозначает переход к сопряжённому числу). В этом случае при условии, что функция $f \in L_1(0,T;V) \bigcap L_2(0,T;H)$, а элемент $\overline{u} \in V$, такой что $A\overline{u} \in V$, задача (2) имеет решение $u(t)$ такое, что $u \in C([0,T],V)$, а u', $Au \in L_2(0,T;H)$, называемое *обобщённым.* Этот результат получен в **параграфе 1.3**.

Во **второй главе**, состоящей из четырёх параграфов, изучается сходимость полудискретного метода Галёркина.

Для построения приближённой задачи рассмотрим произвольное конечномерное подпространство V_h (h – положительный параметр) пространства V, а также определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму

$$\|u_h\|_{V_h'} = \sup_{v_h \in V_h,\, \|v_h\|_V = 1} |(u_h, v_h)| \,.$$

Обозначим через P_h оператор ортогонального проектирования в пространстве H на V_h, а через $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ – его расширение по непрерывности.

Введём в рассмотрение также проектор Ритца: оператор $R_h : V \to V_h$, действующий по правилу $R_h u = u_h$, где $u \in V$, а u_h – такой элемент пространства V_h, что для любых $v_h \in V_h$ выполняется равенство $a(u_h, v_h) = a(u, v_h)$. Существование и единственность такого элемента $u_h \in V_h$ для всякого элемента $u \in V$ следует из теоремы Лакса-Мильграма.

Опишем теперь для задачи (2) приближённую в пространстве V_h задачу.

Определенную на $[0,T]$ функцию $t \to u_h(t) \in V_h$ назовем приближённым решением задачи (2), найденным полудискретным методом Галёркина, если

$$u_h'(t) + A_h u_h(t) = P_h f(t), \qquad \int_0^T p(t) u_h(t)\, dt = \overline{u}_h. \tag{3}$$

В (3) оператор $A_h = \overline{P}_h A : V_h \to V_h$, а $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$. Задача (3) сводится к конечной линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным условием на решение.

Для получения результатов о сходимости метода Галёркина предполагается, что в V задана предельно плотная последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$, то есть такая что $\|(I - Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$.

Параграф 2.1 посвящён исследованию сходимости метода Галёркина для слабо разрешимого уравнения (2) в случае равномерной по h ограниченности норм $\|P_h\|_{V\to V}$. Доказано, что при $h \to 0$

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_V^2\, dt + \int_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2\, dt \to 0. \quad (4)$$

Отметим, что условие равномерной ограниченности норм $\|P_h\|_{V\to V}$ для подпространств V_h будет выполнено, например, если для них выполняются типичные для метода конечных элементов условия

$$\|(I - Q_h)v\|_H \leqslant rh\|v\|_V \quad (v \in V), \quad \|v_h\|_V \leqslant r_1 h^{-1}\|v_h\|_H \quad (v_h \in V_h). \quad (5)$$

В (4) Q_h — ортопроектор в пространстве V на V_h, а r и r_1 – константы, не зависящие от $v \in V$, $v_h \in V_h$ и $h > 0$.

Для получения порядка скорости сходимости по пространственным переменным подпространства V_h следует наделить некоторыми аппроксимационными свойствами.

Предположим, что существует гильбертово пространство $E \subset V$ такое, что пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$.

Пусть также, что подпространства $V_h \subset V$ удовлетворяют типичному для подпространств типа конечных элементов условию:

$$\|(I - Q_h)v\|_V \leqslant rh\|v\|_E \qquad (v \in E). \quad (6)$$

Отметим, что из условия (6) следует выполнение и первого неравенства в (5).

При выполнении второго условия в (5) и условия (6), а также условия $u \in L_2(0,T;E)$, получаем оценку скорости сходимости

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_V^2\,dt \leqslant Kh^2 \int_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt\,,$$

а дополнительно предположив, что $u' \in L_2(0,T;H)$, — и оценку

$$\max_{0\leq t\leqslant T} \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2\,dt \leq Kh^2 \int_0^T \Big(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\Big)\,dt\,,$$

В **параграфе 2.2** показано, что если решение $u(t)$ задачи (2) обладает большей гладкостью: $u'(t) \in L_2(0,T;V)$, то сходимость к нулю при $h \to 0$ первых двух слагаемых в (4) получается и при отсутствии требования равномерной по h ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$.

В случае, если оператор A порождён симметричной формой, без дополнительных условий на гладкость решения задачи (2), для всякой предельно плотной в V последовательности подпространств $\{V_h\}$, при $h \to 0$ получаем среднеквадратичную сходимость:

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2\,dt \to 0.$$

При наделении проекционных пространств специальными аппроксимационными свойствами установлена также скорость этой сходимости. Данным результатам посвящён **параграф 2.3**.

В **параграфе 2.4** исследуется сходимость и скорость сходимости метода Галёркина для задачи (2) в сильных нормах. Здесь используются и условие симметричности формы $a(u,v)$, и дополнительная гладкость решения $u(t)$, и условие равномерной по h ограниченности норм $\|P_h\|_{V\to V}$.

Третья глава диссертации, состоящая из пяти параграфов, посвящена изучению проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени.

Пусть $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ – равномерное разбиение отрезка $[0,T]$. В подпространстве $V_h \subset V$ рассматривается для $k = \overline{1,N}$ разностная задача

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h u_k^h = f_k^h\ \ (k = \overline{1,\,N}), \qquad \sum_{k=1}^N p_k u_k^h \tau = \overline{u}_h, \tag{7}$$

где N – натуральное число, $\tau = T/N$, $t_k = k\tau$, $f_k^h = \tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t)\,dt$, $p_k = p(t_k)(k = \overline{1,N})$, $\overline{u}_h = R_h\overline{u}$, а оператор A_h определяется также, как и в задаче (3).

Прежде всего в **параграфе 3.1** доказывается, что задача (7) имеет единственное решение, а также устанавливается априорная оценка этого решения.

Далее изучается сходимость данного метода в различных нормах. Также, как и для метода Галёркина, здесь предполагается, что задана предельно плотная в V последовательность подпространств $\{V_h\}$.

В **параграфе 3.2** сначала для слабо разрешимой задачи (2) при выполнении условий (5), а также условия $\tau h^{-2} \to 0$ при $h \to 0$ доказывается следующая сходимость при $h \to 0$:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u_k^h\|_V^2\,dt +$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \to 0. \qquad (8)$$

Затем показано, что если решение задачи (2) обладает дополнительной гладкостью: $u' \in L_2(0,T;V)$, $Au \in L_2(0,T;H)$, а функция $p' \in L_2(0,T)$, то сходимость (8) получается и без условия согласования шагов разбиения по временной и пространственной переменным, то есть при $\tau \to 0$ и $h \to 0$ независимым образом. Далее при условии $u \in L_2(0,T,E)$ и предположении (6) устанавливаются оценки скорости сходимости, которые получаются точными по порядку аппроксимации как по временной, так и по пространственной переменным.

Параграф 3.3 посвящён получению результатов о сходимости и скорости сходимости проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени при отсутствии условия равномерной по h ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$.

При условии симметричности формы $a(u,v)$, порождающей оператор A, но без дополнительных условий на пространства V_h и гладкость решения в **пара-**

графе 3.4 установлена среднеквадратичная сходимость при $h \to 0$ и $\tau \to 0$:

$$\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau \to 0.$$

При наделении проекционных пространств специальными аппроксимационными свойствами установлена также скорость этой сходимости по временной и пространственной переменным.

В **параграфе 3.5** также рассматривается сходимость проекционно-разностного метода для задачи (2) в предположении симметричности формы $a(u, v)$. Но сходимость здесь получается в сильных нормах, для чего накладываются дополнительные условия и на гладкость решения, и на пространства V_h.

Список публикаций по теме диссертации

[1] Петрова, А. А. Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием / А. А. Петрова, В. В. Смагин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. – 2014. — № 4. — С. 160 – 169.

[2] Петрова, А. А. Слабая разрешимость параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2014". — 2014. — С. 248 – 251.

[3] Петрова, А. А. Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно- практической конференции. — 2014. — №4. — С. 127 – 130.

[4] Петрова, А. А. Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с симметричным оператором и весовым интегральным

условием на решение / А. А. Петрова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2015. — № 4. – С. 160 – 174.

[5] Петрова, А. А. Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова, В. В. Смагин // Известия вузов. Математика — 2016. — № 8. — С. 49 – 59. (Англ. версия: Petrova, A. A. Convergence of the Galyorkin Method of Approximate Solving Parabolic Equation with Weight Integral Condition / A. A. Petrova, V. V. Smagin // Russian Mathematics. — 2016, Vol. 60, No. 8, pp. 42 – 51.)

[6] Петрова, А. А. Гладкая разрешимость параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна - 2016". — 2016. — С. 320 – 323.

[7] Петрова, А. А. О сходимости метода Галёркина для параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. — 2016. – №5. — С. 235 – 237.

[8] Петрова, А. А. О параболических уравнения с симметричным оператором и весовым интегральным условием // А. А. Петрова / Международная конференция по дифференциальным уравнениями и динамическим системам. Тезисы докладов. — 2016, С. 160 – 162.

[9] Петрова, А. А. О сходимости и скорости сходимости метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Сборник материалов международной конференции "XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум по спектральным эволюционным задачам". — Симферополь: ДИАЙПИ, 2017. — С. 48 – 50.

[10] Петрова, А. А. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на

решение / А.А. Петрова // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 975 — 987. (Англ. версия: Petrova, A. A. Convergence of a Projection-Difference Method for the Approximate Solution of a Parabolic Equation with a Weighted Integral Condition on the Solution / A .A. Petrova // Differential Equations. - 2018, Vol. 54, No. 7, pp. 957 — 970.)

[11] Петрова, А. А. О сходимости и скорости сходимости проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки.— Тамбов, 2018. —Т. 23, № 123. — С. 517 – 523.

[12] Петрова, А. А. Проекционно-разностный метод приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского: материалы 17-ой молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения – 2018" (Казань, 23-28 ноября 2018 г.).— Казань, 2018. — Т. 56. — С. 231 – 234.

[13] Петрова, А. А. Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения гладко разрешимого параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. — Москва, 2020. — Т. 176. — С. 61 – 69.