МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ФГБОУ ВО «ВГУ»)

на правах рукописи

ПЕТРОВА АНАСТАСИЯ АЛЕКСАНДРОВНА

Разрешимость и приближенное решение параболического уравнения с интегральным условием на решение

01.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор В. В. Смагин

Воронеж 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. При приближённом решении параболических уравнений весьма эффективны проекционные и проекционно-разностные методы. Параболические начально-краевые задачи при этом удобно рассматривать в вариационной постановке. Описание такого системного подхода можно найти в [1] – [5], где обсуждаются вопросы существования решений вариационных задач.

Данная работа посвящена вопросам разрешимости и приближённого решения абстрактного линейного параболического уравнения в вариационной форме с весовым интегральным условием на решение. Получены условия слабой, обобщённой и гладкой разрешимости таких задач. Рассмотрены два метода приближённого решения: проекционный метод Галёркина и проекционно-разностный метод с неявной схемой Эйлера по времени. Для обоих методов установлена сходимость приближённых решений к точному решению исходной задачи в различных нормах, а также скорость этой сходимости, точная по порядку аппроксимации по пространственной переменной, а для проекционно-разностного метода – и по временной переменной.

Напомним, что метод Галёркина, являясь проекционным методом, сводит решение линейного параболического уравнения к решению конечной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом смысле он является полудискретным приближённым методом. А проекционно-разностный метод является методом полной дискретизации и сводит решение параболического уравнения к нахождению решения конечной линейной системы алгебраических уравнений.

Рассмотрение этих методов для параболических уравнений можно найти, например, в монографиях [6] – [19].

Вопросы разрешимости и приближённого решения проекционным и проекционно-разностным методами хорошо изучены для параболических задач с начальным условием по времени. Отметим, например, работы [20] – [35]. Из работ, изучающих задачу Коши в вариационной постановке, обратим внимание на близкие по тематике работы [36] – [44].

Параболические уравнения с нелокальными, в частности, с интегральными, условиями изучены значительно хуже. Изучению вопросов разрешимости нелокальных задач посвящены, например, работы [45] – [55]. В работах [47] – [55] рассматриваются задачи с нелокальным условием по времени, подобные изучаемой в данной работе. Как правило, в указанных работах решения соответствующих параболических задач устанавливаются с использованием теории полугрупп операторов, при этом от неоднородности в уравнении требуется достаточно высокая гладкость. В частности, в работах [50] – [52] рассматриваются однородные параболические уравнения.

Обратим также внимание на монографии [56] – [57] (а также на имеющуюся там библиографию), где изучались стационарные задачи с различными нелокальными условиями.

В вариационной постановке параболические задачи с интегральным условием, не содержащим весовую функцию, и приближённые методы решения этих задач рассматривались в [58] – [62]. В работах [63] – [64] вариационным методом устанавливается разрешимость параболической задачи со специальным интегральным условием.

Отметим, что в [63] приводится пример нестационарного уравнения Стокса с интегральным условием на решение, описывающего движение вязкой несжимаемой однородной жидкости. Обратим также внимание на работу [65], в которой уравнение Стокса с нелокальным условием используется в модели для изучения распространения радионуклидов в стоксовых жидкостях.

Целью работы является получение новых результатов о разрешимости абстрактного линейного параболического уравнения в вариационной форме с весовым интегральным условием на решение и исследование сходимости приближённых методов его решения: проекционного метода Галёркина и проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени, а также получение оценок скорости сходимости приближённых решений к точному для этих методов. Причём оценки скорости сходимости должны быть точными по порядку аппроксимации по пространственной переменной, а для проекционно-разностного метода – и по временной переменной.

Научная новизна. Результаты диссертации для параболических уравнений в вариационной постановке с весовым интегральным условием на решение являются новыми. Получены новые результаты о разрешимости и гладкости решения задачи. Исследована сходимость метода Галёркина для случаев различной гладкости решения задачи. В каждом из случаев, при наделении проекционных подпространств необходимыми аппроксимационными свойствами, установлены также порядки скорости сходимости приближённых решений к точному. Так же, как и для метода Галёркина, для проекционно-разностного метода получены различные результаты о сходимости и скорости сходимости. Отметим, что результаты о сходимости приближённых методов ориентированы на проекционные подпространства типа «конечных элементов», что весьма эффективно в приложениях.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический характер. Но имеют и практическую значимость при приближённом решении уравнений в частных производных.

Методология и методы исследования. В данной работе параболическое уравнение рассматривается в вариационной постановке, поскольку такой подход весьма удобен для изучения рассматриваемых приближённых методов решения.

Разрешимость задачи устанавливается с помощью метода Галёркина: сначала устанавливаются необходимые априорные оценки приближённых решений, после чего даётся обоснование соответствующего слабого предельного перехода.

Получению результатов о сходимости предшествует получение соответствующих базовых оценок погрешности, в которых приближённое решение сравнивается с проекцией точного решения в соответствующем гильбертовом пространстве на проекционное подпространство. Для доказательства сходимости приближённых решений к точному рассматривается предельно плотная в соответствующем пространстве последовательность конечномерных подпространств, а для установления оценок с порядками скорости сходимости дополнительно требуется выполнение некоторых аппроксимационных свойств для этих подпространств.

Отметим, что в данной работе существенно применяются методы функционального анализа (см., например, монографии, указанные выше, а также [66] – [71]).

Соответствие шифру специальности. В настоящей работе изучается разрешимость параболического уравнения с интегральным условием, а также приближённые методы его решения. Приближённые методы рассматриваются с теоретической точки зрения. Исследования направлены на обоснование условий, при которых имеет место сходимость, а также на изучение качества сходимости. Таким образом, содержание диссертации и используемые в ней методы исследования полностью соответствуют специальности 01.01.02 "Дифференциальные уравнения динамические системы и оптимальное управление".

Основные положения, выносимые на защиту

1. Теоремы о слабой, обобщённой и гладкой разрешимости для параболического уравнения в вариационной постановке с весовым интегральным условием на решение.

2. Результаты о сходимости приближённых решений к точному решению для абстрактного параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение для проекционного метода Галёркина в различных нормах. Оценки скорости сходимости данного метода, зависящие как от гладкости решения, так и от аппроксимационных свойств проекционных подпространств.

3. Результаты о сходимости приближённых решений к точному решению для абстрактного параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение проекционно-разностного метода с неявной с схемой Эйлера по времени в различных нормах. Оценки скорости сходимости данного метода, зависящие как от гладкости решения, так и от аппроксимационных свойств проекционных подпространств.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью постановки задачи и корректностью применения теорем и методов дифференциальных уравнений, функционального анализа, а также численных методов приближённого решения поставленной задачи: проекционного метода Галёркина по пространственной переменной и проекционно-разностного метода с неявной схемы Эйлера по времени.

Апробация работы. Результаты данной работы докладывались и обсуждались на «Воронежских зимних математических школах», конференции «Современные проблемы анализа динамических систем. Приложения в технике и технологиях» (Воронеж, 2014 г.), «Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам» (Суздаль, 2016), международной научной конференции «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения» (Воронеж, 2016), «Двадцать восьмой Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017)» (г. Симферополь), международной конференции «Колмогоровские чтения-VII. Общие проблемы управления и их приложения (ОПУ-2018)» (г. Тамбов), 17-ой молодежной школе-конференции «Лобачевские чтения - 2018» (г. Казань), на ежегодных научных сессиях Воронежского государственного университета, на семинаре под руководством профессора А.Г.Баскакова в Воронежском государственном университете, на семинаре «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ» под руководством проф. А.В. Калинина при кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа «Национального исследовательского Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского», на семинаре научно-образовательного математического центра "Математика технологий будущего"на базе Национального исследовательского Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 работ [72] – [84], 5 из которых — в журналах, рекомендованных ВАК ([72], [73], [78], [81], [84]). Работы [72] и [78] опубликованы в соавторстве с научным руководителем В. В. Смагиным.

Личный вклад автора. Постановка задачи, рассматриваемой в диссертации, принадлежит научному руководителю В. В. Смагину и диссертанту. Основыные результаты диссертации получены автором самостоятельно. В совместных с научным руководителем работах [72] и [78] задача была поставлена В. В. Смагиным, доказательства же получены диссертантом.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы, содержащего 84 наименования источников. Общий объём работы – 114 страниц.

Общая характеристика работы

Опишем пространства, операторы и их свойства, которые нам потребуются в дальнейшем.

Пусть X – банахово пространство. Через $L_p(0,T;X)$, где $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать пространство всех измеримых на отрезке $[0,T]$ по Бохнеру функций $t \to u(t) \in X$, таких что $\|u(t)\|_X^p$ суммируема на $[0,T]$ по Лебегу. Норму в этом пространстве определим выражением:

$$\|u(t)\|_{L_p(0,T;X)} = \left(\int\limits_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} .$$

Под $C([0,T],X)$ будем понимать пространство функций $t \to u(t) \in X$, непрерывных на $[0,T]$, с нормой

$$\|u(t)\|_{C([0,T],X)} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t)\|_X \, .$$

Обозначим через $\mathcal{D}(0,T)$ множество бесконечно дифференцируемых функций с носителем в $(0,T)$. Пусть функция $f \in L_1(0,T;X)$. Тогда на $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ определим отображение

$$f(\varphi) = \int\limits_0^T f(t)\varphi(t) \, dt \in X,$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера [1, с. 152]. Это отображение $\mathcal{D}(0,T)$ в X называется обобщённой функцией.

Обобщённой производной df/dt будем называть функцию из $\mathcal{D}(0,T)$ в X, определённую равенством

$$\frac{df}{dt}(\varphi) = -\int\limits_0^T f(t)\varphi'(t) \, dt.$$

Приведём утверждение о связи обобщённой производной и классической производной почти всюду на $[0,T]$ [5, с. 201].

Лемма 1. *Пусть X – банахово пространство, а X^* – пространство, сопряжённое к X. Пусть f, g – функции из пространства $L_1(0,T;X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(I) функция f почти всюду на $[0,T]$ равна первообразной от функции g:

$$f(t) = \xi + \int\limits_0^t g(s)\,ds, \quad \xi \in X;$$

(II) для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$

$$\int\limits_0^T f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int\limits_0^T g(t)\varphi(t)\,dt;$$

(III) для любого $\eta \in X^*$

$$\frac{d}{dt}(f,\eta) = (g,\eta)$$

в смысле скалярных обобщённых функций. Под выражением (g,η) *здесь понимается значение функционала* $\eta \in X^*$ *на элементе* $g \in X$.

Если условия (I) – (III) выполнены, то f, *в частности, почти всюду равна некоторой абсолютно непрерывной функции, действующей из* $[0,T]$ *в* X.

Перейдём теперь к описанию изучаемой в работе задачи. Пусть даны два сепарабельных гильбертовых пространства V и H, причём $V \subset H$ и вложение плотно и непрерывно. Плотность вложения означает, что для любого элемента $u \in H$ существует последовательность $\{u_n\} \subset V$, такая что $\|u_n - u\|_H \to 0$ при $n \to \infty$. Непрерывность вложения означает, что существует число $\beta_1 > 0$, такое что для любого $u \in V$ выполнено неравенство

$$\|u\|_H \leqslant \beta_1 \|u\|_V. \tag{1}$$

Пусть V' и H' — пространства, двойственные к V и H, соответственно. Тогда $H' \subset V'$ и данное вложение плотно и непрерывно. Далее по теореме Рисса проводится отождествление H и H'. Таким образом, приходим к включениям $V \subset H \equiv H' \subset V'$, где каждое пространство плотно в последующем и вложения непрерывны [14, с. 58]. Таким образом, кроме оценки (1), имеем аналогичную оценку

$$\|u\|_{V'} \leqslant \beta_2 \|u\|_H \tag{2}$$

На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u, v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{3}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$, такой что выполняется соотношение $a(u, v) = (Au,\, v)$. Здесь под выражением типа $(z,\, v)$ понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение $(z,\, v)$, в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [14, с. 58]. Из определения оператора A следует оценка $\|A\|_{V \to V'} \leq M$.

Для заданных функции $t \to f(t) \in V'$, элемента $\overline{u} \in V$ и функции $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$ рассмотрим вариационную задачу: найти функцию $u(t)$ со значениями в V, удовлетворяющую для всех $v \in V$ уравнению почти всюду на $[0, T]$ и весовому интегральному условию

$$(u'(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v), \qquad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}\,. \tag{4}$$

Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле.

Очевидно, что задача (4) равносильна задаче в пространстве V':

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}\,. \tag{5}$$

Примеры сведения параболических уравнений к вариационному виду можно найти, например, в [4, с. 114].

Для полноты восприятия приведём пример одномерной задачи, которая сводится к задаче (5):

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\Big(l(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\Big) + q(x)u(t,x) = f(t,x),\ t \in [0,T],\ x \in [a,b], \\ u(t,a) = u(t,b) = 0,\ t \in [0,T], \\ \int\limits_0^T p(t)u(t,x)\,dt = \overline{u}(x),\ x \in [a,b]. \end{cases} \tag{6}$$

Для простоты будем считать, что все функции в задаче (6) вещественнозначные.

Запишем задачу (6) в вариационной форме. Положим $H = L_2(a,b)$, $V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$. Значит, двойственное пространство $V' = W_2^{-1}(a,b)$. Зададим билинейную форму:

$$a(u,v) = \int\limits_a^b \Big(l(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + q(x)u(x)v(x)\Big)\,dx,$$

где $u, v \in V$.

Предположим, что функции $l(x)$ и $q(x)$ принадлежат пространству $L_\infty(a,b)$ и, кроме того, $l(x) \geqslant l_0 > 0\,, q(x) \geqslant q_0 > 0$ почти всюду на $[a,b]$. Тогда форма $a(u,v)$ обладает свойствами (3) и, как показано выше, порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$, имеющий вид

$$Au(x) = -\frac{d}{dx}\Big(l(x)\frac{du(x)}{dx}\Big) + q(x)u(x).$$

Считаем также, что в (6) $f(t) \in L_2(0,T; W_2^{-1}(a,b))$, а $\overline{u} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$. Задачу (6) можем теперь записать в форме (4) или (5).

В задаче (6) вместо первого краевого условия по $x \in [a,b]$ можно рассматривать и третье краевое условие, а именно

$$\frac{\partial}{\partial x}u(t,a) + \gamma u(t,a) = \frac{\partial}{\partial x}u(t,b) + \beta u(t,b) = 0, \quad t \in [0,T].$$

Считаем теперь, что $V = W_2^1(a,b)$, $H = L_2(a,b)$. Будем также предполагать, что функция $l(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $l(x) \geqslant l_0 > 0$ во всех точках отрезка $[a,b]$, а функция $q(x)$ принадлежит пространству $L_\infty(a,b)$ и $q(x) \geqslant q_0 > 0$ почти всюду на $[a,b]$. Билинейную форму $a(u,v)$ зададим равенством

$$a(u,v) = -\gamma l(a)u(a)v(a) + \delta l(b)u(b)v(b) +$$
$$\int\limits_a^b \left(l(x)\frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} + q(x)u(x)v(x)\right)dx,$$

где $u, v \in V$, а γ и δ – вещественные числа, такие что $\gamma \leqslant 0$, $\delta \geqslant 0$. Тогда задача (6) с третьим краевым условием также сведётся к вариационному виду (4) или (5), где $f \in L_2(0,T;V')$, а $\overline{u} \in W_2^1(a,b)$.

Перейдем к изложению и обсуждению основных результатов, полученных в данной работе.

В **первой главе**, состоящей из трех параграфов, рассматриваются вопросы разрешимости задач (5).

Отметим, что задача (5) на промежутке $[0,+\infty)$ и в других пространствах, с $f(t) \equiv 0$ и невозрастающей и принимающей положительные значения на $[0,+\infty)$ функцией $p(t)$ рассматривалась в [50]. Стоит отметить также работу [63], где разрешимость задача типа (5) получена в других классах и при существенно более сильных, чем в данной работе, предположениях на задачу.

В **параграфе 1.1** настоящей работы доказана теорема о слабой разрешимости задачи (5).

Определим необходимое множество $D(A) = \{v \in V | Av \in H\}$ и сформулируем эту теорему.

Теорема 1.1. *Пусть в задаче (5) выполнены условия (3). Пусть также функция $f \in L_1(0,T;H) \cap L_2(0,T;V')$, а функция $p(t)$ является абсолютно непрерывной на $[0,T]$, невозрастающей и принимает положительные значения на $[0,T]$. Предположим, что $\overline{u} \in D(A)$. Тогда существует единственная функция $u(t)$, такая что $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$, $u' \in L_2(0,T;V')$, удовлетворяющая в (5) уравнению почти всюду на $[0,T]$ и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\Big)\, dt \leqslant$$

$$C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int\limits_0^T \|f(t)\|_H\, dt\Big)^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt\Big\}.$$

Решение задачи (5), существование которого обусловлено теоремой 1.1, будем называть *слабым.*

Целью **параграфа 1.2** является получение более гладких, чем в параграфе 1.1, решений уравнения (5). Для этого в **теореме 1.2** сделаны дополнительные предположения на функцию из правой части уравнения (5): $f' \in L_2(0,T;V')$, $f(0) \in H$ и $Af \in L_1(0,T;H)$. Предполагается также, что $\overline{u} \in D(A^2)$. Тогда для решения задачи (5) имеет место следующая гладкость: $u' \in L_2(0,T;V) \bigcap C([0,T];H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$. Такие решения задачи (5) будем называть *гладкими.*

В **параграфе 1.3** основным дополнительным предположением является симметричность формы $a(u,v)$, означающая, что для всех $u,v \in V$ выполнено $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$, где черта над комплексным числом обозначает переход к сопряжённому числу.

Определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u,v \in V \mid (u,v)_{V(A)} = a(u,v)\}.$$

Из (3) для всех $u \in V$ следует оценка

$$\alpha^{\frac{1}{2}}\|u\|_V \leqslant \|u\|_{V(A)} \leqslant M^{\frac{1}{2}}\|u\|_V, \tag{7}$$

которая означает эквивалентность норм в пространствах V и $V(A)$.

Отметим, что (см., например, [69, стр. 125]) оператор A, порождённый формой $a(u,v)$, можно рассматривать как оператор в пространстве H с областью определения $D(A)$, определённой выше. Этот оператор в пространстве H будет являться самосопряжённым и положительно определённым. Следовательно, для оператора A существует самосопряжённый положительно определённый оператор $A^{1/2}$, действующий в пространстве H, такой что его область определения $D(A^{1/2}) = V$ и для любого $v \in V$ выполнено

$$\|v\|_{V(A)} = \|A^{\frac{1}{2}}v\|_H. \tag{8}$$

Предположение симметричности формы и вытекающие из него оценка (7) и равенство (8), а также предположения, что в задаче (5) $f \in L_1(0,T;V) \bigcap L_2(0,T;H)$, а элемент $\overline{u} \in V$ такой что $A\overline{u} \in V$ позволяют получить решение задачи (5) следующей гладкости: $u \in C([0,T];V)$, а $u', Au \in L_2(0,T;H)$. Такие решения будем называть *обобщёнными*.

Во **второй главе**, состоящей из четырёх параграфов, изучается сходимость полудискретного метода Галёркина.

Опишем некоторые факты, которые потребуются для построения приближённой задачи и последующего получения результатов о сходимости и скорости сходимости приближённых решений к точному решению задачи (5).

Пусть V_h, где h — положительный параметр, произвольное конечномерное подпространство пространства V. Так как $V \subset H \subset V'$, то на V_h определены нормы пространств V, H и V'. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму

$$\|u_h\|_{V_h'} = \sup_{v_h \in V_h,\, \|v_h\|_V = 1} |(u_h, v_h)| .$$

Очевидно, что $\|u_h\|_{V_h'} \leqslant \|u_h\|_{V'}$.

Пусть P_h – оператор ортогонального проектирования в пространстве H на V_h. В [20] было замечено, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ и справедлива оценка

$$\|\overline{P}_h u\|_{V_h'} \leqslant \|u\|_{V'} \quad (u \in V'). \tag{9}$$

Отметим также оценку [37]

$$\|u_h\|_{V'} \leqslant \|P_h\|_{V \to V} \|u_h\|_{V_h'} \quad (u_h \in V_h). \tag{10}$$

Если в (10) возьмём $u_h = \overline{P}_h u$, то придём к оценке

$$\|\overline{P}_h\|_{V' \to V'} \leqslant \|P_h\|_{V \to V}. \tag{11}$$

Кроме того, справедливо важное соотношение [38]

$$(\overline{P}_h u, v) = (u, P_h v) \quad (u \in V', v \in H) .$$

Определим также проектор Ритца. Из теоремы Лакса-Мильграма [16, сс. 18, 108], для любого элемента $u \in V$ следует существование единственного $u_h \in V_h$, такого что для любых $v_h \in V_h$ выполняется равенство $a(u_h, v_h) = a(u, v_h)$. Таким образом, определён оператор $R_h : V \to V_h$, называемый проектором Ритца, такой что $R_h u = u_h$ и для всех $u \in V$, $v_h \in V_h$

$$a(R_h u, v_h) = a(u, v_h),$$

откуда для любого $u \in V$ следует равенство

$$\overline{P}_h A R_h u = \overline{P}_h A u. \tag{12}$$

Оператор R_h в пространстве V является линейным равномерно по h ограниченным, причём выполняется оценка [44]

$$\|(I - R_h)u\|_V \leqslant M\alpha^{-1} \|(I - Q_h)u\|_V \,, \tag{13}$$

где Q_h – ортопроектор в пространстве V на V_h.

Отметим, что в случае симметричности формы $a(u, v)$ оператор R_h является оператором ортогонального проектирования в пространстве $V(A)$ на V_h.

Опишем теперь для задачи (5) приближённую в пространстве V_h задачу.

Определенную на $[0, T]$ функцию $t \to u_h(t) \in V_h$ назовем приближенным решением задачи (5), найденным полудискретным методом Галёркина, если

$$u_h'(t) + A_h u_h(t) = P_h f(t), \qquad \int\limits_0^T p(t) u_h(t) \, dt = \overline{u}_h, \tag{14}$$

В (14) оператор $A_h = \overline{P}_h A : V_h \to V_h$, а $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$. Задача (14) сводится к конечной линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным условием на решение.

Для получения результатов о сходимости рассматривается последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$, такая что $\|(I-Q_h)v\|_V \to 0$, при $h \to 0$ для любого $v \in V$. Такую последовательность назовём *предельно плотной* в пространстве V при $h \to 0$. Заметим, что она также предельно плотна и в пространстве H, и в пространстве V'.

Кроме того, для получения порядка скорости сходимости по пространственной переменной необходимо наделить рассматриваемые пространства V_h аппроксимацонными свойствами.

Будем предполагать, что существует гильбертово пространство E такое, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$ [3, с. 23]. Например, если оператор A порожден в области с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ равномерно эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем

$$H = L_2(\Omega),\ V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\,.$$

Если же на границе Ω задано краевое условие Неймана, то полагаем

$$H = L_2(\Omega),\ V = W_2^1(\Omega),\ E = W_2^2(\Omega)\,.$$

Предположим также, что подпространства $V_h \subset V$ удовлетворяют типичному для подпространств типа конечных элементов условию [11, с. 143 – 144]:

$$\|(I-Q_h)v\|_V \leqslant rh\|v\|_E \qquad (v \in E). \tag{15}$$

Из (15) очевидно следует предельная плотность последовательности подпространств $\{V_h\}$ в пространстве V, а также ещё одна необходимая в дальнейшем оценка (аналог леммы Обэна-Нитше) [42]:

$$\|(I-Q_h)v\|_H \leqslant rh\|(I-Q_h)v\|_V \qquad (v \in V), \tag{16}$$

Отметим также следующую из (16) оценку

$$\|(I-Q_h)v\|_H \leqslant rh\|v\|_V \qquad (v \in V). \tag{17}$$

Для получения некоторых результатов также будет требоваться выполнение оценки

$$\|v_h\|_V \leqslant r_1 h^{-1} \|v_h\|_H \qquad (v_h \in V_h), \tag{18}$$

которая в методе конечных элементов означает равномерное разбиение области изменения пространственных переменных на конечные элементы [15, гл. 2]. Отметим, что константы r и r_1 в оценках (15) – (18) не зависят от $v \in V$, $v_h \in V_h$ и $h > 0$.

Приведём простейший пример конечномерных подпространств $V_h \subset V$, удовлетворяющих условиям (15) – (18) (см., напр., [11, гл. 2], [15, гл. 2]). Рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Обозначим $h = (b - a)/n$. Для каждого $i = \overline{1,\, n-1}$ определим функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in (x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Тогда для задачи (6) с первым краевым условием по $x \in [a, b]$ выберем подпространства V_h как линейную оболочку функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n-1}$. Если же рассматривается задача (6) с третьим краевым условием по $x \in [a, b]$, то в качестве подпространств V_h берётся линейная оболочка функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$, где

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & x \notin [x_0, x_1]; \end{cases} \qquad \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h}, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & x \notin [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

Такие пространства V_h будем называть пространствами кусочно-линейных функций.

Перейдём к обсуждению основных результатов главы 2.

Параграф 2.1 посвящён исследованию сходимости метода Галёркина для слабо разрешимого уравнения (5) в случае равномерной по h ограниченности $\|P_h\|_{V \to V}$. Это условие будет выполнено, если, например, выполняются условия (17) и (18) [36], при этом

$$\|P_h\|_{V\to V} \leqslant 1 + rr_1. \tag{19}$$

В **теореме 2.1** для слабого решения $u(t)$ задачи (5) и приближённых решений $u_h(t)$ доказана оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|P_h u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|P_h u(t) - u_h(t)\|_V^2\,dt + \int\limits_0^T \|\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)\|_{V_h'}^2\,dt \leqslant$$

$$K\int\limits_0^T \|(P_h - I)u(t)\|_V^2\,dt. \tag{20}$$

Для получения из (20) сходимости погрешности к нулю дополнительно в **следствии 2.1** предполагается, что задана предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}$, а также накладывается условие равномерной по h ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$. В этом случае при $h\to 0$ в случае слабого решения $u(t)$ имеем следующую сходимость:

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_V^2\,dt + \int\limits_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2\,dt \to 0. \tag{21}$$

При выполнении условий (15) и (18) в **следствии 2.2** сходимость (21) получается с порядком скорости сходимости.

В **параграфе 2.2** исследуется сходимость метода Галёркина при отсутствии требования равномерной по h ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$, но при условии большей гладкости решения задачи (5).

В **теореме 2.2** устанавливается оценка погрешности при условии $u' \in L_2(0,T;V)$, из которой следует (**следствие 2.3**) сходимость к нулю первых двух слагаемых в (21). Порядки скорости сходимости этих двух слагаемых при условии, что $u \in L_2(0,T;E)$, а $u' \in L_2(0,T;V)$, и выполнении оценок (18) и (15) получаются такими же, как и в следствии 2.2 (**следствие 2.4**).

В **параграфе 2.3** рассматривается сходимость в условиях слабой разрешимости для параболического уравнения с оператором, порождённым симметричной полуторалинейной формой $a(u, v)$. В **следствии 2.5** получена среднеквадратичная сходимость при $h \to 0$ для произвольной предельно плотной в пространстве V последовательности подпространств V_h:

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \, dt \to 0.$$

Для получения оценок скорости сходимости в **следствии 2.6** предполагается, что существует сепарабельное гильбертово пространство E, такое что $D(A) \subset E \subset V$ и выполнена оценка

$$\|v\|_E \leqslant d\|Av\|_H \qquad (v \in D(A)), \tag{22}$$

где $d > 0$. Тогда при выполнении условий следствия 2.4, а также предположения (15) имеет место следующая оценка скорости сходимости:

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \, dt \leqslant Kh^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2 \, dt,$$

а при дополнительном предположении $u \in L_2(0, T; E)$ получаем большую скорость сходимости:

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \, dt \leqslant Kh^4 \int_0^T \|u(t)\|_E^2 \, dt.$$

Параграф 2.4 посвящён сходимости и скорости сходимости метода Галёркина для задачи (5) в сильных нормах. Здесь используются и условие симметричности формы $a(u, v)$, и дополнительная гладкость решения $u(t)$, и условие равномерной по h ограниченности норм $\|P_h\|_{V \to V}$.

В этом случае в **следствии 2.7** получена сходимость при $h \to 0$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|u(t) - u_h(t)\|_V^2 + \int_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_H^2 \, dt \to 0.$$

Далее предполагается, что существует гильбертово пространство E, определённое так же, как и для следствия 2.5. Тогда при выполнении условия $u' \in L_1(0,T;E)$, а также условий (18) и (15) в **следствии 2.8** доказаны оценки

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)-u_h(t)\|_V^2 \leqslant$$

$$Kh^2\left\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2+\left(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_E\,dt\right)^2+\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\right\},$$

$$\int\limits_0^T \|u'(t)-u'_h(t)\|_H^2\,dt \leqslant Kh^2\left\{\left(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_E\,dt\right)^2+\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\right\}.$$

Как уже упоминалось, метод Галёркина (14) приближенного решения задачи (5) является полудискретным методом. В этой связи естественно рассмотреть проекционно-разностные методы приближенного решения задачи (5), которые являются полностью дискретными методами. Изучению проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени посвящена **третья глава** диссертации, состоящая из пяти параграфов.

Для применения проекционно-разностного метода с неявной схемой Эйлера по времени для задачи (5) приближённая задача строится следующим образом. Пусть $0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T$ – равномерное разбиение отрезка $[0,T]$. В подпространстве $V_h\subset V$ рассматривается для $k=\overline{1,N}$ разностная задача

$$(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}+A_hu_k^h=f_k^h\ \ (k=\overline{1,\,N}),\qquad \sum_{k=1}^N p_ku_k^h\tau=\overline{u}_h, \tag{23}$$

где N – натуральное число, $\tau=T/N$, $t_k=k\tau$, $f_k^h=\tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P}_hf(t)\,dt$, $p_k=p(t_k)(k=\overline{1,N})$, $\overline{u}_h=R_h\overline{u}$, а оператор A_h определён также, как и в (14).

Отметим, что в случае $p(t)\equiv 1$ задача (3.1) рассматривалась в [61].

В **параграфе 3.1** изучается приближённая задача (23). В **лемме 1.1** показано, что при выполнении условий теоремы 1.1 задача (23) имеет единственное решение. А в **теореме 3.1** получена оценка приближённых решений

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\Big(\|u_k^h-u_{k-1}^h\|_H^2+\|u_k^h\|_V^2\tau+\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\tau\Big)\leqslant$$

$$C\Big\{\|\overline{P}_hA\overline{u}_h\|_H^2+\Big(\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_H\Big)^2\tau^2+\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau\Big\}.$$

В **параграфе 3.2** рассматривается сходимость проекционно-разностного метода для слабо разрешимого уравнения (5) в случае равномерной по $h>0$ ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$.

В **теореме 3.2** получена базовая оценка погрешности для $z_k^h=u_k^h-P_hu(t_k)$, из которой следуют результаты о сходимости.

В **следствии 3.1** для получения сходимости норм погрешности к нулю предполагается, что задана предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств $\{V_h\}\subset V$, для которых выполнены условия (17) и (18), обеспечивающие равномерную по h ограниченность норм $\|P_h\|_{V\to V}$. При условии согласования шагов разбиения по времени и по пространству $\tau h^{-2}\to 0$ при $h\to 0$ имеем следующую сходимость:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2\,dt+$$

$$\sum_{k=1}^{N}\Bigg\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Bigg\|_{V'}^2\tau\to 0. \qquad (24)$$

В **следствии 3.2** дополнительно предполагается, что в задаче (5) $u'\in L_2(0,T;H)$, а $p'\in L_2(0,T)$. Эти условия позволяют получить сходимость (24) при условии $\tau=o(h)$.

Если решение задачи (5) достаточно гладкое, а именно $u'\in L_2(0,T;V)$, а $Au\in L_2(0,T;H)$, и также выполнено условие $p'\in L_2(0,T)$, то в при $\tau\to 0$ и $h\to 0$ независимым образом выполняется сходимость (**следствие 3.3**)

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau+$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau \to 0. \tag{25}$$

Если дополнительно к условиям следствия 3.3 предположить, что $u \in L_2(0,T,E)$ и выполнено условие (15), можно получить оценки скорости сходимости. Этому посвящено **следствие 3.4**.

Параграф 3.3 посвящён получению результатов о сходимости и скорости сходимости при отсутствии условия равномерной по h ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$. В **теореме 3.3** при предположении, что $u' \in L_2(0,T;V)$, получена оценка для погрешности $y_k^h = u_k^h - Q_h u(t_k)$. В **следствии 3.5** задача (5) рассматривается при тех же условиях, что и в следствии 3.3, но при этом от подпространств V_h требуется только свойство предельной плотности в пространстве V. В этом случае при $h \to 0$, $\tau \to 0$ имеем сходимость:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N}\|u(t_k) - u_k^h\|_V^2\tau \to 0. \tag{26}$$

Оценки скорости сходимости для слагаемых из (26) при предположении (15) получены в **следствии 3.6**.

В **параграфе 3.4** в условиях слабой разрешимости задачи (5) доказывается среднеквадратичная сходимость приближённых решений к точному при отсутствии равномерной по h ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$ и без предположения дополнительной гладкости решения. Здесь накладывается условие симметричности на форму $a(u,v)$, порождающую оператор A.

Из базовой оценки погрешности, установленной в **теореме 3.4**, в **следствии 3.7** для предельно плотной в пространстве V последовательности конечномерных подпространств $\{V_h\}$ при $h \to 0$, $\tau \to 0$ в условиях слабой разрешимости получается сходимость

$$\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k) - u_k^h\|_H^2\tau \to 0.$$

В **следствии 3.8** для получения оценок скорости сходимости предполагается существование сепарабельного гильбертова пространства E, такого что $D(A) \subset E \subset V$ и имеет место оценка (22). В этом случае при выполнении условий следствия 3.7, а также неравенства (15) получается следующая оценка скорости сходимости:

$$\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau \leqslant C\Big\{h^2 \int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt + \tau\Big(\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt + \int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt\Big)\Big\}.$$

Если же от решения задачи (5) потребовать большей гладкости, а именно $u \in L_2(0,T;E)$, $u' \in L_2(0,T;H)$, а также предположить, что $p' \in L_2(0,T)$, то порядки скорости сходимости как по временной, так и по пространственной переменным можно увеличить, получив оценку:

$$\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau \leqslant C\Big\{h^4 \int_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt + \tau^2\Big(\int_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt + \int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt\Big)\Big\}.$$

В **параграфе 3.5** также рассматривается сходимость проекционно-разностного метода для задачи (5) в предположении симметричности формы $a(u,v)$. Но сходимость здесь получается в сильных нормах, для чего накладываются дополнительные условия и на гладкость решения, и на пространства V_h.

Теорема 3.5 посвящена получению базовых оценок погрешности при условии гладкости решения $u \in C([0,T];V)$. А в **следствии 3.9** для предельно плотной в пространстве V последовательности конечномерных подпространств $\{V_h\}$, такой что $\|P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены, при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ для решения задачи (5) $u(t)$, такого что $u' \in L_2(0,T;V)$, а $Au \in L_1(0,T;V)$, при условии, что $p' \in L_2(0,T)$, получена сходимость:

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2 \tau \to 0.$$

В **следствии 3.10** предполагается существование пространства E, определённого так же, как для следствия 3.8, что позволяет при выполнении условий следствия 3.9, дополнительно предположив, что $u' \in L_2(0,T;V)\bigcap L_1(0,T;E)$, получить оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau\leqslant C\Big\{h^2\Big[\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\Big(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_E\,dt\Big)^2\Big]+$$

$$\tau\Big[\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_V\,dt\Big)^2\Big]\Big\},$$

а если при этом $u\in L_1(0,T;E)$, то и оценку

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\leqslant C\Big\{h^2\Big[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2+\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\Big(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_E\,dt\Big)^2\Big]+$$

$$\tau\Big[\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_V\,dt\Big)^2\Big]\Big\}.$$

Таким образом, если известны аппроксимационные свойства проекционных подпространств, то оценки, полученные во второй и третьей главах, позволяют получать как сходимость в различных нормах приближенных решений к точному, так и скорости сходимости. Заметим, что для достаточно гладких решений скорость сходимости является точной по порядку аппроксимации и по временной, и по пространственной переменным. Последнее особенно важно при использовании подпространств типа "конечных элементов".

ГЛАВА 1

О РАЗРЕШИМОСТИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

§1.1. Слабая разрешимость

Пусть задана рассмотренная во введении тройка вложенных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' - двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным H'. Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u, v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1.1}$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что выполняется соотношение $a(u, v) = (Au,\, v)$. Здесь под выражением типа $(z,\, v)$ понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение $(z,\, v)$, в силу отождествления $H \equiv H'$, совпадает со скалярным произведением в H [14, с. 58]. Из определения оператора A следует оценка $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$.

В пространстве V' на $[0, T]$ рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}\,. \tag{1.2}$$

В (1.2) на $[0, T]$ заданы функция $t \to f(t) \in V'$ и функция $t \to p(t) \in \mathbb{R}^1$, а также элемент $\overline{u}$. Напомним, что производные функций в настоящей работе понимаются в обобщенном смысле.

При доказательстве слабой разрешимости в настоящей работе, как и в [58], точная задача аппроксимируется приближённой задачей, использующейся в методе Галёркина, с последующим обоснованием слабого предельного перехода.

Определим необходимое далее множество $D(A) = \{v \in V \mid Av \in H\}$.

Теорема 1.1. *Пусть в задаче (1.2) выполнены условия (1.1). Пусть также функция* $f \in L_1(0,T;H) \cap L_2(0,T;V')$*, а функция* $p(t)$ *является абсолютно непрерывной на* $[0,T]$*, невозрастающей и принимает положительные значения на* $[0,T]$*. Предположим, что* $\overline{u} \in D(A)$*. Тогда существует единственная функция* $u(t)$*, такая что* $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$*,* $u' \in L_2(0,T;V')$*, удовлетворяющая в (1.2) уравнению почти всюду на* $[0,T]$ *и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt \leqslant$$

$$C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int\limits_0^T \|f(t)\|_H\,dt\Big)^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}. \tag{1.3}$$

Доказательство.

1. Доказательство единственности решения. В силу линейности задачи (1.2) достаточно установить, что однородная задача

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad \int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = 0 \tag{1.4}$$

имеет только нулевое решение.

Как показано в [4, с. 116], задача Коши для однородного параболического уравнения

$$u'(t) + Au(t) = 0, \qquad u(0) = u_0 \in H$$

имеет единственное решение в пространстве

$$W(0,T) = \{u \mid u \in L_2(0,T;V),\ u' \in L_2(0,T;V')\},$$

где T – произвольное конечное число. Тем самым определено семейство линейных ограниченных операторов $G(t) : H \to H$, такое что решение $u(t) = G(t)u_0$. При этом функция $t \to G(t)u_0$ является непрерывным отображением $[0,\infty)$

в H и выполнены свойство $G(0) = I$ и полугрупповое свойство $G(t)G(s) = G(s)G(t) = G(t+s)$, для всех $t, s \geqslant 0$.

Далее в работе полугруппу $G(t)$ будем обозначать e^{-At}. Таким образом, решение задачи (1.4) задается формулой $u(t) = e^{-At}u(0)$, где элемент $u(0) \in H$.

Получим оценку $\|e^{-At}\|_{H\to H}$. Из уравнения (1.4) для $u(t) = e^{-At}u(0)$ следует равенство

$$\mathrm{Re}\,(u'(t), u(t)) + \mathrm{Re}\, a(u(t), u(t)) = 0\,,$$

из которого и (1.1) получим неравенство

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2\alpha\|u(t)\|_V^2 \leqslant 0\,. \tag{1.5}$$

С учётом (1) оценка (1.5) примет вид

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 + 2\lambda\|u(t)\|_H^2 \leqslant 0\,, \tag{1.6}$$

где $\lambda = \alpha/\beta_1^2$. В результате из (1.6) для $t \geqslant 0$ следует оценка решения однородного уравнения

$$\|u(t)\|_H = \|e^{-At}u(0)\|_H \leqslant e^{-\lambda t}\|u(0)\|_H\,.$$

Таким образом,

$$\|e^{-At}\|_{H\to H} \leqslant e^{-\lambda t}. \tag{1.7}$$

Если $u(t) = e^{-At}u(0)$ – решение задачи (1.4), то выполняется равенство

$$\int\limits_0^T p(t)u'(t)\,dt + A\int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = 0\,. \tag{1.8}$$

Так как $\int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = 0$, то из (1.8) следует что $\int\limits_0^T p(t)u'(t)\,dt = 0$. Учитывая, что функции $p(t)$ и $u(t)$ абсолютно непрерывны на $[0,T]$, получим

$$0 = \int\limits_0^T p(t)u'(t)\,dt = p(T)u(T) - p(0)u(0) - \int\limits_0^T p'(t)u(t)\,dt\,. \tag{1.9}$$

Запишем равенство (1.9) в терминах оператора e^{-At}:

$$\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)u(0)+\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}dt\,u(0)=0\,. \qquad (1.10)$$

Оператор $I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}$ непрерывно обратим в H, так как

$$\Big\|\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big\|_{H\to H}=\frac{p(T)}{p(0)}\|e^{-AT}\|_{H\to H}\leqslant\frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}<1\,.$$

Справедливость оценки следует из того, что непрерывная на $[0,T]$ функция $p(t)>0$ и не возрастает.

Из (1.10) теперь получим

$$u(0)+\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}dt\,u(0)=0\,. \qquad (1.11)$$

Рассмотрим оценку

$$\Big\|\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\Big\|_{H\to H}\leqslant\frac{1}{p(0)}\cdot\frac{1}{1-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}}=\frac{1}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}\,. \qquad (1.12)$$

Далее для произвольного $v\in H$ оценим

$$\Big\|\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}dt\,v\Big\|_H\leqslant\int\limits_0^T |p'(t)|\cdot\|e^{-At}\|_{H\to H}dt\,\|v\|_H=$$

$$-\int\limits_0^T p'(t)e^{-\lambda t}dt\,\|v\|_H=\Big(p(0)-p(T)e^{-\lambda T}-\lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt\Big)\|v\|_H\,. \qquad (1.13)$$

Из (1.12) и (1.13) следует оценка

$$\Big\|\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}dt\Big\|_{H\to H}\leqslant$$

$$1-\frac{\lambda}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt<1\,. \qquad (1.14)$$

Таким образом, из (1.11) следует, что $u(0)=0$, то есть решение задачи (1.4) $u(t)=e^{-At}u(0)=e^{-At}0=0$. В результате, задача (1.2) имеет не более одного решения.

Перейдём к доказательству существования решения задачи (1.2).

2. Построение приближенных решений. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ - полная линейно независимая система элементов в пространстве V. Определим конечномерное подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$.

На V_m можно рассматривать нормы пространств V, H и V'. Определим также на элементах $u_m \in V_m$ двойственную норму

$$\|u_m\|_{V'_m} = \sup |(u_m, v_m)|,$$

где точная верхняя граница берется по всем $v_m \in V_m$ таким, что $\|v_m\|_V = 1$.

Далее через P_m обозначаем ортогональный проектор в пространстве H на $V_m \subset H$, который, как описано во введении, допускает продолжение по непрерывности $\overline{P}_m$ на пространство V'.

В пространстве V_m на отрезке $[0, T]$ рассмотрим приближённую для (1.2) задачу

$$u'_m(t) + \overline{P}_m A u_m(t) = P_m f(t), \quad \int\limits_0^T p(t) u_m(t)\, dt = \overline{u}_m. \tag{1.15}$$

Элемент $\overline{u}_m \in V_m$ определим позже.

Задача (1.15) сводится к конечной линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным условием на решение. Заметим также, что задача (1.15), подобная задаче (1.2), имеет не более одного решения. Покажем, что решение существует.

Поскольку линейный оператор $\overline{P}_m A : V_m \to V_m$ ограничен, то всякое абсолютно непрерывное решение уравнения (1.15) имеет вид

$$u_m(t) = e^{-\overline{P}_m A t} u_m(0) + \int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A (t-s)} P_m f(s)\, ds\,. \tag{1.16}$$

Укажем значение $u_m(0) \in V_m$, при котором решение $u_m(t)$ удовлетворяет интегральному условию в (1.15). Равенство (1.16) умножим на $p(t)$, проинтегрируем от 0 до T, а затем применим оператор $\overline{P}_m A$. Учитывая интегральное условие в (1.15), получим

$$\overline{P}_m A\overline{u}_m = \overline{P}_m A\int\limits_0^T p(t)e^{-\overline{P}_m At}u_m(0)\,dt+$$

$$\overline{P}_m A\int\limits_0^T p(t)\Big[\int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)}P_m f(s)\,ds\Big]\,dt\,. \qquad (1.17)$$

Из (1.17) видно, что для определения $u_m(0)$ следует установить обратимость оператора

$$B_m = \overline{P}_m A\int\limits_0^T p(t)e^{-\overline{P}_m At}\,dt : V_m \to V_m.$$

Заметим, что

$$B_m = -\int\limits_0^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m At}\,dt = p(0)I - p(T)e^{-\overline{P}_m AT} + \int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}\,dt =$$

$$p(0)\bigg(\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big) + \frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\bigg)\,. \qquad (1.18)$$

Как и оценка $\|e^{-At}\|_{H\to H} \leqslant e^{-\lambda t}$, установленная выше, в пространстве V_m с нормой H справедлива оценка $\|e^{-\overline{P}_m At}\|_{V_m\to V_m} \leqslant e^{-\lambda t}$. Так как функция $p(t)$ невозрастающая, то существует оператор

$$\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)^{-1} : V_m \to V_m,$$

для которого в пространстве V_m с нормой H справедлива оценка

$$\Big\|(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT})^{-1}\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant \frac{1}{1-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}} = \frac{p(0)}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}\,. \qquad (1.19)$$

Теперь из (1.18) и (1.19) получим

$$B_m = p(0)\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)\times$$

$$\bigg(I + \frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\bigg)\,. \qquad (1.20)$$

Заметим, что в пространстве V_m с нормой H выполняется также оценка, аналогичная (1.13),

$$\Big\|\int_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant p(0)-p(T)e^{-\lambda T}-\lambda\int_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt\,.$$

Следовательно, в пространстве V_m с нормой H выполняется оценка, аналогичная (1.14),

$$\Big\|\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)^{-1}\int_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant$$

$$1-\frac{\lambda}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}\int_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt<1\,. \tag{1.21}$$

Таким образом, из (1.20) следует обратимость в V_m оператора B_m и

$$B_m^{-1}=\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)^{-1}\times$$

$$\left(I+\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-\overline{P}_m AT}\Big)^{-1}\int_0^T p'(t)e^{-\overline{P}_m At}dt\right)^{-1}. \tag{1.22}$$

Из (1.17) теперь получим

$$u_m(0)=B_m^{-1}\Big[\overline{P}_m A\overline{u}_m-\overline{P}_m A\int_0^T p(t)\Big(\int_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)}P_m f(s)\,ds\Big)\,dt\Big]\,, \tag{1.23}$$

что означает однозначную разрешимость в V_m задачи (1.15).

3. Априорные оценки приближенных решений. Для решения $u_m(t)$ задачи (1.15) получим соотношение

$$(u_m'(t),\,u_m(t))+a(u_m(t),\,u_m(t))=(f(t),\,u_m(t))\,.$$

Отсюда, с учетом (1.1), следует неравенство

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2+2\alpha\|u_m(t)\|_V^2\leqslant 2\mathrm{Re}\,(f(t),\,u_m(t))\,,$$

которое приводит к оценке

$$\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \alpha\|u_m(t)\|_V^2 \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f(t)\|_{V'}^2 .$$

Последнее неравенство интегрируем от 0 до $t \leq T$.

$$\|u_m(t)\|_H^2 - \|u_m(0)\|_H^2 + \alpha\int\limits_0^t \|u_m(s)\|_V^2\, ds \leqslant \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^t \|f(s)\|_{V'}^2\, ds .$$

В результате получаем оценку

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_m(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|u_m(t)\|_V^2\, dt \leqslant C\Big\{\|u_m(0)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\, dt\Big\} . \tag{1.24}$$

Покажем, что $\|u_m(0)\|_H$ оценивается равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

Оценим $\|B_m^{-1}\|_{V_m\to V_m}$, где пространство V_m берется с нормой пространства H. Из (1.22), (1.19) и (1.21) получим

$$\|B_m^{-1}\|_{V_m\to V_m} \leqslant \frac{1}{p(0)}\cdot\frac{p(0)}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}\cdot\frac{1}{1-\Big(1-\frac{\lambda}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt\Big)} =$$

$$\Big(\lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt\Big)^{-1} = M_1 . \tag{1.25}$$

Теперь из (1.23) и (1.25) следует оценка

$$\|u_m(0)\|_H \leqslant M_1\|\overline{P}_m A\overline{u}_m\|_H +$$
$$M_1\Big\|\overline{P}_m A\int\limits_0^T p(t)\Big(\int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)}P_m f(s)\, ds\Big)\, dt\Big\|_H . \tag{1.26}$$

Выберем элемент

$$\overline{u}_m = R_m\overline{u} \in V_m, \tag{1.27}$$

где через $R_m : V \to V$ обозначен проектор Ритца, определение и свойства которого приведены во введении.

Так как $\overline{u} \in D(A)$, то, используя свойство (12) оператора Ритца, получим

$$\|\overline{P}_m A\overline{u}_m\|_H = \|\overline{P}_m A\overline{u}\|_H \leqslant \|A\overline{u}\|_H . \tag{1.28}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (1.26) проведем преобразование

$$\overline{P}_m A \int\limits_0^T p(t)\Big(\int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)} P_m f(s)\,ds\Big)dt =$$

$$-\int\limits_0^T p(t)\Big(\int\limits_0^t \frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}\, P_m f(s)\,ds\Big)dt =$$

$$-\int\limits_0^T \Big(\int\limits_s^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\Big)P_m f(s)\,ds\,. \tag{1.29}$$

Рассмотрим

$$\int\limits_s^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt = p(T)e^{-\overline{P}_m A(T-s)} - p(s)I - \int\limits_s^T p'(t)e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\,.$$

Из полученного представления в пространстве V_m с нормой H следует оценка

$$\Big\|\int\limits_s^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant p(T)e^{-\lambda(T-s)} + p(s) - \int\limits_s^T p'(t)e^{-\lambda(t-s)}dt \leqslant$$

$$p(T) + p(s) - \int\limits_s^T p'(t)\,dt = 2p(s) \leqslant 2p(0)\,. \tag{1.30}$$

Из (1.29) и (1.30) получим в пространстве V_m с нормой H оценку

$$\Big\|\overline{P}_m A \int\limits_0^T p(t)\Big(\int\limits_0^t e^{-\overline{P}_m A(t-s)} P_m f(s)\,ds\Big)dt\Big\|_{V_m\to V_m} \leqslant$$

$$\int\limits_0^T \Big\|\int\limits_s^T p(t)\frac{d}{dt}e^{-\overline{P}_m A(t-s)}dt\Big\|_{V_m\to V_m}\|f(s)\|_H ds \leqslant 2p(0)\int\limits_0^T \|f(s)\|_H ds\,. \tag{1.31}$$

Таким образом, из оценок (1.26), (1.28) и (1.31) получается оценка

$$\|u_m(0)\|_H \leqslant M_1\Big(\|A\overline{u}\|_H + 2p(0)\int\limits_0^T \|f(t)\|_H dt\Big)\,.$$

В результате оценка (1.24) примет окончательный вид

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_m(t)\|_H^2+\int\limits_0^T\|u_m(t)\|_V^2\,dt\leqslant$$

$$C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2+\Big(\int\limits_0^T\|f(t)\|_H dt\Big)^2+\int\limits_0^T\|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}. \qquad (1.32)$$

4. Обоснование слабого предельного перехода. Оценка (1.32) показывает, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $L_2(0,T;V)$. А значит, существует подпоследовательность $\{u_\mu(t)\}\subset\{u_m(t)\}$, слабо сходящаяся в пространстве $L_2(0,T;V)$ к некоторому элементу $u\in L_2(0,T;V)$. Покажем, что функция $u(t)$ является решением задачи (1.2).

Из (1.15) следует, что для любых μ и всех $j=\overline{1,\mu}$ справедливо равенство

$$(u'_\mu(t),\,\varphi_j)+a(u_\mu(t),\,\varphi_j)=(f(t),\,\varphi_j). \qquad (1.33)$$

Умножим (1.33) на скалярную функцию $\psi\in C_0^\infty(0,T)$, полученное равенство проинтегрируем от 0 до T. После интегрирования по частям первого слагаемого придем к равенству

$$-\int\limits_0^T(u_\mu(t),\,\psi'(t)\varphi_j)\,dt+\int\limits_0^T a(u_\mu(t),\,\psi(t)\varphi_j)\,dt=\int\limits_0^T(f(t),\,\psi(t)\varphi_j)\,dt\,. \qquad (1.34)$$

Заметим, что функции $\psi'(t)\varphi_j,\ \psi(t)\varphi_j\in L_2(0,T;V)$. Тогда из (1.34), устремив $\mu\to\infty$ для всех $j\in\mathbb{N}$ получаем

$$-\int\limits_0^T(u(t),\,\psi'(t)\varphi_j)\,dt+\int\limits_0^T a(u(t),\,\psi(t)\varphi_j)\,dt=\int\limits_0^T(f(t),\,\psi(t)\varphi_j)\,dt\,. \qquad (1.35)$$

Так как система элементов $\{\varphi_j\}$ является полной в пространстве V, то из (1.35) предельным переходом установим, что для всех $v\in V$ выполняется

$$-\int\limits_0^T(u(t),\,v)\psi'(t)\,dt+\int\limits_0^T a(u(t),\,v)\psi(t)\,dt=\int\limits_0^T(f(t),\,v)\psi(t)\,dt\,. \qquad (1.36)$$

Из (1.36) следует равенство в смысле обобщенных функций

$$\frac{d}{dt}(u(t),\, v) + a(u(t),\, v) = (f(t),\, v)\,,$$

из которого следует, [4, с. 113], что функция $u(t)$ является решением уравнения в (1.2).

Покажем, что выполняется и интегральное условие в (1.2).

Напомним, что для всех μ справедливо равенство $\int\limits_0^T p(t)u_\mu(t)\,dt = \overline{u}_\mu$. Следовательно, для любого $v \in V'$

$$\Big(\int\limits_0^T p(t)u_\mu(t)\,dt,\, v\Big) = (\overline{u}_\mu,\, v)\,. \tag{1.37}$$

Отметим, что в силу полноты системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ и теоремы Cea [16, с.109] в пространстве V выполняется $\|\overline{u}_m - \overline{u}\|_V \to 0$ при $m \to \infty$. Тогда в (1.37) $(\overline{u}_\mu,\, v) \to (\overline{u},\, v)$ при $\mu \to \infty$. Заметим теперь, что на функциях $z \in L_2(0,T;V)$ отображение $\Phi_v(z) = (\int\limits_0^T p(t)z(t)\,dt,\, v)$ при всяком фиксированном $v \in V$ есть линейный функционал. Отметим также, что этот функционал на $L_2(0,T;V)$ ограничен:

$$|\Phi_v(z)| \le \Big\|\int\limits_0^T p(t)z(t)\,dt\Big\|_V \|v\|_{V'} \leqslant \Big(\int\limits_0^T p^2(t)\,dt\Big)^{1/2} \|v\|_{V'} \Big(\int\limits_0^T \|z(t)\|_V^2\,dt\Big)^{1/2}.$$

В таком случае $\Phi_v(u_\mu) \to \Phi_v(u)$ при $\mu \to \infty$. В результате из (1.37) получим

$$\Big(\int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt,\, v\Big) = (\overline{u},\, v)$$

для любого $v \in V'$, то есть $\int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}$.

Покажем, что решение задачи (1.2) $u \in L_2(0,T;V)$ обладает дополнительной гладкостью $u \in C([0,T],H)$ и $u' \in L_2(0,T;V')$, а также обоснуем оценку (1.3).

Поскольку $u(t)$ есть слабый предел в $L_2(0,T;V)$ последовательности функций $\{u_\mu(t)\}$, для которых выполняется оценка (1.32), то и для $u(t)$

$$\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt \leqslant C\Big\{\|A\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int_0^T \|f(t)\|_H\,dt\Big)^2 + \int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt\Big\}. \qquad (1.38)$$

Заметим теперь, что $f \in L_2(0,T;V')$, поэтому из уравнения (1.2) следует $u'(t) = f(t) - Au(t) \in L_2(0,T;V')$, а также выполняется оценка

$$\int_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\,dt \leqslant 2\int_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt + 2M^2\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt. \qquad (1.39)$$

Но если функция $u \in L_2(0,T;V)$ и производная $u' \in L_2(0,T;V')$, то [4, с. 110] функция $u \in C([0,T],H)$ и справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_H^2 \le K\int_0^T \Big(\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2\Big)\,dt. \qquad (1.40)$$

Из (1.38), (1.39) и (1.40) следует окончательная оценка (1.3). □

Напомним, что решение задачи (1.2), существование которого доказывается в теореме 1.1, называется *слабым.*

§1.2. Гладкая разрешимость

Для получения более гладких, чем в §1.1, решений сделаем дополнительные предположения об исходных данных задачи (1.2).

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть функция* $f \in L_1(0,T;H)\bigcap L_2(0,T;V')$ *такая, что её обобщённая производная* $f' \in L_2(0,T;V')$, *а* $Af \in L_1(0,T;H)$. *Предположим, что* $f(0) \in H$, *а элемент* $\overline{u} \in D(A^2)$, *то есть* $A^2\overline{u} \in H$. *Тогда задача (1.2) имеет единственное решение* $u(t)$, *такое что* $u' \in L_2(0,T;V)\bigcap C([0,T],H)$, $u'' \in L_2(0,T;V')$. *Кроме того, справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u'(t)\|_H^2 + \int_0^T (\|u'(t)\|_V^2 + \|u''(t)\|_{V'}^2)\,dt \leqslant K\Big\{\|A^2\overline{u}\|_H^2 + \Big(\int_0^T \|Af(t)\|_H\,dt\Big)^2 +$$

$$\int\limits_0^T (\|f(t)\|^2_{V'} + \|f'(t)\|^2_{V'})\,dt + \|f(0)\|^2_H \Bigg\}. \tag{1.41}$$

Доказательство. Заметим, что из условия $f' \in L_2(0,T;V')$ следует, что $f \in C([0,T];V')$, поэтому выражение $f(0) \in V'$ имеет смысл и предположение $f(0) \in H$ корректно.

Отметим также, что в силу теоремы 1.1 о слабой разрешимости задачи (1.2), гладкое решение $u(t)$, если оно существует, будет единственным.

В [39] показано, что если элемент $u_0 \in V$, такой что $Au_0 \in H$, то в условиях данной теоремы, функция

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds \tag{1.42}$$

является в пространстве V' решением задачи Коши

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad u(0) = u_0,$$

удовлетворяющим указанной в теореме 1.2 гладкости. Покажем, при каком $u_0 \in D(A)$, функция $u(t)$, построенная по формуле (1.42), будет удовлетворять интегральному условию в (1.2).

На множестве $D(A)$, заданном в §1.1, определим норму $\|v\|_{D(A)} = \|Av\|_H$, с которой $D(A)$ будет являться банаховым пространством. Рассмотрим оператор

$$B = p(0)\left(\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right) + \frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\right). \tag{1.43}$$

Покажем обратимость оператора $B : D(A) \to D(A)$.

Используя (1.7), для $v \in V$ имеем

$$\left\|\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}v\right\|_{D(A)} = \left\|\frac{p(T)}{p(0)}Ae^{-AT}v\right\|_H \leqslant \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda}\|Av\|_H = \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda}\|v\|_{D(A)},$$

где $\lambda > 0$ определена в (1.6). Так как функция $p(t)$ невозрастающая, то существует оператор

$$\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1} : D(A) \to D(A),$$

для которого справедлива оценка

$$\Big\|\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\Big\|_{D(A)\to D(A)}\leqslant\frac{p(0)}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}. \tag{1.44}$$

Теперь оператор B можем представить в виде

$$B=p(0)\left(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)\left[I+\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\right]. \tag{1.45}$$

Произведём следующую оценку. Для произвольного $v\in D(A)$ имеем

$$\left\|\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}v\,dt\right\|_{D(A)}\leqslant\int\limits_0^T\|p'(t)Ae^{-At}v\|_H\,dt\leqslant\int\limits_0^T|p'(t)|e^{-\lambda t}\|Av\|_H\,dt$$

$$\leqslant\Big(p(0)-p(T)e^{-\lambda T}-\lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt\Big)\|v\|_{D(A)}. \tag{1.46}$$

Из (1.45) и (1.46) следует оценка

$$\Big\|\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}dt\Big\|_{D(A)\to D(A)}\leqslant$$

$$1-\frac{\lambda}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}dt<1\,. \tag{1.47}$$

Из (1.45) и (1.47) следует, что оператор B обратим в пространстве $D(A)$ и

$$B^{-1}=\frac{1}{p(0)}\left[I+\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\right]^{-1}\left(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)^{-1}. \tag{1.48}$$

А из (1.44), (1.45) и (1.47) получаем оценку

$$\|B^{-1}\|_{D(A)\to D(A)}\leqslant\frac{1}{p(0)}\cdot\frac{p(0)}{p(0)-p(T)e^{-\lambda t}}\cdot\frac{1}{1-\Big(1-\frac{\lambda}{p(0)-p(T)e^{-\lambda t}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt\Big)}=$$

$$\left(\lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt\right)^{-1}=M_1. \tag{1.49}$$

Рассмотрим теперь элемент

$$u_0 = B^{-1}\Bigg(A\overline{u} + \int\limits_0^T \Big(p(T)e^{-A(T-s)} - p(s)I - \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds\Bigg). \quad (1.50)$$

В силу условий теоремы, элемент $u_0 \in D(A)$.

Покажем, что если в (1.42) элемент u_0 определить формулой (1.50), то соответствующая функция $u(t)$ будет удовлетворять интегральному условию в (1.2).

Умножим равенство (1.42) на $p(t)$ и проинтегрируем полученное выражение от 0 до T.

$$\int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0\,dt + \int\limits_0^T p(t)\int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds\,dt \quad (1.51)$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (1.51). С учётом (1.43) получим

$$\int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0\,dt = \Big(p(0)A^{-1} - p(T)A^{-1}e^{-AT} + \int\limits_0^T p'(t)A^{-1}e^{-At}\,dt\Big)u_0 =$$

$$p(0)A^{-1}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT} + \frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\Big)u_0 = A^{-1}Bu_0.$$

Подставим теперь вместо u_0 его представление (1.50)

$$\int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0\,dt = \overline{u} + A^{-1}\int\limits_0^T \Big(p(T)e^{-A(T-s)} - p(s)I - \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds. \quad (1.52)$$

Теперь преобразуем второе слагаемое из правой части (1.51)

$$\int\limits_0^T p(t)\int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds\,dt = \int\limits_0^T \Big(\int\limits_s^T p(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds =$$

$$A^{-1}\int\limits_0^T \Big(p(s)I - p(T)e^{-A(T-s)} + \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds. \quad (1.53)$$

Сложив равенства (1.52) и (1.53), получим, что для построенной по формулам (1.42) и (1.50) функции $u(t)$ выполняется интегральное условие из (1.2). Таким образом, данная функция $u(t)$ является решением задачи (1.2), удовлетворяющим указанным в теореме условиям гладкости. Такое решение далее будем называть *гладким*.

Для $u(t)$ в [39] установлена оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u'(t)\|_H^2+\int\limits_0^T(\|u'(t)\|_V^2+\|u''(t)\|_{V'}^2)\,dt\leqslant$$

$$K\left\{\|Au_0\|_H^2+\int\limits_0^T(\|f(t)\|_{V'}^2+\|f'(t)\|_{V'}^2)\,dt+\|f(0)\|_H^2\right\}. \tag{1.54}$$

Таким образом, для получения оценки (1.41) необходимо оценить $\|Au_0\|_H^2$.

Из (1.50) с учётом (1.49) и (1.7) получаем

$$\|Au_0\|_H^2=\|u_0\|_{D(A)}^2=$$

$$\left\|B^{-1}\Big[A\overline{u}+\int\limits_0^T\Big(p(T)e^{-A(T-s)}-p(s)I-\int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds\Big]\right\|_{D(A)}^2\leqslant$$

$$M_1^2\left\|A^2\overline{u}+\int\limits_0^T\Big(p(T)e^{-A(T-s)}-p(s)I-\int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)Af(s)\,ds\Big]\right\|_H^2\leqslant$$

$$K\left\{\|A^2\overline{u}\|_H^2+\Big(\int\limits_0^T\|Af(t)\|_H\,dt\Big)^2\right\}. \tag{1.55}$$

Подставляя оценку (1.55) в (1.54), получим оценку (1.41). □

§1.3. Обобщённая разрешимость параболического уравнения с симметричным оператором

Пусть определённая ранее полуторалинейная форма $a(u, v)$ является симметричной, то есть для всех $u, v \in V$ $a(u, v) = \overline{a(v, u)}$, где черта над комплексным числом обозначает переход к сопряжённому числу. Оператор A, порождённый формой $a(u, v)$, будем рассматривать как оператор в пространстве H. Тогда оператор $A : D(A) \subset H \to H$ является самосопряжённым и положительно определённым. Определим гильбертово пространство

$$V(A) = \{u, v \in V \mid (u, v)_{V(A)} = a(u, v)\}.$$

Из (1.1) для всех $u \in V$ следует оценка

$$\alpha^{\frac{1}{2}} \|u\|_V \leqslant \|u\|_{V(A)} \leqslant M^{\frac{1}{2}} \|u\|_V, \tag{1.56}$$

которая означает эквивалентность норм в пространствах V и $V(A)$.

Отметим, что (см., например, [67], [71]) для оператора A существует самосопряжённый и положительно определённый оператор $A^{\frac{1}{2}}$, такой что его область определения $D(A^{\frac{1}{2}}) = V$ и для любого $v \in V$

$$\|v\|_{V(A)} = \|A^{\frac{1}{2}} v\|_H. \tag{1.57}$$

Вернёмся к задаче (1.2). Покажем, что при условии симметричности формы, а также при некоторых дополнительных условиях на элемент $\overline{u}$ и функцию $f(t)$ решение задачи (1.2) имеет большую, чем в теореме 1.1, гладкость.

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть форма $a(u, v)$ симметрична. Предположим также, что в (1.2) функция $f \in L_1(0, T; V) \bigcap L_2(0, T; H)$, а элемент $\overline{u} \in V$, такой что $A\overline{u} \in V$. Тогда существует единственная функция $u(t)$, такая что $u \in C([0, T], V)$, а u', $Au \in L_2(0, T; H)$, удовлетворяющая в (1.2) уравнению почти всюду на*

$[0,T]$ и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_V^2+\int\limits_0^T\Big(\|u'(t)\|_H^2+\|Au(t)\|_H^2\Big)\,dt\leqslant$$

$$K\Big\{\|A\overline{u}\|_V^2+\Big(\int\limits_0^T\|f(t)\|_V\,dt\Big)^2+\int\limits_0^T\|f(t)\|_H^2\,dt\Big\}. \tag{1.58}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в сделанных предположениях задача (1.2) имеет единственное слабое решение. Следовательно, более гладкое решение, если оно существует, будет также единственным.

Как было отмечено ранее, в H оператор A определяет полугруппу e^{-At}. Кроме того [69], если элемент $u_0\in D(A^{\frac{1}{2}})=V$ и функция $f\in L_2(0,T;H)$, то функция

$$u(t)=e^{-At}u_0+\int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds \tag{1.59}$$

является в пространстве H решением задачи Коши

$$u'(t)+Au(t)=f(t),\quad u(0)=u_0. \tag{1.60}$$

Заметим (см., например, [25], [26]), что для такого решения $u(t)$ выполняется следующая гладкость: $u\in C([0,T],V)$ и u', $Au\in L_2(0,T;H)$. Кроме того, справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_V^2+\int\limits_0^T\Big(\|u'(t)\|_V^2+\|Au(t)\|_H^2\Big)\,dt\leqslant K\Big\{\|u_0\|_V^2+\int\limits_0^T\|f(t)\|_H^2\,dt\Big\}. \tag{1.61}$$

Покажем теперь, при каком $u_0\in V$ функция $u(t)$, построенная по формуле (1.59), будет удовлетворять интегральному условию в (1.2). Будем действовать по той же схеме, что и в доказательстве теоремы о гладкой разрешимости.

Рассмотрим оператор $B:V\to V$, определённый равенством

$$B=p(0)\Bigg(\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)+\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\Bigg). \tag{1.62}$$

Покажем обратимость этого оператора в пространстве $V(A)$.

Для $v \in V$ с учётом (1.57) получаем

$$\Big\|\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}v\Big\|_{V(A)} = \Big\|A^{\frac{1}{2}}\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}v\Big\|_{H} \leqslant \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_H = \frac{p(T)}{p(0)}e^{-\lambda T}\|v\|_{V(A)},$$

где λ - константа, определённая в (1.6). Так как функция $p(t)$ невозрастающая, то существует оператор

$$\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1} : V \to V$$

и

$$\Big\|\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\Big\|_{V(A)\to V(A)} \leqslant \frac{p(0)}{p(0)-p(T)e^{-\lambda T}}. \tag{1.63}$$

Теперь оператор B можем представить в виде

$$B = p(0)\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)\Big(I + \frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\Big). \tag{1.64}$$

Проведём следующую оценку. Для произвольного $v \in V$ с учётом (1.57) имеем

$$\Big\|\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}v\,dt\Big\|_{V(A)} = \Big\|A^{\frac{1}{2}}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}v\,dt\Big\|_H \leqslant \int\limits_0^T \Big\|p'(t)e^{-At}A^{\frac{1}{2}}v\Big\|_H\,dt \leqslant$$

$$\int\limits_0^T |p'(t)|e^{-\lambda t}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_H\,dt = \Big(p(0) - p(T)e^{-\lambda T} - \lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt\Big)\|A^{\frac{1}{2}}v\|_H =$$

$$\Big(p(0) - p(T)e^{-\lambda T} - \lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt\Big)\|v\|_{V(A)},$$

откуда и из (1.63) получаем

$$\Big\|\frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\Big\|_{V(A)\to V(A)} \leqslant$$

$$1 - \frac{\lambda}{p(0)-p(T)e^{-\lambda t}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt < 1 \tag{1.65}$$

Таким образом, из (1.64), (1.63) и (1.65) следует, что оператор B в пространстве $V(A)$ обратим и

$$B^{-1}=\frac{1}{p(0)}\left[I+\frac{1}{p(0)}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\right]^{-1}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\Big)^{-1},$$

а также справедлива оценка

$$\|B^{-1}\|_{V(A)\to V(A)}\leqslant\frac{1}{p(0)}\cdot\frac{p(0)}{p(0)-p(T)e^{-\lambda t}}\cdot\frac{1}{1-\Big(1-\frac{\lambda}{p(0)-p(T)e^{-\lambda t}}\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt\Big)}=$$

$$\Big(\lambda\int\limits_0^T p(t)e^{-\lambda t}\,dt\Big)^{-1}=M_1. \tag{1.66}$$

Рассмотрим теперь элемент

$$u_0=B^{-1}\Bigg(A\overline{u}+\int\limits_0^T\Big(p(T)e^{-A(T-s)}-p(s)I-\int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds\Bigg). \tag{1.67}$$

Заметим, что в силу условий теоремы, элемент $u_0\in V$. Тогда функция $u(t)$, построенная по формулам (1.59) и (1.67), будет решением задачи (1.60), удовлетворяющим указанным в теореме условиям гладкости. Покажем, что для этой функции выполняется интегральное условие в (1.2).

Умножим правую часть (1.59) на $p(t)$ и проинтегрируем полученное выражение от 0 до T. Имеем:

$$\int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt=\int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0\,dt+\int\limits_0^T p(t)\int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds\,dt \tag{1.68}$$

Рассмотрим сначала первое слагаемое в правой части (1.68). С учётом (1.62) получим

$$\int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0\,dt=\Big(p(0)A^{-1}-p(T)A^{-1}e^{-AT}+\int\limits_0^T p'(t)A^{-1}e^{-At}\,dt\Big)u_0=$$

$$p(0)A^{-1}\Big(I-\frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}+\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-At}\,dt\Big)u_0=A^{-1}Bu_0.$$

Подставим теперь вместо u_0 его представление (1.67)

$$\int\limits_0^T p(t)e^{-At}u_0\,dt = \overline{u} + A^{-1}\int\limits_0^T \Big(p(T)e^{-A(T-s)} - p(s)I - \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds. \tag{1.69}$$

Теперь преобразуем второе слагаемое правой части (1.68)

$$\int\limits_0^T p(t)\int\limits_0^t e^{-A(t-s)}f(s)\,ds\,dt = \int\limits_0^T \Big(\int\limits_s^T p(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds =$$

$$A^{-1}\int\limits_0^T \Big(p(s)I - p(T)e^{-A(T-s)} + \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds. \tag{1.70}$$

Сложив равенства (1.69) и (1.70), получим, что для построенной по формулам (1.59) и (1.67) функции $u(t)$ выполняется интегральное условие $\int\limits_0^T p(t)u(t)\,dt = \overline{u}$. Таким образом, данная функция является решением задачи (1.2), удовлетворяющим указанным в теореме условиям гладкости. Напомним, что такое решение называется *обобщённым.*

Заметим, что для полученного обобщённого решения выполняется оценка (1.61). Таким образом, для получения оценки (1.58) следует оценить $\|u_0\|_V^2$.

Из (1.67) и (1.66) следует, что

$$\|u_0\|_V^2 \leqslant 2M_1\Bigg(\|A\overline{u}\|_V^2 +$$

$$\Big\|\int\limits_0^T \Big(p(T)e^{-A(T-s)} - p(s)I - \int\limits_s^T p'(t)e^{-A(t-s)}\,dt\Big)f(s)\,ds\Big\|_V^2\Bigg). \tag{1.71}$$

Используя (1.56) и (1.57), а также (1.7), получим следующую оценку для любых $t \in [0,T]$ и для произвольного $v \in V$

$$\|e^{-At}v\|_V \leqslant \alpha^{-\frac{1}{2}}\|e^{-At}v\|_{V(A)} = \alpha^{-\frac{1}{2}}\|A^{\frac{1}{2}}e^{-At}v\|_H = \alpha^{-\frac{1}{2}}\|e^{-At}A^{\frac{1}{2}}v\|_H \leqslant$$

$$\alpha^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\|A^{\frac{1}{2}}v\|_H = \alpha^{-\frac{1}{2}}e^{-\lambda t}\|v\|_{V(A)} \leqslant \alpha^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}\|v\|_V. \tag{1.72}$$

Теперь из (1.71) и (1.72) следует оценка

$$\|u_0\|_V^2 \leqslant K\left\{\|A\overline{u}\|_V^2 + \left(\int\limits_0^T \|f(t)\|_V\,dt\right)^2\right\},$$

подставляя которую в (1.61), получим (1.58). $\square$

ГЛАВА 2
РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ ПОЛУДИСКРЕТНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЁРКИНА

§2.1. Метод Галёркина по специальным проекционным подпространствам для слабо разрешимого параболического уравнения

Рассмотрим на отрезке $[0, T]$ задачу (1.2). Предположим, что исходные данные этой задачи удовлетворяют условиям теоремы 1.1, то есть задача (1.2) имеет слабое решение.

В конечномерном подпространстве $V_h \subset V$, описанном во введении, рассмотрим полудискретную приближённую задачу

$$u_h'(t) + A_h u_h(t) = P_h f(t), \qquad \int\limits_0^T p(t) u_h(t)\, dt = \overline{u}_h. \tag{2.1}$$

В (2.1) P_h – оператор ортогонального проектирования в пространстве H на V_h, описанный во введении, $A_h = \overline{P}_h A : V_h \to V_h$, а элемент $\overline{u}_h = R_h \overline{u} \in V_h$, где R_h – описанный во введении проектор Ритца. Заметим, что задача (2.1) сводится к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с интегральным условием на решение. Разрешимость задачи (2.1) устанавливается, как и для задачи (1.2).

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2), а $u_h(t)$ – решение задачи (2.1). Тогда для функции $z_h(t) = P_h u(t) - u_h(t)$ выполняется равенство*

$$p(T) z_h(T) - p(0) z_h(0) = \int\limits_0^T p'(t) z_h(t)\, dt. \tag{2.2}$$

Доказательство. Применим к уравнению (1.2) оператор $\overline{P}_h$. Учитывая отмеченное ранее соотношение (12), получим равенство

$$\overline{P}_h u'(t) + A_h R_h u(t) = \overline{P}_h f(t).$$

Вычитая из него уравнение (2.1), будем иметь

$$z_h'(t) + A_h(R_h u(t) - u_h(t)) = 0. \qquad (2.3)$$

Равенство (2.3) умножим на $p(t)$ и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int\limits_0^T p(t) z_h'(t)\, dt = A_h R_h \int\limits_0^T p(t) u(t)\, dt - A_h \int\limits_0^T p(t) u_h(t)\, dt.$$

С учётом (1.2), (2.1) и условия $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$, имеем

$$\int\limits_0^T p(t) z_h'(t)\, dt = 0.$$

Так как функции $p(t)$ и $z_h(t)$ абсолютно непрерывны, то получим равенство

$$0 = \int\limits_0^T p(t) z_h'(t)\, dt = p(T) z_h(T) - p(0) z_h(0) - \int\limits_0^T p'(t) z_h(t)\, dt,$$

из которого следует (2.2). $\square$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть $u(t)$ - слабое решение задачи (1.2), а $u_h(t)$ – решение задачи (2.1), такое что $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant T} \|P_h u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|P_h u(t) - u_h(t)\|_V^2\, dt + \int\limits_0^T \|\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)\|_{V_h'}^2\, dt \leqslant$$

$$K \int\limits_0^T \|(P_h - I) u(t)\|_V^2\, dt. \qquad (2.4)$$

Доказательство. Заметим, что из (1.2) и (2.1) следует, что $z_h(t)$ является решением уравнения

$$z_h'(t) + A_h z_h(t) = \overline{P}_h A (P_h - I) u(t). \qquad (2.5)$$

Отметим, что для решения уравнения (2.1), как следует из [37], справедлива оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_h(t)\|_H^2+\int\limits_0^T\|u_h(t)\|_V^2\,dt\leqslant K\Big(\|u_h(0)\|_H^2+\int\limits_0^T\|P_hf(t)\|_{V_h'}^2\,dt\Big). \qquad (2.6)$$

Для (2.5) оценка (2.6) примет вид

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|z_h(t)\|_H^2+\int\limits_0^T\|z_h(t)\|_V^2\,dt\leqslant K\Big(\|z_h(0)\|_H^2+\int\limits_0^T\|\overline{P}_hA(P_h-I)u(t)\|_{V_h'}^2\,dt\Big),$$

или, с учетом (1.1) и (9),

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|z_h(t)\|_H^2+\int\limits_0^T\|z_h(t)\|_V^2\,dt\leqslant K\Big(\|z_h(0)\|_H^2+\int\limits_0^T\|(P_h-I)u(t)\|_V^2\,dt\Big). \qquad (2.7)$$

Теперь необходимо оценить $\|z_h(0)\|_H^2$.

Так как $z_h(t)$ является решением уравнения (2.5), то

$$z_h(t)=e^{-A_ht}z_h(0)+\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}\overline{P}_hA(P_h-I)u(s)\,ds. \qquad (2.8)$$

Из (2.2) следует равенство

$$z_h(0)=\frac{p(T)}{p(0)}z_h(T)-\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)z_h(t)\,dt. \qquad (2.9)$$

Таким образом, из (2.8) и (2.9) получим

$$z_h(0)=\frac{p(T)}{p(0)}\Big(e^{-A_hT}z_h(0)+\int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)}\overline{P}_hA(P_h-I)u(s)\,ds\Big)-$$

$$\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)\Big(e^{-A_ht}z_h(0)+\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}\overline{P}_hA(P_h-I)u(s)\,ds\Big)\,dt.$$

Последнее равенство преобразуем к виду

$$z_h(0)=\Big[\frac{p(T)}{p(0)}e^{-A_hT}-\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-A_ht}\,dt\Big]z_h(0)+$$

$$\frac{p(T)}{p(0)}\int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)}\overline{P}_h A(P_h-I)u(s)\,ds-$$

$$\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T\Big(p'(t)\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}\overline{P}_h A(P_h-I)u(s)\,ds\Big)\,dt. \qquad (2.10)$$

Рассмотрим в пространстве V_h оператор

$$B_h = I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-A_hT} + \frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-A_ht}\,dt.$$

В §1.1 показано,что для оператора B_h в пространстве V_h существует обратный

$$B_h^{-1} = \Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-A_hT}\Big)^{-1}\Bigg[I + \frac{1}{p(0)}\Big(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-A_hT}\Big)^{-1}\int\limits_0^T p'(t)e^{-A_ht}\,dt\Bigg]^{-1}$$

и справедлива оценка

$$\|B_h^{-1}\|_{V_h\to V_h} \leqslant \frac{1}{p(0)}\Big(\lambda\int\limits_0^T p(t)e^{\lambda t}\,dt\Big)^{-1} = M_1, \qquad (2.11)$$

где пространство V_h берётся с нормой пространства H.

Из (2.10) и (2.11) следует оценка

$$\|z_h(0)\|_H \leqslant M_1\Bigg\{\frac{p(T)}{p(0)}\Big\|\int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)}\overline{P}_h A(P_h-I)u(s)\,ds\Big\|_H +$$

$$\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T\Big(|p'(t)|\cdot\Big\|\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}\overline{P}_h A(P_h-I)u(s)\,ds\Big\|_H\Big)\,dt\Bigg\}. \qquad (2.12)$$

Заметим, что выражение $\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}\overline{P}_h A(P_h-I)u(s)\,ds$ есть решение уравнения (2.5) с начальным условием $z_h(0)=0$. Тогда из оценки (2.7) для $t\in(0,T]$

$$\Big\|\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}\overline{P}_h A(P_h-I)u(s)\,ds\Big\|_H^2 \leqslant K\int\limits_0^T \|(P_h-I)u(s)\|_V^2\,ds. \qquad (2.13)$$

В результате, из (2.12) и (2.13) получаем

$$\|z_h(0)\|_H^2 \leqslant K\int\limits_0^T \|(P_h-I)u(s)\|_V^2\,ds. \qquad (2.14)$$

Из (2.7) и (2.14) следует оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|z_h(t)\|_H^2+\int\limits_0^T\|z_h(t)\|_V^2\,dt\leqslant K\int\limits_0^T\|(P_h-I)u(t)\|_V^2\,dt. \tag{2.15}$$

Воспользовавшись равенством (2.5), с учётом (9) и ограниченности оператора $A: V\to V'$ получим теперь оценку

$$\int\limits_0^T\|z_h'(t)\|_{V_h'}^2\,dt=\int\limits_0^T\|\overline{P}_hA(P_h-I)u(t)-A_hz_h(t)\|_{V_h'}^2\,dt\leqslant$$

$$K\Big(\int\limits_0^T\|(P_h-I)u(t)\|_V^2\,dt+\int\limits_0^T\|z_h(t)\|_V^2\,dt\Big). \tag{2.16}$$

Из (2.15) и (2.16) следует необходимая оценка (2.4). □

Приведём условия, позволяющие из оценки (2.4) делать выводы о сходимости соответствующих норм погрешности к нулю.

Будем рассматривать последовательность $\{V_h\}$, где $h>0$, конечномерных подпространств пространства V, предельно плотную в пространстве V, то есть такую, что $\|(I-Q_h)v\|_V\to 0$ при $h\to 0$ для любого $v\in V$, где $Q_h: V\to V_h$ – ортопроектор. Заметим, что такая последовательность $\{V_h\}$ предельно плотна и в пространстве H, и в пространстве V'.

Следствие 2.1. *Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в пространстве V последовательность конечномерных подпространств такая, что $\|P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Тогда в условиях теоремы 2.1 при $h\to 0$*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-u_h(t)\|_H^2+\int\limits_0^T\|u(t)-u_h(t)\|_V^2\,dt+\int\limits_0^T\|u'(t)-u_h'(t)\|_{V'}^2\,dt\to 0. \tag{2.17}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что для любого $v\in V$ при $h\to 0$

$$\|(P-I)v\|_V=\|(P-I)(I-Q_h)v\|_V\le(1+\|P_h\|_{V\to V})\|(I-Q_h)v\|_V\to 0. \tag{2.18}$$

Из (2.18) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, так как решение $u\in L_2(0,T;V)$, следует сходимость к нулю при $h\to 0$ правой части оценки (2.4).

Сходимость к нулю первого слагаемого в (2.17) следует теперь из (2.4), оценки

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-u_h(t)\|_H^2 \leq 2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-P_h)u(t)\|_H^2+2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|P_hu(t)-u_h(t)\|_H^2, \quad (2.19)$$

принадлежности решения $u \in C([0,T],H)$, а также предельной плотности последовательности подпространств $\{V_h\}$ в пространстве H.

Сходимость к нулю второго слагаемого в (2.17) следует из (2.4), оценки

$$\|u(t)-u_h(t)\|_V^2 \leq 2\|u(t)-P_hu(t)\|_V^2 + 2\|P_hu(t)-u_h(t)\|_V^2 \leq$$

$$2(1+\|P_h\|_{V\to V})^2\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2 + 2\|P_hu(t)-u_h(t)\|_V^2, \quad (2.20)$$

принадлежности решения $u \in L_2(0,T;V)$, а также предельной плотности последовательности подпространств $\{V_h\}$ в пространстве V.

Таким образом установлено стремление к нулю первого и второго слагаемых в (2.17).

Далее, используя оценку (11), получим, что в силу предельной плотности последовательности подпространств $\{V_h\}$ в пространстве V' для всех $v \in V'$ при $h \to 0$

$$\|(I-\overline{P_h})v\|_{V'} = \|(I-\overline{P_h})(v-S_hv)\|_{V'} \leq (1+\|P_h\|_{V\to V})\|(I-S_h)v\|_{V'} \to 0, \quad (2.21)$$

где S_h – ортопроектор в пространстве V' на V_h.

Теперь сходимость к нулю третьего слагаемого в (2.17) получается из (2.4), оценки

$$\|u'(t)-u_h'(t)\|_{V'}^2 \leq 2\|(I-\overline{P}_h)u'(t)\|_{V'}^2 + 2\|\overline{P}_hu'(t)-u_h'(t)\|_{V_h'}^2, \quad (2.22)$$

а также (2.21) и принадлежности производной решения $u' \in L_2(0,T,V')$. $\square$

Вполне возможно, что задача (1.2) даже с негладкими данными будет иметь достаточно гладкое решение. В таком случае из оценки (2.4) можно получить и порядок скорости сходимости.

Предположим, что существует гильбертово пространство E такое, что $E \subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E, H]_{1/2}$. Примеры таких пространств приведены во введении.

Пусть также выполнены условия (18) и (15). Напомним, что из (15) следует (17), а условия (17) и (18) гарантируют равномерную по h ограниченность норм $\|P_h\|_{V\to V}$ [36] и выполнение оценки (19).

Покажем, как в сделанных предположениях, кроме сходимости (2.17), получаются оценки, позволяющие судить о скорости сходимости приближенных решений к точному.

Следствие 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Пусть решение задачи (1.2) $u(t)$ обладает дополнительной гладкостью $u \in L_2(0,T;E)$ и выполнены условия (18) и (15). Тогда справедлива оценка*

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_V^2\, dt \le Kh^2 \int_0^T \|u(t)\|_E^2\, dt\,. \tag{2.23}$$

Если дополнительно предположить, что $u'(t) \in L_2(0,T;H)$, то также будут иметь место оценки

$$\int_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_{V'}^2\, dt \le Kh^2 \int_0^T \Big(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\Big)\, dt\,, \tag{2.24}$$

$$\max_{0\le t\le T} \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \le Kh^2 \int_0^T \Big(\|u(t)\|_E^2 + \|u'(t)\|_H^2\Big)\, dt\,. \tag{2.25}$$

Доказательство. Оценка (2.23) получается из (2.4), (2.18), (2.20) и (15).

Для получения оценки (2.24) приведём оценку [43], следующую из (15)

$$\|(I - P_h)v\|_{V'} \leqslant rh\|(I - P_h)v\|_H \quad (v \in H),$$

из которой получим, что

$$\int_0^T \|(I - P_h)u'(t)\|_{V'}^2\, dt \leqslant r^2h^2 \int_0^T \|u'(t)\|_H^2\, dt. \quad (v \in H) \tag{2.26}$$

Тогда оценка (2.24) будет следовать из (2.4), (2.22), (15) и (2.26).

Заметим теперь [4, с.110], что если функция $v(t)$ такая, что $v \in L_2(0,T;V)$ и $v' \in L_2(0,T;V')$, то $v \in C([0,T],H)$ и выполняется оценка

$$\max_{0\le t\le T} \|v(t)\|_H^2 \le C \int_0^T \Big(\|v(t)\|_V^2 + \|v'(t)\|_{V'}^2 \Big)\, dt\,.$$

Установленные оценки скорости сходимости (2.23) и (2.24) позволяют, учитывая последнюю оценку, получить оценку (2.25). □

§2.2. Метод Галёркина по произвольным проекционным подпространствам

Покажем, что в случае достаточной гладкости решения задачи (1.2) сходимость норм погрешности к нулю с оценками скорости сходимости выполняется для последовательности подпространств $\{V_h\}$ без условия равномерной по $h > 0$ ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и решение $u(t)$ задачи (1.2) обладает дополнительной гладкостью $u' \in L_2(0,T;V)$. Пусть $u_h(t)$ – решение задачи (2.1), такое что $\overline{u}_h = R_h\overline{u}$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|Q_h u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_V^2\, dt + \int_0^T \|P_h u'(t) - u_h'(t)\|_{V_h'}^2\, dt \leqslant$$

$$K\Big(\int_0^T \|(I-Q_h)u'(t)\|_H^2\, dt + \int_0^T \|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\, dt\Big). \qquad (2.27)$$

Доказательство. Заметим, что из предположения $u' \in L_2(0,T;V)$ следует, что $u \in C([0,T],V)$. Обозначим $y_h(t) = Q_h u(t) - u_h(t)$. Из уравнений (1.2) и (2.1) получим равенство

$$y_h'(t) + A_h y_h(t) = (Q_h - P_h)u'(t) + \overline{P}_h A(Q_h - I)u(t). \qquad (2.28)$$

Из (2.28), оценок (9), (2.6) и непрерывного вложения $H \subset V'$ следует, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|y_h(t)\|_H^2+\int\limits_0^T\|y_h(t)\|_V^2\,dt\leqslant$$

$$K\Big(\|y_h(0)\|_H^2+\int\limits_0^T\|(Q_h-P_h)u'(t)\|_{V_h'}^2\,dt+\int\limits_0^T\|\overline{P}_hA(Q_h-I)u(t)\|_{V_h'}^2\,dt\Big)\leqslant$$

$$K\Big(\|y_h(0)\|_H^2+\int\limits_0^T\|(Q_h-I)u'(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|(Q_h-I)u(t)\|_V^2\,dt\Big). \qquad (2.29)$$

В (2.29) необходимо оценить $\|y_h(0)\|_H$. Из (2.3) следует равенство

$$y_h'(t)+A_h\{R_hu(t)-u_h(t)\}=(Q_h-P_h)u'(t).$$

Полученное равенство умножим на $p(t)$ и проинтегрируем от 0 до T. Учитывая интегральные условия в (1.2) и (2.1), получим

$$\int\limits_0^T p(t)y_h'(t)\,dt=\int\limits_0^T p(t)(Q_h-P_h)u'(t)\,dt.$$

Последнее равенство интегрируем по частям.

$$p(0)y_h(0)=p(T)y_h(T)-\int\limits_0^T p'(t)y_h(t)\,dt-\int\limits_0^T p(t)(Q_h-P_h)u'(t)\,dt. \qquad (2.30)$$

Так как $y_h(t)$ является решением уравнения (2.28), то

$$y_h(t)=e^{-A_ht}y_h(0)+\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}\Big((Q_h-P_h)u'(s)+\overline{P}_hA(Q_h-I)u(s)\Big)\,ds. \quad (2.31)$$

Из (2.30) и (2.31) следует

$$y_h(0)=\left(\frac{p(T)}{p(0)}e^{-A_hT}-\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)e^{-A_ht}\,dt\right)y_h(0)+$$

$$\frac{p(T)}{p(0)}\int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)}\Big((Q_h-P_h)u'(s)+\overline{P}_hA(Q_h-I)u(s)\Big)\,ds-$$

$$\frac{1}{p(0)}\int_0^T\Big[p'(t)\int_0^t e^{-A_h(t-s)}\Big((Q_h-P_h)u'(s)+\overline{P}_hA(Q_h-I)u(s)\Big)\,ds\Big]\,dt-$$

$$\frac{1}{p(0)}\int_0^T p(t)(Q_h-P_h)u'(t)\,dt.$$

Отсюда, с учетом оценки (2.11), получим

$$\|y_h(0)\|_H\leqslant M_1\bigg\{\frac{p(T)}{p(0)}\Big\|\int_0^T e^{-A_h(T-s)}\Big((Q_h-P_h)u'(s)+\overline{P}_hA(Q_h-I)u(s)\Big)\,ds\Big\|_H+$$

$$\frac{1}{p(0)}\int_0^T\bigg(|p'(t)|\cdot\Big\|\int_0^t e^{-A_h(t-s)}\Big((Q_h-P_h)u'(s)+\overline{P}_hA(Q_h-I)u(s)\Big)\,ds\Big\|_H\bigg)\,dt+$$

$$\frac{1}{p(0)}\Big\|\int_0^T p(t)(Q_h-P_h)u'(t)\,dt\Big\|_H\bigg\}. \tag{2.32}$$

Заметим, что выражение

$$\int_0^t e^{-A_h(t-s)}\Big((Q_h-P_h)u'(s)+\overline{P}_hA(Q_h-I)u(s)\Big)\,ds$$

есть решение уравнения (2.28) с начальным условием $y_h(0)=0$. Тогда для него из (2.29) для всех $t\in[0,T]$ получаем оценку

$$\Big\|\int_0^t e^{-A_h(t-s)}[(Q_h-P_h)u'(s)+\overline{P}_hA(Q_h-I)u(s)\,ds\Big\|_H^2\leqslant$$

$$K\Big(\int_0^T\|(Q_h-I)u'(t)\|_H^2\,dt+\int_0^T\|(Q_h-I)u(t)\|_V^2\,dt\Big). \tag{2.33}$$

Оценим теперь третье слагаемое в правой части (2.32).

$$\Big\|\frac{1}{p(0)}\int_0^T p(t)(Q_h-P_h)u'(t)\,dt\Big\|_H^2\leqslant K\int_0^T\|(Q_h-I)u'(t)\|_H^2\,dt. \tag{2.34}$$

Таким образом, из (2.32), (2.33) и (2.34) получаем оценку

$$\|y_h(0)\|_H^2\leqslant K\Big(\int_0^T\|(Q_h-I)u'(t)\|_H^2\,dt+\int_0^T\|(Q_h-I)u(t)\|_V^2\,dt\Big). \tag{2.35}$$

Из (2.29) и (2.35) следует оценка первых двух слагаемых в левой части (2.27).

Для получения оценки третьего слагаемого в (2.27) обратимся к равенству $P_h u'(t) - u'_h(t) = \overline{P}_h A(u_h(t) - u(t))$, следующему из (1.2) и (2.1). В результате имеем

$$\int_0^T \|P_h u'(t) - u'_h(t)\|^2_{V'_h}\, dt = \int_0^T \|\overline{P}_h A(u_h(t) - u(t))\|^2_{V'_h}\, dt \leqslant$$

$$M^2 \int_0^T \|u_h(t) - u(t)\|^2_V\, dt.$$

Отсюда, с учетом полученной оценки второго слагаемого в (2.27), следует выполнение в (2.27) оценки и третьего слагаемого. □

Следствие 2.3. *Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в пространстве V последовательность конечномерных подпространств. Тогда в условиях теоремы 2.2 при $h \to 0$*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t) - u_h(t)\|^2_H + \int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|^2_V\, dt + \int_0^T \|P_h u'(t) - u'_h(t)\|^2_{V'_h}\, dt \to 0.$$

Доказательство следует из оценки (2.27) и непрерывного вложения $V \subset H$. □

Следствие 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Пусть решение задачи (1.2) обладает дополнительной гладкостью: $u \in L_2(0,T;E)$, $u' \in L_2(0,T;V)$, и выполнено условие (15). Тогда справедливы оценки*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|u(t) - u_h(t)\|^2_H \leq K\, h^2 \left\{ \max_{0\leq t\leq T} \|u(t)\|^2_V + \int_0^T \left(\|u(t)\|^2_E + \|u'(t)\|^2_V \right) dt \right\},$$

$$\int_0^T \|u(t) - u_h(t)\|^2_V\, dt \leq K\, h^2 \int_0^T \left(\|u(t)\|^2_E + \|u'(t)\|^2_V \right) dt.$$

Доказательство следует из (2.27), (15) и (16). □

§2.3. Среднеквадратичная сходимость метода Галёркина для слабо разрешимого параболического уравнения с симметричным оператором

Пусть, как и ранее, задача (1.2) удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Пусть также форма $a(u,v)$ симметрична. Из симметричности формы $a(u,v)$, оценки $a(u,v) \geqslant \alpha\|u\|_V^2$ и соотношения $(A_h u_h, v_h) = a(u_h, v_h)$, где $u_h, v_h \in V_h$, следует самосопряжённость и положительная определённость оператора $A_h : V_h \to V_h$. В таком случае существует оператор $A_h^{-1} : V_h \to V_h$. Заметим также, что существует самосопряжённый положительно определённый оператор $A_h^{\frac{1}{2}} : V_h \to V_h$. Приведём необходимые далее оценки из [38]:

$$\alpha\|u_h\|_V^2 \leqslant \|A_h^{\frac{1}{2}} u_h\|_H^2 \leqslant M\|u_h\|_V^2, \tag{2.36}$$

$$\alpha\|A_h^{-\frac{1}{2}} u_h\|_H^2 \leqslant \|u_h\|_{V_h'}^2 \leqslant M\|A_h^{-\frac{1}{2}} u_h\|_H^2. \tag{2.37}$$

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1 и форма $a(u,v)$ симметричная. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2), а $u_h(t)$ – решение задачи (2.1). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|P_h u(t) - u_h(t)\|_{V_h'}^2 + \int\limits_0^T \Big(\|u(t) - u_h(t)\|_H^2 + \|A_h^{-1}[\overline{P}_h u'(t) - u_h'(t)]\|_H^2 \Big)\, dt \leqslant$$

$$K \int\limits_0^T \|(I - R_h)u(t)\|_H^2 \, dt. \tag{2.38}$$

Доказательство. К уравнению в (1.2) применим оператор $\overline{P}_h$, и из полученного равенства вычтем уравнение в (2.1). Получим

$$[P_h u(t) - u_h(t)]' + A_h[P_h u(t) - u_h(t)] = \overline{P}_h A(P_h - I)u(t). \tag{2.39}$$

В (2.39) правая часть принадлежит пространству $L_2(0,T;V_h')$. В [38] для уравнения из (2.1) была получена оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_h(t)\|_{V_h'}^2 + \int\limits_0^T \Big(\|u_h(t)\|_H^2 + \|A_h^{-1} u_h'(t)\|_H^2 \Big)\, dt \leqslant$$

$$M\left\{\|u_h(0)\|^2_{V'_h}+\int\limits_0^T\|A_h^{-1}\overline{P}_hf(t)\|^2_H\,dt\right\}.$$

Применим эту оценку к равенству (2.39)

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|P_hu(t)-u_h(t)\|^2_{V'_h}+\int\limits_0^T\|P_hu(t)-u_h(t)\|^2_H+\int\limits_0^T\|A_h^{-1}[\overline{P}_hu'(t)-u'_h(t)]\|^2_H\Bigg)\,dt\leqslant$$

$$K\left\{\|P_hu(0)-u_h(0)\|^2_{V'_h}+\int\limits_0^T\|A_h^{-1}\overline{P}_hA(P_h-I)u(t)\|^2_H\,dt\right\}. \qquad (2.40)$$

Свойство (12) позволяет провести оценку

$$\int\limits_0^T\|A_h^{-1}\overline{P}_hA(P_h-I)u(t)\|^2_H\,dt=\int\limits_0^T\|A_h^{-1}\overline{P}_hA(P_h-R_h)u(t)\|^2_H\,dt=$$

$$\int\limits_0^T\|(P_h-R_h)u(t)\|^2_H\,dt\leqslant\int\limits_0^T\|(I-R_h)u(t)\|^2_H\,dt.$$

Оценим теперь $\|P_hu(0)-u_h(0)\|^2_{V'_h}$. Напомним, что в §2.1 было введено обозначение $P_hu(t)-u_h(t)=z_h(t)$. Из (2.37) и (2.12) имеем

$$\|P_hu(0)-u_h(0)\|_{V'_h}=\|z_h(0)\|_{V'_h}\leqslant M\|A^{-\frac{1}{2}}z_h(0)\|_H\leqslant$$

$$MM_1\Bigg\|A_h^{-\frac{1}{2}}\Bigg(\frac{p(T)}{p(0)}\int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)}A_h(P_h-R_h)u(s)\,ds-$$

$$\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T p'(t)\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}A_h(P_h-R_h)u(s)\,ds\,dt\Bigg)\Bigg\|_H\leqslant$$

$$MM_1\Bigg[\frac{p(T)}{p(0)}\Bigg\|\int\limits_0^T e^{-A_h(T-s)}A_h^{\frac{1}{2}}(P_h-R_h)u(s)\,ds\Bigg\|_H+$$

$$\frac{1}{p(0)}\Bigg\|\int\limits_0^T p'(t)\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}A_h^{\frac{1}{2}}(P_h-R_h)u(s)\,ds\,dt\Bigg\|_H\Bigg]. \qquad (2.41)$$

В (2.41) выражение $\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}A_h^{\frac{1}{2}}(P_h-R_h)u(s)\,ds$ является решением уравнения

$$v'_h(t)+A_hv_h(t)=A_h^{\frac{1}{2}}(P_h-R_h)u(t)$$

с нулевым начальным условием. Применим к нему оценку (2.6). С учётом (2.37), получим

$$\Big\|\int\limits_0^t e^{-A_h(t-s)}A_h^{\frac{1}{2}}(P_h-R_h)u(s)\,ds\Big\|_H^2 \leqslant K\int\limits_0^T \|A_h^{\frac{1}{2}}(P_h-R_h)u(t)\|_{V_h'}^2\,dt \leqslant$$

$$KM\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt.$$

Тогда имеем

$$\|P_hu(0)-u_h(0)\|_{V_h'}^2 \leqslant$$

$$KM\Bigg(\frac{p(T)}{p(0)}\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt+\frac{1}{p(0)}\int\limits_0^T |p'(t)|\,dt\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt\Bigg) \leqslant$$

$$K\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt.$$

В результате оценка (2.40) принимает вид

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|P_hu(t)-u_h(t)\|_{V_h'}^2+\int\limits_0^T \|P_hu(t)-u_h(t)\|_H^2\,dt+$$

$$\int\limits_0^T \|A_h^{-1}[\overline{P}_hu'(t)-u_h'(t)]\|_H^2\,dt \leqslant K\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt. \qquad (2.42)$$

Теперь для получения (2.38) осталось оценить $\int\limits_0^T \|u(t)-u_h(t)\|_H^2$. Заметим, что для любого $v\in V$

$$\|(I-P_h)v\|_H=\|(I-P_h)(I-R_h)v\|_H \leqslant (\|(I-R_h)v\|_H.$$

Отсюда и из (2.42) следует оценка

$$\int\limits_0^T \|u(t)-u_h(t)\|_H^2 \leqslant 2\int\limits_0^T (\|u(t)-P_hu(t)\|_H^2+\|P_hu(t)-u_h(t)\|_H^2)\,dt \leqslant$$

$$K\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|\,dt\|_H^2. \qquad (2.43)$$

Таким образом, получаем из (2.42) и (2.43) оценку (2.38).□

Приведём условия, позволяющие из оценки (2.38) делать выводы о сходимости соответствующих норм погрешностей к нулю.

Следствие 2.5. *Пусть $\{V_h\}$ – последовательность конечномерных подпространств, предельно плотная в пространстве V. Тогда, в условиях теоремы 2.3, при $h \to 0$*

$$\int\limits_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \, dt \to 0.$$

Доказательство. Утверждение следует из (2.38), непрерывного вложения $V \subset H$ и оценки (12). □

Далее покажем, что оценка (2.38) позволяет установить и скорость сходимости.

Передположим, что существует сепарабельное гильбертово пространство E, такое что $D(A) \subset E \subset V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка (22). Пусть также подпространства V_h обладают аппроксимационным свойством (15). В [41] показано, что из (22) и (15) следует оценка

$$\|(I - R_h)v\|_H \leqslant Mdrh\|(I - Q_h)v\|_V \quad (v \in V). \tag{2.44}$$

Следствие 2.6. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.3, а также условия (15) и (22). Тогда*

$$\int\limits_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \, dt \leqslant Kh^2 \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2 \, dt. \tag{2.45}$$

Если же решение $u(t)$ задачи (1.2) более гладкое, а именно $u \in L_2(0, T; E)$, то оценка следующая

$$\int\limits_0^T \|u(t) - u_h(t)\|_H^2 \, dt \leqslant Kh^4 \int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2 \, dt. \tag{2.46}$$

Доказательство. Оценка (2.45) следует из (2.44). А оценка (2.46) получается из (2.44) и (15). □

§2.4. Сильная сходимость метода Галёркина для параболического уравнения с симметричным оператором

Пусть для задачи (1.2) выполняются условия теоремы 1.3, которые гарантируют существование обобщённого решения этой задачи. Отметим, что задача (2.1), подобно задаче (1.2), также имеет решение, для которого оценка (1.58) примет вид

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u_h(t)\|_V^2+\int\limits_0^T\Big(\|u_h'(t)\|_H^2+\|A_hu_h(t)\|_H^2\Big)\,dt\leqslant$$

$$K\Bigg\{\|A_h\overline{u}_h\|_V^2+\Bigg(\int\limits_0^T\|P_hf(t)\|_V\,dt\Bigg)^2+\int\limits_0^T\|P_hf(t)\|_H^2\,dt\Bigg\}. \tag{2.47}$$

Теорема 2.4. *Пусть выполнены условия теоремы 1.3. Пусть $u(t)$ – обобщённое решение задачи (1.2) с дополнительной гладкостью $u'\in L_2(0,T;V)$. Пусть $u_h(t)$ – решение задачи (2.1). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|R_hu(t)-u_h(t)\|_V^2+\int\limits_0^T\Big(\|u'(t)-u_h'(t)\|_H^2+\|\overline{P}_hA[u(t)-u_h(t)]\|_H^2\Big)\,dt\leqslant$$

$$K\Bigg\{\Bigg(\int\limits_0^T\|(R_h-P_h)u'(t)\|_V\,dt\Bigg)^2+\int\limits_0^T\|(R_h-I)u'(t)\|_H^2\,dt\Bigg\}. \tag{2.48}$$

Доказательство. Применим к обеим частям уравнения в (1.2) оператор $\overline{P}_h$. С учётом (12) и условий теоремы, будем иметь

$$P_hu'(t)+A_hR_hu(t)=P_hf(t).$$

Вычтем из полученного равенства равенство в (2.1), получим соотношение

$$(R_hu(t)-u_h(t))'+A_h(R_hu(t)-u_h(t))=(R_h-P_h)u'(t). \tag{2.49}$$

Заметим, что $\int\limits_0^T p(t)(R_h u(t) - u_h(t))\,dt = 0$. Тогда из (2.47) и (2.49) следует оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|R_h u(t) - u_h(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T \Big(\|R_h u'(t) - u_h'(t)\|_H^2 + \|A_h(R_h u(t) - u_h(t))\|_H^2\Big)\,dt \leqslant$$

$$K\Bigg\{\bigg(\int\limits_0^T \|(P_h - R_h)u'(t)\|_V\,dt\bigg)^2 + \int\limits_0^T \|(P_h - R_h)u'(t)\|_H^2\,dt\Bigg\}. \qquad (2.50)$$

Из (2.50), с учётом (12), легко получается (2.48). $\square$

Следствие 2.7. *Пусть $\{V_h\}$ - предельно плотная в пространстве V последовательность конечномерных подпространств, такая что $\|P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Тогда в условиях теоремы 2.4, при $h \to 0$*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t) - u_h(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_H^2\,dt \to 0.$$

Доказательство следует из (2.48), непрерывного вложения $V \subset H$ и (13). $\square$

Для получения оценок скорости сходимости предположим существование гильбертова пространства E, описанного в предыдущем параграфе.

Следствие 2.8. *Пусть V_h – конечномерное подпространство пространства V, удовлетворяющее условиям (15), (18) и (22). Пусть выполнены условия теоремы 2.4. Пусть $u(t)$ – решение задачи (1.2) с дополнительной гладкостью $u' \in L_1(0,T;E)$, а $u_h(t)$ - решение задачи (2.1). Тогда выполняются следующие оценки погрешностей*

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t) - u_h(t)\|_V^2 \leqslant$$

$$Kh^2\Bigg\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2 + \bigg(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_E\,dt\bigg)^2 + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Bigg\}. \qquad (2.51)$$

$$\int\limits_0^T \|u'(t) - u_h'(t)\|_H^2\,dt \leqslant Kh^2\Bigg\{\bigg(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_E\,dt\bigg)^2 + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Bigg\}. \qquad (2.52)$$

Доказательство. Из (2.48) следует оценка

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)-u_h(t)\|_V^2\leqslant 2\Bigg[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(R_h-I)u(t)\|_V^2+$$

$$K\left\{\left(\int\limits_0^T\|(R_h-P_h)u'(t)\|_V\,dt\right)^2+\int\limits_0^T\|(R_h-I)u'(t)\|_H^2\,dt\right\}\Bigg]. \tag{2.53}$$

Используя (13) и (15), получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(R_h-I)u(t)\|_V^2\leqslant M^2\alpha^{-2}r^2h^2\|u(t)\|_E^2 \tag{2.54}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (2.53). Воспользуемся оценками (18), (2.44) и (15). Будем иметь

$$\left(\int\limits_0^T\|(R_h-P_h)u'(t)\|_V\,dt\right)^2\leqslant\left(r_1h^{-1}\int\limits_0^T\|(R_h-P_h)u'(t)\|_H\,dt\right)^2\leqslant$$

$$\left(r_1h^{-1}\int\limits_0^T\|(R_h-I)u'(t)\|_H\,dt\right)^2\leqslant$$

$$\left(rr_1\int\limits_0^T\|(Q_h-I)u'(t)\|_V\,dt\right)^2\leqslant r^4r_1^2h^2\left(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_E\,dt\right)^2. \tag{2.55}$$

Осталось получить оценку для третьего слагаемого в (2.53). Из (13) и (15) получаем, что

$$\int\limits_0^T\|(R_h-I)u'(t)\|_H^2\,dt\leqslant 4r^2h^2\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt. \tag{2.56}$$

Теперь оценка (2.51) следует из (2.53), (2.54), (2.55) и (2.56).

Оценка (2.52) получается аналогично оценке (2.51). □

ГЛАВА 3
РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ С НЕЯВНОЙ СХЕМОЙ ЭЙЛЕРА ПО ВРЕМЕНИ

§3.1. Описание приближённой задачи

Рассмотрим задачу (1.2). Предположим. что для неё выполнены условия теоремы 1.1 о слабой разрешимости. В пространстве V_h рассмотрим приближённую для (1.2) задачу:

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h u_k^h = f_k^h \ \ (k=\overline{1,\,N}), \qquad \sum_{k=1}^{N} p_k u_k^h \tau = \overline{u}_h. \tag{3.1}$$

В (3.1) $A_h = \overline{P}_h A : V_h \to V_h$, N - натуральное число, $\tau = T/N$; $p_k = p(t_k)$, где t_k – точки разбиения отрезка $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T$, такого что $t_k - t_{k-1} = \tau$. Элементы f_k^h, $\overline{u}_h \in V_h$ определим позже.

Лемма 3.1. *В условиях теоремы 1.1 задача (3.1) имеет единственное решение.*

Доказательство. Установим, что однородная задача имеет только нулевое решение. Пусть $u_k^h \in V_h$, $(k=\overline{0,N})$ - решение задачи

$$(u_k^h - u_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h u_k^h = 0 \ \ (k=\overline{1,N}), \qquad \sum_{k=1}^{N} p_k u_k^h \tau = 0. \tag{3.2}$$

Умножим уравнения в (3.2) на $p_k\tau$, $(k=\overline{1,N})$ и просуммируем по k от 1 до N. Учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k u_k^h \tau = 0$, будем иметь $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k(u_k^h - u_{k-1}^h) = 0$. Применим к полученному равенству формулу суммирования по частям [17, с. 52]:

$$0 = \sum_{k=1}^{N} p_k(u_k^h - u_{k-1}^h) = p_N u_N^h - p_0 u_0^h - \sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1} - p_k)u_k^h. \tag{3.3}$$

Уравнения в (3.2) перепишем в виде $(I+\tau A_h)u_k^h = u_{k-1}^h$. В [61] указано, что оператор $(I+\tau A_h)$ обратим в пространстве V_h и справедлива оценка

$$\|(I+\tau A_h)^{-1}\|_{H\to H} \leqslant (1+\tau\alpha\beta_1)^{-1}, \tag{3.4}$$

где β_1 - константа из (1). Тогда получаем, что справедливы соотношения

$$u_k^h = (I+\tau A_h)^{-k}u_0^h \quad (k=\overline{1,N}). \tag{3.5}$$

Подставив (3.5) в (3.3) и обозначив полученный оператор через D_h, будем иметь

$$D_h u_0^h = p_0\Big[\Big(I - \frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Big) + \frac{1}{p_0}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big]u_0^h = 0. \tag{3.6}$$

Покажем обратимость оператора D_h в пространстве V_h.

В силу свойств функции $p(t)$, из (3.4) получаем

$$\Big\|\frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-k}\Big\|_{H\to H} \leqslant \frac{p_N}{p_0}(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k} < 1 \quad (k=\overline{1,N}),$$

откуда следует непрерывная обратимость оператора $I - p_N/p_0(I+\tau A_h)^{-k}$ для всех $k=\overline{1,N}$ и оценка

$$\Big\|\Big[I - \frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-k}\Big]^{-1}\Big\|_{H\to H} \leqslant \frac{1}{1-p_N/p_0(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k}} \quad (k=\overline{1,N}). \tag{3.7}$$

Оператор D_h теперь можем записать в виде

$$D_h = p_0\Big(I - \frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Big)\times$$

$$\Big[I + \frac{1}{p_0}\Big(I - \frac{p_N}{p_0}(I+\frac{1}{p_0}\tau A_h)^{-N}\Big)^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big]. \tag{3.8}$$

Используя (3.4), невозрастание функции $p(t)$ и формулу суммирования по частям, проведём оценку

$$\Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big\|_{H\to H} \leqslant -\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k} =$$

$$\sum_{k=1}^{N} p_k\big((1+\tau\alpha\beta_1)^{-k}-(1+\tau\alpha\beta_1)^{-(k-1)}\big)-p_N(1+\tau\alpha\beta_1)^{-N}+p_0.$$

Заметив, что $(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k}-(1+\tau\alpha\beta_1)^{-(k-1)}=-\tau\alpha\beta_1(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k}$, получим оценку

$$\Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big\|_{H\to H}\leqslant p_0-p_N(1+\tau\alpha\beta_1)^{-N}-\tau\alpha\beta_1\sum_{k=1}^{N}p_k(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k}.$$

Из этой оценки и (3.7) получаем

$$\Big\|\frac{1}{p_0}\Big(I-\frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Big)^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big\|_{H\to H}\leqslant$$

$$1-\frac{\tau\alpha\beta_1\sum\limits_{k=1}^{N}p_k(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k}}{p_0-p_N(1+\tau\alpha\beta_1)^{-N}}<1. \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.7) и (3.9) следует, что оператор D_h обратим в пространстве V_h и

$$D_h^{-1}=\frac{1}{p_0}\Big[I+\frac{1}{p_0}\Big(I-\frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Big)^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big]^{-1}\times$$

$$\Big[I-\frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Big]^{-1}. \tag{3.10}$$

Тогда из (3.6) и (3.5) получаем, что $u_0^h=u_1^h=...=u_N^h=0$. В результате, задача (3.1) имеет единственное решение. □

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть* $u_k^h(k=\overline{0,N})$ *– решение задачи (3.1). Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\Big(\|u_k^h-u_{k-1}^h\|_H^2+\|u_k^h\|_V^2\tau+\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\tau\Big)\leqslant$$

$$C\Big\{\|A_h\overline{u}_h\|_H^2+\Big(\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_H\tau\Big)^2+\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau\Big\}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Отметим, что для u_k^h справедлива оценка [40]

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\Big(\|u_k^h-u_{k-1}^h\|_H^2+\|u_k^h\|_V^2\tau+\|(u_k^h-u_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\tau\Big)\leqslant$$

$$C\Big\{\|u_0^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau\Big\}. \qquad (3.12)$$

Оценим $\|u_0^h\|_H^2$.

В [61] приведено соотношение

$$u_k^h=(I+\tau A_h)^{-k}u_0^h+\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}f_i^h\tau \qquad (k=\overline{1,N}). \qquad (3.13)$$

Применим к обеим частям нелокального условия в (3.1) оператор A_h и воспользуемся представлением (3.13) для u_k^h. Получим

$$A_h\overline{u}_h=A_h\sum_{k=1}^{N}p_k(I+\tau A_h)^{-k}\tau u_0^h+A_h\sum_{k=1}^{N}p_k\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}f_i^h\tau^2. \quad (3.14)$$

Покажем обратимость оператора $A_h\sum\limits_{k=1}^{N}p_k(I+\tau A_h)^{-k}\tau$.

Применив формулу суммирования по частям, будем иметь

$$A_h\sum_{k=1}^{N}p_k(I+\tau A_h)^{-k}\tau=-\sum_{k=1}^{N}p_k\Big[(I+\tau A_h)^{-k}-(I+\tau A_h)^{-(k-1)}\Big]=$$

$$p_0\Big[\Big(I-\frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Big)+\frac{1}{p_0}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big]=D_h.$$

Обратимость оператора D_h показана при доказательстве леммы 3.1. Из (3.14) получаем, что

$$u_0^h=D_h^{-1}\Big[A_h\overline{u}_h-A_h\sum_{k=1}^{N}p_k\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}f_i^h\tau^2\Big]. \qquad (3.15)$$

Используя (3.10), (3.7) и (3.9), проведём оценку $\|D_h^{-1}\|_{V_h\to V_h}$, где норма в V_h порождена нормой в H.

$$\|D_h^{-1}\|_{V_h\to V_h}=\Bigg\|\frac{1}{p_0}\Bigg[I+\frac{1}{p_0}\Big(I-\frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Big)^{-1}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Bigg]^{-1}\times$$

$$\Bigg[I-\frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}\Bigg]^{-1}\Bigg\|_{H\to H}\leqslant$$

$$\frac{1}{p_0}\cdot\left[1-\left(1-\frac{\tau\alpha\beta_1\sum\limits_{k=1}^{N}p_k(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k}}{p_0-p_N(1+\tau\alpha\beta_1)^{-N}}\right)\right]^{-1}\cdot\left[1-\frac{p_N}{p_0}(1+\tau\alpha\beta_1)^{-N}\right]^{-1}=$$

$$=\left[\tau\alpha\beta_1\sum_{k=1}^{N}p_k(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k}\right]^{-1}. \tag{3.16}$$

Заметим, что

$$(1+\tau\alpha\beta_1)^k=\left[\left(1+\frac{T\alpha\beta_1}{N}\right)^{\frac{N}{T\alpha\beta_1}}\right]^{\frac{kT\alpha\beta_1}{N}}\quad (k=\overline{1,N}).$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, где $x\in(0,\infty)$. Известно, что $f(x)$, монотонно возрастая, стремится к числу e при $x\to\infty$. Следовательно, $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\leqslant e$, при $x\in(0,\infty)$. Таким образом, получаем, что

$$(1+\tau\alpha\beta_1)^{-k}=\left[\left(1+\frac{T\alpha\beta_1}{N}\right)^{\frac{N}{T\alpha\beta_1}}\right]^{-\frac{kT\alpha\beta_1}{N}}\geqslant\exp\Bigl(-\frac{kT\alpha\beta_1}{N}\Bigr)\quad (k=\overline{1,N}). \tag{3.17}$$

Учитывая (3.17) и невозрастание функции $p(t)$ на $[0,T]$, продолжим оценку (3.16):

$$\|D_h^{-1}\|_{V_h\to V_h}\leqslant\frac{1}{T\alpha\beta_1N^{-1}\sum\limits_{k=1}^{N}p_k\exp\Bigl(-\frac{kT\alpha\beta_1}{N}\Bigr)}\leqslant$$

$$\frac{1}{T\alpha\beta_1N^{-1}\sum\limits_{k=1}^{N}p_N\exp(-T\alpha\beta_1)}=\frac{e^{T\alpha\beta_1}}{T\alpha\beta_1p(T)}=M_2. \tag{3.18}$$

Теперь из (3.15) и (3.18) следует оценка

$$\|u_0^h\|_H^2\leqslant 2M_2^2\Bigl[\|A_h\overline{u}_h\|_H^2+\Bigl\|A_h\sum_{k=1}^{N}p_k\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}f_i^h\tau^2\Bigr\|_H^2\Bigr]. \tag{3.19}$$

Оценим второе слагаемое правой части (3.19). Из (3.13) следует, что $\xi_k^h=\sum\limits_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}f_i^h\tau$ является решением задачи

$$(\xi_k^h-\xi_{k-1}^h)\tau^{-1}+A_h\xi_k^h=f_k^h,\qquad \xi_0^h=0\ \ (k=\overline{1,\,N}).$$

Тогда имеем

$$\Bigl\|A_h\sum_{k=1}^{N}p_k\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}f_i^h\tau^2\Bigr\|_H^2=\Bigl\|\sum_{k=1}^{N}p_kA_h\xi_k^h\tau\Bigr\|_H^2=$$

$$\Big\|\sum_{k=1}^{N} p_k\Big(f_k^h-(\xi_k^h-\xi_{k-1}^h)\tau^{-1}\Big)\tau\Big\|_H^2 \leqslant$$

$$2p_0^2\Big(\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_H\tau\Big)^2+2\Big\|\sum_{k=1}^{N}p_k(\xi_k^h-\xi_{k-1}^h)\Big\|_H^2. \tag{3.20}$$

Второе слагаемое в (3.20) просуммируем по частям. Учитывая, что $\xi_0^h=0$, и применяя оценку (3.12), получим

$$\Big\|\sum_{k=1}^{N}p_k(\xi_k^h-\xi_{k-1}^h)\Big\|_H^2=\Big\|p_N\xi_N^h-p_0\xi_0^h-\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\xi_k^h\Big\|_H^2\leqslant$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|\xi_k^h\|_H^2\Big|p_N-\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\Big|^2=p_0^2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|\xi_k^h\|_H^2\leqslant p_0^2C\sum_{k=1}^{N}\|f_k^h\|_{V_h'}^2\tau. \tag{3.21}$$

Искомая оценка (3.11) теперь получается из (3.12), (3.19), (3.20) и (3.21).

□

§3.2. Сходимость проекционно-разностного метода для слабо разрешимого параболического уравнения

Далее будем считать, что в задаче (3.1) $f_k^h=\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P}_hf(t)\,dt \quad (k=\overline{1,N})$, а $\overline{u}_h=R_h\overline{u}$, где R_h – проектор Ритца, определённый во введении.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2), а u_k^h $(k=\overline{0,N})$ – решение задачи (3.1). Обозначим через $z_k^h=u_k^h-P_hu(t_k)$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|z_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\Big(\|z_k^h-z_{k-1}^h\|_H^2+\|z_k^h\|_V^2\tau+\|(z_k^h-z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\tau\Big)\leqslant$$

$$C\left\{\sum_{k=1}^{N}\|\psi_k^h\|_{V_h'}^2\tau+\sum_{k=1}^{N}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{N}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\overline{P}_hAu(t)\|_H\,dt\right)^2\right\}, \tag{3.22}$$

где $\psi_k^h=\tau^{-1}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\overline{P}_hA[u(t)-P_hu(t_k)]\,dt \quad (k=\overline{1,N})$.

Доказательство. К уравнению в (1.2) применим оператор $\overline{P}_h$, полученное равенство проинтегрируем от t_{k-1} до t_k, разделим на τ и вычтем его из уравнения в (3.1)

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} - \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\,dt + A_h u_k^h = 0. \tag{3.23}$$

С учётом того что $P_h u(t_k) = \tau^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P_h u(t_k)\,dt$, из (3.23) следуют равенства

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + A_h z_k^h = \psi_k^h \quad (k = \overline{1, N}), \tag{3.24}$$

где ψ_k^h определены в условии данной теоремы.

Так как z_k^h $(k = \overline{0, N})$ – решение уравнения (3.24), то справедлива оценка (3.12)

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} \|z_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \|z_k^h\|_V^2 \tau + \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2 \tau \Big) \leqslant$$

$$C \Big\{ \|z_0^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \|\psi_k^h\|_{V_h'}^2 \tau \Big\}. \tag{3.25}$$

Теперь для получения оценки (3.22) необходимо оценить $\|z_0^h\|_H^2$.

Умножим (3.23) на $p_k \tau$ и просуммируем по k от 1 до N. Учитывая условия в (1.2) и в (3.1), а также (12), получим

$$\sum_{k=1}^{N} p_k (z_k^h - z_{k-1}^h) + \overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} p_k \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\,dt - \overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} p(t) u(t)\,dt = 0.$$

Применив к первому слагаемому формулу суммирования по частям, будем иметь

$$z_0^h = \frac{p_N}{p_0} z_N^h - \frac{1}{p_0} \sum_{k=0}^{N-1} (p_{k+1} - p_k) z_k^h - \frac{1}{p_0} \overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p(t) - p_k) u(t)\,dt. \tag{3.26}$$

Отметим, что для z_k^h $(k = \overline{1, N})$ справедливо представление (3.13)

$$z_k^h = (I + \tau A_h)^{-k} z_0^h + \sum_{i=1}^{k} (I + \tau A_h)^{-k+1-i} \psi_i^h \tau \qquad (k = \overline{1, N}). \tag{3.27}$$

Подставим (3.27) в (3.26)

$$z_0^h = \frac{p_N}{p_0}\Big[(I+\tau A_h)^{-N} z_0^h + \sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h \tau\Big] -$$

$$\frac{1}{p_0}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\Big[(I+\tau A_h)^{-k} z_0^h + \sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h \tau\Big] -$$

$$\frac{1}{p_0}\overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt,$$

откуда получаем

$$p_0\Big[I - \frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N} + \frac{1}{p_0}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big] z_0^h =$$

$$\Big[p_N \sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h \tau - \sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h \tau -$$

$$\overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt\Big].$$

В силу (3.6) имеем

$$z_0^h = D_h^{-1}\Bigg[p_N \sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h \tau - \sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h \tau -$$

$$\overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt\Bigg]. \tag{3.28}$$

Из (3.27) следует, что $\xi_k^h = \sum\limits_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h \tau$ является решением задачи

$$(\xi_k^h - \xi_{k-1}^h)\tau^{-1} + A_h \xi_k^h = \psi_k^h \ \ (k=\overline{1,\,N}), \quad \xi_0^h = 0.$$

Тогда, используя (3.25), получаем

$$\Big\|p_N \sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h \tau\Big\|_H^2 + \Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h \tau\Big\|_H^2 =$$

$$p_N^2\|\xi_k^h\|_H^2 + \Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\xi_k^h\Big\|_H^2 \leqslant$$

$$p_N^2 \max_{1\leqslant k\leqslant N} \|\xi_k^h\|_H^2 + \Big|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\Big|^2 \max_{1\leqslant k\leqslant N} \|\xi_k^h\|_H^2 \leqslant C\sum_{k=1}^{N}\|\psi_k^h\|_{V_h'}^2\tau. \qquad (3.29)$$

Оценим теперь третье слагаемое в (3.28)

$$\Big\|\overline{P}_h A\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p_k-p(t))u(t)\,dt\Big\|_H^2 = \Big\|\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\int\limits_{t}^{t_k}p'(s)\,ds\Big)\overline{P}_h Au(t)\,dt\Big\|_H^2 \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{N}\bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\bigg)^2\cdot\sum_{k=1}^{N}\bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\overline{P}_h Au(t)\|_H\,dt\bigg)^2. \qquad (3.30)$$

Из (3.25), (3.28), (3.18), (3.29) и (3.30) получаем требуемую оценку (3.22).

□

Для получения сходимости приближённых решений к точному решению предположим, что в пространстве V задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V.

Перед формулировкой утверждения о сходимости отметим, что решение задачи (1.2) $u\in L_2(0,T;V)$ и, вообще говоря, значение в точке $u(t_k)$ не определено. Поэтому вместо $\sum\limits_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau$ имеет смысл оценивать

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u(t)\,dt-u_k^h\Big\|_V^2\tau \leqslant \sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2\,dt.$$

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2. Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств, для которой выполняются условия (17), (18). Пусть $\tau h^{-2}\to 0$ при $h\to 0$. Тогда при $h\to 0$*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2\,dt+$$

$$\sum_{k=1}^{N}\bigg\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\bigg\|_{V'}^2\tau\to 0. \qquad (3.31)$$

Доказательство. Заметим, что

$$u(t_k) - u_k^h = (I - P_h)u(t_k) - z_k^h \quad (k = \overline{0, N}), \tag{3.32}$$

$$u(t) - u_k^h = (I - P_h)u(t) + P_h[u(t) - u(t_k)] - z_k^h \quad (k = \overline{0, N}), \tag{3.33}$$

$$\frac{1}{\tau}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (I - \overline{P}_h)u'(t)\,dt + \frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} \quad (k = \overline{1, N}). \tag{3.34}$$

Покажем сходимость к нулю правой части (3.22).

Для первого слагаемого в правой части (3.22) воспользуемся оценкой из [61]

$$\sum_{k=1}^N \|\psi_k^h\|_{V_h'}^2 \tau \leqslant C\left\{\int\limits_0^T \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2\,dt + \sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|P_h[u(t) - u(t_k)]\|_V^2\,dt\right\}. \tag{3.35}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (3.35) воспользуемся оценкой, следующей из (18), для всех $u_h \in V_h$

$$\|u_h\|_H = \sup_{v_h \in V_h, v_h \neq \theta} \frac{|(u_h, v_h)|}{\|v_h\|_H} \leqslant r_1 h^{-1} \sup_{v_h \in V_h, v_h \neq \theta} \frac{|(u_h, v_h)|}{\|v_h\|_V} \leqslant r_1 h^{-1} \|u_h\|_{V_h'}. \tag{3.36}$$

С учётом (18), (3.36) и (9), почти при всех $t \in (t_{k-1}, t_k)$ имеем

$$\|P_h[u(t) - u(t_k)]\|_V^2 \leqslant r_1^4 h^{-4} \|P_h[u(t) - u(t_k)]\|_{V_h'}^2 =$$

$$r_1^4 h^{-4} \left\|\int\limits_t^{t_k} \overline{P}_h u'(s)\,ds\right\|_{V_h'}^2 \leqslant r_1^4 \tau h^{-4} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(t)\|_{V'}^2\,dt.$$

Отсюда следует

$$\sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|P_h[u(t) - u(t_k)]\|_V^2\,dt \leqslant r_1^4 \tau^2 h^{-4} \int\limits_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\,dt. \tag{3.37}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое правой части (3.22). Учитывая (3.36), (9) и ограниченность оператора $A : V \to V'$, получим оценку

$$\sum_{k=1}^N \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)|\,ds\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^N \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P}_h A u(t)\|_H\,dt\right)^2 \leqslant$$

$$r_1^2 h^{-2} \left(\int\limits_0^T |p'(s)|\, ds \right)^2 \cdot \sum_{k=1}^N \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P}_h A u(t)\|_{V_h'}\, dt \right)^2 \leqslant$$

$$(p(0) - p(T))^2 M^2 r_1^2 h^{-2} \sum_{k=1}^N \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)\|_V\, dt \right)^2 \leqslant$$

$$(p(0) - p(T))^2 M^2 r_1^2 \tau h^{-2} \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt. \tag{3.38}$$

Таким образом, с учётом (3.35), (3.37) и (3.38), оценка (3.22) примет вид

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|z_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \left(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_H^2 + \|z_k^h\|_V^2 \tau + \|(z_k^h - z_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2 \tau \right) \leqslant$$

$$C \left\{ \int\limits_0^T \|(I - Q_h) u(t)\|_V^2\, dt + \tau h^{-2} \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt + \tau^2 h^{-4} \int\limits_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\, dt \right\}. \tag{3.39}$$

Из (3.32) и (3.39) получаем оценку первого слагаемого в (3.31)

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \leqslant C \left\{ \max_{1\leqslant k\leqslant N} \|(I - P_h) u(t_k)\|_H^2 + \int\limits_0^T \|(I - Q_h) u(t)\|_V^2\, dt + \right.$$

$$\left. \tau h^{-2} \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\, dt + \tau^2 h^{-4} \int\limits_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\, dt \right\}. \tag{3.40}$$

Заметим, что для $v \in V$

$$(I - P_h) v = (I - P_h)(I - Q_h) v. \tag{3.41}$$

Из (3.41) и (19) следует неравенство

$$\|(I - P_h) v\|_V \leqslant (2 + r r_1) \|(I - Q_h) v\|_V,$$

с учётом которого, из (3.33), (3.37) и (3.39) следует оценка второго слагаемого в (3.31)

$$\sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u_k^h\|_V^2\, dt \leqslant$$

$$C\left\{\int\limits_0^T \|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt + \tau h^{-2}\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt + \tau^2 h^{-4}\int\limits_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\,dt\right\}. \quad (3.42)$$

Оценку третьего слагаемого в (3.31) получаем из (3.34), с учётом (2.21), (10) и (3.39)

$$\sum_{k=1}^{N}\left\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\right\|_{V'}^2 \tau \leqslant C\left\{\int\limits_0^T \|(I-S_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt + \right.$$

$$\left.\int\limits_0^T \|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt + \tau h^{-2}\int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt + \tau^2 h^{-4}\int\limits_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2\,dt\right\}. \quad (3.43)$$

Таким образом, сходимость (3.31) следует из оценок (3.40), (3.42), (3.43), предельной плотности $\{V_h\}$ в пространствах V, H и V', непрерывности функции $u(t) \in H$ и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. $\square$

Далее покажем, что при условии дополнительной гладкости решения $u(t)$ требование $\tau = o(h^2)$ для сходимости можно существенно ослабить. Кроме того, можно получить порядки скорости сходимости, как по времени, так и по пространству.

Следствие 3.2. *Пусть выполнены условия следствия 3.1, но при этом только $\tau h^{-1} \to 0$ при $h \to 0$. Пусть решение задачи (1.2) $u(t)$ обладает дополнительной гладкостью $u' \in L_2(0,T;H)$. Пусть также $p' \in L_2(0,T)$. Тогда при $h \to 0$ выполняется сходимость (3.31).*

Доказательство. Получим оценку для второго слагаемого правой части (3.35). С учётом (18) получим, что почти при всех $t \in (t_{k-1}, t_k)$

$$\|P_h[u(t)-u(t_k)]\|_V^2 = \left\|\int\limits_t^{t_k} \overline{P}_h u'(s)\,ds\right\|_V^2 \leqslant$$

$$r_1^2 h^{-2}\left\|\int\limits_t^{t_k} \overline{P}_h u'(s)\,ds\right\|_H^2 \leqslant r_1^2 \tau h^{-2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(t)\|_H^2\,dt.$$

Следовательно

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|P_h[u(t)-u(t_k)]\|_V^2\,dt\leqslant r_1^2\tau^2h^{-2}\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt. \tag{3.44}$$

Учитывая условие $p'\in L_2(0,T)$, а также условия (3.36), (9) и ограниченность оператора $A:V\to V'$, вместо оценки (3.38) второго слагаемого правой части (3.22) будем иметь оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\Bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Bigg)^2\cdot\sum_{k=1}^{N}\Bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\overline{P}_hAu(t)\|_H\,dt\Bigg)^2\leqslant$$

$$M^2r_1^2\tau^2h^{-2}\int\limits_0^T|p'(s)|^2\,ds\int\limits_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt. \tag{3.45}$$

Теперь, с учётом, (3.35), (3.44) и (3.45), действуя, как и в доказательстве следствия 3.1, вместо оценок (3.40) и (3.42) получим соответственно оценки

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\leqslant C\Bigg\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2+\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\tau^2h^{-2}\Big(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt\Big)\Bigg\}, \tag{3.46}$$

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2\,dt\leqslant C\Bigg\{\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\tau^2h^{-2}\Big(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt\Big)\Bigg\}. \tag{3.47}$$

Используя (2.26), (3.44) и (3.45), вместо оценки (3.43) будем иметь оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\Bigg\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Bigg\|_{V'}^2\tau\leqslant C\Bigg\{h^2\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt+$$

$$\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+\tau^2h^{-2}\Big(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt\Big)\Bigg\}. \tag{3.48}$$

Сходимость (3.31) теперь следует из оценок (3.46), (3.47) и (3.48). □

Докажем теперь утверждение о сходимости приближённых решений к точному в случае, когда τ и h стремятся к нулю независимым образом.

Следствие 3.3. *Пусть выполнены условия следствия 3.1 без предположения $\tau = o(h^2)$. Пусть $u(t)$, решение задачи (1.2), обладает дополнительной гладкостью $u' \in L_2(0,T;V)$, а $Au \in L_2(0,T;H)$. Пусть также $p' \in L_2(0,T)$. Тогда при $h \to 0$ и $\tau \to 0$ (независимым образом)*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau +$$

$$\sum_{k=1}^{N} \left\| \frac{1}{\tau} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} \right\|_{V'}^2 \tau \to 0. \tag{3.49}$$

Доказательство. Получим оценку для второго слагаемого правой части (3.35). Воспользуемся оценкой

$$\|u(t) - u(t_k)\|_V^2 = \left\| \int\limits_{t}^{t_k} u'(s)\,ds \right\|_V^2 \leqslant \tau \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u'(t)\|_V^2\,dt.$$

Отсюда, в силу равномерной по h ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|P_h[u(t) - u(t_k)]\|_V^2\,dt \leqslant C \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t) - u(t_k)\|_V^2\,dt \leqslant C\tau^2 \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt. \tag{3.50}$$

Получим теперь оценку для второго слагаемого правой части (3.22). Учитывая, что $Au \in L_2(0,T;H)$ и $p' \in L_2(0,T)$, имеем

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)|\,ds \right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{N} \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|P_h Au(t)\|_H\,dt \right)^2 \leqslant$$

$$\tau^2 \int\limits_0^T |p'(s)|^2\,ds \cdot \int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt. \tag{3.51}$$

Теперь, с учётом (3.50) и (3.51), вместо оценок (3.46) и (3.48), получим соответственно оценки

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\leqslant C\Big\{\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2+\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\tau^2\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)\Big\},\tag{3.52}$$

$$\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_{V'}^2\tau\leqslant C\Big\{h^2\int\limits_0^T\|u'(t)\|_H^2\,dt+$$

$$\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+\tau^2\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)\Big\}.\tag{3.53}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (3.49). Имеем

$$\sum_{k=1}^N\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau\leqslant\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u_k^h\|_V\,dt\Big)^2\leqslant\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\,dt\leqslant$$

$$2\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u(t)\|_V^2\,dt+2\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2\,dt.\tag{3.54}$$

Из (3.54), (3.42), (3.50) и (3.51) получаем

$$\sum_{k=1}^N\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau\leqslant C\Big\{\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\tau^2\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)\Big\}.\tag{3.55}$$

Из оценок (3.52), (3.53) и (3.55) следует сходимость (3.49). □

Предположим теперь, что существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $E\subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$. Пусть также вместо (17) подпространства $V_h\subset V$ удовлетворяют условию (15), из которого следует (16).

Покажем, как в сделанных предположениях получаются оценки, позволяющие судить о скорости сходимости приближенных решений к точному как по временной, так и по пространственной переменным.

Следствие 3.4. *Пусть выполнены условия следствия 3.3. Пусть также $u \in L_2(0,T;E)$ и выполнено условие (15). Тогда справедливы оценки*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \leqslant$$

$$C\Big\{h^2\Big(\max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt\Big) + \tau^2\Big(\int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)\Big\}; \tag{3.56}$$

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2\tau \leqslant$$

$$C\Big\{h^2\int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt + \tau^2\Big(\int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)\Big\}; \tag{3.57}$$

$$\sum_{k=1}^N \Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt - \frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_{V'}^2 \tau \leqslant$$

$$C\Big\{h^2\Big(\int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_H^2\,dt\Big) + \tau^2\Big(\int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt + \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Big)\Big\}. \tag{3.58}$$

Доказательство. Оценка (3.57) следует из (3.55) и (15), оценка (3.56) – из (3.52), (15), (3.41) и (16), а оценка (3.58) – из (3.53) и (15). □

§3.3. Сходимость проекционно-разностного метода для гладко разрешимого параболического уравнения

Покажем, что сходимость норм погрешности к нулю при независимом стремлении шагов разбиения по временной и пространственной переменным, а также оценки скорости сходимости можно получить для любой предельно плотной в пространстве V последовательности конечномерных подпространств $\{V_h\}$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Пусть решение задачи (1.2) $u(t)$ обладает дополнительной гладкостью $u' \in L_2(0,T;V)$, а u_k^h ($k = \overline{0,N}$) – решение задачи (3.1), в которой $f_k^h = \tau^{-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t)\,dt$, а $\overline{u}_h = R_h \overline{u}$. Обозначим через $y_k^h = u_k^h - Q_h u(t_k)$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|y_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N}\Big(\|y_k^h - y_{k-1}^h\|_H^2 + \|y_k^h\|_V^2\tau + \|(y_k^h - y_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\tau\Big) \leqslant$$

$$C\left\{\sum_{k=1}^{N} \|\omega_k^h\|_{V_h'}^2\tau + \sum_{k=1}^{N}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)|\,ds\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{N}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|\overline{P}_h A u(t)\|_H\,dt\right)^2 + \right.$$

$$\left. \int\limits_0^T \|(I - Q_h)u'(t)\|_H^2\,dt\right\}, \tag{3.59}$$

где $\omega_k^h = \frac{1}{\tau}(P_h - Q_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})] + \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [u(t) - Q_h u(t_k)]\,dt.$

Доказательство. К уравнению в (1.2) применим оператор $\overline{P}_h$, полученное равенство проинтегрируем от t_{k-1} до t_k и разделим на τ. Имеем

$$\frac{P_h(u(t_k) - u(t_{k-1}))}{\tau} + \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\,dt = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h f(t)\,dt. \tag{3.60}$$

Отсюда и из (3.1) следует равенство

$$\frac{y_k^h - y_{k-1}^h}{\tau} + A_h y_k^h = (P_h - Q_h)\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau} + \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (u(t) - Q_h u(t_k))\,dt,$$

или

$$\frac{y_k^h - y_{k-1}^h}{\tau} + A_h y_k^h = \omega_k^h. \tag{3.61}$$

Так как y_k^h ($k = \overline{1,N}$) – решение уравнения (3.61), то справедлива оценка (3.12)

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|y_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N}\Big(\|y_k^h - y_{k-1}^h\|_H^2 + \|y_k^h\|_V^2\tau + \|(y_k^h - y_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\tau\Big) \leqslant$$

$$C\Big\{\|y_0^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \|\omega_k^h\|_{V_h'}^2 \tau\Big\}. \tag{3.62}$$

Теперь для получения оценки (3.59) необходимо оценить $\|y_0^h\|_H^2$.

Из (3.1) и (3.60) получаем

$$\frac{y_k^h - y_{k-1}^h}{\tau} + A_h u_k^h - (P_h - Q_h)\frac{u(t_k) - u(t_{k-1})}{\tau} - \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\,dt = 0.$$

Умножим последнее равенство на $p_k\tau$ и просуммируем по k от 1 до N. Учитывая (3.1), имеем

$$\sum_{k=1}^{N} p_k(y_k^h - y_{k-1}^k) + A_h\overline{u}_h - (P_h - Q_h)\sum_{k=1}^{N} p_k(u(t_k) - u(t_{k-1})) -$$

$$\overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} p_k u(t)\,dt = 0. \tag{3.63}$$

Применим к первому слагаемому формулу суммирования по частям

$$\sum_{k=1}^{N} p_k(y_k^h - y_{k-1}^h) = -\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1} - p_k)y_k^h + p_N y_N^h - p_0 y_0^h. \tag{3.64}$$

Используя (1.2) и (12), сделаем преобразование

$$\overline{P}_h A\overline{u}_h - \overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} p_k u(t)\,dt = \overline{P}_h A\overline{u}_h - \overline{P}_h A\overline{u} + \overline{P}_h A \int\limits_{0}^{T} p(t)u(t)\,dt -$$

$$\overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} p_k u(t)\,dt = \overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [p(t) - p_k]u(t)\,dt. \tag{3.65}$$

Из (3.63) с учётом (3.64) и (3.65) получаем

$$p_0 y_0^h = p_N y_N^h - \sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1} - p_k)y_k^h - \overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [p(t) - p_k]u(t)\,dt -$$

$$(P_h - Q_h)\sum_{k=1}^{N} p_k[u(t_k) - u(t_{k-1})]. \tag{3.66}$$

Отметим, что из (3.61) для y_k^h $(k=\overline{1,N})$ следует представление

$$y_k^h = (I+\tau A_h)^{-k} y_0^h + \sum_{i=1}^{k} (I+\tau A_h)^{-k+1-i} \omega_i^h \tau \qquad (k=\overline{1,N}). \tag{3.67}$$

Подставив (3.67) в (3.66), будем иметь

$$\Big[p_0 I - p_N (I+\tau A_h)^{-N} + \sum_{k=0}^{N-1} (p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\Big] y_0^h =$$

$$p_N \sum_{i=1}^{N} (I+\tau A_h)^{-N+1-i}\omega_i^h \tau - \sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\omega_i^h\tau -$$

$$\overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [p(t)-p_k] u(t)\,dt - (P_h - Q_h)\sum_{k=1}^{N} p_k [u(t_k)-u(t_{k-1})].$$

Заметим, что $p_0 I - p_N (I+\tau A_h)^{-N} + \sum\limits_{k=0}^{N-1} (p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k} = D_h$. В силу обратимости оператора D_h в пространстве V_h, показанной в §3.1, получаем

$$y_0^h = D_h \Bigg[p_N \sum_{i=1}^{N} (I+\tau A_h)^{-N+1-i}\omega_i^h \tau - \sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\omega_i^h\tau -$$

$$\overline{P}_h A \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [p(t)-p_k] u(t)\,dt - (P_h - Q_h)\sum_{k=1}^{N} p_k [u(t_k)-u(t_{k-1})]\Bigg]. \tag{3.68}$$

Отметим, что для первых трёх слагаемых в правой части (3.68) имеют место оценки (3.29) и (3.30). Оценим четвёртое слагаемое в (3.68)

$$\|(P_h - Q_h)\sum_{k=1}^{N} p_k [u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_H^2 \leqslant \Big\|(I-Q_h)\sum_{k=1}^{N} p_k \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt\Big\|_H^2 \leqslant$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{N} p_k \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I-Q_h)u'(t)\|_H\,dt\Big)^2 \leqslant p_0^2 T \int\limits_0^T \|(I-Q_h)u'(t)\|_H^2\,dt. \tag{3.69}$$

Из (3.62), (3.68), (15), (16), (3.69), с учётом равномерной по h ограниченности оператора $D_h : V_h \to V_h$, где в пространстве V_h рассматривается норма пространства H, получаем требуемую оценку (3.59). □

Для получения сходимости приближённых решений к точному решению предположим, что в пространстве V задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в V.

Следствие 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы 3.3. Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств. Пусть $u(t)$ – решение задачи (1.2), такое что $Au \in L_2(0,T;H)$. Пусть также $p' \in L_2(0,T)$. Тогда при $h \to 0$ и $\tau \to 0$*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 + \sum_{k=1}^{N} \|u(t_k) - u_k^h\|_V^2 \tau \to 0. \tag{3.70}$$

Доказательство. Покажем сходимость к нулю правой части (3.59).

Рассмотрим слагаемое

$$\sum_{k=1}^{N} \|\omega_k^h\|_{V_h'}^2 \tau = \sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau}(P_h - Q_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})] + \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [u(t) - Q_h u(t_k)]\,dt \Big\|_{V_h'}^2 \tau.$$

Используя (9), (1) и (2), получим оценки

$$\sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau}(P_h - Q_h)[u(t_k) - u(t_{k-1})] \Big\|_{V_h'}^2 \tau \leqslant \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{N} \Big\| (I - Q_h) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt \Big\|_{V'}^2 \leqslant$$

$$\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I - Q_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt \leqslant \frac{1}{\beta_1\beta_2} \int\limits_0^T \|(I - Q_h)u'(t)\|_V^2\,dt, \tag{3.71}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \Big\| \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [u(t) - Q_h u(t_k)]\,dt \Big\|_{V_h'}^2 \tau \leqslant \frac{M^2}{\tau} \sum_{k=1}^{N} \Big\| \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [u(t) - Q_h u(t_k)]\,dt \Big\|_V^2 \leqslant$$

$$M^2 \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|[u(t) - Q_h u(t_k)]\|_V^2\,dt \leqslant 2M^2 \int\limits_0^T \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2\,dt +$$

$$2M^2\tau \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{t}^{t_k} \|Q_h u'(s)\|_V^2\,ds\,dt \leqslant 2M^2 \Big[\int\limits_0^T \|(I - Q_h)u(t)\|_V^2 + \tau^2 \int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt \Big],$$

из которых следует, что

$$\sum_{k=1}^{N}\|\omega_k^h\|_{V_h'}^2\tau \leqslant C\Bigg\{\int_0^T \|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+\int_0^T \|(I-Q_h)u'(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\tau^2\int_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Bigg\}. \tag{3.72}$$

Учитывая условия следствия, а также неравенства (1) и (3.72), из (3.59) получим оценку

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|y_k^h\|_H^2+\sum_{k=1}^{N}\Big(\|y_k^h-y_{k-1}^h\|_H^2+\|y_k^h\|_V^2\tau+\|(y_k^h-y_{k-1}^h)\tau^{-1}\|_{V_h'}^2\tau\Big)\leqslant$$

$$C\Bigg\{\int_0^T \|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+\int_0^T \|(I-Q_h)u'(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\tau^2\int_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt+\tau^2\int_0^T |p'(t)|^2\,dt\cdot\int_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt\Bigg\}. \tag{3.73}$$

Заметим, что

$$u(t_k)-u_k^h=(I-Q_h)u(t_k)-y_k^h \quad (k=\overline{0,N}),$$

откуда, учитывая (3.73) и (1), получаем оценку первого слагаемого в (3.70)

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\leqslant C\Bigg\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2+\int_0^T \|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\int_0^T \|(I-Q_h)u'(t)\|_V^2\,dt+\tau^2\int_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt+\tau^2\int_0^T |p'(t)|^2\,dt\cdot\int_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt\Bigg\}. \tag{3.74}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (3.70). Имеем

$$\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau\leqslant\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\Big(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u_k^h\|_V\,dt\Big)^2\leqslant\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\,dt\leqslant$$

$$2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u(t)\|_V^2\,dt+2\sum_{k=1}^{N}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2\,dt. \tag{3.75}$$

Оценим первое слагаемое в (3.75)

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t_k)-u(t)\|_V^2\,dt=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big\|\int\limits_{t}^{t_k}u'(s)\,ds\Big\|_V^2\,dt\leqslant$$

$$\tau\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_V^2\,ds\,dt=\tau^2\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt. \qquad (3.76)$$

Для получения оценки второго слагаемого в (3.75) заметим, что

$$u(t)-u_k^h=(I-Q_h)u(t)+Q_h[u(t)-u(t_k)]-y_k^h \quad (k=\overline{0,N}),$$

откуда, учитывая (3.76) и ограниченность оператора Q_h, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u_k^h\|_V^2\,dt\leqslant 3\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt$$

$$+3\tau^2\int\limits_0^T\|u'(s)\|_V^2\,dt+3\sum_{k=1}^{N}\|y_k^h\|_V^2\tau. \qquad (3.77)$$

Теперь из (3.75), (3.76), (3.77) и (3.73) имеем оценку второго слагаемого в (3.70)

$$\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau\leqslant C\Bigg\{\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u'(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\tau^2\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\tau^2\int\limits_0^T|p'(t)|^2\,dt\cdot\int\limits_0^T\|Au(t)\|_H^2\,dt\Bigg\}. \qquad (3.78)$$

Из оценок (3.74) и (3.78), с учётом предельной плотности $\{V_h\}$ в V и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем сходимость (3.70). □

Предположим теперь, что существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $E\subset V$ и пространство V совпадает с интерполяционным пространством $[E,H]_{1/2}$. Пусть также пространства $V_h\subset V$ такие, что выполнена оценка (15), а следовательно и (16).

Покажем, как в сделанных предположениях получаются оценки, позволяющие судить о скорости сходимости приближенных решений к точному как по временной, так и по пространственной переменным.

Следствие 3.6. *Пусть выполнены условия следствия 3.5. Пусть также $u \in L_2(0,T;E)$ и выполнено условие (15). Тогда справедливы оценки*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N} \|u(t_k)-u_k^h\|_H^2 \leqslant C\Biggl\{h^2\Bigl(\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_V^2+\int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt+\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Bigr)+$$

$$\tau^2\Bigl(\int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Bigr)\Biggr\}, \tag{3.79}$$

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\tau \leqslant C\Biggl\{h^2\Bigl(\int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2\,dt+\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Bigr)+$$

$$\tau^2\Bigl(\int\limits_0^T \|Au(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Bigr)\Biggr\}. \tag{3.80}$$

Доказательство. Вернёмся к процессу получения оценок (3.74) и (3.78) в следствии 3.5. В (3.71) для перехода от нормы пространства H к норме пространства V вместо (1) применим (16), то есть получим неравенство

$$\sum_{k=1}^N \Bigl\|\frac{1}{\tau}(P_h-Q_h)(u(t_k)-u(t_{k-1}))\Bigr\|_{V_h'}^2\tau \leqslant \sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I-Q_h)u'(t)\|_{V'}^2\,dt \leqslant$$

$$\frac{1}{\beta_2}\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I-Q_h)u'(t)\|_H^2\,dt \leqslant$$

$$\frac{r^2h^2}{\beta_2}\int\limits_0^T \|(I-Q_h)u'(t)\|_V^2\,dt \leqslant \frac{4r^2h^2}{\beta_2}\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt,$$

с учётом которого оценка (3.72) примет вид

$$\sum_{k=1}^N \|\omega_k^h\|_{V_h'}^2\tau \leqslant C\Biggl\{\int\limits_0^T \|(I-Q_h)u(t)\|_V^2\,dt+h^2\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt+\tau^2\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt\Biggr\}. \tag{3.81}$$

Оценка (3.80) получается теперь из (3.78) с учётом (3.81), а также (15). А оценка (3.79) получается соответственно из (3.74), (3.81), (15) и следующего из (15) неравенства

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|(I-Q_h)u(t_k)\|_H^2 \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-Q_h)u(t)\|_H^2 \leqslant 4r^2h^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_V^2. \quad \square$$

§3.4. Среднеквадратичная сходимость проекционно-разностного метода для параболического уравнения с симметричным оператором

Пусть задача (1.2) находится в условиях слабой разрешимости. Предположим, что форма $a(u,v)$ является симметричной. В этом случае, как описано в параграфе 2.3, существует оператор $A_h^{-1} : V_h \to V_h$, а также оператор $A_h^{\frac{1}{2}} : V_h \to V_h$, являющийся непрерывно обратимым, и справедливы оценки (2.36) – (2.37).

Теорема 3.4. *Пусть форма $a(u,v)$ является симметричной. Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (1.2), а $u_k^h\,(k=\overline{0,N})$ – решение задачи (3.1). Тогда в условиях теоремы 1.1 для $z_k^h = u_k^h - P_h u(t_k)$ справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|z_k^h\|_{V_h'}^2 + \sum_{k=1}^N\Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_{V_h'}^2 + \|z_k^h\|_H^2\tau\Big) \leqslant$$

$$C\Bigg\{\int_0^T\|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt + \sum_{k=1}^N\int_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt +$$

$$\tau\sum_{k=1}^N\Bigg(\int_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Bigg)^2\cdot\int_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt\Bigg\}. \tag{3.82}$$

Доказательство. Рассмотрим уравнение (3.24). Отметим, что для его решения z_k^h справедлива оценка [62]

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|z_k^h\|_{V_h'}^2 + \sum_{k=1}^N\Big(\|z_k^h - z_{k-1}^h\|_{V_h'}^2 + \|z_k^h\|_H^2\tau\Big) \leqslant$$

$$C\left\{\|z_0^h\|^2_{V_h'}+\int\limits_0^T\|(I-R_h)u(t)\|^2_H\,dt+\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u(t_k)\|^2_H\,dt\right\}. \tag{3.83}$$

Покажем, что $\|z_0^h\|^2_{V_h'}$ оценивается равномерно по h.

Из представления (3.28) с учётом (2.37), (3.10) и (3.18) имеем оценку

$$\|z_0^h\|^2_{V_h'}\leqslant\Big\|D_h^{-1}\Big[p_N\sum_{i=1}^N(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h\tau-$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^k(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau-\overline{P}_hA\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt\Big]\Big\|^2_{V_h'}\leqslant$$

$$M\Big\|A_h^{-\frac{1}{2}}D_h^{-1}\Big[p_N\sum_{i=1}^N(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h\tau-$$

$$\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^k(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau-\overline{P}_hA\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt\Big]\Big\|^2_{H}\leqslant$$

$$3M\alpha^{-1}M_2^2\Bigg[\Big\|p_N\sum_{i=1}^N(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h\tau\Big\|^2_{V_h'}+$$

$$\Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^k(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau\Big\|^2_{V_h'}+\Big\|\overline{P}_hA\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt\Big\|^2_{V_h'}\Bigg]. \tag{3.84}$$

Так как в силу (3.27) $\xi_k^h=\sum\limits_{i=1}^k(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau$ является решением задачи

$$(\xi_k^h-\xi_{k-1}^h)\tau^{-1}+A_h\xi_k^h=\psi_k^h\ \ (k=\overline{1,\,N}),\quad \xi_0^h=0,$$

то, используя (3.83), получаем

$$\Big\|p_N\sum_{i=1}^N(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\psi_i^h\tau\Big\|^2_{V_h'}+\Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^k(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\psi_i^h\tau\Big\|^2_{V_h'}=$$

$$p_N^2\|\xi_k^h\|^2_{V_h'}+\Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\xi_k^h\Big\|^2_{V_h'}\leqslant$$

$$p_N^2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|\xi_k^h\|^2_{V_h'}+\Big|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\Big|^2\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|\xi_k^h\|^2_{V_h'}\leqslant$$

$$C\left\{\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt + \sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt\right\}. \tag{3.85}$$

Оценим теперь третье слагаемое в (3.84). Учитывая неравенство (9) и ограниченность оператора $A : V \to V'$, имеем

$$\Big\|\overline{P}_h A \sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p_k - p(t))u(t)\,dt\Big\|_{V_h'}^2 \leqslant M^2 \Big\|\sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} (p_k - p(t))u(t)\,dt\Big\|_V^2 =$$

$$M^2 \Big\|\sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(\int\limits_t^{t_k} p'(s)\,ds\Big)u(t)\,dt\Big\|_V^2 \leqslant M^2 \left(\sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)|\,ds \cdot \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)\|_V\,dt\right)^2 \leqslant$$

$$\tau M^2 \sum_{k=1}^N \left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} |p'(s)|\,ds\right)^2 \cdot \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt. \tag{3.86}$$

Таким образом, оценка (3.82) получается из оценок (3.83), (3.84), (3.85) и (3.86). $\square$

Следствие 3.7. *Пусть выполнены условия теоремы 3.4. Пусть $\{V_h\}$ – предельно плотная в V последовательность конечномерных подпространств. Тогда при $h \to 0$ и $\tau \to 0$*

$$\sum_{k=1}^N \|u(t_k) - u_k^h\|_H^2 \tau \to 0. \tag{3.87}$$

Доказательство. Отметим, что правая часть неравенства (3.82) сходится к нулю при $h \to 0$ и $\tau \to 0$: сходимость к нулю первого слагаемого следует из (1), (13) и предельной плотности $\{V_h\}$ в V, второго – из полученной в [38] оценки

$$\sum_{k=1}^N \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt \leqslant \tau C\left\{\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2\,dt + \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt\right\}, \tag{3.88}$$

а сходимость к нулю третьего слагаемого, с учётом абсолютной непрерывности функции $p(t)$, очевидна. Заметим теперь, что

$$u(t_k) - u_k^h = (I - P_h)u(t_k) - z_k^h. \tag{3.89}$$

С учётом ограниченности оператора $I - P_h$ и (3.88) получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{N} \|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2 \tau = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I-P_h)u(t_k)\|_H^2 \, dt \leqslant$$

$$2\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I-P_h)(u(t_k)-u(t))\|_H^2 \, dt + 2\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|(I-P_h)u(t)\|_H^2 \, dt \leqslant$$

$$2\sum_{k=1}^{N} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \|u(t_k)-u(t)\|_H^2 \, dt + 2\int\limits_0^T \|(I-P_h)u(t)\|_H^2 \, dt. \tag{3.90}$$

Теперь сходимость к нулю (3.87) следует из (3.82), (3.88), (3.89) и (3.90), а также предельной плотности $\{V_h\}$ в H и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. □

Предположим теперь, что существует сепарабельное гильбертово пространство E такое, что $D(A) \subset E \subset V$ и выполняется типичная для эллиптических операторов оценка (22). Пусть также подпространства V_h удовлетворяют условию (15) и, следовательно, условию (2.44). Покажем, как в сделанных предположениях получаются оценки, позволяющие судить о скорости сходимости приближенных решений к точному как по временной, так и по пространственной переменным.

Следствие 3.8. *Пусть выполнены условия следствия 3.7, а также условия (15) и (22). Тогда*

$$\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k)-u_k^h\|_H^2 \tau \leqslant C\left\{h^2 \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2 \, dt + \tau\Big(\int\limits_0^T \|f(t)\|_{V'}^2 \, dt + \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2 \, dt\Big)\right\}. \tag{3.91}$$

Если же решение задачи более гладкое: $u \in L_2(0,T;E)$, $u' \in L_2(0,T;H)$, а $p' \in L_2(0,T)$, то справедлива следующая оценка

$$\sum_{k=1}^{N} \|u(t_k)-u_k^h\|_H^2 \tau \leqslant C\left\{h^4 \int\limits_0^T \|u(t)\|_E^2 \, dt + \tau^2\Big(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_H^2 \, dt + \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2 \, dt\Big)\right\}. \tag{3.92}$$

Доказательство. Из (3.89) с учётом (3.90) и (3.82) имеем оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\|u(t_k)-u_k^h\|_H^2\tau \leqslant C\Bigg\{\int\limits_0^T \|(I-P_h)u(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T \|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt+$$

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt+\tau\sum_{k=1}^{N}\Bigg(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Bigg)^2\cdot\int\limits_0^T\|u(t)\|_V^2\,dt\Bigg\}. \qquad (3.93)$$

Рассмотрим первое второе слагаемые в правой части (3.93). Заметим, что для $v\in H$ справедливо соотношение $(I-P_h)v=(I-P_h)(I-R_h)v$. Тогда, используя оценку (2.44), будем иметь

$$\int\limits_0^T\|(I-P_h)u(t)\|_H^2\,dt+\int\limits_0^T\|(I-R_h)u(t)\|_H^2\,dt\leqslant 2M^2d^2r^2h^2\int\limits_0^T\|(I-Q_h)u(t)\|_V\,dt. \qquad (3.94)$$

Оценка (3.91) теперь следует из (3.93), (3.88), (3.90), (3.94) и абсолютной непрерывности функции $p(t)$.

Для получения оценки (3.92) проведём оценку третьего слагаемого в правой части неравенства (3.93):

$$\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u(t)-u(t_k)\|_H^2\,dt=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big\|\int\limits_t^{t_k}u'(s)\,ds\Big\|_H^2\,dt\leqslant$$

$$\tau\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_H^2\,ds\,dt=\tau^2\int\limits_0^T\|u'(s)\|_H^2\,ds. \qquad (3.95)$$

Теперь оценка (3.92) получается из оценок (3.93), (3.95), (3.94) и (15), а также неравенства

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Big)^2\leqslant\tau\int\limits_0^T|p'(s)|^2\,ds.\quad\square \qquad (3.96)$$

§3.5. Сильная сходимость проекционно-разностного метода для параболического уравнения с симметричным оператором

Теорема 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Предположим, что форма $a(u,v)$ является симметричной. Пусть $u(t)$ – слабое решение задачи (1.2), обладающее дополнительной гладкостью $u \in C([0,T],V)$, а $u_k^h\,(k=\overline{0,N})$ – решение задачи (3.1). Обозначим $r_k^h = R_h u(t_k) - u_k^h$. Тогда справедлива оценка*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|r_k^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \|r_k^h - r_{k-1}^h\|_V^2 + \sum_{k=1}^N \Big\|\frac{r_k^h - r_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2 \tau \leqslant$$

$$C\Bigg\{\sum_{k=1}^N \frac{1}{\tau}\|(I-R_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_H^2 + \sum_{k=1}^N \Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k)-u(t)]\,dt\Big\|_V^2 +$$

$$\Big\|\sum_{k=1}^N (R_h - P_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\Big\|_V^2 +$$

$$\sum_{k=1}^N\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Big)^2 \cdot \sum_{k=1}^N\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\overline{P}_h A u(t)\|_V\,dt\Big)^2\Bigg\}. \tag{3.97}$$

Доказательство. К уравнению (1.2) применим оператор P_h, полученное равенство проинтегрируем от t_{k-1} до t_k, разделим на τ и вычтем из него уравнение в (3.1). Имеем

$$\frac{r_k^h - r_{k-1}^h}{\tau} - A_h u_k^h = \frac{1}{\tau}(R_h - P_h)(u(t_k)-u(t_{k-1})) - \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\,dt. \tag{3.98}$$

С учётом представления $P_h u(t_k) = \tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k} P_h u(t_k)\,dt$ и равенства (12) из (3.98) следуют равенства

$$\frac{r_k^h - r_{k-1}^h}{\tau} + A_h r_k^h = \phi_k^h \qquad (k=\overline{1,N}), \tag{3.99}$$

где $\phi_k^h = \tau^{-1}(R_h - P_h)(u(t_k)-u(t_{k-1})) + \tau^{-1}\overline{P}_h A\int_{t_{k-1}}^{t_k}(u(t_k)-u(t))\,dt$.

Так как r_k^h – решение уравнения (3.99), то справедлива оценка [62]

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|r_k^h\|_V^2+\sum_{k=1}^N\|r_k^h-r_{k-1}^h\|_V^2+\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{r_k^h-r_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau\leqslant$$

$$C\Bigg\{\|r_0^h\|_V^2+\sum_{k=1}^N\frac{1}{\tau}\|(I-R_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_H^2+\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k)-u(t)]\,dt\Big\|_V^2\Bigg\}. \tag{3.100}$$

Оценим $\|r_0^h\|_V^2$.

Умножим (3.98) на $p_k\tau$ и просуммируем по k от 1 до N

$$\sum_{k=1}^N p_k(r_k^h-r_{k-1}^h)-A_h\sum_{k=1}^N p_k u_k^h\tau=$$

$$\sum_{k=1}^N p_k(R_h-P_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]-\overline{P}_hA\sum_{k=1}^N p_k\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u(t)\,dt. \tag{3.101}$$

С учётом (1.2), (12) и (3.1) имеем

$$A_h\sum_{k=1}^N p_k u_k^h\tau-\overline{P}_hA\sum_{k=1}^N p_k\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u(t)\,dt=\overline{P}_hA\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt. \tag{3.102}$$

К первому слагаемому в левой части (3.101) применим формулу суммирования по частям

$$\sum_{k=1}^N p_k(r_k^h-r_{k-1}^h)=-\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)r_k^h+p_Nr_N^h-p_0r_0^h. \tag{3.103}$$

С учётом преобразований (3.102) и (3.103) равенство (3.101) примет вид

$$p_0r_0^h=p_Nr_N^h-\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)r_k^h-$$

$$\overline{P}_hA\sum_{k=1}^N\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt-\sum_{k=1}^N p_k(R_h-P_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]. \tag{3.104}$$

Для решения уравнения (3.99) r_k^h имеет место представление (3.13):

$$r_k^h=(I+\tau A_h)^{-k}r_0^h+\sum_{k=1}^N(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\phi_i^h\tau\qquad(k=\overline{1,N}). \tag{3.105}$$

Подставим представление (3.105) в равенство (3.104), получим

$$p_0\left[I-\frac{p_N}{p_0}(I+\tau A_h)^{-N}+\frac{1}{p_0}\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)(I+\tau A_h)^{-k}\right]r_0^h=$$

$$p_N\sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\phi_i^h\tau-\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\phi_i^h\tau-$$

$$\overline{P}_hA\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt-\sum_{k=1}^{N}p_k(R_h-P_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})],$$

откуда с учётом (3.6) имеем

$$r_0^h=D_h^{-1}\left[p_N\sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\phi_i^h\tau-\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\phi_i^h\tau-\right.$$

$$\left.\overline{P}_hA\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(p(t)-p_k)u(t)\,dt-\sum_{k=1}^{N}p_k(R_h-P_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\right].$$

Заметим, что в силу (2.36), (3.10) и (3.18)

$$\|D_h^{-1}v_h\|_V\leqslant\alpha^{-1/2}\|D_h^{-1}A_h^{\frac{1}{2}}v_h\|_H\leqslant\alpha^{-1/2}M_2M^{1/2}\|v_h\|_V\qquad(v_h\in V).$$

Тогда получаем оценку

$$\|r_0^h\|_V^2\leqslant C\left\{\left\|p_N\sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\phi_i^h\tau\right\|_V^2+\right.$$

$$\left\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\phi_i^h\tau\right\|_V^2+$$

$$\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Big)^2\cdot\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\overline{P}_hAu(t)\|_V\,dt\Big)^2+$$

$$\left.\left\|\sum_{k=1}^{N}(R_h-P_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\right\|_V^2\right\}.\tag{3.106}$$

Так как в силу (3.105) $\xi_k^h=\sum\limits_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\phi_i^h\tau$ является решением задачи

$$\frac{\xi_k^h-\xi_{k-1}^h}{\tau}+A_h\xi_k^h=\phi_k^h,\qquad\xi_0^h=0,$$

то, используя (3.100), получим

$$\Big\|p_N\sum_{i=1}^{N}(I+\tau A_h)^{-N+1-i}\phi_i^h\tau\Big\|_V^2+\Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\sum_{i=1}^{k}(I+\tau A_h)^{-k+1-i}\phi_i^h\tau\Big\|_V^2=$$

$$p_N^2\|\xi_N^h\|_V^2+\Big\|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\xi_k^h\Big\|_V^2\leqslant\left(p_N^2+\Big|\sum_{k=0}^{N-1}(p_{k+1}-p_k)\Big|^2\right)\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|\xi_k^h\|_V^2=$$

$$[p_N^2+(p_0-p_N)^2]\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|\xi_k^h\|_V^2\leqslant$$

$$C\left\{\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\|(I-R_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_V^2+\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k)-u(t)]\,dt\Big\|_V^2\right\}. \quad (3.107)$$

Таким образом, оценка (3.97) следует из (3.100), (3.106) и (3.107). □

Следствие 3.9. *Пусть выполнены условия теоремы 3.5, причём решение задачи (1.2) $u(t)$ обладает дополнительной гладкостью $u' \in L_2(0,T;V)$, а $Au \in L_1(0,T;V)$. Пусть $\{V_h\}$ – последовательность конечномерных подпространств, предельно плотная в V, такая что $\|P_h\|_{V\to V}$ равномерно по h ограничены. Предположим также, что $p' \in L_2(0,T)$. Тогда при $h\to 0$ и $\tau\to 0$*

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2+\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau\to 0. \quad (3.108)$$

Доказательство. Заметим, что

$$u(t_k)-u_k^h=(I-R_h)u(t_k)+r_k^h. \quad (3.109)$$

Рассмотрим слагаемые в правой части (3.97). Так как

$$\frac{1}{\tau}\|(I-R_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_H^2=\frac{1}{\tau}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(I-R_h)u'(t)\,dt\Big\|_H^2\leqslant\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|(I-R_h)u'(t)\|_H^2\,dt,$$

следовательно

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\tau}\|(I-R_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\|_H^2\leqslant\int\limits_0^T\|(I-R_h)u'(t)\|_H^2\,dt. \quad (3.110)$$

Имеем также при $t \in [t_{k-1}, t_k]$

$$\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k)-u(t)]\,dt\Big\|_V^2 = \frac{1}{\tau^2}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\int\limits_{t}^{t_k}u'(s)\,ds\Big)\,dt\Big\|_V^2 \leqslant \tau\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_V^2\,ds,$$

откуда получаем

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}[u(t_k)-u(t)]\,dt\Big\|_V^2 \leqslant \tau\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt. \qquad (3.111)$$

Для третьего слагаемого в правой части (3.97) имеем

$$\Big\|\sum_{k=1}^{N}(R_h-P_h)[u(t_k)-u(t_{k-1})]\Big\|_V^2 \leqslant \|P_h\|_{V\to V}^2\Big\|\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(R_h-I)u'(t)\,dt\Big\|_V^2 \leqslant$$

$$\|P_h\|_{V\to V}^2\Big(\int\limits_0^T\|(I-R_h)u'(t)\|_V\,dt\Big)^2. \qquad (3.112)$$

Таким образом, из равенства (3.109), оценок (3.97), (3.110), (3.111), (3.112), условия $Au \in L_1(0,T;V)$ и ограниченности $\|P_h\|_{V\to V}$ получаем оценку

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2 \leqslant C\Big\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-R_h)u(t)\|_V^2 + \int\limits_0^T\|(I-R_h)u'(t)\|_V^2\,dt +$$

$$\tau\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt + \sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Big)^2\cdot\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_V\,dt\Big)^2\Big\}, \qquad (3.113)$$

Для получения оценки второго слагаемого в (3.108) заметим, что

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt - \frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau} = (I-R_h)\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt + \frac{r_k^h-r_{k-1}^h}{\tau}. \qquad (3.114)$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt - \frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau \leqslant 2\sum_{k=1}^{N}\Big\|(I-R_h)\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,dt\Big\|_H^2\tau$$

$$+2\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{r_k^h-r_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2 \leqslant 2\int\limits_0^T\|(I-R_h)u'(t)\|_H^2\,dt + 2\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{r_k^h-r_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2. \qquad (3.115)$$

Из равенства (3.114) и оценок (3.97), (3.110), (3.111), (3.112) и (3.115) получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau\leqslant C\Big\{\int\limits_0^T\|(I-R_h)u'(t)\|_V^2\,dt+$$

$$\tau\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|p'(s)|\,ds\Big)^2\cdot\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_V\,dt\Big)^2\Big\}. \tag{3.116}$$

Сходимость (3.108) следует из оценок (3.113), (3.116), (13), предельной плотности $\{V_h\}$ в V, непрерывности вложения $V\subset H$, теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, а также оценки (3.96). $\square$

Из теоремы 3.5 можно получить и скорость сходимости по пространству и по времени.

Следствие 3.10. *Пусть выполнены условия следствия 3.9, а также условия (15) и (22). Пусть $u\in L_2(0,T;V)\bigcap L_1(0,T;E)$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u'(t)\,dt-\frac{u_k^h-u_{k-1}^h}{\tau}\Big\|_H^2\tau\leqslant C\Big\{h^2\Big[\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\Big(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_E\,dt\Big)^2\Big]+$$

$$\tau\Big[\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_V\,dt\Big)^2\Big]\Big\}. \tag{3.117}$$

Предположим дополнительно, что $u'\in L_1(0,T;E)$, тогда имеет место оценка

$$\max_{1\leqslant k\leqslant N}\|u(t_k)-u_k^h\|_V^2\leqslant C\Big\{h^2\Big[\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2+\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\Big(\int\limits_0^T\|u'(t)\|_E\,dt\Big)^2\Big]+$$

$$\tau\Big[\int\limits_0^T\|u'(t)\|_V^2\,dt+\Big(\int\limits_0^T\|Au(t)\|_V\,dt\Big)^2\Big]\Big\}. \tag{3.118}$$

Доказательство. Рассмотрим правую часть (3.116). Из (13), (15) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует оценка

$$\Big(\int\limits_0^T \|(I-R_h)u'(t)\|_V\,dt\Big)^2 \leqslant M^2\alpha^{-2}r^2h^2\Big(\int\limits_0^T \|u'(t)\|_E\,dt\Big)^2, \tag{3.119}$$

а из (2.44) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла – оценка

$$\int\limits_0^T \|(I-R_h)u'(t)\|_H^2\,dt \leqslant 4M^2d^2r^2h^2\int\limits_0^T \|u'(t)\|_V^2\,dt. \tag{3.120}$$

Оценка (3.117) получается из (3.116), (3.119), (3.120) и (3.96).

Оценим теперь первое слагаемое в правой части (3.113). С учётом (13) и (15) имеем

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-R_h)u(t)\|_V^2 \leqslant M^2\alpha^{-2}\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|(I-Q_h)u(t)\|_V^2 \leqslant$$

$$M^2\alpha^{-2}r^2h^2\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(t)\|_E^2. \tag{3.121}$$

Оценка (3.118) следует из (3.113), (3.119), (3.120), (3.96) и (3.121). □

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации для линейных уравнений параболического типа в вариационной форме с весовым интегральным условием на решение построена теория слабой и более гладкой разрешимости, а также теория сходимости проекционного и проекционно-разностного методов приближённого решения таких задач.

В первой главе диссертации для линейных параболических уравнений с весовым интегральным условием, заданных в вариационной форме, доказано утверждение о слабой разрешимости. Также получены условия существования более гладких решений рассматриваемой задачи: гладкого и обобщённого.

Эти результаты опубликованы в работах [72], [73], [74], [76], [79].

Во второй главе изучен полудискретный проекционный метод Галёркина приближённого решения исследуемой задачи. Получены оценки погрешностей приближённых решений в различных нормах. Показано, что из этих оценок, в случае предельно плотной в соответствующем пространстве системы проекционных подпространств, следует сходимость погрешностей к нулю в энергетической, среднеквадратичной и более сильных нормах. Результаты о сходимости ориентированы на проекционные подпространства типа «конечных элементов». При этом рассматриваются как случай равномерного разбиения области изменения пространственных переменных, так и случай произвольных подпространств типа «конечных элементов», предельно плотных в соответствующем гильбертовом пространстве. При наделении проекционных подпространств специальными свойствами аппроксимации, также типичными для подпространств типа «конечных элементов», установлены порядки скорости сходимости, которые оказываются точными по порядку аппроксимации.

Данным результатам посвящены работы [73], [75], [77], [78], [79], [80].

В третьей главе для рассматриваемой в работе задачи исследован проекционно-разностный метод с неявной схемой Эйлера по времени, являющийся методом полной дискретизации. Как и во второй главе, получены новые результаты о сходимости приближённых решений к точному решению в различных нормах. В случае использования подпространств типа «конечных элементов» и при равномерном разбиении области изменения пространственной переменной сходимость норм погрешностей к нулю получена даже в условиях слабой разрешимости рассматриваемой задачи, за счёт согласования шагов разбиения по временной и пространственной переменным. При этом дополнительные условия на гладкость решения позволили получить сходимость погрешности к нулю и без упомянутого согласования шагов по времени и по пространству. Для подпространств, наделёнными специальными аппроксимационными свойствами (теми же, что и во второй главе), сходимость установлена с порядком скорости сходимости не только по временной, но и по пространственной переменным. Для гладких решений скорость сходимости является точной по порядку аппроксимации как по времени, так и по пространству.

Соответствующие результаты опубликованы в работах [81] – [84].

Представляется, что использованные в работе методы исследования могут быть в дальнейшем применены для получения результатов о разрешимости и приближённом решении проекционным и проекционно-разностными методами абстрактного линейного параболического уравнения с весовым интегральным условием следующего вида

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \int\limits_0^T (p(t)u(t) + q(t)u'(t))\,dt = \overline{u}\,,$$

где $q(t)$, так же как и $p(t)$, является вещественнозначной функцией.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Гаевский, Х. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас. — М.: Мир, 1978. — 336 с.

[2] Дюво, Г. Неравенства в механике и физике /Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс. — М.: Наука, 1980. — 384 с.

[3] Лионс, Ж.-Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения. / Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес. – М.: Мир, 1971. – 372 с.

[4] Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 415 с.

[5] Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. — М. : Мир, 1981. — 408 с.

[6] Варга, Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга. — М.: Мир, 1974. — 128 с.

[7] Гавурин, М. К. Лекции по методам вычислений / М. К. Гавурин. — М.: Наука, 1971. — 248 с.

[8] Деклу, Ж. Метод конечных элементов / Ж. Деклу. — М.: Мир, 1976. — 96 с.

[9] Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука, 1967. — 736 с.

[10] Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. М.: Мир, 1972. — 588 с.

[11] Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. М.: Наука, 1981. — 416 с.

[12] Митчелл, Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт. — М.: Мир, 1981. — 216 с.

[13] Михлин, С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

[14] Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. – М.: Мир, 1977. – 384 с.

[15] Оганесян, Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. Ереван: АН АрмССР, 1979. – 236 с.

[16] Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1980. – 512 с.

[17] Самарский, А. А. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщёнными решениями / А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров. – М.: Высшая школа, 1987. — 296 с.

[18] de Boor, C. Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations / C. de Boor. — New York: Academic Press. — 1974. — 420 p.

[19] Oden, J. T. An introduction to the mathematical theory of finite elements / J. T. Oden, J. N. Reddy. — New york: Wiley. — 1976. — 429 p.

[20] Вайникко, Г. М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 7. – С. 1269 – 1277.

[21] Демьянович, В.К. О скорости сходимости проекционных методов для параболических уравнений / В. К. Демьянович, Ю. К. Демьянович // ЖВМ и МФ. — 1968. — Т.8, №2. — С. 344 – 362.

[22] Поборчий, С. В. О скорости сходимости проекционного метода решения абстрактного параболического уравнения в случае нестационарного оператора / С. В. Поборчий // Вестн. Ленингр. ун-та. — 1973. — №13. — С. 69 – 73.

[23] Соболевский, П. Е. О методе Бубнова-Галёркина для параболических уравнений в гильбертовом пространстве / П. Е. Соболевский // ДАН СССР. — 1986. — Т. 178, №3. — С. 486 – 489.

[24] Соболевский, П. Е. Теорема о смешанных производных и оценках скорости сходимости метода Галёркина для параболических уравнений / П. Е. Соболевский // ДАН Укр.ССР. Сер. А. — 1987. — №8. — С. 12 – 16.

[25] Соболевский, П. Е. Обобщённые решения дифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве / П. Е. Соболевский // ДАН СССР. – 1958. – Т. 122, – № 6. – С. 994 – 996.

[26] Ладыженская, О. А. О решении нестационарных операторных уравнений / О. А. Ладыженская // Математ. сбор. – 1956. – Т. 39, №4. – С. 491 – 524.

[27] Bramble, J. H. Some convergence estimates for semidiscrete Galerkin type approximations for parabolic equations / J. H. Bramble, A. H. Schatz, V. Thomee, L. B. Wahlbin // SIAM J. Numer. Anal. — 1977. — V. 14, №2. — P. 218 – 241.

[28] Douglas, J. A quasi-projection analysis of Galerkin methods for parabolic and Hiperbolic equations / J. Douglas, T. Dupont, M. F. Wheeler // Math. Comput. — 1978. — V. 32, №142. — P. 345 – 362.

[29] Huang, M. Some convergence estimates for semidiscrete type schemes for time-depended nonselfadjoint parabolic equatins / M. Huang, V. Thomee // Math. Comput. – 1981. V. 37, № 156. — P. 327 – 346.

[30] Mitchel, A. R. Finite element Galerkin methods for convectiondiffusion and reaction-diffusion / A. R. Mitchel, D. F. Griffiths, A. Meiring // Anal. and Numer. Approaches. Asymptote Probl. Anal. Amsterdam e.a. — 1981. — P. 357 – 377.

[31] Mitchell, L. A Galerkin method for nonlinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions / L. Mitchell // SIAM J. Numer. Anal. — 1979. V.15, №6. — P. 284 – 299.

[32] Thomee, V. Negative norm estimates and superconvergence in Galerkin methods for parabolic problems / V. Thomee // Math. Comput. — 1980. — V. 34, № 149. — P. 93 – 113.

[33] Wang, Tongke. Finite element method for parabolic differential equations with initial and boundary value problems / Tongke Wang // Shuji jisuan yn jisuanji yingyong = J. Numer. Methods and Comput. Appt. — 1996. — V. 17, №3. — P. 197 – 202.

[34] Wheeler, M. F. L_∞ estimates of optimal order for Galerkin methods for one-dimentional second order parabolic and hyperbolic equations / M. F. Wheeler // SIAM J. Numer. Anal. — 1973. — V. 10, №5. — P. 908 – 913.

[35] Wheeler, M. F. A priori L_2 error estimates for Galerkin approximations to parabolic partial differential equations / M.F. Wheeler // SIAM J. Numer. Anal. — 1974. — V. 11, №5. — P. 1059 – 1068.

[36] Смагин, В. В. Коэрцитивные оценки погрешностей проекционного и проекционно-разностного методов для параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1994. — Т. 185, №11. — С. 79 – 94.

[37] Смагин, В. В. Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами / В. В. Смагин // Труды математ. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1997. — №2. — С. 63 – 67.

[38] Смагин, В. В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188 (3). – С. 143 – 160.

[39] Смагин, В. В. О гладкой разрешимости вариационных задач параболического типа /В. В. Смагин // Труды матем. ф-та (нов. серия). Воронеж. гос. ун-т. — 1998. — №3. — С. 67 – 72.

[40] Смагин, В. В. Энергетическая сходимость погрешности проекционно-разностного метода для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Труды матем. ф-та. Воронеж. гос. ун-т. — 1999. — № 4. — С. 114 – 119.

[41] Смагин, В. В. Среднеквадратичные оценки погрешности проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Журн. вычислит. матем. и матем. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 908 – 919.

[42] Смагин, В. В. Проекционно-разностные методы приближённого решения параболических уравнений с несимметричными операторами / В.В. Смагин // Дифференц. уравнения. — 2001. — Т. 37, № 1. — С. 115 – 123.

[43] Смагин, В. В. Коэрцетивная энергетическая сходимость проекционно-разностного метода для параболических уравнений / В. В. Смагин // Вест-

ник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2002. — № 2. — С. 96 – 100.

[44] Васильева, Т. Е. Сходимость проекционного метода для уравнений с несимметричной главной частью / Т. Е. Васильева, В. В. Смагин // Сборник трудов молодых ученых математ. ф-та Воронежского гос. у-та. – 2001. – С. 38 – 42.

[45] Галахов, Е. И. Об одной нелокальной спектральной задаче / Е. И. Галахов, А. Л. Скубачевский // Дифференц. ур-ния. – 1997. – Т. 33, №1. — С. 25 – 32.

[46] Галахов, Е. И. О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями / Е. И. Галахов, А. Л. Скубачевский // Математ. сборник. – 1998. – Т. 189, №1. – С. 45 – 78.

[47] Кожанов, А. И. Разрешимость краевых задач для линейных параболических уравнений в случае задания интегрального по временной переменной условия / А. И. Кожанов // Математические заметки СВФУ. — 2014. — Т.21, №4. — С. 20 – 30.

[48] Сагадеева, М. А. Нелокальная задача для уравнения соболевского типа с относительно р-ограниченным оператором / М. А. Сагадеева // Вестн. Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2008. — Т. 10, №6. — С. 54 – 62.

[49] Сильченко, Ю. Т. Уравнения параболического типа с нелокальными условиями / Ю. Т. Сильченко // Современ. матем. фундамент. направления. – 2006. — Т. 17. — С. 5 – 10.

[50] Тихонов, И. В. О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве / И. В. Тихонов // Дифференц. ур-ния. — 1998. — Т. 34, №6. — С. 841 – 843.

[51] Тихонов, И. В. Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений / И. В. Тихонов // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — Т. 67, №2. — С. 133 – 166.

[52] Попов, А. Ю. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени / А. Ю. Попов, И.В. Тихонов // Математический сборник. — 2005. — Т. 196, №9. — С. 71 – 102.

[53] Уварова, М. В. О некоторых нелокальных параболических краевых задачах / М. В. Уварова // Вестн. СамГУ. Естественнонаучн. сер. — 2009. Т. 9, №8. — С. 94 – 108.

[54] Фёдоров, В. Е. Нелокальная по времени задача для неоднородных эволюционных уравнений / В. Е. Фёдоров, Н. Д. Иванова, Ю. Ю. Фёдорова // Сибирский мат. журнал. — 2014. — Т. 55, №4. — С. 882 – 897.

[55] Иванова, Н. Д. Нелокальная по времени краевая задача для линеаризованной системы уравнений фазового поля / Н. Д. Иванова, В. Е. Фёдоров // Вестник Южно-Уральского университета. Сер. Математика. Механика. Физика. — 2015. — Т. 7, вып. 3. — С. 10 – 15.

[56] Скубачевский, А. Л. Неклассические краевые задачи. I / А. Л. Скубачевский // СМФН. — 2007. — Т. 26. — С. 3 – 132.

[57] Скубачевский, А. Л. Неклассические краевые задачи. II / А. Л. Скубачевский // СМФН. — 2009. — Т. 33. — С. 3 – 179.

[58] Критская, Е. А. О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием / Е. А. Критская, В. В. Смагин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. – 2008. — № 1. — С. 222 – 225.

[59] Нгуен, Тыонг Хуен. Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с симметричным оператором и интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен, В. В. Смагин // Спектральные и эволюционные задачи. — 2011. — Т. 21, — № 2. — С. 65 – 74.

[60] Нгуен, Тыонг Хуен. Сходимость метода Галёркина приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен, В. В. Смагин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2010. — №1. — С. 144 – 149.

[61] Нгуен, Тыонг Хуен. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 202 – 208.

[62] Нгуен, Тыонг Хуен. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с симметричным оператором и интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 178 – 191.

[63] Шелухин, В. В. Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений / В. В. Шелухин // Сибирский математ. журнал. — 1993. — Т. 34, № 2. — С. 191 – 207.

[64] Шелухин, В. В. Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений / В. В. Шелухин // Сибирский математ. журнал. — 1991. — Т. 32, №2. — С. 154 – 165.

[65] Shelukhin, V. V. A nonlocal in time model for radionuclide propagation in Stokes fluid / V. V. Shelukhin // Динамика сплошной среды. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН. — 1993. — Вып. 107. — С. 180 – 193.

[66] Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. — Минск: БГУ, 2003. — 431 с.

[67] Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967. – 624 с.

[68] Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М.: Наука, 1976. — 544 с.

[69] Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. – М.: Наука, 1967. — 464 с.

[70] Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 830 с.

[71] Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов / Ю. М. Березанский. — Киев: Наукова думка, 1965. — 800 с.

[72] Петрова, А. А. Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием / А. А. Петрова, В. В. Смагин // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 160 – 169.

[73] Петрова, А. А. Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с симметричным оператором и весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: физика, математика. — 2015. — № 4. — С. 160 – 174.

[74] Петрова, А. А. Слабая разрешимость параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2014". — 2014. — С. 248 – 251.

[75] Петрова, А. А. Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. Сборник научных трудов по материалам международной заочной научно- практической конференции. — 2014. — №4. — С. 127 – 130.

[76] Петрова, А. А. Гладкая разрешимость параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова // Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна — 2016". — 2016. — С. 320 – 323.

[77] Петрова, А. А. О сходимости метода Галёркина для параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования. — 2016. — №5. — С. 235 – 237.

[78] Петрова, А. А. Сходимость метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А .А. Петрова, В. В. Смагин // Известия вузов. Математика — 2016. — № 8. — С. 49 – 59. (Англ. версия: Petrova, A. A. Convergence of the Galyorkin Method of Approximate Solving Parabolic Equation with Weight Integral Condition / A. A. Petrova, V. V. Smagin // Russian Mathematics. — 2016, Vol. 60, No. 8, pp. 42 – 51.)

[79] Петрова, А. А. О параболических уравнения с симметричным оператором и весовым интегральным условием // А. А. Петрова / Международная конференция по дифференциальным уравнениями и динамическим системам. Тезизы докладов. — 2016. — С. 160 – 162.

[80] Петрова, А. А. О сходимости и скорости сходимости метода Галёркина приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Сборник материалов международной конференции "XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-Симпозиум по спектральным эволюционным задачам". — Симферополь: ДИАЙПИ, 2017. — С. 48 – 50.

[81] Петрова, А. А. Сходимость проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием на решение / А. А. Петрова // Дифференциальные уравнения. — 2018, Т. 54, № 7, с. 975 — 987. (Англ. версия: Petrova, A. A. Convergence of a Projection-Difference Method for the Approximate Solution of a Parabolic Equation with a Weighted Integral Condition on the Solution / A. A. Petrova // Differential Equations. - 2018, Vol. 54, No. 7, pp. 957 — 970.)

[82] Петрова, А. А. О сходимости и скорости сходимости проекционно-разностного метода приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки.— Тамбов, 2018. — Т. 23, № 123. — С. 517 – 523.

[83] Петрова, А. А. Проекционно-разностный метод приближённого решения параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Труды математического центра им. Н. И. Лобачевского: материалы

17-ой молодежной школы-конференции "Лобачевские чтения - 2018"(Казань, 23–28 ноября 2018 г.). — Казань, 2018. — Т. 56. — С. 231 – 234.

[84] Петрова, А. А. Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения гладко разрешимого параболического уравнения с весовым интегральным условием / А. А. Петрова // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. — Москва, 2020. — Т. 176. — С. 61 – 69.