

На правах рукописи

Барабаш Никита Валентинович

**Аттракторы в кусочно-гладких системах
лоренцевского типа и синхронизация фазовых
осцилляторов**

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Волжский государственный университет водного транспорта».

Научный руководитель: **Белых Владимир Николаевич**,
д.ф.-м.н., проф., ФГБОУ ВО «Волжский
государственный университет водного транс-
порта», заведующий кафедрой математики

Официальные оппоненты: **Жиров Алексей Юрьевич**,
д.ф.-м.н., проф., ФГБОУ ВО «Московский
авиационный институт (национальный ис-
следовательский университет)», профессор
кафедры компьютерной математики

Кащенко Илья Сергеевич,
д.ф.-м.н., доц., ФГБОУ ВО «Ярославский го-
сударственный университет им. П.Г. Демидо-
ва», заведующий кафедрой математического
моделирования

Ведущая организация: Нижегородский филиал ФГАОУ ВО «На-
циональный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Защита состоится 19 мая 2022 г. в 16:00 на заседании диссертационного
совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» по
адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Ни-
жегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского и на
сайте <https://diss.unn.ru/1211>.

Автореферат разослан « » марта 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.166.20,
к.ф.-м.н.

Бирюков Руслан Сергеевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Работа посвящена исследованию конкретных динамических систем, заданных в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и отображений. Центральными в работе являются вопросы о существовании, свойствах и бифуркациях различных, в т.ч. и широко известных аттракторов. К таким системам относятся системы лоренцевского типа, сети осцилляторов Курамото, гиперхаотические динамические системы, модели нейрона, а также управляемые неавтономные динамические системы, моделирующие переключательную активность.

Классический аттрактор Лоренца более 50 лет является символом хаотической динамики. Его открытие привело к формулировке общего понятия странного аттрактора - притягивающего инвариантного предельного множества неустойчивых траекторий¹.

Детальные исследования потока траекторий системы Лоренца позволили получить геометрические модели отображений, хорошо приближающие отображение Пуанкаре. С помощью этих моделей было изучено бифуркационное множество, существование которого в самой системе Лоренца было установлено численно. К нему относятся два бифуркационных маршрута рождения странного хаотического аттрактора Лоренца: а) главный маршрут (COD1) – через бифуркацию коразмерности 1, при которой образуются две гетероклинические орбиты, “соединяющие” седло с двумя симметричными седловыми предельными циклами²; б) маршрут (COD2) – через бифуркацию коразмерности 2 “гомоклинической бабочки” с нулевой седловой величиной³.

Детали этого бифуркационного множества, связанные с рождением, изменением и исчезновением аттрактора Лоренца, исследовались с помощью численных методов. Численное доказательство существования хаотического аттрактора Лоренца было дано в работе⁴, где было показано, что система Лоренца имеет хаотический аттрактор в малой окрестности классических значений параметров.

Развивая ранние результаты, относящиеся к бифуркационному маршруту COD2, аналитическое доказательство существования аттрактора Лоренца в расширенной системе Лоренца было представлено в работе⁵.

¹ *Belykh, V. N. / V. N. Belykh // Great Russian Encyclopedia. Т. 31. Moscow : Great Russian Encyclopedia, 2016. С. 285. (in Russian).*

² *Afraimovich, V. S. / V. S. Afraimovich, V. Bykov, L. P. Shilnikov // Akademiia Nauk SSSR Doklady. Т. 234. 1977. С. 336–339.*

³ *Robinson, C. / C. Robinson // Nonlinearity. 1989. Т. 2. С. 495–518.*

⁴ *Tucker, W. / W. Tucker // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. 1999. Т. 328, № 12. С. 1197–1202.*

⁵ *Ovsyannikov, I. I. / I. I. Ovsyannikov, D. V. Turaev // Nonlinearity. 2017. Т. 30. С. 115–137.*

Это доказательство основано на проверке критерия Шильникова рождения странного аттрактора. Авторы рассматривали малую окрестность бифуркации коразмерности 2, соответствующей гомоклинической бабочке с нулевой седловой величиной. Эти результаты представляют значительное продвижение в “чистых” аналитических исследованиях системы Лоренца и её обобщений.

Однако, строгое аналитическое исследование рождения аттрактора Лоренца через гетероклиническую бифуркацию коразмерности 1 (т.е. по маршруту COD1) до сих пор остаётся нерешённой в силу сложности задачи. Несмотря на то, что аналитическое доказательство⁶ гомоклинической бифуркации (гомоклинической бабочки) в системе Лоренца датировано 1984 годом, определение явных бифуркационных параметров маршрута COD1 до настоящего времени возможно только численно.

В настоящей диссертации эта задача рассматривается под иным углом зрения: вместо оригинальной системы Лоренца исследуется имитирующая кусочно-линейная система ОДУ, которая переключается между тремя линейными системами и имеет качественно такие же структуру и хаотический аттрактор, как и сама система Лоренца. Траектории кусочно-линейной системы “склеены” из траекторий линейных систем, что делает возможным проведение аналитического исследования, в частности, позволяет явно указать параметры системы, отвечающие гетероклинической бифуркации коразмерности 1 и главному маршруту COD1.

Использование кусочно-линейной системы для строгого исследования сложной хаотической динамики не случайно. Такие системы широко используются в теории динамических систем в различных контекстах и приложениях⁷. Их преимущество по сравнению с нелинейными системами заключается в возможности получить явные решения в отдельных областях фазового пространства, которые затем склеиваются на границах этих областей, образуя явно заданные траектории системы. Традиционно, кусочно-линейные динамические системы выводятся из нелинейных систем заменой нелинейностей на кусочно-линейные функции. Это осуществляется для того, чтобы повторить динамику исходной нелинейной системы, при этом упростив её анализ. Классический пример такой замены представлен в работе Левинсона⁸, где нелинейный член $(x^2 - 1)$ уравнения Ван дер Поля был заменён кусочно-постоянной функцией. Такая замена позволила Левинсону строго обосновать классический результат Картрайта и Литтлвуда о рождении сложного множества периодических орбит в неавтономном уравнении Ван дер Поля, которое часто рассматривается как

⁶ Belykh, V. / V. Belykh // Differential Equations. 1984. Т. 20, № 10. С. 1184—1191.

⁷ Zhusubaliyev, Z. T. Т. 44 / Z. T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde. World Scientific, 2003. (World Scientific Series on Nonlinear Science Series A).

⁸ Levinson, N. / N. Levinson // Annals of Mathematics, Second Series. 1949. Т. 50. С. 127—153.

первый пример детерминированной системы с хаотическим поведением. Система Лоренца также исследовалась с помощью кусочно-линейных систем⁹. Тем не менее, строгих исследований бифуркационной структуры кусочно-линейных систем Лоренца до сих пор не было.

Другой большой класс динамических систем это кусочно-гладкие динамические системы, фазовое пространство которых разделено на несколько областей с различными векторными полями и задающими их динамическими правилами. В механике кусочно-гладкие динамические системы используются для моделирования взаимодействия тел при негладком контакте, ударах, трении и переключении, включая взаимодействия пешеходов с мостом и виброударные электрогенераторы. В электротехнике и системах управления кусочно-гладкие системы используются как модели релейных систем, импульсных преобразователей мощности и сетей с коммутацией пакетов. В биологии негладкая динамика проявляется в сети регуляции генов, сетях импульсно-связанных нейронов и др.

Введение разрывов в правые части может приводить ко множеству бифуркаций, некоторые из которых имеют гладкие аналоги (в том числе бифуркации типа складки или типа Андронова-Хопфа), а другие связаны исключительно с негладкими явлениями, такими как касание (*grazing*) или скольжение (*sliding*). Например, в кусочно-гладких динамических системах предельные циклы, торы и хаотические аттракторы могут рождаться или исчезать фундаментально отличным образом. Известны как минимум 20 различных геометрических механизмов локального рождения предельного цикла в двумерном кусочно-гладком потоке¹⁰. К локальным бифуркациям типа Андронова-Хопфа, лежащим в основе этих механизмов, относятся бифуркации равновесия на границе склейки и рождение предельных циклов из складок.

Теория локальных бифуркаций для кусочно-гладких систем со скользящими движениями развита относительно хорошо, особенно для кусочно-гладких отображений, где скачки мультипликаторов вызывают бифуркации столкновения с границей (*border-collision bifurcations*, также известные как *C*-бифуркации), а также негладкие аналоги бифуркации Неймарка-Сакера. В то же время, теория глобальных бифуркаций кусочно-гладких систем находится в зачаточном состоянии¹¹. Большинство существующих аналитических результатов получены для условий, при которых глобальные бифуркации в кусочно-гладких потоках воспроизводят

⁹ *Elwakil, A. S. / A. S. Elwakil, S. Ozoguz, M. P. Kennedy // IEEE transactions on circuits and systems—I: fundamental theory and applications. 2002. Т. 49. С. 4; Lia, C. / C. Lia, J. C. Sprott, W. Thio // Physics Letters A. 2015. Т. 379. С. 888—893.*

¹⁰ *Simpson, D. / D. Simpson // Physics Letters A. 2018. Т. 382, № 35. С. 2439—2444.*

¹¹ *Bernardo, M. di / M. di Bernardo, S. Hogan // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2010. Т. 368, № 1930. С. 4915—4935.*

свойства своих классических аналогов в гладких системах. В их число входит версия теоремы Шильникова о седло-фокусе для систем Филиппова, где скользящая гомоклиническая петля Шильникова к псевдоустойчивому фокусу даёт счетное число скользящих седловых периодических орбит¹². Однако, общие условия и свойства многих других разрывных глобальных бифуркаций все ещё остаются открытой проблемой.

Одна из целей диссертации - восполнить этот пробел, предлагая точное описание скользящих гомоклинических бифуркаций в системе лоренцевского типа. Удалось установить, что такие бифуркации демонстрируют неожиданный эффект, когда при разрушении гомоклинической орбиты седла с положительной седловой рождается устойчивый (не седловой) предельный цикл. В данной работе этот эффект положен в основу сценария разрушения аттрактора лоренцевского типа через появление в аттракторе скользящих движений.

Другим объектом исследования диссертации являются сингулярно-гиперболические отображения. Теория гиперболических динамических систем восходит к работам С.Смейла и Д.В.Аносова. Эта теория успешно продолжает развиваться в работах нижегородских математиков В.З.Гринеса, Е.В.Жужомы, О.В.Починки и др. Более 50 лет назад с помощью методов нелинейной динамики и эргодической теории было показано, что странный гиперболический аттрактор порождает случайный стационарный процесс. Это вызвало большой интерес в физических приложениях, направленный на поиск динамических систем с гиперболическими аттракторами. Ряд таких систем был предложен в работах С.П. Кузнецова и соавторов.

Важным классом систем с гиперболическими свойствами являются системы с сингулярно-гиперболическими аттракторами. К аналитически доказанным сингулярно-гиперболическим аттракторам относятся аттракторы лоренцевского типа, аттрактор Лози, Белых и др. В работах¹³ рассматривался класс систем с одной нелинейностью (системы Лурье) и дискретным временем, для которых были предложены аналитические методы нелокального анализа. Эти методы основаны на построении инвариантных устойчивых и неустойчивых конусов и позволяют доказать существование сингулярно-гиперболического аттрактора.

В настоящей диссертации с помощью этих методов исследуются неавтономные отображения с переключающимися во времени параметрами. А именно, для управляемых хаотических отображений выводятся достаточные условия, при которых нестационарный аттрактор остаётся хаотическим, т.е. не содержит устойчивых орбит.

¹²D. Novaes, D. / D. D. Novaes, M. A. Teixeira // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2019. Т. 29, № 6. С. 063110.

¹³V. Belykh [и др.] // Dynamics And Control Of Hybrid Mechanical Systems. 2010. Т. 14. С. 43; Belykh, V. / V. Belykh, D. Grechko // Dinamicheskie sistemy. 2018. Т. 8, № 4.

В диссертации также рассматривается широко распространённый тип неавтономных потоков со случайными переключениями. Такие системы используются при моделировании динамики сети Интернет и электросетей, где со временем происходит изменение топологии подключений по некоторому стохастическому правилу. Случайные и короткие по времени взаимодействия между нейронами и техническими устройствами также могут рассматриваться в качестве изменений такого типа.

В работе¹⁴ такие случайные и независимые переключения были названы *миганием* (blinking), а динамические системы с таким поведением - *мигающими системами*. Один из центральных вопросов исследования мигающих систем есть вопрос о существовании и свойствах установившихся динамических режимов, представленных в виде нестационарных аттракторов. Общая строгая теория нестационарной и асимптотической динамики мигающих систем при быстром переключении была развита в работах¹⁵. Эта теория прояснила отношения между стохастически мигающей системой и её усреднённым по времени аналогом. В рамках этой теории было предложено понятие аттрактора-призрака \mathcal{A} - аттрактора, который существует в усреднённой системе, но не инвариантен относительно мигающей системы. Траектория мигающей системы может достигать малой окрестности аттрактора-призрака и проводить в ней большую часть времени, если переключение достаточно быстрое.

В диссертации рассмотрено появление хаотического аттрактора-призрака в стохастически переключающихся системах Лоренца. Также исследуется мигающая система, составленная из систем Хиндмарша-Роуза (HR) с двумя разными наборами параметров.

Заключительная глава диссертации посвящена другому актуальному направлению нелинейной динамики - теории синхронизации связанных осцилляторов.

Полная и кластерная синхронизации являются основными формами синхронизированных колебаний. Устойчивость полной синхронизации идентичных или почти идентичных осцилляторов сильно зависит от топологии сети. В случае неидентичных фазовых осцилляторов наиболее распространенным пространственно-временным паттерном, который возникает на пути к полной синхронизации, является частичная синхронизация, при которой некоторые осцилляторы синхронизируются внутри когерентной группы осцилляторов (кластера), в то время как остальные асинхронные осцилляторы образуют некогерентное состояние. При

¹⁴Belykh, I. V. / I. V. Belykh, V. N. Belykh, M. Hasler // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2004. Т. 195, № 1/2. С. 188—206.

¹⁵Hasler, M. / M. Hasler, V. Belykh, I. Belykh // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2013. Т. 12, № 2. С. 1031—1084; Hasler, M. / M. Hasler, V. Belykh, I. Belykh // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. 2013. Т. 12, № 2. С. 1007—1030.

кластерной синхронизации сеть разбивается на группы когерентных осцилляторов, но синхронизация между кластерами отсутствует. Устойчивости кластерной синхронизации и её сохранению при расстройке параметров осцилляторов уделено большое внимание в литературе.

В диссертации рассматривается сеть осцилляторов Курамото второго порядка (с инерцией), более точно описывающая частичную синхронизацию в реальных сетях осцилляторов, которые могут подстраивать свои частоты. Такие сети имеют более богатую динамику, включая прерывистые хаотические химеры, индуцированные инерцией гистерезисные переходы от некогерентности к когерентности, бистабильность синхронных кластеров, уединенные состояния и хаотическую межкластерную динамику¹⁶. Частичная синхронизация в модели неидентичных осцилляторов Курамото второго порядка ранее изучалась методами теории среднего поля в предположении бесконечно большого размера сети¹⁷. Наиболее сложный случай конечного размера сети ранее не изучался и является предметом настоящей диссертации.

В работе разработан метод доказательства устойчивости частичной синхронизации в конечномерной модели связанных осцилляторов Курамото второго порядка. Этот метод использует двумерную кусочно-гладкую систему маятникового типа для разделения сети на когерентный и некогерентный кластеры, а также для ограничения осциллирующих разностей фаз между осцилляторами внутри когерентного кластера. Данный подход является нетривиальным расширением качественных методов, ранее разработанных для сетей Курамото¹⁸, в направлении частичной синхронизации неидентичных осцилляторов Курамото второго порядка.

Основные результаты диссертации изложены в работах диссертанта [1–8].

Целью данной работы является строгое математическое исследование аттракторов и бифуркаций конкретных динамических систем со сложным поведением.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построить кусочно-линейную модель системы Лоренца, которая переключается между тремя трёхмерными линейными системами, и в явном виде получить отображение Пуанкаре, которое позволяет строго доказать существование аттрактора лоренцевского типа,

¹⁶ *Brister, B. N. / B. N. Brister, V. N. Belykh, I. V. Belykh // Physical Review E. 2020. Т. 101, № 6. С. 062206.*

¹⁷ *Medvedev, G. S. / G. S. Medvedev, M. S. Mizuhara // Journal of Statistical Physics. 2021. Т. 182, № 2. С. 1–22.*

¹⁸ *Brister, B. N. / B. N. Brister, V. N. Belykh, I. V. Belykh // Physical Review E. 2020. Т. 101, № 6. С. 062206; Belykh, V. N. / V. N. Belykh, M. I. Bolotov, G. V. Osipov // Modeling and Analysis of Information Systems. 2015. Т. 22, № 5. С. 595–608.*

- а также в явном виде получить бифуркации его рождения, изменения и исчезновения.
2. Исследовать кусочно-линейную модель системы Лоренца в случае, когда скользящие движения входят в аттрактор. Найти последовательность скользящих гомоклинических бифуркаций, приводящих к рождению хаотического аттрактора лоренцевского типа, а также в явном виде получить скейлинг-фактор для бифуркаций удвоения периода, связанных с многообходными гомоклиническими орбитами и образованием квазистранного аттрактора.
 3. Построить одномерные отображения сравнения и инвариантные конусы, с помощью которых доказать существование инвариантной области фазовой плоскости неавтономного отображения, состоящей из седловых траекторий.
 4. Обосновать применимость метода усреднения при быстрых переключениях в конкретных мигающих системах Лоренца и Хинмарша-Роуза.
 5. Построить кусочно-гладкую систему сравнения маятникового типа, траектории которой определяют колебательную динамику разностей фаз между осцилляторами в когерентном кластере и вращательную динамику в асинхронном кластере сети двумерных осцилляторов Курамото.

Научная новизна: Все представленные в диссертации результаты являются новыми и опубликованы в рецензируемых научных журналах базы Web of science, входящих в квартили Q1 и Q2. В работе впервые:

1. для трёхмерного потока строго доказано существование каскада бифуркаций коразмерности 1, приводящего к рождению аттрактора лоренцевского типа;
2. в системе лоренцевского типа рассмотрены скользящие гомоклинические бифуркации, приводящие к рождению устойчивых циклов и квазистранных аттракторов при положительной седловой величине;
3. для неавтономного двумерного отображения доказано существование нестационарного сингулярно-гиперболического аттрактора без привлечения асимптотических методов;
4. для сети из произвольного числа связанных двумерных осцилляторов Курамото получены достаточные условия частичной синхронизации.

Практическая значимость: Работа носит фундаментальный характер и является вкладом в теорию динамических систем и динамического хаоса. Практическая значимость работы отражена в приведённом описании рассматриваемых конкретных динамических систем, моделирующих синхронизацию в ансамблях осцилляторов, цифровые системы

автоподстройки частоты, переключательную активность технических систем, активность нейронных сетей.

Методология и методы исследования: В работе применялись методы современной качественной теории и теории бифуркаций динамических систем (в частности, построение отображения Пуанкаре, теорема Шильникова о гомоклинической петле, и др.), метод функций Ляпунова и асимптотические методы малого параметра. Существенным образом использовались метод двумерных систем сравнения для ОДУ и принцип сравнения многомерных отображений с отображениями меньшей размерности. Важная бифуркационная диаграмма для системы Лоренца получена с помощью предложенного в работе метода построения имитирующих кусочно-гладких динамических систем.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказано существование сингулярно-гиперболического аттрактора лоренцевского типа в кусочно-линейной системе, имитирующей систему Лоренца. В явном виде получен каскад бифуркаций ко-размерности 1, приводящий к рождению аттрактора.
2. Доказано, что появление скользящих движений в аттракторе приводит к новому неожиданному бифуркационному сценарию, когда в результате гомоклинических бифуркаций седла с положительной седловой величиной рождаются устойчивые периодические орбиты.
3. Доказано существование последовательности скользящих гомоклинических бифуркаций, приводящих к рождению хаотического аттрактора лоренцевского типа. В частности, в явном виде получен скейлинг-фактор для бифуркаций удвоения периода, связанных с многообходными гомоклиническими орбитами и образованием квазистранного аттрактора.
4. Доказано существование нестационарного сингулярно-гиперболического аттрактора в конкретном двумерном неавтономном отображении, а также гиперхаотического аттрактора в автономном трёхмерном отображении.
5. Предложен метод синтеза аттракторов-призраков в мигающих системах на примере мигающих систем Лоренца и Хиндмарша-Роуза.
6. Для сети из произвольного числа глобально связанных двумерных осцилляторов Курамото получены явные достаточные условия устойчивой частичной синхронизации.

Достоверность полученных результатов обеспечивается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных журналах базы Web of Science квартилей Q1 и Q2, а также в изданиях, рекомендованных ВАК.

Апробация работы: Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

International Conference “Shilnikov WorkShop 2016”, Нижний Новгород, 2016; International Conference “Shilnikov WorkShop 2017”, Нижний Новгород, 2017; Нижегородская сессия молодых ученых (технические, естественные, математические науки), Нижний Новгород, 2017, 2018, 2019; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018, Суздаль, 2018; International Conference-School “Dynamics, Bifurcations, and Chaos”, Нижний Новгород, 2018; International Conference “Shilnikov Workshop 2018”, Нижний Новгород, 2018; XXIII научная конференция по радиофизике, посвященная 100-летию со дня рождения Н.А. Железцова, Нижний Новгород, 2019; Всероссийская молодежная конференция “Путь в науку. Математика”, 2019, Ярославль; 9th International scientific conference on Physics and Control, Иннополис, 2019; The 7th Bremen Summer School and Symposium “Dynamical Systems - pure and applied”, Бремен, Германия, 2019; Международная конференция КРОМШ-2019 “XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам”, пос. Батилиман, Республика Крым, 2019; International Conference “Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov Workshop”, Нижний Новгород, 2019; 20 международная конференция и молодежная школа “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, Нижний Новгород, 2020; Dynamics in Siberia, Новосибирск, 2021; Нелинейные дни в Саратове для молодых, Саратов, 2021; Международная конференция “Математические идеи П.Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания”, Обнинск, 2021; 21 международная конференция “Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии”, Нижний Новгород, 2021;

Результаты диссертации вошли в составную часть результатов работ, выполненных при финансовой поддержке Министерства образования и науки (госзадание № 0729-2020-0036 “Математическая теория динамического хаоса и живые системы”), Российского научного фонда (проекты № 19-12-00367 “Динамика нестационарных осцилляторных сетей”, № 19-72-10128 “Динамические механизмы возникновения хаоса и экстремальных событий в нейронных сетях” и № 22-21-00553 “Бифуркации гомоклинических структур и хаотических аттракторов конкретных динамических систем”), Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-01-00607А “Развитие математических методов теории динамического хаоса”), а также при поддержке Научно-образовательного математического центра “Математика технологий будущего”.

Личный вклад: Аналитические результаты получены автором совместно с научным руководителем В.Н. Белых. Численные результаты получены лично автором. Постановка задач и обсуждение полученных

результатов были выполнены совместно с соавторами И.В. Белых, Г.В. Осиповым, Т.А. Левановой и научным руководителем В.Н. Белых. И.В. Белых также принадлежит редактирование работ, выполненных в соавторстве.

Публикации: Основные результаты по теме диссертации изложены в 36 печатных изданиях, 8 из которых изданы в журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, а также рекомендованных ВАК, 28 — в трудах конференций и тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объем диссертации составляет **133** страницы, включая **35** рисунков. Список литературы содержит **164** наименования.

Содержание работы¹⁹

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы.

В **первой главе** предложена и исследована трёхмерная кусочно-линейная модель системы Лоренца, переключающаяся между тремя трёхмерными линейными системами ОДУ A_s , A_l и A_r :

$$\begin{aligned}
 A_s & : \begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= -\alpha y, \\ \dot{z} &= -\nu z, \end{aligned} \quad (x, y, z) \in G_s \\
 A_l & : \begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda(x + 1) + \omega(z - b), \\ \dot{y} &= -\delta(y + 1), \\ \dot{z} &= -\omega(x + 1) - \lambda(z - b), \end{aligned} \quad (x, y, z) \in G_l \\
 A_r & : \begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda(x - 1) - \omega(z - b), \\ \dot{y} &= -\delta(y - 1), \\ \dot{z} &= \omega(x - 1) - \lambda(z - b), \end{aligned} \quad (x, y, z) \in G_r
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где α , δ , ν , ω , λ и b - положительные параметры. Эти подсистемы определены на следующем разбиении фазового пространства G_s , G_l и G_r

¹⁹Нумерация разделов, формул, рисунков и утверждений сохранена в соответствии с основным текстом диссертации.

соответственно:

$$G_s : |x| < 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b,$$

$$G_l : \begin{cases} x \leq -1 & \text{при } z \leq b, \\ x \leq -1 & \text{при } z > b, y \geq 0, \\ x < 1 & \text{при } z > b, y < 0, \end{cases} \quad G_r : \begin{cases} x \geq 1 & \text{при } z \leq b, \\ x \geq 1 & \text{при } z > b, y < 0, \\ x > -1 & \text{при } z > b, y \geq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Как и оригинальная система Лоренца, система (1.1) инвариантна относительно замены $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$ и имеет три состояния равновесия: седло O_s в начале координат с положительной седловой величиной и симметричные фокусы $e_{r,l} = \{\pm 1, \pm 1, b\}$.

В подразделе 1.1.2 доказана **Лемма 1.1.1** о диссипативности системы (1.1) и в явном виде выписана её поглощающая область G .

В силу своей кусочно-линейной природы система (1.1) имеет устойчивые скользящие движения. В подразделе 1.1.3 получены условия (1.13) на параметры системы, при которых устойчивые скользящие движения не участвуют в формировании аттрактора. Этот результат сформулирован в **Теореме 1.1.1**.

Теорема 1.1.1. *В области параметров*

$$\delta > \delta_{cr} = \frac{\omega \ln 2}{\pi}, \quad b < b_{cr} = 2\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\omega} \left(\arctan \frac{\omega}{\lambda} + \pi \right) \right\}, \quad (1.13)$$

аттракторы системы (1.1) не содержат скользящих движений.

В разделе 1.2 построено двумерное отображение Пуанкаре F секущей $D = \{|x| \leq 1, |y| \leq 1, z = b\}$ в себя, определённое решениями линейных подсистем A_s, A_l и A_r системы (1.1). Отображение имеет явную форму

$$F : \begin{cases} \bar{x} = f(x) \equiv 1 - \gamma + \gamma x^\nu, \\ \bar{y} = g(x) \equiv 1 - r + rx^\alpha y, \end{cases} \quad \text{при } x > 0, \\ \begin{cases} \bar{x} = f(x) \equiv \gamma - 1 - \gamma |x|^\nu, \\ \bar{y} = g(x,y) \equiv r - 1 + r|x|^\alpha y, \end{cases} \quad \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

где $\gamma = be^{-\frac{3\pi\lambda}{2\omega}}$ и $r = e^{-\frac{3\pi\delta}{2\omega}}$.

Отображение F имеет треугольную форму, что говорит о наличии инвариантного слоения, аналогичного слоению в оригинальной системе Лоренца, и позволяет отдельно провести полное исследование одномерного (“ведущего”) отображения $\bar{x} = f(x)$. В разделе 1.3 были получены основные бифуркации этого одномерного отображения, включая бифуркации рождения и разрушения странного аттрактора (**Теорема 1.3.1**).

В разделе 1.4 доказано, что динамика полного двумерного отображения F определена динамикой ведущего отображения (1.25):

Лемма 1.4.1. 1. Устойчивые неподвижные точки e_l и e_r одномерного ведущего отображения (1.25) в области параметров $0 < \gamma < \nu^{-1}$ порождают устойчивые неподвижные точки $e_l(x = -1, y = -1)$ и $e_r = (x = 1, y = 1)$ двумерного отображения (1.22). 2. Любая p -периодическая (аперриодическая) орбита одномерного ведущего отображения, расположенная в интервале $X = (1-\gamma, \gamma-1)$ и не содержащая особую точку $x = 0$, порождает единственную седловую p -периодическую (аперриодическую) орбиту двумерного отображения (1.22).

Эта лемма позволяет применять утверждения **Теоремы 1.3.1** в отношении динамики двумерного отображения F и, в частности, строго описать гетероклиническую бифуркацию его неподвижных точек, приводящую к рождению сингулярно-гиперболического аттрактора (**Следствие 1.4.1**).

Согласно **Теореме 1.1.1** любая траектория кусочно-линейной системы (1.1) попадает в поглощающую область G , делая секущую D глобальной. Следовательно, динамика кусочно-линейной системы (1.1) внутри поглощающей области G полностью определяется траекториями двумерного отображения $F : D \rightarrow D$ (1.22). В результате бифуркационные маршруты рождения и исчезновения странного аттрактора в кусочно-линейной системе (1.1) идентичны таковым в двумерном отображении (1.22), которое в свою очередь определяется одномерным ведущим отображением (1.25). Таким образом, в разделе (1.5) мы приходим к одному из основных результатов первой главы, состоящем в строгом описании бифуркационного маршрута COD1 кусочно-линейной системы (1.1):

Теорема 1.5.1 (о динамике кусочно-линейной системы лоренцевского типа). *А. В области параметров (область I на Рис. 1.8)*

$$0 < b < b_h = \gamma \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega}$$

система (1.1) имеет два устойчивых фокуса e_l и e_r [см. Рис. 1.9(A)].

В. Поверхность

$$b_h = \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega}$$

соответствует гомоклинической бифуркации седла O_s (гомоклинической бабочке) [см. Рис. 1.9(B)].

С. В области параметров (область II на Рис. 1.8)

$$b_h = \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} < b < b_{het} = \gamma_{het} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega},$$

где γ_{het} - обратная функция для $\nu = 1 + \frac{\ln 2 - \ln \gamma}{\ln(\gamma-1)}$, устойчивые фокусы e_r и e_l сосуществуют с двумя симметричными седловыми циклами C_1 и C_2 . Неустойчивые и устойчивые многообразия периодических орбит $C_{1,2}$

пересекаются трансверсально, вызывая появление сложного канторова множества седловых орбит [см. на Рис. 1.9(C)].

D. Поверхность

$$b_{het} = \gamma_{het} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega}$$

соответствует гетероклинической бифуркации образования двух симметричных гетероклинических контуров, составленных из неустойчивых многообразий W^u седла O_s , попадающих на устойчивые двумерные многообразия седловых предельных циклов C_1 и C_2 [см. Рис. 1.9(D)].

E. В области параметров (область III на Рис. 1.8)

$$b_{het} \leq b < b_{unq} = \nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \quad (1.44)$$

странный хаотический аттрактор лоренцевского типа, родившийся в результате гетероклинической бифуркации при b_{het} , сосуществует с двумя устойчивыми фокусами e_l и e_r [см. Рис. 1.9(E)].

E-F. Поверхность

$$b_{unq} = \nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega}$$

соответствует субкритической бифуркации типа Андронова-Хопфа, при которой седловой предельный цикл C_1 (C_2) влипает в устойчивый фокус e_r (e_l) и исчезает, превращая e_r (e_l) в седло-фокус.

F. В области параметров (область IV на Рис. 1.8)

$$\nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \leq b < 2\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\omega} \left(\arctan \frac{\omega}{\lambda} + \pi \right) \right\}$$

странный аттрактор лоренцевского типа становится единственным аттрактором кусочно-линейной системы (1.1) [см. Рис. 1.9(F)].

G. Поверхность

$$b = b_{cr} = 2\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\omega} \left(\arctan \frac{\omega}{\lambda} + \pi \right) \right\}$$

соответствует появлению устойчивых скольльзящих движений внутри аттрактора, что разрушает его хаотичность.

В разделе 1.6 построено двумерное отображение Пуанкаре $D \rightarrow D$, которое учитывает наличие скольльзящих движений [т.е. условие (1.13) не

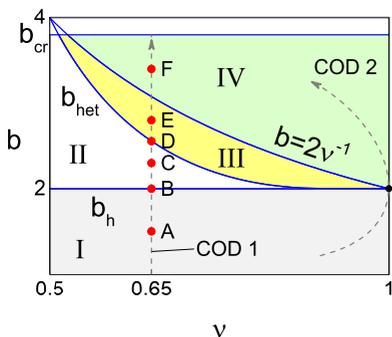


Рис. 1.8 — Бифуркационная диаграмма системы (1.1) (к Теореме 1.5.1). Вертикальной штриховой линией $\nu = 0.65$ изображён пример бифуркационного маршрута COD1 перехода к хаосу (см. Рис. 1.9). Штриховая кривая изображает маршрут, аналогичный маршруту COD2 перехода к хаосу через образование гомоклинической бабочки с нулевой седловой величиной в системе Лоренца.

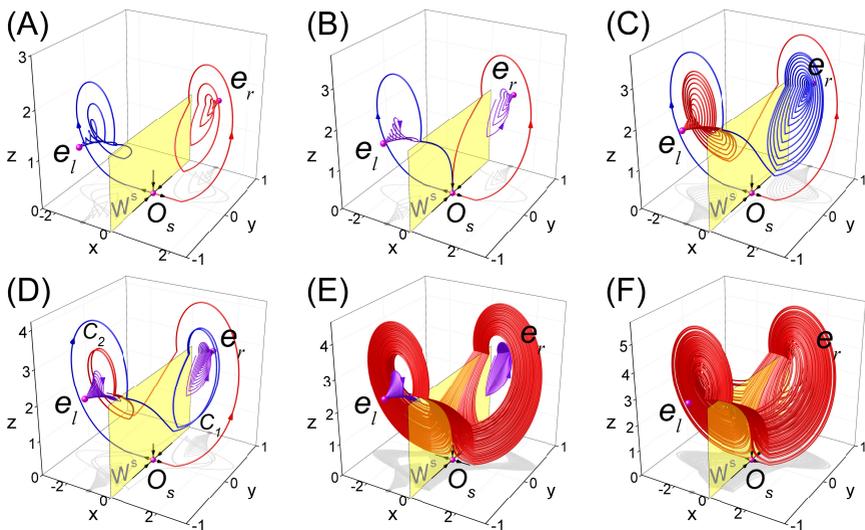


Рис. 1.9 — Фазовые портреты системы (1.1) при различных b . Портреты (A), (B), (C), (D), (E) и (F) соответствуют точкам A, B, C, D, E и F диаграммы на Рис. 1.8. (A) $b = 1.5$. (B) $b = b_h = 2$. (C) $b = 2.3$. (D) $b = b_{het} = 2.557$. (E) $b = 2.8$. (F) $b = 3.4$. Странный аттрактор (красный) является единственным аттрактором системы (1.1). Остальные параметры: $\alpha = 2$, $\nu = 0.65$, $\lambda = 0.294$, $\omega = 2$ и $\delta = 0.588$.

выполняется]. Новое отображение имеет вид

$$\bar{x} = \begin{cases} (1 - \gamma_{cr})\text{sign } x & \text{при } |x| \leq \left(\frac{\gamma - \gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \\ (1 - \gamma + \gamma|x|^\nu)\text{sign } x & \text{при } |x| > \left(\frac{\gamma - \gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \end{cases} \quad (1.70)$$

$$\bar{y} = \begin{cases} r_1(x) + R(x)y & \text{при } |x| \leq \left(\frac{\gamma - \gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \\ (1 - r)\text{sign } x - r|x|^\alpha y & \text{при } |x| > \left(\frac{\gamma - \gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \end{cases}$$

где $R(x) < 1$, $r|x|^\alpha < 1$, а $|x| = x_s = \left(\frac{\gamma - \gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ определяет границу области D_{sl} в зависимости от параметра γ_{cr} (1.61). Полученное отображение имеет треугольную форму, при этом отображение для y является сжимающим. Таким образом, мы можем распространить утверждение **Леммы** 1.4.1 из раздела 1.4 на отображение (1.70) и полностью описать аттракторы кусочно-линейной системы (1.1) и их бифуркации с помощью одномерного ведущего отображения $x \rightarrow \bar{x}$.

В подразделе 1.7.2 изложен один из главных результатов первой главы. Он состоит в том, что бифуркации гомоклинических орбит седла с положительной седловой величиной при наличии скользящих движений могут приводить к рождению устойчивых орбит.

Для удобства, одномерное отображение $x \rightarrow \bar{x}$ было приведено к стандартному одномерному отображению Лоренца

$$\bar{\xi} = g(\xi) \equiv \begin{cases} (-\mu + \varepsilon)\text{sign } \xi & \text{при } |\xi| \leq \varepsilon^{\frac{1}{\nu}}, \\ (-\mu + |\xi|^\nu)\text{sign } \xi & \text{при } |\xi| > \varepsilon^{\frac{1}{\nu}}, \end{cases} \quad (1.72)$$

масштабированием переменных $\xi = kx$ с $k = \gamma^{\frac{1}{\nu-1}}$ и введением новых параметров $\mu = (\gamma - 1)\gamma^{\frac{1}{\nu-1}}$, $\varepsilon = (\gamma - \gamma_{cr})\gamma^{\frac{1}{\nu-1}}$. Результат сформулирован следующим образом:

Теорема 1.7.1 (неустойчивая гомоклиническая орбита порождает устойчивый предельный цикл).

1. *Перед бифуркацией.* При $\mu < \varepsilon \leq 0$ две устойчивые неподвижные точки $e_r(\xi = k)$ и $e_l(\xi = -k)$ являются единственными аттракторами ведущего отображения (1.72). Кусочно-линейная система (1.1) имеет два устойчивых фокуса e_l , e_r и седло O_s .

2. *Гомоклиническая бифуркация со скользящим касанием.* При $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ особая точка $\xi = 0$ отображается в себя, что соответствует двум неустойчивым гомоклиническим орбитам седла O_s в кусочно-линейной системе (1.1). Каждая из этих орбит касается своей скользящей полуплоскости S_1^+ или S_2^+ .

3. После бифуркации. При $\varepsilon > 0$ увеличение $\mu \in (\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon^{1/\nu})$ приводит к рождению устойчивой точки периода 2 и двух неустойчивых неподвижных точек $p_r^s(\xi = \xi_r)$ и $p_l^u(\xi = \xi_l = -\xi_r)$ в ведущем отображении (1.72). Следовательно, кусочно-линейная система (1.1) имеет устойчивый предельный цикл периода 2 и два седловых предельных цикла, которые одновременно родились от гомоклинической орбиты. В отличие от классической бифуркации гомоклинической бабочки, ведущее отображение (1.72) не содержит гиперболического канторова множества неустойчивых траекторий из-за наличия скользящих движений.

В разделе 1.8 получен бифуркационный маршрут рождения странного аттрактора лоренцевского типа через бесконечную последовательность скользящих гомоклинических бифуркаций, вызывающих удвоение периода устойчивых орбит.

При $\gamma = 2$ вводится бифуркационный параметр $d = \gamma_{cr} - 1 \in (-1, 1]$. Приведём **Теорему 1.8.1** в сокращённом виде:

Теорема 1.8.1 (скользящие многообходные гомоклинические орбиты и маршрут к хаосу).

1. При $-1 < d < 0$ ($0 < \gamma_{cr} < 1$) в кусочно-линейной системе (1.1) существуют два устойчивых предельных цикла.

2. При $d = d_{h1} = 0$ ($0 < \gamma_{cr} = 1$) образуется устойчивая гомоклиническая бабочка седла O_s .

3. При $0 < d < d_{p1}$, где d_{p1} есть корень уравнения $2d^\nu + d = 1$, в системе (1.1) из гомоклинической бабочки рождается устойчивый предельный цикл периода 2.

4. При $d = d_{p1}$ этот предельный цикл претерпевает суперкритическую бифуркацию “вилка”. Увеличение $d > d_1$ приводит к рождению двух симметричных устойчивых орбит периода 2.

5. При $d = d_{h2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ эти суперустойчивые орбиты периода 2 сливаются друг с другом в O_s и образуют две симметричные двухобходные гомоклинические орбиты.

6. При $d_{h2} < d < d_{p2}$, где d_{p2} - корень уравнения $2d^\nu - \left(\frac{1-d}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}} = 1$, система (1.1) устойчивую орбиту периода 4, родившуюся при $d = d_{h2}$.

7. Значения параметров для всех последующих многообходных гомоклинических бифуркаций определены рекуррентным соотношением

$$d_{h(n+1)} = \chi(d_{hn}) = \left(\frac{d_{hn} + 1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \quad (1.75)$$

где $d_{h(n+1)}$ и d_{hn} - значения параметра d , при которых образуются $(n + 1)$ -обходные и n -обходные гомоклинические орбиты соответственно.

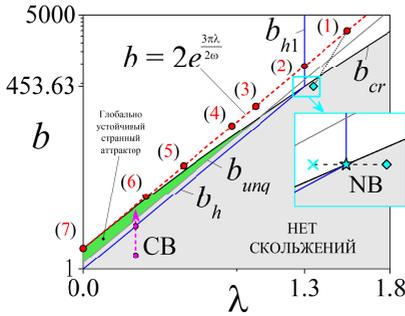


Рис. 1.19 — Общая двумерная бифуркационная диаграмма кусочно-линейной системы (1.1), иллюстрирующая Теоремы 1.5.1, 1.7.1 и 1.8.1 (см. подробное описание в разделе 1.9). Остальные параметры кусочно-линейной системы (1.1) имеют значения $\omega = 1$, $\nu = 0.8$, $\delta = 0.588$ и $\alpha = 2$.

8. *Отображение (1.75) имеет устойчивую неподвижную точку $d_{hn} = 1$, соответствующую странному аттрактору лоренцевского типа в кусочно-линейной системе (1.1). Бесконечная последовательность многообходных гомоклинических бифуркаций, накапливающихся к предельному значению $d = 1$, которая приводит к появлению аттрактора лоренцевского типа, имеет ренормирующий коэффициент (scaling factor)*

$$\Delta = \lim_{d \rightarrow 1} \frac{d_{hn} - d_{h(n-1)}}{d_{h(n-1)} - d_{h(n-2)}} = \frac{1}{2\nu}. \quad (1.76)$$

Бифуркационная диаграмма на Рис. 1.19 даёт общую картину бифуркаций, описанных в первой главе, и связывает их друг с другом, а также с областью параметров, где существует странный аттрактор лоренцевского типа.

Вторая глава посвящена исследованию неавтономных отображений с изменяющимися во времени хаотическими аттракторами, а также мигающим системам, порождённых случайным переключением между несколькими автономными потоками в каждый последовательный период времени.

В разделе 2.1 введено определение нестационарного гиперболического аттрактора:

Определение 2.1.1. Пусть $G : (\|x\| \leq x^*, x^* = \text{const})$ есть поглощающая область отображения $F[x(i), u(i)]$, $FG \subset G, \forall i \in \mathbb{Z}^+$. Пусть в каждой точке $x \in G$ определены одни и те же устойчивые и неустойчивые инвариантные конусы K^s и K^u . Обозначим линеаризацию отображения F в любой фиксированной точке x : $L(x, i) = F_x[x, u(i)]$. Также предположим, что выполняется следующие условия. Оператор L (оператор L^{-1}) растягивает любой вектор V^u (V^s), выпущенный из точки x и лежащий в неустойчивом конусе K^u (в устойчивом конусе K^s) для любых $x \in G$ и $i \in \mathbb{Z}^+$.

Тогда множество точек в G , на котором действует отображение $F[x(i), u(i)]$ при неограниченно возрастающем времени i , называется нестационарным гиперболическим аттрактором.

В подразделе 2.1.2 рассмотрена задача о существовании такого аттрактора в конкретном неавтономном двумерном отображении с одной нелинейностью

$$F: \begin{cases} x(i+1) = x(i) + y(i) + ag[x(i)] \equiv X(x, y), \\ y(i+1) = \lambda u(i) \{y(i) + bg[x(i)]\} \equiv Y(u, x, y), \end{cases} \quad (2.8)$$

где управляющий параметр $0 < u(i) < 1$ есть произвольная ограниченная функция, a, b, λ - положительные параметры, и $g(x)$ - кусочно-линейная функция кубического типа

$$g(x) = \begin{cases} 2 + 2x, & x < -\frac{1}{2}, \\ -2x, & |x| \leq \frac{1}{2}, \\ -2 + 2x, & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1.1. Пусть выполняются условия

$$0 < \lambda < \frac{1}{1+2b}, \quad a^- < a < a^+,$$

$$\text{где } a^- = \frac{1 + \frac{2\lambda b}{1-\lambda} + \sqrt{1 + (\frac{2\lambda b}{1-\lambda})^2}}{2}, \quad a^+ = \frac{3 - \frac{2\lambda b}{1-\lambda} + \sqrt{(\frac{2\lambda b}{1-\lambda} - 1)(\frac{2\lambda b}{1-\lambda} - 9)}}{4}.$$

Тогда отображение (2.8) имеет нестационарный сингулярно-гиперболический аттрактор, локализованный в области

$$G: \{|x| < a + \frac{\lambda b}{1-\lambda} - 0.5, |y| < \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}.$$

В подразделе 2.1.3 доказано, что если в отображении (2.8) управляющий параметр $u(i)$ задан динамической переменной одномерного отображения “тент”, то полученное трёхмерное автономное отображение имеет сингулярно-гиперболический аттрактор с двумя положительными показателями Ляпунова (**Теорема 2.1.2**).

В разделе 2.2 рассмотрены мигающие системы вида

$$\dot{x} = F[x, s(t)], \quad (2.37)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $s(t)$ - случайная дискретная скалярная величина, равная постоянной $s_i, i = 1, 2, \dots, M$ с вероятностью p_i в каждый k -ый момент времени $t \in [k\tau, (k+1)\tau), k \in \mathbb{Z}^+$. Здесь $\tau = \text{const}$ это период переключения. Траектории системы (2.37) склеены в моменты времени $t = k\tau$ из траекторий M автономных систем

$$\dot{x} = F(x, s_i), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (2.38)$$

заданных на каждом интервале $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$ с вероятностью p_i . При достаточно быстром переключении $\tau \ll 1$ динамика неавтономной системы (2.37) может быть аппроксимирована с помощью аттрактора \mathcal{A} автономной усреднённой по времени системы $\dot{x} = \sum_{i=1}^M p_i F(x, s_i)$.

В мигающих системах возможно наблюдать появление т.н. “аттрактора-призрака”, который в настоящей диссертации определён так:

Определение 2.2.1. *Если аттрактор \mathcal{A} усреднённой системы отличается от каждого из аттракторов систем (2.38), то аттрактор \mathcal{A} называется аттрактором-призраком мигающей системы (2.37).*

В подразделах 2.2.1 и 2.2.2 приведены примеры аттракторов-призраков в мигающих системах Лоренца и Хиндмарша-Роуза соответственно (**Утверждения 2.2.1** и **2.2.2**), а также изложен метод синтеза таких аттракторов.

В **третьей главе** рассматривается ансамбль связанных фазовых осцилляторов Курамото второго порядка (с инерцией). Методами качественной теории решается задача о частичной синхронизации, при которой часть осцилляторов синхронны, в то время как остальные составляют асинхронный кластер. Система уравнений ансамбля из N осцилляторов имеет вид

$$\beta \ddot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.1)$$

где φ_i - фаза i -го осциллятора, параметр $\beta > 0$ отвечает за инерцию, а параметр $K > 0$ представляет силу связи в топологии сети “каждый с каждым”. Фазовое пространство системы (3.1) есть $\mathbb{R}^N \times \mathbb{T}^N$. Осцилляторы имеют различные натуральные частоты ω_i , $i = 1, \dots, N$, выбранные из дискретного бимодального распределения. Допускается, что натуральные частоты являются ограниченными функциями времени $\omega_i(t)$.

Задача о частичной синхронизации сформулирована и решена в переменных для разности фаз θ_{ij} между любыми двумя осцилляторами i и j таких, что $\theta_{ij} = \frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, и в новых параметрах $\Delta_{ij} = \frac{\omega_i - \omega_j}{2K}$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\beta K}}$. Осцилляторам когерентного кластера C_{osc} соответствуют фазовые разности θ_{ij} с индексами $i, j = 1, 2, \dots, N_{osc}$, осцилляторам некогерентного кластера C_{rot} - разности θ_{ij} с индексами $i, j = N_{osc} + 1, N_{osc} + 2, \dots, N_{osc} + N_{rot} = N$.

Определение 3.2.1. Частичная ε -синхронизация в системе (3.6) устойчива, если для любого времени $t > 0$ выполняется

$$\begin{aligned} |\theta_{ij}(t)| &< \varepsilon/2 \quad \text{для } i, j = 1, 2, \dots, N_{osc}, \\ \dot{\theta}_{ik}(t) &> 0 \quad \text{для } \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N_{osc}, \\ k = N_{osc} + 1, N_{osc} + 2, \dots, N. \end{array} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вводятся оценки разностей натуральных частот Δ_{ij} из когерентного кластера $\Delta = \max_{ij} |\Delta_{ij}|$, $i, j = 1, 2, \dots, N_{osc}$ и некогерентного кластера $\delta = \min_{ik} |\Delta_{ik}|$, $i = 1, 2, \dots, N_{osc}$, $k = N_{osc} + 1, N_{osc} + 2, \dots, N$. Теперь можно изложить основной результат третьей главы:

Теорема 3.3.1 (о достаточных условиях частичной синхронизации).

Пусть $\delta > 1$. Тогда частичная ε -синхронизация в системе Курамото второго порядка (3.1) устойчива для двух следующих областей параметров $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\beta K}}$ и Δ :

A.

$$\lambda > \lambda_{up} = 2\sqrt{(\Delta + 1)/\arcsin \frac{\Delta}{a}}, \quad \Delta < \Delta_{cr} = \left(\frac{N_{osc}}{N} \cos \varepsilon - \frac{N_{rot}}{N}\right) \sin \frac{\varepsilon}{2}, \quad (3.27)$$

где параметр a определён в (3.10);

B.

$$\lambda < \lambda_{DN} = 2(a^2 - \Delta^2)^{1/4}, \quad \Delta < g(\lambda), \quad (3.28)$$

где $g(\lambda)$ – монотонно возрастающая функция $\lambda \in (0, \lambda_{DN})$ от $g(0) = 0$.

В **заключении** приведены следующие основные результаты работы:

1. для трёхмерного потока строго доказано существование каскада бифуркаций коразмерности 1, приводящего к рождению аттрактора лоренцевского типа;
2. в системе лоренцевского типа рассмотрены скользящие гомоклинические бифуркации, приводящие к рождению устойчивых циклов и квазиэллиптических аттракторов при положительной седловой величине;
3. для неавтономного двумерного отображения было доказано существование нестационарного сингулярно-гиперболического аттрактора без привлечения асимптотических методов;
4. для сети из произвольного числа связанных двумерных осцилляторов Курамото были получены достаточные условия частичной синхронизации.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. *Barabash, N. V.* Non-stationary attractors in the blinking systems: ghost attractor of Lorenz type [Текст] / N. V. Barabash, V. N. Belykh // Cybernetics and Physics. — 2019. — Т. 8, № 4. — С. 209–214. — (БАК, Scopus).
2. *Barabash, N. V.* Chaotic driven maps: Non-stationary hyperbolic attractor and hyperchaos [Текст] / N. V. Barabash, V. N. Belykh // The European Physical Journal Special Topics. — 2020. — Т. 229, № 6. — С. 1071–1081. — (БАК, Scopus, WoS).
3. *Barabash, N. V.* Ghost attractors in blinking Lorenz and Hindmarsh–Rose systems [Текст] / N. V. Barabash, T. A. Levanova, V. N. Belykh // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2020. — Т. 30, № 8. — С. 081105. — (БАК, Scopus, WoS).
4. *Белых, В.* Бифуркации хаотических аттракторов в кусочно-гладкой системе лоренцевского типа [Текст] / В. Белых, Н. Барабаш, И. Белых // Автомат. и телемех. — 2020. — Т. 81, № 8. — С. 1385–1393. — (БАК, Scopus, WoS).
5. *Belykh, V. N.* Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs [Текст] / V. N. Belykh, N. V. Barabash, I. V. Belykh // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Т. 31, № 4. — С. 043117. — (БАК, Scopus, WoS).
6. *Барабаш, Н.* Пороги синхронизации в ансамбле фазовых осцилляторов Курамото со случайно мигающими связями [Текст] / Н. Барабаш, В. Белых // Известия вузов. Радиофизика. — 2017. — Т. 60, № 9. — (БАК, Scopus, WoS).
7. *Belykh, V. N.* A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results [Текст] / V. N. Belykh, N. V. Barabash, I. V. Belykh // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2019. — Т. 29, № 10. — С. 103108. — (БАК, Scopus, WoS).
8. Partial synchronization in the second-order Kuramoto model: an auxiliary system method [Текст] / N. Barabash [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Т. 31, № 11. — С. 113113. — (БАК, Scopus, WoS).

Барабаш Никита Валентинович

Аттракторы в кусочно-гладких системах лоренцевского типа и синхронизация
фазовых осцилляторов

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук

Подписано в печать _____.____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____