Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волжский государственный университет водного транспорта»

На правах рукописи

Барабаш Никита Валентинович

Аттракторы в кусочно-гладких системах лоренцевского типа и синхронизация фазовых осцилляторов

Специальность 01.01.02 —
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Белых Владимир Николаевич

Нижний Новгород — 2022

Оглавление

Стр.

Введение 4

Глава 1. Аттракторы и бифуркации в кусочно-линейной системе лоренцевского типа 15

1.1 Кусочно-линейная модель и её свойства 16

1.1.1 Склеивание траекторий 20

1.1.2 Поглощающая область 21

1.1.3 Скользящие движения 24

1.2 Построение отображения Пуанкаре 28

1.3 Динамика одномерного ведущего отображения 31

1.4 Динамика полного двумерного отображения 37

1.5 Возвращение к динамике потока 42

1.6 Отображение Пуанкаре при наличии скользящих движений . . . 48

1.6.1 Аналитический вывод 49

1.6.2 Полное двумерное отображение 57

1.6.3 Одномерное ведущее отображение: стандартная форма . . 58

1.7 Гомоклинические бифуркации 59

1.7.1 Классическая бифуркация гомоклинической бабочки: рождение седловых циклов 60

1.7.2 Неклассические скользящие гомоклинические бифуркации: устойчивая динамика при положительной седловой величине 61

1.8 Путь к хаосу через бесконечную последовательность гомоклинических бифуркаций 65

1.9 Общая картина бифуркаций в кусочно-линейной системе 71

Глава 2. Хаотические аттракторы в неавтономных системах . . . 74

2.1 Управляемые отображения 74

2.1.1 Логистическое отображение с периодической управляющей функцией $u(i)$ 76

2.1.2 Сингулярно-гиперболический аттрактор в управляемом двумерном отображении 78

2.1.3 Пример гиперхаоса 83

Стр.

2.1.4 Численное нахождение ляпуновских показателей 84

2.2 Аттракторы-призраки в мигающих системах 85

2.2.1 Мигающая система Лоренца 87

2.2.2 Мигающая система Хиндмарша-Роуза 90

Глава 3. Синхронизация в ансамблях связанных фазовых осцилляторов Курамото 93

3.1 Сеть осцилляторов Курамото второго порядка 93

3.2 Метод систем сравнения 94

3.2.1 Сведение к системе связанных уравнений маятникового типа 94

3.2.2 Динамика кусочно-гладкой системы сравнения 97

3.2.3 Существование и размер поглощающей области 102

3.3 Частичная синхронизация: основной результат 109

Заключение 114

Список литературы 119

Введение

Работа посвящена исследованию конкретных динамических систем, заданных в виде обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и отображений. Центральными в работе являются вопросы о существовании, свойствах и бифуркациях различных, в т.ч. и широко известных аттракторов. К таким системам относятся системы лоренцевского типа, сети осцилляторов Курамото, гиперхаотические динамические системы, модели нейрона, а также управляемые неавтономные динамические системы, моделирующие переключательную активность.

Классический аттрактор Лоренца [1] более 50 лет является символом хаотической динамики. Его открытие привело к формулировке общего понятия странного аттрактора [2] - притягивающего инвариантного предельного множества неустойчивых траекторий [3].

Детальные исследования потока траекторий системы Лоренца [4—12] позволили получить геометрические модели отображений, хорошо приближающие отображение Пуанкаре. С помощью этих моделей было изучено бифуркационное множество, существование которого в самой системе Лоренца было установлено численно. К нему относятся два бифуркационных маршрута рождения странного хаотического аттрактора Лоренца: а) главный маршрут (COD1) – через бифуркацию коразмерности 1, при которой образуются две гетероклинические орбиты, “соединяющие” седло с двумя симметричными седловыми предельными циклами [5; 6]; б) маршрут (COD2) – через бифуркацию коразмерности 2 “гомоклинической бабочки” с нулевой седловой величиной [9—11].

Детали этого бифуркационного множества, связанные с рождением, изменением и исчезновением аттрактора Лоренца, исследовались с помощью численных методов [5; 13—23]. К численным исследованиям системы Лоренца также относится детальный численный анализ существования счётного множества периодических орбит со специальными символьными сигнатурами, относящимися к гомоклиническим и гетероклиническим бифуркациям [13; 16; 18]. Численное доказательство существования хаотического аттрактора Лоренца было дано в работе [24], где было показано, что система Лоренца имеет хаотический аттрактор в малой окрестности классических значений параметров [13].

Развивая ранние результаты [9—11], относящиеся к бифуркационному маршруту COD2, аналитическое доказательство существования аттрактора Лоренца в расширенной системе Лоренца было представлено в работе [25]. Это доказательство основано на проверке критерия Шильникова [26] рождения странного аттрактора. В работе [25] авторы рассматривали малую окрестность бифуркации коразмерности 2, соответствующей гомоклинической бабочке с нулевой седловой величиной. Эти результаты представляют значительное продвижение в “чистых” аналитических исследованиях системы Лоренца и её обобщений.

Однако, строгое аналитическое исследование рождения аттрактора Лоренца через гетероклиническую бифуркацию коразмерности 1 (т.е. по маршруту COD1) до сих пор остаётся нерешённой в силу сложности задачей. Несмотря на то, что аналитическое доказательство [27] гомоклинической бифуркации (гомоклинической бабочки) в системе Лоренца датировано 1984 годом, определение явных бифуркационных параметров маршрута COD1 до настоящего времени возможно только численно.

В настоящей диссертации эта задача рассматриваются под иным углом зрения: вместо оригинальной системы Лоренца исследуется имитирующая кусочно-линейная система ОДУ, которая переключается между тремя линейными системами и имеет качественно такие же структуру и хаотический аттрактор, как и сама система Лоренца. Траектории кусочно-линейной системы “склеены” из траекторий линейных систем, что делает возможным проведение аналитического исследования, в частности, позволяет явно указать параметры системы, отвечающие гетероклинической бифуркации коразмерности 1 и главному маршруту COD1.

Использование кусочно-линейной системы для строгого исследования сложной хаотической динамики не случайно. Такие системы широко используются в теории динамических систем в различных контекстах и приложениях [28—31]. Их преимущество по сравнению с нелинейными системами заключается в возможности получить явные решения в отдельных областях фазового пространства, которые затем склеиваются на границах этих областей, образуя явно заданные траектории системы. Традиционно, кусочно-линейные динамические системы выводятся из нелинейных систем заменой нелинейностей на кусочно-линейные функции. Это осуществляется для того, чтобы повторить динамику исходной нелинейной системы, при этом упросив её анализ. Классический пример такой замены представлен в работе Левинсона [32], где нелинейный член $(x^2 - 1)$ уравнения Ван дер Поля был заменён кусочно-постоянной функцией. Такая замена позволила Левинсону строго обосновать классический результат Картрайта и Литтлвуда о рождении сложного множества периодических орбит в неавтономном уравнении Ван дер Поля [33], которое часто рассматривается как первый пример детерминированной системы с хаотическим поведением. Система Лоренца также исследовалась с помощью кусочно-линейных систем. Среди примеров можно встретить кусочно-линейную систему лоренцевского типа [34], а также частично и полностью линеаризованные версии системы Лоренца [35], предложенные для упрощения реализаций хаотических электрических цепей в инженерных и физических задачах. Тем не менее, строгих исследований бифуркационной структуры кусочно-линейных систем Лоренца до сих пор не было.

Другой большой класс динамических систем это кусочно-гладкие динамические системы [28; 29; 36—39], фазовое пространство которых разделено на насколько областей с различными векторными полями и задающими их динамическими правилами [29]. В механике кусочно-гладкие динамические системы используются для моделирования взаимодействия тел при негладком контакте, ударах, трении и переключении [40; 41], включая взаимодействия пешеходов с мостом [42—44] и виброударные электрогенераторы [45]. В электротехнике и системах управления кусочно-гладкие системы используются как модели релейных систем, импульсных преобразователей мощности и сетей с коммутацией пакетов [40; 46—49]. В биологии негладкая динамика проявляется в сети регуляции генов [50; 51], сетях импульсно-связанных нейронов [52] и др.

Введение разрывов в правые части может приводить ко множеству бифуркаций, некоторые из которых имеют гладкие аналоги (в том числе бифуркации типа складки или типа Андронова-Хопфа), а другие связаны исключительно с негладкими явлениями, такими как касание (grazing) или скольжение (sliding) [30; 39; 53—56]. Например, в кусочно-гладких динамических системах предельные циклы, торы и хаотические аттракторы могут рождаться или исчезать фундаментально отличным образом [57—59]. Известны как минимум 20 различных геометрических механизмов локального рождения предельного цикла в двумерном кусочно-гладком потоке [60]. К локальным бифуркациям типа Андронова-Хопфа, лежащим в основе этих механизмов, относятся бифуркации равновесия на границе склейки и рождение предельных циклов из складок [39].

Теория локальных бифуркаций для кусочно-гладких систем со скользящими движениями развита относительно хорошо, особенно для кусочно-гладких отображений, где скачки мультипликаторов вызывают бифуркации столкновения с границей (border-collision bifurcations [61], также известные как С-бифуркации [62; 63]), а также негладкие аналоги бифуркации Неймарка-Сакера [57]. В то же время, теория глобальных бифуркаций кусочно-гладких систем находится в зачаточном состоянии (см. обзор по разрывным бифуркациям [64]). Большинство существующих аналитических результатов получены для условий, при которых глобальные бифуркации в кусочно-гладких потоках воспроизводят свойства своих классических аналогов в гладких системах [65; 66]. В их число входит версия теоремы Шильникова о седло-фокусе для систем Филиппова, где скользящая гомоклиническая петля Шильникова к псевдо-устойчивому фокусу даёт счетное число скользящих седловых периодических орбит [66]. Однако, общие условия и свойства многих других разрывных глобальных бифуркаций все ещё остаются открытой проблемой.

Одна из целей диссертации - восполнить этот пробел, предлагая точное описание скользящих гомоклинических бифуркаций в системе лоренцевского типа. Удалось установить, что такие бифуркации демонстрируют неожиданный эффект, когда при разрушении гомоклинической орбиты седла с положительной седловой рождается устойчивый (не седловой) предельный цикл. В данной работе этот эффект положен в основу сценария разрушения аттрактора лоренцевского типа через появление в аттракторе скользящих движений.

Другим объектом исследования диссертации являются сингулярно-гиперболические отображения. Теория гиперболических динамических систем восходит к работам С.Смейла [67] и Д.В.Аносова [68]. Эта теория успешно продолжает развиваться в работах нижегородских математиков В.З.Гринеса, Е.В.Жужомы, О.В.Починки и др. Более 50 лет назад с помощью методов нелинейной динамики и эргодической теории было показано, что странный гиперболический аттрактор порождает случайный стационарный процесс [69—73]. Это вызвало большой интерес в физических приложениях, направленный на поиск динамических систем с гиперболическими аттракторами. Ряд таких систем был предложен в работах С.П. Кузнецова и соавторов [74—76].

Важным классом систем с гиперболическими свойствами являются системы с сингулярно-гиперболическими аттракторами. К аналитически доказанным сингулярно-гиперболическим аттракторам относятся аттракторы лоренцевского типа [25], аттрактор Лози [77], Белых [78] и др. В работах [79—81] рассматривался класс систем с одной нелинейностью (системы Лурье) и дискретным временем, для которых были предложены аналитические методы нелокального анализа. Эти методы основаны на построении инвариантных устойчивых и неустойчивых конусов [80—83] и позволяют доказать существование сингулярно-гиперболического аттрактора.

Один из интересных примеров странных аттракторов, управляемых неавтономным воздействием, встречается в теории управления хаосом [84—89]. Хорошо известным результатом управления хаосом является стабилизация периодических орбит в системе Лоренца [87].

В настоящей диссертации исследуются неавтономные отображений с переключающимися параметрами. А именно, для управляемых хаотических отображений выводятся достаточные условия, при которых нестационарный аттрактор остаётся хаотическим, т.е. не содержит устойчивых орбит.

В диссертации также рассматривается широко распространённый тип неавтономных потоков со случайными переключениями. Такие системы используются при моделировании динамики сети Интернет и электросетей, где со временем происходит изменение топологии подключений по некоторому стохастическому правилу [90]. Случайные и короткие по времени взаимодействия между нейронами и техническими устройствами также могут рассматриваться в качестве изменений такого типа [91; 92].

В работе [93] такие случайные и независимые переключения были названы *миганием* (blinking), а динамические системы с таким поведением - *мигающими системами*. Один из центральных вопросов исследования мигающих систем есть вопрос о существовании и свойствах установившихся динамических режимов, представленных в виде нестационарных аттракторов [80]. Общая строгая теория нестационарной и асимптотической динамики мигающих систем при быстром переключении была развита в работах [94; 95]. Эта теория прояснила отношения между стохастически мигающей системой и её усреднённым по времени аналогом. В рамках этой теории было предложено понятие аттрактора-призрака $\mathcal{A}$ - аттрактора, который существует в усреднённой системе, но не инвариантен относительно мигающей системы. Траектория мигающей системы может достигать малой окрестности аттрактора-призрака и проводить в ней большую часть времени, если переключение достаточно быстрое. Недавние примеры аттракторов-призраков были даны в работах [90; 96].

В диссертации рассмотрено появление хаотического аттрактора-призрака в стохастически переключающихся системах Лоренца. Также исследуется мигающая система, составленная из систем Хиндмарша-Роуза (HR) [97] с двумя разными наборами параметров.

Заключительная глава диссертации посвящена другому актуальному направлению нелинейной динамики - теории синхронизации связанных осцилляторов.

Полная и кластерная синхронизации являются основными формами синхронизированных колебаний. Устойчивость полной синхронизации идентичных или почти идентичных осцилляторов сильно зависит от топологии сети [98—102] . В случае неидентичных фазовых осцилляторов наиболее распространенным пространственно-временным паттерном, который возникает на пути к полной синхронизации, является частичная синхронизация, при которой некоторые осцилляторы синхронизируются внутри когерентной группы осцилляторов (кластера), в то время как остальные асинхронные осцилляторы образуют некогерентное состояние [103—105]. При кластерной синхронизации сеть разбивается на группы когерентных осцилляторов, но синхронизация между кластерами отсутствует [106—113]. Устойчивости кластерной синхронизации и её сохранению при расстройке параметров осцилляторов уделено большое внимание в литературе [106; 108; 111; 113—115].

В диссертации рассматривается сеть осцилляторов Курамото второго порядка (с инерцией) [116], более точно описывающая частичную синхронизацию в реальных сетях осцилляторов, которые могут подстраивать свои частоты. Такие сети имеют более богатую динамику [117—121], включая прерывистые хаотические химеры [122], индуцированные инерцией гистерезисные переходы от некогерентности к когерентности [123], бистабильность синхронных кластеров [124], уединенные состояния [125; 126] и хаотическую межкластерную динамику [127]. Частичная синхронизация в модели неидентичных осцилляторов Курамото второго порядка ранее изучалась методами теории среднего поля в предположении бесконечно большого размера сети [123; 128]. Наиболее сложный случай конечного размера сети ранее не изучался и является предметом настоящей диссертации.

В работе разработан метод доказательства устойчивости частичной синхронизации в конечномерной модели связанных осцилляторов Курамото второго порядка. Этот метод использует двумерную кусочно-гладкую систему маятникового типа для разделения сети на когерентный и некогерентный кластеры, а также для ограничения осциллирующих разностей фаз между осцилляторами внутри когерентного кластера. Данный подход является нетривиальным расширением качественных методов, ранее разработанных для сетей Курамото [127; 129], в направлении частичной синхронизации неидентичных осцилляторов Курамото второго порядка.

Основные результаты диссертации изложены в работах диссертанта [157—164].

Целью данной работы является строгое математическое исследование аттракторов и бифуркаций конкретных динамических систем со сложным поведением.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Построить кусочно-линейную модель системы Лоренца, которая переключается между тремя трёхмерными линейными системами, и в явном виде получить отображение Пуанкаре, которое позволяет строго доказать существование аттрактора лоренцевского типа, а также в явном виде получить бифуркации его рождения, изменения и исчезновения.
2. Исследовать кусочно-линейную модель системы Лоренца в случае, когда скользящие движения входят в аттрактор. Найти последовательность скользящих гомоклинических бифуркаций, приводящих к рождению хаотического аттрактора лоренцевского типа, а также в явном виде получить скейлинг-фактор для бифуркаций удвоения периода, связанных с многообходными гомоклиническими орбитами и образованием квазистранного аттрактора.
3. Построить одномерные отображения сравнения и инвариантные конусы, с помощью которых доказать существование инвариантной области фазовой плоскости неавтономного отображения, состоящей из седловых траекторий.
4. Обосновать применимость метода усреднения при быстрых переключениях в конкретных мигающих системах Лоренца и Хинмарша-Роуза.
5. Построить кусочно-гладкую систему сравнения маятникого типа, траектории которой определяют колебательную динамику разностей фаз

между осцилляторами в когерентном кластере и вращательную динамику в асинхронном кластере сети двумерных осцилляторов Курамото.

Научная новизна: Все представленные в диссертации результаты являются новыми и опубликованы в рецензируемых научных журналах базы Web of science, входящих в квартили Q1 и Q2. В работе впервые:

1. для трёхмерного потока строго доказано существование каскада бифуркаций коразмерности 1, приводящего к рождению аттрактора лоренцевского типа;
2. в системе лоренцевского типа рассмотрены скользящие гомоклинические бифуркации, приводящие к рождению устойчивых циклов и квазистранных аттракторов при положительной седловой величине;
3. для неавтономного двумерного отображения доказано существование нестационарного сингулярно-гиперболического аттрактора без привлечения асимптотических методов;
4. для сети из произвольного числа связанных двумерных осцилляторов Курамото получены достаточные условия частичной синхронизации.

Практическая значимость: Работа носит фундаментальный характер и является вкладом в теорию динамических систем и динамического хаоса. Практическая значимость работы отражена в приведённом описании рассматриваемых конкретных динамических систем, моделирующих синхронизацию в ансамблях осцилляторов, цифровые системы автоподстройки частоты, переключательную активность технических систем, активность нейронных сетей.

Методология и методы исследования: В работе применялись методы современной качественной теории и теории бифуркаций динамических систем (в частности, построение отображения Пуанкаре, теорема Шильникова о гомоклинической петле, и др.), метод функций Ляпунова и асимптотические методы малого параметра. Существенным образом использовались метод двумерных систем сравнения для ОДУ и принцип сравнения многомерных отображений с отображениями меньшей размерности. Важная бифуркационная диаграмма для системы Лоренца получена с помощью предложенного в работе метода построения имитирующих кусочно-гладких динамических систем.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Доказано существование сингулярно-гиперболического аттрактора лоренцевского типа в кусочно-линейной системе, имитирующей систему

Лоренца. В явном виде получен каскад бифуркаций коразмерности 1, приводящий к рождению аттрактора.

2. Доказано, что появление скользящих движений в аттракторе приводит к новому неожиданному бифуркационному сценарию, когда в результате гомоклинических бифуркаций седла с положительной седловой величиной рождаются устойчивые периодические орбиты.
3. Доказано существование последовательности скользящих гомоклинических бифуркаций, приводящих к рождению хаотического аттрактора лоренцевского типа. В частности, в явном виде получен скейлинг-фактор для бифуркаций удвоения периода, связанных с многообходными гомоклиническими орбитами и образованием квазистранного аттрактора.
4. Доказано существование нестационарного сингулярно-гиперболического аттрактора в конкретном двумерном неавтономном отображении, а также гиперхаотического аттрактора в автономном трёхмерном отображении.
5. Предложен метод синтеза аттракторов-призраков в мигающих системах на примере мигающих систем Лоренца и Хиндмарша-Роуза.
6. Для сети из произвольного числа глобально связанных двумерных осцилляторов Курамото получены явные достаточные условия устойчивой частичной синхронизации.

Достоверность полученных результатов обеспечивается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных журналах базы Web of Science квартилей Q1 и Q2, а также в изданиях, рекомендованных ВАК.

Апробация работы: Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

International Conference “Shilnikov WorkShop 2016”, Нижний Новгород, 2016; International Conference “Shilnikov WorkShop 2017”, Нижний Новгород, 2017; Нижегородская сессия молодых ученых (технические, естественные, математические науки), Нижний Новгород, 2017, 2018, 2019; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам 2018, Суздаль, 2018; International Conference-School “Dynamics, Bifurcations, and Chaos”, Нижний Новгород, 2018; International Conference “Shilnikov Workshop 2018”, Нижний Новгород, 2018; XXIII научная конференция по радиофизике, посвященная 100-летию со дня рождения Н.А. Железцова, Нижний Новгород, 2019; Всероссийская молодежная конференция "Путь в науку. Математика", 2019, Ярославль; 9th International scientific conference on Physics and Control, Иннополис, 2019; The 7th Bremen Summer School and Symposium "Dynamical Systems - pure and applied", Бремен, Германия, 2019; Международная конференция КРОМШ-2019 "XXX Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам", пос. Батилиман, Республика Крым, 2019; International Conference "Topological methods in dynamics and related topics. Shilnikov Workshop", Нижний Новгород, 2019; 20 международная конференция и молодежная школа "Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии", Нижний Новгород, 2020; Dynamics in Siberia, Новосибирск, 2021; Нелинейные дни в Саратове для молодых, Саратов, 2021; Международная конференция "Математические идеи П.Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания", Обнинск, 2021; 21 международная конференция "Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии", Нижний Новгород, 2021;

Результаты диссертации вошли в составную часть результатов работ, выполненных при финансовой поддержке Министерства образования и науки (госзадание № 0729-2020-0036 "Математическая теория динамического хаоса и живые системы"), Российского научного фонда (проекты № 19-12-00367 "Динамика нестационарных осцилляторных сетей", № 19-72-10128 "Динамические механизмы возникновения хаоса и экстремальных событий в нейронных сетях" и № 22-21-00553 "Бифуркации гомоклинических структур и хаотических аттракторов конкретных динамических систем"), Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-01-00607А "Развитие математических методов теории динамического хаоса"), а также при поддержке Научно-образовательного математического центра "Математика технологий будущего".

Личный вклад: Аналитические результаты получены автором совместно с научным руководителем В.Н. Белых. Численные результаты получены лично автором. Постановка задач и обсуждение полученных результатов были выполнены совместно с соавторами И.В. Белых, Г.В. Осиповым, Т.А. Левановой и научным руководителем В.Н. Белых. И.В. Белых также принадлежит редактирование работ, выполненных в соавторстве.

Публикации: Основные результаты по теме диссертации изложены в 36 печатных изданиях, 8 из которых изданы в журналах, индексируемых

Web of Science и Scopus, а также рекомендованных ВАК, 28 — в трудах конференций и тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 133 страницы, включая 35 рисунков и 0 таблиц. Список литературы содержит 164 наименования.

Глава 1. Аттракторы и бифуркации в кусочно-линейной системе лоренцевского типа

В главе построена трёхмерная кусочно-линейная модель, переключающаяся между тремя трёхмерными линейными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и имеющая сингулярно-гиперболический аттрактор. Интегрируемость линейных систем, образующих модель, позволяет в явном виде получить отображение Пуанкаре и доказать существование хаотического аттрактора, а также в явном виде выписать бифуркации его рождения, изменения и исчезновения. Показано, что структура и бифуркации этого аттрактора подобны таковым в знаменитом аттракторе Лоренца, включая бифуркацию гомоклинических орбит седла ("гомоклиническую бабочку") и бифуркацию гетероклинических орбит, которая приводит к рождению странного хаотического аттрактора. Подобные аналитические результаты отсутствуют для оригинальной системы Лоренца.

Вторая важная особенность предложенной модели связана с её негладкостью и заключается в существенной роли скользящих движений. Появление скользящих движений приводит к новому неожиданному бифуркационному сценарию, когда в результате гомоклинических бифуркаций седла с положительной седловой величиной рождаются устойчивые периодические орбиты. Эти бифуркации значительно отличаются от своих гладких аналогов, которые порождают только неустойчивую (седловую) динамику. С помощью построенного отображения Пуанкаре проведено строгое исследование роли скользящих движений при гомоклинических бифуркациях, а также доказан новый сценарий рождения и разрушения хаотического аттрактора лоренцевского типа.

1.1 Кусочно-линейная модель и её свойства

Кусочно-линейная система с переключениями построена из следующих трёхмерных линейных подсистем A_s, A_l и A_r:

$$
\begin{aligned}
& & \dot{x} &= x, & & \\
A_s & : & \dot{y} &= -\alpha y, & (x,y,z) &\in G_s \\
& & \dot{z} &= -\nu z, & & \\[2ex]
& & \dot{x} &= -\lambda(x+1) + \omega(z-b), & & \\
A_l & : & \dot{y} &= -\delta(y+1), & (x,y,z) &\in G_l \\
& & \dot{z} &= -\omega(x+1) - \lambda(z-b), & & \\[2ex]
& & \dot{x} &= -\lambda(x-1) - \omega(z-b), & & \\
A_r & : & \dot{y} &= -\delta(y-1), & (x,y,z) &\in G_r \\
& & \dot{z} &= \omega(x-1) - \lambda(z-b), & &
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где α, δ, ν, ω, λ и b - положительные параметры. Эти подсистемы определены на следующем разбиении фазового пространства G_s, G_l и G_r соответственно:

$$
G_s : |x| < 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b,
$$

$$
G_l : \begin{cases} x \leqslant -1 \quad \text{при} \quad z \leqslant b, \\ x \leqslant -1 \quad \text{при} \quad z > b \quad \text{и} \quad y \geqslant 0, \\ x < 1 \quad \text{при} \quad z > b \quad \text{и} \quad y < 0, \end{cases}
\tag{1.2}
$$

$$
G_r : \begin{cases} x \geqslant 1 \quad \text{при} \quad z \leqslant b, \\ x \geqslant 1 \quad \text{при} \quad z > b \quad \text{и} \quad y < 0, \\ x > -1 \quad \text{при} \quad z > b \quad \text{и} \quad y \geqslant 0. \end{cases}
$$

Как и оригинальная система Лоренца, система (1.1) инвариантна относительно замены $(x, y, z) \to (-x, -y, z)$ и имеет три состояния равновесия. Линейная подсистема A_s определяет динамику системы (1.1) в области G_s. Эта система имеет седло O_s в начале координат, поэтому будем называть её седловой областью. Подсистемы $A_{r,l}$ определены в областях $G_{r,l}$ и имеют симметричные

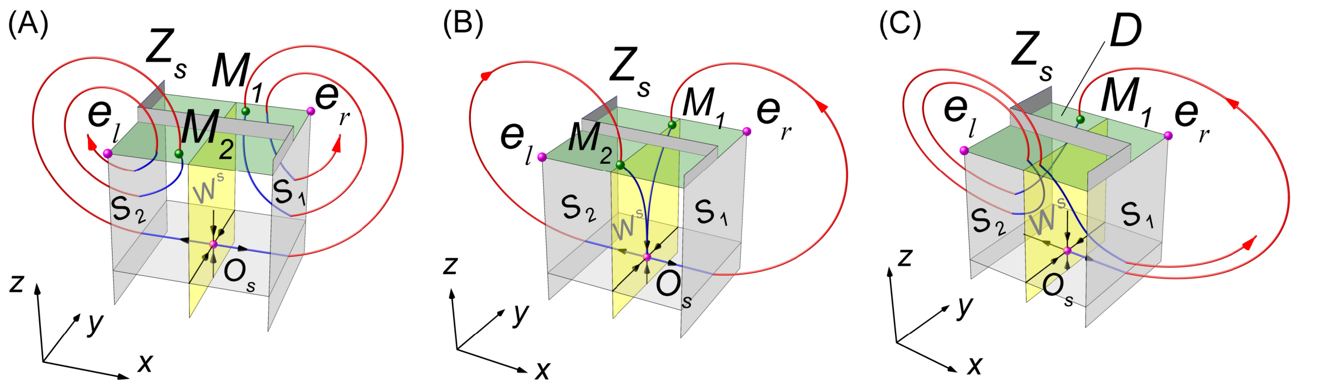

Рисунок 1.1 — Изменение неустойчивого одномерного многообразия седла O_s при изменении параметров b и ν. Многообразие образовано кусками седловых [синих] и фокусных [красных] траекторий. (A) Тривиальная динамика при $b = 1.6 < b^h = 2$ и $\nu = 0.65$. (B) "Гомоклиническая бабочка" при $b = b^h$ и $\nu = 0.65$. (C) Многообразие обходит три области при $b = 2.6$ и $\nu = 0.9$. Траектории построены численно. Остальные параметры: $\alpha = 2$, $\lambda = 0.294$, $\omega = 2$ и $\delta = 0.588$.

состояния равновесия $e_{r,l} = \{\pm 1, \pm 1, b\}$ соответственно. Эти равновесия есть устойчивые трёхмерные фокусы подсистем $A_{r,l}$, но могут менять свою устойчивость в полной системе (1.1). Области G_r и G_l будем соответственно называть правой и левой фокусными областями.

Седловая область G_s ограничена справа и слева вертикальными полуплоскостями $S_1 = \{x = 1, y \in \mathbb{R}^1, z < b\}$ и $S_2 = \{x = -1, y \in \mathbb{R}^1, z < b\}$ (см. Рис. 1.1). Она также ограничена сверху частью плоскости $D = \{|x| \leqslant 1, y \in \mathbb{R}^1, z = b\}$ (зелёная горизонтальная плоскость на Рис. 1.1). Под плоскостью D фокусные области G_l и G_r расположены слева и справа от вертикальных полуплоскостей S_2 и S_1 соответственно. Над плоскостью D фокусные области разделены серой Z-образной границей Z_s (см. Рис. 1.1).

Отметим, что линейные подсистемы A_s, A_l и A_r, составляющие систему (1.1), являются нормальными формами трёхмерного седла и двух устойчивых фокусов соответственно и имеют простые аналитические решения. Решение "седловой" системы A_s с начальными условиями на плоскости D [т.е. при $z(0) = b$] имеет вид

$$
\begin{aligned}
x(t) &= x(0)e^{t}, \\
y(t) &= y(0)e^{-\alpha t}, \\
z(t) &= be^{-\nu t}.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Решение "фокусной" системы A_r с начальными условиями $x(0) = x_0 = 1$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ на S_1 имеют вид

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + (b - z_0)e^{-\lambda t}\sin(\omega t), \\ y(t) &= 1 + (y_0 - 1)e^{-\delta t}, \\ z(t) &= b - (b - z_0)e^{-\lambda t}\cos(\omega t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Аналогично решение "фокусной" системы A_l с начальными условиями $x(0) = -1$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$ на S_2 определены уравнениями

$$\begin{aligned} x(t) &= -1 - (b - z_0)e^{-\lambda t}\sin(\omega t), \\ y(t) &= -1 + (y_0 + 1)e^{-\delta t}, \\ z(t) &= b - (b - z_0)e^{-\lambda t}\cos(\omega t). \end{aligned} \tag{1.5}$$

Равновесия $e_{r,l}$ лежат на границах областей $G_{r,l}$ и G_s, где пересечения областей являются инвариантными линиями $l_r = (x = 1, z = b)$ и $l_l = (x = -1, z = b)$. Траектории в окрестностях состояний равновесия составлены ("склеены") из траекторий фокусных систем $A_{r,l}$ и седловой системы A_s, определённых уравнениями (1.3), (1.4) и (1.5). В зависимости от параметров системы может меняться баланс между седловой и фокусными частями траекторий. Увеличение параметра b превращает устойчивые фокусы $e_{r,l}$ в седло-фокусы, как будет показано далее. Стоит подчеркнуть важность размещения состояний равновесия $e_{r,l}$ на границах $G_{r,l}$ и G_s, что позволяет равновесиям $e_{r,l}$ менять их устойчивость. Смещение этих равновесий от границ таким образом, чтобы окрестность $e_{r,l}$ полностью принадлежала фокусным областям фазового пространства, сделало бы $e_{r,l}$ устойчивыми фокусами при любых положительных значениях α, δ, ν, ω, λ, b и, следовательно, не позволило бы кусочно-линейной системе (1.1) иметь хаотический аттрактор лоренцевского типа. Остаётся возможность того, что сложный аттрактор, содержащий устойчивые скользящие движения на границах G_r и G_l, может появиться и сосуществовать с устойчивыми фокусами.

Седло O_s имеет двумерное устойчивое многообразие, заданное в седловой области как $W^s_{saddle} = \{x = 0, \ \in \mathbb{R}^1, \ z < b\}$ (жёлтая вертикальная плоскость на Рис. 1.1) и одномерное неустойчивое многообразие, определяемое в седловой области как $W^u_{1saddle} = \{0 < x < 1, \ y = z = 0\}$ и $W^u_{2saddle} = \{-1 < x < 0, \ y = z = 0\}$. Эти многообразия и их продолжения по траекториям систем $A_{r,l}$ в фокусные области образуют глобальные многообразия W^s, W^u_1 и W^u_2 седла O_s в полном фазовом пространстве системы (1.1).

По построению секущая D с координатой $z = b$ эквивалента глобальной секущей $z = \rho - 1$ оригинальной системы Лоренца [13]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - \beta z. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Таким образом, параметр b в кусочно-линейной системе (1.1) играет роль $\rho - 1$ системы Лоренца (1.6). Заметим, что собственные значения седла $O_L(0,0,0)$ в системе Лоренца есть $m_{1,2} = -\frac{1}{2}[\sigma + 1 \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma\rho}]$, где знак плюс (минус) соотвествует m_1 (m_2), и $m_3 = -\beta$. Следовательно, диагонализация линеаризованной системы в окрестности седла O_L даёт

$$\begin{aligned} \dot{u} &= u, \\ \dot{w} &= \tfrac{m_2}{m_1} w, \\ \dot{z} &= -\tfrac{\beta}{m_1} z, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где u и w - новые переменные, соответствующие собственным векторам, связанным с собственными значениями m_1 и m_2 соответственно, а z - исходная переменная, соответствующая m_3, поскольку ось z является инвариантой прямой системы (1.6). В (1.7) производная по времени вычисляется относительно нового времени $\hat{t} = t/m_1$. Сравнение линеаризованной системы (1.7) для седла O_L в системе Лоренца с нормальной формой A_s для седла O_s в кусочно-линейной системе (1.1) предполагает, что параметры α и ν в (1.1) эквивалентны $-m_2/m_1$ и β/m_1 системы Лоренца (1.6) соответственно. Остальные параметры λ, ω и δ системы (1.1) управляют фокусными системами A_l, A_r и не имеют прямых аналогов в системе Лоренца (1.6).

Всюду в главе предполагается, что параметры удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2} < \nu < 1 < \alpha. \tag{1.8}$$

Часть этого неравенства $\nu < 1$ означает, что седловая величина η седла O_s положительна $\eta = 1 - \nu > 0$. Дополнительное неравенство $1 < \alpha$ делает собственные значения 1 и $-\nu$ ближайшими к нулю, и поэтому плоскость $W^{lead} = [(x,z) \in G_s, y = 0]$ определяет ведущее (более слабое) направление как часть ведущего устойчивого многообразия W^s. Это свойство выбрано в соответствии со свойством исходной системы Лоренца, которое позволяет W_1^u и W_2^u образовывать желаемые гомоклинические орбиты и приводит к возникновению сложной динамики [130]. Происхождение оставшейся части неравенства $1/2 < \nu$ будет объяснено в разделе 1.3 (см. Замечание 1.3.2).

1.1.1 Склеивание траекторий

Траектории кусочно-линейной системы (1.1) составлены из траекторий систем A_s, A_r и A_l, которые явно заданы решениями (1.3), (1.4) и (1.5). Продемонстрируем процесс склейки траекторий путём построения одномерного неустойчивого многообразия W_1^u, исходящего из седла O_s области G_s, продолженного в область G_r и в конечном итоге спиралью попадающего в области G_l и G_r [см. Рис. 1.1(A)].

Начнём с седла O_s и проследим неустойчивое многообразие W_1^u в направлении вертикальной полуплоскости S_1. Часть многообразия в седловой области определяется уравнениями (1.3) (синий отрезок на Рис. 1.1). Многообразие пересекает полуплоскость S_1 в точке $(x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ z_0 = 0) \in S_1$, которая становится его точкой выхода из области G_s. Эта точка становится начальным условием для решения (1.4), которое продолжает многообразие $W_{1saddle}^u$ в правую фокусную область G_r (красная кривая, заканчивающаяся в точке M_1 на Рис. 1.1). Когда фокусная часть неустойчивого многообразия достигает точки M_1, лежащей на верхней границе седловой области G_s - плоскости D (зелёная плоскость на Рис. 1.1), многообразие продолжается по траектории седловой системы A_s (правая синяя кривая линия на Рис. 1.1). Форма склеенного неустойчивого многообразия существенно зависит от положения точки M_1 относительно устойчивого многообразия седла W^s (жёлтая вертикальная плоскость на Рис. 1.1) [сравните траектории на Рис. 1.1(A) и (C)].

Как будет строго показано в разделе 1.5, положение точки M_1 относительно W^s контролируется параметром b, который в дальнейшем выбирается в качестве бифуркационного параметра. При малых b точка M_1 лежит в области $x > 0$, и седловая траектория, исходящая из точки M_1, возвращает неустойчивое многообразие W_1^u в область G_r [см. Рис. 1.1(A)]. Отметим, что увеличение параметра b в системе A_r увеличивает фокусную часть склеенного неустойчивого многообразия. В результате при некотором $b = b_h$ точка M_1 попадает на устойчивое многообразие W^s, а неустойчивое многообразие W_1^u становится гомоклинической орбитой седла O_s [см. Рис. 1.1(B)]. В разделе 1.5 выражение для b_h будет явно получено в параметрах системы.

При дальнейшем увеличении $b > b_h$ точка M_1 пересекает границу $x = 1$ и попадает в область $x < 0$. В этом случае седловая траектория [синяя линия на

Рис. 1.1 (C)], исходящая из точки M_1, переводит неустойчивое многообразие W_1^u в левую фокусную область G_l. Последовательное продолжение этого неустойчивого многообразия по фокусной траектории системы A_l [красная линия на Рис. 1.1 (C)] переводит его на плоскость D с $y < 0$. Дальнейшее продолжение одномерного многообразия W_1^u в седловую область G_s либо переводит его в область G_l, либо сразу возвращает в область G_r [см. Рис. 1.1(C)]. В силу симметрии системы форма неустойчивого седлового многообразия W_2^u (не показано) является зеркальным отражением формы W_1^u.

Гомоклиническая бифуркация симметричных орбит седла O_s в точке $b = b_h$ приводит к рождению двух седловых предельных циклов C_1 и C_2 при $b > b_h$ как в исходной системе Лоренца (подробный бифуркационный анализ приведен в разделе 1.5). Эти седловые предельные циклы C_1 и C_2 состоят из двух склеенных частей, одна из которых определяется седловой траекторией (толстые красные кривые на Рис. 1.2), а другая - устойчивой фокусной траекторией (толстые синие кривые на Рис. 1.2). Преобладание седловой части траектории над фокусной определяет общий седловой тип предельных циклов.

Остальные траектории системы (1.1), не показанные на Рис. 1.1 и 1.2, строятся с помощью такого же процесса склейки на границах областей G_s, G_r и G_l за исключением траекторий, которые попадают на Z-образную границу Z_s и вызывают скользящие движения. Рис. 1.3 демонстрирует типичный аттрактор типа Лоренца, который появляется в кусочно-линейной системе (1.1) в результате этого процесса склейки и переключения между тремя линейными системами A_s, A_r и A_l (подробное описание рождения и свойств аттрактора приведено в разделе 1.5).

Далее оценим размер поглощающей области системы, содержащей все её аттракторы, а также охарактеризуем возможные скользящие движения и их расположение относительно поглощающей области.

1.1.2 Поглощающая область

Следующее утверждение доказывает диссипативность системы (1.1) и устанавливает границы притягивающей области, в которую приходят все траектории системы (1.1).

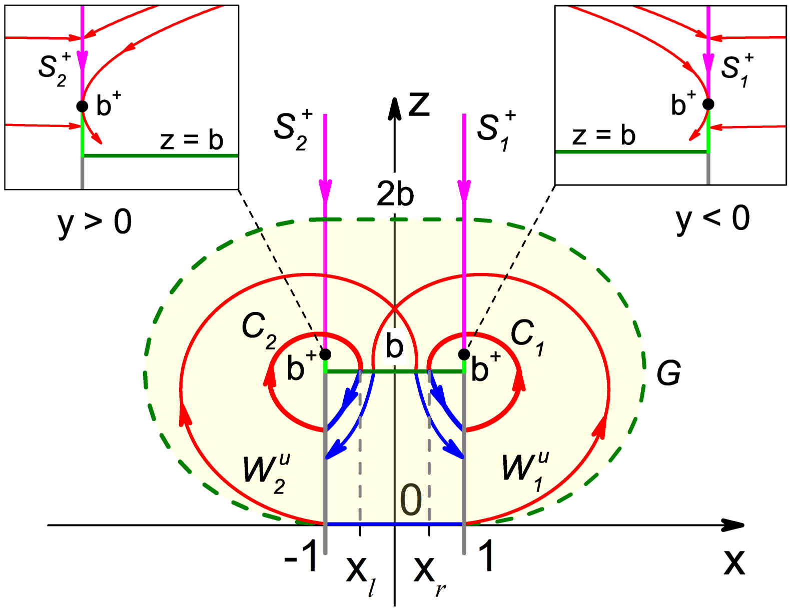

Рисунок 1.2 — Проекция фазового пространства, соответствующего Рис. 1.1(C), на плоскость xz с $y = 0.5$. Жёлтая область, ограниченная пунктирной зелёной кривой, представляет собой поглощающую область G, построенную согласно (1.9). Две серые вертикальные линии при $x = -1$ и $x = 1$ соответствуют боковым границам S_1 и S_2 седловой области. Зелёная горизонтальная линия в точке $z = b$ - это верхняя граница D [см. Рис. 1.1(C)]. На вставках изображены увеличенные окрестности точек b^+ с ориентацией локальных векторных полей. Все траектории построенны численно. Параметры: $b = 2.6$, $\nu = 0.7$, $\alpha = 2$, $\lambda = 0.294$, $\omega = 2$ и $\delta = 0.588$.

Лемма 1.1.1. *Область*

$$G = \begin{cases} |y| \leqslant 1, & \\ 0 \leqslant z \leqslant 2b & \textit{при} \;\; |x| \leqslant 1, \\ V_l \leqslant b^2 & \textit{при} \;\; x < -1, \\ V_r \leqslant b^2 & \textit{при} \;\; x > 1, \end{cases} \tag{1.9}$$

где $V_{l,r} = (x \pm 1)^2 + (z - b)^2$, *есть поглощающая область, притягивающая все траектории системы* (1.1).

Доказательство. Наша цель - построить функцию типа Ляпунова и определить её уровень, на котором производная по времени от функции Ляпунова в силу системы (1.1) равна нулю, тем самым определив границу поглощающей области. Поскольку система (1.1) кусочно-линейная, мы собираем такую функцию Ляпунова из нескольких функций, которые описывают поведение системы в различных областях фазового пространства.

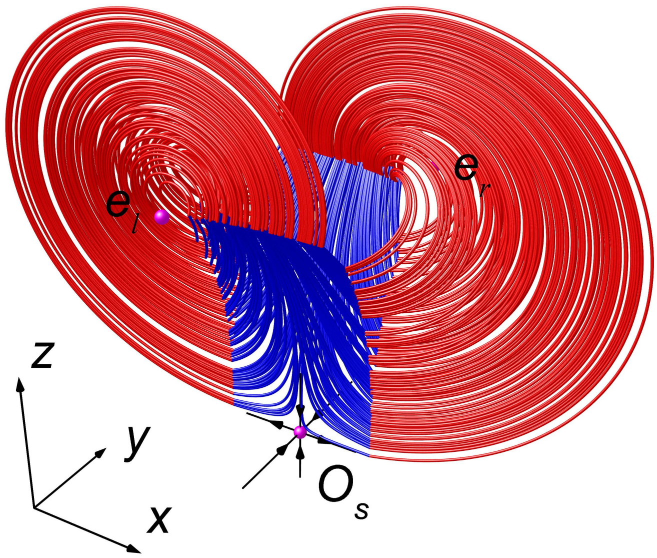

Рисунок 1.3 — Аттрактор лоренцевского типа в кусочно-линейной системе (1.1). Хаотические траектории склеены из кусков седловых (синих) и фокусных (красных) траекторий трёх линейных систем. Значения параметров: $b = 3.8$, $\alpha = 2$, $\nu = 0.75$, $\lambda = 0.294$, $\omega = 2$ и $\delta = 0.588$.

Рассмотрим функцию Ляпунова $V_1 = y^2 - 1$ в области $|y| > 1$, где V_1 положительна. Её производная по времени в силу системы (1.1) равна (а) $\dot{V}_1 = -2\delta(y \pm 1) < 0$ для $|y| > 1$, $|x| > 1$ [здесь и далее знак плюс (минус) относится к фокусной системе A_l (A_r)] и (б) $\dot{V}_1 = -2\alpha y^2 < 0$ для $|y| > 1$, $|x| \leqslant 1$. Следовательно, все траектории входят в область $|y| \leqslant 1$.

Аналогичным образом выбирается функция Ляпунова $V_2 = (z - b)^2 - b$, положительная вне интервала $0 < z < 2b$. Напомним, что траектории системы (1.1) управляются фокусными системами A_l и A_r при $z > b$, и всеми тремя седловыми и фокусными системами A_s, A_l и A_r при $z < b$. Следовательно, вне $0 < z < 2b$ производная по времени V_2 (а) в силу систем A_l и A_r равна $\dot{V}_2 = -2\lambda(z - b)^2 - 2\omega(z - b)(1 \pm x) < 0$ при $|x| < 1$ и (б) в силу седловой системы A_s равна $\dot{V}_2 = -2\nu(z - b)z < 0$ в области $z < 0$. Следовательно, все траектории входят в область $0 < z < 2b$ при $|x| \leqslant 1$.

Наконец, мы выбираем функцию Ляпунова $V_3 = V_{l,r} - b^2$, которая положительна в рассматриваемых интервалах $x < -1$ и $x > 1$ соответственно. Её производная по времени в силу фокусной системы $A_l : \dot{V}_3 = -2\lambda V_l < 0$ для $x < -1$ и в силу фокусной системы $A_r : \dot{V}_3 = -2\lambda V_r < 0$ при $x > 1$. Следовательно, траектории из этих областей пересекают поверхности V_l и V_2.

Комбинируя оценки функций Ляпунова V_1, V_2, и V_3, получаем поглощающую область G. $\square$

1.1.3 Скользящие движения

В силу своей кусочно-линейной природы система (1.1) может иметь устойчивые скользящие движения. Для построения хаотического аттрактора типа Лоренца, содержащего только седловые орбиты, необходимо определить параметры системы, при которых устойчивые скользящие движения не участвуют в формировании аттрактора. Из ориентации векторных полей систем A_s, A_r и A_l следует:

1. Единственными (локально) устойчивыми областями скольжения на Z-образной границе Z_s являются её части $S_1^+ = \{x = 1,\ z > b^+ = b + \dfrac{2\lambda}{\omega},\ y < 0\}$ и $S_2^+ = \{x = -1,\ z > b^+ = b + \dfrac{2\lambda}{\omega},\ y > 0\}$ (розовые вертикальные линии на Рис. 1.2). Это можно подтвердить, проверив направления x векторных полей систем A_r и A_l на S_1^+ и S_2^+. Например, рассмотрим левую полуплоскость S_2^+ с $x = -1$. Локальное векторное поле справа от этой вертикальной полуплоскости S_2^+ задано фокусной системой A_r. Следовательно, этот поток в x-направлении определяется выражением $\dot{x} = -\lambda(x-1) - \omega(z-b)$, причём $\dot{x} = 2\lambda - \omega(z-b)$ на S_2^+ с $x = -1$. В результате $\dot{x} < 0$ на S_2^+ для правой фокусной системы A_r и соответствующее векторное поле ориентировано в сторону S_2^+ пока $z > b^+ = b + \dfrac{2\lambda}{\omega}$. При $z < b^+$ поле справа от S_2^+ меняет своё направление по x и становится ориентированным вправо (см. увеличенное изображение слева на Рис. 1.2). При этом векторное поле слева от S_2^+ и его продолжение до участка D при $z = b$ ориентировано в положительном направлении по x, что сохраняется в интервале $b < z < b^+$. Это связано с тем, что это векторное поле управляется фокусной системой A_l, так что его направление по x на S_2^+ с $x = -1$ определено выражением $\dot{x} = \omega(z-b)$, положительным на границе Z_s при $x = -1$ всюду над секущей D (при $z > b$). В результате полуплоскость S_2^+ локально притягивает траектории слева и справа и порождает локально

устойчивые скользящие движения. Продолжение S_2^+ от $z = b^+$ до D (ярко-зелёный отрезок на левом увеличенной фрагменте на Рис. 1.2) является проходимым для траекторий слева, поскольку векторные поля слева и справа ориентированы в одном и том же положительном направлении по x. Точно так же в силу симметрии системы полуплоскость S_1^+ соответствует локально устойчивым скользящим движениям, и её продолжение до D проходимо (см. увеличенное изображение справа на Рис. 1.2).

2. Средняя секция Z-образной границы ($y = 0, |x| < 1, z \geqslant b$) содержит только неустойчивые скользящие движения. В этом можно убедиться с помощью проверки уравнений для y фокусных систем A_l и A_r на $y = 0$. Отрицательные и положительные знаки производных $\dot{y}$ в силу систем A_l и A_r соответственно указывают, что локальные векторные поля обеих систем направлены от средней секции границы Z_s, делая её неустойчивой.

Скользящие движения на поверхностях $S_{1,2}^+$ задаются двумерными системами, которые получаются по доопределению А.Ф. Филиппова [38]. Это доопределение в рассматриваемом случае приобретает вид

$$\dot{X} = \alpha F_r(X) + (1 - \alpha)F_l(X). \tag{1.10}$$

Здесь коэффициент α определён скалярным произведением

$$(\alpha F_r(X) + (1 - \alpha)F_l(X), \bigtriangledown s) = 0, \tag{1.11}$$

где градиент функции $s(X)$, определяющей поверхность скользящих движений $s(X) = 0$, в рассматриваемом случае есть вектор $\bigtriangledown s(1, 0, 0)$. Из (1.1), (1.2), (1.10) и (1.11) получаем, что система скользящих движений имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\delta y + \tfrac{\lambda\delta}{\omega(z-b)-\lambda}, \\ \dot{z} &= -\omega - \lambda(z - b) - \tfrac{\lambda\omega}{\omega(z-b)-\lambda}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Из системы (1.12) получаем простую динамику скользящих движений. Поскольку в (1.12) $\dot{z}\big|_{S_{1,2}^+} < 0$, координата z уменьшается, и любая траектория покидает $S_{1,2}^+$ через линии срыва $z = b^+$ (см. увеличенные фрагменты на Рис. 1.2).

Чтобы доказать появление странного хаотического аттрактора без устойчивых траекторий, нам необходимо определить множество параметров системы, на котором устойчивые скользящие движения на полуплоскостях $S_{1,2}^+$ не принадлежат аттрактору. Это приводит к следующему утверждению.

Теорема 1.1.1. *В области параметров*

$$\begin{aligned} &\delta > \delta_{cr} = \frac{\omega \ln 2}{\pi}, \\ &b < b_{cr} = 2\sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} \exp\left\{ \frac{\lambda}{\omega} \big(\arctan \frac{\omega}{\lambda} + \pi \big) \right\}, \end{aligned} \tag{1.13}$$

аттракторы системы (1.1) *не содержат скользящих движений.*

Доказательство. Чтобы любой аттрактор системы (1.1) не содержал скользящих движений, необходимо, чтобы любая траектория с начальными условиями на глобальной секущей D никогда не попадала на Z-образную границу Z_s (см. Рис. 1.1), которая склеивает области G_l и G_r и является источником скользящих движений. Точки с секущей D переводятся траекториями седловой области G_s на её боковые границы S_1 и S_2, так что траектории не доходят до Z_s. Следовательно, проблема обхода границы Z_s сводится к нахождению области параметров фокусных систем A_l и A_r, где траектории, начинающиеся на S_1 и S_2, возвращаются в D, избегая Z_s.

Как было продемонстрировано выше, средняя часть Z_s неустойчива и поэтому недостижима, следовательно, нам следует беспокоиться только о траекториях, которые могут достичь устойчивых скользящих полуплоскостей $S^+_{1,2}$, содержащихся в Z_s. По Лемме 1.1.1 поглощающая область системы G не выходит за пределы интервала $|y| \leqslant 1$ в направлении по y и ограничена $z = 2b$ в направлении по z при $x = \pm 1$. Следовательно, имеют значение только те части полуплоскостей $S^+_{1,2}$, которые принадлежат поглощающей области. Эти части имеют вид

$$\begin{aligned} &S^+_{1a}: \ \{x = 1, \ -1 < y < 0, \ b^+ < z < 2b\}, \\ &S^+_{2a}: \ \{x = -1, 0 < y < 1, \ b^+ < z < 2b\}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Для определённости рассмотрим траектории, начинающиеся на части полуплоскости S_1, которая принадлежит поглощающей области S_{1a} : $\{x = 1, \ -1 < y < 0, \ z < b\}$. Эти траектории продолжены фокусной системой A_r.

Чтобы избежать наличия скользящих движений внутри аттрактора, все траектории, выходящие из S_{1a}, должны: (а) не попадать на правый вертикальный участок S^+_{1a} и (б) не доходить до левого вертикального участка S^+_{2a}. Мы получим оценки параметров системы для каждого из двух случаев отдельно.

Оценка 1: Каждая траектория с начальными условиями на вертикальном участке S_{1a} с $x = 1$ достигнет продолжения S_{1a} с $x = 1$ в область $z > b$ за время $\tau_1 = \pi/\omega$. Это продолжение состоит из двух частей: участка устойчивого скользящего движения S_{1a}^+ при $-1 < y < 0$ и нескользящей части при $y > 0$. Время перехода $\tau_1 = \pi/\omega$ получается из решения уравнения для x системы (1.4) с начальным $(x_0 = 1)$ и граничным $[x(\tau_1) = 1]$ условиями, когда траектория уходит с плоскости $x = 1$ и возвращается обратно. Необходимо найти условия, при которых каждая траектория, выходящая из S_{1a}, достигает плоскости $x = 1$ в точке $y(\tau_1) > 0$ и, следовательно, попадает на её нескользящую часть. Важно подчеркнуть, что если траектория с начальным условием $y(0) = -1$ на границе поглощающей области $y = 1$ переносится фокусной линейной системой A_r на достаточно большое расстояние для входа в область $y > 0$ без скользящих движений, то все остальные траектории, начинающиеся на S_{1a} с $-1 < y < 0$ пойдут еще дальше и также пропустят скользящую область S_{1a}^+. Решение уравнения для переменной y системы (1.4) с начальным условием $y_0 = -1$ даёт уравнение $y(t) = 1 - 2e^{-\delta t}$. Подставляя время перехода $\tau_1 = \pi/\omega$ и требуя $y(\pi/\omega) > 0$, получаем условие $\delta > \delta_{cr} = \dfrac{\omega \ln 2}{\pi}$, которое гарантирует, что каждая траектория, начинающаяся на S_{1a}, не попадёт на участок скользящих движений S_{1a}^+.

Оценка 2. Определим множество значений параметров, которое гарантирует, что траектории, выпускаемые с S_{1a}, не смогут достичь левой вертикальной полуплоскости S_2^+, соответствующей устойчивым скользящим движениям. Эти траектории фокусной системы A_r с начальными условиями на S_{1a} ограничены в (x, z) двумерной поверхностью, составленной из траекторий с начальными условиями $x = 1, |y| \leqslant 1$ и $z = 0$. В частности, этой поверхности принадлежит неустойчивое многообразие W_1^u седла O_s. Таким образом, достаточно показать, что если неустойчивое многообразие W_1^u не достигает S_2^+, то любая другая траектория, начинающаяся на S_{1a}, также не достигнет S_2^+. Неустойчивое многообразие W_1^u, исходящее из O_s, пересекает S_{1a} в точке $x = 1, y = 0, z = 0$ и затем продолжается фокусной системой A_r. Следовательно, соответствующие x и z решения (1.4) фокусной системы A_r с начальными $[x(0) = 1, z(0) = 0]$ и граничными $\left[x(\tau_2) = -1, z(\tau_2) = b^+ = b + \dfrac{2\lambda}{\omega}\right]$ условиями дают равенства

$$
\begin{aligned}
e^{-\lambda\tau_2}\sin(\omega\tau_2) &= -\tfrac{2}{b_{cr}},\\
e^{-\lambda\tau_2}\cos(\omega\tau_2) &= -\tfrac{2\lambda}{\omega b_{cr}},
\end{aligned}
\qquad (1.15)
$$

которые определяют критическое значение b_{cr} параметра b, при котором W_1^u касается полуплоскости S_2^+ в точке $z = b^+ \equiv b + \dfrac{2\lambda}{\omega}$ (см. левый увеличенный фрагмент на Рис. 1.2). Поделив первое уравнение на второе уравнение в (1.51), получим время перехода $\tau_2 = \frac{1}{\omega}\arctan\frac{\omega}{\lambda}$. Подставляя τ_2 в (1.51) и используя тригонометрическое тождество, получим

$$b_{cr} = 2\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}}\exp\left\{\frac{\lambda}{\omega}\Big(\arctan\frac{\omega}{\lambda}+\pi\Big)\right\}. \tag{1.16}$$

Таким образом, при $b < b_{cr}$ неустойчивое многообразие W_1^u и все остальные траектории, выпущенные с S_{1a}, не имеют касания с устойчивой скользящей полуплоскостью S_2^+ и сразу попадают на секущую D. В силу симметрии системы аналогичные рассуждения справедливы для траекторий, выпущенных с S_2 и управляемых фокусной системой A_l. $\square$

1.2 Построение отображения Пуанкаре

Следуя классическим исследованиям системы Лоренца [4—11], мы построим отображение Пуанкаре, что позволит охарактеризовать бифуркационную последовательность, приводящую к рождению странного аттрактора типа Лоренца. Это отображение может быть задано явно посредством склеенных решений кусочно-линейной системы (1.1).

Чтобы построить отображение, выберем $D = \{|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, z = b\}$ в качестве секущей Пуанкаре и проследим, как эта секущая отображается в себя по траекториям седловой и фокусных систем. Выберем параметры, удовлетворяющие условию Теоремы 1.1.1, которая гарантирует, что траектории систем A_r и A_l, выпущенные с $S_{1,2}$, не достигнут устойчивых скользящих областей $S_{1,2}^+$. Следовательно, при условиях (1.13) D - это глобальная секущая, т.е. все траектории, начинающиеся с D, вернутся на неё. Секущая D разделена на две симметричные части $D_1 = D\big|_{x\geqslant 0}$, $D_2 = D\big|_{x<0}$ устойчивым многообразием W^s седла O_s по линии $l = W^s \cap D$ (см. Рис. 1.4).

Построение отображения будем осуществлять следующим образом. Сначала получим отображение $F_1 = T_r T_1$ полуплоскости D_1 как композицию

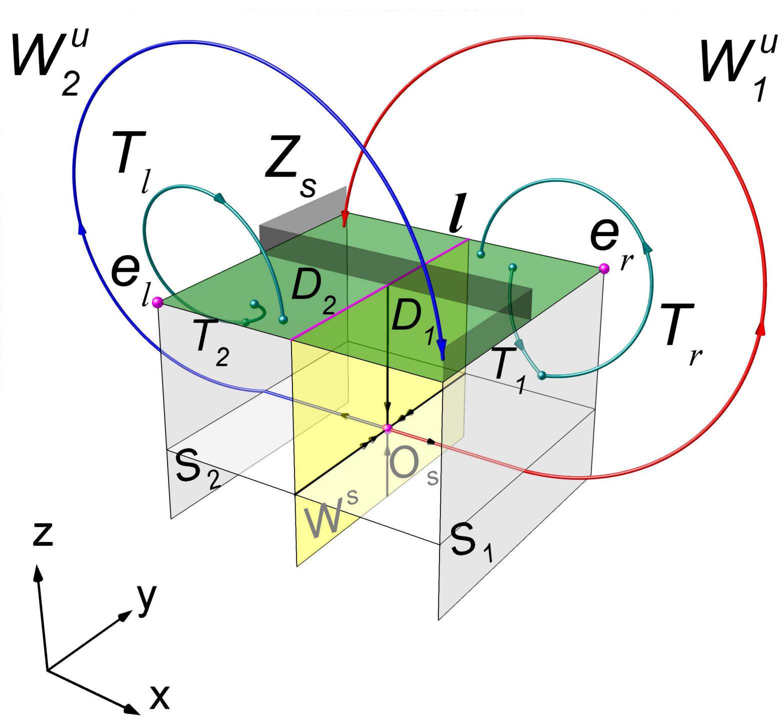

Рисунок 1.4 — Построение отображения Пуанкаре (1.22).

отображений $T_1 : D_1 \to S_1$ и $T_r : S_1 \to D$. Отображение T_1 порождено траекториями седловой системы, которая переводит точки с полусекущей D_1 на вертикальную полуплоскость S_1. Их последующий перевод с S_1 обратно на D по траекториям фокусной системы A_r даёт отображение T_r. Установив явный вид $F_1 = T_r T_1$, получим его нечётно-симметричное дополнение $F_2 = T_l T_2$, $D_2 \to D$.

Используя решение (1.3) системы A_s с начальными условиями на D_1 [т.е. с $z(0) = b$] и граничными условиями $[x(\tau) = 1, y(\tau), z(\tau)] \in S_1$, получим время перехода τ и координаты на S_1 в следующем виде

$$\begin{aligned} \tau &= -\ln x(0), \\ y(\tau) &= y(0)e^{-\alpha\tau}, \\ z(\tau) &= be^{-\nu\tau}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Подставляя τ в уравнения для y и z, получим явную форму отображения T_1

$$T_1 : \begin{array}{l} y(\tau) = y(0)e^{\alpha \ln x(0)} = y(0)x^{\alpha}(0), \\ z(\tau) = be^{\nu \ln x(0)} = bx^{\nu}(0). \end{array} \tag{1.18}$$

Для построения отображения $T_r : S_1 \to D$ рассмотрим решение (1.4) системы A_r с начальными $(x = 1, z = z_0, y = y_0) \in S_1$ и граничными $[x(\tau'), y(\tau'), z(\tau')] \in D$ условиями, где $\tau' = \dfrac{3\pi}{2\omega}$ – время перехода с S_1 на D. Заметим, что значение τ' найдено из условия $\cos\omega\tau' = 0$, полученного для $z(\tau') = b$ в уравнении для

z в (1.4), где $\tau' = \dfrac{3\pi}{2\omega}$ соответствует требуемому пересечению плоскости $z = b$ сверху. Таким образом, получим отображение T_r

$$T_r : \begin{array}{l} x(\tau') = 1 - (b - z_0)e^{-\frac{3\pi\lambda}{2\omega}}, \\ y(\tau') = 1 + (y_0 - 1)e^{-\frac{3\pi\delta}{2\omega}}. \end{array} \tag{1.19}$$

Чтобы вывести композицию $F_1 = T_r T_1 : D_1 \to D$ заменим y_0 и z_0 в (1.19) на $y(\tau)$ и $z(\tau)$ из (1.50) соответственно и получим явную форму отображения F_1

$$F_1 : \begin{array}{l} \bar{x} = 1 + be^{-\frac{3\pi\lambda}{2\omega}}(x^\nu - 1), \\ \bar{y} = 1 + e^{-\frac{3\pi\delta}{2\omega}}(x^\alpha y - 1), \end{array} \tag{1.20}$$

где $x = x(0)$, $\bar{x} = x(\tau')$, $y = y(0)$ и $\bar{y} = y(\tau')$. В силу нечётной симметрии относительно координат x и y явная форма отображения $F_2 : D_2 \to D$ может быть получена из (1.20) посредством замены (x, y) на $(-x, -y)$.

Для удобства введём два новых параметра

$$\gamma = be^{-\frac{3\pi\lambda}{2\omega}}, \;\; r = e^{-\frac{3\pi\delta}{2\omega}}, \tag{1.21}$$

таких, что полное отображение $F : D \to D$ примет вид

$$F : \begin{array}{ll} \begin{array}{l} \bar{x} = f(x) \equiv 1 - \gamma + \gamma x^\nu, \\ \bar{y} = g(x) \equiv 1 - r + r x^\alpha y, \end{array} & \text{при } x > 0, \\ & \\ \begin{array}{l} \bar{x} = f(x) \equiv \gamma - 1 - \gamma |x|^\nu, \\ \bar{y} = g(x,y) \equiv r - 1 + r|x|^\alpha y, \end{array} & \text{при } x < 0. \end{array} \tag{1.22}$$

Отображение F имеет разрыв в $x = 0$ такой, что линия $l = W^s \cap D : x = 0$ отображается в седло O_s, и, следовательно, точки на l не возвращаются на секущую D. Однако точки $(x = \pm\varepsilon,\ y \in [-1, 1])$ в малой окрестности линии l возвращаются на D, проходя через малую окрестности седла O_s. В пределе $\varepsilon \to 0$ образами этих точек являются две точки M_1 и M_2 (см. Рис. 1.1), которые есть пересечения секущей D с одномерными неустойчивыми многобразиями W_1^u при $x > 0$ и W_2^u при $x < 0$ соответственно. По непрерывности определим отображение F на линии разрыва $l : (x = 0,\ y \in [-1, 1])$ следующим образом

$$F\Big|_{x=0} : \begin{array}{ll} (\bar{x}, \bar{y}) = M_1(1 - \gamma, 1 - r) & \text{при } x \to +0, \\ (\bar{x}, \bar{y}) = M_2(\gamma - 1, r - 1) & \text{при } x \to -0. \end{array} \tag{1.23}$$

Заметим, что при $\gamma = 1$ ($b = b_h = e^{\frac{3\pi\lambda}{2\omega}}$) неустойчивые многобразия W_1^u и W_2^u помещают точки M_1 и M_2 на линию $x = 0$ и, следовательно, образуют две гомоклинические орбиты седла O_s [см. Рис. 1.1(B)]. В итоге, чтобы отображение F было определено, в дальнейшем предполагается, что параметры r и γ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} & r < \frac{1}{2\sqrt{2}}, \\ & \gamma < \gamma_{cr} = 2\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}}\exp\left\{\frac{\lambda}{\omega}\Big(\arctan\frac{\omega}{\lambda}-\frac{\pi}{2}\Big)\right\}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Эти условия соответствуют области параметров (1.13), для которой гарантировано отсутствие скользящих движений в любом аттракторе потока (1.1) и, следовательно, отображения F.

Заметим, что отображение F имеет треугольную форму, а именно уравнение для x отображения F, $\bar{x} = f(x)$, не зависит от y и управляет уравнением для y. Поэтому назовём одномерное отображение $\bar{x} = f(x)$ "ведущим" (master) отображением. Треугольная форма двумерного отображения F, которая естественным образом даёт ведущее одномерное отображение, является ключевым свойством, значительно упрощающим проведение строгого анализа. Появление этой треугольной формы связано с использованием нормальных форм, которые отделяют переменные x и z от переменной y в фокусных системах $A_{l,r}$ в (1.1). В результате соответствующая динамика вдоль направлений x и z не зависит от движения вдоль оси y.

Далее сначала будут рассмотрены аттракторы и бифуркационные свойства этого ведущего отображения, что позволит перейти к изучению свойств полного двумерного отображения F и в конечном итоге доказать рождение хаотического аттрактора лоренцевского типа в исходной трехмерной системе (1.1).

1.3 Динамика одномерного ведущего отображения

Полученное из (1.22) одномерное ведущее отображение имеет вид

$$\begin{aligned} & \bar{x} = f(x) \equiv 1-\gamma+\gamma x^{\nu} \quad \text{при} \;\; x > 0, \\ & \bar{x} = f(x) \equiv \gamma - 1 - \gamma|x|^{\nu} \quad \text{при} \;\; x < 0, \end{aligned} \tag{1.25}$$

где $\bar{x}$ указывает на последующую итерацию x_{k+1} точки x_k под действием f. Аналогично (1.23) это отображение имеет разрыв в точке $x = 0$, где оно опре-

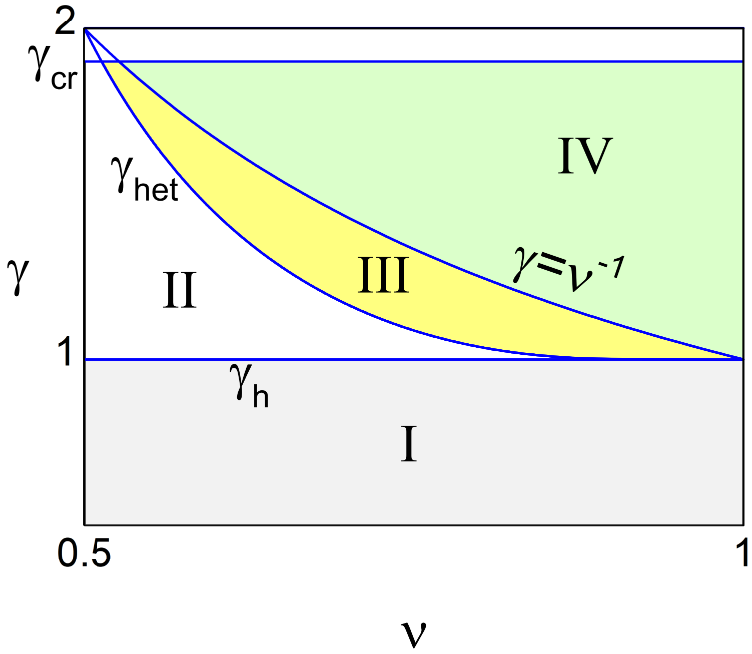

Рисунок 1.5 — Бифуркационная диаграмма одномерного ведущего отображения (1.25), иллюстрирующая Теорему 1.3.1. Область I (серый цвет) соответствует глобально устойчивым неподвижным точкам e_r и e_l. Область II (белый цвет) соответствует динамике, аналогичной динамике области I, за исключением появления двух неустойчивых неподвижных точек P_r, P_l и инвариантного канторова множества неустойчивых траекторий. В Области III (жёлтый цвет) отображение имеет три сосуществующих аттрактора: странный хаотический аттрактор SA и две устойчивые неподвижные точки e_r, e_l. В области IV (зелёный цвет) странный хаотический аттрактор является единственным аттрактором системы. Горизонтальная линия $\gamma = \gamma_{cr}$ соответствует исчезновению странного аттрактора из-за появления устойчивых скользящих движений в кусочно-линейной системе (1.1).

делено как

$$f(0) = \begin{cases} 1-\gamma & \text{при } x \to +0, \\ \gamma - 1 & \text{при } x \to -0. \end{cases} \tag{1.26}$$

По построению ведущее отображение (1.25) относится к глобальной секущей D и, тем самым, определено на интервале $X = [-1, 1]$. Две неподвижные точки $e_l = x_1^* = -1$ и $e_r = x_2^* = 1$ на концах интервала X соответствуют состояниям равновесия e_l и e_r системы (1.1) соответственно. Проанализируем аттракторы в ведущем отображении (1.25) и их бифуркации как функции параметров γ и ν. Результат сформулирован в следующей теореме.

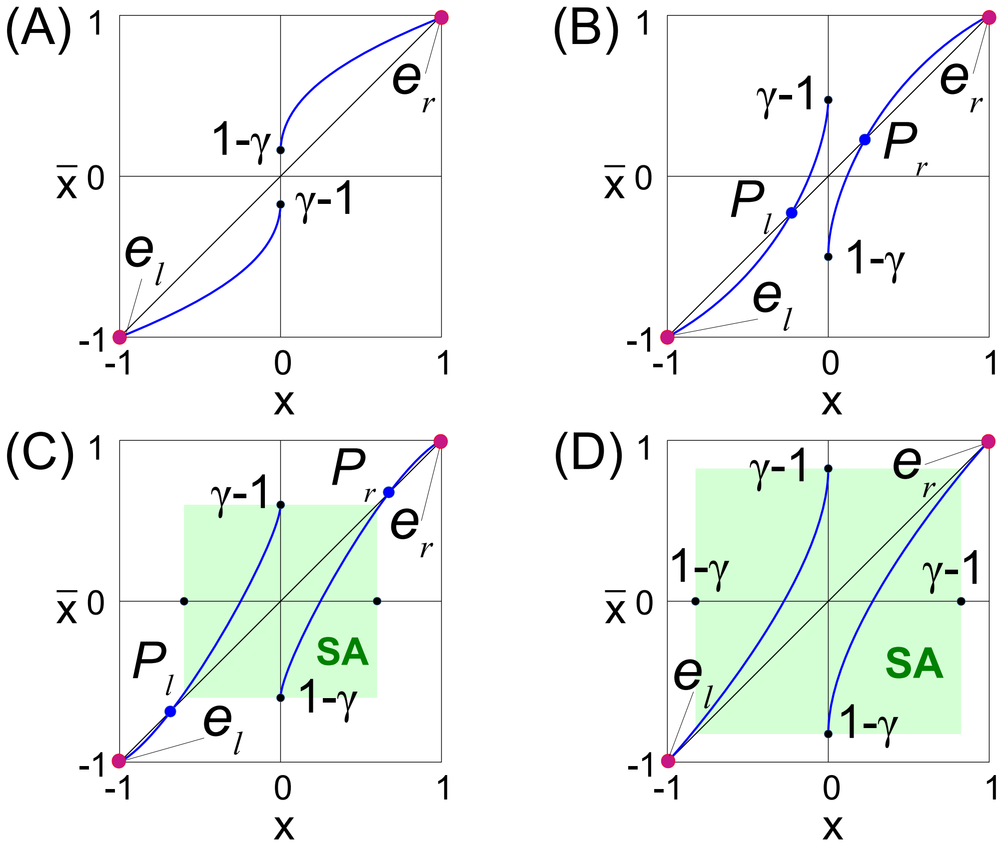

Рисунок 1.6 — Зависимость функции $f(x)$ (синяя кривая) ведущего отображения (1.25) от γ. (A) $0 < \gamma < \gamma_h = 1$ (область I на Рис. 1.5). (B) $1 < \gamma < \gamma_{het}$ (область II). (C) $\gamma_{het} \leqslant \gamma < \nu^{-1}$ (область III): рождение странного хаотического аттрактора SA, который сосуществует с устойчивыми неподвижными точками e_r и e_l. (D) $\nu^{-1} \leqslant \gamma < \gamma_{cr}$ (область IV): странный хаотический аттрактор SA – единственный аттрактор отображения (1.25) в интервале $[-1, 1]$.

Теорема 1.3.1 (о динамике одномерного ведущего отображения).

1. В области параметров I (Рис. 1.5)

$$0 < \gamma < \gamma_h = 1, \tag{1.27}$$

ведущее отображение (1.25) имеет две устойчивые неподвижные точки $e_r(x = 1)$ и $e_l(x = -1)$, бассейны притяжения которых есть целый интервал $(-1,1)\backslash(x = 0)$ [см. Рис. 1.6(A)]. На линии $\gamma_h = 1$, соответствующей рождению гомоклинической бабочки в кусочно-линейной системе (1.1), особая точка $x = 0$ отображается в себя. С увеличением γ от $\gamma_h = 1$ появляются две неустойчивые неподвижные точки $P_r(x = x_r)$ и $P_l(x = x_l = -x_r)$.

2. В области параметров II

$$1 < \gamma < \gamma_{het}, \tag{1.28}$$

где γ_{het} - корень уравнения

$$\gamma - 2(\gamma - 1)^{1-\nu} = 0, \tag{1.29}$$

устойчивые неподвижные точки e_r и e_l притягивают все траектории из интервала (−1,1) кроме неустойчивых неподвижных точек P_r, P_l и нетривиального инвариантного канторова множества неустойчивых траекторий [см. Рис. 1.6(B)].

3. В области параметров III

$$\gamma_{het} \leqslant \gamma < \nu^{-1}, \tag{1.30}$$

отображение имеет странный хаотический аттрактор (SA), содержащийся в инвариантном интервале $X_{SA} = (1-\gamma, \gamma-1)$ [светло-зелёный квадрат на Рис. 1.6(C)]. Этот аттрактор характеризуется свойством

$$f'(x) > 1, \quad x \in X_{SA}, \tag{1.31}$$

и сосуществует с двумя устойчивыми (e_r и e_l) и двумя неустойчивыми (P_r и P_l) неподвижными точками [Рис. 1.6(C)].

4. В области параметров IV

$$\nu^{-1} \leqslant \gamma < \gamma_{cr}, \tag{1.32}$$

где параметр γ_{cr} задан выражением (1.24), отображение имеет единственный (странный хаотический) аттрактор, содержащийся в интервале X_{SA}, с бассейном притяжения в целый интервал X [Рис. 1.6(D)].

5. В области параметров V (не отмечена на Рис. 1.5),

$$\gamma \geqslant \gamma_{cr}, \tag{1.33}$$

аттрактор SA теряет свои хаотические свойства из-за появления устойчивых скользящих движений в кусочно-линейной системе (1.1) (см. Теорему 1.1.1).

Доказательство. Последовательно рассмотрим области I–IV.

Область I: $0 < \gamma < \gamma_h = 1$. Функция $f(x) > x$ для $\forall x \in (0,1)$, поэтому каждая траектория с $x_0 \in (0,1)$ стремится к конечной точке интервала $(0,1)$, неподвижной точке $e_r(x=1)$, локально устойчивой в силу $f'(1) = \gamma\nu < 1$ при

$\gamma < \nu^{-1}$. Аналогичное рассуждение применимо к неподвижной точки $e_l(x = -1)$, которая притягивает все траектории из интервала $(-1, 0)$.

Область II: $1 < \gamma < \gamma_{het}$. Две неустойчивые неподвижные точки $P_r(x = x_r)$ и $P_l(x = x_l = -x_r)$ появляются после того, как две отдельные ветви функции $f(x)$ соединяются в особой точке $x = 0$ при $\gamma = \gamma_h = 1$, тем самым меняя относительные положения точек $f(0)$ левой и правой ветвей $f(x)$ при $\gamma > 1$ [см. Рис. 1.6(A) и (B)]. Это доказывает левую часть неравенства (1.28). Правая часть неравенства (1.28) следует из условия, что неподвижная точка $P_r(x = x_r)$ должна быть расположена ниже точки $f(0)$ левой ветви функции $f(x)$ [см. Рис. 1.6(B)], что выполняется при $x_r < \gamma - 1$, где $x_r = 1 - \gamma + \gamma x_r^\nu$. Приравнивание x_r и $\gamma - 1$ даёт условие (1.29) и критическое значение γ_{het}. При $x_r < \gamma - 1$ точки из интервала $(-x_0, x_0)$, где x_0 - прообраз левой неподвижной точки $x_l = 1 - \gamma + \gamma x_0^\nu$, покидают интервал (x_l, x_r) и стремятся к одной из устойчивых неподвижных точек e_r и e_l. То, что остаётся в интервале (x_l, x_r) после удаления всех прообразов интервала $(-x_0, x_0)$, есть канторово множество неустойчивых траекторий, заключённых в интервале (x_l, x_r).

Область III: $\gamma_{het} \leqslant \gamma < \nu^{-1}$. Увеличение γ, $\gamma > \gamma_{het}$, перемещает координату неподвижной точки $P_r(x = x_r)$ выше $\bar{x}_1 = \gamma - 1$, а $P_l(x = x_l)$ – ниже $\bar{x}_2 = 1 - \gamma$. При этом образуется инвариантная область $X_{SA} = (1 - \gamma, \gamma - 1)$, и траектории с начальным условием $x_0 \in X_{SA}$ не могут покинуть этот интервал [см. Рис. 1.6(C)]. Производная $f'(x) = \gamma\nu|x|^{\nu-1}$ в рассматриваемом интервале $1/2 < \nu < 1$ [см. предположение (1.8)] есть убывающая функция $|x|$ с $\lim\limits_{|x|\to 0} f'(|x|) = \infty$. При этом $f'(x_l) > 1$ и $f'(x_r) > 1$ (неподвижные точки P_l и P_r неустойчивы). Следовательно, $f'(x) > 1$ для каждой точки в интервале $X_{lr} = \{|x| < x_r, x \neq 0\} = \{x_l < x < x_r, x \neq 0\}$. Инвариантный интервал $X_{SA} = (1 - \gamma, \gamma - 1) \in X_{lr}$, тогда $f'(x) > 1$ для $\forall x \in X_{SA}$, т.е. инвариантный интервал X_{SA} содержит только неустойчивые траектории. Эти траектории образуют странный хаотический аттрактор и заполняют интервал X_{SA}. Неустойчивые неподвижные точки P_l и P_r разделяют бассейны притяжения странного аттрактора SA и устойчивых неподвижных точек e_l и e_r. Правая часть неравенства (1.30) $\gamma < \nu^{-1}$ гарантирует, что $x_r < 1$, $x_l > -1$, и точки P_l, P_r не сливаются с e_l и e_r.

Область IV: $\nu^{-1} \leqslant \gamma < \gamma_{cr}$. При $\gamma = \nu^{-1}$ неподвижные точки P_r и e_r (P_l и e_l) сливаются в результате транскритической бифуркации и меняют свою устойчивость при дальнейшем увеличении $\gamma > \nu^{-1}$. P_l и P_r покидают интервал

$[-1, 1]$ и становятся неактуальными для динамики исходной системы (1.1). Эти изменения сохраняют $f'(x) > 1$ для $\forall x \in X_{SA}$ и, следовательно, не затрагивают странный аттрактор SA, который становится единственным аттрактором отображения. Этот аттрактор сохраняется до $\gamma < \gamma_{cr}$, за пределами которого (в области V) одномерное отображение (1.25) неадекватно описывает систему (1.1) из-за появления скользящих движений, которые становятся частью аттрактора системы (см. Теорему 1.1.1). □

Замечание 1.3.1. Одномерное отображение (1.25) может быть приведено к стандартному виду одномерного отображения Лоренца [7; 9; 10; 13; 131]

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= -\mu + \xi^{\nu} \qquad \text{при} \;\; \xi > 0, \\ \bar{\xi} &= \mu - |\xi|^{\nu} \qquad \text{при} \;\; \xi < 0, \end{aligned} \tag{1.34}$$

с помощью масштабирования переменной $\xi = kx$ с $k = \gamma^{\frac{1}{\nu-1}}$ и введения нового параметра $\mu = (\gamma - 1)\gamma^{\frac{1}{\nu-1}}$.

Однако есть различие между бифуркациями неподвижных точек в одномерном ведущем отображении (1.25) и стандартном одномерном отображении Лоренца (1.34). Параметр μ в стандартном одномерном отображении Лоренца независим и может монотонно изменяться с отрицательного на положительное значение, что приводит к бифуркации седло-узел, в которой неподвижные точки P_r и e_r (P_l и e_l) сливаются вместе и исчезают. Напротив, параметр μ в одномерном отображении (1.34), полученном из одномерного ведущего отображения (1.25), является функцией параметров γ и ν, которая имеет максимальное значение при $\gamma = 1/\nu$. Это значение соответствует транскритической бифуркации, при которой фиксированные точки P_r и e_r (P_l и e_l) сливаются вместе при увеличении γ до $\gamma = 1/\nu$. Дальнейшее увеличение γ уменьшает μ и, следовательно, не приводит к исчезновению неподвижных точек как в стандартном одномерном отображении (1.34) с независимым параметром μ, а вызывает их обмен устойчивостью, делая неподвижную точку e_r (e_l) неустойчивой. Но поскольку неподвижные точки e_r и e_l не участвуют в формировании странного аттрактора и лежат вне его инвариантного интервала X_{SA} [см. Рис. 1.6(D)], это несоответствие между неподвижными точками одномерного ведущего отображения (1.25) и стандартного отображения Лоренца (1.34) с независимым μ несущественно.

Замечание 1.3.2. Кривые $\gamma = \gamma_{het}(\nu)$ и $\gamma = \nu^{-1}$, определяющие область III, пересекаются в $\nu = 1/2$ и $\nu = 1$, подтверждая таким образом предположение об интервале $1/2 < \nu < 1$, в котором в зависимости от значения γ может существовать странный аттрактор. Заметим, что $\gamma_{cr} < 2$ при $\lambda > 0$, поскольку $\gamma_{cr}\big|_{\lambda=0} = 2$, и частная производная $(\gamma_{cr})'_\lambda < 0$ указывает, что γ_{cr} убывает с ростом λ. Это условие $\gamma_{cr} < 2$ гарантирует, что горизонтальная линия $\gamma = \gamma_{cr}$ лежит ниже пересечения $\gamma = 2$ с кривой $\gamma = \nu^{-1}$. Таким образом, область IV, $\nu^{-1} \leqslant \gamma < \gamma_{cr}$, соответствующая существованию единственного (странного) аттрактора отображения, остаётся непустой для большинства значений $1/2 < \nu < 1$ кроме ν, близких к $1/2$ (см. Рис. 1.5).

1.4 Динамика полного двумерного отображения

Рассмотрим связь динамики и бифуркаций одномерного ведущего отображения (1.25) с динамикой и бифуркациями полного двумерного отображения F (1.22). В отображении (1.22) уравнение для y: $\bar{y} = g(x,y) \equiv r - 1 + r|x|^\alpha y$ линейно по y и содержит дискретно изменяющийся во времени коэффициент x, который определяется траекторией ведущего отображения (1.25). В силу условия (1.24) о допустимых значениях параметра r, можно сделать вывод, что

$$r|x|^\alpha < \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1, \quad \forall x \in [-1, 1]. \tag{1.35}$$

В результате уравнение для y в отображении (1.22) является сжимающим при $\forall x \in [-1, 1]$. Таким образом, уравнение для y добавляет устойчивое направление к траекториям одномерного ведущего отображения, тем самым (а) сохраняя устойчивость неподвижных точек e_l и e_r, когда они устойчивы по x, и (б) превращая неустойчивые траектории ведущего отображения (1.22) в седловые траектории двумерного отображения (1.22). Это рассуждение приводит к следующему утверждению.

Лемма 1.4.1. *1. Устойчивые неподвижные точки e_l и e_r одномерного ведущего отображения (1.25) в области параметров $0 < \gamma < \nu^{-1}$ порождают устойчивые неподвижные точки $e_l(x = -1, y = -1)$ и $e_r = (x = 1, y = 1)$ двумерного отображения (1.22). 2. Любая p-периодическая (апериодическая)* *орбита одномерного ведущего отображения, расположенная в интервале* $X = (1-\gamma, \gamma-1)$ *и не содержащая особую точку* $x = 0$*, порождает единственную седловую* p*-периодическую (апериодическую) орбиту двумерного отображения* (1.22).

Доказательство. В силу треугольной формы двумерного отображения (1.22), где уравнение для x управляет уравнением для y, каждая траектория одномерного ведущего отображения $\{x_0, \ldots x_k, x_{k+1}, \ldots\}$ порождает последовательность отрезков $\{L_0 = (x_k, y_k \in [-1,1]), \ldots L_k, L_{k+1}, \ldots\}$ в двумерном отображении. Эти отрезки часто называют устойчивым инвариантным слоением на секущей Пуанкаре в системе Лоренца [6]. Для любых $x_k = f^k(x_0)$, $y_k = g^k(x_0, y_0)$, $k = 1, 2, \ldots$, слой $L_k = \{x_k, y_k \in [-1,1]\}$ отображается в слой $L_{k+1} = \{x_{k+1}, y_{k+1} \in [-1,1]\}$. В частности, слой L_1, соответствующий неподвижной точке одномерного ведущего отображения, является инвариантным и отображается в себя. Пусть $O_p = \{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_p^*, x_{p+1}^* = x_1^*\}$ есть p-периодическая орбита одномерного ведущего отображения, которая не начинается в особой точке $x = 0$ и никогда в неё не возвращается. Эта орбита порождает периодические слои $\{L_1, L_2, \ldots, L_p, L_1\}$ такие, что любой слой L_j, $j \in [1,p]$ отображается в себя после p итераций. Подставляя значения x_k орбиты O_p в уравнение для y в двумерном отображении (1.22), получим последовательность линейных отображений $y_{k+1} = g(x_k, y_k)$, где итерации обозначены с помощью индексов. Композиция этих отображений даёт линейное p-кратное отображение слоя L_j в себя

$$y_{j+p} = Q_j + Q_0 y_j, j = \overline{1,p}, \tag{1.36}$$

где $Q_0 = \prod\limits_{k=1}^{p} r|x_k|^\alpha$ и $Q_j = \text{const} \in L_j$. Линейное отображение (1.36) является сжимающим в силу неравенства $Q_0 < 1$, которое следует из (1.35). Следовательно, это отображение имеет единственную устойчивую неподвижную точку $y_j^* = \dfrac{Q_j}{1-Q_0}$. Соединяя последовательность устойчивых неподвижных точек y_1^*, y_2^*, …, y_p^* с соответствующими значениями x_k орбиты O_p, получим единственную периодическую орбиту двумерного отображения (1.22) $\tilde{O}_p = \{(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \ldots, (x_p^*, y_p^*)\}$.

Собственные значений матрицы Якоби двумерного отображения (1.22) есть $f'(x_k^*)$ и $r|x_k^*|^\alpha$, где x_k^* задана периодической орбитой $\tilde{O}_p$. Таким образом, показатели Ляпунова орбиты $\tilde{O}_p$ имеют вид

$$h_x = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \ln|f'(x_k^*)|, \quad h_y = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \ln r|x_k^*|^{\alpha}. \tag{1.37}$$

В силу условий (1.31) и (1.35) получим

$$h_x > 0, \quad h_y < 0 \quad \text{при} \quad \gamma > 1. \tag{1.38}$$

Это условие исключает неподвижные точки e_l и e_r двумерного отображения, которые устойчивы в области параметров $0 < \gamma < \nu^{-1}$ с показателями $h_x < 0$ и $h_y < 0$. Поэтому $\tilde{O}_p$ есть единственная седловая периодическая орбита.

Аналогичное рассуждение применимо к неустойчивой неблуждающей апериодической траектории $O_\infty = \{x_1^*, x_2^*, \ldots\}$ одномерного ведущего отображения, которая не содержит особой точки $x = 0$ и порождает седловую апериодическую траекторию двумерного отображения $\tilde{O}_\infty = \{(x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), \ldots\}$. Её показателями Ляпунова являются

$$h_x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln|f'(x_k^*)|, \quad h_y = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln r|x_k^*|^{\alpha}, \tag{1.39}$$

нижние и верхние пределы которых ограничены и удовлетворяют условию (1.38). Таким образом, $\tilde{O}_\infty$ есть единственная орбита, соответствующая O_∞. $\square$

Эта лемма позволяет напрямую применять утверждения Теоремы 1.3.1 в отношении динамики двумерного отображения. Перед тем, как сделать это и сформулировать эти утверждения в качестве следствий, обсудим как секущая D преобразуется под действием двумерного отображения F. Как и в отображении Пуанкаре оригинальной системы Лоренца [4—6], образ FD секущей D, порождённый кусочно-линейной системой (1.1), имеет две симметричных треугольных компоненты F_1D_1 и F_2D_2 (см. Рис. 1.7). Форма образа F_1D_1 определена образом её границы $\partial D_1 = l \cup l_1 \cup l_+ \cup l_-$, где $l = \{x = 0, y \in [-1, 1]\}$, $l_1 = \{x = 1, y \in [-1, 1]\}$, $l_+ = \{x \in (0,1), y = 1\}$, $l_- = \{x \in (0,1), y = -1\}$. Образом линии разрыва l является точка $F_1 l = M_1(1-\gamma, 1-r)$; образом инвариантной линии l_1 является отрезок $F_1 l_1 = \{x = 1, y \in [1-2r, 1]\}$, где его верхняя граничная точка есть неподвижная точка $e_r(x = 1, y = 1)$. Образ верхней линии l_+ задан в параметрическом виде $F_1 l_+ = \{f(x), g(x,1), x \in (0,1]\}$. Аналогично образ нижней линии l_- есть $F_1 l_- = \{f(x), g(x,-1), x \in (0,1]\}$.

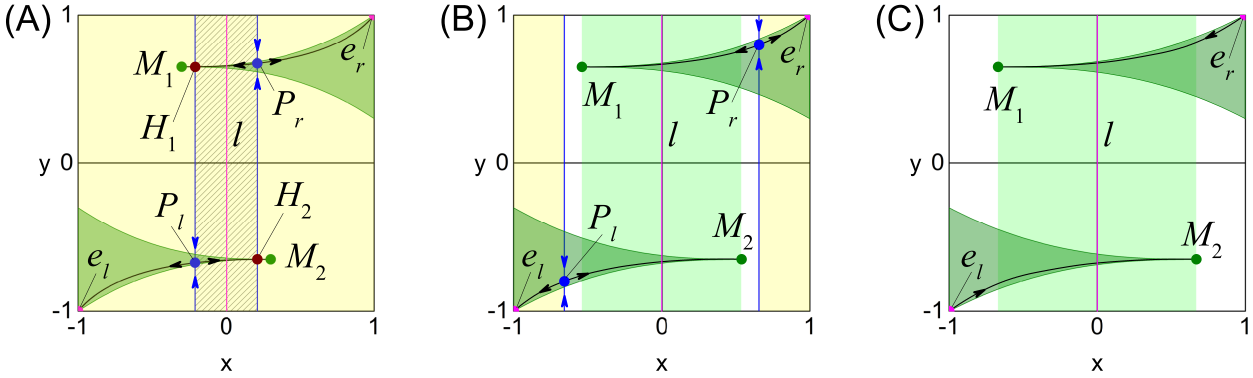

Рисунок 1.7 — Действие двумерного отображения (1.22) в зависимости от параметра γ. (A) $1 < \gamma < \gamma_{het}$ (область параметров II на Рис. 1.5). (B) $\gamma_{het} \leqslant \gamma < \nu^{-1}$ (область параметров III). Странный аттрактор SA, расположенный в инвариантной области (светло-зелёная полоса), сосуществует с двумя устойчивыми неподвижными точками e_l и e_r. (C) $\nu^{-1} \leqslant \gamma < \gamma_{cr}$ (область параметров IV). Странный аттрактор SA – единственное притягивающее множество отображения.

Важно отметить, что точки M_1 и M_2 становятся точками возврата (cusp points) если $\alpha > \nu$ [см. условие (1.8)]. Это утверждение можно проверить следующим образом. Верхняя граница $F_1 l_+$ треугольной компоненты задана функцией $\bar{y} = \kappa^+(\bar{x})$, $\bar{x} \in (1-\gamma, 1]$, которая определена параметрически через $\bar{x} = f(x)$, $\bar{y} = g(x, 1)$, $x \in (0, 1]$. Её производная $\kappa^+_{\bar{x}} = \frac{g_x(x,1)}{f_x(x)} = \frac{r\alpha}{\gamma\nu} x^{\alpha-\nu}$ положительна для интервала $x \in (0,1]$, имеющего образ $\bar{x} \in (1-\gamma, 1]$. При $\alpha > \nu$ производная $\kappa^+_{\bar{x}}$ стремится к нулю при $x \to 0$. Следовательно, график $\kappa^+_{\bar{x}}$ имеет горизонтальное касание в $x = 0$, т.е. в точке M_1. Аналогично график нижний границы $F_1 l_-$ задан функцией $\bar{y} = \kappa^-(\bar{x})$, $\bar{x} \in (1-\gamma, 1]$, определённой выражениями $\bar{x} = f(x)$, $\bar{y} = g(x, -1), x \in (0,1]$. Её производная $\kappa^-_{\bar{x}} = -\kappa^+_{\bar{x}}$, и, следовательно, график $\kappa^-(\bar{x})$ также имеет горизонтальное касание в $x = 0$, т.е. в точке M_1. Таким образом, тока M_1 является точкой возврата, где графики верхней и нижней границы сливаются горизонтально.

Форма образа $F_2 D_2$ нечётно симметрична с $F_1 D_1$ и состоит из точки $M_2(\gamma - 1, r - 1)$, отрезка $\{x = -1, y \in [-1, 2r-1]\}$, содержащего неподвижную точку $e_l(x = -1, y = -1)$, и двух боковых линий $\{f(x), g(x, 1),\ x \in [-1, 0)\}$ и $\{f(x), g(x, -1),\ x \in [-1, 0)\}$. В силу симметрии M_2 также является точкой возврата при $\alpha > \nu$.

Изменение взаимного расположения точек M_1, M_2 и линии разрыва l при изменении параметра γ управляет бифуркациями и аттракторами двумерного отображения, что является следствием Теоремы 1.3.1 и Леммы 1.4.1.

Следствие 1.4.1 (о динамике полного двумерного отображения Пуанкаре)**.**

1. В области параметров I (1.27) *(Рис. 1.5) динамика двумерного отображения F идентична динамике ведущего отображения* (1.25) *за исключением добавления устойчивого направления к устойчивым неподвижным точкам* $e_r(x = 1, y = 1)$ *и* $e_l(x = -1, y = -1)$*. В терминах образов Рис. 1.7,* $F_1D_1 \subset D_1$ *и* $F_2D_2 \subset D_2$ *такие, что точка возврата* M_1 *(*M_2*) треугольного образа также лежит в* F_1D_1 *(*F_2D_2*) и не достигает линии разрыва* l*. Последующие образы* $F_k...F_1D_1$ *(*$F_k..F_2D_2$*) сохраняют это расположение и в конечном итоге сжимаются до неподвижной точки* e_l *(*e_r*). При* $\gamma = 1$ *точки возврата* M_1 *и* M_2 *достигают прямой* l*, образуя гомоклиническую бабочку в кусочно-линейной системе* (1.1)*.*

2. В области параметров II (1.28) *появляются две седловые точки* $P_r(x_r, y_r)$ *и* $P_l(x_l, y_l)$*, где* x_r *и* x_l *– координаты неустойчивых неподвижных точек* P_l *и* P_r *одномерного ведущего отображения [см. Рис. 1.7(A)]. Одномерное устойчивое многообразие* W_r^s *точки* P_r *является инвариантным слоем* $L_r = (x = x_r, |y| \leqslant 1)$ *и, следовательно,* $y_r = \dfrac{1-r}{1-r|x_r|^{\alpha}}$*. Одномерное неустойчивое многообразие* W_r^u *точки* P_r *имеет граничные точки* M_1 *и* e_r*. Симметрично одномерное устойчивое многообразие* W_l^s *точки* P_l *является инвариантным слоем* $L_l = (x = x_l, |y| \leqslant 1)$*.*

Согласно взаимному расположению точек M_1*,* M_2 *и устойчивых многообразий* W_l^s*,* W_r^s *седловых точек* P_l *и* P_r*, существует гетероклинические точки* $H_1 = W_l^s \cap W_r^u$*,* $H_2 = W_r^s \cap W_l^u$ *такие, что последующие точки* $F^kH_1 \cup F^kH_2$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *образуют гетероклинический контур между двумя седловыми точками* P_l *и* P_r*. Динамика одномерного ведущего отображения порождает канторово множество седловых траекторий, расположенных внутри области, ограниченной устойчивыми и неустойчивыми многообразиями седловых точек* P_l *и* P_r *[заштрихованная область на Рис. 1.7(A)]. В соответствующей области параметров единственными аттракторами двумерного отображения являются неподвижные точки* e_r *и* e_l*.*

3. При $\gamma = \gamma_{het}$ *точка* M_1 *(*M_2*) сливается с* H_1 *(*H_2*), вызывая гетероклиническую бифуркацию. В терминах кусочно-линейной системы* (1.1) *эта* *бифуркация возникает, когда неустойчивое многообразие W_1^u (W_2^u) седла O_s, образ которого есть точка M_1 (M_2), попадает на устойчивое многообразие W_l^s (W_r^s) седлового предельного цикла, представленного седловой точкой P_l (P_r).*

4. В области параметров III (1.30) *точка M_1 (M_2) лежит справа (слева) от устойчивого многообразия W_l^s (W_r^s) седел P_l (P_r) [см. Рис.* 1.7*(B)]. Странный аттрактор, состоящий только из седловых траекторий, расположен в области, ограниченной по x точками M_1 и M_2. Бассейны притяжения устойчивых неподвижных точек e_l и e_r ограничены устойчивыми многообразиями седел P_l и P_r соответственно.*

5. В области параметров IV (1.32) *странный аттрактор является единственным притягивающим множеством двумерного отображения F благодаря транскритической бифуркации, аналогичной таковой в одномерном ведущем отображении, когда седловая и устойчивая точки P_r и e_r (P_l и e_l соответственно) сливаются вместе при $\gamma = \nu^{-1}$ и обмениваются своей устойчивостью. Точки P_l и P_r покидают секущую D, в то время как крайние неподвижные точки e_r и e_l превращаются в сёдла, что делает странный аттрактор единственным аттрактором [см. Рис.* 1.7*(C)]. Хаотичность этого аттрактора обеспечивается наличием положительного показателя Ляпунова h_x согласно* (1.38)*. Сингулярность этого странного аттрактора вызвана особыми траекториями $F^k M_1$ и $F^k M_2$, $k \in \mathbb{Z}$, которые меняют структуру аттрактора при возвращении на линию $l = W^s \cap D$, $F^k M_1 \in l$, $F^k M_2 \in l$.*

1.5 Возвращение к динамике потока

Согласно Теореме 1.1.1 любая траектория кусочно-линейной системы (1.1) попадает в поглощающую область G, делая секущую D глобальной. Следовательно, динамика кусочно-линейной системы (1.1) внутри поглощающей области G полностью определяется траекториями двумерного отображения $F : D \to D$ (1.22). Заданная орбита двумерного отображения (1.22) $K = \{\dots, (x_k^*, y_k^*), (x_{k+1}^*, y_{k+1}^*), \dots, k = 0, 1, 2, \dots\}$, соединяющая точку (x_k^*, y_k^*) с точкой (x_{k+1}^*, y_{k+1}^*) решениями (1.3), (1.4), (1.5) соответствующих систем A_s и $A_{r,l}$, даёт кусок траектории кусочно-линейной системы (1.1) для любых двух соседних точек дискретной траектории K двумерного отображения. В результате бифуркационные маршруты рождения и исчезновения странного аттрактора в кусочно-линейной системе (1.1) идентичны таковым в двумерном отображении (1.22), которое в свою очередь определяется одномерным ведущим отображением (1.25). Следовательно, мы можем перевести бифуркационную диаграмму ведущего отображения (Рис. 1.5) в бифуркационную диаграмму кусочно-линейной системы (1.1) в параметрах $b = \gamma \exp \dfrac{3\pi\lambda}{2\omega}$ (1.21) и ν, где параметр ν одинаков в системе (1.1) и в ведущем отображении (см. Рис. 1.8). Для этого мы будем менять b, увеличивая γ и зафиксировав параметры α, λ, δ и ω. Параметр $\alpha > 1$ удовлетворяет условию (1.8), а параметр $\delta < \delta_{cr}$ выбран согласно условию (1.13) Теоремы 1.1.1. Таким образом, Теорема 1.3.1, Лемма 1.4.1 и Следствие 1.4.1 могут быть собраны в терминах кусочно-линейной системы (1.1) в следующем виде.

Теорема 1.5.1 (о динамике кусочно-линейной системы лоренцевского типа)**.** *A. В области параметров (область I на Рис. 1.8)*

$$0 < b < b_h = \gamma \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \tag{1.40}$$

система (1.1) имеет два устойчивых фокуса e_l и e_r, которые притягивают все траектории системы за исключением устойчивого двумерного многообразия W^s седла O_s, которое разделяет бассейны притяжения фокусов [типичное поведение см. на Рис. 1.9(A)].

B. Поверхность

$$b_h = \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \tag{1.41}$$

соответствует гомоклинической бифуркации седла O_s, устойчивое и неустойчивое многообразия которого формируют симметричные гомоклинические орбиты (гомоклиническую бабочку) [см. Рис. 1.9(B)].

C. В области параметров (область II на Рис. 1.8)

$$b_h = \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} < b < b_{het} = \gamma_{het} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega}, \tag{1.42}$$

где γ_{het} - обратная функция для $\nu = 1 + \frac{\ln 2 - \ln\gamma}{\ln(\gamma-1)}$, устойчивые фокусы e_r и e_l сосуществуют с двумя симметричными седловыми циклами C_1 и C_2 (см. Рис. 1.2), которые соответствуют седловым неподвижным точками $P_r = C_1 \cap D$ и $P_l = C_2 \cap D$ двумерного отображения (1.22). Неустойчивые и *устойчивые многообразия периодических орбит $C_{1,2}$ пересекаются трансверсально, вызывая появление сложного канторова множества седловых орбит [типичную динамику см. на Рис. 1.9(C)].*

D. Поверхность

$$b_{het} = \gamma_{het} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \tag{1.43}$$

соответствует гетероклинической бифуркации образования двух симметричных гетероклинических контуров, составленных из неустойчивых многообразий W^u седла O_s, попадающих на устойчивые двумерные многообразия седловых предельных циклов C_1 и C_2 [см. Рис. 1.9(D)].

E. В области параметров (область III на Рис. 1.8)

$$b_{het} \leqslant b < b_{unq} = \nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \tag{1.44}$$

странный хаотический аттрактор лоренцевского типа, родившийся в результате гетерклинической бифуркации при b_{het}, сосуществует с двумя устойчивыми фокусами e_l и e_r [см. Рис. 1.9(E)].

E-F. Поверхность

$$b_{unq} = \nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \tag{1.45}$$

соответствует субкритической бифуркации типа Андронова-Хопфа[1]*, при которой седловой предельный цикл C_1 (C_2) влипает в устойчивый фокус e_r (e_l) и исчезает, превращая e_r (e_l) в седло-фокус.*

F. В области параметров (область IV на Рис. 1.8)

$$\nu^{-1} \exp \frac{3\pi\lambda}{2\omega} \leqslant b < 2\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\omega} \Big(\arctan \frac{\omega}{\lambda} + \pi \Big) \right\} \tag{1.46}$$

странный аттрактор лоренцевского типа становится единственным аттрактором кусочно-линейной системы (1.1) [см. Рис. 1.9(F)].

G. Поверхность

$$b = b_{cr} = 2\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\omega^2}} \exp \left\{ \frac{\lambda}{\omega} \Big(\arctan \frac{\omega}{\lambda} + \pi \Big) \right\} \tag{1.47}$$

соответствует появлению устойчивых скользящих движений внутри аттрактора, что разрушает его хаотичность.

---

[1]Предельные циклы в кусочно-гладких динамических системах могут рождаться или исчезать способами, фундаментально отличными от гладких систем [39]. Например, в работе [60] приведено 20 различных геометрических механизмов рождения предельных циклов в двумерных кусочно-гладких системах ОДУ.

Доказательство. Доказательство утверждений A–G непосредственно следует из соответствующих утверждений Теоремы 1.3.1, Леммы 1.4.1 и Следствия 1.4.1. Однако требует пояснения пункт из утверждения E–F о транскритической бифуркации двумерного отображения (1.22), вызывающей субкритическую бифуркацию типа Андронова-Хопфа в кусочно-линейной системе (1.1). Эта транскритическая бифуркация происходит в двумерном отображении (1.22), когда неподвижные точки P_r и e_r (P_l и e_l) сливаются вместе и меняют свою устойчивость таким образом, что точка P_r (P_l) становится устойчивой и покидает секущую $D = (|x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1)$. Этот переход не полностью соответствует бифуркации в кусочно-линейной системе (1.1) в силу её негладкости [39; 60]. До бифуркации (в области параметров III) неподвижная точка P_r (P_l) двумерного отображения соответствует в (1.1) седловому предельному циклу C_1 (C_2), а неподвижная точка e_r (e_l) двумерного отображения – устойчивому фокусу e_r (e_l). При $b = b_{unq}$ устойчивый фокус претерпевает субкритическую бифуркацию типа Андронова-Хопфа, и седловой предельный цикл сжимается в устойчивый фокус. Согласно транскритической бифрукации двумерного отображения можно было бы ожидать, что состояние равновесия и предельный цикл сменят свою устойчивость, что сделает устойчивый фокус седло-фокусом и породит устойчивый предельный цикл с малой амплитудой. Однако это не так, поскольку "прототип" этого предельного цикла, точка P_l, лежит вне секущей D, не определена потоком системы (1.1) и, следовательно, не имеет отношения к динамике кусочно-линейной системы (1.1). Это приводит к бифуркации, описанной в утверждении E–F, когда седловой предельный цикл C_1 (C_2) сливается с устойчивым фокусом e_r (e_l) и исчезает, превращая e_r (e_l) в седло-фокус. $\square$

На Рис. 1.8 показан бифуркационный маршрут COD1 в кусочно-линейной системе (1.1), который идентичен основному маршруту COD1 рождения аттрактора Лоренца в исходной системе Лоренца. Стоит отметить, что маршрут COD2 коразмерности два в модели Лоренца может быть реализован в кусочно-линейной системе, как показано на Рис. 1.8. Здесь нужно следовать пунктирной кривой и одновременно изменять два параметра ν и b, поскольку ν может быть равным только 1 в точке бифуркации (см. Замечание 1.3.2). Важно, что кусочно-линейная система позволила явно указать параметры системы для полного каскада бифуркаций, ведущих к хаосу, включая гомоклиническую бабочку (точка B) и гетероклиническую бифуркацию (точка C) (также см. Рис. 1.9). Эти аналитические результаты недоступны для системы Лоренца.

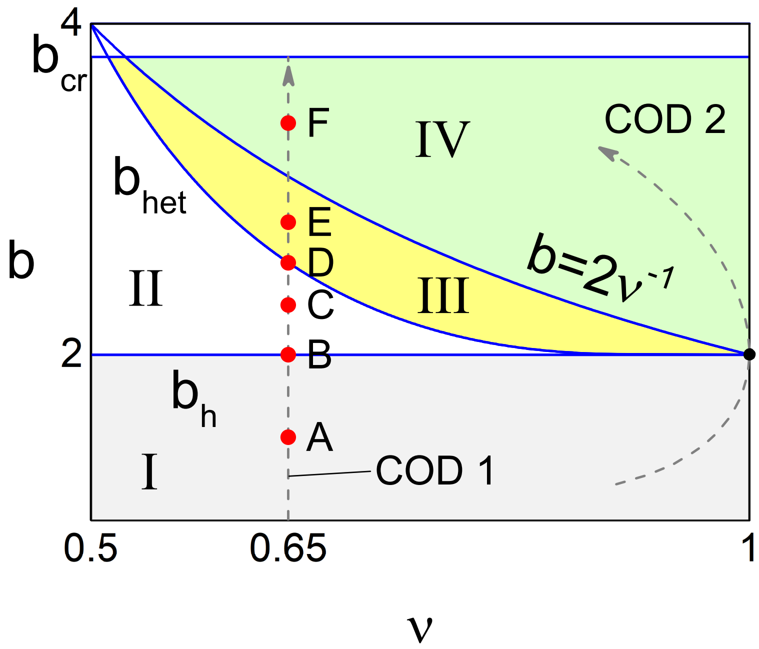

Рисунок 1.8 — Бифуркационная диаграмма с Рис. 1.5, построенная в параметрах кусочно-линейной системы (1.1). Области I-IV и их значения аналогичны таковым на Рис. 1.5. Бифуркационные кривые b_h, b_{het}, b_{unq}, и b_{cr} построены по явным формулам Теоремы 1.5.1. Значения параметров заданы на Рис. 1.9. Вертикальной штриховой линией $\nu = 0.65$ изображён пример бифуркационного маршрута COD1 перехода к хаосу. Точками A, B, C, D, E и F отмечена типичная динамика в соответствующих областях (см. Рис. 1.9). Штриховая кривая изображает маршрут, аналогичный маршруту COD2 перехода к хаосу через образование гомоклинической бабочки с нулевой седловой величиной в системе Лоренца.

Напомним, что двумерное отображение (1.22), которое даёт бифуркационную диаграмму на Рис. 1.8, строится при ограничении (1.24) на параметры системы, которое гарантирует, что аттракторы кусочно-линейной системы (1.1) не содержат скользящих движений. Хотя это ограничение имеет другое происхождение, его можно рассматривать как аналог условия существования устойчивого инвариантного слоения в геометрической модели Лоренца, которое гарантирует, что хаотический аттрактор описывается одномерным отображением Лоренца [13]. Нарушение этого условия в исходной системе Лоренца приводит к появлению подков Смейла в отображении Лоренца и к преобразованию хаотического аттрактора Лоренца в квазистранный аттрактор (квазиаттрактор), содержащий устойчивые периодические орбиты [14; 132; 133]. Точно так же невыполнение условия (1.24) для $b \geqslant b_{cr}$ приводит к исчезновению

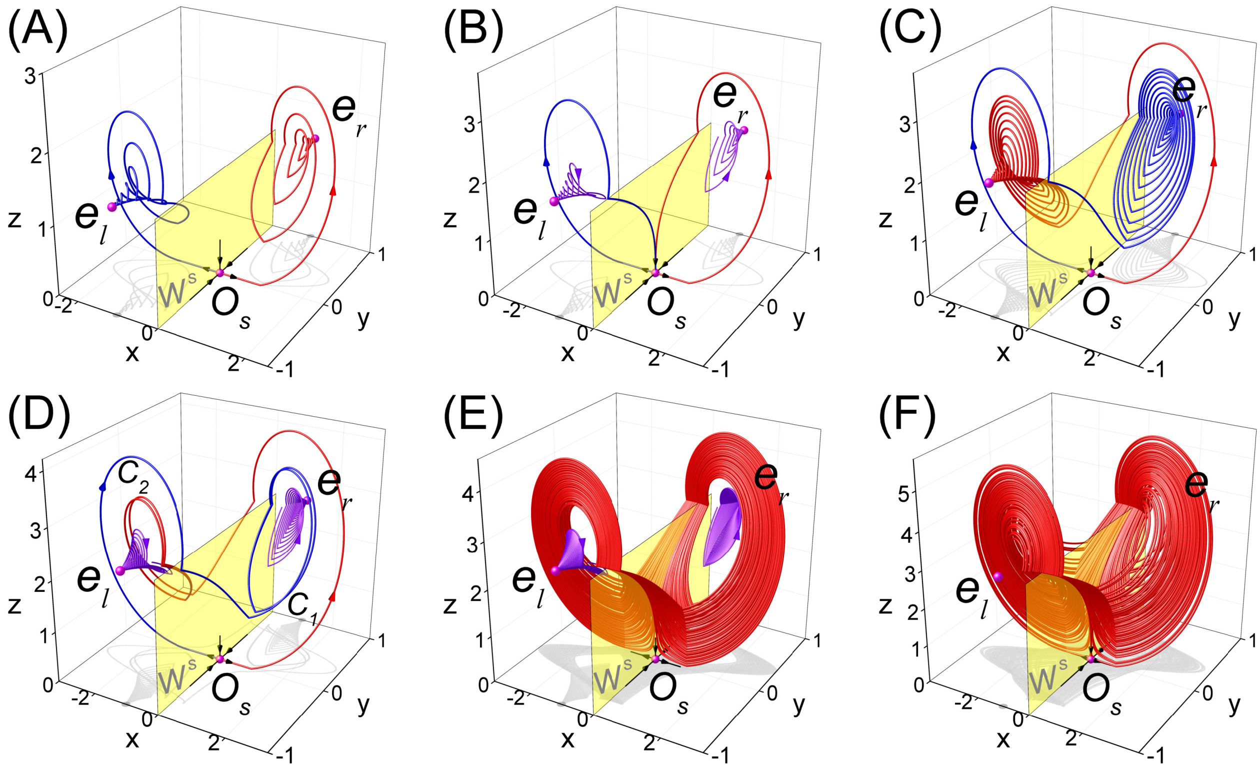

Рисунок 1.9 — Динамика кусочно-линейной системы (1.1) при различных значениях параметра b. Фазовые портреты (A), (B), (C), (D), (E) и (F) соответствуют точкам A, B, C, D, E и F бифуркационной диаграммы на Рис. 1.8. (A) $b = 1.5$. Два устойчивых фокуса e_l и e_r (розовые точки) притягивают неустойчивые многообразия (красная и синяя спирали) седла O_s. (B) $b = b_h = 2$. Гомоклиническая бабочка. (C) $b = 2.3$. Устойчивые фокусы e_r и e_l сосуществуют с двумя симметричными седловыми циклами C_1 и C_2 [не показаны] (D) $b = b_{het} = 2.557$. Гетероклиническая бифуркация, при которой рождается странный аттрактор лоренцевского типа [не показан]. (E) $b = 2.8$. Странный аттрактор (красный) сосуществует с устойчивыми фокусами e_l и e_r. Фиолетовые траектории стремятся к e_l и e_r. (F) $b = 3.4$. Странный аттрактор является единственным аттрактором системы (1.1). Остальные параметры имеют значения $\alpha = 2$, $\nu = 0.65$, $\lambda = 0.294$, $\omega = 2$ и $\delta = 0.588$.

сингулярно-гиперболического аттрактора лоренцевского типа из-за появления устойчивых скользящих движений.

Замечательная особенность кусочно-линейной системы (1.1) состоит в том, что она может предложить строгое описание структуры и бифуркаций квазистранных аттракторов системы, содержащих устойчивые скользящие движения при $b \geqslant b_{cr}$. Для этого нужно дополнить отображение Пуанкаре (1.22) таким образом, чтобы оно учитывало попадание траекторий на участок устойчивых скользящих движений, после которого траектории возвращаются на секущую D под действием фокусных систем A_r и A_l. Положения точек на секущей D, в которые возвращаются эти траектории, задавая следующую итерацию отображения Пуанкаре, можно определить с помощью системы (1.12). Это дополнение отображения (1.22) из-за устойчивых скользящих движений даст два симметричных плоских фрагмента на графике функции $f(x)$ ведущего отображения 1.25, которые приведут к схлопыванию соответствующих интервалов по x в две точки в отличие от появления загибов на геометрическом отображении Лоренца в отсутствие слоения [133].

Перейдём к подробному рассмотрению этой особенности.

1.6 Отображение Пуанкаре при наличии скользящих движений

Построим отображение Пуанкаре, которое учитывает наличие скользящих движений и помогает выявить их нетривиальную роль в бифуркациях системы. Для этого обобщим отображение (1.22) на случай, когда условие (1.13) не выполняется.

Для исходной системы (1.1) это означает, что неустойчивое многообразие W_1^s седла O_s попадает на скользящую полуплоскость S_2^+ [розовая область на Рис. 1.11(a)] и скользит вниз вдоль S_2^+ перед возвращением на секущую D [Рис. 1.11(a) и 1.11(b)]. В результате существует область начальных условий $D_1^{sl} \in D_1$ [тёмно-зелёная область на Рис. 1.11(a)], для которой все начинающиеся на ней траектории попадают на устойчивую скользящую полуплоскость S_2^+. Граница области D_1^{sl} составлена из начальных условий, чьи образы попадают на нижнюю границу S_2^+, т.е. на линию $l^+ : \{x = -1, z = b^+ \equiv b + \frac{2\lambda}{\omega}, y > 0\}$ [чёрная линия, разделяющая розовую и серую области на Рис. 1.11(a)]. Следовательно, необходимо построить отображение Пуанкаре $\hat{F}_1 : D_1^{sl} \to D$ как композицию $\hat{F}_1 = T_4 T_3 \hat{T}_2 T_1$ отображений

$$
\begin{aligned}
&T_1 : D_1^{sl} \to S_1, \\
&\hat{T}_2 : S_1 \to S_2^+, \\
&T_3 : S_2^+ \to l^+, \\
&T_4 : l^+ \to D.
\end{aligned}
\tag{1.48}
$$

Таким образом, отображение $\hat{F}_1$ переводит точки с D_1^{sl} на вертикальную полуплоскость S_1 по траекториям седловой системы A_s (это часть идентична действию отображения F_1). Далее, точки отображаются под действием $\hat{T}_2$ на устойчивую скользящую полуплоскость S_2^+ по траекториям фокусной системы A_r. Последующее действие отображения T_3 переводит эти точки вниз вдоль S_2^+ до её границы l^+ по траекториям системы Филиппова (1.12). Наконец, эти точки попадают на секущую D под действием отображения T_4, заданного траекториями фокусной системы A_r. Рисунки 1.11(a) и 1.11(b) иллюстрируют этот перевод и действие отображения $\hat{F}_1$.

Заметим, что часть секущей $D_1 \setminus D_1^{sl}$ соответствует множеству начальных условий для траекторий, которые не могут достичь устойчивую скользящую полуплоскость S_2^+. Следовательно, исходное отображение (1.22) применимо для этой части секущей.

Далее, получим аналитический вид отображения Пуанкаре $\hat{F}_1$. Это также позволит получить его нечётно-симметричное дополнение $\hat{F}_2 : D_2^{sl} \to D$.

1.6.1 Аналитический вывод

Аналогично выводу отображения (1.22) без скользящих движений получим аналитический вид отображения $\hat{F}_1 = T_4 T_3 \hat{T}_2 T_1$ через решение краевой задачи для каждого отображения композиции $\hat{F}_1$.

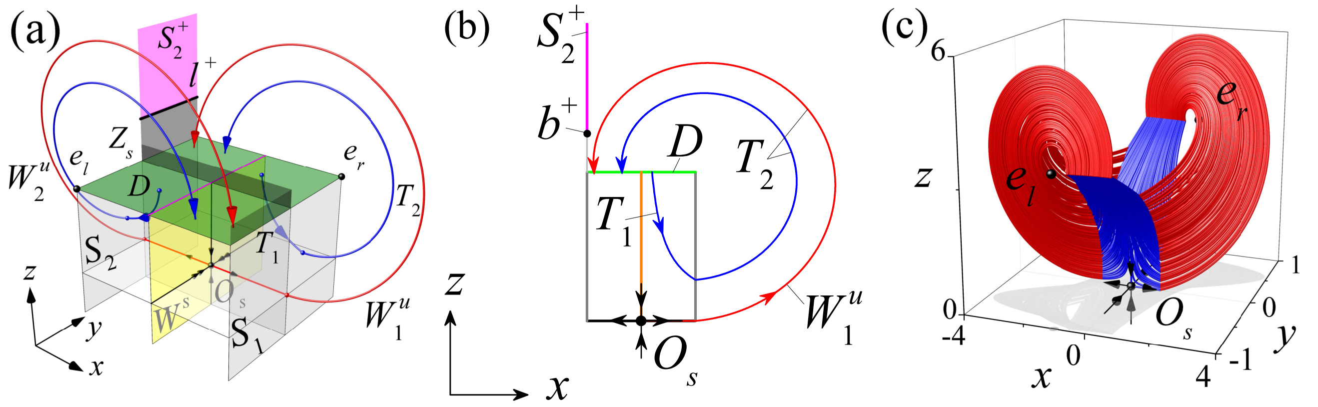

Рисунок 1.10 — Фазовое пространство и динамика кусочно-линейной системы (1.1) при отсутствии скользящих движений [см. условие (1.13)]. (a) Неустойчивое многообразие W_1^u седла O_s (красное) не попадает на устойчивую скользяющую полуплоскость S_2^+ (розовая), гарантируя, что аттрактор системы не содержит скользящих движений. (b) Проекция портрета (a) на плоскость $y = 0$. Точка $z = b^+$ обозначает нижнюю границу устойчивой скользящей полуплоскости S_2^+, линии l^+. (c) Аттрактор лоренцевского типа без скользящих движений. Траектории на всех трёх рисунках получены численно при следующих значениях параметров: $\alpha = 2$, $\nu = 0.8$, $\lambda = 0.1471$, $\omega = 1$, $b = 3.6$ и $\delta = 0.588$.

Отображение $T_1 : D_1^{sl} \to S_1$

Начнём с точки с координатами $x(0)$, $y(0)$ и $z(0) = b$ на секущей D_1^{sl}. Эта точка переводится траекториями седловой системы A_s в точку с координатами $[x(\tau) = 1, y(\tau), z(\tau)]$ на границе S_1 за время τ_1. Следовательно, используя решение (1.3) системы A_s с этими начальными и граничными условиями, мы получим время перехода τ_1 и координаты $y(\tau)$ и $z(\tau)$:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\ln x(0), \\ y(\tau_1) &= y(0)e^{-\alpha\tau_1}, \\ z(\tau_1) &= be^{-\nu\tau_1}. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Подставляя τ_1 в уравнения для y и z, получим явный вид отображения T_1 :

$$T_1 : \begin{array}{l} y(\tau_1) = y(0)e^{\alpha \ln x(0)} = y(0)x^{\alpha}(0), \\ z(\tau_1) = be^{\nu \ln x(0)} = bx^{\nu}(0). \end{array} \tag{1.50}$$

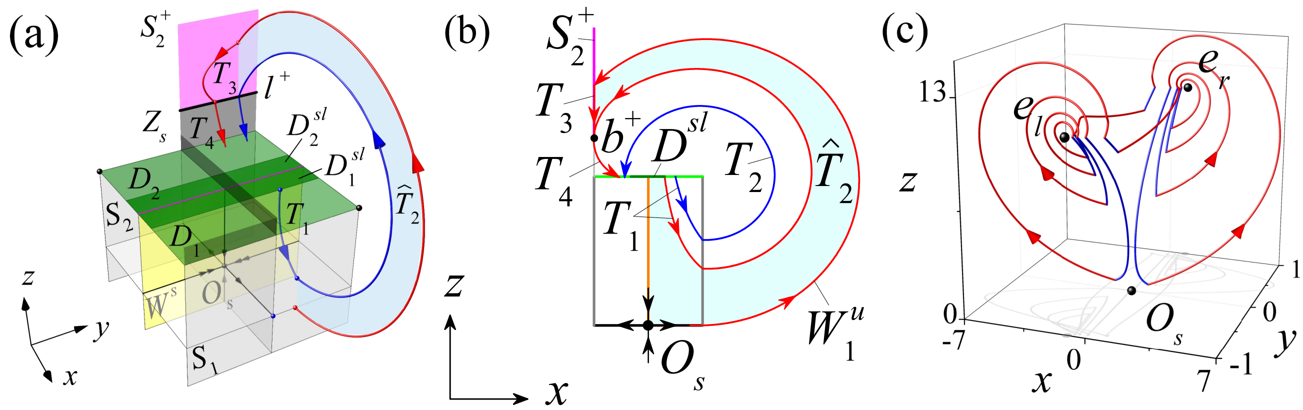

Рисунок 1.11 — Динамика при наличии устойчивых скользящих движений. (a) Траектории, выпущенные из прямоугольника D_1^{sl}, достигают устойчивой скользящей полуплоскости S_2^+ (розовая область), скользят вниз и покидают S_2^+ на l^+, возвращаясь на секущую D. Светло-голубая полоса, ограниченная синей и красной траекториями, обозначает возможный диапазон координат для таких траекторий со скользящими участками. (b) Проекция портрета (a) на плоскость $y = 0$. (c) Наличие устойчивых скользящих движений вызывает появление устойчивых многообходных предельных циклов, составленных из седловых (синие) и фокусных (красные) частей. Траектории на всех трёх графиках посчитаны численно при следующих значениях параметров: $\alpha = 2$, $\nu = 0.8$, $\lambda = 0.3684$, $\omega = 1$, $b = 11.35$ и $\delta = 0.588$.

Отображение $\hat{T}_2 : S_1 \to S_2^+$

Отображение $\hat{T}_2$ переводит точку $[1, y(\tau_1), z(\tau_1)]$ на устойчивую скользящую полуплоскость S_2^+ за время τ_2 по траекториям фокусной системы A_r. Время перехода может быть неявно посчитано по граничному условию $x(\tau_2) = -1$ на S_2^+, где x берётся из решений (1.4). Это граничное условие имеет вид

$$[b - z(\tau_1)]\, e^{-\lambda\tau_2} \sin(\omega\tau_2) + 2 = 0. \tag{1.51}$$

Однако мы не используем эту неявную форму для вычисления τ_2 так как далее мы сможем свести неявно определённое двумерное отображение Пуанкаре $\hat{F}_1$ к одномерного явному отображению для координаты x. Этого будет достаточно чтобы полностью охарактеризовать бифуркации и динамику системы (1.1).

Подставляя $[1, y(\tau_1), z(\tau_1)]$ и τ_2 в (1.4), получаем отображение $\hat{T}_2$:

$$\begin{aligned} x(\tau_2) &= -1, \\ y(\tau_2) &= 1 + [y(\tau_1) - 1]e^{-\delta\tau_2}, \\ z(\tau_2) &= b - [b - z(\tau_1)]e^{-\lambda\tau_2}\cos(\omega\tau_2), \end{aligned} \tag{1.52}$$

где $\tau_2 \in \left(\dfrac{\pi}{\omega}, \dfrac{3\pi}{2\omega}\right)$. Нижняя граница $\tau^* = \pi/\omega$ соответствует пересечению траекторией вертикальной плоскости $x = 1$ на пути к S_2^+ [см. синюю линию на Рис. 1.11(a) и 1.11(b)] и получена из условий $\sin\omega\tau^* = 0$, $x(\tau^*) = 1$ в уравнении для переменной x в (1.4). Верхняя граница $\tau^* = 3\pi/(2\omega)$ соотвествует пересечению секущей D нисходящим куском траектории и найдена из условий $\cos\omega\tau^* = 0$, $z(\tau^*) = b$ в уравнении для переменной z в (1.4). Поскольку траектория попадает на S_2^+ раньше, чем на D, то τ_2 лежит между этими двумя границами.

Отображение $T_3 : S_2^+ \to l^+$

Самый сложный шаг вывода полного отображения $\hat{F}_1$ - это построение T_3, которое описывает переводит точек по траекториями двумерной филипповской скользящей системы (1.12) на устойчивой скользящей поверхности S_2^+. Поскольку уравнение для z в системе (1.12) не связано с y и интегрируемо, решения $[y(t), z(t)]$ можно записать только в неявном виде. Выберем более эффективный подход построения отображения T_3, перейдя от системы (1.12) к уравнению для dy/dz . Это позволит показать, что направление y вдоль скользящей полуплоскости S_2^+ является сжимающим, и координата y убывает под действием T_3. В результате докажем, что скользящая динамика вдоль направления y всегда устойчива.

Напомним, что $\dot{z} < 0$ на S_2^+, а значит z всегда убывает вдоль S_2^+. Изоклина вертикальных наклонов $\dot{y} = 0$ скользящей системы (1.12) есть гипербола $y = \dfrac{a}{z - b - a}$, которая пересекает границу l^+ в точке $(z = b^+, y = 1)$. В результате векторное поле системы (1.12) на границах $y = 0$ и $y = 1$ скользящей поверхности S_2^+ ориентировано внутрь S_2^+, поскольку $\dot{y}|_{y=0} > 0$ и $\dot{y}|_{y=1} < 0$.

Следовательно, траектории системы (1.12) с начальными условиями на каждой линии уровня

$$l^{sl} = [z = z^*, y \in (0{,}1)] \tag{1.53}$$

достигают отрезок линии l^+, порождая отображение T_3.

Для количественной оценки этих свойств и определения отображения T_3 введём линейное неоднородное уравнение для dy/dz, полученное делением первого уравнения в (1.12) на второе:

$$\frac{dy}{dz} = P(z)y + Q(z), \tag{1.54}$$

$$\text{где} \quad P(z) = \frac{\delta}{\omega\left(1 + a(z-b) + \dfrac{a}{z-b-a}\right)} > 0,$$

$$Q(z) = \frac{\delta a}{(z-b-a)\left(1 + a(z-b) + \dfrac{a}{z-b-a}\right)} > 0.$$

Общее решение линейного уравнения (1.54) имеет вид

$$y(z) = c_0 \exp \int\limits_{b^+}^{z} P(\zeta)d\zeta + y_p(z), \tag{1.55}$$

где c_0 - константа и $y_p(z)$ - частное решение.

Используя начальное условие $y = y(b^+)$, получим константу $c_0 = y(b^+) - y_p(b^+)$. Применяя граничное условие $y = y(z^*)$ при $z^* > b^+$, где b^* - есть константа, задающая линию l^{sl}, получим уравнение

$$y(b^+) = y_p(b^+) + h\left[y(z^*) - y_p(z^*)\right], \tag{1.56}$$

где $h = \exp\left(-\int\limits_{b^+}^{z^*} P(z)dz\right) < 1$, поскольку $P(z) > 0$ при $z > b^+$ и $z^* > b^+$. Уравнение (1.56) определяет отображение точки с любой линии уровня l^{sl} с координатами $[x = -1, y(z^*), z^*]$ в точку с координатами $[x = -1, y(b^+), b^+]$ на нижней границе S_2^+, линии l^+. Следовательно, вводя обозначения $y = y(z^*)$ для координат начальной точки, $\bar{y} = y(b^+)$ – для её образа на l^+, и $c = y_p(b^+) - hy_p(z^*)$ – для константы, мы можем представить уравнение (1.56) в виде сжимающего линейного отображения $T_3 : S_2^+ \to l^+$

$$\bar{y} = hy + c. \tag{1.57}$$

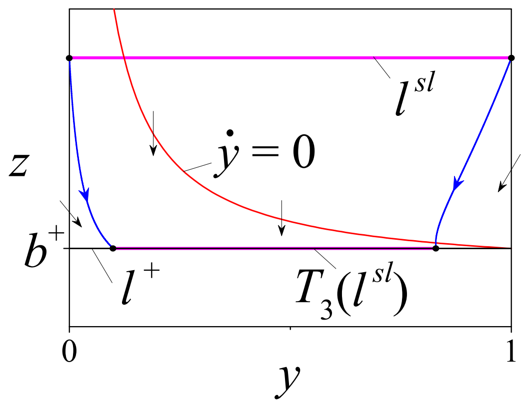

Рисунок 1.12 — Векторное поле скользящей системы (1.12) на полуплоскости S_2. По направлению y ниже (выше) красной изоклины вертикальных наклонов $\dot{y} = 0$ поле ориентировано вправо (влево), сжимая сиреневый образ $T_3(l^{sl})$ розовой скользящей линии уровня l^{sl}.

Заметим, что в предельном случае, когда $z^* \to b^+$, и размер соответствующей скользящей области сжимается до нуля, константы $c \to 0$ и $h \to 1$, что делает отображение T_3 тождественным.

Достигнув линии l^+, траектории системы (1.1) покидают устойчивую скользящую полуплоскость S_2^+ и в итоге возвращаются на секущую D. Следовательно, чтобы завершить композицию $\hat{F}$ остаётся вывести отображение $T_4 : l^+ \to D$.

Отображение $T_4 : l^+ \to D$

Отображение T_4 переводит точку $[x = -1, y = y(\tau_3), z = b^+]$ на l^+ вдоль траектории фокусной системы A_r в точку на секущей D с координатой $z = b$ за время τ_4. Следовательно, аналогично построению отображения $\hat{T}_2$ мы решаем краевую задачу для системы A_r, вычисляя время перехода τ_4 и явные решения для $x(\tau_4)$ и $y(\tau_4)$. Общее решение однородной линейной системы A_r (1.1) при некоторых начальных условиях x_0, y_0 и z_0 может быть записано в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= 1 + \sqrt{(x_0-1)^2 + (z_0-b)^2} e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi_0), \\ y(t) &= 1 + (y_0 - 1)e^{-\delta t}, \\ z(t) &= b + \sqrt{(x_0-1)^2 + (z_0-b)^2} e^{-\lambda t}\sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned} \tag{1.58}$$

где фазовый сдвиг $\varphi_0 = \arctan\frac{z_0-b}{x_0-1} + n\pi$, $n = 0, 1, \ldots$. Подставляя начальные условия $x_0 = -1$, $y_0 = y(\tau_3)$, $z_0 = b^+ \equiv b + 2\lambda/\omega$ на линии l^+ и граничное условие $z(\tau_4) = b$ на D в (1.58), а также задав $t = \tau_4$, мы получим

$$\begin{aligned} &x(\tau_4) = 1 + 2\sqrt{1+\lambda^2/\omega^2}e^{-\lambda\tau_4}\cos(\omega\tau_4 - \arctan\tfrac{\lambda}{\omega} + \pi), \\ &y(\tau_4) = 1 + (y(\tau_3) - 1)e^{-\delta t}, \\ &b = b + 2\sqrt{1+\lambda^2/\omega^2}e^{-\lambda\tau_4}\sin(\omega\tau_4 - \arctan\tfrac{\lambda}{\omega} + \pi). \end{aligned} \tag{1.59}$$

Из последнего уравнения в (1.59) получим условие $\sin(\omega\tau_4 - \arctan\frac{\lambda}{\omega}) = 0$, которое даёт время перехода $\tau_4 = \frac{1}{\omega}\arctan\frac{\lambda}{\omega}$. Следовательно, система (1.59) даёт явное отображение T_4 :

$$T_4: \begin{aligned} &x(\tau_4) = 1 - \gamma_{cr}, \\ &y(\tau_4) = 1 + (y(\tau_3) - 1)e^{-\frac{\delta}{\omega}\arctan\frac{\lambda}{\omega}}, \\ &z(\tau_4) = b, \end{aligned} \tag{1.60}$$

где

$$\gamma_{cr} = 2\sqrt{1+\lambda^2/\omega^2}e^{-\frac{\delta}{\omega}\arctan\frac{\lambda}{\omega}} = b_{cr}e^{-\frac{3\pi\lambda}{2\omega}} \tag{1.61}$$

с таким же параметром b_{cr}, как и в условии отсутствия скользящих движений (1.13).

Перед сборкой итогового отображения $\hat{F}_1 = T_4 T_3 \hat{T}_2 T_1 : D_1^{sl} \to D$ необходимо явно определить размер секущей D_1^{sl}, соответствующей начальным условиям для траекторий, которые достигают устойчивую скользящую полуплоскость S_2^+.

Область D_1^{sl} начальных условий для скользящих траекторий

Чтобы найти границу области D_1^{sl}, нужно найти прообраз линии l^+ для композиции $\hat{T}_2 T_1$. Действительно, любая траектория, начинающаяся с этой границы на секущей D, в конечном итоге попадает на линию l^+ [синяя траектория на Рис. 1.11(a)]. Следовательно, можно уточнить уравнения в отображении $\hat{T}_2$ (1.52) для траектории с $z(\tau_2') = b^+$, где τ_2' – это конкретное значение времени τ_2 для этой траектории. Таким образом, из (1.5)-(1.52), получим

$$\begin{aligned} &x(\tau_2') = -1 = 1 + [b - z(\tau_1)]e^{-\lambda\tau_2'}\sin(\omega\tau_2'), \\ &y(\tau_2') = 1 + [y(\tau_1) - 1]e^{-\delta\tau_2'}, \\ &z(\tau_2') = b - [b - z(\tau_1)]e^{-\lambda\tau_2'}\cos(\omega\tau_2'). \end{aligned} \tag{1.62}$$

Подставляя начальное условие $z(\tau_1)$ (1.50) в (1.62) и заменяя $b^+ = b + 2\lambda/\omega$, приведём уравнения для x и z к виду

$$\begin{aligned} -2 &= [b - bx^\nu(0)]e^{-\lambda\tau_2'}\sin(\omega\tau_2'),\\ -2\lambda/\omega &= [b - bx^\nu(0)]e^{-\lambda\tau_2'}\cos(\omega\tau_2'). \end{aligned} \tag{1.63}$$

Разделив первое уравнение на второе и решив получившееся уравнение относительно τ_2', получим время перехода

$$\tau_2' = \frac{1}{\omega}(\arctan\frac{\omega}{\lambda} + \pi). \tag{1.64}$$

Подставив τ_2' обратно в первое уравнение и решив его относительно $x(0)$, используя тригонометрическое тождество, мы в итоге получим уравнение для прообраза линии l^+ на секущей D, т.е. границу области D_1^{sl}

$$x_s = \left(1 - \frac{2\sqrt{1+\lambda^2/\omega^2}}{b}e^{\frac{1}{\omega}(\arctan\frac{\omega}{\lambda}+\pi)}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \left(1 - \frac{\gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}. \tag{1.65}$$

Следовательно, $D_1^{sl} = (x \leqslant x_s, y \leqslant 1, z = b)$. В силу нечётной симметрии исходной системы $(x,y,z) \to (-x,-y,z)$, вся область $D^{sl} = D_1^{sl} \bigcup D_2^{sl}$ определена следующим образом

$$D_{sl} = (|x| \leqslant x_s, |y| \leqslant 1, z = b). \tag{1.66}$$

Композиция отображений $\hat{F}$

Для получения итоговой формы отображения $\hat{F}_1 = T_4T_3\hat{T}_2T_1$ объединим уравнения для отображений T_1 (1.50), $\hat{T}_2$ (1.52), T_3 (1.57), T_4 (1.60), и получим

$$\hat{F}_1 : \begin{aligned} \bar{x} &= 1 - \gamma_{cr},\\ \bar{y} &= r_1(x) + R_1(x)y, \end{aligned} \qquad \text{при } (x,y) \in D_1^{sl}, \tag{1.67}$$

где

$$\begin{aligned} r_1(x) &= 1 + \left[c + 1 + h(1 - e^{-\delta\tau_2})\right] e^{-\frac{\delta}{\omega}\arctan\frac{\lambda}{\omega}},\\ R_1(x) &= hx^\alpha e^{-\delta-\frac{\delta}{\omega}\arctan\frac{\lambda}{\omega}}. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Здесь постоянные c и h - неявные функции от x, полученные от зависимости $z^+ = z(\tau_2)$ в отображении $\hat{T}_2$. Постоянная τ_2 может быть посчитана по формуле (1.51) при $z(\tau_1)$ из отображения (1.50). Как и в отображении (1.22), $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются образами x и y соответственно.

В силу нечётной симметрии по x и y, элементарно получить вторую часть отображения $\hat{F}_2 : D_2^{sl} \to D$ из (1.67), заменив $(\bar{x},\bar{y})$ и (x,y) на $(-\bar{x}, -\bar{y})$ и $(-x, -y)$ соответственно. Эта замена не повлияет явно на функцию $r_1(x)$, так как это неявная функция от x.

Таким образом, объединяя $\hat{F}_1$ и $\hat{F}_2$, мы наконец получили отображение Пуанкаре $\hat{F} : D^{sl} \to D$ в следующем виде:

$$\hat{F}: \begin{array}{l} \bar{x} = (1-\gamma_{cr})\operatorname{sign} x, \\ \bar{y} = r_1(x) + R(x)y, \end{array} \quad \text{при } (x,y) \in D_{sl}, \tag{1.69}$$

где $R(x) = h|x|^{\alpha} e^{-\delta - \frac{\delta}{\omega}\arctan\frac{\lambda}{\omega}} < 1$.

1.6.2 Полное двумерное отображение

Получив отображение $\hat{F}$ (1.69), которое описывает динамику траекторий аттрактора, содержащего участки скользящих движений, мы можем обобщить отображение $F : D \to D$ (1.22) на случай скользящих движений. Для этого объединим отображение $\hat{F}$, заданное на D_{sl}, с отображением F (1.22), заданным на $D \setminus D_{sl}$. Новое полное двумерное отображение Пуанкаре F имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \begin{cases} (1-\gamma_{cr})\operatorname{sign} x & \text{при } |x| \leqslant \left(\frac{\gamma-\gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \\ (1-\gamma+\gamma|x|^{\nu})\operatorname{sign} x & \text{при } |x| > \left(\frac{\gamma-\gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \end{cases} \\ \bar{y} &= \begin{cases} r_1(x) + R(x)y & \text{при } |x| \leqslant \left(\frac{\gamma-\gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \\ (1-r)\operatorname{sign} x - r|x|^{\alpha}y & \text{при } |x| > \left(\frac{\gamma-\gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.70}$$

где $|x| = x_s = \left(\frac{\gamma-\gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ определяет границу области D_{sl} в зависимости от параметра γ_{cr} (1.61).

Подобно своему исходному отображению (1.22), новое отображение имеет треугольную форму такую, что уравнение для x не зависит от переменной y и управляет уравнением для y. Эта треугольная форма определена исходным выбором линейных систем, составляющих кусочно-линейную систему (1.1), где переменные x и z отделены от y в фокусных системах A_l и A_r. Следовательно, движения в направлениях x и z независимы от движений вдоль оси y. Как и в разделе 1.2, будем называть одномерное отображение для x *ведущим* отображением и используем его свойства для описания динамики и бифуркаций в кусочно-линейной системе (1.1).

Замечательное свойство ведомого уравнения для y отображения (1.70) состоит в его простой сжимающей динамике, что означает устойчивость кусочно-линейной системы (1.1) вдоль направления y. Это свойство для скользящих участков отображения определено сжимающим коэффициентом $R(x) < 1$, а для нескользящих участков определено коэффициентом $r|x|^{\alpha} < 1$ отображения для системы без скольжений (подробности см. в разделе 1.4). Таким образом, мы можем распространить утверждение Леммы 1.4.1 из раздела 1.4 на отображение (1.70) и установить, что любая устойчивая (неустойчивая) p-периодическая орбита одномерного ведущего отображения для x порождает устойчивую (седловую) p-периодическую орбиту в полной двумерной системе (1.70). Следовательно, аттракторы кусочно-линейной системы (1.1) и их бифуркации могут быть полностью описаны с помощью одномерного ведущего отображения.

1.6.3 Одномерное ведущее отображение: стандартная форма

Полученное из двумерного отображения (1.70) отбрасыванием ведомого отображения для y, одномерное отображение $\bar{x} = f(x)$ записывается явно в параметрах системы (1.1)

$$\bar{x} = \begin{cases} (1-\gamma_{cr})\operatorname{sign} x & \text{при } |x| \leqslant \left(\frac{\gamma-\gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \\ (1-\gamma+\gamma|x|^{\nu})\operatorname{sign} x & \text{при } |x| > \left(\frac{\gamma-\gamma_{cr}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\nu}}. \end{cases} \tag{1.71}$$

Взятое из (1.70), ведущее отображение так же является разрывным в точке $x = 0$, соответствующей двум симметричным гомоклиническим орбитам седла O_s в кусочно-линейной системе (1.1) с параметрами, удовлетворяющими условию $\gamma = \gamma_{cr} = 1$. Аналогично ведущее отображение (1.71) имеет две неподвижные точки $e_l = x_1^* = -1$ и $e_r = x_2^* = 1$ на концах интервала $X \in [-1, 1]$, которые соответствуют состояниям равновесия e_l и e_r кусочно-линейной системы (1.1).

Для удобства, одномерное отображение (1.71) может быть приведено к стандартному одномерному отображению Лоренца [7; 9; 10; 13; 131]

$$\bar{\xi} = g(\xi) \equiv \begin{cases} (-\mu + \varepsilon)\operatorname{sign}\xi & \text{при } |\xi| \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{\nu}}, \\ (-\mu + |\xi|^{\nu})\operatorname{sign}\xi & \text{при } |\xi| > \varepsilon^{\frac{1}{\nu}}, \end{cases} \tag{1.72}$$

масштабированием переменных $\xi = kx$ с $k = \gamma^{\frac{1}{\nu-1}}$ и введением новых параметров

$$\begin{aligned} \mu &= (\gamma - 1)\gamma^{\frac{1}{\nu-1}}, \\ \varepsilon &= (\gamma - \gamma_{cr})\gamma^{\frac{1}{\nu-1}}. \end{aligned} \tag{1.73}$$

Использование этой стандартной формы одномерного ведущего отображения упрощает анализ и помогает понять роль скользящих движений в бифуркациях отображения (1.72) и, следовательно, кусочно-линейной системы (1.1). Заметим, что первое уравнение в (1.72) соответствует скользящим участкам в траекториях системы (1.1), и параметр ε определяет размер соответствующего плоского участка на графике функции $g(\xi)$ как $|\xi| \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{\nu}}$. В то же время условие $\varepsilon - \mu = 0$ соответствует гомоклинической бифуркации седла O_s в (1.1). Соответствующие гомоклинические орбиты содержат долю скользящих движений при $\varepsilon > 0$ и образуют классическую гомоклиническую бабочку в отсутствие скользящих движений при $\varepsilon = 0$. Значение параметра μ для траекторий без скользящих движений аналогично таковому в стандартном отображении Лоренца [13] с важным свойством, что этот параметр является функцией параметров γ, ν и имеет максимальное значение при $\gamma = 1/\nu$. Следовательно, в отличие от параметра стандартного отображения, параметр μ не может принимать бóльшие значения для того, чтобы неподвижные точки e_r и e_l исчезли через седло-узловую бифуркацию (см. Замечание 1.3.1 в разделе 1.3).

1.7 Гомоклинические бифуркации

С помощью отображения (1.72) дадим строгое описание гомоклинических бифуркаций в кусочно-линейной системе (1.1). Здесь мы приведём негладкий аналог классической бифуркации гомоклинической бабочки при отстутствии скользящих движений. Далее мы докажем, что появление любого малого участка скользящих движений в неустойчивой гомоклинической бабочке может порождать устойчивую периодическую орбиту несмотря на положительное значение седловой величины седла O_s.

1.7.1 Классическая бифуркация гомоклинической бабочки: рождение седловых циклов

Гомоклиническая бифуркация в кусочно-линейной системе (1.1) была описана в разделе 1.5, где было показано, что гомоклиническая бабочка в отсутствие скользящих движений [т.е. в области параметров (1.13)] неустойчива, как и в оригинальной гладкой модели Лоренца. В обозначениях ведущего отображения (1.72) это сводится к условию $\varepsilon < 0$. Следовательно, неравенство в первом уравнении (1.72) не может быть выполенно, и (1.72) становится стандартным лоренцевским отображением с упомянутой выше особенностью параметра μ. Таким образом, Теоремы 1.3.1 и 1.5.1 из раздела 1.5 гарантируют следующее.

1. При $\mu < \varepsilon \leqslant 0$ ведущее отображение (1.72) имеет две устойчивых неподвижных точки $e_r(\xi = k)$ и $e_l(\xi = -k)$, бассейнами притяжения которых является целый интервал $(-k, k)\backslash(\xi = 0)$. В обозначениях кусочно-линейной системы (1.1) это означает, что два устойчивых фокуса e_l и e_r притягивают все траектории системы за исключением седла O_s и его двумерного устойчивого многообразия [Рис. 1.13(a)].

2. При $\mu = 0$, $\varepsilon < 0$ особая точка $\xi = 0$ отображается в себя, что соответствует гомоклинической бабочке седла O_s [Рис. 1.13(b)].

3. При $\varepsilon < 0$ увеличение μ от $\mu = 0$ порождает (а) две неустойчивые точки $p_r^u(\xi = \xi_r)$ и $p_l^u(\xi = \xi_l = -\xi_r)$, соответствующие двум седловым предельным циклам [штриховые орбиты на Рис. 1.13(c)], и (б) нетривиальное гиперболическое канторово множество неустойчивых траекторий.

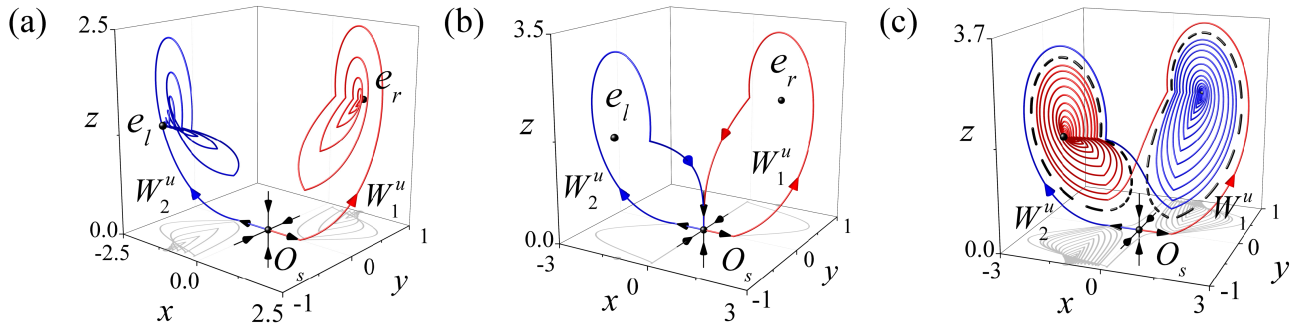

Рисунок 1.13 — Классическая бифуркация гомоклинической бабочки в кусочно-линейной системе (1.1) без скользящих движений. (a) Фазовый потрет до бифуркации при $b = 1.5 < b_h = \exp\{3\pi\lambda/(2\omega)\}$ [$\mu = -0.569$, $\varepsilon = -1.359$ в (1.72)]. (b) Гомоклиническая бифуркация при $b = b_h = 2$ ($\mu = 0$, $\varepsilon = -0.977$). (c) Фазовый портрет после бифуркации при $b = 2.02 > b_h$ ($\mu = 0.01$, $\varepsilon = -0.965$). Родившиеся при этом два седловых цикла изображены штриховыми линиями. Остальные параметры имеют значения $\lambda = 0.1471$, $\omega = 1$, $\lambda = a$, $\nu = 0.65$, $\alpha = 2$ и $\delta = 0.588$.

1.7.2 Неклассические скользящие гомоклинические бифуркации: устойчивая динамика при положительной седловой величине

Перейдём к одному из главных результатов главы, который демонстрирует, что гомоклинические бифуркации при наличии скользящих движений могут приводить к динамике, значительно отличающейся от их гладких аналогов.

Начнём с той же ситуации, что в предыдущем подразделе, когда кусочно-линейная система (1.1) имеет седло O_s и два устойчивых фокуса при отсутствии скользящих движений. Следующая теорема описывает, что происходит с динамикой системы, когда гомоклиническая бабочка касается устойчивой скользящей плоскости, и, следовательно, содержит сколь угодно малый участок скользящих движений. Для ясности сначала сформулируем утверждения в параметрах ведущего отображения (1.72) и свяжем их с потоком кусочно-линейной системы (1.1).

Теорема 1.7.1 (неустойчивая гомоклиническая орбита порождает устойчивый предельный цикл)**.**

1. Перед бифуркацией. При $\mu < \varepsilon \leqslant 0$ две устойчивые неподвижные точки $e_r(\xi = k)$ и $e_l(\xi = -k)$ являются единственными аттракторами ведущего *отображения* (1.72). *Кусочно-линейная система* (1.1) *имеет два устойчивых фокуса* e_l, e_r *и седло* O_s *[Рис. 1.14(a,d,g)].*

2. Гомоклиническая бифуркация со скользящим касанием. При $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ *особая точка* $\xi = 0$ *отображается в себя, что соответствует двум неустойчивым гомоклиническим орбитам седла* O_s *в кусочно-линейной системе* (1.1) *[Рис. 1.14(b,e,h)]. Каждая из этих орбит касается своей скользящей полуплоскости* S_1^+ *или* S_2^+.

3. После бифуркации. При $\varepsilon > 0$ *увеличение* $\mu \in (\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon^{1/\nu})$ *приводит к рождению устойчивой точки* $p_{l,r}^s$ *периода 2 и двух неустойчивых неподвижных точек* $p_r^u(\xi = \xi_r)$ *и* $p_l^u(\xi = \xi_l = -\xi_r)$ *в ведущем отображении* (1.72). *Следовательно, кусочно-линейная система* (1.1) *имеет устойчивый предельный цикл периода 2 и два седловых предельных цикла, которые одновременно родились от гомоклинической орбиты [Рис. 1.14(c,f,i)]. В отличие от классической бифуркации гомоклинической бабочки, ведущее отображение* (1.72) *не содержит гиперболического канторова множества неустойчивых траекторий из-за наличия скользящих движений.*

Доказательство. Утверждение 1 идентично утверждению 1 Теоремы 1.3.1 из раздела 1.3 для классической гомоклинической бифуркации в кусочно-линейной системе (1.1) в отсутствие скольжений.

Формирование гомоклинической орбиты при значениях параметров $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ из утверждения 2 гарантировано структурными свойствами кусочно-линейной системы (1.1). Особая неподвижная точка $\xi = 0$ в ведущем отображении (1.72) отображает линию $l = W^s \cap D : x = 0$ на секущей D в кусочно-линейной системе (1.1) в седло O_s. По продолжению седло отображается обратно в линию $l : x = 0$, образуя гомоклиническую орбиту. Появление особой неподвижной точки $\xi = 0$ при $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$ следует из правых частей ведущего отображения (1.72), которые становятся равными нулю при $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$.

Появление устойчивой неподвижной точки $p_{l,r}^s$ периода 2 при значениях параметров $0 < \varepsilon < \mu \leqslant \varepsilon + \varepsilon^{1/\nu}$ из утверждения 3 гарантировано появлением двух симметричных горизонтальных участков длинной $\xi = \varepsilon^{1/\nu}$ на графике функции $g(x)$, что приводит к пересечениям с линией $\bar{\xi} = -\xi$ [Рис. 1.14(c)]. Эти пересечения соответствуют симметричным точкам $p_r^s(\xi = \mu - \varepsilon, \bar{\xi} = \varepsilon - \mu)$ и $p_l^s(\xi = \varepsilon - \mu, \bar{\xi} = \mu - \varepsilon)$, которые образуют устойчивую периодическую орбиту $p_{l,r}^s$ периода 2. Её устойчивость гарантирована нулевой производной $g'(\xi)$ в $p_{l,r}^s$

в области параметров $0 < \varepsilon < \mu \leqslant \varepsilon + \varepsilon^{1/\nu}$. Эта точка периода 2 теряет свою устойчивость при $\mu > \varepsilon + \varepsilon^{1/\nu}$, поскольку горизонтальные участки графика отображения больше не пересекают линию $\bar{\xi} = -\xi$. В то же время неплоские части графика функции $g(\xi) = (-\mu + |\xi|^{\nu})\text{sign}\,\xi$ в (1.72) сохраняют точку $p^s_{l,r}$ периода 2, но делают её неустойчивой.

Появление двух неустойчивых неподвижных точек $p^u_r(\xi = \xi_r)$ и $p^u_l(\xi = \xi_l = -\xi_r)$ после гомоклинической бифуркации гарантировано тем, что уравнение $\mu = \xi^{\nu} - \xi$ для неподвижных точек при $\xi > 0$ имеет два решения в рассматриваемой области μ. Большее решение даёт координату устойчивого состояния равновесия e_r, которое сохраняется при гомоклинической бифуркации, а меньшее решение соотвествует ξ_r. Неустойчивость $p^u_r(\xi = \xi_r)$ и $p^u_l(\xi = \xi_l = -\xi_r)$ гарантирована значением $|g'(\xi)| > 1$ в $\xi = -\xi_r, \xi_r$. □

Замечание 1.7.1. Отметим, что седловая величина $\eta = 1 - \nu$ седла O_s является положительной и гомоклиническая орбита, образованная при $\mu = 0$ и $\varepsilon = 0$, является "неустойчивой", т.к. отталкивает траектории [см. типичную траекторию (синюю спираль) на Рис. 1.14(d), которая отходит от гомоклинической орбиты и стремится к устойчивому фокусу e_r].

Замечание 1.7.2. Утверждение 3 Теоремы 1.7.1 справедливо для любого сколь угодно малого значения $\varepsilon > 0$. Следовательно, появление произвольно малого участка скользящих движений в "неустойчивой" гомоклинической орбите порождает устойчивую динамику, определённую устойчивым предельным циклом периода 2.

Замечание 1.7.3. Дальнейшее увеличение μ за пределы интервала $\mu \in (\varepsilon, \varepsilon + \varepsilon^{1/\nu})$ такое, что $\mu - \varepsilon > \xi_r$, приводит к возникновению гиперболического канторового множества неустойчивых траекторий. Это канторово множество существует до тех пор, пока существует неустойчивая неподвижная точка $p^u_r(\xi = \xi_r)$. В терминах Рис. 1.14(c) это условие означает, что горизонтальный участок с координатой $\xi = \mu - \varepsilon$ лежит выше неустойчивой точки p^u_r. Появление и исчезновение таких множеств Кантора в отображениях порядка k, $g^k(\xi)$ может служить причиной возникновения хаотических окон (см. Рис. 1.17).

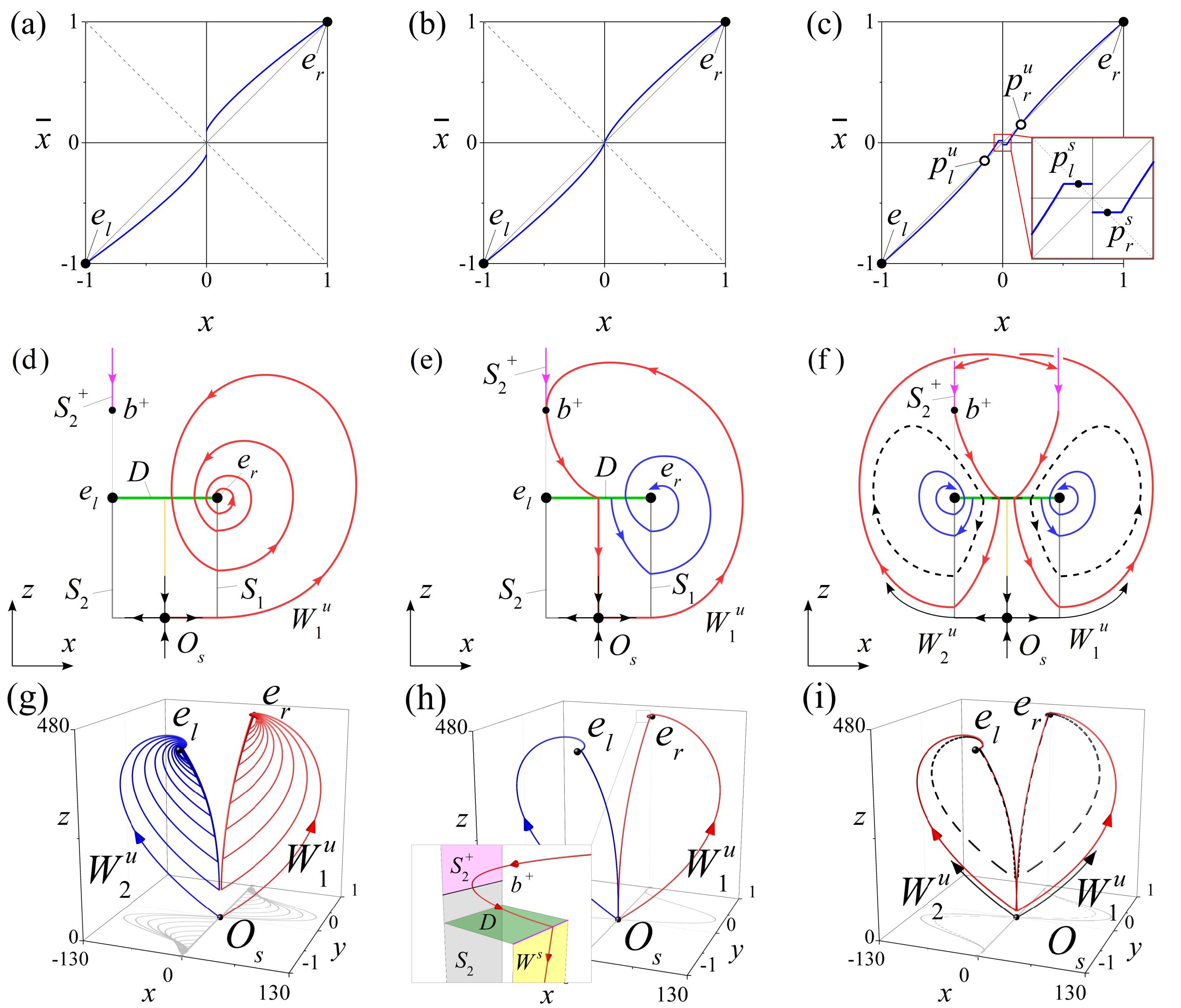

Рисунок 1.14 — Скользящая гомоклиническая бифуркация (иллюстрация к Теореме 1.7.1). Верхний ряд: бифуркационный переход в ведущем отображении (1.72). (a) Перед бифуркацией: $\mu = -0.164$, $\varepsilon = -0.08$. (b) Бифуркация: $\mu = 0$, $\varepsilon = 0$. (c) После бифуркации: $\mu = 0.0582$, $\varepsilon = 0.0713$. Появление устойчивой неподвижной точки $p^s_{l,r}$ периода 2 (увеличение на вставке) и двух неустойчивых точек p^u_l и p^u_r (выколотые круги). Средний и нижний ряды: соответствующая динамика потока (1.1) как функция параметра λ, который одновременно меняет μ и ε в верхнем ряду. (d) и (g) Перед бифуркацией: $\lambda = 1.32$. (e) и (h) Гомоклиника со скользящим касанием: $\lambda = 1.298127$. Вставка на (h) иллюстрирует касание W^u_1 и скользящей (розовой) полуплоскости S^+_2 с возвратом W^u_1 на (зелёную) секущую D. (f) и (i) После бифуркации: $\lambda = 1.28$. Появление устойчивой орбиты периода 2 (красная) со скользящими движениями [розовые на (f)] и двух седловых предельных циклов (чёрные штриховые линии). Остальные параметры имеют значения $b = 453.629$, $\nu = 0.8$ и $\omega = 1$.

1.8 Путь к хаосу через бесконечную последовательность гомоклинических бифуркаций

Рассмотрим бифуркационный маршрут, включающий образование устойчивых гомоклинических орбит и показывающий, как бесконечная последовательность таких скользящих гомоклинических бифуркаций приводит к рождению странного аттрактора лоренцевского типа.

Введём ренормирующий коэффициент (scaling factor) для последовательности многообходных гомоклинических орбит, который аналогичен постоянной Фейгенбаума [134] для каскада бифуркаций удвоения периода. Положим $\gamma = 2$ в (1.71) и введём бифуркационный параметр $d = \gamma_{cr} - 1 \in (-1{,}1]$. Этот конкретный выбор параметра γ позволяет вывести рекуррентную формулу для бифуркационных значений параметра каждой многообходной гомоклинический орбиты. При этом ведущее отображение (1.71) принимает вид

$$\bar{x} = f(x) \equiv \begin{cases} -d\,\mathrm{sign}\, x & \text{при } |x| \leqslant \left(\frac{1-d}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \\ (-1 + 2|x|^{\nu})\,\mathrm{sign}\, x & \text{при } |x| > \left(\frac{1-d}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}. \end{cases} \tag{1.74}$$

Заметим, что две неподвижные точки $e_l(x = -1)$ и $e_r(x = 1)$ при условии (1.8) являются неустойчивыми, поскольку $f'(x)\big|_{x=\pm 1} = 2\nu > 1$.

Теорема 1.8.1 (скользящие многообходные гомоклинические орбиты и маршрут к хаосу)**.**

1. При $-1 < d < 0$ $(0 < \gamma_{cr} < 1)$ две суперустойчивые неподвижные точки $p_l^s(x = d)$ и $p_r^s(x = -d)$ притягивают все точки из интервала $(-1, 1)$ за исключением особой точки $x = 0$ [Рис. 1.15(a)]. Точки $p_l^s(x = d)$ и $p_r^s(x = -d)$ соответствуют двум устойчивым предельным циклам в кусочно-линейной системе (1.1) [Рис. 1.16(a)].

2. При $d = d_{h1} = 0$ $(0 < \gamma_{cr} = 1)$ точки p_l^s и p_r^s влипают в состояние равновесия, образуя устойчивую гомоклиническую бабочку в кусочно-линейной системе (1.1) [Рис. 1.15(b) и Рис. 1.16(b)].

3. При $0 < d < d_{p1}$, где d_{p1} есть корень уравнения $2d^{\nu} + d = 1$, отображение (1.74) имеет суперустойчивую неподвижную точку $p_{1,2}^s$ периода 2 [Рис. 1.15(c)], появившуюся из особой точки $x = 0$ при $d = d_{h1} = 0$. Эта точка соответствует устойчивому предельному циклу периода 2 в кусочно-линейной системе (1.1), родившемуся из гомоклинической бабочки [Рис. 1.16(b)].

4. При $d = d_{p1}$ орбита $p^s_{1,2}$ претерпевает суперкритическую бифуркацию вилка [Рис. 1.15(d)]. Увеличение $d > d_1$ делает $p^s_{1,2}$ неустойчивой и приводит к рождению двух симметричных суперустойчивых орбит периода 2 [голубой и фиолетовый квадраты на Рис. 1.15(e)].

5. При $d = d_{h2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ эти суперустойчивые орбиты периода 2 сливаются друг с другом в особой точке $x = 0$ и образуют две симметричные двухобходные гомоклинические орбиты [Рис. 1.15(f)].

6. При $d_{h2} < d < d_{p2}$, где d_{p2} - корень уравнения $2d^{\nu} - \left(\frac{1-d}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}} = 1$, отображение (1.74) имеет суперустойчивую орбиту $p^s_{1,2}$ периода 4 [Рис. 1.15(c)], родившуюся в результате гомоклинической бифуркации $d = d_{h2}$.

7. Значения параметров для всех последующих многообходных гомоклинических бифуркаций определены рекуррентным соотношением

$$d_{h(n+1)} = \chi(d_{hn}) = \left(\frac{d_{hn}+1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}, \tag{1.75}$$

где $d_{h(n+1)}$ и d_{hn} - значения параметра d, при которых образуются $(n+1)$-обходные и n-обходные гомоклинические орбиты соответственно.

8. Отображение (1.75) имеет устойчивую неподвижную точку $d_{hn} = 1$, соответствующую странному аттрактору лоренцевского типа в ведущем отображении (1.74) и кусочно-линейной системе (1.1). Бесконечная последовательность многообходных гомоклинических бифуркаций, накапливающихся к предельному значению $d = 1$, которая приводит к появлению аттрактора лоренцевского типа, имеет ренормирующий коэффициент (scaling factor)

$$\Delta = \lim_{d\to 1} \frac{d_{hn} - d_{h(n-1)}}{d_{h(n-1)} - d_{h(n-2)}} = \frac{1}{2\nu}. \tag{1.76}$$

Доказательство. Доказательство утверждений 1–3 аналогично доказательству положений Теоремы 1.7.1 и следует из простого анализа неподвижных точек ведущего отображения (1.74).

Уравнение $2d^{\nu} + d = 1$ для определения $d = d_{p1}$ в утверждении 4 появлется из требования для бифуркации вилка поместить образ точки $x = \left(\frac{1-d}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, где соединяются скользящий (горизонтальный фрагмент) и нескользящий участки графика функции $f(x)$, на линию $\bar{x} = -x$ [Рис. 1.15(d)]. Суперустойчивость двух симметричных периодических орбит, появившихся при $d > d_1$ [Рис. 1.15(e)], гарантируется горизонтальным наклоном скользящего участка на графике функции $f(x)$.

Значение $d = d_{h2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ в утверждении 5 берётся из требования к образу особой точки $x = 0$, $\bar{x} = d_{h2}$, быть отображённому в нуль функции $f(x)$, что сформирует гомоклиническую орбиту периода 2. Отсюда следует равенство $0 = -1 + 2d_{h2}^{\nu}$ и, следовательно, $d_{h2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}$.

Доказательство утверждения 6 проводится по аналогии с доказательством утверждения 3.

Уравнение для нахождения d_{p2} - это частный случай рекуррентного соотношения (1.75) из утверждения 7, которое в свою очередь получается из обратного отображения $x = f^{-1}(\bar{x})$. Это обратное отображение используется для поиска прообразов особой точки $x = 0$, соответствующей гомоклинической орбите. Если для заданного значения d прообраз точки $x = 0$ попадает на горизонтальный участок $\bar{x} = f(x) = d$, то формируется устойчивая гомоклиническая орбита. Число последующих прообразов, необходимых точке $x = 0$ для отображения в себя, соответствует числу обходов (петель) гомоклинической орбиты. Каждая $(n + 1)$-обходная гомоклиническая орбита образована добавлением дополнительной итерации (дополнительного прообраза) к n-обходной гомоклинической орбите [см. образование двух-, трёх- и чытерёхобходных гомоклинических орбит на Рис. 1.15(f)]. Следовательно, достаточно подставить прообраз $\bar{x} = d_{hn}$ в обратное ведущее отображение $x = f^{-1}(\bar{x}) = \left(\frac{\bar{x}+1}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}}$, приравненное к $x = d_{h(n+1)}$, чтобы получить последующую $(n+1)$-обходную гомоклиническую бабочку. Отсюда получается рекуррентное соотношение (1.75).

Выведем ренормирующий коэффициент Δ из утверждения 8. Рекуррентное выражение (1.75) является отображением с неподвижной точкой $d_{hn} = 1$. При $d = d_{hn} = 1$ ведущее отображение (1.74) превращается в отображение

$$\bar{x} = (-1 + 2|x|^{\nu})\operatorname{sign} x, \tag{1.77}$$

являющееся стандартным отображением Лоренца со странным аттрактором без скользящих движений. Неподвижная точка $d_{hn} = 1$ устойчива, поскольку производная функции $\chi(d_{hn})$ по d_{hn} : $\chi'(d_{hn})\big|_{d_{hn}=1} = \frac{1}{2\nu} \in [\frac{1}{2},1) < 1$. Следовательно, $d_{hn} \to 1$ при $n \to \infty$ и представляет бесконечную последовательность бифуркаций многообходных гомоклинических орбит, ведущую к возникновению аттрактора лоренцевского типа. □

Замечание 1.8.1. Утверждения 1–3 Теоремы 1.8.1 описывают скользящую гомоклиническую бифуркацию седла O_s с положительной седловой величиной, что

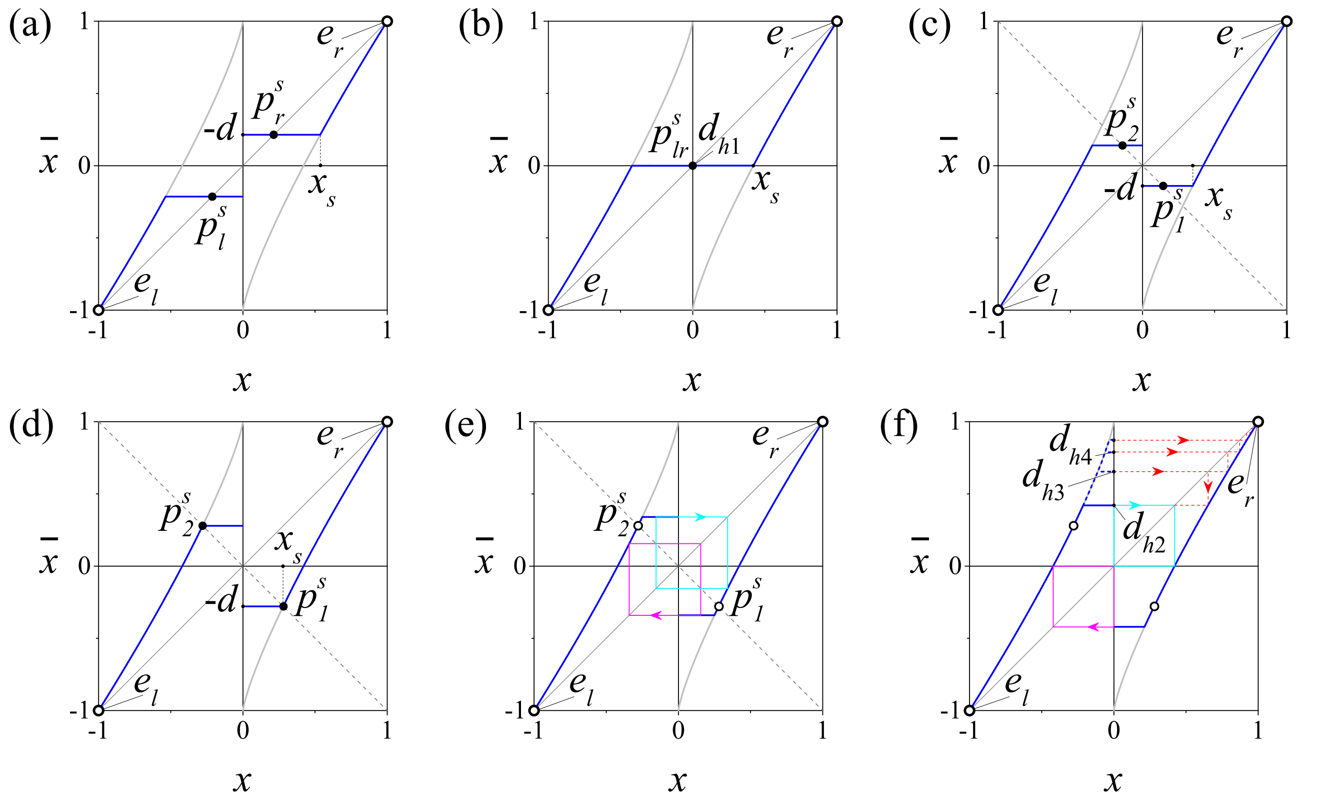

Рисунок 1.15 — Иллюстрация к Теореме 1.8.1: графики ведущего отображения (1.74) (синяя линия) и соответствующее отображение Лоренца (1.77) без скольжения (серая линия). (a) $d = -0.214$ ($\lambda = 1.55$, $b = 2973.07$). Суперустойчивые неподвижные точки $p^s_{l,r}$ (чёрные точки) притягивают целый интервал $(-1,1)$. (b) $d = d_{h1} = 0$ ($\lambda = 1.298$, $b = 907.26$). Первая гомоклиническая бифуркация. (c) $d = 0.14$ ($\lambda = 1.15$, $b = 451.42$). Устойчивая орбита $p^s_{1,2}$ периода 2. (d) $d = d_{p1} = 0.279$ ($\lambda = 1.01$, $b = 233.64$). Первая бифуркация вилка орбиты $p^s_{1,2}$. (e) $d = 0.34$ ($\lambda = 0.95$, $b = 175.9$). Две суперустойчивые симметричные орбиты периода 2 (голубая и фиолетовая). (f) $d = d_{h2} = 0.4204$ ($\lambda = 0.8714$, $b = 121.48$). Вторая и последующие гомоклинические бифуркации (красные штриховые линии). С увеличением d синий график (1.74) стремится к хаотическому отображению Лоренца (1.77). Остальные параметры имеют значения

$$\gamma = 2,\ \omega = 1,\ \lambda = a,\ \nu = 0.8,\ \alpha = 2 \text{ и } \delta = 0.588.$$

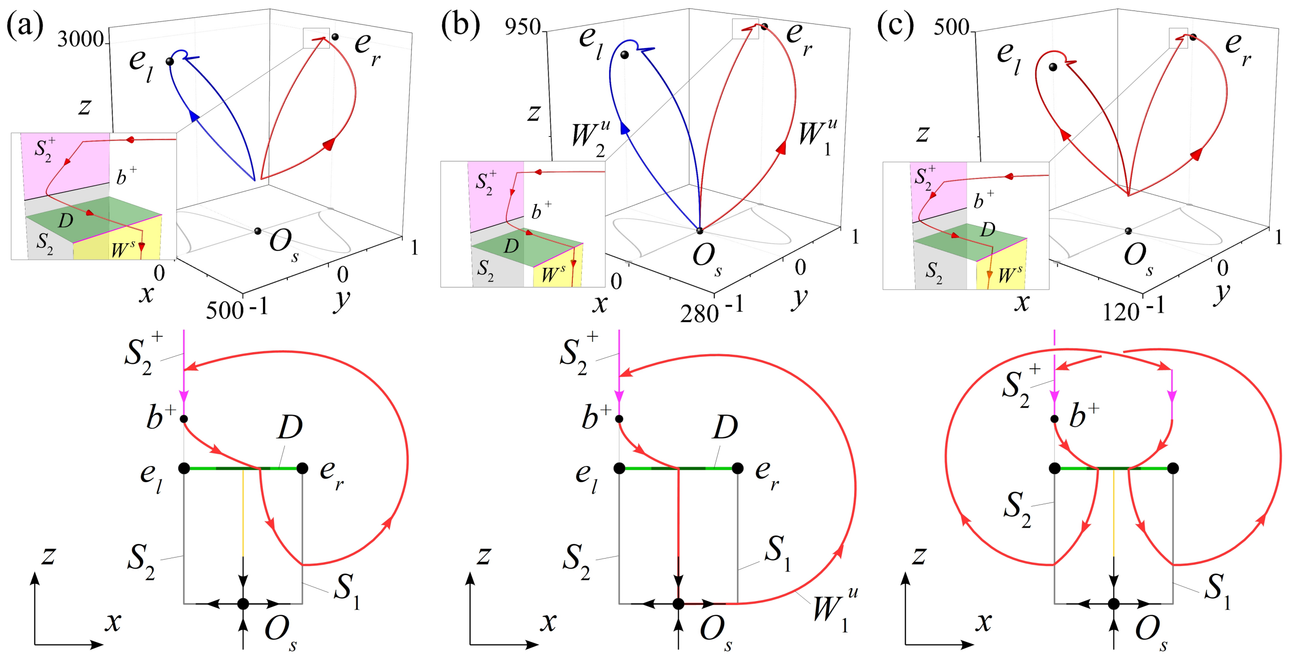

Рисунок 1.16 — Вариант неклассической гомоклинической бифуркации: иллюстрация утверждений 1-3 Теоремы 1.8.1. Увеличенные фрагменты со скользящими движениями изображены на вставках. (a) Перед бифуркацией: $d = -0.214$. (b) Бифуркация: $d = 0$. (c) После бифуркации: $d = -0.14$. Устойчивый предельный цикл периода 2 является единственным аттрактором системы (1.1). Верхний ряд изображений (a),(b) и (c) построен численно для параметров с Рис. 1.15(a), 1.15(b) и 1.15(c) соответственно. Качественные изображения нижнего ряда приведены для пояснения.

отличается от подробно рассмотренной в Теореме 1.7.1 неклассической бифуркации. Новой особенностью этой бифуркации является влипание двух устойчивых предельных циклов в гомоклиническую орбиту, что делает её “устойчивой” (Рис. 1.16).

Теорема 1.8.1 предлагает маршрут к хаосу в кусочно-линейной системе (1.1) через чередующиеся многообходные гомоклинические бифуркации и бифуркации вилка устойчивых периодических орбит (см. Рис. 1.17 и Рис. 1.18). Каждая бифуркация гомоклинической бабочки приводит к возникновению устойчивой орбиты удвоенного периода через влипание двух исходных устойчивых орбит в гомоклиническую бабочку с последующим их исчезновением. Далее следует суперкритическая бифуркация вилка, которая делает эту орбиту неустойчивой и создаёт две устойчивых орбиты такого же периода. С некоторыми оговорками, относящимися к скользящим движениям, эта воспроизводящаяся бифуркационная последовательность демонстрирует самоподобие, типичное для каскадов бифуркаций удвоения периода [134].

Наш бифуркационный переход к хаосу напоминает известный сценарий для гладких систем лоренцевского типа при отрицательной седловой величине, где бифуркации вилка чередуются с бифуркациями устойчивых многообходных гомоклинических орбит [135; 136]. Однако представленный в диссертации переход обладает существенными отличиями: (a) бифуркации происходят при положительной седловой величине, которая не порождает неустойчивости из-за наличия скользящих движений; (б) сценарий содержит хаотические окна, порождённые негладкими гомоклиническими и гетероклиническими бифуркациями, что невозможно в гладких системах (см. Рис. 1.17); (в) каскад бифуркаций допускает аналитическое описание с возможностью дать точные значения параметров для главных гомоклинических бифуркаций.

Несмотря на то, что аналитический вывод ведущего отображения (1.71) и, следовательно, его особого случая (1.74) гарантируют полное строгое соответствие между динамикой ведущего отображения (1.71) и динамикой порождающей его кусочно-линейной системы (1.1), мы дополнили строгий результат численной иллюстрацией на Рис. 1.17, сопоставив бифуркационные диаграммы для ведущего отображения (1.71) и кусочно-линейной системы (1.1). Эти две диаграммы совпадают с точностью до ошибки численного моделирования.

По Теореме 1.8.1 при $d = 1$ существует странный аттрактор лоренцевскго типа. Разрушению этого аттрактора с уменьшением параметра d соответствует бесконечная последовательность бифуркаций многообходных гомоклинических орбит, для которой точка $d = 1$ является точкой накопления. В свою очередь, эти бифуркации порождают устойчивые орбиты большого периода с произвольно малыми бассейнами притяжения, превращая странный аттрактор лоренцевского типа в квазистранный аттрактор (квазиаттрактор) [137].

Полученный негладкий сценарий исчезновения странного аттрактора можно рассматривать как аналог разрушения аттрактора в системе Лоренца при нарушении условия инвариантного слоения, что ведёт к появлению подков Смейла [14; 132; 133].

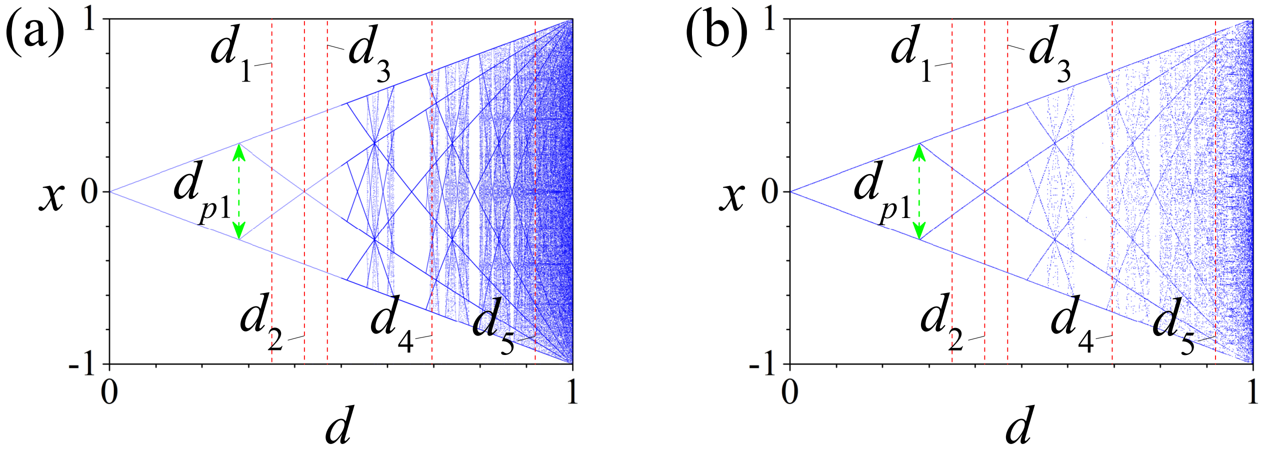

Рисунок 1.17 — Численная иллюстрация маршрута к хаосу из Теоремы 1.8.1. (a) Одномерная бифуркационная диаграмма для ведущего отображения (1.74) при $\nu = 0.8$. (b) Одномерная бифуркационная диаграмма системы (1.1), полученная численно по пересечениям траекторий потока с глобальной секущей $z = b$. Диапазон значений $\lambda \in [1.298,0]$ при постоянных $\nu = 0.8$, $\omega = 1$, $\alpha = 2$, $\delta = 0.588$ в системе (1.1) пересчитывается в диапазон $d \in [0, 1]$ для (1.74) по формуле $d = 2\sqrt{1 + \frac{\lambda}{\omega}^2} \exp(-\frac{\lambda}{\omega} \arctan \frac{\lambda}{\omega}) - 1$. Красные вертикальные штриховые линии в $d_1 = 0.35$, $d_2 = d_{h2} = 0.4204$, $d_3 = 0.47$, $d_4 = 0.696$, $d_5 = 0.91906$ и $d_6 = 1$ [не показана] соответствуют фазовым портретам на Рис. 1.18.

1.9 Общая картина бифуркаций в кусочно-линейной системе

Бифуркационная диаграмма на Рис. 1.19 даёт общую картину бифуркаций, описанных в данной главе, и связывает их друг с другом, а также с областью параметров, где существует странный аттрактор лоренцевского типа.

Чёрная кривая b_{cr} (1.13) разделяет области со скольжениями (белая) и без скольжений (зелёная и серая). Кривая b_h : $b = \exp\frac{3\pi\lambda}{2\omega}$ и вертикальная линия b_{h1} образуют синюю границу, соответствующую гомоклиническим бифуркациям в отсутствие и при наличии скользящих движений соответственно. Серая линия b_{unq} : $b = \frac{1}{\nu}\exp\frac{3\pi\lambda}{2\omega}$ соответствует бифуркации типа Андронова-Хопфа устойчивых фокусов $e_{r,l}$ [см. раздел 1.5], что делает странный аттрактор лоренцевского типа единственным притягивающим множеством в области без скольжений (зелёная область).

Вертикальная штриховая фиолетовая стрелка CB иллюстрирует классический бифуркационный переход (CB) [см. разделы 1.5 и 1.7.1].

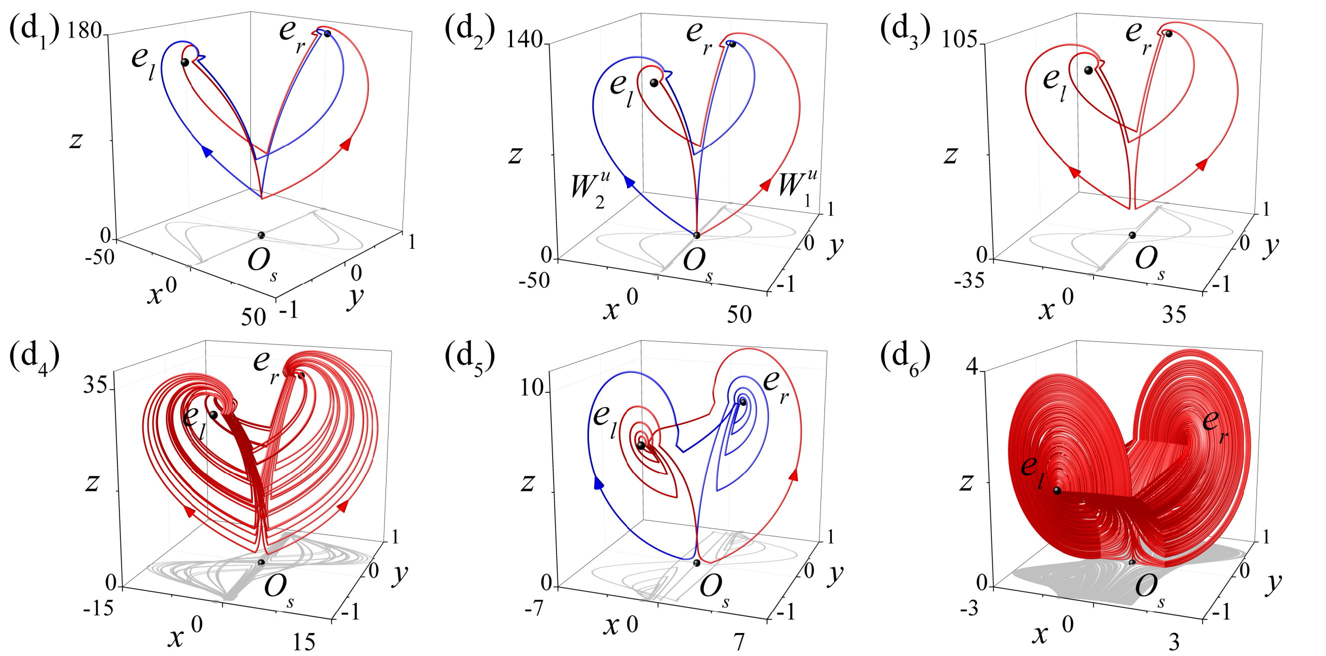

Рисунок 1.18 — Фазовые портреты системы (1.1), соответствующие значениям параметра $d = d_{1-6}$ на Рис. 1.17. (d_1) Два устойчивых предельных цикла периода 2 (синий и красный). $\lambda = 0.941$ ($d = 0.35$). (d_2) Две симметричные двухобходные гомоклинические орбиты (гомоклиническая бабочка периода 2). $\lambda = 0.8714$ ($d = 0.4204$). (d_3) Устойчивый предельный цикл периода 4, родившийся из гомоклинической бабочки при $d = d_2$. $\lambda = 0.823$ ($d = 0.47$). (d_4) Типичная устойчивая орбита большого периода. $\lambda = 0.5895$ ($d = 0.696$). (d_5) Две симметричных устойчивых орбиты большого периода. $\lambda = 0.2894$ ($d = 0.91906$). (d_6) Странный аттрактор лоренцевского типа без скользящих движений. $\lambda = 0$ ($d = 1$). Остальные параметры имеют те же значения, что и на Рис. 1.17.

На вставке изображена неклассическая бифуркация (NB) из Теоремы 1.7.1, соответствующая переходу от Рис. 1.14(a) (ромб) к Рис. 1.14(c) (крест) через Рис. 1.14(b) (звёздочка) при параметрах $\lambda = 1.298127$ и $b = 453.629$.

Красная штриховая линия показывает маршрут к хаосу из Теоремы 1.8.1. Красные точки имеют следующее соответствие: (1) Рис. 1.15(a), (2) Рис. 1.15(b), (3) Рис. 1.15(d), (4) Рис. 1.15(f) и Рис. 1.18(d_2), (5) Рис. 1.18(d_4), (6) Рис. 1.11(c), (7) Рис. 1.18(d_6).

Проведённая от ромба к точке (1) чёрная пунктирная линия иллюстрирует неописанный в диссертации маршрут от двух устойчивых фокусов без скользящих движений (ромб) к двум устойчивым предельным циклам со скольжением [точка (1)] через негладкий аналог бифуркации седло-узла, при которой рож-

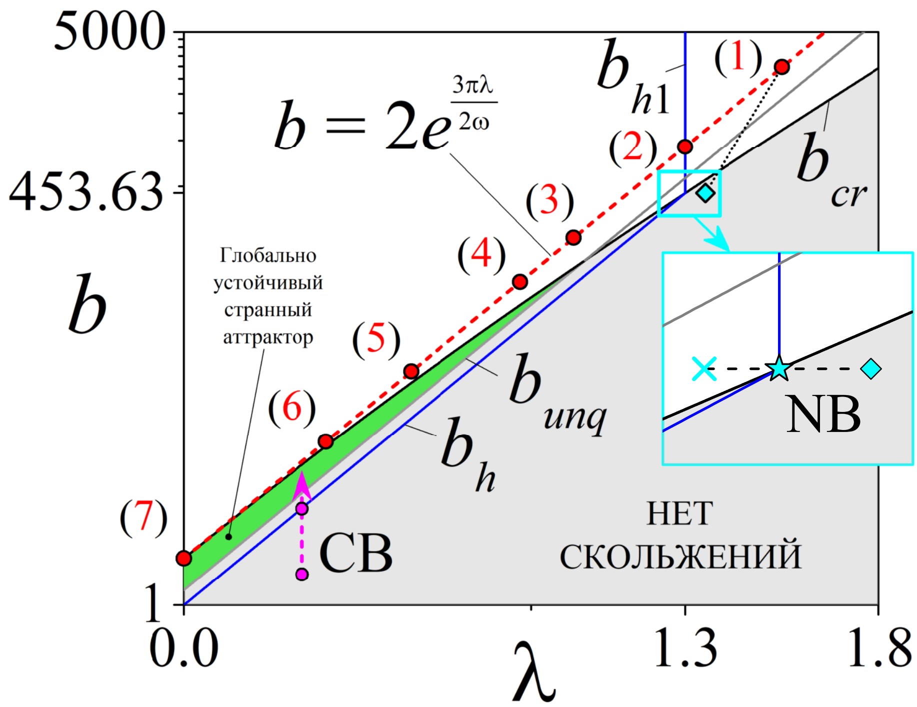

Рисунок 1.19 — Общая двумерная бифуркационная диаграмма кусочно-линейной системы (1.1), иллюстрирующая Теоремы 1.5.1, 1.7.1 и 1.8.1 (см. подробное описание в разделе 1.9). Остальные параметры кусочно-линейной системы (1.1) имеют значения $\omega = 1$, $\nu = 0.8$, $\delta = 0.588$ и $\alpha = 2$.

даются две пары устойчивых и седловых предельных циклов с последующей бифуркацией типа Андронова-Хопфа b_{unq}.

Глава 2. Хаотические аттракторы в неавтономных системах

В главе рассматриваются неавтономные динамические системы с переключающимися во времени параметрами. К таким системам относятся неавтономные отображения с изменяющимися во времени хаотическими аттракторами, а также *мигающие системы*, порождённые случайным переключением между несколькими автономными потоками в каждый последовательный период времени.

В главе вводится определение нестационарного гиперболического аттрактора и доказывается его существование в двумерном неавтономном отображении. Полученный результат используется при доказательстве гиперхаотического аттрактора автономного трёхмерного отображения.

Для мигающих систем предложен способ быстрого переключения параметров, который гарантирует появление *аттрактора-призрака* – притягивающего множества, отсутствующего в автономных образующих системах, но содержащего в своей окрестности нестационарный аттрактор мигающей системы.

2.1 Управляемые отображения

Рассмотрим отображение

$$x(i+1) = F[x(i), u(i)], \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, F - n-мерная вектор-функция, $i \in \mathbb{Z}$ есть дискретное время, и функция $u : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^m$ есть множество управляющих параметров, меняющих структуру отображения в момент каждой итерации.

Случай 1. В случае, когда управляющий параметр $u(i)$ есть периодическая функция дискретного времени $u(i) = u(i+p)$ с периодом $p \in \mathbb{Z}^+$, динамика отображения (2.1) определена автономным отображением

$$x(j+1) = \hat{F}\left[x(j), i_0\right], \tag{2.2}$$

где $\quad i_0 = 1, 2, \ldots, p$, $j = pi$ - новое дискретное время, и функция $\hat{F}$ имеет вид

$$\hat{F}\left[x(j), i_0\right] = \prod_{i=i_0+1}^{i_0+p} F[x(i), u(i)]. \tag{2.3}$$

Необходимо подчеркнуть, что это отображение не зависит от дискретного времени, поскольку вместо времени i имеет место начальное условие $i_0 = 1, 2, \ldots, p$ отображения (2.2). Поэтому изменение этого аттрактора под действием отображения (2.1) демонстрирует периодическую динамику этого отображения с периодом p. Следовательно, аттрактор исходного отображения (2.1) представляет собой последовательность p аттракторов отображения (2.2) при $i_0 = 1, 2, \ldots, p$.

Случай 2. Функция $u(i)$ является произвольной ограниченной функцией дискретного времени.

Введём определение нестационарного гиперболического аттрактора.

Определение 2.1.1. *Пусть $G : (\|x\| \leqslant x^*, x^* = const)$ есть поглощающая область отображения $F\left[x(i), u(i)\right]$, $FG \subset G$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$. Пусть в каждой точке $x \in G$ определены устойчивые и неустойчивые инвариантные конусы K^s и K^u. Обозначим линеаризацию отображения F в любой фиксированной точке x: $L(x, i) = F_x\left[x, u(i)\right]$. Также предположим, что выполняется следующие условия. Оператор L (оператор L^{-1}) растягивает любой вектор V^u (V^s), выпущенный из точки x и лежащий в неустойчивом конусе K^u (в устойчивом конусе K^s) для любых $x \in G$ и $i \in \mathbb{Z}^+$.*

Тогда множество точек в G, на котором действует отображение $F\left[x(i), u(i)\right]$ при неограниченно возрастающем времени i, называется нестационарным гиперболическим аттрактором.

Случай 3. Управляющий параметр $u(i)$ определён динамически с помощью отображения

$$u(i+1) = f\left[u(i)\right]. \tag{2.4}$$

В этом случае система отображений (2.1), (2.4) является объединённым автономным отображением треугольной формы, заданным в расширенном фазовом пространстве. В простом случае, когда отображение (2.4) имеет глобально устойчивую периодическую орбиту, случай 3 сводится к случаю 1.

2.1.1 Логистическое отображение с периодической управляющей функцией $u(i)$

Простым примером отображения, управляемого периодической по времени функцией, является логистическое отображение вида

$$x(i+1) = u(i)x(i)\left[1 - x(i)\right], \tag{2.5}$$

где $u(i) = a + \mu \mathrm{sign}(\gamma + \sin \frac{2\pi}{p} i + \varepsilon)$ с периодом p и параметрами $a > 0$, $\mu > 0$, $|\gamma| < 1$ и $0 < \varepsilon \ll 1$ такими, что кусочно-постоянная функция $u(i)$ периодически переключается между двумя положительными значениями $a + \mu$ и $a - \mu$.

Рассмотрим отображение (2.5) при конкретно заданных параметрах $a = 3$, $\mu = 1$, $\gamma = -0.7 - \varepsilon$ и большом значении периода $p = 200$. При этих значениях параметров отображение переключается между двумя образующими отображениями

$$\begin{aligned} f_1: \quad & x(i+1) = 2x(i)[1 - x(i)], \\ f_2: \quad & x(i+1) = 4x(i)[1 - x(i)]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Отображение f_1 имеет глобально устойчивую неподвижную точку $x = 0.5$, а отображение f_2 имеет хорошо известный [138] хаотический аттрактор (см. Рис. 2.1).

Выбранные значения параметров соответствуют “пачечным” (bursting) колебаниям переменной x. На Рис. 2.1 показана последовательность чередующихся быстрых хаотических колебаний, заданных отображением (2.5) при $u(i) = 4$, и интервалов покая при $u(i) = 2$. Меняя параметры отображения (2.5), можно управлять периодами покоя и пачечных колебаний, получая различные режимы.

Аналитическое исследование отображения (2.5) может быть выполнено с помощью автономного отображения (2.2), (2.3). Поскольку для больших периодов p аналитическое исследование провести сложно, рассмотрим $p = 2$, $\gamma = 0$, $a = 3$ и $\mu = 1$. В этом случае отображение (2.5) на каждой итерации последовательно переключается между f_1 и f_2. Отображение (2.2), (2.3) имеет две формы

$$\begin{aligned} x(j+1) &= F\left[x(j),1\right] = f_2 f_1, \\ x(j+1) &= F\left[x(j),2\right] = f_1 f_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

По графикам функций $f_2 f_1$ и $f_1 f_2$ (см. Рис. 2.2) видно, что композиции $f_2 f_1$ и $f_1 f_2$ имеют инвариантные интервалы $[0, 1]$ и $[0, 0.5]$ соответственно. Обе

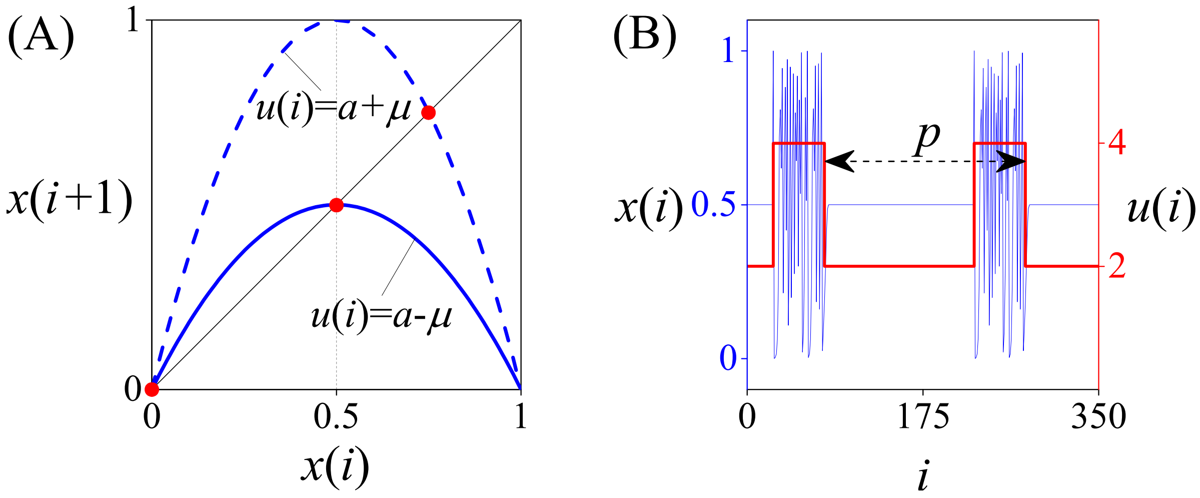

Рисунок 2.1 — (A) Графики отображений, участвующих в переключении управляемого логистического отображения. (B) Осциллограммы установившегося динамического процесса управляемого логистического отображения с периодом $p = 200$. Синяя и красная кривые есть графики переменной $x(i)$ и управляющего параметра $u(i)$ соответственно. Значения параметров $a = 3$, $\mu = 1$ и $\gamma = -0.7$.

композиции качественно подобны хаотическому отображению $f_2: \; x(j+1) = 4x(j)[1 - x(j)]$ с инвариантной мерой. Ясно, что оба отображения $F\,[x(j), 1]$ и $F\,[x(j), 2]$ хаотичны, однако, вопрос о построении инвариантных мер для них остаётся открытым. Таким образом, нестационарный аттрактор отображения (2.5) является периодическим во времени и образован аттракторами композиций $f_1 f_2$ и $f_2 f_1$.

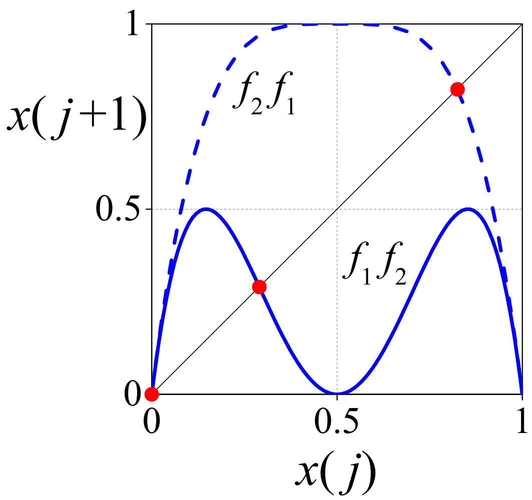

Рисунок 2.2 — Графики композиций $F\,[x(j), 2]$ (сплошная синяя кривая) и $F\,[x(j), 1]$ (штриховая синяя кривая) [см. уравнение (2.7)].

2.1.2 Сингулярно-гиперболический аттрактор в управляемом двумерном отображении

Теперь рассмотрим более сложную задачу о существовании нестационарного сингулярно-гиперболического аттрактора в двумерном отображении с одной нелинейностью

$$F: \quad \begin{array}{rcl} x(i+1) & = & x(i)+y(i)+ag\,[x(i)] \quad \equiv \quad X(x,y), \\ y(i+1) & = & \lambda u(i)\,\{y(i)+bg\,[x(i)]\} \quad \equiv \quad Y(u,x,y), \end{array} \tag{2.8}$$

где управляющий параметр $0 < u(i) < 1$ есть произвольная ограниченная функция, a, b, λ - положительные параметры, и $g(x)$ - кусочно-линейная функция кубического типа

$$g(x) = \begin{cases} 2+2x, & x < -\frac{1}{2}, \\ -2x, & |x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ -2+2x, & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Сформулируем основной результат раздела в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1.1. *Пусть выполняются условия*

$$\begin{array}{c} 0 < \lambda < \frac{1}{1+2b}, \qquad a^- < a < a^+, \\ \text{где} \quad a^- = \frac{1+\frac{2\lambda b}{1-\lambda}+\sqrt{1+(\frac{2\lambda b}{1-\lambda})^2}}{2}, \qquad a^+ = \frac{3-\frac{2\lambda b}{1-\lambda}+\sqrt{(\frac{2\lambda b}{1-\lambda}-1)(\frac{2\lambda b}{1-\lambda}-9)}}{4}. \end{array} \tag{2.10}$$

Тогда отображение (2.8) имеет нестационарный сингулярно-гиперболический аттрактор, локализованный в области

$$G : \{|x| < a + \tfrac{\lambda b}{1-\lambda} - 0.5,\ |y| < \tfrac{\lambda b}{1-\lambda}\}.$$

Доказательство. Согласно Определению 2.1.1, сначала мы докажем существование инвариантной области G (шаг 1) и дальше докажем существование инвариантных устойчивого и неустойчивого конусов K^s и K^u со сжимающими и растягивающими свойствами (шаг 2).

Шаг 1. Наша цель - получить инвариантную область G такую, что $FG \subset G$. Для этого рассмотрим вспомогательное отображение $\tilde{F}$, являющееся отображением F [формула (2.8)], в котором функция $g(x)$ заменена на функцию $\tilde{g}(x)$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} -1, & x < -\frac{3}{2}, \\ g(x), & |x| \leqslant \frac{3}{2}, \\ 1, & x > \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Заметим, что в области $|x| \leqslant \frac{3}{2}$ отображения F и $\tilde{F}$ совпадают.

Теперь покажем, что $\tilde{F}G_y \subset G_y$, где $G_y : \{|y| < y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}$, что эквивалентно следующему неравенству

$$|y(i+1)| < |y(i)| \quad \text{при} \quad |y(i)| > y^*, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.12}$$

Если эти неравенства выполняются, то область G_y притягивает все траектории из $\mathbb{R}^1 \setminus G_y$ (т.е. является притягивающей областью для переменной y).

Используя второе уравнение в (2.8) для $\tilde{F}$ и условия $0 < u(i) < 1$, $|\tilde{g}(x)| \leqslant 1$ вместо (2.12), получим

$$|y(i+1)| \leqslant \lambda|u(i)y(i)| + \lambda b|\tilde{g}(x)| \leqslant \lambda|y(i)| + \lambda b < |y(i)|. \tag{2.13}$$

Это выражение означает, что неравенства (2.12) выполняются при $|y(i)| \geqslant \frac{\lambda b}{1-\lambda}$.

Рассмотрим далее отображение $\tilde{F}$ в области $G_y : \{|y| < y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}$. Наша цель - найти постоянную x^*, определяющую интервал $G_x : \{|x| < x^*\}$ такой, что инвариантная область $\tilde{F}G \subset G$ примет вид $G : \{|x| < x^*, |y| < y^*\}$.

Введём две одномерных системы сравнения

$$\begin{aligned} x(i+1) &= X^+(x) \equiv x + a\tilde{g}(x) + y^*, \\ x(i+1) &= X^-(x) \equiv x + a\tilde{g}(x) - y^*, \end{aligned} \tag{2.14}$$

чтобы использовать их для изучения первого уравнения в отображении (2.8) с функцией $\tilde{g}(x)$, а именно $x(i+1) = x(i) + y(i) + a\tilde{g}(x(i)) \equiv \tilde{X}(x,y)$. Неравенства

$$X^-(x) \leqslant \tilde{X}(x,y) \leqslant X^+(x) \tag{2.15}$$

означают, что для любого $y \in G_y$, $i \in \mathbb{Z}$ и любого $x(i) \in (-1.5, 1.5)$ образ $[x(i+1), y(i+1)]$ отображения $\tilde{F}$ лежит в области $x(i+1) \in \big[X^-[x(i)], X^+[x(i)]\big]$, $y(i+1) \in G_y$ (см. Рис. 2.3).

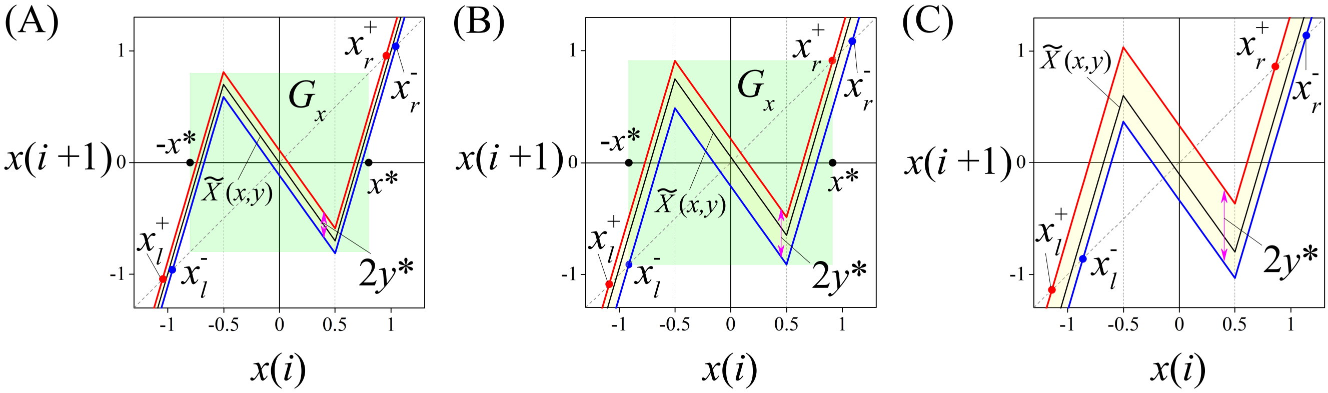

Рисунок 2.3 — Графики систем сравнения $X^+(x)$ (красная линия) и $X^-(x)$ (синяя линия). (A) Условия (2.16) выполняются, и область G_x существует. (B) Граница области G_x существует при $X^+(-0.5) = x_r^+$ и $X^-(0.5) = x_l^-$. (C) Область G_x отсутствует.

Используя это свойство, получим, что интервал G_x существует, если для любого $i \in \mathbb{Z}^+$ выполнены следующие условия

$$X^+(-0.5) \leqslant x_r^+, \quad X^-(0.5) \geqslant x_l^-, \tag{2.16}$$

где x_r^+ и x_l^- - правая неустойчивая неподвижная точка отображения X^+ и левая неустойчивая неподвижная точка отображения X^- соответственно (см. Рис. 2.3). Проще говоря, условия (2.16) означают, что максимум отображения X^+ [минимум отображения X^-], будучи образом точки $x(i) = -0.5$ [$x(i) = 0.5$ соответственно], не выходит за неустойчивую неподвижную точку x_r^+ [x_l^- соответственно]. Подставляя координаты этих точек

$$x_r^+ = 1 - \frac{y^*}{2a}, \quad x_l^- = \frac{y^*}{2a} - 1, \tag{2.17}$$

в неравенства (2.16) при $y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}$, получим условие существование поглощающей области G

$$a^2 + \left(\frac{\lambda b}{1-\lambda} - 3/2\right) a + \frac{\lambda b}{2(1-\lambda)} \leqslant 0. \tag{2.18}$$

Это неравенство верно в интервале $a_1 < a < a_2$, где $a_{1,2} = \frac{1}{4}(3 - 2y^* \pm \sqrt{(2y^*-1)(2y^*-9)}$. В свою очередь, данные неравенства выполняются для следующей области параметра λ

$$\lambda < \frac{1}{1+2b}. \tag{2.19}$$

Следовательно, при этом условии отображение $\tilde{F}$ имеет поглощающую область $G : \{|x| < x^* = a + \frac{\lambda b}{1-\lambda} - 0.5, |y| < y^* = \frac{\lambda b}{1-\lambda}\}$.

Отображения F и $\tilde{F}$ совпадают в области $|x| < \frac{3}{2}$, содержащей инвариантную область G. Следовательно, G - инвариантная область исходного отображения F.

Шаг 2. Рассмотрим гиперболичность отображения F.

Уравнения в вариациях для любой неблуждающей траектории $[x(i), y(i)]$ в области G зависят от дискретного времени i и имеют вид

$$T: \begin{array}{l} \xi(i+1) = p(x)\xi(i) + \eta(i), \\ \eta(i+1) = \lambda u(i)\left[q(x)\xi(i) + \eta(i)\right], \end{array} \tag{2.20}$$

где

$$\begin{array}{rcccl} p(x) & = & 1 + ag'_x(x) & = & 1 \pm 2a, \\ q(x) & = & bg'_x(x) & = & \pm 2b, \end{array} \tag{2.21}$$

(знак “-” соответствует области $|x| \leqslant \frac{1}{2}$). Таким образом, оператор L в Определении 2.1.1 есть явно зависящая от $x(i)$ (далее x) и i матрица

$$L(x, i) = \begin{pmatrix} p(x) & 1 \\ \lambda u(i) q(x) & \lambda u(i) \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Введём неустойчивый конус $K^u(i) = \{\xi(i), \eta(i) \,|\, \eta(i) = \alpha(i)\xi(i), |\alpha(i)| < k\}$, где $l(i): \eta(i) = \alpha(i)\xi(i)$, $i \in \mathbb{Z}^+$ есть семейство образующих этого конуса. Образ $l(i+1) = Tl(i)$ линии $l(i)$ запишем в параметрическом виде

$$\begin{array}{l} \xi(i+1) = \left[p(x) + \alpha(i)\right]\xi(i), \\ \eta(i+1) = \lambda u(i)\left[q(x) + \alpha(i)\right]\xi(i). \end{array} \tag{2.23}$$

Эти уравнения дают явную форму линии $l(i+1)$

$$\eta(i+1) = \alpha(i+1)\xi(i+1), \tag{2.24}$$

где

$$\alpha(i+1) = \frac{\lambda u(i)\left[q(x) + \alpha(i)\right]}{p(x) + \alpha(i)}. \tag{2.25}$$

Конус K^u является инвариантным, если при любых $i \in \mathbb{Z}^+$ выполняется условия

$$|\alpha(i+1)| < |\alpha(i)| \quad \text{при} \quad |\alpha(i)| \geqslant k, \tag{2.26}$$

означающие, что отображение (2.25) имеет поглощающую область $|\alpha(i)| < k$. Из (2.25) получаем неравенство

$$|\alpha(i+1)| \leqslant \left|\frac{\lambda u(i) q(x)}{p(x) + \alpha(i)}\right| + \left|\frac{\lambda u(i)}{p(x) + \alpha(i)}\right| |\alpha(i)|. \tag{2.27}$$

Пусть выполняется неравенство

$$|p(x) + \alpha(i)| > 1, \tag{2.28}$$

условия справедливости которого будут получены ниже. Тогда в силу (2.21) неравенство (2.27) преобразуется к виду

$$|\alpha(i+1)| < 2\lambda b + \lambda|\alpha(i)|. \tag{2.29}$$

Из определения инвариантности конуса K^u (2.26) и неравенства (2.29) получаем неравенство $|\alpha(i)| > \frac{2\lambda b}{1-\lambda}$. Следовательно конус K^u определён числом

$$k = \frac{2\lambda b}{1-\lambda}. \tag{2.30}$$

Получим достаточное условие растяжения любого вектора $V^u\big(\xi(i), \eta(i)\big)$ в конусе K^u оператором $L(x,i)$. Для растяжения вектора $V^u\big(\xi(i), \eta(i)\big)$ достаточно, чтобы модуль координаты $|\xi(i+1)|$ вектора $V^u\big(\xi(i+1), \eta(i+1)\big)$ был больше модуля вектора $V^u\big(\xi(i), \eta(i)\big)$, что приводит к условию

$$|\xi(i+1)| = |p(x) + \alpha(i)||\xi(i)| > \sqrt{\xi^2(i) + \eta^2(i)} = \sqrt{[1 + \alpha^2(i)]\,\xi^2(i)}. \tag{2.31}$$

В силу (2.21) из (2.31) получаем условие растяжения вектора V^u

$$|p(x) + \alpha(i)| = |1 \pm 2a + \alpha(i)| > \sqrt{1+k^2}. \tag{2.32}$$

Полученные неравенства одновременно выполняются в области параметров

$$a > a^- = \frac{1 + k + \sqrt{1+k^2}}{2}. \tag{2.33}$$

Заметим, что в этой области параметров справедливо предположенное выше условие (2.28).

В качестве устойчивого инвариантного конуса K^s может быть использован конус $|\alpha(i)| > k$. При этом сжатие в K^s может быть выражено через собственные значения матрицы $L(x,i)$.

Таким образом, в поглощающей области G отображение имеет инвариантные конусы $K^{s,u}$ и, следовательно, аттрактор является сингулярно-гиперболическим. $\square$

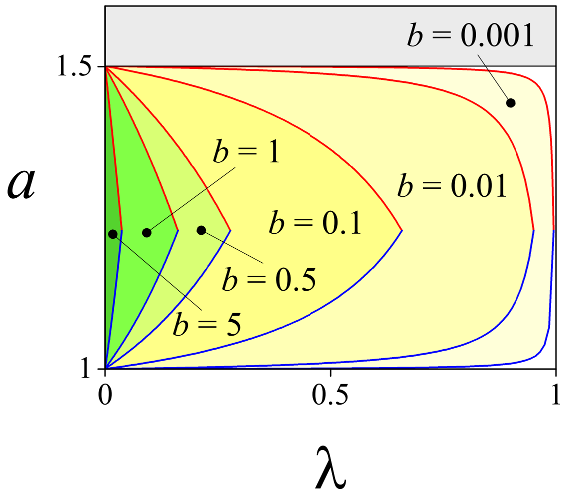

Рисунок 2.4 — Диаграмма существования нестационарного гиперболического аттрактора, иллюстрирующая Теорему 2.1.1. Красные кривые $a = a^{+}(\lambda, b)$ соответствуют верхней границе области существования G. Синие кривые $a = a^{-}(\lambda, b)$ соответствуют нижней границе области существования инвариантных конусов $K^{u,s}$. Область, ограниченная этими кривыми при выбранном значении параметра b (закрашена одним цветом) соответствует существованию нестационарного гиперболического аттрактора.

2.1.3 Пример гиперхаоса

Рассмотрим случай, когда управляющий параметр $u(i)$ в отображении (2.8) является динамической переменной одномерного отображения “тент”

$$\bar{u} = \begin{cases} 2u, & 0 \leqslant u < \frac{1}{2}, \\ 2 - 2u, & \frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1, \end{cases} \equiv U(u). \tag{2.34}$$

Тогда получим автономное трёхмерное отображение (2.8), (2.34), имеющее структуру “ведущий-ведомый”, где отображение $u \rightarrow U(u)$ - ведущее для отображения (2.8). Инвариантную область G_u и ляпуновский показатель Λ_u отображения (2.34) можно получить независимо от (2.8):

$$\begin{gathered} G_u \in (0{,}1), \\ \Lambda_u = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln |U'[u(i)]| = \ln 2 > 0. \end{gathered} \tag{2.35}$$

Согласно Теореме 2.1.1 отображение (2.8) имеет один положительный и один отрицательный показатели Ляпунова, соответствующие растяжению и сжатию в конусах K^u и K^s. Следовательно, трёхмерное отображение (2.8), (2.34) имеет два положительных показателя Ляпунова вдоль траекторий из поглощающей области $G \times G_u$. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.1.2. *Автономное трёхмерное отображение (2.8), (2.34) имеет гиперхаотический аттрактор с двумя положительными показателями Ляпунова.*

На Рис. 2.5 изображен фазовый портрет этого гиперхаотического аттрактора.

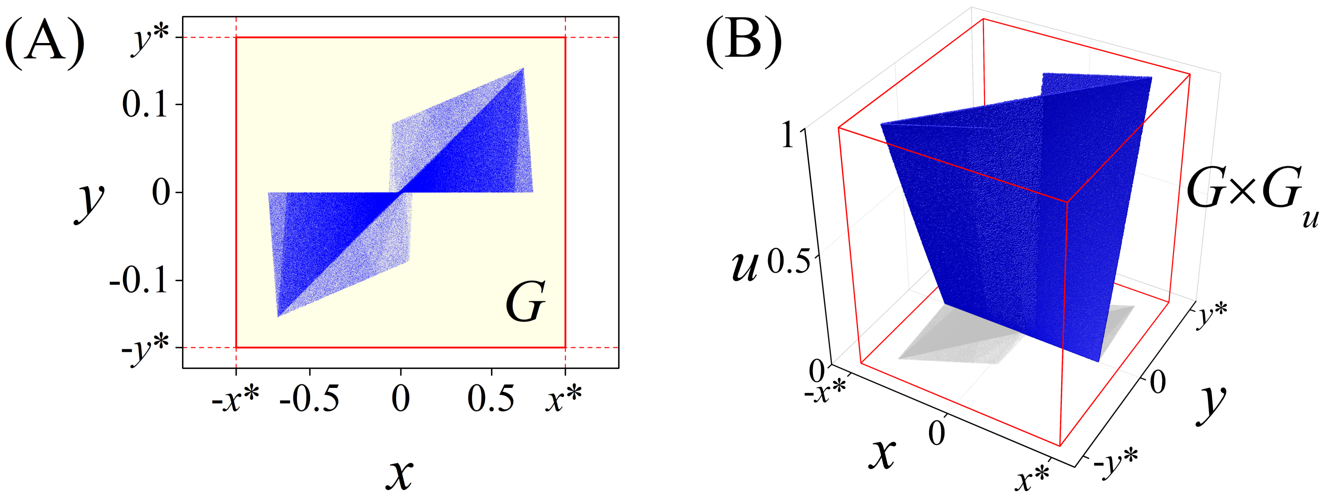

Рисунок 2.5 — Аттрактор отображения (2.8), (2.34) (синий цвет). (A) xy-проекция гиперхаотического аттрактора. Закрашенный жёлтым красный контур есть инвариантная область G. (B) Гиперхаотический аттрактор отображения (2.8), (2.34) в трёхмерном фазовом пространстве. Аттрактор локализован в поглощающей области $G \times G_u$ (красный контур). Значения параметров: $a = 1.23$, $\lambda = 0.15$ и $b = 1$.

2.1.4 Численное нахождение ляпуновских показателей

Приведём численную иллюстрацию строгих утверждений Теорем 2.1.1 и 2.1.2. При значении параметра $b = 1$ рассмотрим области параметров λ, a

$$\begin{aligned} d_{inv}: &\quad 1 < a < a^+(\lambda, 1), \\ d_{hyp}: &\quad a^-(\lambda, 1) < a < a^+(\lambda, 1). \end{aligned} \tag{2.36}$$

Область d_{inv} (цветная область под чёрной сплошной кривой на Рис. 2.6) соответствует существованию инвариантной области G. Область d_{hyp} соотвествует существованию гиперболического аттрактора: изображена на Рис. 2.4 зелёным и тёмно-зелёным, а на Рис. 2.6 выделена в области d_{inv} с помощью чёрной штриховой линии.

Численный счёт показателей Ляпунова проведён для отображения (2.8) для трёх следующих случаев управляющего параметра u: (A) $u = 0.5$ - постоянная, (B) $u(i)$ - периодическая функция $u(i) = 0.5\left(1 + \sin\frac{2\pi i}{p}\right)$ для $p = 10$, (C) $u(i)$ - траектория отображения "тент" (2.34) (см. Рис. 2.6). Можно видеть, что в области d_{hyp} старший показатель Ляпунова есть положительная величина для всех трёх случаев. Следовательно, посчитанные карты подтверждают приведённые теоретические результаты. Заметим, что диаграммы лишь слегка отличаются друг от друга несмотря на различное поведение управляющего параметра u. Косвенно этот факт свидетельствует о гиперболичности отображения (2.8).

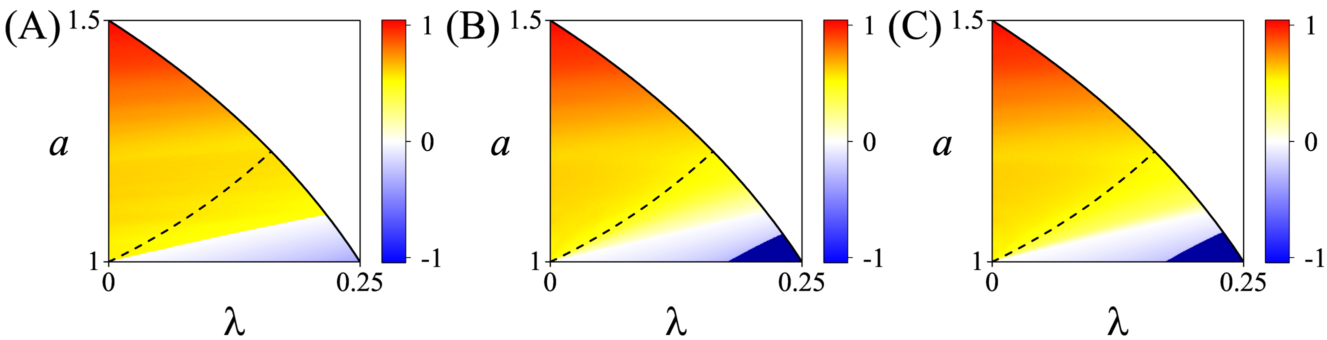

Рисунок 2.6 — Посчитанные карты старшего показателя Ляпунова. Величина показателя изображена цветом в соответствии с цветовой шкалой, размещённой справа от каждой карты. Сплошная чёрная кривая есть верхняя граница $a = a^+(\lambda, 1)$ области параметров d_{inv}, соответствующей существованию инвариантной области G. Штриховой чёрной линией отмечена нижняя граница $a = a^-(\lambda, 1)$ области d_{hyp} существования гиперболического аттрактора. (A) $u = 0.5$. (B) $u(i) = 0.5\left(1 + \sin\frac{2\pi i}{p}\right)$ для $p = 10$. (C) $u(i)$ есть траектория отображения "тент" (2.34). Значение параметра $b = 1$.

2.2 Аттракторы-призраки в мигающих системах

Рассмотрим мигающую систему [95]

$$\dot{x} = F[x, s(t)], \tag{2.37}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $s(t)$ - случайная дискретная скалярная величина, равная постоянной $s_i, i = 1, 2, \ldots, M$ с вероятностью p_i в каждый k-ый момент времени $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Здесь $\tau = \mathrm{const}$ - это период переключения. Траектории системы (2.37) склеены в моменты времени $t = k\tau$ из траекторий M автономных систем

$$\dot{x} = F(x, s_i), \quad i = 1, 2, \ldots, M, \tag{2.38}$$

заданных на каждом интервале $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$ с вероятностью p_i. Предполагается, что каждая i-ая n-мерная система (2.38), рассмотренная на всём интервале времени, имеет аттрактор A_i. При достаточно быстром переключении $\tau \ll 1$ система (2.37) при введении быстрого времени $t' = \frac{t}{\tau}$ приобретает форму, удобную для применения метода усреднения [95; 139—142]

$$\frac{dx}{dt'} = \tau F\left[x, s(t')\right], \tag{2.39}$$

где τ играет роль малого параметра. Следовательно, автономная n-мерная усреднённая система, ассоциированная с системой (2.39), имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i=1}^{M} p_i F(x, s_i). \tag{2.40}$$

Предположим, что система (2.40) имеет аттрактор $\mathcal{A}$, аппроксимирующий динамику мигающей системы при достаточно быстром переключении, и рассмотрим частный случай задачи о взаимосвязи аттракторов A_i, $i = 1, 2, \ldots, M$ и аттрактора $\mathcal{A}$ [94]. А именно, рассмотрим задачу об *аттракторе-призраке* [96], который можно определить следующим образом.

Определение 2.2.1. *Если аттрактор $\mathcal{A}$ усреднённой системы (2.40) “сильно отличается” от каждого из аттракторов A_i, то аттрактор $\mathcal{A}$ называется аттрактором-призраком мигающей системы (2.37).*

2.2.1 Мигающая система Лоренца

Рассмотрим систему Лоренца $L(r,\sigma)$

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(t)(y-x),\\
\dot{y} &= [r(t)-z]x-y,\\
\dot{z} &= xy-\tfrac{8}{3}z,
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

с изменяющимися во времени параметрами $r(t)=(r_1-r_2)s(t)+r_2$ и $\sigma(t)=(\sigma_1-\sigma_2)s(t)+\sigma_2$, где стохастический параметр $s(t)$ на каждом временном интервале $t\in[k\tau,(k+1)\tau)$, $k\in\mathbb{Z}^+$ определён следующим образом

$$
s(t)=\begin{cases} 1 & \text{с вероятностью} \quad p_1,\\ 0 & \text{с вероятностью} \quad p_2=1-p_1. \end{cases} \tag{2.42}
$$

Таким образом, параметр $s(t)$ переключает во времени поток неавтономной системы (2.41) между двумя автономными подсистемами $L_1 = L(r_1,\sigma_1)$ при $s = 1$ и $L_2 = L(r_2,\sigma_2)$ при $s = 0$.

На Рис. 2.7 изображена бифуркационная диаграмма на плоскости параметров (r,σ) [133; 143; 144]. В области параметра $1<r<l_h$ (закрашена белым на Рис. 2.7) притягивающее множество системы Лоренца образовано двумя симметричными фокусами O_l и O_r. Седло $O_s(0,0,0)$ имеет одномерное неустойчивое многообразие W^u с двумя симметричными ветвями W^u_l (левая) и W^u_r (правая), навивающимися на O_l и O_r соответственно, и двумерное устойчивое многообразие W^s, разделяющее бассейны притяжения O_l и O_r.

Выберем из белой области две пары параметров r и σ, соответствующие двум разным системам $L_1 = L(r_1 = 15,\sigma_1 = 23)$ и $L_2 = L(r_2 = 36,\sigma_2 = 2)$. Их фазовые портреты изображены на Рис. 2.8(L_1) и Рис. 2.8(L_2).

Кривая гомоклинической бифуркации l_h соответствует хорошо известной “гомоклинической бабочке” [5; 6]. Фокусы $O_{l,r}$ остаются единственным притягивающим множеством при $l_h<r<l_{het}$ (заштрихованная область на Рис. 2.7), где l_{het} - гетероклиническая бифрукация, при которой многообразия W^u_l и W^u_r попадают на устойчивые двумерные многообразия седловых циклов, родившихся при гомоклинической бифуркации l_h. Жёлтая область на Рис. 2.7, $l_{het}<r<\min\{l_{AH},l_f\}$, соответствует сосуществованию странного аттрактора Лоренца и двух устойчивых фокусов $O_{l,r}$, где l_{AH} - бифуркация Андронова-Хопфа, а кривая l_f соответствует разрушению инвариантного слоения [133; 144;

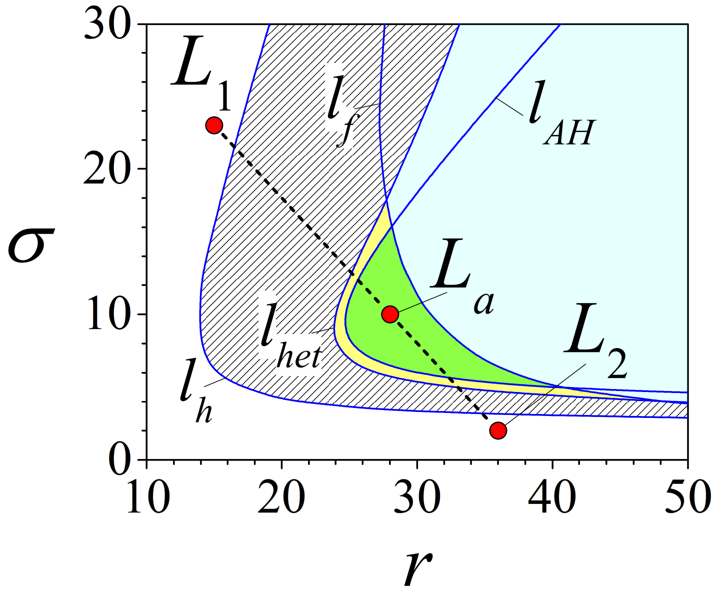

Рисунок 2.7 — Бифуркационная диаграмма системы Лоренца (см. работы [133; 143; 144]). Кривые l_h, l_{het}, l_{AH} и l_f соответствуют гомоклинической, гетероклинической, Андронова-Хопфа бифуркациям, а также бифуркации разрушения инвариантного слоения соответственно. $L_1 = L(15, 23)$, $L_2 = L(36, 2)$, $L_a = L(28, 10)$.

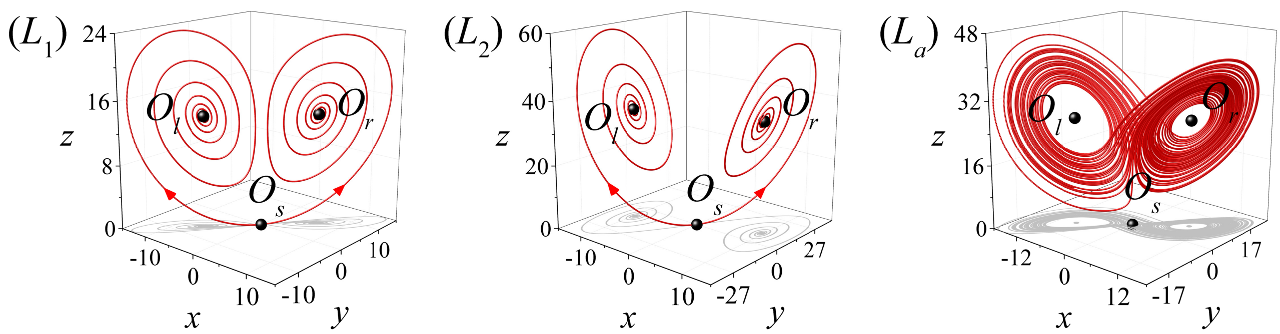

Рисунок 2.8 — Фазовые портреты образующих подсистем $L_1 = L(r_1 = 15, \sigma_1 = 23)$, $L_2 = L(r_2 = 36, \sigma_2 = 2)$ и усреднённой системы $L_a = L(r = 28, \sigma = 10)$. Системы L_1 и L_2 имеют в качестве притягивающего множества только устойчивые фокусы $O_{l,r}$. Усреднённая система L_a имеет глобально устойчивый странный аттрактор Лоренца.

145]. Зелёная область на Рис. 2.7, $l_{AH} < r < l_f$, соответствует существованию глобально устойчивого странного аттрактора Лоренца. Фазовый портрет системы при классических значениях параметров $r = 28$ и $\sigma = 10$ приведён на Рис. 2.8(L_a).

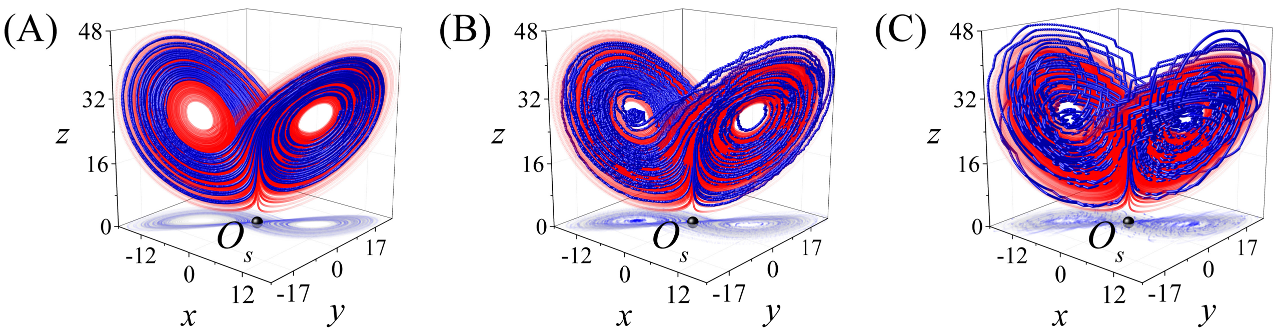

Рисунок 2.9 — Аттрактор мигающей системы (2.41) A_τ (синий) при различных значениях периода τ. Аттрактор-призрак $\mathcal{A}$ (красный) системы (2.41) изображен для всех случаев (A), (B) и (C). При малых τ аттракторы A_τ и $\mathcal{A}$ близки и отдаляются друг от друга с увеличением τ. (A) $\tau = 0.0001$, (B) $\tau = 0.001$, (C) $\tau = 0.01$.

Возникновение аттрактора-призрака.

Напомним, что образующие подсистемы L_1 и L_2 имеют подобную друг другу динамику [см. фазовые портреты на Рис. 2.8(L_1), (L_2)].

Утверждение 2.2.1. *Пусть системы L_1 и L_2 имеют вероятности включения $p_1 = \frac{8}{21}$ и $p_2 = \frac{13}{21}$ соответственно. Тогда странный аттрактор Лоренца $\mathcal{A}$ является аттрактором-призраком мигающей системы Лоренца (2.41), и при достаточно быстром мигании $\tau \ll 1$ нестационарный аттрактор системы (2.41) лежит в окрестности аттрактора $\mathcal{A}$.*

Согласно уравнениям (2.39), (2.40) при достаточно быстром переключении $\tau \ll 1$ усреднённая автономная система $L_a = L(r_a, \sigma_a)$ совпадает с оригинальной системой Лоренца, имеющей странный аттрактор, поскольку усреднённые по времени параметры $r_a = p_1 r_1 + p_2 r_2 = 28$ и $\sigma_a = p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2 = 10$ соответствуют странному аттрактору [см. фазовый портрет на Рис. 2.8(L_a)].

Рассмотрим численно изменения аттрактора системы (2.41) при увеличении периода τ. Аттракторы системы (2.41) при трёх значениях τ изображены на Рис. 2.9. Заметим, что форма аттрактора меняется незначительно, предполагая, что аттракторы мигающей и усреднённой систем остаются достаточно близки.

2.2.2 Мигающая система Хиндмарша-Роуза

Следующая мигающая система получена из нейронной модели Хиндмарша-Роуза (HR) [97; 146]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= bx^2 - x^3 + y - z + I(t), \\ \dot{y} &= 1 - 5x^2 - y, \\ \dot{z} &= 0.01(4(x+1.6) - z), \end{aligned} \tag{2.43}$$

где $b = \text{const} > 0$, а внешний стимул $I(t) = (I_1 - I_2)s(t) + I_2$, $I_{1,2} = \text{const} > 0$ переключается стохастическим параметром $s(t)$ (2.42). На Рис. 2.10 приведена бифуркационная диаграмма системы (2.43) при фиксированном значении $I(t) = \text{const}$ (подробности см. в работах [97; 146—148]). Синяя область соответствует тонической активности, зелёная область - регулярной пачечной активности. Оранжевая область соответствует нерегулярной пачечной активности. Зафиксируем параметр $b = 3$ и выберем параметры $I_1 = 1.6$ и $I_2 = 3.75$ образующих подсистем HR_1 и HR_2 соответствующими тонической активности (см. фазовые портреты на Рис. 2.11).

Утверждение 2.2.2. *Пусть системы HR_1 и HR_2 имеют вероятности включения $p_1 = 0.44$ и $p_2 = 0.56$ соответственно. Тогда аттрактором-призраком является многообходный предельный цикл $\mathcal{B}$ усреднённой системы. Нестационарный аттрактор B_τ системы (2.43) при достаточно быстром переключении $\tau \ll 1$ лежит в окрестности этого аттрактора.*

Согласно уравнению (2.40) усреднённая система HR_a - это автономная система HR с параметром $I = 2.804$, принадлежащим зелёной области бифуркационной диаграммы и соответствующим многообходному устойчивому предельному циклу $\mathcal{B}$.

Рассмотрим численно мигающую систему (2.43) при увеличении периода переключения τ. При малых значениях τ аттрактор B_τ и аттрактор-призрак $\mathcal{B}$ почти совпадают [см. случай $\tau = 0.0001$ на Рис. 2.12(A)]. При небольшом увеличении τ аттрактор B_τ покидает малую окрестность аттрактора $\mathcal{B}$, сохраняя число спайков в пачке [см. случай $\tau = 0.001$ на Рис. 2.12(B)]. При дальнейшем увеличении τ число спайков в аттракторе B_τ отличается от таковых в аттракторе $\mathcal{B}$ [см. случай $\tau = 0.01$ на Рис. 2.12(C)].

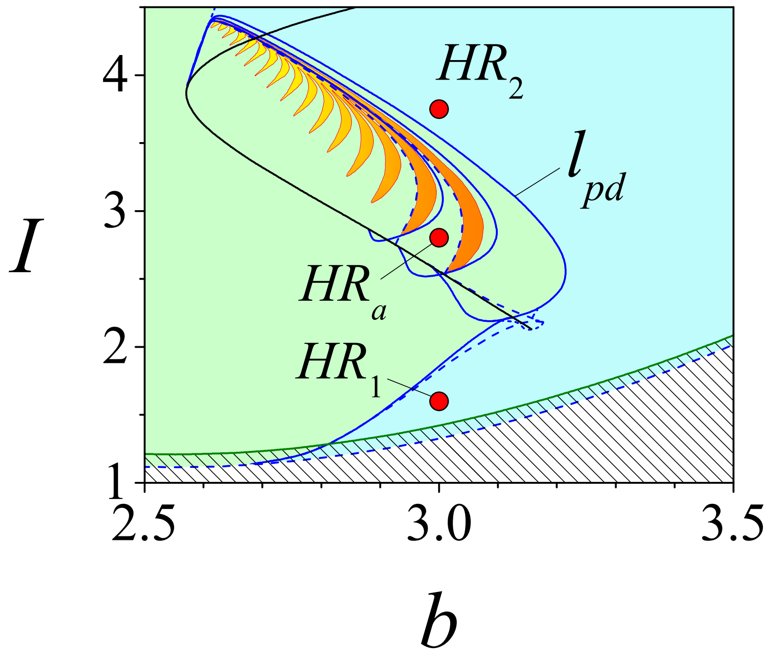

Рисунок 2.10 — Бифуркационная диаграмма системы HR [146]. Синяя область соответствует тонической активности, зелёная область - регулярной пачечной активности, и оранжевая область - нерегулярной пачечной активности. Зелёная и синяя области отделены бифуркацией первого удвоения периода l_{pd}. Образующие подсистемы HR_1 и HR_2 имеют параметры $b = 3$, $I = 1.6$ и $b = 3$, $I = 3.75$ соответственно. Усреднённая система HR_a имеет параметры $b = 3$, $I = 2.804$.

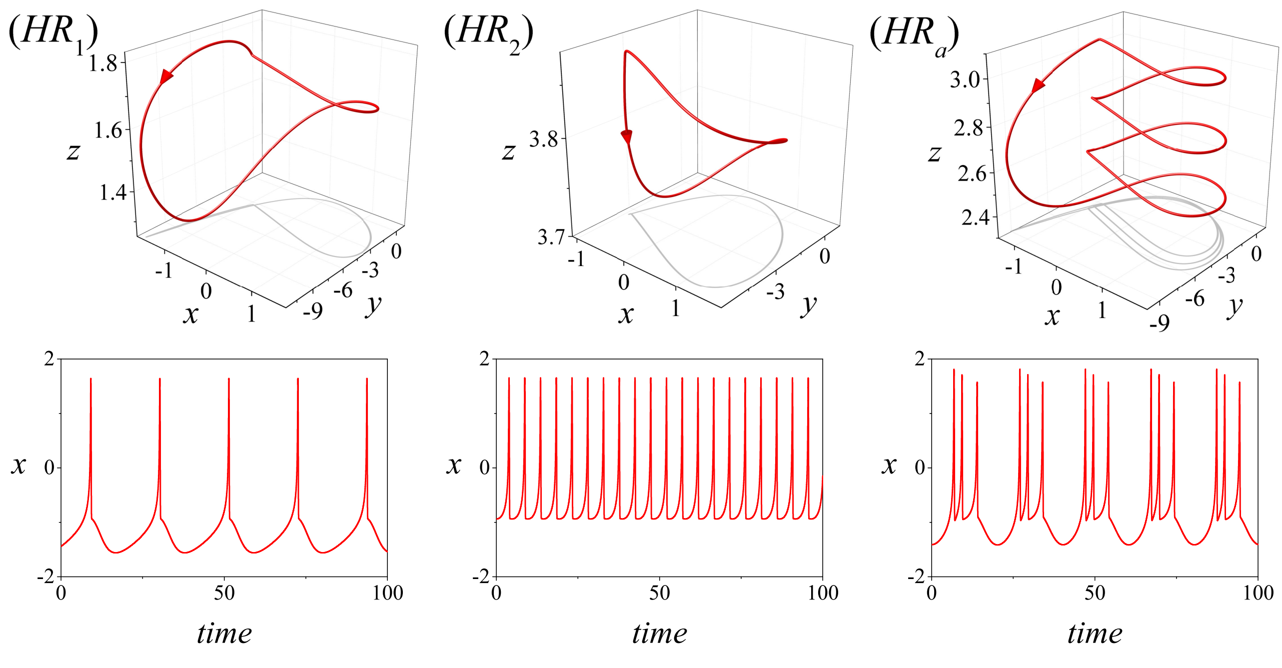

Рисунок 2.11 — Фазовые портреты и осциллограммы систем HR_1, HR_2 и HR_a.

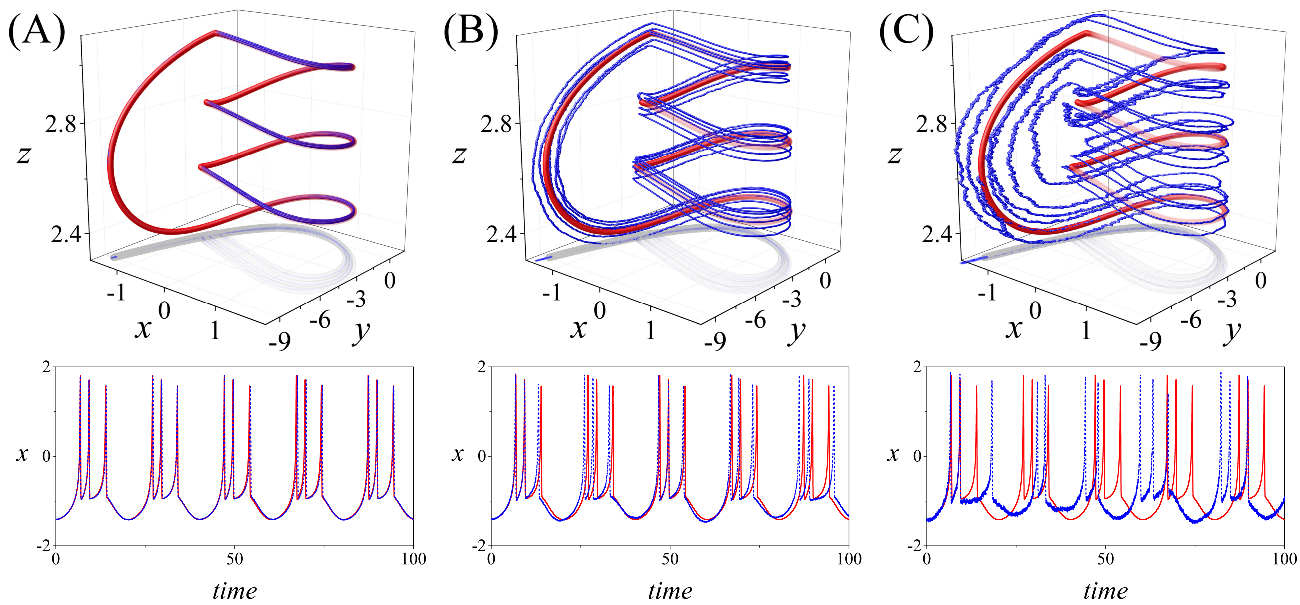

Рисунок 2.12 — Фазовые портреты и осциллограммы мигающей системы Хиндмарша-Роуза (2.43) (изображеы синим) при $\tau = 0.0001$ [колонка (A)], $\tau = 0.001$ [колонка (B)] и $\tau = 0.01$ [колонка (C)]. Красным изображена усреднённая система HR_a.

Глава 3. Синхронизация в ансамблях связанных фазовых осцилляторов Курамото

В главе рассматривается сеть фазовых осцилляторов Курамото второго порядка (с инерцией). Методами качественной теории решается задача о частичной синхронизации, при которой часть осцилляторов синхронны, в то время как остальные составляют асинхронный кластер.

3.1 Сеть осцилляторов Курамото второго порядка

Рассмотрим сеть осцилляторов Курамото второго порядка из N осцилляторов:

$$\beta\ddot{\varphi}_i + \dot{\varphi}_i = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\varphi_j - \varphi_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{3.1}$$

где $\varphi_i \in [0, 2\pi]$ - фаза i-го осциллятора, параметр $\beta > 0$ отвечает за инерцию, а параметр $K > 0$ представляет силу связи в топологии сети “каждый с каждым”. Осцилляторы имеют отличающиеся натуральные частоты ω_i, $i = 1, \ldots, N$, выбранные из дискретного бимодального распределения. Натуральные частоты также могут быть ограниченными функциями времени $\omega_i(t)$.

В зависимости от разброса частот ω_i и инерции β в системе 3.1 может существовать устойчивая частичная синхронизация, когда первые N_{osc} осцилляторов с ω_i, $i = 1, \ldots, N_{osc}$ синхронны и образуют когерентный кластер C_{osc}, в то время как оставшиеся N_{rot} осцилляторов имеют различные частоты и образуют некогерентный кластер C_{rot}. Более точно, имеет место устойчивая синхронизация между любой парой осцилляторов i и j внутри когерентного кластера C_{osc}, если

$$|\varphi_i(t) - \varphi_j(t)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \forall t > 0, \tag{3.2}$$

где параметр $\varepsilon \in (0,\pi]$ – максимум допустимой разности фаз.

Заметим, что этот тип синхронизации допускает колебание разностей фаз в пределах ε. В более общем случае максимальной разности фаз $\varepsilon = \pi$, предотвращающей проскальзывания и вращения осцилляторов, синхронизация определена в самом широком смысле.

Роль ε в устойчивости когерентного кластера C_{osc} будет исследована далее. Для этого будет введено определение ε-*синхронизации* для выбранного $\varepsilon < \pi$. Из (3.2) следует, что частоты осцилляторов внутри когерентного кластера C_{osc} становятся равными в силу $\langle\dot{\varphi}_i\rangle = \langle\dot{\varphi}_j\rangle$, где скобки $\langle\ldots\rangle$ обозначают усреднение по времени. Аналогично проворачивающаяся разность фаз между любым осциллятором k из некогерентного кластера C_{rot} и осциллятором i из когерентного кластера C_{osc} порождает рассинхронизацию между кластерами $\langle\dot{\varphi}_i - \dot{\varphi}_k\rangle \neq 0$. Это определение частичной ε-синхронизации будет уточнено далее. Заметим, что это определение ничего не утверждает о соотношениях фаз осцилляторов внутри некогерентного кластера C_{rot}, чьи вращающиеся фазы могут быть синхронизированы. В результате термин “некогерентный” употребляется к кластеру C_{rot} несколько шире, хотя численное моделирование, выполненное для иллюстрации приведённых аналитических оценок и представленное в разделе 3.3, показывает, что кластер C_{rot} действительно некогерентен для выбранного широкого диапазона параметров и начальных условий.

3.2 Метод систем сравнения

В этом разделе развивается метод систем сравнения для получения достаточных условий на рассогласование частот и инерции, которые обеспечивают устойчивую частичную синхронизацию.

3.2.1 Сведение к системе связанных уравнений маятникового типа

Введём новые переменные для разности фаз между любыми двумя осцилляторами i и j

$$\theta_{ij} = \frac{\varphi_i - \varphi_j}{2}, \quad i,j = 1,2,\ldots,N, \tag{3.3}$$

отмасштабируем параметры и время, а также применим простое тригонометрическое тождество, чтобы переписать систему (3.1) в более удобной форме

$$\ddot{\theta}_{ij} + \lambda\dot{\theta}_{ij} = \Delta_{ij} - F_{ij}\sin\theta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,N, \tag{3.4}$$

где производные вычислены по новому времени $\tau = \sqrt{K/\beta}t$, параметры $\Delta_{ij} = \dfrac{\omega_i - \omega_j}{2K}$ представляют нормированные частотные разности, параметр $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{\beta K}}$ отвечает за затухание, и функция

$$F_{ij} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\cos(\theta_{ki} + \theta_{kj}), \quad i,j = 1,2,\ldots,N \tag{3.5}$$

представляет изменяющиеся во времени разности фаз.

Систему (3.4) можно рассматривать как систему связанных маятников, динамика которой может быть качественно изучена в терминах предельных множеств маятника с затуханием и постоянным моментом [149]. Для этого перепишем систему (3.4) в следующем виде

$$\begin{aligned} &\dot{\theta}_{ij} = y_{ij} \\ &\dot{y}_{ij} = -\lambda y_{ij} + \Delta_{ij} - F_{ij}\sin\theta_{ij}, \quad i,j = 1,2,\ldots,N. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Для анализа ε-синхронизации между осцилляторами i и j когерентного кластера C_{osc} рассмотрим подмножество уравнений (3.6), соответствующее фазовым разностям θ_{ij}, $i,j = 1,2,\ldots,N_{osc}$. Для этого разделим функции F_{ij} на две части, соответствующие связям внутри когерентного кластера C_{osc} и связям с осцилляторами некогерентного кластера C_{rot}

$$F_{ij} = \tfrac{1}{N}\sum_{k=1}^{N_{osc}}\cos(\theta_{ki} + \theta_{kj}) + \tfrac{1}{N}\sum_{k=N_{osc}+1}^{N}\cos(\theta_{ki} + \theta_{kj}), \quad i,j = 1,2,\ldots,N_{osc}, \tag{3.7}$$

где индексы переставлены таким образом, что первые $k = 1,2,\ldots,N_{osc}$ осцилляторов принадлежат когерентному кластеру C_{osc}, в то время как остальные $k = N_{osc}+1,2,\ldots,N$ осцилляторов составляют некогерентный кластер C_{rot}.

Определение 3.2.1. *Частичная ε-синхронизация в системе (3.6) устойчива, если для любого времени $t > 0$ выполняется*

$$\begin{aligned} &|\theta_{ij}(t)| < \varepsilon/2 \quad \text{для} \quad i,j = 1,2,\ldots,N_{osc}, \\ &\dot{\theta}_{ik}(t) > 0 \qquad \text{для} \quad \begin{aligned} &i = 1,2,\ldots,N_{osc}, \\ &k = N_{osc}+1,2,\ldots,N. \end{aligned} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Устойчивая частичная ε-синхронизация определяет оценки сумм в (3.7) так, что ε-синхронные осцилляторы внутри когерентного кластера C_{osc} дают $\cos(\theta_{ki}+\theta_{kj}) > \cos\varepsilon$ в первой сумме, в то время как косинус во второй сумме, соответствующей связям C_{osc} с осцилляторами из C_{rot}, элементарно ограничена $|\cos(\theta_{ki}+\theta_{kj})| < \cos 2\pi = 1$. Следовательно, функции F_{ij} ограничены следующим образом

$$
\begin{aligned}
& a < F_{ij} \leqslant 1 \quad \text{для} \quad i,j = 1,2,\ldots,N_{osc}, \\
& |F_{ik}| \leqslant 1 \qquad \text{для} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,N_{osc}, \\ k = N_{osc}+1,2,\ldots,N, \end{array}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

где параметр a определён как

$$
a = \frac{1}{N}\left(N_{osc}\cos\varepsilon - N_{rot}\right). \tag{3.10}
$$

Следовательно, в силу (3.9), правые части уравнений для $\dot{y}_{ij}$ в (3.6) для $i,j = 1,2,\ldots,N_{osc}$ ограничены так, что

$$
A^-_{ij} < \dot{y}_{ij} \leqslant A^+_{ij}, \quad \text{где} \tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
A^-_{ij} &= \begin{cases} -\Delta_{ij} - \lambda y_{ij} - a\sin\theta_{ij} & \text{при} \quad -\pi \leqslant \theta_{ij} < 0, \\ -\Delta_{ij} - \lambda y_{ij} - \sin\theta_{ij} & \text{при} \quad 0 \leqslant \theta_{ij} < \pi, \end{cases} \\
A^+_{ij} &= \begin{cases} \Delta_{ij} - \lambda y_{ij} - \sin\theta_{ij} & \text{при} \quad -\pi \leqslant \theta_{ij} < 0, \\ \Delta_{ij} - \lambda y_{ij} - a\sin\theta_{ij} & \text{при} \quad 0 \leqslant \theta_{ij} < \pi. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Для систем $(\dot{\theta}_{ij}, \dot{y}_{ij})$ из (3.6) с $i,j = 1,2,\ldots,N_{osc}$, введём систему сравнения

$$
\begin{aligned}
& \begin{array}{l} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = A^+ \end{array} \quad \text{при} \quad y \geqslant 0, \\
& \begin{array}{l} \dot{\theta} = y \\ \dot{y} = A^- \end{array} \quad \text{при} \quad y < 0,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

где функции

$$
\begin{aligned}
A^+ &= \begin{cases} \Delta - \lambda y - \sin\theta & \text{при} \quad -\pi \leqslant \theta < 0, \\ \Delta - \lambda y - a\sin\theta & \text{при} \quad 0 \leqslant \theta < \pi, \end{cases} \\
A^- &= \begin{cases} -\Delta - \lambda y - a\sin\theta & \text{при} \quad -\pi \leqslant \theta < 0, \\ -\Delta - \lambda y - \sin\theta & \text{при} \quad 0 \leqslant \theta < \pi, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

получены из (3.12) исключением индексов и заменой Δ_{ij} на максимальную нормированную разницу частот между двумя осцилляторами когерентного кластера C_{osc}:

$$\Delta = \max_{ij} |\Delta_{ij}|, \quad \text{для} \quad i, j = 1, 2, \ldots, N_{osc}. \tag{3.15}$$

Утверждение 3.2.1. *Каждая проекция векторного поля* $(\dot{\theta}_{ij}, \dot{y}_{ij})$ *исходой системы* (3.6) *на любой траектории системы* (3.13) *при* $y \neq 0$ *повёрнута по часовой стрелке.*

Справедливость этого утверждения следует из неравенства (3.11) и выбора параметра Δ (3.15).

Далее будут выведены условия, при которых траектории системы сравнения (3.13) образуют поглощающую область G_{trap} для траекторий системы $(\dot{\theta}_{ij}, \dot{y}_{ij})$ из (3.6) с $i, j = 1, 2, \ldots, N_{osc}$. Размер области G_{trap} определяет максимальную частотную расстройку Δ, при которой существует ε-синхронизация внутри когерентного кластера C_{osc}.

Условие вращения фаз кластера C_{rot} относительно фаз кластера C_{osc} записывается в виде

$$\delta = \min_{ik} \Delta_{ik} > 1 \quad \text{для} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, N_{osc}, \\ k = N_{osc} + 1, 2, \ldots, N. \end{array} \tag{3.16}$$

Действительно, поскольку $|F_{ik}| \leqslant 1$ для $i = 1, 2, \ldots, N_{osc}$, $k = N_{osc} + 1, 2, \ldots, N$, то $\dot{y}_{ik}$ в (3.6) всегда положительны при $\delta > 1$, что обеспечивает только вращение фазовых разностей. Таким образом, условие (3.16) есть достаточное условие вращения разностей фаз.

Получим достаточные условий частичной ε-синхронизации, используя построенные системы сравнения (3.13).

3.2.2 Динамика кусочно-гладкой системы сравнения

Система сравнения (3.13) представляет собой двумерную кусочно-гладкую систему, которая составлена из четырех маятниковых уравнений, определяющих различную динамику в каждом квадранте плоскости (θ, y).

Система (3.13) инвариантна относительно замены $(\theta, y, \Delta) \to (-\theta, -y, -\Delta)$. Эта нечётная симметрия означает, что траектории системы при $y < 0$ являются простыми образами траекторий из полуплоскости $y > 0$, отражёнными относительно координатных осей θ и y.

Состояния равновесия (3.13) лежат на линии разрыва $y = 0$. Точнее, система A^+ имеет два состояния равновесия

$$e_1(\theta_{e_1} = \arcsin\frac{\Delta}{a}, 0), \quad s_1(\theta_{s_1} = \pi - \arcsin\frac{\Delta}{a}, 0), \tag{3.17}$$

которые лежат в интервале $0 \leqslant \theta < \pi$. В силу нечётной симметрии, система A^- также имеет два состояния равновесия

$$e_2(\theta_{e_2} = -\arcsin\frac{\Delta}{a}, 0), \quad s_2(\theta_{s_2} = -\pi + \arcsin\frac{\Delta}{a}, 0), \tag{3.18}$$

принадлежащих интервалу $-\pi \leqslant \theta < 0$. В системах A^+ и A^- равновесия $e_{1,2}$ являются устойчивыми, и $s_{1,2}$ являются сёдлами. Важно подчеркнуть, что при объединении в кусочно-гладкую систему сравнения (3.13) эти четыре неподвижные точки меняют свой тип и устойчивость в соответствии со следующими свойствами.

Свойство 3.2.1. *При $y = +0$ векторное поле системы сравнения (3.13) определено системой A^+ с $y = 0$, и, следовательно, $\dot{y}|_{y=+0} < 0$ вдоль отрезка S_{e_1,s_1}, соединяющего точки e_1 и s_1, и $\dot{y}|_{y=+0} > 0$ вдоль отрезка, соединяющего точки e_1 и $s_1 - 2\pi$.*

Свойство 3.2.2. *При $y = -0$ векторное поле системы сравнения (3.13) определено системой A^- с $y = 0$, и, следовательно, $\dot{y}|_{y=-0} < 0$ вдоль отрезка S_{e_2,s_2}, соединяющего точки e_2 и s_2, и $\dot{y}|_{y=-0} < 0$ вдоль отрезка, соединяющего точки e_2 и $s_2 + 2\pi$.*

Свойство 3.2.3. *Комбинируя взаимное расположение векторных полей из Свойств 1 и 2, можно сделать вывод, что состояния равновесия e_1 и e_2 становятся полуустойчивыми, притягивая (отталкивая) траектории из области $y > 0$ ($y < 0$). Отрезок S_{e_1,e_2} между состояниями равновесия e_1 и e_2 является отрезком неустойчивых скользящих движений. Точно так же состояния равновесия s_1 и s_2 становятся псевдо-сёдлами с отрезком разрыва $y = 0$ между s_1 и $s_2 + 2\pi$, отвечающим неустойчивым скользящим движениям и играющим роль сепаратрисы [Рис. 3.2(b)].*

В силу Утверждения 3.2.1, колебательные предельные циклы и гетероклинические контуры в системе сравнения (3.6) образуют поглощающие области для траекторий исходной системы $(\dot{\theta}_{ij}, \dot{y}_{ij})$. Далее будет качественно и количественно охарактеризована бифуркационная диаграмма (λ, Δ) с Рис. 3.1, которая указывает области параметров, соответствующие поглощающей области.

Для этого, применим результаты из работы [150], посвящённой качественному бифуркационному анализу системы маятникового типа на цилиндре (3.13):

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= y, \\ \dot{y} &= \gamma - \lambda y - aF(\theta), \end{aligned} \tag{3.19}$$

где параметр $\gamma > 0$, а периодическая функция $F(\theta) = F(\theta + 2\pi)$ с нулевым средним может быть кусочно-гладкой и должна удовлетворять следующим условиям: $F(\theta) \in C^1$ при $\theta \in [0, 2\pi)$, где $\theta \neq \theta^{(h)}$ $(h = 1, \dots, n)$, $F(\theta^{(h)}) \in Lip$, $F_\theta(\theta) > 0$ при $\theta \in (-\theta_0, \theta_0)$, $F_\theta(\theta) < 0$ при $\theta \in (\theta_0, 2\pi - \theta_0)$, $F(\theta_0) = 1$ и $\max |F_\theta(\theta)| = m$. Производная $F_\theta(\theta)$ кусочно-гладкой функции $F(\theta)$ в n особых точках θ_h может быть доопределена любым значением, лежащим между левым и правым пределами $F_\theta(\theta)$. Важная особенность кусочно-гладкой функции $F(\theta)$ состоит в том, что её среднее значение $\langle F(\theta) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} F(\theta) d\theta = 0$.

Теорема 5 из работы [150] гарантирует, что бифуркационная диаграмма в параметрах (λ, γ) для кусочно-гладкой системы (3.19) качественно аналогична уравнению классического маятника с затуханием λ и постоянным вращающим моментом γ. В частности, эти результаты доказывают (а) существование кривой $\gamma = \gamma_{HM}(\lambda)$, которая соответствует гомоклинической бифуркации седла (3.19), и (б) седло-узловой бифуркации в $\gamma = a + \dfrac{1-a}{2\pi}$. На плоскости параметров (λ, γ) график $\gamma = \gamma_{HM}(\lambda)$ выходит из начала координат и соединяется с горизонтальной линией $\gamma = a + \dfrac{1-a}{2\pi}$ в некоторой точке, аналогичной гомоклинической бифуркационной кривой $\gamma = T(\lambda)$. Эта кривая хорошо аппроксимирована в [124] формулой $T(\lambda) = \dfrac{4}{\pi}\lambda - 0.305\lambda^3$ и приближается к линии седло-узловой бифуркации $\gamma = 1$ в классическом уравнении маятника с затуханием и постоянным крутящим моментом [149].

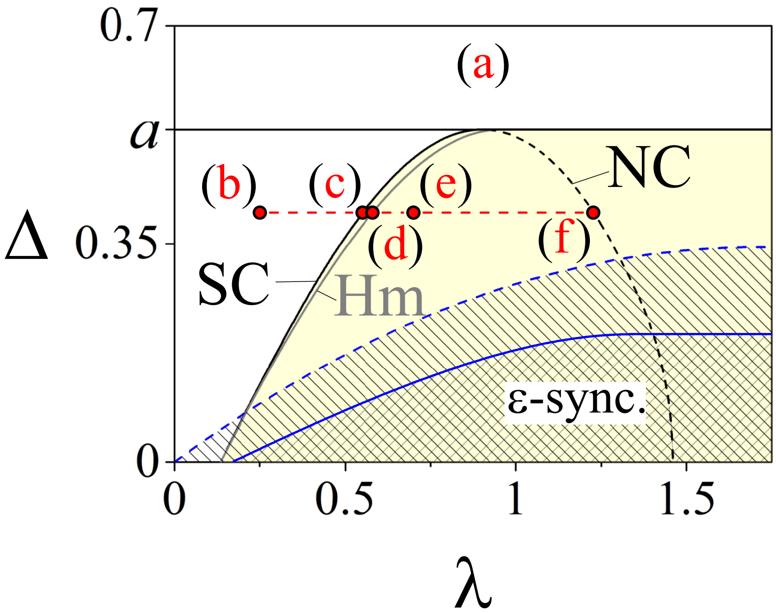

Рисунок 3.1 — Бифуркационная диаграмма системы сравнения (3.13) (численная иллюстрация Теорем 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 и 3.3.1). Жёлтая область соответствует существованию поглощающей области G_{trap}. Кривая SC соответствует гетероклинической бифуркации, образующей гетероклинический контур H_{SC}. Линия $\Delta = a$ указывает на седло-узловую бифуркацию, при которой состояния равновесия e_1 и s_1 (e_2 и s_2) слипаются вместе и исчезают. Кривая Hm соответствует гомоклинической бифуркации седла s_1 (и s_2). Кривая NC соответствует гетероклинической бифуркации, порождающей гетероклинический контур H_{NC}. Точки (a)–(f) соответствуют частям (a)–(f) Рис. 3.2. Синяя сплошная кривая представляет собой комбинированный график функций (3.21) и (3.22) с фиксированным $d_G = \varepsilon = \pi/4$, ограничивающим область параметров (с двойной штриховкой), где численно подтверждены условия Теоремы 3.2.3 для системы сравнения (3.13), обеспечивающие частичную ε-синхронизацию. Синяя пунктирная кривая, рассчитанная для исходной системы (3.1), ограничивает фактическую область параметров (заштрихованная) для частичной ε-синхронизации в системе (3.1). Другие параметры: $N_{osc} = 90$, $N_{rot} = 10$, $a = 0.536$ и $\varepsilon = \pi/4$.

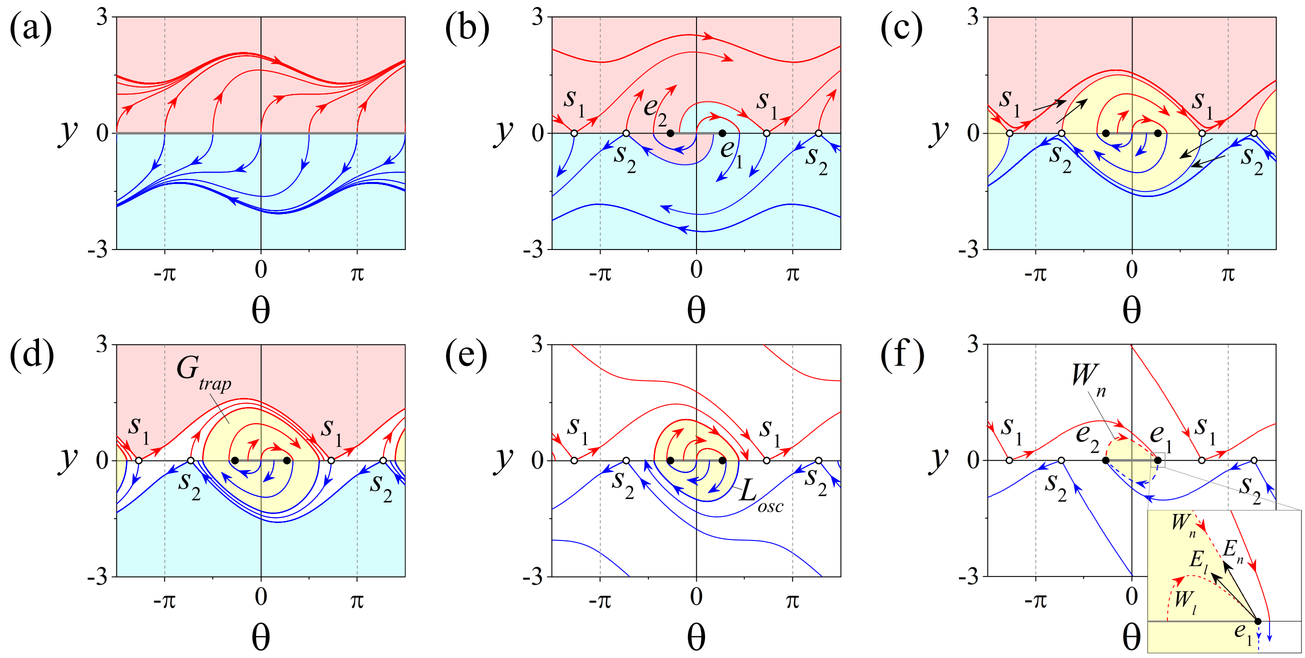

Рисунок 3.2 — Существование поглощающей области G_{trap} (жёлтая область) и изменение её размера в системе сравнения (3.13) (иллюстрация Теорем 3.2.1, 3.2.2. Все траектории построены численно. (a) Поглощающая область отсутствует ($\lambda = 1$, $\Delta = 1.53$). (b) Нет поглощающей области. Существуют полуустойчивые состояния равновесия e_1, e_2, s_1 и s_2 ($\lambda = 0.25$, $\Delta = 0.4$). (c) Рождение поглощающей области G_{trap} посредством бифуркации гетероклинического контура H_{SC} (не отмечен) ($\lambda = \lambda_{SC} = 0.25$, $\Delta = 0.4$). Черные стрелки указывают направление векторного поля соответствующей маятниковой системы (3.6). (d) Бифуркация гомоклинической орбиты Hm (не отмечена) ($\lambda = \lambda_{Hm} = 0.580077$, $\Delta = 0.4$). Эта гомоклиническая орбита сосуществует с устойчивым предельным циклом L_{osc}, ограничивающим G_{trap} и рожденным в результате гетероклинической бифуркации в (c). (e) Цикл L_{osc} уменьшается ($\lambda = 0.7$, $\Delta = 0.4$). Вращательные предельные циклы отсутствуют. (f) Образование устойчивого гетероклинического контура H_{NC} размера d_G (3.21) (не отмечен) устойчивым неведущим многообразием W_n (красная пунктирная линия) узла e_1, выпущенным из e_2, и его нечётно-симметричным аналогом (синяя пунктирная линия) ($\lambda = \lambda_{NC} = 1.2271$, $\Delta = 0.4$). На вставке изображена увеличенная окрестность e_1 со взаимным расположением устойчивого неведущего (W_n) и ведущего (W_l) многообразий e_1 и неустойчивого многообразия s_1 (красная сплошная линия). Линии черных стрелок E_l и E_n – это собственные векторы, связанные с собственными значениями $\kappa^{\pm}$ (3.24) состояния равновесия e_1.

Система сравнения (3.13) приводится к общей системе (3.19) при $\gamma = \Delta + \dfrac{1-r}{2\pi}$. Это связано с тем, что среднее значение A^+ (и A^-)

$$\langle A^+(\theta)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} A^+(\theta)d\theta = -\frac{1-a}{2\pi}. \tag{3.20}$$

Следовательно, система сравнения (3.13) наследует основные бифуркационные свойства системы (3.19) так, что её гомоклиническая бифуркационная кривая $\Delta = \Delta_{Hm}(\lambda)$ и седло-узловая бифуркация $\Delta = a$ идентичны соответствующим кривым системы (3.19) с точностью до вертикального сдвига $-\dfrac{1-a}{2\pi}$ (см. кривую Hm на Рис. 3.1).

3.2.3 Существование и размер поглощающей области

Следующее утверждение даёт условие существования поглощающей области G_{trap} и обеспечивает бифуркационное разбиение пространства параметров для системы сравнения (3.13) (Рис. 3.1).

Теорема 3.2.1 (о существовании поглощающей области)**.**

А. Для постоянного $\Delta < a$ поглощающая область G_{trap} (жёлтая область на Рис. 3.2) существует для любого $\lambda \geqslant \lambda_{SC}$, где $\lambda_{SC} < \lambda_{Hm}$ – бифуркационное значение, соответствующее образованию гетероклинического контура H_{SC} из устойчивых многообразий сёдел s_1 и s_2.

Б. Поглощающая область G_{trap} не существует при $\Delta > a$.

Доказательство. Для доказательства утверждения А Теоремы 3.2.1 мы отталкиваемся от фазового портрета и взаимного расположения траекторий при гомоклинической бифуркации λ_{Hm}, гарантированной Теоремой 5 из [150]. Этот фазовый портрет определён существованием гомоклинической орбиты седла s_1 и симметричной ей гомоклинической орбиты седла s_2. Полуустойчивые состояния равновесия e_1 и e_2 окружены устойчивым колебательным предельным циклом L_{osc} [Рис. 3.2(d)]. Этот предельный цикл образован двумя склеенными траекториями, выходящими из неустойчивого участка линии разрыва $y = 0$ между e_2 и s_2 при $y > 0$ и между e_1 и s_1 при $y < 0$ соответственно (см. Свойства 3.2.1 и 3.2.2). Заметим, что этот предельный цикл образует искомую поглощающую область G_{trap}. В силу существования гомоклинической орбиты седла s_1 (s_2), траектория системы A^+ (A^-), выходящая из точки s_2 при $y > 0$ (s_1 при $y < 0$), не может достичь седла s_1 (s_2) и вернуться на линию разрыва $y = 0$ в точке $\theta < s_1$ ($\theta > s_2$).

При доказательстве утверждения A Теоремы 3.2.1 будем использовать следующее свойство. Векторное поле системы сравнения (3.13) поворачивается по часовой стрелке с увеличением λ, поскольку $\partial(A^\pm/y)/\partial\lambda = -1 < 0$. Следовательно, векторное поле, изначально касающееся предельного цикла L_{osc}, с увеличением λ поворачивается по часовой стрелке и направлено внутрь L_{osc}, тем самым уменьшая предельный цикл. Монотонный поворот векторного поля по часовой стрелке также обеспечивает строгий порядок изменения взаимного расположения устойчивого и неустойчивого многообразий сёдел s_1 и s_2 и устойчивых многообразий состояний равновесия e_1 и e_2. Используя фазовый портрет при $\lambda = \lambda_{Hm}$, мы сначала уменьшаем λ и находим бифуркационное значение λ, при котором исчезает предельный цикл. Уменьшение λ поворачивает векторное поле против часовой стрелки, тем самым (а) разрушает гомоклиническую орбиту, (б) порождает устойчивый вращательный предельный цикл L_{rot} с $\theta(t) \in [-\pi, \pi]$ и приводит к увеличению колебательного предельного цикла до момента его влипания в гетероклинический контур H_{SC}, который "склеен" из двух устойчивых многообразий седел s_1 и s_2 при $\lambda = \lambda_{SC}$ [Рис. 3.2(c)]. Траектория системы A^+, выходящая из точки $(s_2, 0)$, достигает седла s_1 и становится ее устойчивым многообразием, которое, в свою очередь, образует верхнюю часть гетероклинического контура H_{SC} при $y > 0$. Аналогично траектория системы A^-, выпущенная из точки $(s_1, 0)$, становится устойчивым многообразием седла s_2 и замыкает гетероклинический контур при $y < 0$.

Дальнейшее уменьшение $\lambda < \lambda_{SC}$ вызывает дополнительный поворот векторного поля, который приводит к исчезновению гетероклинического контура H_{SC}, и, следовательно, поглощающей области G_{trap} [Рис. 3.2(b)].

Чтобы завершить доказательство утверждения A Теоремы 3.2.1, покажем, что увеличение $\lambda > \lambda_{Hm}$ сохраняет поглощающую область G_{trap}. Увеличение λ от $\lambda = \lambda_{Hm}$ разрушает гомоклиническую орбиту, так что неустойчивое многообразие s_1 (s_2) лежит ниже (выше) устойчивого многообразия s_1 (s_2) в области $[-\pi, \pi]$ и, следовательно, попадает на линию разрыва $y = 0$ в точке p^+ (p^-) между сёдлами e_1 и s_1 (e_2 и s_2) [см. Рис. 3.2(e)]. Точки p^+ и p^- [не отмеченные на Рис. 3.2(e)] ограничивают размер предельного цикла L_{osc}. Действительно, существование устойчивого предельного цикла гарантировано, поскольку все траектории системы A^+, начинающиеся между точками p^+ и e_2 на прямой $y = 0$, должны вернуться на отрезок прямой $y = 0$ между точками p^- и e_1 при $y > 0$ в силу Свойства 3.2.3. Следовательно, должна существовать траектория системы A^+, которая соответствует своему симметричному аналогу в системе A^-, чтобы замкнуть цикл и сформировать устойчивый предельный цикл L_{osc}, ограничивающий поглощающую область G_{trap}.

Отметим, что полуустойчивые неподвижные точки e_1 и e_2 системы сравнения (3.13) являются устойчивыми фокусами при $\lambda = \lambda_{Hm}$ и превращаются в устойчивые узлы при $\lambda = \lambda_{DN} > \lambda_{Hm}$ [явное значение λ_{DN} указано в (3.23)].

Критическим для нашего дальнейшего бифуркационного перехода является взаимное расположение траектории T_{e_2}, исходящей из точки e_2 при $y > 0$, и более сильного (неведущего) устойчивого многообразия W_n устойчивого узла e_1 системы A^+. Важно подчеркнуть, что пока существует устойчивый предельный цикл L_{osc}, траектория T_{e_2} заканчивается на нём и лежит выше устойчивого многообразия W_n точки e_1. Более слабое (ведущее) устойчивое многообразие W_l всегда лежит ниже неведущего многообразия W_n в плоскости (θ, y). Это расположение будет подробно описано путём вычисления соответствующих собственных векторов в доказательстве утверждения 3 Теоремы 3.2.3 и показано на Рис. 3.2(f).

Увеличение λ уменьшает зазор между критической траекторией T_{e_2} и неведущим устойчивым многообразием W_n. Устойчивый предельный цикл L_{osc} при этом сохраняется до бифуркационного значения $\lambda = \lambda_{NC}$. При этом значении зазор исчезает, так что траектория T_{e_2} и многообразие W_n слипаются вместе [Рис. 3.2(f)]. Аналогично слипаются их нечётно-симметричные аналоги в системе A^-, траектория T_{e_1}, выходящая из точки $(e_1, 0)$ при $y < 0$, и неведущее устойчивое многообразие неподвижной точки e_2. Это приводит к образованию устойчивого гетероклинического контура между полуустойчивыми состояниями равновесия e_1 и e_2 системы сравнения (3.13) и исчезновению устойчивого предельного цикла L_{osc}.

Заметим, что равновесия e_1 и e_2 являются устойчивыми узлами систем A^+ и A^- соответственно, поэтому мы назвали этот контур гетероклиническим “узловым” контуром H_{NC} чтобы отличать его от гетероклинического контура H_{SC}, образованного из двух псевдоседел s_1 и s_2 [см Рис. 3.2(c)].

Гетероклинический контур H_{NC}, представляющий поглощающую область G_{trap}, сохраняется для любого значения $\lambda > \lambda_{NC}$. Действительно, увеличение λ за кривую λ_{NC} приводит к разделению траектории T_{e_1} и неведущего многообразия W_n, так что траектория T_{e_1} находится под W_n. Зажатая между W_n и отрезком неустойчивых скользящих движений S_{e_1,e_2} траектория T_{e_1} всегда достигает равновесия e_1, тем самым образуя верхнюю часть гетероклинического контура H_{NC} при $y > 0$. Аналогично его нечётно-симметричный образ T_{e_2} формирует нижнюю часть H_{NC} при $y < 0$. Это завершает доказательство утверждения А Теоремы 3.2.1.

Перейдём к доказательству утверждения Б Теоремы 3.2.1. Равновесия e_1, s_1, e_2 и s_2 не существуют при $\Delta > a$, и, следовательно, не существуют колебательные предельные циклы и гетероклинические контуры, образующие поглощающую область. В этом случае динамика системы сравнения (3.13) определена двумя глобально устойчивыми вращательными предельными циклами [Рис. 3.2(a)]. □

Теорема 3.2.2 (о размере поглощающей области G_{trap}).

А. При $\Delta < a$ и $\lambda \geqslant \lambda_{NC}$, где λ_{NC} - бифуркационное значение, соответствующее образованию гетероклинического контура H_{NC} (см. Теорему 3.2.1), размер поглощающей области G_{trap} по координате θ определён координатами состояний равновесия e_1 и e_2 и равен

$$d_G = 2 \arcsin \frac{\Delta}{a}. \tag{3.21}$$

Б. При $\Delta < a$ и $\lambda_{SC} \leqslant \lambda < \lambda_{NC}$, размер поглощающей области G_{trap} определён функцией

$$d_G = f(\lambda, \Delta), \tag{3.22}$$

где функция $f(\lambda, \Delta)$ монотонно убывает с ростом $\lambda \in [\lambda_{SC}, \lambda_{NC})$ и монотонно возрастает с ростом $\Delta \in [0, a)$ и $f(\lambda, 0) = 0$.

Доказательство. Из доказательства Теоремы 3.2.1 следует, что для $\Delta < a$ и $\lambda \geqslant \lambda_{NC}$ поглощающая область G_{trap} представлена гетероклиническим контуром H_{NC}, а её размер d_G по θ есть расстояние между состояними равновесия e_1 и e_2. Следовательно, в силу (3.17)–(3.18), $d_G = 2 \arcsin \dfrac{\Delta}{a}$. Это завершает доказательство утверждения А Теоремы 3.2.2.

Доказательство утверждения Б Теоремы 3.2.2 основано на свойствах, выявленных в доказательстве Теоремы 3.2.1 и утверждающих, что разрушение гетероклинического контура H_{NC} уменьшением $\lambda < \lambda_{NC}$ при фиксированном $\Delta^* < a$ порождает колебательный предельный цикл L_{osc}, амплитуда по θ которого больше θ_{e_1}. Более того, из-за монотонно возрастающего поворота векторного поля против часовой стрелки с дальнейшим уменьшением λ амплитуда предельного цикла L_{osc} монотонно увеличивается, пока при уменьшении λ не достигает своего бифуркационного значения λ_{SC}, при котором предельный цикл перестает существовать. Это означает, что размер поглощающей области d_G, определяемый двойной амплитудой предельного цикла L_{osc} по θ, является монотонно убывающей функцией в интервале $\lambda \in [\lambda_{SC}, \lambda_{NC})$.

В отличие от увеличения λ, увеличение Δ монотонно поворачивает векторное поле системы сравнения (3.13) против часовой стрелки, поскольку для системы A^+ (A^-) при $y > 0$ ($y < 0$) производная имеет вид $\partial(A^+/y)/\partial\Delta = 1/y < 0$ $[\partial(A^-/y)/\partial\Delta = -1/y > 0]$. Следовательно, при фиксированном $\lambda^* \in [\lambda_{SC}, \lambda_{NC})$ предельный цикл L_{osc} монотонно увеличивается в размере. Формально вводя некоторую функцию $f(\lambda, \Delta)$, которая фиксирует монотонное уменьшение и увеличение $d_G(\lambda, \Delta)$ в λ и Δ соответственно, мы приходим к утверждению Б Теоремы 3.2.2. $\square$

Замечание 3.2.1. Теорема 3.2.2 даёт качественное описание зависимости d_G от λ и Δ, поскольку аналитический вывод точного вида функции $f(\lambda, \Delta)$ и явного значения λ_{NC} недоступен для неинтегрируемой системы сравнения (3.13). Однако, можно аналитически получить нижние и верхние оценки для λ_{NC} (см. Теорему 3.2.3). Из описанных в Теореме 3.2.2 свойств функции $f(\lambda,\Delta)$ следует существование порога $\lambda = \lambda_{NC}$ и, следовательно, порогового значения инерции β, за пределами которого инерция начинает влиять на размер поглощающей области G_{trap}.

Теорема 3.2.3 (о количественных оценках). *Бифуркационное значение λ_{NC}, используемое в Теореме 3.2.2, может быть оценено следующим образом:*

$$\lambda_{DN} < \lambda_{NC} < \lambda_{up}, \tag{3.23}$$

где $\lambda_{DN} = 2(a^2 - \Delta^2)^{1/4}$ *и* $\lambda_{up} = 2\sqrt{(\Delta + 1)/\arcsin\dfrac{\Delta}{a}}$.

Доказательство. Нижняя граница λ_{DN} соответствует критическому значению λ, при котором состояние равновесия e_1, являющееся устойчивым узлом системы A^+, становится вырожденным узлом, прежде чем превратиться в устойчивый фокус. Тип и устойчивость состояния равновесия e_1 системы A^+ можно оценить с помощью уравнения $\ddot{\theta} + \lambda\theta + a\sin\theta = \Delta$, которое даёт характеристическое уравнение $\kappa^2 + \lambda\kappa + \sqrt{a^2 - \Delta^2} = 0$ для $\theta_{e_1} = \arcsin\dfrac{\Delta}{a}$ и полученное применением тривиального алгебраического выражения. Корни характеристического уравнения:

$$\kappa^{\pm} = -\lambda/2 \pm \sqrt{\lambda^2/4 - \sqrt{a^2 - \Delta^2}}, \tag{3.24}$$

поэтому состояние равновесия e_1 системы A^+ становится устойчивым вырожденным узлом с кратным собственным значением $\kappa^{\pm} = -\lambda/2$ при $\lambda = \lambda_{DN} = 2(a^2 - \Delta^2)^{1/4}$. Уравнение (3.24) также указывает, что переход состояния равновесия системы A^+ от устойчивого узла при λ_{NC} к вырожденному узлу и далее к устойчивому фокусу вызвано уменьшением λ, тем самым демонстрируя, что $\lambda_{DN} < \lambda_{NC}$.

Верхняя граница λ_{up}, на которой выходящая из точки e_2 при $y > 0$ траектория T_{e_2} гарантированно приближается к состоянию равновесия e_1 и, следовательно, образует верхнюю часть гетероклинического контура H_{NC} (см. доказательство Теоремы 3.2.1), может быть получена через направляющую функцию Ляпунова. Пусть $V(\theta, y) = 0$ представляет прямую $l : y = -\dfrac{\lambda}{2}(\theta - \theta_{e_1})$, которая проходит через состояние равновесия e_1. Ее отрицательный наклон $-\lambda/2$ был выбран для размещения линии между двумя собственными векторами $E_l = \kappa^+(\theta - \theta_{e_1})$ и $E_n = \kappa^-(\theta - \theta_{e_1})$ устойчивого узла e_1, где собственный вектор E_n с более крутым отрицательным наклоном представляет более сильное (неведущее) направление и касается неведущего устойчивого многообразия W_n [см. вставку на Рис. 3.2(f)]. Таким образом, линия l выбрана так, чтобы играть роль W_n и направлять траекторию T_{e_2} к равновесию e_2. Покажем, что векторное поле системы A^+ трансверсально пересекает прямую l по направлению вниз, так что траектория T_{e_2} непременно достигнет равновесия e_2. Для этого вычислим производную функции $V = y + \dfrac{\lambda}{2}(\theta - \theta_{e_1})$ вдоль траекторий системы A^+ (3.14), так что $\dot{V}|_{V=0} = \dot{y} + \dfrac{\lambda}{2}\dot{\theta}|_{V=0}$, откуда получаем

$$\dot{V}|_{V=0} = \begin{cases} \Delta - \lambda y - \sin\theta + \lambda y/2 & \text{при} \quad \theta \in (-\theta_{e_1}, 0], \\ \Delta - \lambda y - a\sin\theta + \lambda y/2 & \text{при} \quad \theta \in [0, \theta_{e_1}), \end{cases} \tag{3.25}$$

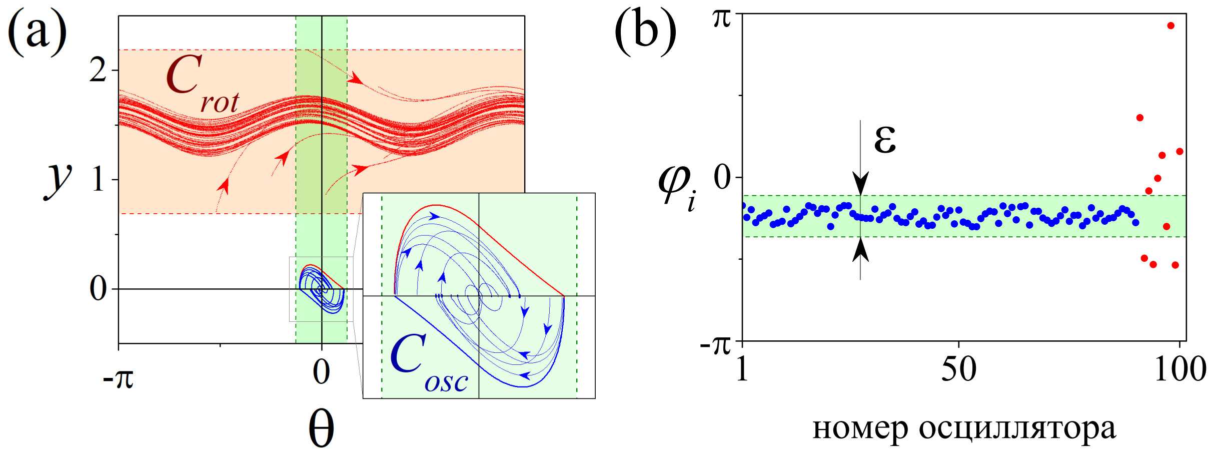

Рисунок 3.3 — Устойчивая частичная синхронизация в сети (3.1) из 100 осцилляторов с $N_{osc} = 90$ и $N_{rot} = 10$. (a) Траектории осцилляторов из когерентного кластера C_{osc} (синие) и из некогерентного кластера C_{rot} (красные). Зелёная полоса отображает максимальную разность фаз ε в C_{osc}. Светло-красная полоса указывает установленный диапазон фазовых скоростей внутри C_{rot}. На вставке показана форма поглощающей области, определяемая гетероклиническим контуром H_{NC} системы сравнения (3.13) для выбранных $\lambda = 1.6 > \lambda_{NC}$ и $\Delta = 0.18$. (b) Изображение пространственно–временного паттерна в момент времени $t = 100$ (10^5 итераций с шагом $h = 0.001$). Синие и красные точки указывают мгновенные фазы осцилляторов в C_{osc} и C_{rot} соответственно. Зелёная полоса соответствует полосе на (a). Натуральные частоты ω_i, $i = 1, 2, \ldots, N_{osc}$ и ω_k, $k = 1, 2, \ldots, N_{rot}$ выбраны случайным образом из $[10 - \Delta, 10 + \Delta]$ и $[14.2 + \Delta, 15 + \Delta]$ соответственно. Начальные фазы φ_i, $i = 1, 2, \ldots, N_{osc}$ равномерно распределены в пределах $[-\pi, \pi]$. Начальные фазы φ_k, $k = 1, 2, \ldots, N_{rot}$ выбираются случайным образом в пределах $[-\pi, \pi]$. Начальные скорости внутри C_{osc} устанавливаются равными 0.1, а внутри C_{rot} выбираются случайным образом из $[-1, 1]$.

где y нужно заменить на $y = -\lambda(\theta - \theta_{e_1})/2$. Чтобы доказать, что линия $l: V(\theta, y) = 0$ является направляющей функцией Ляпунова для траектории T_{e_2}, необходимо найти условия, при которых $\dot{V} < 0$. Таким образом, преобразовывая (3.25), получим

$$\begin{aligned} &\lambda^2(\theta_{e_1} - \theta)/4 > \Delta - \sin\theta \quad \text{при} \quad \theta \in [-\theta_{e_1}, 0], \\ &\lambda^2(\theta_{e_1} - \theta)/4 > \Delta - a\sin\theta \quad \text{при} \quad \theta \in [0, \theta_{e_1}]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Не пытаясь решить этот набор трансцендентных неравенств, выведем верхнюю границу для λ, которая гарантирует выполнение неравенств (3.26). Для этого мы потребуем, чтобы левые части (LHS) уравнений (3.26) $\lambda^2\theta_{e_1}/4$ при $\theta = 0$ были больше максимума правых частей (RHS) $\Delta + 1$ при $\theta = -\pi$. С графической точки зрения это достаточное условие означает, что линия, представленная LHS с пересечением оси $O\theta$ в $\theta = \theta_{e_1}$, пересекает ось Oy в точке, находящейся выше максимума $\Delta+1$ графика $\Delta - \sin\theta$, и, следовательно, линия располагается над графиками функции RHS для любого $\theta \in (-\theta_{e_1}, \theta_{e_1})$. Это условие даёт $\lambda^2 > 4(\Delta + 1)/\theta_{e1}$. Таким образом, заменяя $\theta_{e1} = \arcsin\dfrac{\Delta}{a}$, мы получаем, что для $\lambda > \lambda_{up} = 2\sqrt{(\Delta + 1)/\arcsin\dfrac{\Delta}{a}}$ векторное поле системы сравнения (3.13) пересекает линию l трансверсально по направлению вниз, тем самым гарантируя наличие гетероклинического контура H_{NC}. □

Замечание 3.2.2. Чтобы явно выразить условия Теоремы 3.2.2 через параметры системы сравнения, в утверждении А (Б) Теоремы 3.2.2 следует заменить λ_{NC} на верхнюю (нижнюю) оценку λ_{up} (λ_{DN}) из (3.23).

Охарактеризовав свойства поглощающей области G_{trap} системы сравнения (3.13), получим условия существования устойчивой ε-синхронизации внутри когерентного кластера C_{osc} системы (3.1), зависящие от свойств G_{trap}.

3.3 Частичная синхронизация: основной результат

Напомним, что существование поглощающей области G_{trap} системы сравнения (3.13) означает, что траектории каждой системы $(\dot{\theta}_{ij}, \dot{y}_{ij})$ из (3.6) с $i, j = 1, 2, \ldots, N_{osc}$ и начальными условиями $\dot{\theta}_{ij}(0) = \theta_0$, $\dot{y}_{ij}(0) = y_0$, где

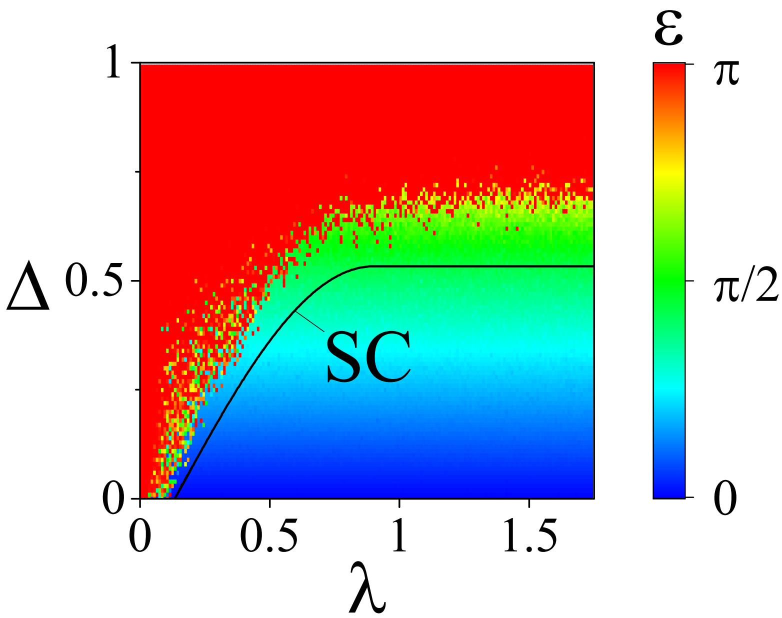

Рисунок 3.4 — Диаграмма устойчивости ε-синхронизации в кластере C_{osc}. Цветом обозначена максимальная разность фаз ε установившихся колебаний. Красная область представляет неустойчивую синхронизацию, соответствующую вращающимся разницам фаз в C_{osc}. Синхронизация внутри некогерентного кластера C_{rot} всегда неустойчива для любых пар (λ,Δ) из заданного диапазона и распределения натуральных частот и начальных условий и, следовательно, соответствующая ему (λ,Δ)-диаграмма будет полностью красной и поэтому не показана. Черная кривая SC соответствует существованию поглощающей области G_{trap} в системе сравнения (3.13) и очень хорошо предсказывает порог по λ. Сеть состоит из $N = 100$ осцилляторов с $N_{osc} = 90$ и $N_{rot} = 10$. Натуральные частоты ω_i, $i = 1, \ldots, N_{osc}$ и ω_k, $k = 1, \ldots, N_{rot}$ выбираются случайным образом из интервалов $[10 - \Delta, 10 + \Delta]$ и $[12.01, 14.01]$ соответвтенно. Все начальные фазы выбираются случайным образом из $[-\pi, \pi]$. Начальные скорости выбраны как на Рис. 3.3.

$(\theta_0,\ y_0) \in G_{trap}$, остаются внутри G_{trap} для любого $t > 0$. Другими словами, размер d_G поглощающей области G_{trap}, определяемый (3.21)–(3.22), ограничивает максимальную разность фаз между осцилляторами i и j из когерентного кластера C_{osc}, так что $\dot{\theta}_{ij}(t) < d_G$, $i, j = 1, 2, \dots, N_{osc}$ для любого $t > 0$. Следовательно, ε-синхронизация внутри кластера C_{osc} устойчива, когда $d_G \leqslant \varepsilon$. Применяя этот аргумент к Теоремам 3.2.2 и 3.2.3, приходим к основному утверждению данной главы.

Теорема 3.3.1 (о достаточных условиях частичной синхронизации).

Пусть минимум нормированной разности натуральных частот δ *[см.* (3.16)*] между кластерами* C_{osc} *и* C_{rot} *удовлетворяет неравенству* $\delta > 1$. *Тогда частичная* ε*-синхронизация в системе Курамото второго порядка* (3.1) *устойчива для двух следующих областей параметров* $\lambda = \frac{1}{\sqrt{\beta K}}$ *[затухание* (3.10)*] и* Δ *[максимум нормированной разности натуральных частот в кластере* C_{osc} (3.15)*]:*

А.

$$\begin{aligned} &\lambda > \lambda_{up} = 2\sqrt{(\Delta+1)/\arcsin\tfrac{\Delta}{a}}, \\ &\Delta < \Delta_{cr} = \left(\tfrac{N_{osc}}{N}\cos\varepsilon - \tfrac{N_{rot}}{N}\right)\sin\tfrac{\varepsilon}{2}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

где параметр a *определён в* (3.10)*;*

Б.

$$\begin{aligned} &\lambda < \lambda_{DN} = 2(a^2 - \Delta^2)^{1/4}, \\ &\Delta < g(\lambda), \end{aligned} \tag{3.28}$$

где $g(\lambda)$ – *монотонно возрастающая функция* $\lambda \in (0, \lambda_{DN})$ *от* $g(0) = 0$.

Доказательство. В соответствии с Определением 3.2.1, чтобы доказать устойчивость частичной ε-синхронизации, нужно показать, что разности фаз между осцилляторами из когерентного кластера C_{osc} остаются ограниченными величиной ε, тогда как разница фаз между любым осциллятором из C_{osc} и любым осциллятором из некогерентного кластера C_{rot} вращается в окружности $[-\pi, \pi]$. Продемонстрировать последнее свойство для $\delta > 1$ несложно [см. абзац после (3.16)]. Справедливость утверждений А и Б Теоремы 3.3.1 непосредственно следует из Теорем 3.2.2 и 3.2.3, а также из Замечания 3.2.2. Условие (3.27) для Δ_{cr} следует из (3.21), решённого для Δ при $d_G = \varepsilon$ и a из (3.10). Функция $\Delta = g(\lambda)$ с монотонной зависимостью от λ в утверждении Б Теоремы 3.3.1 является уровнем функции (3.22) с $d_G = \varepsilon$. $\square$

Замечание 3.3.1. Поскольку $\Delta > 0$ и $\varepsilon \in [0, \pi)$, достаточное условие (3.27) выполняется только для $\varepsilon < \frac{1}{2} \arccos \frac{N_{rot}}{N_{osc}}$, и, следовательно, Теорема 3.3.1 применима исключительно если $N_{osc} > N_{rot}$.

Замечание 3.3.2. Ограничение на λ в (3.28) предполагает наличие порогового значения затухания λ и, следовательно, инерции β, после которого инерция начинает играть роль в десинхронизации, а также снижает максимально допустимое рассогласование частот Δ для фиксированной точности синхронизации ε (синяя сплошная линия на Рис. 3.1). Примечательно, что численно построенная кривая Δ от λ (синяя пунктирная линия на Рис. 3.1) также имеет порог, близкий к λ_{DN}, хотя этот порог не такой резкий, как в достаточном условии (3.28).

Хотя Теорема 3.3.1 и гарантирует, что осцилляторы из кластера C_{rot} имеют вращающиеся фазы относительно фаз колебательного кластера C_{osc}, она не гарантирует, что осцилляторы в C_{rot} останутся некогерентными. Однако, во всех численных экспериментах, представленных на Рис. 3.3–3.4, вращающиеся фазы осцилляторов из C_{rot} всегда оставались асинхронны. На Рис. 3.3 показан этот общий случай некогерентных вращающихся осцилляторов из C_{rot} и ε-синхронизированных осцилляторов в колебательном кластере C_{osc}. Значения параметров, использованные при счёте на Рис. 3.3, удовлетворяют условиям Теоремы 3.3.1 (утверждение A) с $\varepsilon = \pi/4$, выбранным для максимизации допустимой частотной разности Δ на уровне 18% для заданного значения λ. Отметим, что фактическая поглощающая область траекторий из когерентного кластера C_{osc} имеет форму, очень напоминающую соответствующий гетероклинический контур H_{NC} системы сравнения (3.13).

Наконец, Рис. 3.4 даёт более широкую численную иллюстрацию аналитических результатов и показывает, как требуемая точность ε-синхронизации внутри C_{osc} и инерция (через $\lambda = 1/\sqrt{\beta K}$) контролируют максимально допустимое рассогласование натуральных частот. В частности, Рис. 3.4 хорошо иллюстрирует количественные оценки Теоремы 3.3.1, а также показывает, что уменьшение инерции β (посредством увеличения λ) действительно приводит к "насыщению" максимального рассогласования частот, которое по-прежнему обеспечивает синхронизацию в когерентном кластере C_{osc}. Соответствующий порог по λ указывает, когда частичная синхронизация в модели Курамото второго порядка (3.1) становится нечувствительной к уменьшению инерции, а её условия устойчивости становятся такими же, как в классической модели Курамото первого порядка. Примечательно, что этот порог лежит около $\lambda = 0.7$, что намного меньше больших значений λ (малых значений инерции), для которых теория возмущения предполагает идентичность условий устойчивости для частичной синхронизации в модели Курамото первого и второго порядков.

Заключение

В диссертации было проведено строгое исследование аттракторов и бифуркаций систем обыкновенных дифференциальных уравнений и отображений с явно заданными правыми частями.

Первая глава диссертации посвящена исследованию динамики предложенной трёхмерной кусочно-линейной системы лоренцевского типа, которая в силу разрывности правых частей допускает наличие устойчивых скользящих движений в аттракторах системы.

Доказано, что в отсутствие скользящих движений существует последовательность нелокальных бифуркаций, которая приводит к рождению странного аттрактора лоренцевского типа и воспроизводит хорошо известный сценарий рождения аттрактора в оригинальной системе Лоренца. Свойства построенной модели позволили выразить соответствующие бифуркационные кривые явно через параметры системы. В частности, аналитически найдена бифуркационная кривая, соответствующая образованию двух симметричных гомоклинических орбит седла, известных как "гомоклиническая бабочка". Строго доказано, что в предложенной системе, как и в исходной системе Лоренца, аттрактор лоренцевского типа рождается в результате бифуркации двух гетероклинических орбит, "соединяющих" седло и два симметричных седловых предельных цикла. Доказано, что хаотический аттрактор может быть единственным притягивающим множеством или сосуществовать с двумя устойчивыми фокусами.

Показано, что при наличии в притягивающем множестве скользящих движений в системе возникает новый тип скользящих бифуркаций гомоклинических орбит седла, при которых неустойчивые гомоклинические траектории могут порождать устойчивые предельные циклы. В частности, доказано, что появление бесконечно малого участка устойчивых скользящих движений на гомоклинической орбите седла с положительной седловой величиной порождает устойчивую периодическую орбиту. Описаны последовательности чередующихся гомоклинических бифуркаций бабочки и бифуркаций "вилка", которые приводят к возникновению или разрушению странного аттрактора лоренцевского типа. Установлено, что возникновение сколь угодно малого скользящего участка на траекториях аттрактора может привести к появлению устойчивых орбит большого периода и рождению квазистранного аттрактора (квазиаттрактора).

Доказательства проводились с помощью явно полученного отображения Пуанкаре, что позволило аналитически оценить показатели Ляпунова для траекторий системы и доказать существование хаотического аттрактора лоренцевского типа. Исследование роли скользящих движений проведено путем строгого вывода отображения Пуанкаре, которое учитывает наличие скользящих движений.

Построенная система позволяет проводить строгий анализ основных свойств её хаотического аттрактора, что предполагает возможность изучения её эргодических свойств и построения естественной инвариантной меры [151—153].

Используемое в диссертации геометрическое построение аналитически исследуемой кусочно-линейной динамической системы может быть применено для воспроизведения и строгого доказательства бифуркаций хаотических аттракторов, аналогичных аттракторам Чуа, Рёсслера и т.д. Кроме того, строгое описание скользящих гомоклинических бифуркаций седла может быть применено для поиска и описания подобных неклассических аналогов гомоклинических бифуркаций Шильникова в кусочно-гладких динамических системах с седлофокусом.

Также, использование предложенной модели в качестве узла динамической сети может обеспечить строгую основу для понимания сложной коллективной динамики связанных систем. К ним относятся развивающиеся [154] и динамические сети со стохастическим переключением [94], которые демонстрируют весьма нетривиальную динамику в областях небыстрого переключения (т.н. “окна возможностей” [90]), где синхронизация в сети становится устойчивой даже если она неустойчива в усредненной и быстро переключающейся сетях. В то время как появление окон возможностей было аналитически изучено для сетей связанных хаотических отображений [155; 156], строгое доказательство этого эффекта для сетей связанных систем ОДУ требует дальнейших исследований. Использование предложенной в диссертации кусочно-линейной модели ОДУ с явными решениями и показателями Ляпунова может стать ключом к строгому решению этой проблемы устойчивости.

Вторая глава посвящена исследованию аттракторов в конкретных неавтономных системах ОДУ и отображениях.

Рассмотрены три примера хаотических неавтономных отображений. В качестве первого примера взято логистическое отображение, управляемое периодической функцией. Это отображение может служить простой моделью нейронной активности. Выбранный набор параметров отвечает пачечным осцилляциям динамической переменной. Показано, что изменяя параметры этого отображения, можно управлять периодами возбуждения и покоя, получая различные типы активности.

Второй пример есть двумерное отображение с одной нелинейностью, управляемое произвольной ограниченной функцией. Для этого отображения доказана Теорема 2.1.1 о достаточных условиях существования нестационарного гиперболического аттрактора. Доказательство Теоремы 2.1.1 основано на методе систем сравнения и построении инвариантных конусов. Далее, это отображение было рассмотрено совместно с одномерным отображением "тент", траектория которого служила управляющим параметром. В этом случае отображение являлось автономным трёхмерным отображением треугольной формы. Для этого отображения доказана Теорема 2.1.2 о существовании области параметров, для которой множество неблуждающих траекторий имеет два положительных показателя Ляпунова, и, следовательно, аттрактор отображения является гиперхаотическим. Строго доказанные гиперболические свойства сопровождены результатами численных экспериментов.

В качестве неавтономных систем ОДУ были рассмотрены т.н. мигающие потоки, траектории которых образованы случайным переключением между двумя автономными подсистемами ОДУ. Представлены сценарии возникновения аттракторов-призраков в двух мигающих системах, полученных из классической модели Лоренца и системы Хиндмарша-Роуза. Рассмотрен пример, когда переключения между двумя системами Лоеренца с тривиальной устойчивой динамикой приводит к появлению странного аттрактора Лоренца, выступающего аттрактором-призраком мигающей системы. При этом траектории мигающей системы достигают аттрактор-призрак и остаются в его малой окрестности. Мигающая система Хиндмарша-Роуза была получена из оригинальной модели с помощью переключения внешнего стимула, значения которого были выбраны соответствующими глобально устойчивой тонической активности. Значения стимула и вероятности переключения были подобраны таким образом, чтобы траектории мигающей системы лежали в окрестности траекторий аттрактора-призрака, соответствующего пачечным осцилляциям.

Третья глава диссертации посвящена исследованию частичной синхронизации в конечномерной сети связанных осцилляторов Курамото второго порядка. Рассмотрены аналитические условия, при которых возникает частичная синхронизация как функция рассогласования натуральных частот осцилляторов, инерции и относительного размера когерентных и некогерентных кластеров. С помощью метода двумерных систем сравнения модель была преобразована в систему связанных уравнений маятникового типа, которые после были развязаны заменой сомножителя связи на постоянные коэффициенты (оценки). Эта процедура привела к кусочно-гладкой системе сравнения на плоскости, траектории которой определяют колебательную динамику разностей фаз внутри когерентного кластера и вращательную динамику разностей фаз между осцилляторами из когерентного и некогерентного кластеров. Было показано, что особое значение имеет наличие поглощающей области, которая образована либо предельным циклом, либо гетероклиническими контурами. Размер поглощающей области контролирует максимальную разность фаз ε между когерентными осцилляторами и даёт явные оценки, которые связывают максимально допустимое рассогласование натуральных частот и разности фаз с инерцией и размером когерентного кластера. Эти оценки указывают на наличие порога, после которого увеличение инерции разрушает частичную синхронизацию.

Изложенный в этой главе метод систем сравнения может быть применен для аналитических оценок (а) формирования более мелких кластерных разбиений внутри когерентного кластера при наличии некогерентного кластера и (б) кластерной синхронизации с несколькими когерентными кластерами с отчётливой межкластерной и внутрикластерной колебательной динамикой. Изложенный метод потенциально можно расширить на случай более сложных сетевых топологий [129].

В диссертации впервые получены следующие основные результаты:

1. для трёхмерного потока строго доказано существование каскада бифуркаций коразмерности 1, приводящего к рождению аттрактора лоренцевского типа;
2. в системе лоренцевского типа рассмотрены скользящие гомоклинические бифуркации, приводящие к рождению устойчивых циклов и квазистранных аттракторов при положительной седловой величине;

3. для неавтономного двумерного отображения было доказано существование нестационарного сингулярно-гиперболического аттрактора без привлечения асимптотических методов;
4. для сети из произвольного числа связанных двумерных осцилляторов Курамото были получены достаточные условия частичной синхронизации.

В заключение хочу выразить огромную благодарность моему научному руководителю проф. Владимиру Николаевичу Белых за научное руководство, помощь в подготовке диссертации, а также за интересную совместную работу.

Список литературы

1. *Lorenz, E.* / E. Lorenz // J. Atmos. Sci. — 1963. — Т. 20. — С. 130—141.
2. *Ruelle, D.* / D. Ruelle, F. Tackens // Commun. Math. Phys. — 1971. — Т. 20. — С. 167—192.
3. *Belykh, V. N.* Strange Attractor [Текст] / V. N. Belykh // Great Russian Encyclopedia. T. 31. — Moscow : Great Russian Encyclopedia, 2016. — С. 285. — (in Russian).
4. *Guckenheimer, J.* The Hopf Bifurcation and Its Applications. Applied Mathematical Sciences [Текст] / J. Guckenheimer //. Т. 19 / под ред. J. E. Mardsen, M. McCracken. — New York : Springer, New York, NY, 1976. — Гл. A Strange, Strange Attractor. С. 368—381.
5. *Afraimovich, V. S.* On the origin and structure of the Lorenz attractor [Текст] / V. S. Afraimovich, V. Bykov, L. P. Shilnikov // Akademiia Nauk SSSR Doklady. T. 234. — 1977. — С. 336—339.
6. *Afraimovich, V.* On structurally unstable attracting limit sets of Lorenz attractor type [Текст] / V. Afraimovich, V. Bykov, L. Shilnikov // Trans. Moscow Math. Soc. — 1983. — Т. 44. — С. 153—216.
7. *Guckenheimer, J.* Local bifurcations [Текст] / J. Guckenheimer, P. Holmes. — Springer, 1983.
8. *Williams, R. F.* / R. F. Williams // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. — 1979. — Т. 50. — С. 73—99.
9. *Robinson, C.* / C. Robinson // Nonlinearity. — 1989. — Т. 2. — С. 495—518.
10. *Robinson, C.* / C. Robinson // SIAM J. Math. Anal. — 1992. — Т. 23. — С. 1255—1268.
11. *Rychlik, M. R.* / M. R. Rychlik // Ergodic Theory and Dynamical Systems. — 1990. — Т. 10(4). — С. 793—821.
12. *Morales, C. A.* / C. A. Morales, M. J. Pacifico, E. R. Pujals // Proc. AMS. — 1999. — Т. 127. — С. 3393—401.
13. *Sparrow, C.* The Lorenz equations; bifurcations, chaos and strange attractors [Текст] / C. Sparrow. — Springer, 1982.

14. *Bykov, V. V.* / V. V. Bykov, A. L. Shilnikov // Selecta Math. Sov. — 1992. — T. 11. — C. 375—382.

15. *Barrio, R.* Kneadings, symbolic dynamics and painting Lorenz chaos [Текст] / R. Barrio, A. Shilnikov, L. Shilnikov // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2012. — T. 22, № 04. — C. 1230016.

16. *Doedel, E. J.* Global bifurcations of the Lorenz manifold [Текст] / E. J. Doedel, B. Krauskopf, H. M. Osinga // Nonlinearity. — 2006. — T. 19, № 12. — C. 2947.

17. *Doedel, E. J.* Global organization of phase space in the transition to chaos in the Lorenz system [Текст] / E. J. Doedel, B. Krauskopf, H. M. Osinga // Nonlinearity. — 2015. — T. 28, № 11. — R113.

18. *Viswanath, D.* Symbolic dynamics and periodic orbits of the Lorenz attractor [Текст] / D. Viswanath // Nonlinearity. — 2003. — T. 16, № 3. — C. 1035.

19. A computer proof that the Lorenz equations have "chaotic" solutions [Текст] / B. Hassard [и др.] // Applied Mathematics Letters. — 1994. — T. 7, № 1. — C. 79—83.

20. *Galias, Z.* Computer assisted proof of chaos in the Lorenz equations [Текст] / Z. Galias, P. Zgliczyński // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1998. — T. 115, № 3/4. — C. 165—188.

21. *Breden, M.* Polynomial interpolation and a priori bootstrap for computer-assisted proofs in nonlinear ODEs [Текст] / M. Breden, J.-P. Lessard // Discrete & Continuous Dynamical Systems-B. — 2018. — T. 23, № 7. — C. 2825—2858.

22. *Mischaikow, K.* Chaos in the Lorenz equations: a computer-assisted proof [Текст] / K. Mischaikow, M. Mrozek // Bulletin of the American Mathematical Society. — 1995. — T. 32, № 1. — C. 66—72.

23. *Hassard, B.* Existence of a homoclinic orbit of the Lorenz system by precise shooting [Текст] / B. Hassard, J. Zhang // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1994. — T. 25, № 1. — C. 179—196.

24. *Tucker, W.* The Lorenz attractor exists [Текст] / W. Tucker // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics. — 1999. — T. 328, № 12. — C. 1197—1202.

25. *Ovsyannikov, I. I.* / I. I. Ovsyannikov, D. V. Turaev // Nonlinearity. — 2017. — Т. 30. — С. 115—137.

26. *Shilnikov, L.* The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors [Текст] / L. Shilnikov // Uspehi Mat. Nauk. — 1981. — Т. 36. — С. 240—241.

27. *Belykh, V.* Bifurcation of separatrices of a saddle point of the Lorenz system [Текст] / V. Belykh // Differential Equations. — 1984. — Т. 20, № 10. — С. 1184—1191.

28. *Andronov, A. A.* Theory of Oscillations [Текст] / A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Khaikin. — Moscow : Fizmatgiz, 1959.

29. *Champneys, A. R.* Piecewise smooth dynamical systems [Текст] / A. R. Champneys, M. di Bernardo // Scholarpedia. — 2008. — Т. 3, № 9. — С. 4041.

30. *Zhusubaliyev, Z. T.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems [Текст]. Т. 44 / Z. T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde. — World Scientific, 2003. — (World Scientific Series on Nonlinear Science Series A).

31. *Luo, A. C.* Periodic motions and grazing in a harmonically forced, piecewise, linear oscillator with impacts [Текст] / A. C. Luo, L. Chen // Chaos, Solitons & Fractals. — 2005. — Т. 24, № 2. — С. 567—578.

32. *Levinson, N.* / N. Levinson // Annals of Mathematics, Second Series. — 1949. — Т. 50. — С. 127—153.

33. *Cartwright, M. L.* / M. L. Cartwright, J. E. Litllewood // J. London Math. Soc. — 1945. — Т. 20. — С. 180—189.

34. *Elwakil, A. S.* / A. S. Elwakil, S. Ozoguz, M. P. Kennedy // IEEE transactions on circuits and systems—I: fundamental theory and applications. — 2002. — Т. 49. — С. 4.

35. *Lia, C.* / C. Lia, J. C. Sprott, W. Thio // Physics Letters A. — 2015. — Т. 379. — С. 888—893.

36. *Неймарк, Ю.* О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования [Текст] / Ю. Неймарк // Автоматика и телемеханика. — 1957. — Т. 18. — С. 27—33.

37. *Neimark, Y. I.* The method of point mappings in the theory of nonlinear oscillations [Текст] / Y. I. Neimark // Russian, Nauka, Moscow. — 1972.

38. *Filippov, A.* Differential Equations with Discontinuous Righthand sides [Текст] / A. Filippov. — Kluwier Academic Press, 1988.

39. Piecewise-smooth Dynamical Systems: Theory and Applications [Текст] / M. di Bernardo [и др.]. — Springer, 2007.

40. M. di Bernardo [и др.] // Chaos, Solitons and Fractals. — 1999. — Т. 10. — С. 1881—1908.

41. *Leine, R. I.* Bifurcations of equilibria in non-smooth continuous systems [Текст] / R. I. Leine, H. Nijmeijer // Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems. — Springer, 2004. — С. 125—176.

42. *Macdonald, J. H.* Lateral excitation of bridges by balancing pedestrians [Текст] / J. H. Macdonald // Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2008. — Т. 465. — С. 1055—1073.

43. *Belykh, I. V.* / I. V. Belykh, R. Jeter, V. N. Belykh // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2016. — Т. 26. — С. 116314.

44. *Belykh, I.* / I. Belykh, R. Jeter, V. Belykh // Sci. Adv. — 2017. — Т. 3. — e1701512.

45. *Serdukova, L.* Stability and bifurcation analysis of the period-T motion of a vibroimpact energy harvester [Текст] / L. Serdukova, R. Kuske, D. Yurchenko // Nonlinear Dynamics. — 2019. — Т. 98, № 3. — С. 1807—1819.

46. *Gubar', N.* / N. Gubar' // J. Appl. Math. Mech. — 1961. — Т. 25(6). — С. 1011—1023.

47. *Matsumoto, T.* / T. Matsumoto, L. Chua, M. Komoro // Physica D. — 1987. — Т. 24. — С. 97.

48. Two-dimensional bifurcation diagrams: background pattern of fundamental DC–DC converters with PWM control [Текст] / L. Benadero [и др.] // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2003. — Т. 13, № 02. — С. 427—451.

49. *Simpson, D. J.* Stochastic regular grazing bifurcations [Текст] / D. J. Simpson, S. J. Hogan, R. Kuske // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2013. — Т. 12, № 2. — С. 533—559.

50. *Polynikis, A.* Comparing different ODE modelling approaches for gene regulatory networks [Текст] / A. Polynikis, S. Hogan, M. di Bernardo // Journal of Theoretical Biology. — 2009. — Т. 261, № 4. — С. 511—530.

51. *Acary, V.* Numerical simulation of piecewise-linear models of gene regulatory networks using complementarity systems [Текст] / V. Acary, H. De Jong, B. Brogliato // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2014. — Т. 269. — С. 103—119.

52. *Ermentrout, B.* Recent advances in coupled oscillator theory [Текст] / B. Ermentrout, Y. Park, D. Wilson // Philosophical Transactions of the Royal Society A. — 2019. — Т. 377, № 2160. — С. 20190092.

53. *Nusse, H. E.* Border-collision bifurcations: An explanation for observed bifurcation phenomena [Текст] / H. E. Nusse, E. Ott, J. A. Yorke // Physical Review E. — 1994. — Т. 49, № 2. — С. 1073.

54. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems [Текст] / M. di Bernardo [и др.] // SIAM Review. — 2008. — Т. 50, № 4. — С. 629—701.

55. *Luo, A. C.* An analytical prediction of periodic flows in the Chua circuit system [Текст] / A. C. Luo, B. Xue // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2009. — Т. 19, № 07. — С. 2165—2180.

56. *Dieci, L.* Sliding motion in Filippov differential systems: theoretical results and a computational approach [Текст] / L. Dieci, L. Lopez // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2009. — Т. 47, № 3. — С. 2023—2051.

57. *Simpson, D.* Neimark–Sacker bifurcations in planar, piecewise-smooth, continuous maps [Текст] / D. Simpson, J. Meiss // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2008. — Т. 7, № 3. — С. 795—824.

58. *Szalai, R.* Arnol'd tongues arising from a grazing-sliding bifurcation [Текст] / R. Szalai, H. M. Osinga // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2009. — Т. 8, № 4. — С. 1434—1461.

59. *Colombo, A.* Discontinuity induced bifurcations of nonhyperbolic cycles in nonsmooth systems [Текст] / A. Colombo, F. Dercole // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2010. — Т. 9, № 1. — С. 62—83.

60. *Simpson, D.* A compendium of Hopf-like bifurcations in piecewise-smooth dynamical systems [Текст] / D. Simpson // Physics Letters A. — 2018. — Т. 382, № 35. — С. 2439—2444.

61. *Nusse, H. E.* Border-collision bifurcations including “period two to period three” for piecewise smooth systems [Текст] / H. E. Nusse, J. A. Yorke // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1992. — Т. 57, № 1/2. — С. 39—57.

62. *Feigin, M.* Doubling of the oscillation period with C-bifurcations in piecewise-continuous systems: PMM vol. 34, no. 5, 1970, pp. 861–869 [Текст] / M. Feigin // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. — 1970. — Т. 34, № 5. — С. 822—830.

63. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems [Текст] / M. di Bernardo [и др.] // Chaos, Solitons and Fractals: the Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena. — 1999. — Т. 11, № 10. — С. 1881—1908.

64. *Bernardo, M. di.* Discontinuity-induced bifurcations of piecewise smooth dynamical systems [Текст] / M. di Bernardo, S. Hogan // Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2010. — Т. 368, № 1930. — С. 4915—4935.

65. *Lu, K.* Singular cycles and chaos in a new class of 3D three-zone piecewise affine systems [Текст] / K. Lu, Q. Yang, G. Chen // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2019. — Т. 29, № 4. — С. 043124.

66. *D. Novaes, D.* Shilnikov problem in Filippov dynamical systems [Текст] / D. D. Novaes, M. A. Teixeira // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2019. — Т. 29, № 6. — С. 063110.

67. *Smale, S.* Differentiable dynamical systems [Текст] / S. Smale // Bulletin of the American mathematical Society. — 1967. — Т. 73, № 6. — С. 747—817.

68. *Anosov, D. V.* Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature [Текст] / D. V. Anosov // Trudy Matematicheskogo Instituta Imeni VA Steklova. — 1967. — Т. 90. — С. 3—210.

69. *Anosov, D. V.* Some smooth ergodic systems [Текст] / D. V. Anosov, Y. G. Sinai // RuMaS. — 1967. — Т. 22, № 5. — С. 103—167.

70. *Bowen, R.* Bernoulli maps of the interval [Текст] / R. Bowen // Israel Journal of Mathematics. — 1977. — Т. 28, № 1. — С. 161—168.

71. *Katok, A.* Introduction to the modern theory of dynamical systems [Текст]. Т. 54 / A. Katok, B. Hasselblatt. — Cambridge university press, 1997.

72. *Belykh, V. N.* Chaotic and strange attractors of a two-dimensional map [Текст] / V. N. Belykh // Sbornik: Mathematics. — 1995. — Т. 186, № 3. — С. 311.

73. *Afraimovich, V.* Statistical properties of 2-D generalized hyperbolic attractors [Текст] / V. Afraimovich, N. Chernov, E. Sataev // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 1995. — Т. 5, № 1. — С. 238—252.

74. *Isaeva, O. B.* Hyperbolic chaos of standing wave patterns generated parametrically by a modulated pump source [Текст] / O. B. Isaeva, A. S. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov // Physical Review E. — 2013. — Т. 87, № 4. — С. 040901.

75. *Kuznetsov, S. P.* Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smale-Williams type [Текст] / S. P. Kuznetsov // Physical Review Letters. — 2005. — Т. 95, № 14. — С. 144101.

76. *Kuznetsov, S. P.* Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors [Текст] / S. P. Kuznetsov, A. Pikovsky // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2007. — Т. 232, № 2. — С. 87—102.

77. *Lozi, R.* Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon [Текст] / R. Lozi // Le Journal de Physique Colloques. — 1978. — Т. 39, № C5. — С. C5—9.

78. *Belykh, V. N.* Belykh map [Текст] / V. N. Belykh, I. Belykh // Scholarpedia. — 2011. — Т. 6, № 10. — С. 5545.

79. *Belykh, V.* Hyperbolic attractors in a family of multidimensional maps with cusp-points [Текст] / V. Belykh, N. Komrakov, B. Ukrainsky // Proc. of Int. Conf. Progress in Nonlinear Science Dedicated to the 100th Anniversary of A. Andronov. — 2002.

80. A discrete-time hybrid lurie type system with strange hyperbolic nonstationary attractor [Текст] / V. Belykh [и др.] // Dynamics And Control Of Hybrid Mechanical Systems. — 2010. — Т. 14. — С. 43.

81. *Belykh, V.* Singular-hyperbolic attractor of the mapping of multidimensional cylinder [Текст] / V. Belykh, D. Grechko // Dinamicheskie sistemy. — 2018. — Т. 8, № 4.

82. *Sinai*, *Y.* Stochastisity of dynamical systems [Текст] / Y. Sinai // Nelinejnye volny. M.: Nauka. — 1979. — С. 192—212.

83. *Hasselblatt*, *B.* Hyperbolic dynamics [Текст] / B. Hasselblatt, Y. Pesin // Scholarpedia. — 2008. — Т. 3, № 6. — С. 2208.

84. *Ott*, *E.* Controlling chaos [Текст] / E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke // Physical review letters. — 1990. — Т. 64, № 11. — С. 1196.

85. *Ditto*, *W. L.* Mastering chaos [Текст] / W. L. Ditto, L. M. Pecora // Scientific American. — 1993. — Т. 269, № 2. — С. 78—84.

86. The control of chaos: theory and applications [Текст] / S. Boccaletti [и др.] // Physics reports. — 2000. — Т. 329, № 3. — С. 103—197.

87. *Pyragas*, *K.* Control of chaos via an unstable delayed feedback controller [Текст] / K. Pyragas // Physical Review Letters. — 2001. — Т. 86, № 11. — С. 2265.

88. *González-Miranda*, *J. M.* Synchronization and control of chaos: an introduction for scientists and engineers [Текст] / J. M. González-Miranda. — World Scientific, 2004.

89. *Schöll*, *E.* Handbook of chaos control [Текст]. Т. 2 / E. Schöll, H. G. Schuster. — Wiley Online Library, 2008.

90. *Jeter*, *R.* Synchronization in on-off stochastic networks: windows of opportunity [Текст] / R. Jeter, I. Belykh // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. — 2015. — Т. 62, № 5. — С. 1260—1269.

91. *Mills*, *D. L.* Internet time synchronization: the network time protocol [Текст] / D. L. Mills // IEEE Transactions on communications. — 1991. — Т. 39, № 10. — С. 1482—1493.

92. Synchronizability of two neurons with switching in the coupling [Текст] / F. Parastesh [и др.] // Applied Mathematics and Computation. — 2019. — Т. 350. — С. 217—223.

93. *Belykh*, *I. V.* Blinking model and synchronization in small-world networks with a time-varying coupling [Текст] / I. V. Belykh, V. N. Belykh, M. Hasler // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2004. — Т. 195, № 1/2. — С. 188—206.

94. *Hasler, M.* Dynamics of stochastically blinking systems. Part II: Asymptotic properties [Текст] / M. Hasler, V. Belykh, I. Belykh // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2013. — Т. 12, № 2. — С. 1031—1084.

95. *Hasler, M.* Dynamics of stochastically blinking systems. Part I: Finite time properties [Текст] / M. Hasler, V. Belykh, I. Belykh // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2013. — Т. 12, № 2. — С. 1007—1030.

96. Multistable randomly switching oscillators: The odds of meeting a ghost [Текст] / I. Belykh [и др.] // The European Physical Journal Special Topics. — 2013. — Т. 222, № 10. — С. 2497—2507.

97. *Hindmarsh, J. L.* A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations [Текст] / J. L. Hindmarsh, R. Rose // Proceedings of the Royal society of London. Series B. Biological sciences. — 1984. — Т. 221, № 1222. — С. 87—102.

98. *Pecora, L. M.* Master stability functions for synchronized coupled systems [Текст] / L. M. Pecora, T. L. Carroll // Physical Review Letters. — 1998. — Т. 80, № 10. — С. 2109.

99. The synchronization of chaotic systems [Текст] / S. Boccaletti [и др.] // Physics Reports. — 2002. — Т. 366, № 1/2. — С. 1—101.

100. *Belykh, V. N.* Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems [Текст] / V. N. Belykh, I. V. Belykh, M. Hasler // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2004. — Т. 195, № 1/2. — С. 159—187.

101. *Belykh, I.* Synchronization of bursting neurons: What matters in the network topology [Текст] / I. Belykh, E. de Lange, M. Hasler // Physical Review Letters. — 2005. — Т. 94, № 18. — С. 188101.

102. *Nishikawa, T.* Network synchronization landscape reveals compensatory structures, quantization, and the positive effect of negative interactions [Текст] / T. Nishikawa, A. E. Motter // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 2010. — Т. 107, № 23. — С. 10342—10347.

103. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena [Текст] / J. A. Acebrón [и др.] // Reviews of Modern Physics. — 2005. — Т. 77, № 1. — С. 137.

104. Exact results for the Kuramoto model with a bimodal frequency distribution [Текст] / E. A. Martens [и др.] // Physical Review E. — 2009. — Т. 79, № 2. — С. 026204.

105. *Laing, C. R.* The dynamics of chimera states in heterogeneous Kuramoto networks [Текст] / C. R. Laing // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2009. — Т. 238, № 16. — С. 1569—1588.

106. *Belykh, V. N.* Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems [Текст] / V. N. Belykh, I. V. Belykh, M. Hasler // Physical Review E. — 2000. — Т. 62, № 5. — С. 6332.

107. *Belykh, V. N.* Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators [Текст] / V. N. Belykh, I. V. Belykh, E. Mosekilde // Physical Review E. — 2001. — Т. 63, № 3. — С. 036216.

108. *Pogromsky, A.* Partial synchronization: from symmetry towards stability [Текст] / A. Pogromsky, G. Santoboni, H. Nijmeijer // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2002. — Т. 172, № 1. — С. 65—87.

109. *Golubitsky, M.* Nonlinear dynamics of networks: the groupoid formalism [Текст] / M. Golubitsky, I. Stewart // Bulletin of the American Mathematical Society. — 2006. — Т. 43, № 3. — С. 305—364.

110. *Wang, Y.* Two-colour patterns of synchrony in lattice dynamical systems [Текст] / Y. Wang, M. Golubitsky // Nonlinearity. — 2004. — Т. 18, № 2. — С. 631.

111. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries [Текст] / L. M. Pecora [и др.] // Nature Communications. — 2014. — Т. 5. — С. 4079.

112. *Kamei, H.* Computation of balanced equivalence relations and their lattice for a coupled cell network [Текст] / H. Kamei, P. J. Cock // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2013. — Т. 12, № 1. — С. 352—382.

113. Complete characterization of the stability of cluster synchronization in complex dynamical networks [Текст] / F. Sorrentino [и др.] // Science Advances. — 2016. — Т. 2, № 4. — e1501737.

114. *Pogromsky, A.* Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems [Текст] / A. Pogromsky, H. Nijmeijer // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications. — 2001. — Т. 48, № 2. — С. 152—162.

115. Persistent clusters in lattices of coupled nonidentical chaotic systems [Текст] / I. Belykh [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2003. — Т. 13, № 1. — С. 165—178.

116. *Ermentrout, B.* An adaptive model for synchrony in the firefly Pteroptyx malaccae [Текст] / B. Ermentrout // Journal of Mathematical Biology. — 1991. — Т. 29, № 6. — С. 571—585.

117. *Tanaka, H.-A.* First order phase transition resulting from finite inertia in coupled oscillator systems [Текст] / H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, S. Oishi // Physical Review Letters. — 1997. — Т. 78, № 11. — С. 2104.

118. *Tanaka, H.-A.* Self-synchronization of coupled oscillators with hysteretic responses [Текст] / H.-A. Tanaka, A. J. Lichtenberg, S. Oishi // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1997. — Т. 100, № 3/4. — С. 279—300.

119. Low-dimensional behavior of Kuramoto model with inertia in complex networks [Текст] / P. Ji [и др.] // Scientific Reports. — 2014. — Т. 4.

120. Analytical approach to synchronous states of globally coupled noisy rotators [Текст] / V. Munyaev [и др.] // New Journal of Physics. — 2020. — Т. 22, № 2. — С. 023036.

121. *Komarov, M.* Synchronization transitions in globally coupled rotors in the presence of noise and inertia: Exact results [Текст] / M. Komarov, S. Gupta, A. Pikovsky // EPL (Europhysics Letters). — 2014. — Т. 106, № 4. — С. 40003.

122. *Olmi, S.* Chimera states in coupled Kuramoto oscillators with inertia [Текст] / S. Olmi // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2015. — Т. 25, № 12. — С. 123125.

123. Hysteretic transitions in the Kuramoto model with inertia [Текст] / S. Olmi [и др.] // Physical Review E. — 2014. — Т. 90, № 4. — С. 042905.

124. *Belykh, I. V.* Bistability of patterns of synchrony in Kuramoto oscillators with inertia [Текст] / I. V. Belykh, B. N. Brister, V. N. Belykh // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2016. — Т. 26, № 9. — С. 094822.

125. Solitary states for coupled oscillators with inertia [Текст] / P. Jaros [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2018. — Т. 28, № 1. — С. 011103.

126. Smallest chimera states [Текст] / Y. Maistrenko [и др.] // Physical Review E. — 2017. — Т. 95, № 1. — С. 010203.

127. *Brister, B. N.* When three is a crowd: Chaos from clusters of Kuramoto oscillators with inertia [Текст] / B. N. Brister, V. N. Belykh, I. V. Belykh // Physical Review E. — 2020. — Т. 101, № 6. — С. 062206.

128. *Medvedev, G. S.* Stability of clusters in the second-order Kuramoto model on random graphs [Текст] / G. S. Medvedev, M. S. Mizuhara // Journal of Statistical Physics. — 2021. — Т. 182, № 2. — С. 1—22.

129. *Belykh, V. N.* Kuramoto phase model with inertia: bifurcations leading to the loss of synchrony and to the emergence of chaos [Текст] / V. N. Belykh, M. I. Bolotov, G. V. Osipov // Modeling and Analysis of Information Systems. — 2015. — Т. 22, № 5. — С. 595—608.

130. *Shashkov, M. V.* / M. V. Shashkov, D. V. Turaev // J. Nonlinear Sci. — 1999. — Т. 9. — С. 525—573.

131. Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part II [Текст] / L. P. Shilnikov [и др.]. — World Scientific, 2001.

132. *Shilnikov, A. L.* / A. L. Shilnikov // Physica D. — 1993. — Т. 62. — С. 338—346.

133. *Creaser, J. L.* Finding first foliation tangencies in the Lorenz system [Текст] / J. L. Creaser, B. Krauskopf, H. M. Osinga // SIAM Journal on Applied Dynamical Systems. — 2017. — Т. 16, № 4. — С. 2127—2164.

134. *Feigenbaum, M. J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations [Текст] / M. J. Feigenbaum // Journal of Statistical Physics. — 1978. — Т. 19, № 1. — С. 25—52.

135. *Arneodo, A.* A possible new mechanism for the onset of turbulence [Текст] / A. Arneodo, P. Coullet, C. Tresser // Physics Letters A. — 1981. — Т. 81, № 4. — С. 197—201.

136. *Lyubimov, D.* Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection [Текст] / D. Lyubimov, M. Zaks // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1983. — Т. 9, № 1/2. — С. 52—64.

137. *Gonchenko, S.* Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincaré homoclinic orbits [Текст] / S. Gonchenko, L. Shilnikov, D. Turaev // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 1996. — Т. 6, № 1. — С. 15—31.

138. *Mira, C.* Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps [Текст]. Т. 20 / C. Mira. — World Scientific, 1996.

139. *Bogoliubov, N. N.* Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations [Текст] / N. N. Bogoliubov, Y. A. Mitropolsky. — Gordon, Breach, New York, 1966.

140. *Khasminskii, R.* Stochastic stability of differential equations [Текст]. Т. 66 / R. Khasminskii. — Springer Science & Business Media, 2011.

141. Random perturbation methods with applications in science and engineering [Текст]. Т. 150 / A. V. Skorokhod, F. C. Hoppensteadt, H. D. Salehi [и др.]. — Springer Science & Business Media, 2002.

142. *Kifer, Y.* Large Deviations and Adiabatic Transitions for Dynamical Systems and Markov Processes in Fully Coupled Averaging [Текст] / Y. Kifer. — American Mathematical Society, 2009. — (Memoirs of the American Mathematical Society).

143. *Shilnikov, L.* Bifurcation theory and the Lorenz model [Текст] / L. Shilnikov // Appendix to Russian edition of "The Hopf Bifurcation and Its Applications." Eds. J. Marsden and M. McCraken. — 1980. — С. 317—335.

144. *Bykov, V.* On the boundaries of the domain of existence of the Lorenz attractor [Текст] / V. Bykov, A. Shilnikov // Methods of Qualitative Theory and Theory of Bifurcations. Gorky State University, Gorky. — 1989. — С. 151—159.

145. *Shilnikov, A.* Normal forms and Lorenz attractors [Текст] / A. Shilnikov, L. Shilnikov, D. Turaev // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 1993. — Т. 3. — С. 1123—1139.

146. *Storace, M.* The Hindmarsh–Rose neuron model: bifurcation analysis and piecewise-linear approximations [Текст] / M. Storace, D. Linaro, E. de Lange // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2008. — Т. 18, № 3. — С. 033128.

147. *González-Miranda, J.* Complex bifurcation structures in the Hindmarsh–Rose neuron model [Текст] / J. González-Miranda // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2007. — Т. 17, № 09. — С. 3071—3083.

148. *Barrio, R.* Parameter-sweeping techniques for temporal dynamics of neuronal systems: case study of Hindmarsh-Rose model [Текст] / R. Barrio, A. Shilnikov // The Journal of Mathematical Neuroscience. — 2011. — Т. 1, № 1. — С. 6.

149. *Andronov, A. A.* Theory of Oscillators: Adiwes International Series in Physics [Текст]. Т. 4 / A. A. Andronov, A. A. Vitt, S. E. Khaikin. — Elsevier, 2013.

150. *Belyustina, L. N.* Qualitative investigation of a dynamic system on a cylinder [Текст] / L. N. Belyustina, V. N. Belykh // Differential Equations. — 1973. — Т. 9, № 3. — С. 403—415.

151. *Bunimovich, L.* Stochasticity of the attractor in the Lorenz model [Текст] / L. Bunimovich, Y. G. Sinai // Nonlinear Waves. — 1979. — С. 212—226.

152. *Sinai, J. G.* Hyperbolicity conditions for the Lorenz model [Текст] / J. G. Sinai, E. B. Vul // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1981. — Т. 2, № 1. — С. 3—7.

153. *Sataev, E. A.* / E. A. Sataev // Mat. Sb. — 2010. — Т. 201. — С. 419—470.

154. I. Belykh [и др.] // Physica D. — 2014. — Т. 267. — С. 1—6.

155. Windows of opportunity for synchronization in stochastically coupled maps [Текст] / O. Golovneva [и др.] // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2017. — Т. 340. — С. 1—13.

156. *Jeter, R.* Overcoming network resilience to synchronization through non-fast stochastic broadcasting [Текст] / R. Jeter, M. Porfiri, I. Belykh // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2018. — Т. 28, № 7. — С. 071104.

Публикации автора по теме диссертации

157. *Барабаш*, *Н.* Пороги синхронизации в ансамбле фазовых осцилляторов Курамото со случайно мигающими связями [Текст] / Н. Барабаш, В. Белых // Известия вузов. Радиофизика. — 2017. — Т. 60, № 9.

158. *Belykh*, *V. N.* A Lorenz-type attractor in a piecewise-smooth system: Rigorous results [Текст] / V. N. Belykh, N. V. Barabash, I. V. Belykh // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2019. — Т. 29, № 10. — С. 103108.

159. *Barabash*, *N. V.* Non-stationary attractors in the blinking systems: ghost attractor of Lorenz type [Текст] / N. V. Barabash, V. N. Belykh // Cybernetics and Physics. — 2019. — Т. 8, № 4. — С. 209—214.

160. *Barabash*, *N. V.* Chaotic driven maps: Non-stationary hyperbolic attractor and hyperchaos [Текст] / N. V. Barabash, V. N. Belykh // The European Physical Journal Special Topics. — 2020. — Т. 229, № 6. — С. 1071—1081.

161. *Barabash*, *N. V.* Ghost attractors in blinking Lorenz and Hindmarsh–Rose systems [Текст] / N. V. Barabash, T. A. Levanova, V. N. Belykh // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2020. — Т. 30, № 8. — С. 081105.

162. *Белых*, *В.* Бифуркации хаотических аттракторов в кусочно-гладкой системе лоренцевского типа [Текст] / В. Белых, Н. Барабаш, И. Белых // Автомат. и телемех. — 2020. — Т. 81, № 8. — С. 1385—1393.

163. *Belykh*, *V. N.* Sliding homoclinic bifurcations in a Lorenz-type system: Analytic proofs [Текст] / V. N. Belykh, N. V. Barabash, I. V. Belykh // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Т. 31, № 4. — С. 043117.

164. Partial synchronization in the second-order Kuramoto model: an auxiliary system method [Текст] / N. Barabash [и др.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Т. 31, № 11. — С. 113113.