

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

На правах рукописи

Григорьев Михаил Вячеславович



**ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫХ
ПОРОУПРУГИХ ТЕЛ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор

Игумнов Леонид Александрович

Нижний Новгород – 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	25
§ 1.1 Модель Био частично насыщенной пороупругой среды	25
§ 1.2 Постановка краевой задачи в изображениях по Лапласу	28
§ 1.3 Метод численного обращения преобразования Лапласа	30
§ 1.4 Задача о действии продольной силы на одномерный частично насыщенный пороупругий стержень	34
ГЛАВА 2. ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА.....	50
§ 2.1 Метод взвешенных невязок	50
§ 2.2 Граничные интегральные уравнения	56
§ 2.3 Регуляризация граничного интегрального уравнения	59
2.3.1 Выделение особенностей у фундаментальных и сингулярных решений.....	60
2.3.2 Регуляризованное граничное интегральное уравнение	64
§ 2.4 Дискретное представление гранично-интегрального уравнения.....	65
§ 2.5 Программная реализация	67
§ 2.6 Визуализация гранично-элементного моделирования.....	69
2.6.1 Описание формата входных данных.....	70
2.6.2 Пользовательский интерфейс	71
2.6.3 Панели инструментов	73
2.6.4 Работа мышью	74
ГЛАВА 3. ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ПОРОУПРУГИХ ТЕЛ.....	78

§ 3.1 Задача о действии торцевой силы на частично насыщенное пороупругое призматическое тело	78
§ 3.2 Задача о действии вертикальной силы на частично насыщенное пороупругое полупространство.....	97
§ 3.3 Задача о действии вертикальной силы на частично насыщенное пороупругое полупространство, ослабленное кубической полостью	105
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	113
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	114

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность. Пористые материалы широко распространены в природе и технике. Применение пористых материалов в технике позволяет снизить массу и материалоемкость конструкции при увеличении их прочности и надежности. Анализ волновых процессов в пористых материалах и средах имеют принципиальное значение для таких областей, например, как акустика, геомеханика, биомеханика, нефтедобыча, геофизика, материаловедение и др. Например, в геомеханике насыщенные жидкостью или газом почвы и горные породы, рассматриваются как пористые среды.

В естественных условиях, как правило, геоматериалы существуют только в частично насыщенном виде. Такая среда имеет следующую структуру: твердый скелет с распределенными порами, заполненными различными вязкими жидкостями. Поровые жидкости, во многом, определяют физические характеристики пористой среды. Например, эффект демпфирования распространения волн в среде вызывается вязкостью поровой жидкости. Движения жидкостей относительно скелета порождает новые волны и существенно меняет волновые картины. Кроме медленной волны сжатия (первая медленная волна) появляется более медленная волна сжатия (вторая медленная волна). Такие волны возникают как результаты взаимодействия скелета: со смачивающей и не смачивающей жидкостями в порах. Медленные пороупругие волны могут быстро затухать, а значит плохо проявляются, но при определенных условиях такие волны существенно изменяет всю волновую картину. Кроме пористости для распространения волн (для скоростей волн и затухания волн) существенным является насыщенность материала. Насыщенность, кроме уже отмеченного влияния на взаимодействие между твердым телом и жидкостями, может влиять на среднюю сжимаемость

пористой среды. В таких случаях концепция поверхностного натяжения и капиллярного давления представляет особый интерес, поскольку эти эффекты могут оказывать большое влияние на динамическую реакцию частично насыщенной пороупругой среды.

Уравнения динамики частично насыщенной пороупругой среды могут быть получены на основе уравнений механики сплошных сред. Аналитически уравнения разрешимы только для специальных случаев. Такие аналитические решения используют для проверки соответствующих численных результатов. Обзор источников показывает, что из численных методов для моделирования процессов в частично насыщенных пористых средах активно применяются метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР) [1]. Универсальность и конкурентоспособность этих методов позволяет их применять для решения соответствующих задач. В трехмерных случаях эти методы требуют дискретизации объема, что значительно повышает временные затраты. Произвольность формы границы является, хоть и разрешимой, но проблемой для МКР. По сравнению с МКЭ и МКР для метода граничных элементов (МГЭ) требуется только информация с границы. Это значительно упрощает построение дискретных аналогов при рассмотрении объектов сложной формы. Кроме того, МГЭ особенно подходит для задач о распространении волн в полубесконечной и бесконечной областях, т.к. естественно учитывает необходимые для таких задач условия излучения.

Из российских исследователей, занимающихся продвижением интегрального метода в механике деформируемого твердого тела отметим С.М. Айзиковича, Б.Д. Анина, В.А. Бабешко, А.О. Ватульяна, Е.В. Глушкова, Н.В. Глушкову, И.Г. Горячеву, Л.А. Игумнова, В.В. Калининчука, Н.Ф. Морозова, А.Н. Соловьева и др. Приведенный перечень ученых может быть по праву отнесен к исследователям по анализу пороупругих тел и сред с дополнением таких фамилий, как А.А. Губайдуллин, В.И. Ерофеев, Л.Б. Маслов, В.Н.

Николаевский, Д.В. Тарлаковский, Н. Antes, M. Schanz, L. Banjai, B. Albers, M. Nanning, T. Rüberg, P. Urthaler, P. Li и др.

Современное состояние. Первые попытки описания пористой среды можно отнести, например, к концу XVIII века, когда масштабно возникла проблема эксплуатации дамб и плотин. R.Woltman в [2] ввел одно из базовых понятий – отношение объемов фаз, а экспериментальным изучением проблем диффузии начал заниматься A.Fick [3]. Законы диффузии A.Fick развивал J.Stefan [4]. В начале XX выделяются, например, работы K.von Terzaghi [5] и P.Fillunger [6].

По объемным соотношениям и свойствам движения жидкостей в порах можно пористые среды условно объединить по таким группам: сухие, малонасыщенные, средние насыщенные, высоконасыщенные, насыщенные. В сухих средах несмачивающая жидкость непрерывна в твердом скелете и нет свободного потока смачивающей жидкости. Степень насыщения этого типа пористых сред равна нулю. В малонасыщенных средах поры заняты, как смачивающими, так и несмачивающими жидкостями, но с незначительным количеством смачивающей жидкости. В средах средней насыщенности, как смачивающие, так и несмачивающие жидкости могут свободно течь в порах. В высоконасыщенных средах несмачивающая жидкость не может свободно течь, но оказывает влияние на поток смачивающей жидкости. В полностью насыщенных средах в порах существует только смачивающая жидкость. Все эти группы пористых сред можно назвать частично насыщенными средами, где сухие и насыщенные среды являются двумя крайними случаями.

Для описания поведения пористых сред единого подхода нет, но можно отметить, например, теорию Био, теорию смесей [1]. Исследования некоторых моделей для ненасыщенной пористой среды можно найти в [7, 8, 9], а для многофазных несмешивающихся жидкостей в [10, 11, 12]. Простейшим случаем моделирования является однофазная смесь. M.A.Biot предложил феноменологическую модель динамической пороупругости. Работы Я.И.

Френкеля [13] и М.А.Бiot [14, 15, 16, 17, 18, 19] являются признанными классическими разработками математической теории пороупругости. Я.И. Френкель и М.А. Бiot ввели двухфазную модель среды.

Соответствующим моделированием введены в оборот такие параметры материала как, модуль сдвига, коэффициент сжимаемости, пористость, вязкость жидкости, проницаемость, упругие и объемные модули среды, эффективные плотности пористой среды. Процедуры определения этих параметров можно найти в трудах М.А.Бiot и D.G.Willis [16], С.Н.Уew и P.N.Jogi [20] и др. Например, в [20] вычисляются параметры материала для трех видов песчаника, также определяются скорости волн в образцах горных пород по экспериментально определенным параметрам Био. В работе [21] описаны методы определения и представлены значения модельных параметров для разных видов песчаника, гранита и мрамора.

После работ М.А. Бiot система уравнений пороупругости строилась с применением более строгой математической техники в [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]. Так В.Н. Николаевским [24, 29] изложены основы механики пористых сред, приведены фундаментальные уравнения многофазных сред. В классической теории М.А.Био рассматривал только глобальный флюидный поток. Развитие этой теории было предложено в [30, 31], и уже в [32, 33] исследовалось явление волнового затухания от локального флюидного потока. Анизотропная модель пористой среды исследовалась, например, J.O.Parra в [34, 35].

Подробный обзор математических моделей ненасыщенных пористых сред можно найти в [36].

Современная теория смесей заложена в работах С.А.Truesdell [37, 38, 39]. В [38] им описана замкнутая система однокомпонентных материалов, а в [39] – замкнутая система смесей, состоящей из компонент как открытых систем. Развитие теория смесей получила в [40, 41, 42]. Модели пористой среды, на основе теории смесей, сформулированы, например, R.M.Bowen [43, 44, 45] и исследовались в [46, 47].

Обзор различий между теорией Био и теорией смесей можно найти в [48]. Отмечается, что по некоторым из базовых параметров (например, объемные доли) трудно оценить экспериментально и для этого необходимо разрабатывать дополнительные соотношения, часто осложняет применение моделей теории смесей. Кроме того, установлено, что для случая несжимаемых составляющих теория Био получается из теории смесей через процедуру линеаризации при пренебрежении мнимой части плотности массы [49, 50].

Поток поровых жидкостей для частично насыщенных сред включает поток смачивающей жидкости и поток несмачивающей жидкости, где оба потока задаются соответствующим градиентом давления. В случае насыщенного попружного материала закон Дарси используется для описания потока поровой жидкости. Для ненасыщенного попружного материала закон Дарси используется как для смачивающих, так и для несмачивающих жидкостей.

Исследования частично насыщенных сред с позиций теории Био имеет, пусть и не значительный, но свой массив публикаций. В последние несколько лет реакция насыщенного грунта, от действия нагрузки, широко исследовалась аналитическими методами. Например, в [51] с помощью разложений Гельмгольца и преобразований Фурье построены явные общие решения в перемещениях и напряжениях для однородного полупространства в частотной области. В [52] проанализирована динамическая реакция модели горизонтального слоя на возмущение, вызванное ленточным фундаментом. В [53] исследовано движение трехмерного попружного полупространства, создаваемого горизонтальной заглубленной нагрузкой. В [54] получены точные аналитические решения от вертикальной точечной нагрузки, действующей на поверхность двухслойной среды. В [55] исследовалось распространение волн сжатия. В [56] получены точные решения во временной области для одномерной переходной характеристики ненасыщенной однослойной пористой среды для трех типов неоднородных граничных условий. В [57] представлено

аналитическое решение о низкочастотном поведении дилатационных волн, распространяющихся в однородной пороупругой среде, содержащей две несмешивающиеся жидкости. Использована модель Berryman–Thigpen–Chin, в которой не учитываются эффекты капиллярного давления. В [58] исследованы звуковые волны в трехфазных почвах в рамках линейной модели Био и модели простой смеси Вильмански. В работе моделируется пористая среда, состоящая из деформируемого каркаса и двух сжимаемых, химически не реагирующих поровых компонент. Можно отметить решение из работы [59].

В [60] получено полуаналитическое решение динамической задачи одномерной частично насыщенной пороупругой колонны. В работе [60] получено аналитическое решение для одномерной трехфазной пороупругой колонны. Распространение волн исследовано на динамических откликах смещения и поровых давлений. С помощью преобразования Лапласа в [61] изучена динамическая реакция насыщенного столба грунта с бесконечной длиной и несжимаемыми зернами и жидкостью. В [62] построено решение о динамической реакции столба насыщенного грунта бесконечной длины при динамической нагрузке с использованием метода интегрального преобразования и квадратурной свертки. Численно-аналитическое исследование распространения волн в одномерном трехфазном пороупругом стержне проведено в работе [63]. Авторами рассмотрено влияние граничных условий и параметров модели на динамические отклики перемещения и поровых давлений, проведено моделирование эффекта второй медленной волны сжатия на динамических откликах давления воздуха в порах. В [64] получено аналитическое решение распространения волн в двухфазных средах. Доступны и другие одномерные решения, которые можно найти в обзорной статье [65]. Для моделей, отличных от двухфазных, имеется не так много одномерных решений.

Для анализа динамического отклика в поровых средах применяются численные методы. Это вызвано стремлением учесть взаимодействия между

различными фазами среды и ограниченностью аналитическими решениями для простых случаев. Для ненасыщенных сред предложен ряд различных конечно-элементных формулировок [66, 67, 68]. Например, в работе [69] создана конечно-элементная модель анализа волновых полей в ненасыщенном морском дне. МКЭ может успешно применяться для решения задач распространения волн в пороупругих средах, особенно в ограниченных областях. Однако, интерес к распространению волн чаще всего относится к случаям полубесконечных или бесконечных сред. В таких задачах требуется выполнение условий излучения Зоммерфельда. В МКЭ для этого используются две идеи. Одна из них – применение бесконечных элементов [70], а другая – применение неотражающих искусственных границ [71].

Динамические задачи для пористых сред решали в [72, 73]. В [72] представлено решение линейной двумерной динамической задачи распространения сейсмических волн в среде, насыщенной жидкостью, где за основу была взята линеаризованная модель с тремя параметрами, описывающими среду. В [74] приведены решения системы динамических уравнений при действии сосредоточенной силы, используемых для моделирования скоростей смещений пористого каркаса и жидкого заполнителя, а также порового давления и напряжений при разных значениях скоростей распространения продольных и поперечных волн в изотропной однородной среде. Исследованиями распространения волн в двумерной постановке в бесконечном цилиндре из материала Био занимались в [75]. В [76] изучали процесс отражения ударных волн умеренной амплитуды от твердой границы в среде, насыщенной жидкостью и газом. На основе применения математической модели определены значения амплитуд и скоростей отражения волн. В [77] оценивалась роль капиллярных эффектов на динамику поведения трехфазного песка: экспериментально исследованы факторы, влияющие на модуль сдвига. Было установлено, что капиллярные эффекты оказывают влияние на степень насыщения песка. В [78] исследовали распространение гармонических и

нестационарных волн в многослойных сухих, насыщенных и ненасыщенных изотропных пороупругих средах. В [79] исследовалось влияние водонасыщенности на горизонтальное и вертикальное перемещение на границе между пористым грунтом и горной породой от воздействия набегающей волны сжатия. В [80] сравнивались измеренные и рассчитанные значения скоростей продольных и поперечных волн в частично насыщенном песке. В [81] рассмотрена задача дренирования грунта, дан анализ воздействия на столб песка ступенчатой нагрузки. В [82] исследована дисперсия и затухание волн в частично водонасыщенных песчаниках на основе улучшенной модели Био, в которой вводится насыщенность. В [83] моделировалось распространение волны в частично насыщенной пористой среде, где новой особенностью является наличие второй медленной волны из-за капиллярных сил. Численная модель, способная моделировать многофазную структуру грунтов при ударном нагружении, представлена в [84]. С использованием трехфазной модели проведено численное моделирование для исследования распространения взрывной волны в четырех случаях грунтов с различной степенью водонасыщенности от 37.5% и до 100%. На основании экспериментальных и, более подробных, численных результатов можно заключить, что водонасыщенность оказывает значительное влияние на распространение волны, вызванной взрывом. Методы определения эффективных характеристик пористых материалов (низкопористых металлических пен) представлены в [85]. Подход опирается на аналитические решения модельных задач и конечно-элементное моделирование пористых материалов. Работа [86] посвящена анализу изучения новых математических моделей пористых трехфазных полуограниченных неоднородных по глубине оснований. Действие поверхностного осциллятора представляется в виде ряда Фурье и задача решается с установившимся режимом колебаний. Предложен численный алгоритм для изучения зависимости распространения поверхностных волн от механических и геометрических характеристик задачи. В работе [87]

рассматривается контактная задача для мягкой биологической ткани в рамках пороупругой водонасыщенной среды, описываемой моделью Био. В рамках осесимметричной деформации исследуется два типа граничных условий под гладким плоским штампом для порового давления и их влияния на зависимость между глубиной его внедрения и контактной силой. Задачи решаются численно с помощью метода конечных элементов. В работе [88] рассматривается нестационарная осесимметричная задача о распространении возмущений в пористой полуплоскости под действием поверхностной нагрузки. Используется модель Био. Для решения применяются преобразования Ханкеля по радиусу цилиндрической системы координат и Лапласа по времени. Оригиналы находятся аналитически с использованием свойств преобразований. Приведены примеры расчета регулярных частей решения. В работе [89] рассматривается краевая задача динамической теории пороупругости для составного тела. В работе [90] рассматриваются трехмерные постановки краевых динамических задачи пористого полупространства. Решения строятся в рамках полной сжимаемой модели Био и дается оценка решениям по дренированным и недренированным моделям материала. В работе [91] представлен метод исследования волновых полей в неоднородном пористоупругом слое из трансверсально-изотропного материала. Характеристики слоя считаются переменными по толщине. К основным уравнениям, записанным в терминах «перемещения-давление», применяется интегральное преобразование Фурье. Решения преобразованной задачи строятся при помощи метода пристрелки. Обращение преобразования Фурье осуществлено численно с использованием теории вычетов. В работе [92] рассматривается коэффициентная обратная задача о нахождении пороупругих характеристик неоднородного полого цилиндра. Прямая задача пороупругости для цилиндра решается с помощью метода пристрелки. В качестве дополнительной информации при решении обратной задачи выступает измеренное смещение или поровое давление на внешней границе цилиндра. Для решения обратной задачи на основе метода

линеаризации получены операторные соотношения, устанавливающие взаимосвязь между искомыми и измеряемыми характеристиками. Пороупругие характеристики восстанавливались в два этапа. На первом этапе находилось начальное приближение. На втором этапе поправки к восстанавливаемым характеристикам определялись из решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. В работах [93, 94] рассмотрено поведение плоских линейных монохроматических волн в насыщенных пористых средах. В работах [95, 96, 97, 98, 99] рассматриваются закономерности взаимодействия фаз в среде, рассматриваются изменения продольных и поперечных волн в процессе их распространения. В работах [100, 101, 102, 103] дано математическое описание нестационарных процессов, протекающих в изотропных пористых средах. В работах [104, 105] установлена связь между волновыми полями в среде, определяются и исследуются коэффициенты отражения на свободной границе пористого полупространства.

Некоторые аспекты распространения упругих волн во флюидонасыщенных и анизотропных пористых телах освещены в публикациях [106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115]. С применением различных схем при решении нестационарных задач пороупругости можно познакомиться в [116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134].

МГЭ [135] – универсальный численно-аналитический метод. Схема МГЭ приведена на рис. 1 [136].

МГЭ неявно удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда [137], что делает МГЭ пригодным для задач с неограниченными областями [138].

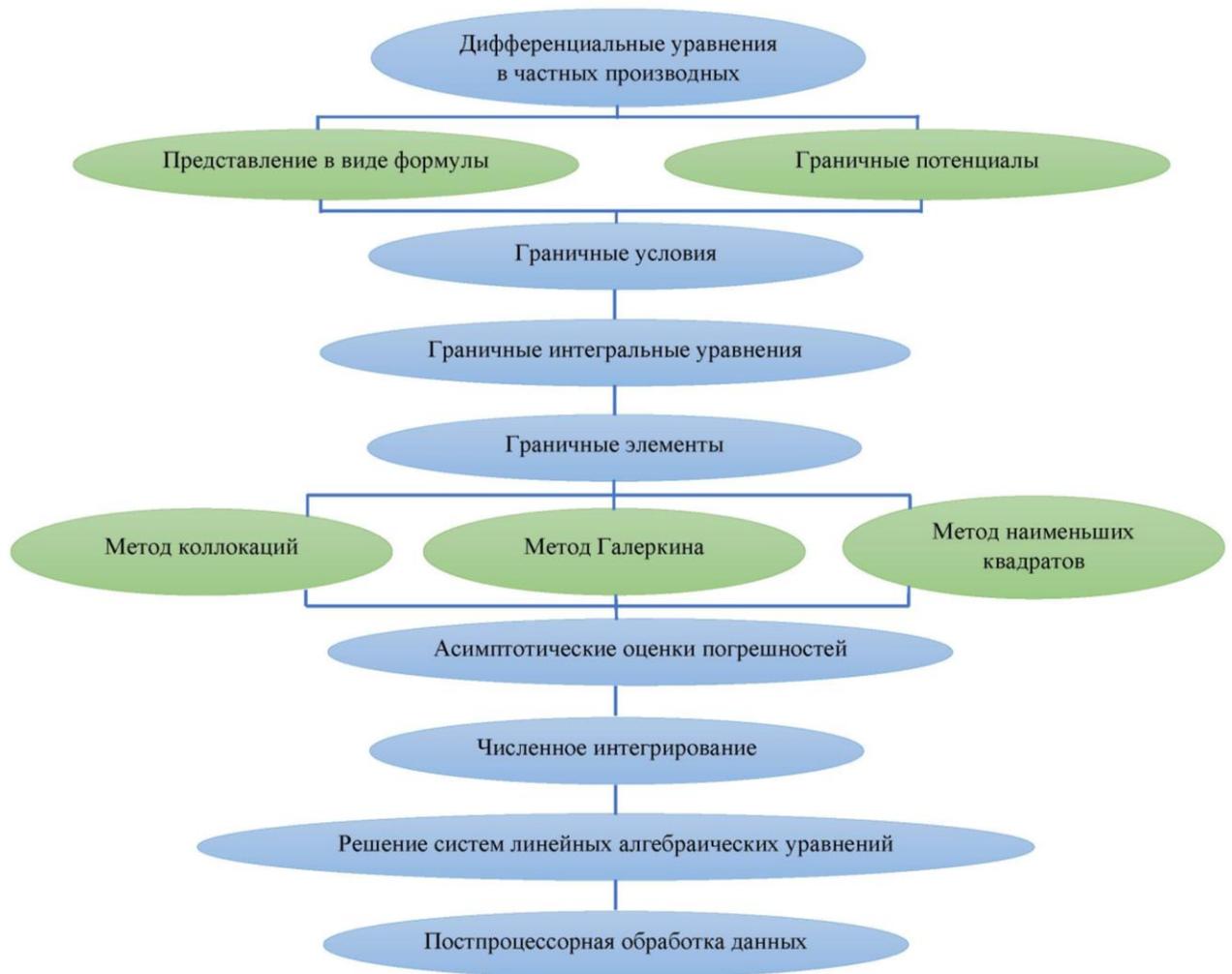


Рис. 1 Классическая схема решения краевой задачи на основе МГЭ

Для исследования задачи о распространении волны методом граничных элементов требуются соответствующие граничные интегральные уравнения и фундаментальные решения. В работах [139, 140] представлены двух- и трехмерные фундаментальные решения для задач статического и квазистатического деформирования ненасыщенных грунтов. Фундаментальные решения задач из [139, 140], но с учетом температурных эффектов представлены в работах [141, 142, 143]. Решения от действия сосредоточенной силы (функция Грина) были получены в [139] как в частотной, так и во временной областях с использованием метода Купрадзе. В [144] дано описание распространения и затухания волн Рэлея, возникающих от источника нагружения, вдоль свободной поверхности ненасыщенного слоя грунта. В [145]

исследована задача Лэмба для полупространства и получена динамическая реакция ненасыщенных грунтов с использованием метода интегрального преобразования. В [146] с помощью методов интегрального преобразования построена функция Грина в преобразованной области для произвольной внутренней гармонической нагрузки, залегающей в ненасыщенном грунте. Работы по выводу фундаментальных решений для систем уравнений пороупругости имеют известную историю и разнообразие. Здесь следует отметить работы таких авторов как R.Burridge и C.A.Vargas [147], A.N.Norris [148], G.D.Manolis и D.E.Beskos [149], A.Cheng, T.Badmus и D.Beskos [150], M.Schanz и H.Antes [151], M.Schanz [152, 153, 154], M.Schanz и S.Diebels [155], M.Schanz и D.Pryl [156], M.Schanz [157], B.Gatmiri и E.Jabbari [139, 140], A.H.-D. Cheng [158] и др. Отдельно можно выделить ранние формулировки ГИУ для пороупругости J.Dominguez [159, 160]. Подробности по отмеченным работам можно найти в [161, 162, 163, 164, 165].

В [166] приведены граничные интегральные формулировки и фундаментальные решения для динамического анализа ненасыщенных грунтов. В [139, 140] представлены двумерная и трехмерная функции Грина для ненасыщенной деформируемой пористой среды с линейным упругим поведением для симметричной полярной области как в области преобразования Лапласа, так и во временной области. В [167] представлена формулировка граничного элемента во временной области и проанализировано динамическое поведение трехмерных частично насыщенных пористых сред. Динамические формулировки ГИУ и фундаментальные решения для двухмерных задач построены в [168], для трехмерных – в [167, 169]. В работах Игумнова Л.А. и др. [170] приведены уточненные выражения для компонент фундаментальных решений с учетом неточностей, допущенных авторами в [169]. Различные аспекты гранично-элементного моделирования ненасыщенных пористых сред рассмотрены в работах [171, 172].

Сравнение результатов применения ГИУ и МКЭ на конкретном примере можно найти в [173, 174]. Сравнение результатов ГИУ и МКЭ дает схема на рис. 2 [136].

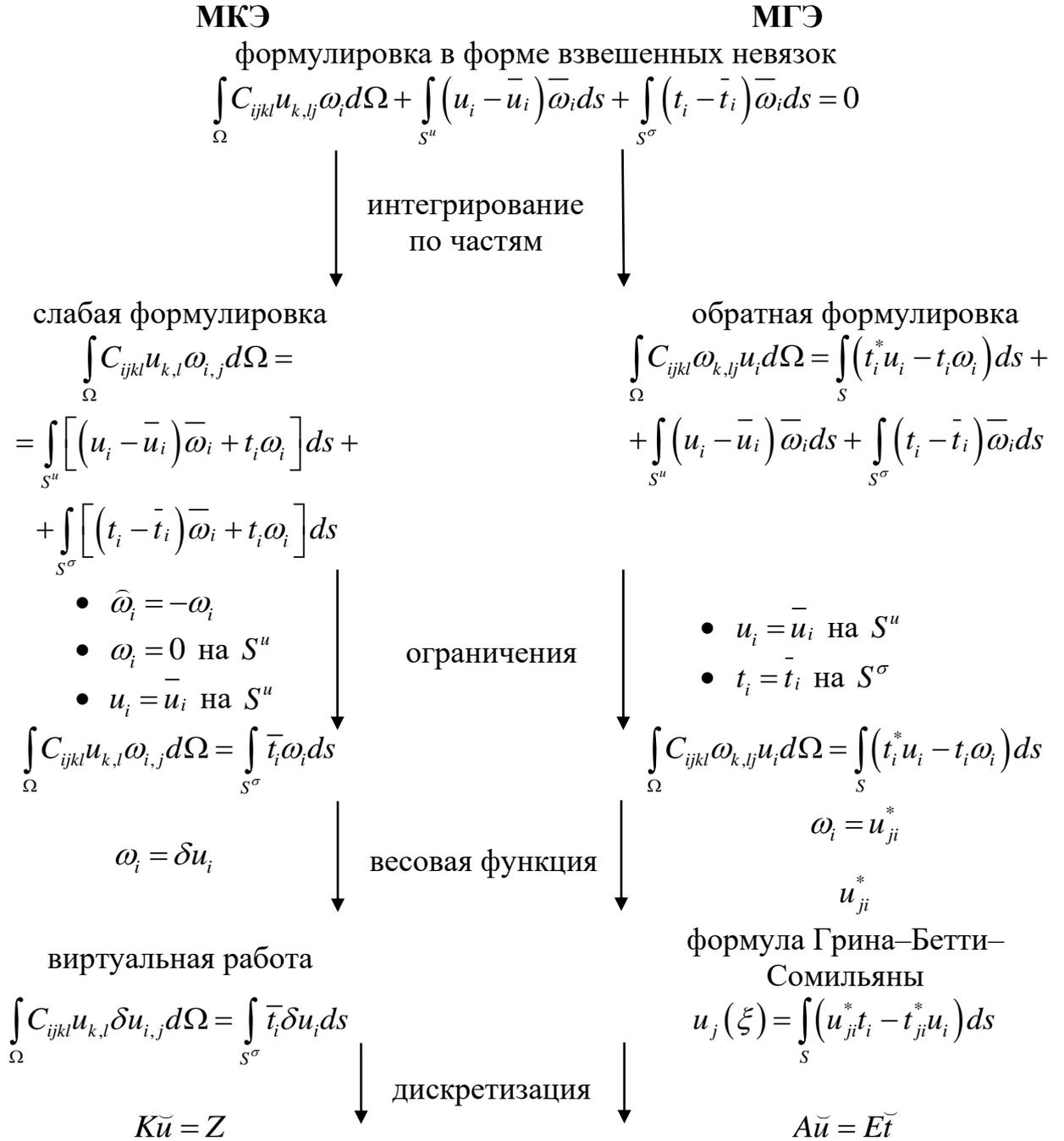


Рис. 2 Классическая схема решения краевой задачи на основе МГЭ

Настоящая работа является продолжением исследований проводимых Л.А. Игумновым [136, 175, 176] со своими учениками и коллегами [177, 178, 179,

180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188]. В работе представлена шаговая гранично-элементная методика решения трехмерных линейных задач динамики трехфазных пороупругих тел. Шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа опирается на квадратурные формулы для интеграла, получаемого из теоремы операционного исчисления об интегрировании оригинала. Методика исследований основана на граничных интегральных уравнениях прямого подхода трехмерной пороупругости в преобразованиях по Лапласу и компьютерном моделировании искомых решений методом граничных элементов в сочетании с методом коллокации, локальной поэлементной аппроксимацией на основе согласованной модели интерполирования.

Цель работы состоит в развитии методических и программных разработок метода гранично-временных интегральных уравнений и в проведении на их основе исследований в линейной постановке динамики трехмерных изотропных трехфазных пороупругих однородных тел.

Научную новизну работы составляют:

- а) шаговая гранично-элементная методика и ее программное оснащение для моделирования в линейной постановке динамики трехмерных пороупругих трехфазных однородных тел и сред;
- б) применение в расчетах согласованной гранично-элементной методики прямого подхода метода гранично-временных интегральных уравнений, построенной на основе шаговой схемы квадратур сверток;
- в) численно-аналитический анализ задачи о действии импульсной силы на одномерный трехфазный пороупругий стержень;
- г) гранично-элементный анализ задачи о действии импульсной силы на торец однородного изотропного пороупругого трехфазного призматического тела;
- д) гранично-элементный анализ задачи о действии импульсной силы на однородное изотропное пороупругое трехфазное полупространство;
- е) гранично-элементный анализ задачи о действии импульсной силы на

однородное изотропное пороупругое трехфазное полупространство, ослабленное кубической полостью.

Достоверность полученных результатов основана на математической строгости и корректности подхода, в рамках которого:

- начально-краевой задаче методом взвешенных невязок ставится в соответствие прямая формулировка интегрального представления искомого общего решения;
- с помощью свойств обобщенных потенциалов интегрального представления решения строятся сингулярные граничные интегральные уравнения для поиска неизвестных граничных функций;
- используются регуляризованные граничные интегральные уравнения; метод коллокаций построения дискретных аналогов; поэлементная согласованная интерполяция граничных функций; численное интегрирование по Гауссу с заданной точностью на элементах, не содержащих точку коллокации, и с предварительной процедурой раскрытия особенности, на элементах содержащих точку коллокации; процедура блочного Гаусса решения дискретных аналогов как системы линейных алгебраических уравнений и т.п.;
- применяется программное обеспечение метода граничных элементов, верифицированное на численно-аналитических решениях, результатах других авторов и анализе сеточной сходимости.

Практическая значимость результатов состоит:

- в создании методических и программных разработок гранично-элементного моделирования в линейной постановке динамики пороупругих однородных трехмерных изотропных тел и сред;
- в возможности применения созданных гранично-элементных разработок для анализа волновых процессов в реальных объектах.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. методическое и программное оснащение исследования в линейной постановке динамики трехмерных изотропных трехфазных пороупругих однородных тел на основе метода гранично-временных интегральных уравнений;
2. применение шагового метода квадратур сверток в формулировке теоремы об интегрировании оригинала к численно-аналитическому решению одномерных линейных задач динамики изотропных пороупругих однородных трехфазных тел;
3. шаговое гранично-элементное моделирование решений следующих задач о действии импульсной силы:
 - на торец однородного изотропного пороупругого трехфазного призматического тела;
 - на однородное изотропное пороупругое трехфазное полупространство;
 - на однородное изотропное пороупругое трехфазное полупространство, ослабленное кубической полостью.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на XXIV, XXV, XXVI, XXVII Международных симпозиумах "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова (Кременки, 2019, 2020, 2021), XIII, XIV Всероссийских школах-семинарах «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» (Дивноморское, 2018, 2019), XVII научно-технической конференции «Молодежь в науке» (Саров, 2018), 6-th International Conference INTEGRITY RELIABILITY FAILURE (IRF2018) (Лиссабон, Португалия, 2018), XLVI Международной летней школе-конференции «Advanced Problems in Mechanics – 2018» (Санкт-Петербург, 2018), Международных научных конференциях "Проблемы прочности, динамики и ресурса" (Нижний Новгород, 2018, 2019), XVI International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing CIVIL-COMP 2019 (Рива-дель-Гарда, Италия, 2019), XII

Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019).

Публикации

Научные работы Григорьева М.В. опубликованы в изданиях, индексируемых в базах данных Scopus, Web of Science, РИНЦ, ВАК, трудах Международных и Всероссийских конференций. По результатам исследований опубликовано 20 работ [189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208], в том числе 4 статьи в журналах, рекомендованных ВАК [199, 202, 207, 208]. По теме диссертации опубликовано 10 работ [189, 190, 193, 194, 195, 196, 197, 201, 207, 208], в том числе 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК [207, 208].

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 234 наименований. Общий объем диссертации составляет 140 страниц машинописного текста, включая 61 рисунок.

На различных этапах работа поддерживалась средствами различных фондов, ведомств и государственных программ:

- главы 1 и 2 подготовлены при финансовой поддержке гранта Правительства Российской Федерации в рамках Постановления №220 от 09.04.2010 (№14.У26.31.0031 от 05.02.2018),
- численные результаты § 1.4 получены при финансовой поддержке Государственным заданием Минобрнауки России (№0729-2020-0054);
- работы по модификации программного оснащения и проведению численных экспериментов (§ 3.3) поддерживались грантом РФФИ (№19-38-90224 Аспирант);
- результаты § 3.1 – 3.2 получены при финансовой поддержке Программы стратегического академического лидерства «Приоритет 2030» (внутренний номер Н-496-99_2021-2023).

Введение содержит обоснование актуальности работы. Дан авторский

анализ современного состояния исследований по теме диссертационной работы. Сформулированы цель, научная новизна, достоверность, практическая значимость результатов, основные положения работы. Представлены сведения об апробации работы, публикациях по теме работы, также сведения о содержании глав и заключения.

В главе 1 представлены: краткое описание математической модели частично насыщенного пороупругого материала; математическая постановка начально-краевой задачи; метод численного обращения преобразования Лапласа; шаговое численно-аналитическое решение одномерной пороупругой задачи.

В §1.1 дано описание математической модели пороупругого материала. Рассмотрен частично насыщенный пороупругий материал и соответствующая ему трехфазная модель. Распределение фаз материала в пространстве описывается параметрами пористости и насыщенности. Рассматривается вариант полного заполнения пор текучими наполнителями (жидкость, газ). Движение текучей среды в поровом пространстве моделируется законом Дарси в динамической форме. В §1.2 дана математическая постановка краевой задачи в изображениях по Лапласу для линейной трехмерной изотропной динамической теории пороупругости, когда материал является частично насыщенным. В §1.3 описан метод численного обращения преобразования Лапласа. Особенностью численно-аналитического метода является то, что он относится к методу квадратур сверток, но опирается на другую базовую теорему операционного исчисления – теорему об интегрировании оригинала. Метод позволяет строить шаговые схемы численного обращения преобразования Лапласа. Такие шаговые схемы составляют основу шаговых схем метода граничных элементов диссертационной работы. В §1.4 рассмотрена в одномерной постановке задача о действии продольной силы на тело из частично насыщенного пороупругого материала. Расписано построение аналитического решения задачи в изображениях по Лапласу. Дан численный

шаговый анализ решения задачи. Построены графики перемещений и поровых давлений во времени с исследованием шаговой сходимости. Исследовано влияние насыщенности жидкостью на нестационарный динамический отклик.

В главе 2 дано описание гранично-элементного подхода, разрабатываемого в диссертационной работе.

В § 2.1 описано построение интегрального представления решения прямого подхода метода граничных интегральных уравнений. Для начально-краевых задач линейной трехмерной изотропной динамической теории пороупругости в рамках трехфазной модели материала записана обобщенная формула Грина-Сомилианы. В § 2.2 с помощью формулы Грина-Сомилианы построено сингулярное, в смысле Коши, граничное интегральное уравнение прямого подхода, а также сингулярное, в смысле Коши, гранично-временное интегральное уравнение прямого подхода. В § 2.3 построена регуляризация граничного интегрального уравнения. Регуляризация выполнена на основе подхода Контаровича-Перлина. Предварительно проведен координатный анализ ядер сингулярного граничного интегрального уравнения. Показано, что особенности матрицы фундаментального решения трехмерной изотропной линейной пороупругости определяется классической матрицей Сомилианы, а особенности матрицы сингулярных решений трехмерной изотропной линейной пороупругости определяются матрицей сингулярных решений, построенной из матриц Сомилианы путем действия граничного оператора трехмерной изотропной линейной упругой статики. В § 2.4 на основе регуляризованного граничного интегрального уравнения записан дискретный аналог граничного интегрального уравнения. Дискретный аналог параметризован комплексной переменной интегрального преобразования Лапласа, и это позволяет организовать шаговый процесс получения оригиналов компонент искомым решений. В § 2.5 приведена структура и дано краткое описание программного гранично-элементного оснащения исследовательских расчетов. Программное оснащение является компьютерной реализацией дискретного аналога

регуляризованного граничного интегрального уравнения на основе шагового способа численного обращения интегрального преобразования Лапласа. В § 2.6 описан инструментарий визуализации препроцессорной и постпроцессорной информации гранично-элементных расчетов. Примерами использования созданного программного обеспечения являются иллюстрационные рисунки диссертационной работы.

В главе 3 содержатся результаты шаговых гранично-элементных исследований начально-краевых задач о действии скачка поверхностной силы на конечное и полубесконечное пороупругое тело, материал которых описывается трехфазной моделью.

В § 3.1 рассмотрена задача о действии торцевой силы на частично насыщенное пороупругое призматическое тело. Гранично-элементное решение задачи сравнивалось с аналитическим решением (его численно-аналитическим вариантом) и с гранично-элементными решениями, полученными другими авторами. Наличие аналитического решения позволяет верифицировать, построенную в диссертационной работе, шаговую гранично-элементную схему и утверждать, что ее возможности превосходят возможности разработанных схем других авторов. Среди причин улучшенных свойств гранично-элементной схемы является реализация набора следующих подходов: согласованная поэлементная аппроксимация, введенная Р.В. Гольдштейном; иерархический алгоритм поэлементного численного интегрирования; шаговая численная схема, опирающаяся на теорему операционного исчисления об интегрировании оригинала; апостериорный сеточный анализ гранично-элементных решений. В § 3.2 рассмотрена задача о действии вертикальной силы на частично насыщенное пороупругое полупространство. До получения искомого гранично-элементного решения проведен апостериорный анализ расчетной граничной модели. Выбор расчетной гранично-элементной модели позволяет получить верифицированные численные результаты. Отмечено влияние насыщенности на амплитуды нестационарного волнового отклика и на скорости волн отклика.

Продемонстрировано поведение волнового отклика при удалении от источника нагружения изотропного однородного пороупругого полупространства. В § 3.3 рассмотрена задача о действии вертикальной силы на частично насыщенное пороупругое полупространство, ослабленное кубической полостью. До получения искомого гранично-элементного решения проведен апостериорный анализ расчетной гранично-элементной модели. Проведен анализ влияния ослабления полупространства на волновой поперечный отклик. Имеется анализ влияния заглубленности на динамический волновой отклик, а также фазности пороупругого материала.

В заключении сформулированы основные результаты и выводы по диссертационной работе.

В качестве основных выводов по Введению можно сформулировать следующее. Введение содержит обоснование актуальности работы. Отмечены российские ученые, занимающиеся развитием интегрального метода для решения задач механики деформируемого твердого тела, а также ученые в России и за рубежом, занимающиеся анализом пороупругих тел. Перечень приведенных фамилий вызван авторскими предпочтениями и является открытым. Дан авторский анализ современного состояния исследований по теме диссертационной работы. Обзор начинается с конца XVIII века и содержит 188 ссылок. В обзоре содержатся ссылки на работы по выработке моделей пороупругости, методам решения задач и отдельно отмечены работы по развитию гранично-элементного подхода для решения задач пороупругости. Сформулированы цель, научная новизна, достоверность, практическая значимость результатов, основные положения работы. Представлены сведения об апробации работы, публикациях диссертанта и о содержании глав и заключения.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

§ 1.1 Модель Био частично насыщенной пороупругой среды

Математическая модель пороупругой среды записывается в соответствии с подходом, изложенным в [167]. Пороупругая среда представляется моделью гетерогенного трехфазного материала, одна из фаз которого предполагается упругим скелетом с распределенными в нем взаимосвязанными порами, а две другие фазы – это текучие наполнители (жидкость и газ), движущиеся в системе пор скелета. Предполагается сжимаемость фаз. Эффекты от изменения температуры не рассматриваются. Такой пороупругий материал относится к частично насыщенным, а его модель называется трехфазной.

Распределение фаз в пространстве описывается макроскопическими величинами пористости материала φ и коэффициентом насыщенности фаз S_f , которые определяются следующим образом [207]:

$$\varphi = \frac{V_v}{V},$$

$$S_f = \frac{V_f}{V}, f = w, a,$$

где V – общий объем материала, V_v – объем, занимаемый порами, V_f – объем занимаемый наполнителем.

Рассматривается случай абсолютного заполнения пор:

$$S_a + S_w = 1.$$

Плотность элементарного объема материала ρ определяется через плотности материалов фаз ρ_s, ρ_w, ρ_a и их объемное содержание, определяемое пористостью и коэффициентом насыщенности:

$$\rho = \rho_s(1 - \varphi) + \varphi S_w \rho_w + \varphi S_a \rho_a,$$

$$\dot{\rho}_a = \frac{\rho_a^0}{K_a} \dot{p}^a, \quad \dot{\rho}_w = \frac{\rho_w^0}{K_w} \dot{p}^w,$$

$$\rho_a^0 = \rho_a(0), \quad \rho_w^0 = \rho_w(0),$$

где K_w и K_a – объемные модули жидкости и газа, p^w и p^a – поровые давления наполнителей, знак « \cdot » обозначает дифференцирование по времени.

Базовые соотношения для пороупругого материала, сформулированные на основе принципа эффективных напряжений, имеют вид [209]:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{eff} - \delta_{ij} \alpha (S_w p^w + S_a p^a), \quad \alpha = 1 - \frac{K}{K_s},$$

где σ_{ij} – полное напряжение, σ_{ij}^{eff} – эффективное напряжение, δ_{ij} – символ Кронекера, α – коэффициент эффективных напряжений, K и K_s – объемные модули упругого скелета и формирующих его зерен.

Предполагается, что поведение упругого скелета описывается законом упругости Гука, то есть соотношение, связывающее σ_{ij}^{eff} с деформациями в скелете ε_{ij} , имеет вид

$$\sigma_{ij}^{eff} = 2G\varepsilon_{ij} + \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_{kk},$$

где K и G – объемный и сдвиговой модули.

Компоненты тензора деформаций скелета ε_{ij} и смещения u_i связаны соотношением Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Движение текучей среды в поровом пространстве моделируется законом Дарси в динамической форме:

$$\varphi S_f \dot{v}_i^f = - \frac{K_{rf} k}{\eta_f} (p_i^f + \rho_f \ddot{u}_i + \rho_f \ddot{v}_i^f), \quad i = \overline{1,3}, \quad f = w, a, \quad (1.1)$$

где v_i^f – смещение наполнителя относительно твердого скелета, S_f – коэффициент насыщенности материала, φ – пористость, k – проницаемость (абсолютная, макроскопическая, общая) частично насыщенного пороупругого материала, K_{rf} – проницаемость (относительная) фазы, η_f – коэффициент вязкости текучего наполнителя, ρ_f – плотность фазы.

Кроме того, используется в след за работой [210] следующие экспериментальные соотношения для случая содержания в порах смеси газа и воды:

$$K_{rw} = S_e^{(2+3\theta)/\theta},$$

$$K_{ra} = (1 - S_e)^2 \left[1 - S_e^{(2+\theta)/\theta} \right],$$

$$S_e = \frac{S_w - S_{rw}}{S_{ra} - S_{rw}},$$

где S_e – эффективная насыщенность; S_{rw} , S_{ra} – соответственно остаточные насыщенности жидкостью и газом, $\theta \in [0, 2; 3]$ – коэффициент, характеризующий распределение пор.

В частично насыщенном пороупругом материале искривление поверхности текучих фаз от действия сил поверхностного натяжения на границе раздела фаз приводит к возникновению разности давлений в них, которая называется капиллярным давлением p^c . Капиллярное давление может быть представлено как функция коэффициента насыщенности следующим образом:

$$p^c = p^a - p^w = p^d S_e^{-\frac{1}{\theta}},$$

где p^d – давление вытеснения.

§ 1.2 Постановка краевой задачи в изображениях по Лапласу

Уравнения движения строятся объединением определяющих соотношений с соответствующими уравнениями баланса количества движения и уравнениями баланса массы каждой из фаз с учетом кинематических условий. Подробное описание вывода уравнений движения можно найти в работе [1].

Неизвестных функций перемещения твердой фазы $u_i, i = \overline{1,3}$ и поровых давлений p^w и p^a достаточно для полного описания задачи пороупругой динамики [211]. Чтобы получить шаговую формулировку, необходимо в базовых уравнениях математической модели трехфазного материала исключить относительное смещение $v_i^f, i = \overline{1,3}, f = w, a$, преобразовав соотношение (1.1). Поскольку в (1.1) входят первая и вторая производные по времени от v_i^f , это преобразование проведем в преобразованиях по Лапласу с комплексной переменной s . Для случая отсутствия объемных сил и источников система уравнений движения принимает вид:

$$\begin{bmatrix} B_1 \delta_{ij} + B_2 \partial_i \partial_j & B_3 \partial_i & B_4 \partial_i \\ B_5 \partial_j & B_6 & B_7 \\ B_8 \partial_j & B_9 & B_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i(\mathbf{x}, s) \\ \hat{p}^w(\mathbf{x}, s) \\ \hat{p}^a(\mathbf{x}, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x} \in \Omega, \Omega \subset \mathbf{R}^3, \quad (1.2)$$

где ∂_i – символ дифференцирования по пространственной переменной x_i ,

$$B_1 = G \nabla^2 - (\rho - \beta S_w \rho_w - \gamma S_a \rho_a) s^2,$$

$$B_2 = K + \frac{2}{3} G,$$

$$B_3 = -(\alpha - \beta) S_w,$$

$$B_4 = -(\alpha - \gamma) S_a,$$

$$B_5 = -(\alpha - \beta) S_w s,$$

$$B_6 = - \left(\zeta S_{ww} S_w + \frac{\varphi}{K_w} S_w - S_u \varphi \right) s + \frac{\beta S_w}{\rho_w s} \nabla^2,$$

$$B_7 = -(\zeta S_{aa} S_w + S_u \varphi) s,$$

$$B_8 = -(\alpha - \gamma) S_a s,$$

$$B_9 = -(\zeta S_{ww} S_a + S_u \varphi) s,$$

$$B_{10} = - \left(\zeta S_{aa} S_a + \frac{\varphi}{K_a} S_a - S_u \varphi \right) s + \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} \nabla^2,$$

$$\zeta = \frac{\alpha - \varphi}{K_s},$$

$$S_{ww} = S_w - \theta(S_w - S_{rw}),$$

$$S_{aa} = S_a + \theta(S_w - S_{rw}),$$

$$S_u = - \frac{\theta(S_{ra} - S_{rw})}{p^d} S_e^{(\theta+1)/\theta}$$

$$\beta = \frac{\kappa_w \varphi \rho_w s}{\varphi S_w + \kappa_w \rho_w s},$$

$$\gamma = \frac{\kappa_a \varphi \rho_a s}{\varphi S_a + \kappa_a \rho_a s},$$

$$\kappa_f = K_{rf} \frac{k}{\eta_f}, \quad f = w, a,$$

K_w, K_a – объемные модули жидкости и газа, ∇ – оператор Гельмгольца, S_{ww} – остаточная насыщенность жидкостью, S_{aa} – остаточная насыщенность газом, K_s – объемный модуль зерен скелета, θ – коэффициент распределения пор, K, G – объемный и сдвиговой модули, ρ – плотность элементарного объема, единичная нормаль к границе области Ω , S^u – граница типа Дирихле и S^σ – граница типа Неймана.

Корректная формулировка математической модели начально-краевой задачи в изображениях по Лапласу включает следующие граничные условия:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, s) = \tilde{\mathbf{v}}, \quad \mathbf{v} = (\hat{u}_i, \hat{p}^w, \hat{p}^a), \quad \mathbf{x} \in S^u, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, s) = \tilde{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{t} = (\hat{t}_i, -\hat{q}^w, -\hat{q}^a), \quad \hat{t}_i = \hat{\sigma}_{ij} n_j, \quad \hat{q}_i = s \hat{\nu}_i n_i \quad (\mathbf{x} \in S^\sigma), \quad (1.4)$$

где n_i – единичная нормаль к границе области Ω , S^u – граница типа Дирихле и S^σ – граница типа Неймана.

Система уравнений (1.2) – (1.4) полностью описывает краевую задачу трехмерной изотропной динамической теории пороупругости в изображениях по Лапласу.

§ 1.3 Метод численного обращения преобразования Лапласа

Для построения шаговых схем метода граничных элементов, получения численно-аналитических решений с использованием интегрального преобразования Лапласа в работе применяется метод численного обращения преобразования Лапласа, который можно отнести к предложенному Любичем методу квадратур сверток [212, 213, 214, 215]. Метод исходит из следующего интеграла:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau, \quad \forall t > 0. \quad (1.5)$$

В настоящее время метод хорошо разработан и успешно использован при построении гранично-элементных решений начально-краевых задач методом гранично-временных интегральных уравнений [151, 154].

Рассмотрим обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iY}^{c+iY} \hat{f}(s) e^{ts} ds, \quad (1.6)$$

где $f(t)$ – оригинал, $\hat{f}(s)$ – изображение. Условием существования обратного преобразования Лапласа является требование чтобы величина была больше действительной части любого из полюсов функции $\hat{f}(s)$.

Подстановка (1.6) в (1.5) приводит к соотношению

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{c-iY}^{c+iY} \hat{f}(s) \underbrace{\int_0^t g(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau ds}_{:= h(t,s)}, \quad (1.7)$$

где для внутреннего интеграла по τ введено обозначение $h(t,s)$. С целью интегрирования по комплексной переменной полуаналитическим методом дальнейшее преобразование (1.7) выполняется с помощью представления функции $h(t,s)$ в виде двух функций: зависящей от переменной t и зависящей от переменной s .

Так как функция $h(t,s)$ является решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\left(\frac{d}{dt} - s \right) h(t,s) = g(t), \quad h(0,s) = 0,$$

то ее можно аппроксимировать посредством линейного многошагового метода значениями $h_n = h(n\Delta t, s)$ на сетке $0 = t_0 < \Delta t = t_{1\dots} < n\Delta t = t_n$ с постоянным шагом Δt и $n \in N$ следующим образом

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i h_{n+1} = \Delta t \sum_{i=0}^k \{ \beta_i (s h_{n+i} + g[(n+i)\Delta t]) \}, \quad (1.8)$$

где α_i и β_i – постоянные, $\alpha_k \neq 0, |\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0$.

После некоторых преобразований составим следующий степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n = \frac{1}{\frac{\theta(z)}{\Delta t} - s} \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad h_0 = h_1 = \dots = h_{k-1} = 0, \quad (1.9)$$

Вид характеристической функции $\theta(z)$ в (1.9) зависит от выбора конкретного многошагового метода. Благодаря тому, что переменные t и s в (1.6) разделены,

а множитель в правой части может быть интерпретирован как дискретный оператор обратный к дифференциальному оператору $d/dt - s$, соотношение (1.9) может быть использовано для дальнейшего преобразования (1.7). Для этого (1.7) следует умножить на z^n и просуммировать по всем n , что даст

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (f * g)_n z^n = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{c-iY}^{c+iY} \hat{f}(s) \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{c-iY}^{c+iY} \hat{f}(s) \frac{1}{\frac{\theta(z)}{\Delta t} - s} ds \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подынтегральная функция в правой части (1.10) имеет единственный полюс $s = \theta(z) / \Delta t$. Согласно теореме о вычетах получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \lim_{Y \rightarrow \infty} \int_{S_Y(c)} \hat{f}(s) \frac{1}{\frac{\theta(z)}{\Delta t} - s} ds = \hat{f}\left(\frac{\theta(z)}{\Delta t}\right), \quad (1.11)$$

где замкнутый контур $S_Y(c) := \{s \in \mathbf{C} : (\Re(s) = c \cap |s - c| = Y)\}$ является объединением отрезка прямой параллельной мнимой оси с дугой полуокружности радиуса Y с центром в точке c . Корректность подхода обеспечивается условием ограниченности функции \hat{f} на бесконечности:

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} |\hat{f}(s)| = 0.$$

Соотношение (1.10) с учетом (1.11) запишется в виде:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (f * g)_n z^n = \hat{f}\left(\frac{\theta(z)}{\Delta t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n. \quad (1.12)$$

Для функции $\hat{f}(\theta(z) / \Delta t)$ из (1.12) запишем следующее представление в виде ряда по степеням переменной z :

$$\hat{f}\left(\frac{\theta(z)}{\Delta t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(\hat{f}) z^n. \quad (1.13)$$

Подставив (1.13) в правую часть (1.12), получим двойную сумму:

$$\begin{aligned}
& \hat{f}\left(\frac{\theta(z)}{\Delta t}\right) \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(\hat{f}) z^n \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\hat{f}) g_k z^n.
\end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z в (1.12) с учетом полученной суммы, получим:

$$(f * g)_n \approx \sum_{k=0}^n \omega_{n-k}(\hat{f}, \Delta t, \theta) g_k, \forall n \in \mathbf{N}. \quad (1.14)$$

В случае, когда функция $\hat{f}\left(\frac{\theta(z)}{\Delta t}\right)$ не может быть представлена в виде аналитического степенного ряда, при расчете весовых множителей ω_n степенного ряда (1.14) может быть применена интегральная формула Коши:

$$\omega_n(\hat{f}, \Delta t, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r} \hat{f}\left(\frac{\theta(z)}{\Delta t}\right) z^{-n-1} dz, \quad (1.15)$$

где контур $\partial B_r := \{z \in \mathbf{C} : |z| = R\}$ – окружность радиуса R , ограничивающая область аналитичности функции $\hat{f}(\theta(z)/\Delta t)$. После приведения к полярным координатам интеграла (1.15) вычислим его методом трапеций:

$$\omega_n(\hat{f}, \Delta t, \theta) \approx \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \hat{f}\left(\frac{\theta(\xi_l)}{\Delta t}\right) \xi_l^{-n}, \xi_l = \operatorname{Re} e^{i\frac{2\pi}{L} l}. \quad (1.16)$$

Вычислении интеграла свертки (1.5) методом квадратур свертки использует аппроксимацию (1.16) и решения $h(t, s)$ линейным многошаговым методом. Метод должен иметь порядок точности $p \geq 1$, и удовлетворять критериям нуль-устойчивости и А-устойчивости. Кроме того, функция \hat{f} должна быть ограничена в правой полуплоскости относительно прямой $(c - i\infty, c + i\infty)$.

В работе используется метод дифференцирования назад второго порядка точности с характеристической функцией $\theta(z) = 3/2 - 2z + z^2/2$. Такой выбор позволяет удовлетворить сформулированным требованиям.

О точности метода можно утверждать. Пусть функция \hat{f} в (1.16) вычисляется с погрешностью ε , тогда выбор $L=N$ и $R^n = \sqrt{(\varepsilon)}$ допускает погрешность вычисления ω_n порядка $O(\varepsilon)$.

В работе используется шаговый метод, согласно которому функция g – функция Хевисайда:

$$f(0) = 0, \quad f(n\Delta t) = \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \bar{f}(s) s e^{-in\phi},$$

$$s = \frac{\theta(z)}{\Delta t}, \quad z = R e^{i\phi}, \quad \phi = 2\pi \frac{l}{L}.$$

Такой способ построения оригинала существенно упрощает схему численного обращения преобразования Лапласа. Особенно это проявится при построении шаговых гранично-элементных схем. Если метод квадратур сверток опирался на формулу (1.5), которой соответствует в операционном исчислении теорема о свертках, то применяемая в работе итоговая формула исходит из теоремы операционного исчисления об интегрировании оригинала.

§ 1.4 Задача о действии продольной силы на одномерный частично насыщенный пороупругий стержень

Анализ динамики насыщенного жидкостью пористого тела значительно усложняет вычислительную схему краевой задачи по сравнению с упругой или

вязкоупругой постановками. Вклад динамического поведения наполнителя принципиально меняет вид волновой картины. Упрощения постановок задач позволяют строить аналитические решения и с их помощью: выявлять механизмы взаимодействия твердой и жидкой фаз; проводить апостериорные оценки численных результатов; исследовать переходные процессы в пористом материале при динамической нагрузке. Обзор доступных аналитических решений задач о распространении волн в насыщенных пористых средах можно найти, например, в статье Schanz [65]. Из работы Li и Schanz [60] выберем аналитическое решение для одномерного частично насыщенного пороупругого стержня. Подробное описание построения решения задачи вызвано тем, что выражения из [60] содержат ошибки.

Рассмотрим задачу о действии нагрузки в виде функции Хевисайда по времени на одномерный частично насыщенный пороупругий стержень длины l (рис. 1.1).

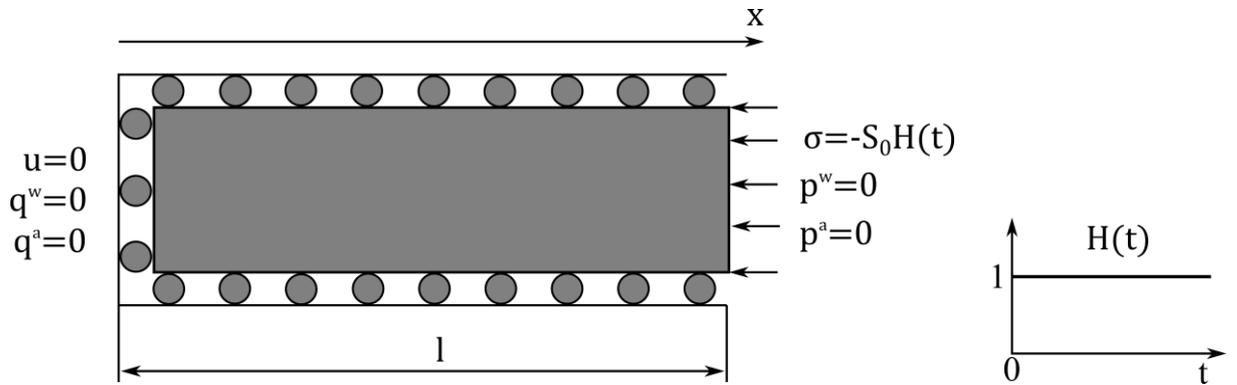


Рис. 1.1 Схема задачи о действии нагрузки на одномерный частично насыщенный пороупругий стержень

Система дифференциальных уравнений распространения одномерных пороупругих волн в изображениях по Лапласу при отсутствии объемных сил имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(K + \frac{4}{3} G \right) \hat{u}_{,xx} - (\rho - \beta S_w \rho_w - \gamma S_a \rho_a) s^2 \hat{u} - \\ - (\alpha - \beta) S_w \hat{p}_{,x}^w - (\alpha - \gamma) S_a \hat{p}_{,x}^a = 0, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}
& -(\alpha - \beta)S_w s \hat{u}_{,x} - \left(\zeta S_{ww} S_w + \frac{\varphi}{K_w} S_w - S_u \varphi \right) s \hat{p}^w + \\
& + \frac{\beta S_w}{\rho_w s} \hat{p}_{,xx}^w - (\zeta S_{aa} S_w + S_u \varphi) s \hat{p}^a = 0,
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
& -(\alpha - \gamma)S_a s \hat{u}_{,x} - (\zeta S_{ww} S_a + S_u \varphi) s \hat{p}^w - \\
& - \left(\zeta S_{aa} S_a + \frac{\varphi}{K_a} S_a - S_u \varphi \right) s \hat{p}^a + \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} \hat{p}_{,xx}^a = 0.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Граничные условия в изображениях по Лапласу имеют вид:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(x=0, s) &= 0, & \hat{\sigma}(x=l, s) &= -S_0 / s, \\
\hat{p}^w(x=l, s) &= 0, & \hat{q}^w(x=0, s) &= 0, \\
\hat{p}^a(x=l, s) &= 0, & \hat{q}^a(x=0, s) &= 0.
\end{aligned}$$

Решение системы (1.17) – (1.19) ищем в экспоненциальной форме:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(x, s) &= U e^{\lambda s x}, \\
\hat{p}^w(x, s) &= U^w e^{\lambda s x}, \\
\hat{p}^a(x, s) &= U^a e^{\lambda s x}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Подстановка (1.20) в (1.17) – (1.19) приводит к задаче на собственные значения для λ :

$$\begin{bmatrix} (B_1 \lambda^2 - B_2) s & -B_3 \lambda & -B_4 \lambda \\ B_3 \lambda s & B_5 - B_6 \lambda^2 & B_7 \\ -B_4 \lambda s & B_8 & B_9 - B_{10} \lambda^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ U^w \\ U^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1.21}$$

где

$$\begin{aligned}
B_1 &= K + \frac{4}{3} G, \\
B_2 &= \rho - \beta S_w \rho_w - \gamma S_a \rho_a, \\
B_3 &= (\alpha - \beta) S_w, \\
B_4 &= (\alpha - \gamma) S_a, \\
B_5 &= \zeta S_{ww} S_w + \frac{\varphi}{K_w} S_w - S_u \varphi,
\end{aligned}$$

$$B_6 = \frac{\beta S_w}{\rho_w s},$$

$$B_7 = \zeta S_{aa} S_w + S_u,$$

$$B_8 = \zeta S_{ww} S_a + S_u \varphi,$$

$$B_9 = \zeta S_{aa} S_a + \frac{\varphi}{K_a} S_a - S_u \varphi,$$

$$B_{10} = \frac{\gamma S_a}{\rho_a s}.$$

Возникает характеристическое уравнение:

$$C_1 \lambda^6 + C_2 \lambda^4 + C_3 \lambda^2 + C_4 = 0, \quad (1.22)$$

где

$$C_1 = B_1 B_6 B_{10},$$

$$C_2 = -(B_1 B_5 B_{10} + B_1 B_6 B_9 + B_2 B_6 B_{10} + B_3^2 B_{10} + B_4^2 B_6),$$

$$C_3 = B_1 (B_5 B_9 - B_7 B_8) + B_2 (B_5 B_{10} - B_6 B_9) - B_3 B_4 (B_7 + B_8) + B_3^2 B_9 + B_4^2 B_5,$$

$$C_4 = B_2 (B_7 B_8 - B_5 B_9),$$

$$N_1 = -\frac{C_2}{3C_1},$$

$$N_2 = \frac{\sqrt[3]{2}}{N_3},$$

$$N_3 =$$

$$= \sqrt[3]{-2C_2^3 + 9C_1 C_2 C_3 - 27C_1^2 C_4 + \sqrt{4(-C_2^2 + 3C_1 C_3)^3 + (-2C_2^3 + 9C_1 C_2 C_3 - 27C_1^2 C_4)^2}}.$$

Уравнение (1.22) является кубическим относительно λ^2 , поэтому его корни могут быть вычислены по формулам Кардано:

$$\lambda_1 = -\lambda_4 = \sqrt{N_1 + \frac{N_2 C_2^2}{3C_1} - N_2 C_3 + \frac{1}{3N_2 C_1}},$$

$$\lambda_2 = -\lambda_5 = \sqrt{N_1 + \frac{3C_1 C_3 - C_2^2}{3C_1} N_2 (1 - i\sqrt{3}) - \frac{1}{6N_2 C_1} (1 + i\sqrt{3})},$$

$$\lambda_3 = -\lambda_6 = \sqrt{N_1 + \frac{3C_1C_3 - C_2^2}{3C_1}N_2(1+i\sqrt{3}) - \frac{1}{6N_2C_1}(1-i\sqrt{3})}.$$

Решение системы запишется в виде линейной комбинации частных решений, каждое из которых соответствует одному из шести собственных значений:

$$\hat{u}(x, s) = \sum_{i=1}^6 U_i e^{\lambda_i s x}$$

$$\hat{p}^w(x, s) = \sum_{i=1}^6 a_i s U_i^w e^{\lambda_i s x}$$

$$\hat{p}^a(x, s) = \sum_{i=1}^6 b_i s U_i^a e^{\lambda_i s x}$$

Соотношения, связывающие коэффициенты U_i , U_i^w и U_i^a , получаются из (1.21) и имеют вид:

$$U_i^w = \frac{(B_1B_7 + B_3B_4)\lambda_i^2 - B_2B_7}{(B_4B_6\lambda_i^2 + B_3B_7 - B_4B_5)\lambda_i} s U_i = a_i s U_i$$

$$U_i^a = \frac{(B_1B_8 + B_3B_4)\lambda_i^2 - B_2B_8}{(B_3B_{10}\lambda_i^2 + B_4B_8 - B_3B_9)\lambda_i} s U_i = b_i s U_i$$

Коэффициенты U_i находятся из граничных условий. Так, при $x=l$ из граничных условий для напряжения и поровых давлений получается три уравнения:

$$\left(K + \frac{4}{3}G\right) s \sum_{i=1}^6 (\lambda_i e^{\lambda_i s l} U_i) = -S_0 / s, \quad (1.23)$$

$$s \sum_{i=1}^6 (a_i e^{\lambda_i s l} U_i) = 0, \quad (1.24)$$

$$s \sum_{i=1}^6 (b_i e^{\lambda_i s l} U_i) = 0 \quad (1.25)$$

и три уравнения из граничных условий для перемещений и потоков при $x=0$:

$$s \sum_{i=1}^6 (a_i \lambda_i U_i) = 0, \quad (1.26)$$

$$s \sum_{i=1}^6 (b_i \lambda_i U_i) = 0, \quad (1.27)$$

$$\sum_{i=1}^6 U_i = 0. \quad (1.28)$$

После определения шести коэффициентов U_i из уравнений (1.23) – (1.28) решение исходной краевой задачи запишется в виде

$$\hat{u}(x, s) = \frac{S_0}{Ms^2 \left(K + \frac{4}{3}G \right)} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{e^{-\lambda_i s(x+l)} - e^{\lambda_i s(x-l)}}{1 + e^{-2\lambda_i sl}} t_i \right), \quad (1.29)$$

$$\hat{p}^w(x, s) = \frac{-S_0}{Ms \left(K + \frac{4}{3}G \right)} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{e^{-\lambda_i s(x+l)} + e^{\lambda_i s(x-l)}}{1 + e^{-2\lambda_i sl}} a_i t_i \right), \quad (1.30)$$

$$\hat{p}^a(x, s) = \frac{-S_0}{Ms \left(K + \frac{4}{3}G \right)} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{e^{-\lambda_i s(x+l)} + e^{\lambda_i s(x-l)}}{1 + e^{-2\lambda_i sl}} b_i t_i \right), \quad (1.31)$$

где

$$t_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2,$$

$$t_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3,$$

$$t_3 = a_2 b_1 - a_1 b_2,$$

$$M = t_1 \lambda_1 + t_2 \lambda_2 + t_3 \lambda_3.$$

Решения (1.29) – (1.31) с помощью метода численного обращения преобразования Лапласа позволяют исследовать распространение упругих волн в одномерном пороупругом стержне длиной 10 м. Параметры материала стержня представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1

Параметр	Значение
Пористость, φ	0.23
Плотность зерен скелета, ρ_s	2650 кг/м ³
Плотность жидкости, ρ_w	997 кг/м ³
Плотность газа, ρ_a	1.1 кг/м ³
Объемный модуль пористого материала, K	$1.02 \cdot 10^9$ Н/м ²
Модуль сдвига пористого материала, G	$1.44 \cdot 10^9$ Н/м ²
Объемный модуль зерен твердого скелета, K_s	$3.5 \cdot 10^{10}$ Н/м ²
Объемный модуль жидкости, K_w	$2.25 \cdot 10^9$ Н/м ²
Объемный модуль газа, K_a	$1.1 \cdot 10^5$ Н/м ²
Коэффициент проницаемости, k	$2.5 \cdot 10^{-12}$ м ²
Коэффициент вязкости жидкости, η_w	$1.0 \cdot 10^{-3}$ Н·с/м ²
Коэффициент вязкости газа, η_a	$1.8 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м ²
Давление газа необходимое для вытеснения жидкости из пор, p^d	$5 \cdot 10^4$ Н/м ²
Остаточная насыщенность жидкости, S_{rw}	0
Остаточная насыщенность газа, S_{ra}	1
Коэффициент распределения размера пор, θ	1.5

Для исследования сходимости по времени численно-аналитического решения рассматриваемой задачи проведены расчеты с различными значениями параметра Δt при $S_w = 0.9$. Рассмотрены следующие значения параметра Δt : $2.0 \cdot 10^{-4}$ с, $5.0 \cdot 10^{-5}$ с, $1.25 \cdot 10^{-5}$ с. Параметры шагового метода приняты следующими: $R = 0.997$, $L = 10000$.

Анализ полученных численных результатов первоначально касается

исследования сходимости решения по времени. Рисунок 1.2 показывает, что при всех рассмотренных значениях параметра Δt графики перемещения u близко располагаются друг к другу, а при значениях $5.0 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ и $1.25 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ параметра Δt соответствующие кривые перемещений становятся графически неразличимы.

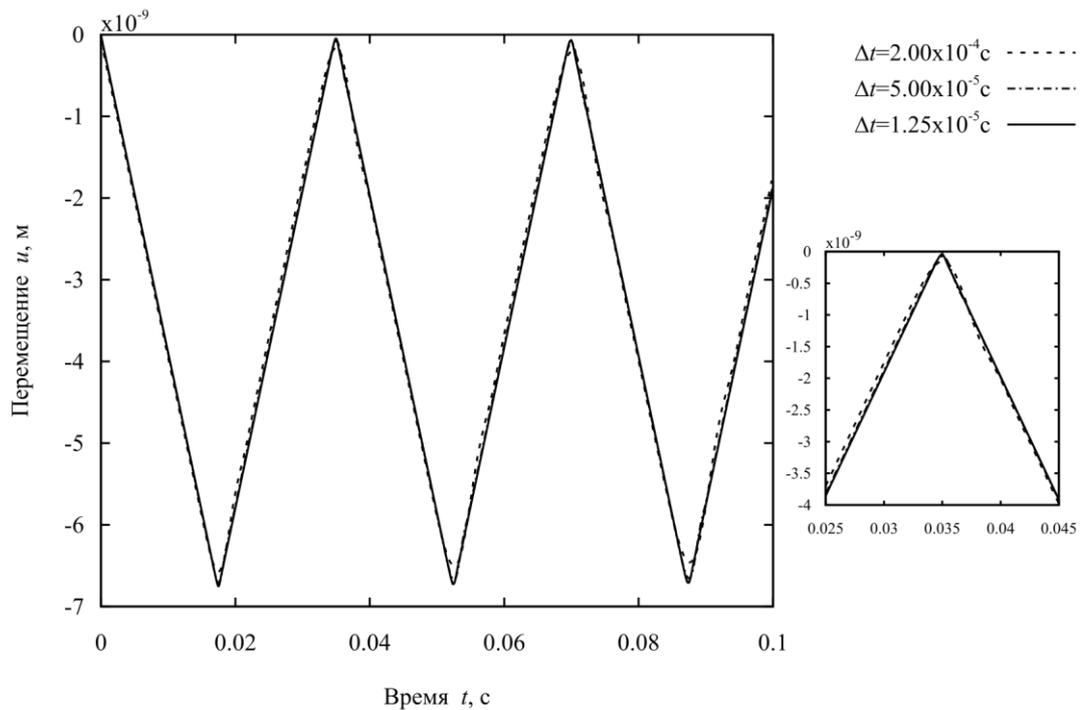


Рис. 1.2 Графики изменения перемещения u на нагруженном конце стержня в зависимости от времени t при различных значениях параметра Δt

Рисунки 1.3 – 1.4 показывают, что кривые порового давления p^w и p^a близки друг к другу при изменении параметра Δt от $2.0 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ до $1.25 \cdot 10^{-5} \text{ с}$. Уменьшение шага по времени приводит к значительному снижению величины соответствующих осцилляций на кривых поровых давлений.

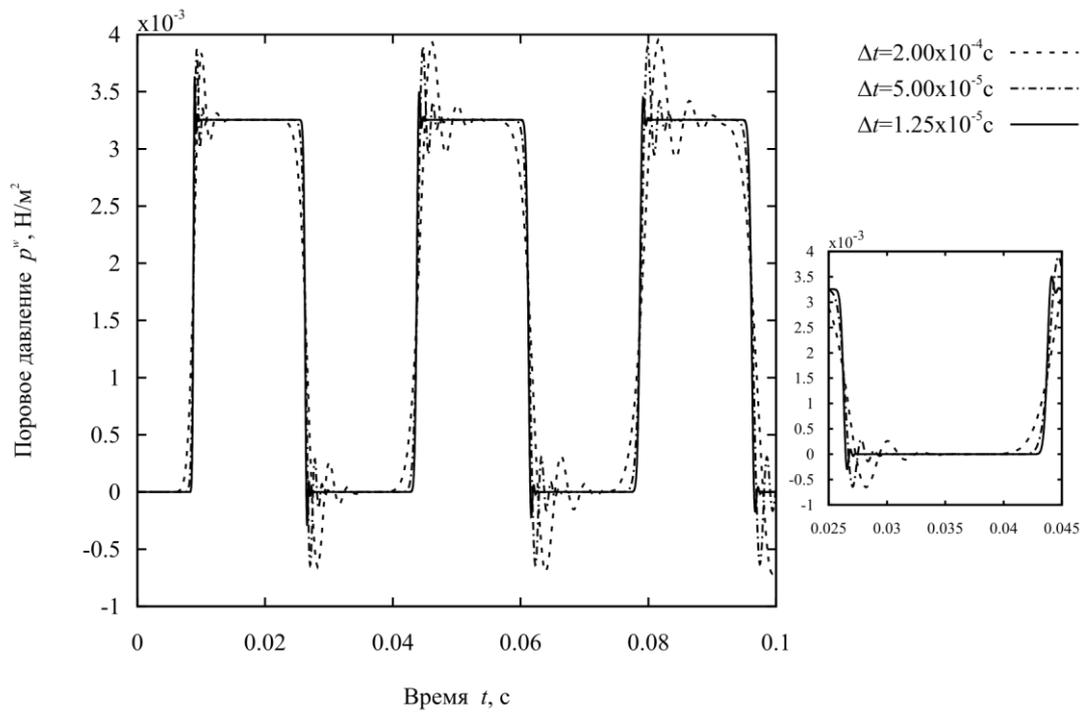


Рис. 1.3 Графики изменения порового давления p^w на закрепленном конце стержня в зависимости от времени t при различных значениях параметра Δt

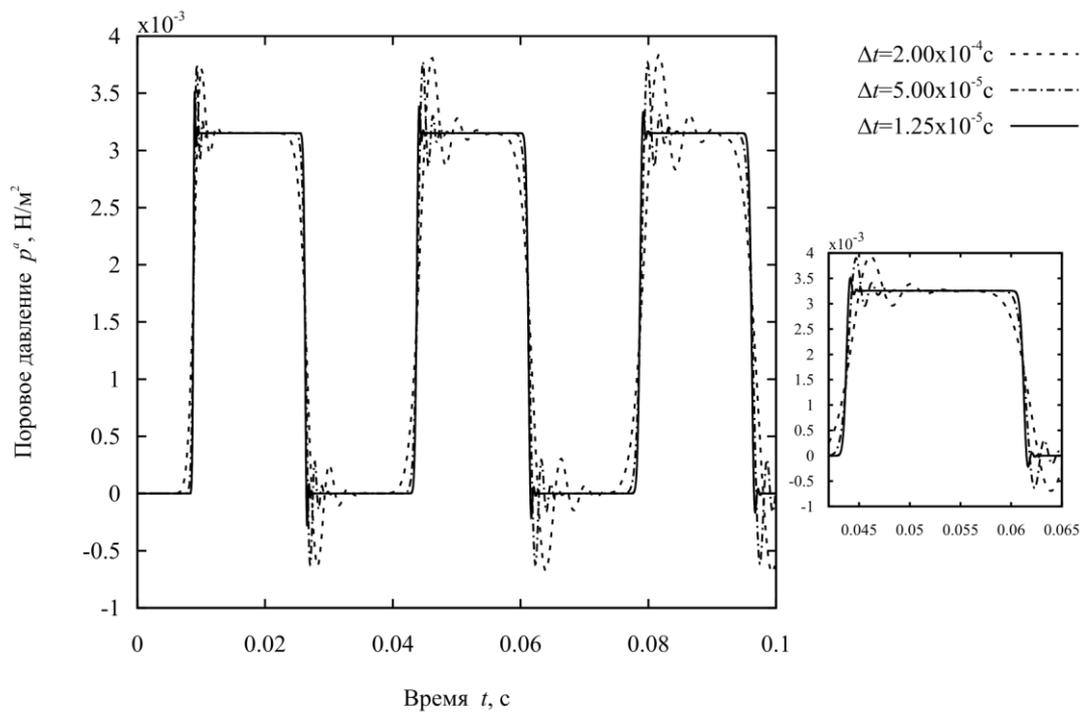


Рис. 1.4 Графики изменения порового давления \hat{p}^a на закрепленном конце стержня в зависимости от времени t при различных значениях параметра Δt

Последующий анализ полученных результатов относится к исследованию влияния параметров пороупругого материала на решение. На рис. 1.5 – 1.6 представлены зависимости от времени перемещения u и поровых давлений p^w и p^a , полученные при различных значениях коэффициента насыщенности S_w . В случае $S_w=1$ расчеты выполнены с использованием модели полностью насыщенного пороупругого материала со следующими параметрами: $K=1.02 \cdot 10^9$ Н/м², $G=1.44 \cdot 10^9$ Н/м², $K_s=3.5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $K_w=2.25 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho=2270$ кг/м³, $\rho_w=997$ кг/м³, $\varphi=0.23$, $\kappa=2.5 \cdot 10^{-9}$ м⁴/(Н·с).

Рисунки 1.5 – 1.6 показывают, что с увеличением насыщенности возрастает значение перемещения u в момент прибытия продольной волны, а также скорость продольной волны. При этом решения при $S_w=0.5$, $S_w=0.9$, $S_w=0.99$ незначительно различаются по величине перемещения и по скорости продольной волны почти на всем рассматриваемом интервале по времени, но при $S_w=0.999$ хорошо видно, что амплитуда перемещения уменьшается при меньших значениях S_w , а скорость продольной волны растет. Дальнейшее увеличение S_w до значения 0.9999 приводит к уменьшению значения амплитуды перемещения около 1.7 раза по сравнению с аналогичным значением при $S_w=0.999$. При $S_w=0.99999$ значение амплитуды перемещения меньше аналогичного значения при $S_w=0.9999$ около 1.6 раза. Однако при $S_w=0.999999$ решение для перемещения по сравнению с решением для перемещения при $S_w=0.99999$ становится графически неразличимым с решением, соответствующим случаю полного насыщения $S_w=1$. Таким образом, увеличение S_w от 0.5 до 0.999999 привело к снижению амплитуды перемещения u в момент прибытия продольной волны почти в 1.7 раза и увеличению скорости продольной волны в 1.67 раза.

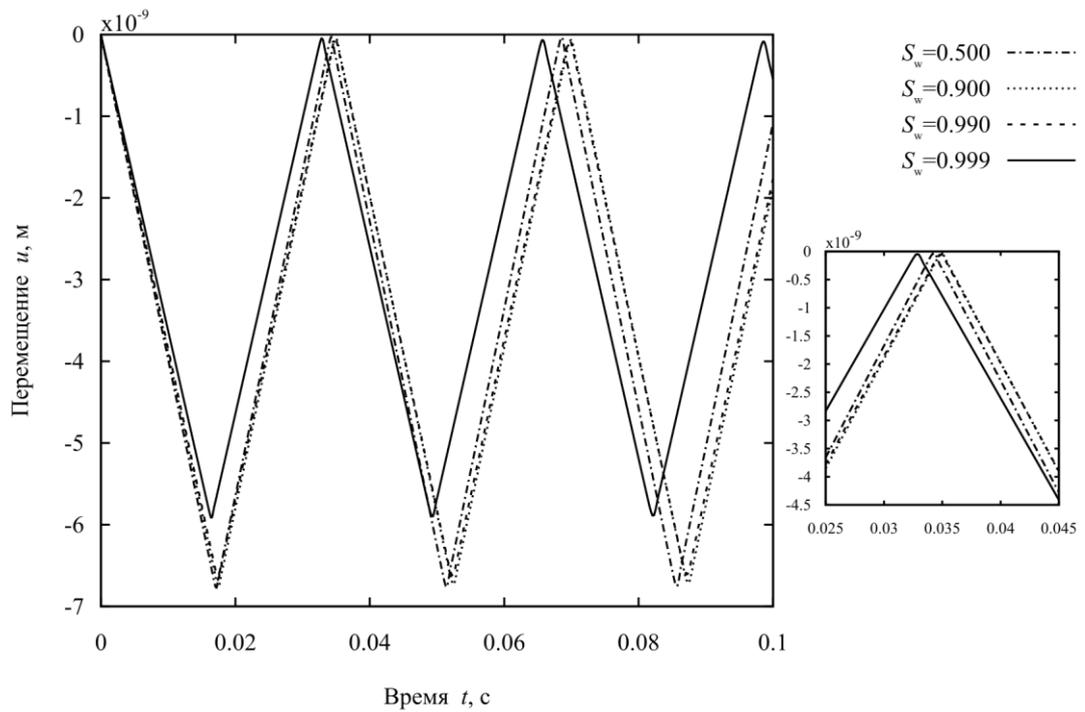


Рис. 1.5 Графики изменения перемещения u на нагруженном конце стержня в зависимости от времени t при различных значениях параметра S_w

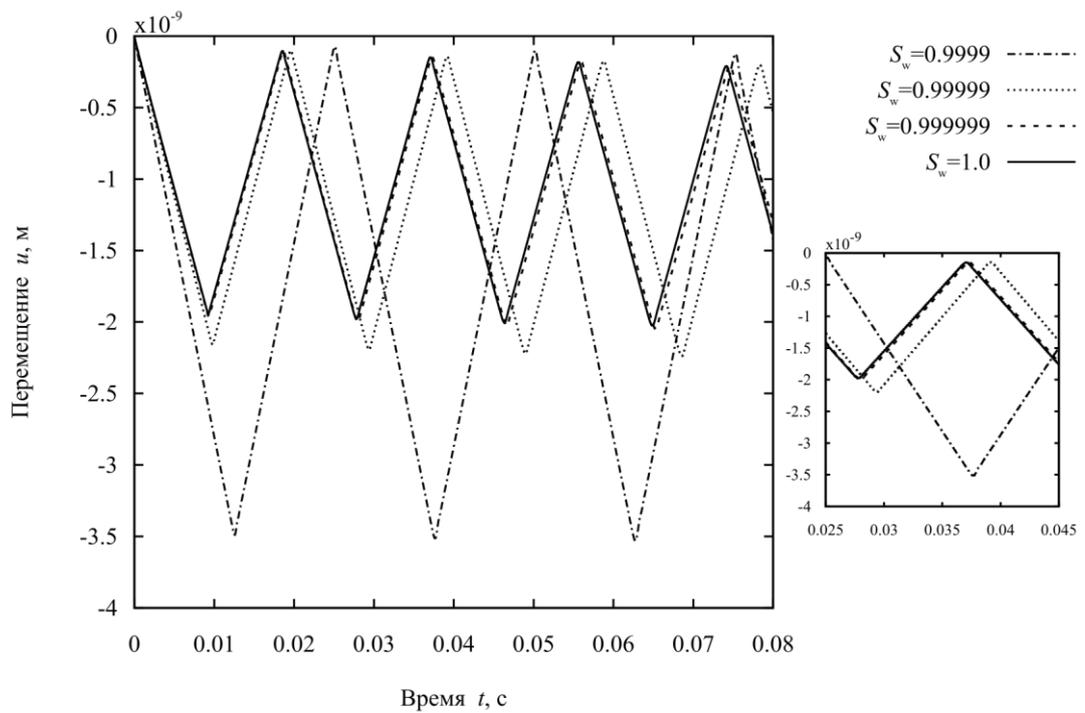


Рис. 1.6 Графики изменения перемещения u на нагруженном конце стержня в зависимости от времени t при различных значениях параметра S_w

Эффект влияния насыщенности S_w на динамический отклик проявляется на поровых давлениях: их амплитуды возрастают с ростом S_w . Последовательное увеличение насыщенности S_w с 0.5 до 0.999 приводит к росту значения порового давления p^w в 4.14 раза, в 9.55 раза и 8 раз, соответственно (рис. 1.7).

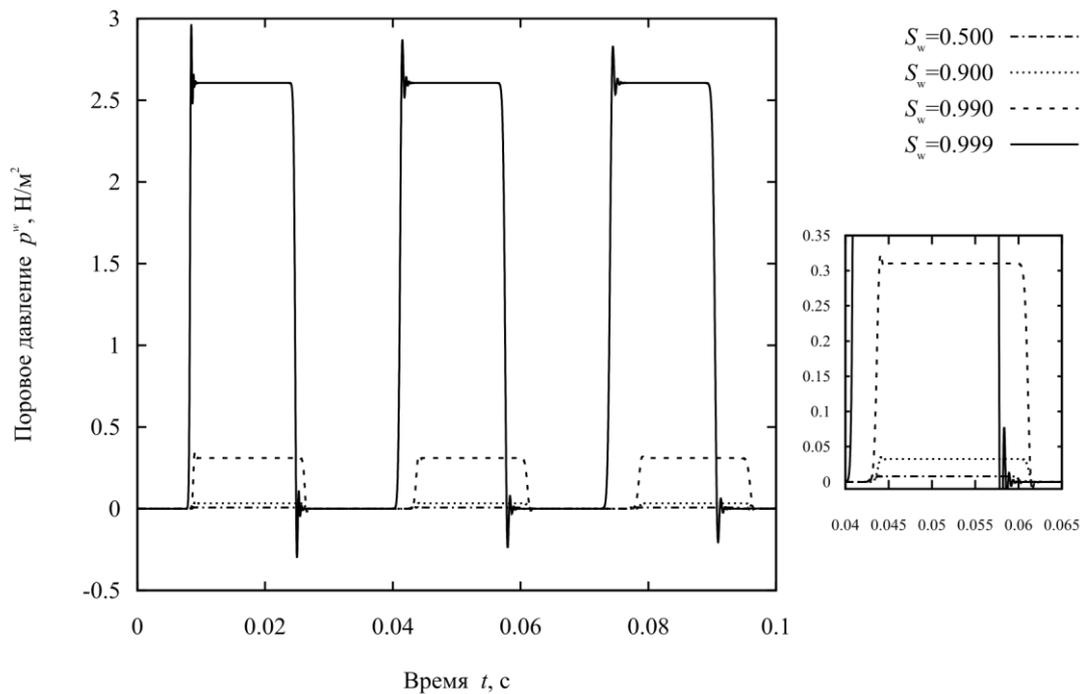


Рис. 1.7 Графики изменения перемещения p^w на закрепленном конце стержня в зависимости от времени t при различных значениях параметра S_w

Значение порового давления p^w при $S_w = 0.5$ отличается от соответствующего значения при $S_w = 0.999$ в 332 раза. При дальнейшем увеличении S_w с 0.999 до 0.999999 значение порового давления p^w последовательно возрастает в 3.88 раза, в 1.4 раза, в 1.042 раза (рис. 1.8). В момент времени $t = 0.01$ с поровое давление p^w принимает значение 1.4805 Н/м^2 при $S_w = 0.999999$ и 1.4874 Н/м^2 при $S_w = 1$, а соответствующие графики (рис. 1.7 – 1.8) располагаются близко друг к другу и становятся различимы только при значительном увеличении. Таким образом, увеличение насыщенности S_w с 0.5 до 0.999999 в

рассмотренной задаче привело к росту значений порового давления p^w в 1890 раз.

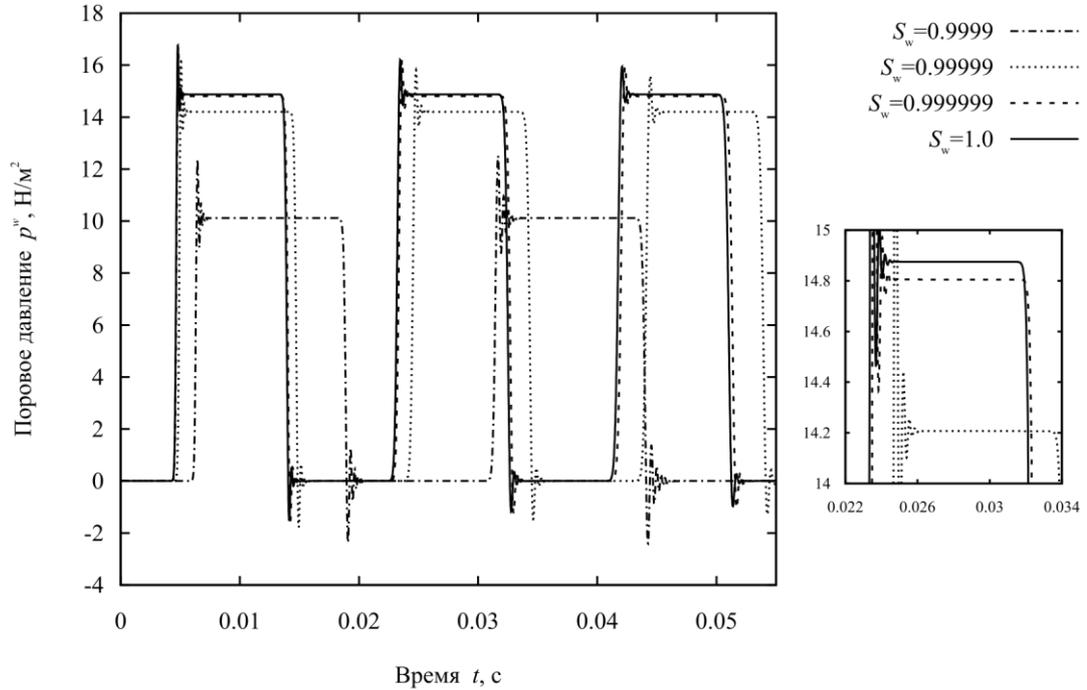


Рис. 1.8 Графики изменения перемещения p^w на закрепленном конце стержня в зависимости от времени t при различных значениях параметра S_w

Поровое давление газа p^a ведет себя при изменении насыщенности S_w в соответствии с описанием данным для p^w (рис. 1.9 – 1.10). В момент времени $t = 0.01$ с при $S_w = 0.5$ поровое давление p^a принимает значение $6.31126 \cdot 10^{-4}$ Н/м², а поровое давление p^w – $7.8333 \cdot 10^{-4}$ Н/м². Разница значений поровых давлений составляет около $1.52204 \cdot 10^{-4}$ Н/м². При $S_w = 0.9$ эта разница принимает значение $1.02446 \cdot 10^{-4}$ Н/м², при $S_w = 0.99$ – $0.94349 \cdot 10^{-4}$ Н/м², при $S_w = 0.999999$ – $0.44861 \cdot 10^{-6}$ Н/м². С ростом насыщенности пороупругого материала происходит выравнивание поровых давлений в фазах.

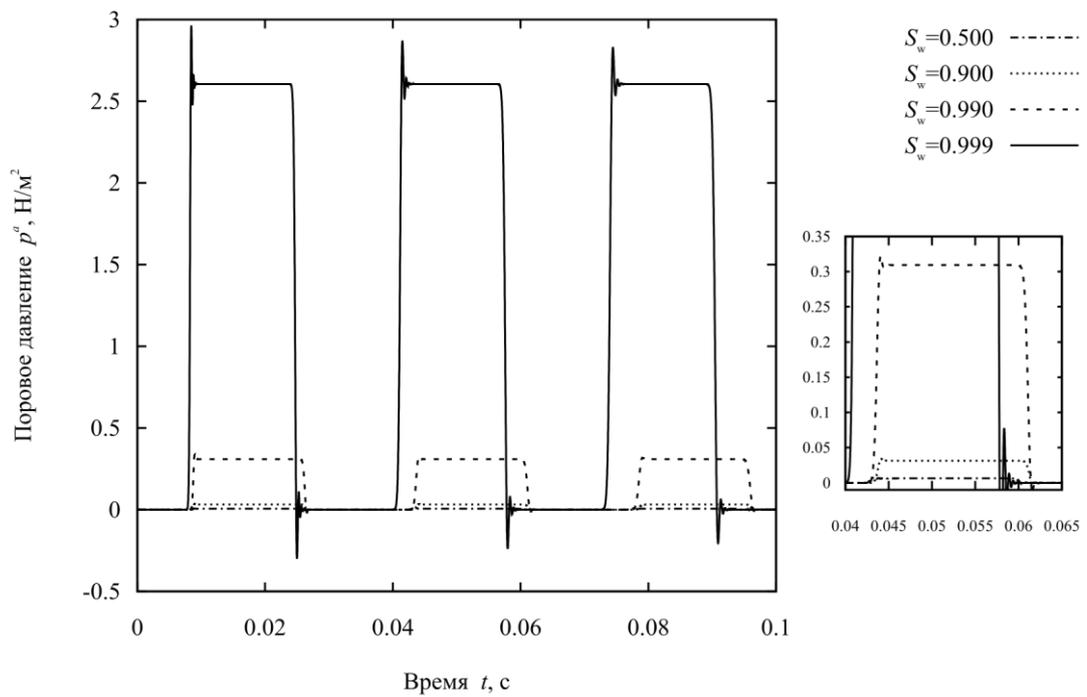


Рис. 1.9 Графики изменения перемещения p^a на закрепленном конце стержня в зависимости от времени t при различных значениях параметра S_w

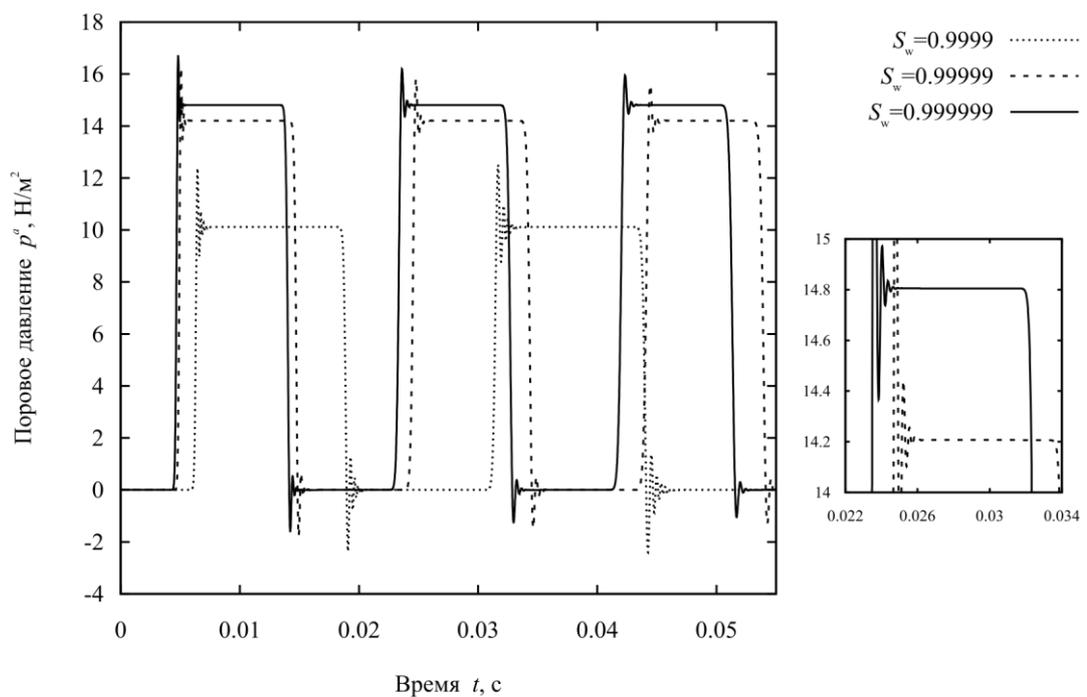


Рис. 1.10 Графики изменения перемещения p^a на закрепленном конце стержня в зависимости от времени t при различных значениях параметра S_w

В параграфе рассмотрена задача о действии силы в виде функции Хевисайда на частично насыщенный пороупругий стержень. Представлен вывод решения задачи в изображениях по Лапласу, получены соответствующие выражения для перемещения \hat{u} и поровых давлений \hat{p}^w и \hat{p}^a . Для получения значений во времени использован шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа. Проведено исследование влияния размера шага по времени Δt на решения для перемещения u и поровых давлений p^w и p^a . Результаты показали, что с уменьшением шага по времени Δt численно-аналитическое решение хорошо сходится. При этом решения для p^w и p^a оказываются более чувствительны к размеру шага по времени, чем решение для перемещения u . Исследовано влияние насыщенности S_w на решения. Результаты показали, что увеличение значения S_w приводит к снижению значения перемещения u и росту значений поровых давлений p^w и p^a . Увеличение значения S_w приводит к росту скорости продольной волны. С ростом насыщенности пороупругого материала происходит выравнивание поровых давлений в фазах.

В качестве основных выводов по главе можно сформулировать следующее. В §1.1 дано описание математической модели пороупругого материала. Рассмотрен частично насыщенный пороупругий материал и соответствующая ему трехфазная модель. Распределение фаз материала в пространстве описывается параметрами пористости и насыщенности. Рассматривался вариант абсолютного заполнения пор текучими наполнителями (жидкость, газ). Движение текучей среды в поровом пространстве моделируется законом Дарси в динамической форме. В §1.2 дана математическая постановка краевой задачи в изображениях для линейной трехмерной изотропной динамической теории пороупругости, когда материал среды является частично насыщенным. В §1.3 описан метод численного

обращения преобразования Лапласа. Особенностью численно-аналитического метода является то, что он относится к методу квадратур сверток, но опирается на другую базовую теорему операционного исчисления – теорему об интегрировании оригинала. Метод позволяет строить шаговые схемы численного обращения преобразования Лапласа. Такие шаговые схемы составляют основу шаговых схем метода граничных элементов диссертационной работы. В §1.4 рассмотрена в одномерной постановке задача о действии продольной силы на тело из частично насыщенного пороупругого материала. Расписано построение аналитического решения задачи в изображениях по Лапласу. Дан численный шаговый анализ решения задачи. Построены графики перемещений и поровых давлений во времени с исследованием шаговой сходимости. Исследовано влияние насыщенности жидкостью на нестационарный динамический отклик.

ГЛАВА 2. ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА

Граничные интегральные уравнения для трехмерной динамической теории пороупругости могут быть получены на основе теоремы взаимности [216] или метода взвешенных невязок [217, 218, 219, 220].

§ 2.1 Метод взвешенных невязок

Система дифференциальных уравнений линейной трехмерной динамической пороупругости для трехфазной модели материала в изображениях по Лапласу с параметром s выглядят следующим образом:

$$\mathbf{B} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{F}_i \\ -\hat{I}^w \\ -\hat{I}^a \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_1 \delta_{ij} + A_2 \partial_i \partial_j & A_3 \partial_i & A_4 \partial_i \\ A_5 \partial_j & A_6 & A_7 \\ A_8 \partial_j & A_9 & A_{10} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = G \nabla^2 - (\rho - \beta S_w \rho_w - \gamma S_a \rho_a) s^2,$$

$$A_2 = K + \frac{G}{3},$$

$$A_3 = -(\alpha - \beta) S_w,$$

$$A_4 = -(\alpha - \gamma)S_a,$$

$$A_5 = -(\alpha - \beta)S_w s,$$

$$A_6 = -(\zeta S_{ww} S_w + \frac{\varphi}{K_w} S_w - S_u \varphi) s + \frac{\beta S_w}{\rho_w s} \nabla^2,$$

$$A_7 = -(\zeta S_{aa} S_w + S_u \varphi) s,$$

$$A_8 = -(\alpha - \gamma)S_a s,$$

$$A_9 = -(\zeta S_{ww} S_a + S_u \varphi) s,$$

$$A_{10} = -(\zeta S_{aa} S_a + \frac{\varphi}{K_a} S_a - S_u \varphi) s + \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} \nabla^2,$$

где \hat{u} - изображения перемещения скелета, ρ_w - изображения давления жидкой среды, ρ_a - изображения порового давления газа, $\hat{F}_i, \hat{I}^w, \hat{I}^a$ - изображения соответствующих источников. Если, для удобства выкладок, считать, что имеется обобщенный пятикомпонентный вектор изображений \hat{u} , который объединяет изображения трехкомпонентного вектора перемещений скелета и еще два изображения компоненты давления, то, обозначив через \hat{f} пятикомпонентное изображение источника, получим:

$$B\hat{u} + \hat{f} = 0.$$

Чтобы найти приближенное решение \tilde{u} к точному решению \hat{u} , появится ошибка или остаток R . В этом случае, вставляя аппроксимационное решение \tilde{u} в дифференциальные уравнения, остаток R определяется как

$$B\tilde{u} + \hat{f} = R.$$

Остаток R может быть минимизирован с помощью метода взвешенных невязок, т.е. R умножается на весовую функцию W . Интегрируя по области и требуя, чтобы интеграл обращался в нуль, средневзвешенное значение остатка стремится к нулю. Следуя этому методу, дифференциальные уравнения для частично насыщенной пороупругости могут быть преобразованы в интегральные уравнения

$$\int_{\Omega} W^T (B\tilde{u} + \hat{f}) d\Omega = 0.$$

Далее для удобства, для приближенных функций будет использоваться прежние обозначения \hat{u} вместо \tilde{u} , но имея в виду, что это приближенные решения.

Подставим в качестве весовой функции фундаментальное решение, т.е. примем $W = U$, где в качестве U выбирается следующее выражение:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^{ss} & \hat{U}_i^{ws} & \hat{U}_i^{as} \\ \hat{P}_j^{sw} & \hat{P}^{ww} & \hat{P}^{aw} \\ \hat{P}_j^{sa} & \hat{P}^{wa} & \hat{P}^{aa} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\rho_w \rho_a S^2}{G\beta\gamma S_w S_a (K + 4G/3)} \begin{bmatrix} (X_1 - X_2 \nabla^2) \delta_{ij} + X_2 \partial_{ij} & X_3 \partial_i & X_4 \partial_i \\ X_5 \partial_j & X_7 & X_8 \\ X_6 \partial_j & X_9 & X_{10} \end{bmatrix} \psi.$$

Такой выбор векторной функции позволяет построить интегральное уравнение динамической частично насыщенной пороупругости в изображениях по Лапласу. Полагаем:

$$\int_{\Omega} \hat{U}^T B \hat{u} d\Omega = 0, \quad (2.1)$$

где интегрирование выполняется по области Ω с границей.

Уравнение (2.1) можно расписать следующим образом:

$$\int_{\Omega} (\hat{U}_{ij}^{ss} I_1 + \hat{P}_j^{sw} I_2 + \hat{P}_j^{sa} I_3) d\Omega = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega} (\hat{U}_i^{ws} I_1 + \hat{P}^{ww} I_2 + \hat{P}^{wa} I_3) d\Omega = 0, \quad (2.3)$$

$$\int_{\Omega} (\hat{U}_i^{as} I_1 + \hat{P}^{aw} I_2 + \hat{P}^{aa} I_3) d\Omega = 0, \quad (2.4)$$

где под I_1, I_2, I_3 понимаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}
I_1 &= G\hat{u}_{i,kk} - (\rho - \beta S_w \rho_w - \gamma S_a \rho_a) s^2 \hat{u}_i + \\
&+ \left(K + \frac{G}{3} \right) \hat{u}_{k,ik} - (\alpha - \beta) S_w \hat{P}_i^w - (\alpha - \gamma) S_a \hat{P}_i^a, \\
I_2 &= -(\alpha - \beta) S_w s \hat{u}_{k,k} - \left(\zeta S_{ww} S_w + \frac{\varphi}{K_w} S_w - S_u \varphi \right) s \hat{P}^w + \\
&+ \frac{\beta S_w}{\rho_w s} \hat{P}_{,kk}^w - (\zeta S_{aa} S_w + S_u \varphi) s \hat{P}^a, \\
I_3 &= -(\alpha - \gamma) S_a s \hat{u}_{k,k} - (\zeta S_{ww} S_a + S_u \varphi) s \hat{P}^w - \\
&- \left(\zeta S_{aa} S_a + \frac{\varphi}{K_a} S_a - S_u \varphi \right) s \hat{P}^a + \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} \hat{P}_{,kk}^a.
\end{aligned}$$

В интегральных уравнениях (2.2) - (2.4) подынтегральное выражение содержит операции дифференцирования, которые могут быть преобразованы с помощью интегрирования по частям. Все подобные преобразования осуществляются однотипно. Можно выделить в подынтегральных выражениях члены с однократным и с двукратным дифференцированием. Двукратное дифференцирование требует применения интегрирования по частям два раза. Рассмотрим примеры «снятия» однократного дифференциала и двукратного дифференцирования, опуская остальные аналогичные преобразования.

Рассмотрим интеграл с однократным дифференцированием в подынтегральном выражении из интегрального уравнения (2.3) и преобразуем его с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} (\alpha - \beta) S_w s \hat{u}_{k,k} \hat{P}^{ww} d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} (\alpha - \beta) S_w s (\hat{u}_k \hat{P}^{ww})_{,k} d\Omega - \int_{\Omega} (\alpha - \beta) S_w s \hat{u}_k \hat{P}_{,k}^{ww} d\Omega = \\
&= \int_{\Gamma} (\alpha - \beta) S_w s \hat{u}_k n_k \hat{P}^{ww} d\Gamma - \int_{\Omega} (\alpha - \beta) S_w s \hat{u}_k \hat{P}_{,k}^{ww} d\Omega,
\end{aligned}$$

где n_k - вектор внешней нормали.

Рассмотрим интеграл с двукратным дифференцированием в подынтегральном выражении из интегрального уравнения (2.2) и преобразуем

его с помощью двукратного интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} G \hat{u}_{i,kk} \hat{U}_{ij}^{ss} = \\
& = \int_{\Omega} G (\hat{u}_{i,k} \hat{U}_{ij}^{ss})_{,k} d\Omega - \int_{\Omega} G \hat{u}_{i,k} \hat{U}_{ij,k}^{ss} d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma} G \hat{u}_{i,k} n_k \hat{U}_{ij}^{ss} d\Gamma - \int_{\Omega} G \hat{u}_{i,k} \hat{U}_{ij,k}^{ss} d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma} G \hat{u}_{i,k} n_k \hat{U}_{ij}^{ss} d\Gamma - \int_{\Omega} G (\hat{u}_i \hat{U}_{ij,k}^{ss})_{,k} d\Omega + \int_{\Omega} G \hat{u}_i \hat{U}_{ij,kk}^{ss} d\Omega = \\
& = \int_{\Gamma} G \hat{u}_{i,k} n_k \hat{U}_{ij}^{ss} d\Gamma - \int_{\Gamma} G \hat{u}_i \hat{U}_{ij,k}^{ss} n_k d\Gamma + \int_{\Omega} G \hat{u}_i \hat{U}_{ij,kk}^{ss} d\Omega.
\end{aligned}$$

Преобразование из области в граничный интеграл выполняется с помощью теоремы о дивергенции. Отметим, что однократное применение правила интегрирования по частям - интегрирование изменяет знак результирующего интеграла по исследуемой области, в то время как в случае применения правила интегрирования по частям дважды знак интеграла по исследуемой области сохраняется. Такие преобразования приводят к тому, что возникает дифференциальный оператор B^* :

$$B^* \hat{U}_{ij} + \delta(x, y) = 0.$$

После описанных преобразований интегральные уравнения (2.2) - (2.4) по исследуемому объему порождают следующие интегральные уравнения, в матричных обозначениях:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^{ss} & -\hat{P}_j^{sw} & -\hat{P}_j^{sa} \\ \hat{U}_i^{ws} & -\hat{P}^{ww} & -\hat{P}^{wa} \\ \hat{U}_i^{as} & -\hat{P}^{aw} & -\hat{P}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ \hat{q}^w \\ \hat{q}^a \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^{ss} & \hat{Q}_j^{sw} & \hat{Q}_j^{sa} \\ \hat{T}_i^{ws} & \hat{Q}^{ww} & \hat{Q}^{wa} \\ \hat{T}_i^{as} & \hat{Q}^{aw} & \hat{Q}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix} d\Gamma = \\
& = - \int_{\Omega} (B^* \hat{U}_{ij}) \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix} d\Omega.
\end{aligned}$$

С учетом свойства оператора B^* получаем выражение интегрального представления решения:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^{ss} & -\hat{P}_j^{sw} & -\hat{P}_j^{sa} \\ \hat{U}_i^{ws} & -\hat{P}^{ww} & -\hat{P}^{wa} \\ \hat{U}_i^{as} & -\hat{P}^{aw} & -\hat{P}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ \hat{q}^w \\ \hat{q}^a \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^{ss} & \hat{Q}_j^{sw} & \hat{Q}_j^{sa} \\ \hat{T}_i^{ws} & \hat{Q}^{ww} & \hat{Q}^{wa} \\ \hat{T}_i^{as} & \hat{Q}^{aw} & \hat{Q}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix} d\Gamma = \\
= \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Формула представления (2.5) может быть использована для вычисления неизвестных значений смещения \hat{u}_j , давления поровой жидкости \hat{p}^w и давления порового газа \hat{p}^a внутри области, когда известно граничные значения решений задачи.

Изображения по Лапласу граничных значений обобщенный поверхностной силы имеют вид:

$$\begin{aligned}
\hat{t}_i &= \hat{\sigma}_{ij} n_j, \\
\hat{q}^w &= -\frac{\beta}{\rho_w s} (\hat{p}_{,i}^w + \rho_w s^2 \hat{u}_i) n_i, \\
\hat{q}^a &= -\frac{\gamma}{\rho_a s} (\hat{p}_{,i}^a + \rho_a s^2 \hat{u}_i) n_i.
\end{aligned}$$

Изображения обобщенных матриц сингулярных решений имеют следующий вид, после действия соответствующего граничного оператора на обобщенную матрицу фундаментальных решений [231]:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{ij}^{ss} &= \left\{ \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) \hat{U}_{kj,k}^{ss} + \alpha s (S_w \hat{P}_j^{sw} + S_a \hat{P}_j^{sa}) \right] \delta_{il} + G (\hat{U}_{ij,l}^{ss} + \hat{U}_{lj,i}^{ss}) \right\} n_l, \\
\hat{T}_i^{ws} &= \left\{ \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) \hat{U}_{k,k}^{ws} + \alpha s (S_w \hat{P}^{ww} + S_a \hat{P}^{wa}) \right] \delta_{il} + G (\hat{U}_{i,l}^{ws} + \hat{U}_{l,i}^{ws}) \right\} n_l, \\
\hat{T}_i^{as} &= \left\{ \left[\left(K - \frac{2}{3} G \right) \hat{U}_{k,k}^{as} + \alpha s (S_w \hat{P}^{aw} + S_a \hat{P}^{aa}) \right] \delta_{il} + G (\hat{U}_{i,l}^{as} + \hat{U}_{l,i}^{as}) \right\} n_l, \\
\hat{Q}_j^{sw} &= \frac{\beta S_w}{\rho_w s} (\hat{P}_{j,i}^{sw} - \rho_w s \hat{U}_{ji}^{ss}) n_i,
\end{aligned}$$

$$\hat{Q}^{ww} = \frac{\beta S_w}{\rho_w s} (\hat{P}_{,j}^{ww} - \rho_w s \hat{U}_j^{ws}) \mathbf{n}_j,$$

$$\hat{Q}^{aw} = \frac{\beta S_w}{\rho_w s} (\hat{P}_{,j}^{aw} - \rho_w s \hat{U}_j^{as}) \mathbf{n}_j,$$

$$\hat{Q}_j^{sa} = \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} (\hat{P}_{j,i}^{sa} - \rho_a s \hat{U}_{ji}^{ss}) \mathbf{n}_i,$$

$$\hat{Q}^{wa} = \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} (\hat{P}_{,j}^{wa} - \rho_a s \hat{U}_j^{ws}) \mathbf{n}_j,$$

$$\hat{Q}^{aa} = \frac{\gamma S_a}{\rho_a s} (\hat{P}_{,j}^{aa} - \rho_a s \hat{U}_j^{as}) \mathbf{n}_j.$$

На основе представления из (2.5), путем стремления точки наблюдения на границу, получается граничное интегральное уравнение, которое составляет основу метода граничных элементов.

§ 2.2 Граничные интегральные уравнения

Операторная форма записи интегрального представления решения в изображениях по Лапласу для исходной начально-краевой задачи принимает вид:

$$\hat{u}(\mathbf{y}) = (\hat{v}\hat{t})(\mathbf{y}) - (\hat{K}\hat{u})(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \Omega,,$$

$$\text{с } \hat{u}(\mathbf{x}) = [\hat{u}_i, \hat{p}^w, \hat{p}^a] \text{ и } \hat{t}(\mathbf{x}) = [\hat{t}_i, -\hat{q}^w, -\hat{q}^a]^T.$$

$$(\hat{v}\hat{t})(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \hat{U}^T(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \hat{t}(\mathbf{x}) ds_x,$$

$$(\hat{K}\hat{u})(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma} \hat{T}^T(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \hat{u}(\mathbf{x}) ds_x, \quad \Gamma = \partial\Omega,,$$

$$\hat{U}^T = \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^{ss} & \hat{P}_j^{sw} & \hat{P}_j^{sa} \\ \hat{U}_i^{ws} & \hat{P}^{ww} & \hat{P}^{wa} \\ \hat{U}_i^{as} & \hat{P}^{aw} & \hat{P}^{aa} \end{bmatrix},$$

$$\hat{T}^T = \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^{ss} & \hat{Q}_j^{sw} & \hat{Q}_j^{sa} \\ \hat{T}_i^{ws} & \hat{Q}^{ww} & \hat{Q}^{wa} \\ \hat{T}_i^{as} & \hat{Q}^{aw} & \hat{Q}^{aa} \end{bmatrix}.$$

Для организации процедуры перемещения точки наблюдения y к границе, исходную границу Γ изменяют на $\tilde{\Gamma}$. Содержание изменения заключается в расширении границы Γ круговой областью радиуса r_c вокруг точки наблюдения $\tilde{y} \in \Omega$, как показано на рис. 2.1.

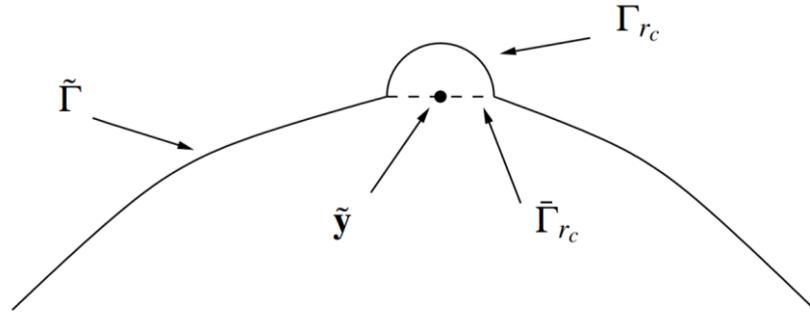


Рис. 2.1 Расширение границы вокруг точки нагрузки \tilde{y}

Расширенная граница $\tilde{\Gamma}$ задается формулой:

$$\tilde{\Gamma} = \Gamma - \bar{\Gamma}_{r_c} + \Gamma_{r_c},$$

где $\Gamma = \lim_{r_c \rightarrow 0} \tilde{\Gamma}$.

Такое расширение границы позволяет точку загрузки \tilde{y} поместить внутрь объема, ограниченного новой границей. Формула представления (2.5) остается без изменений

$$\hat{u}(y) = (\hat{\nu} \hat{t})(\tilde{y}) - (\hat{K} \hat{u})(\tilde{y}), (\tilde{y} \in \Omega).$$

Применим предельный процесс: $r_c \rightarrow 0$. Формула представления превращается в граничное интегральное уравнение, которое выражается как

$$(\hat{v}\hat{t})(y) - (\hat{K}\hat{u})(y) = c(y)\hat{u}(y),$$

где

$$\begin{aligned} & \lim_{r_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \hat{U}^T(y, x) \hat{t}(x) d\Gamma = \\ & = \lim_{r_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_{r_c}} \hat{U}^T(y, x) \hat{t}(x) d\Gamma + \lim_{r_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{r_c}} \hat{U}^T(y, x) \hat{t}(x) d\Gamma = \\ & = \lim_{r_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_{r_c}} \hat{U}^T(y, x) \hat{t}(x) d\Gamma, \\ & \lim_{r_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma} \hat{T}^T(y, x) \hat{u}(x) d\Gamma = \\ & = \lim_{r_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}_{r_c}} \hat{T}^T(y, x) \hat{u}(x) d\Gamma + \lim_{r_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{r_c}} \hat{T}^T(y, x) \hat{u}(x) d\Gamma = \\ & = (\hat{K}\hat{u})(y) + [c(y) - I]\hat{u}(y). \end{aligned}$$

Матрица $c(y)$ определяет коэффициенты внеинтегрального члена и может быть интерпретирована как доля $\hat{u}(y)$, которая лежит внутри области Ω , и определяется соотношениями:

$$c(y) = \begin{cases} \lim_{r_c \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{r_c}} \hat{T}^T(y, x) \hat{u}(x) d\Gamma + I, & (y \in \Gamma), \\ I, & (y \in \Omega), \\ 0, & (y \notin \Gamma, y \notin \Omega). \end{cases}$$

Выражения для граничных интегральных уравнений задаются с помощью следующих матричных формул:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^{ss} & \hat{P}_j^{sw} & \hat{P}_j^{sa} \\ \hat{U}_i^{ws} & \hat{P}^{ww} & \hat{P}^{wa} \\ \hat{U}_i^{as} & \hat{P}^{aw} & \hat{P}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ -\hat{q}^w \\ -\hat{q}^a \end{bmatrix} d\Gamma - \oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^{ss} & \hat{Q}_j^{sw} & \hat{Q}_j^{sa} \\ \hat{T}_i^{ws} & \hat{Q}^{ww} & \hat{Q}^{wa} \\ \hat{T}_i^{as} & \hat{Q}^{aw} & \hat{Q}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix} d\Gamma = \\ & = \begin{bmatrix} c_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где сильно сингулярный интеграл (символ \oint) существует в смысле главного значения Коши в записи \hat{T}_{ij}^{ss} .

Гранично-временное граничное интегральное уравнение получают с помощью формального обратного преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{ij}^{ss}(t-\tau, y, x) & P_j^{sw}(t-\tau, y, x) & P_j^{sa}(t-\tau, y, x) \\ U_i^{ws}(t-\tau, y, x) & P^{ww}(t-\tau, y, x) & P^{wa}(t-\tau, y, x) \\ U_i^{as}(t-\tau, y, x) & P^{aw}(t-\tau, y, x) & P^{aa}(t-\tau, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(\tau, x) \\ -q^w(\tau, x) \\ -q^a(\tau, x) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau - \\ & - \int_0^t \oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^{ss}(t-\tau, y, x) & Q_j^{sw}(t-\tau, y, x) & Q_j^{sa}(t-\tau, y, x) \\ T_i^{ws}(t-\tau, y, x) & Q^{ww}(t-\tau, y, x) & Q^{wa}(t-\tau, y, x) \\ T_i^{as}(t-\tau, y, x) & Q^{aw}(t-\tau, y, x) & Q^{aa}(t-\tau, y, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(\tau, x) \\ p^w(\tau, x) \\ p^a(\tau, x) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau = (2.6) \\ & = \begin{bmatrix} c_{ij}(y) & 0 & 0 \\ 0 & c(y) & 0 \\ 0 & 0 & c(y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(t, y) \\ p^w(t, y) \\ p^a(t, y) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В уравнениях 2.6) сильная особенность существует в операторе двойного слоя, и требует соответствующего процесса регуляризации.

§ 2.3 Регуляризация граничного интегрального уравнения

Построенные граничные интегральные уравнения содержат обобщенные потенциалы простого и двойного слоя, которые содержат интегралы со слабой и сильной особенностями. Организация гранично-элементной схемы осуществляется на основе регуляризованного граничного интегрального уравнения, т.к. в этом случае появляется возможность давать численно-аналитические оценки интегралам, образующим граничные интегральные уравнения.

При выполнении диссертационной работы использовался подход Конторовича-Перлина [136] выделения особенности для сингулярных

интегралов, существующих в смысле Коши.

Прежде чем провести планируемую регуляризацию, необходимо выделить особенность в соответствующих ядрах интегралов: необходим анализ фундаментальных и сингулярных решений.

2.3.1 Выделение особенностей у фундаментальных и сингулярных решений

При перемещении точки наблюдения y к границе Γ необходимо знать поведение фундаментальных и сингулярных решений, когда $r = |y - x|$ стремится к нулю, т.е. когда точка интегрирования их приближается к точке наблюдения y .

Порядок сингулярности фундаментальных и сингулярных решений может быть определен разложением в ряд по переменной r . Эта переменная r находится в исследуемых трехмерных решениях, решениях в экспоненциальной функции и в качестве степенного многочлена по r . Поэтому, для анализа решений, достаточно использовать разложение

$$e^{-\lambda_i r} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_i r)^k}{k!} = 1 - \lambda_i r + \frac{\lambda_i^2 r^2}{2} + \dots$$

с подстановкой его в соответствующие ядра интегралов из обобщенных потенциалов простого и двойного слоя.

Для обобщенного потенциала простого слоя можно, таким образом, выделить следующие особенности:

$$\hat{U}_i^{ws} = O(r),$$

$$\hat{U}_i^{as} = O(r),$$

$$\hat{P}_j^{sw} = O(r),$$

$$\hat{P}_j^{sa} = O(r),$$

$$\hat{P}^{wa} = O(r),$$

$$\hat{P}^{aw} = O(r),$$

$$\begin{aligned}\hat{U}_{ij}^{ss} &= \frac{G+3K}{8\pi G(3K+4G)} \left(r_{,i} r_{,j} + \frac{7G+3K}{G+3K} \delta_{ij} \right) \frac{1}{r} + O(r) = \\ &= \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)} \left[r_{,i} r_{,j} + (3-4\nu) \delta_{ij} \right] \frac{1}{r} + O(r) = \\ &= \hat{U}_{\text{стат } ij}^{ss} + O(r),\end{aligned}$$

$$\hat{P}^{ww} = \frac{\rho_w s}{4\pi\beta} \frac{1}{S_w} \frac{1}{r} + O(r) = \hat{P}_a^{ww} + O(r),$$

$$\hat{P}^{aa} = \frac{\rho_a s}{4\pi\gamma} \frac{1}{S_a} \frac{1}{r} + O(r) = \hat{P}_a^{aa} + O(r),$$

где $\hat{U}_{\text{стат}}^{ss}$ - матрица Сомильяны; \hat{P}_a^{ww} , \hat{P}_a^{aa} - ядра классического потенциала простого слоя; E - модуль Юнга, ν - коэффициент Пуассона.

Для обобщенного потенциала двойного слоя выделяются следующие особенности:

$$\hat{Q}^{wa} = O(r),$$

$$\hat{Q}^{aw} = O(r),$$

$$\hat{T}_i^{ws} = \frac{[3\beta K + (3\alpha + \beta)] \rho_w s^2}{12\pi\beta(K+4G/3)} \frac{n_i}{r} + \frac{G(\alpha - \beta) \rho_w s^2}{4\pi\beta(K+4G/3)} \frac{r_{,i} r_{,n}}{r} + O(r) =$$

$$= \frac{\rho_w s^2}{8\pi\beta(1-\nu)r} \left\{ [\alpha(1-2\nu) + \beta] n_i + (\alpha - \beta)(1-2\nu) r_{,i} r_{,n} \right\} + O(r),$$

$$\hat{T}_i^{as} = \frac{[3\gamma K + (3\alpha + \gamma)] \rho_a s^2}{12\pi\gamma(K+4G/3)} \frac{n_i}{r} + \frac{G(\alpha - \gamma) \rho_a s^2}{4\pi\gamma(K+4G/3)} \frac{r_{,i} r_{,n}}{r} + O(r) =$$

$$= \frac{\rho_a s^2}{8\pi\gamma(1-\nu)r} \left\{ [\alpha(1-2\nu) + \gamma] n_i + (\alpha - \gamma)(1-2\nu) r_{,i} r_{,n} \right\} + O(r),$$

$$\hat{Q}_j^{sw} = \frac{S_w}{8\pi G(4G+3K)r} \left\{ [3\alpha G - \beta(4G+3K)] r_{,j} r_{,n} - [3\alpha G + \beta(4G+3K)] n_{,j} \right\} +$$

$$+ O(r) = \frac{S_w(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)r} \left[\alpha(1-2\nu)(r_{,j} r_{,n} - n_{,j}) - 2\beta(1-\nu)(r_{,j} r_{,n} + n_{,j}) \right] + O(r),$$

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_j^{sa} &= \frac{S_a}{8\pi G(4G+3K)r} \left\{ [3\alpha G - \gamma(4G+3K)] r_{,j} r_{,n} - [3\alpha G + \gamma(4G+3K)] n_{,j} \right\} + \\
+ O(r) &= \frac{S_a(1+\nu)}{8\pi E(1-\nu)r} \left[\alpha(1-2\nu)(r_{,j} r_{,n} - n_{,j}) - 2\gamma(1-\nu)(r_{,j} r_{,n} + n_{,j}) \right] + O(r), \\
\hat{T}_{ij}^{ss} &= \frac{1}{4\pi(K+4G/3)r^2} \left[G(r_{,j} n_{,i} - r_{,i} n_{,j} - \delta_{ij} r_{,n}) - (G+3K) r_{,i} r_{,j} r_{,n} \right] + O(r) = \\
&= \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu)(r_{,j} n_{,i} - r_{,i} n_{,j}) - [(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}] r_{,n} \right\} + O(r) = \\
&= \hat{T}_{\text{стат } ij}^{ss} + O(r), \\
\hat{Q}^{ww} &= -\frac{r_{,n}}{4\pi r^2} + O(r) = \hat{Q}_a^{ww} + O(r), \\
\hat{Q}^{aa} &= -\frac{r_{,n}}{4\pi r^2} + O(r) = \hat{Q}_a^{aa} + O(r),
\end{aligned}$$

где $\hat{T}_{\text{стат}}^{ss}$ - упругостатическая матрица сингулярных решений; \hat{Q}_a^{ww} , \hat{Q}_a^{aa} - ядра классических потенциалов двойного слоя. Матрицы $\hat{T}_{\text{стат}}^{ss}$ совместно с собираем в матрицу T^0 , в которой \hat{Q}_a^{ww} , \hat{Q}_a^{aa} записываются на диагональ.

В отличие от упругого и вязкоупругого случаев мы получаем разнообразие в поведении ядер интегралов, образующих обобщенные потенциалы простого и двойного слоя. Это разнообразие порождает существенные изменения в организации ГЭ-схемы. Регулярные, слабые и сильные особенности существуют как обобщенных потенциалах простого слоя, так и в обобщенных потенциалах двойного слоя. Для обобщенных потенциалов простого слоя \hat{U}_{ij}^{ss} , \hat{P}^{ww} и \hat{P}^{aa} дают слабую особенность, а остальные интегралы являются регулярными. Для обобщенного интеграла двойного слоя ядро \hat{T}_{ij}^{ss} порождает сильную особенность, а остальные ядра порождают слабую особенность.

Регулярные интегралы будут вычисляться с помощью гауссовых квадратур для одномерных интегралов после сведения двойного интеграла к

повторному. Для слабых сингулярных интегралов в случае аналитической оценки не требуется специальной обработки, в то время как для численного интегрирования по слабо сингулярному интегралу используется преобразование Даффи, для которого определитель Якоби обращается в нуль в точке особенности. Для оценки сильных сингулярных интегралов разработан ряд методов. В этой работе метод для оценки сильных сингулярных интегралов используется, такой же подход, что и в [136], который основан на подходе из [232]. Метод заключается в следующем. Пусть особой точке x_m соответствует точка 1 в квадрате $-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$ (рис. 2.2а). Разобьем этот квадрат на два треугольника диагональю, проходящей через точки 1 и 3. Отобразим теперь квадрат $-1 \leq v, u \leq 1$ (рис. 2.2б) на каждый из полученных треугольников таким образом, чтобы какие-либо две его соседние вершины, являющиеся прообразом особой точки x_m , например, 1 и 2, перешли в точку с координатами $\xi_1 = -1$ и $\xi_2 = -1$. Такое отображение можно осуществить, используя функции формы. Представляя несобственные интегралы по квадрату $-1 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$ в виде сумм соответствующих интегралов по двум треугольникам и используя преобразования координат, удастся устранить особенность подынтегральных выражений в случае, когда $x^m \in \Gamma_k$ и, следовательно, повысить точность вычисления соответствующих интегралов. Для вычисления интегралов по новым переменным применяется интегрирование по Гауссу. В случае, когда узел коллокации x_m совпадает с центральным узлом элемента Γ_k , процедура устранения особенности выполняется при разбиении квадрата диагоналями на четыре треугольника.

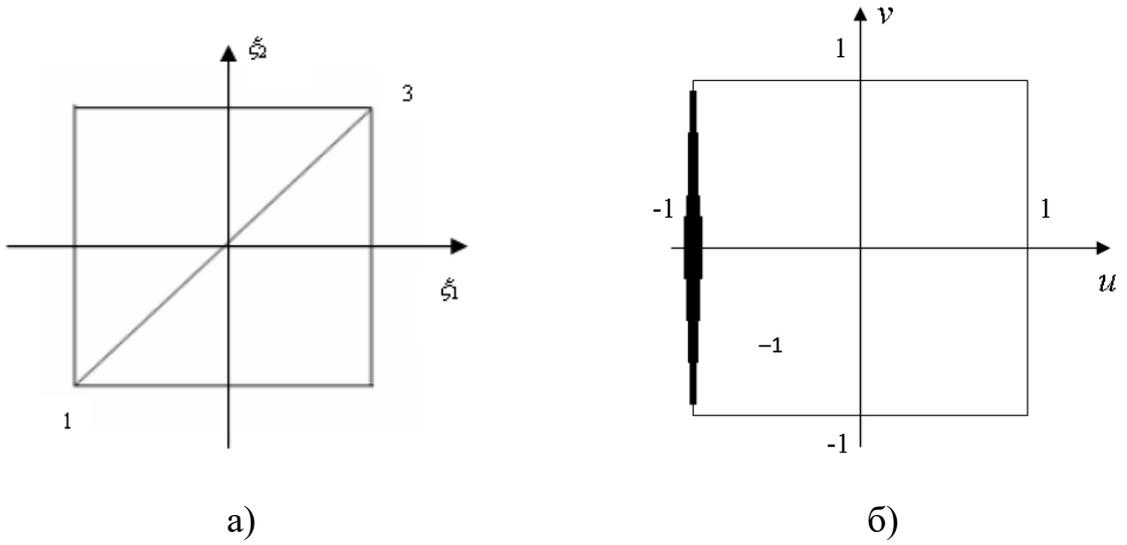


Рис. 2.2

2.3.2 Регуляризованное граничное интегральное уравнение

После проведенного анализа ядер интегралов, образующих обобщенные потенциалы простого и двойного слоя, можем применить к записи регуляризованного ГИУ.

Исходное ГИУ, согласно (2.6) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^{ss} & \hat{P}_j^{sw} & \hat{P}_j^{sa} \\ \hat{U}_i^{ws} & \hat{P}^{ww} & \hat{P}^{wa} \\ \hat{U}_i^{as} & \hat{P}^{aw} & \hat{P}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t}_i \\ -\hat{q}^w \\ -\hat{q}^a \end{bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^{ss} & \hat{Q}_j^{sw} & \hat{Q}_j^{sa} \\ \hat{T}_i^{ws} & \hat{Q}^{ww} & \hat{Q}^{wa} \\ \hat{T}_i^{as} & \hat{Q}^{aw} & \hat{Q}^{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix} d\Gamma = \\
 = \begin{bmatrix} c_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_i \\ \hat{p}^w \\ \hat{p}^a \end{bmatrix}, \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

где

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} \hat{U}_{ij}^{ss} & \hat{U}_i^{ws} & \hat{U}_i^{as} \\ \hat{P}_j^{sw} & \hat{P}^{ww} & \hat{P}^{aw} \\ \hat{P}_j^{sa} & \hat{P}^{wa} & \hat{P}^{aa} \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} \hat{T}_{ij}^{ss} & \hat{Q}_j^{sw} & \hat{Q}_j^{sa} \\ \hat{T}_i^{ws} & \hat{Q}^{ww} & \hat{Q}^{wa} \\ \hat{T}_i^{as} & \hat{Q}^{aw} & \hat{Q}^{aa} \end{bmatrix},$$

δ – функция Дирака, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3$, \hat{U}, \hat{T} – матрицы фундаментальных и сингулярных решений, $\hat{t}_i = \hat{\sigma}_{ij} n_j$ – вектор обобщенных поверхностных усилий,

$\hat{q}^w = -\frac{\beta}{\rho_w s} (\hat{p}_{,i}^w + \rho_w s^2 \hat{u}_i) n_i$ – поток смачивающего наполнителя в виде жидкости,

$\hat{q}^a = -\frac{\gamma}{\rho_a s} (\hat{p}_{,i}^a + \rho_a s^2 \hat{u}_i) n_i$ – поток не смачивающего наполнителя в виде газа, \mathbf{n} –

вектор нормали внешней к границе области.

Регуляризованное ГИУ из (2.7), строится с помощью матрицы \mathbf{T}^0 , согласно подходу Контаровича-Перлина:

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \mathbf{v}(\mathbf{y}, s) - \mathbf{T}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \mathbf{t}(\mathbf{y}, s)) d\Gamma = 0, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Gamma = \partial\Omega,$$

где \mathbf{x} – точка наблюдения, \mathbf{y} – точка интегрирования, \mathbf{U} – фундаментальное решение, \mathbf{T} – матрица сингулярных динамических решений, \mathbf{T}^0 – матрица сингулярных статических решений.

§ 2.4 Дискретное представление гранично-интегрального уравнения

Осуществление дискретизации уравнения (2.8) заключается в применении конечно-элементной технологии. Во-первых, поверхность тела представляется в виде K обобщенных четырехугольных восьмиузловых граничных элементов. Пусть общее число граничных геометрических узлов будет P . Для каждого

граничного элемента применяется отображение с помощью следующего соотношения:

$$\mathbf{x}_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^8 N_m(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_m^k, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, 3},$$

где $N_m(\xi_1, \xi_2)$ – биквадратичные функции формы; ξ_1, ξ_2 – локальные координаты, \mathbf{x}_m^k – геометрические граничные узлы; $\mathbf{x}(\xi_1, \xi_2)$ – глобальные координаты вектора.

Обобщенные граничные перемещения \mathbf{v}_i аппроксимируются билинейными граничными элементами с применением функций форм $R_m(\xi_1, \xi_2)$, а поверхностные обобщенные силы \mathbf{t}_i – постоянными граничными элементами:

$$\mathbf{v}_i(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m=1}^4 R_m(\xi_1, \xi_2) \mathbf{v}_m^k, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, 3},$$

$$\mathbf{t}_i(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{t}_i^k, k = \overline{1, K}, i = \overline{1, 3}.$$

Дискретное представление ГИУ (2.7) строится с использованием метода коллокации. В качестве узлов коллокации выбираются узлы аппроксимации исходных граничных функций. Порождаемая система линейных алгебраических уравнений в изображениях по Лапласу с параметром преобразования s примет вид:

$$\sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^4 \Delta \mathbf{T}_{mi}^k \mathbf{v}_m^k = \sum_{k=1}^K \Delta \mathbf{U}_i^k \mathbf{t}^k, i = 1..P,$$

$$\Delta \mathbf{T}_{mi}^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[R_m(\xi_1, \xi_2) \mathbf{T}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k(\xi_1, \xi_2), s) - \mathbf{I} \cdot \mathbf{T}^0(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^k(\xi_1, \xi_2)) \right] J_k(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$\Delta \mathbf{U}_i^k = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{U}(x^i, y^k(\xi_1, \xi_2), s) J_k(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

где J – якобиан преобразований локальных координат в глобальные, \mathbf{I} – единичная матрица.

Построение дискретного представления граничного интегрального уравнения связано с задачей вычисления интегралов численными методами, и, следовательно, с задачей выбора наиболее подходящей квадратурной формулы. При этом возникает необходимость разбиения элемента на более мелкие элементы, а также, как уже отмечалось, необходимость устранения особенностей в подынтегральных функциях [230]. Коэффициенты дискретных представлений граничных интегральных уравнений вычисляются с применением квадратурной формулы Гаусса. Решение построенной таким образом системы линейных алгебраических уравнений является решением исходной краевой задачи и зависит от параметра интегрального преобразования Лапласа.

§ 2.5 Программная реализация

Программный инструментальный гранично-элементного сопровождения компьютерного моделирования динамики тел и сред из частично насыщенных пороупругих материалов создан на основе соответствующего пакета программ [136, 178, 179, 233]. Использован алгоритмический язык Fortran. Структура программного оснащения гранично-элементных расчетов (ГЭ-расчетов) приведена на рис. 2.3.

Структура программного оснащения ГЭ-расчетов, приведенная на рис. 2.3, позволяет выделить три группы модулей: управляющая программа, функциональные и обслуживающие модули.

Управляющая программа постоянно находится в оперативной памяти. Она инициализирует необходимые процессы численного решения начально-краевой задачи. Программа является планом выполнения компьютерного моделирования.

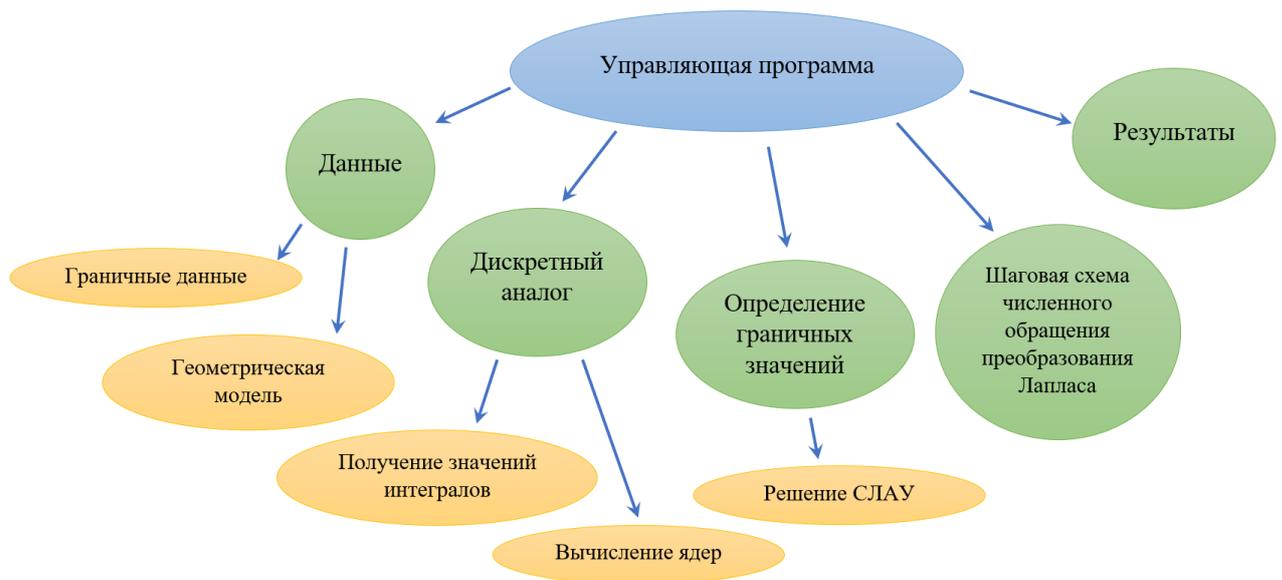


Рис. 2.3 Структура программного оснащения ГЭ-расчетов

Функциональные модули составляют программное оснащение ключевых этапов ГЭ-схемы. Структурно модули сгруппированы по процессам. Каждый из процессов выполняет структурнозначимый этап численной схемы метода. Структурнозначимые этапы выделяются формированием следующих планов заданий: по данным геометрической модели; свойств материалов; граничные условия; дискретные аналоги (выделение сингулярных, слабосингулярных и регулярных интегралов; организация понижения, раскрытия особенностей и численной оценки значений интегралов; проверка с помощью инвариантов точности интегрирования и т.п.); разрешающая система (алгоритм блочного Гаусса; шаговая схема определения оригинала искомого решения и т.п.) и т.п. Модульный обмен внутри процесса организован с помощью аппарата формальных параметров и обрабатываемых данных во внешней памяти.

Программы обмена, размещения массивов в оперативной памяти и другие подобного назначения программы относятся к обслуживающим модулям. Обмен с внешней памятью обеспечивается прямым доступом. Используются операторы прямого доступа алгоритмического языка Fortran. Область прямого доступа структурирована файлами, содержащими записи произвольной длины. Представлена возможность организации каталога записей.

Пакетный интерфейс программного ГЭ-оснащения управляется решением задачи, заданием входных данных и генератором отчета. Имеется возможность монтирования программного ГЭ-оснащения со средствами препроцессорного преобразования информации под структуру и формат файла входных данных. Такие данные читаются из файла последовательного доступа и помещаются в набор данных прямого доступа. В своей структуре входные данные содержат: данные управляющей программы и процессов.

Дискретная модель [233] границы создается массивом координат узлов, матрицами индексов узлов элементов и отображений основной части границы на симметричные части границы. Краевые условия полностью представляются кодами условий и массивами значений граничных функций в узлах интерполяции. Кроме того, входной поток для формирования задания содержит физические характеристики материалов и упругих связей.

Во время работы программного ГЭ-оснащения расчетов осуществляется сопутствующий контроль промежуточной численной информации. В помощь для подготовки программы ГЭ-оснащения к эксплуатационному режиму расчета имеется пакет богатых диагностических сообщений.

Структура программного ГЭ-оснащения расчетов в виде процессов с опорой на модульную организацию позволяет реализовать отечественную технологию создания суперкомпьютерных двойников.

§ 2.6 Визуализация гранично-элементного моделирования

Для графической визуализации использовалась специальная программа, в основе которой была ранее созданная программа [178]. Программа позволяет формировать полутоновые или многоцветные изображения элементов, сеточной геометрии, физических полей (линий равного уровня) в различные

моменты времени. Исходные данные дает граничная сеточная модель объекта проектирования.

2.6.1 Описание формата входных данных

Геометрическая модель формируется ГЭ-набором. Поверхность кодируется цветом.

Файлы описания сеток являются текстовыми с расширением `dat` следующего формата:

 ----Описание входных данных геометрической модели----

$T_1 \dots T_K$	количество точек
$E_1 \dots E_K$	количество элементов
$E_1^1 - E_1^2$	интервал номеров элементов, подлежащих визуализации
m_x	множитель координат по x
m_y	множитель координат по y
m_z	множитель координат по z
M_x	множитель для перемещений по x
M_y	множитель для перемещений по y
M_z	множитель для перемещений по z
Time	количество точек по времени

 ----Описание геометрической модели поверхности----

Описание элементов

1 $t_1 t_2 t_3 t_4$ номер элемента и последовательность обхода элемента
 ... по номерам точек

$E_K t_1 t_2 t_3 t_4$

Описание точек

1 $x y z$ номер точки и ее координаты в декартовой системе
 ... координат

$T_K x y z$

 ----Описание входных данных для перемещений точек по оси x ----

0.0 $u_1 \dots u_{T_1}$

...

time $u_1 \dots u_{T_1}$

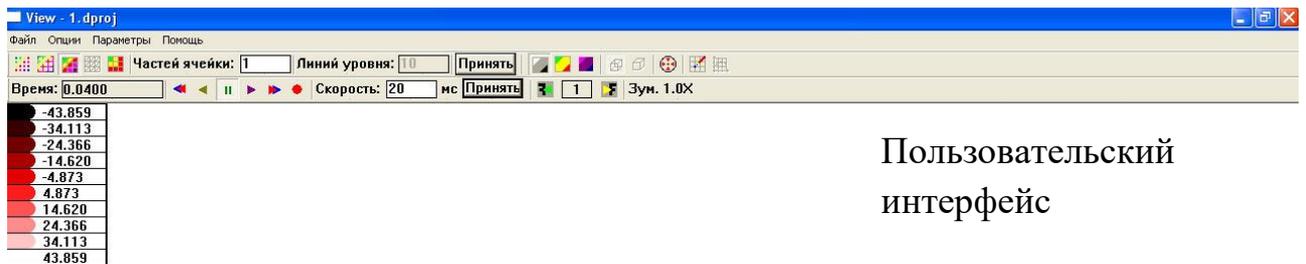
...

Time $u_1 \dots u_{T_1}$

здесь u_T перемещения точки T в момент времени time по оси x , аналогичный поток для других осей координат.

2.6.2 Пользовательский интерфейс

Пользовательский интерфейс представляет собой главное меню, две панели инструментов и область просмотра результатов (рис. 2.4). Рассмотрим различные аспекты для работы с программой.



Пользовательский
интерфейс

Рис. 2.4

Все доступные операции в программе представлены в виде главного меню (рис. 2.5).

Файл Опции Параметры Помощь

Рис. 2.5

Меню **Файл** включает следующие команды:

- 1) **Загрузить файл** – загрузка из файла данных для построения объекта, при этом появляется стандартный диалог открытия файла.
- 2) **Сохранить файл** – сохранение данных об объекте в текущий файл.
- 3) **Сохранить файл как ...** – сохранение данных об объекте в файл, при этом появляется стандартный диалог сохранения файла.
- 4) **Выход** – завершение работы программы.

Меню *Опции* содержит следующие команды:

- 1) *Изменить цвет фона* – задание произвольного цвета фона области просмотра, при этом появляется стандартный диалог выбора цвета.
- 2) *Отображение объекта* – создание полной модели на основе отображения базовой части. Плоскость симметрии задается в диалоге (рис. 2.6).

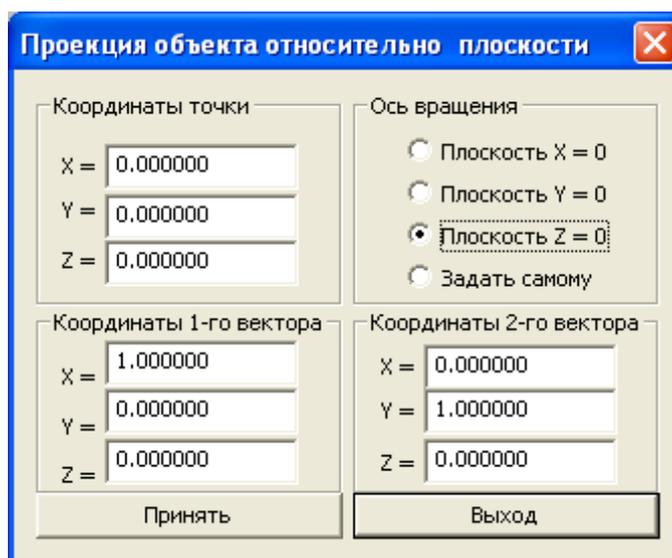


Рис. 2.6

- 3) *Сохранить изображение* – сохранение изображения из области просмотра результатов в *bmp*-файл, при этом появляется стандартный диалог сохранения файла.

Меню *Параметры* включает в себя следующие команды:

- 1) *Оси координат* – если пункт отмечен “√”, то в области просмотра результатов отображаются оси координат *oxuz* с единичной разметкой.
- 2) *Таблица значений* – если пункт отмечен “√”, то отображается таблица соответствия значений функции различным цветам.
- 3) *Свойства света* (активен, если выбран световой режим отображения) – если пункт отмечен “√”, то в световом режиме отображения появляется диалог, позволяющий изменить различные световые настройки.

2.6.3 Панели инструментов

Программа содержит две панели инструментов (рис. 2.7, 2.8).

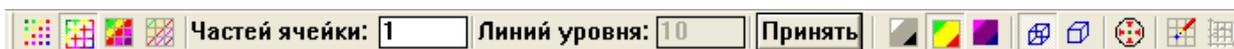


Рис. 2.7 Первая панель инструментов

Первая панель инструментов (рис. 2.7) создана для удобства пользователя. Она содержит основные необходимые для работы элементы, которые можно разделить по следующим категориям:

- 1) Вид отображения ячеек объекта: – точками, – пустыми прямоугольниками, – сплошными прямоугольниками, – линиями уровня.
- 2) Параметры: количество частей в одной ячейке и количество линий уровня (если вид отображения объекта – линии уровня), реализованные в виде Edit-ов. При нажатии кнопки **Принять** происходит считывание введенных параметров.
- 3) Режим отображения: – одноцветный, – многоцветный, – световой.
- 4) Невидимые грани: – видны, – не видны.
- 5) Установка центра сцены в центр объекта – . Используется, когда был изменен центр сцены.



Рис. 2.8 Вторая панель инструментов

Вторая панель инструментов (рис. 2.8) предназначена для работы с динамическими задачами. На этой панели содержатся следующие параметры:

- 1) Текущий момент времени задачи.
- 2) Кнопки управления показом динамической задачи: – предыдущий кадр, – обратный ход, – пауза, – прямой ход, – следующий кадр.
- 3) Скорость показа слайдов – изменяется в Edit-е, считывается при нажатии кнопки **Принять**.

2.6.4 Работа мышью

Наличие компьютерной мыши очень важно для работы с программой. Кроме того, что указателем мыши можно выбирать различные пункты меню, элементы панелей инструментов, есть еще несколько возможностей:

- 1) **Вращение объекта.** Возможность вращения объекта вокруг его центра с помощью нажатия левой кнопки мыши и последующего перемещения мыши. При этом анализируется смещение вдоль экранных осей x и y . По этому смещению определяется угол поворота вдоль осей x и y в трехмерных координатах xuz . Тем самым можно рассмотреть объект со всех сторон.
- 2) **Автоматическое вращение.** Возможность вращения объекта вокруг его центра без последовательного перемещения мыши: при нажатой левой кнопке мыши совершить быстрое смещение мыши, а затем отпустить ее левую кнопку. Установится постоянное вращение, а скорость вращения определится по длине произведенного смещения мыши.
- 3) **Центр сцены.** Установка нового центра сцены происходит путем нажатия на этой точке правой кнопкой мыши. Вернуть центр сцены в центр объекта можно с помощью кнопки на первой панели инструментов.
- 4) **Масштабирование.** Возможность масштабирования изображения. Если совершен хотя бы один шаг масштабирования, то нельзя изменить центр сцены. Для этого надо сначала вернуться в исходное положение.

Схема работы программы имеет следующий вид (рис. 2.9).

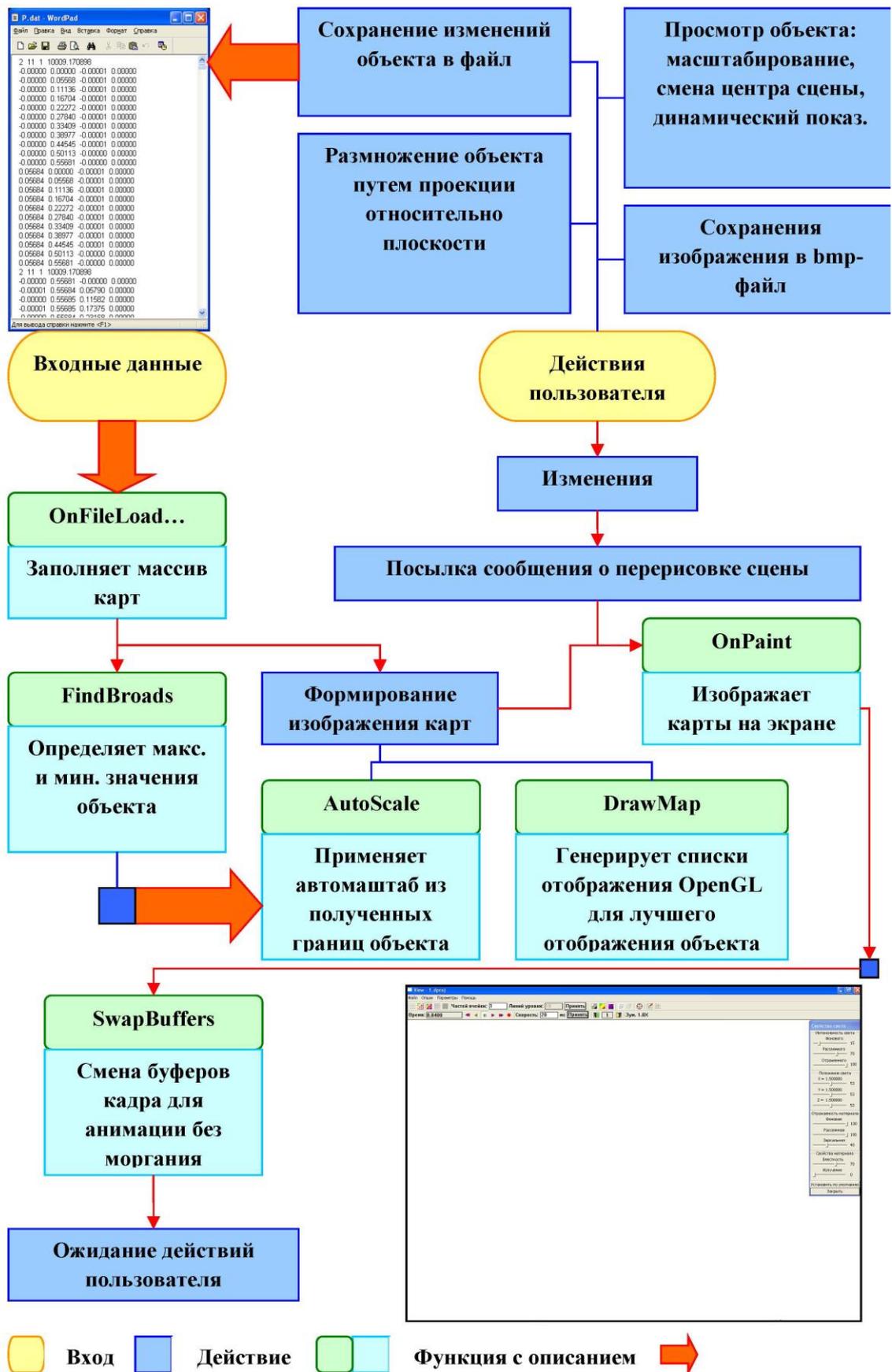


Рис. 2.9

В качестве основных выводов по главе можно сформулировать следующее. В § 2.1 описано построение интегрального представления решения прямого подхода метода граничных интегральных уравнений. Фактически, для начально-краевых задач линейной трехмерной изотропной динамической пороупругости в рамках трехфазной модели материала записана обобщенная формула Грина-Сомилианы. В § 2.2 с помощью формулы Грина-Сомилианы построено сингулярное, в смысле Коши, граничное интегральное уравнение прямого подхода, а также сингулярное, в смысле Коши, гранично-временное интегральное уравнение прямого подхода. В § 2.3 построена регуляризация граничного интегрального уравнения. Регуляризация выполнена на основе подхода Контаровича-Перлина. Сингулярный интеграл регуляризован. Предварительно проведен координатный анализ ядер сингулярного граничного интегрального уравнения. Показано, что особенности матрицы фундаментального решения трехмерной изотропной линейной пороупругости определяется классической матрицей Сомилианы, а особенности матрицы сингулярных решений трехмерной изотропной линейной пороупругости определяются матрицей сингулярных решений, построенной из матриц Сомилианы путем действия граничного оператора трехмерной изотропной линейной упругой статики. В § 2.4 на основе регуляризованного граничного интегрального уравнения записан дискретный аналог граничного интегрального уравнения. Дискретный аналог параметризован комплексной переменной интегрального преобразования Лапласа, и это позволяет организовать шаговый процесс получения оригиналов компонент искомых решений. В § 2.5 приведена структура и дано краткое описание программного гранично-элементного оснащения исследовательских расчетов. Программное оснащение является компьютерной реализацией дискретного аналога регуляризованного граничного интегрального уравнения на основе шагового способа численного обращения интегрального преобразования Лапласа. В § 2.6 описан инструментарий визуализации препроцессорной и постпроцессорной

информации гранично-элементных расчетов. Примерами использования созданного программного обеспечения являются иллюстрационные рисунки диссертационной работы.

ГЛАВА 3. ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТРЕХМЕРНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ПОРОУПРУГИХ ТЕЛ

Материал главы составляет примеры решения в линейной постановке трехмерных начально-краевых задач изотропных частично-насыщенных пороупругих тел. Подбор задач определяется стремлением продемонстрировать возможности созданного программного обеспечения метода граничных элементов. Рассмотрены задачи для конечного и полубесконечного тел. Анализ приведенных результатов позволяет утверждать о работоспособности построенной гранично-элементной схемы, а также о необходимости изучать динамику частично-насыщенных пороупругих тел и сред.

§ 3.1 Задача о действии торцевой силы на частично насыщенное пороупругое призматическое тело

Рассмотрена задача о действии силы на призматическое частично насыщенное пороупругое тело: $l=3\text{м}$, $a=b=0.5\text{м}$ (рис. 3.1). На закрепленном торце заданы перемещения $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ и поток $q = 0$. На другом торце заданы поровые давления $p^w = p^a = 0$, усилия $t_1 = t_2 = 0$ и $t_3 = -S_0 H(t)$, где $S_0 = 1\text{Н/м}^2$ и $H(t)$ – функция Хевисайда. Боковые грани тела непроницаемы, то есть $q^w = 0$ и $q^a = 0$, и имеют защемление по перемещениям в направлении нормалей. Параметры пороупругого материала призмы приведены в табл. 1.1.

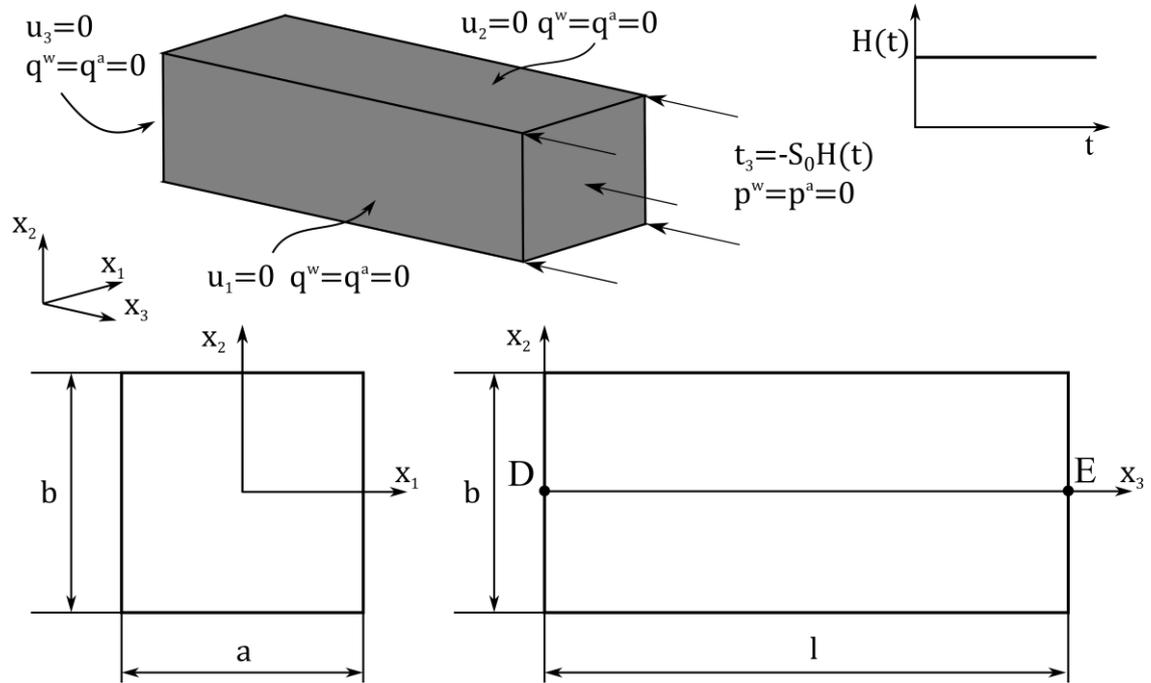


Рис. 3.1 Схема задачи о действии нагрузки на призматическое частично насыщенное пороупругое тело

Для проведения исследования о сеточной сходимости численного решения задачи расчеты выполнены на трех гранично-элементных сетках, соответственно содержащих на четверти границы по 104, 234 и 416 восьмиузловых квадратных элемента. Вид полных граничных сеток показан на рис. 3.2, с соответствующей маркировкой буквами А, В и С в порядке увеличения количества элементов. Расчеты в трехмерной постановке выполнены при следующих значениях параметров шагового метода: $R = 0.997$, $\Delta t = 4.0 \cdot 10^{-5} \text{ с}$, $N = 1000$, $L = 506$. Графики перемещения и поровых давлений в точках D и E представлены на рис. 3.3. Также на рис. 3.3 для сравнения даны графики перемещений и поровых давлений, рассчитанных численно-аналитически для соответствующей одномерной задачи §1.4.

На рис. 3.4 – 3.8 показаны соответствующие составляющие комплексных амплитуд перемещений \hat{u}_3 , и поровых давлений \hat{p}^w и \hat{p}^a как функции от полярного угла ϕ . С ростом числа граничных элементов наблюдается выраженная сходимость и решения сходятся к численно-

аналитическим кривым и становятся графически не различимы.

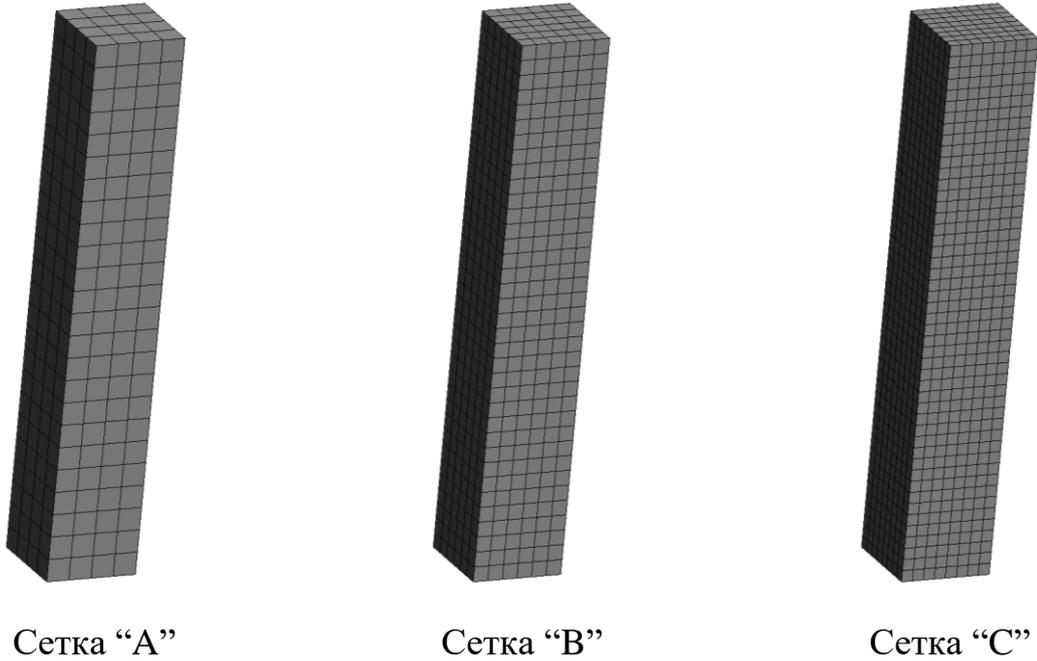


Рис. 3.2 Гранично-элементные сетки для задачи о действии силы на призматическое тело

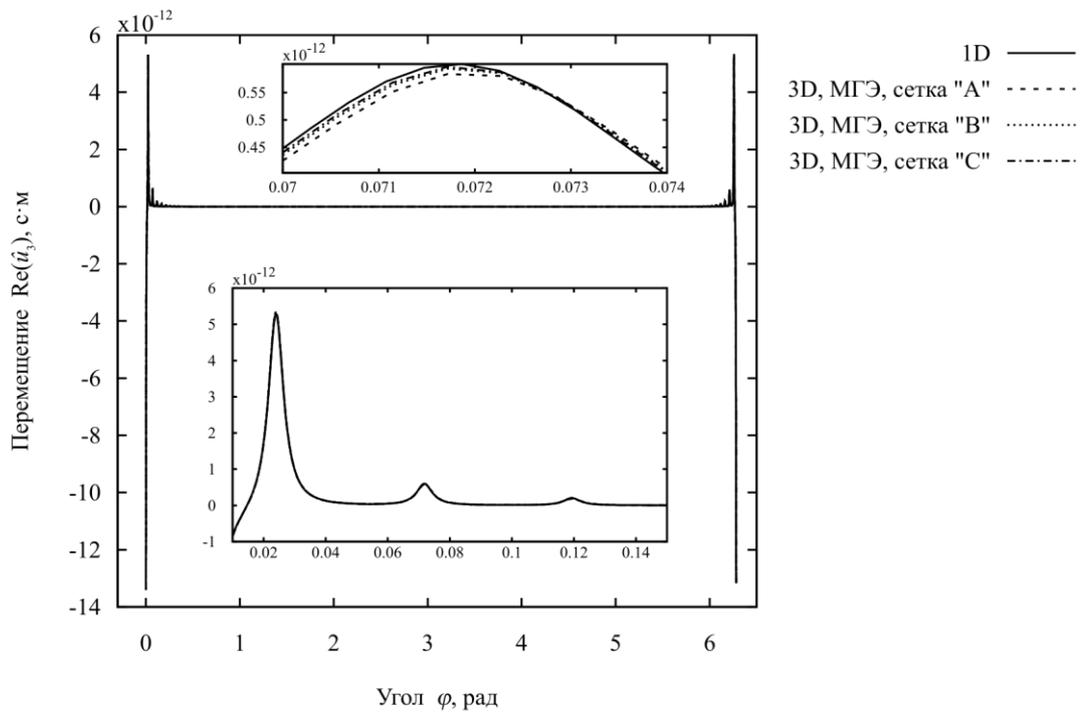


Рис. 3.3 Графики изменения действительной части перемещения \hat{u}_3 в точке Е в зависимости от угла ϕ

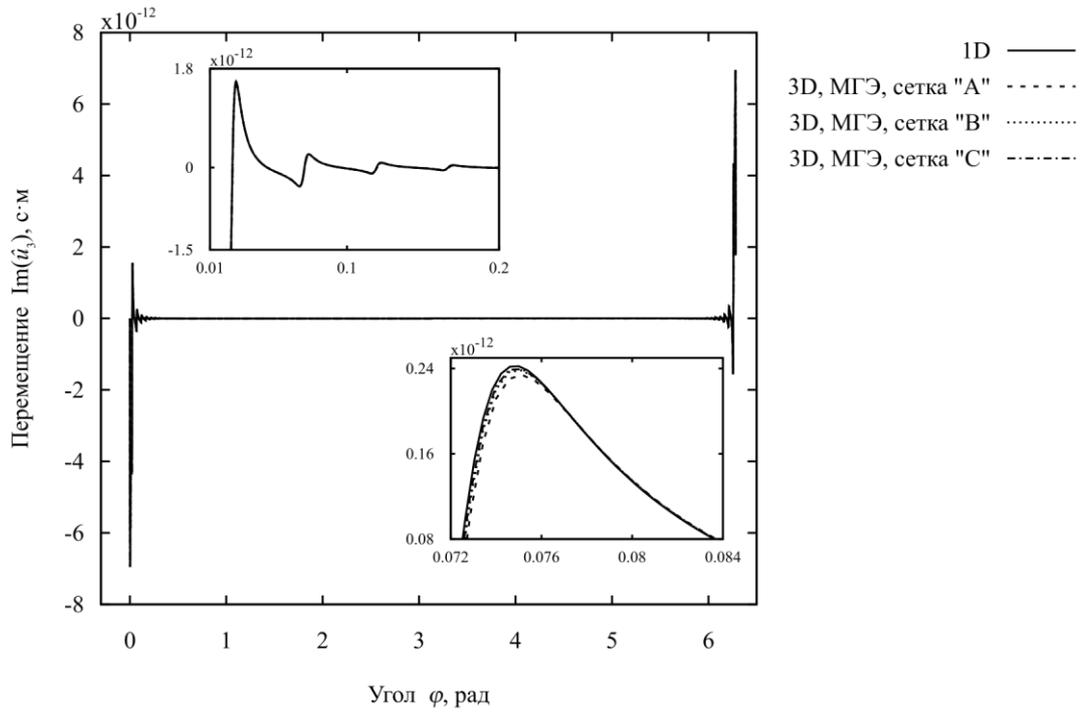


Рис. 3.4 Графики изменения мнимой части перемещения \hat{u}_3 в точке E в зависимости от угла ϕ

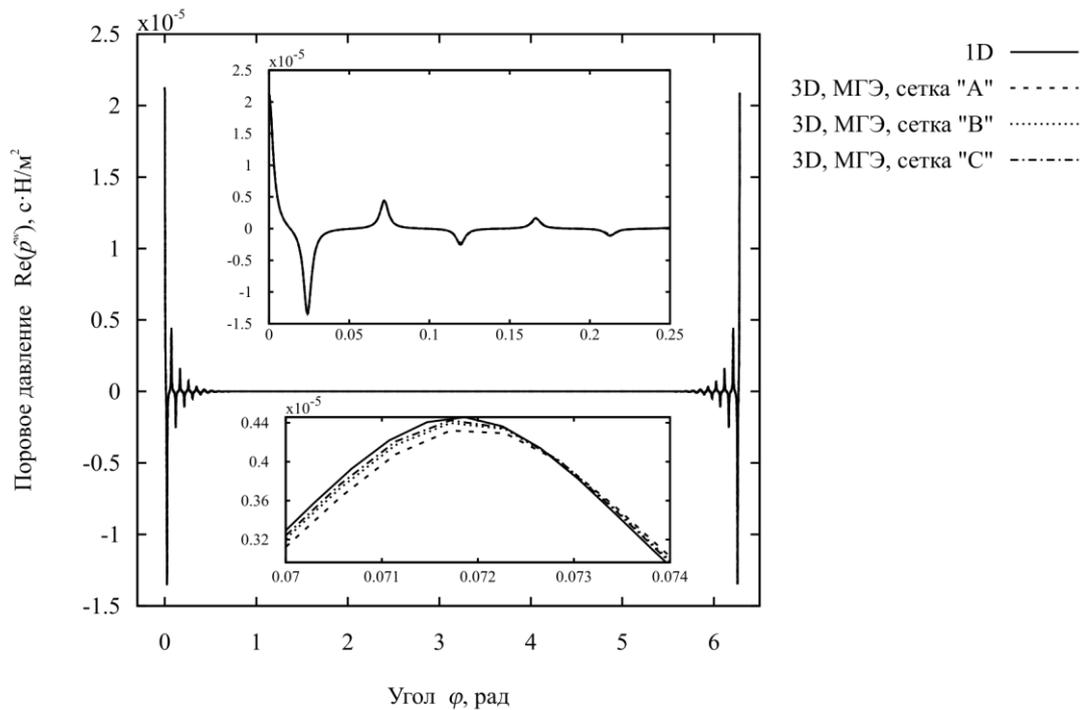


Рис. 3.5 Графики изменения действительной части порового давления \hat{p}^w в точке D в зависимости от угла ϕ

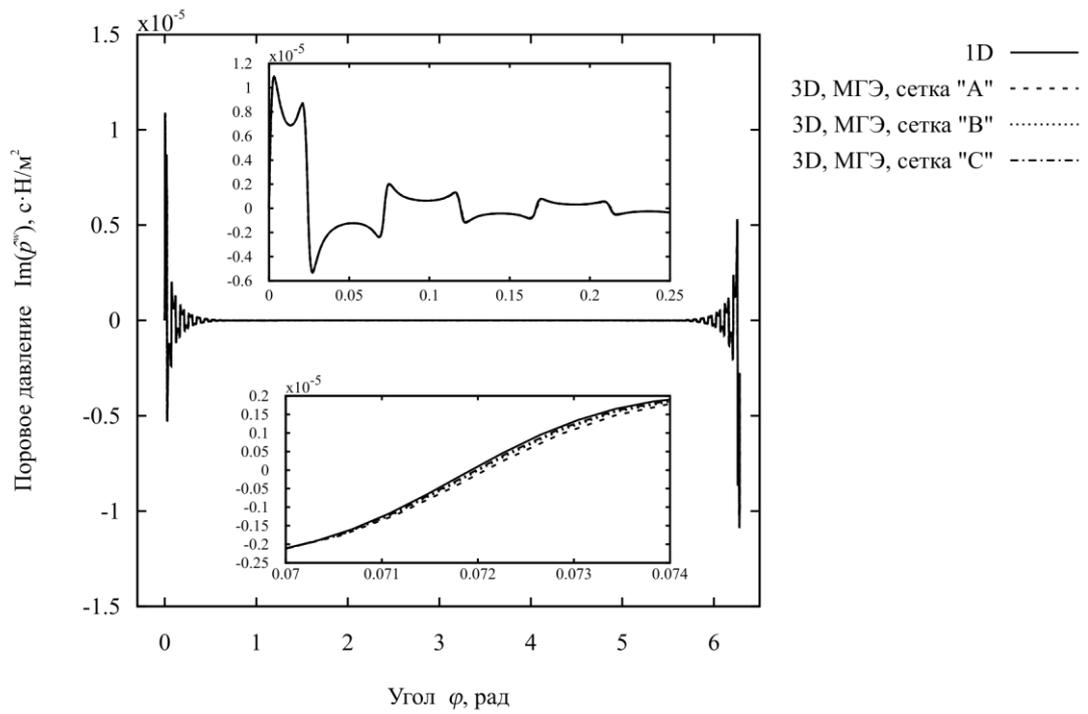


Рис. 3.6 Графики изменения мнимой части порового давления \hat{p}^w в точке D в зависимости от угла ϕ

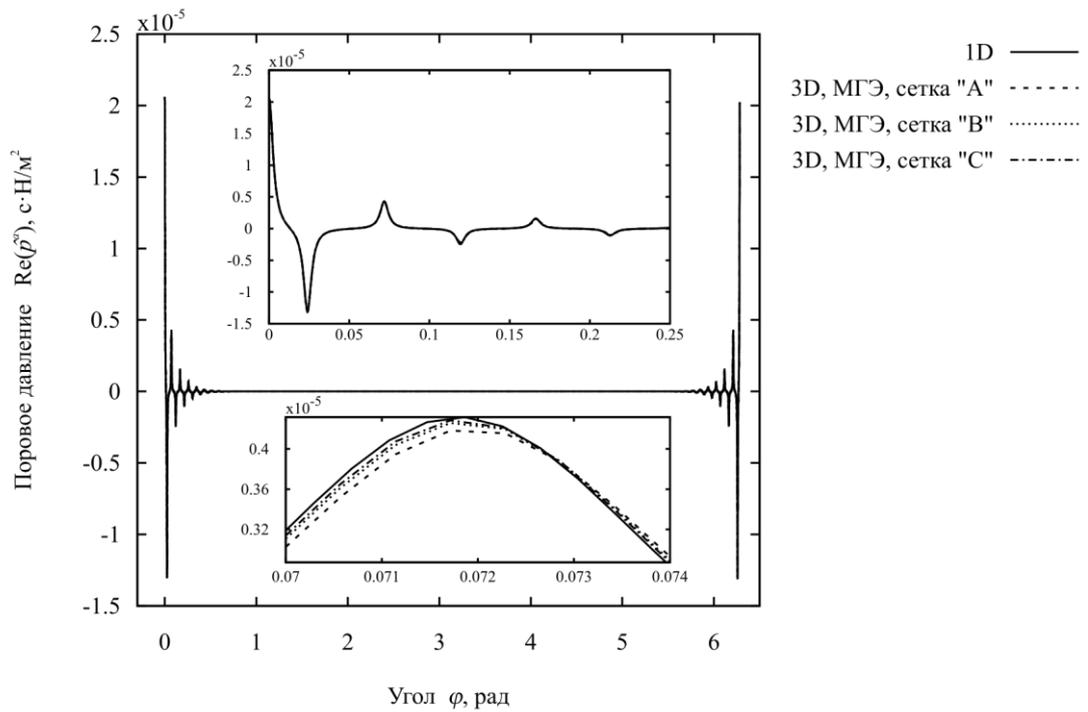


Рис. 3.7 Графики изменения действительной части порового давления

\hat{p}^a в точке D в зависимости от угла ϕ

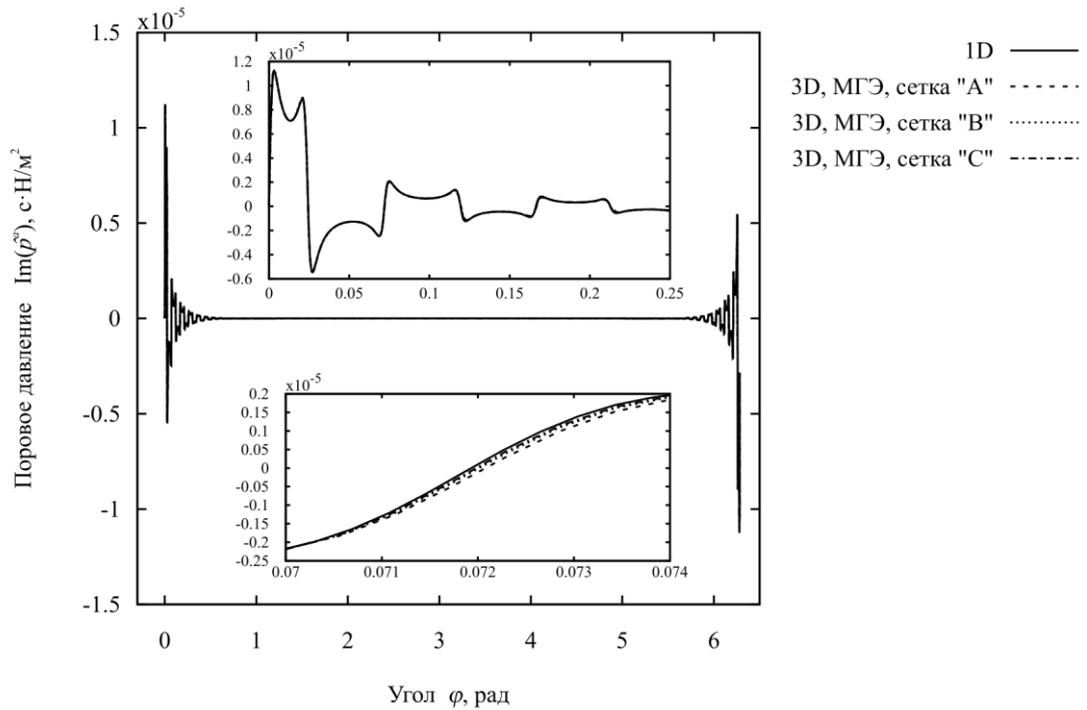


Рис. 3.8 Графики изменения мнимой части порового давления \hat{p}^a в точке D в зависимости от угла ϕ

На рис. 3.9 – 3.11 представлены кривые как функции времени: перемещения u_3 и поровых давлений p^w и p^a . Гранично-элементная сходимость исходных функций наглядно демонстрируется рисунками. Кроме того, перемещения в точке E консольной призмы хорошо согласуются качественно и количественно с результатами численно-аналитического расчета перемещений на всем рассматриваемом временном отрезке. Аналогичное согласование графиков (точность) по поровым давлениям в жидкостном и газообразном наполнителях в точке D требует более мелкой гранично-элементной дискретизации. Такая рекомендация вызвана особенностью построенной гранично-элементной схемы: для согласованной поэлементной аппроксимации обобщенный вектор поверхностной силы, а значит и функции потоков в жидкой и газообразной компонентах материала, являются постоянной величиной на элементе.

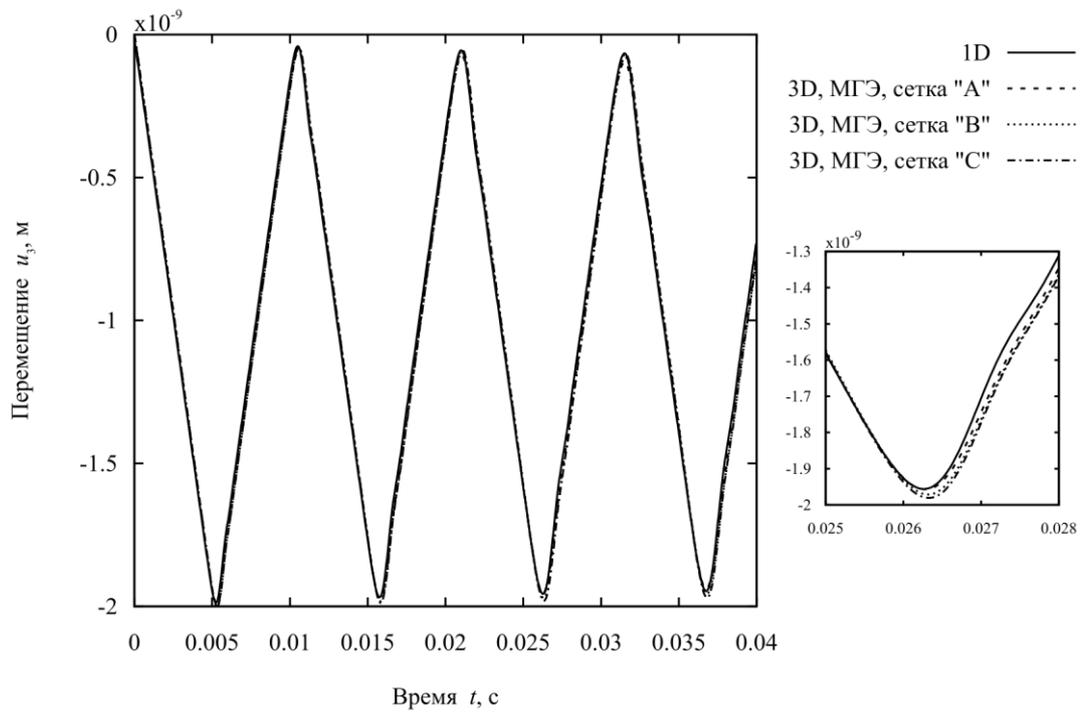


Рис. 3.9 Графики изменения перемещения u_3 в точке Е в зависимости от времени t

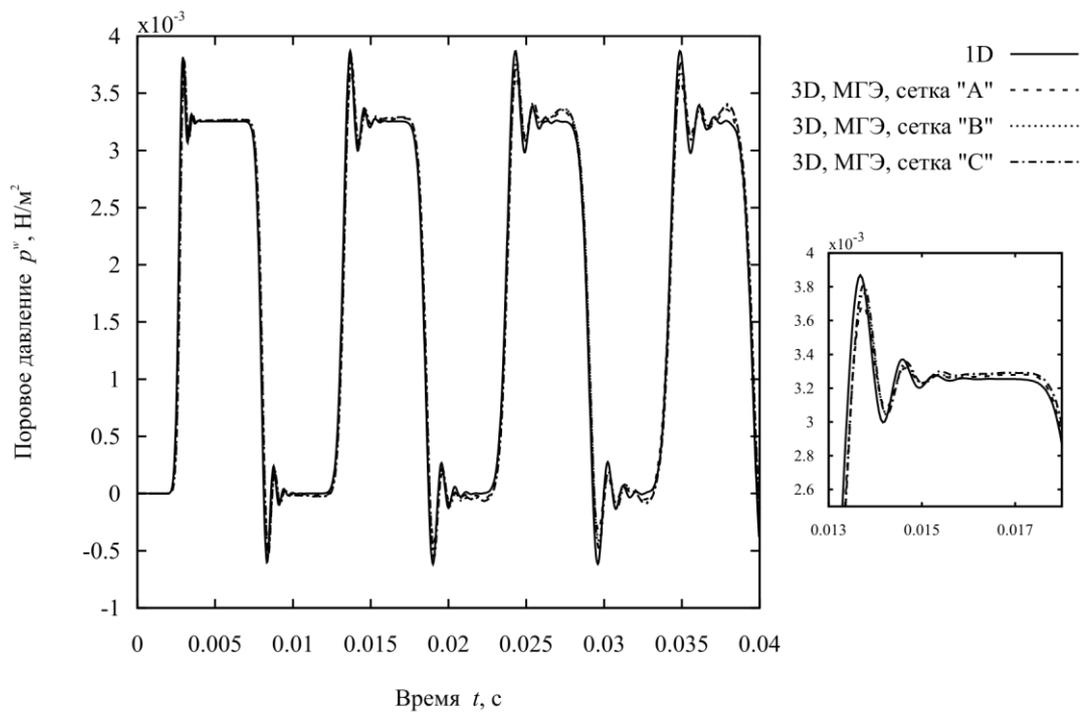


Рис. 3.10 Графики изменения порового давления \hat{p}^w в точке D в зависимости от времени t

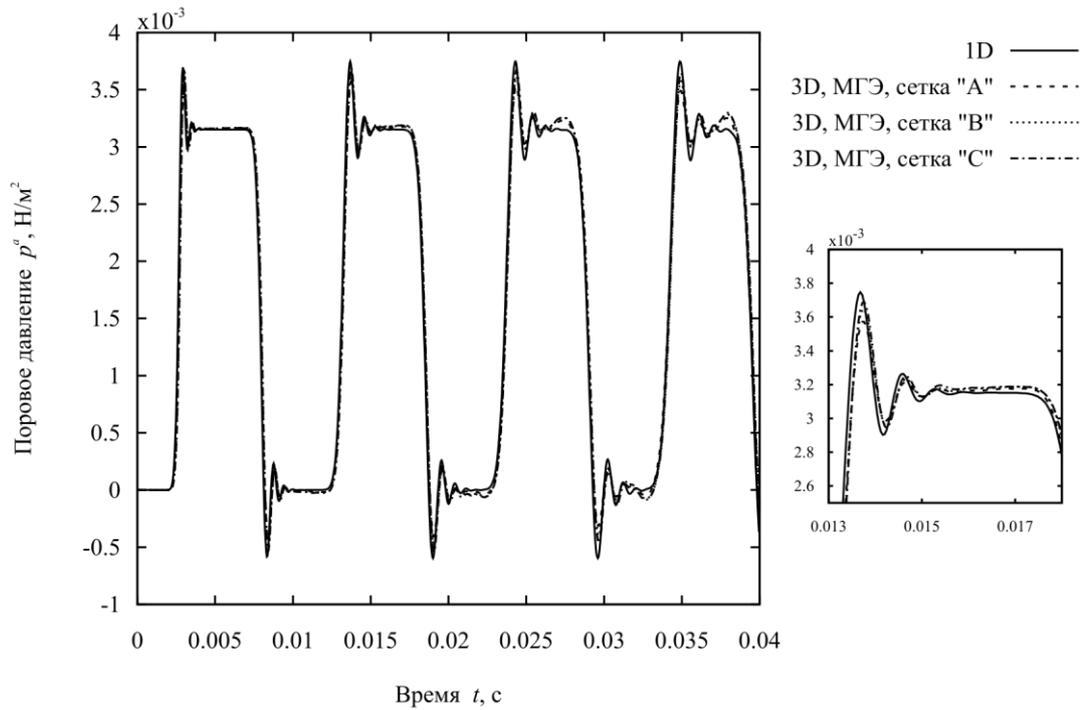


Рис. 3.11 Графики изменения порового давления \hat{p}^a в точке D в зависимости от времени t

Рисунки 3.12 – 3.14 показывают результаты расчетов на различных гранично-элементных схемах поверхностных усилий. Представлены графики усилия t_3 на элементе, один из узлов которого совпадает с точкой D. Гранично-элементные результаты сравниваются с численно-аналитическими. ГЭ-решения для поверхностных сил демонстрируют хорошую сеточную сходимость. Для достижения аналогичной по перемещениям точности необходимо использовать более мелкую сетку. Поверхностная сила входит в состав пятикомпонентной поверхностной силы, а значит первые три компоненты, в рамках принятого обобщения при формулировке начально-краевой (краевой) задачи в §1.2 в формуле (1.4), являются поверхностной силой порождаемой упругим скелетом частично насыщенного пороупругого материала. Обобщенная поверхностная сила в численной гранично-элементной схеме аппроксимируется постоянной величиной на элементе.

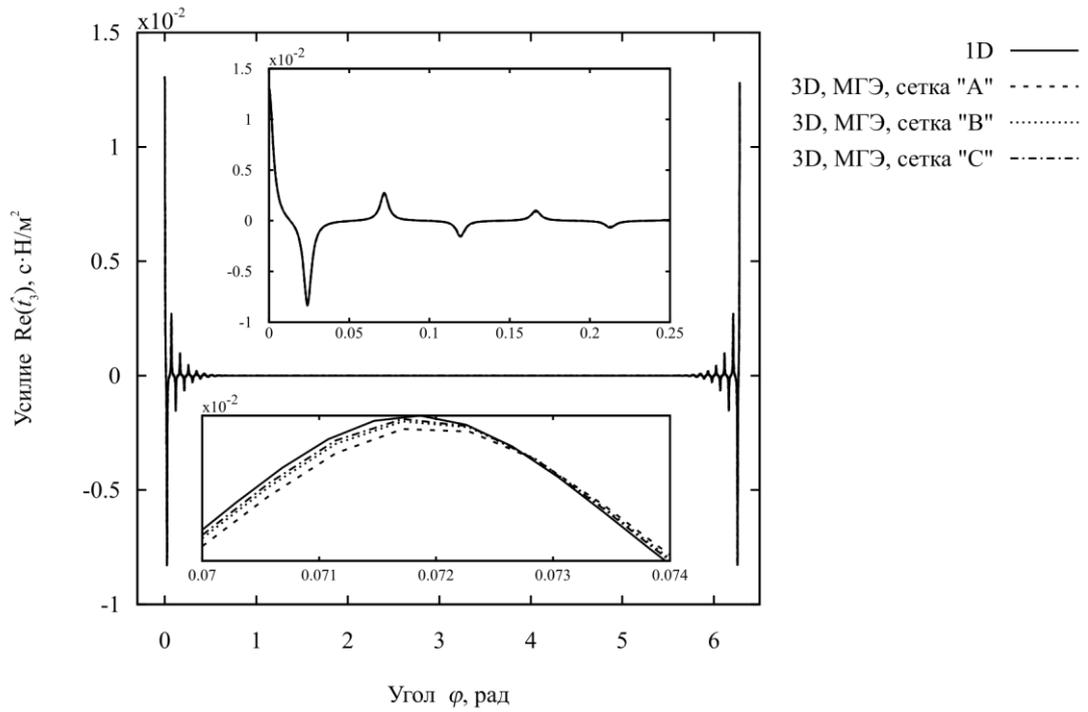


Рис. 3.12 Графики изменения действительной части усилия \hat{t}_3 на закрепленной поверхности призмы в зависимости от угла ϕ

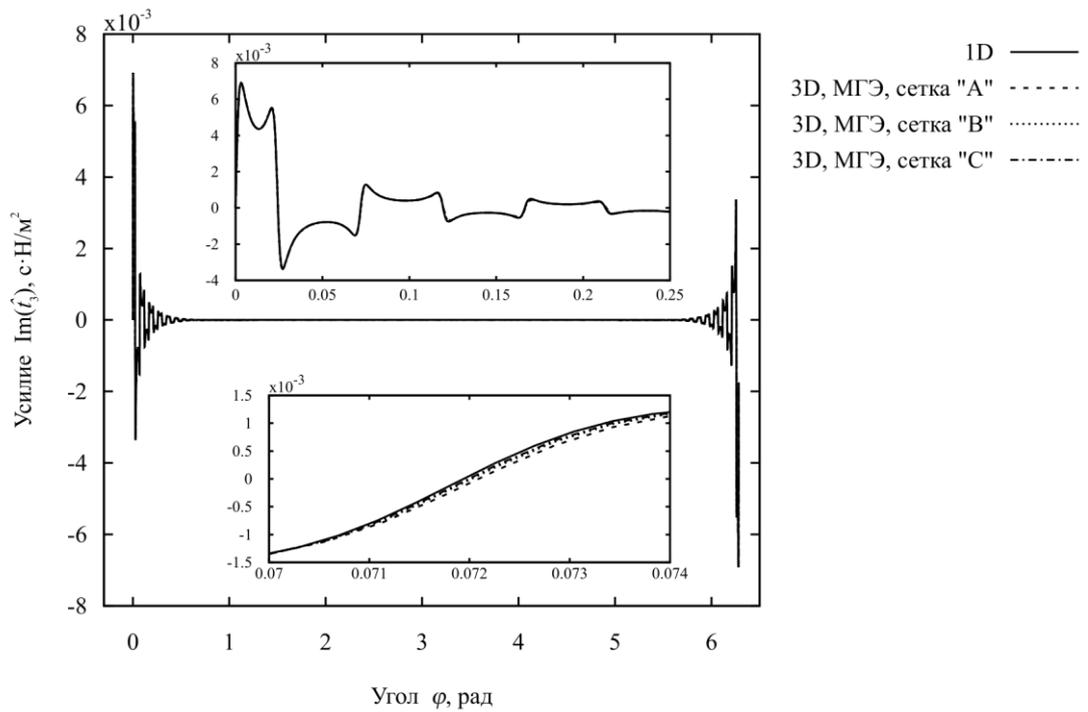


Рис. 3.13 Графики изменения мнимой части усилия \hat{t}_3 на закрепленной поверхности призмы в зависимости от угла ϕ

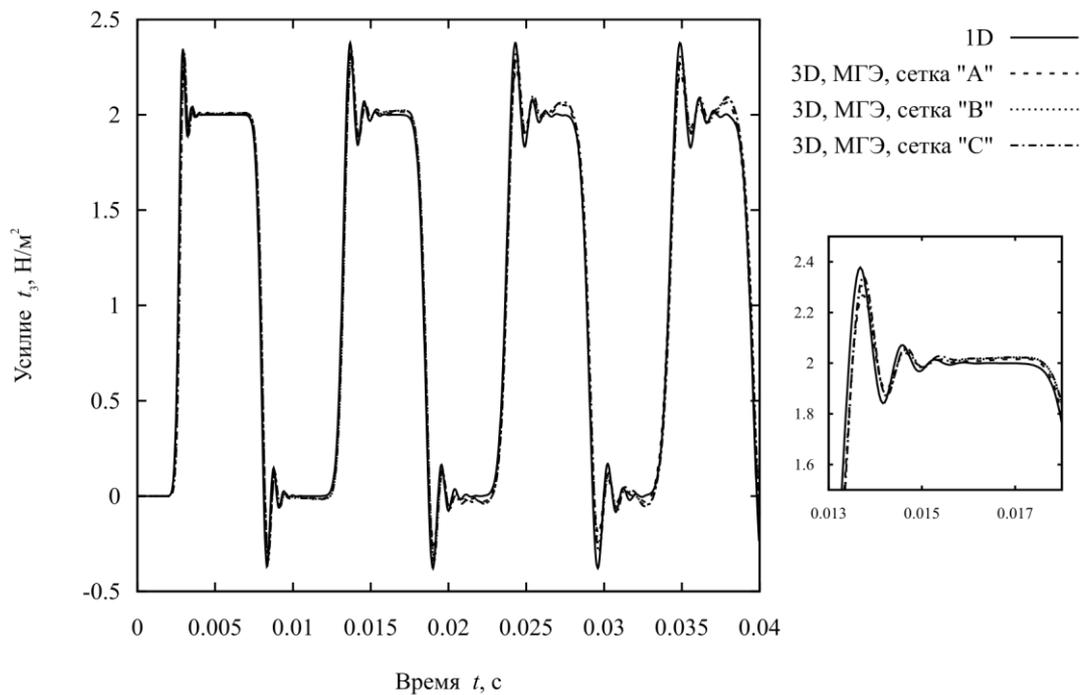


Рис. 3.14 Графики изменения усилия t_3 на закрепленной поверхности призмы в зависимости от времени t

Для исследования сходимости по времени проведены расчеты с различными значениями параметра Δt : $8.0 \cdot 10^{-5}$ с, $5.5 \cdot 10^{-5}$ с, $4.0 \cdot 10^{-5}$ с, $2.0 \cdot 10^{-5}$ с, $1.5 \cdot 10^{-5}$ с. В расчетах использована гранично-элементная сетка с маркером "С". Динамический отклик призмы в точках D и E представлен на рис. 3.15 – 3.17.

На рис. 3.15 видно, что кривые перемещения u_3 близко располагаются к друг другу при изменении параметра от $8.0 \cdot 10^{-5}$ с до $2.0 \cdot 10^{-5}$ с.

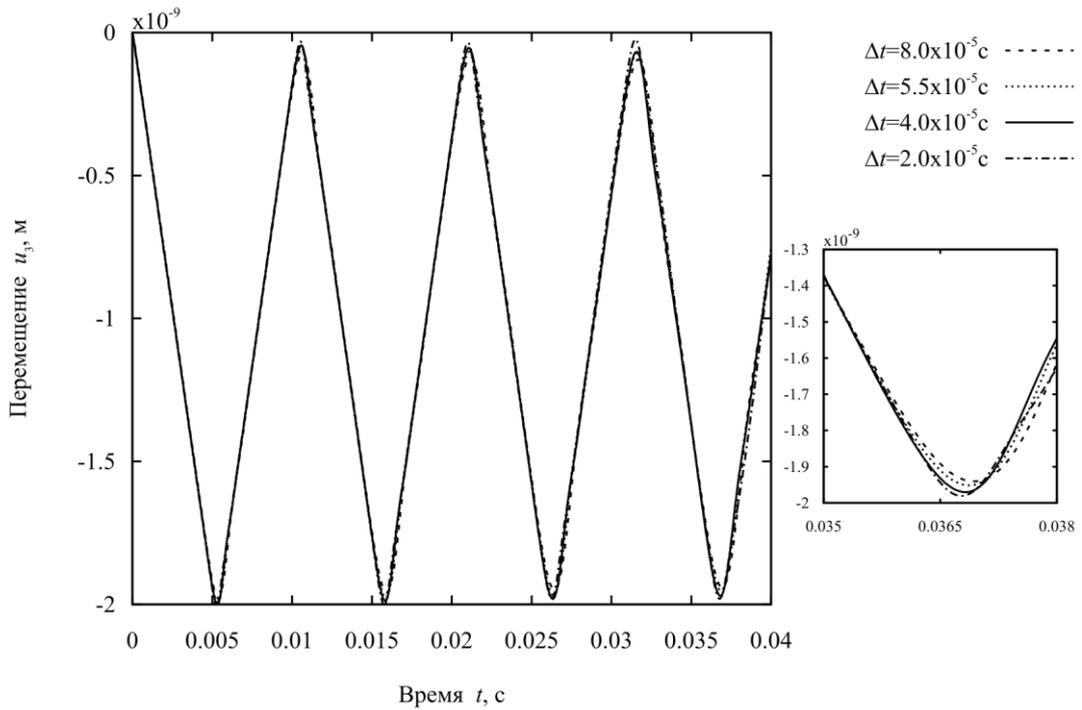


Рис. 3.15 Графики изменения перемещения u_3 в точке Е в зависимости от времени t при различных значениях параметра Δt

На рис. 3.16 – 3.17 видно, что и кривые порового давления \hat{p}^w , и \hat{p}^a близко располагаются к друг другу при изменении параметра от $8.0 \cdot 10^{-5}$ с до $4.0 \cdot 10^{-5}$ с. При $\Delta t = 2.0 \cdot 10^{-5}$ с на кривых поровых давлений наблюдается снижение величины осцилляций возле скачков, но вместе с тем появляются осцилляции на участках, соответствующих постоянной величине порового давления, приводящим к выполнению условия постоянства значения в интегральном (среднем) смысле. Осцилляции определяются особенностью шагового процесса, на котором строится гранично-элементная схема и к пространственной гранично-элементной аппроксимации не имеет отношения.

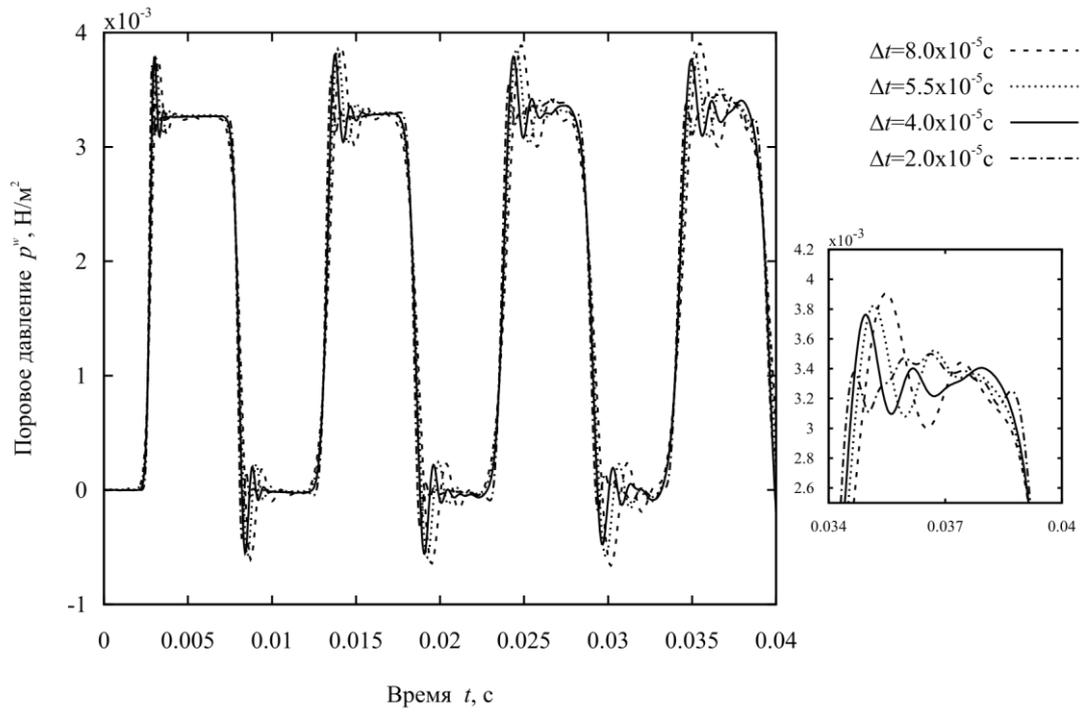


Рис. 3.16 Графики изменения порового давления p^w в точке D в зависимости от времени t при различных значениях параметра Δt

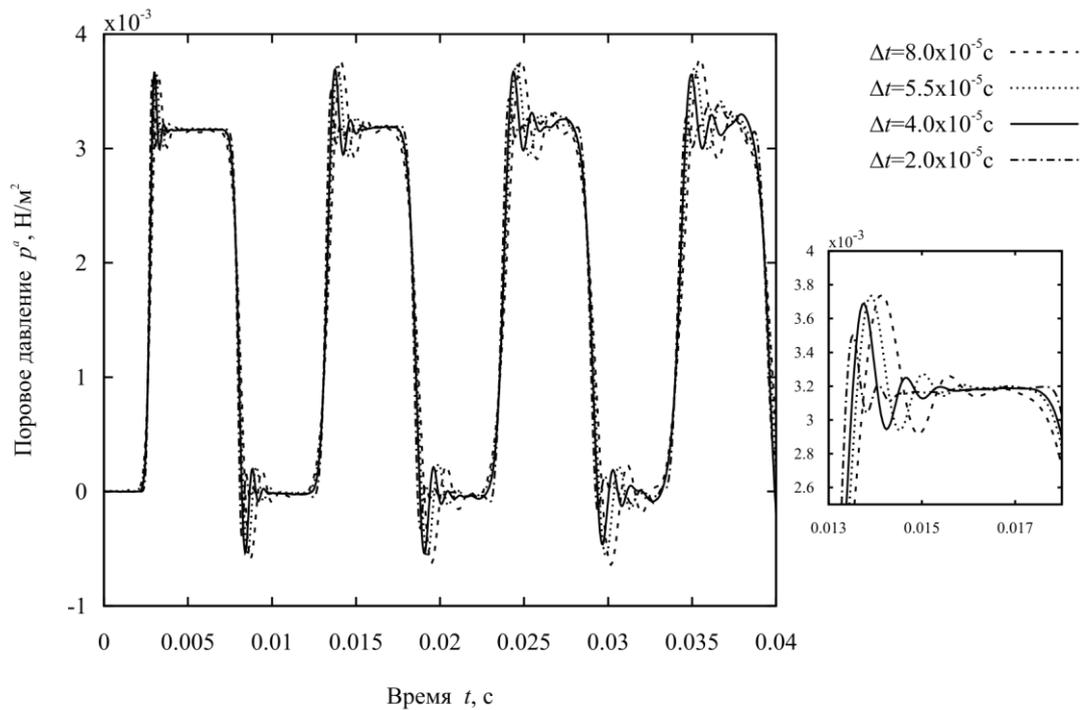


Рис. 3.17 Графики изменения порового давления p^a в точке D в зависимости от времени t при различных значениях параметра Δt

Приведенные численные данные показывают, что используемая гранично-элементная схема обеспечивает хорошую сходимость численных решений по элементной сетке и по времени. При этом, в рассмотренном примере численные решения для поровых давлений оказались более чувствительны к дискретизации по пространству и по времени, чем численные решения для перемещения. В работе [231] также представлено исследование сходимости численных решений, полученных с помощью, разработанной авторами, гранично-элементной схемы, и отмечено аналогичное различие в поведении поровых давлений и перемещения в отношении изменения величины шага пространственной и временной сеток.

Проведенные исследования сходимости позволяют выбрать размер граничного элемента и шаг для сравнительного анализа решений на основе построенной ГЭ-схемы с решением других авторов [231]. Граничные условия, схема задачи и параметры пороупругого материала приняты такими же, как и в рассмотренном выше примере, но ширина a и высота b призматического тела приняты равными 1м. Размер шага по времени Δt принят равным 0.00001456 с. В работе [231] в расчетах использована сетка, содержащая 2016 треугольных элемента, в настоящей работе использована сетка, содержащая с учетом симметрии 504 четырехугольных элемента. Вид сеток представлен на рис. 3.18. Результаты расчетов для неизвестных функций усилия и поровых давлений приведены на рис. 3.19 – 3.21.

График поведения по времени давления на рис. 3.20 – 3.21 показывает, что амплитуда ГЭ-решения, полученного в диссертационной работе, достигает численно-аналитического значения и лишь локально может различаться на горизонтальном участке за счет осцилляций (совпадая в среднем, интегрально), то поведение ГЭ-решения из [231] с момента $t = 0.002$ с с недостатком по амплитуде к нему, свидетельствует, что ГЭ-схема по своим возможностям из [231] уступает ГЭ-схеме, построенной в диссертационной

работе. Недостаток ГЭ-решения из [231] проявляется наиболее наглядно в поведених давлений по времени. В [231] получается, что давления в обеих фазах одинаковы, однако этого не демонстрирует ни численно-аналитическое решение из §1.4, ни ГЭ-решение, построенное в диссертационной работе.

Преимущество ГЭ-схемы, использованной в диссертационной работе, убедительно подтверждено на рассмотренном примере, благодаря верификации численных решений со сторонними численно-аналитическими решениями.

Как видно на рис. 3.19 – 3.21, полученные результаты демонстрируют хорошее соответствие с результатами, представленными в работе [231]. Кривые усилия, соответствующие разным решениям, становятся отчетливо графически различимы только с момента времени $t = 0.02$ с. Аналогичное поведение демонстрируют кривые поровых давлений. Наибольшее количественное различие между решениями наблюдается на графиках порового давления жидкости. На всем рассмотренном временном отрезке поровое давление, вычисленное в настоящей работе, в момент прибытия быстрой продольной волны превосходит во величине давление, вычисленное в работе [231].



Рис. 3.18 Гранично-элементные сетки для задачи о действии на грузки на призматическое тело: (a) – сетка из четырехугольных элементов, (b) – сетка из работы [231]

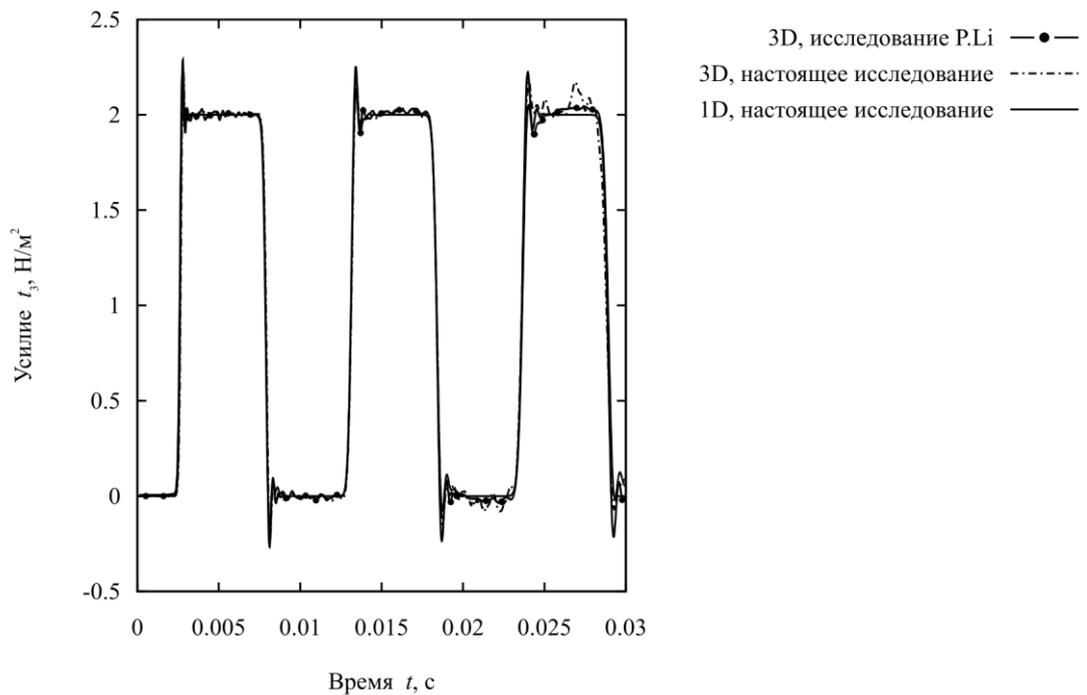


Рис. 3.19 Графики изменения порового давления t_3 на закрепленной поверхности в зависимости от времени t при различных значениях параметра Δt

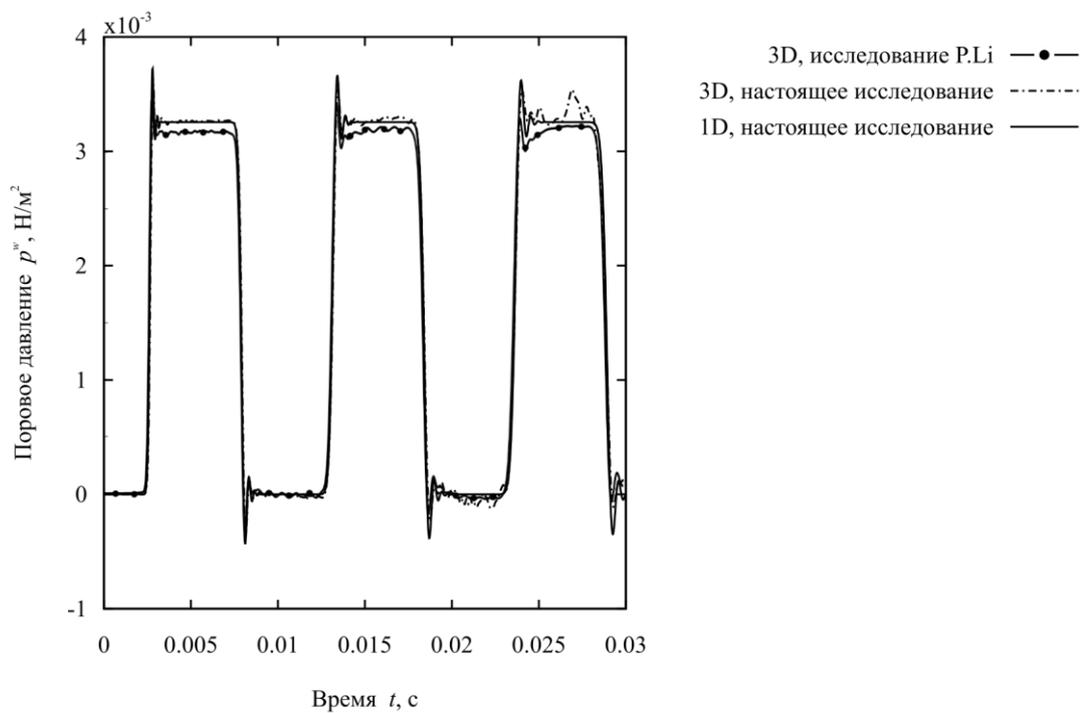


Рис. 3.20 Графики изменения порового давления p^w в точке D в зависимости от времени t при различных значениях параметра Δt

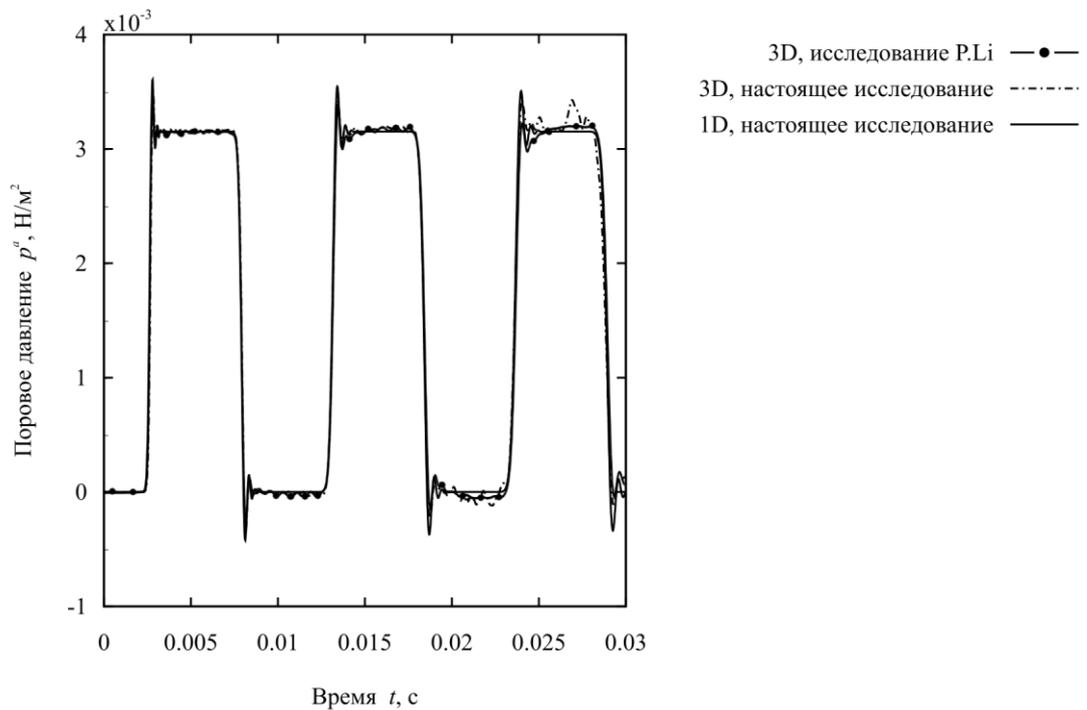


Рис. 3.21 Графики изменения порового давления p^a в точке D в зависимости от времени t при различных значениях параметра Δt

Вслед за исследованием сходимости численного решения по времени и пространству исследовано влияние параметров пороупругого материала на решение. Расчеты неизвестных граничных функций проведены на сетке с маркером «С». На рис. 3.22 – 3.24. представлены зависимости перемещения u_3 и поровых давлений p^w и p^a как функции времени, полученные при различных значениях коэффициента насыщенности S_w .

Рис. 3.22 демонстрирует факт влияния увеличения насыщенности. Во-первых, возрастает значение перемещения u_3 в момент прибытия быстрой продольной волны, а также возрастает скорость продольной волны. При этом кривые перемещения при $S_w = 0.9$ и $S_w = 0.95$ практически не различаются графически, но становятся хорошо различимы при $S_w = 0.99$ и $S_w = 0.995$, начиная с момента времени $t = 0.005$ с. Рисунки 3.23 – 3.24 демонстрируют большую чувствительность поровых давлений p^w и p^a к изменению

коэффициента насыщенности S_w , чем это проявлялось на u_3 . Видно, что кривые поровых давлений хорошо графически различимы при всех рассмотренных значениях коэффициента S_w на всем рассматриваемом временном интервале. Увеличение S_w до 0.95 приводит к увеличению значения p^w и p^a в момент прибытия продольной волны в 2 раза, а увеличение до 0.99 – к увеличению значения p^w и p^a почти в 10 раз.

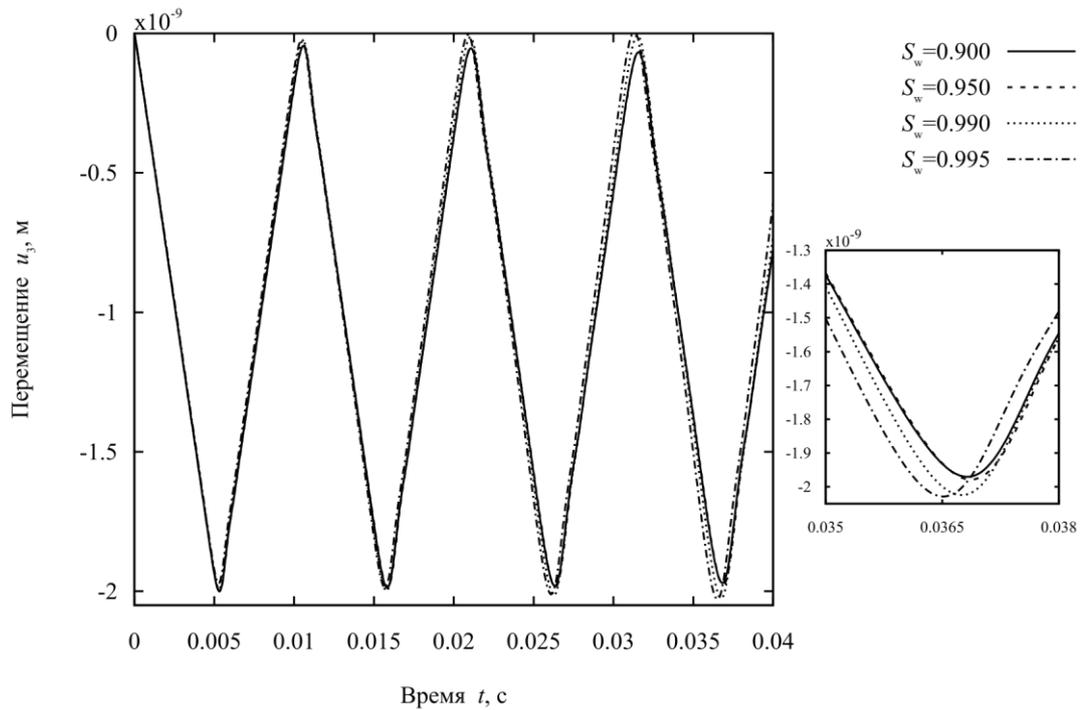


Рис. 3.22 Графики изменения перемещения u_3 в точке Е в зависимости от времени t при различных значениях параметра S_w

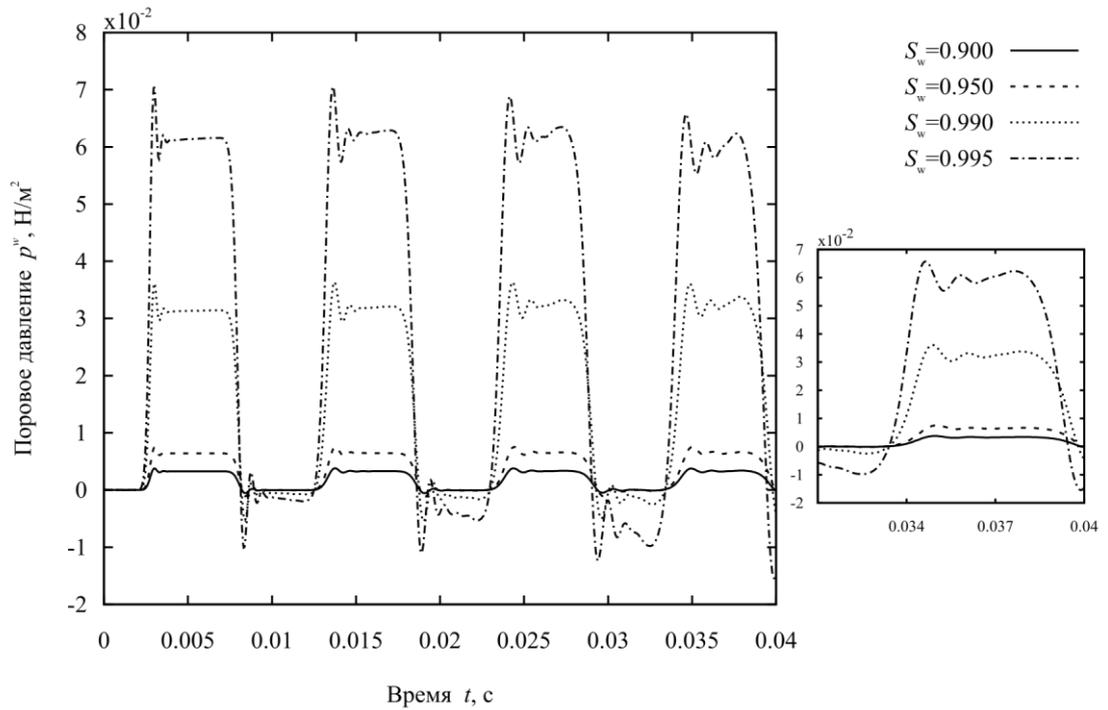


Рис. 3.23 Графики изменения перемещения p^w в точке D в зависимости от времени t при различных значениях параметра S_w

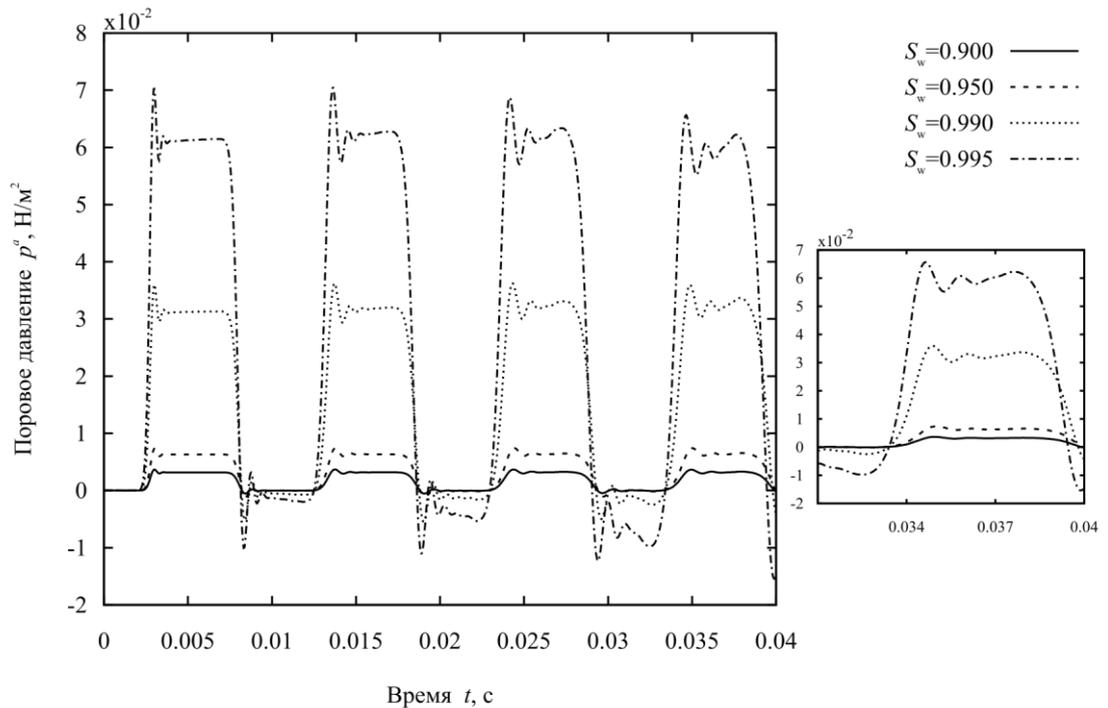


Рис. 3.24 Графики изменения перемещения p^a в точке D в зависимости от времени t при различных значениях параметра S_w

В случае $S_w = 1$ расчеты выполнены с использованием модели полностью насыщенного пороупругого материала со следующими параметрами: $K = 1.02 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $G = 1.44 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $K_s = 3.5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, $K_w = 2.25 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho = 2270 \text{ кг/м}^3$, $\rho_w = 997 \text{ кг/м}^3$, $\phi = 0.23$, $\kappa = 2.5 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$. На рис. 3.25 видно, что перемещения u_3 , рассчитанные по модели полностью насыщенного материала, в 4 раза меньше по величине, чем перемещения, рассчитанные по модели частично насыщенного материала при $S_w = 0.995$. Видно также, что скорость распространения быстрой продольной волны в полностью насыщенном материале больше почти в 2 раза. Расчеты также показали, что (рис. 3.26) поровое давление p^w в 25 раз превышает по величине соответствующее давление в случае частичного насыщения.

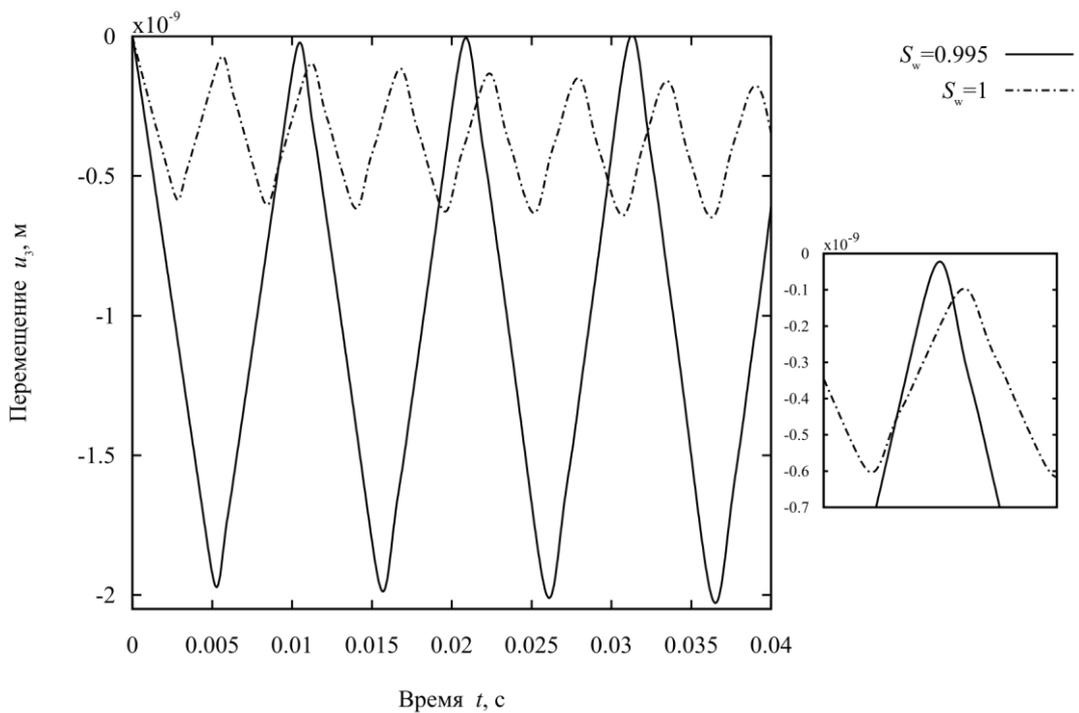


Рис. 3.25 Графики изменения перемещения u_3 в точке Е в зависимости от времени t при $S_w = 0.995$ и $S_w = 1$

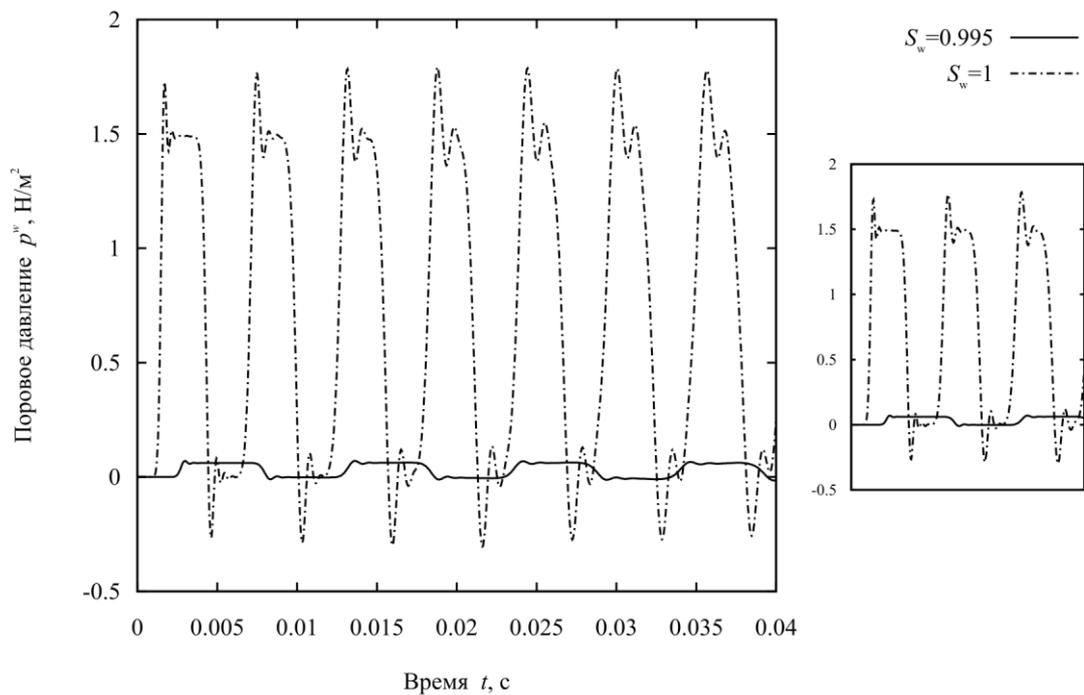


Рис. 3.26 Графики изменения перемещения p^w в точке D в зависимости от времени t при $S_w = 0.995$ и $S_w = 1$

§ 3.2 Задача о действии вертикальной силы на частично насыщенное пороупругое полупространство

Рассматривается задача о действии силы на частично насыщенное пороупругое полупространство (рис. 3.27). Нагрузка задается следующей формулой

$$t_3 = -S_0 H(t),$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, $S_0 = 1 \text{ Н/м}^2$, распределена на участке дневной плоскости полупространства в виде квадрата со стороной $a = 1 \text{ м}$. Дневная часть плоскости полупространства без нагруженного квадрата свободна от усилий, то есть на ней выполняются следующие условия

$$t_1 = t_2 = t_3 = 0,$$

где t_i ($i = \overline{1,3}$) компоненты поверхностной силы. Кроме того, полагаем, что вся дневная плоскость по отношению к жидкой и газообразной составляющим пороупругого материала полупространства проницаема, то есть всюду на дневной плоскости выполняется следующее условие

$$p^w = p^a = 0,$$

где p^w - давление смачивающего текучего наполнителя в виде жидкости, p^a - давление несмачивающего текучего наполнителя в виде газа. Параметры пороупругого материала, заполняющего полупространство приведены в табл. 1.1.

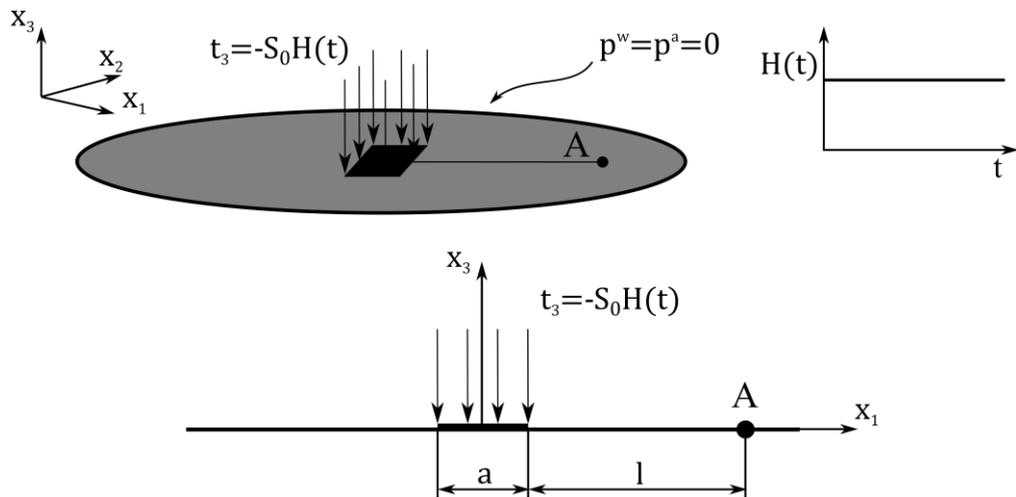
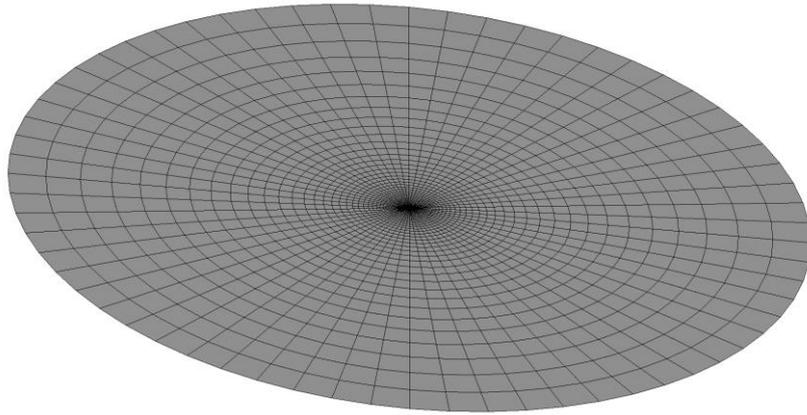
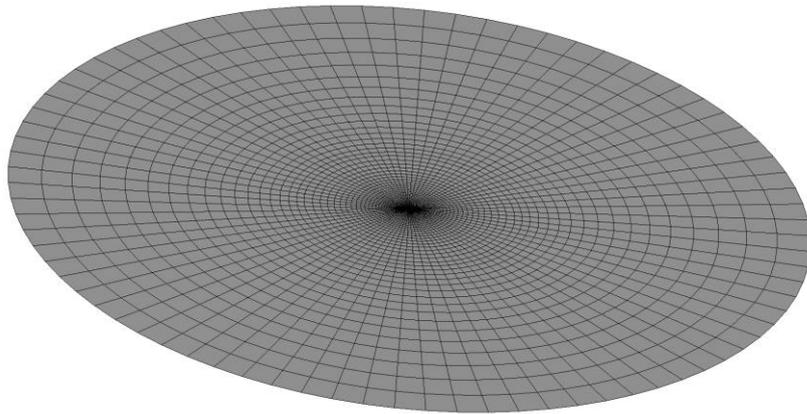


Рис. 3.27 Схема задачи о действии силы на поверхность полупространства

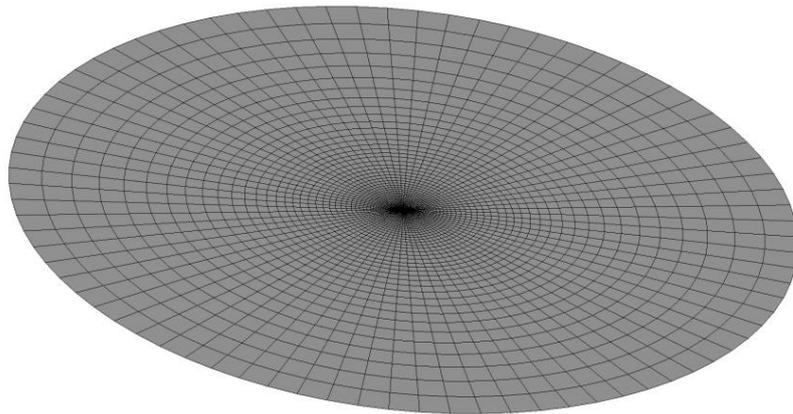
Для получения верифицированных результатов проведено исследование сеточной сходимости численного решения рассматриваемой задачи. Для этой цели выполнены расчеты на трех гранично-элементных сетках, содержащих соответственно на четверти рассматриваемой области по 643, 983 и 1299 восьмиузловых квадратных элемента. Вид сеток без учета симметрии показан на рис. 3.28. На рисунке сетки маркированы буквами А, В и С в порядке увеличения количества элементов. Расчеты в трехмерной постановке выполнены при следующих значениях параметров шагового метода: $R = 0.997$, $\Delta t = 4.0 \cdot 10^{-5}$ с, $N = 1000$, $L = 506$.



Сетка "А"



Сетка "В"



Сетка "С"

Рис. 3.28 Гранично-элементные сетки к задаче о действии силы на поверхность полупространства

На рис. 3.29 – 3.30 представлены графики перемещений u_1 и u_3 в точке А,

находящаяся на удалении от нагружаемого квадрата на $l = 10$ м. С увеличением количества граничных элементов результаты демонстрируют хорошую сходимость численного решения в перемещениях. Перемещения u_3 , полученные на каждой из трех сеток, выходят на постоянное значение с момента времени $t \approx 0.02$ с и во всех случаях это значение приблизительно равно $-1.0543 \cdot 10^{-11}$ м. На графиках для перемещения u_1 выход на постоянное значение наблюдается позже: с момента времени $t \approx 0.035$ с. Из трех сеточных решений существенный количественный недостаток решения в перемещениях получается на самой грубой сетке: сетке с маркировкой "А". Нагляднее это проявляется на временном интервале $0.009 \text{ с} \leq t \leq 0.017 \text{ с}$, в течение которого наблюдается прибытие продольной волны и волны Рэлея. Решение, построенное на сетке с маркером "А", дает заниженные оценки для времени прибытия волн и для амплитуды значений перемещений u_1 и u_3 в последующие моменты времени.

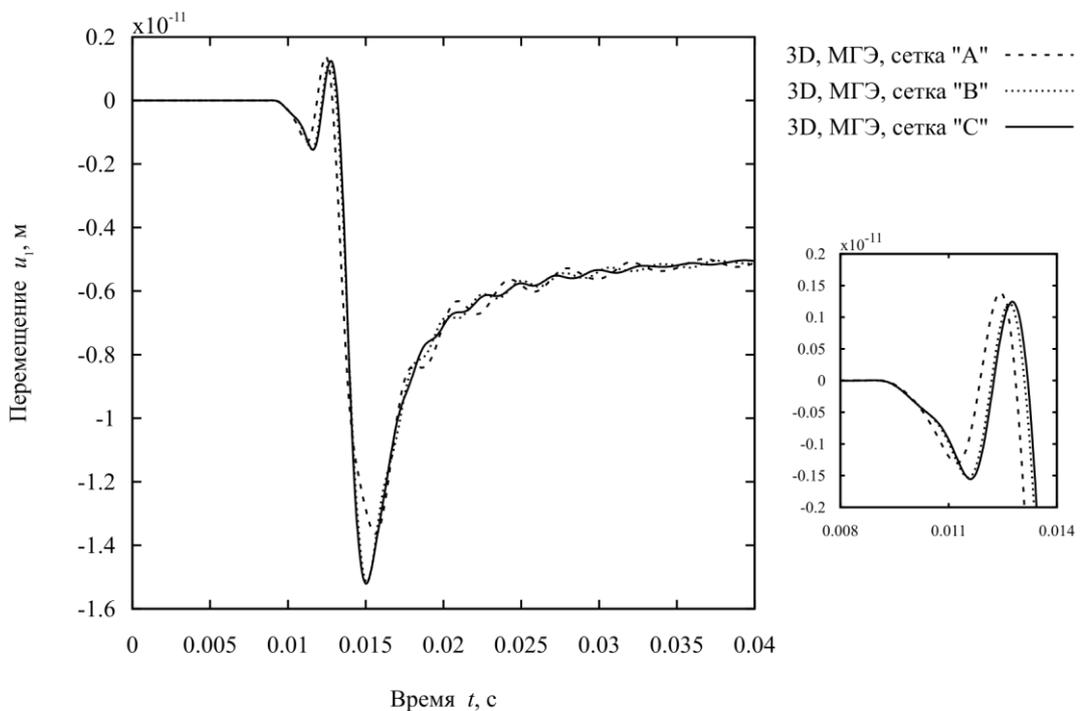


Рис. 3.29 Графики изменения перемещения u_1 в точке А в зависимости от времени t на различных сетках

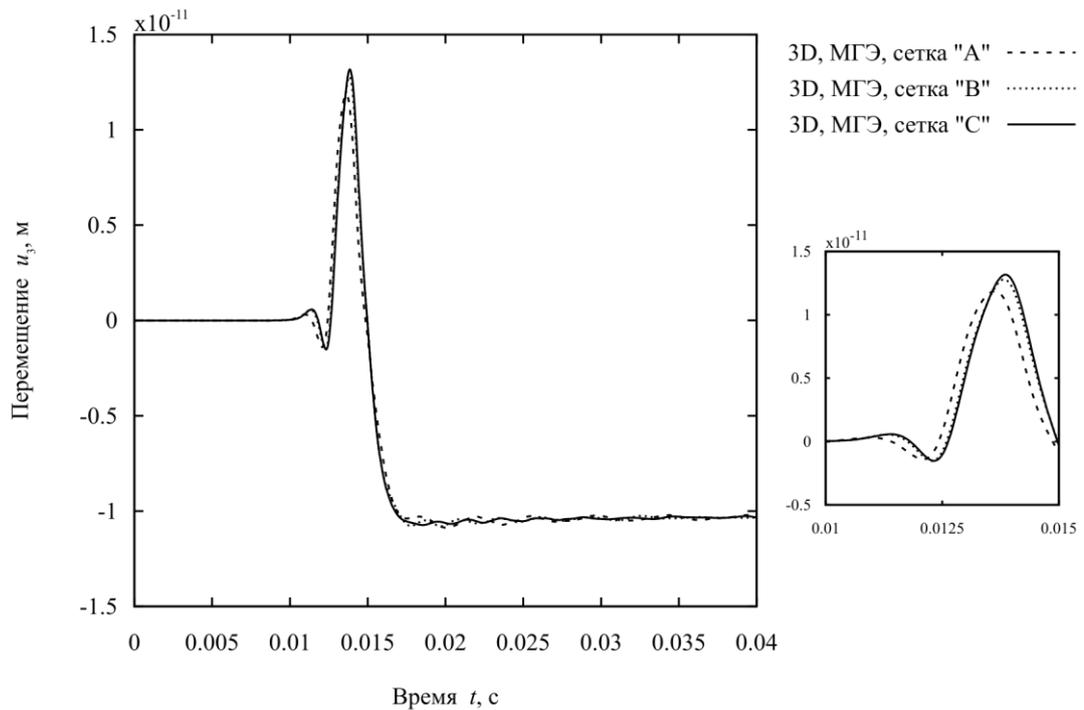


Рис. 3.30 Графики изменения перемещения u_3 в точке А в зависимости от времени t на различных сетках

На рис. 3.31 – 3.32 представлены результаты исследования влияния насыщенности S_w на значения перемещений u_1 и u_3 в точке А, расположенной на удалении от нагруженного квадрата на $l=10$ м. Видно, что с ростом насыщенности S_w с 0.9 до 1 абсолютные значения перемещений u_1 и u_3 уменьшаются. В частности, перемещение u_3 принимает наибольшее значение:

- $1.2792 \cdot 10^{-11}$ м вслед за прибытием волны Рэлея в момент времени $t \approx 0.1384 \cdot 10^{-1}$ с при $S_w = 0.9$;
- $1.2579 \cdot 10^{-11}$ м в момент времени $t \approx 0.1384 \cdot 10^{-1}$ с при $S_w = 0.95$;
- $1.13365 \cdot 10^{-11}$ м в момент времени $t \approx 0.1380 \cdot 10^{-1}$ с при $S_w = 0.99$;
- $1.000022 \cdot 10^{-11}$ м в момент времени $t \approx 0.1368 \cdot 10^{-1}$ с при $S_w = 0.995$;
- $0.5037414 \cdot 10^{-11}$ м в момент времени $t \approx 0.1324 \cdot 10^{-1}$ с при $S_w = 1$.

Таким образом, увеличение S_w с 0.9 до 0.995 приводит к снижению наибольшего значения u_3 в 1.3 раза, а увеличение с 0.995 до 1 приводит к

снижению наибольших значений u_3 почти в два раза. Однако, скорость волны Рэлея в исследовании изменилась незначительно, а рост перемещения u_3 на графиках наблюдается практически в один и тот же момент времени при различных значениях S_w . В отличие от постоянства скорости волны Рэлея, скорость продольной волны при исследованиях, с варьированием насыщенности S_w , заметно менялась. Рост перемещения u_3 , вызванный продольной волной, при $S_w=1$ на графиках наблюдается с момента времени $t \approx 0.444 \cdot 10^{-2}$ с, а при $S_w=0.9$ наблюдается с момента $t \approx 0.956 \cdot 10^{-2}$ с. Это означает, что увеличение скорости продольной волны происходит примерно в 2.15 раза. Перемещение u_3 возрастает от воздействия продольной волны до значения $0.1323521 \cdot 10^{-11}$ м в случае полного насыщения, и перемещение u_3 возрастает от воздействия продольной волны до значения $0.5481028 \cdot 10^{-12}$ м при $S_w=0.9$, что примерно в 2.4 раза меньше.

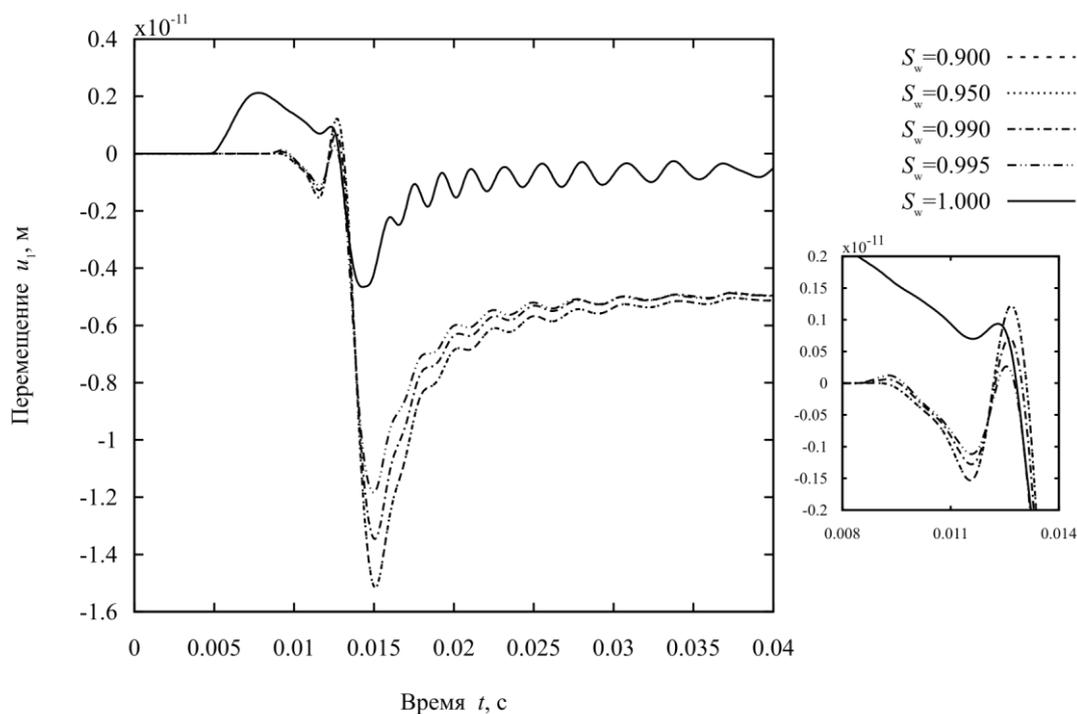


Рис. 3.31 Графики изменения перемещения u_1 в точке А в зависимости от времени t при различных значениях S_w

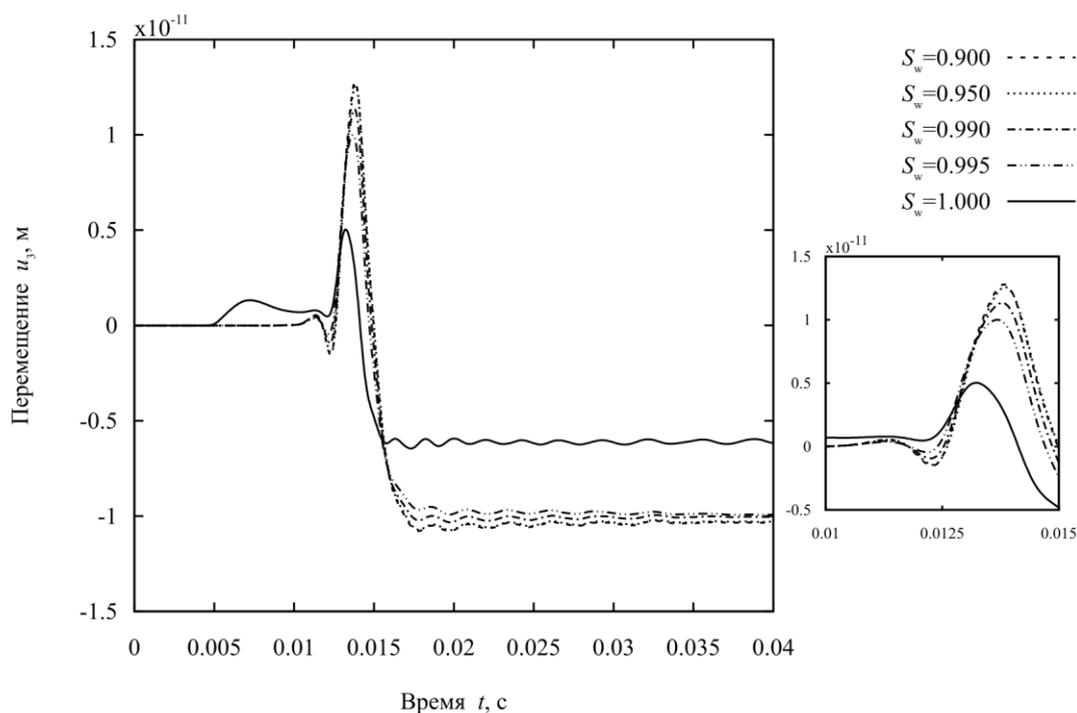
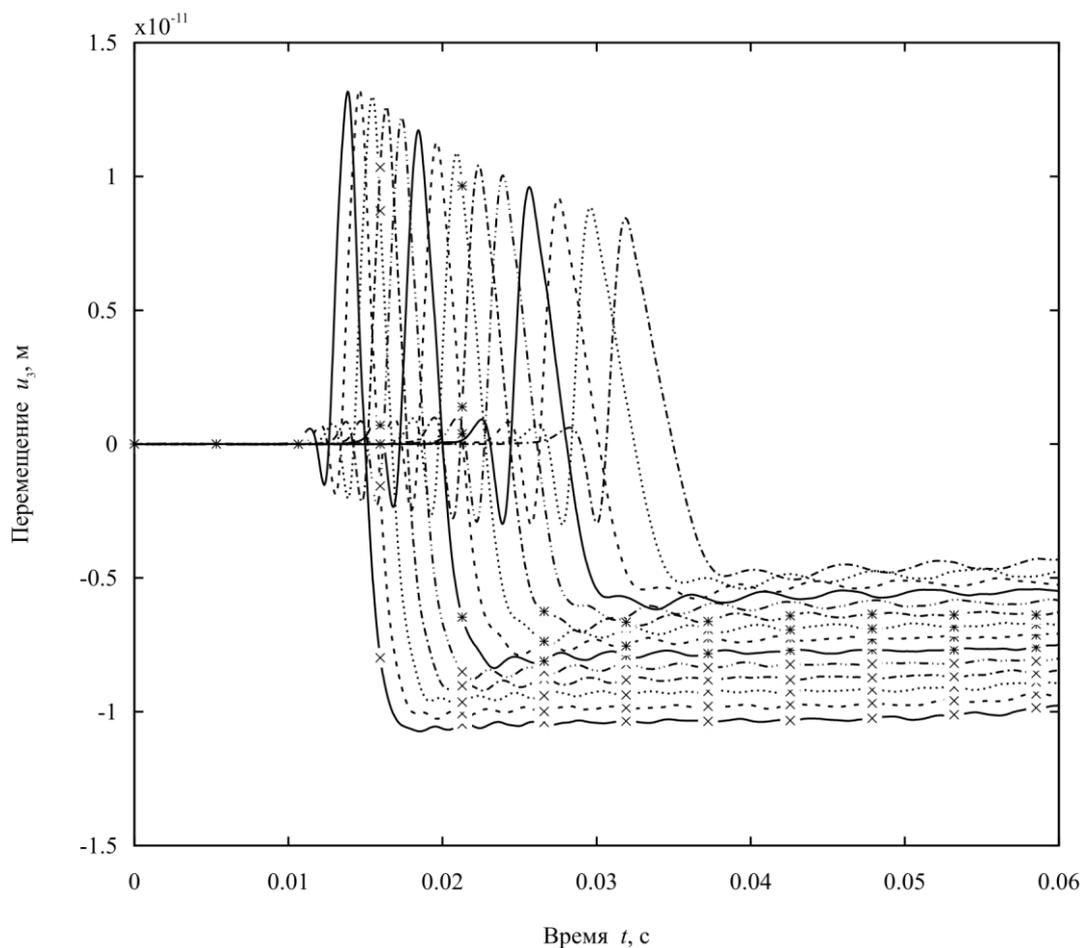


Рис. 3.32 Графики изменения перемещения u_3 в точке А в зависимости от времени t при различных значениях S_w

Для демонстрации затухания амплитуды отклика в перемещениях в зависимости от удаления от нагруженного квадрата проводился соответствующий анализ гранично-элементных результатов моделирования. Рассматриваются два случая полупространства: случай частично насыщенного полупространства (результаты на рис. 3.33) и случай полностью насыщенного полупространства (результаты на рис. 3.34). На рис. 3.33, 3.34 представлены графики перемещения u_3 в приведенных на рисунках точках, находящихся на различном удалении от площадки, на которой действует сила. На рис. 3.33 видно, что с удалением от площадки начиная от точки на расстоянии $l = 10$ м наибольшее значение перемещения u_3 убывает со значения $1.2792 \cdot 10^{-11}$ м до $0.8440243 \cdot 10^{-11}$ м с дальнейшим увеличением l до 24.14 м. Таким образом, в случае частичного насыщения наибольшее значение перемещения u_3 от воздействия волны Рэлея по мере удаления от площадки действия силы убывает примерно на 34 %. На рис. 3.34 видно, что с удалением от площадки

наибольшее значение перемещения u_3 практически монотонно убывает с $0.5736707 \cdot 10^{-11}$ м до $0.4278632 \cdot 10^{-11}$ м при увеличении l с 10 м до 24.14 м. Таким образом, в случае полного насыщения наибольшее значение перемещения u_3 от воздействия волны Рэлея постоянно убывает по мере удаления от площадки действия силы и убывание составляет примерно 25 %.



$l=10.00$ м —×—	$l=12.68$ м —×—	$l=16.59$ м —*—	$l=22.33$ м
$l=10.57$ м --×--	$l=13.52$ м —*—	$l=17.83$ м -.-.-.-	$l=24.14$ м -.-.-.-
$l=11.21$ м ...×...	$l=14.45$ м --*--	$l=19.19$ м ———	
$l=11.91$ м --×--	$l=15.47$ м ...*...	$l=20.68$ м -.-.-.-	

Рис. 3.33 Графики изменения перемещения u_3 в зависимости от времени t при значении $S_w = 0.9$ и различных значениях l

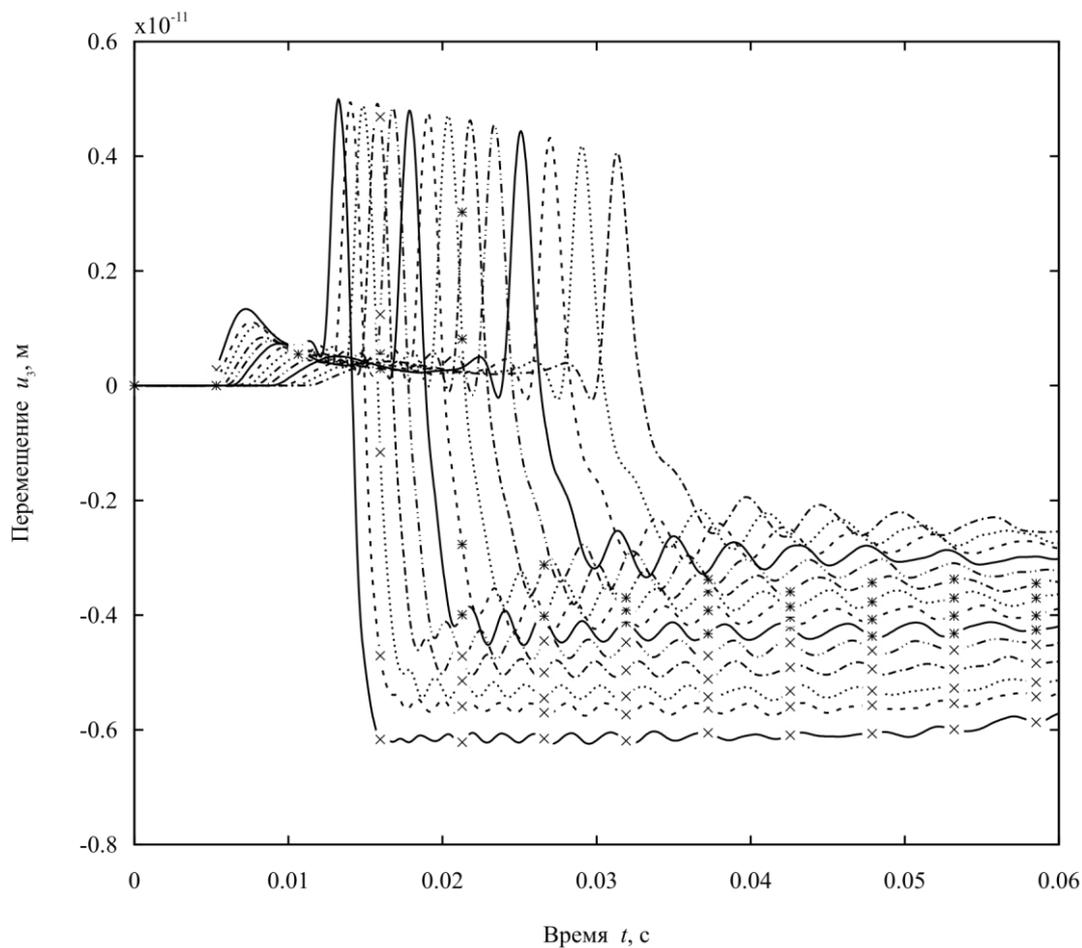


Рис. 3.34 Графики изменения перемещения u_3 в зависимости от времени t при значении $S_w = 1$ и различных значениях l

§ 3.3 Задача о действии вертикальной силы на частично насыщенное порупругое полупространство, ослабленное кубической полостью

Рассматривается задача о действии силы на частично насыщенное

пороупругое полупространство, ослабленное кубической полостью (рис. 3.35).

На участке дневной плоскости полупространства в виде квадрата со стороной $a = 1\text{ м}$ задана нагрузка следующей формулой

$$t_3 = -S_0 H(t),$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда и $S_0 = 1\text{ Н/м}^2$. Дневная плоскость полупространства без нагруженного квадрата свободна от усилий и на ней выполняется условие

$$t_1 = t_2 = t_3 = 0,$$

где $t_i (i = \overline{1,3})$ компоненты поверхностной силы. Кроме того, дневная плоскость полупространства с областью нагружения проницаема, то есть на ней

$$p^w = p^a = 0,$$

где p^w – давление смачивающего текучего наполнителя в виде жидкости, p^a – давление несмачивающего текучего наполнителя в виде газа.

Полупространство ослаблено полостью (рис. 3.35). Длина ребра полости $d = 4\text{ м}$, поверхность полости полагаем свободной от усилий и непроницаемой.

Четверть расчетной сетки содержит 983 элемента на поверхности полупространства и 620 элементов на поверхности полости (рис. 3.36).

Параметры пороупругого материала полупространства приведены в таблице 1.

Расчеты выполнены при следующих значениях параметров шагового метода:

$$R = 0.997, \Delta t = 8.0 \cdot 10^{-5}\text{ с}, N = 2000, L = 500.$$

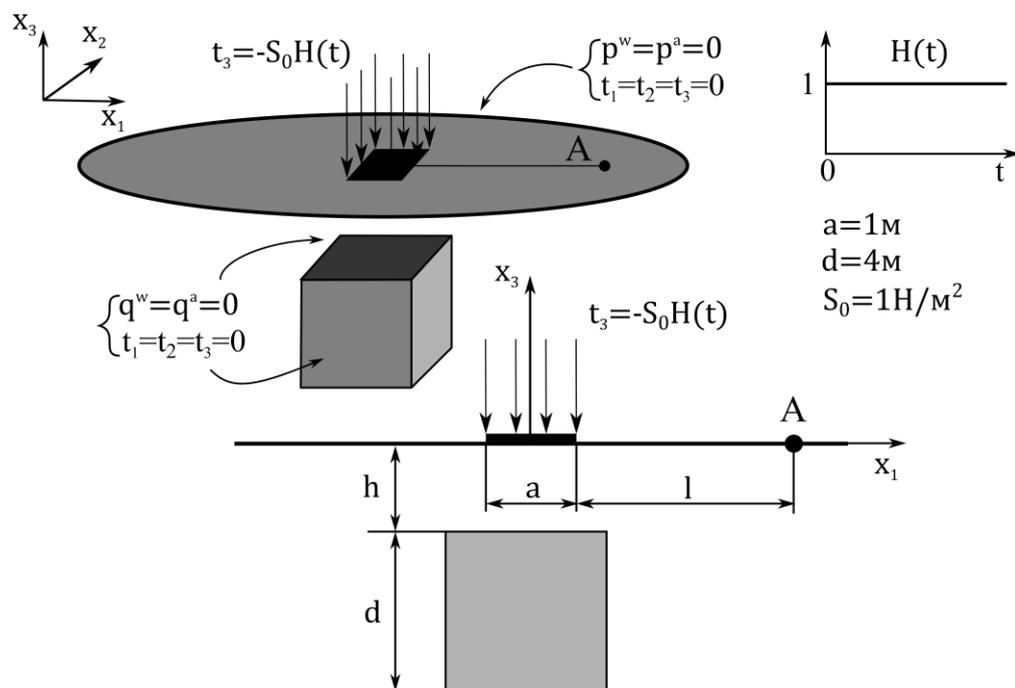


Рис. 3.35 Схема задачи о действии силы на поверхность полупространства, ослабленного полостью

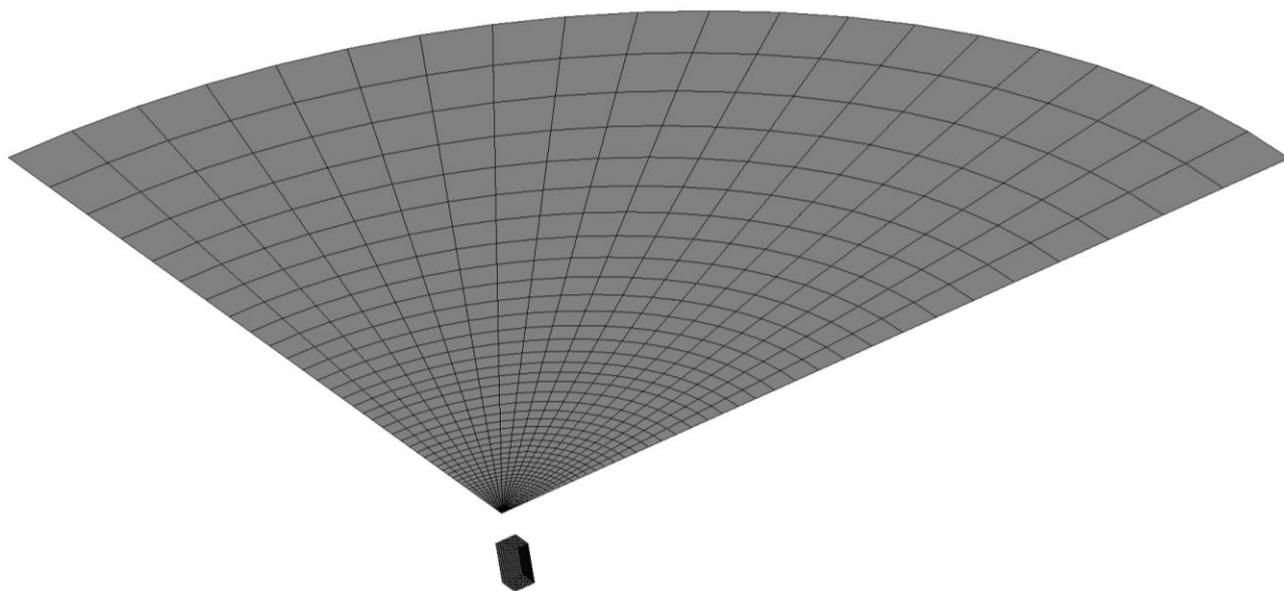


Рис. 3.36 Гранично-элементная сетка для задачи о действии силы на поверхность полупространства, ослабленного полостью

На рисунках 3.37 и 3.38 представлены графики перемещений u_1 и u_3 в

точке А, расположенной от квадрата нагружения на расстоянии $l=10$ м и глубине $h=2$ м. Рисунок 3.37 показывает, что при $S_w=1$ и при наличии ослабляющей полости максимум перемещения u_1 во временном интервале от момента прибытия продольной волны до прибытия волны Рэлея достигает большей величины, но это происходит более медленно, чем в случае отсутствия полости.

Наличие полости при $S_w=1$ приводит к увеличению амплитуды перемещения u_1 в момент прибытия волны Рэлея относительно значения амплитуды в случае отсутствия полости. В случае частичного насыщения пороупругого материала при $S_w=0.9$ наличие ослабляющей полости приводит к снижению максимума амплитуды перемещения u_1 во временном интервале от момента прибытия продольной волны до прибытия волны Рэлея и, как и в случае полного насыщения, приводит к росту амплитуды перемещения u_1 в момент прибытия волны Рэлея. Рисунок 3.38 показывает, что при $S_w=1$ наличие ослабляющей полости оказывает такой же эффект на перемещение u_3 , как и на перемещение u_1 . В случае частичного насыщения при $S_w=0.9$ наличие ослабляющей полости не приводит к изменению максимума амплитуды перемещения u_3 во временном интервале до момента прибытия волны Рэлея, но приводит к росту амплитуды перемещения u_3 в момент прибытия волны Рэлея.

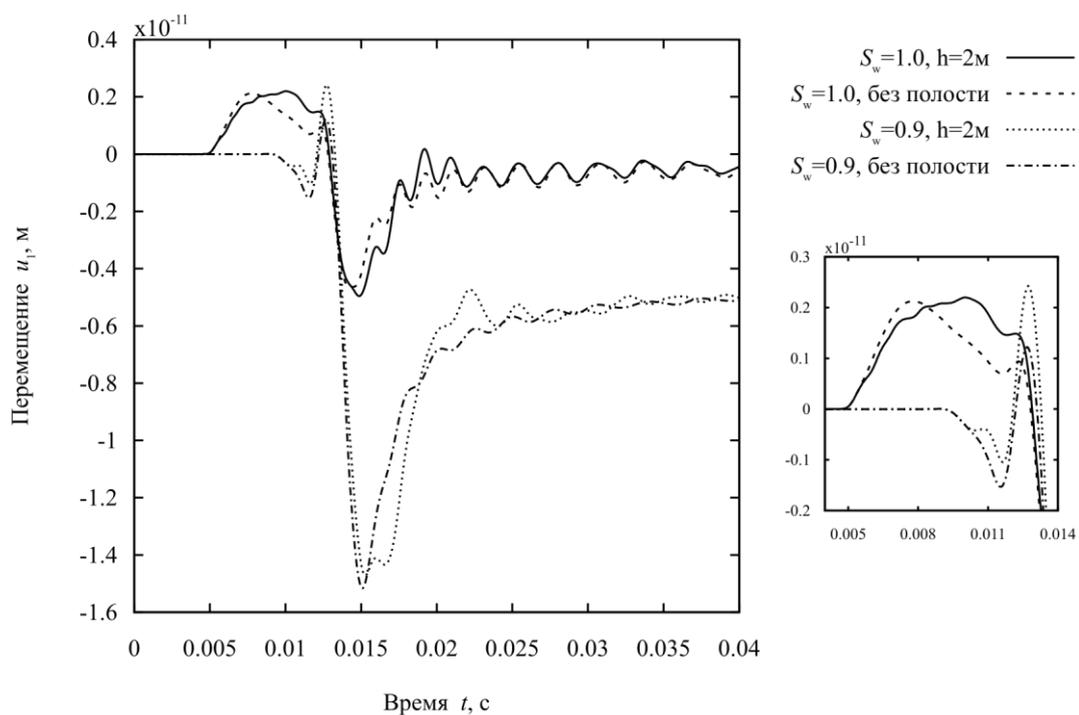


Рис. 3.37 Графики изменения перемещения u_1 в точке А в зависимости от времени t при различных значениях S_w в случаях наличия и отсутствия полости

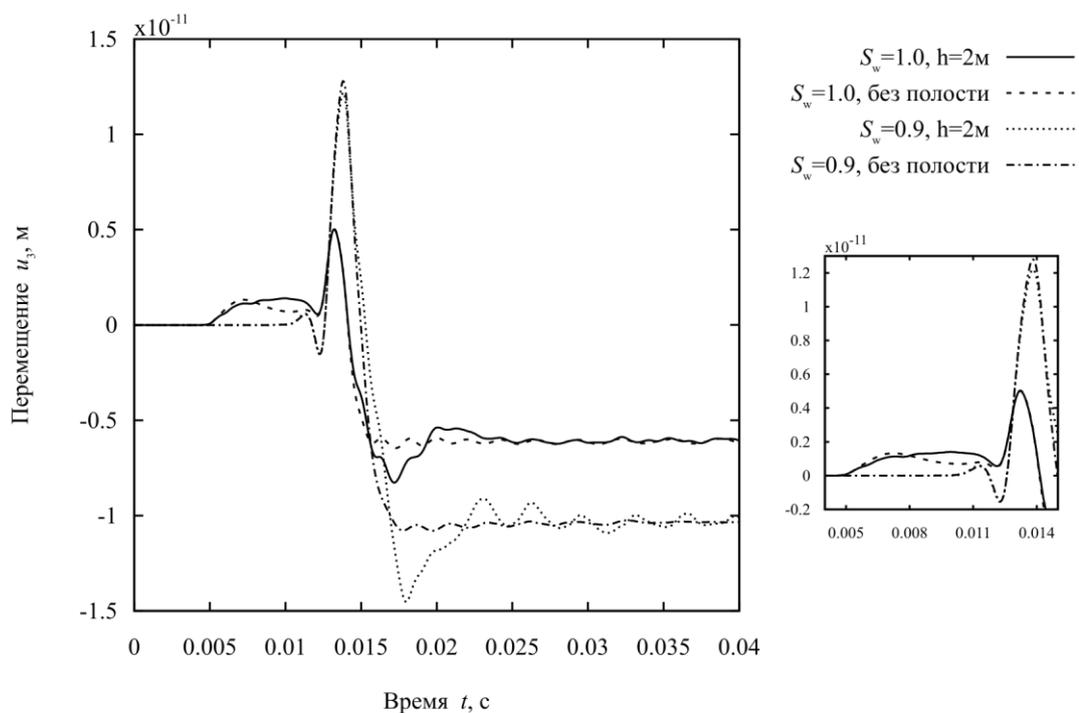


Рис. 3.38 Графики изменения перемещения u_3 в точке А в зависимости от времени t при различных значениях S_w в случаях наличия и отсутствия полости

На рис. 3.39 и 3.40 представлены графики перемещений u_1 и u_3 в точке А, расположенной от квадрата нагружения на расстоянии $l=10$ м и при различных значениях величины заглубления полости h для случая частичного насыщения $S_w=0.9$. Рисунки 3.39, 3.40 показывают, что при $h: 3$ м, 4 м, 5 м, 6 м наличие полости не оказывает влияния на максимум амплитуды перемещения u_1 , u_3 в интервале времени до момента прибытия волны Рэлея, а при $h: 4$ м, 5 м, 6 м еще и на амплитуду перемещения u_1 в момент прибытия волны Рэлея. Рисунок показывает, что при $h=5$ м и $h=6$ м графики перемещения u_1 близки в момент прибытия продольной волны. Исследования подтвердили выводы по задачам в упругом [178] и пороупругом [181] при полностью насыщенном материале: при определенном образом выбранных параметрах задачи наличие ослабляющей полости может как проявляться, так и не проявляться на поверхностных перемещениях.

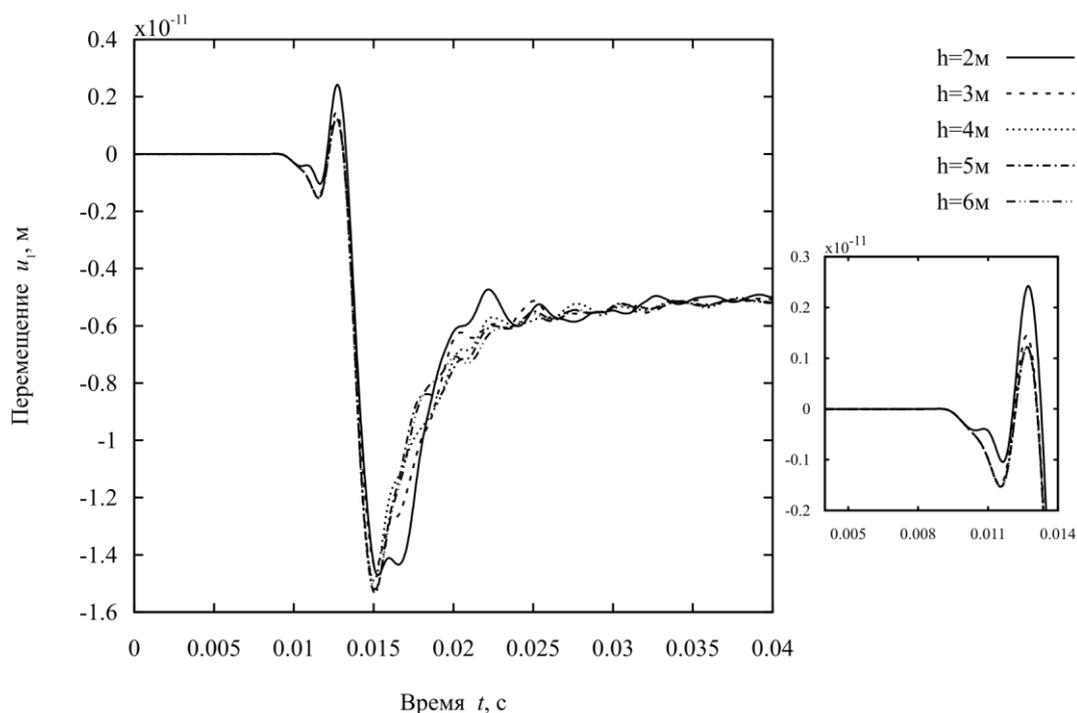


Рис. 3.39 Графики изменения перемещения u_1 в точке А в зависимости от времени t при различных значениях h

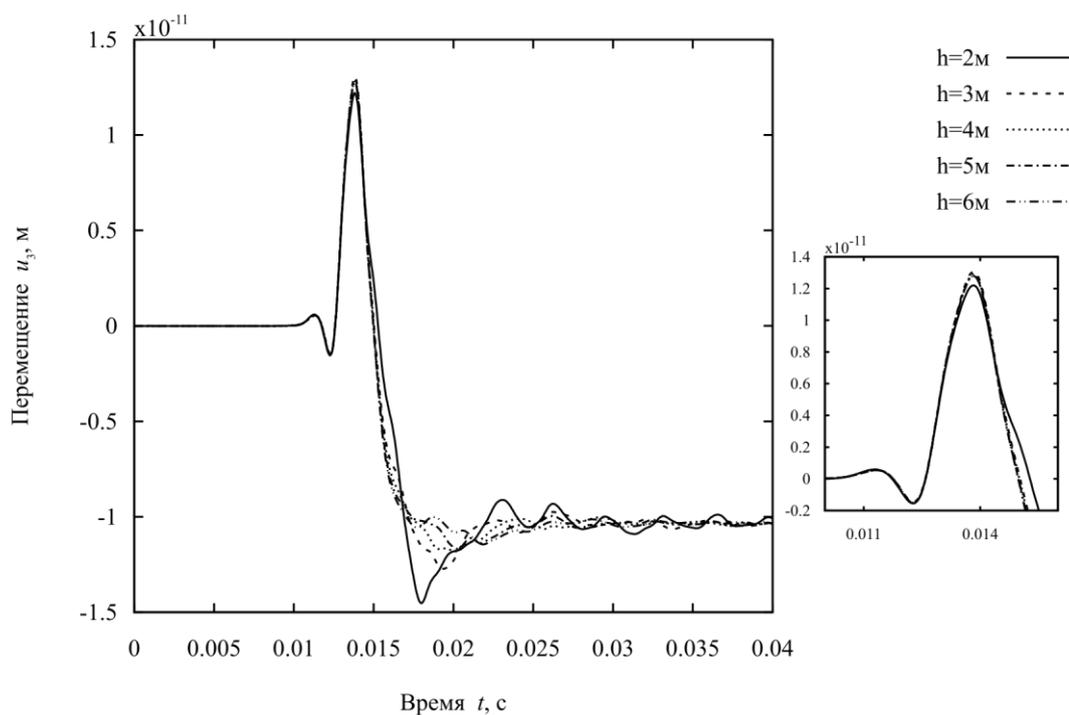


Рис. 3.40 Графики изменения перемещения u_3 в точке А в зависимости от времени t при различных значениях h

В качестве основных выводов по главе можно сформулировать следующее. Глава содержит результаты шаговых гранично-элементных исследований начально-краевых задач о действии скачка поверхностной силы на конечное и полубесконечное пороупругое тело, материал которых описывается трехфазной моделью.

В § 3.1 рассмотрена задача о действии торцевой силы на частично насыщенное пороупругое призматическое тело. Гранично-элементное решение задачи сравнивалось аналитическим решением (его численно-аналитическим вариантом) и с гранично-элементными решениями, полученными другими авторами. Наличие аналитического решения позволяет верифицировать, построенную в диссертационной работе, шаговую гранично-элементную схему и утверждать, что ее возможности превосходят возможности разработанных схем других авторов. Среди причин обладания гранично-элементной схемой улучшенными свойствами является реализация следующих подходов: согласованная поэлементная аппроксимация, введенная Р.В. Гольдштейном

[234] ; иерархический алгоритм поэлементного численного интегрирования [136]; шаговая численная схема, опирающаяся на теорему операционного исчисления об интегрировании оригинала; апостериорный сеточный анализ гранично-элементных расчетной модели.

В § 3.2 рассмотрена задача о действии вертикальной силы на частично насыщенное пороупругое полупространство. До получения искомого гранично-элементного решения проводился апостериорный анализ расчетов граничной модели. Выбор расчетной гранично-элементной модели позволяет получить верифицированные численные результаты. Отмечено влияние насыщенности на амплитуды нестационарного волнового отклика и на скорости волн отклика. Продемонстрировано поведение волнового отклика при удалении от источника нагружения изотропного однородного пороупругого полупространства.

В § 3.3 рассмотрена задача о действии вертикальной силы на частично насыщенное пороупругое полупространство, ослабленное кубической полостью. До получения искомого гранично-элементного решения проведен апостериорный анализ расчетной гранично-элементной модели. Проведен анализ влияния ослабления полупространства на волновой поверхностный отклик. Имеется анализ влияния заглубленности на динамический волновой отклик, а также фазности пороупругого материала.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты и выводы по диссертационной работе следующие:

1. Получено методическое и программное оснащение исследования в линейной постановке динамики трехмерных изотропных трехфазных пороупругих однородных тел на основе метода гранично-временных интегральных уравнений. Средства компьютерного моделирования созданы на основе прямого гранично-элементного подхода с использованием сингулярных, в смысле Коши, граничных интегральных уравнений.
2. Применен метод квадратур сверток в формулировке теоремы об интегрировании оригинала для получения численно-аналитических решений одномерных линейных задач динамики изотропных пороупругих однородных трехфазных тел. Построенная шаговая формула численного обращения преобразования Лапласа положена в основу построения шаговой гранично-элементной схемы.
3. Продемонстрированы возможности предложенного шагового гранично-элементного подхода к моделированию решений задач о действии импульсной силы на частично насыщенные пороупругие конечные и полубесконечные тела: на торец однородного пороупругого изотропного трехфазного призматического тела; на однородное пороупругое изотропное трехфазное полупространство; на однородное пороупругое трехфазное полупространство, ослабленное кубической полостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lewis, R.W. The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media / R.W. Lewis, B.A. Schrefler. – 2. – John Wiley and Sons, 1999. – 508 p. – ISBN 0-471-92809-7
2. Woltman, R. Beytrage zur Hydraulischen Architektur. Dritter Band / R.Woltman. – Gottingen: Dietrich, 1794
3. Fick, A. Ueber Diffusion / A.Fick // Annalen der Physik und Chemie. – 1855. – V. 94. – P. 59–86.
4. Stefan, J. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen / J.Stefan // Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien), mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. – 1871. – V. Abteilung IIa 63. – P. 63–124.
5. Terzaghi, K. Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen / K.von Terzaghi // Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften (Wien), mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse. – 1923. – V. Abteilung IIa 132. – P. 125–138.
6. Fillunger, P. Der Auftrieb in Talsperren / P.Fillunger // Osterreichische Wochenschrift fur den offentlichen Baudienst. – 1913. – V.19. – P. 532–556, 567–570.
7. Borja, R.I. On the mechanical energy and effective stress in saturated and unsaturated porous continua / R.I. Borja // International Journal of Solids and Structures. – 2006. - 43(6). – P. 1764–1786.
8. Coussy, O. Poromechanics / O. Coussy. – Chichester: Wiley, 2004. – 298 p. - ISBN 978-0-470-84920-0
9. Coussy, O. Revisiting the constitutive equations of unsaturated porous solids

- using a Lagrangian saturation concept / O.Coussy // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2007. - 31(15). – P. 1675–1694.
10. Gray, W.G. Analysis of the solid phase stress tensor in multiphase porous media / W.G. Gray, B.A. Schrefler // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2007. - 31(4). – P. 541–581.
 11. Wei, C. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: I. Linear poroelasticity / C. Wei, K.K. Muraleetharan // *International Journal of Engineering Science*. – 2002. - 40(16). – P. 1807–1833.
 12. Wei, C. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: II. Lagrangian description and variational structure. / C. Wei, K.K. Muraleetharan // *International Journal of Engineering Science*. – 2002. - 40(16). – P. 1835–1854.
 13. Френкель, Я.И. К теории сейсмических и сейсмoeлектрических явлений во влажной почве / Я.И. Френкель // *Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика*. – 1984. – Т.8, № 4. – С. 133-150.
 14. Biot, M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media / M.A. Biot // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1962. – V. 34, № 5, Part 1. – P. 1254-1264.
 15. Biot, M.A. Mechanics of deformational and acoustic propagation in porous media / M.A. Biot // *J. Appl. Physics*. – 1962. – V. 33, № 4. – P. 1482-1498.
 16. Biot, M.A. The elastic coefficients of the theory of consolidation / M.A. Biot, D.G. Willis // *J. Appl. Mechanics*. – 1957. – P. 594-601.
 17. Biot, M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid / M.A. Biot // *J. Appl. Physics*. – 1955. – V. 26, № 2. – P. 182-185.
 18. Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-Frequency Range / M.A. Biot // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1956. – V. 28, № 2. – P.168-178.
 19. Biot, M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous

- solid. II. Higer-Frequency Range / M.A. Biot // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1956. – V. 28, № 2. – P. 179-191.
20. Yew, C.H. The determination of Biot parameters for sandstone / C.H. Yew, P.N. Jogi // *Experimental Mechanics.* – 1978. – №.19. – P. 167-177.
21. Detournay, E. Fundamentals of poroelasticity. Chapter 5 in *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects* / E. Detournay, A.H.-D. Cheng // *Analysis and Design Method* / ed. By C.Fairhurst. // Pergamon Press. – 1993. – V.II. – P. 113-171.
22. Санчес-Паленсия, Э. Неоднородные среды и теория колебаний / Э. Санчес-Паленсия. – Москва: Мир, 1984. – 472 с.
23. Burrige, R. Poroelasticity equations derived from microstructure / R. Burrige, J. Keller // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1981. – V. 70. – P. 1140–1146.
24. Николаевский, В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред / В.Н. Николаевский. – Москва: Недра, 1984. – 233 с.
25. Berryman, J.G. Linear dynamic poroelasticity with microstructure for partially saturated solids / J.G. Berryman, L. Thigpen // *J. Appl. Mech.* – 1985. – V. 52. – P. 345–350.
26. Whitaker, S. Flow in porous media. II. The governing equations for immiscible, two-phase flow / S. Whitaker // *Transport in Porous Media.* – 1986. – V. 1. – P. 105–125.
27. Pride, S.R. Deriving the equations of motion for porous isotropic media / S.R. Pride, A.F. Gangi, F.D. Morgan // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1992. – V. 6. – P. 3278–3290.
28. Молотков, Л.А. Исследования распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред / Л.А. Молотков. – СПб.: Наука, 2001. – 347 с.
29. Николаевский, В.Н. Механика насыщенных пористых сред / В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов. – Москва: Недра, 1970. – 339 с.

30. Mavko, G. Attenuation in partially saturated rocks / G. Mavko, A. Nur // *Geophysics*. – 1979. – V. 44. – P. 161-178.
31. Mavko, G. Melt Squirt in Aesthenosphere / G. Mavko, A. Nur // *J. Geophys. Res.* – 1975. – V. 80. –P. 1444-1448.
32. O’Connel, R.J. Viscoelastic properties of fluid-saturated cracked solids / R.J. O’Connel, B. Budiansky // *J.Geophys. Res.* – 1977. – V. 82. – P. 5719-5735.
33. Jones, T. Pore fluids and frequency dependent wave propagation in rocks / T. Jones // *Geophysics*. – 1986. – V. 51. – P. 1939-1953.
34. Parra, J.O. Poroelastic model to relate seismic wave attenuation and dispersion to permeability anisotropy / J.O. Parra // *Geophysics*. – 2000. – V. 65, № 1. – P. 202-210.
35. Parra, J.O. The transversely isotropic poroelastic wave equation including the Biot and the squirt mechanisms: Theory and application / J.O. Parra // *Geophysics*. – 1997. – V. 62, № 1. – P. 309-318.
36. Sheng, D. Review of fundamental principles in modelling unsaturated soil behavior / D. Sheng // *Comput Geotech.* - 2011. - 38 (6). – P. 757-776.
37. Truesdell, C.A. Sulle basi della termodinamica delle miscele / C.A. Truesdell // *Rendiconti Lincei*. – 1968. – V.44. – P. 381–383.
38. Truesdell, C.A. Sulle basi della termomeccanica / C.A. Truesdell // *Rendiconti Lincei*. – 1957. – V.22. – P. 33–38.
39. Truesdell, C.A. The classical field theories / C.A. Truesdell, R.A. Toupin // *Handbuch der Physik* – 1960. – V. III(1). – P. 226–902.
40. Adkins, J.E. Diffusion of fluids through aelotropic highly elastic solids / J.E.Adkins // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1964. – V. 15. – P. 222–234.
41. Green, A.E. A contribution to the theory of non-linear diffusion / A.E. Green, J.E. Adkins // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1964. – V. 15. – P. 235–246.
42. Bowen, R.M. Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures / R.M.

- Bowen // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1967. – V. 24. – P. 370–403.
43. Bowen, R.M. Compressible porous media models by use of the theory of mixture/ R.M. Bowen // *International Journal of Engineering Science*. – 1982. – V. 20. – P. 697–735.
 44. Bowen, R.M. Theory of Mixtures / R.M. Bowen, A.C. Eringen // *Continuum Physic* – 1976. – V. III. – P. 1–127.
 45. Bowen, R.M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures / R.M. Bowen // *International Journal of Engineering Science*. – 1980. – V. 18. – P. 1129–1148.
 46. Ehlers, W. On thermodynamics of elasto-plastic porous media / W. Ehlers // *Archives of Mechanics*. – 1989 – V. 41. – P. 73–93.
 47. Muller, I.A. thermodynamic theory of mixtures of fluids / I.A. Muller // *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. – 1968. – V. 28. – P. 1–39.
 48. Lu, J.F. Linear dynamic model for porous media saturated by two immiscible fluids / J.F. Lu, A. Hanyga // *Int J Solids Struct*. – 2005. – 42. – P. 2689-2709.
 49. Bowen, R.M. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures / R.M. Bowen // *Int. J. Engng. Sci.* - 1982. - 20(6). - P. 697-735.
 50. Schanz, M. A comparative study of Biot's theory and the linear Theory of Porous Media for wave propagation problems / M. Schanz, S. Diebels // *Acta Mech.* - 2003. - 161(3-4). - P. 213-235.
 51. Philippacopoulos, A. Lamb's problem for fluid-saturated, porous media /A. Philippacopoulos // *Bulletin of the Seismological Society of America*. – 1988. – V. 78, № 2. – P. 908–923.
 52. Yazdi, J. T. Analytical and numerical solutions for wave propagation in water-saturated porous layered half-space / J. T. Yazdi, S. Valliappan, C. B. Zhao // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. – 1994. – V.13, № 4. – P.249–257.
 53. Jin, B. Dynamic response of a poroelastic half space to horizontal buried

- loading / B. Jin, H. Liu // *International Journal of Solids and Structures*. – 2001. – V.38, № 44-45. – P.8053–8064.
54. Philippacopoulos, A.J. Waves in Partially Saturated Medium Due to Surface Loads / A.J. Philippacopoulos // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1988. – T. 114, № 10. – P. 1740-1759.
55. Smeulders, D.M.J. Waves in partially saturated porous media / D.M.J. Smeulders, J.P.M. De La Rosette, M.E.H. Van Dongen // *Transport in Porous Media*. – 1992. – Vol. 9, № 1. – P. 25-37.
56. Shan, Z.D. Exact solutions for the one-dimensional transient response of unsaturated single-layer porous media / Z.D. Shan, D.S. Ling, H.J. Ding // *Computers and Geotechnics*. – 2013. – 48. – P. 127-133.
57. Lo, W.-C. Low-frequency dilatational wave propagation through unsaturated porous media containing two immiscible fluids / W.-C. Lo, G. Sposito, E. Majer // *Transport in Porous Media*. – 2007. – T. 68, № 1. – P. 91-105.
58. Albers, B. Analysis of the Propagation of Sound Waves in Partially Saturated Soils by Means of a Macroscopic Linear Poroelastic Model / B. Albers // *Transport in Porous Media*. – 2009. – T. 80, № 1. – P. 173-192.
59. Vgenopoulou, I. Dynamics of Saturated Rocks. IV: Column and Borehole Problems / I. Vgenopoulou, D.E. Beskos // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1992. – T. 118, № 9. – P. 1795-1813.
60. Li, P. Wave propagation in a 1-D partially saturated poroelastic column / P. Li, M. Schanz // *Geophysical Journal International*. – 2011. – T. 184, № 3. – P. 1341-1353.
61. Boer, R. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media / R. Boer, W. Ehlers, Z. Liu // *Archive of Applied Mechanics*. – 1993. – V.63, № 1. – P. 59–72.
62. Schanz, M. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column / M. Schanz, A.-D. Cheng // *Acta Mechanica*. – 2000. – V. 145, № 1-4. – P. 1–18.

63. Igumnov, L. One-Dimensional Wave Propagation in a Three Phase Poroelastic Column / L. Igumnov, A. Petrov, I. Vorobtsov // *Key Engineering Materials*. – 2016. – Vol. 685. – P. 276-279.
64. Garg, S.K. Compressional waves in fluid-saturated elastic porous media / S.K. Garg, A.H. Nayfeh, A.J. Good // *Journal of Applied Physics*. – 1974. – T. 45, № 5. – P. 1968-1974.
65. Schanz, M. Poroelastodynamics: Linear Models, Analytical Solutions, and Numerical Methods / M. Schanz // *Applied Mechanics Reviews*. – 2009. – T. 62. – № 030803.
66. Tan, T.-S. Numerical Study of Finite Element Method Based Solutions for Propagation of Wetting Fronts in Unsaturated Soil / T.-S. Tan, K.-K. Phoon, P.-C. Chong // *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. – 2004. – 130(3). – P. 254-263.
67. Sheng, D. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part I: Theory / D. Sheng, S.W. Sloan, A. Gens, D.W. Smith // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2003. – 27(9). – P. 745-765.
68. Callari, C. Finite element methods for unsaturated porous solids and their application to dam engineering problems / C. Callari, A. Abati // *Computers & Structures*. – 2009. – 87(7). – P. 485-501.
69. Thomas, S.D. A finite element model for the analysis of wave induced stresses, displacements and pore pressures in an unsaturated seabed I: theory / S.D. Thomas // *Computers and Geotechnics*. – 1989. – Vol. 8, № 1. – P. 1-38.
70. Dreyer, D. Effectiveness and robustness of improved infinite elements for exterior acoustics / D. Dreyer, D. S. Petersen, O. von Estorff // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2006. – 195(29). – P. 3591-3607.
71. Liu, G.R. A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method / G.R. Liu, S.S. Quek Jerry // *Finite Elem Anal Des*. –

2003. – 39(5). – P. 403-417.
72. Сорокин, К.Э. Численное решение линейной двумерной динамической задачи для пористых сред / К.Э.Сорокин, Х.Х.Имомназаров // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. – 2010. – № 3(2). – С. 256-261.
73. Игумнов, Л.А. Моделирование динамики частично насыщенных пороупругих тел на основе метода гранично-временных элементов / Л.А.Игумнов, А.Н.Петров // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2016. – № 3. – С. 47–61.
74. Имомназаров, Х.Х. Сосредоточенная сила в однородной изотропной пористой среде / Х.Х. Имомназаров, С.Т. Туйчиева // *Интерэкспо Гео-Сибирь*. – 2015. – Т. 4, № 1. – С. 201-204.
75. Abbas, I.A. A two dimensional wave propagation in a poroelastic infinite circular cylinder / I.A. Abbas, A.N. Abd-alla // *Journal of Physics*. – 2012. – V. 1, № 3. – P.32-38.
76. Донцов, В.Е. Распространение ударных волн в пористой среде, насыщенной жидкостью с пузырьками растворимого газа / В.Е. Донцов, В.Е. Накоряков // *Прикладная механика и техническая физика*. – 2000. – Т. 41, № 5. – С. 91-102.
77. Meissner, H. Dynamic behaviour of partially saturated sand / H. Meissner, A. Becker // *WIT Transactions on the Built Environment*. – Т. 15. – С. 45-55.
78. Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media / G. Degrande, G. Roeck, P. V. Broeck, D. Smeulders // *International Journal of Solids and Structures*. – 1998. – Vol. 35, № 34. – P. 4753-4778.
79. Yang, J. Influence of water saturation on horizontal and vertical motion at a porous soil interface induced by incident P wave / J. Yang // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. – 2000. – Vol. 19, № 8. – P. 575-581.
80. Velea, D. Elastic wave velocities in partially saturated Ottawa sand: Experimental results and modeling / D. Velea, F. Shields, J. Sabatier // *Soil*

- Science Society of America Journal. – 2000. – Т. 64. – P. 1226-1234.
81. Schrefler, B.A. A fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in deformable porous media : Advances in Computational Methods for Fluid-Structure Interaction / B.A. Schrefler, R. Scotta // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2001. – Vol. 190, № 24. – P. 3223-3246.
 82. Jian-Xin, N. Wave Dispersion and Attenuation in Partially Saturated Sandstones / N. Jian-Xin, Y. Ding-Hui, Y. Hui-Zhu // Chinese Physics Letters. – 2004. – Vol. 21, № 3. – P. 572-575.
 83. Carcione, J.M. Wave propagation in partially saturated porous media: simulation of a second slow wave / J.M. Carcione, F. Cavallini, J.E. Santos [et al.] // Wave Motion. – 2004. – Vol. 39, № 3. – P. 227-240.
 84. Wang, Z. Numerical Investigation of Effects of Water Saturation on Blast Wave Propagation in Soil Mass / Z. Wang, Y. Lu, H. Hao // Journal of Engineering Mechanics. – 2004. – V. 130, № 5. – P. 551-561.
 85. Вернигора, Г.Д. Определение эффективных свойств композиционных материалов на основе конечно-элементного моделирования в ACELAN / Г.Д. Вернигора, В.А. Еремеев, А.Н. Соловьев // Вестник РГУПС. - 2011. - №1. - С. 9-11.
 86. Усошина, Е. А. Математические модели динамических систем, включающих слоистые обводненные пористоупругие основания / Е. А. Усошина, Т. В. Суворова, А. Н. Соловьев // Вестник Донского государственного технического университета. – 2016. – Т. 16. – № 3(86). – С. 10-16.
 87. Соловьев, А. Н. Конечно элементное моделирование индентирования пороупругого водонасыщенного материала / А. Н. Соловьев, И. А. Панфилов // Крымская осенняя математическая школа-симпозиум (КРОМШ-2020): Сборник материалов международной конференции, посвященной памяти Николая Дмитриевича Копачевского. – 2020. – С.

- 260-263.
88. Данг, К. З. Действие на границу упруго-пористого полупространства с касательной диафрагмой нестационарной нормальной осесимметричной нагрузки / К. З. Данг, Д. В. Тарлаковский // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 148-158.
89. Игумнов, Л.А. Численное моделирование динамики составного пороупругого тела / Л. А. Игумнов, С. Ю. Литвинчук, Д. В. Тарлаковский, Н. А. Локтева // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2013. – Т. 75, № 2. – С. 130-136.
90. Игумнов, Л.А. Гранично-элементный анализ волн на упругом, пористой вязкоупругом полупространствах / Л. А. Игумнов, А. С. Оконечников, Д. В. Тарлаковский, А. А. Белов // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2013. – Т. 75, № 2. – С. 145-151.
91. Ватульян, А. О. Исследование волновых процессов в неоднородном пористоупругом слое / А. О. Ватульян, Д. В. Гусаков // *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. – 2017. – № 2(194). – С. 4-11.
92. Ватульян, А. О. Об особенностях идентификации неоднородных пороупругих характеристик полого цилиндра / А. О. Ватульян, С. А. Нестеров // *Проблемы прочности и пластичности*. – 2016. – Т. 78, № 1. – С. 22-29.
93. Якубов, С.Х. Исследование импульсных возмущений в насыщенных пористых средах / С.Х Якубов // *Сиб. физ.-техн. ж.* – 1992. - № 5. - С. 151-154.
94. Якубов, С.Х. Исследование импульсных возмущений в насыщенных пористых средах // *Актуал. вопр. теплофиз. и физ. гидрогазодинам.: 4 Всес. конф. мол. исследователей: Тез. докл.* - 1991. - С. 82-83.
95. Галиев, Ш.У. Динамика взаимодействие элементов конструкций с волной давления в жидкости / Ш.У. Галиев ; Киев: Наук, думка, 1977. - 172 с.

96. Салиев, А.А. Взаимодействие нестационарных волн со сферическими границами раздела в упруго-пористой среде, насыщенной жидкостью : автореферат дис. ... кандидата физико-математических наук : 01.02.04 / Салиев Абдумажит Абдикадирович; АН УзССР. Ин-т механики и сейсмостойкости сооружений им. М. Т. Уразбаева. - Ташкент, 1989. - 126 с.
97. Салиев, А.А. Движение абсолютно твердого шара в упруго-пористой среде под действием нестационарных волн / А.А. Салиев // Тезисы докладов Всесоюзной конференции «Механика неоднородных структур». – 1987. – Т. I. – С. 245.
98. Трофимчук, А.Н. Асимптотические решения нестационарных контактных задач для насыщенных жидкостью пористоупругих сред / А.Н. Трофимчук // Смеш. задачи мех. деформируем. тела: 4 Всес. конф., 26-29 сент., 1989: Тез. докл. – 1989. - Ч. 2. - С. 111.
99. Трофимчук, А.Н. Численное моделирование динамического поведения пористоупругой насыщенной жидкостью среды / А.Н. Трофимчук // Доп. Нац. АН Укршн. – 1998. - № 11. - С. 44-48.
100. Келбалиев, Г.И. Математическое описание нестационарных процессов, протекающих в изотропных пористых средах, квазиконтинуальными моделями / Г.И. Келбалиев // Теор. основы хим. технол. – 1985. - Т. 19, № 2. -С. 199-206.
101. Масликова, Т.И. Нестационарные упругие волны в пористых материалах / Т.И. Масликова, В.С. Поленов // Изв. Инж.-технол. акад. Чуваш, респ. – 1999. - С. 125130.
102. Масликова, Т.И. О нестационарных упругих волнах в пористых материалах / Т.И. Масликова, В.С. Поленов // Изв. РАН. Мех. тверд, тела. – 2001. - № 6. - С. 103-107.
103. Масликова, Т.И. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах / Т.И. Масликова, В.С. Поленов // Изв.

- РАН. Мех. тверд, тела. – 2005. - № 1. - С. 104-108.
104. Belyankova, T. I., Kalinchuk V. V. The features of the massive foundation dynamics on the surface of the fluid-saturated porous medium / T. I. Belyankova, V. V. Kalinchuk // Waves Saturated Porous Media, Poznan, Aug. 28-31, 1990: Summ. Poznan. - 1990. - P. 17.
105. Carter, J.P Analysis of pumping a compressible pore fluid from a saturated elastic half space / J.P. Carter, J.R. Booker // Comput. and Geotechn. – 1987. - V. 4, № 1. -P. 21-42.
106. Rudnicki, J.W. Linear poroelasticity / J.W. Rudnicki // Lemaitre Handbook of Materials Behavior Models. – 2001. – P. 1118-1125. – (Section 11.6).
107. Geertsma, J. Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solids / J.Geertsma, D. C.Smit // Geophysics. – 1961. – V. XXVI, № 2. – P. 169-181.
108. Sharma, M.D. Wave propagation in a general anisotropic poroelastic medium: Biot's theories and homogenization theory / M.D. Sharma // J. Earth. Syst. Sci. – 2007. – V. 116, № 4. – P. 357-367.
109. Богачев, И.В. Воздействие сосредоточенного усилия на анизотропную пороупругую плоскость / И.В. Богачев, В.В. Дударев, А.А. Ляпин // Инженерный весник Дона. – 2013. – Т. 26, № 3. – С. 1-5.
110. Ковтун, Ал.А. Об уравнениях модели Био и их модификациях / Ал.А. Ковтун // Вопросы геофизики. СПб. – 2011. – Вып. 44. – С. 3-26. – (Ученые записки СПбГУ; №444).
111. Ковтун, Ал.А. Поверхностные волны на границе упруго-пористой среды и жидкости / Ал.А. Ковтун // Вопросы геофизики. СПб. – 2013. – Вып. 46. – С. 14-25. – (Ученые записки СПбГУ; №446).
112. Auriault, J. Dynamic of porous saturated media, checking of generalized law Darcy / J. Auriault, L. Borne, R. Chambon // J. Acoust. Soc. Amer. – 1985. – V. 77. – P. 1641-1650.
113. Абдуллаев, С.А. Распространение упругих волн, вызванных движущейся

- нагрузкой, в изотропном пористом полупространстве, насыщенном жидкостью / С.А. Абдуллаев, А.С. Соатов // Известия Академии наук УзССР. Сер.: Технические науки. – 1986. – №6. – С. 64-67.
114. Артиков, Т.У. Волны в слоистых пористых средах / Т.У. Артиков. – Ташкент: Фан., 1987. – 268 с.
115. Гарипов, Т.Т. Математическое моделирование процессов фильтрации и пороупругости / Т.Т. Гарипов, М.Ю. Заславский, А.Х. Пергамент // Математическое моделирование. – 2005. – Т. 17, №9. – С. 113-128.
116. Acharya, D.P. Reflection of longitudinal displacement plane waves from the flat boundary of a solid half-space containing a distribution of void pores / D.P. Acharya, A. Mondal // Int. J. Appl. Mech. and Eng. – 2008. – V.13, № 3. – P. 609-625.
117. Armero, F. A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems / F. Armero, J.C. Simo // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1992. – V. 35, № 4. – P. 737-766.
118. Birendra, J. A locally conservative finite element framework for the simulation of coupled flow and reservoir geomechanics / J. Birendra, J. Ruben // ActaGeotechnica. – 2007. – V. 2, №. 3. – P. 139-153.
119. Gaspar, F. J. A systematic comparison of coupled and distributive smoothing in multigrid for the poroelasticity system / F.J. Gaspar, F.J. Lisbona, C.W. Oosterlee, R. Wienands // Numerical Linear Algebra with Applications. – 2004. – V. 11, №. 23. – P. 93-113.
120. Gaspar, F. J. On a decoupled algorithm for poroelasticity / F.J. Gaspar, F.J. Lisbona, C.W. Oosterlee // Zaragoza-Pau on. – 2006. – V. 424. – P. 419-424.
121. Gaspar, F.J. Explicit-implicit splitting schemes for some systems of evolutionary equations / F.J. Gaspar, A. Grigoriev, P. Vabishchevich // International Journal of Numerical Analysis and Modeling. – 2014. – V. 11, №. 2. – P. 346–357.

122. Gaspar, F.J. A finite difference analysis of Biot's consolidation model / F.J. Gaspar, F.J. Lisbona, P.N. Vabishchevich // *Applied numerical mathematics*. – 2003. – V. 44, №. 4. – P. 487–506.
123. Gaspar, F.J. An efficient multigrid solver for a reformulated version of the poroelasticity system / F.J. Gaspar, F.J. Lisbona // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2007. – V. 196, №. 8. – P. 1447–1457.
124. Gaspar, F.J. Staggered grid discretizations for the quasi-static Biot's consolidation problem / F.J. Gaspar, F.J. Lisbona, P.N. Vabishchevich // *Applied Numerical Mathematics*. – 2006. – V. 56, №. 6. – P. 888–898.
125. Kim, J. Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics / J. Kim, H. Tchelepi, R. Juanes // *SPE Journal*. – 2011. – V. 12. – P. 2-4.
126. Mikelic, A. Convergence of iterative coupling for coupled flow and geomechanics / A. Mikelic, M.F. Wheeler // *Computational Geosciences*. – 2012. – V. 17, №. 3. – P. 455-461.
127. Osorio, J.G. A two-domain, 3D, fully coupled fluid-flow geomechanical simulation model for reservoirs with stress-sensitive mechanical and fluid-flow properties / J.G. Osorio, H.-Y. Chen, L. Teufel, S. Schaffer // *SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering*. – 1998. – P.N. SPE-47397-MS.
128. Osorio, J.G. Numerical simulation of the impact of flow-induced geomechanical response on the productivity of stress-sensitive reservoirs / J.G. Osorio, H.-Y. Chen, L. Teufel // *SPE Reservoir Simulation Symposium*. – 1999. – P.N. SPE-51929-MS.
129. Osorio, J.G. Numerical Simulation of Coupled Fluid-Flow Geomechanical Behavior of Tight Gas Reservoirs with Stress Sensitive Permeability / J.G. Osorio, H.-Y. Chen // *SPe Fifth Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference and Exhibition*. – 1997. – P.N. SPE-39055-MS.
130. Wang, J.-H. Complex variable function method for the scattering of plane waves by an arbitrary hole in a porous medium / J.-H. Wang, J.-F. Lu, X.-L.

- Zhou // *European Journal of Mechanics*. – 2009. – V. 28, № 3. – P. 582-590.
131. Колесов, А.Е. Численное моделирование проблем пороупругости: автореферат дис. ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 / Колесов Александр Егорович. – Якутск, 2015. – 124 с.
 132. Костерин, А. В. Численное исследование фильтрационной консолидации / А.В. Костерин, М.Ф. Павлова, Е.В. Шемуранова // *Математическое моделирование*. – 2001. – Т. 13, № 9. – С. 63–70.
 133. Мусаев, В.К. Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта-функции от свободной поверхности / В.К. Мусаев // *Вестн. РУДН Сер. Пробл. Комплекс. Безоп.* – 2008. – № 1. – С.43-51.
 134. Павлова, М.Ф. Исследование неявной разностной схемы для задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации / М.Ф. Павлова, Е.В. Рунг // *Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*. – 2012. – Т. 154, № 4. – С. 33–48.
 135. Sun, Y. Indirect Boundary Integral Equation Method for the Cauchy Problem of the Laplace Equation / Y. Sun // *J Sci Comput*. – 2017. – 71(2). – P. 469-498.
 136. Баженов, В. Г. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями / В.Г. Баженов, Л.А. Игумнов - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 352 с. - ISBN 978-5-9221-0953-6.
 137. Matthias Messner: Fast Boundary Element Methods in Acoustics / Editor G. Brenn [et al.] // *Monographic Series TU Graz: Computation in Engineering and Science*. – 2012. – V.13, E.1.
 138. Gaul, L. A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains / L. Gaul, M. Schanz // *Comput Meth Appl Mech Eng*. – 1999. - 179(1). – P. 111-123.

139. Gatmiri, B. Time-domain Green's functions for unsaturated soils. Part I: Two-dimensional solution / B. Gatmiri, E. Jabbari // *International Journal of Solids and Structures*. – 2005. – Vol. 42, № 23. – P. 5971-5990.
140. Gatmiri, B. Time-domain Green's functions for unsaturated soils. Part II: Three-dimensional solution / B. Gatmiri, E. Jabbari // *International Journal of Solids and Structures*. – 2005. – Vol. 42, № 23. – P. 5991-6002.
141. Jabbari, E. Thermo-Poro-Elastostatic Green's Functions for Unsaturated Soils / E. Jabbari, B. Gatmiri // *Computer Modeling in Engineering & Sciences*. – 2007. – V. 18, № 1. – P. 31-44. – URL: <https://www.techscience.com/CMES/v18n1/24987> (дата обращения: 02.09.2021).
142. Gatmiri, B. Two-dimensional transient thermo-hydro-mechanical fundamental solutions of multiphase porous media in frequency and time domains / B. Gatmiri, P. Maghoul, D. Duhamel // *International Journal of Solids and Structures*. – 2010. – Vol. 47, № 5. – P. 595-610.
143. Three-dimensional transient thermo-hydro-mechanical fundamental solutions of unsaturated soils / P. Maghoul [et al.] // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. – 2009. – V. 34. – P. 297-329.
144. Lo, W.-C. Propagation and attenuation of Rayleigh waves in a semi-infinite unsaturated poroelastic medium / W.-C. Lo // *Advances in Water Resources*. – 2008. – V. 31, №10. – P. 1399–1410.
145. Xu, M. Investigation on dynamic response of unsaturated soils and foundation / M. Xu // Ph.D. thesis, South China University Technology, Guangzhou, China, 2010, in Chinese.
146. Zhang, M. Solution of dynamic Green's function for unsaturated soil under internal excitation / M. Zhang, X. Wang, G. Yang, L. Xie // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. – 2014. – V.64. – P. 63–84.
147. Burridge, R. The fundamental solution in dynamic poroelasticity / R. Burridge, C. A. Vargas // *Geophysical Journal International*. – 1979. – V.

- 58(1). – P. 61–90.
148. Norris, A. N. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid / A. N. Norris // *Journal of the Acoustical Society of America*. – 1985. – V. 77(6).
149. Manolis, G. D. Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity. / G. D. Manolis, D. E. Beskos // *Acta Mechanica*. – 1989. – V. 76. – P. 89–104.
150. Cheng, A. Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution / A. Cheng, T. Badmus, D. Beskos // *Journal of Engineering Mechanics ASCE*. – 1991. – V. 117(6). – P. 1136–1157.
151. Schanz, M. A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation / M. Schanz, H. Antes // *Computational Mechanics*. – 1997. – 20(5). – P. 452–459.
152. Schanz, M. A boundary element formulation in timedomain for viscoelastic solids / M. Schanz // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. – 1999. – V. 15. – P.799–809.
153. Schanz, M. Application of 3 D time-domain boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solids. / M. Schanz // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2001. – V.25. – P. 363–376.
154. Schanz, M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua: A boundary element approach (Vol. 2) / M. Schanz // *Lecture Notes in Applied Mechanics*. - Berlin: Springer, 2001
155. Schanz, M. A comparative study of Biots theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems / M. Schanz, S. Diebels // *Acta Mechanica*. – 2003. – V.161. – P.213–235.
156. Schanz, M. Dynamic fundamental solutions for compressible and incompressible modeled poroelastic continua. / M. Schanz, D. Pryl // *International Journal of Solids and Structures*. – 2004. – V.41. – P. 4047–4073.
157. Schanz, M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions and

- numerical methods / M. Schanz // *Applied Mechanics Reviews*. – 2009. – V. 62(3). – P.1–15.
158. Cheng, A. H. -D. Poroelasticity / A. H. -D. Cheng // *Theory and Applications of Transport in Porous Media*. – 2016. – V. 27.
159. Dominguez, J. An integral formulation for dynamic poroelasticity / J. Dominguez // *Journal of Applied Mechanics ASME*. – 1991. – V.58. – P.588–591.
160. Dominguez, J. Boundary element approach for dynamic poroelasticity problems / J. Dominguez // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1992. – V. 35. – P. 307–324.
161. Gatmiri, B. On the fundamental solution of dynamic poroelastic boundary integral equations in time domain / B. Gatmiri, M. Kamalian // *International Journal of Geomechanics*. – 2002. – V. 2(4). – P.381–398.
162. Gatmiri, B. Time 2D fundamental solution for saturated porous media with incompressible fluid / B. Gatmiri, K.V. Nguyen // *Communications in Numerical Methods in Engineering*. – 2005. – V. 21(3). – P.119–132.
163. Seyrafian, S. Green functions for a continuously nonhomogenous saturated media / S. Seyrafian, B. Gatmiri, A. Nourzad // *Computational Methods in Engineering Science*. – 2006. – V.15(2). – P.115–125.
164. Gatmiri, B. Scattering of harmonic waves by a circular cavity in a porous medium: complex functions theory approach / B. Gatmiri, H. Eslami // *International Journal of Geomechanics*. – 2007. – V. 7(5). – P.371–381.
165. Pan, E. A symmetric boundary integral approach to transient poroelastic analysis / E. Pan, G. Maier // *Computational Mechanics*. – 1997. – V. 19. – P.169–178.
166. Maghoul, P. Boundary integral formulation and two-dimensional fundamental solutions for dynamic behavior analysis of unsaturated soils / P. Maghoul, B. Gatmiri, D. Duhamel // *Soil Dyn Earthquake Eng*. – 2011. – V. 31(11). – P.1480-1495.

167. Li, P. Time domain boundary element formulation for partially saturated poroelasticity / P. Li, M. Schanz // *Eng Anal Boundary Elem.* - 2013. – V. 37(11). – P.1483-1498.
168. Maghoul, P. Boundary integral formulation and two-dimensional fundamental solutions for dynamic behavior analysis of unsaturated soils / P. Maghoul, B. Gatmiri, D. Duhamel // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.* – 2011. – V. 31, № 11. – P. 1480-1495.
169. Analytical 3D transient elastodynamic fundamental solution of unsaturated soils / I. Ashayeri [et al.] // *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.* – 2011. – V. 35, № 17. – P. 1801-1829.
170. Numerically-analytically studying fundamental solutions of 3-D dynamics of partially saturated poroelastic bodies / L.A. Igumnov [et al.] // *Физика и механика материалов.* – 2019. – Т. 72, № 5. – С. 596-601.
171. Igumnov, L.A. Dynamics of partially saturated poroelastic solids by boundary-element method / L.A. Igumnov, A.N. Petrov // *PNRPU Mechanics Bulletin.* – 2016. – V. 2016, № 3. – P. 47-61.
172. Игумнов, Л.А. Расчет отклика цилиндрической полости в пороупругом полупространстве на динамическое воздействие методом граничных элементов / Л.А. Игумнов, М.В. Григорьев // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова.* – 2021. – С.112-114.
173. Theodorakopoulos, D. D. Application of Biots poroelasticity to some soil dynamics problems in civil engineering. / D. D. Theodorakopoulos, D. E. Beskos // *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.* – 2006. – V. 26. – P. 666–679.
174. Albers, B. BEM and FEM results of displacements in a poroelastic column / B. Albers, S.S. Savidis, H.E. Tasan, O.V. Estorff, M. Gehlken // *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science.* – 2012. – V. 22(4). –

P.883–896.

175. Игумнов, Л.А. Решение осесимметричных задач нестационарного динамического деформирования вязкоупругих элементов конструкций методом гранично–временных интегральных уравнений: автореф. дис...канд. тех. наук: 01.02.04 / Игумнов Леонид Александрович. – Горький, 1987. – 18 с.
176. Игумнов, Л.А. Развитие метода граничных интегральных уравнений для решения трехмерных динамических задач теории вязкоупругости с сопряженными полями: автореф. дис...док. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Игумнов Леонид Александрович. – Н. Новгород, 2006. – 40 с.
177. Литвинчук, С.Ю. Гранично-элементное моделирование нестационарных трехмерных динамических задач теории упругости и вязкоупругости: автореф. дис...канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Литвинчук Светлана Юрьевна. – Н. Новгород, 2006. – 24 с.
178. Белов, А.А. Гранично-элементное моделирование динамики составных вязкоупругих тел на основе модифицированных методов квадратур сверток и Дурбина: автореф. дис...канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Белов Александр Александрович. – Нижний Новгород, 2008. – 20 с.
179. Карелин, И.С. Гранично-элементное моделирование динамики составных пороупругих тел: автореф. дис...канд.ф.-м.н.: 01.02.04 / Карелин Иван Сергеевич. - Н.Новгород, 2012. - 19 с.
180. Аменицкий, А.В. Развитие метода граничных элементов для численного моделирования динамики трехмерных однородных пороупругих тел: автореф. дис...канд.ф.-м.н.: 01.02.04 / Аменицкий Александр Владимирович. - Н.Новгород, 2010. - 21 с.
181. Петров, А.Н. Моделирование динамики составных пороупругих тел на основе метода гранично-временных элементов: автореф. дис...канд.ф.-м.н.: 01.02.04 / Петров Андрей Николаевич. - Н.Новгород, 2013. - 20 с.
182. Марков, И.П. Гранично-элементное моделирование динамики

- однородных трехмерных электроупругих и анизотропных упругих тел: автореф. дис...канд.ф.-м.н.: 01.02.04 / Марков Иван Петрович. - Н.Новгород, 2014. - 19 с.
183. Ратаушко, Я.Ю. Численное моделирование динамики упругих и пороупругих трёхмерных тел на основе совместного применения методов граничных элементов и Рунге-Кутты: автореф.дис...канд.ф.-м.н.: 01.02.04 / Ратаушко Ян Юрьевич. - Н.Новгород, 2014. - 19 с.
184. Игумнов, Л.А. Гранично-элементное исследование динамики составных пороупругих тел на основе метода гранично-временных элементов: монография / Игумнов Л.А., Петров А.Н., Белов А.А., Литвинчук С.Ю. – Нижний Новгород: ИП Бедный И.Б., 2020. – 144 с.
185. Баженов, В.Г. Гранично-элементное моделирование динамики составных вязкоупругих тел: Учебное пособие / В.Г. Баженов, А.А. Белов, Л.А. Игумнов. - Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. – 159 с.
186. Игумнов, Л.А. Элементы метода граничных интегральных уравнений в решении задач динамической пороупругости: Учебно-методическое пособие / Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, А.А. Белов. – Нижний Новгород: Нижегородский университет, 2010. – 43 с.
187. Игумнов, Л.А. Введение в гранично-элементное моделирование динамики анизотропных тел / Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, А.А. Белов, И.П. Марков. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2014. – 82 с.
188. Игумнов, Л.А. Введение в гранично-элементное моделирование динамики пороупругих тел / Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, А.А. Белов. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. – 71 с.
189. Игумнов, Л.А. Гранично-элементное решение задач поровязкоупругой динамики / Л.А. Игумнов, М.В. Григорьев, А.А. Ипатов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова.

- 2020. – С.123-124.
190. Литвинчук, С.Ю. Влияние параметров модели пороупругой среды на волновые поля перемещений и поровых давлений / С.Ю. Литвинчук, М.В. Григорьев, А.А. Ипатов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – 2020. – С.148-149.
191. Абросимов, Н.А. Численный анализ влияния скоростей деформаций на процесс прогрессирующего разрушения двухслойных металлопластиковых цилиндрических оболочек при импульсном нагружении / Н.А. Абросимов, М.В. Григорьев, Н.А. Новосельцева // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – 2020. – С.4-5.
192. Абросимов, Н.А. Численный анализ потери устойчивости предварительно напряженных композитных цилиндрических оболочек при осевом динамическом сжатии / Н.А. Абросимов, М.В. Григорьев, А.В. Елесин // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – 2020. – С.5-7.
193. Григорьев, М.В. Гранично-элементное моделирование распространения возмущений в пороупругом полупространстве с заглубленной сферической полостью / М.В. Григорьев, А.Н. Петров // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. – 2020. – С.94-95.
194. Григорьев, М.В. Гранично-элементное решение задач поровязкоупругой динамики / М.В. Григорьев, Л.А. Игумнов, А.А. Ипатов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова.

– 2020. – С.95-97.

195. Белов, А.А. Гранично-элементное моделирование волн на поверхности пороупругого полупространства при наличии волнового барьера / А.А. Белов, А.Н. Петров, М.В. Григорьев // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. – Уфа, 2019. – Т. 3 : Механика деформируемого твердого тела. – С. 447-449.
196. Григорьев, М.В. Совместное применение методов гранично-временных элементов и Лобатто в задачах трехмерной частично насыщенной пороупругости / М.В. Григорьев, А.А. Белов, А.Н. Петров // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. – 2019. – С.76-77.
197. Григорьев, М.В. Исследование влияния формы полости в поровязкоупругом полупространстве на динамические отклики среды с помощью МГЭ / М.В. Григорьев, С.Ю. Литвинчук, А.А. Ипатов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. – 2019. – С. 77-78.
198. Абросимов, Н.А. Численный анализ динамической потери устойчивости предварительно напряженных композитных цилиндрических оболочек / Н.А. Абросимов, М.В. Григорьев, А.В. Елесин, Л.А. Игумнов // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. – 2019. – С. 7-8.
199. Igumnov, L.A. Dynamics of a frictional system, accounting for hereditary-type friction and the mobility of the vibration limiter / L.A. Igumnov, V.S. Metrikin, M.V. Grigoryev // Materials Physics and Mechanics. – 2019. – V. 42, № 6. – P. 742-748.

200. Volkov, I.A. Model of damaged medium for describing fatigue fracture of materials and structures / I.A. Volkov, L.A. Igumnov, S.Y. Litvinchuk, I.V. Vorobtsov, M.V. Grigoryev // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. – 2019. – P. 107-124.
201. Григорьев, М.В. Трехмерное гранично-элементное моделирование поперечных колебаний пороупругой пластины / М.В. Григорьев, Л.А. Игумнов, А.А. Белов, А.Н. Петров // *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXIV международного симпозиума имени А.Г. Горшкова*. – 2018. – С. 84-85.
202. Barchiesi, E. A variational approach to strain gradient damage mechanics with an application to compressed frames / E. Barchiesi, L. Plasidi, I.A. Modin, D.V. Zhegalov, M.V. Grigoryev // *Problems of Strength and Plasticity*. – 2018. – V. 80, № 3. – P. 392-401.
203. Bragov, A.M. Failure of building brick under dynamic loading / A.M. Bragov, M.V. Grigoryev, D.A. Lamzin, S.Yu. Litvinchuk, A.K. Lomunov // *Anales de Mecánica de la Fractura*. – 2019. – V. 36. – P. 195-200.
204. Игумнов, Л.А. Гранично-элементное моделирование вынужденных колебаний анизотропных упругих и электроупругих трехмерных тел / Л.А. Игумнов, И.П. Марков, М.В. Григорьев // *Тезисы докладов: Школа-семинар «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете»*. – 2018. – С. 51.
205. Igumnov, L.A. Time-harmonic analysis of linear anisotropic elastic solids with a boundary element method / L.A. Igumnov, I.P. Markov, I.V. Vorobtsov, M.V. Grigoryev // *Proceedings IRF2018: 6th International Conference Integrity-Reliability-Failure*. – 2018. – P. 139-140.
206. Metrikin, V.S. Dynamics of a friction system, taking into account the hereditary type friction and the mobility of a vibration limiter / V.S. Metrikin, L.A. Igumnov, M.V. Grigoryev // *XLVI International Conference "Advanced Problems in Mechanics". APM 2018 BOOK OF ABSTRACTS*. – 2018. – P.

- 61-62.
207. Петров, А. Н. Численное моделирование динамического отклика в частично насыщенном пороупругом полупространстве от действия нагрузки внутри кубической полости / А. Н. Петров, М. В. Григорьев // Проблемы прочности и пластичности. – 2020. – Т. 82. – № 4. – С. 507-523. – DOI 10.32326/1814-9146-2020-82-4-507-523.
208. Григорьев, М.В. Расчеты действия силы на пороупругое трехфазное полупространство / М.В. Григорьев, Л.А. Игумнов // Проблемы прочности и пластичности. – 2022. – Т. 84. – № 1. – С. 36-51. – DOI 10.32326/1814-9146-2022-84-1-36-51.
209. Bishop, A. The principles of effective stress / A. Bishop. – Oslo : Norges Geotekniske Institutt, 1960.
210. Brooks, R.H. Hydraulic properties of porous media. In Hydraulic Papers / R.H. Brooks, A.T. Corey. – Colorado : Colorado State Univ., 1964.
211. Bonnet, G. Basic singular solutions for a poroelastic medium in the dynamic range / G. Bonnet // Journal of the Acoustical Society of America – 1987. – 82(5). – P. 1758-1762.
212. Lubich, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. I / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1988. – № 2(52). – P. 129–145.
213. Lubich, C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. II / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1988. – № 4(52). – P. 413–425.
214. Lubich, C. On the Multistep Time Discretization of Linear Initial-Boundary Value Problems and Their Boundary Integral Equations / C. Lubich // Numerische Mathematik. – 1994. – 67. – P. 365–389.
215. Lubich C. Time discretization of parabolic boundary integral equations / C. Lubich, R. Schneider // Numerische Mathematik. – 1992. – № 1(63). – P. 455–481.
216. Cheng, A.H.-D. Integral equations for dynamic poroelasticity in frequency domain with bem solution / A.H.-D. Cheng, T.

- Badmus, D. E. Beskos // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1991. – V. 117(5). – P. 1136–1157.
217. Dominguez, J. Boundary element approach for dynamic poroelastic problems / J. Dominguez // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 1992. – V. 35(2). – P. 307–324.
218. Ames, W.F. *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering* / W. F. Ames. – New York : Academic Press, 1965. – P. 511.
219. Collatz, L. *The Numerical Treatment of Differential Equations* / L. Collatz, P. Williams // *Mathematics of Computation*. – 1961. – V. 15, № 76. – P. 426 – 427.
220. Crandall, S.H. *Engineering Analysis: A Survey of Numerical Procedures* / S. H. Crandall. – New York : McGraw–Hill, 1956. – P. 417.
221. Steinbach, O. *Numerical Approximation Methods for Elliptic Boundary Value Problems* / O. Steinbach. – New York : Springer, 2008. – P. 386.
222. Kielhorn, L. Convolution quadrature method based symmetric galerkin boundary element method for 3d elastodynamics / L. Kielhorn, M. Schanz // *Int. J. Numer. Methods Eng.* – 2008. – V. 76. – P. 1724–1746.
223. Han, H. The boundary integro–differential equations of three–dimensional neumann problem in linear elasticity / H. Han // *Math. Comput.* – 1994. – V.68. – P. 269–281.
224. Kupradze, V. D. *Three–Dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity* / V. D. Kupradze, T. G. Gegelia, M. O. Basheleishvili, T. V. Burchuladze // *Journal of Applied Mechanics*. - 1980. – V. 47(1). – P. 222.
225. Günter, N. M. *Potential Theory and its Applications to Basic Problems of Mathematical Physics* / N. M. Günter. – New York : Frederick Ungar Publishing, 1967.
226. Kielhorn, L. A Time-Domain Symmetric Galerkin BEM for Viscoelastodynamics / L. Kielhorn. – V. 5, *Computation in Engineering and*

- Science. – Verlag der Technischen Universität Graz, 2009.
227. Mantic, V. A new formula for the c-matrix in the somigliana identity / V. Mantic // J. Elasticity. – 1993. – V. 33. – P. 191–201.
228. Messner, M. A regularized collocation boundary element method for linear poroelasticity / M. Messner, M. Schanz // Comput. Mech.. – 2011. – V.47. – P. 669–680.
229. Угодчиков, А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. – 295с.
230. Гольдштейн, Р.В. К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред / Р.В. Гольдштейн // Метод граничных интегральных уравнений: Вычислительные аспекты и приложения в механике. – М.: Мир, 1978. – С.183-209.
231. Li, P. Boundary element method for wave propagation in partially saturated poroelastic continua / P. Li. – V. 15, Computation in Engineering and Science. – Verlag der Technischen Universität Graz, 2012.
232. Lachat, J.C., Watson, J.O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics // Int. J. Numer. Mech. Eng. 1976. № 10. P. 991-1005.
233. Возможности пакета программ метода граничных элементов по работе с дискретной геометрической моделью: отчет о НИР / НИИ механики при ННГУ им. Н.И.Лобачевского. – Н.Новгород, 1991. – № ГР 01920015286. – Инв. № 02920011522.
234. Лапа, Ж.К., Уотсон, Дж.О. Усовершенствованная программа для решения трехмерных задач теории упругости методом граничных интегральных уравнений // Метод граничных интегральных уравнений. Вычислительные аспекты и приложения в механике. – М.: Мир, 1978. С. 111-128.