

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

"НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО"

На правах рукописи



Дерендяев Дмитрий Николаевич

**Исследование влияния анизотропии закреплений оси роторной  
системы с жидкостью на устойчивость стационарного  
вращения**

01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-  
математических наук

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, профессор

Дмитрий Владимирович Баландин

Нижний Новгород - 2022 год

## Оглавление

<b>Введение.....</b>	<b>4</b>
<b>1 Исторический обзор и место проблемы в динамике тел с полостями, содержащими жидкость.....</b>	<b>10</b>
<b>2 Метод исследования устойчивости стационарного вращения ротора, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, ось вращения которого расположена в осесимметричных вязкоупругих закреплениях</b>	<b>20</b>
<b>2.1 Постановка задачи .....</b>	<b>20</b>
<b>2.2 Связь устойчивости и движения типа круговой прецессии .....</b>	<b>25</b>
<b>2.3 Вычисление гидродинамической силы .....</b>	<b>30</b>
<b>2.4 Построение границ областей устойчивости .....</b>	<b>35</b>
<b>3 Обобщение оригинального метода на случай анизотропных закреплений оси ротора.....</b>	<b>38</b>
<b>3.1 Возможность осуществимости движения типа эллиптической прецессии.....</b>	<b>38</b>
<b>3.2 Решение гидродинамической задачи в случае эллиптической прецессии.....</b>	<b>40</b>
<b>3.3 Вычисление гидродинамических сил и система для бифуркационных значений параметров.....</b>	<b>45</b>

<b>4 Построение границ областей устойчивости для случая анизотропных закреплений оси ротора.....</b>	<b>48</b>
<b>4.1 Преобразование системы для бифуркационных значений параметров в случае изотропного демпфирования.....</b>	<b>48</b>
<b>4.2 Построение границ областей устойчивости в случае анизотропной жесткости, сопоставление результатов с изотропным случаем.....</b>	<b>50</b>
<b>4.3 Преобразование системы для бифуркационных значений параметров в случае изотропной жесткости.....</b>	<b>54</b>
<b>4.4 Построение границ областей устойчивости в случае анизотропного демпфирования, сопоставление результатов с изотропным случаем.....</b>	<b>55</b>
<b>Заключение.....</b>	<b>59</b>
<b>Список литературы.....</b>	<b>60</b>

## **Введение**

**Актуальность темы исследования.** Диссертационная работа посвящена исследованию устойчивости режимов стационарного вращения роторной системы с частичным заполнением вязкой несжимаемой жидкостью. Ось вращения реальной роторной системы имеет вязкоупругие закрепления, в роли которых могут выступать подшипники. В связи с этим, остается актуальным вопрос об устойчивости вращения ротора, расположенного в анизотропных закреплениях его оси, поскольку никакая технология не позволяет сделать их абсолютно изотропными с точки зрения значений коэффициентов жесткости и демпфирования.

Вместе с тем, исследование устойчивости вращения ротора с жидкостью классическими методами сопряжено с большими и зачастую непреодолимыми трудностями. Предложенный ранее Н. В. Дерендяевым оригинальный метод исследования позволяет эффективно находить области устойчивости режимов стационарного вращения ротора с жидкостью в пространстве параметров закрепления его оси. Развитие и применение этого метода в случае анизотропных закреплений оси ротора представляет значительный теоретический и практический интерес.

**Степень разработанности темы.** Математические модели роторных систем, содержащих жидкость, достаточно сложны для анализа устойчивости. В работах Н. В. Дерендяева и его учеников был предложен и разработан эффективный метод исследования устойчивости стационарного вращения

ротора, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью. В основе метода лежат две теоремы. Одна из них связывает изменение степени неустойчивости с осуществимостью возмущенного движения типа круговой прецессии. Другая утверждает, что движение жидкости в случае круговой прецессии не зависит от времени в специально выбранной неинерциальной системе отсчета. С использованием метода были построены границы областей устойчивости вращения ротора в плоскости параметров закреплений его оси. Предполагалось, что закрепления оси ротора изотропны.

В дальнейшем, метод удалось распространить на случай анизотропных закреплений оси ротора. Были установлены еще две теоремы, согласно которым изменение степени неустойчивости связано с осуществимостью возмущенного движения типа эллиптической прецессии. При этом возмущенное движение жидкости в специально выбранной неинерциальной системе отсчета представляет суперпозицию движений, отвечающих двум круговым прецессиям.

**Цель и задачи диссертационной работы.** Цель диссертационной работы состоит в развитии и применении метода исследования устойчивости стационарного вращения роторной системы, содержащей вязкую несжимаемую жидкость, в случае анизотропных закреплений оси ротора. Для достижения цели были поставлены следующие основные задачи:

1. Обобщение известного метода исследования устойчивости режима стационарного вращения роторной системы с жидкостью на случай анизотропных закреплений оси ротора
2. Построение границ областей устойчивости в пространстве параметров закрепления оси роторной системы с жидкостью для случая анизотропной жесткости закреплений, а также для случая анизотропного демпфирования в закреплениях

**Научная новизна.** Выполнено обобщение оригинального метода исследования устойчивости стационарного вращения роторных систем, содержащих жидкость, для случая анизотропных закреплений оси роторной системы, в анализе особенностей в поведении бифуркационной кривой в пространстве параметров закрепления, вызванных его анизотропией.

**Теоретическая значимость работы.** Проведено обобщение предложенного ранее оригинального метода исследования устойчивости стационарного вращения роторных систем с жидкостью на случай анизотропных закреплений оси ротора.

**Практическая значимость работы.** Выполнено построение областей устойчивости в плоскости параметров анизотропных закреплений оси вращающегося ротора, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью.

**Методология и методы исследования.** Основой диссертационного исследования является совокупность аналитических и численно–аналитических методов исследования математических моделей роторных систем, содержащих жидкость, а также применение представлений и подходов аналитической механики, теории устойчивости, гидродинамики и использование оригинального метода исследования устойчивости вращения ротора, содержащего жидкость.

**Положения, выносимые на защиту.** На защиту выносятся следующие основные результаты диссертационной работы:

1. Развитие и реализация численно–аналитического метода определения условий устойчивости стационарного вращения роторной системы с жидкостью для случая, когда закрепления ее оси анизотропны
2. Нахождение значений параметров закреплений оси, при которых происходит потеря устойчивости вращения (бифуркационных значений) и исследование поведения бифуркационной кривой при значениях параметров, близких к бифуркационным
3. Построение границ областей устойчивости стационарного вращения роторной системы с жидкостью в случае анизотропных закреплений оси ротора

**Достоверность полученных результатов** диссертационной работы основана на использовании основополагающих теоретических результатов при построении математических моделей роторных систем, на корректно

построенных численно–аналитических алгоритмах решения, на сопоставлении полученных результатов с уже известными для предельного случая изотропных закреплений.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 2016), на Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (Москва, 2017), на Всероссийской конференции молодых ученых – механиков (Сочи, 2018), на VII Международном научном семинаре «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (Москва, 2018), на XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019) и на Международной научной конференции «Проблемы прочности, динамики и ресурса» (Нижний Новгород, 2019).

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 8 работах [8-15]. В рецензируемых научных изданиях, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, опубликованы 3 работы [8-10].



## **Личный вклад автора:**

Диссертантом проведено:

- 1) Исследование устойчивости стационарного вращения ротора, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, для случая, когда закрепления оси ротора имеют анизотропную жесткость [9,10,12].
- 2) Принимая жесткости закреплений изотропными, проведено исследование устойчивости для системы с анизотропным демпфированием оси вращения [9,10,13,14].

В совместных работах соавтору Дерендяеву Н. В. принадлежат участие в постановке задач, общее руководство исследованиями и участие в обсуждении, редактировании и оформлении результатов. Также в этих работах соавторами выполнено сопоставление полученных для анизотропного случая результатов с уже известными для изотропного.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 88 наименований. Общий объем диссертации составляет 72 страницы машинописного текста, включая 14 рисунков. Список литературы занимает 12 страниц.

## **Глава 1. Исторический обзор и место проблемы в динамике тел с полостями, содержащими жидкость**

В первой главе дан исторический обзор исследований динамики тел с полостями, содержащими жидкость, проведен анализ полученных результатов и литературы по данной теме.

Проблеме жестких тел с полостями, содержащими жидкости, уделяется большое внимание как с теоретической, так и с практической точки зрения. Задачи о движении твердого тела с полостями, частично или полностью заполненными жидкостью, приобрели прикладное значение в связи с проектированием и исследованием динамики объектов авиационной и космической техники.

Простейшие задачи, связанные с телодвижением с полостями, полностью заполненными идеальной жидкостью, рассматривались еще в XIX-м веке в работах Коши, Остроградского, Стокса, Гельмгольца и других ученых. Теория движения твердого тела с полостью, полностью заполненной идеальной несжимаемой жидкостью, совершающей потенциальное движение, была подробно изложена в работах Н.Е. Жуковского. При этом движение тела с жидкостью было принято в качестве эквивалентного движению твердого тела, тензор инерции которого состоит из тензора инерции самого тела и присоединяющего тензора масс для данной полости. Этот тензор присоединенных масс было предложено определять на основе решений

краевых задач, зависящих только от формы полости. Обозначенные решения в литературе называются потенциалами Стокса-Жуковского.

Другие результаты, касающиеся идеальной жидкости, содержащейся в полости внутри твердого тела, были получены Хоуфом, Пуанкаре и Соболевым. Некоторые из этих авторов анализировали свойства устойчивости связанной системы жидкость-наполненное твердое тело либо путем рассмотрения малых колебаний в случае твердого тела с эллипсоидальной полостью, заполненной идеальной жидкостью при приблизительно равномерном вращении, либо путем изучения линеаризованных уравнений движения для тяжелой симметричной вершины, содержащей идеальную жидкость. Случай вязкой жидкости оказывается более сложным, чем случай идеальной жидкости.

Важное прикладное значение имеют задачи динамики твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью. Этой тематике посвящено большое количество работ, опубликованных во второй половине XX-го века. Кроме вопроса устойчивости здесь возникает вопрос изучения собственных колебаний тела с жидкостью. Эти задачи рассматривались в основном в линейном приближении.

Общая задача о колебаниях тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, получила свое развитие в работах М.М. Моисеева, Д.Е. Охоцимского, Г.С. Нариманова, С.Г. Крейна, Б. Рабиновича, И.Б. Богоряда. В результате исследований, проведенных авторами, было установлено, что для

задачи о малых колебаниях тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, необходимо, помимо определения потенциалов Стокса-Жуковского, решать еще и вспомогательную задачу о собственных колебаниях в неподвижной полости. Точные решения этой задачи известны только для немногих, в частности для цилиндрических полостей. Для полостей более сложной геометрической формы применяются числовые и вариационные методы.

В случае, когда колебания жидкости нельзя считать малыми, задача усложняется и становится нелинейной. Таким задачам посвящен ряд работ М.М. Моисеева, Г.С. Нариманова, Л.В. Докучаева, И.А. Луковского. В данном случае внимание уделялось аналитическим и числовым методам, с помощью которых удается получить полную информацию обо всех гидродинамических коэффициентах уравнений движения возбужденной системы, включая не только частоты, но и присоединенные массы жидкости. Особенности применения вариационных способов для решения обозначенных задач изложены в работе И.А. Луковского.

В случае слабого гравитационного поля на динамику твердого тела с жидкостью кроме массовых сил могут влиять также другие силы, а именно силы вязкости и силы поверхностного натяжения. Такие задачи исследовались в работах С.Г. Крейна, Ф.Л. Черноусько, А.Д. Мишкиса, М.Д. Копачевского, А.Д. Тюпцова, Л.А. Слобожанина.

Исследованием колебаний физического маятника с вязкой жидкостью в полости занимался П.С. Краснощеков, Р.И. Цебрий. В связи с повышением быстродействия и объема памяти компьютерной техники появилась возможность более эффективно применять различные варианты проекционно-разностных схем, метод конечных элементов, а также проекционные методы. В процессе исследований установлено, что для решения задач динамики тела с жидкостью более значимы не детали движения жидкости, а интегральные характеристики ее воздействия на движение тела. В такой постановке более эффективны проекционные методы, позволяющие построить приближенные решения краевых задач в аналитическом виде [86].

В конце прошлого века опубликованы труды М.Я. Барняка, И.А. Луковского, А.Н. Комаренко, которые посвящены разным вопросам построения проекционных методов решения краевых задач для уравнений движения ограниченного объема жидкости в полости твердого тела. В этих работах построены разные системы координатных функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа и Гельмгольца. С помощью таких функций, реализованных для проекционного метода, удалось составить эффективные числовые алгоритмы исследования собственных колебаний маятника с жидкостью.

Ряд работ Ю.М. Кононова посвящены исследованию динамики физического маятника с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью, в частности, рассмотрена задача в случае двухслойной жидкости

в цилиндрической полости, разделенной упругими мембранами или пластинками.

Для решений этих задач использовались решения вспомогательных задач определения потенциала Стокса-Жуковского и задачи о собственных колебаниях жидкости в неподвижном сосуде. Однако было установлено, что такой подход является эффективным только для задачи с цилиндрическими полостями, то есть в случаях, когда известны точные аналитические решения вспомогательных задач. В случае областей, имеющих более сложную геометрическую форму, вспомогательные задачи могут быть решены только приближенно, что вносит дополнительные погрешности в точность приближенного решения задачи.

На сегодняшний день существует обширная математическая литература, посвященная рассматриваемой проблематике. В частности, ученые сосредоточили свое внимание на движениях жесткого тела с полостью, полностью заполненной идеальной, невращающейся, несжимаемой жидкостью. При этих предположениях задача заключается в нахождении потенциально-подобных решений для абсолютной скорости жидкости.

Так, необходимо отметить, что в последние годы в математической литературе по проблеме жестких тел с заполненными жидкостью полостями основное внимание уделяется свойствам устойчивости и неустойчивости движений. В этом направлении следует отметить работу Е.П. Смирновой, в

которой автор подтверждает свойства устойчивости и неустойчивости, полученные Ф.Л. Черноусько, но с меньшими предположениями.

Также следует обратить внимание на работы А.А. Ляшенко и А.Г. Костюченко, а также книгу Н.Д. Копачевского и С.Г. Крейна, в которой авторы рассматривают линеаризованные уравнения для возмущенного движения вокруг равновесной конфигурации и анализируют спектр соответствующего оператора эволюции. Несмотря на то, что эти результаты интересны с математической точки зрения, они не обязательно должны быть справедливы для исходной нелинейной задачи из-за отсутствия на сегодняшний день принципа линеаризации, который мог бы подтвердить вышеприведенные выводы на нелинейном уровне.

Особый акцент следует сделать на трудах Г. Маззоне, А. Л. Сильвестре, Т. Такахаша, в которых задача о заполненном жидкостью жестком теле рассматривается с помощью более современных энергетических методов. Полученные результаты представляет собой отправную точку математического анализа движений твердых тел с заполненными жидкостью полостями. Также Г. Маззоне в процессе изучения инерционных движений доказал существование динамической системы в двумерном случае [87].

В частности, подробно показано существование слабых решений; доказательство дается как в 2D, так и в 3D случае вместе со всеми свойствами слабых решений и результатами уникальности. Кроме того, изучается также вопрос о наличии надежных решений для комбинированной системы в двух-

и трехмерном измерении. Доказано существование локальных сильных решений для любых начальных данных (при условии, что начальное движение имеет конечную кинетическую энергию) и глобальных сильных решений для начальных данных, которые «достаточно малы». Более того, показано, что в классе глобальных сильных решений, соответствующих «малым» начальным данным, долговременная динамика заполненного жидкостью твердого тела полностью характеризуется движением твердого тела с покоящейся жидкостью относительно твердого тела. Это движение твердого тела является постоянным вращением вокруг одной из главных осей инерции, если имеет место «симметричное распределение массы», то есть если тензор инерции всей системы кратен тензору тождеств.

Операторные постановки задач о колебаниях маятника с полостями, частично заполненными жидкостями, содержатся в работах Али Вадиаа, Ю.С. Пашкова, М.А. Солдатова, в которых исследованы свойства спектра, соответствующих спектральным задачам.

Также необходимо отметить, что на сегодня разработан вариационный метод исследования малых колебаний физического маятника с полостью произвольной геометрической формы, частично заполненной идеальной жидкостью.

Особая практическая значимость в применении задачи о колебаниях жидкости, частично заполняющей полость, встречается в современной строительной инженерии. Небоскребы и другие высотные здания могут



испытать катастрофические разрушения в силу поперечных колебаний, обусловленных порывами ветра. В таких постройках устанавливается контейнер с жидкостью. Форма контейнера и уровень наполнения жидкостью подбираются так, чтобы собственные колебания жидкости совпадали с колебанием здания и тем самым амортизировали резонансные эффекты. Возникает задача на определение собственных частот маятника, с объемом жидкости со свободной поверхностью. Форма объема жидкости часто нецилиндрическая.

Отдельное внимание современными исследователями в изучении динамики тел с полостями, содержащими жидкость, уделяется задачам создания гироскопа с полостью, полностью заполненной вязкой жидкостью. Так, в Питтсбургском университете был проведен физический эксперимент с устройством, показанным на рис. 1.



Рис.1.1 Гироскоп, заполненный жидкостью [88]

Контейнер для жидкости имеет цилиндрическую форму и изготовлен из алюминиевого сплава. Между нержавеющей сталью и алюминием в качестве возможных вариантов материалов, в конечном итоге был выбран алюминий из-за его значительно меньшей плотности по сравнению с нержавеющей сталью. Оси контейнера для жидкости были изготовлены из анодированного алюминиевого прецизионного вала. Шестигранные головки, обработанные на концах осей, обеспечивают механизм передачи крутящего момента.

Кронштейны рамы изготовлены из низкоуглеродистой стали. Внутренняя рама имеет диаметр 12 дюймов и вес 2,38 фунта; в то время как внешняя рама имеет диаметр 17 дюймов и 3,21 кг веса. Чтобы уменьшить трение при движении, были выбраны подшипники из ацетилполимера со стеклянными телами качения. Они изготовлены из очень легкой пластмассы, имели открытую конструкцию (без пылезащитных экранов, воздействующих на тела качения) и не требовали вязкой смазки. Эти характеристики позволили существенно снизить массу и трение. Для крепления подшипников к раме были выбраны легкие литые алюминиевые корпуса.

Система была испытана в основном с вязким раствором, состоящим из 20% воды и 80% глицерина. План эксперимента заключался в ускорении контейнера с жидкостью в течение примерно 60 секунд в направлении главной оси контейнера, соответствующей наименьшему моменту инерции. Ускорение осуществлялось путем воздействия ручной дрелью на шестигранную головку, обработанную в конце оси.

Эксперименты показывают, что после интервала времени, в течение которого движение системы кажется «хаотичным», контейнер с жидкостью достигает вращения вокруг оси, соответствующей наибольшему моменту инерции, который в конечном итоге уменьшается до нуля, приводя всю систему в состояние покоя. Необходимо обратить внимание на тот факт, что эти эксперименты проводились не в вакууме, в отличие от общих условий для численных и аналитических исследований. Тем не менее, поведение заполненного жидкостью гироскопа согласуется с численными тестами и аналитическими выводами, относительно стабилизирующего влияния жидкости на движение твердого тела: из-за вязких эффектов скорость жидкости относительно твердого тела в конечном итоге исчезает, поэтому градиент давления в жидкости уравнивает центробежные силы, и система достигает устойчивого состояния, которое представляет собой постоянное вращение вокруг оси, где спин является (ненулевым) минимумом (по крайней мере, для подходящих начальных условий).

## **Глава 2. Исследование устойчивости стационарного вращения ротора, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, ось вращения которого расположена в осесимметричных вязкоупругих закреплениях**

Во второй главе излагается оригинальный метод исследования устойчивости стационарного вращения ротора, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью, ось вращения которого расположена в осесимметричных вязкоупругих закреплениях.

Задачами, поставленными в данной главе, являются: постановка задачи об устойчивости вращения роторной системы с жидкостью, доказательство двух теорем, полученных Н. В. Дерендяевым совместно с учениками, которые связывают изменение степени неустойчивости роторной системы с условиями осуществимости движения типа круговой прецессии [6], описание схемы исследования устойчивости стационарного вращения ротора, частично заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, вычисление гидродинамической силы, действующей на ротор, построение границ областей устойчивости роторной системы для случая, когда закрепления оси изотропны.

### **2.1 Постановка задачи**

Предложенный в [6] метод исследования устойчивости распространяется на системы, в которых ось ротора располагается в изотропных закреплениях лавалевского типа. На рис. 2.1 схематически представлен лавалевский ротор и поперечный разрез ротора плоскостью

симметрии  $O_1x_1x_2$ , перпендикулярной оси стационарного вращения. Полость ротора частично заполнена вязкой жидкостью. В режиме стационарного вращения точка  $O$  пересечения оси ротора с плоскостью  $O_1x_1x_2$  совпадает с точкой пересечения оси стационарного вращения с той же плоскостью, а жидкость располагается в слое постоянной толщины на поверхности цилиндрической полости ротора и вращается вместе с ним как одно целое с угловой скоростью  $\Omega$ .

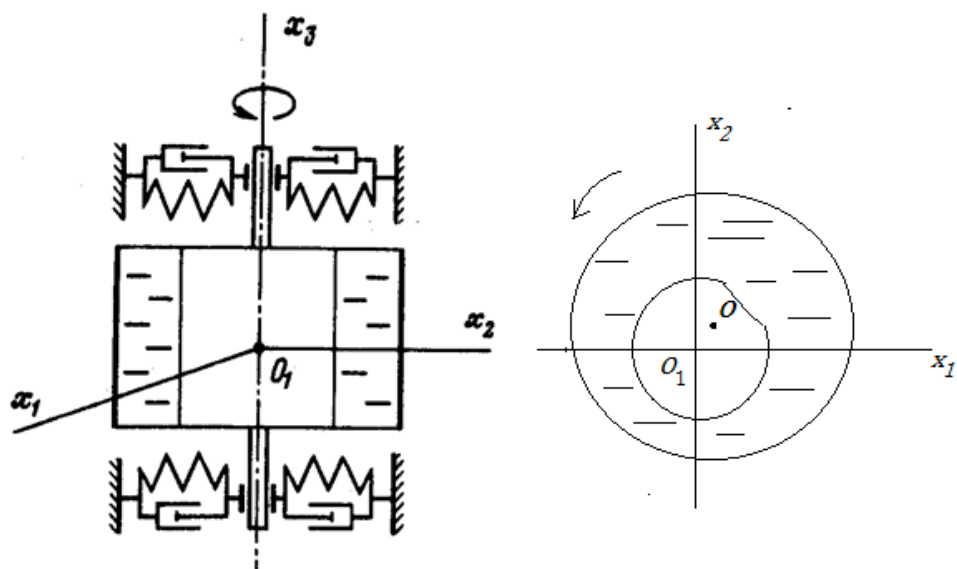


Рис. 2.1. Лавалевский ротор

Линеаризованные уравнения движения в отклонениях от режима стационарного вращения (в плоской модели) содержат:

- 1) уравнения поступательного движения цилиндрического ротора параллельно плоскости  $O_1x_1x_2$ , линеаризованные вблизи его состояния при стационарном вращении:

$$M\ddot{x}_i^0 + H\dot{x}_i^0 + Kx_i^0 = F_i, \quad i = 1, 2$$

где  $x_i^0$  – координаты точки  $O$ ;  $F_i$  – результирующая сил, с которыми заполняющая жидкость действует по поверхности полости ротора,  $M$  – масса ротора,  $H, K$  – коэффициенты демпфирования и жесткости закреплений соответственно.

2) условие постоянства угловой скорости вращения цилиндра вокруг оси  $O_1x_3$ :

$$\Omega = \text{const}$$

3) уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в плоскости  $O_1x_1x_2$ , линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси  $O_1x_3$ :

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + v_k^0 \frac{\partial}{\partial x_k} v_j + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} v_j^0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \nu \Delta v_j,$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0; \quad v_1^0 = -\Omega x_2; \quad v_2^0 = \Omega x_1;$$

где  $v_j$  – отклонение поля скоростей жидкости,  $p'$  – отклонение давления от соответствующих величин при квазитвердом вращении,  $\rho$  – плотность жидкости, которая принимается постоянной.

4) условие прилипания жидкости к поверхности цилиндра, условие непрерывности напряжений и кинематическое условие на свободной поверхности, перенесенные в линейном приближении по отклонениям от

состояния стационарного вращения на поверхности  $x_1^2 + x_2^2 = a^2$  и  $x_1^2 + x_2^2 = b^2$  соответственно:  $v_1 = \dot{x}_1^0 + \Omega x_2^0$ ;  $v_2 = \dot{x}_2^0 + \Omega x_1^0$ ;  $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ ;

$$\sigma'_{ik} n_k^0 = -\rho \Omega^2 b s n_i^0; \sigma'_{ik} = -p' \delta_{ik} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right);$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \Omega \left( -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) s = v_j n_j^0; x_1^2 + x_2^2 = b^2$$

Здесь  $s$  — отклонение свободной поверхности жидкости от невозмущенной поверхности по нормали к ней.

5) Формулы, определяющие  $F_1$  и  $F_2$  через отклонения давления и компонент поля скоростей жидкости от соответствующих величин при стационарном квазитвердом вращении:

$$F_j = - \oint \sigma'_{jk} n_k dl + \rho \frac{\Omega^2 a^2}{2} x_j^0; \quad j = 1, 2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2$$

Взаимодействие ротора с жидкостью и закреплениями оси ротора представлено потенциальной, циркулярной, диссипативной и гироскопической силами.

Система уравнений в отклонениях 1)-5) допускает частные решения, пропорциональные  $e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  — характеристическое число. Будем считать стационарное вращение устойчивым, если все  $\lambda$  лежат слева от мнимой оси, и неустойчивым, если хотя бы одно  $\lambda$  справа от мнимой оси.

При исследовании роторных систем указанного типа удастся связать изменение степени неустойчивости с осуществимостью возмущенных движений типа круговой прецессии. Можно показать, что мнимые характеристические числа уравнений в отклонениях от режима стационарного вращения возможны только в случае, когда существует возмущенное движение в виде круговой прецессии. В таком движении точка  $O$  описывает окружность с частотой  $\omega$ . Решение гидродинамической части задачи при движениях типа круговой прецессии существенно упрощается, т. к. поля скоростей, давлений и форма свободной поверхности жидкости в этом случае не зависят от времени в специально выбранной неинерциальной системе отсчета. Эти утверждения содержатся в двух теоремах, впервые полученных в [6]. Их доказательство приведем в следующем параграфе.

Приведенная выше система допускает частные решения  $\sim e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  – характеристическое число. В данной задаче будем считать, что устойчивости режима стационарного вращения отвечает ситуация, когда все характеристические числа имеют отрицательные действительные части, если хотя бы одно из возможных значений имеет положительную действительную часть – система неустойчива. В подтверждение этого можно сказать, что в теории устойчивости стационарных движений вязкой несжимаемой жидкости не известно примера, когда по расположению спектра относительно мнимой оси нельзя было бы судить об устойчивости. Полагая, что характеристические числа непрерывно зависят от параметров задачи, можно сделать вывод, что



изменение степени неустойчивости в системе происходит при появлении мнимых значений  $\lambda = \pm i\omega$ .

## 2.2 Связь устойчивости и движения типа круговой прецессии

Система 1)-5) из предыдущего параграфа будет инвариантна относительно следующего преобразования координат:  $x'_1 = x_2; x'_2 = -x_1$ .

Поэтому, помимо решения

$$\left( x_1^* \mathbf{e}_1 + x_2^* \mathbf{e}_2; v_1^{(k)*}(x_1, x_2) \mathbf{e}_1 + v_2^{(k)*}(x_1, x_2) \mathbf{e}_2; p_k^*(x_1, x_2) \right) e^{i\omega t} \quad (2.1)$$

существует решение:

$$\left( -x_2^* \mathbf{e}_1 + x_1^* \mathbf{e}_2; -v_2^{(k)*}(x_2, -x_1) \mathbf{e}_1 + v_1^{(k)*}(x_2, -x_1) \mathbf{e}_2; p_k^*(x_2, -x_1) \right) e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

Здесь  $x_1^*, x_2^*$  – комплексные амплитуды компонент радиуса-вектора точки пересечения оси цилиндра с плоскостью  $O_1 x_1 x_2$ ,  $v_{1,2}^{(k)*}, p_k^*$  – комплексные амплитуды отклонений компонент поля скоростей и давления жидкостей от соответствующих величин при стационарном вращении;  $k = 1, 2$ .

Умножая (2.1) на мнимую единицу и складывая его с (2.2), в силу линейности уравнений 1)-5) получим частное решение, отвечающее движению типа круговой прецессии, т.е. такое движение, в котором точка пересечения оси цилиндра с плоскостью  $O_1 x_1 x_2$  описывает окружность с частотой  $\omega$  (или  $-\omega$ ), а отклонения гидродинамических величин от их значений в режиме стационарного вращения изменяются во времени как

$Re(\hat{a}e^{i\omega t})$ , где  $\hat{a}$  – комплексная амплитуда отклонения соответствующей гидродинамической величины. Обратное, если система 1)–5) допускает решение типа круговой прецессии, то, как следует из определения такого решения, существуют значения характеристических чисел  $\lambda = \pm i\omega$ . Таким образом, доказана:

*Теорема 1. Мнимые значения характеристических чисел  $\lambda$  существуют в том и только в том случае, когда система уравнений в отклонениях допускает частное решение, описывающее круговую прецессию.*

Теперь необходимо упростить задачу, найдя специальную систему отсчета, в которой при движении типа круговой прецессии гидродинамические элементы не зависят от времени.

Пусть бесконечный цилиндрический ротор с внутренним радиусом  $a$ , заполненный вязкой несжимаемой жидкостью, вращается с абсолютной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг своей оси и прецессирует по окружности малого радиуса  $\varepsilon$  с частотой  $\omega$  (рис. 2.2). На внутренней поверхности ротора расположен слой однородной несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho$  и динамической вязкостью  $\mu$ .

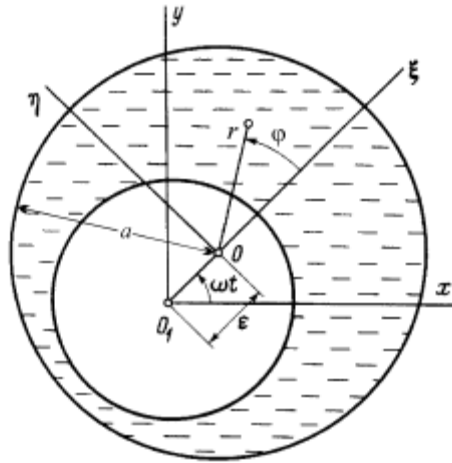


Рис. 2.2. Прецессирующий ротор

При  $\varepsilon = 0$  существует установившееся движение жидкости, при котором она вращается как твердое тело с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси цилиндра. В этом случае внутренней границей жидкости является цилиндрическая поверхность радиуса  $b$ , коаксиальная с вращающимся цилиндром.

Введем неинерциальную систему отсчета  $O\xi\eta$ , жестко связанную с линией центров  $O_1O$  (см. рис. 2.3). Рассмотрим движение жидкости в плоскости  $O\xi\eta$ , близкое к квазитвердому вращению, которое жидкость может совершать при  $\varepsilon = 0$ :

$$U_1 = -(\Omega - \omega)\eta; U_2 = (\Omega - \omega)\xi, \quad (2.3)$$

где  $U_{1,2}$  – компоненты скорости жидкости в системе отсчета  $O\xi\eta$ .

Запишем уравнения Навье-Стокса в плоскости  $O\xi\eta$ , линеаризованные вблизи (1.3):

$$\rho \left( \frac{\partial v_j}{\partial t} + U_l \frac{\partial}{\partial \xi_l} v_j + v_l \frac{\partial}{\partial \xi_l} U_j \right) = -2\varepsilon_{jlm} \omega_l v_m + \omega^2 \varepsilon \delta_{jl} + \frac{\partial}{\partial \xi_l} \sigma_{jl},$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial \xi_j} = 0; j = 1, 2; \sigma_{jl} = -p' \delta_{jl} + \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial \xi_l} + \frac{\partial v_l}{\partial \xi_j} \right), \quad (2.4)$$

где  $v_j, p'$  – отклонения компонент поля скоростей и давлений жидкости при стационарном квазитвердом вращении,  $\xi_1 = \xi; \xi_2 = \eta$ .

Граничные условия прилипания жидкости к внутренней поверхности ротора имеют вид:

$$v_j = 0; \xi^2 + \eta^2 = a^2; j = 1, 2 \quad (2.5)$$

Также запишем условия непрерывности напряжений и скоростей, кинематическое условие на свободной поверхности жидкости  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = b + h(t, \xi, \eta, \varepsilon)$  (в линейном приближении по  $\varepsilon$ ):

$$\sigma'_{jl} n_l = \rho \Omega^2 b h n_j; \sigma'_{jl} = -p' \delta_{jl} + \mu \left( \frac{\partial v_j}{\partial \xi_l} + \frac{\partial v_l}{\partial \xi_j} \right);$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + U_1 \frac{\partial h}{\partial \xi_1} + U_2 \frac{\partial h}{\partial \xi_2} = v_j n_j; \xi_1^2 + \xi_2^2 = b^2, \quad (2.6)$$

здесь  $n_j$  – компоненты вектора внешней нормали к окружности  $\xi_1^2 + \xi_2^2 = b^2$ .

В случае круговой прецессии малого радиуса точка пересечения оси цилиндра с плоскостью  $O_1 x_1 x_2$  описывает окружность с частотой  $\omega$ , а гидродинамические поля изменяются во времени с той же частотой в неподвижной системе  $O_1 x_1 x_2 z$ . Система совершает периодическое движение с частотой  $\omega$  относительно  $O_1 x_1 x_2$ . Следовательно, в случае круговой прецессии малого радиуса движение жидкостей в системе должно

удовлетворять условию периодичности во времени с частотой  $\omega$ . Этому условию удовлетворяет не зависящее от времени решение системы (2.4) с граничными условиями (2.5), (2.6) (назовем его  $A$ ). Допустим, что наряду с ним в случае круговой прецессии малого радиуса возможно другое движение жидкостей в системе (назовем его  $A'$ ), периодически зависящее от времени с частотой  $\omega$ . Разности гидродинамических полей движений  $A$  и  $A'$  удовлетворяют системе однородных уравнений Навье – Стокса в плоскости, линеаризованных вблизи квазитвердого вращения жидкостей (2.3). Умножая полученные уравнения Навье- Стокса скалярно на разность полей скорости для  $A$  и  $A'$  и, интегрируя по объему единицы длины полости ротора, можно получить [6], что разности гидродинамических полей движений  $A$  и  $A'$  не могут периодически зависеть от времени. Такое утверждение противоречит периодичности самих движений. В таком случае, мы получаем, что при круговой прецессии вращающегося ротора с жидким заполнением по окружности малого радиуса движение заполняющей его жидкости относительно системы отсчета  $O\xi\eta$  не зависит от времени.

Тем самым, доказана впервые полученная в [6]

*Теорема 2. В случае круговой прецессии ротора движение жидкости в системе отсчета  $O\xi\eta$ , связанной с линией центров  $O_1O$ , не зависит от времени.*

### 1.3 Вычисление гидродинамической силы

В неинерциальной системе отсчета  $O\xi\eta$  введем полярную систему координат  $(r, \varphi)$  с центром в точке  $O$ . Запишем поля сил инерции, действующих в данной системе отсчета на частицу единичной массы:

$$f_r = \omega^2 r + 2\omega v + \omega^2 \varepsilon \cos \varphi, \quad f_\varphi = -2\omega u - \omega^2 \varepsilon \sin \varphi, \quad (2.7)$$

где  $u, v$  – радиальная и азимутальная компонента скорости частицы в системе отсчета  $O\xi\eta$ .

Уравнения установившегося движения жидкости относительно системы  $O\xi\eta$  и граничные условия, линеаризованные вблизи стационарного квазитвердого вращения жидкости вокруг оси цилиндра

$$u = 0; \quad v = \omega_0 r \quad (2.8)$$

записываются в виде:

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{\partial u'}{\partial \varphi} &= \Omega^2 r + \omega^2 \varepsilon \cos \varphi + 2\Omega v' - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \Delta u' - \frac{u'}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v'}{\partial \varphi} \right), \\ \omega_0 \frac{\partial v'}{\partial \varphi} &= -\omega^2 \varepsilon \sin \varphi + 2\Omega u' - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left( \Delta v' - \frac{v'}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u'}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial r} + \frac{u'}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v'}{\partial \varphi} = 0,$$

$$u' = 0; \quad v' = 0; \quad r = a, \quad (2.10)$$

$$-p - \rho \Omega^2 r \eta + 2\mu \frac{\partial u'}{\partial r} = -p_0,$$

$$\frac{\partial v'}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'}{\partial \varphi} - \frac{v'}{r} = 0, \quad (2.11)$$

$$\omega_0 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = u'; \quad r = a - h.$$

Здесь  $u', v'$  – малые компоненты отклонения поля скоростей от (2.8),  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu, \mu$  – кинематическая и динамическая вязкость,  $r = a - h + \eta(\varphi)$  – уравнение свободной поверхности жидкости,  $p_0$  – давление на свободной поверхности.

С использованием потенциалов Ламба [6] удастся преобразовать граничные условия (2.10) и (2.11) таким образом, что они будут содержать только следующие размерные параметры:  $\omega_0, \Omega, \nu, a, a - h, \varepsilon$ . В силу линейности сформулированной краевой задачи параметр  $\varepsilon$  войдет в решение в первой степени. Этим параметром определяется лишь масштаб скорости движения жидкости, вызванного прецессией цилиндра. Оставшиеся пять параметров образуют всего три независимые безразмерные комбинации:

$$\frac{\omega}{\Omega}, \frac{a - h}{a}, \frac{\nu}{\Omega a^2}, \quad (2.12)$$

которые и будут критериями подобия в рассматриваемой задаче.

Решая полученную краевую задачу, после интегрирования уравнений, удастся получить систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования  $c_1, c_2, c_3, c_4$ :

$$\begin{aligned} \frac{3 - \tau}{1 - \tau} c_1 + \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \frac{c_2}{a^2} + \frac{i}{a} Z_1(ka) &= 0, \\ \frac{3 - \tau}{1 - \tau} i c_1 + \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \frac{i}{a^2} c_2 - k Z_0(ka) + \frac{1}{a} Z_1(ka) &= 0, \\ \frac{1 + \tau}{1 - \tau} \frac{4i}{b^3} c_2 + \frac{2k}{b} Z_0(kb) + \left(k^2 - \frac{4}{b^2}\right) Z_1(kb) &= 0, \\ -\frac{\tau^2(3 - \tau)}{(1 - \tau)^2} i b c_1 + \frac{i}{b} (1 + \tau) \left[ \frac{2 - 4\tau + \tau^2}{(1 - \tau)^2} - \frac{4}{k^2 b^2} \right] c_2 - \end{aligned}$$

$$-2 \frac{1-\tau}{kb} Z_0(kb) + \left( \frac{2\tau-1}{1-\tau} + 4 \frac{1-\tau}{k^2 b^2} \right) Z_1(kb) = -\frac{1}{2} \tau^2 \Omega \varepsilon b. \quad (2.13)$$

Здесь

$$\tau = \frac{\omega}{\Omega}, Z_n(kr) = c_3 L_n(kr) + c_4 M_n(kr),$$

$$L_n(kr) = e^{-\sqrt{\frac{\omega_0}{2\nu} a}} H_n^{(2)}(kr), M_n(kr) = e^{\sqrt{\frac{\omega_0}{2\nu} b}} H_n^{(1)}(kr); \quad (2.14)$$

$H_n^{(1,2)}(kr)$  – функции Ганкеля,  $n = 0, 1$ .

При выводе (2.13) были использованы известные формулы для производных от цилиндрических функций [82]. В ряде интересных случаев значение  $kr$  очень велико, что позволяет также использовать в (2.13) асимптотические разложения для этих функций. Применение перенормированных функций Ганкеля  $L_n(kr), M_n(kr)$  оказывается при этом очень удобным.

После того как найдены постоянные  $c_1, c_2, c_3, c_4$  краевая задача (2.9)-(2.11) в принципе решена. Обратимся к вычислению силы, с которой жидкость действует на цилиндр. Интегрируя напряжения, приложенные к внутренней поверхности цилиндра, получим для компонент силы, действующей на единицу его длины:

$$F_\xi = 2\pi a \rho \left[ \frac{1}{2} \omega^2 \varepsilon a + \frac{2i(\Omega + \omega)c_2}{a} \right],$$

$$F_\eta = -4\pi(\Omega + \omega) \text{Re} c_2. \quad (2.15)$$

Если частота прецессии близка к угловой скорости вращения ротора, можно воспользоваться асимптотическими разложениями для цилиндрических



функций при малых значениях аргумента [83], что позволит сравнительно легко получить из системы (2.13) константу  $c_2$ . После этого выражения (2.15) принимают вид:

$$F_\xi = \pi\rho\Omega^2 a^2 \varepsilon + O(\omega_0),$$

$$F_\eta = \frac{8\pi\varepsilon\mu\eta\omega_0(\delta^4 + 1)}{\delta^4 - 1 - 2(\delta^4 + 1)\ln\delta} + O(\omega_0^2 \ln|ka|), \delta = \frac{b}{a}. \quad (2.16)$$

Из выражений (2.16) видно, что в окрестности резонанса  $\omega = \Omega$  проекция силы на линию центров  $F_\xi > 0$ , т.е. гидродинамическая сила стремится увести ось цилиндра от оси прецессии (на рис. 2.3 точка пересечения оси прецессии плоскостью рисунка – центр прецессии  $O_1$ ). Далее, компонента силы  $F_\eta$  может быть отлична от нуля только в случае вязкой жидкости. Знаменатель в выражении для  $F_\eta$  при  $0 < \delta < 1$  положителен, следовательно, при  $\omega < \Omega$  имеем  $F_\eta > 0$ , т.е. гидродинамическая сила стремится увеличить угловую скорость прецессии цилиндра, а при  $\omega > \Omega$  получаем, что  $F_\eta < 0$  и эффект действия силы обратный. Эти выводы согласуются с так называемой концепцией вращающегося трения [84], распространенной в прикладных исследованиях. Отметим также, что момент гидродинамической силы (2.16) относительно оси цилиндра равен нулю.

На рис. 2.4 изображены в качестве примера зависимости безразмерных компонент гидродинамической силы  $F_\xi^* = F_\xi/F^0$  (сплошные линии) и  $F_\eta^* = F_\eta/F^0$  (штриховые линии) от  $\tau = \frac{\omega}{\Omega}$ , полученные в соответствии с (2.13) в случае  $\delta = 0.5, \frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-5}$ . Масштаб силы  $F^0 = m\omega^2\varepsilon$ , где  $m$  – масса

жидкости, приходящаяся на единицу длины цилиндра. Зависимость силы от отношения частот  $\tau$  имеет четко выраженный резонансный характер, что обусловлено резонансным возбуждением волн, распространяющихся по свободной поверхности вращающейся жидкости, заполняющей цилиндр.

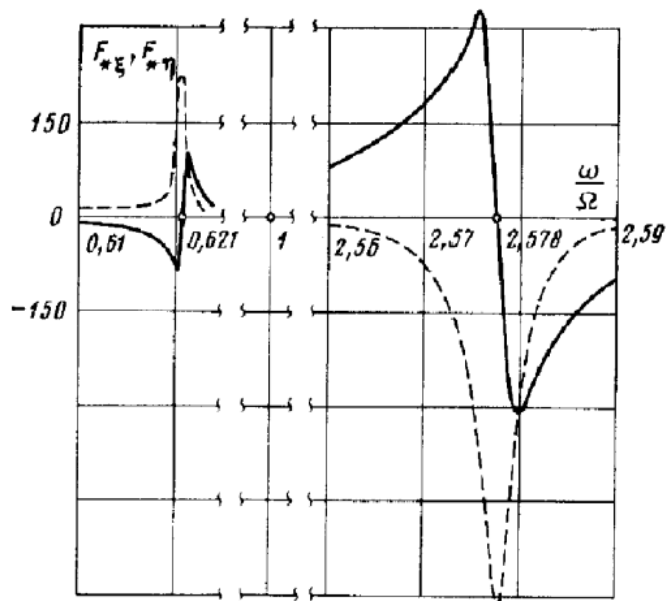


Рис. 2.4. Зависимость безразмерных компонент гидродинамической

$$\text{силы от } \tau = \frac{\omega}{\Omega}$$

Сравнение результатов вычисления гидродинамической силы с силой, полученной в рамках консервативной модели ( $\mu = 0$ ), показывает хорошее количественное совпадение  $\xi$ -компонент вне окрестностей резонансных значений  $\tau$ . Вместе с этим в окрестностях резонансов, в отличие от того, что дает консервативная модель,  $\xi$ -компонента конечна и сравнима по величине с  $\eta$ -компонентой. Важно также отметить, что в окрестностях резонансов, даже при весьма малых значениях параметра  $\frac{\nu}{\Omega a^2}$ , волновое движение, вызванное

прецессией цилиндра, всюду в жидкости сильно отличается от того движения, которое дает консервативная модель.

#### 1.4 Построение границ областей устойчивости

Вернемся теперь к уравнениям движения цилиндра:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_0 + H\dot{x}_0 + Kx_0 &= F_x, \\ M\ddot{y}_0 + H\dot{y}_0 + Ky_0 &= F_y. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Подставим теперь гидродинамическую силу в уравнения движения цилиндра, положив в правых частях (1.17):

$$\begin{aligned} F_x &= F_\xi \cos \omega t + F_\eta \sin \omega t, \\ F_y &= F_\xi \sin \omega t + F_\eta \cos \omega t. \end{aligned}$$

Положив затем в (1.17)  $x_0 = \varepsilon \cos \omega t$ ;  $y_0 = \varepsilon \sin \omega t$ , что соответствует круговой прецессии с частотой  $\omega$  и радиусом  $\varepsilon$ , получим соотношения, связывающие  $\omega$  и параметры задачи в случае круговой прецессии:

$$K^* - \frac{M}{m} \tau^2 = F_\xi^* \tau^2; H^* \tau = F_\eta^* \tau^2; K^* = \frac{K}{m\Omega^2}; H^* = \frac{H}{m\Omega}, \quad (2.18)$$

где  $K^*, H^*$  – безразмерные коэффициенты жесткости и демпфирования закреплений оси цилиндра соответственно.

Безразмерные компоненты силы  $F_\xi^*, F_\eta^*$  зависят только от параметров (2.12).

При фиксированных значениях этих параметров соотношения (2.18) задают в плоскости  $H^*, K^*$  кривую, точкам которой соответствуют такие значения параметров, при которых возможна круговая прецессия цилиндра. Эта кривая в соответствии со сделанными выше замечаниями разбивает плоскость

параметров закрепления оси цилиндра  $H^*$ ,  $K^*$  на области с различной степенью неустойчивости. Следуя [85], будем называть ее  $D$ -кривой.

На рис. 2.5 приведено разбиение плоскости  $H^*$ ,  $K^*$ , осуществляемое  $D$ -кривой, в случае  $\delta = 0.9$ ;  $\frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-6}$ ;  $\frac{M}{m} = 1.68$ . Стрелкой вдоль  $D$ -кривой указано направление возрастания параметра  $\tau$ .  $D$ -кривая на рис. 2.3 образована регулярной ветвью, вдоль которой параметр  $\tau$  изменяется в интервале  $(-\infty, +\infty)$  и каждому значению параметра  $\tau$  соответствует одна точка кривой, и особой прямой  $K^* = 0$ , соответствующей  $\tau = 0$ . Наличие особой прямой вызвано тем, что при  $\tau = 0$  компоненты гидродинамической силы обращаются в нуль.

$D$ -кривую принято штриховать так, что переход в плоскости параметров со штрихованной стороны кривой на нештрихованную соответствует увеличению степени неустойчивости.

Штриховка может переходить с одной стороны  $D$ -кривой на другую в тех точках, где нарушается однозначность отображения мнимой оси плоскости  $\lambda$  в точки  $D$ -кривой [85]. В рассматриваемой здесь задаче штриховка  $D$ -кривой меняется только в точке регулярной ветви, соответствующей значению  $\tau = 0$ , поскольку лишь при этом значении  $\tau$  нарушается однозначность вышеназванного отображения (точке  $\tau = 0$  на мнимой оси плоскости  $\lambda$  соответствует особая прямая в плоскости параметров закрепления оси цилиндра.)

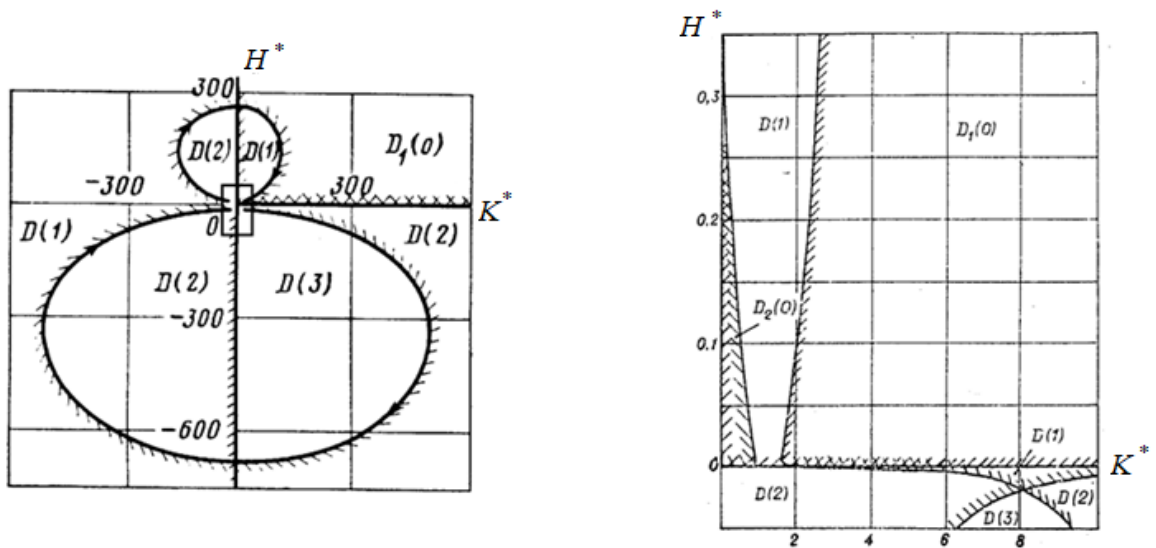


Рис. 2.3.  $D$  – кривая разбиения плоскости параметров закреплений

Область устойчивости всегда должна содержать точку, соответствующую достаточно большим положительным значениям коэффициента демпфирования  $H^*$ . Исходя из этого, на рис. 2.3 указана область с нулевой степенью неустойчивости  $D_1(0)$ . Указаны также области  $D(n)$  со степенью неустойчивости  $n$ . Интересно отметить, что наряду с  $D_1(0)$  существует еще одна область устойчивости –  $D_2(0)$  – в окрестности нулевых значений  $H^*$ ,  $K^*$  (разбиение этой окрестности приведено в другом масштабе в правой части рис. 2.5). Отметим также, что при  $H^* = 0$  точке на границе области устойчивости соответствует  $\tau = 1$ , что согласуется с известным результатом, установленным в [62] путем феноменологического введения сил внутреннего трения во вращающемся роторе.

### **Глава 3. Обобщение оригинального метода на случай анизотропных закреплений оси ротора**

В третьей главе выполнено обобщение оригинального метода, изложенного во второй главе, на случай анизотропных закреплений оси ротора, получены аналитические выражения для бифуркационных значений параметров анизотропных закреплений.

Задачами, поставленными в данной главе, являются: обобщение оригинального метода исследования устойчивости стационарного вращения роторной системы, описанного в предыдущей главе, на случай анизотропных закреплений оси ротора. Приведены две теоремы [8,9], связывающие устойчивость вращения системы в этом случае с возможностью осуществимости движения типа эллиптической прецессии. Получена конечная система уравнений для бифуркационных значений параметров анизотропных закреплений.

#### **3.1 Возможность осуществимости движения типа эллиптической прецессии**

В работе [8] было впервые установлено, что при исследовании роторных систем с анизотропными закреплениями оси удастся связать изменение степени неустойчивости с осуществимостью возмущенных движений типа эллиптической прецессии. Можно показать, что мнимые характеристические числа уравнений в отклонениях от режима стационарного вращения возможны только в случае, когда существует возмущенное движение в виде

эллиптической прецессии. В таком движении точка  $O$  описывает эллипс с частотой  $\omega$ . Оси эллипса, вообще говоря, повернуты относительно осей координатной системы  $O_1x_1x_2$ . Таким образом, была получена:

*Теорема 3. Мнимые значения  $\lambda = \pm i\omega$  существуют тогда и только тогда, когда возможно возмущенное движение, в котором точка  $O$  (центр сечения цилиндра) описывает эллипс на частоте  $\omega$  (или  $-\omega$ ), а гидродинамические элементы периодически изменяются во времени в системе  $O_1x_1x_2$ .*

Доказательство этой теоремы строится по следующей схеме:

а) При  $\lambda = i\omega$  берем комплекснозначное решение уравнений в отклонениях  $(\hat{x}_0, \hat{y}_0, \hat{v}, \hat{p}, \hat{s})e^{i\omega t}$ . Здесь  $(\hat{x}_0\mathbf{e}_x + \hat{y}_0\mathbf{e}_y)e^{i\omega t} = \mathbf{z}_0(t)$  описывает движение точки  $O$  (центра цилиндра):  $\mathbf{r}_0(t) = \text{Re}\mathbf{z}_0(t) = \text{Re}(\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{i\omega t}$ .

б) Наряду с решением из а) есть решение, умноженное на комплексную константу  $e^{i\theta}$ , в котором  $\mathbf{r}_0(t) = \text{Re}(\mathbf{z}_0(t)e^{i\theta}) = \text{Re}(\mathbf{a}' + i\mathbf{b}')e^{i\omega t}$ . Всегда можно так выбрать  $\theta$ , что вещественные векторы  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$  будут ортогональными, т.е.  $(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = 0$ .

в) Повернув исходные оси координат  $O'x'y'$  на угол  $\alpha$ , направим их по векторам  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$ . В новых осях  $\mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ , где  $a, b$  – постоянные, а движение точки  $O$  будет по эллипсу  $x' = a \cos \omega t$ ;  $y' = b \sin \omega t$ . При этом в новой системе координат  $O'x'y'$  гидродинамические элементы остаются периодическими функциями от  $t$ .

Таким образом, если есть мнимые  $\lambda = i\omega$ , то есть возмущенное движение в виде эллиптической прецессии, при котором точка  $O$  описывает эллипс, а гидродинамические элементы периодически изменяются во времени в лабораторной системе отсчета. В общем случае, при наличии комплексносопряженной пары  $\lambda = \pm i\omega$  есть только одна эллиптическая прецессия на частоте  $\omega$  (или  $-\omega$ ).

### **3.2 Решение гидродинамической задачи в случае эллиптической прецессии**

Учитывая теорему 3, полученную в предыдущем параграфе, решение задачи существенно упрощается, т. к. поля скоростей, давлений и форма свободной поверхности жидкости в случае эллиптической прецессии описываются в виде суперпозиции соответствующих элементов [8,9], отвечающих двум круговым прецессиям с частотами  $\omega$  и  $-\omega$ . Это позволяет эффективно находить гидродинамические силы, действующие на ротор.

- 1) Введем неинерциальную систему отсчета  $O_2\xi_1\eta_1$ . Оси системы  $O_1x'_1x'_2$  направлены по главным осям эллипса. Точка  $O$  – центр поперечного сечения цилиндра, описывает эллипс в системе  $O_1x_1x_2$  на частоте  $\omega$ . Радиус цикла  $O_1O_2 = \varepsilon_2$ , радиус эпицикла  $O_2O = \varepsilon_1$ ; Точка  $O_1$  – пересечение оси стационарного вращения с плоскостью поперечного сечения цилиндра.



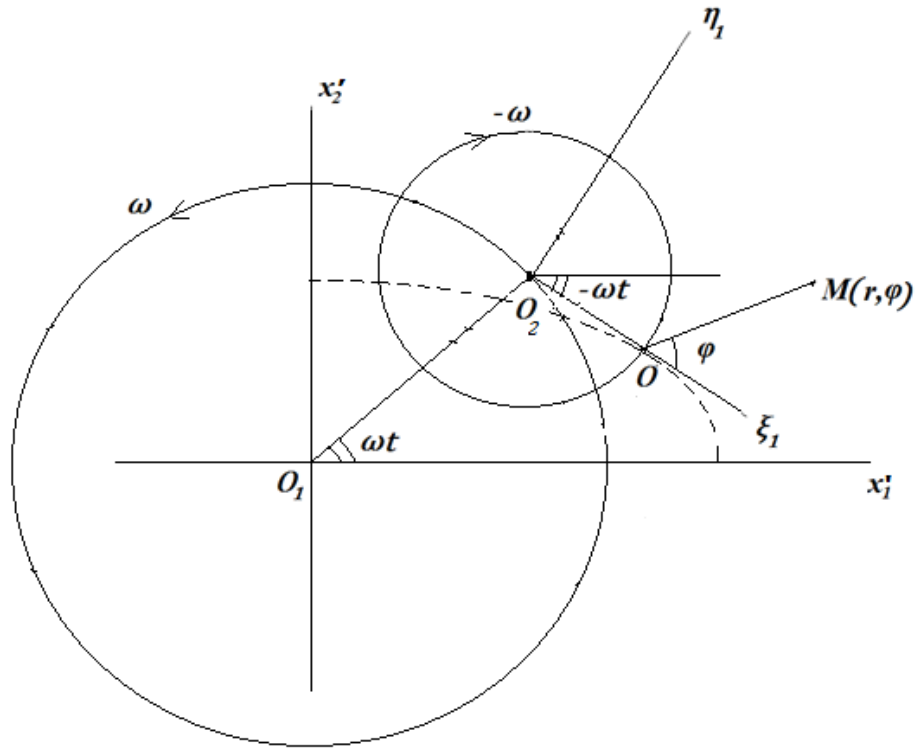


Рис. 3.1. Неинерциальная система отсчета  $O_2\xi_1\eta_1$

Поле сил инерции в пространстве отсчета  $O_2\xi_1\eta_1$  в полярной системе координат с полюсом в точке  $O$ :

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}_r[\omega^2 \varepsilon_2 \cos(2\omega t - \varphi) + \omega^2(r + \varepsilon_1 \cos\varphi) - 2\omega v] + \\ + \mathbf{e}_\varphi[\omega^2 \varepsilon_2 \sin(2\omega t - \varphi) - \omega^2 \varepsilon_1 \sin\varphi + 2\omega u],$$

где  $u, v$  – радиальная и азимутальная компоненты поля скоростей в полярной системе координат.

Уравнения движения жидкости в системе  $O_1\xi_1\eta_1$ , линеаризованные вблизи невозмущенного движения  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ;  $\mathbf{v} = \mathbf{e}_\varphi(\Omega + \omega)r$ ;  $p = p_0(r)$ , записываются в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial u}{\partial \varphi} - (\Omega + \omega)^2 r - 2(\Omega + \omega)v = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu L_1(u, v) - 2\omega v + \omega^2 \varepsilon_2 \cos(2\omega t - \varphi) + \omega^2 (r + \varepsilon_1 \cos \varphi) - \\ & 2\omega(\Omega + \omega)r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v}{\partial t} + 2u(\Omega + \omega) + (\Omega + \omega) \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \\ & = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu L_2(u, v) + 2\omega u + \omega^2 \varepsilon_2 \sin(2\omega t - \varphi) - \varepsilon_1 \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0$$

$$L_1(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$$

$$L_2(u, v) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

В стационарном невозмущенном движении  $u = v = 0$ ;  $p = p_0(r)$ , а значит

$$-(\Omega + \omega)^2 r = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \omega^2 r - 2\omega(\Omega + \omega)r, \text{ т. е.}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \rho \Omega^2 r; \quad p_0(r) = \frac{\rho \Omega^2 r^2}{2} + \text{const}$$

Обозначив  $p' = p - p_0(r)$  — возмущение давления, перепишем ур-ния в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial r} + 2\Omega v + t_1 + \omega^2 \varepsilon_1 \cos \varphi \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'}{\partial \varphi} - 2\Omega u + t_2 + \varepsilon_1 \sin \varphi, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $t_i = \nu L_i(u, v) + \omega^2 \varepsilon_2 \cos(2\omega t - \varphi)$ .

Обозначим  $p' = \chi + \rho \omega^2 \varepsilon_2 r \cos(2\omega t - \varphi) + \rho \omega^2 \varepsilon_1 r \cos \varphi$  и получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial r} + 2\Omega v + \nu L_1(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - 2\Omega u + \nu L_2(u, v) \end{cases} \quad (3.2)$$

Представим решение системы (3.1) в виде суммы двух компонент:  $u = u_I + u_{II}$ ;  $v = v_I + v_{II}$ ;  $p' = p'_I + p'_{II}$ , где компоненты удовлетворяют системам:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_I}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial u_I}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_I}{\partial r} + 2\Omega v_I + \nu L_1(u_I, v_I) + \omega^2 \varepsilon_2 \cos(2\omega t - \varphi) \\ \frac{\partial v_I}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial v_I}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'_I}{\partial \varphi} - 2\Omega u_I + \nu L_2(u_I, v_I) - \omega^2 \varepsilon_2 \sin(2\omega t - \varphi) \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{II}}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial u_{II}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_{II}}{\partial r} + 2\Omega v_{II} + \nu L_1(u_{II}, v_{II}) + \omega^2 \varepsilon_1 \cos \varphi \\ \frac{\partial v_{II}}{\partial t} + (\Omega + \omega) \frac{\partial v_{II}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'_{II}}{\partial \varphi} - 2\Omega u_{II} + \nu L_2(u_{II}, v_{II}) - \omega^2 \varepsilon_1 \sin \varphi \end{cases} \quad (3.4)$$

Уравнения неразрывности не выписываем, поскольку форма этого уравнения для компонент  $I$  и  $II$  сохраняется.

Решение (3.3) от  $r, \varphi, t$  строим в виде  $\varphi$ -ий от  $r$  и  $\varphi' = \varphi - 2\omega t$ .

Получаем:

$$\begin{cases} (\Omega - \omega) \frac{\partial u_I}{\partial \varphi'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_I}{\partial r} + 2\Omega v_I + \nu L_1(u_I, v_I) + \omega^2 \varepsilon_2 \cos \varphi' \\ (\Omega - \omega) \frac{\partial v_I}{\partial \varphi'} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'_I}{\partial \varphi} - 2\Omega u_I + \nu L_2(u_I, v_I) - \omega^2 \varepsilon_2 \sin \varphi' \end{cases}.$$

Но эта же система получается в случае круговой прецессии с частотой  $\omega$  и радиусом  $\varepsilon_2$ ; для этого надо только в соответствующем решении заменить  $\varphi$  на  $\varphi'$ . В системе  $O_1 \xi_1 \eta_1$  решение для круговой прецессии на частоте  $\omega$  надо «повернуть» против часовой стрелки на  $2\omega t$ .

Решение (3.4) строим не зависящим от  $t$ ; получаем:

$$\begin{cases} (\Omega + \omega) \frac{\partial u_{II}}{\partial \varphi'} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'_{II}}{\partial r} + 2\Omega v_{II} + \nu L_1(u_{II}, v_{II}) + \omega^2 \varepsilon_1 \cos \varphi' \\ (\Omega + \omega) \frac{\partial v_{II}}{\partial \varphi'} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p'_{II}}{\partial \varphi} - 2\Omega u_{II} + \nu L_2(u_{II}, v_{II}) - \omega^2 \varepsilon_1 \sin \varphi' \end{cases}.$$

Эта же система получается в случае круговой прецессии с частотой  $-\omega$  и радиусом  $\varepsilon_1$ .

3) Пусть

$$u = U(r, \varphi, \omega, \varepsilon), \quad v = V(r, \varphi, \omega, \varepsilon), \quad p' = P(r, \varphi, \omega, \varepsilon), \quad s = S(\varphi, \omega, \varepsilon)$$

решение гидродинамической задачи в системе  $O\xi\eta$  в случае круговой прецессии, записанное в полярных координатах  $(r, \varphi)$ .

В соответствии с вышеприведенными соображениями, имеет место:

*Теорема 4. Решение гидродинамической задачи в системе  $O_2\xi_1\eta_1$  в случае эллиптической прецессии представляет собой суперпозицию решений для двух круговых прецессий:*

$$u = U(r, \varphi - 2\omega t, \omega, \varepsilon_2) + U(r, \varphi, -\omega, \varepsilon_1),$$

$$v = V(r, \varphi - 2\omega t, \omega, \varepsilon_2) + V(r, \varphi, -\omega, \varepsilon_1),$$

$$p' = P(r, \varphi - 2\omega t, \omega, \varepsilon_2) + P(r, \varphi, -\omega, \varepsilon_1),$$

$$s = S(\varphi - 2\omega t, \omega, \varepsilon_2) + S(\varphi, -\omega, \varepsilon_1)$$

Здесь  $(r, \varphi)$ - полярные координаты в системе  $O_2\xi_1\eta_1$  с полюсом в точке  $O$ .

### **3.3 Вычисление гидродинамических сил и система для бифуркационных значений параметров**

С использованием полученных выражений для поля скоростей и поля давлений, суммируя напряжения, действующие на поверхности цилиндра  $r = a$ , получим выражения для компонент силы, с которой жидкость действует на цилиндр в случае эллиптической прецессии:

$$F_1 = (F_\xi(\omega, \varepsilon_2) + F_\xi(-\omega, \varepsilon_1))\cos\omega t - (F_\eta(\omega, \varepsilon_2) - F_\eta(-\omega, \varepsilon_1))\sin\omega t,$$

$$F_2 = (F_\xi(\omega, \varepsilon_2) - F_\xi(-\omega, \varepsilon_1))\sin\omega t + (F_\eta(\omega, \varepsilon_2) + F_\eta(-\omega, \varepsilon_1))\cos\omega t,$$

где  $F_\xi(\omega, \varepsilon)$ ,  $F_\eta(\omega, \varepsilon)$  – проекции гидродинамической силы, действующей на цилиндр в случае круговой прецессии с частотой  $\omega$  и радиусом  $\varepsilon$ , на оси системы отсчета  $O\xi\eta$ .

Подставляя в уравнения движения цилиндра в системе  $O_1x'_1x'_2$   $x_1'^0 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\cos\omega t$ ,  $x_2'^0 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\sin\omega t$  и выражения для гидродинамических сил, действующих на цилиндр в случае эллиптической прецессии, получим конечную систему уравнений для бифуркационных значений параметров.

$$\begin{cases} -M\omega^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = F_\xi(\omega, \varepsilon_2) + F_\xi(-\omega, \varepsilon_1) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t_{K1} + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t_{H3}, \\ -M\omega^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = F_\xi(\omega, \varepsilon_2) - F_\xi(-\omega, \varepsilon_1) - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t_{K2} - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t_{H3}, \\ F_\eta(-\omega, \varepsilon_1) - F_\eta(\omega, \varepsilon_2) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t_{K3} + \omega(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t_{H1} = 0, \\ F_\eta(\omega, \varepsilon_2) + F_\eta(-\omega, \varepsilon_1) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)t_{K3} - \omega(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)t_{H2} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где  $t_{K1} = K_1\cos^2\alpha + K_2\sin^2\alpha$ ,  $t_{K2} = K_1\sin^2\alpha + K_2\cos^2\alpha$ ,  $t_{H3} = \frac{\omega}{2}\sin 2\alpha(H_1 - H_2)$ ,  $t_{K3} = \frac{(K_1 - K_2)}{2}\sin 2\alpha$ ,  $t_{H1} = H_1\cos^2\alpha + H_2\sin^2\alpha$ ,  $t_{H2} = H_1\sin^2\alpha + H_2\cos^2\alpha$ ,

$M$  – масса ротора,  $K_{1,2}$ ,  $H_{1,2}$  – анизотропные коэффициенты жесткости и демпфирования закреплений оси ротора соответственно

Если характеристические числа  $\lambda$  непрерывно зависят от параметров задачи, то переход  $\lambda$  из левой полуплоскости в правую происходит при пересечении мнимой оси, т.е. при таких значениях параметров, когда существует хотя бы одно мнимое  $\lambda$ . В этом случае осуществимо возмущенное движение типа эллиптической прецессии. Таким образом, при исследовании

устойчивости достаточно рассмотреть не все возмущенные движения, а лишь возмущения специального вида – эллиптические прецессии.

Исследование таких возмущенных движений позволяет эффективно находить бифуркационные значения параметров, при которых существуют мнимые  $\lambda$ , и строить границы областей с различной степенью неустойчивости, в частности, границы областей устойчивости режима стационарного вращения в пространстве параметров задачи.

## **Глава 4. Построение границ областей устойчивости для случая анизотропных закреплений оси ротора**

В четвертой главе произведено построение границ областей устойчивости для случая, когда жесткость закреплений анизотропна, а демпфирование изотропно, а также для обратной ситуации. Произведено сопоставление полученных результатов с известными результатами для случая изотропных закреплений оси ротора.

Задачами, поставленными в данной главе, является исследование системы (3.5) для случая, когда демпфирование закреплений оси ротора изотропно, а жесткость анизотропна. Получены аналитические выражения для анизотропных компонент жесткости закреплений, проведено построение границ областей устойчивости вращения роторной системы такого типа. Далее проведено сопоставление результатов со случаем изотропных закреплений оси. Затем, аналогичным образом проводится исследование системы (3.5) для случая, когда жесткость закреплений оси ротора изотропна, а демпфирование анизотропно.

### **4.1 Преобразование системы для бифуркационных значений параметров в случае изотропного демпфирования**

Система (3.5) содержит в общем случае семь неизвестных. Было решено рассмотреть далее два наиболее показательных случая: анизотропной



является только жесткость закреплений оси ротора, или же, наоборот, анизотропным является только демпфирование закреплений оси.

Положим в системе (3.5)  $H_1 = H_2 = H$ . Тогда система принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \left( m\omega^2 + \widetilde{F}_\xi(-\omega) - \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \right) = \frac{1}{2}(K_1 + K_2) - \left( m\omega^2 + \widetilde{F}_\xi(\omega) \right) \\ -m\omega^2 = \widetilde{F}_\xi(\omega) - \frac{1}{2}(K_1 + K_2) - \frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon_2}(K_1 - K_2)\cos 2\alpha \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \sqrt{\frac{\widetilde{F}_\eta(\omega) - \omega H}{\widetilde{F}_\eta(-\omega) + \omega H}} \\ (K_1 - K_2)\sin 2\alpha = -2\sqrt{(\widetilde{F}_\eta(\omega) - \omega H)(\widetilde{F}_\eta(-\omega) + \omega H)}, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

где  $\widetilde{F}_\xi(\omega) = \frac{F_\xi(\omega, \varepsilon_{1,2})}{\varepsilon_2}$ ,  $\widetilde{F}_\eta(\omega) = \frac{F_\eta(\omega, \varepsilon_{1,2})}{\varepsilon_2}$ .

Из этих формул видно, что для осуществимости эллиптической прецессии  $H$  должно быть таким, что  $(\widetilde{F}_\eta(\omega) - \omega H)(\widetilde{F}_\eta(-\omega) + \omega H) > 0$ .

Обезразмерим систему (4.1), введя новые параметры закреплений  $K_1^* = \frac{K_1}{m\Omega^2}$ ,  $K_2^* = \frac{K_2}{m\Omega^2}$ . Из полученной системы легко определяются выражения  $f^K = K_1^* - K_2^*$  и  $g^K = K_1^* + K_2^*$  как функции безразмерной частоты прецессии ротора  $\tau = \frac{\omega}{\Omega}$ :

$$\begin{cases} f^K(\tau) = 2 \left[ (\tilde{F}_\eta(\tau) - \tau H^*)(\tilde{F}_\eta(-\tau) + \tau H^*) \left( \frac{\tilde{F}_\xi(\tau) - \tilde{F}_\xi(-\tau)}{\tilde{F}_\eta(\tau) + \tilde{F}_\eta(-\tau) - 2\tau H^*} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ g^K(\tau) = 2 \left[ \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 - 1 \right]^{-1} \left( \frac{M\tau^2}{m} \left( \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 - 1 \right) + \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)^2 \tilde{F}_\xi(-\tau) - \tilde{F}_\xi(\tau) \right), \end{cases} \quad (4.2)$$

где  $H^* = \frac{H}{m\Omega}$ .

Используя систему (4.2), легко получить выражения для переменных  $K_1^*(\tau)$ ,  $K_2^*(\tau)$ :

$$K_1^*(\tau) = \frac{f^K(\tau) + g^K(\tau)}{2}, K_2^*(\tau) = -\frac{f^K(\tau) - g^K(\tau)}{2}. \quad (4.3)$$

Эти формулы параметрически определяют  $D$  – кривую в плоскости параметров жесткости закреплений при фиксированных значениях прочих параметров системы.

#### **4.2 Построение границ областей устойчивости в случае анизотропной жесткости, сопоставление результатов с изотропным случаем.**

Опираясь на выражения (4.3), на плоскости параметров  $K_1^*, K_2^*$  можно построить бифуркационную кривую, заданную параметрически (параметр  $\tau$ ), фиксируя при этом значения  $H^*$  и прочие параметры системы.

Обратимся к бифуркационной кривой, полученной для случая изотропных закреплений оси ротора (см. рис. 2.3), чтобы сопоставить полученные разбиения с этим случаем. Здесь необходимо отметить, что при сопоставлении бифуркационных кривых, полученных для случая

анизотропных закреплений, с результатами для изотропного случая удобно воспользоваться прорисовкой бифуркационной кривой. Эта прорисовка показана на рис. 4.1. Это вызвано сильными отличиями масштабов различных областей устойчивости на рис. 2.5.

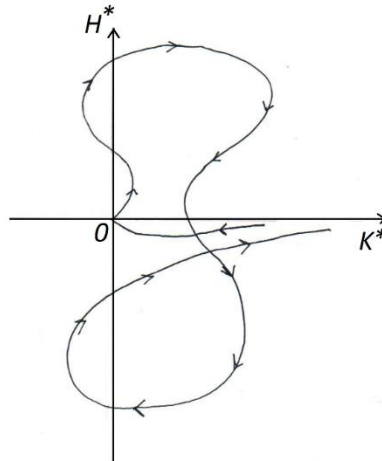


Рис. 4.1. Прорисовка бифуркационной кривой для изотропного случая

На рис. 4.2 - 4.5 показано разбиение плоскости параметров жесткости для различных значений  $H^*$ :  $H^* = 0.17$ ;  $H^* = 0.4$ ;  $H^* = 1.6$ ;  $H^* = 2$  соответственно. Прочие параметры системы зафиксированы:  $E = \frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-5}$ ;  $\frac{b}{a} = 0.5$ ;  $\frac{M}{m} = 1.68$ .

Красным цветом отмечена та часть биссектрисы координатного угла, которая отвечает области устойчивости. В случае введения анизотропии эта часть биссектрисы «расползается», что отмечено на части рисунка, отвечающей разбиению плоскости  $K_1^*, K_2^*$ .

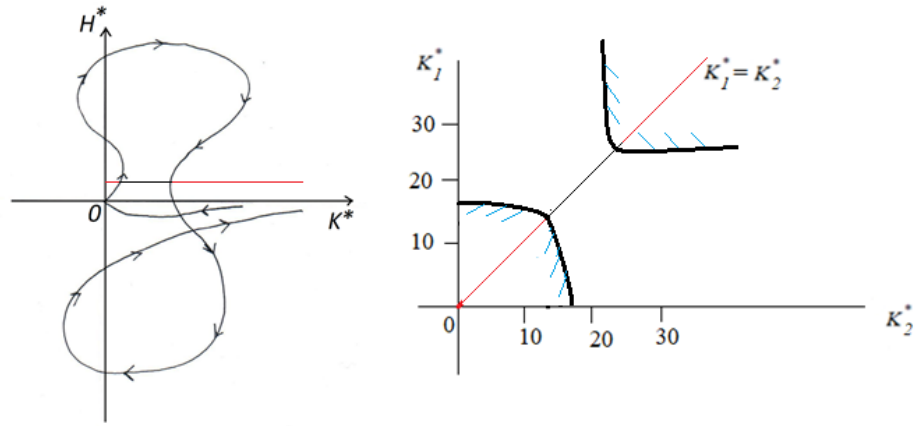


Рис. 4.2. Разбиение плоскости  $K_1^*, K_2^*$  на области с различной степенью неустойчивости для следующих значений параметров:

$$H^* = 0.17; E = \frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-5}; \frac{b}{a} = 0.5; \frac{M}{m} = 1.68$$

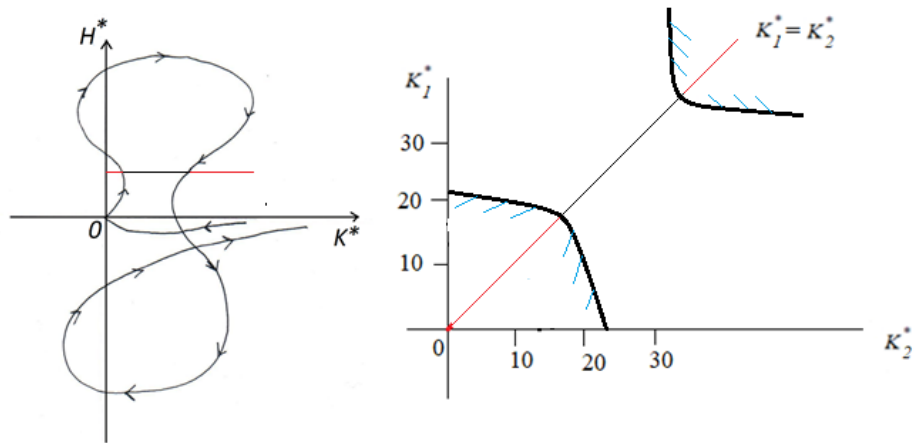


Рис. 4.3. Разбиение плоскости  $K_1^*, K_2^*$  на области с различной степенью неустойчивости для следующих значений параметров:

$$H^* = 0.4; E = \frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-5}; \frac{b}{a} = 0.5; \frac{M}{m} = 1.68$$

При различных значениях  $H^*$  мы получаем соответствующее значение (или значения)  $K^*$ . Этим значениям отвечает точка на биссектрисе координатного угла на плоскости  $K_1^*, K_2^*$  ( $K_1^* = K_2^*$  в изотропном случае). Таким образом, в изотропном случае мы имеем разбиение биссектрисы координатного угла на части, отвечающие различным степеням неустойчивости. При введении в систему анизотропии жесткости происходит «расползание» области устойчивости с биссектрисы координатного угла. Поведение бифуркационной кривой в окрестностях точек ветвления на биссектрисе координатного угла представляет собой отдельный вопрос, который был рассмотрен в работе [15].

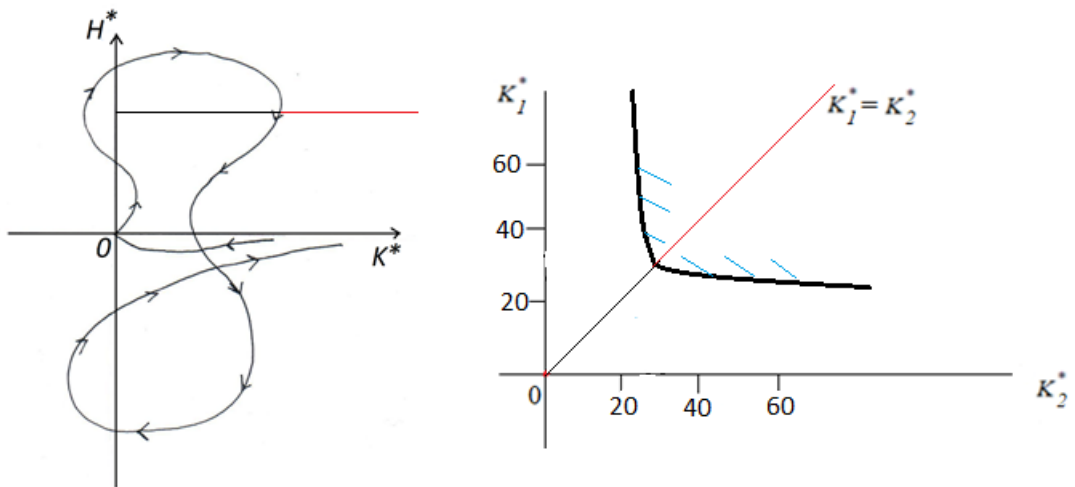


Рис. 4.4. Разбиение плоскости  $K_1^*, K_2^*$  на области с различной степенью неустойчивости для следующих значений параметров:

$$H^* = 1.6; E = \frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-5}; \frac{b}{a} = 0.5; \frac{M}{m} = 1.68$$

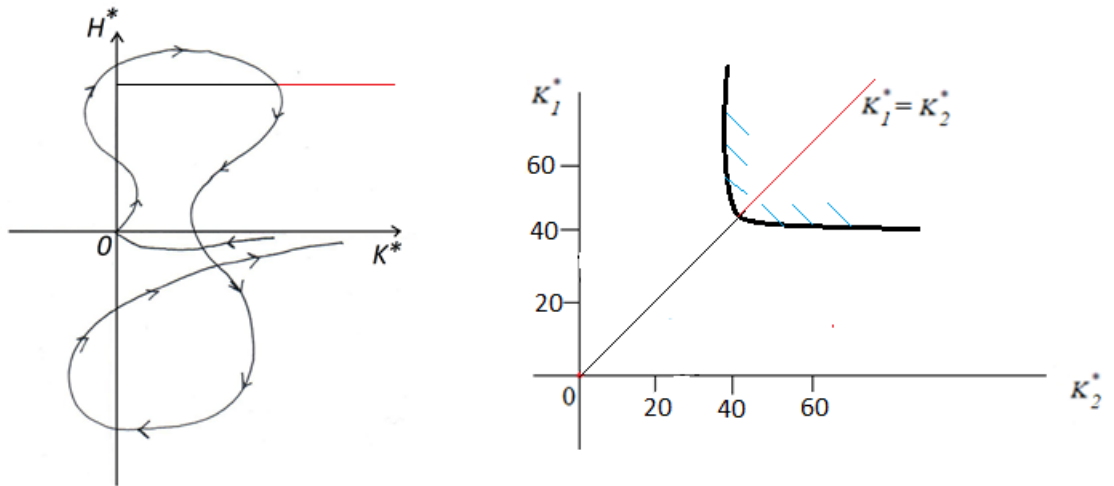


Рис. 4.5. Разбиение плоскости  $K_1^*, K_2^*$  на области с различной степенью неустойчивости для следующих значений параметров:

$$H^* = 2; E = \frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-5}; \frac{b}{a} = 0.5; \frac{M}{m} = 1.68$$

Из рис. 4.2-4.5 видно, что наличие анизотропной жесткости в системе не приводит к негативным эффектам. Напротив, учитывая то, что никакая реальная конструкция закреплений не дает их абсолютно изотропной жесткости, можно получить допустимые значения отклонений жесткости по осям, которые не приводят к потере устойчивости вращения.

### 4.3 Преобразование системы для бифуркационных значений параметров в случае изотропной жесткости

Аналогично предыдущему параграфу, положим в (3.5)  $K_1 = K_2 = K$ .

В этом случае можно получить систему для выражений вида  $f^H(\tau) = H_1^* - H_2^*$  и  $g^H(\tau) = H_1^* + H_2^*$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (f^H(\tau))^2 = \frac{4 \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2\right)^2 \tau^2} \left[ \left(\tilde{F}_\eta(\tau) + \tilde{F}_\eta(-\tau)\right)^2 + \left(2 \frac{M}{m} \tau^2 - 2K^* + \tilde{F}_\xi(\tau) + \tilde{F}_\xi(-\tau)\right)^2 \right] \\ g^H(\tau) = 2 \frac{\tilde{F}_\eta(\tau) + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \tilde{F}_\eta(-\tau)}{\tau \left(1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2\right)} \end{array} \right. \quad (4.4),$$

$$\text{здесь } \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 = -\frac{\tilde{F}_\xi(\tau) + \frac{M}{m} \tau^2 - K^*}{\tilde{F}_\xi(-\tau) + \frac{M}{m} \tau^2 - K^*}, K^* = \frac{K}{m\Omega^2}, H_1^* = \frac{H_1}{m\Omega}, H_2^* = \frac{H_2}{m\Omega}.$$

Из системы (4.4) получаются выражения для  $H_1^*$  и  $H_2^*$  как функций безразмерной частоты прецессии ротора:

$$H_1^*(\tau) = \frac{f^H(\tau) + g^H(\tau)}{2}, H_2^*(\tau) = -\frac{f^H(\tau) - g^H(\tau)}{2}. \quad (4.5)$$

Эти формулы определяют параметрически (с параметром  $\tau$ )  $D$  – кривую в плоскости параметров демпфирования закреплений при фиксированных значениях прочих параметров.

#### 4.4 Построение границ областей устойчивости в случае анизотропного демпфирования, сопоставление результатов с изотропным случаем.

Обратимся теперь к выражениям системы (4.5). При различных значениях  $K^*$  мы получаем соответствующее значение (или значения)  $H^*$ . Аналогично разделу 4.2, этим значениям отвечают точки на биссектрисе координатного угла плоскости  $H_1^*, H_2^*$  ( $H_1^* = H_2^*$  в изотропном случае). Биссектриса координатного угла будет разделена на части, отвечающие различным степеням неустойчивости. В случае

введения в систему анизотропного демпфирования происходит «расползание» области устойчивости с биссектрисы координатного угла аналогично тому, что было в предыдущем случае анизотропной жесткости закреплений оси ротора.

На рис. 4.6-4.8 показано разбиение плоскости параметров демпфирования закреплений для различных значений  $K^*$ :  $K^* = 40$ ;  $K^* = 50$ ;  $K^* = 20$  соответственно. Прочие параметры системы не менялись (см. раздел, посвященный анизотропной жесткости). Аналогично параграфу 4.2, приводится прорисовка бифуркационной кривой (см. рис. 4.1).

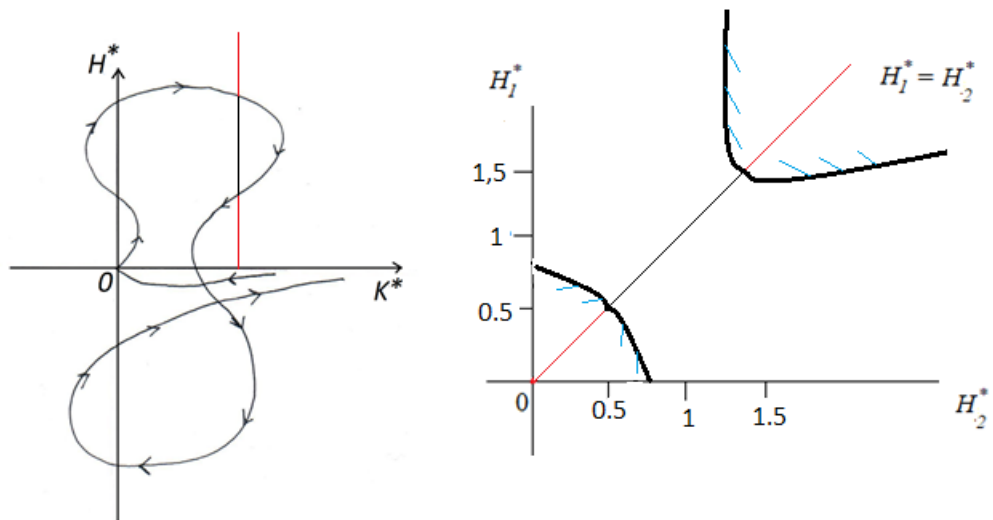


Рис. 4.6. Разбиение плоскости  $H_1^*, H_2^*$  на области с различной степенью неустойчивости для следующих значений параметров:

$$K^* = 40; E = \frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-5}; \frac{b}{a} = 0.5; \frac{M}{m} = 1.68$$



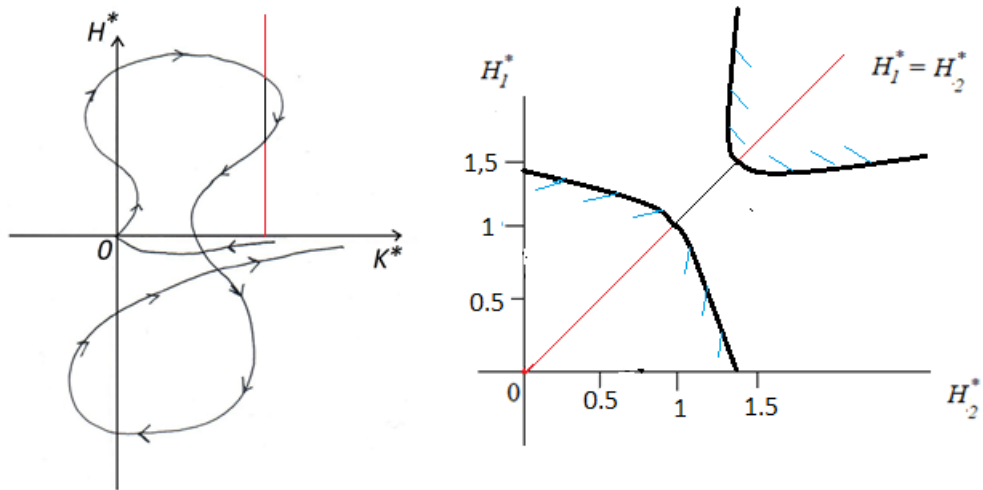


Рис. 4.7. Разбиение плоскости  $H_1^*, H_2^*$  на области с различной степенью неустойчивости для следующих значений параметров:

$$K^* = 50; E = \frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-5}; \frac{b}{a} = 0.5; \frac{M}{m} = 1.68$$

Красным цветом отмечена та часть биссектрисы координатного угла, которая отвечает области устойчивости. В случае введения анизотропии эта часть биссектрисы «расползается», что отмечено на части рисунка, отвечающей разбиению плоскости  $H_1^*, H_2^*$ .

Как и в случае анизотропной жесткости, описанной, наличие анизотропного демпфирования (рис. 4.1-4.3) в системе не приводит к негативным эффектам. Опираясь на произведенные расчеты, можно получить допустимые значения отклонений коэффициентов демпфирования и жесткости по осям, которые не приводят к потере устойчивости вращения.

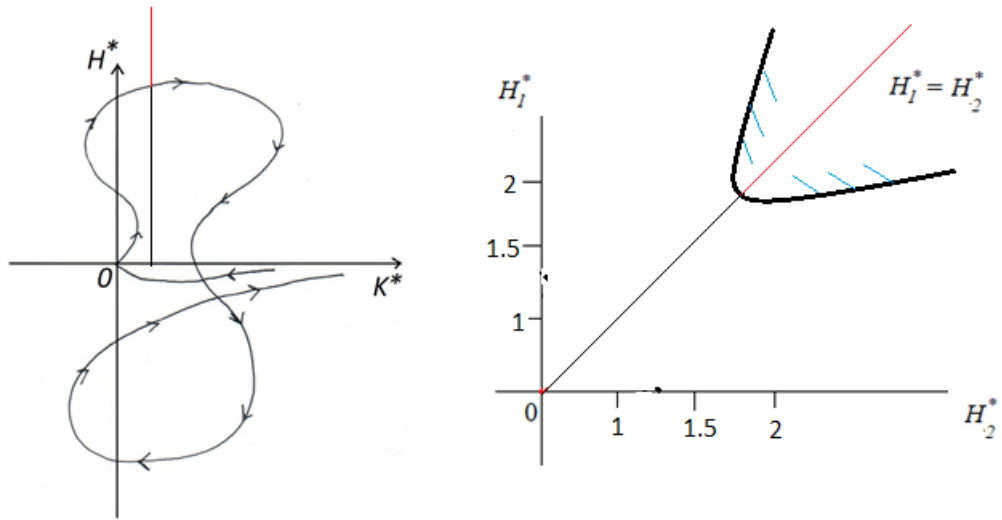


Рис. 4.8. Разбиение плоскости  $H_1^*, H_2^*$  на области с различной степенью

неустойчивости для следующих значений параметров:

$$K^* = 20; E = \frac{\nu}{\Omega a^2} = 10^{-5}; \frac{b}{a} = 0.5; \frac{M}{m} = 1.68$$

## Заключение

В работе представлены:

- 1) Метод исследования устойчивости стационарного вращения роторных систем, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, для случая изотропных закреплений оси ротора и в предположении постоянства абсолютной угловой скорости вращения ротора;
- 2) Обобщение оригинального метода из 1) на случай анизотропных закреплений оси ротора, численно-аналитический подход к построению границ областей устойчивости роторной системы для этого случая;
- 3) Результаты построения границ областей устойчивости стационарного вращения роторной системы, содержащей вязкую несжимаемую жидкость, в случае анизотропной жесткости закреплений оси ротора;
- 4) Результаты построения границ областей устойчивости стационарного вращения роторной системы, содержащей вязкую несжимаемую жидкость, в случае анизотропного демпфирования в закреплениях оси ротора;

Полученные в диссертации результаты позволяют дать рекомендации по выбору конструктивных параметров и режимов эксплуатации роторных систем с жидкостью, обеспечивающих нормальную работу таких систем. Используемая в диссертации методика может быть применена при разработке роторных систем с анизотропией закреплений оси вращения.

## Список литературы

1. Дерендяев Н. В., Сандалов В. М. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, частично заполненного вязкой несжимаемой жидкостью// ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 4. С. 578-586.
2. Дерендяев Н.В. Об устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // ДАН СССР. 1983. Т. 272. № 5. С.1073 — 1076.
3. Дерендяев Н. В., Сеняткин В. А. Условия устойчивости стационарного вращения цилиндра, заполненного слоисто-неоднородной вязкой несжимаемой жидкостью// ПМТФ. 1984. № 1. С. 34-44.
4. Дерендяев Н.В. Бифуркация Андронова-Хопфа в динамике роторной системы, содержащей жидкость // ДАН СССР. 1988. Т.301. №4. С. 798-801.
5. Derendyaev N.V., Vostrukhov A. V., Soldatov I. N. Stability and Andronov-Hopf bifurcation of steady-state motion of rotor system partly filled with liquid: continuous and discrete models // ASME. J. Appl. Mech. 2006. v. 73, No. 4. P. 580-589.
6. Дерендяев Н. В. Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость: Монография. - Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2014.- 154 с.
7. Дерендяев Н. В., Дерендяев Д. Н. Устойчивость стационарного вращения роторных систем с жидкостью в случае анизотропных закреплений оси ротора // Доклады РАН. – 2018, т. 480, № 1

8. Derendyaev N. V., Derendyaev D. N. Stability of steady rotation of rotor systems with fluid in the case of anisotropic fastening of the rotor axis// Doklady Physics. – 2018, vol. 63, № 7
9. Дерендяев Д.Н., Дерендяев Н.В. Исследование устойчивости стационарного вращения роторной системы с жидкостью, ось которой расположена в анизотропных закреплениях// Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83. №3. С. 324-334.
10. Дерендяев Д.Н., Дерендяев Н.В. Построение границ областей устойчивости режима стационарного вращения роторной системы с жидкостью, ось которой расположена в анизотропных закреплениях// Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83. №3. С. 335-343.
11. Дерендяев Н. В., Дерендяев Д. Н. Роторные системы с полостями, содержащими жидкость; изучение устойчивости вращения // Труды X Всероссийской научной конференции им. Ю. И. Неймарка «Нелинейные колебания механических систем». – Под редакцией Д.В. Баландина, В.И. Ерофеева, И. С. Павлова. Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. – 867 с.
12. Дерендяев Н.В., Дерендяев Д.Н. Исследование устойчивости стационарного вращения роторных систем с жидкостью// Труды Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики». – Москва: изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. – 222 с.

13. Дерендяев Д.Н., Дерендяев Н.В. О влиянии анизотропии демпфирования в закреплениях оси на устойчивость режима стационарного вращения ротора с жидкостью// Труды Всероссийской конференции молодых ученых – механиков. – Москва: изд- во Московского университета, 2018 – 172 с.
14. Дерендяев Д. Н. Способ построения границ областей устойчивости режима стационарного вращения ротора, содержащего жидкость// Тезисы докладов VII международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». – Москва: ТРП, 2018. – 148 с.
15. Дерендяев Н. В., Дерендяев Д. Н. Разветвление границ областей устойчивости режима стационарного вращения ротора с жидкостью, вызванное анизотропией закрепления его оси.// XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов – Уфа, РИЦ БашГУ, 2019. – 356 с.
16. Ишлинский А.Ю., Темченко М.Е. О малых колебаниях вертикальной оси волчка, имеющего полость, целиком наполненную идеальной несжимаемой жидкостью// ПМТФ. 1960. № 3.
17. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи// М.: Наука, 1989. 416 с.

18. Крейн С.Г., Моисеев Н.Н. О колебаниях твердого тела, содержащего жидкость со свободной поверхностью // ПММ. 1957. Т. 21, № 2. С. 169–174.
19. Моисеев Н.Н. О двух маятниках, наполненных жидкостью // ПММ. 1952. Т. 16, №6. С. 671–678.
20. Соболев С.Л. О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью // ПМТФ. 1960. № 3. С. 20–55.
21. Сретенский Л.Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде // Изв. АН СССР, ОТН, 1951. № 10. С. 1483–1494.
22. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость // М.: Наука, 1965. 440 с.
23. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, заполненными жидкостью // М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
24. Румянцев В.В. Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением // Вопросы прикладной математики и механики: Сб. науч. трудов. 1956. № 2.
25. Румянцев В.В. Об устойчивости вращения волчка с полостью, заполненной вязкой жидкостью // ПММ. 1960. Т. 24, № 4. С. 603–609.
26. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных // М.: Наука, 1987. 256 с.

27. Жак С.В. Об устойчивости некоторых частных случаев движения симметричного гироскопа, содержащего жидкие массы // ПММ. 1958. Т. 22, № 2. С. 245–249.
28. Игнатъев А.О. К достаточным условиям устойчивости осесимметричного волчка с жидким заполнением // Механика твердого тела: Респ. межвед. сб. Киев, 1977. №9. С. 82–86.
29. Игнатъев А.О., Марголис С.М., Савченко А.Я. Исследование областей устойчивости равномерных вращений асимметричного волчка с жидким заполнением // Механика твердого тела: Респ. меж-вед. сб. Киев, 1977. № 9. С. 71–81.
30. Карапетян А.В. Об устойчивости регулярной прецессии симметричного твердого тела с эллипсоидальной полостью // Вестник Моск. ун-та. Мат., Мех. 1972. № 6. С. 122–125.
31. Рубановский В.Н., Степанов С.Я. О теореме Рауса и методе Четаева построения функций Ляпунова из интегралов уравнений движения // ПММ. 1969. Т. 33. Вып. 5.
32. Румянцев В.В. Методы Ляпунова в исследовании устойчивости движений твердых тел с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 6.
33. Румянцев В.В. Устойчивость вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 6.



34. Савченко А.Я., Игнатов А.Л. Исследование устойчивости равномерных вращений симметричного волчка с жидким заполнением // ПММ. 1974. Т. 10, № 8. С. 107–111.
35. Цельман Ф.Х. Об устойчивости вращения твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью // ПММ. 1962. Т. 26, № 6. С. 1128–1130.
36. Четаев Н.Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 2.
37. Parks P.S. Stability of liquid-filled spinning spheroids via Lia-punov's second method // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1976. Vol. 46, No 2. P. 259–262.
38. Пожарицкий Г.К. Задача минимума в задаче об устойчивости равновесия твердого тела с частичным жидким заполнением // ПММ. 1962. Т. 26, № 4. С. 593–605.
39. Пожарицкий Г.К., Румянцев В.В. Задача минимума в вопросе об устойчивости движения твердого тела с полостью, наполненной жидкостью // ПММ. 1963. Т. 27, № 1. С. 11–26.
40. Румянцев В.В. Об устойчивости движения твердого тела с жидкостью, обладающей поверхностным натяжением // ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 4. С. 746–753.

41. Румянцев В.В. Об устойчивости установившихся движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 6. С. 977–991.
42. Досаев М.З., Самсонов В.А. Об устойчивости вращения тяжелого тела с вязким наполнителем // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 427–433.
43. Куликов В.П., Самсонов В.А. О малых колебаниях около тривиального вращения на струне твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью // МТТ. 1985. № 4. С. 33–37.
44. Самсонов В.А. О задаче минимума функционала при исследовании устойчивости движения тела с жидким наполнением // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 523–526.
45. Самсонов В.А. О некоторых задачах минимума в теории устойчивости движения тела с жидкостью // Матем. методы в динамике космич. аппаратов: Сб. науч. трудов. М.: ВЦ АН СССР, 1968. Вып. 6. С. 250–268.
46. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость // М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. 230 с.
47. Ишлинский А.Ю., Стороженко В.А., Темченко М.Е. Вращение твердого тела на струне и смежные задачи // М.: Наука, 1991. 330 с.
48. Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н. О движении точечной массы вдоль колеблющейся струны // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 703–706.
49. Малашенко С.В. Некоторые экспериментальные исследования, относящиеся к вращению тел // ПМТФ. 1960. № 3. С. 205–211.

50. Малашенко С.В., Темченко М.Е. Об одном методе экспериментального исследования устойчивости движения волчка, внутри которого имеется полость, наполненная жидкостью // ПМТФ. 1960. № 3. С. 76–80.
51. Епишев Л.В. О динамической неустойчивости вращающегося ротора при неполном наливе жидкости // Научн. докл. высш. школы. Машиностроение и приборостроение. 1959. № 2. С. 66–74.
52. Капица П.Л. Устойчивость и переход через критические обороты быстровращающихся роторов при наличии трения // ЖТФ. 1939. Т. 9. Вып. 2. С. 124–147
53. Десятов В.Т. Экспериментальное исследование устойчивости вращательного движения тел с жидким наполнением // Динамика космических аппаратов и исследование космического пространства. М.: Машиностроение, 1986. С. 254–261.
54. Zhu Changsheng. Experimental investigation into the instability of an overhung rigid centrifuge rotor partially filled with fluid // ASME. J. Vibrat. Acoust. 2002. V. 124. P. 483–491.
55. Кумок Ю.З., Новгородцева Л.З. О малых свободных колебаниях вращающегося цилиндра, частично заполненного жидкостью // ПМ. 1965. Т. 1. Вып. 12. С. 87–94.
56. Мархашов Л.М. Колебания и устойчивость твердой оболочки с идеальной жидкостью на упругих опорах (к теории карусельного гидроканала) // ПМТФ. 1962. № 6. С. 81–84.

57. Дайч И.М. Неконсервативная задача о колебаниях твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью // ПМ. 1971. Т. 7. Вып. 7. С. 44–48.
58. Дайч И.М. О динамических воздействиях ротативных машин с жидким заполнением на строительные конструкции // Строительная механика и расчет сооружений. 1967. №4.
59. Дайч И.М., Бар И.Л. Колебания вращающегося твердого тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью // ПМ. 1973. Т. 9. Вып. 5. С. 64–69.
60. Дайч И.М., Каждан Л.С. Колебания вращающегося твердого тела с полостью, частично заполненной произвольной вязкой жидкостью // ПМ. 1973. Т. 9. Вып. 8. С. 96–100.
61. Saito S., Someya T. Self-excited vibration of a rotating hollow shaft partially filled with liquid // Trans. ASME. J. Mech. Design. 1980. V. 102, No 1. P. 185–192.
62. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости // М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
63. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем // М.: Физматгиз, 1960.
64. Вольф (мл.). Динамика прецессии ротора, частично заполненного жидкостью // Прикладная механика. Труды ASME. 1968. Т. 35. Серия E, № 4.

65. Лихтенберг Г. Колебания упруго закрепленного вращающегося ротора, частично заполненного жидкостью // Технология и конструирование машиностроения. Труды ASME. 1982. Т. 104, № 2. С. 79–86.
66. Crandall S.H. Rotating and Reciprocating Machines // Hand-book of Engineering Mechanics / Ed. W. Flügge. New York: McGraw-Hill, 1962. P. 58.1–58.24.
67. Дерендяев Н.В., Сандалов В.М. Устойчивость стационарного вращения ротора, заполненного стратифицированной вязкой несжимаемой жидкостью // Машиноведение. 1986. №1. С. 19–26
68. Дерендяев Н.В., Сеняткин В.А. Вычисление моментов гидродинамических сил, действующих на тело, совершающее коническую прецессию: Отчет о НИР. Горький, 1987. 40 с. № ГР 0186. 0115703.
69. Дерендяев Н.В., Сеняткин В.А. Исследование устойчивости стационарного вращения осесимметричного тела с закрепленной точкой, содержащего неоднородную вязкую несжимаемую жидкость // Устойчивость движения. Новосибирск, 1985. С. 119–122.
70. Сандалов В.М. Динамическая неустойчивость турбомашин, обусловленная радиальными зазорами в подшипниках скольжения и жидкостным наполнением полостей роторов // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Горький, 1982.

71. Сеняткин В.А. Неустойчивость роторных систем, обусловленная содержащейся в них вязкой жидкостью// Дисс. канд. физ.-мат. наук. Горький, 1985.
72. Солдатов И.Н. Устойчивость и автоколебания роторных систем, содержащих проводящую вязкую жидкость в магнитном поле // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Нижний Новгород, 1994.
73. Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н. Дискретная модель ротора с жидкостью: устойчивость и автоколебания // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Механика. 2004. Вып. 1 (6). С. 13–23.
74. Дерендяев Н.В., Солдатов И.Н. Устойчивость стационарных движений роторной системы с жидкостью в рамках дискретной модели // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 6. С. 984–993.
75. R. D. Firouz – Abadi, M. R. Permoon, H. Haddadpour. On the instability of spinning cylindrical shells partially filled with liquid// International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2012. Vol. 12, № 3.
76. R. D. Firouz-Abadi, M. A. Noorian, H. Haddadpour. A fluid–structure interaction model for stability analysis of shells conveying fluid// Journal of Fluids and Structures. 2010. Vol. 26. № 5. 747-763
77. H. Wang, C. Chen. Stability analysis of a rotor system with fluid applying wave resonance theory// Physics of fluids. 2020. Vol. 32. Issue 5

78. J. Cruz, M. Velazquez, O. Chavez. Stability Analysis of a Rotor Systems with Flow Forces// Industrial and Robotic Systems. Conference paper. 2020. 65-75
79. Бармина О. В., Никифоров А. Н., Татусь Н. А. Двумерное поверхностное движение синхронно и асинхронно вращающейся жидкости внутри ротора с радиальными перегородками// Вестник научно-технического развития. 2015. № 12(100).
80. Никифоров А. Н., Татусь Н. А., Шохин А. Е. О волновом резонансе экспериментальных роторов с маловязкой жидкостью и радиальными перегородками// Вестник научно-технического развития. 2015. № 10(98).
81. Дерендяев Н. В., Солдатов И. Н. Волновые резонансы и устойчивость вращения роторных систем, содержащих вязкую жидкость// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (5), с. 2138–2139.
82. Баутин Н.Н., Шильников Л.П. Дополнение в книге: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения // М.: Мир, 1980. 368 с.
83. Дайч И.М. Неконсервативная задача о колебаниях твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной жидкостью // ПМ. 1971. Т. 7. Вып. 7. С. 44–48.

84. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости // М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
85. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем // Л.: ЛКВВИА, 1949. 141 с.
86. Body cavities: function and phylogeny: International symposium: Papers. Mucchi Editore, 1995. 328 p.
87. K. Dissler, G. P. Galdi, G. Mazzone, and P. Zunino, Inertial motions of a rigid body with a cavity filled with a viscous liquid, Arch. Rational Mech. Anal. 2016. February; pp. 1–40.
88. Pan, S. C.; Cai, J. S. Investigation of vortical flow over bluff bodies with base cavities // Chinese Society of Theoretical and Applied Mechanics. 2012. Vol 28; Number 5; pp 1238-1247.