

На правах рукописи



Юсипов Игорь Ильясович

**Динамический хаос, бифуркации и локализация в
математических моделях открытых квантовых систем**

Специальность 1.3.4 —
«Радиофизика»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2022

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Научный руководитель: **Иванченко Михаил Васильевич**
доктор физико-математических наук, профес-
сор, ИИТММ, ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Официальные оппоненты: **Голдобин Денис Сергеевич**,
кандидат физико-математических наук,
Пермский государственный национальный ис-
следовательский университет,
доцент кафедры теоретической физики

Куркин Семен Андреевич,
доктор физико-математических наук,
АНО ВО «Университет Иннополис»,
Профессор лаборатории Нейронауки и ко-
гнитивных технологий Центра технологий
компонентов робототехники и мехатроники

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего об-
разования «Саратовский национальный
исследовательский государственный универ-
ситет имени Н. Г. Чернышевского»

Защита состоится 12 октября 2022 г. в 17 ч. 00 мин. на заседании дис-
сертационного совета 24.2.340.03 при Нижегородском государственном
университете им. Н.И. Лобачевского» по адресу: 603022, г. Нижний Новго-
род, пр. Гагарина, д. 23, корп. 1, ауд 420.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Ни-
жегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского и на
сайте: <https://diss.unn.ru/1256>.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью учре-
ждения, просьба направлять по адресу: 603022, г. Нижний Новгород, пр.
Гагарина, д. 23, корп. 1, ауд 420, ученому секретарю диссертационного со-
вета 24.2.340.03.

Автореферат разослан «___» _____ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
24.2.340.03,
д.ф.-м.н.



Клюев Алексей Викторович

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Исследование колебательно-волновой динамики, закономерностей, связанных с формированием пространственно-временных структур, явлений динамического хаоса и локализации в неоднородных, нелинейных и нестационарных системах является актуальной задачей радиофизики. В последнее время большое внимание уделяется динамике открытых многочастичных квантовых систем (нано- и оптомеханические системы, сверхпроводящие системы), в которых, помимо достаточно хорошо изученных в рамках гамильтоновского формализма эффектов многочастичного взаимодействия (нелинейных эффектов), определяющую роль играют процессы взаимодействия с окружающей средой (диссипативные эффекты). В контексте задач обработки сигналов подобными системами, а также управления их режимами, большой интерес вызывает изучение эффектов периодической модуляции.

В силу трудоёмкости проведения физических экспериментов, особую важность представляют теоретические результаты, получаемые при помощи математического моделирования. Одним из самых распространённых способов математического описания открытых квантовых систем является уравнение Линдблада для матрицы плотности системы. Во многих случаях в рамках приближения среднего поля удаётся перейти к математическим моделям в виде нелинейных дифференциальных уравнений. В этих системах наблюдается богатая динамика: периодические колебания, динамический хаос, бифуркационные переходы между различными режимами. Вместе с тем, практически не изученной остаётся соответствующая динамика и ее характеристики в исходном уравнении Линдблада, недостаточно развиты методы и подходы к изучению сложной динамики диссипативных квантовых систем, для которых среднеполевое приближение не применимо (например, в силу небольшого числа квантовых частиц), и нелинейную модель получить невозможно.

В настоящее время эти пробелы заполняются, и теория диссипативного квантового хаоса переживает активное развитие, в первую очередь, в рамках обобщения методов и подходов классической теории бифуркаций и детерминированного хаоса (Г. Осипов, А. Храмов, А. Короновский, А. Пиковский, П. Хэннги, Д. Полетти, Э. Отт, Ю. Куртц и др.). В работах научной группы С. Денисова показана аналогия между некоторыми классическими и квантовыми бифуркациями. В то же время остаются вопросы о развитии других бифуркационных сценариев, а также о методах исследования квантовых бифуркаций. Также остаётся нерешённой проблема количественной оценки диссипативного квантового хаоса.

Значительный вклад в развитие теории одного из основополагающих явлений структурообразования – локализации в консервативных пространственно-неоднородных системах внесли научные группы С. Флаха, А.

Пиковского, С. Обри, Б. Файна и др. Локализацией в открытых квантовых системах активно занимаются научные группы И. Лесановского, Б. Альтшулера, И. Алейнера и др. Однако, в данном контексте существует ряд нерешённых задач. В частности, недостаточно изучены свойства одночастичной и многочастичной локализации в асимптотических состояниях открытых квантовых систем. В каких условиях эти явления могут проявляться, несмотря на эффекты диссипации? Какими численными методами, критериями их можно обнаружить и охарактеризовать? Наконец, есть ли взаимосвязь между локализацией и хаосом в квантовых диссипативных системах?

Целью данной работы является обобщение ряда методов и подходов теории колебаний и динамического хаоса на случай открытых (диссипативных) квантовых систем, в первую очередь – определение квантового ляпуновского показателя, исследование динамических режимов в математических моделях таких систем, бифуркационных переходов между ними, образование пространственных структур на примере явления локализации, а также развитие и программная реализация численных методов, позволяющих получить и охарактеризовать явления квантового хаоса и локализации в открытых квантовых системах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Исследовать явление квантового диссипативного хаоса в математических моделях открытых квантовых систем. Обнаружить новые квантовые аналоги классических бифуркаций, описать их качественно и количественно. Разработать метод вычисления старшего квантового показателя Ляпунова, позволяющего количественно оценить хаотизацию динамики открытой квантовой системы. Определить качественные и приближенные аналитические характеристики диссипативного квантового хаоса, которые могут быть оценены в физическом эксперименте. Изучить способы управления степенью хаотизации динамики открытых квантовых систем на основе спин-фотонного взаимодействия.
2. Исследовать одночастичную и многочастичную локализацию в асимптотических состояниях открытых квантовых систем. Разработать методы управления свойствами локализации, а также исследовать механизмы распространения волновых пакетов в системах с одночастичной локализацией. Исследовать количественные характеристики многочастичной локализации. Изучить взаимосвязь между режимами многочастичной локализации и квантового диссипативного хаоса.
3. Разработать программный комплекс для численного моделирования динамики открытых квантовых систем с большим числом состояний, включающий в себя возможность анализа отдельных

квантовых траекторий, поиск асимптотических состояний системы путём численного интегрирования или поиска собственных состояний системы.

Научная новизна:

1. В математической модели открытого периодически модулируемого квантового димера впервые обнаружен квантовый аналог классической бифуркации Неймарка—Сакера (рождение тора из-за неустойчивости предельного цикла). Предложены качественные и количественные характеристики данного явления [A1].
2. Впервые предложен новый численный метод нахождения старшего квантового показателя Ляпунова, основанный на методе квантовых траекторий. Данный подход позволяет исследовать структуру регулярных и хаотических областей в пространстве параметров открытой квантовой системы. Как и классический старший показатель Ляпунова, его квантовый аналог становится положительным в случае хаотической динамики системы [A2].
3. Впервые предложены новые количественные характеристики диссипативного квантового хаоса, которые могут наблюдаться в реальном физическом эксперименте [A3]. Для широкого класса квантовых систем было показано, что в регулярном и хаотическом режимах наблюдается качественно различная статистика распределения времён между последовательными излучениями системой отдельных фотонов. При переходе в режим квантового хаоса распределение времени ожидания фотона становится существенно не пуассоновским, появляется степенная асимптотика.
4. В модели открытого квантового резонатора в результате взаимодействия между периодическими модуляциями, диссипативными механизмами и взаимодействием между фотонной и спиновой подсистемами, возникает сложная динамика [A4]. Данное взаимодействие при определённых параметрах может приводить систему как в хаотическое, так и регулярное состояние.
5. Обнаружены следы *одночастичной локализации* в асимптотических состояниях открытых квантовых систем [A5]. Предложен метод управления структурой квантового аттрактора с признаками локализации, использующий фазовые свойства экспериментально реализуемой и управляемой диссипации. Установлена устойчивость локализации к дефазирующей диссипации [A6]. Исследована зависимость типа распространения волновых пакетов в открытых квантовых системах с локализацией от типа управляемой диссипации [A7].
6. Обнаружено явление *многочастичной локализации* в асимптотических состояниях открытых квантовых систем. Установлено, что следы многочастичной локализации сохраняются даже в

присутствии дефазирующей диссипации. Показано, что свойства многочастичной локализации находят отражение в статистике дисбаланса, энтропии запутанности операторного пространства и статистике спектра асимптотической матрицы плотности [A8]. Впервые обнаружена связь между переходом к многочастичной локализации и переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике [A9].

7. Разработан программный комплекс на языке C++, осуществляющий численное моделирование открытых квантовых систем. Асимптотические состояния находятся путём численного интегрирования уравнения Линдблада схемами высоких порядков или путём решения задачи по поиску собственных векторов и значений для матрицы оператора Линдблада. Программный комплекс предусматривает возможность моделирования и анализа отдельных квантовых траекторий. В программном комплексе реализован новый численный алгоритм, осуществляющий вычисление старшего квантового показателя Ляпунова.

Практическая значимость. В последние годы наблюдается бурное развитие в области прикладных квантовых вычислений. Квантовые чипы, разработанные компаниями Google, Intel, IBM, и D-Wave, состоят из сверхпроводящих кубитов, которые являются открытыми квантовыми системами и взаимодействуют с окружающей средой. Данные технологии могут быть использованы не только для выполнения квантовых вычислений, но и для изучения многочастичной локализации [1] и других сложных состояний в открытых квантовых системах [2]. Исследование диссипативного квантового хаоса и его механизмов позволит использовать диссипативные эффекты (вместо того, чтобы бороться и подавлять их) для создания принципиально новых режимов сверхпроводящих квантовых систем, решающих задачу устойчивой обработки квантовой информации на длительных временных масштабах.

Методология и методы исследования. Открытые квантовые системы описываются в рамках формализма Линдблада [3] для матрицы плотности. Количественный анализ моделей осуществлялся посредством прямого численного интегрирования уравнения Линдблада в случае, если в системе есть модуляция или посредством поиска собственного вектора матрицы оператора Линдблада, соответствующего нулевому собственному числу (если модуляции нет). При этом для вычислений использовался как классический базис гильбертова пространства состояний квантовой системы, так и специальный базис [A10], состоящий из обобщения матриц Гелл-Манна на любое количество состояний (генераторы $SU(N)$ групп). Также применялось микроскопическое описание открытых квантовых систем в терминах отдельных квантовых траекторий, что позволяло анализировать динамику в асимптотическом состоянии [4]. Для системы

открытого периодически модулируемого квантового димера также исследовалась математическая модель в виде нелинейной динамической системы второго порядка, полученная в рамках приближения среднего поля. В этом случае применялись методы и подходы теории колебаний, бифуркационного анализа и теории динамического хаоса. Эти методы получили обобщение на случай квантовых диссипативных систем и были применены для их исследования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В математической модели открытого квантового димера реализуется квантовый аналог классической бифуркации Неймарка—Сакера, заключающейся в рождении инвариантного тора из-за неустойчивости предельного цикла [A1].
2. Разбегание близких квантовых траекторий позволяет определить квантовый аналог старшего показателя Ляпунова и использовать его как характеристику диссипативного квантового хаоса [A2].
3. В определённом классе открытых квантовых систем можно получить количественные характеристики диссипативного квантового хаоса, основанные на статистике распределения времён между последовательными излучениями системой отдельных фотонов. В распределении появляется степенная асимптотика при хаотической динамике системы. Данная характеристика может быть измерена в реальном физическом эксперименте [A3].
4. В системе открытого квантового резонатора со спином существует возможность контролировать тип динамики системы за счёт изменения силы спин-фотонного взаимодействия [A4].
5. В открытых квантовых системах можно наблюдать признаки одночастичной локализации в асимптотических состояниях [A5]. В таких системах волновые пакеты могут распространяться в режиме диффузии или баллистики [A7]. Существуют механизмы управления локализационными свойствами асимптотического состояния [A6].
6. В открытых квантовых системах можно наблюдать признаки многочастичной локализации в асимптотических состояниях. Значения дисбаланса, энтропии запутанности операторного пространства и статистика спектра асимптотической матрицы плотности могут быть использованы для количественной характеристики многочастичной локализации [A8]. Переход к многочастичной локализации сопровождается переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике [A9].
7. Реализованный программный комплекс позволяет моделировать открытые квантовые системы, исследовать явления локализации и хаоса, производить спектральный анализ, изучать динамику отдельных квантовых траекторий.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением современных и принятых в научном сообществе методов теории колебаний, бифуркационного анализа, теории динамического хаоса, методов численного моделирования физики открытых квантовых систем, сопоставлением полученных результатов с результатами исследования нелинейных моделей, полученных в приближении среднего поля, а также сравнением результатов с работами других авторов. Результаты численных экспериментов полностью согласуются с теорией.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на:

- 22-ая Нижегородская сессия молодых учёных (естественные, математические науки) (Россия, Нижний Новгород, 23–26 мая 2017) [A12];
- XXI научная конференции по радиофизике (Россия, Нижний Новгород, 15–22 мая 2017) [A13];
- Третий Всероссийский молодёжный научный форум «Наука будущего – наука молодых» (Россия, Нижний Новгород, 12–15 сентября 2017) [A14];
- Международная конференция «Shilnikov WorkShop 2017» (Россия, Нижний Новгород, 15–16 декабря 2017) [A15];
- 23-я Нижегородская сессия молодых учёных (технические, естественные, математические науки) (Россия, Нижний Новгород, 22–23 мая 2017) [A16];
- XXII научная конференция по радиофизике, посвященная 100-летию Нижегородской радиолaborатории (Россия, Нижний Новгород, 15–29 мая 2018) [A17];
- XIII Всероссийская конференции молодых учёных «Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Россия, Саратов, 4–6 сентября 2018) [A18];
- 9th International Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon2019) (Россия, Инополис, 8–11 сентября 2019) [A19];
- International Conference «Quantization of Dissipative Chaos: Ideas and Means» (Germany, Bad-Honnef, 16–20 декабря 2019);
- XXIV научная конференция по радиофизике, посвященная 75-летию радиофизического факультета (Россия, Нижний Новгород, 13–31 мая 2020) [A20].

Личный вклад. Все представленные в работе результаты были либо получены лично автором, либо при его непосредственном участии. Автор принимал прямое участие в постановке задач, получении и анализе полученных результатов, а также в подготовке публикаций в научных журналах и представлении докладов на тематических конференциях.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 19 печатных изданиях, 10 — в периодических научных журналах,

индексируемых Web of Science и Scopus, 9 — в тезисах докладов. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, формулируется цель, ставятся задачи работы, излагается научная новизна и практическая значимость представляемой работы, приводятся положения, выносимые на защиту. Введение содержит сведения о достоверности и апробации результатов.

Первая глава посвящена описанию качественных характеристик объекта исследования — открытых квантовых систем и методов их численного моделирования.

Открытые квантовые системы являются неотъемлемой частью экспериментальной и технологической реальности. Практические реализации нано- и оптомеханических систем, сверхпроводящих элементов не осуществимы в полной изоляции от окружающей среды. Описание динамики таких систем через изолированные квантовые системы (например, при помощи уравнения Шрёдингера) является грубым приближением реальных физических процессов, потому что диссипация в данном случае является полноправным генератором эволюции и способна привести систему в совершенно новые состояния. Таким образом, асимптотические состояния открытых квантовых систем определяются не только гамильтоновой динамикой, но взаимодействием с окружающей средой.

Физические эксперименты с открытыми квантовыми системами являются трудоёмкими, поэтому особую важность имеет теоретическое исследование и математическое моделирование таких систем. Получаемые математические модели в виде систем дифференциальных уравнений имеют, как правило, чрезвычайно большую размерность. Из-за этого основным подходом к изучению открытых квантовых систем является численное моделирование.

Воздействие окружающей среды на систему заключается в индуцировании стохастических переходов между уровнями энергии и внесении неопределённости в разность фаз между состояниями системы. Таким образом, состояние открытой квантовой системы описывается в терминах усреднённых по ансамблю состояний с использованием формализма матрицы плотности. Матрица плотности ρ описывает распределение вероятностей квантовых состояний $|\psi_n\rangle$ в матричном представлении $\rho = \sum_n p_n |\psi\rangle \langle\psi|$, где p_n - вероятность того, что система находится в квантовом состоянии $|\psi\rangle_n$. Общепринятым подходом к описанию динамики открытых

квантовых систем является уравнение Линдблада для матрицы плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = -i[H(t), \rho(t)] + \sum_{k=1}^K \gamma_k \left(V_k \rho(t) V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho(t)\} \right), \quad (1)$$

где первое слагаемое отвечает за когерентную эволюцию системы с гамильтонианом $H(t)$, а второе слагаемое — диссипативная часть, отвечающая за взаимодействие с окружающей средой. Диссипация осуществляется через K каналов, каждый из которых определяется диссипативным оператором V_k и скоростью диссипации γ_k .

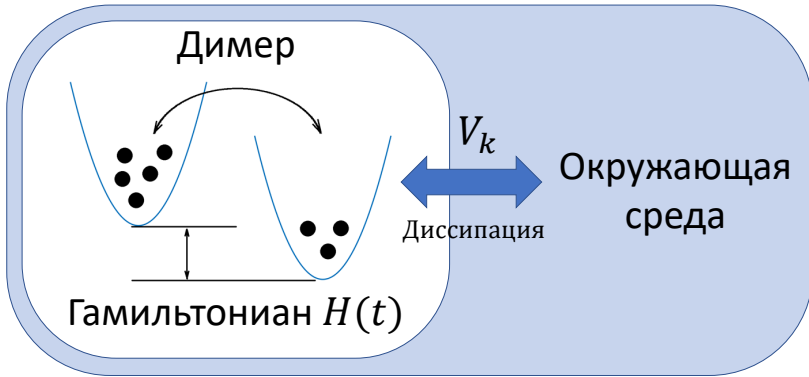


Рис. 1 — Схематическое представление модели открытого квантового димера

На рисунке 1 изображено схематическое представление модели открытого квантового димера, описывающей процесс туннелирования квантовых частиц в двумном потенциале. Экспериментальная реализация, которая описывается данной моделью, заключается в движении ультрахолодных атомов конденсатов Бозе—Эйнштейна в эффективных оптических потенциалах, созданных за счёт интерференции лазерных пучков. Переход от реального эксперимента к физической модели связан с физическими допущениями: не учитывается неоднородность оптической решётки, потенциальные ямы одинаковой глубины, учитывается только попарное взаимодействие частиц. Затем для физической модели открытого квантового димера формулируется математическая модель в виде уравнения Линдблада (1) с указанием конкретного вида оператора Гамильтона $H(t)$ и диссипативных операторов V_k . Для этой модели в среднеполевом приближении можно получить двуменную классическую нелинейную систему (4).

Наряду с математической моделью открытого квантового димера, описанного в главе 3, в работе рассматриваются математические модели открытой системы Андерсона (глава 2), открытой системы с многочастичной локализацией (глава 2), модель открытого квантового резонатора с фотонной модой и добавлением спиновой подсистемы (глава 3). Некоторые из рассматриваемых моделей впервые предложены в данной работе (открытая система Андерсона, фотонная мода со спином), а для ранее известных моделей (димер, модель с многочастичной локализацией) предложены новые подходы к их численному анализу (вычисление квантового показателя Ляпунова, микроскопический анализ динамики на квантовом аттракторе).

Различные открытые квантовые системы отличаются друг от друга формой оператора Гамильтона $H(t)$ и диссипативных операторов V_k в уравнении Линдблада (1). Если конкретная система имеет S состояний, то уравнение Линдблада представляется в виде системы из S^2 линейных дифференциальных уравнений первого порядка для комплекснозначных элементов матрицы плотности.

Для нахождения асимптотической матрицы плотности открытой квантовой системы в работе используются три общепринятых метода: спектральный метод, численное интегрирование и метод квантовых траекторий. Стоит отметить, что метод квантовых траекторий позволяет реализовать новый, разработанный в рамках данной работы, метод численного нахождения старшего квантового показателя Ляпунова, исследовать статистику диссипативных событий (квантовых скачков) и изучать динамические свойства системы в асимптотическом состоянии. С вычислительной точки зрения метод квантовых траекторий допускает эффективную параллельную реализацию.

Вторая глава посвящена исследованию квантовых аналогов классических бифуркационных сценариев в открытых квантовых системах.

Бифуркационный анализ является одним из основных подходов изучения нелинейной динамики и ее приложений. Применение бифуркационного анализа в сфере квантовой физики долгое время рассматривалось только в контексте изолированных систем. Активно исследовался гамильтонов хаос (в изолированных системах), спектральные характеристики которого являются очень хорошо изученными. Применение бифуркационного анализа к открытым квантовым системам обычно осуществляется в связке с соответствующими классическими нелинейными среднеполевыми моделями. Однако перечень обнаруженных в открытых квантовых системах типов бифуркаций все ещё остаётся небольшим: седлоузловая, типа вилки, сценарий перехода к квантовому хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

В данной работе обнаружен новый тип бифуркации в открытых квантовых системах — квантовый аналог классической бифуркации Неймарка—

Сакера (рождение тора из-за неустойчивости предельного цикла) [A1]. Модель открытого квантового димера, в которой обнаружена бифуркация, является хорошо изученной и описывается уравнением Линдблада (1) с гамильтонианом следующего вида:

$$H(t) = -\left(b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1\right) + \frac{2U}{N} \sum_{g=1,2} n_g (n_g - 1) + A \sin(\Omega t) (n_2 - n_1), \quad (2)$$

где первое слагаемое отвечает за перемещение бозонов между двумя узлами димера, второе слагаемое — за взаимодействие бозонов с силой U , находящихся в одном и том же узле, и третье слагаемое — периодическая модуляция с периодом T . Всего в системе N бозонов. Операторы b_j и $b_j^\dagger$ соответствуют рождению и уничтожению бозона на сайте j , $n_j = b_j^\dagger b_j$ — оператор числа частиц на сайте j . Каждое базисное состояние системы определяется числом бозонов в первом сайте димера (размерность гильбертова пространства $S = N + 1$).

Взаимодействие с окружающей средой в уравнении (1) определяется диссипативным оператором:

$$V = (b_1^\dagger + b_2^\dagger) (b_1 - b_2), \quad (3)$$

который синхронизирует динамику на сайтах димера за счёт рециркуляции антисимметричных противофазных состояний в симметричные и синфазные.

Для данной модели существует среднеполевое приближение в пределе бесконечного числа частиц, сводящееся к системе нелинейных дифференциальных уравнений на сфере:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = -2\mathcal{J} \sin(\varphi) + 4\gamma \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \dot{\varphi} = -2\mathcal{J} \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} - 2\varepsilon(t) + 4U \cos(\vartheta) - 4\gamma \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \end{cases} \quad (4)$$

Число частиц в первом сайте димера в среднеполевой модели вычисляется по формуле:

$$n = \frac{N}{2} (1 + \cos(\vartheta)). \quad (5)$$

Обе модели численно исследовались при одних и тех же значениях параметров. В среднеполевой модели обнаружена классическая бифуркации Неймарка—Сакера. Соответствующая бифуркационная диаграмма для стробоскопического отображении числа частиц в потенциальной яме представлена на рисунке 2а. На рисунке 2б представлены диагональные элементы матрицы плотности для открытой квантовой системы при тех же самых параметрах системы. Между двумя графиками наблюдается

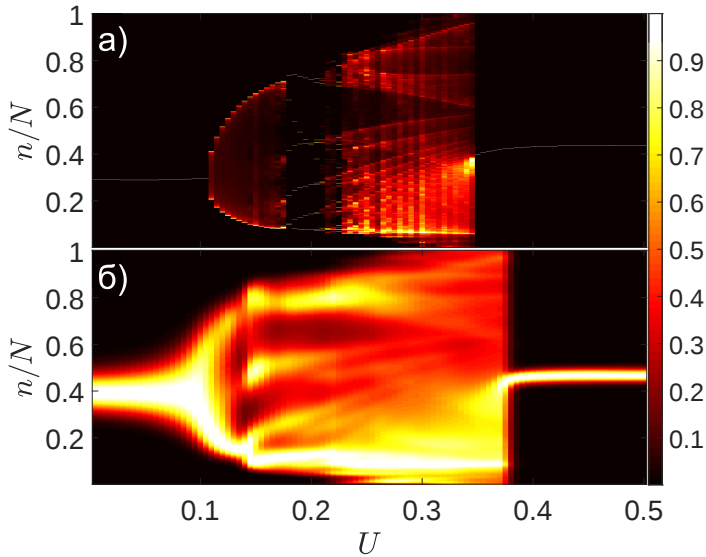


Рис. 2 — Бифуркация Неймарка—Сакера для модели открытого квантового димера: (а) классическая бифуркация для среднеполевой аппроксимации, цветом обозначено относительное число частиц в первом сайте димера; (б) квантовая бифуркация для открытой квантовой системы, цветом обозначены диагональные элементы асимптотической матрицы плотности

структурное соответствие: при увеличении параметра U происходит рождение инвариантного тора из унимодального распределения, переход к хаосу и последующее резкое возвращение к унимодальному распределению. Таким образом, был обнаружен квантовый аналог классической бифуркации Неймарка—Сакера. Данный феномен также проявляется в спектральных свойствах отображения Флоке: пара сопряжённых собственных значений приближается к единичной окружности (в полной аналогии с классической бифуркацией). В работе предлагаются дополнительные численные критерии, характеризующие квантовую бифуркацию.

Также третья глава посвящена разработке новых численных критериев квантового диссипативного хаоса, исследованию математических моделей, описывающих реальные физические системы, в которых предложенные признаки хаоса могут быть измерены экспериментально.

Новое квантовое обобщение показателя Ляпунова основано на количественном определении расходимости изначально близких квантовых траекторий [A2]. Как и в классическом случае, при хаотической динамике системы старший квантовый показатель Ляпунова становится положительным. Данная разработка использовалась для выявления сложной

структуры регулярных и хаотических областей в различных открытых квантовых системах [A2—A4].

Для разработки численных критериев, которые могут быть измерены экспериментально, в работе рассматривается математическая модель открытого квантового резонатора с утечкой, в котором находится периодически модулируемая фотонная мода. Модель описывается уравнением Линдблада (1) с гамильтонианом:

$$H(t) = \frac{1}{2}\chi b^{\dagger 2}b^2 + iF(t)(b^{\dagger} - b), \quad (6)$$

где χ — сила взаимодействия между фотонами, $b^{\dagger}$ и b — операторы рождения и уничтожения фотонов. В системе есть кусочно-постоянная модуляция с периодом T :

$$\begin{aligned} F(t) = F(t+T) &= A, & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ F(t) = F(t+T) &= 0, & \frac{T}{2} < t < T. \end{aligned} \quad (7)$$

Фотоны могут испускаться из резонатора, а скорость накачки тепловых фотонов равна нулю. Взаимодействие с окружающей средой в уравнении Линдблада (1) задаётся единственным диссипативным оператором:

$$V = b, \quad (8)$$

который описывает эмиссию фотонов из резонатора в окружающую среду с независимой от времени интенсивностью γ . Для данной системы существует среднеполевое приближение, описываемое двумя фазовыми переменными $\{\text{Re}(\xi), \text{Im}(\xi)\}$ в соответствии с уравнением:

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{2}\gamma\xi + F(t) - i\chi|\xi|^2\xi. \quad (9)$$

Особенность данной модели состоит в том, что метод квантовых траекторий имеет для неё простую физическую интерпретацию: совершаемый траекторией квантовый скачок соответствует эмиссии одиночного фотона из резонатора, что в свою очередь может быть зарегистрировано однофотонным детектором [5]. То есть статистика эмиссии фотонов может быть использована в реальном физическом эксперименте для анализа динамики системы и обнаружения диссипативного квантового хаоса [A3].

Открытая квантовая система и ее среднеполевое приближение демонстрируют спектр различных асимптотических режимов, от периодических орбит до хаотических аттракторов. Хаотические области в данной модели определялись как классическими показателями Ляпунова для среднеполевой аппроксимации (рисунок 2а), так и квантовыми показателями

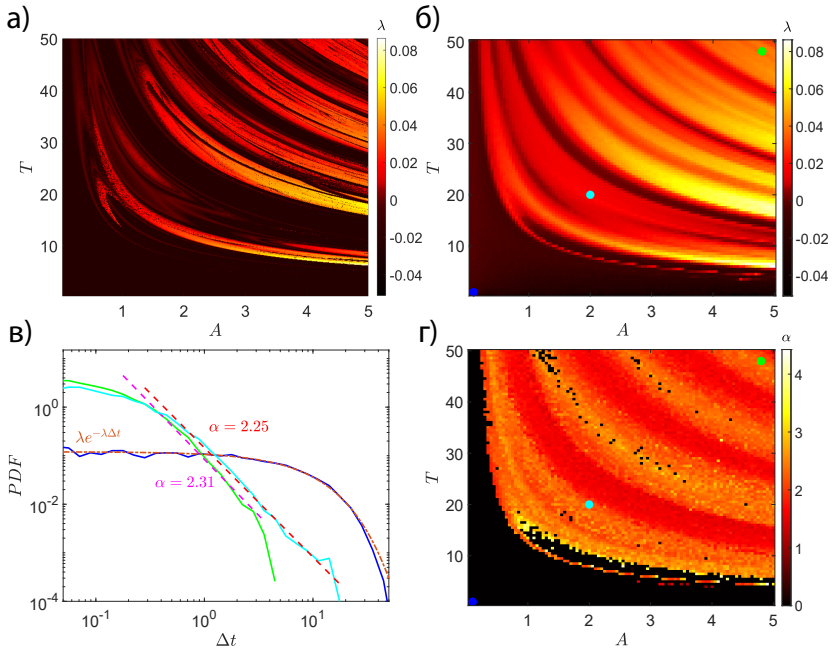


Рис. 3 — Динамика открытого квантового резонатора: (а) карта классического показателя Ляпунова для среднеполевой аппроксимации; (б) карта квантового показателя Ляпунова; (в) распределение временных интервалов между излучениями фотонов из квантового резонатора для трёх выбранных точек на сетке параметров (синяя, голубая, зелёная); (г) Двумерная диаграмма показателя степени для степенной аппроксимации распределения временных интервалов между излучениями фотонов (появление степенной асимптотики соответствует квантовому хаосу)

Ляпунова (рисунок 26), предложенными в данной работе. Хаотическая динамика возникает при появлении степенной промежуточной асимптотики во временной статистике эмиссии фотонов, которая согласуется с положительным старшим квантовым показателем Ляпунова (рисунок 2в,г). В случае регулярной динамики статистика эмиссии фотонов является пуассоновской. Данные результаты открывают новую перспективу для количественной оценки режимов, возникающих в таких областях, как квантовая электродинамика, квантовая оптика и поляритонные устройства, где статистика излучения фотонов является общепринятым инструментом.

При добавлении в данную модель спиновой подсистемы спин-фотонное взаимодействие может существенно изменить динамику фотонной моды [A4].

Результаты данной главы опубликованы в работах [A1—A4; A16—A20].

Третья глава посвящена изучению свойств одночастичной и многочастичной локализации в асимптотических состояниях открытых квантовых систем. Предложены численные методы и характеристики, позволяющие проанализировать локализационные свойства системы.

Основополагающей моделью является хорошо изученная изолированная модель Андерсона, к которой добавлено взаимодействие с окружающей средой. В изолированной от внешней среды модели Андерсона явление локализации является хорошо изученным. В открытых системах вопрос локализации в асимптотических состояниях долгое время оставался открытым. Итоговая открытая квантовая система описывается уравнением Линдблада (1) со следующим гамильтонианом:

$$H = \sum_n \varepsilon_n b_n^\dagger b_n - \left(b_n^\dagger b_{n+1} + b_{n+1}^\dagger b_n \right), \quad (10)$$

и диссипативными операторами:

$$V_k = \left(b_k^\dagger + e^{i\alpha} b_{k+l}^\dagger \right) \left(b_k - e^{-i\alpha} b_{k+l} \right), \quad (11)$$

где $\varepsilon_n \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2} \right]$ — случайные некоррелированные значения энергий на сайте n , W — сила пространственного беспорядка, b_n и $b_n^\dagger$ — операторы рождения и уничтожения бозона на сайте n . Модель описывает динамику бозона на решётке с N сайтами. Число состояний в квантовой системе совпадает с размерностью решётки $S = N$. Диссипативные операторы V_k [6] параметризованы фазой α и индексом соседнего сайта l , на который действуют. При $\alpha = 0$ диссипативный оператор синхронизирует динамику на k -ом и $(k+l)$ -ом сайте за счёт рециркуляции антисимметричных противофазных состояний в симметричные и синфазные. Данный тип диссипаторов имеет экспериментальную реализацию на основе квантовых резонаторов, соединённых сверхпроводящими кубитами (фаза варьируется относительным положением кубита).

В данной модели впервые обнаружены асимптотические состояния со следами локализации [A5] — матрица плотности имеет пятнистую структуру с несколькими яркими областями локализации (рисунок 4a). В решении доминируют несколько локализованных мод пространственно неоднородного гамильтониана из классической модели Андерсона — в базисе собственных состояний гамильтониана (10) матрица плотности является диагональной с преобладанием собственных значений из нижней границы спектра (рисунок 4б). Был предложен метод управления локализационными свойствами системы, основанный на изменении фазы α диссипативных операторов [A6]. Формирующие решение андерсоновские моды выбираются в соответствии с их пространственно-фазовыми

свойствами, унаследованными от собственных состояний гамильтониана в пределе нулевого беспорядка, в зависимости от фазы диссипативных операторов.

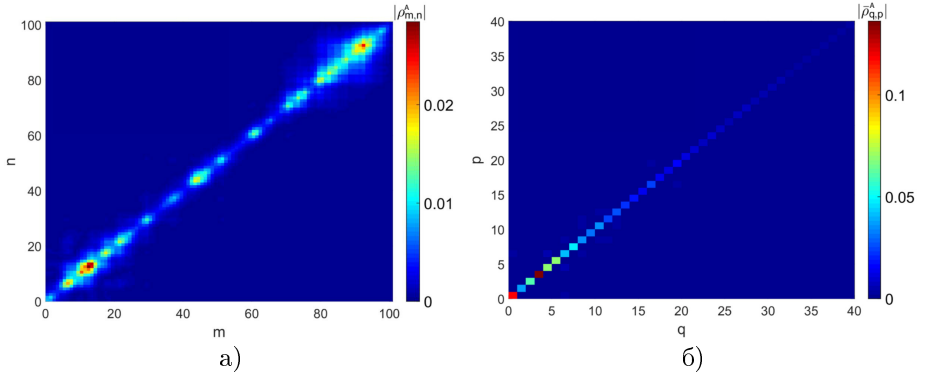


Рис. 4 — Следы одночастичной локализации в асимптотических состояниях открытой квантовой системы: (а) абсолютные значения асимптотической матрицы плотности ρ^A в базисе гильбертова пространства имеют пятнистую структуру с очагами локализации; (б) локализация в собственных состояниях из нижней границы спектра Андерсоновских мод. Параметры системы: $N = 100$, $W = 1$, $\alpha = 0$, $l = 1$

При помощи метода квантовых траекторий изучена микроскопическая динамика волновых пакетов отдельных траекторий в асимптотических состояниях с различной степенью локализации [A7]. Были обнаружены нетривиальные режимы распространения волновых пакетов, возникающие за счёт взаимодействия беспорядка и диссипации. Квантовые траектории демонстрируют диффузионные (при которых циркуляция в Андерсоновских модах прерывается квантовыми скачками) и баллистические режимы. Управляя фазой α неэрмитовых диссипаторов (11), можно переключать данные режимы.

Помимо модели с одночастичной локализацией в главе рассматривается математическая модель открытой квантовой системы с многочастичной локализацией (MBL) в асимптотических состояниях. Модель описывается уравнением Линдблада (1) с многочастичным гамильтонианом для $\frac{N}{2}$ бесспиновых фермионов на решётке размером N :

$$H = \sum_{n=1}^N h_n b_n^\dagger b_n + \sum_{n=1}^{N-1} b_n^\dagger b_n b_{n+1}^\dagger b_{n+1} - \sum_{n=1}^{N-1} (b_n^\dagger b_{n+1} + b_{n+1}^\dagger b_n), \quad (12)$$

где b_n и $b_n^\dagger$ — операторы уничтожения и создания фермиона на n -ом сайте решётки соответственно, $b_n^\dagger b_n$ — оператор числа частиц на сайте n . В каждом узле решётки на фермионы действуют случайные потенциалы h_n (первое слагаемое в правой части). Фермионы, которые находятся в соседних сайтах решётки, взаимодействуют между собой (второе слагаемое в правой части). Третье слагаемое в правой части отвечает за перемещение фермионов между сайтами решётки. Значения случайных потенциалов h_n равномерно распределены в интервале $[-h, h]$. Как и в одночастичной модели, рассматривается специальный тип диссипации:

$$V_k = (b_k^\dagger + b_{k+1}^\dagger)(b_k - b_{k+1}), \quad (13)$$

который приводит систему в состояние со следами многочастичной локализации в асимптотических состояниях.

Для численной оценки многочастичной локализации в асимптотических состояниях предложены различные численные характеристики, среди которых *статистика дисбаланса* (разница между числом частиц на чётных и нечётных узлах решётки) и *r-значение* (статистическая характеристика спектра матрицы плотности, распределение которой позволяет классифицировать тип динамики системы).

Диссипация в системе пытается построить классические и квантовые корреляции между далеко расположенными сайтами решётки, а механизмы локализации, индуцированные гамильтонианом, напротив, пытаются ограничить корреляции длиной локализации. В результате баланса между этими факторами возникает асимптотическое состояние со следами многочастичной локализации, которые можно численно детектировать предложенными в работе характеристиками. Также в работе впервые обнаружена связь между переходом к многочастичной локализации и переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике [A9].

Результаты данной главы опубликованы в работах [A5—A9; A12; A13; A15].

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Впервые обнаружен квантовый аналог классической бифуркации Неймарка—Сакера (рождение тора из-за неустойчивости предельного цикла) в математической модели открытого периодически модулируемого квантового димера. Предложены качественные и количественные характеристики данного явления [A1].
2. Впервые предложен и программно реализован [A11] новый численный алгоритм нахождения старшего квантового показателя Ляпунова, основанный на методе квантовых траекторий. Данный подход позволяет выявить сложную структуру регулярных и хаотических областей, дать количественную оценку диссипативному

- квантовому хаосу. Как и классический старший показатель Ляпунова, его квантовый аналог становится положительным в случае хаотической динамики системы [A2].
3. Впервые предложены новые количественные характеристики диссипативного квантового хаоса, которые могут наблюдаться в реальном физическом эксперименте [A3]. Для широкого класса квантовых систем было показано, что в регулярном и хаотическом режимах наблюдается качественно различная статистика распределения времён между последовательными излучениями системой отдельных фотонов. При переходе в режим квантового хаоса распределение времени ожидания фотона становится существенно не пуассоновским, появляется степенная асимптотика.
 4. В модели открытого квантового резонатора со спином исследована сложная динамика, которая возникает в результате взаимодействия между периодическими модуляциями, диссипативными механизмами и взаимодействием между фотонной и спиновой подсистемами [A4]. Данное взаимодействие при определённых параметрах может приводить систему как в хаотическое, так и регулярное состояние.
 5. Исследовано явление одночастичной локализации в асимптотических состояниях открытых квантовых систем [A5]. Разработан метод управления локализационными свойствами получаемого квантового аттрактора [A6] — асимптотическое состояние может быть локализовано в любом месте спектра гамильтониана за счёт управляемой синтетической диссипации. В рассматриваемой модели изучены механизмы распространения волновых пакетов отдельных квантовых траекторий в асимптотическом режиме [A7].
 6. Исследовано явление многочастичной локализации в асимптотических состояниях открытых квантовых систем. Было установлено, что следы многочастичной локализации сохраняются даже в присутствии дефазирующей диссипации. Предложены новые численные критерии для детектирования многочастичной локализации — статистика дисбаланса, энтропия запутанности операторного пространства и соотношение последовательных уровней для асимптотической матрицы плотности [A8]. Впервые обнаружена связь между переходом к многочастичной локализации и переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике [A9].
 7. Разработан программный комплекс [A10; A11], осуществляющий численное моделирование открытых квантовых систем с большим числом состояний, включающий в себя возможность анализа отдельных квантовых траекторий, поиск асимптотических состояний системы путём численного интегрирования и поиска

собственного состояния системы. В программном комплексе реализован новый численный алгоритм, осуществляющий вычисление старшего квантового показателя Ляпунова.

Публикации автора по теме диссертации

В изданиях, входящих в международную базу цитирования Web of Science

- A1. *Yusipov I. I., Ivanchenko M. V.* Quantum Neimark-Sacker Bifurcation // Scientific Reports. — 2019. — Dec. — Vol. 9, no. 1. — P. 17932.
- A2. Quantum Lyapunov Exponents beyond Continuous Measurements / I. I. Yusipov [et al.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2019. — June. — Vol. 29, no. 6. — P. 063130.
- A3. Photon Waiting-Time Distributions: A Keyhole into Dissipative Quantum Chaos / I. I. Yusipov [et al.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2020. — Feb. — Vol. 30, no. 2. — P. 023107.
- A4. *Yusipov I. I., Denisov S. V., Ivanchenko M. V.* Chaotic Spin-Photonic Quantum States in an Open Periodically Modulated Cavity // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Jan. — Vol. 31, no. 1. — P. 013112.
- A5. Localization in Open Quantum Systems / I. Yusipov [et al.] // Physical Review Letters. — 2017. — Feb. — Vol. 118, no. 7. — P. 070402.
- A6. Control of a Single-Particle Localization in Open Quantum Systems / O. S. Vershinina [et al.] // EPL (Europhysics Letters). — 2017. — Sept. — Vol. 119, no. 5. — P. 56001.
- A7. *Yusipov I. I., Laptyeva T. V., Ivanchenko M. V.* Quantum Jumps on Anderson Attractors // Physical Review B. — 2018. — Jan. — Vol. 97, no. 2. — P. 020301.
- A8. Signatures of Many-Body Localization in Steady States of Open Quantum Systems / I. Vakulchyk [et al.] // Physical Review B. — 2018. — July. — Vol. 98, no. 2. — P. 020202.
- A9. *Yusipov I. I., Ivanchenko M. V.* Quantum Lyapunov Exponents and Complex Spacing Ratios: Two Measures of Dissipative Quantum Chaos // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2022. — Apr. — Vol. 32, no. 4. — P. 043106.
- A10. Unfolding a Quantum Master Equation into a System of Real-Valued Equations: Computationally Effective Expansion over the Basis of SU(N) Generators / A. Liniov [et al.] // Physical Review E. — 2019. — Nov. — Vol. 100, no. 5. — P. 053305.

Зарегистрированные программы для ЭВМ

- A11. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Вычисление квантовых ляпуновских показателей методом квантовых траекторий / И. И. Юсипов ; Н. исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. — № 2019665144 ; заявл. 12.11.2019 ; опубл. 20.11.2019 (Рос. Федерация).*

В сборниках трудов конференций

- A12. Локализация в открытых квантовых системах / И. И. Юсипов [и др.] // 22-я Нижегородская сессия молодых ученых (естественные, математические науки). — 2017. — С. 205—207.
- A13. Юсипов И. И., Иванченко М. В., Денисов С. В. Квантовые аттракторы в системах с беспорядком // Труды XXI научной конференции по радиофизике. — 2017. — С. 172—176.
- A14. Локализация в открытых квантовых системах с беспорядком / И. И. Юсипов [и др.] // Сборник тезисов участников форума "Наука будущего - наука молодых". — 2017. — С. 242—244.
- A15. Asymptotic states in disordered open quantum systems: localization and dynamics / I. Yusipov [et al.] // International Conference "Shilnikov Workshop-2017". — 2017. — P. 45—46.
- A16. Квантовые бифуркационные диаграммы / И. И. Юсипов [и др.] // 23-я Нижегородская сессия молодых учёных (технические, естественные, математические науки). — 2018. — С. 212—213.
- A17. Юсипов И. И., Иванченко М. В., Кузнецов С. П. Численные характеристики «хаотической» динамики открытых квантовых систем // Труды XXII научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию Нижегородской радиолaborатории. — 2018. — С. 239—241.
- A18. Юсипов И. И., Иванченко М. В., Кузнецов С. П. Численные критерии квантового диссипативного хаоса // Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика. Сборник трудов XIII Всероссийской конференции молодых ученых. — 2018. — С. 373—374.
- A19. Yusipov I., Ivanchenko M., Denysov S. Neimark-sacker bifurcation in periodically modulated open quantum dimer // 9th International Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon2019). — 2019. — P. 306—308.
- A20. Юсипов И. И., Иванченко М. В. Количественная оценка диссипативного квантового хаоса по статистике времен между квантовыми скачками // Труды XXIV научной конференции по радиофизике, посвященной 75-летию радиофизического факультета. — 2020. — С. 197—200.

Список литературы

1. Spectroscopic signatures of localization with interacting photons in superconducting qubits / P. Roushan [et al.] // Science. — 2017. — Nov. — Vol. 358, no. 6367. — P. 1175—1179.
2. Digital quantum simulation of fermionic models with a superconducting circuit / R. Barends [et al.] // Nature Communications. — 2015. — July. — Vol. 6, no. 1.
3. Quantum Dynamical Semigroups and Applications. Vol. 717. — Berlin, Heidelberg, 2007. — (Lecture Notes in Physics).
4. *Plenio M. B., Knight P. L.* The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics // Reviews of Modern Physics. — 1998. — Jan. — Vol. 70, no. 1. — P. 101—144.
5. Phonon counting and intensity interferometry of a nanomechanical resonator / J. D. Cohen [et al.] // Nature. — 2015. — Apr. — Vol. 520, no. 7548. — P. 522—525.
6. Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms / S. Diehl [et al.] // Nature Physics. — 2008. — Sept. — Vol. 4, no. 11. — P. 878—883.

Юсипов Игорь Ильясович

Динамический хаос, бифуркации и локализация в математических моделях
открытых квантовых систем

Автореф. дис. на соискание ученой степени канд. ф.-м. наук

Подписано в печать _____._____._____. Заказ № _____

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 1. Тираж 100 экз.

Типография _____

