

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского»



На правах рукописи

Юсипов Игорь Ильясович

**Динамический хаос, бифуркации и локализация в
математических моделях открытых квантовых систем**

Специальность 1.3.4 —
«Радиофизика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Иванченко Михаил Васильевич

Нижегород — 2022

Оглавление

Стр.

Введение	4
Глава 1. Моделирование открытых квантовых систем	12
1.1 Общие положения	13
1.2 Описание открытых квантовых систем	17
1.3 Метод квантовых траекторий	19
1.4 Программный комплекс	23
1.5 Выводы по главе	27
Глава 2. Бифуркации и хаос в открытых квантовых системах	29
2.1 Открытый квантовый димер	32
2.1.1 Квантовая модель	33
2.1.2 Среднеполевое приближение	34
2.2 Квантовая бифуркация Неймарка—Сакера	35
2.3 Старший квантовый показатель Ляпунова	44
2.3.1 Алгоритм вычисления	45
2.3.2 Результаты в модели открытого квантового димера	47
2.4 Количественная оценка диссипативного квантового хаоса по статистике времён между квантовыми скачками	52
2.5 Хаотические спин-фотонные квантовые состояния	61
2.6 Выводы по главе	67
Глава 3. Локализация в открытых квантовых системах	69
3.1 Открытая модель Андерсона	71
3.2 Одночастичная локализация	72
3.3 Управление одночастичной локализацией в открытых квантовых системах	80
3.4 Распространение волновых пакетов в открытых квантовых системах с локализацией	85
3.5 Многочастичная локализация в открытых квантовых системах	93
3.6 Многочастичная локализация и диссипативный квантовый хаос	103
3.7 Выводы по главе	106

Заключение 108

Список литературы 110

Введение

Исследование колебательно-волновой динамики, закономерностей, связанных с формированием пространственно-временных структур, явлений динамического хаоса и локализации в неоднородных, нелинейных и нестационарных системах является актуальной задачей радиофизики. В последнее время большое внимание уделяется динамике открытых многочастичных квантовых систем (нано- и опто-механические системы, сверхпроводящие системы), в которых, помимо достаточно хорошо изученных в рамках гамильтоновского формализма эффектов многочастичного взаимодействия (нелинейных эффектов), определяющую роль играют процессы взаимодействия с окружающей средой (диссипативные эффекты). В контексте задач обработки сигналов подобными системами, а также управления их режимами, большой интерес вызывает изучение эффектов периодической модуляции.

В силу трудоёмкости проведения физических экспериментов, особую важность представляют теоретические результаты, получаемые при помощи математического моделирования. Одним из самых распространённых способов математического описания открытых квантовых систем является уравнение Линдблада для матрицы плотности системы. Во многих случаях в рамках приближения среднего поля удаётся перейти к математическим моделям в виде нелинейных дифференциальных уравнений. В этих системах наблюдается богатая динамика: периодические колебания, динамический хаос, бифуркационные переходы между различными режимами. Вместе с тем, практически не изученной остаётся соответствующая динамика и ее характеристики в исходном уравнении Линдблада, недостаточно развиты методы и подходы к изучению сложной динамики диссипативных квантовых систем, для которых среднеполевое приближение не применимо (например, в силу небольшого числа квантовых частиц), и нелинейную модель получить невозможно.

В настоящее время эти пробелы заполняются, и теория диссипативного квантового хаоса переживает активное развитие, в первую очередь, в рамках обобщения методов и подходов классической теории бифуркаций и детерминированного хаоса (Г. Осипов, А. Храмов, А. Короновский, А. Пиковский, П. Хэннги, Д. Полетти, Э. Отт, Ю. Куртц и др.). В работах научной группы С. Денисова показана аналогия между некоторыми классическими и квантовыми

бифуркациями. В то же время остаются вопросы о развитии других бифуркационных сценариев, а также о методах исследования квантовых бифуркаций. Также остаётся нерешённой проблема количественной оценки диссипативного квантового хаоса.

Значительный вклад в развитие теории одного из основополагающих явлений структурообразования – локализации в консервативных пространственно-неоднородных системах внесли научные группы С. Флаха, А. Пиковского, С. Обри, Б. Файна и др. Локализацией в открытых квантовых системах активно занимаются научные группы И. Лесановского, Б. Альтшулера, И. Алейнера и др. Однако, в данном контексте существует ряд нерешённых задач. В частности, недостаточно изучены свойства одночастичной и многочастичной локализации в асимптотических состояниях открытых квантовых систем. В каких условиях эти явления могут проявляться, несмотря на эффекты диссипации? Какими численными методами, критериями их можно обнаружить и охарактеризовать? Наконец, есть ли взаимосвязь между локализацией и хаосом в квантовых диссипативных системах?

Целью данной работы является обобщение ряда методов и подходов теории колебаний и динамического хаоса на случай открытых (диссипативных) квантовых систем, в первую очередь – определение квантового ляпуновского показателя, исследование динамических режимов в математических моделях таких систем, бифуркационных переходов между ними, образование пространственных структур на примере явления локализации, а также развитие и программная реализация численных методов, позволяющих получить и охарактеризовать явления квантового хаоса и локализации в открытых квантовых системах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать явление квантового диссипативного хаоса в математических моделях открытых квантовых систем. Обнаружить новые квантовые аналоги классических бифуркаций, описать их качественно и количественно. Разработать метод вычисления старшего квантового показателя Ляпунова, позволяющего количественно оценить хаотизацию динамики открытой квантовой системы. Определить качественные и приближенные аналитические характеристики диссипативного квантового хаоса, которые могут быть оценены в физическом эксперименте.

- Изучить способы управления степенью хаотизации динамики открытых квантовых систем на основе спин-фотонного взаимодействия.
2. Исследовать одночастичную и многочастичную локализацию в асимптотических состояниях открытых квантовых систем. Разработать методы управления свойствами локализации, а также исследовать механизмы распространения волновых пакетов в системах с одночастичной локализацией. Исследовать количественные характеристики многочастичной локализации. Изучить взаимосвязь между режимами многочастичной локализации и квантового диссипативного хаоса.
 3. Разработать программный комплекс для численного моделирования динамики открытых квантовых систем с большим числом состояний, включающий в себя возможность анализа отдельных квантовых траекторий, поиск асимптотических состояний системы путём численного интегрирования или поиска собственных состояний системы.

Научная новизна:

1. В математической модели открытого периодически модулируемого квантового димера впервые обнаружен квантовый аналог классической бифуркации Неймарка—Сакера (рождение тора из-за неустойчивости предельного цикла). Предложены качественные и количественные характеристики данного явления [1].
2. Впервые предложен новый численный метод нахождения старшего квантового показателя Ляпунова, основанный на методе квантовых траекторий. Данный подход позволяет исследовать структуру регулярных и хаотических областей в пространстве параметров открытой квантовой системы. Как и классический старший показатель Ляпунова, его квантовый аналог становится положительным в случае хаотической динамики системы [2].
3. Впервые предложены новые количественные характеристики диссипативного квантового хаоса, которые могут наблюдаться в реальном физическом эксперименте [3]. Для широкого класса квантовых систем было показано, что в регулярном и хаотическом режимах наблюдается качественно различная статистика распределения времён между последовательными излучениями системой отдельных фотонов. При переходе в режим квантового хаоса распределение времени ожидания

фотона становится существенно не пуассоновским, появляется степенная асимптотика.

4. В модели открытого квантового резонатора в результате взаимодействия между периодическими модуляциями, диссипативными механизмами и взаимодействием между фотонной и спиновой подсистемами, возникает сложная динамика [4]. Данное взаимодействие при определенных параметрах может приводить систему как в хаотическое, так и регулярное состояние.
5. Обнаружены следы *одночастичной локализации* в асимптотических состояниях открытых квантовых систем [5]. Предложен метод управления структурой квантового аттрактора с признаками локализации, использующий фазовые свойства экспериментально реализуемой и управляемой диссипации. Установлена устойчивость локализации к дефазирующей диссипации [6]. Исследована зависимость типа распространения волновых пакетов в открытых квантовых системах с локализацией от типа управляемой диссипации [7].
6. Обнаружено явление *многочастичной локализации* в асимптотических состояниях открытых квантовых систем. Установлено, что следы многочастичной локализации сохраняются даже в присутствии дефазирующей диссипации. Показано, что свойства многочастичной локализации находят отражение в статистике дисбаланса, энтропии запутанности операторного пространства и статистике спектра асимптотической матрицы плотности [8]. Впервые обнаружена связь между переходом к многочастичной локализации и переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике [9].
7. Разработан программный комплекс на языке C++, осуществляющий численное моделирование открытых квантовых систем. Асимптотические состояния находятся путём численного интегрирования уравнения Линдблада схемами высоких порядков или путём решения задачи по поиску собственных векторов и значений для матрицы оператора Линдблада. Программный комплекс предусматривает возможность моделирования и анализа отдельных квантовых траекторий. В программном комплексе реализован новый численный алгоритм, осуществляющий вычисление старшего квантового показателя Ляпунова.

Практическая значимость. В последние годы наблюдается бурное развитие в области прикладных квантовых вычислений. Квантовые чипы, разработанные компаниями Google, Intel, IBM, и D-Wave, состоят из сверхпроводящих кубитов, которые являются открытыми квантовыми системами и взаимодействуют с окружающей средой. Данные технологии могут быть использованы не только для выполнения квантовых вычислений, но и для изучения многочастичной локализации [10] и других сложных состояний в открытых квантовых системах [11]. Исследование диссипативного квантового хаоса и его механизмов позволит использовать диссипативные эффекты (вместо того, чтобы бороться и подавлять их) для создания принципиально новых режимов сверхпроводящих квантовых систем, решающих задачу устойчивой обработки квантовой информации на длительных временных масштабах.

Методология и методы исследования. Открытые квантовые системы описываются в рамках формализма Линдблада [12] для матрицы плотности. Количественный анализ моделей осуществлялся посредством прямого численного интегрирования уравнения Линдблада в случае, если в системе есть модуляция или посредством поиска собственного вектора матрицы оператора Линдблада, соответствующего нулевому собственному числу (если модуляции нет). При этом для вычислений использовался как классический базис гильбертова пространства состояний квантовой системы, так и специальный базис [13], состоящий из обобщения матриц Гелл-Манна на любое количество состояний (генераторы $SU(N)$ групп). Также применялось микроскопическое описание открытых квантовых систем в терминах отдельных квантовых траекторий, что позволяло анализировать динамику в асимптотическом состоянии [14]. Для системы открытого периодически модулируемого квантового димера также исследовалась математическая модель в виде нелинейной динамической системы второго порядка, полученная в рамках приближения среднего поля. В этом случае применялись методы и подходы теории колебаний, бифуркационного анализа и теории динамического хаоса. Эти методы получили обобщение на случай квантовых диссипативных систем и были применены для их исследования.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В математической модели открытого квантового димера реализуется квантовый аналог классической бифуркации Неймарка—Сакера, заключающейся в рождении инвариантного тора из-за неустойчивости предельного цикла [1].

2. Разбегание близких квантовых траекторий позволяет определить квантовый аналог старшего показателя Ляпунова и использовать его как характеристику диссипативного квантового хаоса [2].
3. В определённом классе открытых квантовых систем можно получить количественные характеристики диссипативного квантового хаоса, основанные на статистике распределения времён между последовательными излучениями системой отдельных фотонов. В распределении появляется степенная асимптотика при хаотической динамике системы. Данная характеристика может быть измерена в реальном физическом эксперименте [3].
4. В системе открытого квантового резонатора со спином существует возможность контролировать тип динамики системы за счёт изменения силы спин-фотонного взаимодействия [4].
5. В открытых квантовых системах можно наблюдать признаки одночастичной локализации в асимптотических состояниях [5]. В таких системах волновые пакеты могут распространяться в режиме диффузии или баллистики [7]. Существуют механизмы управления локализационными свойствами асимптотического состояния [6].
6. В открытых квантовых системах можно наблюдать признаки многочастичной локализации в асимптотических состояниях. Значения дисбаланса, энтропии запутанности операторного пространства и статистика спектра асимптотической матрицы плотности могут быть использованы для количественной характеристики многочастичной локализации [8]. Переход к многочастичной локализации сопровождается переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике [9].
7. Реализованный программный комплекс позволяет моделировать открытые квантовые системы, исследовать явления локализации и хаоса, производить спектральный анализ, изучать динамику отдельных квантовых траекторий.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением современных и принятых в научном сообществе методов теории колебаний, бифуркационного анализа, теории динамического хаоса, методов численного моделирования физики открытых квантовых систем, сопоставлением полученных результатов с результатами исследования нелинейных моделей, полученных в

приближении среднего поля, а также сравнением результатов с работами других авторов. Результаты численных экспериментов полностью согласуются с теорией.

- Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на:
- 22-ая Нижегородская сессия молодых учёных (естественные, математические науки) (Россия, Нижний Новгород, 23–26 мая 2017) [15];
 - XXI научная конференции по радиофизике (Россия, Нижний Новгород, 15–22 мая 2017) [16];
 - Третий Всероссийский молодёжный научный форум «Наука будущего – наука молодых» (Россия, Нижний Новгород, 12–15 сентября 2017) [17];
 - Международная конференция «Shilnikov WorkShop 2017» (Россия, Нижний Новгород, 15–16 декабря 2017) [18];
 - 23-я Нижегородская сессия молодых учёных (технические, естественные, математические науки) (Россия, Нижний Новгород, 22–23 мая 2017) [19];
 - XXII научная конференция по радиофизике, посвященная 100-летию Нижегородской радиолaborатории (Россия, Нижний Новгород, 15–29 мая 2018) [20];
 - XIII Всероссийская конференции молодых учёных «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Россия, Саратов, 4–6 сентября 2018) [21];
 - 9th International Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon2019) (Россия, Иннополис, 8–11 сентября 2019) [22];
 - International Conference «Quantization of Dissipative Chaos: Ideas and Means» (Germany, Bad-Honnef, 16–20 декабря 2019);
 - XXIV научная конференция по радиофизике, посвященная 75-летию радиофизического факультета (Россия, Нижний Новгород, 13–31 мая 2020) [23].

Личный вклад. Все представленные в работе результаты были либо получены лично автором, либо при его непосредственном участии. Автор принимал прямое участие в постановке задач, получении и анализе полученных результатов, а также в подготовке публикаций в научных журналах и представлении докладов на тематических конференциях.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 19 печатных изданиях, 10 — в периодических научных журналах, индекси-

руемых Web of Science и Scopus, 9 — в тезисах докладов. Зарегистрирована 1 программа для ЭВМ.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, 3 глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 124 страницы, включая 47 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 171 наименование.

Глава 1. Моделирование открытых квантовых систем

В настоящее время диссипативные квантовые системы являются неотъемлемой частью экспериментальной и технологической реальности. Практические реализации нано- и оптомеханических систем, сверхпроводящих элементов не осуществимы в полной изоляции от окружающей среды. Подобные системы являются открытыми и их динамика существенно диссипативна, а преимущественно используемое описание посредством эволюции когерентных квантовых систем является приближением, часто грубым, реальных физических процессов. Быстрый прогресс в экспериментальной квантовой физике, особенно в таких областях, как квантовые электродинамические (КЭД) системы [24], квантовые оптических системы [25] и поляритонные устройства [26], способствовал переходу к более реалистичному негамильтонову описанию квантовых систем. Диссипация в данных системах является полноправным генератором эволюции, которая не менее сложна и разнообразна, чем унитарная, генерируемая гамильтонианами [27; 28]. В частности, асимптотические состояния открытых квантовых систем определяются не только гамильтоновой динамикой, но взаимодействием с окружающей средой. Существует множество доказательств, как вычислительных, так и экспериментальных, что асимптотические состояния открытых квантовых систем могут давать (при измерении, например, с помощью квантовой томографии) структуры, подобные к классическим хаотическим аттракторам [29–34]. Вместе с тем, следует отметить, что данное взаимодействие не является достаточно сильным, чтобы полностью свести динамику системы к классическому случаю [35]. Более того, особенностью диссипации является то, что она способна привести систему в состояния, которые недостижимы в классическом пределе. Здесь, в первую очередь, следует привести такие примеры, как новые топологические состояния, получаемые за счёт управляемой синтетической диссипации [36] или «чистые» сильно запутанные состояния в многочастичных квантовых системах [37]. Асимптотическое состояние открытых квантовых систем (квантовый аттрактор) полностью определяется типом взаимодействия с окружающей средой (диссипацией). Например, диссипация описанная в работе [38] приводит любую квантовую систему в тривиальное состояние с максимальной энтропией (все состояния системы становятся равновероятными). В настоящее время доминирующей тенденцией является

идея «борьбы» с декогеренцией (например, увеличение времени когерентности атомных конденсатов в оптических решётках). Однако, все большее распространение получает идея диссипативной инженерии [27], позволяющей создавать принципиально новые состояния многочастичных систем.

В разделе 1.1 приводятся основные элементы описания квантовых систем: пространство состояний, операции, уравнения динамики систем, операторы плотности, особенности квантовых измерений.

В разделе 1.2 рассматривается основной предмет исследования — открытые квантовые системы, математические модели для их описания, подходы численного анализа.

В разделе 1.3 подробно разбирается микроскопический подход к численному анализу открытых квантовых систем — метод квантовых траекторий.

В разделе 1.4 приведено описание программного комплекса.

В разделе 1.5 представлены выводы по главе.

1.1 Общие положения

Квантовые системы описываются состояниями в гильбертовом пространстве \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^S = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_S \end{pmatrix} \mid v_i \in \mathbb{C} \right\}. \quad (1.1)$$

В работе будет использоваться формализм Дирака [39], в котором векторы-столбцы (кет-вектора) обозначаются как $\vec{v} \mapsto |v\rangle$. В данном пространстве размерности $\dim(\mathcal{H}) = S$ рассматривается ортонормированный базис $\{|k\rangle\}_{k=0}^{d-1}$. Любой вектор гильбертова пространства может быть разложен по данному базису:

$$|v\rangle = \sum_{k=1}^S v_k |k\rangle, \quad v_k \in \mathbb{C}. \quad (1.2)$$

Коэффициенты v_k являются амплитудами вероятности. Вероятность нахождения квантовой системы в конкретном состоянии $|k\rangle$ равна $|v_k|^2$. Набор $\{|v_k|^2\}$

является распределением вероятностей с суммой равной единице. В формализме Дирака [39] также определены вектора-строки (бра-вектора), которые связаны с кет-векторами свойством эрмитовости (транспонирования и комплексного сопряжения) $\langle v| = |v\rangle^\dagger$. Любым двум кет-векторам $|v\rangle$ и $|w\rangle$ можно поставить в соответствие некоторое комплексное число — скалярное (внутреннее) произведение:

$$\langle v|w\rangle \equiv (v_1^*, \dots, v_S^*) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_S \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^S v_k^* w_k. \quad (1.3)$$

Условие нормализации вероятностного распределения может быть переписано в виде:

$$1 = \sum_{k=1}^S |v_k|^2 = \sum_{k=1}^S v_k^* v_k = \langle v|v\rangle = \||v\rangle\|^2. \quad (1.4)$$

Внешнее произведение в гильбертовом пространстве определяется следующим образом:

$$|v\rangle \langle w| = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_S \end{pmatrix} (w_1^*, \dots, w_S^*) = \begin{pmatrix} v_1 w_1^* & \dots & v_1 w_S^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_S w_1^* & \dots & v_S w_S^* \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Для двух квантовых систем с соответствующими гильбертовыми пространствами \mathcal{H}_1 и \mathcal{H}_2 общая квантовая система имеет гильбертово пространство, заданное формулой $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Пусть базис пространства \mathcal{H}_1 состоит из векторов $\{|v_i\rangle\}_{i=1}^{S_1}$, базис \mathcal{H}_2 — из векторов $\{|w_j\rangle\}_{j=1}^{S_2}$, тогда базис результирующего пространства состоит из векторов $\{|v_i\rangle \otimes |w_j\rangle\}_{i=1, j=1}^{S_1, S_2}$. Для двух состояний $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$, $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_2$ тензорное произведение определяется следующим образом:

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_{S_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{S_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \varphi_1 \\ \vdots \\ \psi_1 \varphi_{S_2} \\ \vdots \\ \psi_{S_1} \varphi_{S_2} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Тензорное произведение для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pq} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \dots & a_{1n}b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & \dots & a_{mn}b_{pq} \end{pmatrix}.$$

Эволюция во времени изолированной квантовой системы определяется уравнением Шрёдингера:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = -iH |\psi(t)\rangle, \quad (1.8)$$

где H — эрмитовый оператор Гамильтона. Решением данного уравнения является вектор:

$$|\psi(t)\rangle = U(t) |\psi(0)\rangle, \quad (1.9)$$

где $|\psi(0)\rangle$ — состояние системы в начальный момент времени, $U(t)$ — унитарный оператор, определяющийся из гамильтониана системы. В случае, если гамильтониан не зависит от времени, то:

$$U(t) = \exp(-iHt). \quad (1.10)$$

В случае зависимости от времени:

$$U(t) = \mathcal{T} e^{-i \int_0^t H(t') dt'}. \quad (1.11)$$

где \mathcal{T} — оператор хронологического упорядочивания.

Квантовые измерения описываются набором $\{M_k\}_{k=1}^N$ операторов измерения, которые удовлетворяют условию $\sum_k M_k^\dagger M_k = I$. Заданное состояние $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ после измерения становится:

$$|\psi\rangle \mapsto \frac{M_k |\psi\rangle}{\sqrt{p_k}} \equiv |\psi_k\rangle, \quad (1.12)$$

с соответствующей вероятностью:

$$p_k = \langle \psi | M_k^\dagger M_k | \psi \rangle = \|M_k |\psi\rangle\|^2 \geq 0. \quad (1.13)$$

Результатом измерения является индекс k результирующего состояния. Сумма вероятностей p_k равна единице.

Каждой физически измеримой величине соответствует наблюдаемая, то есть эрмитов оператор A , имеющий спектральное разложение:

$$A = \sum_a \lambda_a |a\rangle \langle a|, \quad (1.14)$$

где $\lambda_a \in \mathbb{R}$ — результаты измерения (в ходе физического измерения получаются действительные числа). Из ортонормированного множества собственных векторов $\{|a\rangle\}$ формируются проекторы $\{P_a \equiv |a\rangle \langle a|\}$, которые являются операторами измерения соответствующей наблюдаемой. Таким образом, если система находится в состоянии $|\psi\rangle$ перед измерением наблюдаемой A , то, в соответствии с формулой (1.13), вероятность исхода λ_a равна $p_a = \langle \psi | P_a^\dagger P_a | \psi \rangle = |\langle \psi | a \rangle|^2$. В заданном состоянии системы $|\psi\rangle$ для наблюдаемой A можно определить ее среднее значение:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\psi &\equiv \sum_a \lambda_a p_a = \sum_a \lambda_a \langle \psi | P_a | \psi \rangle = \langle \psi | \left(\sum_a \lambda_a P_a \right) | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | A | \psi \rangle = \text{Tr}(A |\psi\rangle \langle \psi|). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Предположим теперь, что квантовая система находится в состоянии $|\psi_1\rangle$ с вероятностью q_1 , в состоянии $|\psi_2\rangle$ с вероятностью q_2 и так далее. То есть, имеется множество состояний $\{q_i, |\psi_i\rangle\}_{i=1}^N$, которые называются «чистыми». Квантовые измерения для заданного состояния системы $|\psi_i\rangle$ и операторов $\{M_k\}$ осуществляются следующим образом:

$$|\psi_i\rangle \mapsto \frac{M_k |\psi_i\rangle}{\sqrt{p_{k|i}}} = |\psi_i^k\rangle \quad (1.16)$$

с соответствующими вероятностями $p_{k|i} = \langle \psi_i | M_k^\dagger M_k | \psi_i \rangle$ получения исхода k . Пусть теперь конкретное состояние не известно, но известно, что оно происходит из множества $\{q_i, |\psi_i\rangle\}_{i=1}^N$. Тогда вероятность получения результата k в результате измерения на всем множестве состояний:

$$p_k = \sum_i p_{k|i} q_i = \sum_i q_i \langle \psi_i | M_k^\dagger M_k | \psi_i \rangle = \text{Tr} \left[M_k^\dagger M_k \left(\sum_i q_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) \right]. \quad (1.17)$$

В правой части предыдущего уравнения отдельно выделяется оператор в круглых скобках:

$$\rho = \sum_i q_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (1.18)$$

который называется матрица плотности — ключевой объект изучения открытых квантовых систем.

При рассмотрении одного из состояний множества $\{q_i, |\psi_i\rangle\}_i$, чья эволюция во времени описывается уравнением (1.9), эволюция соответствующей матрицы плотности определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_i q_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)| = \sum_i q_i U(t) |\psi_i(0)\rangle\langle\psi_i(0)| U^\dagger(t) = \\ &= U(t) \rho(0) U^\dagger(t). \end{aligned} \quad (1.19)$$

где $\rho(0)$ — состояние системы в начальный момент времени. Уравнение Шрёдингера преобразуется в уравнение фон Неймана для матрицы плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(t) = -i [H_{tot}(t), \rho(t)], \quad (1.20)$$

где символом $[\cdot, \cdot]$ обозначен коммутатор. Полный гамильтониан $H_{tot} = H_{sys} + H_{env} + H_{int}$ включает в себя гамильтониан исходной системы H_{sys} , гамильтониан для среды H_{env} и член, представляющий взаимодействие между системой и ее средой H_{int} . Интерес представляет именно динамика системы, поэтому рассматривается эволюция для редуцированной матрицы плотности $\rho = \text{Tr}_{env}[\rho_{tot}]$. Средние значения наблюдаемых в терминах матрицы плотности выражаются следующим образом:

$$\langle A \rangle_\rho = \sum_i q_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle = \text{Tr}(A \sum_i q_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|) = \text{Tr}(A\rho), \quad (1.21)$$

где q_i — вероятности соответствующих состояний $|\psi_i\rangle$.

1.2 Описание открытых квантовых систем

Наиболее общепринятым способом описания динамики открытых квантовых систем, то есть систем, взаимодействующих с окружающей средой, является уравнение Линдблада (Горини—Коссаковского—Сударшана—Линдблада, GKSL equation) [40—42] для матрицы плотности $\rho(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) &= \mathcal{L}(\rho(t), t) = -i [H(t), \rho(t)] + \sum_{k=1}^K \gamma_k(t) \mathcal{D}_k(t), \\ \mathcal{D}_k(t) &= V_k(t) \rho(t) V_k^\dagger(t) - \frac{1}{2} \left\{ V_k^\dagger(t) V_k(t), \rho(t) \right\}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где первое слагаемое в правой части первого уравнения является унитарной частью (как и в уравнении фон Неймана (1.20)), которая отвечает за когерентную эволюцию системы с гамильтонианом $H(t)$, а второе слагаемое в правой части — диссипативная часть, отвечающая за взаимодействие с окружающей средой. Символ $\{\cdot, \cdot\}$ обозначает антикоммутатор. Взаимодействие с окружающей средой в системе осуществляется через K каналов диссипации, каждый из которых характеризуется скоростью диссипации $\gamma_k(t)$ и непосредственно диссипативным оператором (диссипатором) $V_k(t)$. Данное представление активно используется при описании процессов в квантовой оптике [43], оптомеханических системах [25], квантовой электродинамике [44; 45] и физике ультрахолодных атомов [27; 46]. Основными допущениями для уравнения Линдблада являются:

- *Разделимость*: при $t = 0$ нет корреляций между системой и ее окружением, так что полную матрицу плотности можно записать как тензорное произведение $\rho_{tot}(0) = \rho(0) \otimes \rho_{env}(0)$.
- *Приближение Борна*: остояние окружающей среды не должно существенно изменяться в результате взаимодействия с системой. Также система и окружающая среда должны оставаться разделёнными на протяжении всей эволюции. Предположения справедливы, если взаимодействие слабое, и если окружающая среда намного больше, чем система. Таким образом, $\rho_{tot}(t) \approx \rho(t) \otimes \rho_{env}(t)$.
- *Марковское приближение*: временной масштаб затухания корреляций с окружающей средой τ_{env} является гораздо меньшим, чем наименьший временной масштаб системной динамики $\tau_{sys} \gg \tau_{env}$ (среда с короткой памятью).

Уравнение (1.22) можно представить в виде однородной системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(t) &= L(t) \rho(t), \\ L(t) &= -i (\mathbb{1} \otimes H(t) - H^\top(t) \otimes \mathbb{1}) + \sum_{k=1}^K \gamma_k(t) \cdot \mathbb{1} \otimes V_k(t) \cdot \bar{V}_k(t) \otimes \mathbb{1} - \\ &\quad - \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \gamma_k(t) \cdot V_k^\top(t) \bar{V}_k(t) \otimes \mathbb{1} - \sum_{k=1}^K \frac{1}{2} \gamma_k(t) \cdot \mathbb{1} \otimes V_k^\dagger(t) V_k(t), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $\mathbb{1}$ — единичная матрица размерности $S \times S$ (S - число состояний в квантовой системе). Матрица плотности (размерности $S \times S$) разворачивается по

строкам в виде супервектора (размерности $S^2 \times 1$). Матрица оператора Линдблада (линдбладдиан) $L(t)$ имеет размерность $S^2 \times S^2$.

В случае, если линдбладдиан не зависит от времени, уравнение (1.23) имеет единственное асимптотическое состояние равновесия (матрицу плотности) ρ^A [12]. Данная матрица плотности является нулевым собственным состоянием линдбладдиана — собственным вектором, который соответствует нулевому собственному числу и развернут в виде матрицы [47; 48].

В случае, если линдбладдиан является периодическим во времени $\mathcal{L}(\rho, t + T) = \mathcal{L}(\rho, t)$ с периодом T , то, согласно теории Флоке [49], асимптотическая матрица плотности также является периодической с тем же периодом: $\rho^A(t + T) = \rho^A(t)$ [31].

Основная вычислительная задача, решаемая при исследовании открытых квантовых систем — отыскание асимптотической матрицы плотности в стационарном и периодически модулируемом случае. Есть три общепринятых пути ее вычисления:

1. Спектральные методы (полная или частичная диагонализация линдбладдиана и различные виды итерационных алгоритмов [50—52]);
2. Численное интегрирование уравнения (1.23) при помощи схем высоких порядков [53];
3. Метод квантовых траекторий [14; 54—56], позволяющий свести задачу численного решения уравнения (1.23) к задаче статистического семплирования отдельных квантовых траекторий, уравнения для которых содержат на порядок меньшее количество состояний. Описание метода квантовых траекторий приведено в разделе 1.3.

Последний подход также интересен с точки зрения численного анализа отдельных квантовых траекторий, эволюция которых может характеризовать динамику системы в целом.

1.3 Метод квантовых траекторий

Для получения численного решения уравнения (1.23) в заданный момент времени t^C методом квантовых траекторий (также известным как метод Монте-Карло для волновых функций [55]) необходимо сначала вычислить эф-

эффективный неэрмитовый гамильтониан:

$$\tilde{H}(t) = H(t) - \frac{i}{2} \sum_{k=1}^K V_k^\dagger(t) V_k(t), \quad (1.24)$$

и рассмотреть эволюцию каждой отдельной квантовой траектории с данным гамильтонианом:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi_j(t) = \tilde{H}(t) \psi_j(t) \quad (1.25)$$

Здесь волновая функция $\psi_j(t)$ описывает состояние j -ой квантовой траектории в момент времени t . Эволюция волновой функции будет прерываться случайными квантовыми скачками, индуцированными диссипативными операторами $V_k(t)$. Если необходимо достижение асимптотического режима, нужно выбирать время $t^C = t^A$ достаточным для окончания всех процессов релаксации системы.

Полное описание метода квантовых траекторий выглядит представлено в алгоритме 1 [57].

Формально, в пределе $M_r \rightarrow \infty$ матрица плотности сходится к решению уравнения (1.23) в момент времени t^C для заданной начальной матрицы плотности $\rho^{init} = |\psi^{init}\rangle\langle\psi^{init}|$ [35; 54].

Промежуток времени между двумя последовательными квантовыми скачками заранее не известен и его длительность можно вычислить только при непосредственном пропагировании квантовой траектории. При пропагации траектории необходимо контролировать убывающий квадрат нормы волновой функции и определить момент времени, когда он станет равен случайному значению η .

В случае, если система является периодически модулируемой, и функция модуляции является непрерывно зависящей от времени, то в данном случае возможно применение классических методов численного интегрирования [53] с достаточно маленьким шагом [35], а также специальные схемы для стохастических дифференциальных уравнений [58].

В случае, если система является автономной или периодической с кусочно—постоянной функцией модуляции, то применима специальная схема на основе экспоненциальных пропагаторов [57]. Пропагирование на любой временной интервал τ , в рамках которого эффективный гамильтониан \tilde{H} остаётся постоянным, может быть выполнено при помощи специального пропагирующего оператора (пропагатора):

$$\mathcal{P}_\tau = e^{-i\tilde{H}\tau}, \quad (1.26)$$

Алгоритм 1: Метод квантовых траекторий

```

1  Инициализация неэрмитового гамильтониана  $\tilde{H}(t)$  из уравнения
   (1.24);
2  Инициализация начального значения  $|\psi^{init}\rangle$  для  $M_r$  траекторий;
3  for  $j \leftarrow 1$  to  $M_r$  do
4      Инициализация начального времени для  $j$ -ой траектории:  $t_j \leftarrow 0$ ;
5      while  $t_j < t^C$  do
6          Генерация случайной величины  $\eta$ , равномерно распределённой
           в интервале  $[0; 1]$ ;
7          Численное пропагирование состояния волновой функции
            $|\psi_j(t)\rangle$  на время, необходимое для убывания квадрата нормы
           волновой функции до значения  $\eta$ :  $\| |\psi_j(t_j)\rangle \|^2 = \eta$ ;
8          Нормализация волновой функции:  $|\psi_j(t_j)\rangle \leftarrow \frac{|\psi_j(t_j)\rangle}{\| |\psi_j(t_j)\rangle \|}$ ;
9          Осуществление квантового скачка через случайно выбранный
           диссипативный оператор  $V_k(t_j)$  с вероятностью
            $p_k \leftarrow \gamma_k(t_j) \frac{\|V_k(t_j)|\psi_j(t_j)\rangle\|^2}{\sum_{l=1}^K \|V_l(t_j)|\psi_j(t_j)\rangle\|^2}$ ;
10         Трансформация волновой функции с учётом выбранного
           канала диссипации:  $|\psi_j(t_j)\rangle \leftarrow \frac{V_k(t_j)|\psi_j(t_j)\rangle}{\|V_k(t_j)|\psi_j(t_j)\rangle\|}$ ;
11     end
12 end
13 Вычисление матрицы плотности в момент времени  $t^C$  при помощи  $M_r$ 
    квантовых траекторий:  $\rho_{M_r}(t^C) \leftarrow \frac{1}{M_r} \sum_{j=1}^{M_r} |\psi_j(t^C)\rangle \langle \psi_j(t^C)|$ ;

```

где e — функция матричной экспоненты [59]. Для отыскания времени квантового прыжка использовался эффективный метод бисекции [60] с максимальной глубиной D . Для реализации данного метода предложена рекурсивная функция осуществляющая пропагацию за данной глубине бисекции d (алгоритм 2), использующая функцию осуществления квантового скачка (алгоритм 3).

Результирующий алгоритм пропагации квантовой траектории методом бисекции с независимым от времени эффективным гамильтонианом \tilde{H} на время τ описан в алгоритме 4.

С вычислительной точки зрения, самая ресурсоемкая операция — умножение матрицы \mathcal{P}_d на вектор $|\psi_j(t)\rangle$ в строке 3 алгоритма 2.

Алгоритм 2: Функция пропагации квантовой траектории на заданной глубине d

```

1 Function Propagation( $|\psi_j(t)\rangle, t, \eta, d$ ):
2   for  $s_d \leftarrow 1$  to 2 do
3      $|\tilde{\psi}_j(t)\rangle \leftarrow \mathcal{P}_d |\psi_j(t)\rangle$ ;
4     if  $d = D$  then
5       if  $\| |\tilde{\psi}_j(t)\rangle \|^2 < \eta$  then
6         Jump( $|\tilde{\psi}_j(t)\rangle$ );
7          $\eta \leftarrow$  новое случайно сгенерированное число;
8          $|\psi_j(t)\rangle \leftarrow |\tilde{\psi}_j(t)\rangle$ ;
9       else
10        if  $\| |\tilde{\psi}_j(t)\rangle \|^2 < \eta$  then
11          Propagation( $|\psi_j(t)\rangle, t, \eta, d + 1$ );
12           $t \leftarrow t - \tau_d$ ;
13        else
14           $|\psi_j(t)\rangle \leftarrow |\tilde{\psi}_j(t)\rangle$ ;
15        end
16      end
17       $t \leftarrow t + \tau_d$ ;
18 end
19  $s_d \leftarrow 0$ ;

```

Алгоритм 3: Функция квантового скачка

```

1 Function Jump( $|\psi_j(t)\rangle$ ):
2   Нормализация волновой функции:  $|\Psi_j(t)\rangle \leftarrow \frac{|\psi_j(t)\rangle}{\| |\psi_j(t)\rangle \|}$ ;
3   Осуществление квантового скачка через случайно выбранный
   диссипативный оператор  $V_k(t)$  с вероятностью
    $p_k \leftarrow \gamma_k(t) \frac{\| V_k(t) |\Psi_j(t)\rangle \|^2}{\sum_{i=1}^K \| V_i(t) |\Psi_j(t)\rangle \|^2}$ ;
4   Трансформация волновой функции с учетом выбранного канала
   диссипации:  $|\Psi_j(t)\rangle \leftarrow \frac{V_k(t) |\Psi_j(t)\rangle}{\| V_k(t) |\Psi_j(t)\rangle \|}$ ;

```

Алгоритм 4: Алгоритм пропагации квантовой траектории методом бисекции на время τ

- 1 Инициализация стартовой глубины бисекции: $d = 1$;
- 2 Инициализация шага пропагирования для каждой глубины бисекции:
 $\tau_d = \frac{\tau}{2^{d-1}}$ для $d = 1 \dots D$;
- 3 Инициализация матриц пропагаторов (1.26) для каждой глубины бисекции: $\mathcal{P}_d = e^{-i\tilde{H}\tau_d}$ для $d = 1 \dots D$;
- 4 $\text{Propagation}(|\psi_j(t)\rangle, t, \eta, d)$;

1.4 Программный комплекс

Для численного моделирования открытых квантовых систем был реализован программный комплекс на языке C++ (стандарт 2017). Основные математические объекты, необходимые для описания открытых квантовых систем, представлялись в виде разреженных матриц и плотных векторов из библиотеки Eigen [51]. Комплекс состоит из 5 классов, изображенных на рисунке 1.1.

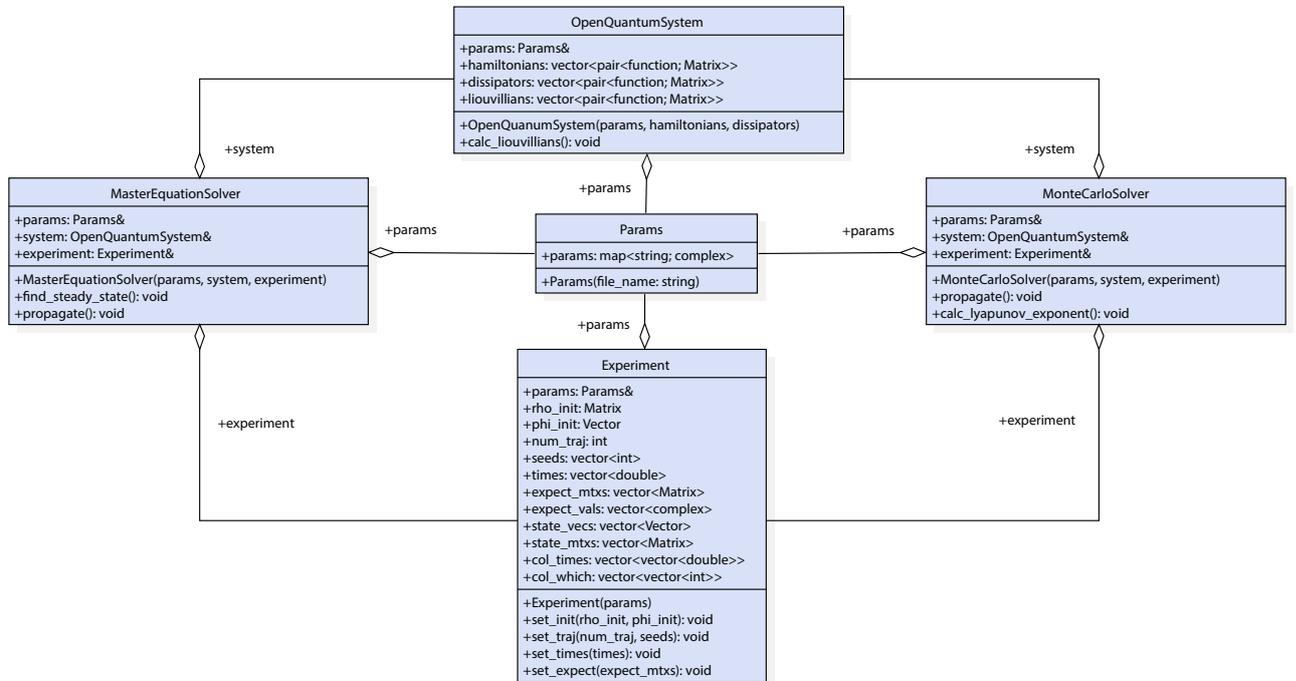


Рисунок 1.1 — Диаграмма классов программного комплекса

Класс `Params` содержит в себе единственное поле `params` — контейнер `map`, где ключом является имя параметра, а значение представляется в виде комплекснозначного числа, которое затем может приводится в другой тип данных (`int` или `double`). Единственный метод класса — конструктор, который на вход принимает имя файла. В файле содержатся все необходимые значения параметров для моделирования открытой квантовой системы, а именно: параметры самой квантовой системы, ее гамильтониана и диссипаторов; параметры проводимого эксперимента (начальное условия, матрицы квантовых наблюдаемых, времена наблюдений за системой); параметры методов моделирования (точность вычислений, число итераций).

Класс `OpenQuantumSystem` содержит данные, необходимые для описания открытой квантовой системы — гамильтониан `hamiltonians`, диссипаторы `dissipators` и лиувиллиан `liouvillians` (опционально) и имеет доступ к экземпляру класса `Params`. Предусмотрена возможность численного моделирования систем с различными типами модуляции — для этого матрица гамильтониана разделена на отдельные части, в каждой из которых может быть свой тип модуляции. Каждая такая часть гамильтониана представляется в виде пары значений: функция модуляции и матрица. Соответствующие лиувиллианы также представляются в виде вектора пар. Класс имеет конструктор, в который передаются параметры, матрицы и функции, необходимые для описания системы. Метод `calc_liouvillians()` вычисляет и сохраняет внутри класса лиувиллианы.

Класс `Experiment` содержит информацию, необходимую для проведения вычислительных экспериментов: начальное состояние (вектор `phi_init` или матрица `rho_init`), количество квантовых траекторий `num_traj` и числа `seeds` для их случайной генерации, целевые времена наблюдений квантовой системы `times`, матрицы наблюдаемых величин `expect_mtxs` (A из уравнения (1.21)). Также в `Experiment` содержатся результаты экспериментов: средние значения наблюдаемых `expect_vals` ($\langle A \rangle_\rho$ из уравнения (1.21)), состояния системы в требуемые моменты времени `times` (вектора `state_vecs` или матрицы `state_mtxs`), моменты времени квантовых скачков `col_times`, вычисленные для всех квантовых траекторий, а также идентификаторы диссипаторов `col_which`, через которые происходили эти скачки. Конкретная конфигурация необходимой информации для проведения вычислительного эксперимента и набор сохраняемых результатов определяются задаваемыми параметрами (ссылка

на экземпляр класса `Params`). Помимо конструктора, класс имеет методы инициализации составных частей эксперимента: `set_init` — задание начальных условий, `set_traj` — информация для инициализации квантовых траекторий, `set_times` — установление вектора времён наблюдения за квантовой системой, `set_expect` — инициализация матриц наблюдаемых величин.

Класс `MasterEquationSolver` содержит в себе методы численного анализа уравнения Линдблада (1.23). Метод `find_steady_state()` позволяет найти асимптотическое состояние независимой от времени открытой квантовой системы путём поиска нулевого собственного числа и соответствующего ему собственного вектора. Метод `propagate()` производит численное интегрирование уравнения Линдблада (1.23), позволяя получить состояния квантовой системы во времена `times`, задаваемые в экземпляре класса `Experiment`. Помимо перечисленных методов, в классе есть конструктор, связывающего данный класс с классами параметров, данными системы и данными эксперимента.

Класс `MonteCarloSolver` осуществляет численное моделирование отдельных квантовых траекторий согласно уравнениям (1.24) и (1.25). Метод `propagate()` производит численное пропагирование `num_traj` квантовых траекторий, позволяя получить состояние каждой траектории в моменты времени `times`. Матрица плотности может быть получена в каждый момент времени путём усреднения по ансамблю квантовых траекторий, согласно алгоритму 1. Метод `calc_lyapunov_exponent()` осуществляет вычисление старшего квантового показателя Ляпунова, согласно алгоритму, описанному в разделе 2.3. Конструктор класса связывает данный класс с классами параметров, данными системы и данными эксперимента.

Таким образом, для численного моделирования динамики открытых квантовых систем при помощи разработанного программного комплекса, сначала нужно создать экземпляр класса `Params` из файла с параметрами. После этого нужно задать матрицы и функции описывающие эрмитовую и диссипативную подсистемы уравнения Линдблада и создать экземпляр класса `OpenQuantumSystem`. Затем задаются параметры эксперимента (экземпляр `Experiment`), и по считанному конфигурационному файлу (`Params`) определяется тип численного моделирования. В ходе работы приложения все необходимые результаты сохраняются в соответствующие файлы, которым затем используются в отдельных скриптах для отрисовки графиков (Matlab, Python).

Блок-схема процесса работы программного комплекса представлена на рисунке 1.2.

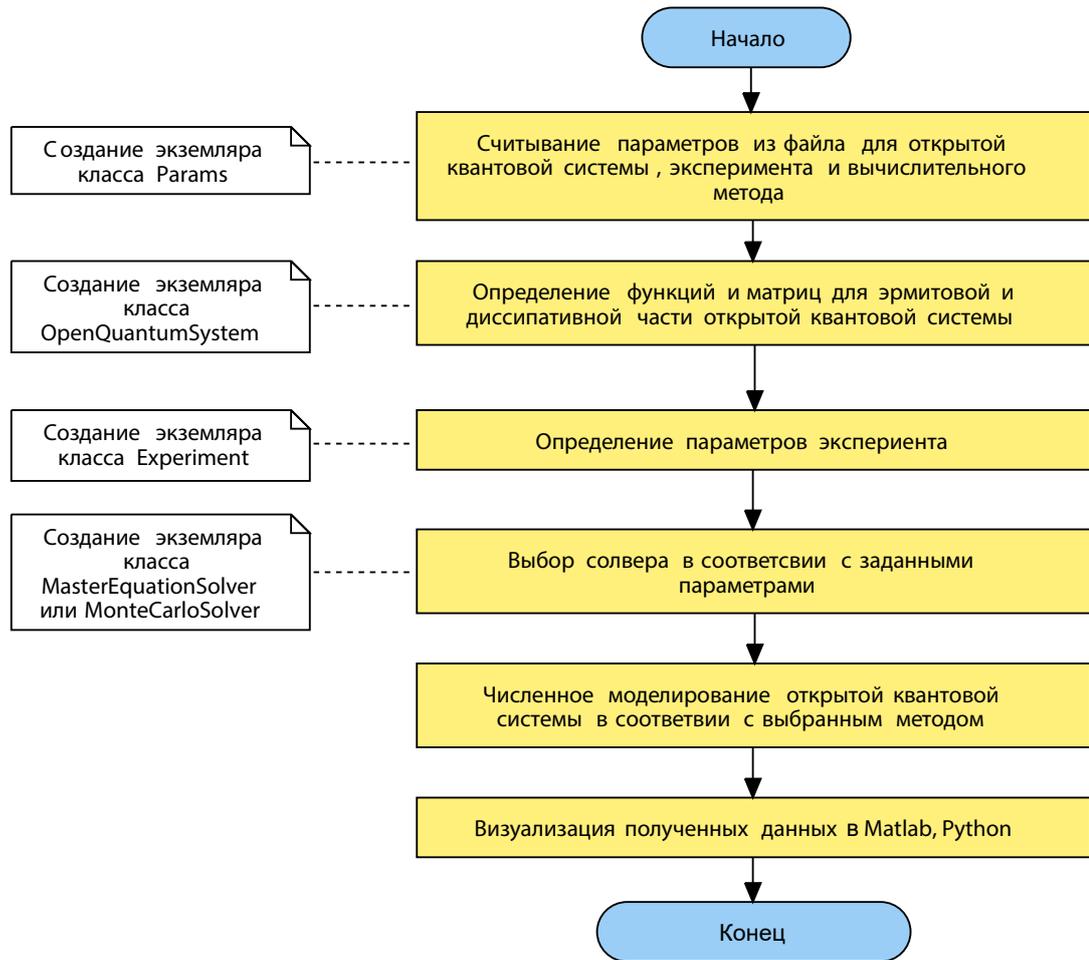


Рисунок 1.2 — Алгоритм работы программного комплекса

В программной реализации предусмотрен параллелизм по квантовым траекториям при помощи технологии OpenMP на общей памяти. Рассматривался тестовый эксперимент, в котором 1000 квантовых траекторий параллельно пропагировались в модели открытого квантового димера, с числом состояний $S = 500$. Число периодов пропации было равным 100. Эксперимент запускался на следующем оборудовании: Intel Core i9-7960X (4.20 GHz, 16 ядер), 128 GB RAM. Код компилировался при помощи Intel C++ Compiler (версия 19.2) с использованием Intel Math Kernel Library (parallel). Для оценки эффективности распараллеливания тестовый эксперимент запускался на разном количестве вычислительных ядер и измерялось время работы. На рисунке 1.3 отображены времена вычислений при разном количестве вычислительных ядер (зелёным), а

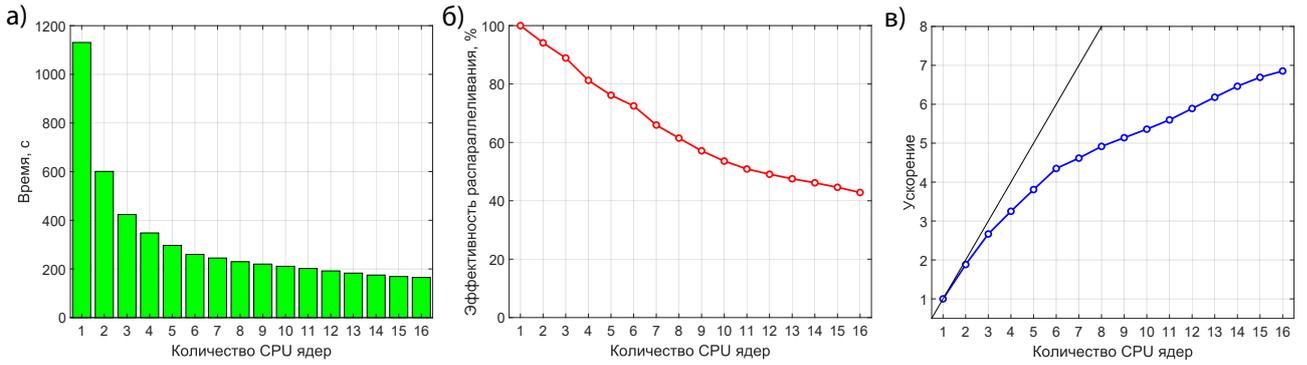


Рисунок 1.3 — Анализ эффективности распараллеливания метода квантовых траекторий: (а) время вычислений; (б) эффективность распараллеливания; (в) ускорение. В тестовом эксперименте рассматривалось разное количество вычислительных ядер (от 1 до 16)

также ускорение (синий) и эффективность распараллеливания (красный). Проводимый тестовый эксперимент имеет достаточно большую долю α вычислений, которые могут выполняться только последовательно: инициализация открытой квантовой системы, синхронизация квантовых траекторий для вычисления матрицы плотности и значений наблюдаемых. Время выполнения тестового эксперимента на одном вычислительном ядре обозначается T_1 . Время выполнения на p вычислительных ядрах: $T_p = \alpha T_1 + (1 - \alpha) \frac{T_1}{p}$. При этом ускорение параллельной версии определяется как отношение времени последовательной версии к времени параллельной версии: $\text{Speedup} = \frac{T_1}{T_p}$. Для оценки масштабируемости распараллеливания вычислялось значение эффективности: $E = \frac{S}{p}$. При увеличении числа вычислительных ядер эффективность распараллеливания падает (рисунок 1.3). Это вызвано большой долей α последовательно выполняемого кода и увеличением нагрузки на шину памяти.

1.5 Выводы по главе

В данной главе было приведено описание основных элементов математического моделирования открытых квантовых систем.

- Описаны пространство состояний квантовых систем, основные операции, операторы плотности, особенности квантовых измерений, класси-

ческие уравнения динамики для изолированных систем и их связь с открытыми.

- Описана основная математическая модель открытых квантовых систем, предложены основные подходы численного моделирования.
- Подробно описан метод квантовых траекторий, позволяющий численно моделировать микроскопическую динамику открытых квантовых систем.
- Описана архитектура и алгоритм работы программного комплекса, осуществляющего численное моделирование открытых квантовых систем. Проанализирована эффективность распараллеливания по квантовым траекториям.

Глава 2. Бифуркации и хаос в открытых квантовых системах

Взаимосвязь между квантовыми системами и их классическими аналогами (в частности, среднеполевые приближения) являются ключевой проблемой теории квантового хаоса [61]. До настоящего времени данная связь анализировалась в основном с точки зрения спектральных характеристик квантовых гамильтонианов. В данном контексте одной из самых важных вех в развитии квантового хаоса являлось установление связи между спектральной статистикой и переходами от регулярной динамики к хаотической (и наоборот) в фазовом пространстве соответствующих классических систем [61].

Бифуркационный анализ [62] является одним из основных подходов изучения нелинейной динамики и ее приложений [63]. Применение бифуркационного анализа в сфере квантовой физики долгое время рассматривалось только в контексте изолированных систем — гамильтонов хаос, спектральные характеристики которого в квантовых системах к настоящему времени являются очень хорошо изученными [64; 65]. Квантовые следы бифуркаций, то есть существенных изменений в структуре фазового пространства классических гамильтоновых систем при небольшом изменении параметра(ов), также исследовались в работах [66—68]. Здесь было обнаружено, что классические бифуркации типа «вилка» и Андронова—Хопфа [69] в среднеполевых моделях связаны с резкими изменениями запутанности основного состояния в соответствующих квантовых моделях. Кроме этого, в работе [70] было обнаружено, что бифуркация типа «вилка» соответствует переходу от динамики Раби к динамике Джозефсона в экспериментах с рубидиевым конденсатом Бозе—Эйнштейна.

Дальнейшее применение бифуркационного анализа к открытым квантовым системам в связке с соответствующими среднеполевыми моделями будет способствовать развитию теории диссипативного квантового хаоса. В случае открытых систем бифуркации могут иметь более серьезные последствия, чем в гамильтоновом случае, потому что они будут влиять на стационарное состояние системы, а не только на конкретное собственное состояние изолированной системы. Однако, существуют значительные трудности в построении среднеполевых приближений для открытых квантовых систем.

В недавней работе [32] было обобщено понятие бифуркации для случая квантовых диссипативных систем. Обычно квантовые бифуркации визуализи-

зируются путём вычисления квазиклассических распределений фазового пространства, типа Хусими или Вигнера [61], структурные изменения которых с изменением параметра воспроизводят бифуркации в классическом фазовом пространстве. Например, квантовая бифуркация удвоения периода рассматривается как переход от унимодального к бимодальному распределению Хусими [31; 34]. В работе [32], используя многочастичную модель квантового димера было показано, что асимптотическая матрица плотности открытой системы может быть использована для построения бифуркационной диаграммы классического типа, которая может быть связана с классической динамикой в среднеполе-вом приближении рассматриваемой квантовой модели. Такой подход позволил преодолеть технические ограничения при вычислении распределения Хусими для систем с большим числом состояний. В итоге были обнаружены квантовые аналоги некоторых классических типов бифуркаций — седлоузловая, типа «вилки», а также сценарий перехода к квантовому хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода.

Другим важным направлением развития теории диссипативного квантового хаоса является создание инструментов для его количественной оценки. Одна из основополагающих концепций теории динамического хаоса заключается в том, что сложная хаотическая динамика возникает из-за локальной нестабильности, которая заставляет две изначально близкие траектории расходиться. Это расхождение обычно количественно оценивается с помощью показателей Ляпунова — мощного инструмента для количественной оценки динамического хаоса. Попытки обобщения показателя Ляпунова на квантовую динамику предпринимаются давно. В большинстве исследований рассматриваются случаи гамильтоновых систем, где впервые была создана спектральная теория квантового хаоса [71]. Соответствующие обобщения варьируются от ранних идей использования функций квазивероятности и определения квантовых показателей Ляпунова в терминах «расстояния» между ними [72–74] до самых недавних достижений, основанных на вневременных корреляционных функциях [75–77].

Подходы, пытающиеся согласовать свойства спектров генераторов диссипативной квантовой эволюции (линдбладианов) [12] или спектров асимптотической матрицы плотности [31; 32; 78] с переходами между регулярным и хаотическим режимами в соответствующих среднеполевых моделях, дали некоторые интересные результаты. Однако, область количественной оценки диссипативного квантового хаоса все ещё остаётся малоизученной.

Также отдельный интерес вызывают не только теоретические характеристики квантового диссипативного хаоса, но и квантификаторы динамики системы, которые можно получить из реального физического эксперимента. В качестве модели в данном контексте можно рассматривать квантовый электродинамический (КЭД) резонатор, в экспериментальной реализации которого можно наблюдать за эмиссией фотонов [24; 79]. Последние достижения в данной области позволяют, например, изготовить полупроводниковую квантовую точку и встроить ее в микрополость [79]. Квантовая точка может иметь от двух до четырёх уровней энергии, а взаимодействие между модами резонатора и точечными экситонами также может быть настроено [80; 81]. Небольшое количество энергетических уровней делает квантовые точки хорошими кандидатами для реализации кубитов, в то время как взаимодействие между ними может регулироваться при помощи резонатора.

В разделе 2.1 описывается модель взаимодействующих бозонов в открытом квантовом димере с периодической модуляцией. Для данной системы существует среднеполевое приближение, что позволяет провести сравнение квантовой и классической (в пределе бесконечного числа частиц) динамики. В контексте квантового димера будет обнаружен квантовый аналог бифуркации Неймарка—Сакера и введено новое квантовое обобщение показателя Ляпунова на основе метода квантовых траекторий.

В разделе 2.2, используя модель периодически модулированного открытого квантового димера, исследуется квантовая бифуркация Неймарка—Сакера. Её классический аналог — рождение тора (инвариантной кривой в сечении Пуанкаре) из-за неустойчивости предельного цикла (неподвижной точки отображения Пуанкаре). Квантовая система демонстрирует переход от униmodalного к стробоскопическому распределению в форме бублика, как для распределений Хусими [61], так и для наблюдаемых величин, вычисленных для отдельных квантовых траекторий. При этом спектральные свойства отображения Флоке для квантового димера изменяются аналогично классическому случаю — пара комплексно-сопряженных собственных значений приближается к единичной окружности. Динамика отдельных квантовых траекторий на «квантовом торе» позволяет количественно определить число вращения. Также будет показано, что бифуркация чувствительна к количеству квантовых частиц, которое также можно рассматривать как управляющий параметр.

В разделе 2.3 вводится обобщение квантового показателя Ляпунова для диссипативных систем на основе количественного определения расходимости изначально близких квантовых траекторий. Введенный квантовый показатель Ляпунова будет использован для выявления сложной структуры регулярных и хаотических областей, а также различных бифуркаций в модели квантового димера.

В разделе 2.4 будет предложен экспериментально релевантный подход определения типа динамики открытого квантового резонатора с периодической модуляцией. Будет продемонстрировано, что хаотические режимы проявляют промежуточную степенную асимптотику в распределении времён ожидания фотона. Это распределение можно получить, отслеживая испускание фотонов с помощью однофотонного детектора без нарушения динамики внутри резонатора.

В разделе 2.5 численно исследуется модель открытого квантового резонатора внутрь которого помещён один спин, что позволяет регулировать степень хаотизации динамики системы в терминах квантовых показателей Ляпунова.

В разделе 2.6 представлены основные выводы по данной главе.

2.1 Открытый квантовый димер

Модель состоит из N неразличимых взаимодействующих бозонов, которые перемещаются между двумя узлами периодически модулируемого димера. Данная модель является популярной в теоретических исследованиях [82–84] и имеет экспериментальную реализацию [85; 86]. Кроме этого, в данной модели были обнаружены различные хаотические и регулярные режимы [31–34].

2.1.1 Квантовая модель

Унитарная часть уравнения Линдблада (1.22) и (1.23) задается следующим гамильтонианом:

$$H(t) = -\mathcal{J} (b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1) + \frac{2U}{N} \sum_{g=1,2} n_g (n_g - 1) + \varepsilon(t) (n_2 - n_1), \quad (2.1)$$

где первое слагаемое отвечает за перемещение бозонов между двумя узлами димера с коэффициентом \mathcal{J} , второе слагаемое — за взаимодействие бозонов с силой U , находящихся в одном и том же узле и третье слагаемое — периодическая модуляция с функцией $\varepsilon(t)$. Операторы b_j и b_j^\dagger соответствуют рождению и уничтожению бозона на сайте j , $n_j = b_j^\dagger b_j$ — оператор числа частиц на сайте j .

В дальнейшем будут рассмотрены два типа периодической модуляции димера. Непрерывная (С - Continuous) функция модуляции:

$$\varepsilon_C(t) = \varepsilon_C(t + T) = A \sin(\Omega t), \quad (2.2)$$

где T — период модуляции, A — амплитуда модуляции (разность энергий между сайтами димера), $\Omega = 2\pi/T$. Второй тип модуляции — кусочно-постоянная (Р - Piecewise):

$$\begin{aligned} \varepsilon_P(t) &= \varepsilon_P(t + T) = \mu_0 + \mu_1 Q(t), \\ Q(\tau) &= 1, \quad 0 < \tau \leq T/2, \\ Q(\tau) &= 0, \quad T/2 < \tau \leq T, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где T — период модуляции, μ_0 и μ_1 — постоянная и переменная разница в уровне энергий между сайтами димера, $Q(\tau)$ — периодическая функция, принимающая два значения.

Гильбертово пространство системы имеет размерность $S = N + 1$ и каждое базисное состояние системы можно обозначить как число бозонов в первом сайте димера $\{|n\rangle\}$, где $n = 0, \dots, N$. Таким образом, размер системы задаётся количеством бозонов в димере.

Во второй части уравнения Линдблада (1.22) и (1.23), отвечающей за взаимодействие с окружающей средой, участвует только один экспериментально-релевантный [27; 37] диссипативный оператор ($K = 1$), который действует между двумя сайтами димера. Данный диссипатор имеет вид:

$$V = (b_1^\dagger + b_2^\dagger) (b_1 - b_2), \quad (2.4)$$

и синхронизирует динамику на сайтах димера за счёт рециркуляции антисимметричных противофазных состояний в симметричные и синфазные. Скорость диссипации γ является независимой от времени величиной.

При использовании метода квантовых траекторий (раздел 1.3) для каждой траектории $|\psi_j(t)\rangle$ (j - индекс) в момент времени t будут вычисляться следующие значения наблюдаемых — нормированного числа частиц в первом сайте димера:

$$n_j(t) = \frac{1}{N} \langle \psi_j(t) | b_1^\dagger b_1 | \psi_j(t) \rangle, \quad (2.5)$$

и нормированной энергии:

$$e_j(t) = \frac{1}{N} \langle \psi_j(t) | H(t) | \psi_j(t) \rangle. \quad (2.6)$$

2.1.2 Среднеполевое приближение

В пределе бесконечного числа частиц $N \rightarrow \infty$ в среднеполевом приближении модели квантового димера используются следующие спиновые операторы:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x &= \frac{1}{2N} (b_1^\dagger b_2 + b_2^\dagger b_1), \\ \mathcal{S}_y &= -\frac{i}{2N} (b_1^\dagger b_2 - b_2^\dagger b_1), \\ \mathcal{S}_z &= \frac{1}{2N} (b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

чья эволюция рассматривается в представлении Гейзенберга [35]. В пределе бесконечного числа частиц коммутатором первых двух спиновых операторов можно пренебречь: $[\mathcal{S}_x, \mathcal{S}_y] = i\mathcal{S}_z \stackrel{N \rightarrow \infty}{\approx} 0$ (так как является бесконечно малой порядка $\mathcal{O}(N^{-1})$). Это же свойство справедливо для всех остальных коммутаторов, полученных из разных перестановок спиновых операторов. Заменяя спиновые операторы их математическим ожиданием $\mathcal{S}_k = \text{tr}[\rho \mathcal{S}_k]$, можно получить следующую систему дифференциальных уравнений [31]:

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{S}_x}{dt} = 2\varepsilon(t)\mathcal{S}_y - 8U\mathcal{S}_z\mathcal{S}_y + 8\gamma(\mathcal{S}_y^2 + \mathcal{S}_z^2) \\ \frac{d\mathcal{S}_y}{dt} = -2\varepsilon(t)\mathcal{S}_x + 8U\mathcal{S}_x\mathcal{S}_z - 2\mathcal{J}\mathcal{S}_z + 8\gamma\mathcal{S}_x\mathcal{S}_y \\ \frac{d\mathcal{S}_z}{dt} = -2\mathcal{J}\mathcal{S}_y - 8\gamma\mathcal{S}_x\mathcal{S}_z \end{cases} \quad (2.8)$$

В данной системе есть интеграл движения: $\mathcal{S}^2 = \mathcal{S}_x^2 + \mathcal{S}_y^2 + \mathcal{S}_z^2$ и эволюция среднеполевой модели ограничена поверхностью сферы Блоха [87]:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_x = \frac{1}{2} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \mathcal{S}_y = \frac{1}{2} \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\ \mathcal{S}_z = \frac{1}{2} \cos(\vartheta) \end{cases} \quad (2.9)$$

Система дифференциальных, описывающих движение на данной сфере выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = -2\mathcal{J} \sin(\varphi) + 4\gamma \cos(\varphi) \cos(\vartheta) \\ \dot{\varphi} = -2\mathcal{J} \frac{\cos(\vartheta)}{\sin(\vartheta)} - 2\varepsilon(t) + 4U \cos(\vartheta) - 4\gamma \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\vartheta)} \end{cases} \quad (2.10)$$

Число бозонов в первом сайте димера вычисляется по формуле:

$$n = \frac{N}{2}(1 + \cos(\vartheta)). \quad (2.11)$$

Данная классическая нелинейная система (2.10) будет играть опорную роль и результаты полученные для неё будут сравниваться с результатами квантовой системы, описанной в разделе 2.1.1.

2.2 Квантовая бифуркация Неймарка—Сакера

В данном разделе изучается квантовая бифуркация Неймарка—Сакера, классическим аналогом которой является рождение тора (инвариантной кривой в стробоскопическом отображении Пуанкаре) из-за неустойчивости предельного цикла (неподвижная точка отображения Пуанкаре) [63]. На примере экспериментально релевантной модели открытого квантового периодически модулированного димера (раздел 2.1.1), будет показано, что стробоскопическое распределение Хусими [61] демонстрирует переход от унимодальной формы к форме бублика для силы взаимодействия бозонов, близкой к бифуркационному значению соответствующей среднеполевой модели (раздел 2.1.2). Такое же преобразование наблюдается в стробоскопическом распределении наблюдаемых величин для отдельных квантовых траекторий (раздел 1.3). Динамика таких индивидуальных квантовых траекторий на «квантовом торе» характеризуется числом вращения, метод вычисления которого будет представлен в данном разделе. Как и в классическом случае, числа вращения, близкие к рациональным,

соответствуют почти «периодическим» мультимодальным стробоскопическим распределениям. Также будет продемонстрировано, что бифуркация зависит от размера системы. То есть число бозонов в димере также является бифуркационным параметром.

В данном разделе зафиксированы следующие параметры квантового димера (раздел 2.1): $\mathcal{J} = 1$, $\gamma = 0.1$, модуляция $\varepsilon(t) = \varepsilon_C(t)$ (2.2) с амплитудой $A = 3.4$ и периодом $T = 2\pi$. Варьируемые параметры: U и N . При исследовании бифуркации от параметра U , число частиц $N = 500$, если нет дополнительных уточнений. Эволюция квантового димера в случае периодической модуляции сходится к устойчивой периодической матрице плотности $\rho^A(t + T) = \rho^A(t)$ [49], которая в квантовом (Q) стробоскопическом отображении соответствует неподвижной точке:

$$\mathcal{P}_Q : \rho(mT) \rightarrow \rho((m + 1)T), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Так как в системе есть модуляция, для решения уравнения Линдблада (1.23) использовались схемы численного интегрирования высоких порядков [53]. Шаг интегрирования был выбран равным $5 \cdot 10^{-4}T$. Время, необходимое для достижения устойчивого периодического решения $t^A = 100T$.

Время переходного процесса для среднеполевого приближения (2.9) равно $t^A = 1000T$.

Матрицу плотности ρ для системы с N бозонами в димере можно визуализировать на сфере Блоха [87] — $\bar{\rho}_{\vartheta, \varphi}$ — вместе с решением среднеполевого приближения данной модели (2.10). Для этого нужно построить распределение Хусими [61] для матрицы плотности спроектированной на множество обобщённых $SU(2)$ когерентных состояний [88]:

$$|\vartheta, \varphi\rangle = \sum_{j=0}^N \sqrt{\binom{N}{j}} \left[\cos \frac{\vartheta}{2} \right]^j \left[e^{i\varphi} \sin \frac{\vartheta}{2} \right]^{N-j} |j\rangle, \quad (2.13)$$

$$\bar{\rho}_{\vartheta, \varphi}(t) = \langle \vartheta, \varphi | \rho(t) | \vartheta, \varphi \rangle.$$

Также для анализа квантовой бифуркации Неймарка—Сакера использовался метод квантовых траекторий (раздел 1.3). Параметры метода: $M_r = 100$ квантовых траекторий, время достижения асимптотического состояния $t^A = 100T$, время наблюдения $t^O = 1000T$.

Рассмотрим сначала классическую нелинейную модель — среднеполевое приближение квантового димера (2.10). Сила взаимодействия между бозонами

U является бифуркационным параметром. В стробоскопическом отображении для среднеполевой модели (MF):

$$\mathcal{P}_{MF} : \{\vartheta(mT), \varphi(mT)\} \rightarrow \{\vartheta((m+1)T), \varphi((m+1)T)\}, \quad (2.14)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

наблюдается бифуркация Неймарка—Сакера при $U \approx 0.11$ и появление цикла периода 6 при $U \approx 0.18$ (рисунок 2.1а, 2.2, красные кривые). Далее, при увеличении U цикл переходит в хаотический аттрактор, который в конце концов исчезает из-за кризиса, когда устойчивая неподвижная точка восстанавливается.

Достаточно большое количество частиц, $N = 500$, должно приблизить систему к классическому пределу. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма (рисунок 2.1а) отображает вероятности нахождения заданного числа частиц в первом сайте димера, после 1000 периодов стробоскопического наблюдения. На рисунке 2.16 изображены диагональные элементы матрицы плотности $\rho_{n,n}(t^A)$. Качественная структура бифуркационной диаграммы, полученной из среднеполевой, достаточно хорошо воспроизводится в квантовом случае, как для рождения тора, так и для возникновения хаоса и окончательного восстановления устойчивой неподвижной точки. Однако даже для $N = 500$ некоторые детали различаются. Например, квантовая бифуркация в интервале $U \in [0.6, 0.7]$, не имеющая аналогов в нелинейной модели. Расхождение происходит из-за отбрасывания слагаемых более высокого порядка малости, чем $\mathcal{O}(N^{-1})$ и сохранением только математических ожиданий в среднеполевом приближении (раздел 2.1.2). Переход к приближению среднего поля более высокого порядка, позволил бы получить многомерную нелинейную систему, в которой возникнет соответствующая классическая бифуркация.

На рисунке 2.2 хорошо видно соответствие между стробоскопическими сечениями Пуанкаре для среднеполевой модели и распределениями Хусими для асимптотической матрицы плотности открытого квантового димера на плоскости $\{\vartheta, \varphi\}$. В проекции квантового аттрактора на классическое фазовое пространство появляется распределение Хусими в форме бублика, при этом в среднеполевой модели существует инвариантная кривая в сечении Пуанкаре. При дальнейшем увеличении силы взаимодействия между частицами U можно наблюдать образование многопериодической орбиты на квантовом торе (рисунок 2.2г) — сценарий, типичный для классических систем. Однако, есть

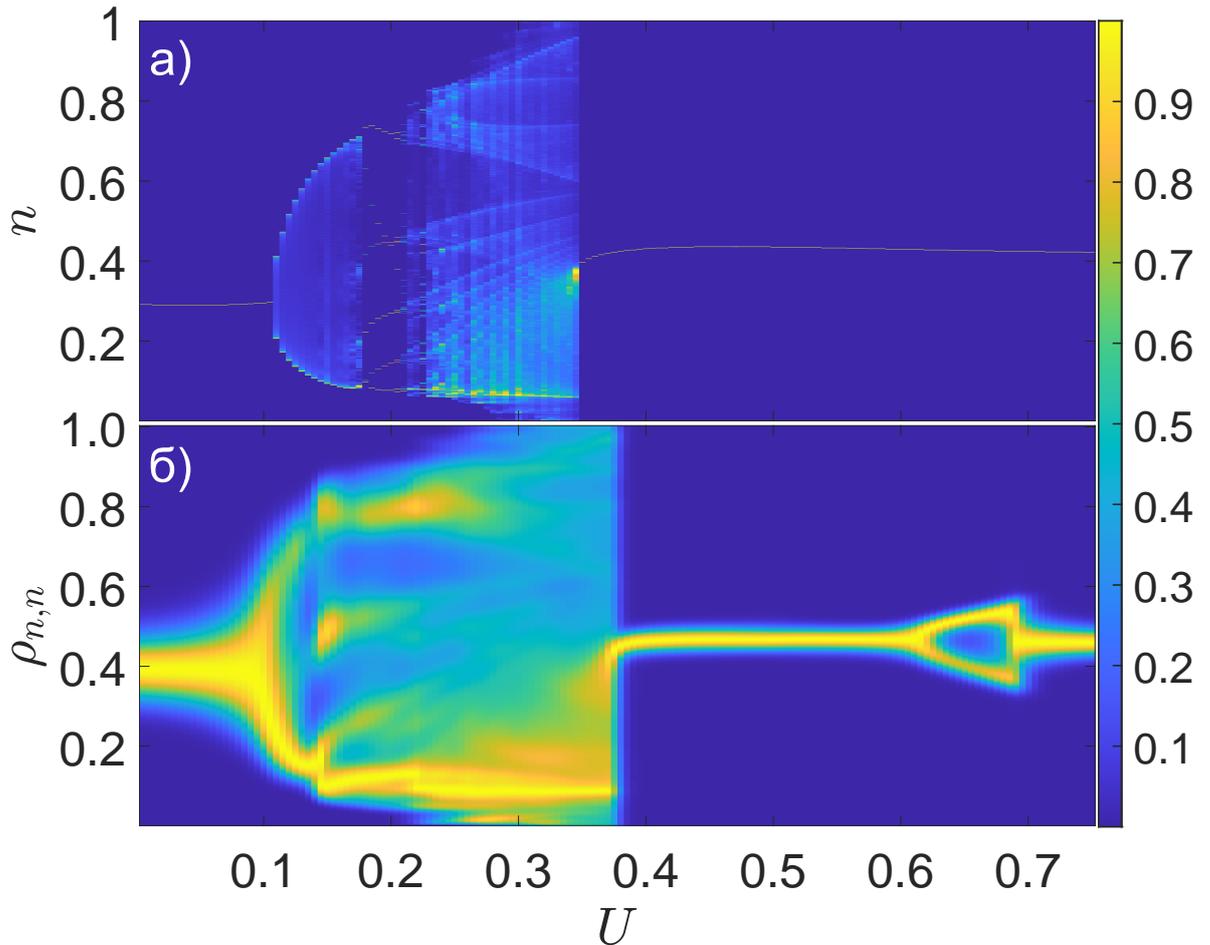


Рисунок 2.1 — Бифуркационные диаграммы для классической нелинейной модели среднего полевого приближения (а) и квантового димера (б). Цветом обозначен максимальный элемент для каждого значения U с нормировкой на единицу: (а) плотность вероятности (PDF) числа бозонов в первом сайте димера (2.11) после 1000 периодов стобоскопического наблюдения для среднего полевого приближения (2.10); (б) диагональные элементы матрицы плотности для модели квантового димера.

некоторые количественные отличия: бублик уже присутствует при $U = 0.1$ для квантовой модели с $N = 500$, в то время как в среднеголевой модели все ещё имеет фиксированную точку (рисунок 2.2а); размер бублика немного больше, чем инвариантная кривая в классическом случае (рисунок 2.2б, 2.2в); формирование периодической орбиты в квантовом случае происходит при меньших значениях параметра U (рисунок 2.2г).

После этого была исследована возможность прямого обнаружения квантовой бифуркации Неймарка-Сакера в квантовых наблюдаемых. Плотности распределения (PDF) нормированных наблюдаемых величин (числа частиц в

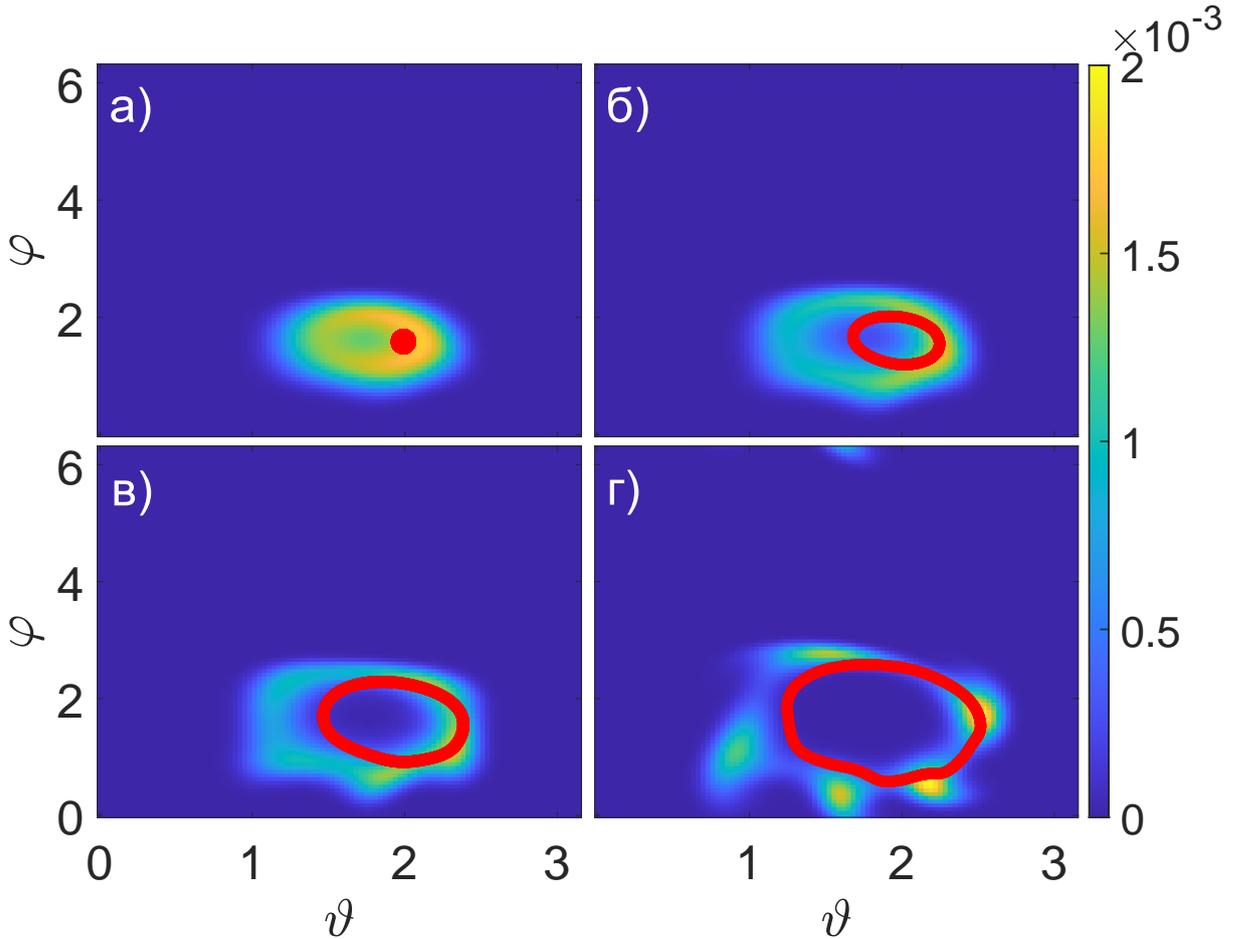


Рисунок 2.2 — Стробоскопическое распределение Хусими (2.13) для матрицы плотности (цветом) и сечения Пуанкаре (2.14) для среднеполевой модели (красные кривые) при разных значениях параметра силы взаимодействия бозонов в квантовом димере: (а) $U = 0.1$; (б) $U = 0.1125$; (в) $U = 0.125$; (г) $U = 0.15$.

первом сайте димера (2.5) и энергии (2.6)) для квантовых траекторий, взятых в стробоскопические моменты времени, свидетельствуют о появлении бубликообразных распределений после квантовой бифуркации (рисунок 2.3), что уже было обнаружено для распределения Хусими (рисунок 2.2).

Исследование отдельных квантовых траекторий позволяет глубже понять динамику квантового тора. Для каждой пары стробоскопических наблюдаемых (2.5) и (2.6) — $n(mT)$ и $e(mT)$ — можно определить фазу θ_m как полярный угол. При этом начало координат нужно поместить в центр масс стробоскопической двумерной плотности вероятности и произвести нормировку осей в интервал $[-1, 1]$ (рисунок 2.4, вставка). После этого можно вычислить число вращения

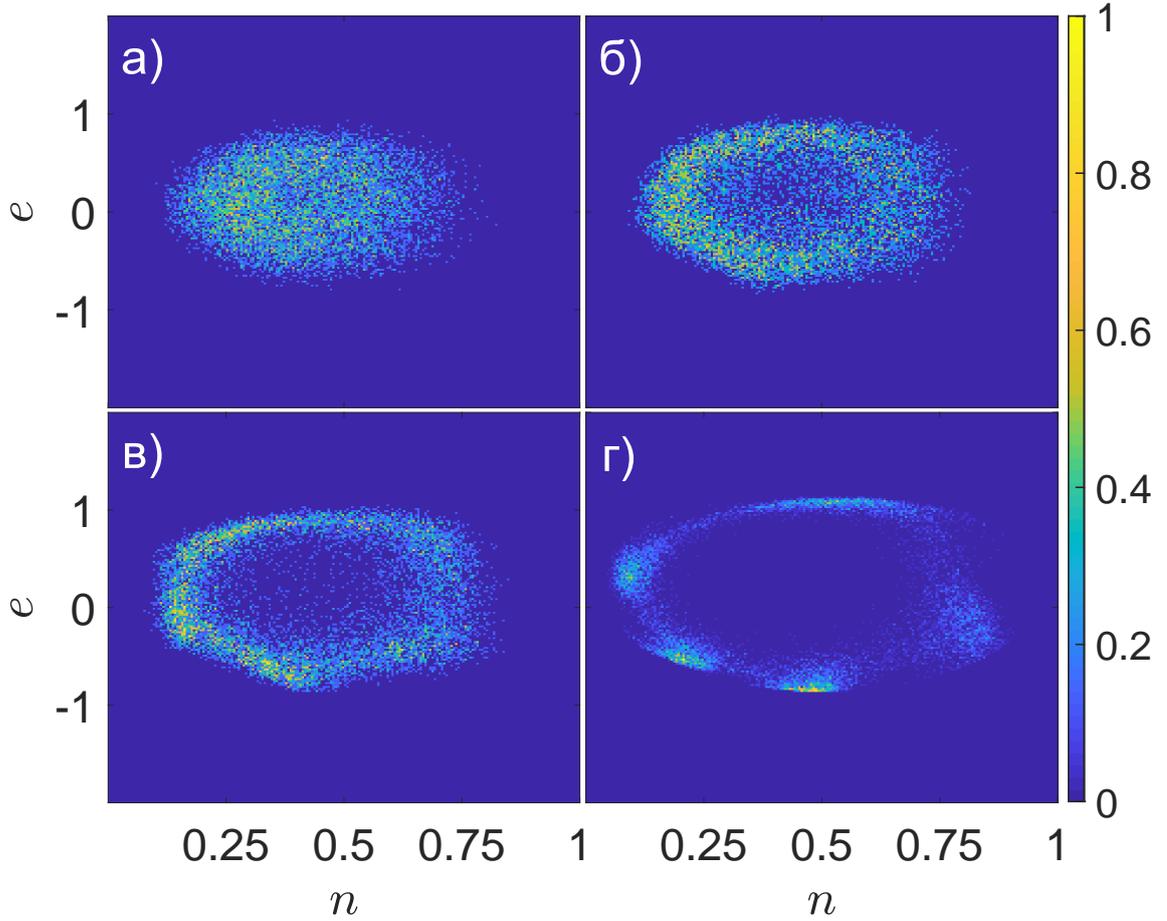


Рисунок 2.3 — Плотности распределения (PDF) нормированных наблюдаемых величин (числа частиц в первом сайте димера (2.5) и энергии (2.6)) для квантовых траекторий, взятых в стобоскопические моменты времени, при разных значениях параметра силы взаимодействия между бозонами: (а) $U = 0.1$; (б) $U = 0.1125$; (в) $U = 0.125$; (г) $U = 0.15$.

по формуле:

$$\omega_m = \frac{\theta_m - \theta_{m-1}}{2\pi} \pmod{1}, \quad (2.15)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

В классической динамике различают два случая усреднённого по времени числа вращения ω . Для рационального $\omega = p/q$ ($p, q \in \mathbb{N}$) инвариантный тор содержит устойчивую орбиту с периодом q , которая является асимптотическим решением, а для иррационального ω траектории плотно покрывают тор.

Динамика на квантовом торе может быть охарактеризована распределением вероятностей числа вращения ω_m (рисунок 2.4). В точке бифуркации

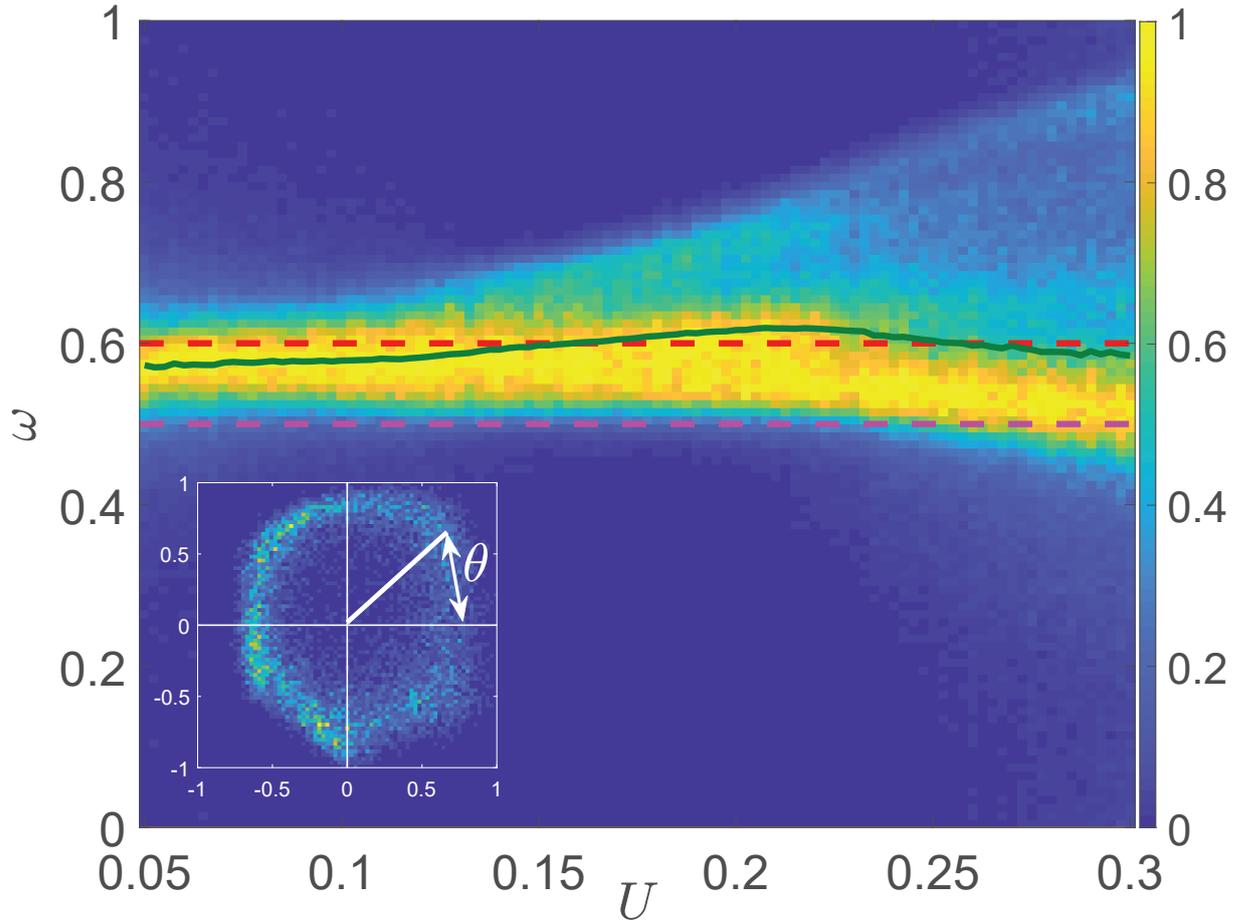


Рисунок 2.4 — Плотность распределения числа вращения (2.15) квантовых траекторий в зависимости от силы взаимодействия U бозонов в димере. Максимальный элемент для каждого значения U нормирован на единицу. Сплошная линия соответствует среднему числу вращения, пунктирные линии указывают на уровни $\omega = 1/2$ и $\omega = 3/5$. Вставка: фаза θ определяется как полярный угол для центрированных и нормированных стробоскопических наблюдаемых.

$U \approx 0.1$ данное распределение хорошо локализовано около $\omega = 0.58$ (отличается от значения удвоения периода $1/2$). Возникает ситуация, аналогичная иррациональному числу вращения для классического тора, так что квантовые траектории плотно его покрывают. Среднее число вращения растёт с увеличением силы взаимодействия между бозонами U и становится рациональным $\omega = 3/5$ при $U \approx 0.15$. При этом стробоскопические распределения имеют структуру с периодом 5 (рисунки 2.2в, 2.2г и 2.3в, 2.3г), как и в классическом случае.

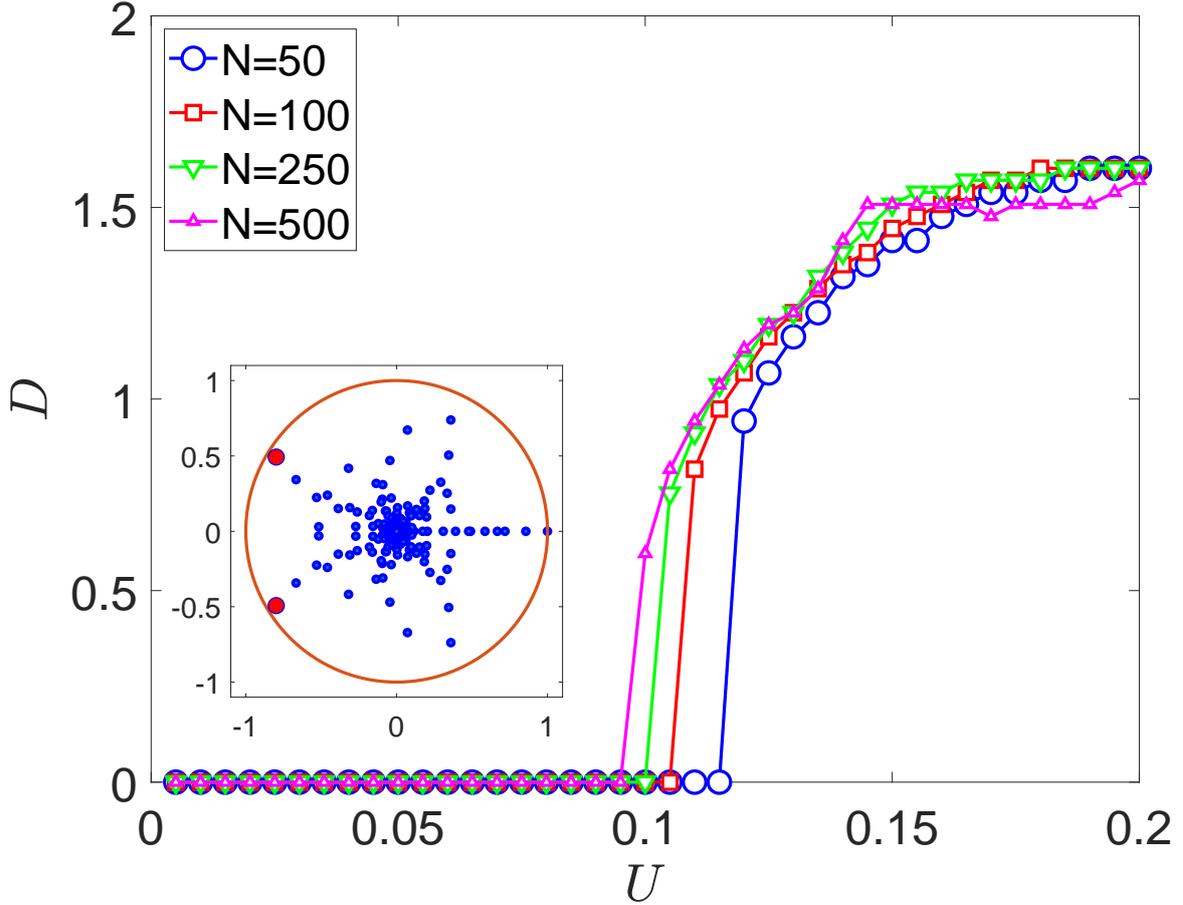


Рисунок 2.5 — Диаметр тора в распределении Хусими (2.13) в зависимости от силы взаимодействия бозонов U для разного числа частиц в димере: $N = 50$ (синий); $N = 100$ (красный); $N = 250$ (зелёный); $N = 500$ (фиолетовый). Вставка: собственные числа отображения Флоке (2.16) на комплексной плоскости в точке бифуркации $U = 0.12$ для $N = 50$. Красные точки соответствуют комплексно-сопряжённой паре, которая приближается к единичной окружности.

Бифуркация также влияет на спектральные свойства системы. Это можно продемонстрировать путём вычисления спектра отображения Флоке:

$$\mathcal{F} = \mathcal{T} \exp \left[\int_0^T L(t) dt \right] \quad (2.16)$$

где \mathcal{T} — оператор хронологического упорядочивания. Данное отображение описывает эволюцию оператора плотности (1.23) за период модуляции [31]. Наибольшее собственное значение его спектра — $\{\mu_k\}$, $k = 1, \dots, (N + 1)^2$ — всегда равно единице $\mu_1 = 1$. Остальные находятся внутри единичной окружности из-за диссипативных свойств Линдбладана $L(t)$ (1.23). Если проследить за максимальными по модулю собственными числами внутри окружности, то об-

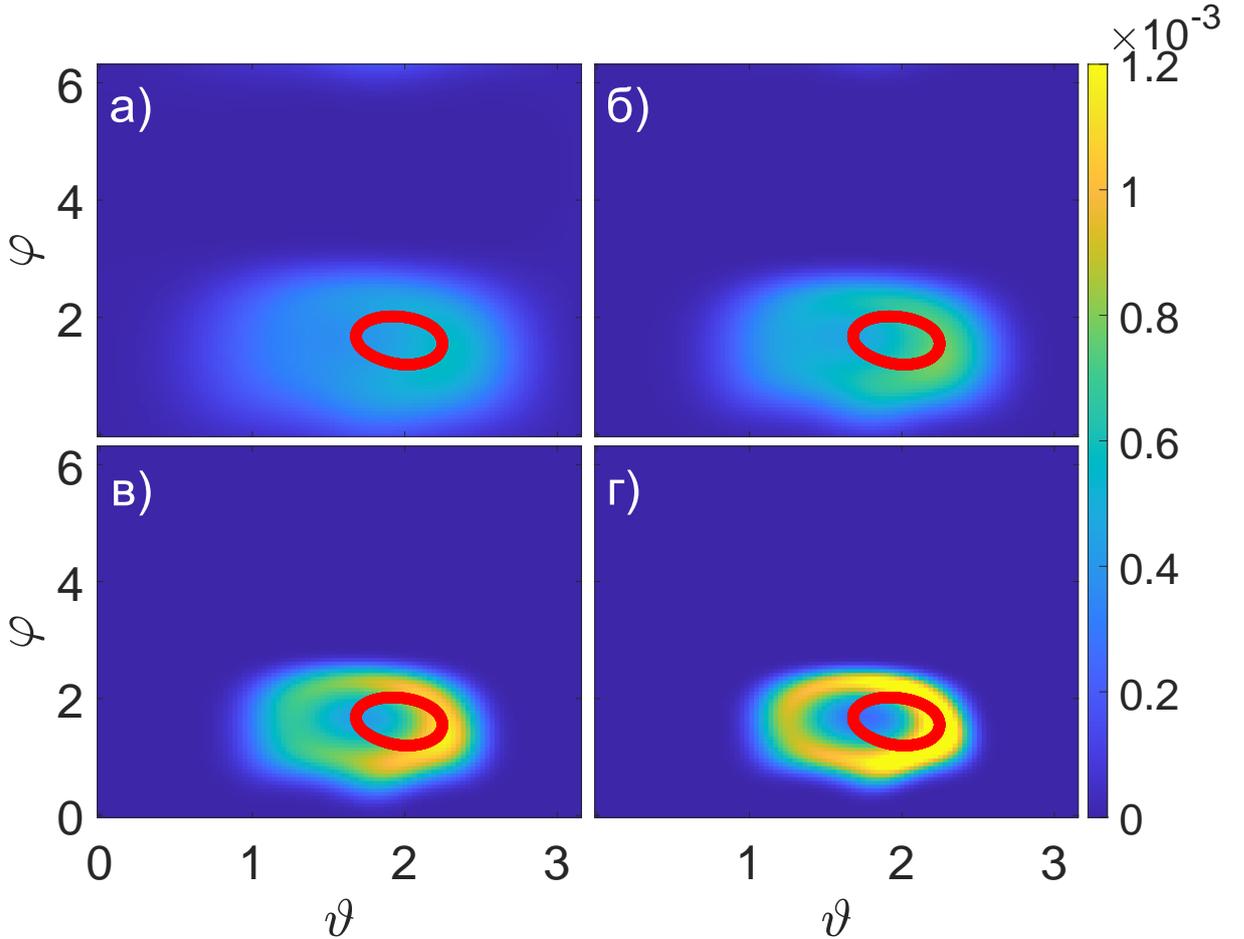


Рисунок 2.6 — Стробоскопическое распределение Хусими (2.13) для матрицы плотности в зависимости от числа частиц: (а) $N = 50$; (б) $N = 100$; (в) $N = 250$; (г) $N = 500$. Красными кривыми обозначены сечения Пуанкаре (2.14) для среднеполевой модели при $U = 0.1125$.

наружится комплексно-сопряжённая пара, которая приближается к единичной окружности в точке квантовой бифуркации $\mu_{2,3} \approx e^{\pm i\theta_0}$ (рисунок 2.5). Фазы этих собственных чисел согласуются с числом вращения: $\theta_0 \approx 2\pi\omega$.

Спектральная щель $(1 - |\mu_{2,3}|)$ уменьшается с ростом N и в пределе бесконечного числа частиц $N \rightarrow \infty$ получатся классические сопряжённые множители предельного цикла в точке бифуркации Неймарка–Сакера [63]. Также величина спектральной щели позволяет оценить время релаксации квантовой системы от произвольного начального условия до асимптотического состояния, $t^A \sim (1 - |\mu_{2,3}|)^{-1}$. Данное время возрастает при увеличении числа частиц в димере N .

Рассмотрим квантовую бифуркацию Неймарка–Сакера в зависимости от числа бозонов N . Среднеполевая модель формально получается при $N \rightarrow \infty$,

но черты классической бифуркации Неймарка—Сакера воспроизводятся глубоко в квантовом режиме, начиная с $N \sim 25$. Фактически, число частиц N можно рассматривать как бифуркационный параметр. Например, можно исследовать случай $U = 0.1125$, когда инвариантная кривая уже присутствует в модели среднего поля (рисунок 2.26). Однако, распределение Хусими для квантового димера с относительно небольшим числом частиц, $N = 50$, по-прежнему является унимодальным (рисунок 2.6а). При увеличении N наблюдается преобразование распределения Хусими в форму бублика (рисунок 2.6в, 2.6г). То есть квантовую бифуркацию Неймарка—Сакера зависит от числа бозонов в димере N .

Также для квантовой бифуркации был определён диаметр тора D в распределении Хусими как расстояние между двумя максимумами на сечении $\varphi = \pi/2$. В случае, если распределение Хусими является унимодальным, то $D = 0$. Полученные кривые $D(U)$ (рисунок 2.5) подтверждают ярко выраженную зависимость от числа частиц.

Все представленные выше результаты позволяют сделать вывод о наличии квантового аналога классической бифуркации Неймарка—Сакера в открытом периодически модулированном квантовом димере. Данный феномен характеризуется появлением бубликообразных стробоскопических распределений, как для проекции Хусими на классическое фазовое пространство, так и для квантовых наблюдаемых. Бифуркация также видна в спектральных свойствах соответствующего отображения Флоке, когда пара его сопряженных собственных значений приближается к единичной окружности. Метод квантовых траекторий позволяет оценить микроскопическую динамику на квантовом торе и вычислить соответствующее число вращения. Квантовая бифуркация зависит от числа бозонов, что также является бифуркационным параметром.

2.3 Старший квантовый показатель Ляпунова

Одна из немногих существующих реализаций старшего квантового показателя Ляпунова основана на методе непрерывных измерений, использующего траектории стохастического уравнения Шрёдингера [89]. Однако, в данном подходе существуют значительные сложности в разделении регулярных и ха-

отических квантовых состояний [90; 91]. Метод непрерывных измерений имеет физический смысл. Например, он используется при описании оптического резонатора, выход которого контролируется с помощью гомодинного детектирования [43; 92]. Это имеет перспективу для измерения старшего показателя Ляпунова в реальном физическом эксперименте [93]. Однако, высокие вычислительные затраты нивелируют связанные с физикой преимущества этого подхода и ограничивают потенциал численных исследований модельных систем [94].

В данном разделе будет предложен альтернативный подход к квантовому обобщению показателей Ляпунова. Метод основан на количественном определении расходимости изначально близких квантовых траекторий (раздел 1.3). Введенный квантовый показатель Ляпунова будет использован для выявления сложной структуры регулярных и хаотических областей, а также различных бифуркаций в модели квантового димера (раздел 2.1).

2.3.1 Алгоритм вычисления

Старший квантовый показатель Ляпунова вычисляется как средняя скорость экспоненциального роста расстояния (определённого с помощью некоторых метрик) между исходной $\psi_B(t)$ и варьируемой $\psi_V(t)$ квантовыми траекториями, которые эволюционируют согласно уравнению (1.25), в полной аналогии с классическим определением [95].

Варьируемая траектория в момент времени t_k инициализируется как нормализованный вектор возмущения:

$$|\psi_V(t_k)\rangle = \frac{|\psi_B(t_k)\rangle + \xi \frac{|\psi_r\rangle}{\| |\psi_r\rangle \|}}{\left\| |\psi_B(t_k)\rangle + \xi \frac{|\psi_r\rangle}{\| |\psi_r\rangle \|} \right\|} \left\| |\psi_V(t_k)\rangle \right\|, \quad (2.17)$$

где $|\psi_r\rangle$ — случайная волновая функция, чьи значения равномерно распределены в интервале $[-1, 1]$, ξ — величина отклонения между траекториями. При этом значение отклонения ξ определяется таким образом, чтобы разница наблюдаемой величины между траекториями:

$$\Delta(t_k) = |O_B(t_k) - O_V(t_k)|, \quad (2.18)$$

где $O_B(t_k)$ и $O_V(t_k)$ — значения наблюдаемых в момент времени t_k для исходной и варьируемой квантовой траектории соответственно, была равна некоторому фиксированному значению Δ_S .

Непосредственно наблюдаемые вычисляются по формуле:

$$O(t) = \langle \psi_j(t) | X | \psi_j(t) \rangle, \quad (2.19)$$

где j — индекс квантовой траектории, X — оператор наблюдаемой. Во всех случаях при вычислении квантового показателя Ляпунова будут использоваться эрмитовы операторы для наблюдаемых величин. В этом случае величина, показывающая насколько текущее отклонение Δ отличается от целевого значения Δ_S :

$$\eta = \Delta - \Delta_S, \quad (2.20)$$

будет являться монотонной от величины непосредственно отклонения траекторий ξ . Для поиска оптимального значения ξ , которое обеспечивает минимальное по модулю значение η с заданной точностью ε будет использоваться метод бисекции. Исходя из физического смысла наблюдаемых, определяется их допустимый диапазон. Данный диапазон наблюдаемых соответствует определённому диапазону величины отклонения между траекториями $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$, на котором будет идти поиск оптимального значения методом бисекции. Алгоритм 5 осуществляет вычисление варьируемой траектории, которая отличается от исходной траектории на величину Δ_S по значениям наблюдаемых (2.19).

Перенормировка варьируемой траектории происходит в эквидистантные моменты времени $t_k = k\tau$, $k \in \mathbb{N}$ [95]. В эти же моменты времени происходит вычисление локальных факторов роста:

$$d_k = \frac{\Delta(t_k)}{\Delta_S}, \quad (2.21)$$

которые используются для вычисления старшего квантового показателя Ляпунова:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_k \ln d_k. \quad (2.22)$$

Выбор временного промежутка τ и выбор наблюдаемой не оказывают существенного влияния на значения показателя Ляпунова [2]. Алгоритм был успешно применён для анализа различных открытых квантовых систем [2–4].

Алгоритм 5: Функция инициализации варьируемой траектории

```

1 Function TrajVar( $|\psi_V(t_k)\rangle$ ,  $|\psi_B(t_k)\rangle$ ,  $\Delta_S$ ,  $\varepsilon$ ,  $\xi_{min}$ ,  $\xi_{max}$ ):
2   Генерация случайной волновой функции  $|\psi_r\rangle$ ;
3    $\xi_{left} = \xi_{min}$ ;
4    $\xi_{right} = \xi_{max}$ ;
5   do
6      $\xi = \frac{\xi_{right} + \xi_{left}}{2}$ ;
7      $|\psi_V(t_k)\rangle = \frac{|\psi_B(t_k)\rangle + \xi \frac{|\psi_r\rangle}{\| |\psi_r\rangle \|}}{\| |\psi_B(t_k)\rangle + \xi \frac{|\psi_r\rangle}{\| |\psi_r\rangle \|}} \| |\psi_V(t_k)\rangle \|$ ;
8     Вычисление значения наблюдаемых  $O_B(t_k)$  и  $O_V(t_k)$ ;
9      $\Delta = |O_B(t_k) - O_V(t_k)|$ ;
10     $\eta = \Delta - \Delta_S$ ;
11    if  $\eta > 0$  then
12      |  $\xi_{right} = \xi$ ;
13    else
14      |  $\xi_{left} = \xi$ ;
15    end
16  while  $|\eta| > \varepsilon$ ;

```

2.3.2 Результаты в модели открытого квантового димера

Рассмотрим модель открытого квантового димера (раздел 2.1) с фиксированными параметрами: количество бозонов в димере $N = 200$, параметр туннелирования между сайтами димера $\mathcal{J} = 1$, интенсивность диссипации $\gamma = 0.1$, кусочно-постоянная модуляция (2.3) с постоянной и переменной разницей в уровне энергий между сайтами димера $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 1.5$ соответственно и периодом модуляции $T = 2\pi$. Для открытой квантовой системы было выбрано время достижения асимптотического состояния равным $t^A = 10^3 T$, а время наблюдения $t^O = 10^3 T$. Для среднеполевого приближения: $t^A = 10^4 T$, а время наблюдения $t^O = 10^4 T$. Количество базовых квантовых траекторий, использованных для получения усреднённого значения показателя Ляпунова $M_r = 10^2$. Стартовое отклонение квантовых траекторий при вычислении показателя Ляпунова $\Delta_S = 10^{-4}$.

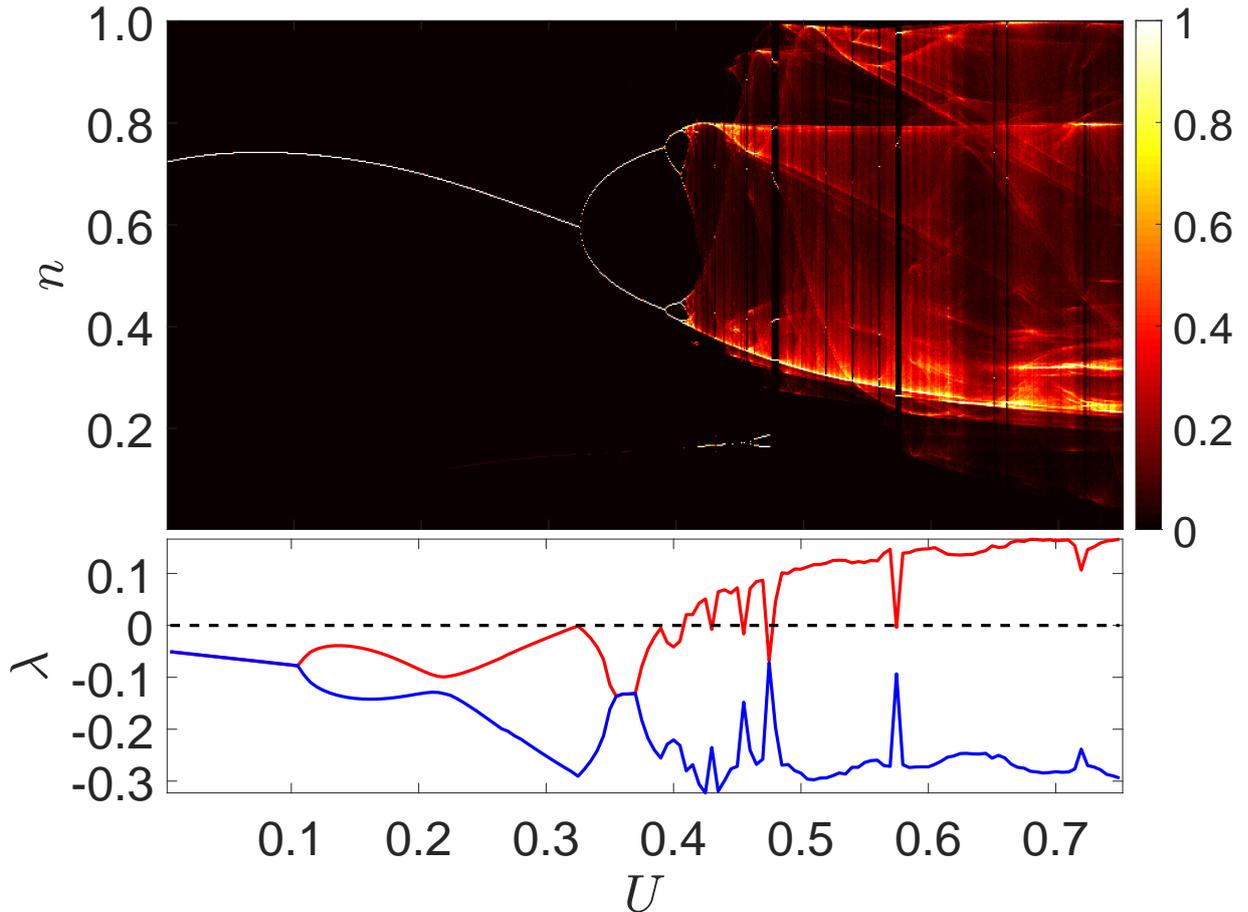


Рисунок 2.7 — Бифуркационная диаграмма (верхний график) с переходом к хаосу через каскад удвоения периода для среднеполевой аппроксимации (2.10) открытого квантового димера вместе с показателями Ляпунова (нижний график). Для каждого значения U цветом обозначена плотность распределения (PDF) числа бозонов в первом сайте димера (2.11) после $t^O = 10^4 T$ периодов стобоскопического наблюдения. Значения PDF нормированы на максимальный элемент, равный 1. Нижний график - спектр классических показателей Ляпунова [95].

В работе [32] в рассматриваемой модели квантового димера был обнаружен сценарий перехода к хаотической динамике через каскад удвоения периода в среднеполевом приближении (раздел 2.1.2) и соответствующая квантовая бифуркация для открытого димера с ограниченным числом частиц (раздел 2.1.1). На рисунке 2.7 изображена бифуркационная диаграмма для плотности вероятности (PDF) стробоскопических значений числа бозонов в первом сайте димера n (2.11) как функции силы взаимодействия между бозонами U . Значения PDF нормированы на максимальный элемент, равный 1. Для каждого значения U

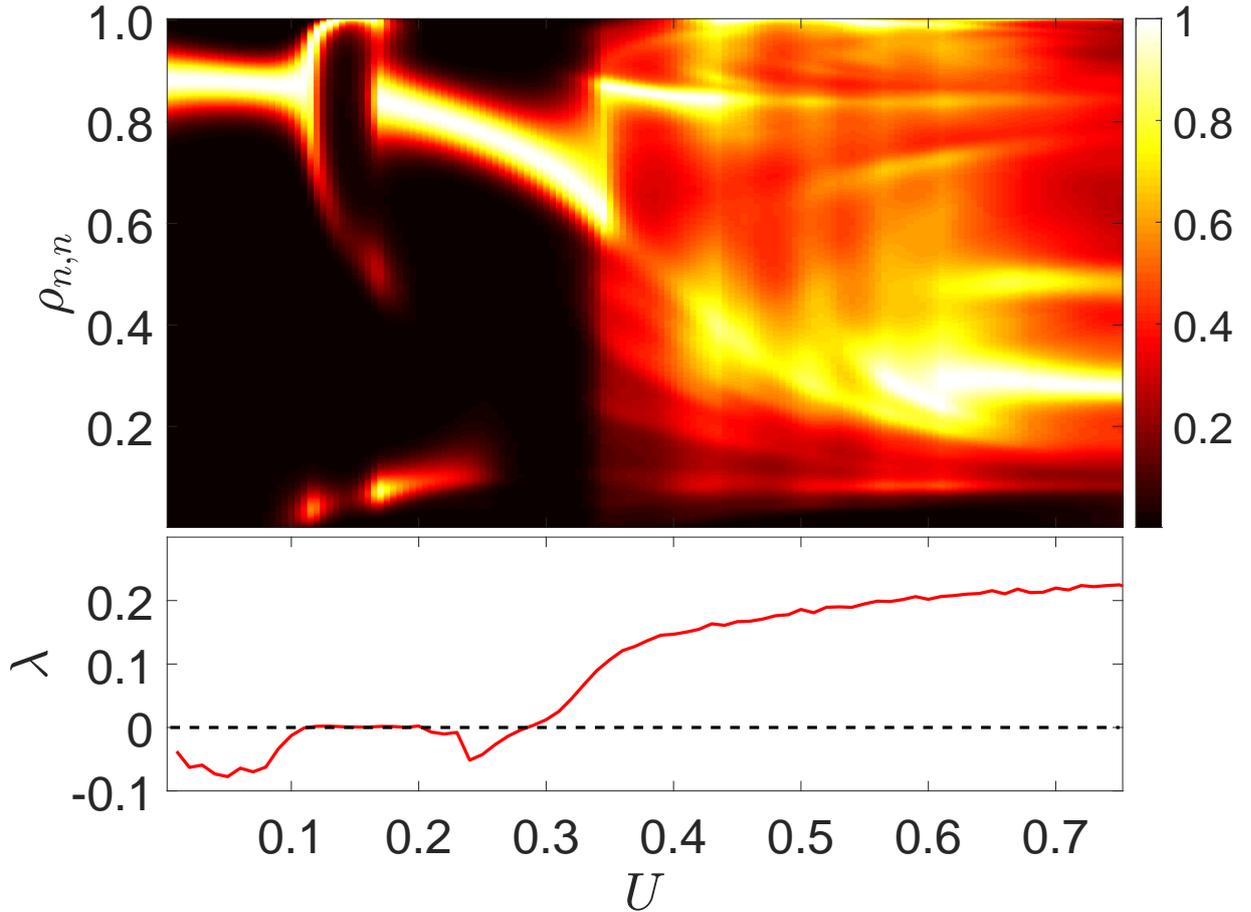


Рисунок 2.8 — Квантовая бифуркационная диаграмма (верхний график) с переходом к квантовому хаосу для модели открытого димера вместе с квантовым показателем Ляпунова (2.22) (нижний график). Для каждого значения U цветом обозначены диагональные элементы асимптотической матрицы плотности (с нормировкой на максимальный элемент, равный 1). Нижний график - квантовое обобщение показателя Ляпунова (раздел 2.3).

рассматривалось $\frac{t^O}{T} = 10^4$ значений: $n_k = n(t^A + kT)$, $k = 1, 2, \dots, 10^4$, полученных из системы уравнений (2.10) после переходного времени $t^A = 10^4 T$. На нижней части графика изображены показатели Ляпунова, один из которых становится положительным при возникновении хаотического аттрактора, а другой остаётся отрицательным.

В случае открытой квантовой системы квантовые траектории являются хорошо локализованными в пространстве Фока [2], но они не соответствуют классическим траекториям из среднеполевой модели, поскольку бифуркационная диаграмма для квантового случая (рисунок 2.8) имеет только относительное структурное сходство с диаграммой для нелинейной аппроксимации

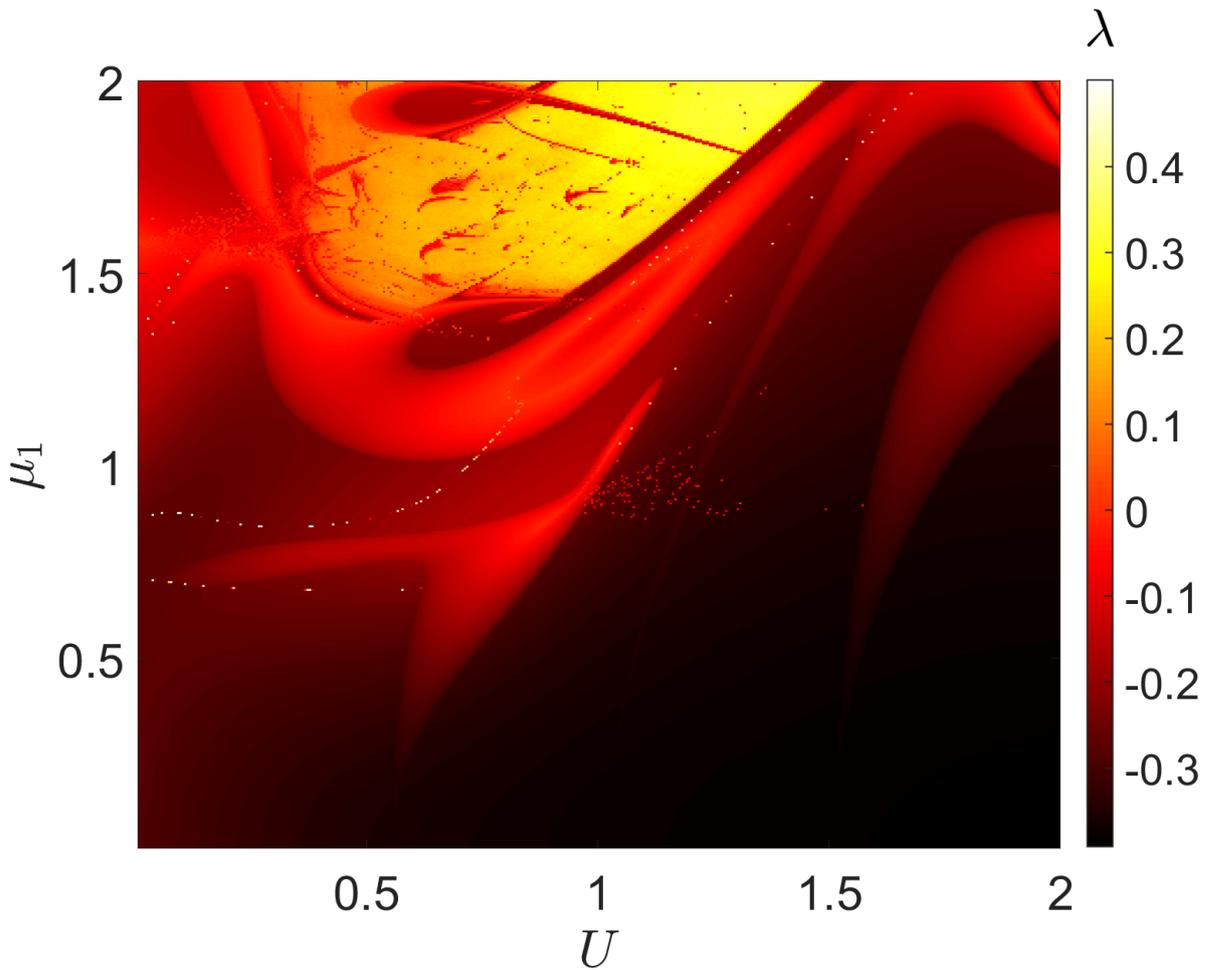


Рисунок 2.9 — Карта старшего показателя Ляпунова для среднеполевой аппроксимации квантового димера (2.10) на плоскости параметров силы взаимодействия между частицами U и амплитуды модуляции μ_1 .

(рисунок 2.7). Однако, как и в классическом случае, в существенно квантовом режиме при ограниченном числе бозонов $N = 200$ старший квантовый показатель Ляпунова становится положительным после структурной хаотизации асимптотического состояния.

Примечательно, что в интервале $U \in [0.1, 0.2]$ квантовое асимптотическое решение претерпевает некую бифуркацию, чего не наблюдается в классической бифуркационной диаграмме. Это может быть вызвано недостаточной точностью используемой среднеполевой аппроксимации [32]. Однако, квантовый показатель Ляпунова приближается к 0, так же как и в классических уравнениях среднего поля, где появляется предельный цикл периода-1.

Результаты глобального численного эксперимента, позволяющего сравнить старшие классический и квантовый показатели Ляпунова на плоскости параметров силы взаимодействия частиц U и амплитуды периодической моду-

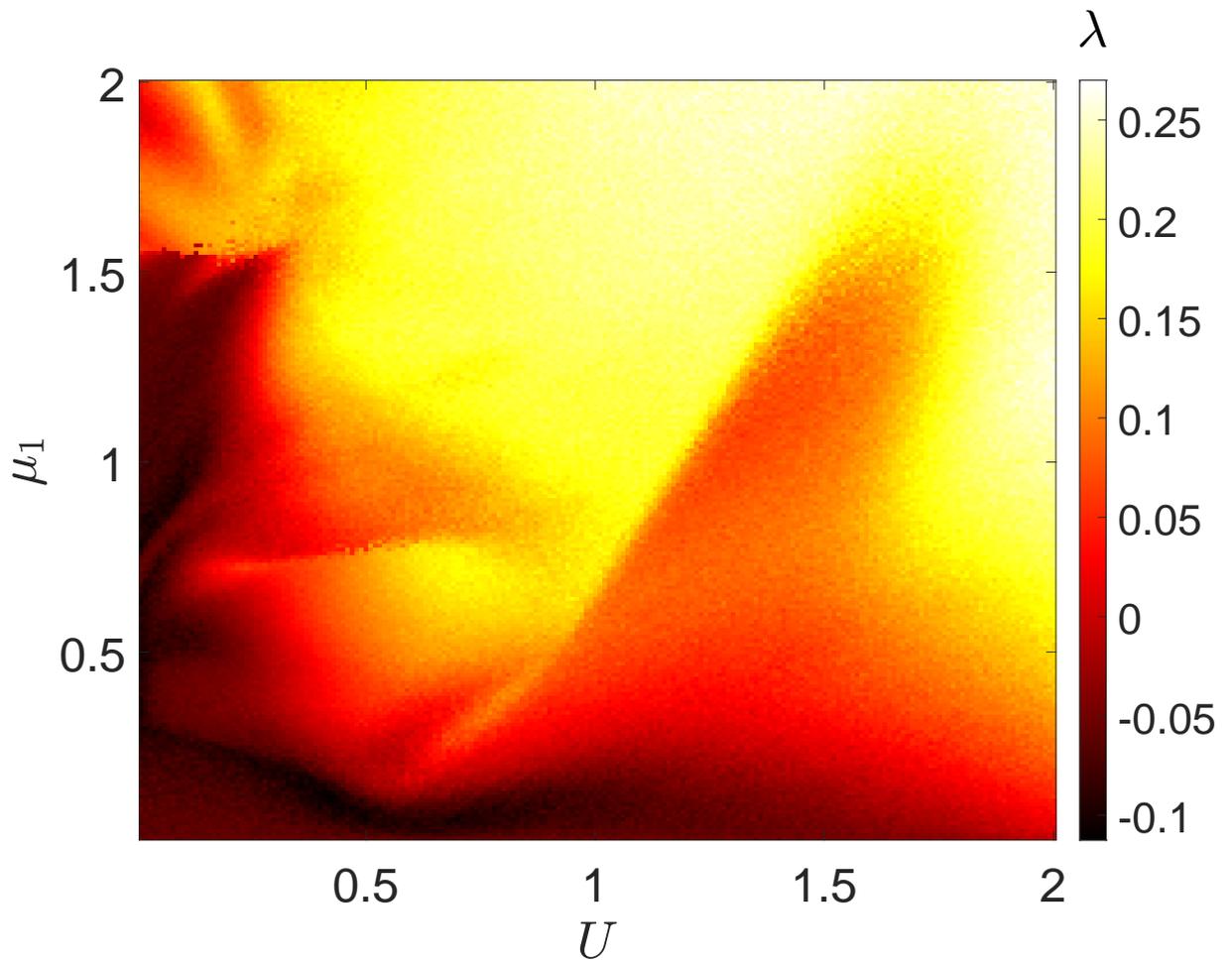


Рисунок 2.10 — Карта старшего квантового показателя Ляпунова (2.22) для открытого квантового димера на плоскости параметров силы взаимодействия между частицами U и амплитуды модуляции μ_1 .

ляций μ_1 представлены на рисунках 2.9 и 2.10 соответственно. Среднеполевая модель демонстрирует множество режимов на этой плоскости параметров. Квантовая диаграмма в целом более или менее соответствует классической картине. Однако, квантовый случай демонстрирует значительно более раннее развитие хаоса и более сложную структуру регулярных и хаотических областей. Это можно объяснить недостаточным порядком точности модели среднего поля (2.10) — отбрасывание слагаемых более высокого порядка малости, чем $\mathcal{O}(N^{-1})$ и сохранением только математических ожиданий в среднеполевом приближении (раздел 2.1.2). Переход к приближениям среднего поля более высокого порядка, увеличивающего порядок усечения учитываемых корреляционных функций и, следовательно, увеличивающего размерность получающейся нелинейной системы, позволил бы наблюдать расширение хаотической области.

Таким образом, был предложен алгоритм вычисления старшего квантового показателя Ляпунова, основанный на методе квантовых траекторий [2]. Алгоритм является универсальным и применялся для анализа различных открытых квантовых систем [2—4]. Численная реализация [96] данного алгоритма позволила количественно оценить динамику открытой квантовой многочастичной системы при переходе к квантовому хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Как и в классическом случае, в случае хаотизации системы, старший квантовый показатель Ляпунова становится положительным. Полученная фазовая диаграмма на плоскости параметров «сила взаимодействия - амплитуда модуляций» выявила сложную структуру регулярных и хаотических областей с двусторонними переходами, происходящими при изменении каждого из двух параметров.

2.4 Количественная оценка диссипативного квантового хаоса по статистике времён между квантовыми скачками

Количественная оценка режимов, возникающих в открытых квантовых системах, представляет собой проблему, интересную в нескольких отношениях. В частности, это может помочь связать неравновесные квантовые явления с проявлениями классического диссипативного хаоса, такими как локальная неустойчивость, бифуркации, странные аттракторы [97]. Существует множество подходов количественной оценки квантового хаоса, в частности вневременные корреляционных функции [75—77] и первые попытки квантового обобщения показателей Ляпунова [72—74]. В разделе 2.3 был предложен алгоритм вычисления старшего квантового показателя Ляпунова, позволяющего теоретически и численно исследовать хаотическую динамику открытых квантовых систем. Однако все подходы квантификации квантового хаоса имеют общий недостаток: несмотря на то, что существует возможность определить необходимые наблюдаемые и корреляторы, а затем обработать их аналитически или вычислить численно, гораздо сложнее (или вообще невозможно) получить к ним доступ в реальном физическом эксперименте.

В данном разделе будем продемонстрировано, что переходы «хаос-регулярность» можно обнаружить, изучив статистику времён между последова-

тельными испусканиями фотонов, которые в квантовой оптике называются «распределения времени ожидания фотона» [43; 98].

На примере простой модели открытой периодически модулируемой квантовой системы будет продемонстрировано, что переходы от регулярных к хаотическим режимам (заранее определённым в терминах старшего квантового показателя Ляпунова) соответствуют переходам от экспоненциального распределения времени ожидания фотона к распределениям с промежуточным степенным масштабированием. Поскольку события эмиссии фотонов могут быть обнаружены в эксперименте при помощи однофотонных детекторов [99; 100], можно добиться различия между хаотическим и регулярным режимами без нарушения динамики системы.

В качестве модели рассматривается фотонная мода в негерметичном резонаторе с утечкой, периодически модулируемая внешним когерентным электромагнитным полем [29; 30]. Унитарная динамика в основном уравнении Линдблада (1.23) определяется гамильтонианом:

$$H(t) = \frac{1}{2}\chi b^{\dagger 2}b^2 + iF(t)(b^{\dagger} - b), \quad (2.23)$$

где χ — сила взаимодействия между фотонами, b^{\dagger} и b — операторы рождения и уничтожения фотонов. В системе есть кусочно-постоянная модуляция с периодом T :

$$\begin{aligned} F(t) = F(t+T) = A, & \quad 0 < t < \frac{T}{2}, \\ F(t) = F(t+T) = 0, & \quad \frac{T}{2} < t < T. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Фотоны могут испускаться из резонатора. В принципе, они также могут быть закачаны в резонатор окружающей тепловой средой, но здесь, как и в установках, описанных в работах [29; 30], рассматривается предел нулевой температуры, поэтому скорость накачки тепловых фотонов равна нулю.

Взаимодействие с окружающей средой в уравнении Линдблада (1.23) задаётся одним диссипативным оператором:

$$V = b, \quad (2.25)$$

который описывает эмиссию фотонов из резонатора в окружающую среду с независимой от времени интенсивностью γ .

В ходе вычислений число фотонов в резонаторе ограничивалось константой N . Размерность гильбертова пространства (число состояний в квантовой системе) $S = N + 1$. Базисные состояния данного пространства описывают текущее количество фотонов в резонаторе - от 0 до N . N выбирается достаточно большим, чтобы при всех рассматриваемых значениях параметров заселённость состояний, близких к N была равна нулю. То есть гарантировалось бы условие, что в системе в любой момент гарантированно меньше N фотонов.

Метод квантовых траекторий (раздел 1.3) в данной модели имеет следующий физический смысл: совершаемый траекторией квантовый скачок соответствует эмиссии одиночного фотона из резонатора, что в свою очередь может быть зарегистрировано однофотонным детектором [99; 100].

Для данной системы можно получить среднеполевое приближение в пределе бесконечного числа фотонов для следующей комплекснозначной наблюдаемой [29; 30]:

$$\xi(t) = \langle \psi_j(t) | b | \psi_j(t) \rangle, \quad (2.26)$$

где j — индекс квантовой траектории. Эволюция среднеполевой модели описывается двумя фазовыми переменными $\{\text{Re}(\xi), \text{Im}(\xi)\}$ в соответствии с уравнением:

$$\dot{\xi} = -\frac{1}{2}\gamma\xi + F(t) - i\chi|\xi|^2\xi. \quad (2.27)$$

Данная система является нелинейной и периодически модулируемой во времени и, как ожидается, демонстрирует спектр различных асимптотических режимов, от периодических орбит до хаотических аттракторов.

Во всех проводимых в данном разделе экспериментах были зафиксированы следующие параметры: $\chi = 0.008$, $\gamma = 0.05$, $N = 300$. Для открытой квантовой системы было выбрано время достижения асимптотического состояния равным $t^A = 10^3T$, так же как и время наблюдения $t^O = 10^3T$. Для среднеполевого приближения: $t^A = 10^4T$, $t^O = 10^4T$. Количество базовых квантовых траекторий, использованных для получения усреднённого значения квантового показателя Ляпунова $M_r = 10^2$. Стартовое отклонение квантовых траекторий при вычислении показателя Ляпунова $\Delta_S = 10^{-4}$.

На рисунке 2.11 изображена бифуркационная диаграмма для среднеполевой в зависимости от амплитуды A кусочно-постоянной модуляции (2.24). Для каждого значения A использовались стробоскопические значения $\xi_k =$

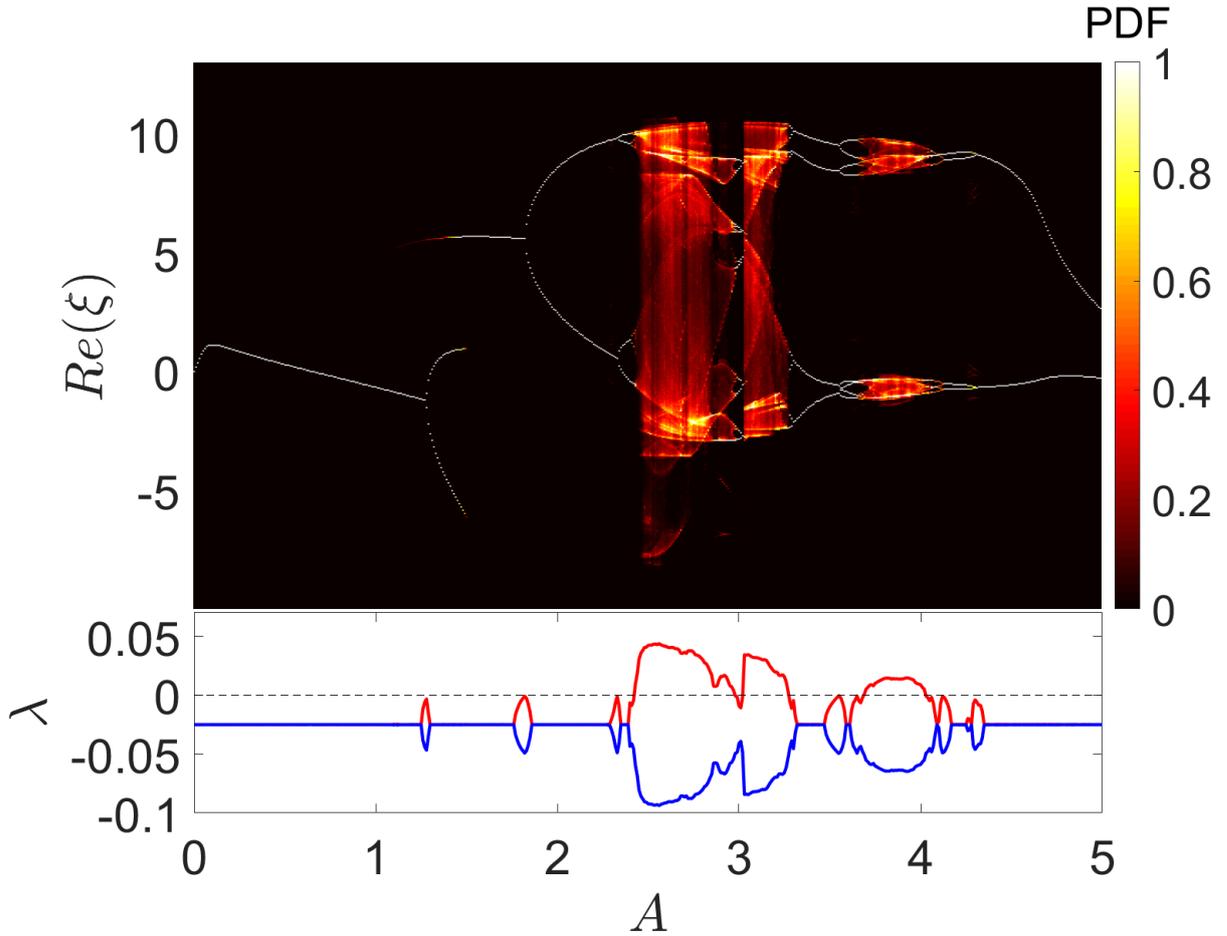


Рисунок 2.11 — Бифуркационная диаграмма (верхний график) и спектр показателей Ляпунова [95] в зависимости от амплитуды модуляции A для среднеполевой модели. Для каждого значения A цветом обозначена плотность распределения (PDF) вещественной части наблюдаемой $\text{Re}(\xi)$ (2.26) после $t^O = 10^4 T$ периодов стобоскопического наблюдения. Значения PDF нормированы на максимальный элемент, равный 1.

$\xi(t^A + kT)$, $k = 1, \dots, \frac{t^O}{T}$. Соответствующий старший показатель Ляпунова становится положительным при переходе от неподвижной точки к хаотическому аттрактору.

В квантовой системе результаты экспериментов зависят от ёмкости резонатора N , которое нужно выбирать достаточно большим. Оказалось, что $N = 150$ не достаточно для последовательного расчёта квантового показателя Ляпунова: при $A > 3.5$ осцилляции числа фотонов в резонаторе растут, что приводит к искажению динамики (рисунок 2.12). После проведения проверочных экспериментов выясняется, что выбор максимального числа фотонов

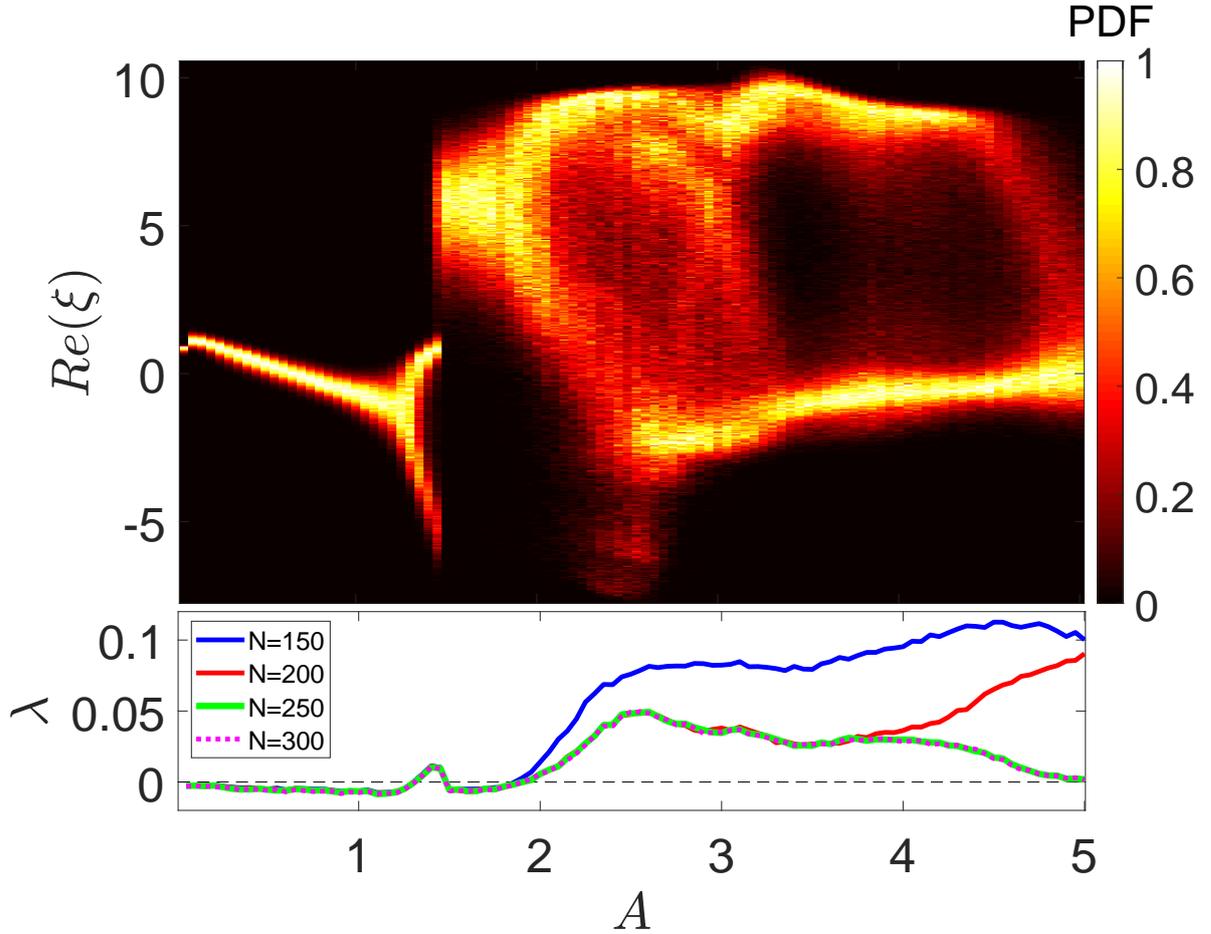


Рисунок 2.12 — Квантовая бифуркационная диаграмма (верхний график) для модели открытого резонатора вместе с квантовым показателем Ляпунова (2.22) (нижний график), вычисленным для разной ёмкости N резонатора. Для каждого значения A цветом обозначена PDF вещественной части наблюдаемой ξ (2.26) (с нормировкой на максимальный элемент, равный 1) после $t^O = 10^3 T$ периодов стобоскопического наблюдения для $M_r = 10^2$ квантовых траекторий.

Период модуляции $T = 10$

$N > 250$ обеспечивает корректность вычислений во всем диапазоне исследуемых параметров.

Также было подтверждена независимость значения квантового показателя Ляпунова от выбора наблюдаемой. На рисунке 2.11 изображены графики сходимости показателей к их асимптотическим состояниям в регулярном ($A = 0.05$, $T = 0.5$) и хаотическом ($A = 4.0$, $T = 20$) режимах. В качестве альтернативной наблюдаемой использовалось среднее количество фотонов в резонаторе:

$$n(t) = \frac{1}{N} \langle \psi_j(t) | b^\dagger b | \psi_j(t) \rangle. \quad (2.28)$$

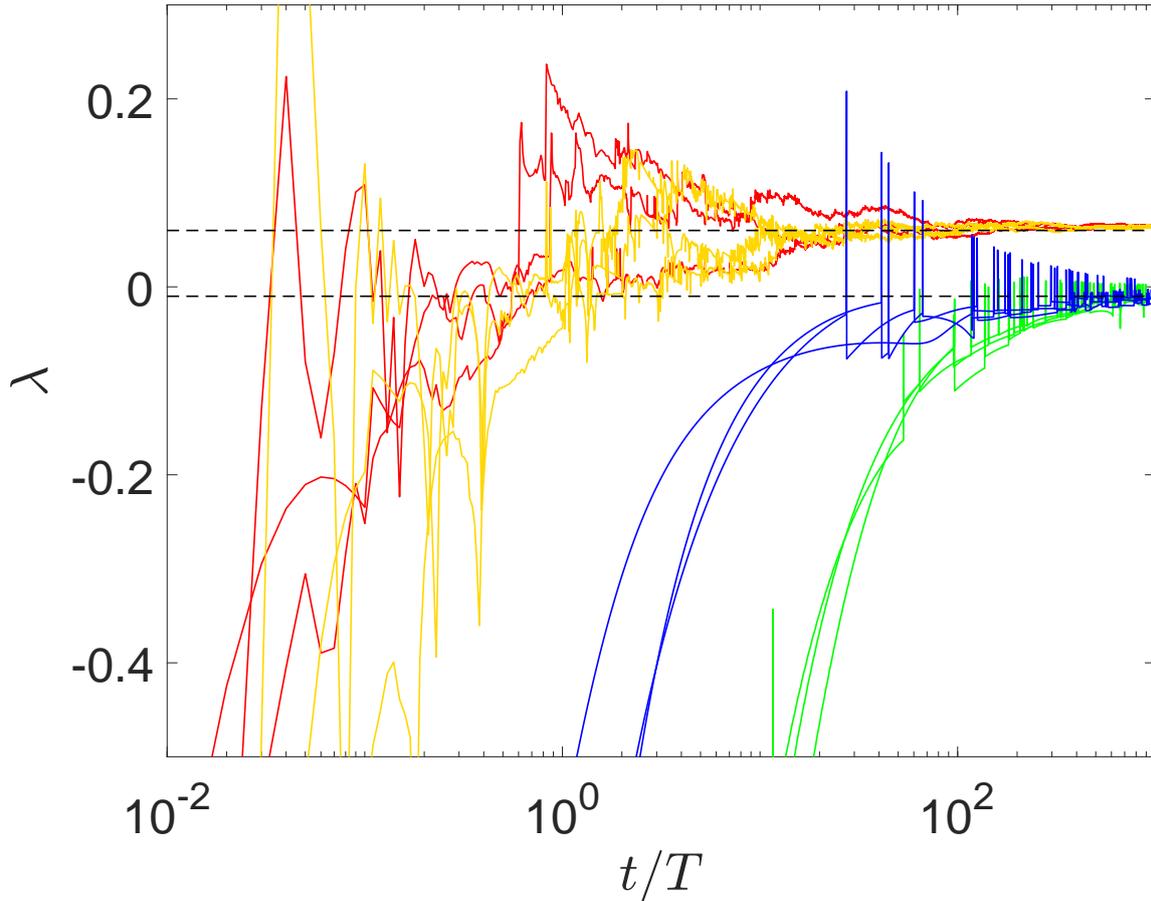


Рисунок 2.13 — График сходимости квантовых показателей Ляпунова к их асимптотическим значениям: $\lambda \approx -0.01$ (регулярная динамика) и $\lambda \approx 0.08$ (хаотический режим). В каждом случае используются три отдельные траектории. В качестве наблюдаемых используются: $\xi(t)$ (2.26) для $A = 0.05$, $T = 0.5$ (синий) и $A = 4.0$, $T = 20$ (красный); среднее число фотонов в резонаторе $n(t)$ (2.28) для $A = 0.05$, $T = 0.5$ (зелёный) и $A = 4.0$, $T = 20$ (оранжевый).

Квантовый показатель Ляпунова, как и классический, становится положительным при хаотизации системы (рисунки 2.11 и 2.12). Стоит отметить хорошее структурное сходство бифуркационной диаграмм для квантовой модели и ее среднеполевой аппроксимации. Однако, регион хаотической динамики в квантовом случае относительно больше.

Чтобы получить более общую картину, был проведён масштабный вычислительный эксперимент и получены двухпараметрические карты классических и квантовых старших показателей Ляпунова на плоскости амплитуды A и периода T модуляции (рисунок 2.14). И модель среднего поля, и квантовая модель имеют визуально похожие структуры регулярных и хаотических режимов.

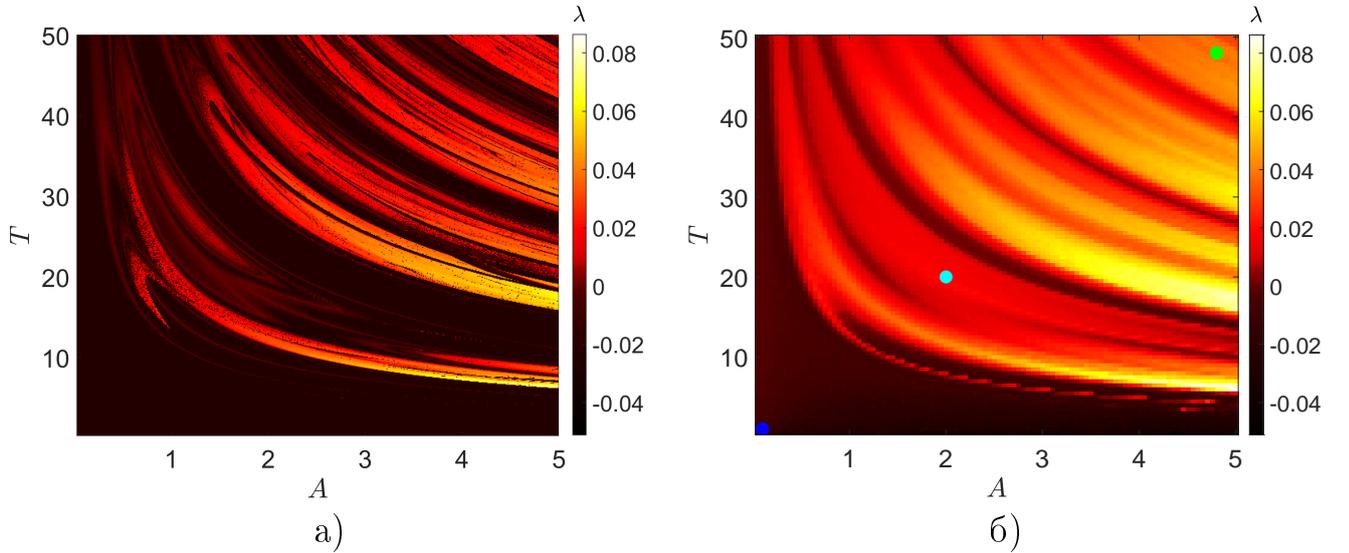


Рисунок 2.14 — Карта старших показателей Ляпунова для среднеполевой аппроксимации открытого резонатора (а) и непосредственно квантовой модели (б) на плоскости параметров амплитуды A и периода T модуляции. Выделенные точки соответствуют значениям параметров: $A = 0.1$, $T = 1$ (синий), $A = 2.0$, $T = 20$ (голубой) и $A = 4.8$, $T = 48$ (зелёный).

Квантовые показатели Ляпунова являются хорошими объектами для теоретического и численного анализа, но их экспериментальная оценка весьма нетривиальна. Возникает вопрос о получении информации о динамике внутри резонатора в эксперименте. Статистика эмиссии фотонов из резонатора является одной из самых популярных характеристик в квантовой оптике [98; 99] и может быть использована для ответа на поставленный вопрос. В рассматриваемой модельной системе есть только один диссипативный канал, и единичный квантовый скачок соответствует излучению одиночного фотона, так что динамика внутри резонатора и эмиссия тесно связаны.

Эволюция нормы волновой функции $|\psi(t)\rangle$ между последовательными квантовыми скачками, происходящими в моменты времени $\{t_k\}$ определяется следующим уравнением:

$$\frac{d}{dt} \|\psi\| = -\psi^* V^\dagger V \psi. \quad (2.29)$$

Из вида гамильтониана (2.23) и диссипативного оператора (2.25) следует:

$$\frac{d}{dt} \|\psi\| = -\gamma n(t) \|\psi\|, \quad (2.30)$$

так как $V^\dagger V = \gamma n$. Убывание нормы волновой функции от значения $\|\psi(t_{k-1})\| = 1$ до некоторого случайно выбранного порога $\|\psi(t_k)\| = \eta_k$ может быть аппроксимировано экспоненциальным затуханием со средней скоростью s_k , пропорциональной эффективному числу фотонов в пределах $t_{k-1} < t < t_k$, то есть $s_k = \gamma n_k^{(\text{eff})}$. Получается следующее соотношение для промежутка времени между двумя последовательными квантовыми скачками: $\tau_k = t_k - t_{k-1} = -\ln(\eta_k)/s_k$. Поскольку η_k являются случайными равномерно распределёнными в интервале $[0,1]$ величинами, то переменная $\zeta = -\ln(\eta_k)$ имеет распределение плотности вероятности $W_\zeta(\zeta) = \exp(-\zeta)$. Если асимптотическая матрица плотности имеет регулярную структуру (например, единичную матрицу или унимодальное распределение), то $n \approx \text{const}$ и, следовательно, $s \approx \text{const}$. В этом случае интервалы между скачками также подчиняются распределению Пуассона: $W_\tau(\tau) = \exp(-\tau)$. В другом случае, когда асимптотическая матрица является, например, бимодальной при бифуркации удвоения периода (раздел 2.3.2), распределение времён между скачками будет состоять из суперпозиции двух экспонент.

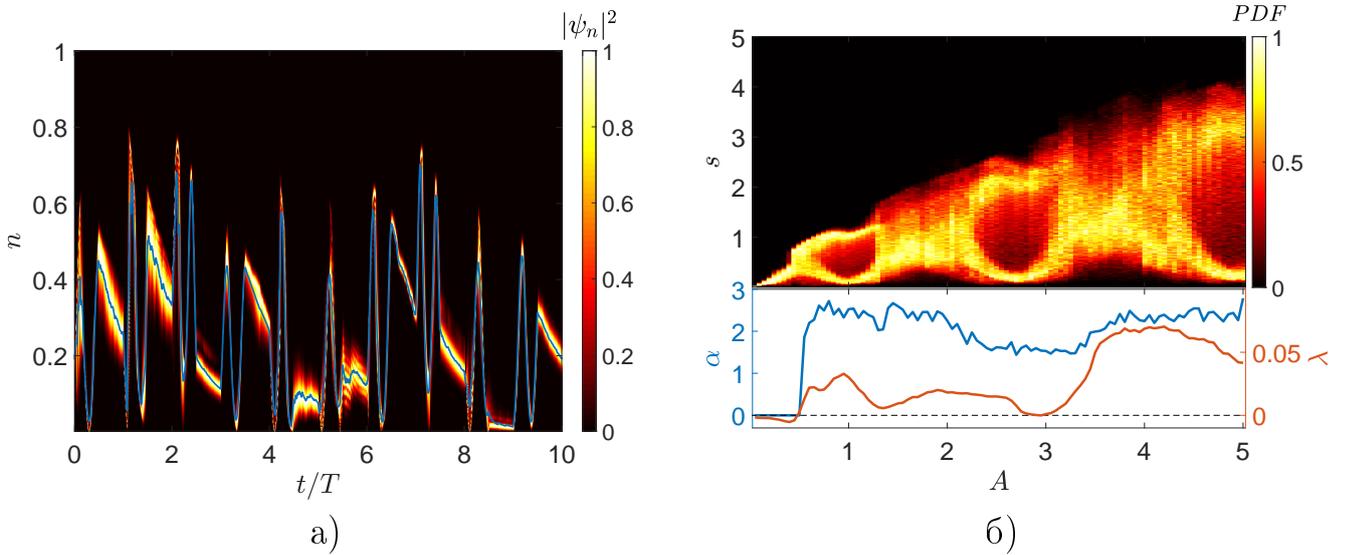


Рисунок 2.15 — (а) Эволюция отдельно взятой квантовой траектории в хаотическом режиме ($A = 4.0$, $T = 20$) и соответствующей наблюдаемой (2.28) (синяя кривая); (б) PDF средней скорости убывания нормы волновой функции между квантовыми скачками $W_s(s)$ (верх), старший квантовый показатель Ляпунова (красная кривая) и показатель степени степенной аппроксимации распределения времён между квантовыми скачками $W_\tau(\tau)$ (синяя кривая) в зависимости от амплитуды модуляции A .

Когда система находится в хаотическом режиме, динамика наблюдаемых, в частности $n(t)$ (2.28), становится нерегулярной. Пример квантовой траектории в хаотическом режиме ($A = 4.0$, $T = 20$), представлен на рисунке 2.15а. При этом скорость убывания нормы между квантовыми скачками существенно различаются. Следовательно, распределение вероятностей скоростей $W_s(s)$ больше не может быть выведено аналитически, но может быть оценено численно (рисунок 2.15б, верхняя панель). Из графика видно, что распределение $W_s(s)$ значительно расширяется при $A > 0.4$ с переходом к хаосу (рисунок 2.15б, нижняя панель). Соответственно, результирующее распределение интервалов между квантовыми скачками $W_\tau(\tau)$ больше не будет экспоненциальным.

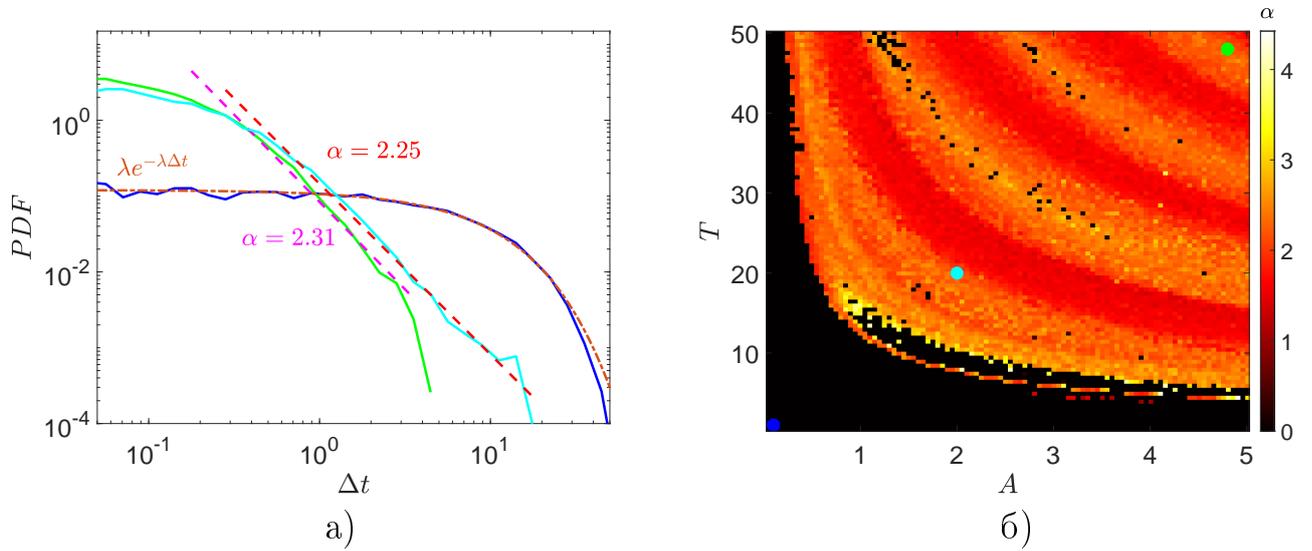


Рисунок 2.16 — (а) PDF временных интервалов между квантовыми скачками для выбранных значений параметров: $A = 0.1$ и $T = 1$ (синий), $A = 2.0$ и $T = 20$ (голубой) и $A = 4.8$ и $T = 48$ (зелёный). Данные значения параметров отмечены соответствующими цветами на рисунках 2.14б и 2.16б. (б) Двумерная диаграмма показателя степени степенной аппроксимации PDF временных интервалов между квантовыми скачками на плоскости амплитуды A и периода T модуляции. Чёрный цвет указывает на невозможность степенной аппроксимации.

Один из основных результатов данного раздела представлен на рисунке 2.16. Ключевое наблюдение состоит в том, что распределение времён ожидания фотона становится непугассоновским и появляется промежуточный интервал распределения, который хорошо аппроксимируется степенным законом. Это

также согласуется с положительностью старшего квантового показателя Ляпунова. На плоскости параметров амплитуды A и периода T модуляции в каждой точке параметра была получена степенная аппроксимация распределения временных интервалов между квантовыми скачками с помощью линейной регрессии (метод наименьших квадратов) в логарифмическом масштабе [2.16a](#). Качество аппроксимации оценивается коэффициентом детерминации [101] $R^2 \in [0, 1]$, более высокие значения которого соответствуют лучшему качеству аппроксимации. Для поиска лучшего степенного закона варьировался интервал времени между последовательными квантовыми скачками. Необходимое условие существования достоверной степенной аппроксимации состоит в том, чтобы она охватывала не менее одной декады по горизонтальной оси временного интервала τ и имела $R^2 > 0.98$. В противном случае гипотеза о существовании степенного закона отвергается (чёрные области на рисунке [2.16б](#)) Примечательно, что зоны, в которых присутствует степенная асимптотика в распределении времён ожидания фотона, хорошо коррелируют с зонами, где соответствующий старший квантовый показатель Ляпунова положителен (рисунок [2.14б](#)).

Таким образом, используя открытый резонатор с модуляцией в качестве модели, было обнаружено, что статистика времён ожидания фотона может служить хорошим диагностическим инструментом для обнаружения диссипативного квантового хаоса. Хаотическая динамика возникает при появлении степенной промежуточной асимптотики, которая согласуется с положительным старшим квантовым показателем Ляпунова. Данные результаты открывают новую перспективу для количественной оценки режимов, возникающих в открытых квантовых системах, особенно в таких областях, как квантовая электродинамика, квантовая оптика и поляритонные устройства, где статистика излучения фотонов является общепринятым инструментом [[98](#); [99](#)].

2.5 Хаотические спин-фотонные квантовые состояния

Периодические во времени модуляции могут создавать сложные хаотические состояния не только в классических динамических системах, но и в квантовых. Данное явление является хорошо изученным в случае изолированных квантовых систем и гораздо менее изученным в случае откры-

тых, взаимодействующих с окружающей средой. Теория динамического хаоса связана с физикой квантовых многочастичных систем посредством теорий среднеполевых приближений [35; 102]. Основная идея заключается в том, что при систематическом увеличении числа частиц, экспоненциально сложная эволюция квантовой модели может быть аппроксимирована системой классических нелинейных дифференциальных уравнений фиксированного размера, которые описывают динамику математических ожиданий соответствующих наблюдаемых. Степень хаотизации квантовой системы может быть определена количественно путём вычисления стандартных классических кванторов (например, максимальных показателей Ляпунова [77; 103]) для соответствующей классической среднеполевой модели. В случае, если переход к среднеполевой аппроксимации является трудноосуществимым, то можно использовать описанный в данной работе подход по вычислению квантовых показателей Ляпунова [2], которые позволяют оценить хаотизацию динамики открытой квантовой системы.

В данном разделе численно исследуются квантовые хаотические состояния в открытом периодически модулированном резонаторе с одним спином, позволяющим регулировать переходы между хаотической и регулярной динамикой в терминах квантовых показателей Ляпунова и статистики времён между последовательными излучениями фотонов.

В качестве модели, как и в разделе 2.4, рассматривается фотонная мода в негерметичном резонаторе с утечкой в периодически модулируемым внешним когерентным электромагнитным полем [29; 30]. В данном разделе эта система еще включает в себя один спин. Унитарная динамика в основном уравнении Линдблада (1.23) определяется гамильтонианом:

$$\begin{aligned}
 H(t) &= H_s + H_{\text{ph}}(t) + H_{\text{int}}, \\
 H_s &= \frac{1}{2} \sigma_z, \\
 H_{\text{ph}}(t) &= \frac{1}{2} \chi b^\dagger b^\dagger b b + iF(t) (b^\dagger - b), \\
 H_{\text{int}} &= \frac{g}{2} (b^\dagger \sigma_- + \sigma_+ b).
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Часть гамильтониана H_s описывает динамику спина, $H_{\text{ph}}(t)$ описывает динамику фотонной моды, H_{int} — взаимодействие между фотонной и спиновой подсистемами. χ — сила взаимодействия между фотонами, b^\dagger и b — операторы

рождения и уничтожения фотонов, σ_z , σ_- , σ_+ — операторы спина, g — сила спин-фотонного взаимодействия. В системе есть кусочно-постоянная модуляция с периодом T , такая же, как и в модели из предыдущего раздела (2.24).

Диссипативная часть в уравнении Линдблада (1.23) описывается двумя диссипативными операторами с соответствующими скоростями диссипации:

$$\begin{aligned} V_1 &= b \quad \gamma_1 = \gamma, \\ V_2 &= \sigma^- \quad \gamma_2 = w. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Первый из них отвечает за эмиссию фотонов из резонатора со скоростью γ . Второму диссипативному каналу соответствует спонтанная спиновая релаксация в основное состояние со скоростью w .

В ходе численного моделирования число фотонов в моде резонатора ограничивается максимальным допустимым количеством N . Размерность гильбертова пространства $S = 2 \cdot (N + 1)$. Параметр N выбирается достаточно большим, чтобы среднее число фотонов в резонаторе $\langle N_{ph} \rangle$ было существенно меньше N . Во всех проводимых численных экспериментах в данном разделе используются следующие параметры: $\chi = 0.008$, $\gamma = 0.1$, $w = 0.05$. Для всех рассмотренных значений параметров вклады базисных состояний с числом фотонов > 250 являются незначительными (меньше 10^{-6}).

Для численного моделирования данной системы использовался метод квантовых траекторий (раздел 1.3), позволяющий описывать динамику системы в терминах чистых состояний $\psi(t)$. В качестве наблюдаемых величин рассматривается комплекснозначная наблюдаемая (2.26) и следующие наблюдаемые для спиновой подсистемы:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \langle \psi_j^\dagger(t) | \sigma_+ | \psi_j(t) \rangle, \\ \eta(t) &= \langle \psi_j^\dagger(t) | \sigma_z | \psi_j(t) \rangle, \end{aligned} \tag{2.33}$$

где j — индекс квантовой траектории. Время достижения асимптотического состояния выбиралось равным $t^A = 10^2 T$, так же как и время наблюдения $t^O = 10^2 T$. Количество базовых квантовых траекторий, использованных для получения усреднённого значения квантового показателя Ляпунова $M_r = 10^2$, стартовое отклонение квантовых траекторий при вычислении показателя Ляпунова $\Delta_S = 10^{-4}$ (раздел 2.3).

Для данной модели референсным случаем является отсутствие взаимодействия ($g = 0$, $w = 0$) между фотонной и спиновой подсистемами (раздел 2.4,

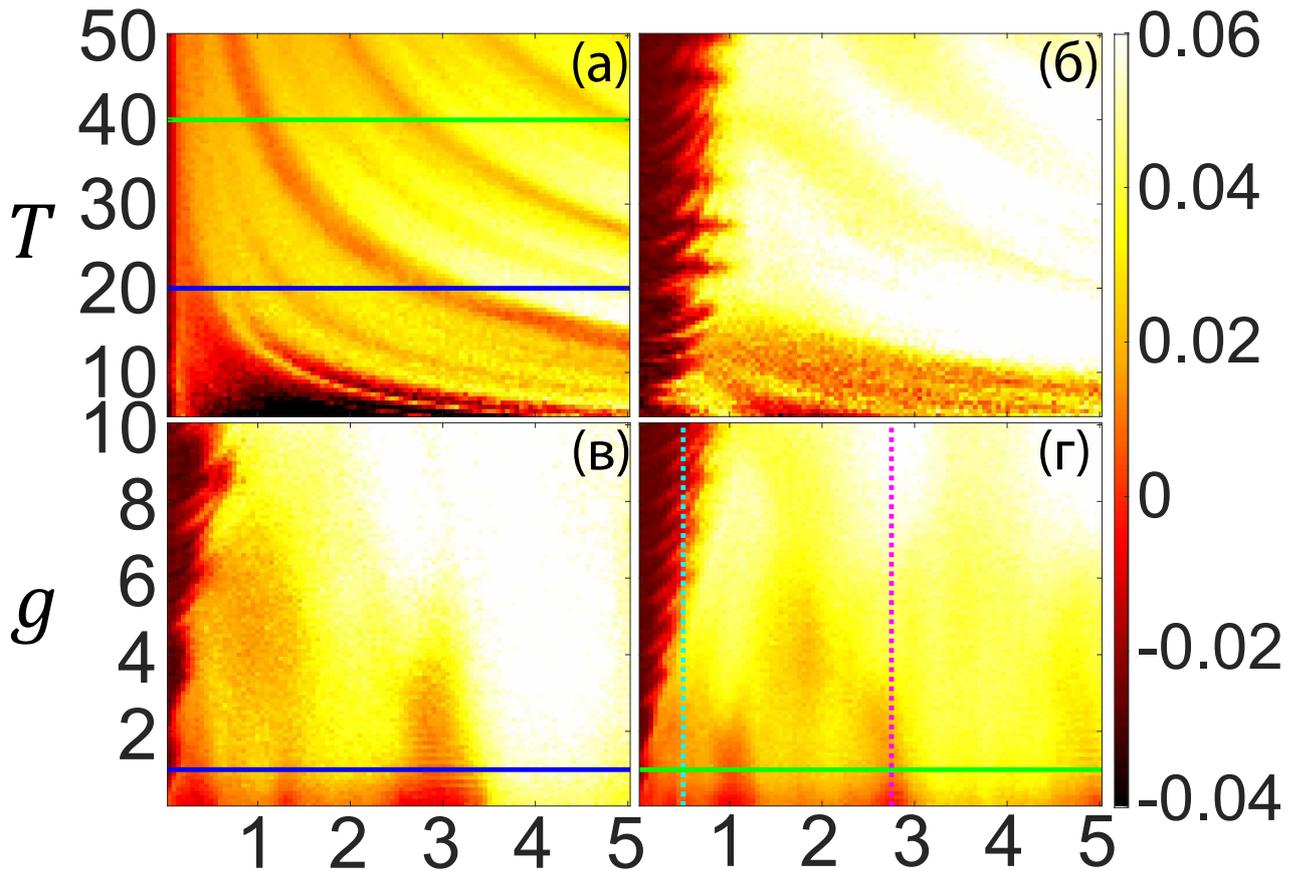


Рисунок 2.17 — Старший квантовый показатель Ляпунова в зависимости от периода T , амплитуды модуляции A для значения силы взаимодействия между фотонной и спиновой подсистемами $g = 1$ (а), $g = 10$ (б); в зависимости от A и g для $T = 20$ (в), $T = 40$ (г). Синяя линия соответствует $T = 20$, $g = 1$; зелёная — $T = 40$, $g = 1$; бирюзовая — $T = 40$, $A = 0.5$, фиолетовая — $T = 40$, $A = 2.75$.

рисунок 2.146). В этом случае при относительно небольших значениях периода T и амплитуды модуляции A система остаётся в регулярном режиме, характеризующемся отрицательным старшим квантовым показателем Ляпунова (рисунок 2.146). При увеличении T и A система переходит в широкую хаотическую зону, разделённую чередующимися узкими зонами регулярной динамики.

В случае, если система находится в режиме умеренного спин-фотонного взаимодействия, структура значений квантового показателя Ляпунова остаётся без изменений, но сами значения возрастают (рисунок 2.17а). То есть, при наличии связи со спином, повышается степень хаоса в динамике фотонной моды резонатора.

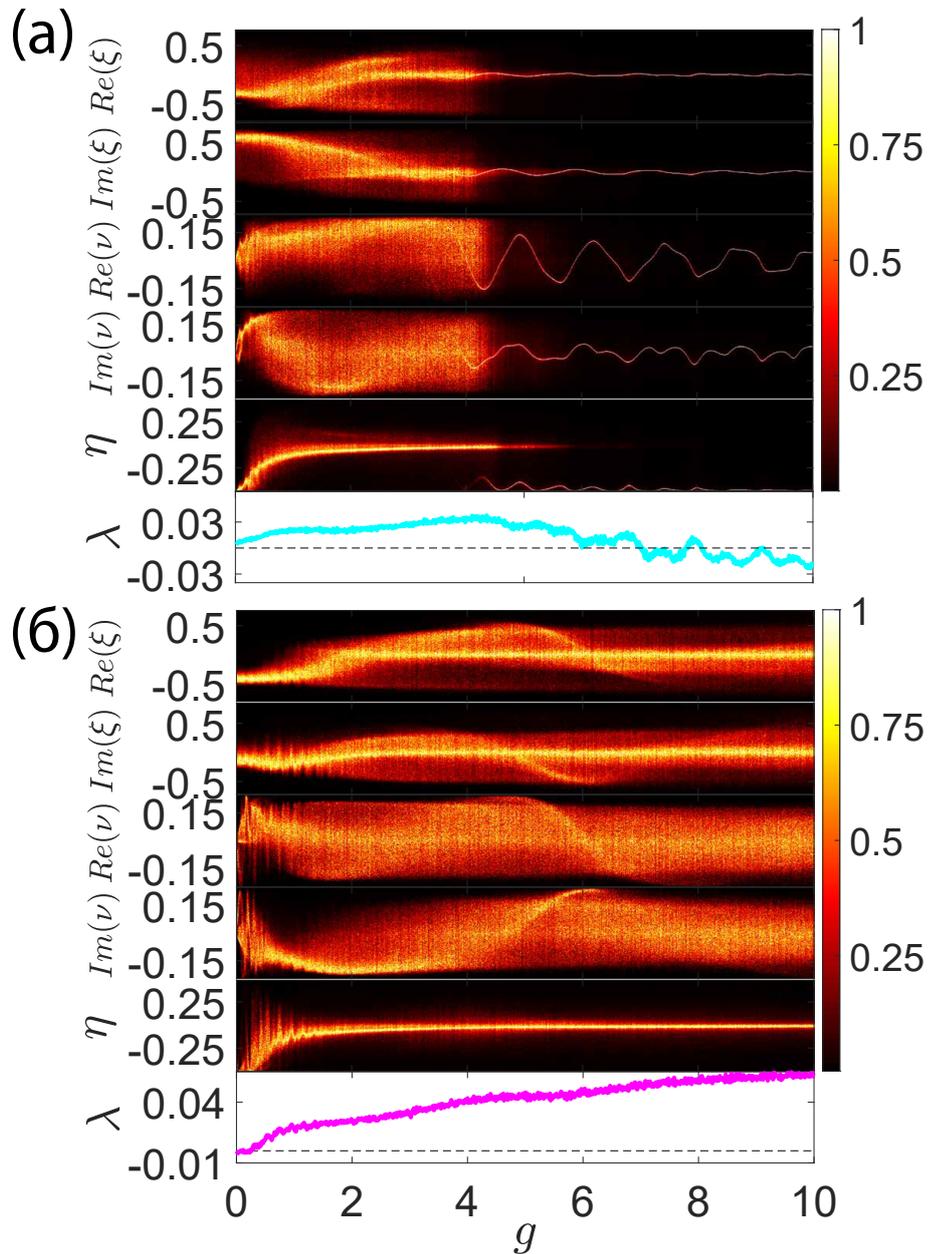


Рисунок 2.18 — Плотность распределения вероятностей наблюдаемых величин ξ (2.26), η и ν (2.33) в стробоскопические моменты времени, а также эволюция старшего квантового показателя Ляпунова в зависимости от силы спин-фотонного взаимодействия g для (а): $A = 0.5$, $T = 40$; (б): $A = 2.75$, $T = 40$ (бирюзовая и фиолетовые линии на 2.17г соответственно)

При сильной спин-фотонной связи ($g = 10$) наблюдаются два эффекта: при сильной модуляции ($A > 1$) значения квантового показателя Ляпунова возрастают, а при слабой модуляции ($A < 1$) увеличение спин-фотонной связи приводит к «регуляризации» динамики, что проявляется в отрицательных значениях показателя Ляпунова (рисунок 2.176). Такие же эффекты наблюдаются при систематическом исследовании влияния спин-фотонной связи на показате-

ли Ляпунова для двух значений периода $T = 20$ и $T = 40$ (рисунки 2.17в и 2.17г соответственно).

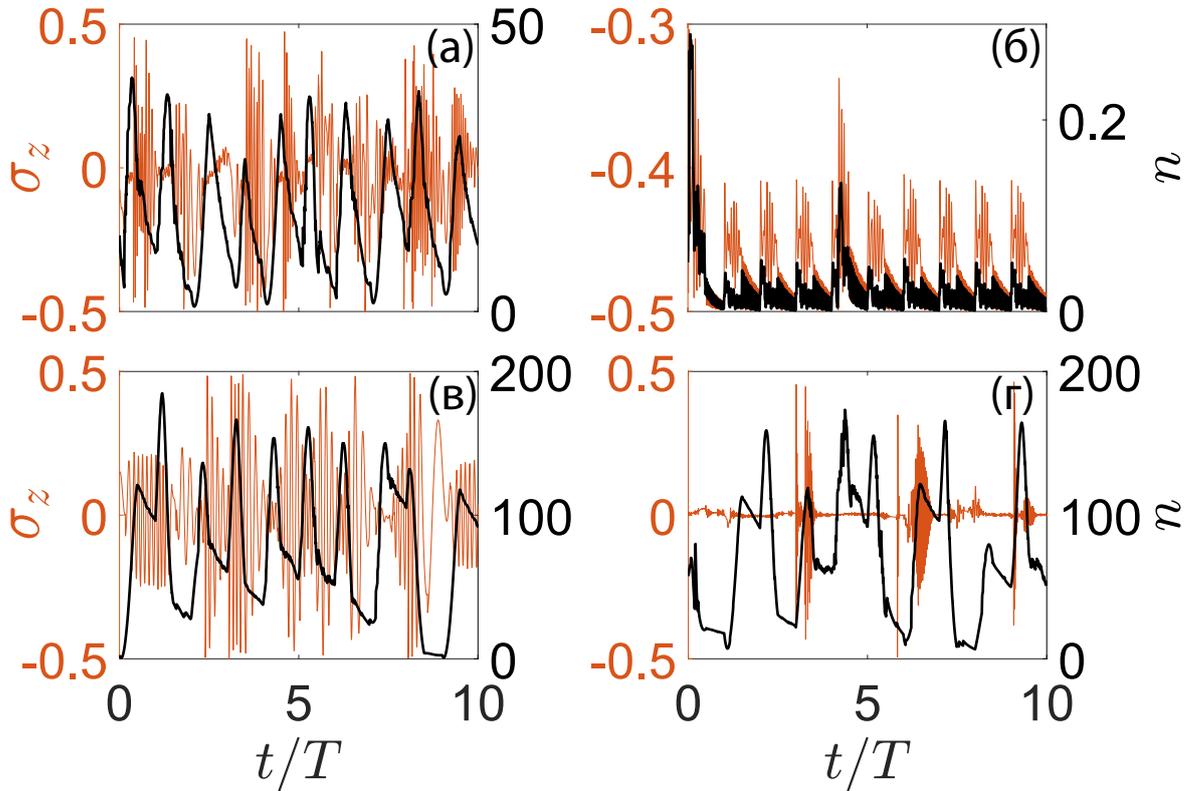


Рисунок 2.19 — Динамика наблюдаемой спиновой подсистемы $\eta(t)$ (оранжевые линии) и числа фотонов $n(t)$ (чёрные линии) для отдельных квантовых траекторий: $A = 0.5$, $g = 1$ (а); $A = 0.5$, $g = 10$ (б); $A = 3$, $g = 1$ (в); $A = 3$, $g = 10$ (г). $T = 40$.

Затем исследуется плотность распределения вероятностей наблюдаемых величин ξ (2.26), η и ν (2.33) в стробоскопические моменты времени (рисунок 2.18). Для $A = 0.5$ (рисунок 2.18а) квантовый показатель Ляпунова уменьшается и в конечном итоге становится отрицательным, когда сила связи достигает области $g \approx 6.5$. При этом, сложная эволюция наблюдаемых сходится к фиксированной точке. Для $A = 2.75$ наблюдается обратная ситуация: изначально регулярная динамика в конечном итоге становится хаотической при увеличении g , квантовый показатель Ляпунова становится положительным и возрастает (рисунок 2.18б).

Анализ динамики отдельных квантовых траекторий и их наблюдаемых $\eta(t)$ (2.33) и $n(t)$ (2.28) (рисунок 2.19) позволяет интерпретировать эти эффекты. Для малой амплитуды модуляции ($A = 0.5$) переход от сильно хаотической

динамики при $g = 1$ к почти периодическому поведению при $g = 10$ сопровождается растущей утечкой фотонов из резонатора (рисунки 2.19а и 2.19б). Полость становится практически пустой, и изредка возникающие фотоны почти сразу вызывают возбуждение спина, который затем быстро возвращается в основное состояние. Потери через этот канал диссипации могут быть скомпенсированы за счёт более сильной модуляции, когда увеличивающееся фотонно-спиновое взаимодействие приводит к росту квантового показателя Ляпунова и хаотизации динамики (рисунки 2.19в и 2.19г).

Таким образом была численно исследована модель, в которой сложная динамика возникает в результате взаимодействия между периодическими модуляциями, диссипативными механизмами и взаимодействием между двумя подсистемами, большой (фотоны) и малой (спин). Было продемонстрировано, что спин-фотонное взаимодействие может существенно изменить динамику фотонной моды. В пределе слабой модуляции коллективные спин-фотонные состояния становятся менее хаотическими из-за дополнительного диссипативного канала (спиновая релаксация), который способствует утечке фотонов. Напротив, сильные модуляции могут уравновесить эти потери, так что степень хаоса в динамике фотонной моды увеличивается [4].

2.6 Выводы по главе

Данная глава посвящена разработке новых численных критериев квантового диссипативного хаоса, численному исследованию математических моделей, описывающих реальные физические установки, в которых предложенные квантификаторы хаоса могут быть измерены экспериментально. Также в данной главе исследуются математические модели, в которых были обнаружены новые квантовые аналоги классических бифуркационных сценариев.

- Обнаружен квантовый аналог бифуркации Неймарка—Сакера в открытом периодически модулированном квантовом димере [1].
- Разработан и реализован алгоритм вычисления старшего квантового показателя Ляпунова на основе количественного определения расходимости изначально близких квантовых траекторий [2]. Данная

разработка позволяет количественно оценивать хаотические и регулярные режимы в открытых квантовых системах.

- Предложен экспериментально реализуемый способ оценки хаотической и регулярной динамики в модели открытого квантового резонатора с модуляцией [3]. Метод заключается в анализе распределений времён между последовательными излучениями фотонов из резонатора при помощи однофотонных детекторов.
- Численно исследована модель, в которой сложная динамика возникает в результате взаимодействия между периодическими модуляциями, диссипативными механизмами и взаимодействием между фотонной и спиновой подсистемами [4]. Данное взаимодействие при определённых параметрах может приводить систему как в хаотическое, так и регулярное состояние.

Глава 3. Локализация в открытых квантовых системах

Явление локализации Андерсона в пространственно-неоднородных средах [104], известное уже на протяжении более 60 лет, все ещё привлекает внимание исследователей [105–107] и экспериментально наблюдается в различных областях физики [108–112]. Данный феномен является хорошо изученным в контексте невзаимодействующих частиц в когерентном гамильтоновом пределе [108–113]. Но в диссипативных квантовых системах, где есть взаимодействие с окружающей средой, локализация Андерсона изучена не достаточно хорошо [35].

Физическая интуиция подсказывает, что в открытых квантовых системах диссипация должна оказывать деструктивное влияние на интерференцию волновых пакетов, которая, в свою очередь, является причиной локализации Андерсона. Ранее проведённые исследования подтвердили, что диссипация разрушает локализацию Андерсона [114–116]. Однако недавние результаты проливают свет на гораздо более богатую физику. Было продемонстрировано, что даже когда асимптотическое состояние является тривиальным равномерным распределением (состояние с максимальной энтропией), процесс релаксации к данному состоянию проявляет неоднородную динамику и признаки метастабильности [117]. В то же время известны случаи, когда диссипативные эффекты могут играть конструктивную роль в приведении квантовых систем в некоторые специфические (чистые и смешанные) состояния [27; 37; 118], в стабилизации квантовых систем в метастабильных состояниях [119–123]. Кроме этого, определённые типы диссипативных эффектов используются для уменьшения потерь и увеличения когерентности в конденсатах Бозе—Эйнштейна [124–127]. Первые доказательства того, что локализация Андерсона может существовать, когда в системе есть диссипация, были продемонстрированы для квазиклассических и классических систем. В частности, были получены экспериментальные свидетельства локализации в случайном лазере, за счёт которой уменьшается пространственное перекрытие мод и, в результате, улучшается стабильность лазера [128; 129]. Также было показано, что в классических активных нелинейных системах с беспорядком аттракторы могут демонстрировать локализацию в пространстве («Андерсоновские аттракторы») [130; 131].

Расширением феномена локализации Андерсона для многочастичных систем является многочастичная локализация (MBL) [132; 133]. Существует целый спектр определений и квантификаторов этого многогранного явления, нацеленных на выделение специфических свойств систем с многочастичной локализацией. Среди них можно выделить отсутствие проводимости [133] (даже в пределе бесконечной температуры [132]), медленный логарифмический рост энтропии запутанности при уменьшении параметра взаимодействия между частицами [134–137], существование обширного набора локальных интегралов движения [138], и специфические спектральные свойства гамильтонианов [139; 140]. Есть также квантификаторы, характеризующие свойства собственных состояний систем с многочастичной локализацией — корреляции ближнего действия [141], низкая энтропия запутанности [142–144] и большие флуктуации локальных наблюдаемых [145].

В контексте открытых квантовых систем явление многочастичной локализации все ещё является недостаточно изученным. Влияние диссипации на состояния систем MBL в больших временных масштабах является очень важным направлением исследования, особенно в контексте недавних экспериментальных работ [146–149]. В связанных теоретических работах [150–152] рассматривались открытые системы с дефазирующей диссипацией [38], из-за которой состояние системы (вне зависимости от силы взаимодействия между частицами и присутствия в системе локализации) со временем приходило в тривиальное асимптотическое состояние с максимальной энтропией.

В разделе 3.1 описывается открытая модель Андерсона.

В разделе 3.2 подробно излагаются признаки одночастичной локализации, описываются результаты численных экспериментов и теоретические выкладки объясняющие природу локализации в открытых квантовых системах.

В разделе 3.3 изучается механизм управления свойствами локализации асимптотических состояний одночастичных квантовых систем.

В разделе 3.4 исследуются механизмы распространения волновых пакетов отдельно взятых квантовых траекторий и распределения времён между последовательными квантовыми скачками в открытой модели Андерсона.

В разделе 3.5 вводятся новые численные критерии многочастичной локализации в открытых квантовых системах.

В разделе 3.7 представлены основные выводы по данной главе.

В разделе 3.6 исследуется связь между переходом к многочастичной локализации и переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике.

3.1 Открытая модель Андерсона

Открытая одночастичная модель Андерсона описывается уравнением Линдблада (1.22) и (1.23) с независимым от времени гамильтонианом [104]:

$$H = \sum_n \varepsilon_n b_n^\dagger b_n - \left(b_n^\dagger b_{n+1} + b_{n+1}^\dagger b_n \right), \quad (3.1)$$

где $\varepsilon_n \in \left[-\frac{W}{2}, \frac{W}{2}\right]$ — случайные некоррелированные значения энергий на сайте n , W — сила пространственного беспорядка, b_n и b_n^\dagger — операторы рождения и уничтожения бозона на сайте n . N — размерность решётки. $S = N$ — число состояний в квантовой системе. Известно, что собственные значения гамильтониана для этой модели находятся в следующем интервале:

$$\lambda_v \in \left[-2 - \frac{W}{2}, 2 + \frac{W}{2}\right], \quad (3.2)$$

а соответствующие им собственные вектора A_v являются экспоненциально локализованными в пространстве с длиной локализации [153]:

$$\xi_v \approx \frac{24(4 - \lambda_v^2)}{W^2}, \quad (3.3)$$

с небольшими поправками на границах спектра [154].

Асимптотическая матрица плотности ρ^A формируется не только гамильтонианом, но и окружением открытой квантовой системы — диссипативными операторами. В простейшем случае, когда все диссипативные операторы эрмитовы ($V_k \equiv V_k^\dagger$):

$$V_k = b_k^\dagger b_k, \quad (3.4)$$

асимптотическая матрица плотности будет иметь тривиальный вид: $\rho^A = \frac{\mathbb{1}}{N}$, характеризующий состояние системы с максимальной энтропией. Такой тип диссипации не приводит к локализации, но для полного и всестороннего анализа

такие диссипаторы тоже будут использоваться в данной работе. Данный вид диссипаторов активно используется при изучении релаксационных процессов в одночастичных [117] и многочастичных [150; 151; 155–157] открытых квантовых системах.

С другой стороны, формально существует бесконечно много вариантов неэрмитовых диссипаторов V_k , которые гарантируют локализованное асимптотическое состояние в виде $\rho^A = |\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$, где $|\varphi_n\rangle$ — n -ое собственное состояние гамильтониана H (3.1). Чтобы это выполнялось, собственное состояние $|\varphi_n\rangle$ должно быть так называемым «тёмным» состоянием для всех диссипативных операторов, то есть должно выполняться условие $V_k|\varphi_n\rangle = 0$ для всех $k = 1 \dots K$ [27; 37]. Однако, на практике для этого необходимо априорное знание состояния $|\varphi_n\rangle$ и создание физически нереализуемых диссипативных операторов. В данной работе будут применяться физически реализуемые неэрмитовые диссипаторы, которые активно используются при изучении открытых квантовых систем [27; 37; 158–161]:

$$V_k = \left(b_k^\dagger + e^{i\alpha} b_{k+l}^\dagger \right) (b_k - e^{-i\alpha} b_{k+l}), \quad (3.5)$$

где α — фаза диссипатора, а l определяет индекс соседнего сайта, на который воздействует данный диссипатор. В случае, когда $\alpha = 0$, диссипативный оператор синхронизирует динамику на k -ом и $(k + l)$ -ом сайте, за счёт рециркуляции антисимметричных противофазных состояний в симметричные и синфазные. Данный тип диссипаторов с $l = 1$ был впервые представлен в работах [27; 37]. Экспериментальная реализация цепочки Бозе—Хаббарда с сайтами, соединёнными диссипаторами такого вида, обсуждается в работе [162], за счёт использования квантовых резонаторов, соединённых сверхпроводящими кубитами. Фаза диссипатора α в данной установке может варьироваться относительным положением кубита.

3.2 Одночастичная локализация

В открытой квантовой модели Андерсона (1.23) и (3.1) с неэрмитовыми диссипаторами (3.5) зафиксируем граничные условия $\rho_0 = \rho_{N+1} = 0$ ($N =$

100 — число сайтов на решетке, совпадает с числом состояний) и проанализируем асимптотическую матрицу плотности ρ^A , которая является единственным состоянием равновесия в уравнении (1.23) [12; 47]. Коэффициенты скорости диссипации — константные значения $\gamma_k = 0.1$ для всех k . Так как в данной модели линдбладан не зависит от времени, асимптотическую матрицу плотности можно искать путем вычисления нулевого собственного вектора линдбладана L (1.23) при помощи библиотеки Eigen [51].

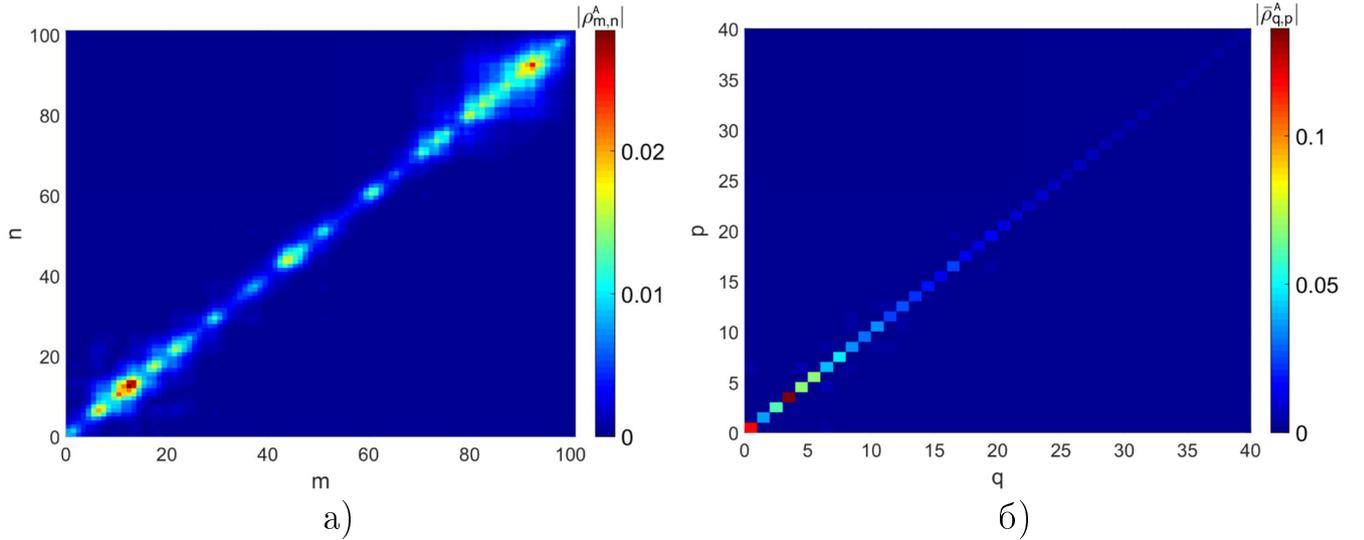


Рисунок 3.1 — Абсолютные значения асимптотической матрицы плотности ρ^A в исходном базисе (а) и в базисе собственных состояний модели Андерсона (б) для единичной реализации беспорядка. Использовались неэрмитовы диссипаторы (3.5) с параметрами $\alpha = 0$ и $l = 1$. Сила пространственного беспорядка $W = 1$.

Зафиксируем параметры диссипаторов $\alpha = 0$ и $l = 1$ в формуле (3.5) (синфазная диссипация на соседних сайтах решётки). В этом случае асимптотическая матрица плотности ρ^A имеет пятнистую структуру с несколькими яркими областями локализации, как показано на рисунке 3.1а. Рассмотрим асимптотическую матрицу плотности ρ^A в базисе собственных состояний модели Андерсона:

$$\bar{\rho}^A = \mathcal{A}^\dagger \rho^A \mathcal{A}, \quad (3.6)$$

где $\mathcal{A} = (A_1 \dots A_N)$ — матрица собственных векторов гамильтониана (3.1). В данном представлении матрица плотности $\bar{\rho}^A$ является практически диагональной, с большим преобладанием значений из нижней части спектра, как показано на рисунке 3.1б.

Для аналитического подтверждения данного наблюдения перепишем уравнение (1.22) в базисе собственных состояний модели Андерсона (3.6), пренебрегая недиагональными элементами матрицы плотности. В таком приближении эволюция диагональных элементов определяется только диссипативными членами:

$$\dot{\bar{\rho}}_{p,p} = \gamma \left(\sum_q I_{p,q} \bar{\rho}_{q,q} - \bar{\rho}_{p,p} \sum_q I_{q,p} \right), \quad (3.7)$$

где коэффициенты перекрытий $I_{p,q}$ представляются следующим образом через диссипативные операторы в базисе собственных состояний модели Андерсона ($\bar{V}_k = \mathcal{A}^\dagger V_k \mathcal{A}$):

$$I_{p,q} = \sum_k \left| (\bar{V}_k)_{q,p} \right|^2 = \sum_k (\mathcal{A}_{p,k+l} + e^{i\alpha} \mathcal{A}_{p,k})^2 (\mathcal{A}_{q,k+l} - e^{-i\alpha} \mathcal{A}_{q,k})^2. \quad (3.8)$$

Система линейных дифференциальных уравнений (3.7) имеет единственное устойчивое состояние равновесия. Для его поиска, приравняем правую часть уравнения к 0, введём переобозначение:

$$I_{p,k}^\pm = (\mathcal{A}_{p,k+l} \pm e^{\pm i\alpha} \mathcal{A}_{p,k})^2, \quad (3.9)$$

и получим итоговое выражение для асимптотического состояния равновесия:

$$\bar{\rho}_{p,p}^A = \frac{\sum_q I_{p,q} \bar{\rho}_{q,q}^A}{\sum_q I_{q,p}} = \frac{\sum_q \sum_k I_{p,k}^+ I_{q,k}^- \bar{\rho}_{q,q}^A}{\sum_q \sum_k I_{q,k}^+ I_{p,k}^-} = \frac{\sum_k I_{p,k}^+ \sum_q I_{q,k}^- \bar{\rho}_{q,q}^A}{\sum_k I_{p,k}^- \sum_q I_{q,k}^+}. \quad (3.10)$$

Внутренние суммы в числителе и знаменателе в самой правой части выражения не зависят от индекса p . Они подвергаются усреднению по всем охватываемым собственным состояниям. Поскольку беспорядок пространственно однороден, среднее по ансамблю делает результат также независимым от индекса k , и поэтому обе суммы соответствуют некоторой нормировочной константе. Таким образом, мы приходим к следующему выражению для асимптотической матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона:

$$\bar{\rho}_{p,p}^A \approx \frac{\sum_k I_{p,k}^+}{\sum_k I_{p,k}^-}, \quad (3.11)$$

которое полностью определяется типом диссипации и пространственной структурой конкретного собственного состояния.

Для случая синфазной диссипации на соседних сайтах решётки ($\alpha = 0$ и $l = 1$ в (3.5)) получается соотношение:

$$\sum_k (\mathcal{A}_{p,k+1} \pm \mathcal{A}_{p,k})^2 = 2 \pm \sum_k \mathcal{A}_{p,k+1} \mathcal{A}_{p,k} = 2 \mp \lambda_p \mp \sum_k \varepsilon_k \mathcal{A}_{p,k}^2. \quad (3.12)$$

Оно основано на тождестве, полученном из следующего уравнения для собственных состояний:

$$-(\lambda_p - \varepsilon_k) \mathcal{A}_{p,k} = \mathcal{A}_{p,k-1} + \mathcal{A}_{p,k+1}, \quad (3.13)$$

которое, в свою очередь, умножается на $\mathcal{A}_{p,k}$ и суммируется по k . В уравнении (3.12) в случае малого беспорядка ($W < 4$) и далеко от границ спектра, можно пренебречь последним слагаемым в правой части (усреднение из-за пространственного беспорядка), и в итоге получить следующее соотношение:

$$\bar{\rho}_{p,p}^A \approx \frac{2 - \lambda_p}{2 + \lambda_p}. \quad (3.14)$$

Данный результат объясняет быстрое уменьшение вклада собственных состояний при отдалении от нижней границы спектра. На рисунке 3.2 для разных параметров силы беспорядка символами изображены усреднённые по многим реализации беспорядка распределения диагональных элементов асимптотической матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона $\bar{\rho}_{p,p}^A$ как функции усреднённых собственных значений. Количество реализаций беспорядка для усреднения: $N_r = 100$. Полученные численные результаты хорошо согласуются с теоретической оценкой (формула (3.14) и фиолетовая кривая на рисунке 3.2). Несоответствие между результатами численных экспериментов и теоретической оценкой увеличивается с ростом силы беспорядка W и вблизи границ спектра — эти эффекты следуют из природы сделанных приближений.

Случай антифазной диссипации на соседних сайтах решетки ($\alpha = \pi$ и $l = 1$ в уравнении (3.5)), из-за симметрии, приводит к обратному выражению для формулы (3.14):

$$\bar{\rho}_{p,p}^A \approx \frac{2 + \lambda_p}{2 - \lambda_p}. \quad (3.15)$$

Асимптотическая матрица плотности является локализованной возле верхней границы спектра. При значениях фазы диссипации в промежутке $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ в асимптотической матрице плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона будут преобладать диагональные элементы, локализованные вблизи нижней границы спектра собственных значений. Аналогично, при значениях фазы диссипации в промежутке $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ преобладают максимальные собственные значения из диапазона (3.2).

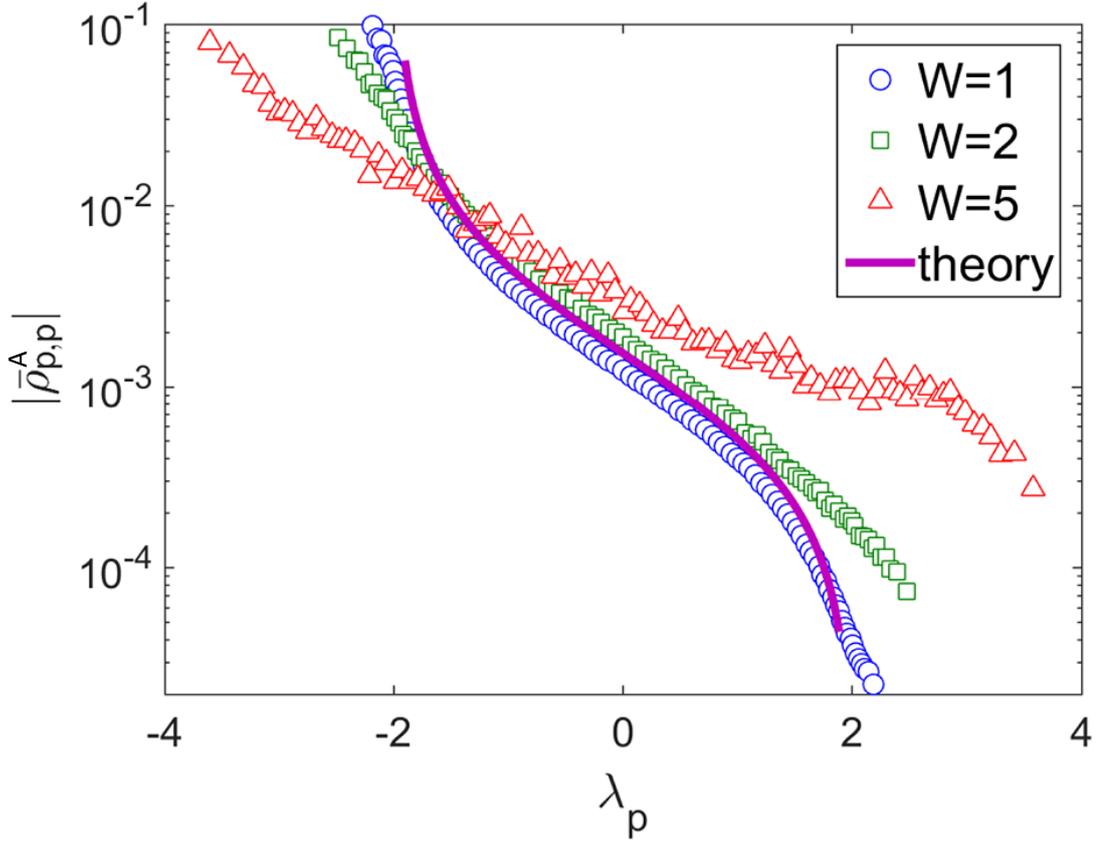


Рисунок 3.2 — Символы — усреднённые абсолютные значения диагональных элементов асимптотической матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона как функции усреднённых собственных чисел для синфазной диссипации на соседних сайтах решётки ($\alpha = 0$ и $l = 1$ в уравнении (3.5)) для разных значений беспорядка W . Теоретический результат (формула (3.14)) показан фиолетовой сплошной линией.

Качественно иная картина наблюдается для диссипативных операторов с $\alpha = \pi$ и $l = 2$. В этом случае асимптотическая матрица плотности в исходном базисе ρ^A является относительно более делокализованной (рисунок 3.3а). В то же время, в базисе собственных состояний модели Андерсона $\bar{\rho}^A$ (3.6) остаётся локализованной со смещением в центр спектра (рисунок 3.3б). Относительная делокализация в исходном базисе вызвана существенным вкладом собственных состояний из центра спектра, которые имеют относительно большую длину локализации (3.3). Аналитические соотношения для данного случая

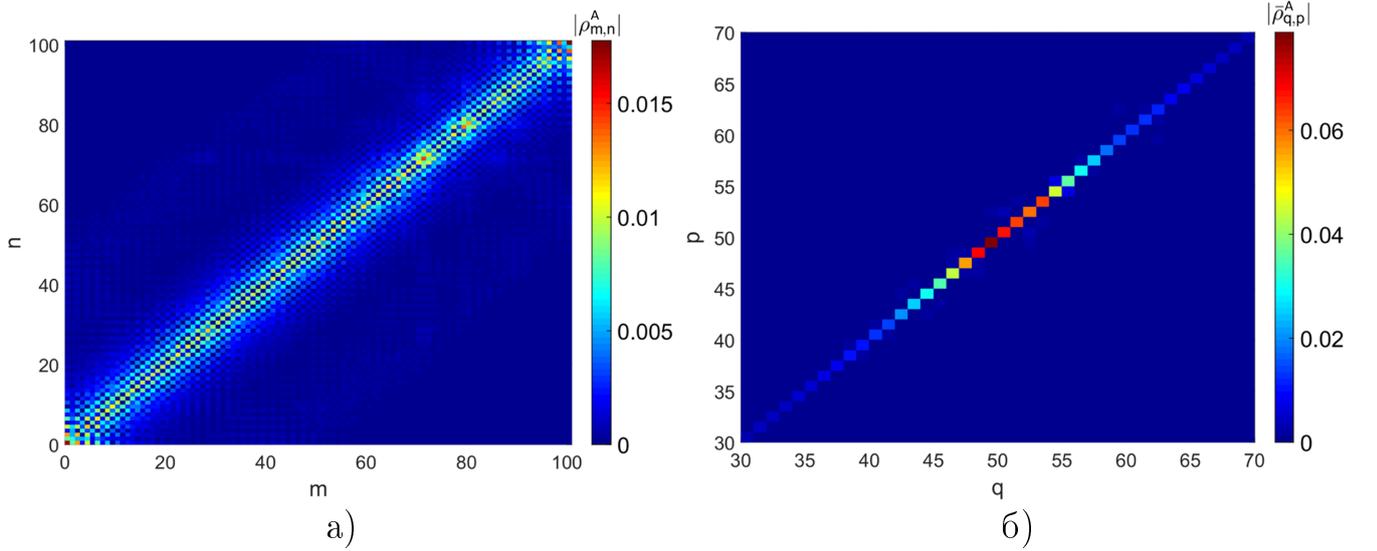


Рисунок 3.3 — Абсолютные значения асимптотической матрицы плотности ρ^A в исходном базисе (а) и в базисе собственных состояний модели Андерсона (б) для единичной реализации беспорядка. Использовались неэрмитовы диссипаторы (3.5) с параметрами $\alpha = \pi$ и $l = 2$. Сила пространственного беспорядка $W = 1$.

выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 I_p^- &= \sum_k (\mathcal{A}_{p,k+2} \pm \mathcal{A}_{p,k})^2 = \\
 &= \lambda^2 - 2\lambda_p \sum_k \varepsilon_k \mathcal{A}_{p,k} \mathcal{A}_{p,k+1} + \sum_k \varepsilon_k^2 \mathcal{A}_{p,k}^2 \approx \lambda_p^2 + \frac{W^2}{12}, \quad (3.16) \\
 I_p^+ &= 4 - I_p^-,
 \end{aligned}$$

которые в итоге приводят к следующему выражению для диагональных элементов матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона:

$$\bar{\rho}_{p,p}^A \approx \frac{4}{\lambda_p^2 + \frac{W^2}{12}} - 1. \quad (3.17)$$

Данное выражение указывает на то, что наибольший вклад в решение вносят собственные состояния из центра спектра. На рисунке 3.4 изображены усреднённые по $N_r = 100$ случайным реализациям беспорядка диагональные элементы матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона для разных значений силы беспорядка вместе с аналитическим результатом (3.17) (сплошные линии). На графике видно хорошее соответствие между численными и аналитическими результатами при малом беспорядке W . При увеличении W несоответствие увеличивается на краях спектра λ_p ввиду сделанных теоретических приближений.

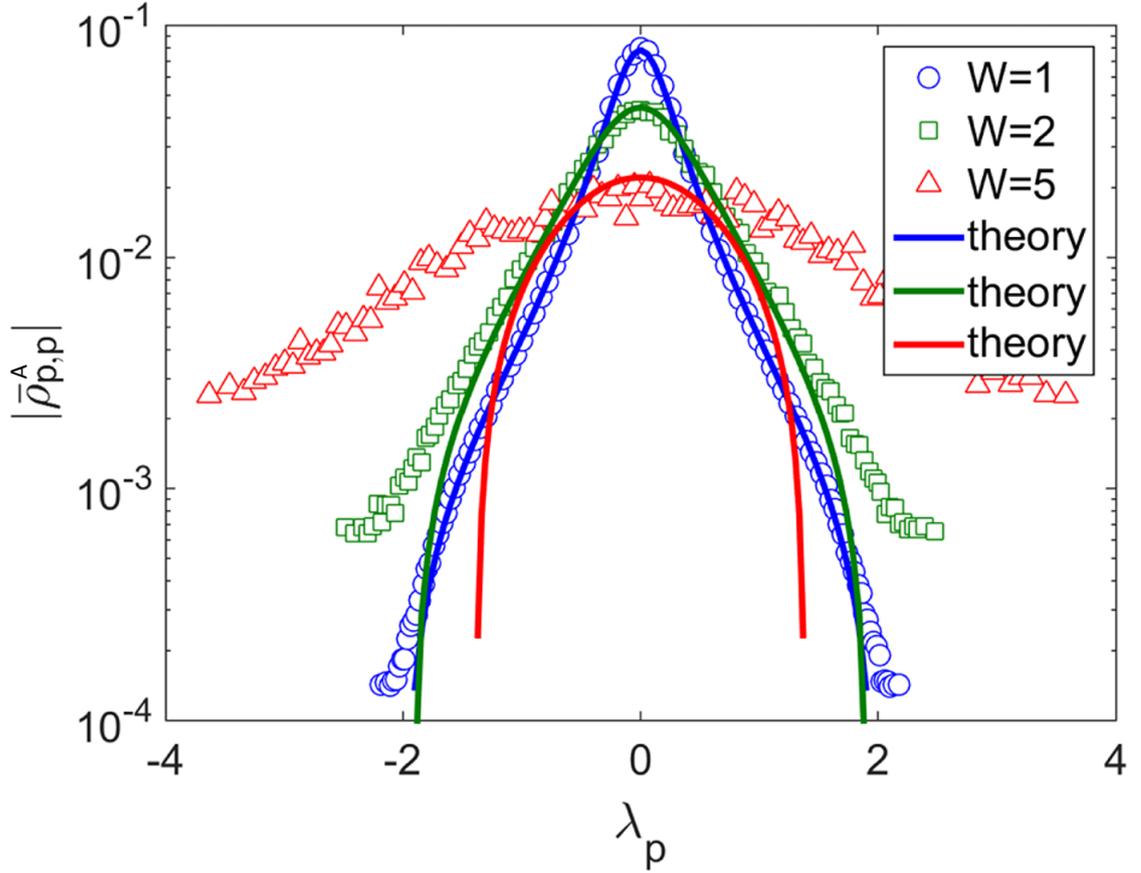


Рисунок 3.4 — Символы — усреднённые абсолютные значения диагональных элементов асимптотической матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона как функции усреднённых собственных чисел для неэрмитовой диссипации с $\alpha = \pi$ и $l = 2$ в уравнении (3.5) для разных значений беспорядка W . Теоретический результат (3.17) для каждого значения W показан соответствующей сплошной линией.

Рассмотрим открытую модель Андерсона (1.23), (3.1) и (3.5) с микроскопической точки зрения, используя метод квантовых траекторий, описанный в разделе 1.3. Квантовая траектория с индексом j будет описываться волновой функцией $|\psi_j(t)\rangle$. Зафиксируем случайный беспорядок в системе силой $W = 1$ и время переходного процесса $t^A = 10^4$ — достаточным до достижения каждой траекторией аттрактора (асимптотической матрицы плотности ρ^A). После достижения аттрактора за каждой квантовой траекторией будет вестись наблюдение в течении $t^O = 10^4$ (суммарное время пропагации $t = t^A + t^O$). Количество рассматриваемых квантовых траекторий $M_r = 10^6$. Для каждой j -ой квантовой траектории будут рассматриваться позиция и энергия, вычисляемые по соответствующим формулам:

$$n_j(t) = \langle \psi_j(t) | X | \psi_j(t) \rangle, \quad (3.18)$$

$$E_j(t) = \langle \psi_j(t) | H | \psi_j(t) \rangle, \quad (3.19)$$

где X - матрица оператора числа частиц, а H - гамильтониан модели Андерсона (3.1).

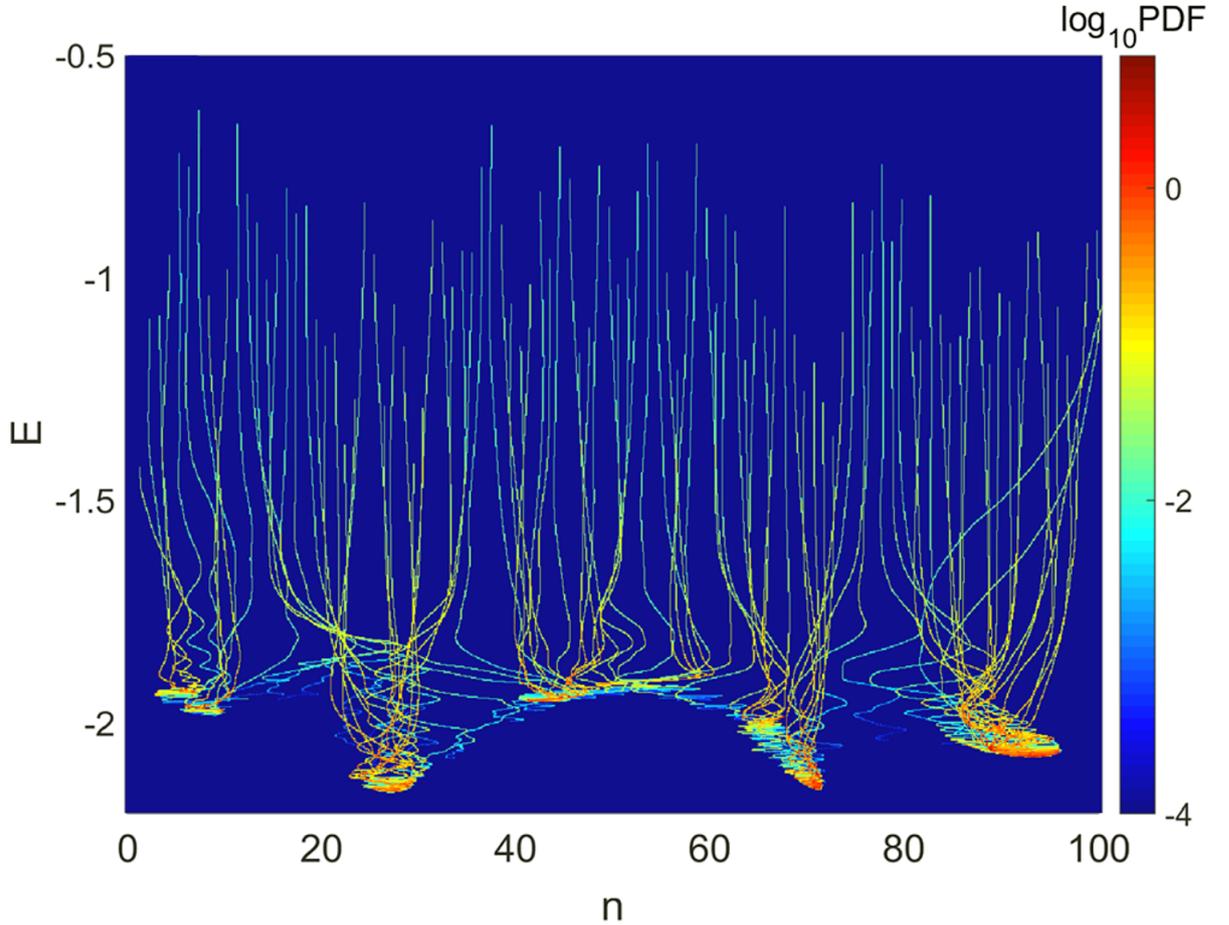


Рисунок 3.5 — Функция распределения плотности вероятностей (PDF) квантовых траекторий на плоскости позиции $n(t)$ и энергии $E(t)$ для случая синфазной диссипации на соседних сайтах решётки ($\alpha = 0$ и $l = 1$ в (3.5)).

На рисунке 3.5 изображена двумерная функция распределения плотности вероятностей (probability density function - PDF) на плоскости позиции $n(t)$ (3.18) и энергии $E(t)$ (3.19), построенная для $M_r = 10^6$ траекторий, наблюдаемых в течение $t^O = 10^4$ времени для случая синфазной диссипации на соседних сайтах решётки ($\alpha = 0$ и $l = 1$ в (3.5)). Динамика отдельных квантовых траекторий представляет собой длительные «залипания» вблизи центров локализации (красные области на рисунке 3.5), вызванные эволюцией с неэрмитовым гамильтонианом (1.24) (алгоритм 1). Данные процессы прерываются квантовыми скачками (алгоритм 3), которые накачивают систему энергией и переносят траектории в бледно-голубые «истоки» сети в верхней части рисунка 3.5, откуда системы быстро релаксируют по структурированной сети к одному

из собственных состояний модели Андерсона. Структура сети не меняется при дальнейшем увеличении числа траекторий M_r .

Результаты [5], представленные в данном разделе, указывают на то, что в открытых квантовых системах с физически реализуемой диссипацией возможно создание стационарных состояний, в которых доминируют несколько локализованных мод пространственно неоднородного гамильтониана из классической модели Андерсона. Андерсоновские моды выбираются в соответствии с их пространственно-фазовыми свойствами, унаследованными от собственных состояний гамильтониана в пределе нулевого беспорядка [163], с использованием фазо—параметризованных диссипативных операторов. Изменение фазы диссипативных операторов изменяет локализационные свойства системы.

3.3 Управление одночастичной локализацией в открытых квантовых системах

В данном разделе будет изучено влияние параметров диссипативных операторов (3.5) на локализационные свойства открытой квантовой системы (1.23) и (3.1), а также влияние добавочной дефазирующей диссипации (3.4) на асимптотическое состояние системы.

Рассмотрим случай синфазной диссипации на соседних сайтах решётки ($\alpha = 0$ и $l = 1$ в (3.5) с коэффициентами скорости диссипации $\gamma^l = 0.1$. Добавим к данной модели дополнительные дефазирующие (3.4) каналы рассеивания с коэффициентами скорости γ^d . На рисунке 3.6 изображены диагональные элементы асимптотической матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона со смешанным типом диссипации для разных значений γ^d . Стоит отметить, что не только слабая $\gamma^d \ll \gamma^l$, но и сильная $\gamma^d \gg \gamma^l$ дефазирующая диссипация не уничтожает спектральную диссипацию и структурно не изменяет решение (преобладают собственные состояния из той же части спектра).

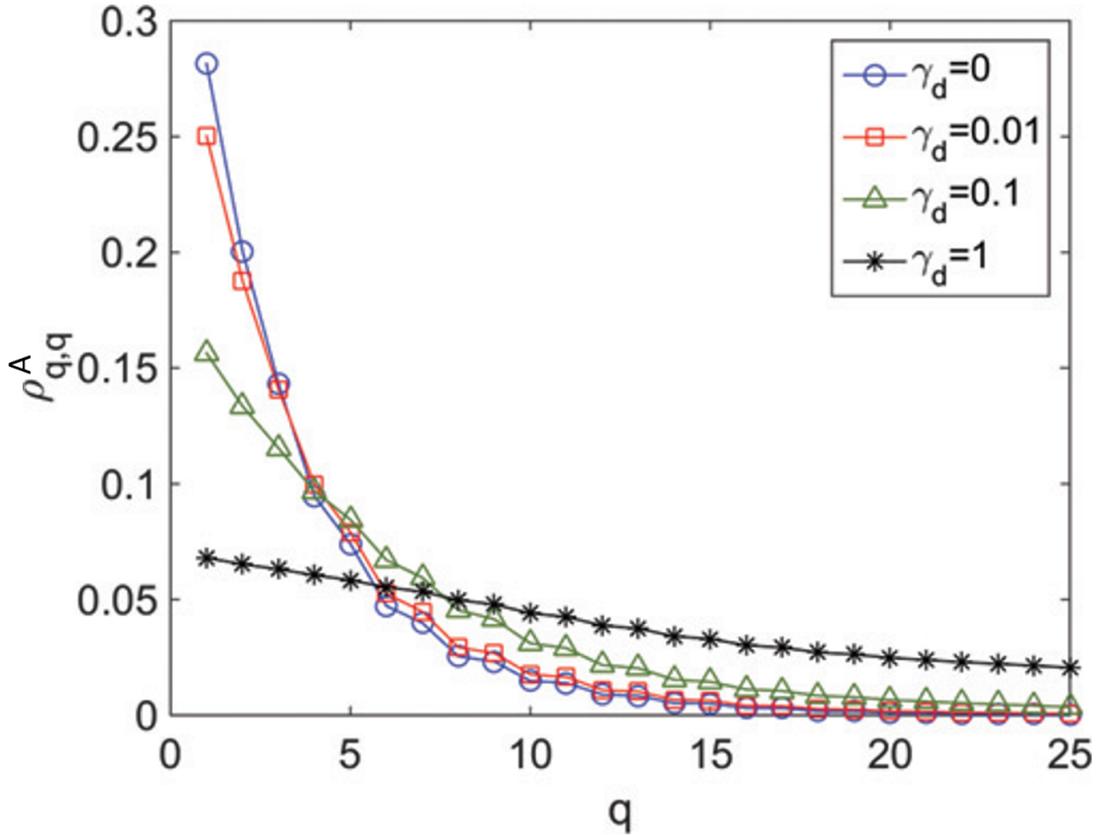


Рисунок 3.6 — Диагональные элементы асимптотической матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона $\bar{\rho}^A$ для случая синфазной диссипации на соседних сайтах решётки ($\alpha = 0$ и $l = 1$ в (3.5) и скорость диссипации $\gamma^l = 0.1$) в комбинации с дефазирющей диссипацией ((3.4) и скорость диссипации γ^d) для разных значений γ^d . Размер решётки $N = 25$, сила пространственного беспорядка $W = 2$. Усреднение производилось для $N_r = 10^3$ реализаций беспорядка.

Рассмотрим теперь систему в пределе нулевого беспорядка. Базис системы состоит из плоских волн с соответствующим спектром собственных значений:

$$\begin{aligned}
 \varphi_j &= \frac{e^{ijk}}{\sqrt{N}}, \\
 \lambda_k &= -2 \cos k, \\
 k &= \frac{2\pi q}{N}, \\
 q &= -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Можно заметить, что для конкретного значения фазы диссипатора (3.5) $\alpha = \frac{2\pi q}{N}$, плоская волна (3.20) с соответствующим $k = \alpha$ является «тёмным» состоянием для всех диссипативных операторов (3.5) [27; 37], в то время как все

остальные собственные состояния не являются. В этом случае (когда нет дефазирющей добавки $\gamma^d = 0$), плоская волна с $k = \alpha$ является асимптотическим состоянием открытой квантовой системы. В том случае, когда α не совпадает точно со значением k или присутствует дефазирющая диссипация, асимптотическое состояние остаётся очень близким к исходному «тёмному» состоянию, причём наибольший вклад вносят плоские волны с $k \approx \alpha$ (рисунок 3.7).

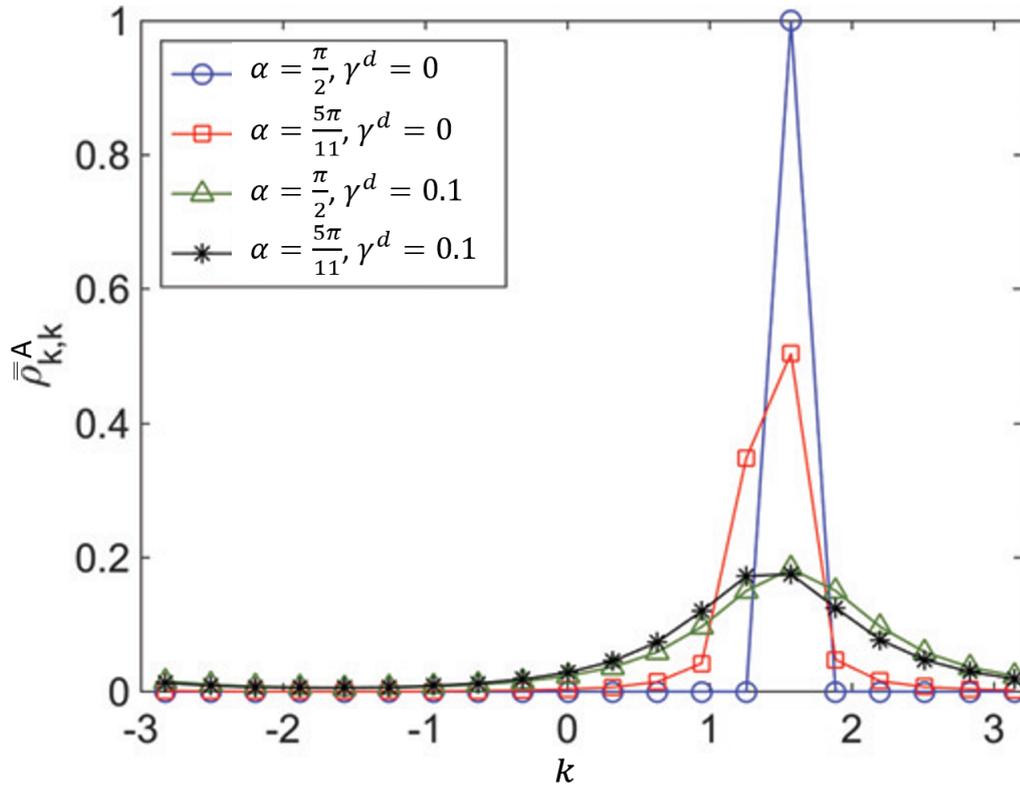


Рисунок 3.7 — Диагональные элементы асимптотической матрицы плотности в базисе плоских волн $\bar{\rho}_{k,k}^A$ (3.20) для случая синфазной диссипации на соседних сайтах решётки ($\alpha = 0$ и $l = 1$ в (3.5) и скорость диссипации $\gamma^l = 0.1$) в комбинации с дефазирющей диссипацией ((3.4) и скорость диссипации γ^d).

Размер решётки $N = 20$, сила пространственного беспорядка $W = 0$.

Ненулевой беспорядок W приводит к локализации Андерсона всех собственных состояний данной модели, которые при этом перестают в точности быть «тёмными» состояниями соответствующих диссипаторов (3.5). Однако, известно, что моды Андерсона наследуют фазовые свойства исходных плоских волн (по крайней мере, в режиме слабого беспорядка), хотя их амплитуды экспоненциально затухают в пространстве [163]. Следовательно, избирательный эффект неэрмитовых диссипаторов (3.5) сохраняется.

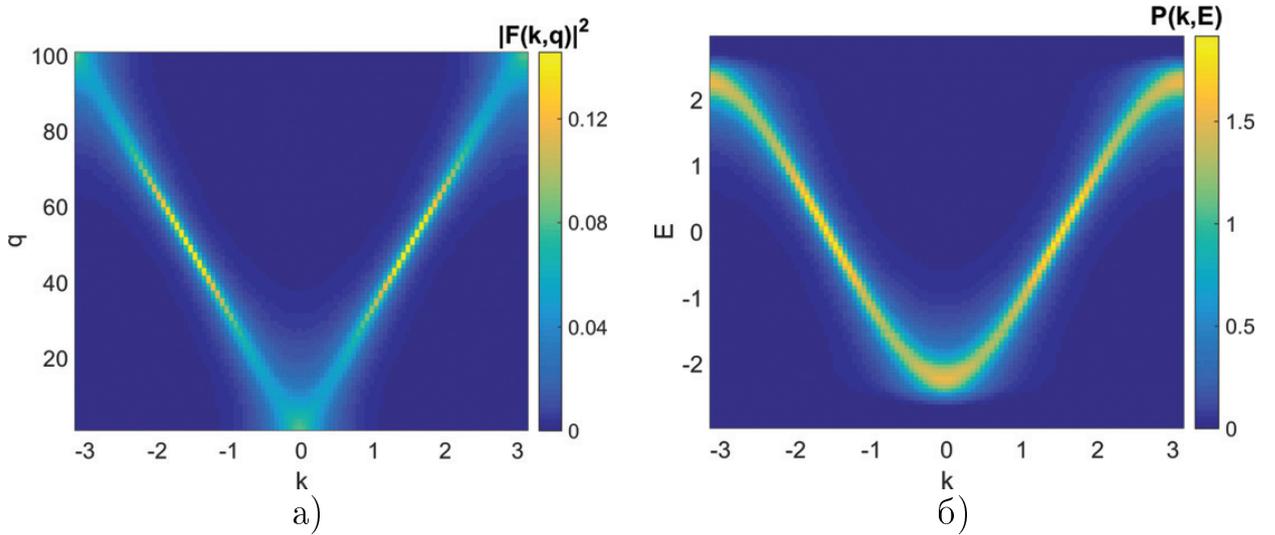


Рисунок 3.8 — Собственные состояния модели Андерсона (Андерсоновские моды) с беспорядком $W = 2$ в Фурье—базисе плоских волн (3.21). (а): квадрат значения гармоник $|F(k,q)|^2$ в зависимости от волнового числа k и номера моды q ; (б): значения спектральной плотности $P(k,E)$ (3.22).

Зафиксируем параметры системы $\gamma^l = \gamma^d = 0.1$, $N = 100$ и проанализируем структуру Андерсоновских мод A_k^q в базисе плоских волн (3.20) (Фурье—базис) для разных значений силы беспорядка W . Несмотря на то, что экспоненциальная локализация в прямом пространстве предполагает делокализацию в базисе плоских волн, она не исключает неоднородности распределения в нем. Коэффициенты разложения, которые выражаются следующим образом:

$$F(k,q) = \sum A_k^q \frac{e^{ijk}}{\sqrt{N}}, \quad (3.21)$$

имеют ярко выраженные максимумы вдоль линейных зависимостей $q \approx \pm k_{max}$, как показано на рисунке 3.8а. Также была вычислена спектральная плотность коэффициентов разложения:

$$P(k,E) = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta E} \sum_{q: E(q) \in [E, E+\Delta E]} |F(k,q)|^2, \quad (3.22)$$

которая воспроизводит дисперсионное соотношение (рисунок 3.8б). Примечательно, что эти особенности присутствуют даже в режиме сильного беспорядка $W = 10$ (рисунок 3.9а и 3.9б).

Связь между пространственной структурой мод Андерсона и их положением в спектре даёт ключ к пониманию способа выбора мод для формирования

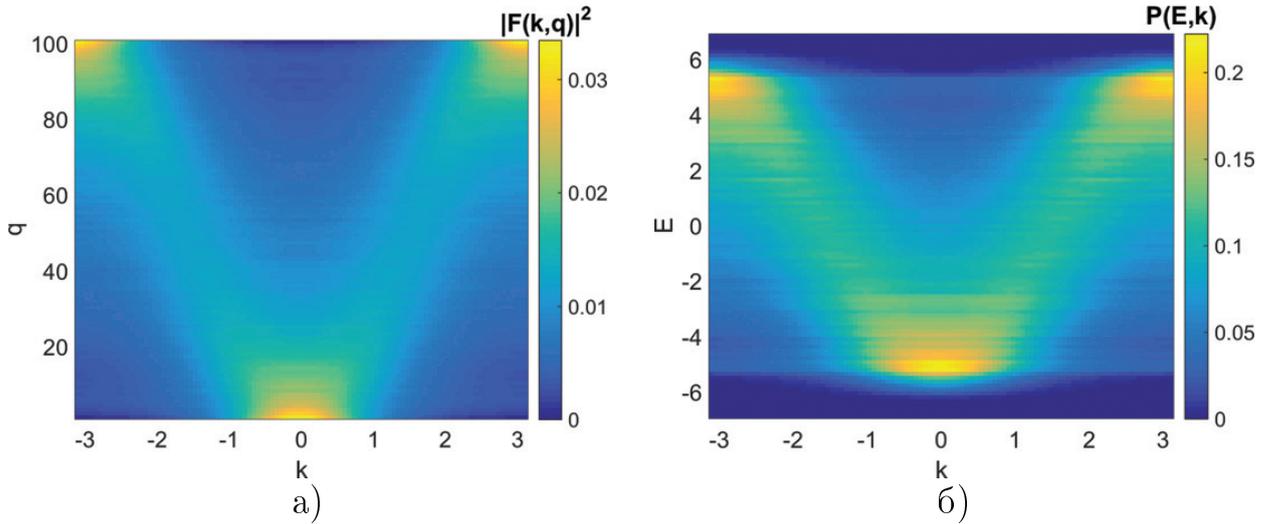


Рисунок 3.9 — Собственные состояния модели Андерсона (Андерсоновские моды) с беспорядком $W = 10$ в Фурье–базисе плоских волн (3.21). (а): квадрат значения гармоник $|F(k,q)|^2$ в зависимости от волнового числа k и номера моды q ; (б): значения спектральной плотности $P(k,E)$ (3.22).

асимптотического состояния. Очевидно, это можно сделать, варьируя фазовый параметр α неэрмитовых диссипаторов (3.5). Численные результаты показывают хорошо очерченный максимум диагональных элементов асимптотической матрицы плотности в базисе плоских волн $\bar{\rho}_{k,k}^A$, такой, что $k_{max} \approx \alpha$ (рисунок 3.10а). Также была вычислена спектральная плотность диагональных элементов матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона (3.6):

$$\varrho(E) = \lim_{\Delta E \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta E} \sum_{q: E(q) \in [E, E+\Delta E]} \bar{\rho}_{q,q}^A, \quad (3.23)$$

проиллюстрированная на рисунке 3.10. Точно так же, хотя и с менее чёткими границами воспроизводятся все результаты для случая сильного беспорядка $W = 10$ (рисунок 3.11).

Таким образом, было продемонстрировано, что синтетическая диссипация может использоваться для управления свойствами локализации асимптотических состояний одночастичных квантовых систем. Механизм управления основан на фазовых свойствах локализованных мод гамильтониана системы Андерсона, которые являются «тёмными» (либо близкими к «тёмным») состояниями синтетических диссипаторов [6].

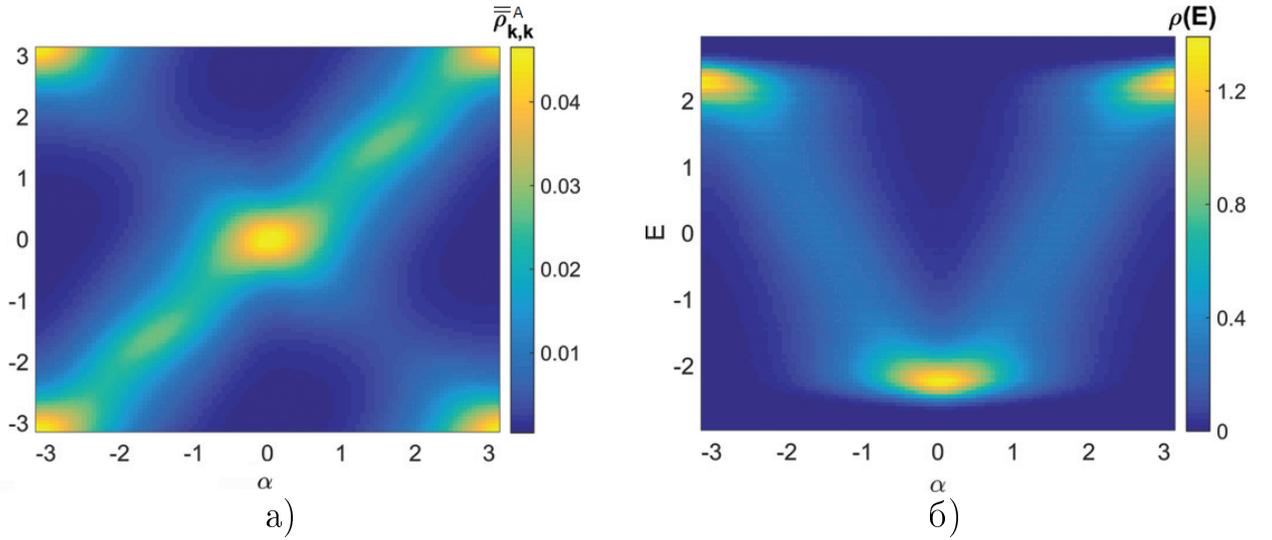


Рисунок 3.10 — Асимптотическое состояние открытой системы Андерсона с беспорядком $W = 2$ и усреднением по $N_r = 10^3$ реализаций беспорядка в зависимости от параметра диссипации α ((3.5)). (а): диагональные элементы асимптотической матрицы плотности в базисе плоских волн $\rho_{k,k}^A$ (3.20) ; (б): спектральная плотность диагональных элементов матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона.

3.4 Распространение волновых пакетов в открытых квантовых системах с локализацией

В данном разделе изучаются режимы распространения волновых пакетов квантовых траекторий [14; 54; 164] (раздел 1.3) в открытой модели Андерсона (раздел 3.1). Также будет рассмотрена статистика времён между последовательными квантовыми скачками для разных режимов распространения.

Зафиксируем общий случай параметров модели в рамках данного раздела (если нет дополнительных уточнений): размер решётки $N = 200$, количество квантовых траекторий для усреднения $M_r = 10^3$, сила пространственного беспорядка $W = 1$, время переходного процесса для достижения аттрактора $t^A = \frac{10^3}{\gamma}$, время наблюдения за квантовыми траекториями на аттракторе $t^O = 10^7$ (общее время интегрирования равно $t^A + t^O$) и периодические граничные условия $\rho_0 = \rho_{N+1}$. Используются неэрмитовы диссипаторы (3.5) с разными значениями фазы α и, как контрольный случай, дефазирующие диссипаторы (3.4).

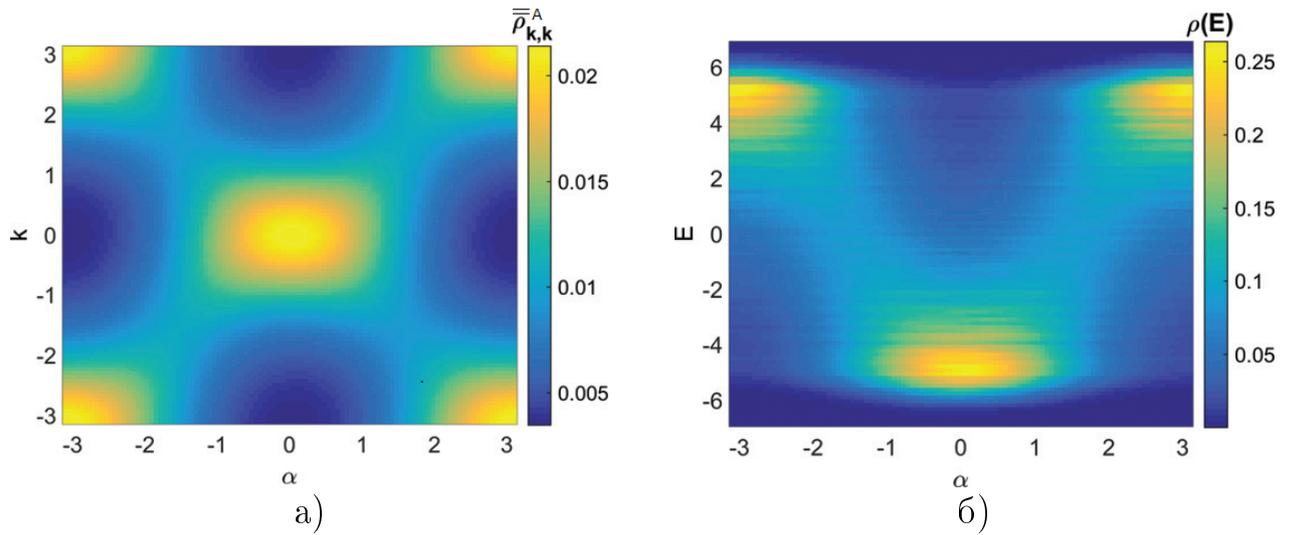


Рисунок 3.11 — Асимптотическое состояние открытой системы Андерсона с беспорядком $W = 10$ и усреднением по $N_r = 10^3$ реализаций беспорядка в зависимости от параметра диссипации α ((3.5)). (а): диагональные элементы асимптотической матрицы плотности в базисе плоских волн $\rho_{k,k}^A$ (3.20) ; (б): спектральная плотность диагональных элементов матрицы плотности в базисе собственных состояний модели Андерсона.

Асимптотическая матрица плотности ρ^A описывает статистическое распределение единичных квантовых траекторий, но не содержит информации о микроскопической динамике в асимптотическом режиме. Для данного типа анализа применяется метод квантовых траекторий, описанный в разделе 1.3.

Изучим структуру асимптотических состояний в виде двумерной функции плотности вероятностей нахождения траекторий на плоскости позиции $n(t)$ (3.18) и энергии $E(t)$ (3.19) в зависимости от скорости диссипации γ . На рисунке 3.12 представлена типичная картина для фиксированной реализации беспорядка. При $\alpha = 0$ траектории стягиваются вокруг центров локализации, соединённых паутиной переходов. Сходимость к центрам локализации и их компактность ослабевают с увеличением скорости диссипации (рисунок 3.12а, сверху вниз). Ненулевое значение фазы неэрмитовых диссипаторов $\alpha = \frac{\pi}{4}$ приводит к сильному перекосу траекторий (рисунок 3.12б). В конечном итоге, при $\alpha = \frac{\pi}{2}$, центры локализации становятся плохо различимыми (рисунок 3.12в). Следует отметить, что локализация энергии сохраняется, изменяясь от нижней границы спектра собственных чисел модели Андерсона (3.2) при $\alpha = 0$ к середине спектра при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Совсем иначе выглядит картина для случая

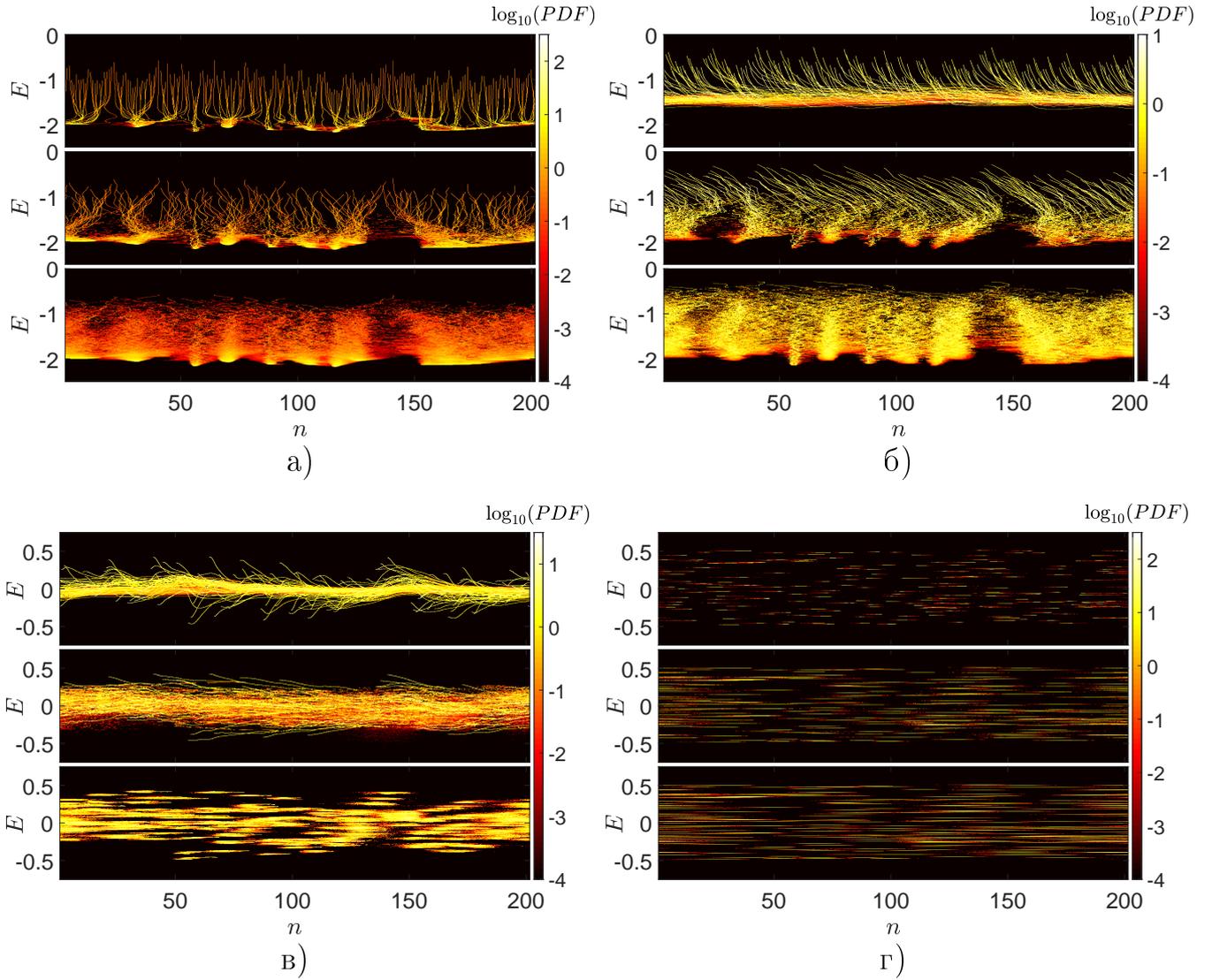


Рисунок 3.12 — Функция распределения плотности вероятностей (PDF) квантовых траекторий на плоскости позиции $n(t)$ и энергии $E(t)$ для $\gamma = 0.1$ (верхняя часть), $\gamma = 0.01$ (центральная часть), $\gamma = 0.001$ (нижняя часть). Результаты для неэрмитовых диссипаторов (3.5) — (а): $\alpha = 0$; (б): $\alpha = \frac{\pi}{4}$; (в): $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Дефазирующая диссипация — (г).

дефазирующей диссипации (3.4), при котором распределение плотности вероятности является случайным и охватывает весь спектр собственных значений модели Андерсона (3.2) (рисунок 3.12г).

Исследуем теперь динамику волновых функций $\psi_j(t)$ единичных квантовых траекторий (раздел 1.3), которые эволюционируют с неэрмитовым гамильтонианом (1.24), в сопоставлении с асимптотическим состоянием ρ^A (или $\bar{\rho}^A$ — в базисе собственных состояний модели Андерсона (3.6)). В случае нулевой фазы $\alpha = 0$ наблюдается прерывистая динамика состоящая из длительных

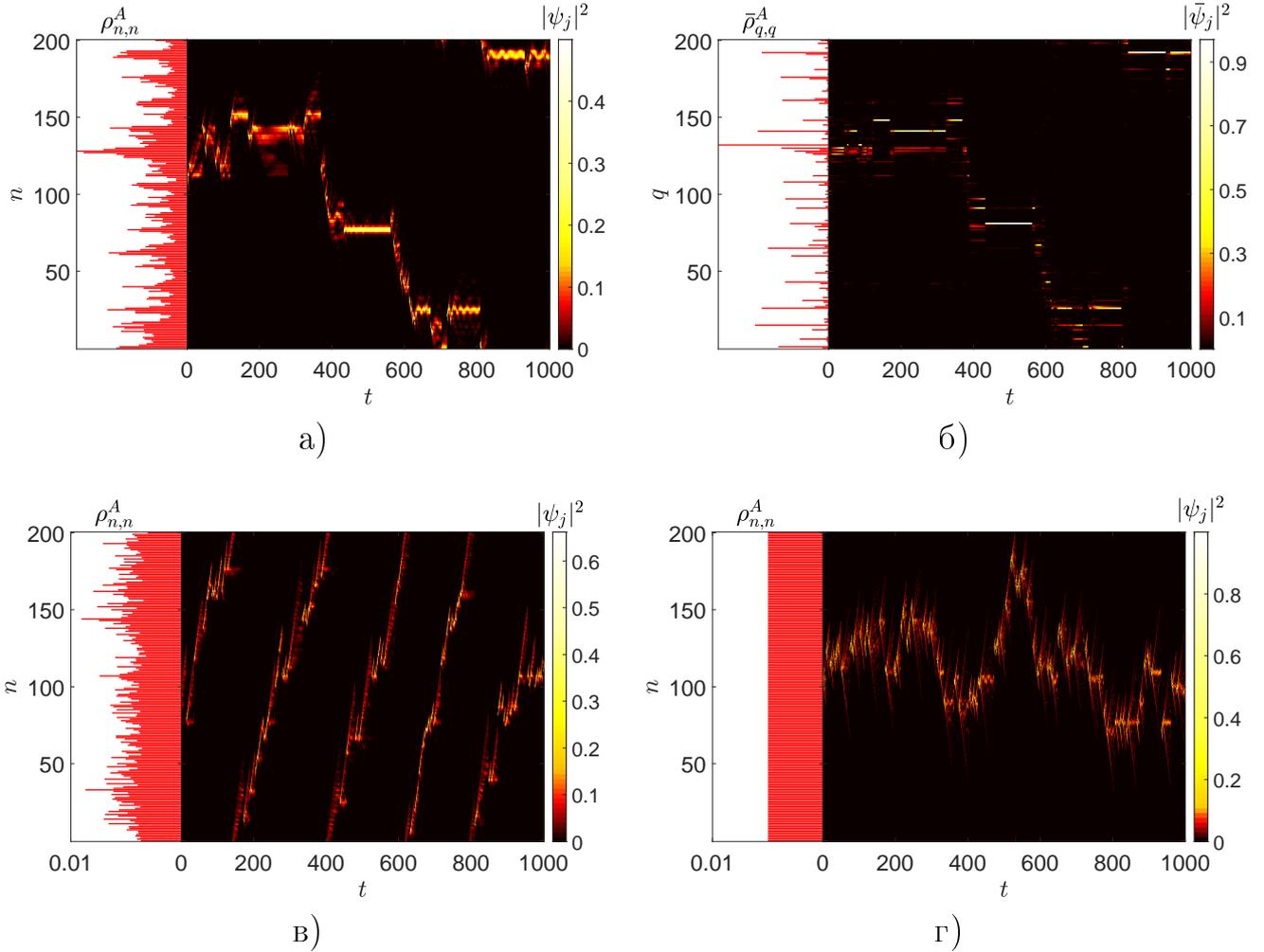


Рисунок 3.13 — Диагональные элементы асимптотической матрицы плотности (на левых вставках) и эволюция на аттракторе квадрата волновой функции отдельно взятой квантовой траектории (основные части на рисунках). (а): $\alpha = 0$, в исходном базисе; (б): $\alpha = 0$, в базисе Андерсоновских мод, отсортированных по позиции n (3.18); (в): $\alpha = \frac{\pi}{4}$, в исходном базисе; (г): дефазирующая диссипация (3.4).

циркуляций возле центров локализации и быстрых переходов между ними (рисунок 3.13а). Если данную волновую функцию перевести в базис собственных состояний модели Андерсона, отсортированных по позиции n (3.18), то можно заметить, что циркуляции происходят на модах Андерсона, которые формируют асимптотическое состояние равновесия [5] (рисунок 3.13б). Если рассмотреть ненулевую фазу неэрмитовых диссипаторов, то динамика резко изменится: для $\alpha = \frac{\pi}{4}$ незначительные циркуляции возле центров локализации сохраняются, но самый существенный вклад в динамику вносит баллистическое распростра-

нение волновых пакетов (рисунок 3.13в). Дефазирующая диссипация не несёт какой-либо пространственно-временной структуры (рисунок 3.13г).

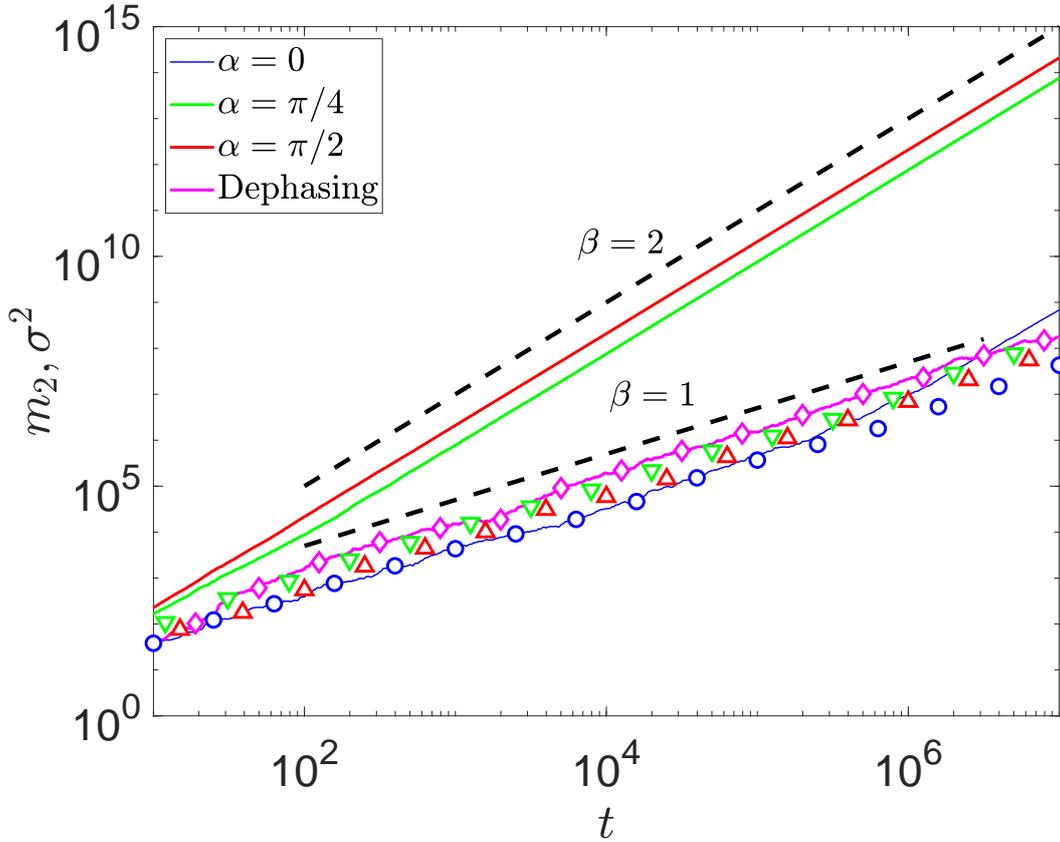


Рисунок 3.14 — Эволюция второго момента смещения $m_2(t)$ (сплошные линии) и квадрата отклонения от баллистического распространения волновых пакетов $\sigma_2(t)$ (символы) для разных типов диссипации в открытой модели Андерсона.

Для количественной оценки распространения волнового пакета отдельно взятой квантовой траектории используются следующие характеристики, усреднённые по ансамблю траекторий: второй момент смещения $m_2(t)$, средняя скорость v и квадрат отклонения от баллистического распространения волновых пакетов $\sigma_2(t)$. Данные характеристики выражаются при помощи следующих соотношений:

$$m_2(t) = \frac{1}{M_r} \sum_{j=1}^{M_r} (n_j(t) - n_j(t^A))^2, \quad (3.24)$$

$$v = \frac{1}{M_r} \sum_{j=1}^{M_r} \frac{n_j(t^A + t^O) - n_j(t^A)}{t^O}, \quad (3.25)$$

$$\sigma_2(t) = \frac{1}{M_r} \sum_{j=1}^{M_r} (n_j(t) - n_j(t^A) - v \cdot (t - t^A))^2, \quad (3.26)$$

где $n_j(t)$ — позиция j -ой траектории (3.18). Стоит отметить, что во всех случаях эволюция второго момента смещения (3.24) от времени является степенным законом с разным показателем степени β :

$$m_2(t) \approx t^\beta. \quad (3.27)$$

Для неэрмитовых диссипаторов с фазой $\alpha = 0$, а также дефазирующей диссипации имеет место режим нормальной диффузии ($\beta \approx 1$), в то время как для $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ наблюдается баллистическое распространение волновых пакетов с $\beta \approx 2$ (рисунок 3.14, сплошные линии). В то же время квадрат отклонения от баллистического распространения волновых пакетов (3.26) демонстрирует сопутствующую диффузию: $\sigma_2(t) \approx t^\beta$, $\beta = 1$ (рисунок 3.14, символы).

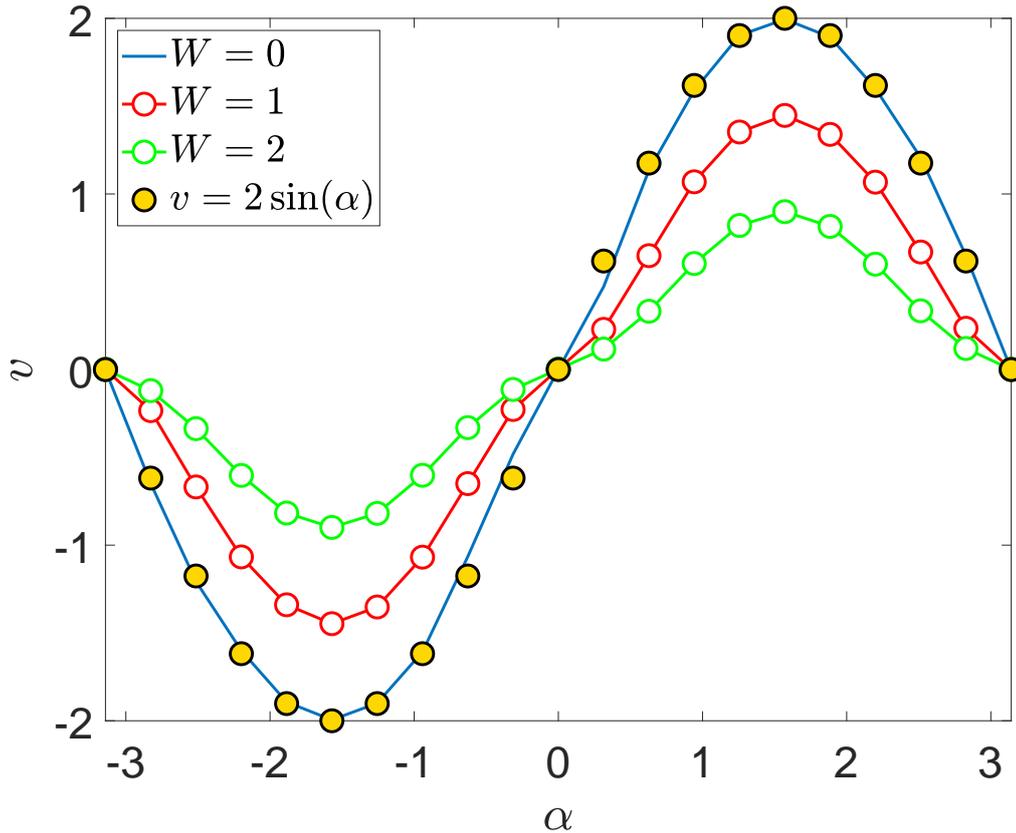


Рисунок 3.15 — Средняя скорость распространения волновых пакетов (3.25) в зависимости от фазы диссипатора α при разных значениях пространственного беспорядка W .

Переход от диффузионного к баллистическому распространению при ненулевом α вызван взаимодействием между беспорядком и диссипацией.

Как было отмечено в разделе 3.3, диссипация отбирает моды Андерсона из определённой части спектра. Эти моды заимствуют пространственно-фазовые свойства собственных состояний плоских волн с нулевым беспорядком и волновыми числами близкими к фазе диссипатора ($k \approx \alpha$) [6; 163]. Перекрываясь в пространстве, данные экспоненциально локализованные моды взаимодействуют за счёт диссипативной связи, которая обеспечивает направленное распространение квантового волнового пакета с определённой скоростью. Данная скорость, в свою очередь, зависит от фазы диссипатора α . На рисунке 3.15 изображена зависимость средней скорости (3.25) от параметра фазы неэрмитовых диссипаторов (3.5). В случае отсутствия беспорядка в системе ($W = 0$) скорость распространения волновых пакетов определяется групповой скоростью плоских волн (тёмных состояний при $k = \alpha$):

$$v(\alpha) = v_{group}(k)|_{k=\alpha} = 2 \sin(\alpha). \quad (3.28)$$

Синей сплошной линией на рисунке 3.15 показан численный результат для системы без беспорядка, жёлтые символы — теоретическая оценка $2 \sin(\alpha)$. При введении беспорядка в систему, синусоидальная зависимость сохраняется, но амплитуда уменьшается (красная и зелёная линии на рисунке 3.15).

Чтобы получить более полное представление о микроскопической динамике квантовых траекторий проанализируем статистику распределения временных интервалов между последовательными во времени квантовыми скачками (алгоритм 3), обозначаемую $P(\tau)$, где τ — временной интервал между скачками.

Рассмотрим сначала случай неэрмитовых диссипаторов (3.5) с $\alpha = 0$, когда локализация наиболее выражена, и наблюдается длительная циркуляция квантовых траекторий на доминирующих Андерсоновских модах (рисунок 3.13a и 3.13б). Для данного типа динамики в распределении времён между квантовыми скачками характерно наличие сегмента, который можно приблизить степенным законом $P(\tau) \sim \tau^{-1}$, что очень сильно отличается от классического распределения Пуассона, характерного для дефазирующей диссипации (3.4) (рисунок 3.16, вставка).

Дополнительные особенности проявляются при варьировании фазы диссипатора α (рисунок 3.16, основная часть). При $\alpha = 0$, когда распространение волновых пакетов является диффузионным, распределение времён между скачками хорошо масштабируется со скоростью диссипации γ — все синие кривые с разным значением γ (разными символами) совпали на рисунке. Данный

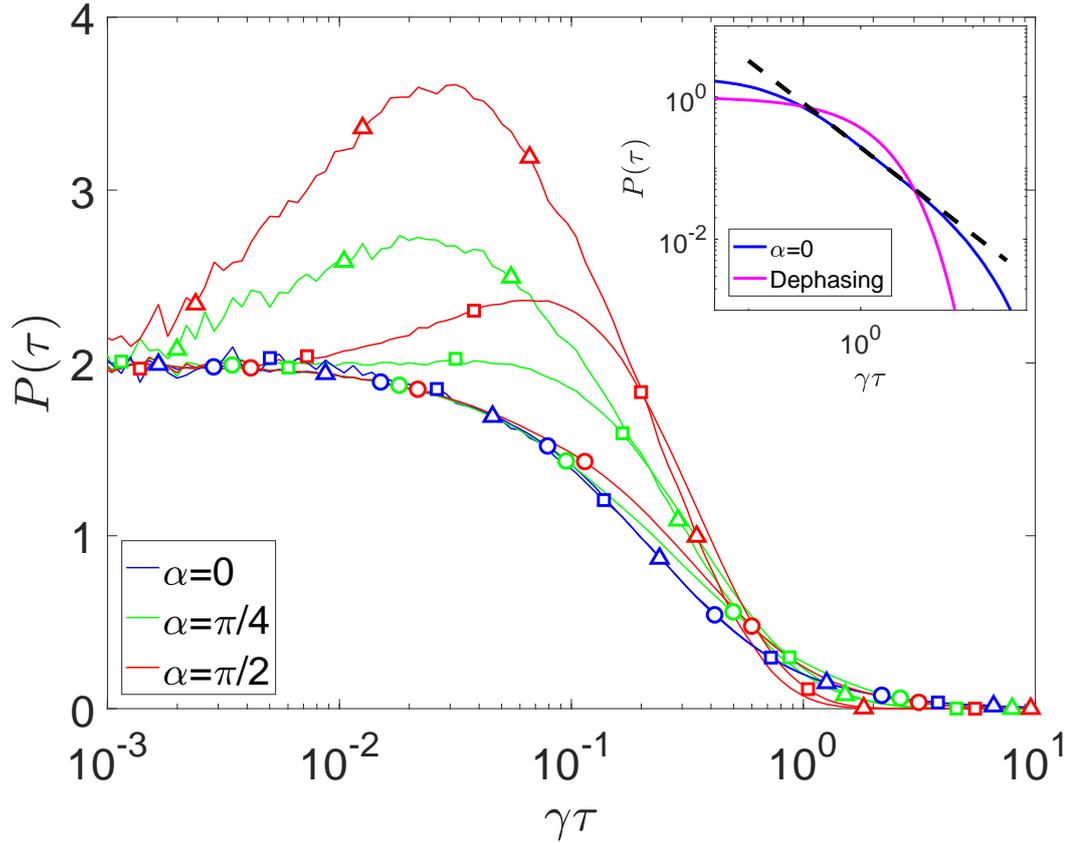


Рисунок 3.16 — Статистика распределения временных интервалов между последовательными во времени квантовыми скачками. Синие кривые соответствуют случаю $\alpha = 0$, зелёные — $\alpha = \frac{\pi}{4}$, красные — $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Разными символами показаны разные скорости диссипации γ : круги для $\gamma = 0.1$, квадраты для $\gamma = 0.01$, треугольники для $\gamma = 0.001$. Во вставке графика изображены распределения для неэрмитовых диссипаторов (3.5) с $\alpha = 0$ (синяя кривая) и дефазирющей диссипации (3.4) (в обоих случаях $\gamma = 0.1$). Чёрная пунктирная линия — аппроксимация $P(\tau) \sim \tau^{-1}$.

результат объясняется тем, что единственный временной масштаб задаётся зависимыми от γ квантовыми скачками между разными Андерсоновскими модами. При ненулевом значении фазы α наблюдается совершенно другое распределение $P(\tau)$. В то время как для умеренной скорости диссипации ($\gamma = 0.1$) распределения для $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ не сильно отличаются от кривых для $\alpha = 0$, при слабой диссипации ($\gamma = 0.01, 0.001$) наблюдается ярковыраженный максимум в распределении $P(\tau)$.

Таким образом, в открытой квантовой системе Андерсона существуют нетривиальные режимы распространения волновых пакетов за счёт взаимодействия беспорядка и диссипации. Квантовые траектории демонстрируют

диффузионные (при которых циркуляция в Андерсоновских модах прерывается квантовыми скачками) и баллистические режимы. Управляя фазой неэрмитовых диссипаторов, можно переключать данные режимы. В диффузионном режиме статистика времён между квантовыми скачками не является пуассоновской и имеет степенной интервал, что является следствием периодической синхронизации в модах Андерсона. Баллистическое распространение вводит вторую шкалу времени для скачков и ограничивает время циркуляции в модах Андерсона, что приводит к немонотонному распределению времён между скачками [7].

3.5 Многочастичная локализация в открытых квантовых системах

Явление многочастичной локализации (MBL) основано на балансе между локализацией Андерсона, вызванной интерференцией волн, и взаимодействием между квантовыми частицами. Ожидается, что диссипация размывает интерференцию и разрушает этот баланс, в результате чего асимптотическое состояние уже открытой квантовой системы с гамильтонианом MBL не несёт признаков локализации. Для случая эрмитовой дефазирующей диссипации это действительно так: асимптотическое состояние такой системы является тривиальным и имеет максимально возможную энтропию в системе [150–152]. В данном разделе будет продемонстрировано, что система MBL может быть переведена в специфическое асимптотическое состояние, с признаками локализации, используя физически реализуемые неэрмитовые диссипативные операторы [27], каждый из которых нетривиально действует на пару соседних сайтов решётки.

Гамильтониан системы с многочастичной локализацией описывает динамику $\frac{N}{2}$ бесспиновых фермионов на решётке размером N (N предполагается всегда чётным). Гамильтониан системы имеет вид [150–152]:

$$H = \sum_{n=1}^N h_n b_n^\dagger b_n + \sum_{n=1}^{N-1} b_n^\dagger b_n b_{n+1}^\dagger b_{n+1} - \sum_{n=1}^{N-1} \left(b_n^\dagger b_{n+1} + b_{n+1}^\dagger b_n \right), \quad (3.29)$$

где b_n и b_n^\dagger — операторы уничтожения и создания фермиона на n -ом сайте решётки соответственно, $b_n^\dagger b_n$ — оператор числа частиц на сайте n . В каждом узле решётки на фермионы действуют случайные потенциалы h_n (первое слагаемое в

правой части). Фермионы, которые находятся в соседних сайтах решётки, взаимодействуют между собой (второе слагаемое в правой части). Третье слагаемое в правой части отвечает за перемещение фермионов между сайтами решётки. Значения случайных потенциалов h_n равномерно распределены в интервале $[-h, h]$. Для данной системы известно [141], что переход к многочастичной локализации осуществляется при $h > h_{MBL} \approx 3.6$. Число состояний в системе определяется числом сочетаний $\frac{N}{2}$ из N :

$$S = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}\right)! \left(\frac{N}{2}\right)!}. \quad (3.30)$$

Открытая квантовая система описывается уравнением Линдблада (1.22) и (1.23). Унитарная эволюция осуществляется под воздействием гамильтониана (3.29). Если для описания взаимодействия с окружающей средой взять диссипативные операторы следующего вида [150–152]:

$$V_k = b_k^\dagger b_k, \quad (3.31)$$

то это приведёт систему в тривиальное асимптотическое состояние с максимальной энтропией: $\rho^A = \frac{\mathbb{1}}{S}$ (как и любые другие эрмитовые диссипаторы).

С другой стороны, чтобы привести систему в состояние, отличное от тривиального, можно использовать такие неэрмитовые диссипативные операторы V_i , которые гарантируют выполнения условия $V_i |\varphi_i\rangle = 0$, где $|\varphi_i\rangle$ — собственный вектор гамильтониана (3.29). В этом случае асимптотическое состояние равновесие будет нетривиальным: $\rho^A = |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$. Однако такие диссипаторы не являются физически реализуемыми. В качестве альтернативы будут рассматриваться экспериментально релевантные неэрмитовые диссипаторы [27]:

$$V_k = (b_k^\dagger + b_{k+1}^\dagger) (b_k - b_{k+1}), \quad (3.32)$$

аналогичные неэрмитовым диссипаторам, рассмотренным в модели Андерсона. Данный тип диссипаторов синхронизирует динамику на соседних сайтах, за счёт рециркуляции антисимметричных противофазных состояний в симметричные и синфазные. Их физическая реализация предложена в работе [162].

В общем случае будет рассмотрена ситуация, когда в системе одновременно есть оба типа диссипации — (3.31) и (3.32) со скоростями γ^d и γ^l соответственно. В этом случае общее количество диссипаторов будет $K = 2N - 1$ (N дефазирующих и $N - 1$ неэрмитовых).

Для наблюдения за сходимостью матрицы плотности к асимптотическому состоянию использовалось численное интегрирование уравнения (1.23). В качестве начального условия рассматривается состояние $\rho(t_0) = |\varphi(t_0)\rangle \langle \varphi(t_0)|$, где $|\varphi(t_0)\rangle = |1010\dots 10\rangle$ — состояние, при котором все фермионы находятся в нечётных сайтах решётки. Для отыскания асимптотического состояния равновесия ρ^A использовались спектральные методы для отыскания собственного вектора, который соответствует нулевому собственному числу Линдбладана L в уравнении (1.23) [50–52]. Используя данный метод были получены результаты для $N = 8$ и 10 (число состояний системы $S = 70$ и 252 соответственно (3.30)). Анализ систем с $N > 10$ были выполнен соавторами основополагающей работы [8] и также будет представлен в данном разделе для полноты приводимых результатов по многочастичной локализации в открытых квантовых системах. Количество случайных реализаций беспорядка: $N_r = 10^4$ для $N = 8$, $N_r = 4 \cdot 10^3$ для $N = 10, 16$.

Одной из характеристик, позволяющим численно оценивать многочастичную локализацию является дисбаланс (imbalance), который вычисляется следующим образом:

$$\mathcal{I}(t) = \frac{\mathcal{N}_o(t) - \mathcal{N}_e(t)}{N/2}, \quad (3.33)$$

где $\mathcal{N}_o(t)$ и $\mathcal{N}_e(t)$ — количество фермионов на нечётных и чётных сайтах решётки в момент времени t соответственно. Данная характеристика измеряется в реальных экспериментах [146–148; 157].

В случае, когда в системе есть только дефазирующая диссипация ($\gamma^d \neq 0$, $\gamma^l = 0$), асимптотическое значение дисбаланса равно нулю, что следует из вида асимптотической матрицы плотности $\rho^A = \frac{\mathbb{1}}{S}$, диагональные элементы которой соответствуют вероятности нахождения системы в заданном состоянии. Когда диссипация неэрмитова ($\gamma^d = 0$, $\gamma^l \neq 0$), асимптотическое состояние зависит от текущей реализации беспорядка в системе, а асимптотический дисбаланс является случайной величиной. Дисбаланс можно рассматривать как сумму, состоящую из $\frac{N}{2}$ случайных величин $\xi_n = o_{2n-1} - o_{2n}$ ($n = 1, \dots, \frac{N}{2}$), где o_n — заселённость n -го узла. Поскольку данные случайные величины являются коррелированными, их суммы не подчиняются центральной предельной теореме [165]. Исследуем теперь функцию плотности распределения вероятности дисбаланса $P(\mathcal{I})$ в зависимости от параметра беспорядка h . Для разных размеров

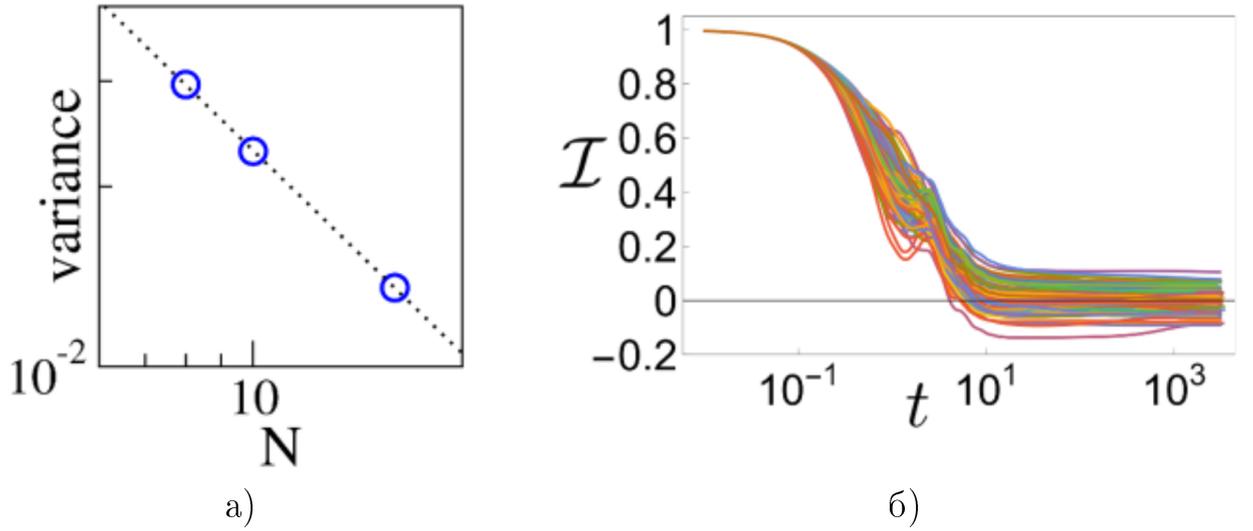


Рисунок 3.17 — (а): Масштабирование дисперсии распределения $P(\mathcal{I})$ для силы беспорядка $h = 3$, чёрная пунктирная линия — степенной закон $N^{2\beta_h}$; (б): Эволюция имбаланса для 100 реализаций беспорядка с $h = 20$ и $N = 32$.

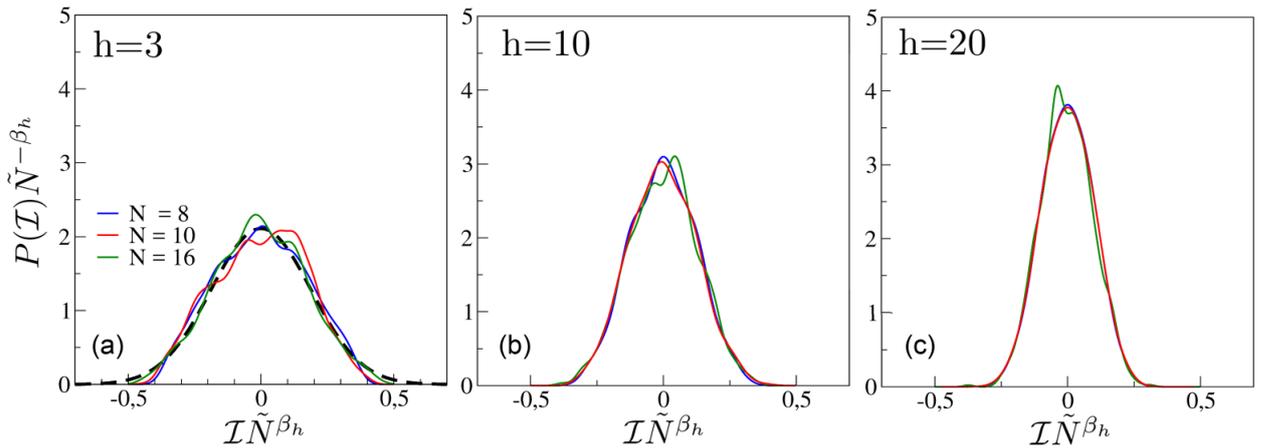


Рисунок 3.18 — Функция распределение вероятностей дисбаланса \mathcal{I} для различных значений силы беспорядка h и количества фермионов в системе с учётом шкалирования (3.34) относительно значения $\tilde{N} = \frac{N}{8}$. Значения степени шкалирования $\beta_h = 0.55$ для $h = 3$ и $\beta_h = 0.8$ для $h = 10, 20$.

систему введём следующую систему шкалирования:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\rightarrow N^{\beta_h} \mathcal{I}, \\ P(\mathcal{I}) &\rightarrow \frac{P(N^{\beta_h} \mathcal{I})}{N^{\beta_h}}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где β_h является функцией от беспорядка h ($\beta_h = \frac{1}{2}$ соответствует случаю, когда выполняется центральная предельная теорема). Значения экспоненты могут быть оценены путём вычисления дисперсии $P(\mathcal{I})$ для различных N и затем аппроксимации полученной зависимости степенным законом $N^{2\beta_h}$ (рисунок 3.17а).

Было обнаружено, что для эргодического режима ($h = 3$) значение $\beta_h = 0.55$, для режима многочастичной локализации ($h = 10, 20$) значение $\beta_h = 0.8$. На рисунке 3.18 изображено шкалирование (3.34) для разных значений беспорядка h и разного количества фермионов в системе. Шкалирование выполнялось относительно значения $\tilde{N} = \frac{N}{8}$. Для дополнительного исследования рассмотрим некоторое множество случайных независимых наблюдаемых $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, с равномерным распределением, нормировкой на сумму выбранных случайных значений: $\sum_{n=1}^N x_n = \frac{N}{2}$ и ограничением: $\forall x_n < 1$ (не более одной частицы на одном сайте решётки). Результат выборки для такого распределения для $N = 16$ представлен на рисунке 3.18 для случая $h = 3$ (пунктирная линия) и хорошо согласуется с кривой для плотности вероятности дисбаланса.

Второй характеристикой, которая будет использоваться для изучения явления многочастичной локализации в открытых квантовых системах, является энтропия запутанности операторного пространства (OSEE — operator—space entanglement entropy). Обозначается как S^\natural . Эта характеристика впервые была введена в работе [166] как операторное обобщение энтропии пространственной запутанности (определённой для чистых состояний). Для вычисления OSEE необходимо разбить цепочку на две (в случае рассматриваемой MBL системы — равные) части и вычислить разложение Шмидта матрицы плотности:

$$\rho = \sum_k \sqrt{\mu_k} C_k \otimes D_k, \quad (3.35)$$

где операторы C_k и D_k нетривиально действуют на левую и правую подсистемы и образуют полный базис Гильберта—Шмидта в соответствующем подпространстве. Нормированные коэффициенты $\bar{\mu}_k$ определяют значение OSEE:

$$S^\natural = - \sum_k \bar{\mu}_k \log_2 \bar{\mu}_k. \quad (3.36)$$

Если квантовая система находится в чистом состоянии, то значение OSEE вдвое превышает значение стандартной энтропии запутанности [167].

Было обнаружено, что в эргодической фазе (когда $h = 3$) усреднённое по беспорядку значение OSEE \bar{S}^\natural со временем насыщается до значения $S^\natural(\mathbb{1})$, когда все состояния системы равновероятны (рисунок 3.19а). То есть наступает эффективная термализация системы, при отсутствии дефазирующей диссипации. Энтропия запутанности операторного пространства зависит от текущей реализации беспорядка в системе и от реализации к реализации группируется возле определённого, не максимального значения (рисунок 3.19а, вставка).

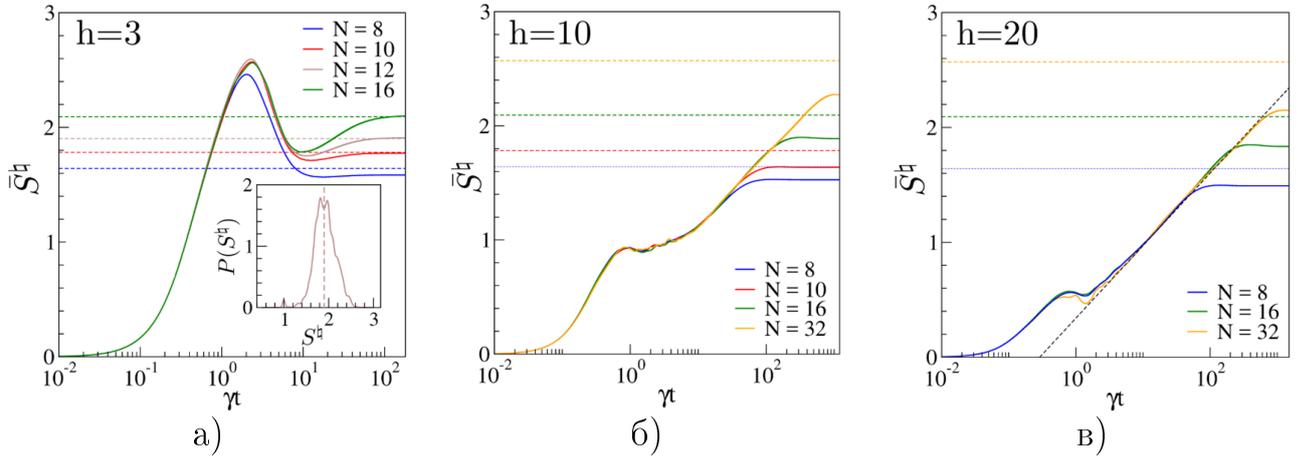


Рисунок 3.19 — Усредненное значение энтропии запутанности операторного пространства (OSEE) $S^h(t)$ как функции времени для $h = 3$ (а), $h = 10$ (б), $h = 20$ (в). Цветные пунктирные линии соответствуют значениям OSEE для термализованной системы. Вставка для случая $h = 3$ — функция плотности вероятности распределения OSEE для $N = 12$. Чёрная пунктирная линия на рисунке для $h = 20$ соответствует закону $\frac{1}{2} \log_2(t) + const$.

Эволюция во времени OSEE начинается с роста, который, при отсутствии диссипации в системе, достиг бы предельного значения $S_{\text{lim}}^h = N - 1$ [168]. Однако, после момента времени $t = \gamma^{-1}$ вклад диссипативной части линдбладана (1.22) становится значительным и в конечном итоге приводит OSEE к асимптотическому значению $S^h(\rho^A) \ll S_{\text{lim}}^h$.

В случае, когда в системе наблюдается многочастичная локализация ($h = 10, 20$), усреднённое значение OSEE со временем сходится к значению, меньшему чем $S^h(\mathbb{1})$ (рисунок 3.19б и 3.19в). Это объясняется тем, в эргодической фазе все (даже удалённые) узлы «связаны» сохранением полного числа частиц (полного спина), в фазе MBL корреляции являются короткодействующими и ограничиваются длиной локализации [141]. Следовательно, квантовая запутанность является короткодействующей в случае многочастичной локализации. Примечательно, что, как и в случае энтропии запутанности в гамильтоновом случае [134–136; 140], релаксация OSSE до асимптотического значения сопровождается логарифмическим ростом $S^h \sim \log(t)$ (чёрная пунктирная линия на рисунке 3.19в) — свойством, обнаруженным ранее в работе [152], где рассматривалась открытая модель MBL с дефазирющей диссипацией.

Третьей характеристикой для изучения многочастичной локализации является соотношение последовательных уровней r (RCLS — ratio of consecutive

level spacing) для асимптотической матрицы плотности. Согласно теории квантового хаоса [71], одной из общепризнанных характеристик квантового хаоса является статистика уровней собственных энергий:

$$\delta_j = \lambda_{j+1} - \lambda_j, \quad (3.37)$$

где множество $\{\lambda_j\}$ — отсортированные по возрастанию собственные числа гамильтониана системы. Если статистика уровней собственных энергий совпадает с распределением Пуассона, то динамика в системе является регулярной. Если же распределение собственных энергий совпадает с распределением Вигнера—Дайсона, то в системе есть квантовый хаос. Следуя этому, можно ожидать, что в эргодической фазе будет иметь место распределение Вигнера—Дайсона и в случае многочастичной локализации будет распределение Пуассона [139; 140]. Однако, данные критерии предполагают однородную плотность уровней собственных энергий, что не выполняется для рассматриваемой модели (3.29). Чтобы обойти данное ограничение, рассматривается распределение соотношений r_j , которые определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_j &= \lambda_{j+1} - \lambda_j, \\ z_j &= \frac{\delta_{j+1}}{\delta_j}, \\ r_j &= \min\left(z_j, \frac{1}{z_j}\right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где λ_j - собственные числа рассматриваемой матрицы. Распределения r_j не зависят от локальной плотности уровней [139]. Из литературы [169] известны значения RCLS (3.38) для случайных величин с распределением Пуассона, для случайных матриц [170] из гауссова ортогонального ансамбля (GOE — Gaussian orthogonal ensembles) и случайных матриц из гауссова унитарного ансамбля (GUE — Gaussian unitary ensembles):

Таблица 1 — Значения среднего соотношения последовательных уровней для случайных матриц

Тип распределения	r
Poisson	0.386
GOE	0.536
GUE	0.603

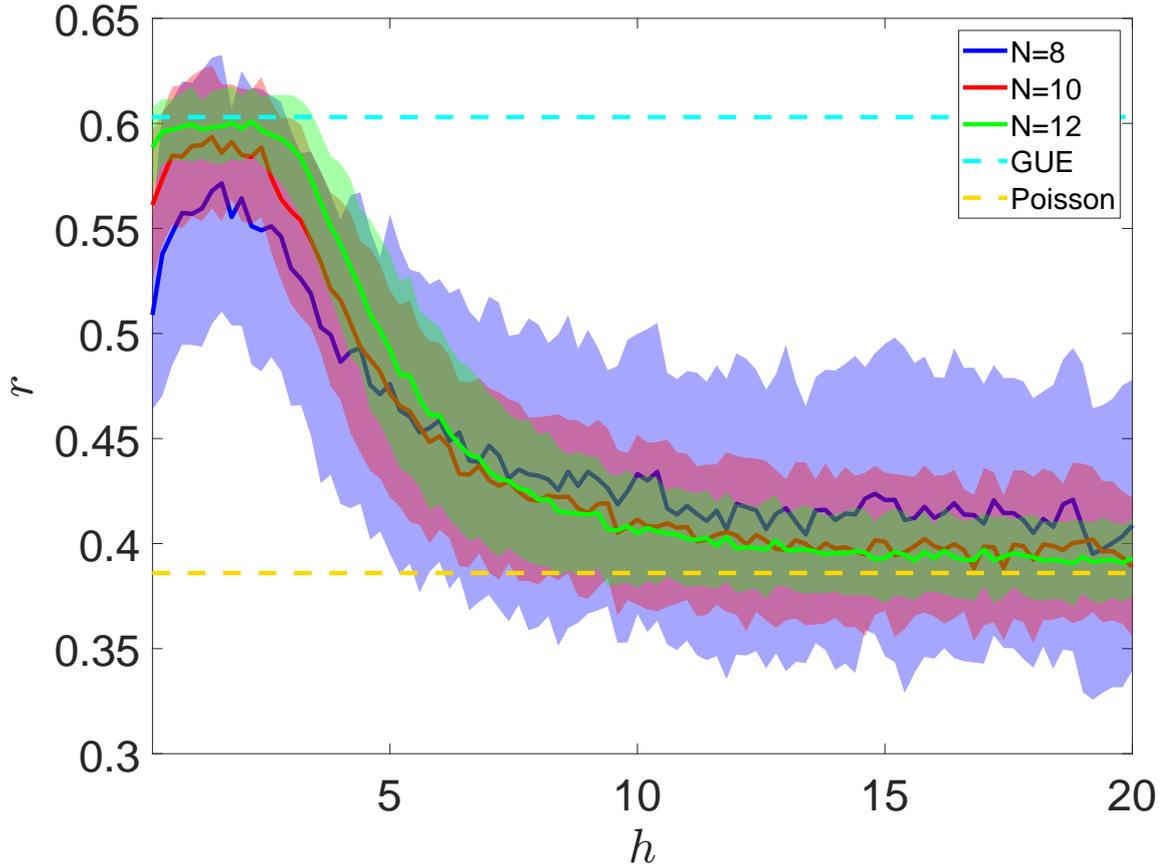


Рисунок 3.20 — Соотношение последовательных уровней (3.38) для асимптотической матрицы плотности ρ^A в зависимости от силы беспорядка h . Сплошными линиями обозначено усреднённое значение r по $N_r = 100$ реализациям беспорядка для каждого значения h . Области соответствующего цвета обозначают стандартное отклонение распределения r . Пунктирные линии соответствуют значениям $r_{Poisson}$ и r_{GUE} (таблица 1).

В работе [78] было обнаружено, что переход от регулярной динамики к хаотической соответствует переходу от распределения Пуассона к GUE. Для данной системы было обнаружено, что в эргодической фазе ($h = 3$) значения RCLS (3.38) для асимптотической матрицы плотности ρ^A группируется возле r_{GUE} , а в случае сильной многочастичной локализации ($h = 20$) значения r приближаются к $r_{Poisson}$ (рисунок 3.20). Это соответствие улучшается с увеличением N .

Так же была рассмотрена структура асимптотических матриц плотности. В эргодической фазе $h = 3$ наблюдается хорошо развитая недиагональная структура (рисунок 3.21a), а в случае многочастичной локализации — имеет место почти диагональная структура (рисунок 3.21b) похожая на ту, которая была обнаружена в разделе 3.2 и соответствующей работе [5].

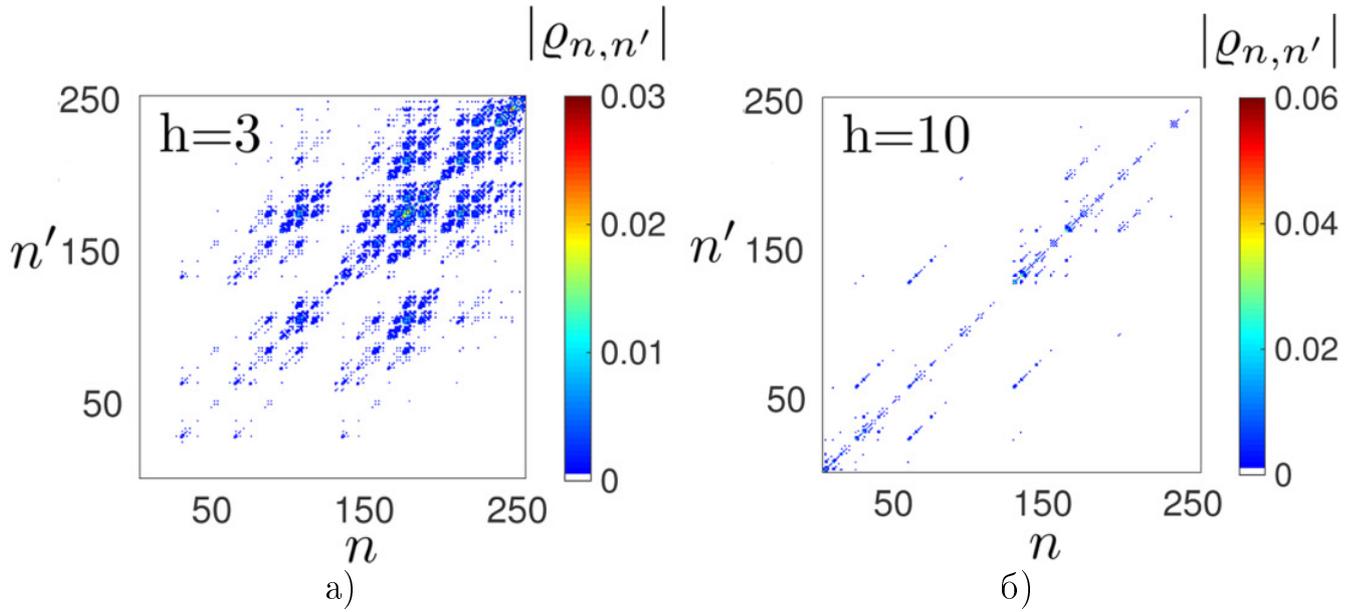


Рисунок 3.21 — Абсолютные значения асимптотической матрицы плотности ρ^A для отдельно взятой реализации беспорядка и силы беспорядка $h = 3$ (а) и $h = 10$ (б). На рисунках отмечены только элементы, большие 10^{-5} .

Рассмотрим теперь ситуацию, когда в системе есть оба типа диссипации: дефазирующая (3.31) с $\gamma^d = 0.1$ и неэрмитова диссипация с $\gamma^l = 0.1$. На рисунке 3.22 изображена эволюция во времени энтропии запутанности операторного пространства для данного случая (сплошные линии). Пунктирные линии соответствуют значениям S^{\natural} для термализованной системы, в которой есть только неэрмитова диссипация (рисунок 3.19). Из графика видно, что OSEE асимптотической матрицы плотности ρ^A немного изменяется в фазе многочастичной локализации $h = 10, 20$ и остаётся постоянной в эргодической фазе $h = 3$ при наличии в системе дефазирующей диссипации. Также на вставке рисунка 3.22 для случая со смешанной диссипацией оранжевой сплошной линией изображена эволюция соотношения последовательных уровней (3.38) для асимптотической матрицы плотности ρ^A в зависимости от силы беспорядка h . Данная зависимость практически идентична случаю с отсутствием дефазирующей диссипации (рисунок 3.20) - красная пунктирная линия на вставке. Таким образом, если ввести в систему с дефазировкой неэрмитовую диссипацию вида (3.32) можно восстановить особенности локализации в открытых квантовых системах с MBL гамильтонианом.

В данном разделе были представлены три количественных идентификатора многочастичной локализации (MBL) в открытых квантовых системах.

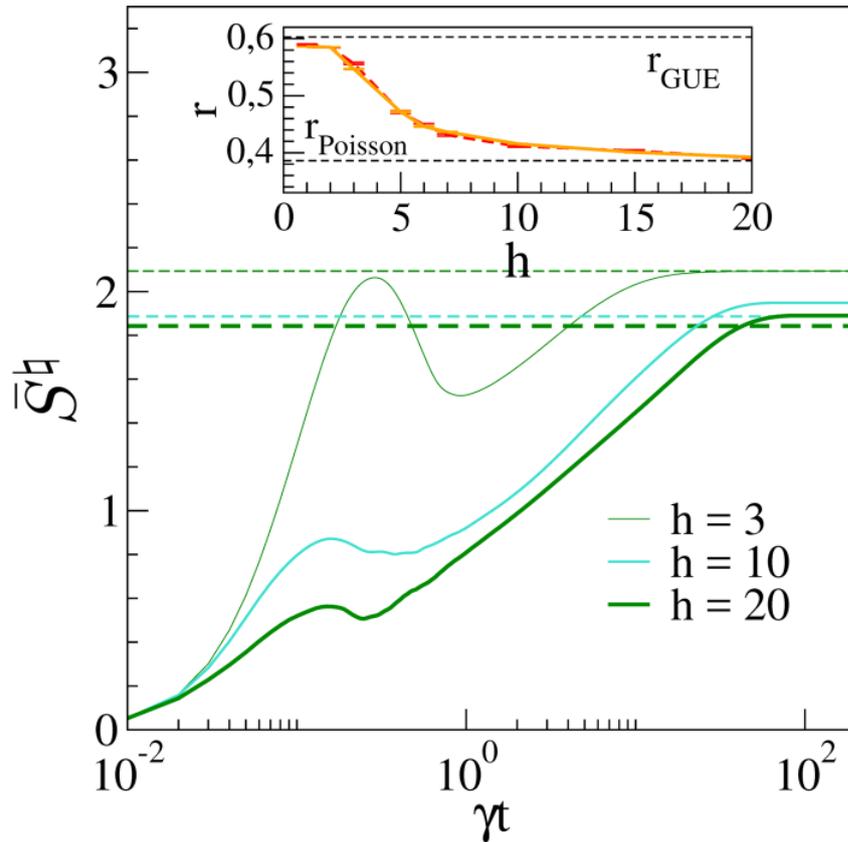


Рисунок 3.22 — Эволюция во времени энтропии запутанности операторного пространства для смешанной диссипации (дефазирующая и неэрмитовая) — сплошные линии, пунктирные линии — значения S^h для термализованной системы, в которой есть только неэрмитовая диссипация. Размер системы $N = 16$. Вставка — соотношение последовательных уровней (3.38) для асимптотической матрицы плотности ρ^A в зависимости от силы беспорядка h для смешанной диссипации (оранжевая сплошная линия) и неэрмитовой диссипации (красная пунктирная линия).

Статистика дисбаланса может быть измерена в реальных физических экспериментах [146—148; 157], но требует изучения систем разных размеров. Энтропия запутанности операторного пространства (OSEE) указывает на различия между эргодической фазой и многочастичной локализацией как в асимптотическом пределе, так и в процессе релаксации к нему. Соотношение последовательных уровней (RCLS) для асимптотической матрицы плотности связывает многочастичную локализацию и теорию квантового хаоса [71; 78]. Неэрмитовая диссипация, нетривиально действующая на соседних сайтах пытается построить классические и квантовые корреляции между далеко расположенными сайтами, и достаточно слабая дефазировка не может их разрушить. В то же время механизмы MBL, индуцированные гамильтонианом, пытаются ограни-

чить корреляции длиной локализации. В результате баланса между этими факторами возникает асимптотическое состояние со следами многочастичной локализации.

3.6 Многочастичная локализация и диссипативный квантовый хаос

Для изучения взаимосвязи многочастичной локализации и диссипативного квантового хаоса исследовалась та же самая модель (1.22), (1.23), (3.29) и (3.32) из раздела 3.5, описывающая динамику $\frac{N}{2}$ бесспиновых фермионов на решётке размером N . В данном разделе исследуется вопрос о типе динамики (регулярная или хаотическая) в различных состояниях этой модели. Рассматриваются два подхода классификации динамики системы. Первый из них основан на спектральных свойствах генераторов открытой квантовой эволюции [171] — комплексные интервальные соотношения (CSR), а второй — старший квантовый показатель Ляпунова [2], предложенный в рамках данной работы и описанный в разделе 2.3.

Для вычисления CSR сначала диагонализуется Линдбладдиан $L(t)$ (1.23) и вычисляются его собственные числа $\{\lambda_k\}_{k=1}^S$. Далее, для каждого λ_k ищется его ближайшее соседнее (NN) собственное значение, λ_k^{NN} , и ближайшее к ближайшему (NNN) соседнее собственное значение λ_k^{NNN} , используя стандартную евклидову норму. Для данной тройки значений комплексные интервальные соотношения (CSR) вычисляется следующим образом:

$$z_k = \frac{\lambda_k^{NN} - \lambda_k}{\lambda_k^{NNN} - \lambda_k}. \quad (3.39)$$

Значения CSR ограничены кругом единичного радиуса, являющимся областью определения соответствующей функции плотности вероятности $P_{\text{CSR}}(z) := P_{\text{CSR}}[\text{Re}(z), \text{Im}(z)]$. В оригинальной работе [171] распределение CSR используется для классификации динамики различных систем на регулярную и хаотическую. В случае хаотических систем собственные значения коррелированы и приводят к подковообразным распределениям плотности CSR с низкой плотностью вблизи точек $\{\text{Re}(z) = 0, \text{Im}(z) = 0\}$ и $\{\text{Re}(z) = 1, \text{Im}(z) = 0\}$. В

случае регулярной динамики собственные числа независимы, что приводит к практически равномерной плотности распределения CSR.

Для вычисления квантового показателя Ляпунова для каждой из 100 случайных реализаций беспорядка в гамильтониане (3.29) использовались 100 квантовых траекторий, которые сначала достигали асимптотического режима ($t^A = 10^2\tau$) и наблюдались ещё в течении ($t^O = 10^2\tau$). Стартовое отклонение между траекториями для вычисления показателя Ляпунова $\Delta_S = 10^{-6}$, а период перенормировки $\tau = 10$.

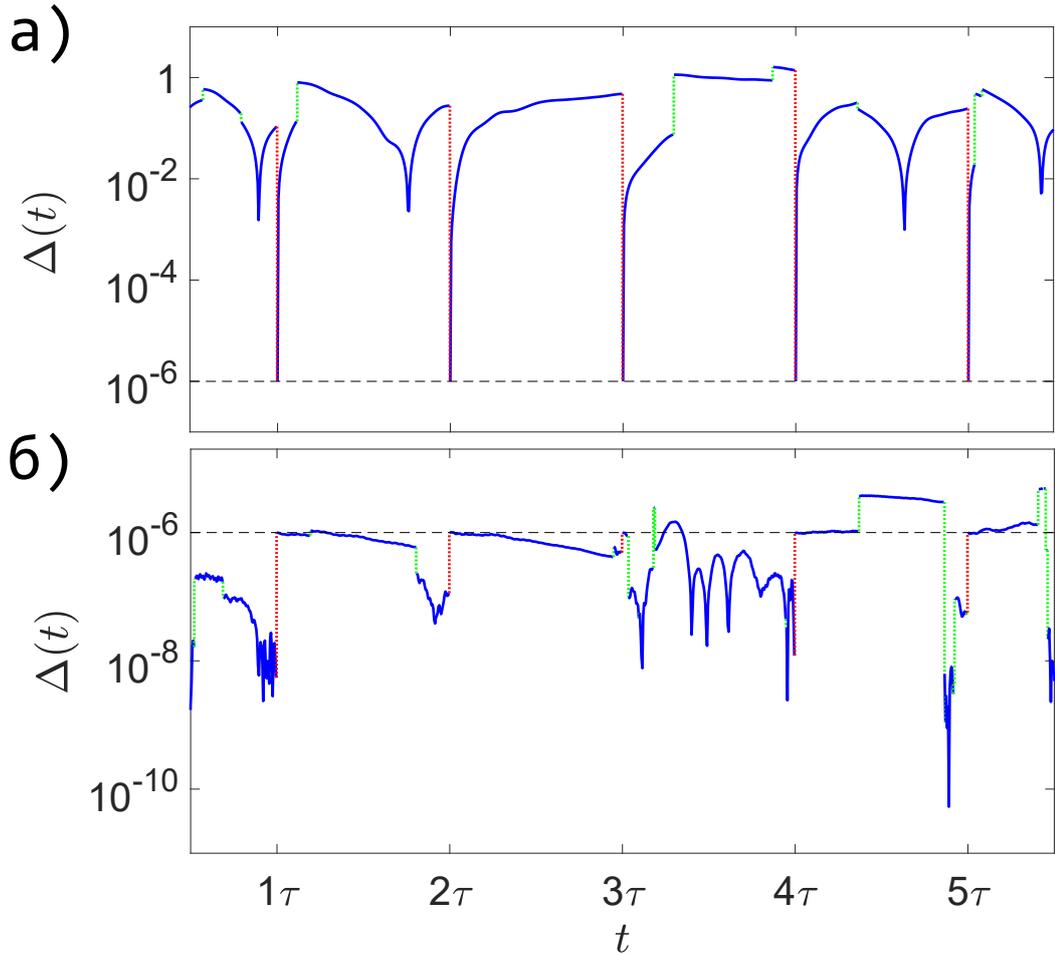


Рисунок 3.23 — Эволюция расстояния (в терминах наблюдаемой энергии (2.19)) между квантовыми траекториями при вычислении квантового показателя Ляпунова для модели MBL в эргодической $h = 1$ (а) и MBL фазе $h = 20$ (б). Синие сплошные линии соответствуют неэрмитовой эволюции с гамильтонианом (1.24). Зелёные пунктирные линии соответствуют квантовым скачкам. Красные пунктирные линии отмечают события перенормировки и вычисления локальных факторов роста (2.21) в моменты времени $t_k = k\tau$. $\Delta_S = 10^{-6}$ обозначена чёрной пунктирной линией.

На рисунке 3.23 представлена эволюция расстояния между исходной $\psi_B(t)$ и варьируемой $\psi_V(t)$ квантовыми траекториями в модели MBL с размером решётки $N = 8$. Расходимость Δ увеличивается относительно начального значения $\Delta_S = 10^{-6}$ в эргодической фазе (что приводит к положительной экспоненте Ляпунова), и уменьшается в фазе MBL (приводит к отрицательной экспоненте Ляпунова).

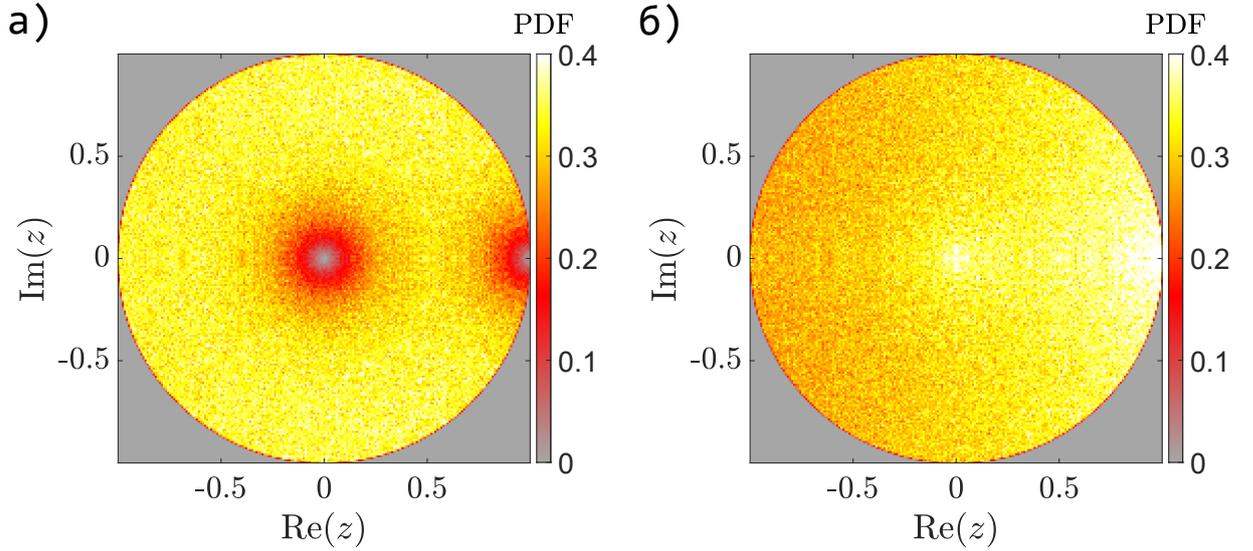


Рисунок 3.24 — Плотность распределения значений CSR (3.39) для модели MBL с $N = 8$ сайтами: (а) $h = 1$; (б) $h = 20$.

На рисунке 3.24 изображена плотность распределения значений CSR для модели MBL, которая в эргодической фазе $h = 1$ (а) имеет подковообразный вид, что характерно для хаотической динамики [171]. В фазе MBL $h = 20$ (б) распределение становится более равномерным, что характерно для регулярной динамики.

На рисунке 3.25 Приведена зависимость усреднённого по случайным реализациям беспорядка старшего квантового показателя Ляпунова (а) и зависимость проекции $\text{Im}(z) = 0$ значений CSR (б) от величины беспорядка h . В эргодической фазе (при малых значениях h) обе характеристики свидетельствуют о хаотической динамике в системе, в то время как в MBL фазе (большие значения h) динамика является регулярной.

Вычисление значений CSR значительно сложнее с точки зрения времени вычислений и ресурсов памяти, поскольку требует диагонализации матрицы Линдбладана размером $S^2 \times S^2$, где S - число состояний в системе. В отличие от этого, квантовый показатель Ляпунова требует численного интегрирования S дифференциальных уравнений и допускает прямое распараллеливание.

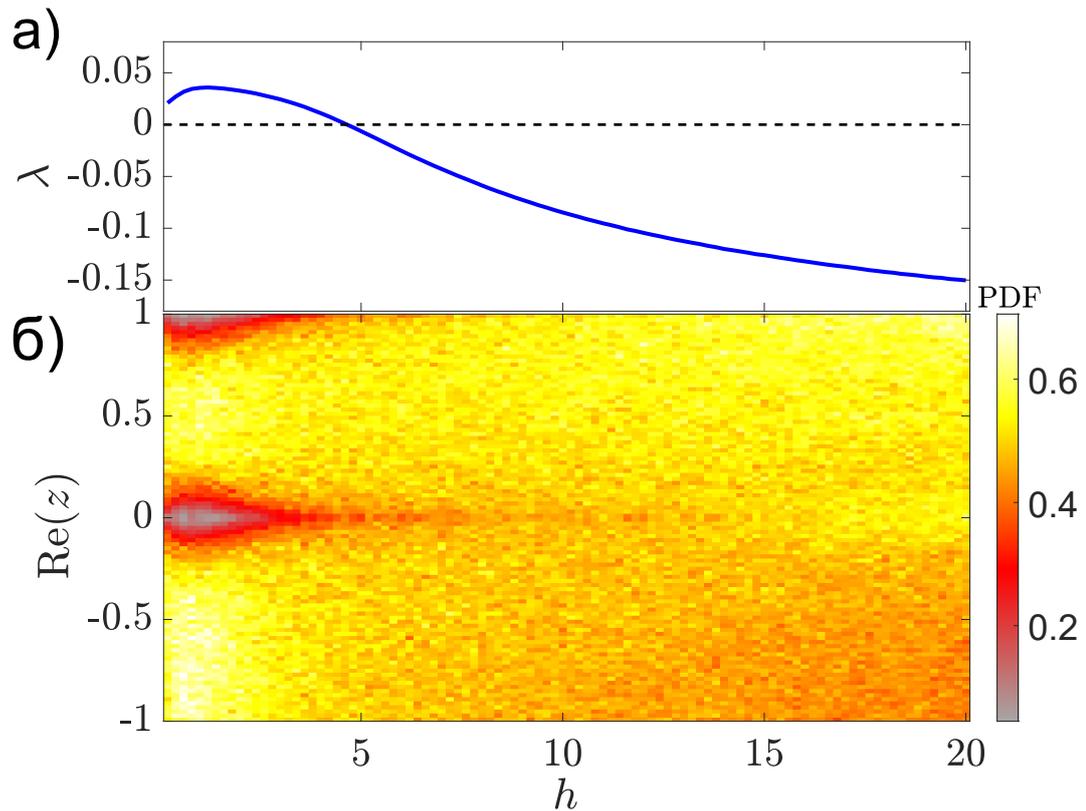


Рисунок 3.25 — (а) Квантовый старший показатель Ляпунова для модели MBL в зависимости от силы беспорядка h . Для каждого значения h производилось усреднение по 10^2 реализациям беспорядка. Для каждой реализации беспорядка 10^2 квантовых траекторий используются для вычисления показателя Ляпунова. (б) Проекция ($\text{Im}(z) = 0$) значений CSR в зависимости от силы беспорядка h . Проекция получена в пределах полосы $|\text{Im}(z)| \leq 0.05$. Число сайтов в модели $N = 8$.

Обе метрики являются согласованными и позволили установить связь между переходом к многочастичной локализации и переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике [9].

3.7 Выводы по главе

В данной главе численно исследовался феномен локализации в открытых квантовых системах.

- Обнаружено явление Андерсоновской локализации в открытых квантовых системах. Диссипация может быть использована для создания

нетривиальных устойчивых состояний, в которых доминируют несколько локализованных андерсоновских мод пространственно-неоднородного гамильтониана [5].

- В открытой квантовой системе с локализацией Андерсона существует механизм управления асимптотическим состоянием системы. Оно может быть локализовано в любом месте спектра гамильтониана, за счёт управляемой синтетической диссипации. Полученные таким образом состояния являются устойчивыми к дефазирующей диссипации [6].
- В открытой квантовой системе с локализацией Андерсона существуют различные типы распространения волновых пакетов. В частности, баллистический режим, вызванный суммарным взаимодействием беспорядка и диссипации [7].
- При введении специальной физически релевантной диссипации в модель с многочастичной локализацией, система будет сходиться в новое нетривиальное асимптотическое состояние, которое может иметь следы многочастичной локализации (индуцированной свойствами многочастичного гамильтониана), даже в присутствии локальной декогеренции. Предложены новые численные критерии для детектирования многочастичной локализации — статистика дисбаланса, энтропия запутанности операторного пространства и соотношение последовательных уровней для асимптотической матрицы плотности [8].
- Впервые обнаружена связь между переходом к многочастичной локализации и переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике [9].

Заключение

Основные результаты проведённого исследования можно кратко сформулировать следующим образом:

1. Впервые обнаружен квантовый аналог классической бифуркации Неймарка—Сакера (рождение тора из-за неустойчивости предельного цикла) в математической модели открытого периодически модулируемого квантового димера. Предложены качественные и количественные характеристики данного явления [1].
2. Впервые предложен и программно реализован [96] новый численный алгоритм нахождения старшего квантового показателя Ляпунова, основанный на методе квантовых траекторий. Данный подход позволяет выявить сложную структуру регулярных и хаотических областей, дать количественную оценку диссипативному квантовому хаосу. Как и классический старший показатель Ляпунова, его квантовый аналог становится положительным в случае хаотической динамики системы [2].
3. Впервые предложены новые количественные характеристики диссипативного квантового хаоса, которые могут наблюдаться в реальном физическом эксперименте [3]. Для широкого класса квантовых систем было показано, что в регулярном и хаотическом режимах наблюдается качественно различная статистика распределения времён между последовательными излучениями системой отдельных фотонов. При переходе в режим квантового хаоса распределение времени ожидания фотона становится существенно не пуассоновским, появляется степенная асимптотика.
4. В модели открытого квантового резонатора со спином исследована сложная динамика, которая возникает в результате взаимодействия между периодическими модуляциями, диссипативными механизмами и взаимодействием между фотонной и спиновой подсистемами [4]. Данное взаимодействие при определённых параметрах может приводить систему как в хаотическое, так и регулярное состояние.
5. Исследовано явление одночастичной локализации в асимптотических состояниях открытых квантовых систем [5]. Разработан метод управ-

- ления локализационными свойствами получаемого квантового аттрактора [6] — асимптотическое состояние может быть локализовано в любом месте спектра гамильтониана за счёт управляемой синтетической диссипации. В рассматриваемой модели изучены механизмы распространения волновых пакетов отдельных квантовых траекторий в асимптотическом режиме [7].
6. Исследовано явление многочастичной локализации в асимптотических состояниях открытых квантовых систем. Было установлено, что следы многочастичной локализации сохраняются даже в присутствии дефазирющей диссипации. Предложены новые численные критерии для детектирования многочастичной локализации — статистика дисбаланса, энтропия запутанности операторного пространства и соотношение последовательных уровней для асимптотической матрицы плотности [8]. Впервые обнаружена связь между переходом к многочастичной локализации и переходом от квантового диссипативного хаоса к регулярной динамике [9].
 7. Разработан программный комплекс [13; 96], осуществляющий численное моделирование открытых квантовых систем с большим числом состояний, включающий в себя возможность анализа отдельных квантовых траекторий, поиск асимптотических состояний системы путём численного интегрирования и поиска собственного состояния системы. В программном комплексе реализован новый численный алгоритм, осуществляющий вычисление старшего квантового показателя Ляпунова.
- Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 0729–2020–0055).

Список литературы

1. *Yusipov I. I., Ivanchenko M. V.* Quantum Neimark-Sacker Bifurcation // Scientific Reports. — 2019. — Dec. — Vol. 9, no. 1. — P. 17932.
2. Quantum Lyapunov Exponents beyond Continuous Measurements / I. I. Yusipov [et al.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2019. — June. — Vol. 29, no. 6. — P. 063130.
3. Photon Waiting-Time Distributions: A Keyhole into Dissipative Quantum Chaos / I. I. Yusipov [et al.] // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2020. — Feb. — Vol. 30, no. 2. — P. 023107.
4. *Yusipov I. I., Denisov S. V., Ivanchenko M. V.* Chaotic Spin-Photonic Quantum States in an Open Periodically Modulated Cavity // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2021. — Jan. — Vol. 31, no. 1. — P. 013112.
5. Localization in Open Quantum Systems / I. Yusipov [et al.] // Physical Review Letters. — 2017. — Feb. — Vol. 118, no. 7. — P. 070402.
6. Control of a Single-Particle Localization in Open Quantum Systems / O. S. Vershinina [et al.] // EPL (Europhysics Letters). — 2017. — Sept. — Vol. 119, no. 5. — P. 56001.
7. *Yusipov I. I., Laptyeva T. V., Ivanchenko M. V.* Quantum Jumps on Anderson Attractors // Physical Review B. — 2018. — Jan. — Vol. 97, no. 2. — P. 020301.
8. Signatures of Many-Body Localization in Steady States of Open Quantum Systems / I. Vakulchyk [et al.] // Physical Review B. — 2018. — July. — Vol. 98, no. 2. — P. 020202.
9. *Yusipov I. I., Ivanchenko M. V.* Quantum Lyapunov Exponents and Complex Spacing Ratios: Two Measures of Dissipative Quantum Chaos // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2022. — Apr. — Vol. 32, no. 4. — P. 043106.
10. Spectroscopic signatures of localization with interacting photons in superconducting qubits / P. Roushan [et al.] // Science. — 2017. — Nov. — Vol. 358, no. 6367. — P. 1175—1179.

11. Digital quantum simulation of fermionic models with a superconducting circuit / R. Barends [et al.] // Nature Communications. — 2015. — July. — Vol. 6, no. 1.
12. Quantum Dynamical Semigroups and Applications. Vol. 717. — Berlin, Heidelberg, 2007. — (Lecture Notes in Physics).
13. Unfolding a Quantum Master Equation into a System of Real-Valued Equations: Computationally Effective Expansion over the Basis of SU(N) Generators / A. Liniov [et al.] // Physical Review E. — 2019. — Nov. — Vol. 100, no. 5. — P. 053305.
14. *Plenio M. B., Knight P. L.* The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics // Reviews of Modern Physics. — 1998. — Jan. — Vol. 70, no. 1. — P. 101—144.
15. Локализация в открытых квантовых системах / И. И. Юсипов [и др.] // 22-я Нижегородская сессия молодых ученых (естественные, математические науки). — 2017. — С. 205—207.
16. *Юсипов И. И., Иванченко М. В., Денисов С. В.* Квантовые аттракторы в системах с беспорядком // Труды XXI научной конференции по радиофизике. — 2017. — С. 172—176.
17. Локализация в открытых квантовых системах с беспорядком / И. И. Юсипов [и др.] // Сборник тезисов участников форума "Наука будущего - наука молодых". — 2017. — С. 242—244.
18. Asymptotic states in disordered open quantum systems: localization and dynamics / I. Yusipov [et al.] // International Conference "Shilnikov Workshop-2017". — 2017. — P. 45—46.
19. Квантовые бифуркационные диаграммы / И. И. Юсипов [и др.] // 23-я Нижегородская сессия молодых учёных (технические, естественные, математические науки). — 2018. — С. 212—213.
20. *Юсипов И. И., Иванченко М. В., Кузнецов С. П.* Численные характеристики «хаотической» динамики открытых квантовых систем // Труды XXII научной конференции по радиофизике, посвященной 100-летию Нижегородской радиолaborатории. — 2018. — С. 239—241.
21. *Юсипов И. И., Иванченко М. В., Кузнецов С. П.* Численные критерии квантового диссипативного хаоса // Нанoeлектроника, нанофотоника и

- нелинейная физика. Сборник трудов XIII Всероссийской конференции молодых ученых. — 2018. — С. 373—374.
22. *Yusipov I., Ivanchenko M., Denysov S.* Neimark-sacker bifurcation in periodically modulated open quantum dimer // 9th International Scientific Conference on Physics and Control (PhysCon2019). — 2019. — P. 306—308.
 23. *Юсипов И. И., Иванченко М. В.* Количественная оценка диссипативного квантового хаоса по статистике времен между квантовыми скачками // Труды XXIV научной конференции по радиоп физике, посвященной 75-летию радиоп физического факультета. — 2020. — С. 197—200.
 24. Cavity quantum electrodynamics / H. Walther [et al.] // Reports on Progress in Physics. — 2006. — Apr. — Vol. 69, no. 5. — P. 1325—1382.
 25. *Aspelmeyer M., Kippenberg T. J., Marquardt F.* Cavity optomechanics // Reviews of Modern Physics. — 2014. — Dec. — Vol. 86, no. 4. — P. 1391—1452.
 26. *Feurer T.* Spatiotemporal Coherent Control of Lattice Vibrational Waves // Science. — 2003. — Jan. — Vol. 299, no. 5605. — P. 374—377.
 27. Quantum states and phases in driven open quantum systems with cold atoms / S. Diehl [et al.] // Nature Physics. — 2008. — Sept. — Vol. 4, no. 11. — P. 878—883.
 28. *Budich J. C., Zoller P., Diehl S.* Dissipative Preparation of Chern Insulators // Physical Review A. — 2015. — Apr. — Vol. 91, no. 4. — P. 042117.
 29. *Spiller T., Ralph J.* The emergence of chaos in an open quantum system // Physics Letters A. — 1994. — Nov. — Vol. 194, no. 4. — P. 235—240.
 30. *Brun T. A., Percival I. C., Schack R.* Quantum chaos in open systems: a quantum state diffusion analysis // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1996. — May. — Vol. 29, no. 9. — P. 2077—2090.
 31. Asymptotic Floquet states of open quantum systems: the role of interaction / M. Hartmann [et al.] // New Journal of Physics. — 2017. — Aug. — Vol. 19, no. 8. — P. 083011.
 32. Classical Bifurcation Diagrams by Quantum Means / M. V. Ivanchenko [et al.] // Annalen der Physik. — 2017. — July. — Vol. 529, no. 8. — P. 1600402.

33. Classical counterparts of quantum attractors in generic dissipative systems / G. G. Carlo [et al.] // *Physical Review E*. — 2017. — June. — Vol. 95, no. 6.
34. Period doubling in period-one steady states / R. R. W. Wang [et al.] // *Physical Review E*. — 2018. — Feb. — Vol. 97, no. 2.
35. *Breuer H.-P., Petruccione F.* The Theory of Open Quantum Systems. — Oxford University Press, 01/2007.
36. Topology by dissipation in atomic quantum wires / S. Diehl [et al.] // *Nature Physics*. — 2011. — Oct. — Vol. 7, no. 12. — P. 971—977.
37. Preparation of entangled states by quantum Markov processes / B. Kraus [et al.] // *Physical Review A*. — 2008. — Oct. — Vol. 78, no. 4.
38. Emergence of Glasslike Dynamics for Dissipative and Strongly Interacting Bosons / D. Poletti [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2013. — Nov. — Vol. 111, no. 19.
39. *Dirac P. A. M.* A New Notation for Quantum Mechanics // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. — 1939. — July. — Vol. 35, no. 3. — P. 416—418.
40. *Gorini V.* Completely positive dynamical semigroups of N-level systems // *Journal of Mathematical Physics*. — 1976. — Vol. 17, no. 5. — P. 821.
41. *Lindblad G.* On the generators of quantum dynamical semigroups // *Communications in Mathematical Physics*. — 1976. — June. — Vol. 48, no. 2. — P. 119—130.
42. *Chruściński D., Pascazio S.* A Brief History of the GKLS Equation // *Open Systems & Information Dynamics*. — 2017. — Sept. — Vol. 24, no. 03. — P. 1740001.
43. *Carmichael H.* An Open Systems Approach to Quantum Optics. — Springer Berlin Heidelberg, 1993.
44. Photon Solid Phases in Driven Arrays of Nonlinearly Coupled Cavities / J. Jin [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2013. — Apr. — Vol. 110, no. 16.
45. Observation of a Dissipative Phase Transition in a One-Dimensional Circuit QED Lattice / M. Fitzpatrick [et al.] // *Physical Review X*. — 2017. — Feb. — Vol. 7, no. 1.

46. Effective dynamics of strongly dissipative Rydberg gases / M. Marcuzzi [et al.] // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2014. — Nov. — Vol. 47, no. 48. — P. 482001.
47. *Albert V. V., Jiang L.* Symmetries and conserved quantities in Lindblad master equations // Physical Review A. — 2014. — Feb. — Vol. 89, no. 2.
48. Geometry and Response of Lindbladians / V. V. Albert [et al.] // Physical Review X. — 2016. — Nov. — Vol. 6, no. 4.
49. *Meyer K. R.* Linear Differential Equations with Periodic Coefficients (V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskii) // SIAM Review. — 1977. — Jan. — Vol. 19, no. 1. — P. 166—167.
50. Iterative solutions to the steady-state density matrix for optomechanical systems / P. D. Nation [et al.] // Physical Review E. — 2015. — Jan. — Vol. 91, no. 1.
51. Eigen v3 / G. Guennebaud, B. Jacob, [et al.]. — 2010. — <http://eigen.tuxfamily.org>.
52. *Hernandez V., Roman J. E., Vidal V.* SLEPc: A scalable and flexible toolkit for the solution of eigenvalue problems // ACM Trans. Math. Software. — 2005. — Vol. 31, no. 3. — P. 351—362.
53. *Lambert J. D.* Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem. — USA : John Wiley & Sons, Inc., 1991.
54. Monte Carlo simulation of master equations in quantum optics for vacuum, thermal, and squeezed reservoirs / R. Dum [et al.] // Physical Review A. — 1992. — Oct. — Vol. 46, no. 7. — P. 4382—4396.
55. *Mølmer K., Castin Y., Dalibard J.* Monte Carlo wave-function method in quantum optics // Journal of the Optical Society of America B. — 1993. — Mar. — Vol. 10, no. 3. — P. 524.
56. *Daley A. J.* Quantum trajectories and open many-body quantum systems // Advances in Physics. — 2014. — Mar. — Vol. 63, no. 2. — P. 77—149.
57. Computation of the asymptotic states of modulated open quantum systems with a numerically exact realization of the quantum trajectory method / V. Volokitin [et al.] // Physical Review E. — 2017. — Nov. — Vol. 96, no. 5.

58. *Cao R., Pope S. B.* Numerical integration of stochastic differential equations: weak second-order mid-point scheme for application in the composition PDF method // *Journal of Computational Physics*. — 2003. — Feb. — Vol. 185, no. 1. — P. 194—212.
59. *Moler C., Loan C. V.* Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix, Twenty-Five Years Later // *SIAM Review*. — 2003. — Jan. — Vol. 45, no. 1. — P. 3—49.
60. *Knuth D.* *The Art of Computer Programming: Volume 1: Fundamental Algorithms*. — Pearson Education, 1997.
61. *Stöckmann H.-J.* *Quantum Chaos: An Introduction*. — Paperback version, (with corr.) — Cambridge, 2006.
62. *Poincare H.* Sur Les Equations Lineaires Aux Differentielles Ordinaires et Aux Differences Finies // *American Journal of Mathematics*. — 1885. — Apr. — Vol. 7, no. 3. — P. 203.
63. *Kuznetsov I. A.* *Elements of Applied Bifurcation Theory*. — 3rd ed. — New York, 2004. — (Applied Mathematical Sciences ; v. 112).
64. *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems: Volta Memorial Conference, Como, 1977* / ed. by G. Casati, V. M. Conference. — Berlin, 1979. — (Lecture Notes in Physics ; 93).
65. *Gutzwiller M. C.* *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. — New York, 1990. — (Interdisciplinary Applied Mathematics ; v. 1).
66. *Hines A. P., McKenzie R. H., Milburn G. J.* Quantum Entanglement and Fixed-Point Bifurcations // *Physical Review A*. — 2005. — Apr. — Vol. 71, no. 4. — P. 042303.
67. Classical and Quantum Dynamics of a Model for Atomic-Molecular Bose-Einstein Condensates / G. Santos [et al.] // *Physical Review A*. — 2006. — Feb. — Vol. 73, no. 2. — P. 023609.
68. Quantum Entanglement and Fixed Point Hopf Bifurcation / M. Nemes [et al.] // *Physics Letters A*. — 2006. — May. — Vol. 354, no. 1/2. — P. 60—66.
69. *Wiggins S.* *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods*. — New York, NY, 2013.

70. Classical Bifurcation at the Transition from Rabi to Josephson Dynamics / T. Zibold [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2010. — Nov. — Vol. 105, no. 20. — P. 204101.
71. *Haake F., Gnutzmann S., Kuś M.* Quantum Signatures of Chaos. — Springer International Publishing, 2018.
72. *Toda M., Ikeda K.* Quantal Lyapunov Exponent // *Physics Letters A*. — 1987. — Sept. — Vol. 124, no. 3. — P. 165—169.
73. *Haake F., Wiedemann H., Życzkowski K.* Lyapunov exponents from quantum dynamics // *Annalen der Physik*. — 1992. — T. 504, № 7. — C. 531—539.
74. *Man'ko V., Vilela Mendes R.* Lyapunov Exponent in Quantum Mechanics. A Phase-Space Approach // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2000. — Nov. — Vol. 145, no. 3/4. — P. 330—348.
75. *Rozenbaum E. B., Ganeshan S., Galitski V.* Lyapunov Exponent and Out-of-Time-Ordered Correlator's Growth Rate in a Chaotic System // *Physical Review Letters*. — 2017. — Feb. — Vol. 118, no. 8. — P. 086801.
76. *Liao Y., Galitski V.* Nonlinear Sigma Model Approach to Many-Body Quantum Chaos: Regularized and Unregularized out-of-Time-Ordered Correlators // *Physical Review B*. — 2018. — Nov. — Vol. 98, no. 20. — P. 205124.
77. Quantum and Classical Lyapunov Exponents in Atom-Field Interaction Systems / J. Chávez-Carlos [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2019. — Jan. — Vol. 122, no. 2. — P. 024101.
78. *Prosen T., Žnidarič M.* Eigenvalue Statistics as an Indicator of Integrability of Nonequilibrium Density Operators // *Physical Review Letters*. — 2013. — Sept. — Vol. 111, no. 12.
79. Focus on cavity and circuit quantum electrodynamics in solids / Y. Arakawa [et al.] // *New Journal of Physics*. — 2015. — Jan. — Vol. 17, no. 1. — P. 010201.
80. Strong Coupling in a Single Quantum Dot–Semiconductor Microcavity System / J. P. Reithmaier [et al.] // *Nature*. — 2004. — Nov. — Vol. 432, no. 7014. — P. 197—200.

81. Quantum Nature of a Strongly Coupled Single Quantum Dot–Cavity System / K. Hennessy [et al.] // *Nature*. — 2007. — Feb. — Vol. 445, no. 7130. — P. 896—899.
82. *Vardi A., Anglin J. R.* Bose-Einstein Condensates beyond Mean Field Theory: Quantum Backreaction as Decoherence // *Physical Review Letters*. — 2001. — Jan. — Vol. 86, no. 4. — P. 568—571.
83. *Trimborn F., Witthaut D., Wimberger S.* Mean-Field Dynamics of a Two-Mode Bose–Einstein Condensate Subject to Noise and Dissipation // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*. — 2008. — СЕНТ. — Т. 41, № 17. — С. 171001.
84. Interaction-Induced Impeding of Decoherence and Anomalous Diffusion / D. Poletti [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2012. — July. — Vol. 109, no. 4. — P. 045302.
85. Nonlinear Atom Interferometer Surpasses Classical Precision Limit / C. Gross [et al.] // *Nature*. — 2010. — Apr. — Vol. 464, no. 7292. — P. 1165—1169.
86. Experimental Observation of the Poincaré-Birkhoff Scenario in a Driven Many-Body Quantum System / J. Tomkovič [et al.] // *Physical Review A*. — 2017. — Jan. — Vol. 95, no. 1. — P. 011602.
87. *Nielsen M. A., Chuang I. L.* Quantum Computation and Quantum Information. — 10th anniversary ed. — Cambridge ; New York, 2010.
88. Atomic Coherent States in Quantum Optics / F. T. Arecchi [et al.] // *Physical Review A*. — 1972. — Dec. — Vol. 6, no. 6. — P. 2211—2237.
89. *Gisin N., Percival I. C.* The Quantum-State Diffusion Model Applied to Open Systems // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. — 1992. — Nov. — Vol. 25, no. 21. — P. 5677—5691.
90. *Ota Y., Ohba I.* Crossover from Classical to Quantum Behavior of the Duffing Oscillator through a Pseudo-Lyapunov-Exponent // *Physical Review E*. — 2005. — Jan. — Vol. 71, no. 1. — P. 015201.
91. *Kapulkin A., Pattanayak A. K.* Nonmonotonicity in the Quantum-Classical Transition: Chaos Induced by Quantum Effects // *Physical Review Letters*. — 2008. — Aug. — Vol. 101, no. 7. — P. 074101.

92. *Wiseman H. M., Milburn G. J.* Quantum Theory of Field-Quadrature Measurements // *Physical Review A*. — 1993. — Jan. — Vol. 47, no. 1. — P. 642—662.
93. *Eastman J. K., Hope J. J., Carvalho A. R. R.* Tuning Quantum Measurements to Control Chaos // *Scientific Reports*. — 2017. — Apr. — Vol. 7, no. 1. — P. 44684.
94. Chaos and Dynamical Complexity in the Quantum to Classical Transition / B. Pokharel [et al.] // *Scientific Reports*. — 2018. — Dec. — Vol. 8, no. 1. — P. 2108.
95. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M.* Kolmogorov Entropy and Numerical Experiments // *Physical Review A*. — 1976. — Dec. — Vol. 14, no. 6. — P. 2338—2345.
96. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Вычисление квантовых ляпуновских показателей методом квантовых траекторий / И. И. Юсипов ; Н. исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского. — № 2019665144 ; заявл. 12.11.2019 ; опубли. 20.11.2019 (Рос. Федерация).*
97. *Ott E.* Chaos in Dynamical Systems. — Second. — Cambridge University Press, 08/2002.
98. *Brange F., Menczel P., Flindt C.* Photon Counting Statistics of a Microwave Cavity // *Physical Review B*. — 2019. — Feb. — Vol. 99, no. 8. — P. 085418.
99. Observation of Quantum Jumps of a Single Quantum Dot Spin Using Submicrosecond Single-Shot Optical Readout / A. Delteil [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2014. — Mar. — Vol. 112, no. 11.
100. Phonon counting and intensity interferometry of a nanomechanical resonator / J. D. Cohen [et al.] // *Nature*. — 2015. — Apr. — Vol. 520, no. 7548. — P. 522—525.
101. *Draper N. R., Smith H.* Applied Regression Analysis. — 3rd ed. — New York, 1998. — (Wiley Series in Probability and Statistics).
102. *Spohn H.* Kinetic Equations from Hamiltonian Dynamics: Markovian Limits // *Reviews of Modern Physics*. — 1980. — July. — Vol. 52, no. 3. — P. 569—615.

103. Classical Chaos in Atom-Field Systems / J. Chávez-Carlos [et al.] // Physical Review E. — 2016. — Aug. — Vol. 94, no. 2. — P. 022209.
104. *Anderson P. W.* Absence of Diffusion in Certain Random Lattices // Physical Review. — 1958. — Mar. — Vol. 109, no. 5. — P. 1492—1505.
105. *Kramer B., MacKinnon A.* Localization: theory and experiment // Reports on Progress in Physics. — 1993. — Dec. — Vol. 56, no. 12. — P. 1469—1564.
106. *Evers F., Mirlin A. D.* Anderson transitions // Reviews of Modern Physics. — 2008. — Oct. — Vol. 80, no. 4. — P. 1355—1417.
107. *Esposito S.* 50 Years of Anderson Localization, edited by Elihu Abrahams // Contemporary Physics. — 2012. — Mar. — Vol. 53, no. 2. — P. 188—189.
108. *Segev M., Silberberg Y., Christodoulides D. N.* Anderson localization of light // Nature Photonics. — 2013. — Feb. — Vol. 7, no. 3. — P. 197—204.
109. Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder / J. Billy [et al.] // Nature. — 2008. — June. — Vol. 453, no. 7197. — P. 891—894.
110. Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate / G. Roati [et al.] // Nature. — 2008. — June. — Vol. 453, no. 7197. — P. 895—898.
111. Three-Dimensional Anderson Localization of Ultracold Matter / S. S. Kondov [et al.] // Science. — 2011. — Oct. — Vol. 334, no. 6052. — P. 66—68.
112. Three-dimensional localization of ultracold atoms in an optical disordered potential / F. Jendrzejewski [et al.] // Nature Physics. — 2012. — Mar. — Vol. 8, no. 5. — P. 398—403.
113. *Yedjour A., Tiggelen B. A. V.* Diffusion and localization of cold atoms in 3D optical speckle // The European Physical Journal D. — 2010. — June. — Vol. 59, no. 2. — P. 249—255.
114. *Gurvitz S. A.* Delocalization in the Anderson Model due to a Local Measurement // Physical Review Letters. — 2000. — July. — Vol. 85, no. 4. — P. 812—815.
115. Delocalization of ultracold atoms in a disordered potential due to light scattering / B. Nowak [et al.] // Physical Review A. — 2012. — Oct. — Vol. 86, no. 4.

116. *Flores J. C.* Diffusion in disordered systems under iterative measurement // Physical Review B. — 1999. — July. — Vol. 60, no. 1. — P. 30—32.
117. *Genway S., Lesanovsky I., Garrahan J. P.* Localization in space and time in disordered-lattice open quantum dynamics // Physical Review E. — 2014. — Apr. — Vol. 89, no. 4.
118. *Verstraete F., Wolf M. M., Cirac J. I.* Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation // Nature Physics. — 2009. — July. — Vol. 5, no. 9. — P. 633—636.
119. Stabilization of quantum metastable states by dissipation / D. Valenti [et al.] // Physical Review B. — 2015. — June. — Vol. 91, no. 23.
120. Noise-induced effects in nonlinear relaxation of condensed matter systems / B. Spagnolo [et al.] // Chaos, Solitons & Fractals. — 2015. — Dec. — Vol. 81. — P. 412—424.
121. Nonlinear Relaxation Phenomena in Metastable Condensed Matter Systems / B. Spagnolo [et al.] // Entropy. — 2016. — Dec. — Vol. 19, no. 1. — P. 20.
122. Dissipative dynamics in a quantum bistable system: Crossover from weak to strong damping / L. Magazzù [et al.] // Physical Review E. — 2015. — Sept. — Vol. 92, no. 3.
123. Quantum dissipative dynamics of a bistable system in the sub-Ohmic to super-Ohmic regime / L. Magazzù [et al.] // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2016. — May. — Vol. 2016, no. 5. — P. 054016.
124. Strong Dissipation Inhibits Losses and Induces Correlations in Cold Molecular Gases / N. Syassen [et al.] // Science. — 2008. — June. — Vol. 320, no. 5881. — P. 1329—1331.
125. *Witthaut D., Trimborn F., Wimberger S.* Dissipation Induced Coherence of a Two-Mode Bose-Einstein Condensate // Physical Review Letters. — 2008. — Nov. — Vol. 101, no. 20.
126. Beyond mean-field dynamics in open Bose-Hubbard chains / D. Witthaut [et al.] // Physical Review A. — 2011. — June. — Vol. 83, no. 6.
127. *Kordas G., Wimberger S., Witthaut D.* Decay and fragmentation in an open Bose-Hubbard chain // Physical Review A. — 2013. — Apr. — Vol. 87, no. 4.

128. *Stano P., Jacquod P.* Suppression of interactions in multimode random lasers in the Anderson localized regime // *Nature Photonics*. — 2012. — Dec. — Vol. 7, no. 1. — P. 66—71.
129. Random nanolasing in the Anderson localized regime / J. Liu [et al.] // *Nature Nanotechnology*. — 2014. — Mar. — Vol. 9, no. 4. — P. 285—289.
130. Anderson attractors in active arrays / T. V. Lapyteva [et al.] // *Scientific Reports*. — 2015. — Aug. — Vol. 5, no. 1.
131. Localization attractors in active quasiperiodic arrays / T. V. Lapyteva [et al.] // *JETP Letters*. — 2015. — Nov. — Vol. 102, no. 9. — P. 603—609.
132. *Basko D., Aleiner I., Altshuler B.* Metal–insulator transition in a weakly interacting many-electron system with localized single-particle states // *Annals of Physics*. — 2006. — May. — Vol. 321, no. 5. — P. 1126—1205.
133. *Gornyi I. V., Mirlin A. D., Polyakov D. G.* Interacting Electrons in Disordered Wires: Anderson Localization and Low-TTransport // *Physical Review Letters*. — 2005. — Nov. — Vol. 95, no. 20.
134. Entanglement entropy dynamics of Heisenberg chains / G. D. Chiara [et al.] // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2006. — Mar. — Vol. 2006, no. 03. — P03001—P03001.
135. *Žnidarič M., Prosen T., Prelovšek P.* Many-body localization in the HeisenbergXXZmagnet in a random field // *Physical Review B*. — 2008. — Feb. — Vol. 77, no. 6.
136. *Bardarson J. H., Pollmann F., Moore J. E.* Unbounded Growth of Entanglement in Models of Many-Body Localization // *Physical Review Letters*. — 2012. — ИЮЛЬ. — Т. 109, № 1.
137. *Serbyn M., Papić Z., Abanin D. A.* Universal Slow Growth of Entanglement in Interacting Strongly Disordered Systems // *Physical Review Letters*. — 2013. — June. — Vol. 110, no. 26.
138. *Serbyn M., Papić Z., Abanin D. A.* Local Conservation Laws and the Structure of the Many-Body Localized States // *Physical Review Letters*. — 2013. — Sept. — Vol. 111, no. 12.
139. *Oganesyan V., Huse D. A.* Localization of interacting fermions at high temperature // *Physical Review B*. — 2007. — Apr. — Vol. 75, no. 15.

140. *Serbyn M., Moore J. E.* Spectral statistics across the many-body localization transition // *Physical Review B*. — 2016. — Jan. — Vol. 93, no. 4.
141. *Pal A., Huse D. A.* Many-body localization phase transition // *Physical Review B*. — 2010. — Nov. — Vol. 82, no. 17.
142. *Bauer B., Nayak C.* Area laws in a many-body localized state and its implications for topological order // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. — 2013. — Sept. — Vol. 2013, no. 09. — P09005.
143. *Kjäll J. A., Bardarson J. H., Pollmann F.* Many-Body Localization in a Disordered Quantum Ising Chain // *Physical Review Letters*. — 2014. — Sept. — Vol. 113, no. 10.
144. Critical Properties of the Many-Body Localization Transition / V. Khemani [et al.] // *Physical Review X*. — 2017. — Apr. — Vol. 7, no. 2.
145. Many-Body Localization Characterized from a One-Particle Perspective / S. Bera [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2015. — July. — Vol. 115, no. 4.
146. Observation of many-body localization of interacting fermions in a quasirandom optical lattice / M. Schreiber [et al.] // *Science*. — 2015. — July. — Vol. 349, no. 6250. — P. 842—845.
147. Exploring the many-body localization transition in two dimensions / J.-y. Choi [et al.] // *Science*. — 2016. — June. — Vol. 352, no. 6293. — P. 1547—1552.
148. Periodically driving a many-body localized quantum system / P. Bordia [et al.] // *Nature Physics*. — 2017. — Jan. — Vol. 13, no. 5. — P. 460—464.
149. Many-body localization in a quantum simulator with programmable random disorder / J. Smith [et al.] // *Nature Physics*. — 2016. — June. — Vol. 12, no. 10. — P. 907—911.
150. Robustness of Many-Body Localization in the Presence of Dissipation / E. Levi [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2016. — June. — Vol. 116, no. 23.
151. *Fischer M. H., Maksymenko M., Altman E.* Dynamics of a Many-Body-Localized System Coupled to a Bath // *Physical Review Letters*. — 2016. — Apr. — Vol. 116, no. 16.

152. *Medvedyeva M. V., Prosen T., Žnidarič M.* Influence of dephasing on many-body localization // *Physical Review B*. — 2016. — Mar. — Vol. 93, no. 9.
153. *Thouless D. J.* Lectures on Localization // *Physics and Contemporary Needs*. — Springer US, 1983. — P. 17—41.
154. *Derrida B., Gardner E.* Lyapounov exponent of the one dimensional Anderson model: weak disorder expansions // *Journal de Physique*. — 1984. — Vol. 45, no. 8. — P. 1283—1295.
155. Role of interactions in a dissipative many-body localized system / B. Everest [et al.] // *Physical Review B*. — 2017. — Jan. — Vol. 95, no. 2.
156. *Lazarides A., Moessner R.* Fate of a discrete time crystal in an open system // *Physical Review B*. — 2017. — May. — Vol. 95, no. 19.
157. Signatures of Many-Body Localization in a Controlled Open Quantum System / H. P. Lüschen [et al.] // *Physical Review X*. — 2017. — Mar. — Vol. 7, no. 1.
158. Topology by dissipation / C.-E. Bardyn [et al.] // *New Journal of Physics*. — 2013. — Aug. — Vol. 15, no. 8. — P. 085001.
159. Experimental multiparticle entanglement dynamics induced by decoherence / J. T. Barreiro [et al.] // *Nature Physics*. — 2010. — Sept. — Vol. 6, no. 12. — P. 943—946.
160. Quantum harmonic oscillator state synthesis by reservoir engineering / D. Kienzler [et al.] // *Science*. — 2014. — Dec. — Vol. 347, no. 6217. — P. 53—56.
161. Generalized Bose-Einstein Condensation into Multiple States in Driven-Dissipative Systems / D. Vorberg [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2013. — Dec. — Vol. 111, no. 24.
162. Photon condensation in circuit quantum electrodynamics by engineered dissipation / D. Marcos [et al.] // *New Journal of Physics*. — 2012. — May. — Vol. 14, no. 5. — P. 055005.
163. *Ishii K.* Localization of Eigenstates and Transport Phenomena in the One-Dimensional Disordered System // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. — 1973. — Vol. 53. — P. 77—138.

164. *Dalibard J., Castin Y., Mølmer K.* Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics // *Physical Review Letters*. — 1992. — Feb. — Vol. 68, no. 5. — P. 580—583.
165. *Billingsley P.* Probability and measure. — Hoboken, N.J : Wiley, 2012.
166. *Prosen T., Pižorn I.* Operator space entanglement entropy in a transverse Ising chain // *Physical Review A*. — 2007. — Sept. — Vol. 76, no. 3.
167. *Žnidarič M., Prosen T., Pižorn I.* Complexity of thermal states in quantum spin chains // *Physical Review A*. — 2008. — Aug. — Vol. 78, no. 2.
168. *Page D. N.* Average entropy of a subsystem // *Physical Review Letters*. — 1993. — Aug. — Vol. 71, no. 9. — P. 1291—1294.
169. Distribution of the Ratio of Consecutive Level Spacings in Random Matrix Ensembles / Y. Y. Atas [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2013. — Feb. — Vol. 110, no. 8.
170. *Mehta M. L.* Random matrices. — Elsevier, 2004.
171. *Sá L., Ribeiro P., Prosen T.* Spectral and Steady-State Properties of Random Liouvillians // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2020. — July. — Vol. 53, no. 30. — P. 305303.