

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского»**

На правах рукописи

ФЕДЮКОВ АЛЕКСАНДР АНАТОЛЬЕВИЧ

**СИНТЕЗ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ И ФАЗОВЫЕ
ПЕРЕМЕННЫЕ**

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление

**ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Баландин Дмитрий Владимирович

Нижегород – 2022

Оглавление

Введение.....	4
 Глава 1. Стабилизация линейных динамических систем по измеряемому с ошибкой состоянию при ограничениях на управляющие и фазовые переменные	16
1.1. Предварительные сведения	16
1.2. Постановка задачи об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы	24
1.3. Оценка области притяжения состояния равновесия в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии	24
1.4. Результаты численного моделирования	28
 Глава 2. Стабилизация линейных динамических систем с помощью управления по измеряемому выходу при ограничениях на фазовые переменные	35
2.1. Предварительные сведения	36
2.2. Постановка задачи стабилизации с помощью управления по измеряемому выходу системы при ограничениях на фазовые переменные	38
2.3. Достаточные условия существования закона управления	39
2.4. Постановка задачи об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы	47
2.5. Оценка области притяжения состояния равновесия в случае наличия ошибки в измеряемом выходе	48
2.6. Результаты численного моделирования	50
 Глава 3. Стабилизация линейных систем с помощью динамического регулятора при ограничениях на фазовые переменные	56
3.1. Предварительные сведения	57
3.2. Постановка задачи стабилизации с помощью динамического регулятора при ограничениях на фазовые переменные	59
3.3. Достаточные условия существования регулятора	60

3.4. Постановка задачи об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы	66
3.5. Оценка области притяжения состояния равновесия в случае наличия ошибки в измеряемом выходе	67
3.6. Результаты численного моделирования	70
Глава 4. Робастная стабилизация по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные	87
4.1. Постановка задачи	87
4.2. Поиск матрицы обратной связи робастного закона управления	89
4.3. Результаты численного моделирования	93
Заключение.....	99
Список литературы.....	102

Введение

Актуальность темы исследования.

Математическими моделями рассматриваемых в диссертационной работе управляемых объектов являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Основной задачей является задача стабилизации этих объектов с помощью управления в форме обратной связи по состоянию или по измеряемому выходу.

Существуют разные способы построения законов управления [3-5, 14, 15, 35, 40, 48, 58, 59, 63, 71-73, 75], в том числе способ, основанный на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств [42]. Линейные матричные неравенства – это неравенства, элементами которых являются матрицы. При этом символ " $>$ " в неравенстве $Y > 0$ означает положительную определенность матрицы Y , т.е. $u^T Y u > 0$, $\forall u \in R^n$, $u \neq 0$.

В задаче стабилизации объекта по состоянию предполагают, что состояние системы доступно измерению и управление строят в виде линейной обратной связи по состоянию. Заметим, что решение задачи стабилизации линейной динамической системы по состоянию сводится к решению системы линейных матричных неравенств. С помощью современных программ (например, программ для инженерных расчетов Matlab [49]) можно получить параметры закона управления. Вместе с тем возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. Это связано с тем, что построение линейных законов управления на основе линейной модели управляемого объекта может быть эффективно применено только там, где линейная модель более или менее адекватно описывает реальный объект, т.е. в ограниченной области фазового пространства. Заметим также, что в реальных условиях работы система должна находиться в области ее допустимых состояний. В связи с этим возникает необходимость учитывать в модели ограничения на фазовые переменные объекта и управление.

Задачи управления с ограничениями на управляющие и фазовые переменные продолжают оставаться в фокусе внимания исследователей и традиционно и небезосновательно считаются весьма трудными для решения. В настоящее время существует несколько подходов к решению таких задач. Один из них связан с попытками построения ограниченного управления, обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Среди пионерских работ отечественных ученых на эту тему можно упомянуть монографию [35]. Основная идея этой и других последующих работ состоит в поиске подходящей квадратичной функции Ляпунова, позволяющей оценить область притяжения замкнутой системы. Однако, использование данного

подхода, как оказалось, эффективно лишь для динамических систем невысокого порядка и приводит к значительным трудностям уже для систем дифференциальных уравнений выше третьего порядка и, тем более, вряд ли возможно для решения задач управления по измеряемому выходу. Несколько иной подход к решению указанных задач, также базирующийся на идеях метода Ляпунова, но использующий не квадратичные функции Ляпунова и теорию линейных матричных неравенств, изложен в ряде зарубежных публикаций [58, 59, 75]. Данный подход позволяет оценивать область притяжения замкнутой системы для динамических систем достаточно высокого порядка, однако его применение для решения задач поиска законов управления, оптимизирующих переходные процессы в системе, весьма проблематично.

Одним из эвристических подходов к учету геометрических ограничений на управляющее воздействие в задачах стабилизации является использование управления типа срезки линейного по фазовым переменным управляющего сигнала по величине ограничений. При этом исходно линейная система с управлением типа срезки становится существенно нелинейной, что сильно затрудняет ее исследование. Задача стабилизации механической системы геометрически ограниченным управлением была рассмотрена в [11]. Асимптотическая устойчивость произвольной линейной системы с управлением типа срезки исследовалась в [16]. Были получены оценки области притяжения тривиального решения системы. Приведены необходимые и достаточные условия, позволяющие сделать размеры этой области сколь угодно большими. В работе [17] решена задача обеспечения асимптотической устойчивости механической системы с произвольным числом степеней свободы и покомпонентными геометрическими ограничениями на управление.

В работах [4, 5] рассмотрена и решена задача поиска управления по состоянию, которое обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные. В фазовом пространстве получена оценка области начальных состояний системы, при которых найденный закон управления стабилизирует систему. Однако в реальных ситуациях состояние системы измеряется, как правило, с ошибкой. Поэтому открытым остался вопрос о возможности применения полученного в [4, 5] закона управления в указанной ситуации.

Заметим, что при решении практических задач управления реальными физическими объектами полная информация о состоянии системы обычно недоступна измерению. Как правило в реальной ситуации доступно измерению лишь часть фазовых переменных или их линейная комбинация. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации линейных динамических систем с помощью управления по измеряемому выходу системы.

Вопрос поиска управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу, который будет обеспечивать стабилизацию замкнутой системы обсуждается в работах [3, 39, 41, 43, 44, 46, 50, 51, 57, 60, 61, 66, 69, 71-73, 77, 78]. Есть два основных подхода к решению задачи поиска параметров закона управления по выходу. Первый подход состоит в анализе расположения корней характеристического полинома замкнутой системы. Второй подход основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Заметим, что вопрос поиска управления по измеряемому выходу, обеспечивающего стабилизацию замкнутой системы является более сложным в решении, чем случай, когда требуется обеспечить стабилизацию линейной динамической системы с помощью управления по состоянию.

В подходе, основанном на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств, решение задачи стабилизации линейной динамической системы с помощью управления по измеряемому выходу сводится к разрешимости системы билинейных матричных неравенств. Эта задача не принадлежит классу задач выпуклого программирования. В настоящее время отсутствуют эффективные с вычислительной точки зрения численные методы решения такого класса задач. Вместе с тем вопрос поиска закона управления по измеряемому выходу, который будет обеспечивать стабилизацию замкнутой системы является актуальным и этим вопросом продолжают заниматься до настоящего времени.

Заметим, что более сложным является случай, когда закон управления по измеряемому выходу, должен обеспечить не только асимптотическую устойчивость состояния равновесия замкнутой системы, но и обеспечить выполнение заданных требований к функционированию системы. Например, ограничений на фазовые переменные объекта. При этом актуальным является вопрос об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях на фазовые переменные. Также актуальным и открытым остается вопрос о возможности применения полученных законов управления в случае, когда выходные переменные системы измеряются с ошибкой.

Третья задача, которая рассматривается в диссертационной работе, связана с вопросом синтеза динамического регулятора по измеряемому выходу, который будет обеспечивать стабилизацию замкнутой системы. Такие задачи обсуждаются в работах [3, 20, 21, 47, 51, 54-56, 62, 64, 71]. Динамический регулятор – это объект, который описывается системой дифференциальных уравнений заданного порядка. Говорят, что для системы построен динамический регулятор полного порядка, если размерность состояния регулятора совпадает с размерностью состояния системы. В случае, когда размерность состояния регулятора ниже

размерности состояния системы, говорят, что для системы построен регулятор пониженного порядка.

Существуют разные способы построения динамических регуляторов, в частности способ, основанный на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Известно [3, 71], что в случае поиска параметров динамического регулятора по измеряемому выходу полного порядка, решение задачи стабилизации сводится к разрешимости системы линейных матричных неравенств относительно двух неизвестных симметричных положительно определенных матриц. Эта задача принадлежит классу задач выпуклого программирования, поэтому параметры такого регулятора можно получить, например, используя пакет Matlab. Также известно [3, 71], что в случае поиска параметров динамического регулятора по измеряемому выходу пониженного порядка решение задачи стабилизации сводится к разрешимости системы линейных матричных неравенств относительно двух неизвестных симметричных положительно определенных взаимнообратных матриц. Эта задача уже не принадлежит классу задач выпуклого программирования, и поэтому она является сложной. Из-за актуальности ею продолжают заниматься до настоящего времени. При этом ни один из предложенных к настоящему времени алгоритмов не гарантирует получение параметров динамического регулятора пониженного порядка.

В настоящее время случай синтеза динамического регулятора для линейного управляемого объекта при ограничениях на фазовые переменные рассмотрен только для регулятора полного порядка в работах [4, 5]. При этом актуальным остался вопрос поиска динамического регулятора пониженного порядка. Другим актуальным вопросом остается вопрос синтеза динамических регуляторов как полного, так и пониженного порядков, которые будут обеспечивать заданную степень устойчивости замкнутой системы при фазовых ограничениях. Также открытым является вопрос об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой полученные регуляторы будут обеспечивать стабилизацию замкнутой системы при ограничениях на фазовые переменные. Четвертым актуальным и открытым остается вопрос о возможности применения полученных регуляторов в случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных.

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что все параметры системы точно известны, однако о параметрах реальных механических систем, как правило, известно лишь то, что они принадлежат некоторому диапазону. Поэтому значительный интерес представляет изучение линейных динамических систем, которые обладают некоторой неопределенностью, т.е. для которых один или несколько параметров точно не известны. Закон управления, который обеспечивает выполнение заданных целей для таких объектов, называют робастным

управлением. Существуют разные способы построения робастного закона управления, в частности, способ основанный на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. В задаче робастной стабилизации по состоянию систему управления строят в виде линейной обратной связи по измеряемому состоянию. Вместе с тем, в случае отсутствия в модели ограничений на фазовые переменные объекта и управление возможна ситуация, когда полученное решение физически не может быть реализовано. В связи с этим возникает задача поиска управления в виде линейной обратной связи по состоянию, которое будет обеспечивать робастную стабилизацию линейной динамической системы при наличии ограничений на фазовые и управляющие переменные.

Проблема поиска робастного управления, а также проблема поиска робастного управления при заданных ограничениях являются сложными и актуальными в настоящее время [3, 14, 15, 24, 37, 38, 45, 52, 65, 67, 68, 70-72, 76].

Цели и задачи темы исследования.

Цель работы состоит в создании на основе современных достижений теории управления, теории линейных матричных неравенств и теории выпуклой оптимизации новых подходов и алгоритмов поиска законов управления динамическими системами в форме обратной связи по состоянию или по выходу, которые обеспечивают стабилизацию и выполнение заданных ограничений на фазовые и управляющие переменные. Решение задачи стабилизации в условиях, когда в математической модели рассматриваемого управляемого объекта присутствует неопределенность в задании параметров и построении робастного управления по состоянию, которое обеспечивает выполнение требуемых ограничений при всех допустимых неопределенных факторах. Разработка алгоритмов и программного обеспечения для численного решения данных задач.

Исходя из целей работы, были поставлены следующие задачи:

1. Построить оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по состоянию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в случае, когда измерение состояния системы производится с ошибкой;
2. В случае не измеряемого состояния, решить задачу поиска закона управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу системы и задачи синтеза динамических регуляторов по измеряемому выходу, которые обеспечивают стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на

- фазовые переменные. Исследовать возможность применения полученных законов управления в случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных;
3. Решить задачу поиска законов управления, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные;
 4. Разработать методы и алгоритмы построения законов управления для указанных задач;
 5. Разработать программное обеспечение, реализующее указанные методы и алгоритмы;
 6. Апробировать программное обеспечение на примерах конкретных задач управления.

Методы исследования.

Основными методами исследования являются метод функций Ляпунова, применяемый для исследования устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, и методы выпуклого анализа, в частности, аппарат линейных матричных неравенств.

Научная новизна.

В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Построена оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по состоянию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в случае, когда измерение состояния системы производится с ошибкой;
2. Решена задача поиска закона управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу системы, который обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Получена оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой будет обеспечиваться стабилизация и в том случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных;
3. Поставлены и решены задачи синтеза динамических регуляторов как полного, так и пониженного порядков, которые обеспечивают стабилизацию линейной динамической системы с заданной степенью устойчивости и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Получена оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой эти регуляторы будут обеспечивать стабилизацию замкнутой системы с заданной степенью устойчивости и в том случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных;

4. Решена задача поиска законов управления, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Полученные в диссертационной работе результаты могут использоваться для решения задач управления сложными динамическими системами в технике, экономике, финансовой математике.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по состоянию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в случае, когда измерение состояния системы производится с ошибкой;
2. Решение задачи поиска закона управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу системы, который обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой будет обеспечиваться стабилизация и в том случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных;
3. Решение задач синтеза динамических регуляторов как полного, так и пониженного порядков, которые обеспечивают стабилизацию линейной динамической системы с заданной степенью устойчивости и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой полученные регуляторы будут обеспечивать стабилизацию замкнутой системы с заданной степенью устойчивости и в том случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных;
4. Решение задачи поиска законов управления, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные.

Степень достоверности и апробации результатов.

Достоверность утверждений и выводов, сформулированных в диссертационной работе, подтверждается сравнением полученных в работе теоретических результатов с результатами, полученными в результате численных экспериментов.

Материалы, изложенные в диссертационной работе, переставлены в виде секционных докладов и обсуждались на международных и всероссийских конференциях, съездах и научных школах:

1. XII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2012);
2. X Международной Четаевской конференции (Казань, 2012);
3. XII всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2014);
4. XI Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Казань, 2015);
5. XIII Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2016);
6. Международной конференции «Оптимальное управление и дифференциальные игры» (Москва, 2018);
7. XIV Международной научной конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2018);
8. Международной конференции «Современные проблемы математики и механики» (Москва, 2019);
9. XV Международной научной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (Москва, 2020);
10. Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» - 2020 (Уфа, 2020);
11. XX Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, 2020);
12. XXI Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии» (Нижний Новгород, 2021).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 10-01-00514, № 11-01-00215, № 11-01-97022, № 12-01-31147, № 12-01-09330-моб_з, № 13-01-00603, № 14-01-00266, № 19-31-90086), а также в рамках НИР 3021 "Управление механическими системами в условиях неопределенности" с финансированием из средств Минобрнауки России (базовая часть государственного задания на научные исследования).

Публикации по теме работы.

По теме диссертационной работы опубликованы 7 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ [6, 7, 8, 20, 21, 24, 48], 3 из них — в библиографической базе Web of Science, 4 публикации в библиографической базе Scopus. Также опубликовано 14 статей и тезисов докладов, включенных в РИНЦ, в трудах международных и всероссийских конференций, съездов и математических школ [18, 19, 22, 23, 25-34].

Личный вклад.

В работах [6], [7] автором получены численные результаты совместно с соавторами. В совместной работе [8] автору принадлежит постановка задачи, доказательство теоремы и численные результаты. Из совместных работ в диссертацию вошли только результаты, полученные автором лично.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем работы 109 страниц.

Основное содержание работы

В **первой главе** в § 1.1 сформулирована задача о стабилизации линейной динамической системы с помощью управления в виде линейной обратной связи по состоянию в случае, когда есть ограничения на фазовые и управляющие переменные. Описан подход к ее решению, предложенный в работах [4, 5], основанный на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств.

В § 1.2 сформулирована проблема о возможности применения для стабилизации при ограничениях полученного в [4, 5] управления в том случае, когда состояние системы измеряется с ошибкой. Обсуждается вопрос об области притяжения состояния равновесия замкнутой управлением системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по состоянию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию также и в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии.

В § 1.3 сформулированы достаточные условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Ключевым моментом в доказательстве теоремы является использование неущербности S-процедуры при двух ограничениях [15]. В качестве примеров в § 1.4

приведены две задачи: стабилизация перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе.

При решении практических задач управления реальными физическими объектами полная информация о состоянии системы обычно недоступна измерению. Как правило доступна измерению лишь часть фазовых переменных или их линейная комбинация. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации динамических систем с помощью управления по измеряемому выходу системы.

Во **второй главе** в § 2.1 обсуждается решение задачи стабилизации линейной динамической системы с помощью управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу. Приведены два основных подхода к поиску параметров закона управления по выходу.

В § 2.2 сформулирована, а в § 2.3 решена задача о поиске закона управления по измеряемому выходу, который обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Подход к решению задачи основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Получены достаточные условия для нахождения матрицы параметров обратной связи. Приведен подход, который позволяет получить оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы.

В § 2.4 поставлена задача об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по измеряемому выходу линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в том случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных. В § 2.5 в терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы в указанной ситуации.

В качестве примеров в § 2.6 рассмотрены две задачи: стабилизация перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе. Для данных объектов получены законы управления по измеряемому выходу и оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при выполнении заданных ограничений. Рассмотрен вопрос о влиянии наличия ошибки в измерениях выходных переменных на оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

Для стабилизации линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, в том случае, когда состояние системы не доступно измерению, наряду с управлением в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу, могут применяться

динамические регуляторы по измеряемому выходу. Динамический регулятор – это объект, который описывается системой дифференциальных уравнений заданного порядка. Говорят, что для системы построен динамический регулятор полного порядка, если размерность состояния регулятора совпадает с размерностью состояния системы. В случае, когда размерность состояния регулятора ниже размерности состояния системы, говорят, что для системы построен регулятор пониженного порядка.

В **третьей главе** в § 3.1 обсуждаются подходы к решению задачи стабилизации линейной системы с помощью динамического регулятора по измеряемому выходу в случае наличия и отсутствия ограничений на фазовые переменные.

В § 3.2 сформулированы задачи о синтезе динамических регуляторов по выходу, которые будут обеспечивать стабилизацию линейной динамической системы с заданной степенью устойчивости и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Подход к решению задач основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. В § 3.3 получены достаточные условия для поиска матрицы параметров регулятора.

В § 3.4 поставлена задача об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой полученные динамические регуляторы для линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, будут обеспечивать стабилизацию и в том случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных. В § 3.5 в терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы в указанной ситуации.

В качестве примера в § 3.6 рассмотрена задача стабилизации движения тела в электромагнитном подвесе. Для данного объекта получены динамические регуляторы полного и пониженного порядков при которых выполнены заданные ограничения на фазовые переменные. Получены соответствующие им оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Проведено сравнение указанных динамических регуляторов с динамическими регуляторами по выходу, которые получены для изучаемого объекта без учета ограничений на фазовые переменные. Показано, что последние не обеспечивают выполнение заданных характеристик замкнутой системы.

Приведено сравнение поведения не линеаризованной и линеаризованной систем, замкнутых регуляторами полного и пониженного порядков, которые построены для изучаемого объекта при учете ограничений на фазовые переменные.

Приведена оценка множества допустимых ограничений на величину, пропорциональную смещению тела в электромагнитном подвесе и на величину, пропорциональную силе тока в цепи электромагнита при которых существует регулятор полного порядка.

Также в § 3.6 рассмотрен вопрос о влиянии наличия ошибки в измерениях выходных переменных на оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что все параметры системы точно известны, однако о параметрах реальных механических систем, как правило, известно лишь то, что они принадлежат некоторому диапазону. Поэтому значительный интерес представляет изучение линейных динамических систем, которые обладают некоторой неопределенностью, т.е. для которых один или несколько параметров точно не известны. Закон управления, который обеспечивает выполнение заданных целей для таких объектов, называют робастным управлением.

В **четвертой главе** в § 4.1 поставлена, а в § 4.2 решена задача поиска законов управления, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для существования матрицы обратной связи робастного закона управления.

В качестве примера в § 4.3 приведено решение задачи поиска робастного управления для двухмассовой системы при отсутствии полной информации об ее параметрах, при наличии ограничений на величину смещения одной из материальных точек и на величину управления. Приведено сравнение полученного закона управления с робастным законом управления по состоянию без учета ограничений. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

В **заключении** сформулированы основные результаты, полученные в работе.

Глава 1. Стабилизация линейных динамических систем по измеряемому с ошибкой состоянию при ограничениях на управляющие и фазовые переменные

В работах [4, 5] рассмотрена и решена задача поиска управления по состоянию, которое обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные. В фазовом пространстве получена область начальных состояний системы, при которых управление в виде линейной обратной связи по состоянию стабилизирует систему. Однако в реальных ситуациях состояние системы измеряется, как правило, с ошибкой. Поэтому открытым остается вопрос о возможности применения полученного в [4, 5] закона управления в указанной ситуации.

В данной главе обсуждаются вопросы по оценке области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления, полученный в задаче поиска управления по состоянию, стабилизирующего линейную динамическую систему при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию также и в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии. Сформулированы достаточные условия, позволяющие получить оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Ключевым моментом в доказательстве теоремы является использование неущербности S-процедуры при двух ограничениях [15]. В качестве примеров приведены две задачи: стабилизация перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе.

1.1. Предварительные сведения

Рассмотрим управляемый объект

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (1.1.1)$$

$$z_i = C_i x + D_i u, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.1.2)$$

где $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^l$ – управление, $z_i \in R^{m_i}$ – управляемые выходы системы; A , B , C_i и D_i – заданные матрицы соответствующих размеров.

Задача о стабилизации объекта (1.1.1) с помощью управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u = Kx, \quad (1.1.3)$$

обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.1.1) -- (1.1.3) и выполнение при заданных значениях γ_i ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.1.4)$$

обсуждалась в работах [4, 5]. С помощью техники линейных матричных неравенств и неущербности S-процедуры для квадратичных неравенств были сформулированы условия на множество начальных состояний, стартуя из которых фазовые траектории системы (1.1.1), замкнутой управлением (1.1.3), асимптотически приближались к нулевому состоянию и не выходили за границы множества, задаваемого ограничениями (1.1.4). Для решения задачи поиска управления в [4] проводится анализ линейной системы с фазовым ограничением. Рассматривается асимптотически устойчивая линейная система

$$\dot{x} = Ax, \quad (1.1.5)$$

$$z = Cx,$$

где матрица A – гурвицева, т.е. все собственные значения этой матрицы имеют строго отрицательные действительные части. Ставится задача поиска множества начальных состояний $x(0) = x_0$, из которых стартует фазовая траектория, не выходя за пределы множества, задаваемого ограничением

$$\max_{t \geq 0} |z(t)| \leq \gamma \quad (1.1.6)$$

при $\gamma > 0$.

Заметим, что если функция $V = x^T Y^{-1} x$ с матрицей $Y = Y^T > 0$ является квадратичной функцией Ляпунова системы (1.1.5), тогда все траектории этой системы, выходящие из множества $E(Y) = \{x : x^T Y^{-1} x \leq 1\}$, ограниченного эллипсоидом $x^T Y^{-1} x \leq 1$, вписанным в область фазового пространства, которая задана неравенством $|z| \leq \gamma$, удовлетворяют ограничению (1.1.6). В матричном неравенстве $Y > 0$, знак " $>$ " означает положительную определенность матрицы Y , т.е. $u^T Y u > 0$, $\forall u \in R^n$, $u \neq 0$. В работе показано, что область фазового пространства, определяемая объединением всех таких множеств $E(Y)$ при всевозможных функциях Ляпунова указанного вида, можно характеризовать в терминах линейных матричных неравенств. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. Если матрица $Y = Y^T > 0$ удовлетворяет системе линейных матричных неравенств

$$\begin{aligned} YA^T + AY &< 0, \\ \begin{pmatrix} Y & YC^T \\ C Y & \gamma^2 I \end{pmatrix} &\geq 0, \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

тогда все траектории системы (1.1.5) с начальными условиями $x(0) \in E(Y)$ удовлетворяют ограничениям (1.1.6).

Эта теорема сформулирована и доказана в [4, 5].

Заметим, что существует бесконечное множество матриц Y , удовлетворяющих системе матричных неравенств (1.1.7). Это в свою очередь означает, что существует бесконечное множество начальных состояний, определяемых соответствующими эллипсоидами. Поэтому возникает желание найти множество, которое является «максимальным» в соответствии с некоторым критерием. В частности, в качестве критериев для поиска множества, обладающего в некотором смысле «максимальными» размерами, могут выступать максимизация следа матрицы Y при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами (1.1.7), или максимизация объема соответствующего эллипсоида.

В случае анализа асимптотически устойчивой линейной системы с несколькими ограничениями определим множество начальных состояний «наибольшего» размера как множество, полученное пересечением эллипсоидов с «максимальными» размерами, отвечающих каждому из этих ограничений.

Ключевым моментом при решении задачи стабилизации объекта (1.1.1) в классе линейных обратных связей по состоянию (1.1.3) при ограничениях (1.1.4) является выбор единой квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы с учетом ограничений и применение неущербности S-процедуры при одном ограничении [9]. Это позволяет представить достаточные условия для поиска матрицы параметров закона управления (1.1.3) в терминах линейных матричных неравенств. Использование S-процедуры при одном ограничении – это прием, который позволяет заменить два неравенства для квадратичных форм эквивалентным им единственным неравенством. Он состоит в следующем. Рассмотрим неравенство

$$F(x) < 0, \quad x \neq 0 \quad (1.1.8)$$

для всех $x \in R^n$, удовлетворяющих неравенству

$$G(x) \leq 0, \quad (1.1.9)$$

где $F(x)$ и $G(x)$ – квадратичные формы. Тогда можно составить квадратичную форму

$$S(x) = F(x) - \lambda G(x)$$

и рассмотреть неравенство

$$S(x) < 0, \quad x \neq 0 \quad (1.1.10)$$

при некотором $\lambda \geq 0$. Эквивалентная замена неравенств (1.1.8) и (1.1.9) неравенством (1.1.10) называется S-процедурой.

Очевидно, что из выполнения (1.1.10) следует выполнение (1.1.8) при условии (1.1.9). Но верно и обратное утверждение. При условии, что существует x_0 , для которого $G(x_0) < 0$, выполнение неравенства (1.1.8) при условии (1.1.9) влечет существование $\lambda > 0$, при котором верно неравенство

$$F(x) - \lambda G(x) < 0, \quad x \neq 0.$$

В этом случае говорят, что S-процедура неущербна для одного ограничения. Данный прием в работах [4, 5] авторы применяют для каждого индекса i , что позволяет свести процесс нахождения единой функции Ляпунова замкнутой системы к решению системы линейных матричных неравенств.

Если функция $V = x^T Y^{-1} x$ с матрицей $Y = Y^T > 0$ является единой квадратичной функцией Ляпунова системы (1.1.1), замкнутой управлением (1.1.3), тогда все траектории этой системы, выходящие из множества $E(Y) = \{x : x^T Y^{-1} x \leq 1\}$, ограниченного эллипсоидом $x^T Y^{-1} x \leq 1$, вписанным в область фазового пространства, которая задана неравенствами $|z_i| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяют ограничениям (1.1.4). В [4, 5] сформулирована и доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. Если матрицы $Y = Y^T > 0$, Z и величины $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$\begin{aligned} YA^T + AY + Z^T B^T + BZ &< 0, \\ \begin{pmatrix} Y & YC_i^T + Z^T D_i^T \\ C_i Y + D_i Z & \gamma_i^2 I \end{pmatrix} &\geq 0, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

тогда все траектории системы (1.1.1), замкнутой управлением (1.1.3) с начальными условиями $x(0) \in E(Y)$, удовлетворяют ограничениям (1.1.4). Матрица параметров закона управления (1.1.3) для динамической системы с ограничениями вычисляется как

$$K = ZY^{-1}. \quad (1.1.12)$$

Заметим, что если матрица параметров закона управления (1.1.12) найдена, то для всех начальных состояний $x(0) \in \bigcap_{i=1}^N E(Y_i)$ фазовые траектории системы (1.1.1), замкнутой управлением (1.1.3), будут асимптотически приближаться к нулевому состоянию и не выходить за границы множества, задаваемого ограничениями (1.1.4). Здесь множества $E(Y_i) = \{x : x^T Y_i^{-1} x \leq 1\}$ получены как множества начальных состояний $x(0) = x_0$ для

асимптотически устойчивой линейной системы, при которых фазовая траектория не выйдет за пределы множества, задаваемого ограничением $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Определение 1.1. Известно [10], что для системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0$$

при $f(t, 0) \equiv 0$ тривиальное решение (положение равновесия) $x(t) \equiv 0$ называется асимптотически устойчивым, если:

- 1) оно устойчиво по Ляпунову, т.е. для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in (a, \infty)$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из неравенства $\|x(t_0)\| < \delta$ следует неравенство $\|x(t)\| < \varepsilon$ при $t_0 \leq t < \infty$ и
- 2) для любого $t_0 \in (a, \infty)$ существует $\Delta = \Delta(t_0) > 0$ такое, что все решения $x = x(t)$, $t_0 \leq t < \infty$, удовлетворяющие условию $\|x(t_0)\| < \Delta$, обладают свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Назовем областью притяжения состояния равновесия системы $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ множество всех начальных состояний $x(t_0) = x_0$, для которых фазовые траектории системы будут асимптотически приближаться к состоянию равновесия.

Заметим, что существуют разные определения для области притяжения тривиального решения. В работе [10] областью притяжения положения равновесия называют шар $\|y\| < \Delta(t_0)$ при фиксированном t_0 . В работе [1] область притяжения тривиального решения в начальный момент t_0 определяют как множество всех тех начальных условий x_0 , для которых $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0$.

Определение 1.2. Областью притяжения Ω состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях назовем множество всех начальных состояний $x(0) = x_0$, для которых фазовые траектории динамической системы (1.1.1), замкнутой управлением (1.1.3), будут асимптотически приближаться к состоянию равновесия и не выходить за границы множества, задаваемого ограничениями (1.1.4).

Определение 1.3. Под оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях будем понимать любое подмножество $w \subset \Omega$.

Следовательно, множество $\bigcap_{i=1}^N E(Y_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях. При этом желательно выбирать множества $E(Y_i)$, обладающие в некотором смысле «максимальными» размерами (например, в

смысле максимизации следа матрицы Y или максимизации объема соответствующего эллипсоида).

Как отмечалось выше, ключевым моментом при решении задачи стабилизации объекта (1.1.1) в классе линейных обратных связей по состоянию (1.1.3) при ограничениях (1.1.4) является выбор единой квадратичной функции Ляпунова замкнутой системы с учетом ограничений. Это связано с тем, что в противном случае, выбирая свою функцию Ляпунова для каждого ограничения $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$, приходим к системе билинейных матричных неравенств

$$A^T X_i + K^T B^T X_i + X_i A + X_i B K < 0, \\ \begin{pmatrix} \gamma_i^2 X_i & C_i^T + K^T D_i^T \\ C_i + D_i K & I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = \overline{1, N},$$

где I – единичная матрица соответствующего размера, относительно неизвестных матриц $X_i = X_i^T > 0$, $i = \overline{1, N}$, и K . В настоящее время отсутствуют эффективные с вычислительной точки зрения численные методы решения такого класса задач.

Заметим, что полученный в работах [4, 5] результат не позволяет указать «полное» множество начальных состояний, фазовые траектории из которых не нарушают ограничений. Другими словами, полученный в работах [4, 5] результат не позволяет построить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях. В качестве примера рассмотрим управляемый перевернутый маятник

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u \quad (1.1.13)$$

при ограничениях на φ – угол отклонения звена маятника от вертикали и управление u

$$\max_{t \geq 0} |\varphi(t)| \leq 0.1, \quad \max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 1. \quad (1.1.14)$$

Представим уравнение и ограничения в виде (1.1.1), (1.1.2), где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1 = (1 \quad 0), \quad D_1 = 0, \quad C_2 = (0 \quad 0), \quad D_1 = 1.$$

Для объекта (1.1.13) найдено управление

$$u = -11.1888\varphi - 3.5402\dot{\varphi}, \quad (1.1.15)$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.1.13), (1.1.15) и выполнение ограничений (1.1.14). Управление (1.1.15) получено в результате поиска матрицы Y , имеющей максимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (1.1.11).

На рисунке 1.1 и рисунке 1.2 в фазовой плоскости пунктиром отмечены ограничения

$$|\varphi(t)| \leq 0.1, \quad |u(t)| \leq 1. \quad (1.1.16)$$

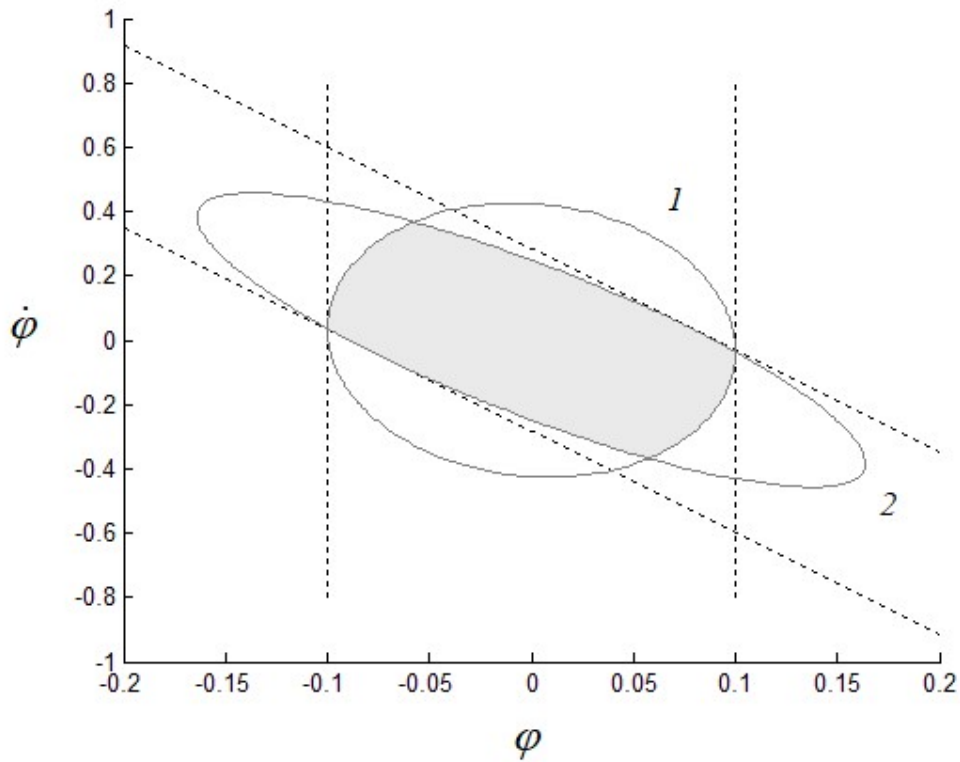


Рисунок 1.1. Оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, полученная пересечением эллипсоидов в задаче стабилизации перевернутого маятника при ограничении по углу и управлению

На рисунке 1.1 эллипс 1 ограничивает оценку множества начальных состояний, при выборе которых управление (1.1.15) обеспечивает стабилизацию перевернутого маятника при первом ограничении, т.е. на угол отклонения маятника φ . Эллипс 2 ограничивает оценку множества начальных состояний, при выборе которых управление обеспечивает стабилизацию при втором ограничении, т.е. при ограничении на управление. В пересечении эллипсов получим оценку для области начальных состояний, для которых управление стабилизирует объект при двух ограничениях. Другими словами, это оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях (1.1.14). На рисунке 1.1 и рисунке 1.2 данная область отмечена светло-серым цветом.

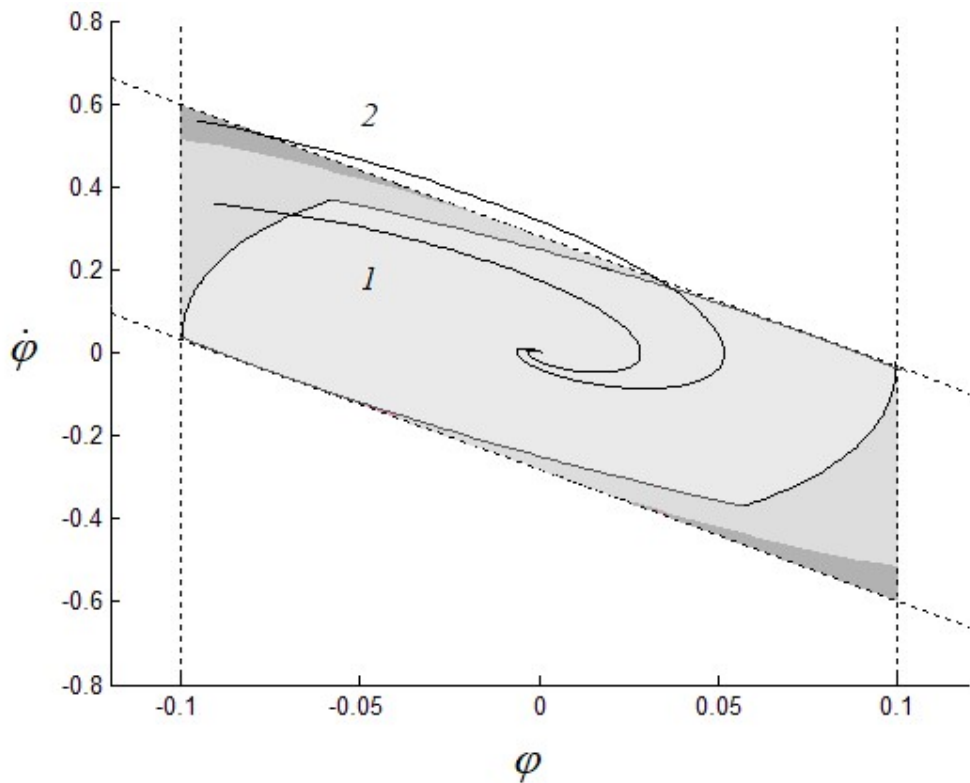


Рисунок 1.2. Область притяжения состояния равновесия замкнутой системы и ее оценка, полученная пересечением эллипсоидов в задаче стабилизации перевернутого маятника при ограничении по углу и управлению

Можно построить и проанализировать фазовый портрет замкнутой системы. На рисунке 1.2 серым цветом отмечено множество начальных состояний, стартуя из которых фазовые траектории системы (1.1.13), замкнутой управлением (1.1.15), асимптотически приближаются к нулевому состоянию и не выходят за границы множества, задаваемого ограничениями (1.1.14). Другими словами, это область притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях (1.1.14). В качестве примера приведена траектория 1 для начального состояния $\varphi = -0.09$, $\dot{\varphi} = 0.36$. Темным цветом на рисунке 1.2 отмечено множество начальных состояний, при выборе которых фазовые траектории системы выйдут за границы области (1.1.16). В качестве примера приведена траектория 2 для начального состояния $\varphi = -0.095$, $\dot{\varphi} = 0.56$.

1.2. Постановка задачи об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы

Предположим, что для объекта (1.1.1), (1.1.2) решена задача стабилизации с ограничениями на фазовые и управляющие переменные и найден закон управления $u = Kx$. В реальной ситуации состояние динамической системы всегда измеряется с некоторой ошибкой. В этой связи введем переменную

$$y = (I + \Delta(t))x, \quad (1.2.1)$$

измеряемый выход системы, где I – единичная матрица размера $n \times n$, а матрица $\Delta(t)$ определяет относительные ошибки измерения фазовых переменных и в любой момент времени удовлетворяет матричному неравенству

$$\Delta^T \Delta - \delta^2 I \leq 0$$

($\delta \neq 0$ – заданный параметр), представляющему ограничения на допустимые значения ошибок измерения. Рассмотрим задачу стабилизации системы (1.1.1), (1.1.2) с помощью закона управления вида

$$u = Ky \quad (1.2.2)$$

при ограничениях на фазовые и управляющие переменные (1.1.4). Возникает следующий вопрос: как скажутся ошибки измерения фазовых переменных на выполнении ограничений (1.1.4)? Другими словами, как изменится область притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления (1.2.2) обеспечивает стабилизацию при ограничениях (1.1.4) в случае наличия ошибки в измеряемом выходе (1.2.1)?

1.3. Оценка области притяжения состояния равновесия в случае наличия ошибки в измеряемом состоянии

Рассмотрим ситуацию, когда состояние системы (1.1.1) измеряется с ошибкой. Представим измеряемый выход системы (1.2.1) в виде

$$y = x + w, \quad (1.3.1)$$

где $w = \Delta(t)x$. Так как матрица неопределенности $\Delta(t)$ удовлетворяет условию $\Delta^T \Delta \leq \delta^2 I$, то

$$w^T w \leq \delta^2 x^T x. \quad (1.3.2)$$

Обозначив $\bar{A} = A + BK$, $\bar{B} = BK$, $\bar{C}_i = C_i + D_i K$, $\bar{D}_i = D_i K$, запишем замкнутую систему (1.1.1), (1.1.2), (1.2.2), (1.3.1) в виде

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}w, \quad (1.3.3)$$

$$z_i = \bar{C}_i x + \bar{D}_i w, \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.3.4)$$

Сформулируем достаточные условия для построения оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления (1.2.2) с матрицей обратной связи K , полученной в задаче стабилизации при ограничениях на фазовые и управляющие переменные без учета ошибки в измеряемом выходе, будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть требуется найти оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления (1.2.2) обеспечивает для каждого индекса i стабилизацию системы (1.3.3) при одном ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. Пусть матрица $X_i = X_i^T > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T X_i + X_i \bar{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \bar{B} \\ \bar{B}^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \quad (1.3.5)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \bar{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & \bar{C}_i^T \bar{D}_i \\ \bar{D}_i^T \bar{C}_i & \bar{D}_i^T \bar{D}_i - \mu_2 I \end{pmatrix} \leq 0.$$

Тогда множество $E(X_i)$, $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (1.3.3) при ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Доказательство. В область фазового пространства, заданную неравенством $|z_i| \leq \gamma_i$, впишем эллипсоид $x^T X_i x = 1$. Покажем, что выполнение первого неравенства системы (1.3.5) обеспечивает выполнение условия, что квадратичная функция $V = x^T X_i x$ с матрицей $X_i = X_i^T > 0$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы. На любой траектории замкнутой системы (1.3.3) верно условие

$$\dot{V}(x) = (\bar{A}x + \bar{B}w)^T X_i x + x^T X_i (\bar{A}x + \bar{B}w) < 0. \quad (1.3.6)$$

Согласно неущербности S-процедуры при одном ограничении, неравенство (1.3.6) выполнено для всех x , w , таких, что $|x|^2 + |w|^2 \neq 0$, удовлетворяющих неравенству (1.3.2), тогда и только тогда, когда для некоторого числа $\mu_1 > 0$ и для всех x , w выполнено неравенство

$$(\bar{A}x + \bar{B}w)^T X_i x + x^T X_i (\bar{A}x + \bar{B}w) - \mu_1 (w^T w - \delta^2 x^T x) < 0.$$

Запишем его в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{A}^T X_i + X_i \bar{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \bar{B} \\ \bar{B}^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} < 0.$$

Это неравенство эквивалентно первому неравенству системы (1.3.5).

Покажем, что любое решение второго неравенства системы (1.3.5) обеспечивает выполнение условия $|z_i(t)| \leq \gamma_i$. Для квадратичных форм справедлива S - процедура при двух ограничениях [15]. Теорема утверждает следующее. Пусть даны квадратичные формы $F(x) = x^T A_0 x$, $G_1(x) = x^T A_1 x$, $G_2(x) = x^T A_2 x$, где $x \in R^n$, $A_i = A_i^T \in R^{n \times n}$, $i = 0, 1, 2$, и числа a_0 , a_1 , a_2 . Составим квадратичную форму $S(x) = F(x) - \tau_1 G_1(x) - \tau_2 G_2(x)$ и рассмотрим систему неравенств

$$S(x) \leq 0, \quad a_0 \geq \tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 \quad (1.3.7)$$

при некоторых $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$. Рассмотрим неравенство

$$F(x) \leq a_0, \quad (1.3.8)$$

которое для всех $x \in R^n$ удовлетворяет системе неравенств

$$G_1(x) \leq a_1, \quad G_2(x) \leq a_2. \quad (1.3.9)$$

Тогда из неравенств (1.3.7) следует неравенство (1.3.8) при условии (1.3.9).

Обратно, в случае если $n \geq 3$, существуют числа τ_3 , τ_4 и вектор $x_* \in R^n$, такие, что

$$\tau_3 A_1 + \tau_4 A_2 > 0, \quad G_1(x_*) < a_1, \quad G_2(x_*) < a_2,$$

то выполнение неравенства (1.3.8) при условии (1.3.9) влечет существование чисел $\tau_1 \geq 0$, $\tau_2 \geq 0$, при которых верно условие (1.3.7).

Применим этот результат для решения задачи. Согласно неущербности S-процедуры, при двух ограничениях выполнение неравенства $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$ при условии (1.3.2) и условии $x^T X_i x \leq 1$ для всех x , w , таких, что $|x|^2 + |w|^2 \neq 0$, эквивалентно существованию чисел $\mu_2 \geq 0$, $\mu_3 \geq 0$, при которых верно неравенство

$$|z_i|^2 - \gamma_i^2 - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) - \mu_3 (x^T X_i x - 1) \leq 0. \quad (1.3.10)$$

При этом должны существовать числа μ_4 , μ_5 и вектор $\begin{pmatrix} x_*^T & w_*^T \end{pmatrix}^T$, такие, что

$$\mu_4 \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_5 \begin{pmatrix} -\delta^2 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \quad (1.3.11)$$

и

$$\begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix} < 1, \quad \begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\delta^2 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_* \\ w_* \end{pmatrix} < 0. \quad (1.3.12)$$

Запишем неравенство (1.3.10) в виде

$$(\bar{C}_i x + \bar{D}_i w)^T (\bar{C}_i x + \bar{D}_i w) - \gamma_i^2 - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) - \mu_3 (x^T X_i x - 1) \leq 0. \quad (1.3.13)$$

Неравенство (1.3.13) верно для всех x, w . Значит,

$$\mu_3^2 \leq \gamma_i^2,$$

$$(\bar{C}_i x + \bar{D}_i w)^T (\bar{C}_i x + \bar{D}_i w) - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) \leq \mu_3 (x^T X_i x).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & (\bar{C}_i x + \bar{D}_i w)^T (\bar{C}_i x + \bar{D}_i w) - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) \leq \gamma_i^2 (x^T X_i x), \\ & x^T \bar{C}_i^T \bar{C}_i x + x^T \bar{C}_i^T \bar{D}_i w + w^T \bar{D}_i^T \bar{C}_i x + w^T \bar{D}_i^T \bar{D}_i w - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x^T x) \leq \gamma_i^2 x^T X_i x. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Запишем неравенство (1.3.14) в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \bar{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & \bar{C}_i^T \bar{D}_i \\ \bar{D}_i^T \bar{C}_i & \bar{D}_i^T \bar{D}_i - \mu_2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix} \leq 0. \quad (1.3.15)$$

Матричное неравенство (1.3.15) эквивалентно второму матричному неравенству в системе (1.3.5).

Найдем числа μ_4, μ_5 , удовлетворяющие неравенству (1.3.11). Перепишем условие (1.3.11) в виде $\mu_5 > 0, \mu_4 X_i - \mu_5 \delta^2 I > 0$. Следовательно, с учетом $X_i = X_i^T > 0$ для выполнения этих неравенств достаточно выбрать $\mu_4 = 2\delta^2 / \lambda_{\min}(X_i)$, где в знаменателе фигурирует минимальное собственное число матрицы; $\mu_5 = 1$.

Найдем вектор $\begin{pmatrix} x_*^T & w_*^T \end{pmatrix}^T$, удовлетворяющий неравенствам (1.3.12). Так как $V = x^T(t) X_i x(t)$ – квадратичная функция Ляпунова, то для всех $x \in E(X_i)$ выполнено неравенство $x^T(t) X_i x(t) \leq 1$. Следовательно, первое неравенство (1.3.12) верно, если точка x_* лежит внутри эллипсоида $E(X_i)$. В силу неравенства (1.3.2) для выполнения второго неравенства (1.3.12) выберем $w_* = \delta x_*/2$.

Следовательно, множество $E(X_i), E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (1.3.3) при ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Теорема 1.3 доказана.

Обозначим через X_i множество всех матриц X_i , удовлетворяющих неравенствам (1.3.5). Максимальную по всем $X_i \in X_i$ область $E(X_i^*)$ найдем путем минимизации следа матрицы

X_i . Эта операция является стандартной в пакете программ для инженерных расчетов Matlab [49] с использованием приложения CVX [53]. Заметим, что не удастся получить в терминах линейных матричных неравенств условия для построения множеств $E(Y_i) = \{x : x^T Y_i^{-1} x \leq 1\}$, $i = \overline{1, N}$, что позволило бы максимизировать объемы соответствующих эллипсоидов.

Пусть каждая из матриц X_i , $i = \overline{1, N}$, имеет минимальный след и является решением системы (1.3.5) для значения γ_i . Тогда все траектории замкнутой системы (1.3.3) с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$, $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$ будут удовлетворять ограничению $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$. Следовательно, для всех начальных состояний $x(0) \in \bigcap_{i=1}^N E(X_i)$, управление с заданной матрицей обратной связи K стабилизирует замкнутую систему при ограничениях (1.1.4). Другими словами, множество $\bigcap_{i=1}^N E(X_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (1.3.3) при ограничениях (1.1.4).

1.4. Результаты численного моделирования

Пример 1. Стабилизация перевернутого маятника. В качестве примера рассмотрим управляемый перевернутый маятник

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u \quad (1.4.1)$$

при ограничениях на φ – угол отклонения звена маятника от вертикали и управление u

$$\max_{t \geq 0} |\varphi(t)| \leq 0.1, \quad \max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 1. \quad (1.4.2)$$

Численное решение получено в пакете Matlab. Для объекта (1.4.1) решен ряд задач. Как было указано выше, в случае решения задачи стабилизации при отсутствии ошибки в измеряемом выходе найдено управление

$$u = -11.1888\varphi - 3.5402\dot{\varphi}, \quad (1.4.3)$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.4.1), (1.4.3) и выполнение ограничений на фазовую переменную и управление (1.4.2). Управление (1.4.3) получено в результате поиска матрицы Y , имеющей максимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (1.1.11).

На рисунке 1.3 в фазовой плоскости пунктиром отмечены ограничения

$$|\varphi(t)| \leq 0.1, |u(t)| \leq 1. \quad (1.4.4)$$

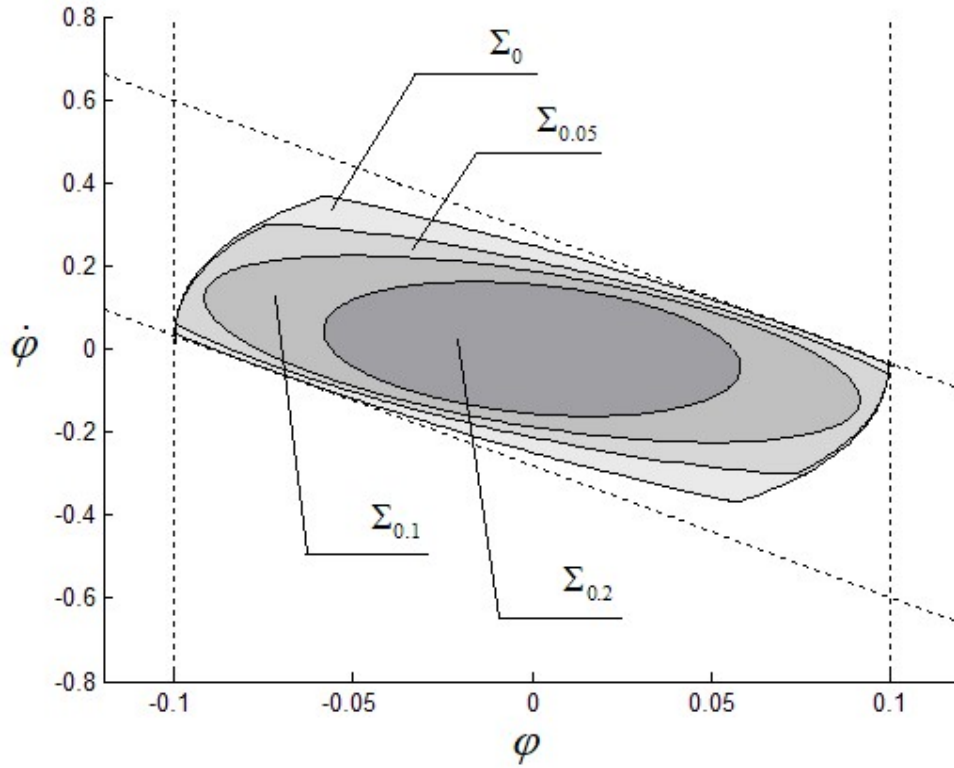


Рисунок 1.3. Пересечение областей Σ_0 , $\Sigma_{0.05}$, $\Sigma_{0.1}$ и $\Sigma_{0.2}$

Найдем изменение оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой управление (1.4.3) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Обозначим через Σ_δ оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой управление стабилизирует систему при значении δ .

Алгоритм для построения Σ_δ следующий. Рассмотрим два эллипса. Первый эллипс $E(X_1^*) = \{x : x^T X_1^* x \leq 1\}$ ограничивает оценку множества начальных состояний, при выборе которых управление (1.4.3) обеспечивает стабилизацию перевернутого маятника при первом ограничении, т.е. на угол отклонения маятника φ . Здесь матрица X_1^* — это матрица с минимальным следом, которая удовлетворяет системе линейных матричных неравенств (1.3.5) при заданных значениях δ и γ_1 . Второй эллипс $E(X_2^*) = \{x : x^T X_2^* x \leq 1\}$ ограничивает оценку множества начальных состояний, при выборе которых управление (1.4.3) обеспечивает стабилизацию при втором ограничении, т.е. при ограничении на управление. Здесь матрица X_2^* — это матрица с минимальным следом, которая удовлетворяет системе линейных

матричных неравенств (1.3.5) при заданных значениях δ и γ_2 . В пересечении эллипсов получим искомую оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой управление стабилизирует объект при двух ограничениях для заданного значения δ .

На рисунке 1.3 приведены области Σ_0 , $\Sigma_{0.05}$, $\Sigma_{0.1}$, $\Sigma_{0.2}$, соответствующие значениям $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.1$, $\delta = 0.2$, и показано пересечение этих областей. Область $\Sigma_{0.2}$ лежит внутри области $\Sigma_{0.1}$, которая в свою очередь лежит внутри области $\Sigma_{0.05}$, а область $\Sigma_{0.05}$ лежит внутри Σ_0 .

Проведенные вычисления показывают, что эллипсы, отвечающие за ограничения на угол отклонения звена маятника при значениях $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.1$ и $\delta = 0.2$, близки друг к другу. Таким образом, на размер области Σ_δ оказывает влияние, как значение величины параметра δ , так и наличие в задаче ограничения на управление.

Вычислим зависимость площади S области Σ_δ от величины δ , которая определяет величину ошибки в изменяемом выходе.

На рисунке 1.4 представлен график этой зависимости. В частности, получены значения $S(0) = 0.0819$, $S(0.05) = 0.0696$, $S(0.1) = 0.0541$, $S(0.2) = 0.0285$.

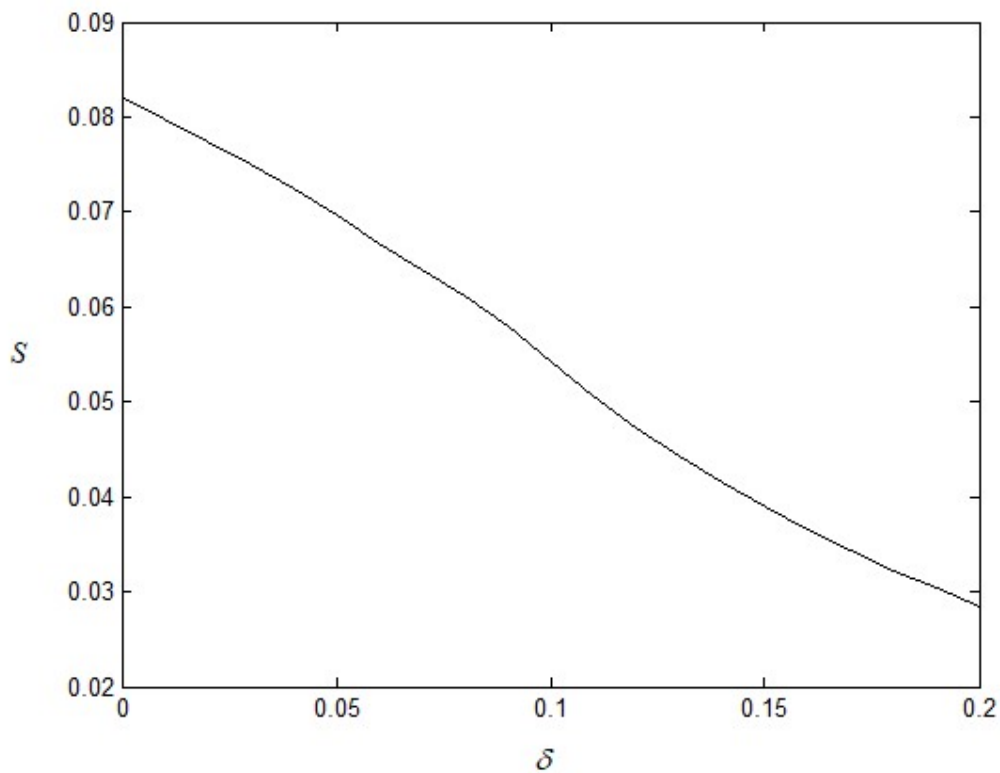


Рисунок 1.4. График зависимости площади области Σ_δ

Таким образом, при относительно небольшом увеличении значения δ размер области Σ_δ может существенно уменьшиться.

Пример 2. Стабилизация тела в электромагнитном подвесе. Уравнения движения ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе одностороннего действия, изображенном на рисунке 1.5, имеют вид

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= F(y, I) - mg, \\ \dot{\psi} + RI &= U, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

где m – масса вывешенного тела, y – координата вывешенного тела, g – ускорение свободного падения, ψ – потокосцепление обмотки электромагнита, I – сила тока в электромагните, R – сопротивление в цепи электромагнита, U – напряжение, подаваемое на электромагнит.

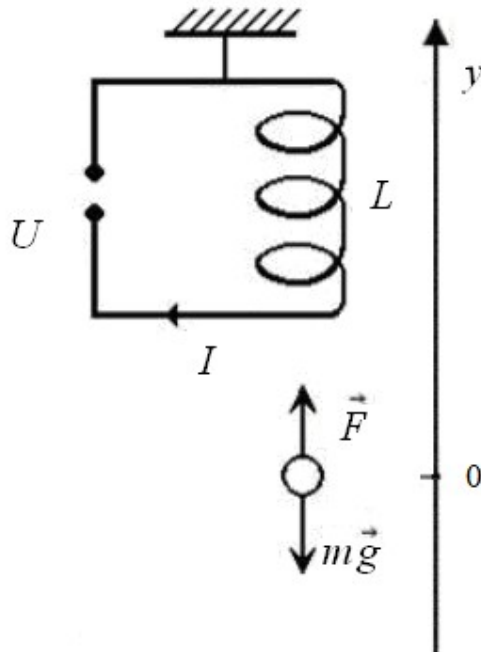


Рисунок 1.5. Электромагнитный подвес

Первое уравнение системы (1.4.5) описывает второй закон Ньютона для вывешенного тела. Второе уравнение следует из закона Кирхгофа для электрической цепи электромагнита. Известно [12], что величина потокосцепления ψ связана с током I и величиной индуктивности электромагнита $L(y)$ выражением $\psi = L(y)I$, где $L(y) = C_L/(\delta - y)$. Здесь C_L – конструктивный параметр, δ – величина номинального зазора между электромагнитом и

вывешенным телом. Также известно, что выражение для силы $F(y, I)$, действующей на тело, можно представить в виде $F(y, I) = \partial W / \partial y$, где коэнергия системы

$$W = \frac{C_L I^2}{2(\delta - y)}.$$

Перепишем уравнения (1.4.5) в виде

$$\begin{aligned} m\ddot{y} &= \frac{C_L I^2}{2(\delta - y)^2} - mg, \\ \frac{C_L}{(\delta - y)} \dot{I} + \frac{C_L I}{(\delta - y)^2} \dot{y} + RI &= U. \end{aligned} \quad (1.4.6)$$

Состояние равновесия системы (1.4.6) определяется равенствами $y = 0$, $\dot{y} = 0$, $I = I_C$, где $I_C = \sqrt{2\delta^2 mg / C_L}$. Перейдем к безразмерным величинам. Введем новое безразмерное время $t = \sqrt{2g/\delta} \, t'$ и, обозначив

$$x_1 = \frac{y}{\delta}, \quad x_2 = \frac{\dot{y}}{\sqrt{2g\delta}}, \quad x_3 = \frac{I}{I_C} - 1, \quad u = \sqrt{\frac{\delta}{4g^2 m C_L}} (U - RI_C),$$

запишем систему (1.4.6) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+x_3}{1-x_1} \right)^2 - \frac{1}{2}, \\ \dot{x}_3 &= - \left(\frac{1+x_3}{1-x_1} \right) x_2 - \alpha (1-x_1) x_3 + (1-x_1) u, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \frac{R\delta}{C_L} \sqrt{\frac{\delta}{2g}}.$$

Линеаризуем систему в окрестности состояния равновесия. Получим

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (1.4.7)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Численное решение получено в пакете Matlab. Пусть значение параметра системы $\alpha = 7.5$. Для объекта (1.4.7) решен ряд задач. В случае отсутствия ошибки в измеряемом выходе системы найдено управление

$$u = -37.0112x_1 - 25.7894x_2 - 2.8794x_3, \quad (1.4.8)$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (1.4.7), (1.4.8) и выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.1, \max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 1, \quad (1.4.9)$$

где x_1 – величина, пропорциональная смещению тела. Управление (1.4.8) получено в результате поиска матрицы Y , имеющей максимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (1.1.11).

Найдем изменение оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой управление (1.4.8) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Решение системы линейных матричных неравенств (1.3.5) при заданном параметре δ будут определять два множества начальных состояний $E(X_1) = \{x : x^T X_1 x \leq 1\}$, $E(X_2) = \{x : x^T X_2 x \leq 1\}$ для первого и второго ограничений (1.4.9) соответственно.

На рисунке 1.6 представлено множество, полученное пересечением эллипсоидов $E(X_1)$ и $E(X_2)$ при значении параметра $\delta = 0$. Следовательно, множество $E(X_1) \cap E(X_2)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при значении параметра $\delta = 0$. Пунктирными линиями 1 и 2 изображены при $x_3 = 0$ прямые $x_1 = -0.1$ и $x_1 = 0.1$ соответственно. Пунктирные линии 3 и 4 соответствуют при $x_3 = 0$ прямым $u = -1$ и $u = 1$.

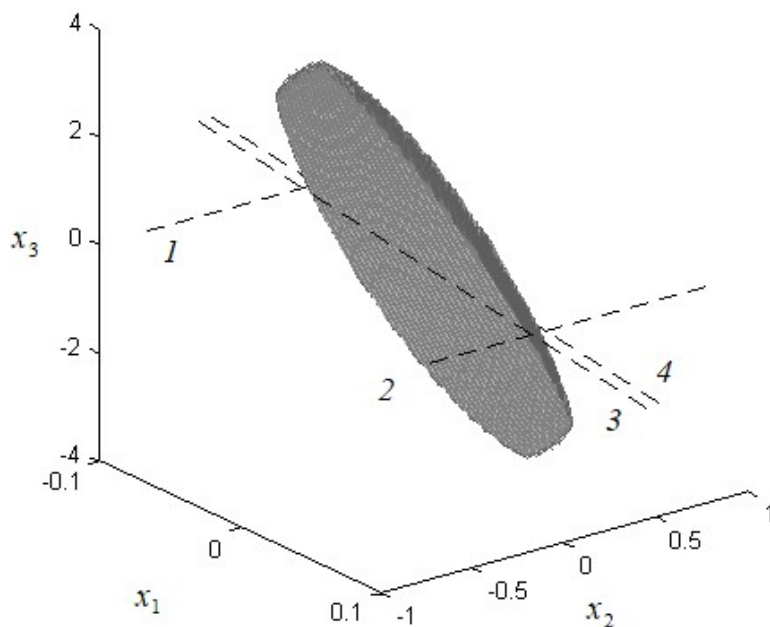


Рисунок 1.6. Оценка для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при значении параметра $\delta = 0$

Впишем в множество $E(X_1) \cap E(X_2)$ эллипсоид, имеющий наибольший объем.

На рисунке 1.7 представлен график зависимости объема V данного эллипсоида от величины δ . В частности, получены значения $V(0) = 0.0481$, $V(0.05) = 0.0014$, $V(0.1) = 0.0008$, $V(0.15) = 0.0003$.

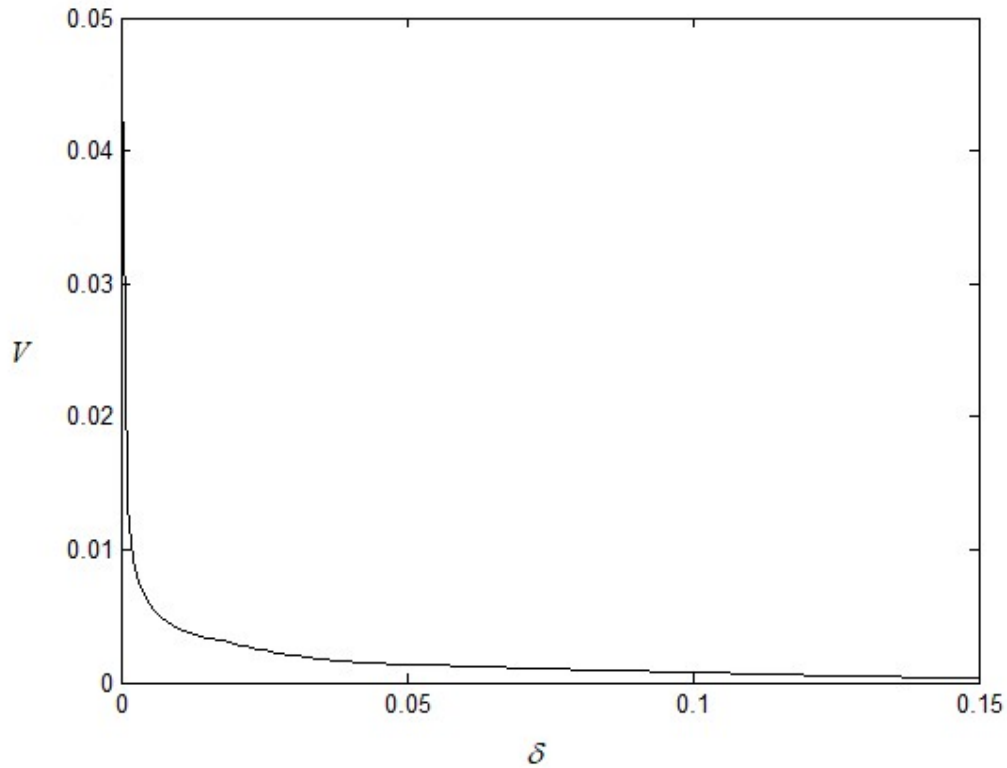


Рисунок 1.7. График зависимости объема вписанного эллипсоида от δ

Проведенные исследования показывают, что на размеры области $E(X_1) \cap E(X_2)$ наибольшее влияние оказывает наличие в задаче ограничения на управление. Так, при изменении значения параметра δ от 0 до 0.1 объем эллипсоида $E(X_1)$ меняется от 0.4678 до 0.1303. В то же время объем эллипсоида $E(X_2)$ меняется от 0.1161 до 0.0008. Из графика, приведенного на рисунке 1.7, следует, что при относительно небольшом увеличении значения δ , объем вписанного в множество $E(X_1) \cap E(X_2)$ эллипсоида, имеющего наибольший объем, существенно уменьшается.

Глава 2. Стабилизация линейных динамических систем с помощью управления по измеряемому выходу при ограничениях на фазовые переменные

При решении практических задач управления реальными физическими объектами полная информация о состоянии системы обычно недоступна измерению. Как правило доступна измерению лишь часть фазовых переменных или их линейная комбинация. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации линейных динамических систем с помощью управления по измеряемому выходу системы.

В данной главе обсуждается решение задачи стабилизации линейной динамической системы с помощью управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу. Приведены два основных подхода к поиску матрицы параметров закона управления. Сформулирована и решена задача поиска управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу, которое обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Подход к решению задачи основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Получены достаточные условия для нахождения матрицы параметров обратной связи. Приведен подход, который позволяет получить оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы.

Также поставлена задача об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по измеряемому выходу линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в том случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных. В терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы в указанной ситуации.

В качестве примеров рассмотрены две задачи: стабилизация перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе. Для данных объектов получены законы управления по измеряемому выходу и оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при выполнении заданных ограничений на фазовые переменные. Рассмотрен вопрос о влиянии наличия ошибки в измерениях выходных переменных на оценку области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

2.1. Предварительные сведения

Задача стабилизации линейной динамической системы с помощью управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу является одной из важных и сложных теоретических проблем в теории управления. Актуальность и важность этой задачи связана с ее практической значимостью. Вместе с тем до настоящего времени не найден алгоритм решения, который позволил бы однозначно найти матрицу параметров закона управления или однозначно определить, что такой матрицы не существует. Это связано с тем, что решение задачи поиска закона управления по измеряемому выходу сводится к решению систем билинейных матричных неравенств. Как отмечают авторы в работе [74], проблема решения билинейных матричных неравенств, в отличие от решения системы линейных матричных неравенств, относится к числу NP-трудных задач. В настоящее время известно и реализовано несколько алгоритмов для решения таких неравенств.

Рассмотрим линейную управляемую систему с не измеряемым состоянием

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.1.1)$$

$$y = Cx, \quad (2.1.2)$$

где $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^l$ – управление, $l < n$, $y \in R^k$ – измеряемый выход системы, $k < n$. A , B и C – заданные матрицы соответствующих размеров. Предполагаем, что пара (A, B) – стабилизируема, а пара (A, C) – детектируема.

Рассмотрим вопрос о поиске управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу вида

$$u = \Theta y, \quad (2.1.3)$$

которое будет обеспечивать асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2.1.1)–(2.1.3).

Существует несколько подходов к поиску матрицы параметров закона управления Θ .

Запишем замкнутую систему (2.1.1) -- (2.1.3) в виде

$$\dot{x} = (A + B\Theta C)x. \quad (2.1.4)$$

Первый подход к решению задачи стабилизации системы (2.1.1)–(2.1.2) с помощью закона управления (2.1.3) связан с вопросом размещения полюсов замкнутой системы (2.1.4). Он состоит в поиске матрицы Θ с действительными элементами, при которой все корни характеристического полинома замкнутой системы

$$\det(\lambda I_{n \times n} - A - B\Theta C) = \lambda^n - a_1(\Theta)\lambda^{n-1} + \dots + a_n(\Theta) = 0,$$

где $I_{n \times n}$ – единичная матрица размера $n \times n$; $a_1, \dots, a_n \in R$, будут иметь отрицательные действительные части.

Заметим, что на первый взгляд, кажется, что эта задача может быть решена с помощью применения критерия Рауса-Гурвица [13]. Однако его применение приводит к необходимости поиска решения системы нелинейных неравенств относительно неизвестных элементов матрицы Θ . Решение их в свою очередь вызывает сложность в случае большой размерности матрицы Θ .

Второй подход к поиску матрицы обратной связи основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств.

Для квадратичной функции Ляпунова $V = x^T X x$ с матрицей $X = X^T > 0$ на любой траектории замкнутой системы (2.1.4) верно условие

$$\dot{V}(x) = x^T (A + B\Theta C)^T X x + x^T X (A + B\Theta C) x < 0. \quad (2.1.5)$$

Неравенство (2.1.5) эквивалентно матричному неравенству

$$A^T X + XA + C^T \Theta^T B^T X + XB\Theta C < 0 \quad (2.1.6)$$

относительно неизвестных матриц X и Θ . Заметим, что если неравенство (2.1.6) умножить слева и права на матрицу $Y = X^{-1}$, то оно может быть записано в эквивалентной форме

$$YA^T + AY + YC^T \Theta^T B^T + B\Theta CY < 0 \quad (2.1.7)$$

относительно неизвестных матриц Y и Θ .

Сложность решения матричных неравенств (2.1.6), (2.1.7) состоит в том, что они являются билинейными матричными неравенствами относительно неизвестных матриц X , Θ и Y , Θ соответственно. Билинейные матричные неравенства – это такие матричные неравенства, которые становятся линейными, если мы фиксируем одну из двух неизвестных матриц.

Задача поиска решения билинейных матричных неравенств (2.1.6) или (2.1.7) не принадлежит классу задач выпуклого программирования. В настоящее время отсутствуют эффективные с вычислительной точки зрения численные методы решения такого класса задач.

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 2.1. Следующие три утверждения эквивалентны и обеспечивают существование управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу вида (2.1.3), которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2.1.1) -- (2.1.3).

- (а) Все собственные числа матрицы $A + B\Theta C$ лежат в левой полуплоскости;
- (б) Существует симметричная матрица X , удовлетворяющая матричным неравенствам:

$$X > 0, \quad A^T X + XA + C^T \Theta^T B^T X + XB\Theta C < 0; \quad (2.1.8)$$

- (с) Существует симметричная матрица Y , удовлетворяющая матричным неравенствам:

$$Y > 0, \quad YA^T + AY + YC^T \Theta^T B^T + B \Theta CY < 0. \quad (2.1.9)$$

Заметим, что разработанные в настоящее время алгоритмы [2, 3, 39, 41, 43, 44, 46, 50, 51, 57, 60, 71-73, 78] поиска матрицы параметров закона управления (2.1.3), стабилизирующего систему (2.1.1), (2.1.2), основанные на применении метода функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств, направлены на поиск решения матричных неравенств (2.1.8) или (2.1.9). При этом ни один из предложенных в настоящее время алгоритмов решения систем неравенств (2.1.8) или (2.1.9) не гарантирует нахождение матрицы обратной связи.

Заметим также, что задача поиска матрицы параметров закона управления существенно усложняется, когда нужно найти управление (2.1.3) которое обеспечивает не только асимптотическую устойчивость состояния равновесия замкнутой системы, но также обеспечивает заданные характеристики замкнутой системы (2.1.4). Например, обеспечивает выполнение заданных ограничений на фазовые переменные системы.

2.2. Постановка задачи стабилизации с помощью управления по измеряемому выходу системы при ограничениях на фазовые переменные

Рассмотрим следующую задачу стабилизации динамической системы при ограничениях фазовых переменные. Дан линейный управляемый объект с не измеряемым состоянием

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (2.2.1)$$

$$z_i = C_i x, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.2.2)$$

где $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^l$ – управление, $l < n$, $z_i \in R^{m_i}$ – управляемые выходы системы; A , B и C_i – заданные матрицы соответствующих размеров. Предполагаем, что пара (A, B) – стабилизируема, а пара (A, C) – детектируема.

Введем измеряемый выход системы

$$y = Cx, \quad (2.2.3)$$

где $y \in R^k$, $k < n$. C – заданная матрица размера $k \times n$.

Требуется построить управление в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу

$$u = \Theta y, \quad (2.2.4)$$

которое будет обеспечивать асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2.2.1)–(2.2.4) и выполнение при заданных значениях γ_i ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.2.5)$$

2.3. Достаточные условия существования закона управления

Запишем уравнения замкнутой системы (2.2.1) -- (2.2.4) в виде

$$\dot{x} = (A + B\Theta C)x, \quad (2.3.1)$$

$$z_i = C_i x, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.3.2)$$

Заметим, что если функция $V(x) = x^T X x$ с матрицей $X = X^T > 0$ является квадратичной функцией Ляпунова системы (2.3.1), тогда все траектории этой системы, выходящие из множества $E(X) = \{x : x^T X x \leq 1\}$, ограниченного эллипсоидом $x^T X x = 1$, вписанным в область фазового пространства, которая задана неравенствами $|z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}$, удовлетворяют ограничениям (2.2.5). Тогда область фазового пространства, определяемую объединением всех таких множеств $E(X)$ при всевозможных функциях Ляпунова указанного вида, можно выделить в терминах линейных матричных неравенств следующим образом.

Теорема 2.2. Пусть взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0, Y = Y^T > 0$ и величины $\gamma_i > 0, i = \overline{1, N}$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$W_{B^T}^T (YA^T + AY) W_{B^T} < 0, \quad (2.3.3)$$

$$W_C^T (A^T X + XA) W_C < 0,$$

$$C_i^T C_i \leq \gamma_i^2 X, \quad i = \overline{1, N},$$

где столбцы матриц W_{B^T}, W_C образуют базисы ядер матриц B^T, C соответственно, т.е. $B^T W_{B^T} = 0, C W_C = 0$. Тогда все траектории системы (2.3.1) с начальными условиями $x(0) \in E(X)$ удовлетворяют ограничениям (2.2.5). Матрицу параметров закона управления (2.2.4) для линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные находим как решение относительно неизвестной матрицы Θ линейного матричного неравенства

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0,$$

где $\Psi = YA^T + AY, P = CY, Q = B^T$.

Доказательство. Покажем, что выполнение первого и второго неравенств системы (2.3.3) обеспечивает выполнение условия – квадратичная функция $V = x^T X x$ с матрицей

$X = X^T > 0$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы. На любой траектории замкнутой системы (2.3.1) верно условие

$$\dot{V}(x) = x^T (A + B\Theta C)^T X x + x^T X (A + B\Theta C) x < 0,$$

которое эквивалентно матричному неравенству

$$A^T X + XA + C^T \Theta^T B^T X + XB\Theta C < 0. \quad (2.3.4)$$

В неравенстве (2.3.4) неизвестными являются матрицы X и Θ . Оно является линейным относительно неизвестной матрицы X в случае, когда известна матрица Θ , а также является линейным относительно неизвестной матрицы Θ при заданной матрице X . Следовательно, это билинейное матричное неравенство. Умножая слева и справа неравенство (2.3.4) на матрицу $Y = X^{-1}$, запишем неравенство в виде

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (2.3.5)$$

где $\Psi = YA^T + AY$, $P = CY$, $Q = B^T$.

Условия разрешимости неравенства (2.3.5) относительно неизвестной матрицы Θ обсуждаются в работе [3]. Авторы приводят доказательство того, что неравенство (2.3.5) всегда разрешимо в случае, когда $\Psi \in R^{n \times n}$ – заданная симметричная матрица, а ранги матриц P и Q равны n . В том случае, когда $\Psi \in R^{n \times n}$ – заданная симметричная матрица, ранг матрицы P равен n , а ранг Q меньше n , неравенство (2.3.5) разрешимо тогда и только тогда, когда разрешимо относительно неизвестной матрицы Θ матричное неравенство

$$W_Q^T \Psi W_Q < 0,$$

где столбцы матрицы W_Q образуют базис ядра матрицы Q , т.е. $QW_Q = 0$. Наконец, в случае, когда $\Psi \in R^{n \times n}$ – заданная симметричная матрица, а ранги обеих матриц P и Q меньше n , неравенство (2.3.5) разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства

$$\begin{cases} W_Q^T \Psi W_Q < 0, \\ W_P^T \Psi W_P < 0, \end{cases} \quad (2.3.6)$$

где столбцы матриц W_Q и W_P образуют базисы ядер матриц Q и P соответственно, т.е. $QW_Q = 0$, $PW_P = 0$.

Применим это утверждение для решения задачи. Заметим, что согласно постановке задачи стабилизации с помощью управления по измеряемому выходу системы при ограничениях на фазовые переменные, матрицы $C \in R^{k \times n}$, $B \in R^{n \times l}$, где $k < n$, $l < n$. Следовательно, ранги обеих матриц Q и P меньше n . Поэтому актуальным является третий случай разрешимости неравенства (2.3.5) относительно неизвестной матрицы Θ .

Первое неравенство (2.3.6) является первым в системе матричных неравенств (2.3.3). Заметив, что $W_p = XW_{\bar{p}}$, где $\bar{P} = C$, $X = Y^{-1}$ и, подставив это выражение во второе неравенство системы (2.3.6), получим второе неравенство системы (2.3.3).

Покажем, что любое решение третьего неравенства системы (2.3.3) обеспечивает выполнение условий $|z_i(t)| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$, т.е. гарантирует, что фазовая траектория системы удовлетворяет заданным ограничениям. В главе 1 в § 1.1 для квадратичных форм была сформулирована S - процедура при одном ограничении [9]. Применим утверждение для решения задачи. Для каждого индекса i согласно неущербности S-процедуры при одном ограничении, неравенство $|z_i(t)|^2 \leq \gamma_i^2$ выполнено для всех x , удовлетворяющих неравенству $x^T X x \leq 1$, тогда и только тогда, когда для некоторого числа $\lambda_i > 0$ и для всех x выполнено неравенство

$$|z_i(t)|^2 - \gamma_i^2 - \lambda_i(x^T X x - 1) \leq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.3.7)$$

Представим (2.3.7) в виде

$$x^T (C_i^T C_i - \lambda_i X) x + \lambda_i - \gamma_i^2 \leq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.3.8)$$

Неравенство (2.3.8) верно для всех x . Значит, $\lambda_i \leq \gamma_i^2$ и $C_i^T C_i \leq \lambda_i X$. Следовательно,

$$C_i^T C_i \leq \gamma_i^2 X, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.3.9)$$

Матричные неравенства (2.3.9) соответствуют третьему неравенству системы (2.3.3).

Предположим, что найдены взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющие системе матричных неравенств (2.3.3). Тогда матрицу параметров закона управления (2.2.4) находим как решение относительно неизвестной матрицы Θ линейного матричного неравенства (2.3.5). Теорема 2.2 доказана.

Заметим, что, несмотря на то, что (2.3.3) – это система линейных матричных неравенств, требование взаимнообратности матриц X , Y , добавляет к неравенствам (2.3.3) условие

$$XY = I, \quad (2.3.10)$$

где I – единичная матрица. Таким образом, для поиска закона управления требуется найти решение относительно неизвестных матриц X , Y системы билинейных матричных неравенств (2.3.3), (2.3.10). В настоящее время отсутствуют эффективные с вычислительной точки зрения численные методы решения такого класса задач.

Заметим, что для решения системы билинейных матричных неравенств (2.3.3), (2.3.10) могут быть применены алгоритмы, описанные в [2, 3, 51, 71-73, 78] и в других работах. Приведем несколько алгоритмов поиска взаимнообратных матриц.

Основная идея алгоритма предложенного в статье [51] состоит в рассмотрении следующей оптимизационной задачи: минимизировать след матрицы XY при ограничениях, заданных системой линейных матричных неравенств

$$L_i(X, Y) < 0, \quad i = \overline{1, M} \quad (2.3.11)$$

относительно неизвестных взаимнообратных матриц X и Y . Здесь M – это количество линейных матричных неравенств. Нетрудно видеть, что требуемый закон управления по измеряемому выходу существует тогда и только тогда, когда минимум следа матрицы XY равен n . Если линеаризовать функцию

$$\text{trace}(XY) \approx \text{const} + \text{tr}(Y_0 X + X_0 Y)$$

в точке (X_0, Y_0) , где $\text{trace}(XY)$ означает след матрицы XY , то алгоритм решения системы билинейных матричных неравенств (2.3.3), (2.3.10) можно представить следующим образом.

Алгоритм 2.1.

Шаг 1. Находим точку (X_0, Y_0) такую, что при $X = X_0$, $Y = Y_0$ линейные матричные неравенства (2.3.3) разрешимы. Если такая точка не найдена, то **Алгоритм 2.1** останавливается, а задача стабилизации не имеет решения.

Шаг 2. Полагаем значение $j = 0$.

Шаг 3. Фиксируем $V_j = Y_j$, $W_j = X_j$ и находим матрицы X_{j+1} , Y_{j+1} , которые решают задачу

$$\min_{X, Y} \text{trace}(V_j X + W_j Y) = \text{trace}(Y_j X_{j+1} + X_j Y_{j+1})$$

при ограничениях, определяемых линейными матричными неравенствами (2.3.3).

Шаг 4. Полагаем значение $t_j = \text{trace}(Y_j X_{j+1} + X_j Y_{j+1})$.

Шаг 5. Если разность между двумя итерациями $|t_j - t_{j-1}| < \varepsilon$, где ε – некоторое заданное значение, то взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$ найдены и **Алгоритм 2.1** останавливается. Иначе полагаем $j = j + 1$ и переходим на **Шаг 3**.

В работе [51] доказана теорема о том, что последовательность t_j , генерируемая данным алгоритмом, является невозрастающей и ограничена снизу числом $2n$. Значение предела этой последовательности $t_{\min} \geq 2n$, где равенство достигается тогда и только тогда, когда в предельной точке $XY = I$.

В работе [2] авторы предлагают алгоритм для решения следующей задачи. Ставится задача поиска двух взаимнообратных матриц $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$ ($XY = I$), которые

удовлетворяют относительно X и Y системе линейных матричных неравенств $L_i(X, Y) < 0$, $i = 1, 2$. Обозначим эту задачу как **Задача 1**.

Подход к решению **Задачи 1** состоит в рассмотрении вспомогательной задачи.

Задача 2. Требуется найти

$$\lambda_{\min} = \min \{ \lambda : X - Y^{-1} \leq \lambda I, \ X > 0, \ Y > 0, \ L_i(X, Y) < 0, \ i = 1, 2, \ L_3(X, Y) \leq 0 \},$$

где $L_3(X, Y) = \begin{pmatrix} -X & I \\ I & -Y \end{pmatrix}$.

Заметим, что дополнительное линейное матричное неравенство $L_3(X, Y) \leq 0$ в силу леммы Шура [36] будет эквивалентно неравенству $X \geq Y^{-1}$. Поэтому в случае, когда в **Задаче 2** значение $\lambda_{\min} = 0$, соответствующие матрицы X и Y будут являться также и решением **Задачи 1**.

В **Задаче 2** требуется минимизировать линейную функцию при ограничениях, одно из которых

$$X - Y^{-1} \leq \lambda I \quad (2.3.12)$$

не является выпуклым. Следовательно, оно не может быть представлено в виде линейного матричного неравенства. Это обстоятельство не позволяет решать **Задачу 2** методами выпуклой оптимизации. В связи с этим авторы рассматривают еще одну вспомогательную задачу.

Задача 3. Требуется найти

$$\lambda_{\min} = \min \{ \lambda : F(X, Y, G_1, G_2) \leq \lambda I, \ X > 0, \ Y > 0, \ L_i(X, Y) < 0, \ i = 1, 2, \ L_3(X, Y) \leq 0 \},$$

где $F(X, Y, G_1, G_2) = X + Y + 2G_1 + 2G_2 + G_1 Y G_1 + G_2 X G_2$, $G_i = G_i^T$, $i = 1, 2$ – некоторые заданные матрицы соответствующих размеров.

В **Задаче 3** по сравнению с **Задачей 2** вместо неравенства (2.3.12) стоит линейное матричное неравенство $F(X, Y, G_1, G_2) \leq \lambda I$. Запишем функцию $F(X, Y, G_1, G_2)$ в виде

$$F(X, Y, G_1, G_2) = (G_1 + Y^{-1})Y(G_1 + Y^{-1}) + (G_2 + X^{-1})X(G_2 + X^{-1}) + (X - Y^{-1}) + (Y - X^{-1}).$$

Нетрудно видеть, что в силу неравенства $X \geq Y^{-1}$ функция $F(X, Y, G_1, G_2) \geq 0$, и если $G_1 = -Y^{-1}$, $G_2 = -X^{-1}$ и $\lambda_{\min} = 0$, то соответствующие решения X и Y **Задачи 3** является также и решением **Задачи 2**.

Следовательно, алгоритм поиска двух взаимнообратных матриц X и Y , которые удовлетворяют системе линейных матричных неравенств $L_i(X, Y) < 0$, $i = 1, 2$, имеет следующий вид.

Алгоритм 2.2.

Шаг 1. Полагаем значение $j = 0$.

Шаг 2. Фиксируем матрицы $G_1 = G_1^{(j)}$ и $G_2 = G_2^{(j)}$.

Шаг 3. Решаем **Задачу 3**, например, с помощью команды `mincx` пакета Matlab и находим λ_{j+1} и матрицы X_j, Y_j .

Шаг 4. Задаем матрицы $G_1^{(j+1)} = -Y_j^{-1}$, $G_2^{(j+1)} = -X_j^{-1}$.

Шаг 5. Если разность между двумя итерациями $\lambda_j < \varepsilon$ или $|\lambda_{j+1} - \lambda_j| < \varepsilon$, где ε – некоторое заданное значение, то взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$ и $Y = Y^T > 0$ найдены и **Алгоритм 2.2** останавливается. Иначе полагаем значение $j = j + 1$ и переходим на **Шаг 2**.

В работе [2] доказана теорема о том, что для любых начальных матриц $G_1^{(0)}$ и $G_2^{(0)}$ числовая последовательность λ_j , генерируемая данным алгоритмом, является невозрастающей и существуют следующие пределы

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_j = \lambda_*, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} X_j = X_*, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = Y_*.$$

Возможны две ситуации. В случае, когда значение $\lambda_* = 0$, будет выполнено условие $X_* Y_* = I$. Следовательно, матрицы X_* , Y_* являются решениями исходной **Задачи 1**. Во втором случае, когда значение $\lambda_* > 0$, нельзя сделать определенного вывода о разрешимости **Задачи 1**. В данной ситуации целесообразно повторить алгоритм поиска взаимнообратных матриц при других начальных условиях $G_1 = G_1^{(0)}$ и $G_2 = G_2^{(0)}$, как это обычно делают в задачах глобальной оптимизации.

Заметим, что недостатком обоих алгоритмов является их чувствительность к выбору начальных условий. Поэтому остановки алгоритмов в случае, когда $XY \neq I$, еще не означают, что требуемого закона управления не существует. В этом случае можно попробовать применить указанные алгоритмы при других начальных условиях.

Заметим также, что критерием остановки обоих алгоритмов является условие, что разность между двумя итерациями меньше некоторого заданного значения. В связи с этим при численной реализации алгоритмов возможна ситуация, когда матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющие соответствующей системе матричных неравенств найдены, но при этом они не являются взаимнообратными.

В качестве примера рассмотрим задачу стабилизации перевернутого маятника

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u$$

с помощью управления в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу

$$u = \Theta y.$$

Предполагаем, что доступен измерению только φ – угол отклонения звена маятника. Следовательно, измеряемый выход имеет вид

$$y = \varphi.$$

Обозначив $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1 = (1 \ 0)$, представим объект в виде (2.1.1), (2.1.2). Согласно [3] закон управления по измеряемому выходу существует тогда и только тогда, когда две взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ удовлетворяют неравенствам

$$W_{B^T}^T (YA^T + AY) W_{B^T} < 0,$$

$$W_C^T (A^T X + XA) W_C < 0,$$

где столбцы матриц W_{B^T} , W_C образуют базисы ядер матриц B^T , C соответственно. В нашем случае

$$W_{B^T} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, W_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix}.$$

Поэтому условие разрешимости указанных неравенств сводится к выполнению условий

$$x_{12} < 0, y_{12} < 0.$$

В качестве приближенного решения задачи, например, рассмотрим две удовлетворяющие этим неравенствам положительно определенные матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 1+\delta & -\delta^2 \\ -\delta^2 & 1+\delta \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1+\delta & -\delta^2 \\ -\delta^2 & 1+\delta \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что при значениях $|\delta|$ сколь угодно близких к нулю, произведение этих матриц будет сколь угодно близко к единичной матрице. Казалось бы закон управления должен существовать. Вместе с тем, легко проверить, что такого закона управления в принципе не существует, т.к. матрица замкнутой системы ни при каком Θ не является гурвицевой.

Из теоремы 2.2 следует, что если матрица Θ параметров закона управления (2.2.4) найдена, то для всех начальных состояний $x(0) \in E(X)$ фазовые траектории замкнутой системы (2.3.1), будут асимптотически приближаться к нулевому состоянию и не выходить за границы множества, задаваемого ограничениями (2.2.5). Заметим, что если матрица обратной связи Θ найдена, то можно уточнить множество начальных состояний, для которых полученный закон управления стабилизирует замкнутую систему. Для этого рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть требуется найти множество начальных состояний $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$, при которых управление с матрицей обратной связи Θ обеспечивает для каждого индекса i стабилизацию замкнутой системы (2.3.1) при одном ограничении

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i. \quad (2.3.13)$$

Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. Пусть матрица $X_i = X_i^T > 0$ удовлетворяет системе линейных матричных неравенств

$$A^T X_i + X_i A + C^T \Theta^T B^T X_i + X_i B \Theta C < 0, \quad (2.3.14)$$

$$C_i^T C_i \leq \gamma_i^2 X_i.$$

Тогда все траектории системы (2.3.1) с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$ удовлетворяют ограничению (2.3.13).

Доказательство. В случае выполнения первого неравенства системы (2.3.14) квадратичная функция $V = x^T X_i x$ с матрицей $X_i = X_i^T > 0$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы (2.3.1), по любой траектории которой выполнено неравенство

$$\dot{V}(x) = x^T (A + B \Theta C)^T X_i x + x^T X_i (A + B \Theta C) x < 0.$$

Следовательно, выполнение первого неравенства системы (2.3.14) обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния равновесия замкнутой системы (2.3.1).

Покажем, что любое решение второго неравенства системы (2.3.14) обеспечивает выполнение условия $|z_i(t)| \leq \gamma_i$. Согласно неущербности S-процедуры при одном ограничении, неравенство $|z_i(t)|^2 \leq \gamma_i^2$ выполнено для всех x , удовлетворяющих неравенству $x^T X_i x \leq 1$, тогда и только тогда, когда для некоторого числа $\lambda_i > 0$ и для всех x выполнено неравенство

$$|z_i(t)|^2 - \gamma_i^2 - \lambda_i (x^T X_i x - 1) \leq 0. \quad (2.3.15)$$

Представим (2.3.15) в виде

$$x^T (C_i^T C_i - \lambda_i X_i) x + \lambda_i - \gamma_i^2 \leq 0. \quad (2.3.16)$$

Неравенство (2.3.16) верно для всех x . Значит, $\lambda_i \leq \gamma_i^2$ и $C_i^T C_i \leq \lambda_i X_i$. Следовательно,

$$\overline{C}_i^T \overline{C}_i \leq \gamma_i^2 X_i. \quad (2.3.17)$$

Матричное неравенство (2.3.17) соответствует второму неравенству системы (2.3.14). Теорема 2.3 доказана.

Заметим, что существует бесконечное множество матриц X_i , удовлетворяет системе матричных неравенств (2.3.14). Это в свою очередь означает, что существует бесконечное множество начальных состояний, определяемых соответствующими эллипсоидами $E(X_i)$. Поэтому возникает желание найти множество, которое является «максимальным» в соответствии с некоторым критерием. В частности, в качестве критериев для поиска множества,

обладающего в некотором смысле «максимальными» размерами, могут выступать минимизация следа матрицы X_i при ограничениях, задаваемых линейными матричными неравенствами (2.3.14), или максимизация объема соответствующего эллипсоида.

Пусть каждая из матриц X_i , $i = \overline{1, N}$, имеет минимальный след и является решением системы (2.3.14) для значения γ_i . Тогда все траектории замкнутой системы (2.3.1) с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$, $E(X_i) = \{x: x^T X_i x \leq 1\}$ будут удовлетворять для каждого индекса i ограничению (2.3.13). Следовательно, для всех начальных состояний $x(0) \in \bigcap_{i=1}^N E(X_i)$, управление с заданной матрицей обратной связи Θ стабилизирует замкнутую систему при ограничениях (2.2.5). Другими словами, множество $\bigcap_{i=1}^N E(X_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях (2.2.5).

2.4. Постановка задачи об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы

Предположим, что для объекта (2.2.1) -- (2.2.3) решена задача стабилизации с помощью управления по измеряемому выходу системы при ограничениях на фазовые переменные и найден закон управления (2.2.4). Заметим, что в реальной ситуации выходные переменные системы всегда измеряются с некоторой ошибкой. В этой связи введем переменную

$$y = C(I + \Delta(t))x, \quad (2.4.1)$$

измеряемый выход системы, где I – единичная матрица размера $n \times n$, а матрица $\Delta(t)$ определяет относительные ошибки измерения фазовых переменных и в любой момент времени удовлетворяет матричному неравенству

$$\Delta^T \Delta - \delta^2 I \leq 0$$

($\delta \neq 0$ – заданный параметр), представляющему ограничения на допустимые значения ошибок измерения.

Рассмотрим задачу стабилизации системы (2.2.1), (2.2.2), (2.4.1) с помощью управления по измеряемому выходу (2.2.4) с матрицей Θ , полученной как решение задачи стабилизации системы (2.2.1) -- (2.2.3) при ограничениях на фазовые переменные (2.2.5). Возникает вопрос о влиянии ошибок измерения фазовых переменных на выполнение ограничений (2.2.5). Другими словами, возникает вопрос о том, как изменится область притяжения состояния равновесия

замкнутой системы при ограничениях (2.2.5) в случае наличия ошибки в измеряемом выходе (2.4.1)?

2.5. Оценка области притяжения состояния равновесия в случае наличия ошибки в измеряемом выходе

Рассмотрим ситуацию, когда выходные переменные системы (2.2.1) измеряются с ошибкой. Представим измеряемый выход системы (2.4.1) в виде

$$y = Cx + Cw, \quad (2.5.1)$$

где $w = \Delta(t)x$. Так как матрица неопределенности $\Delta(t)$ удовлетворяет условию $\Delta^T \Delta \leq \delta^2 I$, то

$$w^T w \leq \delta^2 x^T x. \quad (2.5.2)$$

Обозначив $\bar{A} = A + B\Theta C$, $\bar{B} = B\Theta C$, запишем замкнутую систему (2.2.1), (2.2.2), (2.2.4), (2.5.1) в виде

$$\dot{x} = \bar{A}x + \bar{B}w, \quad (2.5.3)$$

$$z_i = C_i x, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5.4)$$

Сформулируем достаточные условия для поиска оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях (2.2.5), в которой управление (2.2.4) с матрицей Θ , полученной в задаче стабилизации линейной системы при ограничениях на фазовые переменные без учета ошибки в измеряемом выходе, будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть требуется найти оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой управление (2.2.4) с полученной матрицей параметров закона управления Θ обеспечивает для каждого индекса i стабилизацию системы (2.5.3) при одном ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. Пусть матрица $X_i = X_i^T > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T X_i + X_i \bar{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \bar{B} \\ \bar{B}^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \quad (2.5.5)$$

$$C_i^T C_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i \leq 0.$$

Тогда множество $E(X_i)$, $E(X_i) = \{x: x^T X_i x \leq 1\}$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (2.5.3) при ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Доказательство. Так как матрица параметров закона управления Θ задана, то система (2.5.3), (2.5.4) является частным случаем системы (1.3.3), (1.3.4) при $\bar{C}_i = C_i$, $\bar{D}_i = 0$. В главе 1 в § 1.3 показано, что для системы (1.3.3), (1.3.4) справедлива теорема 1.3. Согласно этой теореме, если матрица $X_i = X_i^T > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T X_i + X_i \bar{A} + \mu_1 \delta^2 I & X_i \bar{B} \\ \bar{B}^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \quad (2.5.6)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \bar{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & \bar{C}_i^T \bar{D}_i \\ \bar{D}_i^T \bar{C}_i & \bar{D}_i^T \bar{D}_i - \mu_2 I \end{pmatrix} \leq 0,$$

тогда множество $E(X_i)$, $E(X_i) = \{x: x^T X_i x \leq 1\}$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (1.3.3) при ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Первое матричное неравенство (2.5.6) совпадает с первым матричным неравенством (2.5.5). Второе матричное неравенство (2.5.6) для системы (2.5.3), (2.5.4) в силу условий $\bar{C}_i = C_i$, $\bar{D}_i = 0$ примет вид

$$\begin{pmatrix} C_i^T C_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & 0 \\ 0 & -\mu_2 I \end{pmatrix} \leq 0. \quad (2.5.7)$$

Неравенство (2.5.7) при $\mu_2 > 0$ эквивалентно второму матричному неравенству (2.5.5). Теорема 2.4 доказана.

Обозначим через X_i множество всех матриц X_i , удовлетворяющих неравенствам (2.5.5). Максимальную по всем $X_i \in X_i$ область $E(X_i^*)$ найдем путем минимизации следа матрицы X_i . Эта операция является стандартной в пакете программ для инженерных расчетов Matlab [49] с использованием приложениях CVX [53].

Пусть каждая из матриц X_i , $i = \overline{1, N}$, имеет минимальный след и является решением системы (2.5.5) для значения γ_i . Тогда все траектории замкнутой системы (2.5.3) с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$, $E(X_i) = \{x: x^T X_i x \leq 1\}$ будут удовлетворять ограничению

$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$. Следовательно, для всех начальных состояний $x(0) \in \bigcap_{i=1}^N E(X_i)$, управление с

заданной матрицей обратной связи Θ стабилизирует замкнутую систему при ограничениях

(2.2.5). Другими словами, множество $\bigcap_{i=1}^N E(X_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях (2.2.5).

2.6. Результаты численного моделирования

Пример 1. Стабилизация перевернутого маятника. В качестве примера рассмотрим управляемый перевернутый маятник

$$\ddot{\varphi} - \varphi = u \quad (2.6.1)$$

при ограничении на φ – угол отклонения звена маятника от вертикали

$$\max_{t \geq 0} |\varphi(t)| \leq 0.1. \quad (2.6.2)$$

Предполагаем, что φ – угол отклонения звена маятника, и $\dot{\varphi}$ – скорость изменения угла маятника измерению не доступны, но доступна измерению их линейная комбинация

$$y = \varphi + 10\dot{\varphi}.$$

Численное решение получено в пакете Matlab. Для объекта (2.6.1) решен ряд задач. В задаче о стабилизации объекта при отсутствии ошибки в измеряемом выходе найдено управление

$$u = -49.9677y, \quad (2.6.3)$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2.6.1), (2.6.3) и выполнение ограничения на фазовую переменную (2.6.2). Управление (2.6.3) получено в результате применения алгоритма 2.2 для поиска взаимнообратных матриц X и Y , удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств (2.3.3). В результате вычислений получена матрица

$$X = \begin{pmatrix} 100.0006 & 0 \\ 0 & 2.0423 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 2.2 все траектории замкнутой системы (2.6.1), (2.6.3) с начальными условиями $x(0) \in E(X)$, $E(X) = \{x : x^T X x \leq 1\}$, удовлетворяют ограничению (2.6.2). Другими словами, множество $E(X)$, является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы.

На рисунке 2.1 и рисунке 2.2 в фазовой плоскости пунктиром отмечены прямые $\varphi = -0.1$ и $\varphi = 0.1$.

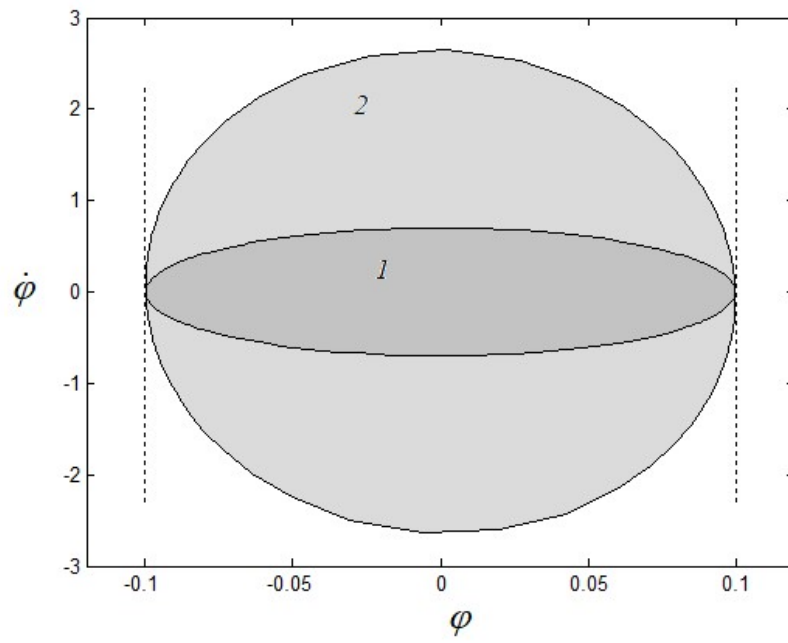


Рисунок 2.1. Оценки для области притяжения состояния равновесия системы, полученная в задаче стабилизации перевернутого маятника при ограничении по углу

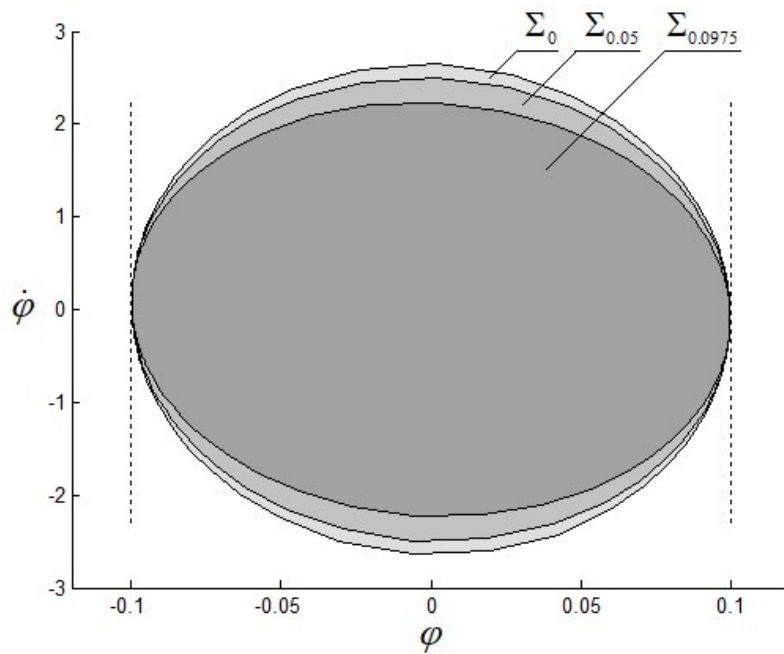


Рисунок 2.2. Пересечение областей Σ_0 , $\Sigma_{0.05}$ и $\Sigma_{0.0975}$

На рисунке 2.1 эллипс 1 ограничивает множество $E(X)$, являющееся оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой управление (2.6.3) обеспечивает стабилизацию перевернутого маятника при ограничении на угол отклонения маятника φ .

Данная оценка для области притяжения была уточнена в результате поиска матрицы X_i имеющей минимальный след и удовлетворяющей системе линейных матричных неравенств (2.3.14). В результате вычислений получена матрица

$$X_i = \begin{pmatrix} 100.0829 & 0.1088 \\ 0.1088 & 0.1429 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 2.3 все траектории замкнутой системы (2.6.1), (2.6.3) с начальными условиями $x(0) \in E(X_i)$, $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$, удовлетворяют ограничению (2.6.2). Другими словами, множество $E(X_i)$ также является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. На рисунке 2.1 эллипс 2 ограничивает множество $E(X_i)$, которое является данной уточненной оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы.

Заметим, что площадь эллипса $E(X_i) = \{x : x^T X_i x \leq 1\}$ существенно больше площади эллипса $E(X) = \{x : x^T X x \leq 1\}$. Следовательно, применение теоремы 2.3 является актуальным при решении задач стабилизации линейных динамических систем с помощью управления по измеряемому выходу при ограничениях на фазовые переменные.

Найдем изменение оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой управление (2.6.3) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Обозначим через Σ_δ оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой управление стабилизирует систему при заданном значении δ . Здесь множество $\Sigma_\delta = \{x : x^T X_1^* x \leq 1\}$, где матрица X_1^* – это матрица с минимальным следом, которая удовлетворяет системе линейных матричных неравенств (2.5.5) при заданных значениях δ и $\gamma_1 = 0.1$.

На рисунке 2.2 приведены области Σ_0 , $\Sigma_{0.05}$, $\Sigma_{0.0975}$, соответствующие значениям $\delta = 0$, $\delta = 0.05$, $\delta = 0.0975$, и показано пересечение этих областей. Область $\Sigma_{0.0975}$ лежит внутри области $\Sigma_{0.05}$, которая в свою очередь лежит внутри области Σ_0 . Заметим, что для значений $\delta > 0.0975$ система линейных матричных неравенств (2.5.5) не имела решений.

Проведенные вычисления показывают, что эллипсы, отвечающие за ограничения на угол отклонения звена маятника при значениях $\delta = 0$, $\delta = 0.05$ и $\delta = 0.0975$, близки друг к другу. Таким образом, на размер области Σ_δ оказывает влияние, как значение параметра δ , так и наличие в задаче ограничения на угол отклонения маятника φ .

Вычислим зависимость площади S области Σ_δ от величины δ , которая определяет величину ошибки в изменяемом выходе. На рисунке 2.3 представлен график этой зависимости. В частности, получены значения $S(0) = 0.8311$, $S(0.05) = 0.7857$, $S(0.0975) = 0.7011$.

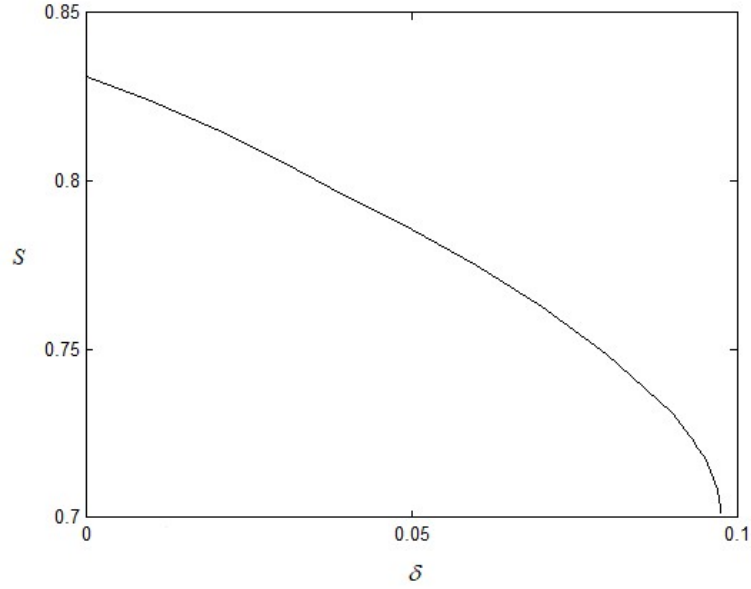


Рисунок 2.3. График зависимости площади области Σ_δ

Таким образом, при увеличении значения δ размер области Σ_δ уменьшается.

Пример 2. Стабилизация тела в электромагнитном подвесе. Рассмотрим задачу стабилизации ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе одностороннего действия с помощью управления по измеряемому выходу при ограничениях на фазовые переменные.

В главе 1 в § 1.4 построена математическая модель движения тела в электромагнитном подвесе одностороннего действия. Показано, что уравнения (1.4.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+x_3}{1-x_1} \right)^2 - \frac{1}{2}, \\ \dot{x}_3 &= - \left(\frac{1+x_3}{1-x_1} \right) x_2 - \alpha(1-x_1)x_3 + (1-x_1)u,\end{aligned}\tag{2.6.4}$$

где x_1 — это величина, пропорциональная смещению тела в электромагнитном подвесе, x_2 — величина, пропорциональная скорости смещению тела, x_3 — величина, пропорциональная силе тока в цепи электромагнита, а α — параметр.

Линеаризованную систему (2.6.4) в окрестности состояния равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.6.5)$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что состояние системы измерению не доступно, но доступны измерению величины x_1, x_2 . Следовательно, измеряемый выход системы имеет вид

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x.$$

Численное решение получено в пакете Matlab. Пусть значение параметра системы $\alpha = 7.5$. Для объекта (2.6.5) решен ряд задач. В случае отсутствия ошибки в измеряемом выходе системы найдено управление

$$u = (-9.3195 \quad -3.6640) y, \quad (2.6.6)$$

которое обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (2.6.5), (2.6.6) и выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.1, \quad \max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq 0.1, \quad (2.6.7)$$

где x_1 – величина, пропорциональная смещению тела, x_3 – величина, пропорциональная силе тока в цепи электромагнита. Управление (2.6.6) получено в результате применения алгоритма 2.2 для поиска взаимнообратных матриц X и Y , удовлетворяющих системе линейных матричных неравенств (2.3.3).

Найдем оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой управление (2.6.6) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Решение системы линейных матричных неравенств (2.5.5) при заданном параметре δ будут определять два множества $E(X_1) = \{x : x^T X_1 x \leq 1\}$, $E(X_2) = \{x : x^T X_2 x \leq 1\}$, которые являются оценками для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы для первого и второго ограничений (2.6.7) соответственно. Следовательно, множество $E(X_1) \cap E(X_2)$ будет оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при выполнении обоих ограничений.

На рисунке 2.4 представлено множество, полученное пересечением эллипсоидов $E(X_1)$ и $E(X_2)$ при значении параметра $\delta = 0$.

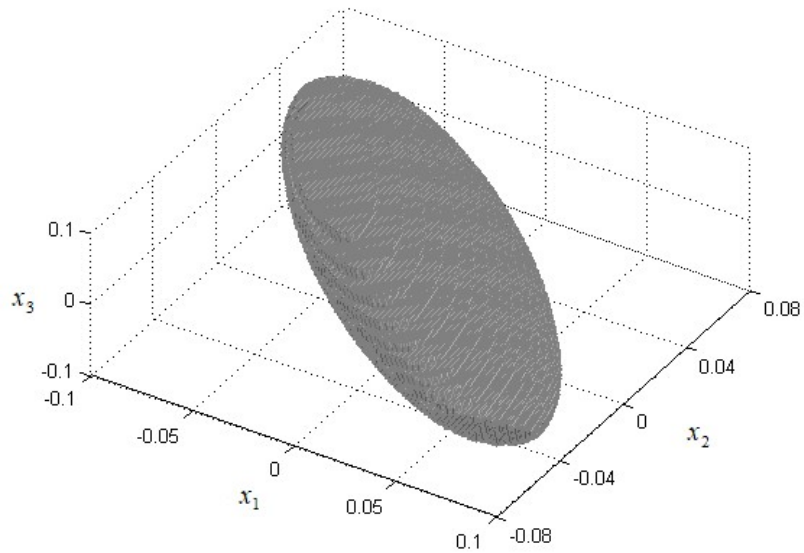


Рисунок 2.4. Оценка для области притяжения при значении параметра $\delta = 0$

Впишем в множество $E(X_1) \cap E(X_2)$ эллипсоид, имеющий наибольший объем. На рисунке 2.5 представлен график зависимости объема V данного эллипсоида от величины δ . В частности, получены значения $V(0) = 0.0015$, $V(0.05) = 0.0011$, $V(0.0965) = 0.000553$.

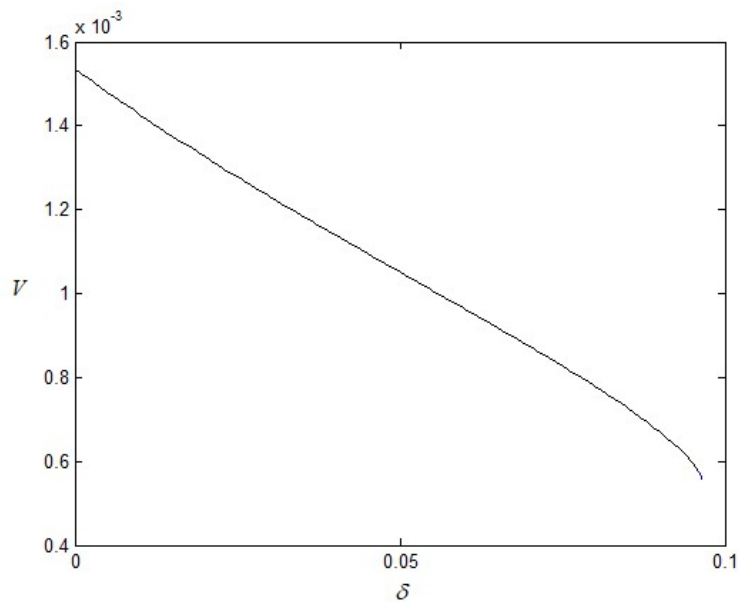


Рисунок 2.5. График зависимости объема вписанного эллипсоида от δ

Заметим, что для $\delta > 0.0965$ система линейных матричных неравенств (2.5.5) не имела решений, как для первого, так и для второго ограничения (2.6.7). Из графика следует, что при относительно небольшом увеличении значения δ размер вписанного в множество $E(X_1) \cap E(X_2)$ эллипсоида, имеющего наибольший объем, существенно уменьшается.

Глава 3. Стабилизация линейных систем с помощью динамического регулятора при ограничениях на фазовые переменные

Для стабилизации линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, в том случае, когда состояние системы не доступно измерению, наряду управлением в виде обратной связи по измеряемому выходу, могут применяться динамические регуляторы по измеряемому выходу. Динамический регулятор – это объект, который описывается системой дифференциальных уравнений заданного порядка. Говорят, что для системы построен динамический регулятор полного порядка, если размерность состояния регулятора совпадает с размерностью состояния системы. В случае, когда размерность состояния регулятора ниже размерности состояния системы, говорят, что для системы построен регулятор пониженного порядка.

В главе решается вопрос о синтезе динамических регуляторов по измеряемому выходу, которые будут обеспечивать стабилизацию линейной динамической системы с заданной степенью устойчивости и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Подход к решению задачи основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Получены достаточные условия для поиска матрицы параметров регулятора.

Также поставлена и решена задача об оценке области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой полученные динамические регуляторы для линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, будут обеспечивать стабилизацию и в том случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных. В терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия динамической системы в указанной ситуации.

В качестве примера рассмотрена задача стабилизации движения тела в электромагнитном подвесе. Для данного объекта получены динамические регуляторы полного и пониженного порядков и соответствующие им оценки для областей притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях на фазовые переменные. Проведено сравнение указанных динамических регуляторов с динамическими регуляторами по выходу, которые получены для изучаемого объекта без учета ограничений. Показано, что последние не обеспечивают выполнение заданных характеристик замкнутой системы.

Приведено сравнение поведения не линеаризованной и линеаризованной систем, замкнутых регуляторами полного и пониженного порядков, которые получены для изучаемого объекта при учете ограничений на фазовые переменные.

Приведена оценка множества допустимых ограничений на величину, пропорциональную смещению тела в электромагнитном подвесе и на величину, пропорциональную силе тока в цепи электромагнита при которых существует регулятор полного порядка.

Рассмотрен вопрос о влиянии наличия ошибки в измерениях выходных переменных на оценку области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

3.1. Предварительные сведения

В работе [3] для линейной управляемой системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (3.1.1)$$

$$y = Cx, \quad (3.1.2)$$

в предположении, что состояние системы не доступно измерению, поставлена и решена задача синтеза динамического регулятора

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned}$$

при котором замкнутая система будет асимптотически устойчивой. Здесь $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^m$ – управление, $y \in R^l$ – измеряемый выход системы, $x_r \in R^k$ – состояние регулятора ($k \leq n$), $x_r(0) = 0$. A , B , C – заданные матрицы соответствующих размеров.

Основная идея подхода к решению задачи состоит в следующем. Запишем уравнения замкнутой системы в виде

$$\dot{x}_c = A_c x_c, \quad (3.1.3)$$

где $x_c = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}$, $A_c = \begin{pmatrix} A + BD_r C & BC_r \\ B_r C & A_r \end{pmatrix}$, а начальные условия имеют вид $x_c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Цель управления формируется в виде выполнения по любой траектории замкнутой системы (3.1.3) неравенства

$$\dot{V}(x) < 0 \quad (3.1.4)$$

относительно квадратичной функции Ляпунова $V(x_c) = x_c^T X x_c$ с симметричной положительно определенной матрицей $X = X^T > 0$. Полученное неравенство может быть представлено в виде линейного матричного неравенства относительно неизвестной матрицы параметров регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

некоторого специального вида

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (3.1.6)$$

где Ψ , P , Q – матрицы соответствующих порядков, зависящие от исходных данных, причем симметричная матрица Ψ зависит также от неизвестной матрицы X функции Ляпунова. Согласно [3] это неравенство имеет непустое множество решений тогда и только тогда, когда выполнены два неравенства

$$W_Q^T \Psi W_Q < 0, \quad W_P^T \Psi W_P < 0 \quad (3.1.7)$$

в которых столбцы матриц W_Q и W_P образуют базисы ядер матриц Q и P соответственно. Неравенства (3.1.7) уже не содержат неизвестной матрицы Θ , поэтому являются линейными матричными неравенствами относительно матрицы X . Таким образом, исходная задача разделяется на две задачи. Сначала находим матрицу X , удовлетворяющую линейным матричным неравенствам (3.1.7). Затем найденную матрицу X подставляем в матричное неравенство (3.1.6) и находим параметры регулятора (3.1.5).

Данный результат был обобщен в работе [20]. В терминах линейных матричных неравенств получены достаточные условия для поиска динамических регуляторов как полного, так и пониженного порядков, которые обеспечивают стабилизацию замкнутой системы с заданной степенью устойчивости. Результаты численного моделирования, приведенные в работе, согласуются с теоретическими результатами.

В работах [4, 5] для управляемого объекта

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

$$y = Cx,$$

$$z_0 = C_0 x,$$

$$z_i = C_i x, \quad i = \overline{1, N},$$

в предположении, что состояние системы не доступно измерению, поставлена и решена задача синтеза динамического регулятора по выходу полного порядка

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r y,$$

$$u = C_r x_r + D_r y,$$

при котором замкнутая система будет асимптотически устойчивой и для траекторий с начальным состоянием x_0 достигается минимальное значение $\gamma_0 > 0$ такое, что

$$\max_{t \geq 0} |z_0(t)| \leq \gamma_0,$$

а также удовлетворяются фазовые ограничения

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^m$ – управление, $y \in R^l$ – измеряемый выход системы, $x_r \in R^n$ – состояние регулятора, $x_r(0) = 0$. A , B , C , C_0 и C_i – заданные матрицы соответствующих размеров.

Данный результат был обобщен в работе [21]. В терминах линейных матричных неравенств получены достаточные условия для поиска динамических регуляторов как полного, так и пониженного порядков, которые обеспечивают стабилизацию замкнутой системы при ограничениях на фазовые переменные с заданной степенью устойчивости. Результаты численного моделирования, приведенные в работе, согласуются с теоретическими результатами.

3.2. Постановка задачи стабилизации с помощью динамического регулятора при ограничениях на фазовые переменные

Рассмотрим линейный управляемый объект с не измеряемым состоянием

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad (3.2.1)$$

$$y = Cx, \quad (3.2.2)$$

$$z_i = C_i x, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.2.3)$$

где $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^m$ – управление, $y \in R^l$ – измеряемый выход системы, $z_i \in R^{m_i}$ – выходы, определяющие ограничения на фазовые переменные системы, A , B , C и C_i – заданные матрицы соответствующих размеров.

Для данного объекта поставим следующую задачу стабилизации при ограничениях на фазовые переменные с помощью динамического регулятора по измеряемому выходу. Требуется построить линейный динамический регулятор k – го порядка вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_r x_r + B_r y, \\ u &= C_r x_r + D_r y, \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

где $x_r \in R^k$ – состояние регулятора ($k \leq n$), $x_r(0) = 0$, который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) со степенью устойчивости не меньшей, чем β ($\beta > 0$), а также обеспечивает выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (3.2.5)$$

при заданных значениях γ_i .

3.3. Достаточные условия существования регулятора

Запишем уравнения замкнутой системы (3.2.1) -- (3.2.4) в виде

$$\dot{x}_c = A_c x_c, \quad (3.3.1)$$

$$z_i = \bar{C}_i x_c, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.3.2)$$

где $x_c = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}$, $A_c = \begin{pmatrix} A + BD_r C & BC_r \\ B_r C & A_r \end{pmatrix}$, $\bar{C}_i = (C_i \quad 0)$, а начальные условия имеют вид $x_c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим область $E(X) = \{x_c : x_c^T X x_c \leq 1\}$, ограниченную эллипсоидом $x_c^T X x_c = 1$, вписанным в область фазового пространства, заданную неравенствами (3.2.5). Заметим, что если для функции $V(x_c) = x_c^T X x_c$ с матрицей $X = X^T > 0$ по любой траектории замкнутой системы выполнено неравенство

$$\dot{V}(x_c) < -2\beta V, \quad (3.3.3)$$

то $V(x_c) = x_c^T X x_c$ является квадратичной функцией Ляпунова.

Заметим, что при выполнении неравенства (3.3.3) все собственные числа матрицы A_c замкнутой системы (3.3.1) будут иметь отрицательные действительные части меньшие, чем $-\beta$, и все траектории этой системы, выходящие из множества $E(X)$, удовлетворяют ограничениям (3.2.5). В самом деле, если на любой траектории замкнутой системы (3.3.1) выполнено условие (3.3.3), то

$$x_c^T A_c^T X x_c + x_c^T X A_c x_c < -2\beta x_c^T X x_c.$$

Так как x_c – вектор, то выражение $x_c^T A_c^T X x_c$ – это число. Поэтому $x_c^T A_c^T X x_c = x_c^T X A_c x_c$. Следовательно,

$$2x_c^T X A_c x_c < -2\beta x_c^T X x_c,$$

$$2x_c^T X (A_c + \beta I) x_c < 0,$$

где I – единичная матрица соответствующего размера. С учетом требования $X = X^T > 0$, приходим к тому, что для выполнения последнего неравенства все собственные числа матрицы A_c должны иметь отрицательные действительные части меньше, чем $-\beta$.

Обобщая результаты, полученные в работах [4, 5, 21] покажем, что область фазового пространства, определяемую объединением всех таких множеств $E(X)$ при всевозможных функциях Ляпунова указанного вида, можно выделить в терминах линейных матричных неравенств следующим образом.

Теорема 3.1. Пусть начальное состояние $x_c(0)$ и взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$W_{\bar{B}^T}^T (\bar{Y} \bar{A}^T + \bar{A} \bar{Y} + 2\beta Y) W_{\bar{B}^T} < 0, \quad (3.3.4)$$

$$W_{\bar{C}}^T (\bar{A}^T X + X \bar{A} + 2\beta X) W_{\bar{C}} < 0,$$

$$\begin{pmatrix} Y & x_c(0) \\ x_c^T(0) & 1 \end{pmatrix} \geq 0,$$

$$\text{trace} (\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = \overline{1, N},$$

где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{k \times k} \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I_{k \times k} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & I_{k \times k} \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_i = (C_i \quad 0_{m_i \times k}), \quad \bar{B}^T W_{\bar{B}^T} = 0, \quad \bar{C} W_{\bar{C}} = 0.$$

Здесь $\text{trace} (\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T)$ обозначает след матрицы $\bar{C}_i Y \bar{C}_i^T$. Тогда все траектории замкнутой системы (3.3.1) с начальными условиями $x_c(0) \in E(X)$ удовлетворяют ограничениям (3.2.5).

Параметры динамического регулятора (3.2.4) для линейной системы при ограничениях на фазовые переменные находим как решение относительно неизвестной матрицы Θ линейного матричного неравенства

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0,$$

где $\Psi = \bar{Y} \bar{A}^T + \bar{A} \bar{Y} + 2\beta Y$, $P = \bar{C} Y$, $Q = \bar{B}^T$.

Доказательство. Введем матрицу параметров регулятора

$$\Theta = \begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Тогда матрицу замкнутой системы A_c можно записать в виде

$$A_c = \bar{A} + \bar{B} \Theta \bar{C},$$

где $\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{k \times k} \end{pmatrix}$, $\bar{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ I_{k \times k} & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & I_{k \times k} \\ C & 0 \end{pmatrix}$. Здесь символы « $I_{k \times k}$ » и « $0_{k \times k}$ » обозначают единичную и нулевую матрицы размера $k \times k$ соответственно.

Покажем, что выполнение первого и второго неравенств системы (3.3.4) обеспечивает выполнение условия – квадратичная функция $V = x_c^T X x_c$ с матрицей $X = X^T > 0$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы. Так как на любой траектории замкнутой системы (3.3.1) выполнено условие (3.3.3), то

$$x_c^T (\bar{A} + \bar{B} \Theta \bar{C})^T X x_c + x_c^T X (\bar{A} + \bar{B} \Theta \bar{C}) x_c < -2\beta x_c^T X x_c,$$

которое эквивалентно матричному неравенству

$$\bar{A}^T X + X \bar{A} + \bar{C}^T \Theta^T \bar{B}^T X + X \bar{B} \Theta \bar{C} + 2\beta X < 0. \quad (3.3.6)$$

В неравенстве (3.3.6) неизвестными являются матрицы X и Θ . Если мы зафиксируем матрицу Θ , то получим линейное матричное неравенство относительно неизвестной матрицы X . Также неравенство (3.3.6) является линейным относительно неизвестной матрицы Θ , при фиксированной матрице X . Такие матричные неравенства называются билинейными.

Умножая слева и справа (3.3.6) на матрицу $Y = X^{-1}$, запишем неравенство в виде

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0, \quad (3.3.7)$$

где $\Psi = Y \bar{A}^T + \bar{A} Y + 2\beta Y$, $P = \bar{C}^T Y$, $Q = \bar{B}^T$.

Как отмечалось в главе 2 в § 2.3, матричное неравенство (3.3.7) разрешимо относительно матрицы Θ в ряде случаев. Предположим, что ранги матриц P и Q меньше, чем $n + k$. В этом случае матричное неравенство (3.3.7) разрешимо относительно матрицы Θ тогда и только тогда, когда разрешимы неравенства

$$\begin{cases} W_Q^T \Psi W_Q < 0, \\ W_P^T \Psi W_P < 0, \end{cases} \quad (3.3.8)$$

где $Q W_Q = 0$, $P W_P = 0$.

Первое неравенство (3.3.8) является первым в системе матричных неравенств (3.3.4). Заметив, что $W_P = X W_{\bar{C}}$, где $X = Y^{-1}$ и, подставив это выражение во второе неравенство системы (3.3.8), получим второе неравенство системы (3.3.4).

Из третьего неравенства системы (3.3.4) по лемме Шура [36] следует, что $x_c^T(0) Y^{-1} x_c(0) \leq 1$ и $x_c(0) x_c^T(0) \leq Y$. Так как матрица $Y^{-1} = X$, то верно неравенство $x_c^T(0) X x_c(0) \leq 1$. Следовательно, выполнение третьего неравенства системы (3.3.4) гарантирует, что точка $x_c(0)$ лежит внутри эллипсоида $E(X)$.

Покажем, что выполнение четвертого неравенства системы (3.3.4) обеспечивает выполнение условий $|z_i(t)| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$, т.е. гарантирует, что фазовая траектория системы удовлетворяет заданным ограничениям. Квадратичная функция $V = x_c^T X x_c$ с матрицей $X = X^T > 0$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы. Значит, для всех $t \geq 0$ выполнено неравенство $x_c^T(t) X x_c(t) \leq 1$. Применим лемму Шура. Получим, что $x_c(t) x_c^T(t) \leq Y$. Следовательно,

$$|z_i(t)|^2 = \text{trace}(\overline{C}_i x_c(t) x_c^T(t) \overline{C}_i^T) \leq \text{trace}(\overline{C}_i Y \overline{C}_i^T), \quad i = \overline{1, N}.$$

Значит, в случае, когда $\text{trace}(\overline{C}_i Y \overline{C}_i^T) \leq \gamma_i^2$, $i = \overline{1, N}$, т.е. при выполнении четвертого неравенства системы, будут выполнены ограничения (3.2.5).

Предположим, что найдены взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$, удовлетворяющие системе матричных неравенств (3.3.4). Параметры динамического регулятора (3.2.4) находим как решение относительно неизвестной матрицы Θ линейного матричного неравенства (3.3.7). Теорема 3.1 доказана.

Заметим, что, несмотря на то, что система (3.3.4) – это система линейных матричных неравенств, требование взаимнообратности матриц X , Y , добавляет к системе (3.3.4) условие

$$XY = I, \quad (3.3.9)$$

где I – единичная матрица. Следовательно, для того, чтобы найти параметры регулятора (3.2.4) для линейной динамической системы при ограничениях на фазовые переменные нужно решить систему билинейных матричных неравенств (3.3.4), (3.3.9). В настоящее время отсутствуют эффективные с вычислительной точки зрения численные методы решения такого класса задач.

Заметим, что для решения системы билинейных матричных неравенств (3.3.4), (3.3.9) могут быть применены алгоритмы, описанные в [2, 3, 20, 21, 51, 71-73, 78] и в других работах.

Частным случаем поставленной выше задачи является случай поиска линейного динамического регулятора полного порядка. Это случай, когда состояние регулятора (3.2.4) имеет ту же размерность, что и состояние системы, т.е. $k = n$. Обобщая результат [4, 5] покажем, что решение задачи синтеза динамического регулятора полного порядка (3.2.4), обеспечивающего асимптотическую устойчивость замкнутой системы со степенью устойчивости не меньшей, чем β , а также выполнение при заданных значениях γ_i ограничений (3.2.5) сводится к разрешимости системы линейных матричных неравенств.

Теорема 3.2. Пусть матрицы $X_{11} = X_{11}^T > 0$, $Y_{11} = Y_{11}^T > 0$ и величины $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1, N}$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$W_{B^T}^T (Y_{11} A^T + A Y_{11} + 2\beta Y_{11}) W_{B^T} < 0, \quad (3.3.10)$$

$$W_C^T (A^T X_{11} + X_{11} A + 2\beta X_{11}) W_C < 0,$$

$$x_0^T X_{11} x_0 \leq 1,$$

$$\text{trace} (C_i Y_{11} C_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} > 0,$$

где $B^T W_{B^T} = 0$, $C W_C = 0$. Здесь $\text{trace} (C_i Y_{11} C_i^T)$ обозначает след матрицы $C_i Y_{11} C_i^T$. Тогда все траектории замкнутой системы (3.3.1) с начальными условиями $x_c(0) \in E(X)$ удовлетворяют ограничениям (3.2.5). Параметры динамического регулятора полного порядка (3.2.4) для линейной системы при ограничениях на фазовые переменные находим как решение относительно неизвестной матрицы Θ линейного матричного неравенства

$$\Psi + P^T \Theta^T Q + Q^T \Theta P < 0,$$

$$\text{где } \Psi = Y \bar{A}^T + \bar{A} Y + 2\beta Y, \quad P = \bar{C} Y, \quad Q = \bar{B}^T, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \\ Y_{11} - X_{11}^{-1} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В случае поиска регулятора полного порядка матрицы X и Y входящие в линейные матричные неравенства (3.3.4) имеют размерность $2n$, где n – размерность состояния системы. В соответствии с блочной структурой матрицы $\bar{A}$ представим матрицы X и Y в блочном виде

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^T & Y_{22} \end{pmatrix},$$

а матрицы

$$W_{\bar{B}^T} = \begin{pmatrix} W_{B^T} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_{\bar{C}} = \begin{pmatrix} W_C \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда с учетом блочной структуры матриц $\bar{A}$, $\bar{C}$ и $\bar{C}_i$, первое, второе и четвертое матричные неравенства системы (3.3.4) примут вид

$$W_{B^T}^T (Y_{11} A^T + A Y_{11} + 2\beta Y_{11}) W_{B^T} < 0, \quad (3.3.11)$$

$$W_C^T (A^T X_{11} + X_{11} A + 2\beta X_{11}) W_C < 0,$$

$$\text{trace} (C_i Y_{11} C_i^T) \leq \gamma_i^2, \quad i = \overline{1, N}.$$

Получили первое, второе и четвертое неравенства системы (3.3.10).

Заметим, что из симметрии матриц X и Y следует симметрия матриц X_{11} , Y_{11} , а в силу критерия Сильвестра из условий $X > 0$, $Y > 0$ следует, что матрицы $X_{11} > 0$, $Y_{11} > 0$.

Третье неравенство системы (3.3.4) по лемме Шура эквивалентно неравенству $x_c^T(0)Y^{-1}x_c(0) \leq 1$. Так как начальное состояние $x_c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$, а матрица $Y^{-1} = X$, то с учетом блочной структуры матрицы X имеем

$$x_c^T(0)Y^{-1}x_c(0) = x_c^T(0)Xx_c(0) = x_0^T X_{11}x_0 \leq 1.$$

Получили третье неравенство системы (3.3.10).

В матричных неравенствах (3.3.11) матрицы X_{11} и Y_{11} не являются взаимнообратными, но являются блоками взаимнообратных матриц. Известна формула Фробениуса [3] для обращения блочной матрицы. Из нее следует, что при выполнении неравенства $Y_{11} - X_{11}^{-1} = V > 0$, которое по лемме Шура эквивалентно условию

$$\begin{pmatrix} X_{11} & I \\ I & Y_{11} \end{pmatrix} > 0, \quad (3.3.12)$$

выбор соответствующих матриц Y_{12} и Y_{22} может быть осуществлен следующим образом:

$$Y_{12} = Y_{22} = V.$$

Неравенство (3.3.12) является пятым в системе матричных неравенств (3.3.10).

Таким образом, в случае поиска регулятора полного порядка алгоритм решения поставленной задачи можно представить следующим образом.

Алгоритм 3.1.

1. Решить систему матричных неравенств (3.3.10) относительно неизвестных матриц

$$X_{11} = X_{11}^T > 0 \text{ и } Y_{11} = Y_{11}^T > 0.$$

2. Восстановить матрицу

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \\ Y_{11} - X_{11}^{-1} & Y_{11} - X_{11}^{-1} \end{pmatrix}.$$

3. Подставить матрицу Y в неравенство (3.3.7) и, решив линейное матричное неравенство относительно неизвестной матрицы Θ , найти параметры регулятора (3.2.4).

Предположим, что матрица параметров регулятора Θ найдена. Тогда из теоремы 3.1 следует, что все траектории замкнутой системы (3.3.1) с начальными условиями $x_c(0) \in E(X)$ удовлетворяют ограничениям (3.2.5). Теорема 3.2 доказана.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что если матрица Θ параметров линейного динамического регулятора (3.2.4) найдена, то для всех начальных состояний $x_c(0) \in E(X)$ фазовые траектории замкнутой системы (3.3.1), будут асимптотически приближаться к нулевому состоянию и не выходить за границы множества, задаваемого ограничениями (3.2.5). Заметим, что согласно постановке задачи стабилизации при ограничениях на фазовые переменные начальные условия

замкнутой системы (3.3.1) имеют вид $x_c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, мы должны выбирать начальные условия из множества, которое получено сечением эллипсоида $x_c^T X x_c \leq 1$ плоскостью $x_r = 0$. Обозначим это множество

$$\hat{E}(X) = \{x_c : x_c^T X x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}.$$

Другими словами, множество $\hat{E}(X)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (3.3.1) при ограничениях (3.2.5).

3.4. Постановка задачи об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы

Предположим, что для объекта (3.2.1) -- (3.2.3) найден линейный динамический регулятор k -го порядка (3.2.4) который обеспечивает стабилизацию замкнутой системы со степенью устойчивости не меньшей, чем β , а также обеспечивает выполнение при заданных значениях γ_i ограничений (3.2.5). Заметим, что в реальной ситуации выходные переменные системы всегда измеряются с некоторой ошибкой. В этой связи введем переменную

$$y = C(I + \Delta(t))x, \quad (3.4.1)$$

измеряемый выход системы, где I – единичная матрица размера $n \times n$, а матрица $\Delta(t)$ определяет относительные ошибки измерения фазовых переменных и в любой момент времени удовлетворяет матричному неравенству

$$\Delta^T \Delta - \delta^2 I \leq 0$$

($\delta \neq 0$ – заданный параметр), представляющему ограничения на допустимые значения ошибок измерения.

Рассмотрим задачу стабилизации системы (3.2.1), (3.4.1), (3.2.3) динамическим регулятором (3.2.4), полученным как решение задачи стабилизации системы (3.2.1) -- (3.2.3) при ограничениях на фазовые переменные (3.2.5). Возникает вопрос о влиянии ошибок измерения фазовых переменных на выполнение ограничений (3.2.5). Другими словами, возникает вопрос о том, как изменится область притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях (3.2.5) в случае наличия ошибки в измеряемом выходе (3.4.1)?

3.5. Оценка области притяжения состояния равновесия в случае наличия ошибки в измеряемом выходе

Рассмотрим ситуацию, когда выходные переменные системы (3.2.1) измеряются с ошибкой. Представим измеряемый выход системы (3.4.1) в виде

$$y = Cx + Cw, \quad (3.5.1)$$

где $w = \begin{pmatrix} \Delta(t) & 0_{n \times k} \end{pmatrix} x_c$, $x_c = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}$.

Так как матрица неопределенности $\Delta(t)$ удовлетворяет условию $\Delta^T \Delta \leq \delta^2 I$, то

$$w^T w \leq \delta^2 x_c^T x_c. \quad (3.5.2)$$

Запишем уравнения замкнутой системы (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4), (3.5.1) в виде

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c w, \quad (3.5.3)$$

$$z_i = \bar{C}_i x, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.5.4)$$

где $A_c = \begin{pmatrix} A + BD_r C & BC_r \\ B_r C & A_r \end{pmatrix}$, $B_c = \begin{pmatrix} BD_r C \\ B_r C \end{pmatrix}$, $\bar{C}_i = \begin{pmatrix} C_i & 0_{m_i \times k} \end{pmatrix}$, а начальные условия имеют вид $x_c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Сформулируем достаточные условия для поиска оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой регулятор (3.2.4) с матрицей параметров регулятора Θ , полученной в задаче стабилизации при ограничениях на фазовые переменные без учета ошибки в измеряемом выходе, будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе.

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть требуется найти оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой полученный регулятор (3.2.4) обеспечивает для каждого индекса i стабилизацию системы (3.5.3) при одном ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть матрица $X_i = X_i^T > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$ удовлетворяют системе матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} A_c^T X_i + X_i A_c + 2\beta X_i + \mu_1 \delta^2 I & X_i B_c \\ B_c^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} < 0, \quad (3.5.5)$$

$$\bar{C}_i^T \bar{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i \leq 0,$$

тогда множество $\hat{E}(X_i)$, $\hat{E}(X_i) = \{x_c : x_c^T X_i x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (3.5.3) при ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Доказательство. В область фазового пространства, заданную неравенством $|z_i| \leq \gamma_i$, впишем эллипсоид $x_c^T X_i x_c = 1$. Покажем, что выполнение первого неравенства системы (3.5.5) обеспечивает выполнение условия, что квадратичная функция $V = x_c^T X_i x_c$ с матрицей $X_i = X_i^T > 0$ является функцией Ляпунова для замкнутой системы. На любой траектории замкнутой системы (3.5.3) верно условие

$$\dot{V}(x_c) < -2\beta V.$$

Следовательно,

$$(A_c x_c + B_c w)^T X_i x_c + x_c^T X_i (A_c x_c + B_c w) < -2\beta x_c^T X_i x_c. \quad (3.5.6)$$

Согласно неущербности S-процедуры при одном ограничении, неравенство (3.5.6) выполнено для всех x_c , w , таких, что $|x_c|^2 + |w|^2 \neq 0$, удовлетворяющих неравенству (3.5.2), тогда и только тогда, когда для некоторого числа $\mu_1 > 0$ и для всех x_c , w выполнено неравенство

$$(A_c x_c + B_c w)^T X_i x_c + x_c^T X_i (A_c x_c + B_c w) + 2\beta x_c^T X_i x_c - \mu_1 (w^T w - \delta^2 x_c^T x_c) < 0.$$

Запишем его в виде

$$\begin{pmatrix} x_c \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_c^T X_i + X_i A_c + 2\beta X_i + \mu_1 \delta^2 I & X_i B_c \\ B_c^T X_i & -\mu_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ w \end{pmatrix} < 0.$$

Это неравенство эквивалентно первому неравенству системы (3.5.5).

Покажем, что любое решение второго неравенства системы (3.5.5) обеспечивает выполнение условия $|z_i(t)| \leq \gamma_i$. Согласно неущербности S-процедуры, при двух ограничениях [15] выполнение неравенства $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$ при условии (3.5.2) и условии $x_c^T X_i x_c \leq 1$ для всех x_c , w , таких, что $|x_c|^2 + |w|^2 \neq 0$, эквивалентно существованию чисел $\mu_2 \geq 0$, $\mu_3 \geq 0$, при которых верно неравенство

$$|z_i|^2 - \gamma_i^2 - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x_c^T x_c) - \mu_3 (x_c^T X_i x_c - 1) \leq 0. \quad (3.5.7)$$

При этом должны существовать числа μ_4 , μ_5 и вектор $\begin{pmatrix} x_{c*}^T & w_*^T \end{pmatrix}^T$, такие, что

$$\mu_4 \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu_5 \begin{pmatrix} -\delta^2 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} > 0 \quad (3.5.8)$$

и

$$\begin{pmatrix} x_{c*} \\ w_* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{c*} \\ w_* \end{pmatrix} < 1, \quad \begin{pmatrix} x_{c*} \\ w_* \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\delta^2 I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{c*} \\ w_* \end{pmatrix} < 0. \quad (3.5.9)$$

Запишем неравенство (3.5.7) в виде

$$x_c^T \bar{C}_i^T \bar{C}_i x_c - \gamma_i^2 - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x_c^T x_c) - \mu_3 (x_c^T X_i x_c - 1) \leq 0. \quad (3.5.10)$$

Неравенство (3.5.10) верно для всех x_c , w . Значит,

$$\mu_3^2 \leq \gamma_i^2,$$

$$x_c^T \bar{C}_i^T \bar{C}_i x_c - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x_c^T x_c) \leq \mu_3 (x_c^T X_i x_c).$$

Следовательно,

$$x_c^T \bar{C}_i^T \bar{C}_i x_c - \mu_2 (w^T w - \delta^2 x_c^T x_c) \leq \gamma_i^2 (x_c^T X_i x_c). \quad (3.5.11)$$

Запишем неравенство (3.5.11) в виде

$$\begin{pmatrix} x_c \\ w \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \bar{C}_i^T \bar{C}_i + \mu_2 \delta^2 I - \gamma_i^2 X_i & 0 \\ 0 & -\mu_2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_c \\ w \end{pmatrix} \leq 0. \quad (3.5.12)$$

Так как $\mu_2 \geq 0$, матричное неравенство (3.5.12) эквивалентно второму матричному неравенству в системе (3.5.5).

Найдем числа μ_4 , μ_5 , удовлетворяющие неравенству (3.5.8). Перепишем условие (3.5.8) в виде $\mu_5 > 0$, $\mu_4 X_i - \mu_5 \delta^2 I > 0$. Следовательно, с учетом $X_i = X_i^T > 0$ для выполнения этих неравенств достаточно выбрать $\mu_4 = 2\delta^2 / \lambda_{\min}(X_i)$, где в знаменателе фигурирует минимальное собственное число матрицы; $\mu_5 = 1$.

Найдем вектор $\begin{pmatrix} x_{c*}^T & w_*^T \end{pmatrix}^T$, удовлетворяющий неравенствам (3.5.9). Так как $V = x_c^T(t) X_i x_c(t)$ — квадратичная функция Ляпунова, то для всех $x_c \in E(X_i)$, $E(X_i) = \{x_c : x_c^T X_i x_c \leq 1\}$ выполнено неравенство $x_c^T(t) X_i x_c(t) \leq 1$. Следовательно, первое неравенство (3.5.9) верно, если точка x_{c*} лежит внутри эллипсоида $E(X_i)$. В силу неравенства (3.5.2) для выполнения второго неравенства (3.5.9) выберем $w_* = \delta x_{c*} / 2$.

Показали, что если найдены матрица $X_i = X_i^T > 0$ и величины $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, $\delta > 0$, $\gamma_i > 0$, удовлетворяющие системе матричных неравенств (3.5.5), тогда все траектории замкнутой системы (3.5.3) с начальными условиями $x_c(0) \in E(X_i)$, $E(X) = \{x_c : x_c^T X_i x_c \leq 1\}$ удовлетворяют ограничению $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$.

Заметим, что в соответствии с постановкой задачи стабилизации начальные условия замкнутой системы (3.5.3) имеют вид $x_c(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, при решении задачи должны выбирать начальные условия из множества $\hat{E}(X_i) = \{x_c : x_c^T X_i x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}$, которое получено сечением эллипсоида $x_c^T X_i x_c \leq 1$ плоскостью $x_r = 0$. Другими словами, множество $\hat{E}(X_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (3.5.3) при ограничении $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$. Теорема 3.3 доказана.

Обозначим через X_i множество всех матриц X_i , удовлетворяющих неравенствам (3.5.5).

В соответствии со структурой вектора $x_c = \begin{pmatrix} x \\ x_r \end{pmatrix}$ представим матрицу X_i в блочном виде

$$X_i = \begin{pmatrix} X_{i_11} & X_{i_12} \\ X_{i_12}^T & X_{i_22} \end{pmatrix}. \text{ Максимальную по всем } X_i \in X_i \text{ область } \hat{E}(X_i^*) \text{ найдем путем}$$

минимизации следа матрицы X_{i_11} . Эта операция является стандартной в пакете программ для инженерных расчетов Matlab с использованием приложений CVX.

Пусть каждая из матриц X_i , $i = \overline{1, N}$, является решением системы (3.5.5) для значения γ_i , а ее блок X_{i_11} имеет минимальный след. Тогда все траектории замкнутой системы (3.5.3) с начальными условиями $x_c(0) \in \hat{E}(X_i)$, $\hat{E}(X_i) = \{x_c : x_c^T X_i x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}$ будут удовлетворять ограничению $\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i$. Следовательно, для всех начальных состояний $x_c(0) \in \bigcap_{i=1}^N \hat{E}(X_i)$, динамический регулятор k -го порядка (3.2.4) с заданной матрицей параметров регулятора Θ стабилизирует замкнутую систему (3.5.3) при ограничениях (3.2.5). Другими словами, множество $\bigcap_{i=1}^N \hat{E}(X_i)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы (3.5.3) при ограничениях (3.2.5).

3.6. Результаты численного моделирования

Пример. Стабилизация тела в электромагнитном подвесе. Рассмотрим задачу стабилизации ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе одностороннего действия с помощью динамического регулятора по выходу при ограничениях на фазовые переменные.

В главе 1 в § 1.4 построена математическая модель движения тела в электромагнитном подвесе одностороннего действия. Показано, что уравнения (1.4.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1+x_3}{1-x_1} \right)^2 - \frac{1}{2}, \\ \dot{x}_3 &= - \left(\frac{1+x_3}{1-x_1} \right) x_2 - \alpha(1-x_1)x_3 + (1-x_1)u,\end{aligned}\tag{3.6.1}$$

где x_1 – это величина, пропорциональная смещению тела в электромагнитном подвесе, x_2 – величина, пропорциональная скорости смещения тела, x_3 – величина, пропорциональная силе тока в цепи электромагнита, а α – параметр.

Линеаризованную систему (3.6.1) в окрестности состояния равновесия $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ можно представить в виде

$$\dot{x} = Ax + Bu,\tag{3.6.2}$$

где

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -\alpha \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть значение параметра $\alpha = 7.5$, начальное состояние системы $x_0 = (0.05, 0, 0)^T$. Предположим, что величина x_3 , пропорциональная силе тока в цепи электромагнита, доступна измерению

$$y = x_3,\tag{3.6.3}$$

а величина x_1 , пропорциональная смещению тела в электромагнитном подвесе и величина x_3 , пропорциональная силе тока в цепи электромагнита ограничены

$$\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq \gamma_0 = 0.07, \quad \max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq \gamma_1.\tag{3.6.4}$$

Для данного объекта решен ряд задач. Поставлена и решена задача поиска динамического регулятора полного порядка вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= A_r x_r + B_r u, \\ u &= C_r x_r + D_r y,\end{aligned}\tag{3.6.5}$$

где $x_r \in R^3$ – состояние регулятора, $x_r(0) = 0$, который обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (3.6.2), (3.6.3), (3.6.5) со степенью устойчивости не меньшей, чем $\beta = 0.1$, а также обеспечивает выполнение ограничений (3.6.4) с минимальным значением γ_1 .

В результате численного решения в пакете Matlab получено минимальное значение $\gamma_1^* = 0.1367$, при котором выполнены ограничения

$$\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.07, \quad \max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq \gamma_1^*.$$

Матрица Θ параметров динамического регулятора полного порядка, обеспечивающего выполнение указанных ограничений, имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} -297.4835 & -61.6541 & -144.9211 & 99.9817 \\ -42.9988 & -9.3542 & 126.3115 & 161.5332 \\ 1.4657 & -11.9058 & -281.8152 & -283.9912 \\ - & - & - & + \\ 2.2855 & 11.6988 & 282.3099 & 288.8972 \end{array} \right). \quad (3.6.6)$$

Матрица параметров регулятора (3.6.6) получена в результате применения алгоритма 3.1.

Сравним динамический регулятор с матрицей параметров регулятора (3.6.6) с динамическим регулятором полного порядка, который получен в результате решения задачи стабилизации без учета в модели ограничений (3.6.4). Матрица Θ параметров динамического регулятора полного порядка, который обеспечивает стабилизацию замкнутой системы (3.6.2), (3.6.3), (3.6.5) со степенью устойчивости не меньшей, чем $\beta = 0.1$ без учета в модели ограничений имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0.1076 & 1.0741 & 6.8857 & 6.8027 \\ 1.1537 & 0.0556 & 7.8169 & 6.7054 \\ -5.6115 & -5.8386 & -1.8708 & 1.7085 \\ - & - & - & + \\ 5.5606 & 4.8073 & -1.0796 & 2.8802 \end{array} \right). \quad (3.6.7)$$

На рисунке 3.1 представлен график зависимости величины $x_1(t)$, пропорциональной смещению тела в электромагнитном подвесе. Пунктиром отмечено ограничение $x_1 = 0.07$. На рисунке 3.2 представлен график зависимости величины $x_2(t)$, пропорциональной скорости смещению тела в электромагнитном подвесе.

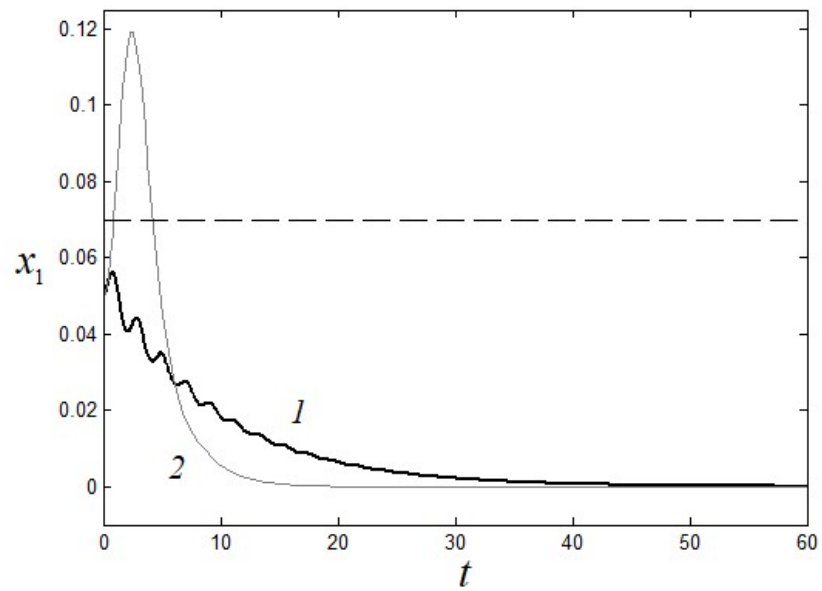


Рисунок 3.1. График зависимости величины, пропорциональной смещению тела в электромагнитном подвесе

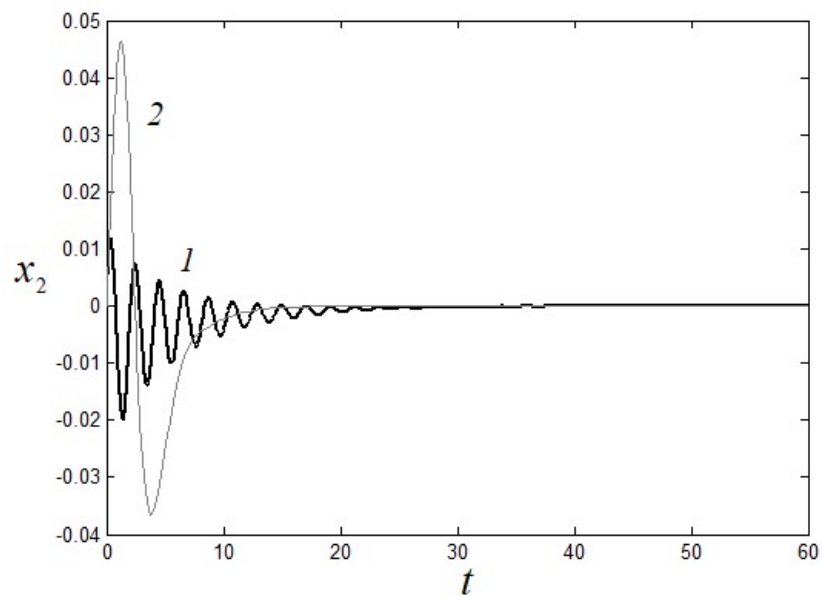


Рисунок 3.2. График зависимости величины, пропорциональной скорости смещения тела в электромагнитном подвесе

На рисунке 3.3 представлен график зависимости величины $x_3(t)$, пропорциональной силе тока в цепи электромагнита. Пунктиром отмечены ограничения $x_3 = -0.1367$ и $x_3 = 0.1367$.

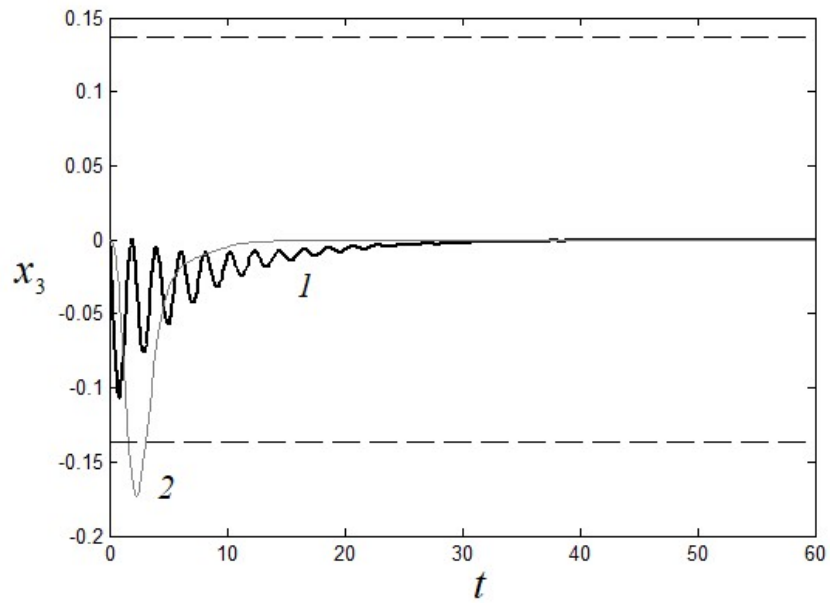


Рисунок 3.3. График зависимости величины, пропорциональной силе тока в цепи электромагнита

На рисунке 3.4 представлен график управления $u(t)$. Кривая 1 на рисунке 3.1, рисунке 3.2, рисунке 3.3, рисунке 3.4 соответствует динамическому регулятору с матрицей параметров регулятора (3.6.6), а кривая 2 динамическому регулятору с матрицей параметров (3.6.7).

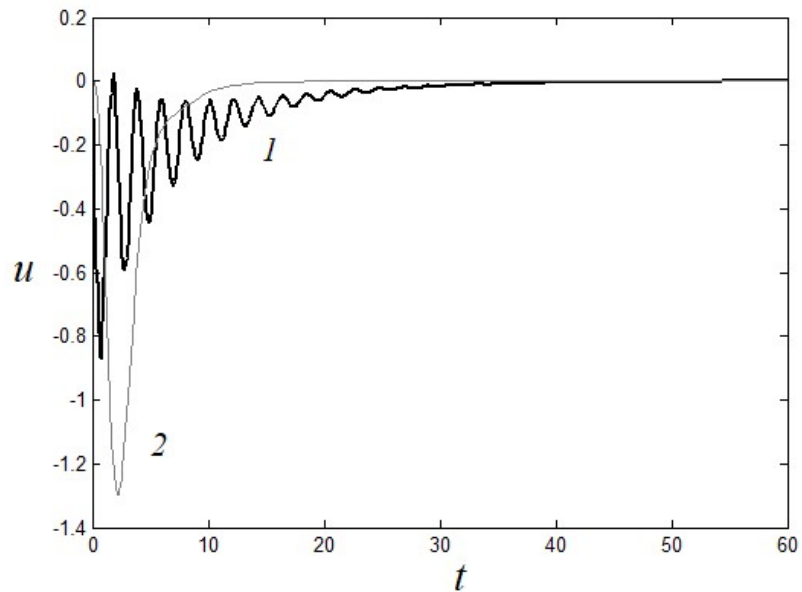


Рисунок 3.4. График управления

Заметим, что регулятор с матрицей параметров (3.6.7) не обеспечивает выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.07, \quad \max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq 0.1367.$$

Это говорит о важности учета в постановке задачи ограничений на фазовые переменные.

На рисунке 3.5 серым цветом отмечена оценка множества допустимых ограничений на величину x_1 , пропорциональную смещению тела в электромагнитном подвесе и величину x_3 , пропорциональную силе тока в цепи электромагнита, при которых существует решение системы линейных матричных неравенств (3.3.10) и получен динамический регулятор полного порядка, обеспечивающий выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq \gamma_0, \quad \max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq \gamma_1.$$

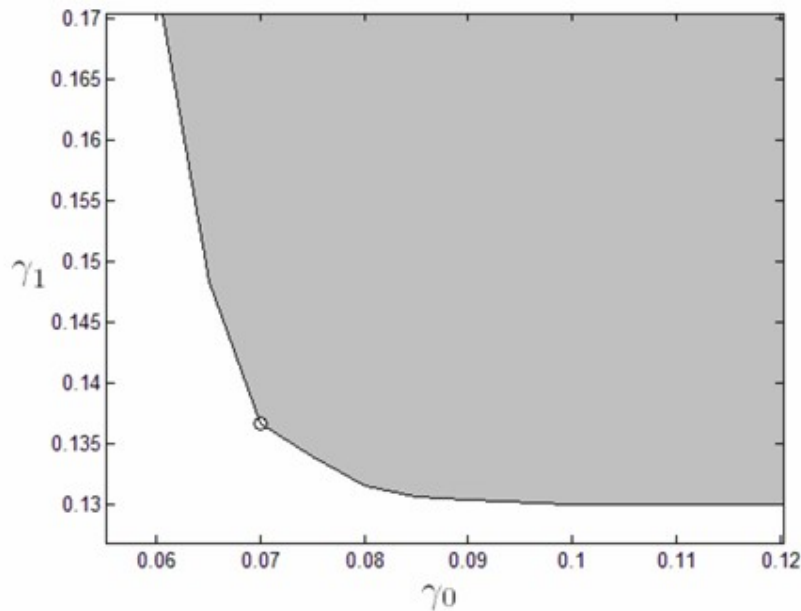


Рисунок 3.5. Оценка множества допустимых ограничений на величины x_1 и x_3

На рисунке 3.5 точка соответствует значениям $\gamma_0 = 0.07$, $\gamma_2 = 0.1367$ для которых найден динамический регулятор полного порядка с матрицей параметров регулятора (3.6.6).

Сравним поведение не линеаризованной (3.6.1) и линеаризованной (3.6.2) систем, замкнутых динамическим регулятором полного порядка с матрицей параметров регулятора (3.6.6) при начальном состоянии системы $x_0 = (0.05, 0, 0)^T$. Напомним, что динамический регулятор с матрицей параметров (3.6.6) получен в результате решения системы линейных матричных неравенств (3.3.10) в которые входит начальное состояние x_0 .

На рисунке 3.6, рисунке 3.7, рисунке 3.8 черная кривая соответствует поведению величин $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ для линеаризованной системы, а серая кривая соответствует поведению этих величин для не линеаризованной системы замкнутых динамическим регулятором полного порядка с матрицей параметров (3.6.6).

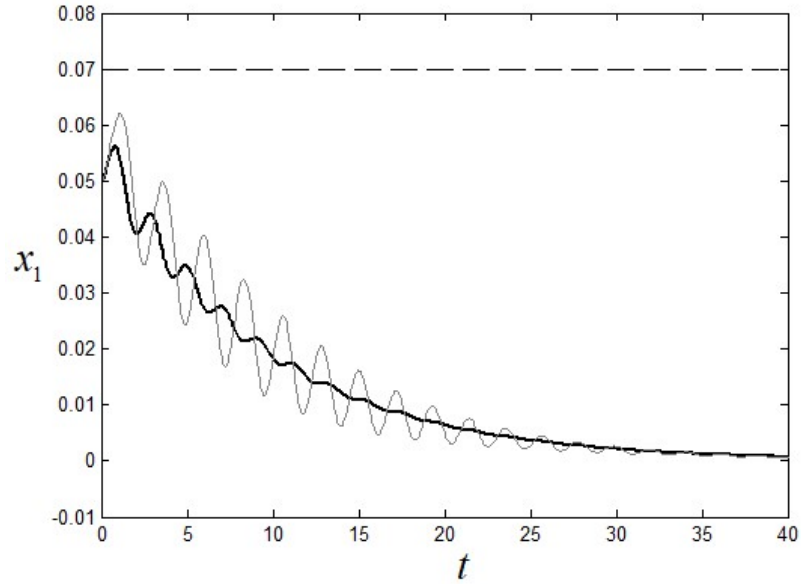


Рисунок 3.6. График зависимости величины $x_1(t)$

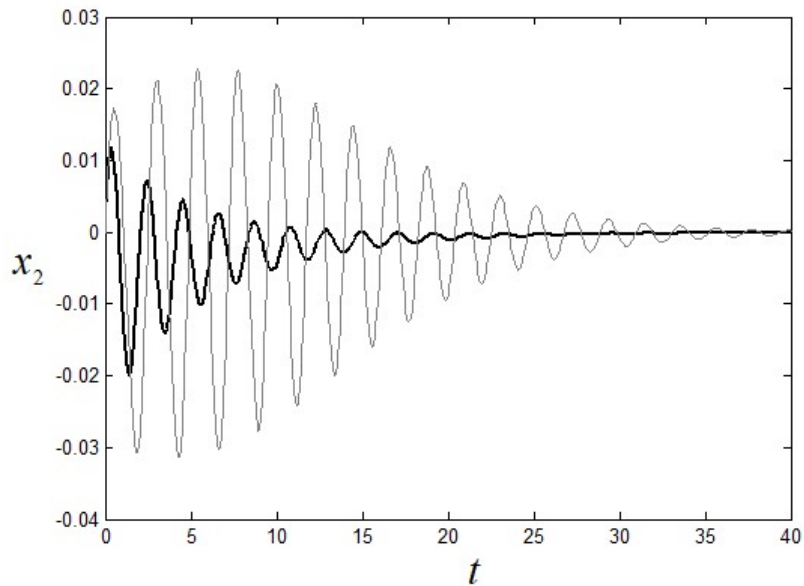


Рисунок 3.7. График зависимости величины $x_2(t)$

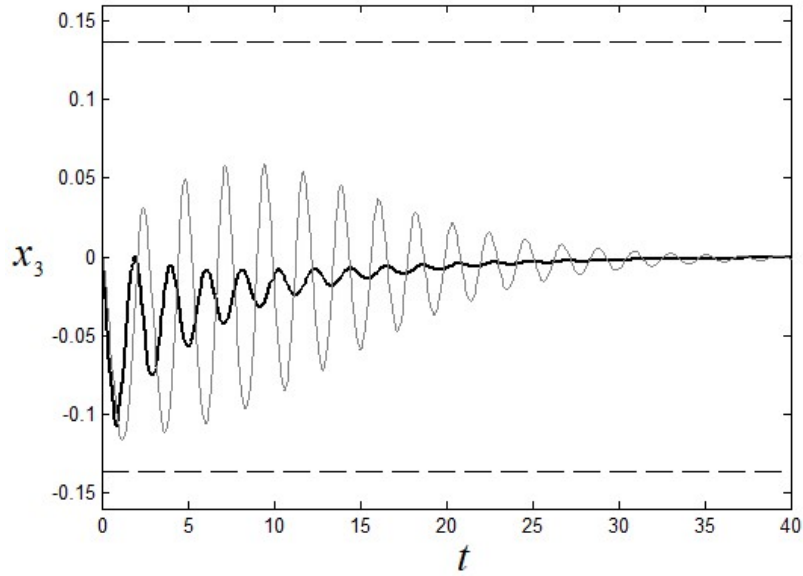


Рисунок 3.8. График зависимости величины $x_3(t)$

Из графиков следует, что динамический регулятор с матрицей параметров (3.6.6) обеспечивает стабилизацию при указанных ограничениях не линеаризованной системы (3.6.1) с начальным состоянием $x_0 = (0.05, 0, 0)^T$.

Найдем изменение оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях $\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.07$ и $\max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq 0.1367$, в которой динамический регулятор с матрицей параметров регулятора (3.6.6) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Решение системы линейных матричных неравенств (3.5.5) при заданном параметре δ определяет два множества начальных состояний

$$\hat{E}(X_1) = \{x_c : x_c^T X_1 x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}, \quad \hat{E}(X_2) = \{x_c : x_c^T X_2 x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}$$

для ограничений $\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.07$ и $\max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq 0.1367$ соответственно.

На рисунке 3.9 при значении параметра $\delta = 0$ представлено сечение множества начальных состояний $\hat{E}(X_1)$ плоскостью $x_3 = 0$ и множество начальных состояний $\hat{E}(X_2)$.

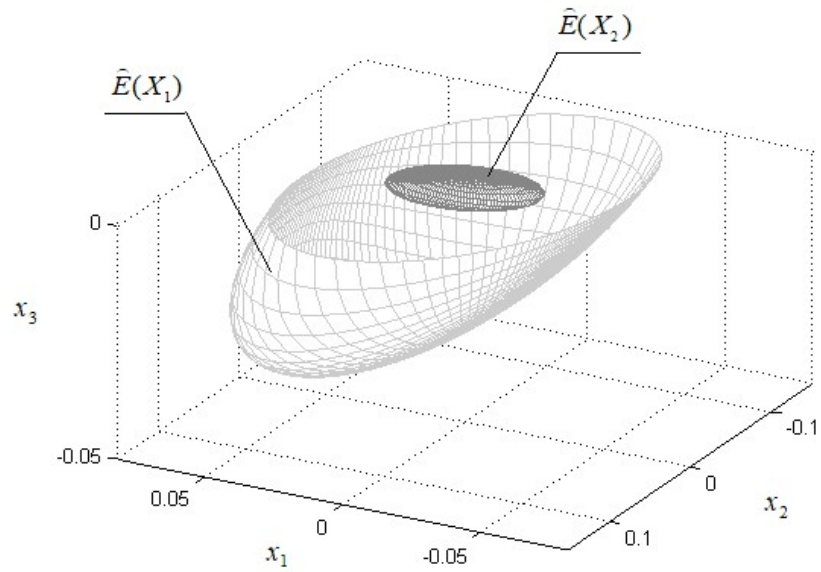


Рисунок 3.9. Оценка для области притяжения при значении параметра $\delta = 0$

Заметим, что множество $\hat{E}(X_2)$ лежит внутри множества $\hat{E}(X_1)$. Следовательно, множеством, полученным пересечением эллипсоидов $\hat{E}(X_1)$ и $\hat{E}(X_2)$ будет эллипсоид $\hat{E}(X_2)$. Другими словами, множество $\hat{E}(X_2)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при значении параметра $\delta = 0$.

Впишем в множество $\hat{E}(X_1) \cap \hat{E}(X_2)$, которое является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях $\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.07$ и $\max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq 0.1367$, эллипсоид, имеющий наибольший объем.

На рисунке 3.10 представлен график зависимости объема V данного эллипсоида от величины δ . В частности, получены значения $V(0) = 9.725 \cdot 10^{-6}$, $V(0.00201) = 6.1053 \cdot 10^{-6}$.

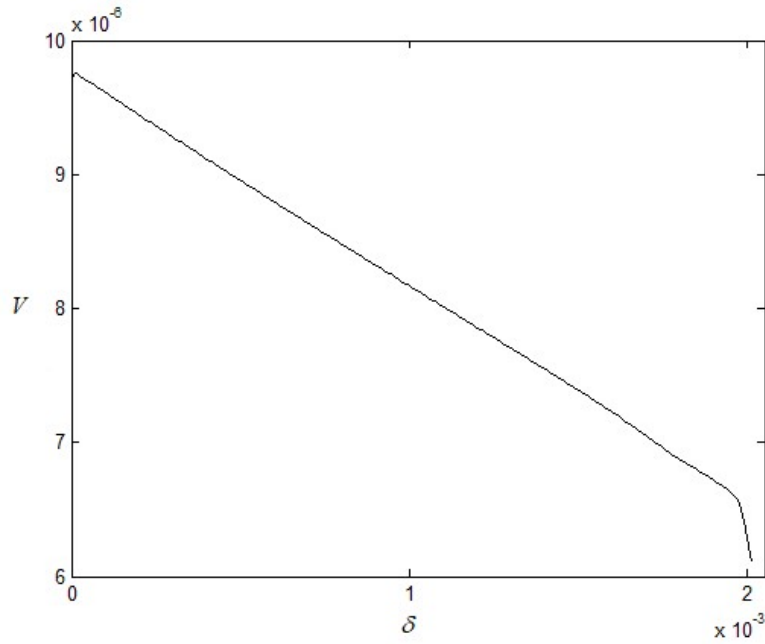


Рисунок 3.10. График зависимости объема вписанного эллипсоида от δ

Заметим, что для значений $\delta > 0.00201$ система линейных матричных неравенств (3.5.5) не имела решений, как для ограничения $\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.07$, так и для ограничения $\max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq 0.1367$. Из графика следует, что при небольшом увеличении значения δ размер вписанного в множество $\bar{E}(X_1) \cap \bar{E}(X_2)$ эллипсоида, имеющего наибольший объем, уменьшается.

Для объекта (3.6.2), (3.6.3) рассмотрим задачу поиска регулятора пониженного (второго) порядка вида (3.6.5), где $x_r \in R^2$ – состояние регулятора, $x_r(0) = 0$, который будет обеспечивать асимптотическую устойчивость замкнутой системы (3.6.2), (3.6.3), (3.6.5) со степенью устойчивости не меньшей, чем $\beta = 0.1$ и выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq 0.07, \quad \max_{t \geq 0} |x_3(t)| \leq 0.16. \quad (3.6.8)$$

В результате применения алгоритма 2.2, найдены взаимнообратные матрицы $X = X^T > 0$, $Y = Y^T > 0$ удовлетворяющие системе линейных матричных неравенств (3.3.4). Матрица Θ параметров динамического регулятора второго порядка, обеспечивающего выполнение ограничений (3.6.8), имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -300.5946 & -407.9666 & | & -17984.3679 \\ 65.9576 & 86.9051 & | & 3803.5191 \\ - & - & - & + & - & - & - & - \\ 3.3326 & 4.5740 & | & 209.7243 \end{pmatrix}. \quad (3.6.9)$$

Сравним динамический регулятор с матрицей параметров регулятора (3.6.9) с динамическим регулятором второго порядка, который получен в результате решения задачи стабилизации без учета в модели ограничений (3.6.8). Матрица Θ параметров динамического регулятора второго порядка, обеспечивающего стабилизацию замкнутой системы (3.6.2), (3.6.3), (3.6.5) со степенью устойчивости не меньшей, чем $\beta = 0.1$ без учета в модели ограничений имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_r & B_r \\ C_r & D_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.1722 & 3.6494 & | & -2.5137 \\ 0.2555 & -3.1478 & | & 2.4891 \\ - & - & - & + & - & - & - & - \\ 1.9595 & -4.7216 & | & 10.9782 \end{pmatrix}. \quad (3.6.10)$$

На рисунке 3.11 представлен график зависимости величины $x_1(t)$, пропорциональной смещению тела в электромагнитном подвесе. Пунктиром отмечено ограничение $x_1 = 0.07$.

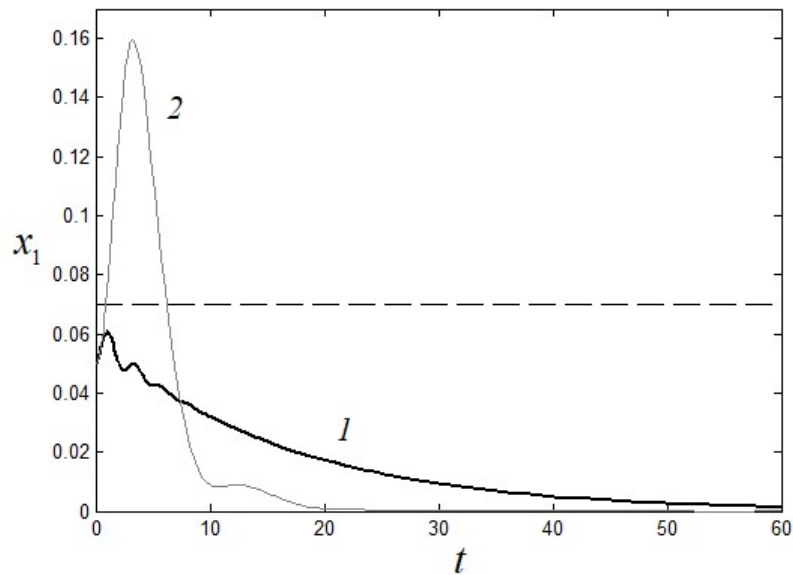


Рисунок 3.11. График зависимости величины, пропорциональной смещению тела в электромагнитном подвесе

На рисунке 3.12 представлен график зависимости величины $x_2(t)$, пропорциональной скорости смещению тела в электромагнитном подвесе.

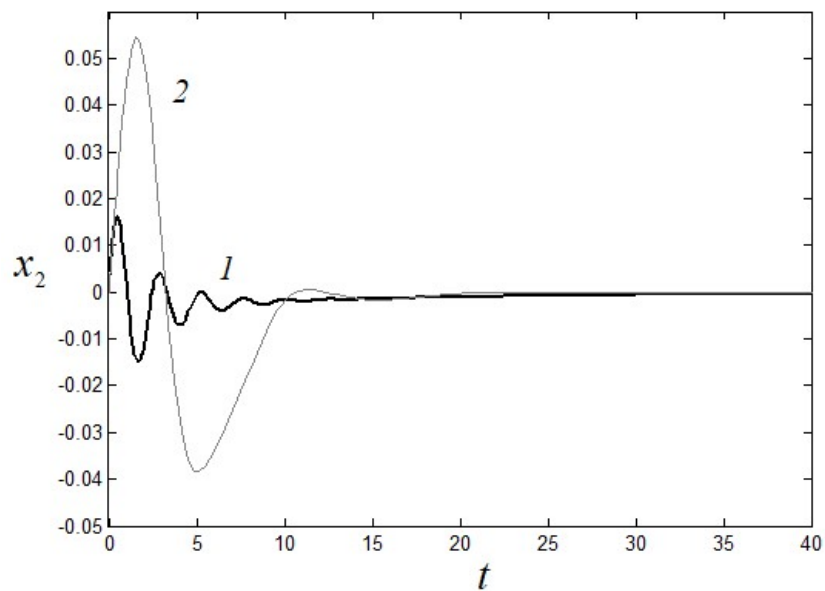


Рисунок 3.12. График зависимости величины, пропорциональной скорости смещения тела в электромагнитном подвесе

На рисунке 3.13 представлен график зависимости величины $x_3(t)$, пропорциональной силе тока в цепи электромагнита. На рисунке пунктиром отмечены ограничения $x_3 = -0.16$ и $x_3 = 0.16$.

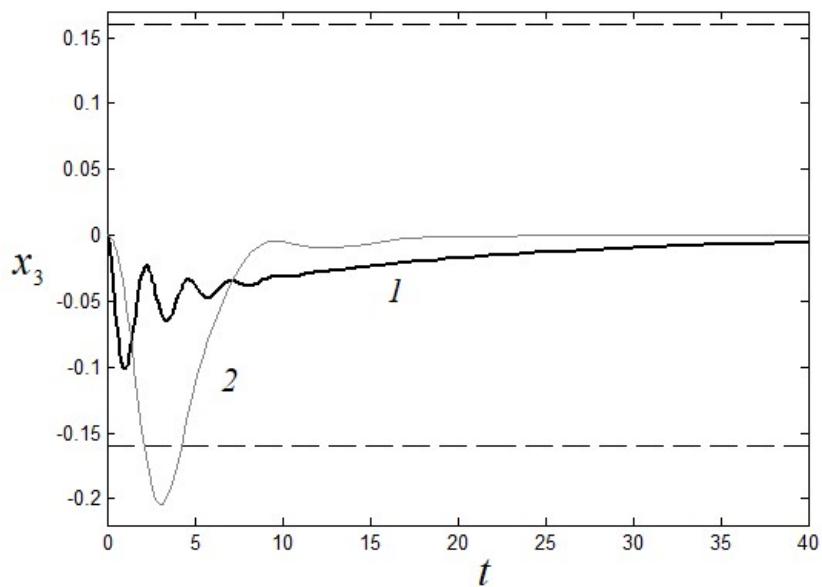


Рисунок 3.13. График зависимости величины, пропорциональной силе тока в цепи электромагнита

На рисунке 3.14 представлен график управления $u(t)$. Кривая 1 на рисунке 3.11, рисунке 3.12, рисунке 3.13, рисунке 3.14 соответствует динамическому регулятору с матрицей параметров (3.6.9), а кривая 2 динамическому регулятору с матрицей параметров (3.6.10). Заметим, что регулятор с матрицей параметров регулятора (3.6.10) не обеспечивает выполнение ограничений (3.6.8).

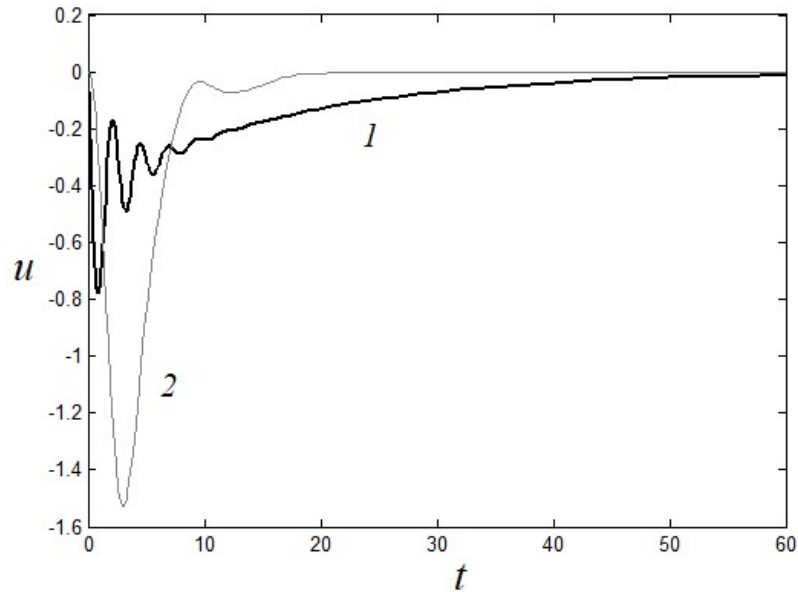


Рисунок 3.14. График управления

Это говорит о важности учета в постановке задачи ограничений на фазовые переменные.

На рисунке 3.15 изображен эллипсоид, который представляет собой оценку множества начальных состояний $\hat{E}(X)$, при выборе которых динамический регулятор с матрицей параметров (3.6.9) будет обеспечивать стабилизацию тела в электромагнитном подвесе при ограничениях (3.6.8). Здесь множество $\hat{E}(X) = \{x_c : x_c^T X x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}$ получено сечением эллипсоида $x_c^T X x_c \leq 1$ плоскостью $x_r = 0$. Другими словами, множество $\hat{E}(X)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях (3.6.8).

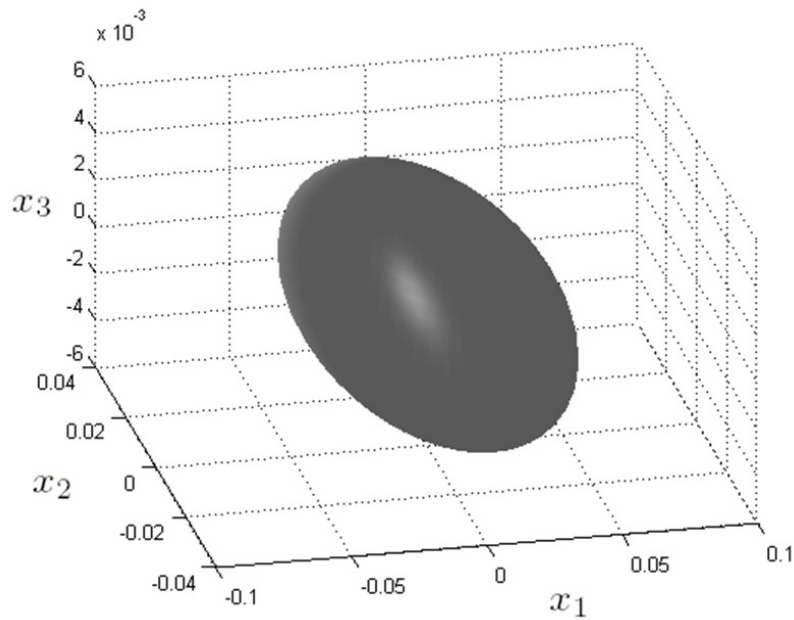


Рисунок 3.15. Оценка для области притяжения

Сравним поведение не линеаризованной (3.6.1) и линеаризованной (3.6.2) систем, замкнутых динамическим регулятором второго порядка с матрицей параметров регулятора (3.6.9) при начальном состоянии системы $x_0 = (0.05, 0, 0)^T$. Напомним, что динамический регулятор с матрицей параметров (3.6.9) получен в результате решения системы матричных неравенств (3.3.4) в которые входит начальное состояние x_0 .

На рисунке 3.16, рисунке 3.17, рисунке 3.18 черная кривая соответствует поведению величин $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ для линеаризованной системы, а серая кривая соответствует поведению этих величин для не линеаризованной системы замкнутых динамическим регулятором второго порядка с матрицей параметров (3.6.9).

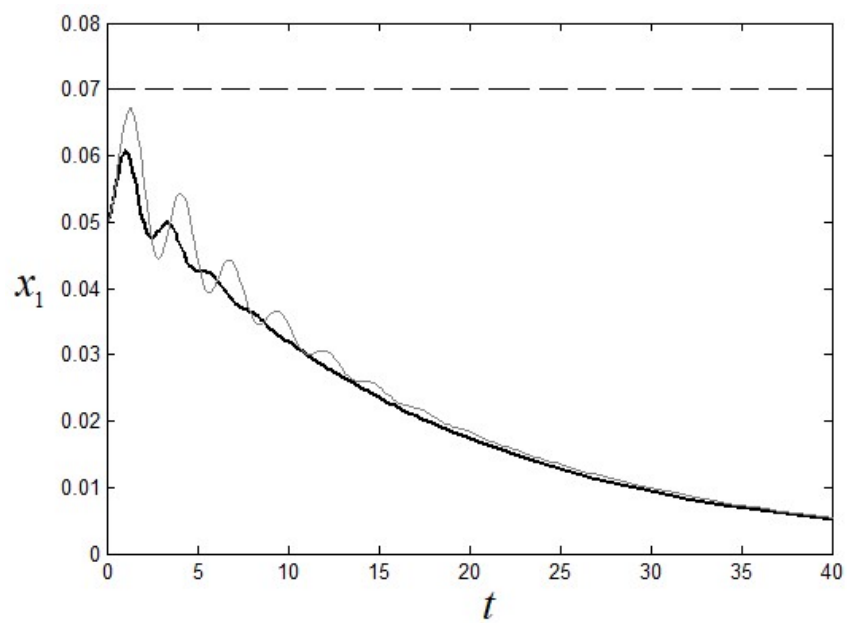


Рисунок 3.16. График зависимости величины $x_1(t)$

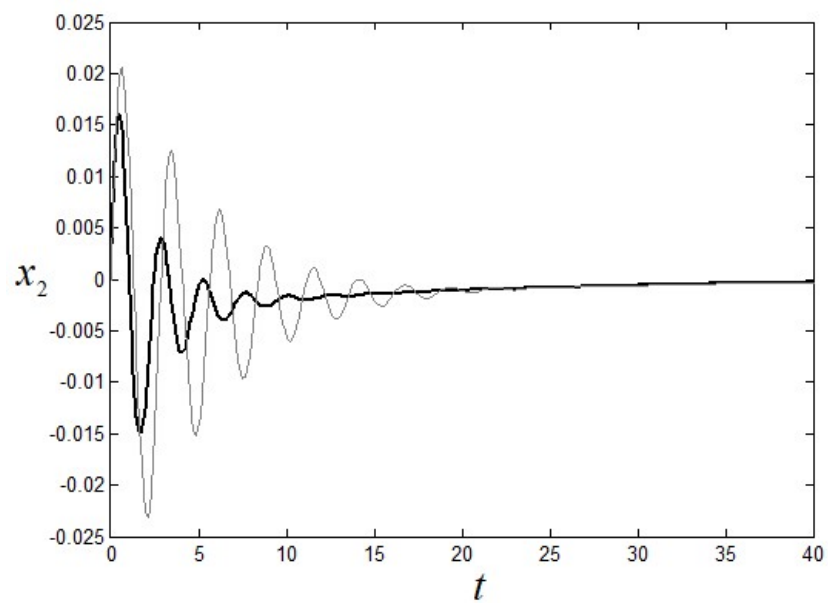


Рисунок 3.17. График зависимости величины $x_2(t)$

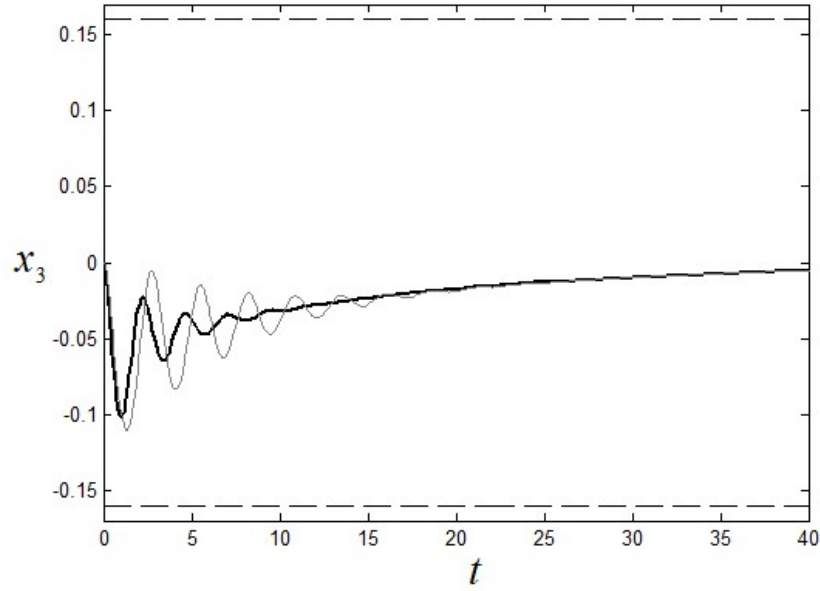


Рисунок 3.18. График зависимости величины $x_3(t)$

Из графиков следует, что динамический регулятор с матрицей параметров регулятора (3.6.9) обеспечивает стабилизацию при указанных ограничениях не линеаризованной системы (3.6.1) с начальным состоянием $x_0 = (0.05, 0, 0)^T$.

Найдем изменение оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой динамический регулятор с матрицей параметров регулятора (3.6.9) будет обеспечивать стабилизацию и в случае наличия ошибки в измеряемом выходе. Решение системы линейных матричных неравенств (3.5.5) при заданном параметре δ определяет два множества начальных состояний

$$\hat{E}(X_1) = \{x_c : x_c^T X_1 x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}, \quad \hat{E}(X_2) = \{x_c : x_c^T X_2 x_c \leq 1 \cap x_r = 0\}$$

для первого и второго ограничений (3.6.8) соответственно.

На рисунке 3.19 при значении параметра $\delta = 0$ представлены сечение множества начальных состояний $\hat{E}(X_1)$ плоскостью $x_3 = 0$ и множество начальных состояний $\hat{E}(X_2)$. Заметим, что эллипсоид $\hat{E}(X_2)$ лежит внутри эллипсоид $\hat{E}(X_1)$. Следовательно, множеством, полученным пересечением эллипсоидов $\hat{E}(X_1)$ и $\hat{E}(X_2)$ будет эллипсоид $\hat{E}(X_2)$. Другими словами, множество $\hat{E}(X_2)$ является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при значении параметра $\delta = 0$.

Впишем в множество $\hat{E}(X_1) \cap \hat{E}(X_2)$, которое является оценкой для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при ограничениях (3.6.8), эллипсоид, имеющий наибольший объем.

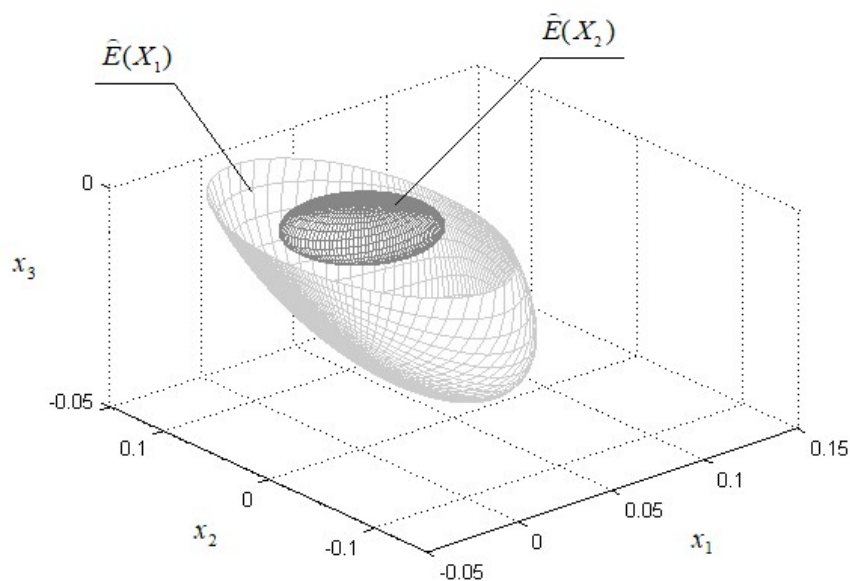


Рисунок 3.19. Оценка для области притяжения при значении параметра $\delta = 0$

На рисунке 3.20 представлен график зависимости объема V данного эллипсоида от величины δ . В частности, получены значения $V(0) = 4.1234 \cdot 10^{-5}$, $V(0.000122) = 1.8612 \cdot 10^{-5}$.

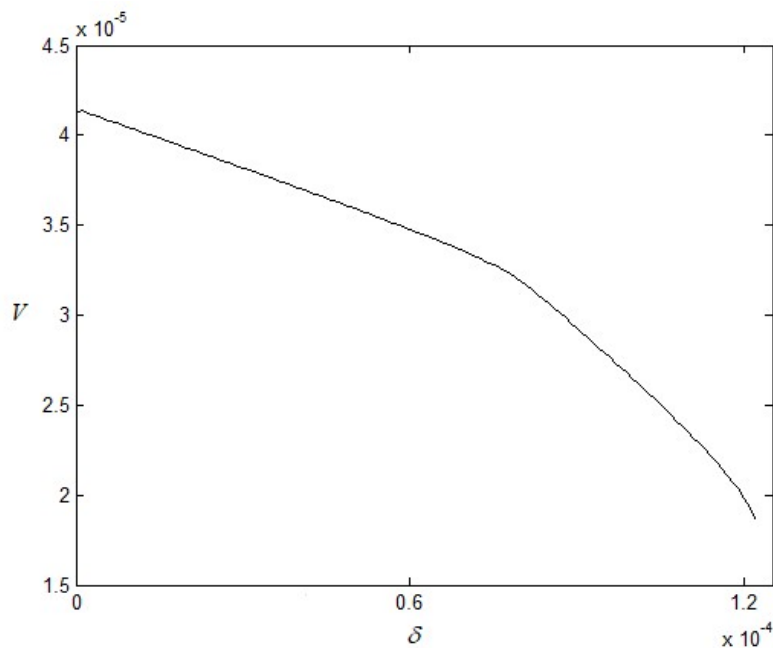


Рисунок 3.20. График зависимости объема вписанного эллипсоида от δ

Заметим, что для значений $\delta > 0.000122$ система линейных матричных неравенств (3.5.5) не имела решений, как для первого, так и для второго ограничения (3.6.8). Из графика следует, что при небольшом увеличении значения δ размер вписанного в множество $\hat{E}(X_1) \cap \hat{E}(X_2)$ эллипсоида, имеющего наибольший объем, существенно уменьшается.

Глава 4. Робастная стабилизация по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что все параметры системы точно известны, однако о параметрах реальных механических систем, как правило, известно лишь то, что они принадлежат некоторому диапазону. Поэтому значительный интерес представляет изучение линейных динамических систем, которые обладают некоторой неопределенностью, т.е. для которых один или несколько параметров точно не известны. Закон управления, который обеспечивает выполнение заданных целей для таких объектов, называют робастным управлением.

В данной главе поставлена и решена задача поиска закона управления в виде линейной обратной связи по состоянию, который обеспечивает робастную стабилизацию по состоянию линейной динамической системы с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для существования матрицы обратной связи робастного закона управления.

В качестве примера приведено решение задачи поиска стабилизирующего робастного закона управления для двухмассовой системы при отсутствии полной информации об ее параметрах, при наличии ограничений на величину смещения одной из материальных точек и на величину управления. Приведено сравнение полученного закона управления с робастным законом управления по состоянию без учета ограничений. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

4.1. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему с неопределенностью

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_\Delta v_\Delta, \\ z_\Delta &= C_\Delta x + D_u u + D_\Delta v_\Delta,\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

$$v_\Delta = \Delta z_\Delta.\tag{4.1.2}$$

Здесь $x \in R^n$ – состояние системы, $u \in R^l$ – управление, A , B_u , B_Δ , C_Δ , D_Δ , D_u – заданные матрицы соответствующих размеров. Неизвестная матрица Δ , описывает параметрические возмущения и удовлетворяет для всех $t \geq 0$ условию

$$\Delta^T \Delta \leq \eta^2 I \quad (4.1.3)$$

при заданном значении $\eta \neq 0$.

Относительно v_Δ и z_Δ , которые можно трактовать как вход и как выход неопределенности системы, будем предполагать, что они ограничены по норме L_2 , т.е.

$$\|v_\Delta\| = \left(\int_0^\infty |v_\Delta(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty, \quad \|z_\Delta\| = \left(\int_0^\infty |z_\Delta(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Введем $z_i \in R^{m_i}$ – выходы, определяющие ограничения на фазовые и управляющие переменные

$$z_i = C_i x + D_i u, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.1.4)$$

где C_i , D_i , $i = \overline{1, N}$ – заданные матрицы соответствующего размера.

Линейную систему (4.1.1) с неопределенностью (4.1.2) структурно можно представить в виде блок-схемы, изображенной на рисунке 4.1, где $H(s)$ – передаточная функция системы от входов $u(t)$ и $v_\Delta(t)$ к выходам $z_i(t)$ и $z_\Delta(t)$.

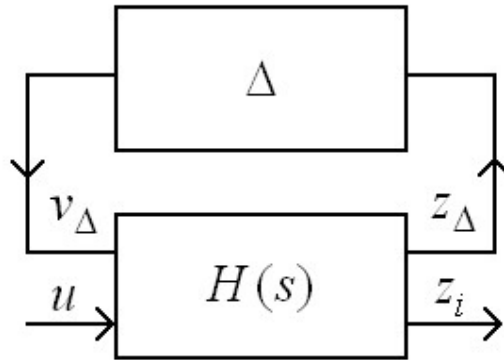


Рисунок 4.1. Блок-схема системы с неопределенностью

Для объекта (4.1.1), (4.1.2) поставим задачу робастной стабилизации по состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные. Требуется найти закон управления в виде линейной обратной связи по состоянию

$$u = \theta x, \quad (4.1.5)$$

который для любых допустимых неопределенностей Δ , удовлетворяющих условию (4.1.3), обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой системы (4.1.1), (4.1.2), (4.1.5) со

степенью устойчивости не меньшей, чем β ($\beta > 0$), а также обеспечивает выполнение ограничений

$$\max_{t \geq 0} |z_i(t)| \leq \gamma_i, \quad i = \overline{1, N} \quad (4.1.6)$$

при заданных значениях γ_i .

4.2. Поиск матрицы обратной связи робастного закона управления

Для поиска матрицы обратной связи θ , наряду с исходной системой (4.1.1), (4.1.2), рассмотрим также вспомогательную систему (4.1.1), (4.2.1), в которой вход неопределенности v_Δ и выход неопределенности z_Δ в каждый момент времени связаны неравенством

$$|v_\Delta|^2 \leq \eta^2 |z_\Delta|^2. \quad (4.2.1)$$

Структурно вспомогательную систему можно представить в виде блок-схемы, изображенной на рисунке 4.2,

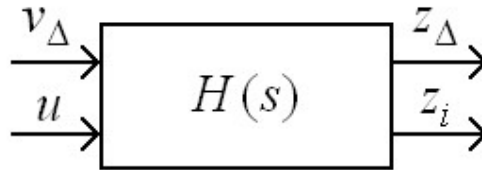


Рисунок 4.2. Блок-схема системы вспомогательной системы

Заметим, что в силу выполнения условия (4.1.3) вход неопределенности v_Δ и выход неопределенности z_Δ исходной системы (4.1.2) также удовлетворяют неравенству (4.2.1) вспомогательной системы. Следовательно, закон управления $u(t)$, обеспечивающий робастную стабилизацию вспомогательной системы, будет обеспечивать и робастную стабилизацию исходной системы (4.1.1), (4.1.2).

Пусть для вспомогательной системы (4.1.1), (4.2.1) выполнено условие

$$I - \eta^2 D_\Delta^T D_\Delta > 0. \quad (4.2.2)$$

В этом случае состояние $x = 0$ является состоянием равновесия вспомогательной системы. В самом деле, из неравенства (4.2.1) с учетом второго равенства (4.1.1) при $x = 0$, следует, что

$$v_\Delta^T (I - \eta^2 D_\Delta^T D_\Delta) v_\Delta \leq 0, \quad (4.2.3)$$

и, следовательно, с учетом условия (4.2.2), следует, что и $v_{\Delta} = 0$.

Получим достаточные условия существования матрицы обратной связи θ робастного закона управления, для вспомогательной системы (4.1.1), (4.2.1) при наличии ограничений на фазовые и управляющие переменные. Рассмотрим область фазового пространства, заданную неравенствами $|z_i(t)| \leq \gamma_i$, $i = \overline{1, N}$. Впишем в нее эллипсоид $x^T X x \leq 1$. Пусть существует квадратичная функция $V(x) = x^T(t) X x(t)$ с матрицей $X = X^T > 0$ такая, что по любой траектории вспомогательной системы выполнено неравенство

$$\dot{V}(x) < -2\beta V \quad (4.2.4)$$

при фиксированном $\beta > 0$ и при всех x и v_{Δ} , удовлетворяющих условию (4.2.1). Обозначим матрицу $Y = X^{-1}$. Тогда область в фазовом пространстве, полученную объединением всех множеств $E = \{x : x^T X x \leq 1\}$, отвечающих всевозможным квадратичным функциям Ляпунова вида (4.2.4), можно выделить, в терминах линейных матричных неравенств, следующим образом.

Теорема 4.1. Если начальное состояние $x(0)$, матрицы $Y = Y^T > 0$, Z и величины γ_i^2 , $i = \overline{1, N}$ удовлетворяют системе линейных матричных неравенств

$$\begin{pmatrix} Y & x(0) \\ x^T(0) & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (4.2.5)$$

$$\begin{pmatrix} YA^T + AY + Z^T B_u^T + B_u Z + 2\beta Y & B_{\Delta} & YC_{\Delta}^T + Z^T D_u^T \\ B_{\Delta}^T & -\eta^{-1}I & D_{\Delta}^T \\ C_{\Delta} Y + D_u Z & D_{\Delta} & -\eta^{-1}I \end{pmatrix} < 0,$$

$$\begin{pmatrix} Y & YC_i^T + Z^T D_i^T \\ C_i Y + D_i Z & \gamma_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0, \quad i = \overline{1, N},$$

тогда все траектории замкнутой системы (4.1.1), (4.1.5), (4.2.1) с начальными условиями $x(0) \in E$ удовлетворяют ограничениям (4.1.6). Матрицу обратной связи робастного закона управления (4.1.5) для системы (4.1.1), (4.2.1) с ограничениями на фазовые и управляющие переменные вычисляем как $\theta = ZY^{-1}$.

Доказательство. Согласно неущербности S-процедуры для квадратичной формы при одном ограничении [9], выполнение неравенства (4.2.4) при условии (4.2.1) эквивалентно существованию числа $\mu > 0$, при котором выполняется неравенство

$$\dot{V}(x) + 2\beta V - \mu(|v_{\Delta}|^2 - \eta^2 |z_{\Delta}|^2) < 0, \quad (4.2.6)$$

для всех x и v_{Δ} таких, что $|x|^2 + |v_{\Delta}|^2 \neq 0$.

Без ограничения общности положим $\mu = 1$. Действительно, достаточно умножить неравенство (4.2.6) на μ^{-1} и учесть, что при $\mu > 0$ неравенство (4.2.4) и неравенство $\mu^{-1}[\dot{V}(x) + 2\beta V] < 0$ эквивалентны.

Выражение в левой части неравенства (4.2.6) представляет собой отрицательно определенную квадратичную функцию относительно переменных x и v_Δ , следовательно, для $\forall \varepsilon > 0$ справедливо:

$$\dot{V}(x) + 2\beta V - \mu(|v_\Delta|^2 - \eta^2|z_\Delta|^2) < -\varepsilon(|x|^2 + |v_\Delta|^2) < -\varepsilon|x|^2.$$

Это означает, что $V(x)$ является квадратичной функцией Ляпунова, обеспечивающей асимптотическую устойчивость вспомогательной (4.1.1), (4.2.1), а значит, и исходной системы (4.1.1), (4.1.2) со степенью устойчивости не меньшей β .

Первое неравенство (4.2.5) обеспечивает выполнение условия – начальная точка $x(0) \in E$. В самом деле, так как $V(x) = x^T(t)Xx(t)$ – функции Ляпунова, значит для всех $t \geq 0$ выполняется неравенство $x^T(t)Xx(t) \leq 1$. Учтем, что $X = Y^{-1}$. Тогда при $t = 0$ по лемме Шура [36] оно эквивалентно первому неравенству (4.2.5).

Покажем, что выполнение второго неравенства (4.2.5) обеспечивает существование робастного закона управления вида (4.1.5), который гарантирует асимптотическую устойчивость объекта (4.1.1), (4.1.2), (4.2.1) со степенью устойчивости не меньшей, чем β . Согласно частотной теореме [9], существование функции $V(x)$, удовлетворяющей неравенству (4.2.6), эквивалентно выполнению частотного условия

$$H^T(-j\omega)H(j\omega) - \eta^{-2}I < 0, \quad \forall \omega \in (-\infty, +\infty),$$

или, что то же, выполнению условия

$$\|H(s)\|_\infty < \eta^{-1}, \quad H(s) = D_\Delta + \bar{C}_\Delta(sI - \bar{A})^{-1}B_\Delta, \quad (4.2.7)$$

где

$$\bar{A} = A + B_u \theta, \quad \bar{C}_\Delta = C_\Delta + D_u \theta.$$

Таким образом, уровень гашения возмущений во вспомогательной системе (4.1.1), (4.1.5), (4.2.1) не должен превышать величину η^{-1} . Согласно [3] условие (4.2.7) выполнено, если справедливо матричное неравенство

$$\begin{pmatrix} \bar{A}^T X + X\bar{A} + 2\beta X & XB_\Delta & \bar{C}_\Delta^T \\ B_\Delta^T X & -\eta^{-1}I & D_\Delta^T \\ \bar{C}_\Delta & D_\Delta & -\eta^{-1}I \end{pmatrix} < 0, \quad (4.2.8)$$

Учтем, что $X = Y^{-1}$. Умножим неравенство (4.2.8) слева и справа на диагональную матрицу $\text{diag}(Y, I, I)$ и, обозначив $Z = \theta Y$, получим второе неравенство (4.2.5).

Покажем, что третье неравенство (4.2.5) обеспечивает выполнения условий $\|z_i(t)\|^2 \leq \gamma_i^2$, $i = \overline{1, N}$, т.е. гарантирует, что фазовая траектория системы удовлетворяет заданным ограничениям. Согласно неущербности S-процедуры при одном ограничении [9], неравенство $\|z_i(t)\|^2 \leq \gamma_i^2$, выполнено для всех x , удовлетворяющих неравенству $x^T(t)Xx(t) \leq 1$, тогда и только тогда, когда для некоторого числа $\lambda_i > 0$ и для всех x выполнено неравенство

$$\|z_i(t)\|^2 - \gamma_i^2 - \lambda_i(x^T(t)Xx(t) - 1) \leq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.2.9)$$

Учитывая, что $z_i = \bar{C}_i x$, где $\bar{C}_i = C_i + D_i \theta$, представим (4.2.9) в виде

$$x^T(t)[\bar{C}_i^T \bar{C}_i - \lambda_i X]x(t) + \lambda_i - \gamma_i^2 \leq 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.2.10)$$

Неравенство (4.2.10) верно для всех x . Значит, $\lambda_i \leq \gamma_i^2$ и $\bar{C}_i^T \bar{C}_i \leq \lambda_i X$. Следовательно,

$$\bar{C}_i^T \bar{C}_i \leq \gamma_i^2 X. \quad (4.2.11)$$

Применив лемму Шура запишем (4.2.11) в эквивалентном виде

$$\begin{pmatrix} X & C_i^T + \theta_i^T D_i^T \\ C_i + D_i \theta & \gamma_i^2 I \end{pmatrix} \geq 0. \quad (4.2.12)$$

Учтем, что $X = Y^{-1}$. Умножим неравенство (4.2.12) слева и справа на диагональную матрицу $\text{diag}(Y, I)$ и, учитывая, что $Z = \theta Y$, получим третье неравенство (4.2.5).

Так как $Z = \theta Y$, а $Y = Y^T > 0$, то матрицу обратной связи робастного закона управления (4.1.5) для системы (4.1.1), (4.2.1) с ограничениями на фазовые и управляющие переменные вычисляем как $\theta = ZY^{-1}$. Теорема 4.1 доказана.

Пусть Y обозначает множество всех матриц Y , удовлетворяющих (4.2.5). Максимальная по объему по всем $Y \in Y$ область $E(Y_*)$ начальных условий для траекторий, удовлетворяющих ограничениям на фазовые и управляющие переменные, находим путем максимизации определителя матрицы Y . Эта операция является стандартной в пакете программ Matlab с использованием приложения CVX.

Заметим, что если для заданного начального состояния x_0 найдены матрицы Y , Z и величины γ_i^2 , $i = \overline{1, N}$, удовлетворяющие линейным матричным неравенствам (4.2.5) и построен робастный закон управления, то для всех начальных состояний $x_0 \in E$, фазовые траектории исходной системы (4.1.1), (4.1.2), замкнутой управлением (4.1.5), будут

асимптотически приближаться к нулевому состоянию и не выходить за границы множества, задаваемого ограничениями (4.1.6).

4.3. Результаты численного моделирования

Пример. Стабилизация двухмассовой системы. В качестве примера объекта с неопределенностью рассмотрим двухмассовую систему, изображенную на рисунке 4.3.

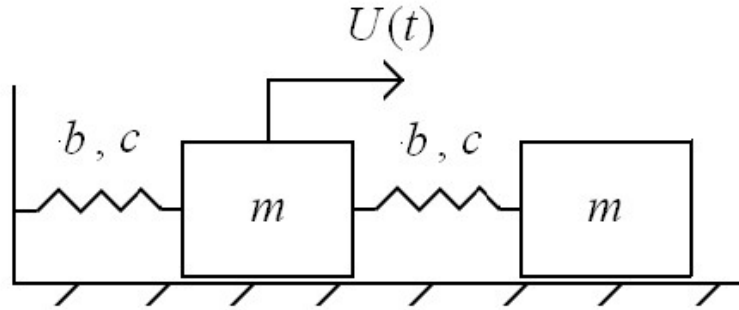


Рисунок 4.3. Двухмассовая система

Математическая модель объекта описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi}_1 &= -b\dot{\xi}_1 - c\xi_1 + b(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) + c(\xi_2 - \xi_1) + U(t), \\ m\ddot{\xi}_2 &= -b(\dot{\xi}_2 - \dot{\xi}_1) - c(\xi_2 - \xi_1), \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

где m – масса материальных точек, b – коэффициент трения, c – коэффициент упругости пружин. Будем предполагать, что значения коэффициентов m , b , c точно не известны и лежат в некотором диапазоне

$$m = m_0(1 + w_m\delta_m), \quad b = b_0(1 + w_b\delta_b), \quad c = c_0(1 + w_c\delta_c),$$

где m_0 , b_0 , c_0 , w_m , w_b и w_c – номинальные значения параметров, а неизвестные δ_m , δ_b и δ_c удовлетворяют условиям

$$|\delta_m| \leq \eta, \quad |\delta_b| \leq \eta, \quad |\delta_c| \leq \eta$$

для некоторого заданного значения η . На первую материальную точку действует внешняя сила $U(t)$. Величины ξ_1 и ξ_2 – это смещения первой и второй материальных точек относительно состояния равновесия системы.

Приведем данный объект к каноническому виду управляемой системы с неопределенностью (4.1.1), (4.1.2). Обозначим $\xi(t) = (\xi_1, \xi_2)^T$ и представим уравнения (4.3.1) в виде

$$m\ddot{\xi} = -bK\dot{\xi} - cK\xi + pU(t), \quad (4.3.2)$$

где

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как параметры системы m , b и c имеют указанный выше вид, запишем уравнение (4.3.2) следующим образом:

$$m_0(1 + w_m \delta_m) \ddot{\xi} = -b_0(1 + w_b \delta_b) K \dot{\xi} - c_0(1 + w_c \delta_c) K \xi + pU(t).$$

Тогда

$$\ddot{\xi} = -\frac{b_0}{m_0} K \dot{\xi} - \frac{c_0}{m_0} K \xi - w_m \delta_m \ddot{\xi} - w_b \frac{b_0}{m_0} \delta_b K \dot{\xi} - w_c \frac{c_0}{m_0} \delta_c K \xi + p \frac{U(t)}{m_0}. \quad (4.3.3)$$

Обозначив

$$x_1 = \xi, \quad x_2 = \dot{\xi}, \quad u = \frac{U(t)}{m_0}, \quad v_m = -\delta_m \ddot{\xi}, \quad v_b = -\frac{b_0}{m_0} \delta_b \dot{\xi}, \quad v_c = -\frac{c_0}{m_0} \delta_c \xi, \quad (4.3.4)$$

запишем уравнение (4.3.3) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{c_0}{m_0} K x_1 - \frac{b_0}{m_0} K x_2 + w_m I_2 v_m + w_b K v_b + w_c K v_c + p u. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Теперь обозначив $v_\Delta = (v_m, v_b, v_c)^T$, $z_\Delta = (z_m, z_b, z_c)^T$, где

$$z_m = -\dot{x}_2, \quad z_b = -\frac{b_0}{m_0} K x_2, \quad z_c = -\frac{c_0}{m_0} x_1, \quad (4.3.6)$$

запишем систему (4.3.4), (4.3.5) в каноническом виде управляемого объекта с неопределенностью вида (4.1.1), (4.1.2):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u u + B_\Delta v_\Delta, \\ z_\Delta &= C_\Delta x + D_u u + D_\Delta v_\Delta, \\ v_\Delta &= \Delta z_\Delta. \end{aligned}$$

Здесь $x = (\xi, \dot{\xi})^T$ – состояние системы, а блочные матрицы A , B_u , B_Δ , C_Δ , D_Δ , D_u и Δ имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & I \\ -\frac{c_0}{m_0} K & -\frac{b_0}{m_0} K \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ p \end{pmatrix}, \quad B_\Delta = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ w_m I & w_b K & w_c K \end{pmatrix},$$

$$C_{\Delta} = \begin{pmatrix} \frac{c_0}{m_0} K & \frac{b_0}{m_0} K \\ 0_{2 \times 2} & -\frac{b_0}{m_0} I \\ -\frac{c_0}{m_0} I & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, D_u = \begin{pmatrix} -p \\ 0_{2 \times 1} \\ 0_{2 \times 1} \end{pmatrix}, D_{\Delta} = \begin{pmatrix} -w_m I & -w_b K & -w_c K \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_m I & 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & \delta_b I & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} & \delta_c I \end{pmatrix}.$$

Матрицы I , $0_{2 \times 2}$ – единичная и нулевая матрицы соответствующего размера. Неизвестная матрица Δ , описывает параметрические возмущения и удовлетворяет для всех $t \geq 0$ условию

$$\Delta^T \Delta \leq \eta^2 I$$

при заданном значении $\eta \neq 0$.

Для данного объекта с неопределенностью решалась задача поиска робастного закона управления по состоянию при наличии ограничений на величину отклонения второй материальной точки объекта $\xi_2(t)$ и на величину управления u :

$$\max_{t \geq 0} |\xi_2(t)| \leq \gamma_0, \max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 2,$$

где γ_0 – заданное значение. Численное решение проведено в пакете Matlab для значений параметров $\eta = 0.1$, $m_0 = 1$, $b_0 = 0.1$, $c_0 = 1$, $w_m = w_b = w_c = 0.1$. Пусть начальное состояние системы $(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2)^T = (1.2, -0.4, -1.9, 0.3)^T$.

В таблице 4.1 представлена зависимость минимального значения γ_0 от степени устойчивости β , из которой следует, что при увеличении значения степени устойчивости β возрастает величина γ_0 .

Таблица 4.1. Зависимость минимального значения γ_0 от степени устойчивости β .

β	0.01	0.02	0.05	0.1	0.3	0.3872
γ_0	0.4210	0.4214	0.4226	0.4253	0.4936	0.9191

Заметим, что в результате экспериментов не удалось получить робастный закон управления, который обеспечивает степень устойчивости замкнутой системы (4.1.1), (4.1.2), (4.1.5) выше, чем $\beta^* = 0.3872$.

В результате решения системы линейных матричных неравенств (4.2.5) при значениях $\beta = 0.1$ и $\gamma_0 = 0.4253$ получена матрица

$$Y = \begin{pmatrix} 2.6951 & -0.4916 & -1.5218 & -0.5343 \\ -0.4916 & 0.1777 & 0.5803 & -0.0773 \\ -1.5218 & 0.5803 & 6.1363 & -1.5013 \\ -0.5343 & -0.0773 & -1.5013 & 0.8417 \end{pmatrix}$$

и матрица обратной связи

$$\theta = (-2.3430 \quad -1.2653 \quad -2.0110 \quad -4.1147) \quad (4.3.7)$$

робастного закона управления (4.1.5), который стабилизирует объект при ограничениях на фазовую переменную и управление.

Робастный закон управления с матрицей (4.3.7) для любого начального состояния x_0 из области $E = \{x: x^T Y^{-1} x \leq 1\}$ гарантирует стабилизацию двухмассовой системы при ограничениях $\max_{t \geq 0} |\xi_2(t)| \leq 0.4253$, $\max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 2$ на отклонение второй материальной точки объекта $\xi_2(t)$ и на величину управления u .

Выберем двухмассовую систему из семейства объектов (4.1.2). Зададим величины $\delta_m = 0.01$, $\delta_b = -0.01$, $\delta_c = 0.01$ и начальное состояние системы $(\xi_1, \xi_2, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2)^T = (1.1950, -0.3033, -2.0800, 0.3090)^T$ из данной области E .

Непрерывной линией на рисунке 4.4, рисунке 4.5, рисунке 4.6 показаны графики $u(t)$, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ для закона управления (4.1.5) с матрицей обратной связи (4.3.7). Штриховая линия соответствует графикам $u(t)$, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ для робастного закона управления по состоянию с матрицей обратной связи

$$\theta = (-6.7619 \quad 3.8381 \quad -4.9502 \quad -2.6624). \quad (4.3.8)$$

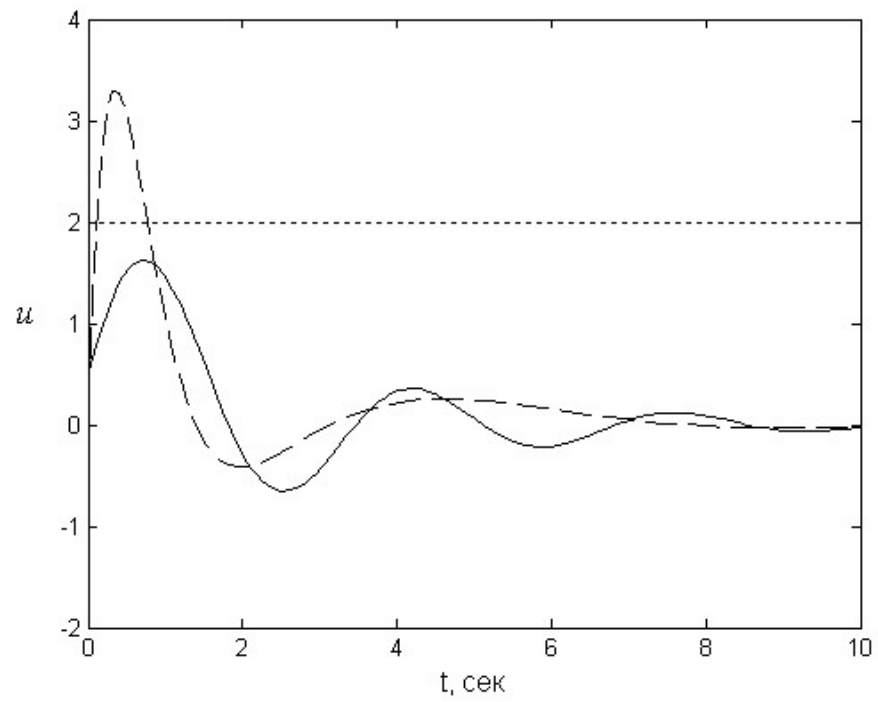
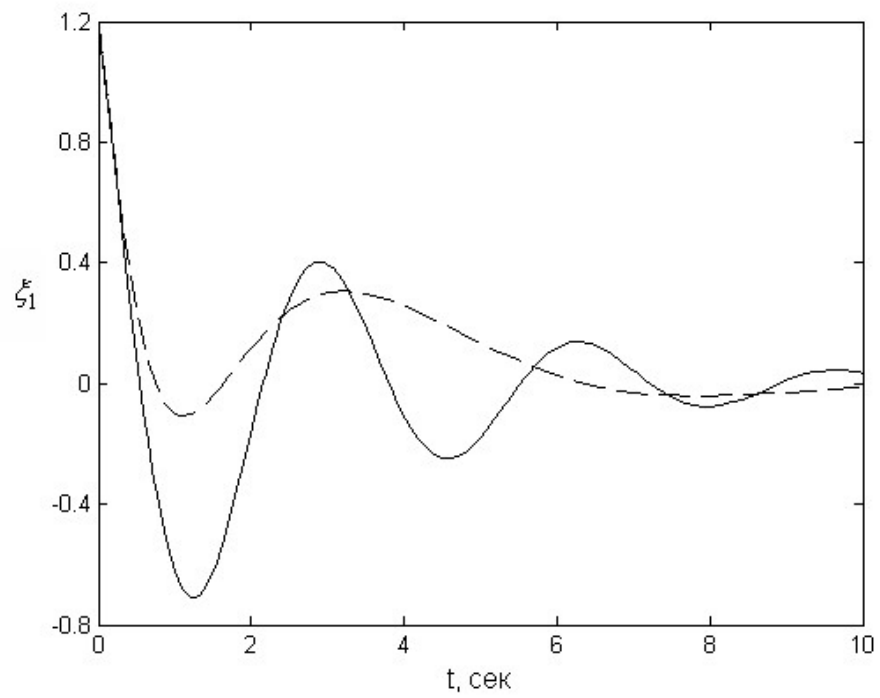
Рисунок 4.4. График $u(t)$ 

Рисунок 4.5. Смещение первой материальной точки объекта

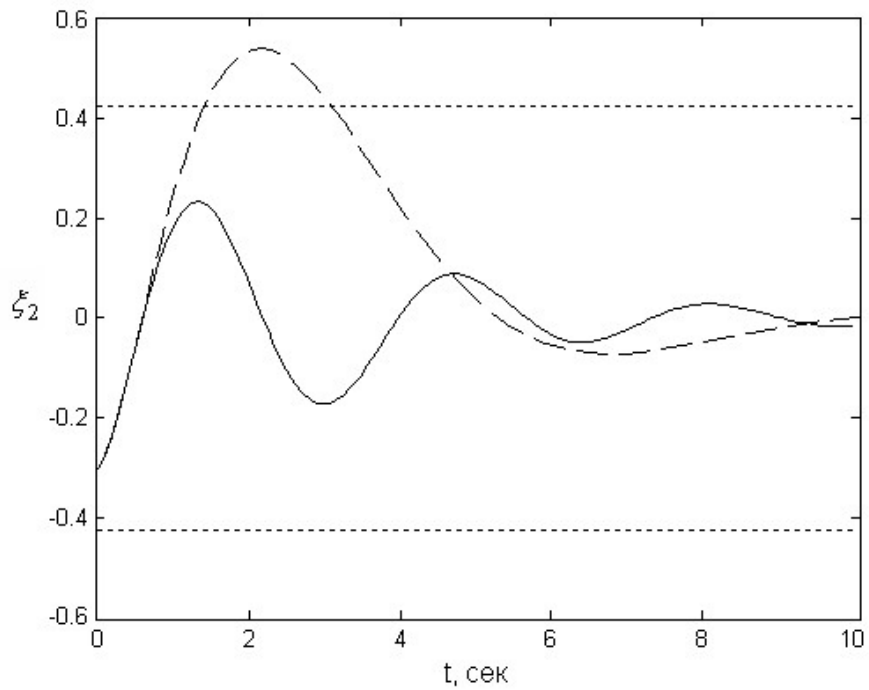


Рисунок 4.6. Смещение второй материальной точки объекта

Закон управления с матрицей (4.3.8) получен в результате решения задачи робастной стабилизации без учета в модели ограничений на $u(t)$ и $\xi_2(t)$.

Пунктирной линией на рисунке 4.4 показано ограничение $\max_{t \geq 0} |u(t)| \leq 2$, а на рисунке 4.6 – ограничение $\max_{t \geq 0} |\xi_2(t)| \leq 0.4253$.

Из графиков, приведенных на рисунке 4.4 и рисунке 4.6, следует, что робастный закон управления с матрицей обратной связи (4.3.7) обеспечивает выполнение указанных ограничений. Для управления с матрицей обратной связи (4.3.8) траектория замкнутой системы выходит за границы, определяемые ограничениями. Это говорит о важности учета в постановке задачи робастной стабилизации по состоянию ограничений на фазовые и управляющие переменные.

Заключение

В главе 1 поставлена задача об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по состоянию линейной динамической системы при ограничениях на фазовые и управляющие переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в случае, когда измерение состояния системы производится с ошибкой. В терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы в указанной ситуации. В качестве примеров рассмотрены задача стабилизации перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

Заметим, что при решении практических задач управления реальными физическими объектами полная информация о состоянии системы обычно недоступна измерению. Как правило доступна измерению лишь часть фазовых переменных или их линейная комбинация. В связи с этим возникает нетривиальная задача стабилизации линейных динамических систем с помощью управления по измеряемому выходу системы.

В главе 2 сформулирована и решена задача поиска закона управления виде линейной обратной связи по измеряемому выходу, который обеспечивает стабилизацию линейной динамической системы и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Получены достаточные условия для поиска матрицы параметров обратной связи. Приведен подход, который позволяет получить оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы.

Также поставлена задача об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой закон управления, полученный как решение в задаче стабилизации по измеряемому выходу линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, будет обеспечивать стабилизацию и в том случае, когда есть ошибки в измерениях выходных переменных. В терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы в указанной ситуации.

В качестве примеров рассмотрены две задачи: стабилизация перевернутого маятника и задача о движении ферромагнитного тела в электромагнитном подвесе. Для данных объектов получены законы управления по измеряемому выходу и оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы при выполнении заданных ограничений. Рассмотрен

вопрос о влиянии наличия ошибки в измерениях выходных переменных на оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

Для стабилизации линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, в том случае, когда состояние системы не доступно измерению, наряду с управлением в виде линейной обратной связи по измеряемому выходу, могут применяться динамические регуляторы по измеряемому выходу. Динамический регулятор – это объект, который описывается системой дифференциальных уравнений заданного порядка. Говорят, что для системы построен динамический регулятор полного порядка, если размерность состояния регулятора совпадает с размерностью состояния системы. В случае, когда размерность состояния регулятора ниже размерности состояния системы, говорят, что для системы построен регулятор пониженного порядка.

В главе 3 решается вопрос о синтезе динамических регуляторов по измеряемому выходу, которые будут обеспечивать стабилизацию линейной динамической системы с заданной степенью устойчивости и выполнение заданных ограничений на фазовые переменные. Подход к решению задачи основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Получены достаточные условия для поиска матрицы параметров регулятора.

Также поставлена задача об области притяжения состояния равновесия замкнутой системы, в которой полученные динамические регуляторы для линейной динамической системы с ограничениями на фазовые переменные, будут обеспечивать стабилизацию и в том случае, когда присутствуют ошибки в измерениях выходных переменных. В терминах линейных матричных неравенств сформулированы условия, позволяющие оценить область притяжения состояния равновесия замкнутой системы в указанной ситуации.

В качестве примера рассмотрена задача стабилизации движения тела в электромагнитном подвесе. Для данного объекта получены динамические регуляторы полного и пониженного порядков при которых выполнены заданные ограничения на фазовые переменные. Получены соответствующие им оценки для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Проведено сравнение указанных динамических регуляторов с динамическими регуляторами по выходу, которые получены для изучаемого объекта без учета ограничений на фазовые переменные. Показано, что последние не обеспечивают выполнение заданных характеристик замкнутой системы.

Приведено сравнение поведения не линеаризованной и линеаризованной систем, замкнутых регуляторами полного и пониженного порядков, которые получены для изучаемого объекта при учете ограничений на фазовые переменные.

Приведена оценка множества допустимых ограничений на величину, пропорциональную смещению тела в электромагнитном подвесе и на величину, пропорциональную силе тока в цепи электромагнита при которых существует регулятор полного порядка.

Также в главе 3 рассмотрен вопрос о влиянии наличия ошибки в измерениях выходных переменных на оценку для области притяжения состояния равновесия замкнутой системы. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

В рассмотренных выше задачах предполагалось, что все параметры системы точно известны, однако о параметрах реальных механических систем, как правило, известно лишь то, что они принадлежат некоторому диапазону. Поэтому значительный интерес представляет изучение линейных динамических систем, которые обладают некоторой неопределенностью, т.е. для которых один или несколько параметров точно не известны. Закон управления, который обеспечивает выполнение заданных целей для таких объектов, называют робастным управлением.

В главе 4 поставлена и решена задача поиска законов управления, которые обеспечивают робастную стабилизацию по состоянию линейных динамических систем с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные. Подход к решению основан на применении метода квадратичных функций Ляпунова и аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы достаточные условия для существования матрицы обратной связи робастного закона управления.

В качестве примера приведено решение задачи поиска робастного управления для двухмассовой системы при отсутствии полной информации об ее параметрах, при наличии ограничений на величину смещения одной из материальных точек и на величину управления. Приведено сравнение полученного закона управления с робастным законом управления по состоянию без учета ограничений. Численные эксперименты согласуются с теоретическими результатами.

Список литературы

1. Афанасьев, В.Н. Математическая теория конструирования систем управления / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов. — М.: Высшая школа, 2003. — 614 с.
2. Баландин, Д.В. Синтез регуляторов на основе решения линейных матричных неравенств и алгоритма поиска взаимнообратных матриц / Д.В. Баландин, М.М. Коган // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 1. — С. 82-99.
3. Баландин, Д.В. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств / Д.В. Баландин, М.М. Коган. — М.: Физматлит, 2007. — 280 с.
4. Баландин, Д.В. Метод функций Ляпунова в синтезе законов управления при интегральном и фазовых ограничениях / Д.В. Баландин, М.М. Коган // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 5. — С. 655-664.
5. Баландин, Д.В. Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях / Д.В. Баландин, М.М. Коган // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 6. — С. 48-57.
6. Баландин, Д.В. Синтез обобщенного H_∞ -оптимального управления в дискретном времени на конечном и бесконечном интервалах / Д.В. Баландин, М.М. Коган, Л.Н. Кривдина., А.А. Федюков // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 1. — С. 3-22.
Английский перевод:
Balandin, D.V. Design of Generalized Discrete-time H_∞ -Optimal Control over Finite and Infinite Intervals / D.V. Balandin, M.M. Kogan, L.N. Krivdina, A.A. Fedyukov // Automation and Remote Control. — 2014. — V. 75. — № 1. — P. 1–17. (WoS, Scopus)
7. Баландин, Д.В. Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без измерения его положения / Д.В. Баландин, Р.С. Бирюков, М.М. Коган, А.А. Федюков // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2017. — № 3. — С. 12-24.
Английский перевод:
Balandin, D.V. Optimal Stabilization of Bodies in Electromagnetic Suspensions without Measurements of Their Location / D.V. Balandin, R.S. Biryukov, M.M. Kogan, A.A. Fedyukov // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2017. — V. 56. — № 3. — P. 351–363. (WoS, Scopus)
8. Баландин, Д.В. Стабилизация линейных динамических объектов по измеряемому с ошибкой состоянию при ограничениях на фазовые и управляющие переменные / Д.В. Баландин, А.А. Федюков // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2021. — № 5. — С. 5–17.

Английский перевод:

Balandin, D.V. Stabilization of Linear Dynamic Objects According to the Measured-Error State Under Constraints on the Phase and Control Variables / D.V. Balandin, A.A. Feduykov // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. — 2021. — V. 60. — № 5. — P. 673-685. (WoS, Scopus)

9. Гелиг, А.Х. Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А.Х. Гелиг, Г.А. Леонов, В.А. Якубович. — М.: Наука, 1978. — 400 с.
10. Демидович, Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
11. Дунская, Н.В. Стабилизация управляемых механических и электромеханических систем / Н.В. Дунская, Е.С. Пятницкий // *Автоматика и телемеханика*. — 1988. — № 12. — С.40-51.
12. Журавлев, Ю.Н. Активные электромагнитные подшипники: теория, расчет, применение / Ю.Н. Журавлев. — СПб.: Политехника, 2003. — 206 с.
13. Неймарк, Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы / Ю.И. Неймарк. — М.: Наука, 1978. — 336 с.
14. Поляк, Б.Т. Робастная устойчивость и управление / Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
15. Поляк, Б.Т. Математическая теория автоматического управления: учебное пособие / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 500 с.
16. Соколов, Б.Н. Стабилизация динамических систем при геометрических ограничениях на управление / Б.Н. Соколов // *Прикладная математика и механика*. — 1991. — Т. 55. — Вып. 1. — С. 48–53.
17. Соколов, Б.Н. Об эффективности линейного регулятора при дополнительных геометрических ограничениях / Б.Н. Соколов // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. — 2009. — № 5. — С. 3-8.
18. Федюков, А.А. Применение линейных матричных неравенств в задачах стабилизации / А.А. Федюков // *Четаевская конференция: Труды X международной конференции (г. Казань)*. — Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. — Т. 3, Ч. 2. — С. 405-414.
19. Федюков, А.А. Стабилизация двухзвенного перевернутого маятника на тележке при фазовых ограничениях / А.А. Федюков // *Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Тезисы докладов XII Международной конференции (г. Москва)*. — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2012. — С. 324-326.
20. Федюков, А.А. Стабилизация по измеряемому выходу двухзвенного перевернутого маятника / А.А. Федюков // *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. — 2012. — № 2(1). — С. 177-183.

21. Федюков, А.А. Синтез динамических регуляторов, обеспечивающих стабилизацию систем с ограничениями на фазовые переменные / А.А. Федюков // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. — 2013. — № 2 (1). — С. 152–159.
22. Федюков, А.А. Стабилизация систем с фазовыми ограничениями с помощью динамических регуляторов пониженного порядка / А.А. Федюков // XII всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014: Сборник трудов (г. Москва). — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. — С. 338-344.
23. Федюков, А.А. Синтез робастного управления для двухмассовой системы с учетом ограничений на фазовую переменную и управление / А.А. Федюков // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник докладов (г. Казань). — Казань: Изд-во Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. — С. 3902-3904.
24. Федюков, А.А. Синтез робастного управления с учетом ограничений на фазовые и управляющие переменные / А.А. Федюков // Информатика и системы управления. — 2015. — № 2 (44). — С. 121-130.
25. Федюков, А.А. Робастная стабилизация двухмассовой системы с учетом ограничений на фазовую переменную и управление / А.А. Федюков // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIII Международной конференции (г. Москва). — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2016. — С. 386-388.
26. Федюков, А.А. Достаточные условия существования регулятора, обеспечивающего стабилизацию объекта с фазовыми ограничениями / А.А. Федюков // Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники: Сборник научных статей международной конференции (г. Барнаул). — Барнаул: Изд-во Алтайский государственный университет, 2018. — С. 523-530.
27. Федюков, А.А. Стабилизация тела в электромагнитном подвесе / А.А. Федюков // Оптимальное управление и дифференциальные игры: Материалы Международной конференции (г. Москва). — Москва: Изд-во Математический институт имени В.А. Стеклова РАН, 2018. — С. 94-96.
28. Федюков, А.А. Стабилизация электромагнитного подвеса при ограничениях на фазовые переменные / А.А. Федюков // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIV Международной научной конференции (г. Москва). — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2018. — С. 451-454.
29. Федюков, А.А. Робастная стабилизация динамической системы с ограничениями на фазовую переменную и управление / А.А. Федюков // XII Всероссийский съезд по

- фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сборник трудов в 4-х томах (г. Уфа). — Уфа: Изд-во Башкирский государственный университет, 2019. — Т. 1. — С. 283-285.
30. Федюков, А.А. Стабилизация динамической системы с ограничениями на фазовые переменные / А.А. Федюков // Современные проблемы математики и механики: Материалы международной конференции (г. Москва). — М.: Изд-во МАКС Пресс, 2019. — С. 799-802.
 31. Федюков, А.А. Оценка области допустимых начальных состояний в случае наличия ошибки в измеряемом выходе системы / А.А. Федюков // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XX Международной конференции (г. Нижний Новгород). — Нижний Новгород: Изд-во Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2020. — С. 386-390.
 32. Федюков, А.А. Стабилизация по измеряемому с ошибкой выходу динамической системы с фазовыми ограничениями / А.А. Федюков // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XV Международной научной конференции (г. Москва). — Москва: Изд-во Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2020. — С. 471-473.
 33. Федюков, А.А. Управление динамическим объектом при ограничениях на управляющие и фазовые переменные / А.А. Федюков // Уфимская осенняя математическая школа - 2020: Сборник тезисов международной научной конференции (г. Уфа). — Уфа: Изд-во ООО Аэтерна, 2020. — Ч. 2. — С. 274-276.
 34. Федюков, А.А. Стабилизация с помощью статического регулятора динамического объекта с ограничениями на фазовые переменные / А.А. Федюков // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XXI Международной конференции (г. Нижний Новгород). — Нижний Новгород: Изд-во Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2021. — С. 374-378.
 35. Формальский, А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами / А.М. Формальский. — Москва: Наука, 1974. — 368 с.
 36. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. — М.: Мир, 1989. — 655 с.
 37. Agulhari, C.M. LMI relaxations for reduced-order robust H_∞ control of continuous-time uncertain linear systems / C.M. Agulhari, R.C.L.F. Oliveira, P.L.D. Peres // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2012. — V.57, № 6. — P. 1532-1537.
 38. Apkarian, P. Fixed-order H_∞ control design via a partially augmented Lagrangian method / P. Apkarian, D. Noll, H.D. Tuan // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2003. — V.13. — P. 1137-1148.

39. Arzelier, D. Mixed LMI/randomized methods for static output feedback control design / D. Arzelier, E.N. Gryazina, D. Peaucelle, B.T. Polyak // In American Control Conference, Baltimore, MD, USA. — 2010. — P. 4683-4688.
40. Balandin, D.V. LMI based multi-objective control under multiple integral and output constraints / D.V. Balandin, M.M. Kogan // International Journal of Control. — 2010. — V. 83, № 2. — C. 227-232.
41. Benton, R. E. Static output feedback stabilization with prescribed degree of stability / R. E. Benton, D. Smith // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1998. — V.43, № 10. — P. 1493-1496.
42. Boyd, S. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory / S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan. — Philadelphia: SIAM, 1994. — 205 p.
43. Cao, Y.-Y. Output feedback decentralized stabilization: ILMI approach / Y.-Y. Cao, Y.-X. Sun, W.-J. Mao // Systems & Control Letters. — 1998. — V.35. — P. 183-194.
44. Cao, Y.-Y. Static output feedback simultaneous stabilization: ILMI approach / Y.-Y. Cao, Y.-X. Sun // International Journal of Control. — 1998. — V. 70, № 5. — P. 803-814.
45. Dong, J. Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties / J. Dong, G.-H. Yang // Automatica. — 2013. — V.49. — P. 1821-1829.
46. Ebihara, Y. Structured controller synthesis using LMI and alternating projection method / Y. Ebihara, K. Tokuyama, T. Hagiwara // International Journal of Control. — 2004. — V.77, № 12. — P. 1137-1147.
47. El Ghaoui, L. Synthesis of fixed-structure controllers via numerical optimization / L. El Ghaoui, V. Balakrishnan // In 33rd IEEE Conference on Decision and Control, Lake Buena Vista, Florida, USA. — 1994. — P. 2678-2683.
48. Fedyukov, A.A. Estimating a Set of the States in the Case of an Error in the Measured Output for Controlled System / A.A. Fedyukov // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. — Communications in Computer and Information Science, Springer. — 2021. — V.1413. — P. 273-285. (Scopus)
49. Gahinet, P. The LMI Control Toolbox. For Use with Matlab. User's Guide. / P. Gahinet, A. Nemirovski, A.J. Laub, M. Chilali. — Natick, MA: The MathWorks, Inc., 1995. — 227 p.
50. Geromel, J. C. Static output feedback controllers: Stability and convexity / J. C. Geromel, C. C. de Souza, R. E. Skelton // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1998. — V.43, № 1. — P. 120-126.
51. Ghaoui, J. C. A cone complementarity linearisation algorithm for static output feedback and related problems / J. C. Ghaoui, F. Oustry, M. Ait-Rami // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1997. — V.42, № 8. — P. 1171-1176.

52. Goh, K.-C. Robust synthesis via bilinear matrix inequalities / K.-C. Goh, M. Safonov, J. Ly // International Journal of Robust and Nonlinear Control, Wiley. — 1996. — V. 6, № 9-10. — P. 1079–1095.
53. Grant, Michael C. The CVX Users' Guide Release 2.2 / Michael C. Grant, Stephen P. Boyd. — CVX Research, Inc., 2020. — 96 p.
54. Grigoriadis, K.M. Low order control design for LMI problems using alternating projection methods / K.M. Grigoriadis, R.E. Skelton // Automatica. — 1996. — V.32, № 8. — P. 1117-1125.
55. Grigoriadis, K.M. Alternating projection algorithms for linear matrix inequalities problems with rank constraints. Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control / K.M. Grigoriadis, E.B. Beran // SIAM. — 2000. — P. 251-267.
56. Hassibi, A. A path-following method for solving BMI problems in control / A. Hassibi, J. How, S. Boyd // In American Control Conference, San Diego, CA, USA. — 1999. — P. 1385-1389.
57. Koroglu, H. New LMI conditions for static output feedback synthesis with multiple performance objectives / H. Koroglu, P. Falcone // In 53rd IEEE Conference on Decision and Control, Los Angeles, California, USA. — 2014. — P. 866-871.
58. Hu, T. Control Systems with Actuator Saturation / T. Hu, Z. Lin. — Norwell, MA: Birkhauser, 2001. — 405 p.
59. Hu, T. Stability and performance for saturated systems via quadratic and nonquadratic Lyapunov functions solutions / T. Hu, A.R. Teel, L. Zaccarian // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2006. — V.51. — P. 1770–1786.
60. Iwasaki, T. The dual iteration for fixed-order control / T. Iwasaki // IEEE Trans. On Automatic Control. — 1999. — V.44, № 4. — P. 783-788.
61. Iwasaki, T. The XY-centring algorithm for the dual LMI problem: A new approach to fixed-order control design / T. Iwasaki, R.E. Skelton. // International Journal of Control. — 1995. — V.62, №6. — P. 1257-1272.
62. Karimi, A. Fixed-order controller design for state space polytopic systems by convex optimization / A. Karimi, M.S. Sadabadi // In 5th IFAC Symposium on System Structure and Control, Grenoble, France. — 2013. — P. 683-688.
63. Khlebnikov, M.V. Optimal Feedback Design under Bounded Control / M.V. Khlebnikov, P.S. Shcherbakov // Automation and Remote Control. — 2014. — V. 75, №. 2. — P. 320–332.
64. Kim, S-J Solving rank-constrained LMI problems with application to reduced-order output feedback stabilization / S-J. Kim, Y-H. Moon, S. Kwon // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2007. — V.52, № 9. — P. 1737-1741.

65. Lee, K.H. Sufficient LMI conditions for H_∞ output feedback stabilization of linear discrete-time systems / K.H. Lee, J.H. Lee, W.H. Kwon // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2006. — V.51, № 4. — P. 675-680.
66. Mehdi, D. Static output feedback design for uncertain linear discrete time systems / D. Mehdi, E.K. Boukas, O. Bachelier // IMA Journal of mathematical control and information. — 2004. — V.21. — P. 1-13.
67. Mesquine, F. Robust constrained linear regulator problem / F. Mesquine, A. Benlamkadem // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 2007. — V. 24, № 1. — P. 81–94.
68. Moreira, H.R. Robust H_2 static output feedback design starting from a parameter-dependent state feedback controller for time-invariant discrete-time polytopic systems / H.R. Moreira, R.C.L.F. Oliveira, P.L.D. Peres // Optimal Control Applications and Methods. — 2011. — V.32. — P. 1-13.
69. Noll, D. Partially augmented Lagrangian method for matrix inequality constraints / D. Noll, R.M. Torki, P. Apkarian // SIAM Journal on Optimization. — 2004. — V.15, № 1. — P. 161-184.
70. Petersen, I.R. Robust control of uncertain systems: Classical results and recent developments / I.R. Petersen, R. Tempo // Automatica. — 2014. — V. 50, № 5. — P. 1315-1335.
71. Polyak, B.T. Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty / B.T. Polyak, M.V. Khlebnikov, P.S. Shcherbakov // Automation and Remote Control. — 2021. — V. 82, №. 1. — P. 1–40.
72. Sadabadi, M. From Static Output Feedback to Structured Robust Static Output Feedback: A Survey / M. Sadabadi, D. Peaucelle // Annual Reviews in Control, Elsevier. — 2016. — V.42 — P. 11-26.
73. Syrmos, V. L. Static Output Feedback.: A Survey / V.L. Syrmos, C.T. Abdallah, P. Dorato, K. Grigoriadis // Automatica. — 1997. — V.33, № 2. — P. 125-137.
74. Toker, O. On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback / O. Toker, H. Ozbay // In IEEE American Control Conference. — Seattle, Washington: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1995. — P. 2525-2526.
75. Tong, W. Improving performance analysis with structures of outputs and constraints / W. Tong, T. Hu // in Proceedings of American Control Conference, Washington, USA. — 2008. — P. 1092–1097.
76. Toscano, R. Structured controllers for uncertain systems: A stochastic optimization approach / R. Toscano. — Springer, 2013. — 298 p.
77. Tran Dinh, Q. Combining convex-concave decompositions and linearization approaches for solving BMIs, with application to static output feedback / Q. Tran Dinh, S. Gumussoy, W. Michiels, M. Diehl // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2012. — V.57, № 6. — P. 1377-1390.

78. Yong, He. An improved ILMI method for static output feedback control with application to multivariable PID control / Yong He, Qing-Guo Wang // IEEE Trans. Automatic Control. — 2006. — V. 51, № 10. — P. 1678-1683.