ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

На правах рукописи

Кудрявцев Евгений Владимирович

# ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ КИБЕРНЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НЕЦИКЛИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОТОКАМИ НЕОДНОРОДНЫХ ТРЕБОВАНИЙ

Специальность 01.01.09 — «Дискретная математика и математическая кибернетика»

Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Федоткин Михаил Андреевич

#### Оглавление

		Этр.
Введе	ние	4
Глава	1. Разработка и изучение математической модели	
	интенсивного потока неоднородных требований	13
1.1	Механизм образования групп неоднородных требований в потоке	
	и вывод функциональных соотношений для размера группы	14
1.2	Изучение свойств эргодического распределения числа	
	неоднородных требований в группе	21
1.3	Определение неординарного пуассоновского потока и изучение	
	его вероятностных свойств	25
1.4	Нелокальное описание входных потоков неоднородных требований	32
Глава	2. Математическое описание и исследование	
	управляющей системы адаптивного управления	
	потоками Кокса-Льюиса	50
2.1	Кибернетический подход при построении управляющей системы	
	обслуживания	50
2.2	Построение математической модели адаптивного управления	
	конфликтными потоками Кокса-Льюиса	56
2.3	Получение одномерных распределений для векторной	
	марковской последовательности $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$	71
2.4	Вывод рекуррентных соотношений для производящих функций	
	распределений векторной марковской последовательности	
	$\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$	75
Глава	3. Изучение предельных свойств функционирования	
	системы адаптивного управления конфликтными	
	потоками Кокса-Льюиса	92
3.1	Вывод необходимых и достаточных условий существования	
	предельного распределения системы, зависящих от значений	
	производящих функций	92

3.2	Получение необходимых и достаточных условий существования
	предельного распределения, зависящих от параметров системы . 105
Глава	4. Качественное и численное исследование системы
	адаптивного управления конфликтными потоками
	неоднородных требований
4.1	Определение оценки для загрузки управляющей системы
	обслуживания на основании предельных свойств марковской
	последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$
4.2	Изучение свойств системы адаптивного управления
	конфликтными потоками Кокса-Льюиса путем имитационного
	моделирования
Заклю	очение
Списо	к литературы
Прило	эжение А. Вывод начальных и центральных моментов
	случайного числа $\eta(t)$ требований,
	поступивших в систему за промежуток
	времени $[0,t)$
Прило	жение Б. Вывод оценки максимального правдоподобия
	для параметров $lpha,\ eta$ и $\gamma$ размера группы
	требований
Прило	ожение В. Вывод рекуррентных соотношений для
	одномерных распределений марковской
	последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$
Прило	ожение Г. Доказательство теоремы 6
Прило	эжение Д. Код программы, реализующей разбиение
	потоков на группы
Прило	ожение Е. Код программы, реализующей имитационное
	моделирование системы

#### Введение

Актуальность темы исследования. Развитие тематики управляющих систем массового обслуживания имеет большую историю. Классические задачи теории массового обслуживания (теории очередей) были впервые рассмотрены в начале XX века. Данные работы были посвящены исследованию функционирования телефонных станций, на которых телефонисты вручную соединяли пользователей. От клиентов поступали заявки на соединение с определенным номером. С тех пор закрепилась терминология «заявка», «требование», «обслуживающее устройство». Первые исследования в данной области были сделаны А.К. Эрлангом [1; 2] и Ф.В. Йохансеном [3]. В дальнейшем развитием теории систем массового обслуживания занимались такие исследователи как Ф. Поллачек [4], К. Пальм [5], А.Н. Колмогоров, А.Я. Хинчин [6], Д.Р. Кокс [7], У.Л. Смит, Т.Л. Саати [8], Д.Дж. Кендалл [9], Л. Такач [10], Б.В. Гнеденко [11], И.Н. Коваленко, В.С. Королюк, Г.П. Башарин [12], Г.П. Климов [13], Ю.В. Прохоров, А.Д. Соловьев, Б.А. Севастьянов [14] и др.

В дальнейшем с помощью методов теории массового обслуживания исследовались системы из различных сфер: управление транспортом, автоматические линии производства, медицинское обслуживание, системы управления потоками данных, управление взлетом и посадкой самолетов в аэропортах и т.д. При этом во всех системах выделялись обязательные элементы: входной поток заявок, дисциплина очереди, закон обслуживания заявок, обслуживающее устройство. При исследовании систем ставилась задача не только изучения свойств системы, но оптимизация по некоторому критерию. Например, уменьшение задержек, уменьшение очередей или оптимизация количества обслуживающих устройств. При дальнейшем развитии теории массового обслуживания стали рассматриваться системы с переменной структурой, в которых составляющие элементы могли изменяться со временем. Например, в торговых центрах интенсивность потока покупателей зависит от времени суток и дня недели.

Оптимизация системы массового обслуживания подразумевает подбор оптимальных с некоторой точки зрения параметров и стратегии управления. Таким образом, во второй половине XX века активное развитие получает теория управляемых систем массового обслуживания (управляющих систем). В 1967

году О.И. Бронштейн и В.В. Рыков ввели термин «управляемая система массового обслуживания» [15].

Одним из основных элементов систем массового обслуживания является входной поток. Изначально в классических работах рассматривался простейший поток, или поток Пуассона. Данный поток определяется тремя свойствами: ординарность, стационарность и отсутствие последействия. Данные три свойства обеспечивают независимость и показательное распределение интервалов между соседними требованиями. Простейший поток возникает при некоторых ограничениях при суммировании большого числа независимых низкоинтенсивных потоков [16]. При этом, часто реальные потоки требований формируются из большого числа независимых требований. Например, такой механизм формирования потока применим к потоку телефонных вызовов или потоку обращений в сервисный центр. В более сложных реальных потоках может нарушаться условие независимости требований. Так, при однополосном движении транспорта обгон затруднен и могут возникать транспортные группы (автоколонны) или при отправке корпоративной почты возникает большое число электронных писем, отправленных за небольшой промежуток времени. Разнотипность или неоднородность требований приводит к тому, что моделью пуассоновского потока нельзя описать все реальные потоки. Если в вызывающие моменты (моменты поступления требований) могут поступить несколько требований и размеры групп независимы и имеют одинаковое распределение, то адекватной моделью может служить неординарный пуассоновский поток. Необходимость выделения групп требований в исходном потоке привела к появлению нелокального описания потоков [17; 18]. В отличие от классического описания потоков при нелокальном описании рассматриваются только моменты поступления первых требований в группах и количество требований в группах. В потоках разной физической природы могут существовать разные механизмы объединения требований в группы. Так, при рассмотрении формирования транспортных потоков возникли следующие модели: поток Бартлетта [19; 20], поток Гнеденко-Коваленко. В данной диссертации рассматривается механизм образования транспортных групп при движении по автомагистрали при дорожных и погодных условиях, препятствующих свободному обгону.

Существуют системы массового обслуживания, в которых входные потоки являются управляемым элементом [21—23]. Частным случаем таких потоков являются MAP-потоки (Markovian Arrival Process), в которых процесс поступления заявок зависит от процесса Маркова. Часто марковским управляющим процессом, влияющим на входной поток, является внешняя среда. Влияние управляющего воздействия может заключаться в изменении структуры или интенсивности входного потока. Марковский поток впервые был описан в работе М.Ф. Ньютса [24]. Дальнейшее исследование и расширение понятия марковского потока было проведено Д.М. Лукантони [25; 26], С. Асмуссеном [27], П.П. Бочаровым [28], Н.Х. Фонгом [28], А.А. Назаровым [29], А.М. Моисеевым [30] и другими исследователями.

Один из вариантов исследования сложной системы массового обслуживания заключается в представлении ее как кибернетической системы. Понятие кибернетическая система и кибернетический подход предложены в работе А.А. Ляпунова и С.В. Яблонского [31]. В работе А.А. Ляпунова и С.В. Яблонского приведены примеры применения подхода к системам различного рода, начиная с экономических и заканчивая биологическими. Впервые применили кибернетический подход к системам массового обслуживания М.А. Федоткин [32] и М.Г. Теплицкий [33; 34].

**Цель диссертационной работы.** Целями данной работы являются: 1) построение и изучение математической модели потока неоднородных требований; 2) построение и исследование математической модели системы адаптивного управления потоками неоднородных требований; 3) численное исследование управляющей системы с помощью имитационного моделирования.

В рамках работы решены следующие задачи:

- 1. Изучение механизма образования транспортных групп, состоящих из разнотипных автомобилей, при движении по автомагистрали. Построение, исследование и обоснование корректности математической модели потока на основе потоков различной физической природы.
- 2. Описание математической модели системы нециклического управления потоками неоднородных требований в виде кибернетичекой системы. Вывод и изучение как функциональных связей между блоками системы, так и рекуррентных соотношений для распределений состояний системы.
- 3. Получение условий существования стационарного распределения для последовательности состояний системы.
- 4. Разработка имитационной модели системы, изучение переходного процесса, поиск квазиоптимальных параметров системы.

**Научная новизна.** Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

- 1. Построена модель потока неоднородных требований, в которой интервалы между соседними требованиями зависимы и имеют разное распределение. Для построения модели был применен кибернетический подход Ляпунова—Яблонского. Показана возможность аппроксимации потока неоднородных требований неординарным пуассоновским потоком с любым количеством требований в группе. Корректность модели обоснована на реальных данных для потоков различной физической природы.
- 2. Описана модель адаптивного управления потоками Кокса-Льюиса с помощью кибернетического подхода. Определены функциональные зависимости между блоками системы. Динамика состояний системы описана в виде многомерной цепи Маркова, проведена классификация состояний данной цепи Маркова.
- 3. Получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений векторной марковской последовательности. Также получены рекуррентные соотношения для производящих функций марковской последовательности через один и через несколько шагов. Используя указанные рекуррентные соотношения для производящих функций, получены необходимые и достаточные условия существования стационарного распределения.
- 4. Проведен анализ пространства управляемых параметров системы. Найдены области существования стационарного режима.
- 5. Разработана имитационная модель системы, изучен переходный процесс. Проведен поиск квазиоптимальных параметров для системы адаптивного управления неординарными потоками.

Теоретическая и практическая значимость. Научная значимость данной работы состоит в построении вероятностной модели формирования потока неоднородных требований, когда интервалы между соседними требованиями
зависимы и имеют разное распределение. Примененные методы исследования
позволяют получать новые модели потоков неоднородных требований. Предложен подход исследования адаптивного алгоритма управления потоками такого
рода. Проведена численная оптимизация управляющей системы.

Методология и методы исследования. В работе применяется аппарат теории вероятностей и математической статистики, теории массового обслуживания, теории функций комплексного переменного, теории управляемых марковских процессов. Для описания управляемых систем массового обслуживания применяется кибернетический подход Ляпунова—Яблонского. Использование приведенных методов и подходов позволило математически описать и исследовать модель сложной недетерминированной системы управления неординарными потоками.

Имитационная модель управляющей системы реализована на языке программирования C++ в среде разработки Microsoft Visual Studio. Визуализация некоторых результатов численных исследований производится с помощью языка Python.

#### Основные положения, выносимые на защиту.

- 1. Применение аппарата кибернетического подхода Ляпунова-Яблонского к описанию потоков неоднородных требований, в которых интервалы между соседними требования зависимы и имеют разное распределение.
- 2. Синтез управляющих систем массового обслуживания конфликтных потоков с помощью кибернетического подхода в виде многомерных марковских цепей.
- 3. Методика использования производящих функций для получения условий существования стационарного распределения векторной марковской цепи.
- 4. Метод определения момента окончания переходного процесса в управляемой системе обслуживания неоднородных требований.
- 5. Способ поиска квазиоптимальных параметров в управляемой системе обслуживания неоднородных требований.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность теоретических результатов работы обеспечивается применением используемого математического аппарата. Результаты численных исследований находятся в соответствии с теоретическими исследованиями. Теоретические результаты исследований находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами при изучении подобных систем управления конфликтными потоками.

Основные результаты диссертации были представлены на следующих семинарах и конференциях:

- 1. Международный семинар «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2010 (Москва, 2010 г.).
- 2. Международная научная конференция «Современные вероятностные методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей» (Минск, Республика Беларусь, 2011 г.).
- 3. XVI Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Н. Новгород, 2011 г.).
- 4. Международный семинар «Прикладные методы статистического анализа. Имитационное моделирование и статистические выводы» (Новосибирск, 2011 г.).
- 5. 17-ая Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2013 (Москва, 2013 г.).
- 6. XVII Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2014 г.).
- 7. Международная научная конференция «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения» (Минск, Республика Беларусь, 2015 г.).
- 8. IX Международная научная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 2015 г.).
- 9. Межрегиональная научно-практическая конференция «Статистика в современном обществе: её роль и значение в вопросах государственного управления и общественного развития» (Н. Новгород, 2015 г.).
- 10. 8-я Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2015 (Москва, 2015 г.).
- 11. Международная научная конференция «Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях» ABMTB-2017 (Москва, 2017 г.).
- 12. 20-я Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2017 (Москва, 2017 г.).

- 13. XVI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ-2017 (Казань, 2017 г.).
- 14. X Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Москва и Подмосковье, 2018 г.).
- 15. 12-я Международная конференция «Computer Data Analysis and Modeling: Stochastics and Data Science» (Минск, Республика Беларусь, 2019 г.).
- 16. XVIII Международная научная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ-2019 (Саратов, 2019 г.).
- 17. 22-ая Международная научная конференция «Распределенные компьютерные и коммуникационные сети: управление, вычисление, связь» DCCN-2019 (Москва, 2019 г.).
- 18. Четвертая Международная конференция по стохастическим методам МКСМ-4 (пос. Дивноморское, г. Новороссийск, 2019 г.).
- 19. XIII Международный семинар «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова (Москва, 2019 г.).
- 20. XIX Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (Казань, 2020 г.)
- 21. XX Международная научная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» ИТММ-2021 (Томск, 2021 г.).
- 22. Седьмая Международная конференция по стохастическим методам МКСМ-7 (пос. Дивноморское, 2022 г.).

Личный вклад автора. В совместных работах научному руководителю принадлежит постановка задачи и общее редактирование текста работ. Все научные исследования выполнены автором диссертации лично. Все полученные результаты принадлежат автору. В работах [35; 36] научному руководителю принадлежит постановка задачи, второму соавтору — результаты, полученные для транспортного потока при относительно небольшой плотности машин с быстрым движением, автору диссертации — результаты, полученные для транспортного потока при высокой плотности машин с быстрым движением. В работах [37; 38] научному руководителю и второму соавтору принадлежит постановка задачи, автору диссертации — аналитические результаты, полученные в рабо-

те. В работах [39; 40] научному руководителю принадлежит постановка задачи, второму соавтору — результаты, связанные с алгоритмами разбиения потока на группы небольшого размера, автору диссертации — результаты, связанные с алгоритмами разбиения потока на группы большого размера, вывод оценок и численный анализ данных. В работе [41] результаты получены совместно с соавтором.

Соответствие паспорту специальности. Диссертационная работа выполнена в соответствии с паспортом специальности 01.01.09 «Дискретная математика и математическая кибернетика». Работа включает новые результаты в области дискретной математики и математической кибернетики. Приведенные в работе результаты соответствует пункту 2 «Теория управляющих систем» — построена и исследована математическая модель управляющей системы массового обслуживания потоков неоднородных требований, представленной в виде абстрактной управляющей (кибернетической) системы Ляпунова—Яблонского.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 33 работах, 7 из них — в журналах, рекомендованных ВАК ([37—40; 42—44]), 6 — в библиографической базе Scopus ([38; 40; 41; 45—47]), 1 — в библиографической базе Web of Science ([38]), 16 — в библиографической базе РИНЦ ([38; 40; 42—46; 48—56]), 21 — в тезисах докладов ([35; 36; 48; 50—67]).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и одного приложения. Полный объём диссертации составляет 188 страниц, включая 12 рисунков. Список литературы содержит 85 наименований.

В главе 1 рассматривается кибернетический метод описания и анализа входных потоков систем массового обслуживания, когда интервалы между последовательными моментами поступления требований являются статистически зависимыми и имеют разные распределения. Предложены эвристические алгоритмы, которые позволяют выделить в потоке два класса неоднородных требований. В качестве описания предлагается использовать интервалы между соседними требованиями первого класса и количество всех требований в каждом таком интервале. Целесообразность предлагаемого описания продемонстрирована не только на примере транспортного потока движущихся автомобилей на магистрали, но и при определении вероятностных законов распределения реальных потоков другой физической природы.

В главе 2 применен кибернетический подход к построению и исследованию системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований. Данный подход позволил описать блоки кибернетической системы и функциональную связь между ними. Математической моделью управляющей системы является многомерная марковская последовательность. В марковской последовательности выделен апериодический неразложимый класс существенных состояний. Выписаны рекуррентные соотношения для одномерных распределений векторной последовательности. Были получены производящие функции одномерных распределений марковской последовательности и рекуррентные соотношения для них через несколько шагов ее функционирования.

В главе 3 предложен метод определения условий существования предельного распределения последовательности состояний системы управления конфликтными неординарными потоками. При выводе необходимых и достаточных условий существования стационарного распределения марковской последовательности использованы рекуррентные соотношения для производящих функций одномерных распределений марковской последовательности состояний через несколько шагов ее функционирования. Доказан ряд теорем, которые содержат легкопроверяемые условия существования предельного распределения, зависящие от параметров системы.

В главе 4 исследованы области существования стационарного распределения в пространстве допустимых параметров управления. Также проведено численное исследование с помощью имитационного моделирования. Описан способ определения достижения стационарного режима в системе. Приведены основные важные с физической точки зрения характеристики функционирования системы. По данным параметрам проведена оптимизация по условию минимума времени ожидания обслуживания произвольного требования.

В заключении приведены основные результаты диссертационной работы и возможные направления продолжения исследований.

### Глава 1. Разработка и изучение математической модели интенсивного потока неоднородных требований

В первой главе рассматривается кибернетический метод описания и анализа реальных потоков систем массового обслуживания, когда интервалы между последовательными моментами поступления требований являются статистически зависимыми и имеют разные распределения. Предложены эвристические алгоритмы, которые позволяют выделить в потоке два класса неоднородных требований. В качестве описания предлагается использовать интервалы между соседними требованиями первого класса и количество всех требований в каждом таком интервале. Целесообразность предлагаемого описания продемонстрирована не только на примере транспортного потока движущихся автомобилей на магистрали, но и при определении вероятностных законов распределения реальных потоков другой физической природы.

В главе 1 будем рассматривать основное вероятностное пространство  $(\Omega_0, \mathfrak{F}_0, \mathbf{P}(\cdot))$ , где  $\Omega_0$  — достоверный исход, через  $\omega \in \Omega_0$  обозначим описание некоторого элементарного исхода  $A' = \{\omega\}$  случайного эксперимента  $E_0$ , определяющего процесс поступления неоднородных требований в систему массового обслуживания. Примером такого эксперимента  $E_0$  может служить процесс движения потока машин по автомагистрали до пересечения им некоторой стоплинии. Множество всех наблюдаемых исходов (случайных событий)  $A \subset \Omega_0$  данного эксперимента составляет  $\sigma$ -алгебру  $\mathfrak{F}_0$ , на которой задана вероятностная функция  $\mathbf{P}(A) \colon \mathfrak{F}_0 \to [0,1]$ . В некоторых случаях не будет явно фиксироваться символ  $\omega$  как аргумент каких-либо функций или случайных величин. При этом необходимо помнить о том, что все случайные события и случайные величины, связанные с описание и изучением потоков неоднородных требований, рассматриваются на указанном пространстве  $(\Omega_0, \mathfrak{F}_0, \mathbf{P}(\cdot))$ .

## 1.1 Механизм образования групп неоднородных требований в потоке и вывод функциональных соотношений для размера группы

Известно, что классическое описание входного потока систем массового обслуживания выполняется в виде последовательности случайных величин  $\{\tau_i'; i=1,2,\ldots\}$ , в которой через  $\tau_i'$  обозначен момент поступления заявки с номером i. В большинстве реальных систем интервалы между заявками оказываются зависимыми и имеют разное распределение. Поэтому классический способ описания входного потока для таких систем не является эффективным, так как требует задание сложных конечномерных распределений последовательности  $\{\tau_i'; i=1,2,\ldots\}$ . В данной работе предлагается нелокальное описание [18] входного потока в виде последовательности  $\{(\tau_{i+1}-\tau_i,\chi_i); i=0,1,\ldots\}$ . Здесь  $\{\tau_i; i=0,1,\ldots\}$  — строго возрастающая последовательность случайных точек на оси времени Ot, и  $\chi_i$  определяет случайное число требований на промежутке  $[\tau_{i+1} - \tau_i)$  или в группе с номером *i*. Различные алгоритмы выбора последовательности  $\{\tau_i; i=0,1,\ldots\}$  будут описаны в разделе 1.4 текущей главы. Последовательность  $\{\tau_i; i=0,1,\ldots\}$  содержит моменты поступления первых заявок в группах. Сейчас остановимся на определении распределения случайной величины  $\chi_i$ .

Процесс образования величины  $\chi_i$  группы с номером i потока рассматривается как функционирование по возможности простой управляющей системы обслуживания. Это обстоятельство позволяет предложить адекватный механизм образования группы (пачки) с номером i для сложного реального потока. Интерпретация такого механизма образования группы дается на примере потока пачек автомобилей на бесконечной или кольцевой магистрали с однополосным движением. При этом в потоке будем различать требования с медленным движением от требований с быстрым движением. В таком случае транспортная пачка состоит из одного медленного и очереди быстрых автомобилей. Значит, в потоке имеется два класса (типа) требований, что и означает их неоднородность. Только требования с быстрым движением имеют возможность обгона требований с медленным движением. Предлагаемый в работе подход дает возможность генерировать различные и неизвестные ранее законы распределения реальных входных потоков, и не только для транспортный потоков. При этом

не используются предельные теоремы теории вероятностей и математической статистики.

Модель механизма формирования размера  $\chi_i$  группы или количества автомобилей транспортной пачки с номером i реального потока разнотипных автомобилей будем представлять в виде эволюции управляющей кибернетической системы обслуживания [18; 68] из некоторого класса. Общее понятие абстрактной управляющей системы, называемой также кибернетической системой, было сформулировано А.А. Ляпуновым и С.В. Яблонским в 1963 году [31]. Для такой системы на рис. 1.1 представлены следующие её блоки: входной полюс, внешняя память, устройство  $\delta$  по переработке информации внешней памяти, внутренняя память, устройство  $\delta_0$  по переработке информации внутренней памяти и выходной полюс.

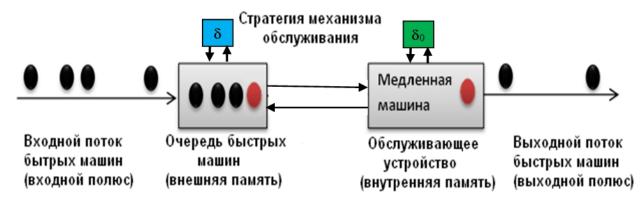


Рисунок 1.1 — Схема управляющей системы

Рассмотрим математическое описание каждого из указанных блоков. Входной полюс есть пуассоновский поток требований, например, автомобилей с быстрым движением. Интенсивность этого потока равна  $\lambda_0 > 0$ . Интенсивность  $\lambda > 0$  потока из требований с медленным движением достаточно мала и такова, что расстояние между любыми соседними требованиями с медленным движением велико. Это обеспечивает восстановление пуассоновского потока требований с быстрым движением после процесса обгона [69; 70]. Обозначим при  $t \geq 0$  и  $t_0 > 0$  через  $\eta_0(\omega; t, t_0) \in \{0, 1, \ldots\}$  число требований с быстрым движением, которые поступают в очередь за промежуток времени  $[t, t + t_0)$ . Пусть здесь и далее символ  $o(\Delta t)$  обозначает неотрицательную бесконечно малую величину по сравнению с величиной  $\Delta t > 0$ . Для пуассоновского потока с параметром  $\lambda_0$ 

при  $\Delta t \to 0$  хорошо известны следующие формулы:

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \eta_0(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = 1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \eta_0(\omega; t, \Delta t) = 1\}) = \lambda_0 \Delta t - o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \eta_0(\omega; t, \Delta t) \ge 2\}) = o(\Delta t).$$
(1.1)

Соотношение (1.1) позволяет найти [11] конечномерные распределения семейства случайных величин  $\{\eta_0(\omega;t,t_0)\colon t\geq 0,t_0>0\}$ . Таким образом, семейство случайных величин  $\{\eta_0(\omega;t,t_0)\colon t\geq 0,t_0>0\}$  является математическим описанием входного полюса.

По наблюдениям за реальными потоками оказалось, что каждое требование с быстрым движением догоняет требование с медленным движением и поступает в некоторую очередь. При этом группа состоит из требований с быстрым движением, которые ожидают возможности обгона, и, обязательно, из требования с медленным движением. Возможны ситуации, когда размер очереди равен нулю. В этом случае группа состоит только из требования с медленным движением. Итак, физически внешняя память есть очередь из требований с быстрым движением и единственного требования с медленным движением. Если случайная величина  $\chi(\omega;t) \in \{1,2,\ldots\}$  измеряет число требований всех типов в группе в момент времени  $t \geq 0$ , то случайный процесс  $\{\chi(t): t \geq 0\}$  является математическим описанием блока внешней памяти.

Блок внутренней памяти отвечает за процесс обгона требований с быстрым движением требования с медленным движением. Каждое требование с медленным движением можно интерпретировать как обслуживающий прибор для требований с быстрым движением. При этом под временем обслуживания, естественно, понимается случайное время обгона. Для такого класса систем не задается интегральная функция распределения случайного времени обслуживания, так как времена обгона быстрыми машинами медленной являются зависимыми случайными величинами и имеют различные законы распределения. Более того из реальных наблюдений нет возможности найти статистические законы распределения указанных величин. Поэтому вместо семейства многомерных интегральных функций распределения времен обслуживания для такого рода систем удобно задавать семейство из интенсивностей обслуживания требований. Далее будем считать, что среднее время обгона быстрыми машинами медленной зависит от числа машин в транспортной пачке, что хорошо согласуется с реальной ситуацией на магистралях. В связи с этим необходимо различать сле-

дующие ситуации. Обозначим через  $\mu_{k,0}^{-1}$ ,  $k=1,2,\ldots,q$ , среднее время обгона в случае, когда пачка состоит из одной медленной и k быстрых машин. Предположим также, что среднее время  $\mu_{q,0}^{-1}$  обгона не меняется, если в пачке находится не менее q быстрых машин. Если в группе нет быстрых машин, то обгон невозможен и, соответственно, интенсивность обгона будет равна нулю. Параметры  $\mu_{1,0},\,\mu_{2,0},\,\ldots,\,\mu_{q,0}$  и 0 будем называть интенсивностями обгона в соответствующих случаях. Таким образом, множеством состояний блока внутренней памяти является семейство  $\{0,\mu_{1,0},\,\mu_{2,0},\,\ldots,\,\mu_{q,0}\}$ . Обозначим через  $\mu_0(\omega;t)$  состояние внутренней памяти в момент t. Исходя из определения  $\mu_0(\omega;t)$  получаем, что состояние блока внутренней памяти  $\mu_0(\omega;t)$  есть функция от состояния блока внешней памяти  $\chi(\omega;t)$  вида

$$\mu_0(\omega;t) = u(\chi(\omega;t)) = \begin{cases} 0, & \chi(\omega;t) = 1, \\ \mu_{k-1,0}, & \chi(\omega;t) = k, 2 \le k \le q, \\ \mu_{q,0}, & \chi(\omega;t) = k, k \ge q + 1. \end{cases}$$
(1.2)

Тогда случайный процесс  $\{\mu_0(\omega;t): t \geq 0\}$  определяет математическое описание блока внутренней памяти, а соотношение (1.2) математически описывает функционирование блока  $\delta_0$  по переработке информации внутренней памяти.

Обозначим, через  $\xi_0(\omega;t,t_0)\in\{0,1,\ldots\}$  случайное число требований с быстрым движением, которые совершат обгон требования с медленным движением за промежуток времени  $[t,t+t_0)$ . Тогда семейство случайных величин вида  $\{\xi_0(\omega;t,t_0)\colon t\geq 0,t_0>0\}$  определяет математическое описание блока выходного полюса.

Так как в потоке не происходит потеря требований, то при  $\Delta t>0$  устройство  $\delta$  по переработке информации внешней памяти можно математически описать с помощью функционального соотношения

$$\chi(\omega; t + \Delta t) = \chi(\omega; t) + \eta_0(\omega; t, \Delta t) - \xi_0(\omega; t, \Delta t). \tag{1.3}$$

В силу физического смысла величин  $\chi(\omega;t)$ ,  $\eta_0(\omega;t,\Delta t)$ ,  $\xi_0(\omega;t,\Delta t)$  должно выполняться соотношение  $0 \le \xi_0(\omega;t,\Delta t) \le \chi(\omega;t) + \eta_0(\omega;t,\Delta t) - 1$ . Отсюда с учетом (1.3) получаем, что  $\chi(\omega;t+\Delta t) \ge 1$ . Устройство  $\delta$  по переработке внешней памяти реализует функциональный закон (1.3) отбора требований с быстрым движением из очереди для обгона требования с медленным движением. Заметим, что для потоков различной физической природы можно допустить разные

дисциплины обслуживания (механизмы отбора) (FIFO, FILO, случайный выбор и др.), но соотношение (1.3) есть условие модели, и оно должно выполняться.

Отметим, что определить безусловное распределение вероятностей случайной величины  $\xi_0(\omega;t,\Delta t)$  не представляется возможным. Перейдем к определению условных вероятностей вида

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \xi_0(\omega; t, \Delta t) = k\} | \{\omega \colon \chi(\omega; t) = l, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = v\})$$
(1.4)

при малых значениях  $\Delta t > 0$  и различных допустимых значениях k, l и v. Соотношение (1.4) следует понимать как вероятность того, что за промежуток времени  $[t,t+\Delta t)$  ровно k быстрых машин в некоторой пачке совершат обгон медленной машины, при условии, что к началу данного промежутка пачка состояла из l машин и за данный промежуток в пачку поступило еще v быстрых машин. Пусть условные вероятности при малых положительных  $\Delta t$  равны

$$\mathbf{P}(\{\omega : \xi_{0}(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = n, \eta_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = \\
= \mu_{n-1,0} \Delta t - o(\Delta t), \quad n = 2, ..., q, \\
\mathbf{P}(\{\omega : \xi_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = n, \eta_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = \\
= 1 - \mu_{n-1,0} \Delta t + o(\Delta t), \quad n = 2, ..., q, \\
\mathbf{P}(\{\omega : \xi_{0}(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = n, \eta_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = \\
= \mu_{q,0} \Delta t - o(\Delta t), \quad n = q + 1, q + 2, ... \\
\mathbf{P}(\{\omega : \xi_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = n, \eta_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = \\
= 1 - \mu_{q,0} \Delta t + o(\Delta t), \quad n = q + 1, q + 2, ... \\$$
(1.5)

Заметим, что в силу физического смысла случайных величин  $\eta_0(\omega;t,\Delta t)$ ,  $\xi_0(\omega;t,\Delta t)$  и  $\chi(\omega;t)$  всегда должно выполняться соотношение (1.3). Таким образом соотношение нормировки для условных вероятностей при фиксированных  $l=1,2,\ldots$  и  $v=0,1,\ldots$  запишется в следующем виде:

$$\sum_{k=0}^{l+v-1} \mathbf{P}(\{\omega \colon \xi_0(\omega; t, \Delta t) = k\} | \{\omega \colon \chi(\omega; t) = l, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = v\}) = 1.$$

Из данного замечания и предыдущих соотношений выведем следующие равенства:

$$\mathbf{P}(\{\omega : \xi_{0}(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = 1, \eta_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = 
= 1 - \mathbf{P}(\{\omega : \xi_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = 1, \eta_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = 0, 
\mathbf{P}(\{\omega : \xi_{0}(\omega; t, \Delta t) = 1\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = 1, \eta_{0}(\omega; t, \Delta t) = 1\}) = 
= 1 - \mathbf{P}(\{\omega : \xi_{0}(\omega; t, \Delta t) = 0\} | \{\omega : \chi(\omega; t) = 1, \eta_{0}(\omega; t, \Delta t) = 1\}) = o(\Delta t).$$
(1.6)

Далее примем, что вероятность того, что за малый промежуток времени  $\Delta t$  минимум две быстрые машины совершат обгон, есть величина бесконечно малая по сравнению с  $\Delta t$ . Причем такое равенство имеет место при любом возможном фиксированном числе машин, поступивших в пачку за данный промежуток, и любой фиксированной длине пачки  $k \geq 1$ . Получаем следующие равенства в вероятностях

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \xi_0(\omega; t, \Delta t) \ge 2\} | \{\omega \colon \chi(\omega; t) = k, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = 0\}) = o(\Delta t),$$

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \xi_0(\omega; t, \Delta t) \ge 2\} | \{\omega \colon \chi(\omega; t) = k, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = 1\}) = o(\Delta t), \qquad (1.7)$$

$$k = 3, 4, \dots$$

Обозначим через Q(t,l) вероятность  $\mathbf{P}(\{\omega \colon \chi(\omega;t)=l\})$ , которая определена при  $l=1,2,\ldots$  и  $t\geq 0$ . Набор таких вероятностей при  $l=1,2,\ldots$  будет определять распределение длины пачки в момент времени  $t\geq 0$ . Перейдем к выводу системы уравнений для вероятностей Q(t,l).

Учитывая (1.3) для любого  $k=1,\,2,\,\dots$  имеет место следующее равенство в событиях:

$$\{\omega \colon \chi(\omega; t + \Delta t) = k\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcup_{v=0}^{\infty} \{\omega \colon \chi(\omega; t) = l, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = v, \xi_0(\omega; t, \Delta t) = l + v - k\}.$$

$$(1.8)$$

Поскольку под знаком объединения в (1.8) при различных значениях l и v находятся несовместные события, то по третьей аксиоме Колмогорова перейдем к равенству в вероятностях:

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \chi(\omega; t + \Delta t) = k\}) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \mathbf{P}(\{\omega \colon \chi(\omega; t) = l, \eta_0(\omega; t, \Delta t) = v, \xi_0(\omega; t, \Delta t) = l + v - k\}).$$

Применяя формулу умножения и учитывая независимость случайных величин  $\chi(t)$  и  $\eta_0(t,\Delta t)$ , получим

$$\mathbf{P}(\chi(t+\Delta t)=k) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \mathbf{P}(\chi(t)=l) \ \mathbf{P}(\eta_{0}(t,\Delta t)=v|\chi(t)=l) \times$$

$$\times \mathbf{P}(\xi_{0}(t,\Delta t)=l+v-k \mid \chi(t)=l, \eta_{0}(t,\Delta t)=v) =$$

$$= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \mathbf{P}(\chi(t)=l) \ \mathbf{P}(\eta_{0}(t,\Delta t)=v) \times$$

$$\times \mathbf{P}(\xi_{0}(t,\Delta t)=l+v-k \mid \chi(t)=l, \eta_{0}(t,\Delta t)=v).$$

$$(1.9)$$

Напомним, что процесс  $\{\eta_0(t): t \geq 0\}$  является пуассоновским с параметром  $\lambda_0$ . Учитывая это, при переходе к введенным ранее обозначениям из (1.9) имеем

$$Q(t + \Delta t, k) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} Q(t, l) e^{-\lambda_0 \Delta t} \frac{(\lambda_0 \Delta t)^v}{v!} \times \mathbf{P}(\xi_0(t, \Delta t) = l + v - k \mid \chi(t) = l, \eta_0(t, \Delta t) = v).$$

$$(1.10)$$

Соотношения (1.5)-(1.7), (1.10) позволяют написать следующие равенства в вероятностях:

$$Q(t + \Delta t, 1) = (1 - \lambda_0 \Delta t)Q(t, 1) + \mu_{1,0}\Delta t Q(t, 2) + o(\Delta t),$$

$$Q(t + \Delta t, k) = \lambda_0 \Delta t Q(t, k - 1) + (1 - (\lambda_0 + \mu_{k-1,0})\Delta t)Q(t, k) +$$

$$+ \mu_{k,0}\Delta t Q(t, k + 1) + o(\Delta t), \quad k = 2, \dots, q,$$

$$Q(t + \Delta t, k) = \lambda_0 \Delta t Q(t, k - 1) + (1 - (\lambda_0 + \mu_{q,0})\Delta t)Q(t, k) +$$

$$+ \mu_{q,0}\Delta t Q(t, k + 1) + o(\Delta t), \quad k = q + 1, q + 2, \dots$$

При делении данных соотношений на  $\Delta t > 0$  получим

$$\frac{Q(t + \Delta t, 1) - Q(t, 1)}{\Delta t} = -\lambda_0 Q(t, 1) + \mu_{1,0} Q(t, 2) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

$$\frac{Q(t + \Delta t, k) - Q(t, k)}{\Delta t} = \lambda_0 Q(t, k - 1) - (\lambda_0 + \mu_{k-1,0}) Q(t, k) + \mu_{k,0} Q(t, k + 1) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad k = 2, \dots, q,$$

$$\frac{Q(t + \Delta t, k) - Q(t, k)}{\Delta t} = \lambda_0 Q(t, k - 1) - (\lambda_0 + \mu_{q,0}) Q(t, k) + \mu_{q,0} Q(t, k + 1) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}, \quad k = q + 1, q + 2, \dots$$

Теперь перейдем к пределу при  $\Delta t \to 0$ . Заметим, что пределы правых частей равенств существуют, поэтому существуют пределы левых частей для производных  $\frac{dQ(t,k)}{dt}$  при  $k \geq 1$ . Таким образом получаем бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений Колмогорова [32; 71]

$$\frac{dQ(t,1)}{dt} = -\lambda_0 Q(t,1) + \mu_{1,0} Q(t,2),$$

$$\frac{dQ(t,k)}{dt} = \lambda_0 Q(t,k-1) - (\lambda_0 + \mu_{k-1,0}) Q(t,k) + \mu_{k,0} Q(t,k+1),$$

$$k = 2, \dots, q,$$

$$\frac{dQ(t,k)}{dt} = \lambda_0 Q(t,k-1) - (\lambda_0 + \mu_{q,0}) Q(t,k) + \mu_{q,0} Q(t,k+1),$$

$$k = q+1, q+2, \dots$$
(1.11)

Итак, (1.11) — это система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами первого порядка, определяющая динамику распределения длины транспортной пачки. Будем дополнительно предполагать, что в момент t=0 число требований всех типов в группе равно v. Тогда динамика распределения суммарного числа требований в группе определяется решением системы дифференциальных уравнений (1.11) с начальными условиями следующего типа

$$Q(0,k) = \delta_{vk} = \begin{cases} 1, k = v \\ 0, k \neq v, \end{cases}$$

где  $k \in \{1, 2, \ldots\}$ .

### 1.2 Изучение свойств эргодического распределения числа неоднородных требований в группе

Получение решения бесконечной системы (1.11) является сложной задачей. В дальнейшем исследовании понадобятся лишь некоторые свойства этого решения, поэтому мы откажемся от получения явного выражения для функций  $\{Q(t,k);k\geq 1\}$ . Наблюдая за транспортным потоком на магистрали, можно заметить, что спустя довольно продолжительный промежуток времени за каждой медленной машиной очередь становиться примерно одинаковой (в смысле вероятностного распределения). Такой режим движения называется установившимся или стационарным и означает завершение всех переходных процессов в кибернетической системе.

Определим стационарное распределение как решение системы дифференциальных уравнений (1.11), которое не зависит от времени, т.е. все вероятности Q(t,k)=Q(k) константы. В таком случае получаем, что производные в левой части равны нулю. В книге [72] доказана теорема, что для неприводимого и возвратного марковского процесса при любых начальных условиях Q(0,k) пределы вероятностей  $\lim_{t\to\infty}Q(t,k)$  сходятся к  $Q(k),\ k=1,2,\ldots$  Таким образом, предельное распределение совпадает со стационарным.

Для системы (1.11) достаточным условием существования стационарного распределения для размера группы является соотношение  $\lambda_0 < \mu_{q,0}$ . Заметим,

что число требований в группе в стационарном режиме будет определять уже не случайная величина  $\chi(\omega;t)$ , а величина вида  $\chi(\omega)$ , которая не имеет временного параметра t.

Перейдем от системы дифференциальных уравнений (1.11) к линейной системе, приравняв левые части  $\frac{dQ(t,k)}{dt}$  к нулю

$$0 = -\lambda_0 Q(1) + \mu_{1,0} Q(2),$$

$$0 = \lambda_0 Q(k-1) - (\lambda_0 + \mu_{k-1,0}) Q(k) + \mu_{k,0} Q(k+1), \quad k = 2, \dots, q,$$

$$0 = \lambda_0 Q(k-1) - (\lambda_0 + \mu_{q,0}) Q(k) + \mu_{q,0} Q(k+1), \quad k = q+1, q+2, \dots$$

$$(1.12)$$

Данная система определяет стационарное распределение  $\{Q(k); k \geq 1\}$  для размера группы или длины транспортной пачки. Стационарное распределение не зависит от начальных условий и подчиняется условию нормировки  $\sum\limits_{k=1}^{\infty}Q(k)=1.$  Из (1.12) с учетом условия нормировки легко находятся вероятности  $Q(k),\ k=1,2,\ldots$  В частности, при q=3 последовательно для  $k\geq 2$  выразим Q(k) через Q(1)

$$Q(2) = \frac{\lambda_0}{\mu_{1,0}} Q(1), \quad Q(3) = \frac{\lambda_0^2}{\mu_{1,0}\mu_{2,0}} Q(1),$$
$$Q(k) = \frac{\lambda_0^{k-1}}{\mu_{1,0}\mu_{2,0}\mu_{3,0}^{k-3}} Q(1), \quad k = 4, 5, \dots$$

Теперь, подставляя найденные выражения в условие нормировки, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q(k) = \left[ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_{1,0}} + \frac{\lambda_0^2}{\mu_{1,0}\mu_{2,0}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda_0}{\mu_{3,0}} \right)^k \right] Q(1) =$$

$$= \left[ 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_{1,0}} + \frac{\lambda_0^2}{\mu_{1,0}\mu_{2,0}} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0}{\mu_{3,0}}} \right] Q(1) = 1.$$
(1.13)

Ряд во внутренней сумме сходится при условии  $\lambda_0 < \mu_{3,0}$ . На содержательном уровне это значит, что если при большой длине пачки интенсивность присоединения машин выше интенсивности обгона, то пачка будет неограниченно расти и стационарного распределения не будет существовать.

Заметим, что стационарное распределение зависит только от трех существенных параметров. Обозначим их

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{\mu_{1,0}}, \beta = \frac{\lambda_0}{\mu_{2,0}}, \gamma = \frac{\lambda_0}{\mu_{3,0}}.$$

Тогда из (1.13) получаем выражение для Q(1):

$$Q(1) = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{\alpha\beta}{1 - \gamma}}.$$

Окончательно распределение числа требований в группе в установившемся режиме имеет вид

$$Q(1) = p = \frac{1}{1 + \alpha + \frac{\alpha \beta}{1 - \gamma}},$$

$$Q(2) = \alpha p = \frac{\alpha}{1 + \alpha + \frac{\alpha \beta}{1 - \gamma}},$$

$$1 + \alpha + \frac{\alpha \beta}{1 - \gamma},$$

$$Q(k) = \alpha \beta \gamma^{k-3} p = \frac{\alpha \beta \gamma^{k-3}}{1 + \alpha + \frac{\alpha \beta}{1 - \gamma}}, \quad k \ge 3.$$

$$1 + \alpha + \frac{\alpha \beta}{1 - \gamma}$$

Далее для полученного распределения (1.14) вычислим числовые характеристики числа  $\chi(\omega)$  требований в группе. Будем пользоваться методом производящих функций. Как известно, производящая функция  $\Phi(z)$  размера пачки  $\chi(\omega)$  есть ряд следующего вида

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} Q(k)z^{k} = pz + \alpha pz^{2} + \frac{\alpha \beta z^{3}p}{1 - \gamma z}.$$
 (1.15)

Для нахождения начальных моментов используем формулы вычисления через производные производящей функции

$$\alpha_1(\chi(\omega)) = \frac{d}{dz} \Phi(z) \Big|_{z=1} = p \left( 1 + 2\alpha + \alpha\beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) \right),$$

$$\alpha_2(\chi(\omega)) = \left( \frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} \right) \Phi(z) \Big|_{z=1} =$$

$$= p \left( 1 + 4\alpha + \alpha\beta \left( \frac{4}{1-\gamma} + \frac{3}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3} \right) \right),$$

$$\alpha_{3}(\chi(\omega)) = \left(\frac{d^{3}}{dz^{3}} + 3\frac{d^{2}}{dz^{2}} + \frac{d}{dz}\right)\Phi(z)\Big|_{z=1} =$$

$$= p\left(1 + 8\alpha + \alpha\beta\left(\frac{8}{1 - \gamma} + \frac{7}{(1 - \gamma)^{2}} + \frac{6}{(1 - \gamma)^{3}} + \frac{6}{(1 - \gamma)^{4}}\right)\right),$$

$$\alpha_{4}(\chi(\omega)) = \left(\frac{d^{4}}{dz^{4}} + 6\frac{d^{3}}{dz^{3}} + 7\frac{d^{2}}{dz^{2}} + \frac{d}{dz}\right)\Phi(z)\Big|_{z=1} =$$

$$= p\left(1 + 16\alpha + \alpha\beta\left(\frac{16}{1 - \gamma} + \frac{15}{(1 - \gamma)^{2}} + \frac{14}{(1 - \gamma)^{3}} + \frac{12}{(1 - \gamma)^{4}} + \frac{24}{(1 - \gamma)^{5}}\right)\right).$$

Для нахождения основных числовых характеристик (дисперсия, коэффициент асимметрии, эксцесс) также понадобятся центральные моменты. Центральные моменты можно вычислить через начальные.

$$\beta_{2}(\chi(\omega)) = \alpha_{2} - (\alpha_{1})^{2} = p\left(1 + 4\alpha + \alpha\beta\left(\frac{4}{1 - \gamma} + \frac{3}{(1 - \gamma)^{2}} + \frac{2}{(1 - \gamma)^{3}}\right)\right) - \frac{1}{2}$$

$$-p^{2}\left(1 + 2\alpha + \alpha\beta\left(\frac{2}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^{2}}\right)\right)^{2} = \frac{1}{2}\left[\alpha + \alpha\beta\left(\frac{1}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^{2}} + \frac{2}{(1 - \gamma)^{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(1 - \gamma)^{2}} + \frac{2}{(1 - \gamma)^{3}}\right) + \alpha^{2}\beta^{2}\left(\frac{1}{(1 - \gamma)^{3}} + \frac{1}{(1 - \gamma)^{4}}\right)\right],$$

$$\beta_{3}(\chi(\omega)) = \alpha_{3} - 3\alpha_{2}\alpha_{1} + 3\alpha_{1}(\alpha_{1})^{2} - (\alpha_{1})^{3},$$

$$\beta_{4}(\chi(\omega)) = \alpha_{4} - 4\alpha_{3}\alpha_{1} + 6\alpha_{2}(\alpha_{1})^{2} - 4\alpha_{1}(\alpha_{1})^{3} + (\alpha_{1})^{4}.$$

Выражение через начальные моменты расписано только для  $\beta_2(\varkappa_0(\omega))$ , так как для старших центральных моментов выражения получаются очень длинными и не наглядными. Далее находим математическое ожидание, дисперсию, коэффициент асимметрии и эксцесс.

$$\mathbf{M}\chi(\omega) = \alpha_1 = p \left( 1 + 2\alpha + \alpha\beta \left( \frac{2}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^2} \right) \right),$$

$$\mathbf{D}\chi(\omega) = \beta_2 =$$

$$= p^2 \left[ \alpha + \alpha\beta \left( \frac{1}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^2} + \frac{2}{(1 - \gamma)^3} \right) + \frac{2}{(1 - \gamma)^3} \right) +$$

$$+ \alpha^2\beta \left( -\frac{1}{(1 - \gamma)^2} + \frac{2}{(1 - \gamma)^3} \right) + \alpha^2\beta^2 \left( -\frac{1}{(1 - \gamma)^3} + \frac{1}{(1 - \gamma)^4} \right) \right],$$

$$\mathbf{K}_{a}\chi(\omega) = \frac{\beta_{3}}{\sigma^{3}} = \frac{\alpha_{3} - 3\alpha_{2}\alpha_{1} + 3\alpha_{1}(\alpha_{1})^{2} - (\alpha_{1})^{3}}{(\alpha_{2} - (\alpha_{1})^{2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathbf{E}\mathbf{x}\chi(\omega) = \frac{\beta_{4}}{\sigma^{4}} - 3 =$$

$$= \frac{\alpha_{4} - 4\alpha_{3}\alpha_{1} + 6\alpha_{2}(\alpha_{1})^{2} - 4\alpha_{1}(\alpha_{1})^{3} + (\alpha_{1})^{4} - 3(\alpha_{2} - (\alpha_{1})^{2})^{2}}{(\alpha_{2} - (\alpha_{1})^{2})^{2}} =$$

$$= \frac{\alpha_{4} - 4\alpha_{3}\alpha_{1} + 12\alpha_{2}(\alpha_{1})^{2} - 3(\alpha_{2})^{2} - 6(\alpha_{1})^{4}}{(\alpha_{2} - (\alpha_{1})^{2})^{2}}.$$

Рассмотрим зависимость математического ожидания  $\mathbf{M}\chi(\omega)$  от параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Для этого рассмотрим производные по указанным параметрам. Так производная  $(\mathbf{M}\chi(\omega))'_{\alpha}$  от  $\mathbf{M}\chi(\omega)$  по  $\alpha$  имеет вид

$$(\mathbf{M}\chi(\omega))'_{\alpha} = p^{2} \left[ \left( 2 + \beta \left( \frac{2}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^{2}} \right) \right) \left( 1 + \alpha + \frac{\alpha \beta}{1 - \gamma} \right) - \left( 1 + \frac{\beta}{1 - \gamma} \right) \left( 1 + 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^{2}} \right) \right) \right] =$$

$$= p^{2} \left[ 1 + \beta \left( \frac{1}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^{2}} \right) \right] > 0.$$

То есть, чем больше параметр  $\alpha$ , тем больше средний размер пачки машин. Аналогично рассмотрим производную  $(\mathbf{M}\chi(\omega))'_{\beta}$ :

$$(\mathbf{M}\chi(\omega))'_{\beta} = p^{2} \left[ \alpha \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^{2}} \right) (1+\alpha) - (1+2\alpha) \frac{\alpha}{1-\gamma} \right] =$$

$$= p^{2} \left[ \alpha \left( \frac{1}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^{2}} \right) + \frac{\alpha^{2}}{(1-\gamma)^{2}} \right] > 0.$$

Подобным образом доказывается, что производная  $(\mathbf{M}\chi(\omega))_{\gamma}'>0$ . Итак, при увеличении  $\beta$  или  $\gamma$  увеличивается и математическое ожидание размера пачки.

#### 1.3 Определение неординарного пуассоновского потока и изучение его вероятностных свойств

В предыдущем разделе была построена вероятностная модель распределения числа требований в отдельной группе. Теперь вернемся к изучению всего потока. Далее предположим, что рассматриваемый поток является неординарным

пуассоновским [6], в котором требования поступают группами с распределением вида (1.14) и интенсивность поступления таких групп требований — это параметр  $\lambda$  данного потока. Потоки подобного рода часто встречаются в различных реальных системах, когда по некоторым причинам неоднородные требования объединяются в группы. Например, неординарный пуассоновский поток может образоваться на магистрали с ограниченной возможностью обгона медленных машин. При высокой интенсивности дорожного движения образуются транспортные пачки сравнительно большого размера. В таких потоках медленные автомобили составляют малую часть от общего количества автомобилей и движутся независимо друг от друга. Будем считать, что скорости медленных автомобилей — это непрерывные, одинаково распределенные случайные величины. Исходя из сделанных замечаний можно принять упрощение [16], состоящее в том, что поток медленных машин есть поток Пуассона с параметром  $\lambda$ . Также предположим, что расстояние между двумя последовательными медленными автомобилями в среднем значительно больше средней длины участка дороги, занимаемого машинами из неоднородной транспортной пачки. Предположим, что плотность требований с быстрым движением достаточно мала и их средняя скорость перемещения достаточно велика. Эти два ограничения позволяют с некоторым допущением считать, что все требования в стационарном режиме практически будут располагаться в группе и, значит, автомобили из одной автоколонны пересекают некоторую виртуальную поперечную стоп-линию магистрали одновременно. Поэтому реальный транспортный поток более сложной вероятностной структуры можно аппроксимировать неординарным пуассоновским потоком.

Введем случайную величину  $\eta(t)=\eta(\omega;t)$ , равную числу всех требований, поступивших в систему за промежуток времени [0,t). Итак, наш поток определяется четырьмя параметрами  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Найдем одномерные распределения  $P(t;k)=\mathbf{P}(\{\omega\colon\eta(\omega;t)=k\}),\,k=1,2,\ldots$ , неординарного пуассоновского потока.

**Теорема 1.** Для производящей функции  $\Psi(t,z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(t;k) z^k$  распределения случайной величины  $\eta(\omega;t)$  имеет место следующее равенство:

$$\Psi(t,z) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Big[ \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \alpha^n \frac{(\lambda t p)^{k-n}}{n!(k-2n)!} + \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \alpha^n \sum_{m=1}^{\min\{k-2n,n\}} \beta^m \sum_{l=0}^{k-2n-m} \gamma^l \frac{(\lambda t p)^{k-n-m-l} C_{m+l-1}^l}{(n-m)!m!(k-2n-m-l)!} \Big],$$

где  $\lfloor k/2 \rfloor$  обозначает целую часть числа k/2 и z — комплексное число.

Доказательство. Производящая функция неординарного пуассоновского потока имеет следующий общий вид [11]

$$\Psi(t,z) = e^{\lambda t(\Phi(z)-1)}$$

где  $\lambda$  — интенсивность потока групп,  $\Phi(z)$  — производящая функция числа требований в одной группе. Общий вид производящей функции не позволяет явным образом получить вероятности P(t;k). Поэтому преобразуем  $\Psi(t,z)$  таким образом, чтобы можно было выделить множители при  $z^k$ , которые по определению производящей функции равны P(t;k). Учитывая (1.15), получаем

$$\Psi(t,z) = \exp(\lambda t(pz + \alpha pz^2 + \frac{\alpha \beta z^3 p}{1 - \gamma z} - 1)) =$$

$$= \exp(-\lambda t) \exp(\lambda t pz) \exp(\lambda t \alpha pz^2) \exp(\lambda t \frac{\alpha \beta z^3 p}{1 - \gamma z}).$$

Разложив функцию  $\Psi(t,z)$  в степенной ряд по z, найдем

$$\Psi(t,z) = \exp(-\lambda t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t p z)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha p z^2)^m}{m!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha \beta z^3 p (1 - \gamma z)^{-1})^l}{l!} =$$

$$= \exp(-\lambda t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha p)^m}{m!} z^{2m} +$$

$$+ \exp(-\lambda t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha p)^m}{m!} z^{2m} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha \beta p)^l}{l!} z^{3l} \sum_{q=0}^{\infty} C_{l+q-1}^q \gamma^q z^q.$$

$$(1.16)$$

Преобразуем первое слагаемое в (1.16), выполняя произведение степенных рядов и приведение подобных членов в произведении при  $z^k$  для  $k=0,\,1,\,\ldots,$ 

последовательно получим

$$\exp(-\lambda t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} z^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha p)^m}{m!} z^{2m} =$$

$$= \exp(-\lambda t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha p)^m}{m!} z^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t p)^n}{n!} z^n =$$

$$= \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha^n \frac{(\lambda t p)^n}{n!} \times \frac{(\lambda t p)^{k-2n}}{(k-2n)!} z^k =$$

$$= \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha^n \frac{(\lambda t p)^{k-n}}{n!(k-2n)!} z^k.$$
(1.17)

Проведем аналогичные выкладки для второго слагаемого из соотношения (1.16):

$$\exp(-\lambda t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t p)^{n}}{n!} z^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha p)^{m}}{m!} z^{2m} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha \beta p)^{l}}{l!} z^{3l} \sum_{q=0}^{\infty} C_{l+q-1}^{q} \gamma^{q} z^{q} =$$

$$= \exp(-\lambda t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha p)^{m}}{m!} z^{2m} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \alpha \beta p)^{l}}{l!} z^{3l} \sum_{q=0}^{\infty} C_{l+q-1}^{q} \gamma^{q} z^{q} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t p)^{n}}{n!} z^{n} =$$

$$= \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} z^{k} \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha^{m} \sum_{l=1}^{\lfloor (k-2m)/3 \rfloor} \alpha^{l} \beta^{l} \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{k-2m-3l} \gamma^{q} \left( \frac{(\lambda t p)^{m} (\lambda t p)^{l}}{m! l!} C_{l+q-1}^{q} \frac{(\lambda t p)^{k-2m-3l-q}}{(k-2m-3l-q)!} \right) =$$

$$= \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} z^{k} \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha^{m} \sum_{l=1}^{\lfloor (k-2m)/3 \rfloor} \alpha^{l} \beta^{l} \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{k-2m-3l} \gamma^{q} \left( \frac{(\lambda t p)^{k-m-2l-q}}{m! l! (k-2m-3l-q)!} C_{l+q-1}^{q} \right). \tag{1.18}$$

Используем теперь замену n=m+l индексов суммирования в (1.18). Тогда множество допустимых значений индексов  $m=0,\,1,\,\ldots,\,\lfloor k/2\rfloor,\,l=1,\,2,\,\ldots,\,\lfloor (k-2m)/3\rfloor$  соответствует в новых индексах следующему множеству значений

 $n=0,\,1,\,\ldots,\,\lfloor k/2 \rfloor$  и  $l=1,\,2,\,\ldots,\,\min(k-2n,n)$ . В этом случае получаем

$$\sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha^m \sum_{l=1}^{\lfloor (k-2m)/3 \rfloor} \alpha^l \beta^l = \sum_{m=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{l=1}^{\lfloor (k-2m)/3 \rfloor} \alpha^{m+l} \beta^l = \sum_{l=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} \sum_{\min(k-2n,n)} \alpha^n \beta^l = \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha^n \sum_{l=1}^{\min(k-2n,n)} \beta^l.$$

$$(1.19)$$

Учитывая (1.18) и (1.19), получаем окончательное выражение для второго слагаемого

$$\exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} z^{k} \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha^{n} \sum_{l=1}^{\min(k-2n,n)} \beta^{l} \times \sum_{q=0}^{k-2(n-l)-3l} \gamma^{q} \left( \frac{(\lambda t p)^{k-(n-l)-2l-q}}{(n-l)!l!(k-2(n-l)-3l-q)!} C_{l+q-1}^{q} \right) =$$

$$= \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^{\infty} z^{k} \sum_{n=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \alpha^{n} \sum_{l=1}^{\min(k-2n,n)} \beta^{l} \times$$

$$\times \sum_{q=0}^{k-2n-l} \gamma^{q} \left( \frac{(\lambda t p)^{k-n-l-q}}{(n-l)!l!(k-2n-l-q)!} C_{l+q-1}^{q} \right). \tag{1.20}$$

Применяя выражения (1.17) и (1.20), с точностью до замены индексов суммирования окончательно получаем утверждение теоремы о том, что

$$\Psi(t,z) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left( \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \alpha^n \frac{(\lambda t p)^{k-n}}{n!(k-2n)!} + \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \alpha^n \sum_{m=1}^{\min\{k-2n,n\}} \beta^m \sum_{l=0}^{k-2n-m} \gamma^l \frac{(\lambda t p)^{k-n-m-l} C_{m+l-1}^l}{(n-m)!m!(k-2n-m-l)!} \right).$$

Таким образом, получаем распределение

$$P(t;k) = e^{-\lambda t} \left[ \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \alpha^n \frac{(\lambda t p)^{k-n}}{n!(k-2n)!} + \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \alpha^n \sum_{m=1}^{\min\{k-2n,n\}} \beta^m \sum_{l=0}^{k-2n-m} \gamma^l \frac{(\lambda t p)^{k-n-m-l} C_{m+l-1}^l}{(n-m)! m!(k-2n-m-l)!} \right].$$
(1.21)

**Лемма 1.** Для того чтобы сумма т независимых неординарных пуассоновских потоков с параметрами  $\lambda_j$ ,  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  и  $\gamma_j$ ,  $j = \overline{1,m}$ , являлась таким же потоком, необходимо и достаточно, чтобы  $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_m$ . При этом суммарный поток будет иметь следующие параметры:

$$\lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j, \qquad \alpha = \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j p_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j},$$
$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j \beta_j p_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j p_j}, \qquad \gamma = \gamma_1.$$

 $3\partial ecb\ p_j = (1 + \alpha_j + \alpha_j \beta_j/(1 - \gamma_j))^{-1}.$ 

Доказательство. Обозначим через  $\eta_j(t), j = \overline{1,m}$ , число требований, поступивших по j-му потоку на промежутке [0,t) и через  $\eta(t) = \sum_{j=1}^m \eta_j(t)$ . Доказательство проведем используя производящие функции. Из теории вероятностей известно, что производящая функция  $\Psi(t,z)$  суммы  $\eta(t)$  независимых случайных величин  $\eta_1(t), \ldots, \eta_m(t)$  есть произведение  $\prod_{j=1}^m \Psi_j(t,z)$  производящих функций слагаемых. Итак, имеем следующие равенства:

$$\Psi_{j}(t,z) = \exp(\lambda_{j}t(\sum_{i=1}^{\infty}Q_{j}(i)z^{i}-1)), \quad j = \overline{1,m},$$

$$\Psi(t,z) = \prod_{j=1}^{m}\Psi_{j}(t,z) = \exp(\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j}t(\sum_{i=1}^{\infty}Q_{j}(i)z^{i}-1)) =$$

$$= \exp(-\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j}t)\exp(\sum_{i=1}^{\infty}z^{i}t\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j}Q_{j}(i)) =$$

$$= \exp(-\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j}t)\exp(zt\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j}p_{j})\exp(z^{2}t\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j}\alpha_{j}p_{j})\exp(\sum_{i=3}^{\infty}z^{i}t\sum_{j=1}^{m}\lambda_{j}\alpha_{j}\beta_{j}\gamma_{j}^{i-3}p_{j}).$$

С другой стороны

$$\Psi(t,z) = \exp(\lambda t (\sum_{i=3}^{\infty} \alpha \beta \gamma^{i-3} p z^i + \alpha p z^2 + p z - 1)).$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \\ \lambda p = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j \\ \lambda \alpha p = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j p_j \\ \lambda \alpha \beta \gamma^{i-3} p = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j \beta_j \gamma_j^{i-3} p_j, \quad i \ge 3 \end{cases}$$

Из нее можно выразить следующие параметры распределения

$$\lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j,$$

$$\alpha = \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j p_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j},$$

$$\beta = \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j \beta_j p_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j p_j},$$

а также получить систему уравнений относительно  $\gamma$  и  $\gamma_j$ 

$$\gamma = \frac{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j \beta_j \gamma_j^{i+1} p_j}{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \alpha_j \beta_j \gamma_j^{i} p_j} \quad i = 0, 1, \dots$$

Система имеет решение при произвольных  $\lambda_j, \alpha_j, \beta_j$  тогда и только тогда, когда  $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_m$ . Таким образом, лемма 1 доказана.

Найдем числовые характеристики случайной величины  $\eta(t)$  с помощью метода производящих функций. Для неординарного пуассоновского потока производящая функция имеет следующий вид

$$\Psi(t,z) = \exp(\lambda t (\sum_{i=1}^{\infty} Q(i)z^{i} - 1)).$$

В приложении A приведен вывод начальных и центральных моментов случайной величины  $\eta(t)$  через производные производящей функции  $\Psi(t,z)$ . Используя обозначения из приложения A, получены основный числовые характеристики. Математическое ожидание равно

$$\mathbf{M}\eta(\omega;t) = \alpha_1 = a = \lambda t p \left( 1 + 2\alpha + \alpha\beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) \right).$$

Дисперсия равна

$$\mathbf{D}\eta(\omega;t) = \beta_2 = a + b = \lambda t p \left( 1 + 4\alpha + \alpha\beta \left( \frac{4}{1-\gamma} + \frac{3}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3} \right) \right).$$

Коэффициент асимметрии равен

$$\mathbf{K}_a \ \eta(\omega; t) = \frac{\beta_3}{\sigma^3} = \frac{a + 3b + c}{(a+b)^{3/2}}.$$

Из полученной формулы следует, что величина  $\mathbf{K}_a\eta(\omega;t)>0$  при любых допустимых значениях параметров  $\lambda$ , t,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . На содержательном уровне это, как правило, означает, что случайная величина  $\eta(t)$  чаще принимает значения, расположенные далеко справа на числовой оси относительно центра распределения, нежели значения, расположенные далеко слева на оси относительно центра рассеивания. Однако  $\eta(t)$  реже принимает значения, близко расположенные справа на числовой оси относительно центра рассеивания, нежели значения, близко расположенные слева на числовой оси относительно центра распределения. Вычислим теперь эксцесс по формуле

$$\mathbf{Ex} \ \eta(\omega;t) = \frac{\beta_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{3(a+b)^2 + a + 7b + 6c + d}{(a+b)^2} - 3 = \frac{a + 7b + 6c + d}{(a+b)^2}.$$

Данная величина характеризует крутизну наклона многоугольника распределения. Чем больше значение эксцесса, тем больше наклон многоугольника. Можно заметить, что с ростом  $\lambda$  и t значение эксцесса, а, следовательно, и наклон соответствующего графика падает.

В книге Д. Кокса и П. Льюиса «Статистический анализ последовательностей событий» [7] уделяется большое внимание потокам случайных событий (точечным процессам), в которых интервалы между наступлениями событий зависимы и имеют разное распределение. В частности, приводится большое число таблиц с реальными данными, обладающими такими свойствами. Более того, будем предполагать, что такие потоки можно аппроксимировать неординарными пуассоновскими потоками с распределением вида (1.21), которое зависит от четырех параметров  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . В следующем разделе 1.4 будет установлено, что статистические данные из некоторых таблиц книги [7] могут быть представлены в виде неординарных пуассоновских потоков. Поэтому в дальнейшем потоки такого типа будем называть потоками Кокса—Льюиса.

#### 1.4 Нелокальное описание входных потоков неоднородных требований

Как было сказано выше, в классической теории массового обслуживания входные потоки, как правило, описываются с помощью случайного процесса  $\{\eta(t)\colon t\geq 0\}$  или в виде случайной последовательности  $\{\tau_i'; i\geq 1\}$  моментов  $\tau_i'$ 

поступления i-той заявки в систему. Например, последовательность  $\{\tau_i'; i \geq 1\}$  может содержать моменты пересечения стоп-линии перекрестка автомобилями. Однако, случайные интервалы  $\tau_{i+1}' - \tau_i', i \geq 1$ , между последовательными заявками, как правило, оказываются зависимыми и имеющими различные функции распределения. В таком случае конечномерные распределения процесса  $\{\eta(t): t \geq 0\}$  найти не удается.

В данной работе предлагается для описания входного потока применять нелокальный способ [17]. Согласно данному методу в исходном потоке  $\{\tau_i'; i \geq 1\}$  необходимо выделить случайную последовательность моментов  $\{\tau_i; i \geq 0\}$  по некоторому заданному принципу. Обозначим через символ  $\eta_i$  случайное число заявок, поступивших на интервале  $[\tau_i, \tau_{i+1}), i \geq 0$ . Если последовательность моментов  $\{\tau_i; i \geq 0\}$  совпадает с моментами поступления первых требований в группах, то  $\eta_i$  будет равно  $\chi_i$ . Отметим, что благодаря удачному алгоритму выбора моментов  $\{\tau_i; i \geq 0\}$  можно достичь независимости и одинакового распределения как интервалов  $\tau_{i+1} - \tau_i, i \geq 0$ , так и размеров групп  $\eta_i, i \geq 0$ . В этом случае исходный поток можно описать в виде векторной случайной последовательности  $\{(\tau_i, \eta_i); i \geq 0\}$ . Поэтому цель такого преобразования или разбиения входного потока на группы состоит в значительном упрощении его описания. Получаем, что исходный поток отдельных заявок преобразован в условный поток групп, содержащих случайное количество заявок. Приведем описание четырех алгоритмов разбиения исходного потока  $\{\tau_i'; i \geq 1\}$ .

Согласно первому способу требования объединяются в группы по следующему принципу близости. Предположим, что  $\tau_1'=0$ . Это означает, что начало наблюдения за системой совпадает с моментом прихода первой заявки (этот случай называется синхронным). Зададим некоторый параметр близости  $h_0=\mathrm{const}>0$ . Тогда величины  $\tau_i,\ i\geq 0$ , будут определяться следующими соотношениями:

$$\tau_i = \tau'_{k_i}, k_0 = 1, k_{i+1} = \inf\{k \colon k > k_i, \tau'_k - \tau'_{k-1} \ge h_0\}.$$

Если при некотором  $i \geq 0$  множество  $\{k: k > k_i, \tau'_k - \tau'_{k-1} \geq h_0\}$  окажется пустым, то будем считать, что  $\tau_{i+1} = +\infty$ . Заметим, что при таком разбиении моменту  $\tau_i$ ,  $i \geq 0$ , будет соответствовать поступление i-ой группы требований. Число требований в каждой группе будет равно  $\eta_i = k_{i+1} - k_i$ . Заметим, что для исходного потока интервалы между соседними требованиями, оказавшимися после разбиения в одной группе, непременно будут меньше, чем  $h_0$ . В то же

время интервалы между поступлением последнего требования одной группы и первого требования следующей группы будут не меньше, чем  $h_0$ . Последние из указанных интервалов будем называть интервалом между соответствующими группами.

Второй способ применим в так называемом асинхронном случае, когда  $\tau_1' \neq 0$ . Также задается некоторый параметр близости  $h_0 = \mathrm{const} > 0$ . Однако, теперь этот параметр имеет несколько иной смысл. Моменты поступления групп требований в данном случае определяются следующим образом:

$$\tau_i = \tau'_{k_i}, k_0 = \inf\{k \colon k > 0, \tau'_{k+1} - \tau'_k \ge h_0\} + 1,$$
  
$$k_{i+1} = \inf\{k \colon k > k_i, \tau'_k - \tau'_{k_i} \ge h_0\}.$$

Отметим, что группы формируются так, что временной интервал между первыми заявками последующих групп впервые становится не меньше, чем  $h_0$ . Данный способ рассчитан на потоки высокой интенсивности. Следует обратить внимание, что возможен случай, когда первые несколько заявок исходного потока при таком способе разбиения будут потеряны. Однако, при высокой интенсивности потока такие потери можно считать несущественными.

Согласно третьему способу исходный поток делится на группы поэтапно. На этапе с номером m ( $m=0,1,\ldots$ ) мы будем получать векторную случайную последовательность  $\{(\tau_i^m,\eta_i^m);i\geq 0\}$ , которую для краткости будем называть далее последовательностью (или потоком) m-ого уровня. Как и раньше для любого m моменты  $\tau_i^m$ ,  $i\geq 0$ , совпадают с моментами поступлений некоторых требований исходного потока в систему, то есть  $\tau_i^m=\tau'_{k_{m,i}},\ k_{m,i}\geq 1$ . Далее, количество требований в i-ой группе потока m-ого уровня определяется как  $\eta_i^m=k_{m,i+1}-k_{m,i}$ . Также введем величину  $\delta_i^m=\tau'_{k_{m,i+1}}-\tau'_{k_{m,i+1}-1}$ , которая определяет интервал между i-ой и (i+1)-ой пачками исходного процесса при его нелокальном описании с помощью последовательности m-ого уровня. Параметрами данного способа являются натуральное число d и постоянные величины  $h_0,\ h_1$  и  $h_2$ , удовлетворяющие соотношению  $0< h_0 < h_1 < h_2$ . Итак, рекуррентные формулы для определения моментов  $\tau_i^m$  при  $m\geq 0,\ i\geq 0$  имеют

следующий вид:

$$k_{0,0} = 1, k_{0,i+1} = \inf\{k \colon k > k_{0,i}, \tau'_k - \tau'_{k-1} \ge h_0\},$$

$$s_m = \min\{\inf\{k \colon k \ge 0, \eta_k^m \le d, \eta_{k+1}^m = d+1, \delta_k^m < h_1\},$$

$$\inf\{k \colon k \ge 0, \eta_k^m \le d, \eta_{k+1}^m \le d, \delta_k^m < h_2\}\},$$

$$\tau_i^{m+1} = \begin{cases} \tau_i^m, & i \le s_m, \\ \tau_{i+1}^m, & i > s_m. \end{cases}$$

Заметим, что последовательность нулевого уровня получается при помощи первого способа разбиения. Далее, начиная с нулевой пачки, ищем такую пару последовательных групп, для которой выполняется одно из следующих условий: 1) первая группа этой пары содержит не больше, чем d элементов, вторая — ровно d+1 требование, расстояние между группами меньше, чем  $h_1$ ; 2) каждая пачка в рассматриваемой паре содержит не больше, чем d заявок, а интервал между группами меньше, чем  $h_2$ . Объединяем эти две пачки в одну. Так мы получим последовательность первого уровня, к которой применим тот же самый алгоритм и т. д. Можно убедиться, что при любом  $i \geq 0$  множество  $\{\omega\colon \lim_{m\to\infty}\tau_i^m$  существует $\}$  совпадет с достоверным событием  $\Omega_0$ . Следовательно, определим случайную величину  $\tau_i=\lim_{m\to\infty}\tau_i^m$ . Поскольку согласно описанному методу  $\tau_i=\tau_{k_i}'$ , то определим для второй компоненты искомой векторной случайной последовательности равенство  $\eta_i=k_{i+1}-k_i$ . Итак, описан третий алгоритм получения потока  $\{(\tau_i,\eta_i); i\geq 0\}$ .

Согласно четвертому алгоритму требования объединяются в группы по следующему принципу близости. Предположим, что  $\tau_1'=0$ . Зададим некоторый параметр близости  $h_0={\rm const}>0$  и коэффициенты 0< a<1 и b>0. Тогда величины  $\tau_i,\,i\geq 0$ , будут определяться из следующих соотношений:

$$\tau_i = \tau'_{k_i}, k_0 = 1, k_{i+1} = \inf\{k \colon k > k_i, \tau'_k - \tau'_{k-1} \ge h_i a^{k-k_i-1}\},$$
$$h_{i+1} = h_i a^{k_{i+1}-k_i-1} b.$$

Если при некотором  $i \geq 0$  множество  $\{k: k > k_i, \tau'_k - \tau'_{k-1} \geq h_0\}$  окажется пустым, то будем считать, что  $\tau_{i+1} = +\infty$ . Заметим, что при таком разбиении моменту  $\tau_i$ ,  $i \geq 0$ , будет соответствовать поступление i-й группы требований. Количество требований в группе будет равно  $\eta_i = k_{i+1} - k_i$ . Данный алгоритм подстраивается под интенсивность поступающих требований, изменяя параметр близости требований  $h_i$ . Выбирая параметры a и b, можно регулировать математическое ожидание размера группы.

К потокам, для которых характерно образование пачек относительно небольшого размера в работе [73] было предложено применить пятый алгоритм. Этот метод также предполагает построение из исходного потока последовательностей m-го уровня ( $m \geq 0$ ) вида  $\{(\tau_i^m, \eta_i^m); i \geq 0\}$ . Однако рекуррентные формулы для отыскания таких последовательностей меняются по сравнению с третьим методом и принимают вид:

$$k_{0,0} = 1, k_{0,i+1} = \inf\{k \colon k > k_{0,i}, \tau'_k - \tau'_{k-1} \ge h_0\},$$

$$s_m = \inf\{k \colon k \ge 0, \eta_k^m \le d, \eta_{k+1}^m \le d, \delta_k^m < h_1, \eta_k^m = \eta_{k-1}^m\},$$

$$\tau_i^{m+1} = \begin{cases} \tau_i^m, & i \le s_m, \\ \tau_{i+1}^m, & i > s_m. \end{cases}$$

Здесь полагается  $\eta_{-1}^m = 0$  при любом  $m \geq 0$ . Величины  $\delta_i^m = \tau'_{k_{m,i+1}} - \tau'_{k_{m,i+1}-1}$  и  $\eta_i^m = k_{m,i+1} - k_{m,i}$  заданы аналогично третьему методу. Обратим внимание, что в сравнении с третьим алгоритмом изменились условия объединения двух соседних пачек в одну при построении потока очередного уровня. Так, теперь мы объединяем пару пачек в случае, когда каждая из них содержит не больше d требований, интервал между пачками меньше, чем  $h_1$ , а также размер первой группы в рассматриваемой паре совпадает с размером группы, ей предшествующей. На параметры метода аналогично предыдущим алгоритмам накладывается ограничение  $0 < h_0 < h_1$ , и по-прежнему d есть некоторое натуральное число. Отметим, что  $\{\omega \colon \lim_{m \to \infty} \tau_i^m$  существует $\} = \Omega_0$ , поэтому определив  $\tau_i = \lim_{m \to \infty} \tau_i^m$  и  $\eta_i = k_{i+1} - k_i$  для любого  $i \geq 0$ , получим нелокальное описание  $\{(\tau_i, \eta_i); i > 0\}$  исходного потока.

Применяя один из указанных пяти методов и подбирая значения соответствующих параметров, можно разбить исходный поток на группы так, чтобы случайные последовательности  $\{\tau_i - \tau_{i-1}; \ i \geq 1\}$  и  $\{\eta_i; \ i \geq 0\}$  были составлены из независимых и имеющих одинаковое распределение случайных величин. Для проверки гипотезы о независимости и одинаковом распределении при работе с конкретными данными будем применять один из четырех статистических критериев. Данные гипотезы мы будем проверять как для последовательности  $\{\tau_i - \tau_{i-1}; \ i \geq 1\}$  так и для последовательности  $\{\eta_i; \ i \geq 0\}$ . Ниже описана схема применения критериев.

В общем случае будем говорить о повторной случайной выборке  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  объема n и наблюдаемых значениях  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  этой выборки.

Первый критерий — фазово-частотный критерий Валлиса и Мура, описанный в [74]. Необходимо определить значение статистики  $z_1(n, X_1, X_2, \ldots, X_n)$ , считающей так называемое случайное число фаз, следующим образом. Для всех  $1 \le i \le n-1$  вычислим знак разности между соседними выборочными значениями  $x_{i+1}-x_i$ . Если разность оказалась равной нулю, то мы не берем ее в рассмотрение. В противном случае выписываем последовательно полученные знаки. Фазой будем называть последовательность подряд идущих одинаковых знаков. Посчитав общее число полученных фаз за исключением начальной и конечной, мы получим наблюдаемое значение  $z_1(n, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ . Далее строим статистику

$$Z_1(n, X_1, X_2, \dots, X_n) = (z_1(n, X_1, X_2, \dots, X_n) - \frac{2n-7}{3}) \frac{\sqrt{90}}{\sqrt{16n-29}}.$$
 (1.22)

Если выдвинутая гипотеза о независимости и одинаковом распределении величин  $X_i$ ,  $1 \le i \le n$ , верна, то последовательность случайных величин  $\{Z_1(n,X_1,X_2,\ldots,X_n); n \ge 30\}$  сходится по распределению к стандартному нормальному закону. Поэтому пороговое значение  $C_{\alpha'}$  для наблюдаемого значения  $Z_1(n,x_1,x_2,\ldots,x_n)$  величины  $Z_1(n,X_1,X_2,\ldots,X_n)$  определяется при заданном уровне значимости  $\alpha'$  из равенства  $\Phi(-C_{\alpha'}) = \alpha'/2$ , где  $\Phi(x)$  — функция распределения стандартной нормальной случайной величины. Гипотеза отвергается, если  $|Z_1(n,x_1,x_2,\ldots,x_n)| > C_{\alpha'}$ .

Инверсионный критерий, описанный в [75], основан на статистике

$$Z_2(n, X_1, X_2, \dots, X_n) = (z_2(n, X_1, X_2, \dots, X_n) - \frac{n(n-1)}{4}) \frac{6}{n^{3/2}},$$
 (1.23)

где случайное число инверсий  $z_2(n,X_1,X_2,\ldots,X_n)$  определяется по выборке следующим образом. Во-первых, построим вариационный ряд  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$  повторной случайной выборки  $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ . Для каждого элемента  $X_i$   $(1 \leq i \leq n-1)$  исходной выборки посчитаем число  $d_i(n,X_1,X_2,\ldots,X_n)$  элементов множества  $\{X_{i+1},X_{i+2},\ldots,X_n\}$ , которые оказались левее элемента  $X_i$  в вариационном ряду. Далее суммированием получаем общее число инверсий:  $z_2(n,X_1,X_2,\ldots,X_n) = \sum_{i=1}^{n-1} d_i(n,X_1,X_2,\ldots,X_n)$ . Полученное наблюдаемое значение подставим в (1.23). Подобно фазово-частотному критерию Валлиса и Мура основная статистика  $Z_2(n,X_1,X_2,\ldots,X_n)$  данного критерия сходится по распределению к стандартному нормальному закону при  $n \to \infty$ . Следовательно, гипотезу следует отвергать, если  $|Z_2(n,x_1,x_2,\ldots,x_n)| > C_{\alpha'}$ .

Критерий серий, основанный на медиане выборки, базируется на двух статистиках. Схема получения их значений по конкретным выборкам подробно описана в [76] и состоит в следующем. Сначала строим вариационный ряд  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \ldots \leq X_{(n)}$  повторной случайной выборки  $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ . Далее по полученным значениям  $(x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)})$  нам необходимо следующим образом определить медиану выборки:

$$x_{med}(n,x_1,x_2,\ldots,x_n) = egin{cases} x_{(rac{n+1}{2})}, & n- ext{Heчетно}, \ x_{(rac{n}{2})} + x_{(rac{n+2}{2})}, & n- ext{четно}. \end{cases}$$

Для каждого  $i, 1 \le i \le n$ , определим знак разности  $x_i - x_{med}(n, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Нулевые разности не учитываем. Последовательность подряд идущих одинаковых знаков называем серией, а их количество в серии — ее протяженностью. Определяем общее число  $z_3(n, x_1, x_2, \dots, x_n)$  серий и протяженность  $z_4(n, x_1, x_2, \dots, x_n)$  самой длинной серии. С вероятностью ошибки от 0,05 до 0,0975 выдвинутую гипотезу следует отвергнуть, если не выполняется хотя бы одно из условий:

$$z_3(n, x_1, x_2, \dots, x_n) > \frac{n+1-1,96\sqrt{n-1}}{2},$$

$$z_4(n, x_1, x_2, \dots, x_n) < 3,3\log_{10}(n+1).$$
(1.24)

В монографии [77] описан так называемый фазово-частотный критерий с учетом длин фаз. Он предполагает определение значений следующих двух статистик: число фаз  $z_5(n, X_1, X_2, \ldots, X_n)$  и протяженность самой длинной фазы  $z_6(n, X_1, X_2, \ldots, X_n)$ . При этом число фаз определяется аналогично фазовочастотному критерию Валлиса и Мура, но с учетом начальной и конечной фазы. Протяженность фазы имеет для нас тот же смысл, что и в критерии, основанном на медиане выборки. На уровне значимости  $0.05 < \alpha' < 0.0975$  пороговое значение  $C_{0,\alpha'}$  считается равным пяти при  $n \le 26$ , шести — при  $26 < n \le 153$  и семи, если  $153 < n \le 1170$ . Гипотеза отвергается в случае нарушения хотя бы одного из неравенств:

$$z_5(n, x_1, x_2, \dots, x_n) > \frac{2n-1}{3} - 1.96 \frac{\sqrt{16n-29}}{\sqrt{90}},$$

$$z_6(n, x_1, x_2, \dots, x_n) < C_{0,\alpha'}.$$
(1.25)

Итак, в работе были описаны четыре критерия о независимости и одинаковом распределении случайных величин в последовательностях  $\{\tau_i - \tau_{i-1}; \ i \geq 1\}$  и  $\{\eta_i; i \geq 0\}$ .

Выше отмечалось, что распределение (1.14) зависит от трех параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Неизвестные параметры распределения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  будем оценивать видоизмененным методом минимума хи-квадрат [77]. Для применения данного метода удобно перейти от параметров  $\alpha$  и  $\beta$  к новым параметрам p и f, где p = Q(1) и  $f = \sum_{k=3}^{\infty} Q(k)$ . При этом параметр  $\gamma$  остается без изменений. В новых параметрах формулы для Q(k),  $k = 1, 2, \ldots$  примут следующий вид

$$Q(1) = p,$$

$$Q(2) = 1 - f - p,$$

$$Q(k) = f(1 - \gamma)\gamma^{k-3}, \quad k \ge 3.$$
(1.26)

Из (1.26), используя (1.14), получаем систему уравнений

$$\frac{1}{1+\alpha+\frac{\alpha\beta}{1-\gamma}} = p,$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha+\frac{\alpha\beta}{1-\gamma}} = 1 - f - p,$$

$$\frac{\alpha\beta\gamma^{k-3}}{1+\alpha+\frac{\alpha\beta}{1-\gamma}} = f(1-\gamma)\gamma^{k-3}, \quad k \ge 3.$$
(1.27)

Из (1.27) искомые параметры выражаются следующим образом:

$$\alpha = \frac{1 - f - p}{p},$$

$$\beta = \frac{f(1 - \gamma)}{1 - f - p}.$$
(1.28)

Из систем (1.27) и (1.28) следует, что параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  взаимооднозначно определяются через p, f и  $\gamma$ .

Пусть получен поток, разделенный на группы некоторым алгоритмом. Пусть  $m_i$ ,  $i=1,2,\ldots,r-1$ , равно числу групп, каждая из которых содержит i требований. Обозначим через  $m_r$  число групп, каждая из которых содержит не менее r требований. Общее количество групп равно n, то есть  $\sum_{i=1}^r m_i = n$ .

Воспользуемся одним из известных методов математической статистики [74—78] — методом минимума хи-квадрат. Для рассматриваемой задачи данный

метод заключается в минимизации по параметрам  $p,f,\gamma$  следующей статистики

$$\chi^{2}(n, F(x)) = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_{i} - np_{i})^{2}}{np_{i}},$$
(1.29)

где

$$p_1 = p, \quad p_2 = 1 - f - p,$$
 $p_i = f(1 - \gamma)\gamma^{i-3}, \quad i = 3, \dots, r - 1,$ 
 $p_r = \sum_{k=r}^{\infty} Q(k) = \sum_{k=r}^{\infty} f(1 - \gamma)\gamma^{k-3} = f\gamma^{r-3}.$ 

Для оценки параметров используем модифицированный метод минимума хиквадрат

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0, \quad \text{где} \quad x = p, f, \gamma.$$

Получаем систему из трёх уравнений

$$\frac{m_1}{p} + \frac{m_2}{1 - f - p}(-1) = 0,$$

$$\frac{m_2}{1 - f - p}(-1) + \frac{m_3(1 - \gamma)}{f(1 - \gamma)} + \frac{m_4(1 - \gamma)\gamma}{f(1 - \gamma)\gamma} + \dots +$$

$$+ \frac{m_{r-1}(1 - \gamma)\gamma^{r-4}}{f(1 - \gamma)\gamma^{r-4}} + \frac{m_r\gamma^{r-3}}{f\gamma^{r-3}} = 0,$$

$$-\frac{m_3}{f(1 - \gamma)}f + \frac{m_4}{f(1 - \gamma)\gamma}(f(-\gamma) + f(1 - \gamma)) + \dots +$$

$$+ \frac{m_{i+3}}{f(1 - \gamma)\gamma^i}(f(-\gamma^i) + f(i(1 - \gamma)\gamma^{i-1}) + \dots + \frac{m_r}{f\gamma^{r-3}}f(r - 3)\gamma^{r-4} = 0.$$

Упростим первые 2 уравнения

$$m_2 p = (1 - f - p)m_1,$$
  
 $m_2 f = (1 - f - p)(m_3 + m_4 + \dots + m_r).$ 

Решением данной системы относительно p и f являются оценки

$$p^* = \frac{m_1}{n}, f^* = \frac{m_3 + m_4 + \dots + m_r}{n}.$$

Данный результат является ожидаемым, так как p — это вероятность получить группу из 1 требования, а f — из 3 или более требований. Найдем оценку для последнего параметра  $\gamma$ :

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \gamma} = 0,$$

$$-\frac{m_3}{f(1-\gamma)} f + \frac{m_4}{f(1-\gamma)\gamma} (f(-\gamma) + f(1-\gamma)) + \dots +$$

$$+\frac{m_{i+3}}{f(1-\gamma)\gamma^i} (f(-\gamma^i) + f(i(1-\gamma)\gamma^{i-1}) + \dots + \frac{m_r}{f\gamma^{r-3}} f(r-3)\gamma^{r-4} = 0,$$

$$-\frac{m_3}{1-\gamma} - \frac{m_4}{1-\gamma} - \dots - \frac{m_{r-1}}{1-\gamma} + \frac{m_4}{\gamma} + \frac{2m_5}{\gamma} + \dots + \frac{(r-3)m_r}{\gamma} = 0,$$

$$\gamma(m_3 + m_4 + \dots + m_{r-1}) = (1-\gamma)(m_4 + 2m_5 + \dots + (r-3)m_r),$$

$$\gamma^* = \frac{m_4 + 2m_5 + 3m_6 + \dots + (r-3)m_r}{m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots + (r-3)m_{r-1} + (r-3)m_r}.$$

Подставляя оценки  $p^*$ ,  $f^*$  и  $\gamma^*$  для параметров p, f и  $\gamma$  в формулы (1.28), получим для модели потока неоднородных требований следующие оценки параметров:

$$\alpha^* = \frac{m_2}{m_1},$$

$$\beta^* = \frac{n - m_1 - m_2}{m_2} \frac{m_3 + m_4 + \dots + m_{r-1}}{m_3 + 2m_4 + \dots + (r-3)m_{r-1} + (r-3)m_r},$$

$$\gamma^* = \frac{m_4 + 2m_5 + 3m_6 + \dots + (r-3)m_r}{m_3 + 2m_4 + 3m_5 + \dots + (r-3)m_{r-1} + (r-3)m_r}.$$

$$(1.30)$$

Согласно теореме из [77] значение статистики  $\chi^2(n,F(x))$  в пределе при  $n\to\infty$  имеет распределение  $\chi^2$  с r-3-1=r-4 степенями свободы. Следовательно, если в (1.29) получено значение, не превосходящее 5-процентного значения критического уровня величины  $\chi^2$  с r-4 степенями свободы, то исследуемые статистические данные можно считать совместимыми с гипотезой о распределении.

Вывод оценки параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  распределения (1.14) с помощью метода максимального правдоподобия [78; 79] приведен в приложении  $\mathbf{B}$ .

Отметим, что оценки (1.30) и (5.4) оказались очень похожи. Если в методе минимума хи-квадрат число разбиений r такое, что групп содержащих r или более требований в выборке нет, то оценки совпадают.

Далее найдем оценку для распределения интервалов  $\{\tau_i - \tau_{i-1}; i \geq 1\}$  между первыми требованиями в группе. Применение в работе [80] критерия

хи-квадрат для обработки различных конкретных статистических данных об интервалах  $\{\tau_i - \tau_{i-1}; i \geq 1\}$  указывает на хорошую согласованность распределения каждого из этих интервалов с распределением вида

$$\mathbf{P}(\omega : \tau_{i+1} - \tau_i < t) = 1 - \exp(-(t - h)/\sigma), t > h;$$
  
 $\mathbf{P}(\omega : \tau_{i+1} - \tau_i < t) = 0, t \le h.$ 

Это распределение является смещенным экспоненциальным распределением с параметрами  $h \ge 0$  и  $\sigma > 0$ . В работе [80] неизвестные параметры h и  $\sigma$  оценены с помощью модифицированного метода минимума хи-квадрат. Были получены оценки параметров h и  $\sigma$ 

$$\sigma^* = b/(\ln(\sum_{k=2}^{s} (k-1)w_k - w_s) - \ln(\sum_{k=2}^{s} (k-2)w_k)),$$

$$h^* = a - b\ln(n/(n-w_1))/(\sum_{k=2}^{s} (k-1)w_k - w_s) - \ln(\sum_{k=2}^{s} (k-2)w_k)),$$
(1.31)

где  $a > \min\{\tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_{n+1} - \tau_n\}$ , b > 0, s << n, а величина  $w_k$  при каждом  $k = \overline{1,s}$  определяет число выборочных значений  $\{\tau_2 - \tau_1, \dots, \tau_{n+1} - \tau_n\}$ , которые принадлежат множеству  $G_k$ . Множества  $G_k$   $(1 \le k \le s)$  задаются следующим образом:  $G_1 = [0,a), G_2 = [a,a+b), \dots, G_{s-1} = [a+(s-3)b,a+(s-2)b), G_s = [a+(s-2)b,+\infty).$ 

На языке программирования C++ был разработан программный пакет, позволяющий по данным для реального потока заявок получить нелокальное описание потока и применить рассмотренные выше способы статистического анализа данных. Код методов разбиения на группы и критериев проверки гипотезы о независимости и одинаковом распределении приведен в приложении Д. Проиллюстрируем работу программы и применение исследуемых алгоритмов на примере данных, полученных Бартлеттом, наблюдавшим за некоторым транспортным потоком вблизи Лондона. Данные наблюдения приведены в таблице 1. Бартлетт фиксировал моменты последовательных пересечений автомобилями стоп-линии некоторой магистрали. В данной таблице по строкам приведены значения интервалов между такими пересечениями в секундах. Временной отсчет начинается с момента пересечения поперечной линии первым автомобилем. Суммированием получаем, что общее время наблюдения за этим транспортным потоком составило T=2024 сек. Число автомобилей всех типов, пересекших стоп-линию за это время, оказалось равным 129.

2,8	3,4	1,4	14,5	1,9	2,8	2,3	15,3	1,8	9,5	2,5	9,4
1,1	88,6	1,6	1,9	1,5	33,7	2,6	12,9	16,2	1,9	20,3	36,8
40,1	70,5	2	8	2,1	3,2	1,7	56,5	23,7	2,4	21,4	5,1
7,9	20,1	14,9	5,6	51,7	87,1	1,2	2,7	1	1,5	1,3	24,7
2,6	119,8	1,2	6,9	3,9	1,6	3	1,8	44,8	5	3,9	125,3
22,8	1,9	15,9	6	20,6	12,9	3,9	13	6,9	2,5	12,3	5,7
11,3	2,5	1,6	7,6	2,3	6,1	2,1	34,7	15,4	4,6	55,7	2,2
6	1,8	1,9	1,8	42	9,3	91,7	2,4	30,6	1,2	8,8	6,6
49,8	58,1	1,9	2,9	0,5	1,2	31	11,9	0,8	1,2	0,8	4,7
8,3	7,3	8,8	1,8	3,1	0,8	34,1	3	2,6	3,7	41,3	29,7
17,6	1,9	13,8	40,2	10,1	11,9	11	0,2				

Таблица 1 — Значения интервалов  $\tau'_{i+1}-\tau'_i,\ i=1,\,2,\,\ldots,\,128;\ \tau'_1=0$  для данных Бартлета

По данным таблицы 1 можно заметить, что, в основном, значения интервалов относительно малы. Однако встречаются автомобили, которые следуют в потоке со значительной задержкой. Подобные данные иллюстрируют скопления автомобилей на дорожной магистрали в некоторые группы — пачки. Если к этим данным применить фазово-частотный критерий Валлиса и Мура, то получим при n=128 значение статистики  $Z_1(128,x_1,x_2,\ldots,x_{128})=3,167$ . Заметим, что при  $\alpha'=0,05$  пороговое значение  $C_{\alpha'}$  на 5-процентном уровне значимости равно 1,96<3,167. Согласно данному критерию гипотезу о независимости и одинаковом распределении временных интервалов по данным таблицы 1 следует отклонить. Итак, подходящего распределения для интервалов между последовательными машинами найти не удается.

Теперь разобьем данный транспортный поток на пачки согласно одному из рассмотренных методов, подбирая значения параметров метода. Для второго алгоритма разбиения с параметром  $h_0=12$  выделено 54 пачки машин (табл. 2). Для полученного разбиения вычислены значения статистик для  $\tau_{i+1}-\tau_i,\ i=0,\ldots,53$ : фазово-частотный критерий Валлиса и Мура  $Z_1(54,x_1,x_2,\ldots,x_{54}),$  инверсионный критерий  $Z_2(54,x_1,x_2,\ldots,x_{54}),$  критерий серий  $z_3(54,x_1,x_2,\ldots,x_{54}),\ z_4(54,x_1,x_2,\ldots,x_{54})$  и фазово-частотный критерий с учетом длин фаз  $z_5(54,x_1,x_2,\ldots,x_{54}),\ z_6(54,x_1,x_2,\ldots,x_{54})$ 

(22,3;4)	(13,8; 3)	(99,1; 3)	(38,7; 4)	(15,5; 2)	(16,2;1)	(22,2; 2)	(36,8; 1)
(40,1; 1)	(70,5; 1)	(12,1;3)	(61,4; 3)	(23,7;1)	(23,8; 2)	(13; 2)	(20,1;1)
(14,9; 1)	(57,3; 2)	(87,1; 1)	(32,4; 6)	(72,6; 1)	(119,8; 1)	(12; 3)	(51,2;4)
(134,2;3)	(22,8;1)	(17,8; 2)	(26,6; 2)	(12,9; 1)	(16,9; 2)	(21,7;3)	(17; 2)
(14; 4)	(42,9; 3)	(15,4;1)	(60,3; 2)	(13,7;5)	(42; 1)	(101; 2)	(33; 2)
(16,6; 3)	(49,8; 1)	(58,1;1)	(37,5;5)	(12,7; 2)	(15; 4)	(16,1; 2)	(39,8;4)
(50,6; 4)	(29,7;1)	(17,6; 1)	(15,7; 2)	(40,2;1)	(22; 2)		

Таблица 2 — Разбиение  $(\tau_{i+1} - \tau_i, \eta_i), i = 0, \dots, 53,$  для данных Бартлетта, полученное с помощью второго алгоритма разбиения

$$Z_{1}(54, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{54}) = -0.875, \quad |-0.875| < 1.96,$$

$$Z_{2}(54, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{54}) = 0.249, \quad |0.249| < 1.96,$$

$$z_{3}(54, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{54}) = 24 > 20.365,$$

$$z_{4}(54, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{54}) = 5 < 5.734,$$

$$z_{5}(54, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{54}) = 33 > 29.696,$$

$$z_{6}(54, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{54}) = 5 < 6.$$

Описанные статистические критерии не отвергают гипотезу о независимости и одинаковом распределении интервалов  $\tau_{i+1} - \tau_i$  между медленными автомобилями. В исследованиях всех таблиц для третьего и четвертого критериев уровень значимости  $\alpha'$  находится в интервале (0,05;0,0975), а для первых двух критериев уровень значимости  $\alpha'$  равен 0,05. Далее найдем подходящее распределение для количества требований в группе. Для полученного распределения  $\{\eta_i, i=1,\ldots,54\}$  имеем  $m_1=19, m_2=16, m_3=9, m_4=7, m_5=3$ . Подставляя данные значения в формулы (1.30), находим оценки  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  и  $\gamma^*$  параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ :  $\alpha^*=0,8421$ ,  $\beta^*=0,6551$ ,  $\gamma^*=0,4482$ . Значение статистики  $\chi^2(54,F(x))$ , вычисленное по формуле (1.29), равно 1,5115. Это значение меньше 5-процентного порогового значения распределения  $\chi^2$  с одной степенью свободы (r=5, число степеней свободы r=4), равного 3,841. Поэтому можно считать, что данные таблицы 2 хорошо согласуются с теоретическими результатами, полученными в данной работе.

Также рассмотрим исследование таблицы 3, в которой приведены интервалы между последовательными импульсами вдоль нервного волокна. Таблица взята из приложения 1 работы [7] на стр. 284. Для данной таблицы проведено

разбиение на группы (таблица 4) третьим алгоритмом с параметрами d=3,  $h_0=3,$   $h_1=4,3$  и  $h_2=5,2$ . Значения статистик из статистических критериев для данного разбиения равны

$$Z_{1}(160, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{160}) = -0.251, \quad |-0.251| < 1.96,$$

$$Z_{2}(160, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{160}) = -1.411, \quad |-1.411| < 1.96,$$

$$z_{3}(160, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{160}) = 78 > 68.142,$$

$$z_{4}(160, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{160}) = 7 < 7.282,$$

$$z_{5}(160, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{160}) = 105 > 95.939,$$

$$z_{6}(160, x_{1}, x_{2}, \dots, x_{160}) = 4 < 7.$$

10,5	1,5	2,5	5,5	29,5	3,0	9,0	27,5	18,5	4,5	7,0	9,5
1,0	7,0	4,5	2,5	7,5	11,5	7,5	4,0	12,0	8,0	3,0	5,5
7,5	4,5	1,5	10,5	1,0	7,0	12,0	14,5	8,0	3,5	3,5	2,0
1,0	7,5	6,0	13,0	7,5	16,5	3,0	25,5	5,5	14,0	18,0	7,0
27,5	14,0	2,0	0,5	47,0	36,5	2,5	3,5	5,5	19,0	10,5	24,5
19,0	19,0	0,5	3,0	6,5	3,0	0,5	8,0	2,5	5,0	8,0	3,0
3,0	3,0	3,0	5,5	22,0	2,5	4,5	2,0	13,5	25,0	12,5	12,5
4,0	0,5	35,0	2,0	4,0	8,0	19,0	4,0	16,0	19,5	29,0	28,0
37,0	7,5	3,5	13,0	12,5	0,5	8,5	32,0	30,5	7,5	13,0	1,5
2,5	17,0	3,5	5,0	4,5	1,0	15,0	3,5	6,0	0,5	8,0	7,0
24,5	3,5	5,5	17,5	60,0	8,5	0,5	17,5	22,5	3,5	46,5	2,0
48,0	7,0	69,0	7,5	0,5	2,5	11,5	15,5	2,5	2,5	14,5	0,5
37,0	15,0	4,5	1,0	9,5	23,5	0,5	25,5	6,0	6,0	21,5	16,0
4,5	10,0	1,5	2,5	6,5	7,5	2,5	4,0	2,0	4,5	5,0	5,0
13,0	3,5	34,0	7,5	0,5	13,5	2,5	1,5	20,0	2,0	10,5	14,5
12,0	4,0	11,5	5,0	9,5	10,0	13,0	3,0	20,0	25,5	7,5	55,0
8,0	39,0	2,0	13,5	17,5	35,5	7,5	14,5	2,0	0,5	14,0	10,5
4,5	8,5	4,5	8,5	7,5	31,0	25,0	3,5	19,5	14,0	10,0	17,0
8,0	32,5	2,0	33,5	5,0	25,5	13,0	3,5	35,5	5,5	23,5	1,0
19,0	2,0	21,5	5,5	11,5	7,0	4,0	56,0	25,0	12,5	9,0	6,0
1,0	7,5	6,0	4,0	19,0	11,0	8,0	20,0	29,0	2,5	3,5	14,0

Таблица 3 — Значения интервалов  $\tau'_{i+1} - \tau'_i, \ i=1,\,2,\,\ldots,\,252; \ \tau'_1=0$ 

(10,5; 1)	(9,5;3)	(29,5; 1)	(12; 2)	(27,5; 1)	(18,5; 1)	(11,5; 2)	(9,5;1)
(8; 2)	(14,5; 3)	(11,5; 1)	(7,5; 1)	(16; 2)	(8; 1)	(8,5; 2)	(7,5;1)
(16,5; 3)	(8; 2)	(12; 1)	(14,5; 1)	(8; 1)	(17,5;5)	(6; 1)	(13; 1)
(7,5; 1)	(16,5; 1)	(28,5; 2)	(5,5;1)	(14; 1)	(18; 1)	(7; 1)	(27,5;1)
(14; 1)	(49,5;3)	(36,5; 1)	(11,5;3)	(19; 1)	(10,5; 1)	(24,5; 1)	(19; 1)
(19; 1)	(10; 3)	(11,5; 3)	(15,5;3)	(12; 4)	(5,5;1)	(22; 1)	(22,5;4)
(25; 1)	(12,5; 1)	(12,5; 1)	(39,5;3)	(14; 3)	(19; 1)	(20; 2)	(19,5;1)
(29; 1)	(28; 1)	(37; 1)	(7,5; 1)	(16,5; 2)	(12,5; 1)	(9; 2)	(32; 1)
(30,5; 1)	(7,5; 1)	(13; 1)	(21; 3)	(29; 5)	(9,5; 2)	(8,5; 2)	(7; 1)
(24,5; 1)	(9; 2)	(17,5; 1)	(60; 1)	(8,5; 1)	(18; 2)	(22,5; 1)	(50; 2)
(50; 2)	(7; 1)	(69; 1)	(7,5; 1)	(14,5; 3)	(15,5; 1)	(19,5; 3)	(37,5; 2)
(15; 1)	(15; 3)	(23,5; 1)	(26; 2)	(6; 1)	(6; 1)	(21,5; 1)	(16; 1)
(14,5; 2)	(10,5; 3)	(7,5; 1)	(13; 4)	(23; 3)	(37,5; 2)	(7,5; 1)	(14; 2)
(24; 3)	(12,5; 2)	(14,5; 1)	(12; 1)	(15,5; 2)	(14,5; 2)	(10; 1)	(13; 1)
(23; 2)	(25,5;1)	(7,5; 1)	(55; 1)	(8; 1)	(39; 1)	(15,5; 2)	(17,5; 1)
(35,5; 1)	(7,5; 1)	(14,5; 1)	(16,5;3)	(10,5; 1)	(13; 2)	(13; 2)	(7,5;1)
(31; 1)	(25; 1)	(23; 2)	(14; 1)	(10; 1)	(17; 1)	(8; 1)	(32,5;1)
(35,5; 2)	(30,5; 2)	(13; 1)	(39; 2)	(5,5;1)	(23,5;1)	(20; 2)	(23,5;2)
(5,5; 1)	(11,5; 1)	(7; 1)	(60; 2)	(25; 1)	(12,5; 1)	(9; 1)	(6; 1)
(8,5; 2)	(6; 1)	(23; 2)	(11; 1)	(8; 1)	(20; 1)	(29; 1)	(20; 3)

Таблица 4 — Разбиение  $(\tau_{i+1}-\tau_i,\eta_i),\ i=0,\ldots,\ 159,$  для таблицы 3, полученное с помощью третьего алгоритма

Ни один из критериев не отвергает гипотезу о независимости и одинаковом распределении интервалов  $\tau_{i+1}-\tau_i$  между первыми требованиями в группах. Для этой таблицы также найдем оценки параметров распределения для количества требований в группах. Из таблицы 4 получаем значения  $m_1=99$ ,  $m_2=37, m_3=19, m_4=3$  и  $m_5=2$ . Подставляя данные значения в формулы (1.30), находим оценки параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$\alpha^* = 0.3737$$
,  $\beta^* = 0.492$ ,  $\gamma^* = 0.2413$ .

Значение статистики  $\chi^2(160, F(x))$  равно 0,736, которое меньше 5-процентного значения распределения  $\chi^2$  с одной степенью свободы, равного 3,841. Как и для обработанной таблицы Батрлетта можно считать, что данные таблицы 4 хорошо согласуются с полученными теоретическими результатами.

Покажем эффективность предложенного подхода для анализа данных другой физической природы. Исследуем данные BC-pAug89.TL (ftp://ita.ee.lbl.gov/html/contrib/BC.html) [81]. В файле содержатся моменты поступления и размеры пакетов в сети Ethernet. Общий объем данных составляет 1 млн. пакетов. Проанализируем моменты поступления пакетов. Из-за очень большого объема выборки приведем в таблицах только часть данных. Например, реализация  $(x_1, x_2, \dots x_n)$  объема n = 96 потока вида  $\{\tau'_{i+1} - \tau'_i; i = 1, 2, \dots, n\}$  приведена в таблице 5. В этой таблице по строкам приведены значения интервалов между поступлениями пакетов. Применяя фазово—частотный кри-

0,00017	0,00267	0,00396	0,0029	0,00404	0,00282	0,00271	0,00143
0,00227	0,00045	0,0026	0,00134	0,00215	0,00077	0,00424	0,00262
0,00406	0,00152	0,00128	0,00197	0,00195	0,00111	0,00182	0,00164
0,00254	0,00269	0,00398	0,00287	0,00413	0,00273	0,00397	0,00289
0,00412	0,00274	0,00401	0,00285	0,00416	0,00434	0,00392	0,00458
0,00401	0,00449	0,00392	0,00294	0,00408	0,00278	0,00396	0,0029
0,0011	0,00284	0,00071	0,00221	0,00084	0,00317	0,00009	0,00276
0,00393	0,00293	0,00413	0,00273	0,00406	0,0028	0,00402	0,00284
0,00332	0,00062	0,00291	0,00096	0,00369	0,00036	0,0035	0,00144
0,00259	0,00283	0,00128	0,00269	0,00289	0,00143	0,00196	0,00058
0,00139	0,00089	0,00106	0,00014	0,0018	0,00196	0,00008	0,00016
0,00161	0,00125	0,00165	0,00177	0,00055	0,0029	0,004	0,00286

Таблица 5 — Значения интервалов  $\tau'_{i+1} - \tau'_i, i = 1, 2, \dots, 96$ 

терий Валлиса—Мура о независимости и одинаковом распределении интервалов между соседними пакетами к статистическим данным объема n=10000, получаем значение статистики  $Z_1(n,x_1,x_2,\ldots,x_n)=9,6221$ . Пороговое значение на 5-процентном уровне значимости равно 1,96. Так как значение статистики Валлиса-Мура для данного потока удовлетворяет условию 9,6221>1,96, то согласно фазово-частотному критерию выдвинутую гипотезу о независимости и одинаковом распределении интервалов между последовательными пакетами следует отклонить.

Даже по данным таблицы 5 заметим, что интервалы имеют значительно отличающиеся длины. Более того, в первых 10000 наблюдений минимальный и максимальный интервалы имеют длины равные соответственно 0,000064 и 0,11617. Поэтому необходимо применить алгоритм, который подстраивает-

ся к интервалам, имеющим значительно отличающиеся длины. Для получения разбиения воспользуемся четвертым алгоритмом. При  $h_0=0{,}001,~a=0{,}96$  и  $b=1{,}44$  получим 1009 значений интервалов  $\tau_{i+1}-\tau_i$ , где  $i=0,1,\ldots,1008$  между группами и последовательность из 1009 значений для размеров  $\eta_0,\eta_1,\ldots,\eta_{1008}$  групп пакетов. Часть обработанных данных приведены в таблице 6.

(0,002836; 2)	(0,003964; 1)	(0,002896; 1)	(0,004036; 1)	(0,020772; 10)
(0,00668; 2)	(0.020504; 10)	(0,034464; 10)	(0,03902; 10)	(0.020544; 10)
(0,035004; 12)	(0.038748; 25)	(0,004; 1)	(0,00684; 2)	(0.02566; 15)
(0,0146; 6)	(0,012168; 1)	(0,027832; 9)	(0,040048;4)	(0.034612; 6)
(0,02306; 1)	(0,039592;4)	(0,071748; 11)	(0,08092;7)	(0,05648; 9)
(50,110752;50)	(0,013856; 6)	(0,030088; 11)	(0,031168; 10)	(0,02788; 9)
(0.042356; 16)	(0,007064; 2)	(0,041292; 18)	(0,013376;4)	(0,022272; 10)
(0.034268; 11)	(0,020552; 9)	(0,0218; 5)	(0,026012; 2)	(0,034444; 13)
(0.014516; 2)	(0,02656; 2)	(0.083952; 8)	(0,057936;4)	(0,12668; 21)
(0.076308; 34)	(0,024744; 21)	(0,015112; 13)	(0,010656; 6)	(0,006644; 3)

Таблица 6 — Разбиение  $(\tau_{i+1} - \tau_i, \eta_i)$ , где  $i = 0, 1, \ldots, 49$ 

Статистика Валлиса-Мура вида  $Z_1(1009, x_0, x_1, \dots, x_{1008})$  для временных интервалов между первыми пакетами в группах равна 0,772. Это значение статистики Валлиса-Мура для интервалов меньше критического уровня 1,96. Тогда согласно фазово-частотному критерию гипотеза о независимости и одинаковом распределении интервалов между группами пакетов не отклоняется. С помощью формул (1.31) при параметрах s = 5, a = a' + (b' - a')/(6(s - 1)), b = (b'-a')/(s-1), где  $a' = \min\{x_0, x_1, \dots, x_{1008}\}$  и  $b' = \max\{x_0, x_1, \dots, x_{1008}\}$ , получены следующие оценки для параметров смещенного экспоненциального распределения h и  $\sigma$ :  $h^* = 0{,}0042$  и  $\sigma^* = 0{,}0198$ . С помощью критерия хиквадрат проверим гипотезу о том, что последовательность  $\{\tau_{i+1} - \tau_i; i \geq 0\}$ составлена из случайных величин, каждая из которых имеет смещенное экспоненциальное распределение. При  $n=1009,\ s=5,\ a=0.0075$  и b=0.0343вычислим приближенное значение статистики  $\chi^2(1009, F(x))$ , равное 5,42. При двух степенях свободы и уровне значимости в 5% пороговое значение распределения  $\chi^2$  равно 5,991. Отсюда видно, что принятое гипотетическое распределение для интервалов  $\tau_{i+1} - \tau_i$ ,  $i \ge 0$ , между последовательными группами пакетов соответствует экспериментальным данным из таблицы 6. Таким образом, можно принять, что распределение интервалов между последовательными

группами в наблюдаемом потоке имеет вид

$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \tau_{i+1} - \tau_i < t\}) = 1 - \exp\{-(t - 0.0042)/0.0198\}, t > 0.0042;$$
$$\mathbf{P}(\{\omega \colon \tau_{i+1} - \tau_i < t\}) = 0, t \le 0.0042.$$

Статистика Валлиса-Мура  $Z_1(1009,x_0,x_1,\ldots,x_{1008})$  для количества пакетов в группе равна 1,694 и удовлетворяет условию  $|Z(1009,x_0,x_1,\ldots,x_{1008})|=$  = 1,694 < 1,96. Значит, гипотеза о независимости и одинаковом распределении размеров групп не отклоняется. С помощью формулы (Б.4) получены оценки для  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ :  $\alpha^*=0,864$ ,  $\beta^*=0,688$ ,  $\gamma^*=0,9042$ . При числе наблюдений n=1009, количестве разрядов r=5 получим значение статистики  $\chi^2(1009,F(x))$ , равное 2,9234. Это значение меньше 5% порогового значения распределения  $\chi^2$  с одной степенью свободы, равного 3,841. Таким образом, гипотеза о распределении вида (1.14) для количества требований в группе не отвергается. Используя соотношения (1.14) и оценки  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  и  $\gamma^*$ , получим распределение для количества пакетов в группе следующего вида: Q(1)=0,1238, Q(2)=0,107,  $Q(k)=0,0736\times(0,9042)^{k-3}$ ,  $k\geq 3$ .

## Глава 2. Математическое описание и исследование управляющей системы адаптивного управления потоками Кокса-Льюиса

В главе 2 применен кибернетический подход к построению и исследованию системы обслуживания неоднородных требований. Данный подход позволил описать блоки системы и связь между ними. Математической моделью системы является векторная марковская последовательность. В марковской последовательности выделен класс существенных состояний. Выписаны рекуррентные соотношения для одномерных распределений марковской последовательности. Были получены производящие функции одномерных распределений марковской последовательности и рекуррентные соотношения для них через несколько шагов ее функционирования.

## 2.1 Кибернетический подход при построении управляющей системы обслуживания

В первой главе был предложен кибернетический подход для изучения потока неоднородных требований. Это подход был успешно использован для исследования движения транспортного потока разнотипных автомобилей на магистрали. Кибернетический подход вобрал в себя общие черты строения многих реальных управляющих систем и протекания в них процессов управления. К таким системам можно в первую очередь отнести:

- автоматы управления технологическими и информационными сигналами микросварочного комплекса при сборке интегральных схем на кристаллах;
- светофоры адаптивного регулирования транспортных потоков на перекрестках со сложной геометрией переезда;
- системы обработки информационных потоков программ в локальных вычислительных сетях;
  - управляемые системы массового обслуживания;
- экспертные системы диспетчерского контроля за последовательностью взлетов и приземлений самолетов, систем управления конфликтными потоками самолетов при прохождении пересекающихся воздушных коридоров.

Опыт рассмотрения большого числа реальных систем массового обслуживания, несущих управляющие функции по отношению к входным потокам, позволяет заключить о том, что методы построения адекватных вероятностных моделей обслуживания и управления потоками неоднородных требований должны учитывать фундаментальное понятие абстрактной управляющей системы.

Кибернетический подход Ляпунова-Яблонского подразумевает представление абстрактной управляющей системы в виде схемы с определенными блоками, выделение информации, координат и функций. Схема управляющей системы отражает ее структурное строение и позволяет выделить связи между ее блоками. В частности, схема управляющей системы обслуживания включает следующие структурные блоки:

- 1) входной полюс, который включает  $m \geq 2$  входных неординарных пуассоновских потока  $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$  и m потоков насыщения  $\Pi_1^*, \Pi_2^*, \ldots, \Pi_m^*$  [68] (выходные потоки системы при ее максимальной загрузке и эффективном функционировании);
- 2) внешняя память неограниченные накопители очередей  $O_1,\,O_2,\,\ldots,\,O_m$  по входным потокам  $\Pi_1,\,\Pi_2,\,\ldots,\,\Pi_m;$
- 3) блок по переработке внешней памяти экстремальная стратегия обслуживания, при которой из накопителя  $O_j$   $(j=1,\,2,\,\ldots,\,m)$  на обслуживание выбирается максимально возможное число заявок;
- 4) внутренняя память обслуживающее устройство с r состояниями  $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(r)};$
- 5) блок по переработке информации внутренней памяти алгоритм смены состояний обслуживающего устройства.

Информация системы есть математическое описание или кодирование всех ее блоков. Например, информация о входном полюсе задается входными потоками и потоками насыщения. Координатами являются номер входного потока и потока насыщения, номер очереди, номер заявки в очереди на обслуживание, номер состояния обслуживающего устройства. Функцией системы является управление входными потоками и обслуживание заявок.

Заметим, что реальные системы массового обслуживания можно представлять в виде абстрактной управляющей системы не единственным образом. В частности, некоторые блоки управляющей системы могут не отображаться на схеме. В рассмотренной кибернетической системе обслуживания отсутствуют блоки внешней среды и выходного полюса, входящие в общую модель абстракт-

ной управляющей системы. Блок внешней среды в системах массового обслуживания определяет вероятностную структуру входных потоков системы. В данной работе структура входных потоков не меняется, поэтому блок внешней среды с одним состоянием отсутствует. Выходной полюс определяет выходные потоки обслуженных системой требований. Обобщением модели, изученной в данной работе, может быть включение блоков внешней среды и выходного полюса. Также заметим, что некоторые блоки возможно представить как отдельные управляющие системы. Так, в главе 1 входной поток был рассмотрен как управляющая кибернетическая система.

Существенной особенностью кибернетического подхода при моделировании, анализе и оптимизации систем массового обслуживания является следование трем основным постулатам.

- 1. Дискретность. Функционирование управляющей системы осуществляется в некоторой естественной дискретной шкале времени. Постулат дискретности функционирования управляющей системы предполагает, что перед исследователем ставится проблема выбора дискретной временной шкалы наблюдения за системой.
- 2. Нелокальность (неполнота) описания поблочного строения управляющей системы. Нелокальность описания блоков схемы на содержательном уровне означает, что производится функционально-статистическое описание состояния блоков в выбранные моменты времени, достаточное для построения математической модели, но не обязательно описывающее подробно состояние блока между моментами наблюдений.
- 3. Совместное рассмотрение поблочного строения управляющей системы обслуживания и ее функционирования во времени. Результатом совместного рассмотрения является получение функциональных соотношений между блоками схемы.

Многие реальные процессы, протекающие в системах обслуживания и управления потоками, определяются случайными факторами. Поэтому естественно считать управляющую систему обслуживания и управления потоками статистически устойчивым экспериментом E. Далее в работе будем рассматривать основное вероятностное пространство  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ , где  $\Omega$  — множество описаний  $\omega$  элементарных исходов случайного эксперимента E. Множество образует  $\sigma$ -алгебру случайных событий  $A \subset \Omega$  данного эксперимента. Функция  $\mathbf{P}(A)$ :  $\mathfrak{F} \to [0,1]$  задает вероятность на  $\sigma$ -алгебре  $\mathfrak{F}$ . В некоторых случаях

не будет явно фиксироваться символ  $\omega$  как аргумент каких-либо функций или случайных величин. При этом необходимо помнить о том, что все случайные события и случайные величины рассматриваются на указанном пространстве  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ . Заметим, что вероятностное пространство, введенное в главе 1, относится к эксперименту  $E_0$ , связанному только с формированием потока неоднородных требований, и не совпадает с вероятностным пространством эксперимента E.

Рассмотрим теперь последовательно составные блоки для управляемой системы массового обслуживания с точки зрения их математического описания. В качестве дискретной временной шкалы выберем случайные моменты  $\tau_i(\omega)$ ,  $i=0,\,1,\,\ldots$ , смены состояний обслуживающего устройства.

Как отмечалось выше, входной полюс включает входные неординарные пуассоновские потоки  $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$  и потоки насыщения  $\Pi_1^*, \Pi_2^*, \ldots, \Pi_m^*$ . Обозначим через  $\eta_{j,i}$  случайное число требований, поступивших по потоку  $\Pi_j$  на промежутке  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ . Пусть  $\xi_{j,i}$  — максимально возможное число заявок потока  $\Pi_j$ , которые система может обслужить на интервале  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ . Входной поток  $\Pi_j$  будем описывать последовательностью  $\{\eta_{j,i}; i=0,1,\ldots\}$ , а поток насыщения  $\Pi_j^*$  — с помощью последовательности  $\{\xi_{j,i}; i=0,1,\ldots\}$ . Введем вектора  $\eta_i = (\eta_{1,i},\ldots,\eta_{m,i})$  и  $\xi_i = (\xi_{1,i},\ldots,\xi_{m,i})$ . Тогда математическое описание входного полюса будем задавать в виде векторной последовательности  $\{(\eta_i,\xi_i); i=0,1,\ldots\}$ .

Обозначим через  $\kappa_{j,i}$  число заявок потока  $\Pi_j$ , которые находятся в накопителе  $O_j$  в момент  $\tau_i$ , и через  $\kappa_i$  вектор  $(\kappa_{1,i},\ldots,\kappa_{m,i})$ . Последовательность  $\{\kappa_i; i=0,1,\ldots\}$  является математическим описанием блока внешней памяти.

В управляемых системах массового обслуживания имеется несколько состояний (режимов)  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$ , ...,  $\Gamma^{(r)}$ , в каждом из которых используются разные стратегии обслуживания и управления потоками. При этом  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma^{(2)}$ , ...,  $\Gamma^{(r)}$  являются состояниями обслуживающего устройства. Обозначим через случайный элемент  $\Gamma_i \in \Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(r)}\}$  состояние обслуживающего устройства на промежутке  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ . Тогда последовательность  $\{\Gamma_i; i=0,1,\ldots\}$  задает математическое описание внутренней памяти.

Динамика длины  $\kappa_{j,i+1}$  очереди  $O_j$  в момент  $\tau_{i+1}$  задается некоторой функцией  $V_j(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ , зависящей от состояния внутренней памяти  $\Gamma_i$  на промежутке  $[\tau_i,\tau_{i+1})$ , длины очереди  $\kappa_{j,i}$  в момент  $\tau_i$ , количества  $\eta_{j,i}$  поступивших требований на промежутке  $[\tau_i,\tau_{i+1})$  и максимально возможного количества  $\xi_{j,i}$  обслу-

женных на промежутке  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  требований потока  $\Pi_j$ :

$$\kappa_{j,i+1} = V_j(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}), 
\kappa_{i+1} = V(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i) = (V_1(\Gamma_i, \kappa_{1,i}, \eta_{1,i}, \xi_{1,i}), \dots, V_m(\Gamma_i, \kappa_{m,i}, \eta_{m,i}, \xi_{m,i})).$$
(2.1)

Таким образом, соотношения (2.1) задают блок по переработке информации внешней памяти.

Алгоритм смены состояний обслуживающего устройства учитывает очередность поступления требований по входным потокам. Поэтому введем случайный вектор  $\eta_i'$  с m компонентами. Если на промежутке времени  $[\tau_i, \tau_{i+1})$  не пришло ни одной заявки по всем потокам, то вектор  $\eta_i'$  будет нулевым  $y_0 = (0, \dots, 0)$ . Если первой пришла заявка потока  $\Pi_j$ , то  $\eta_i'$  будет равен вектору  $y_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ , у которого j-я компонента равна единице, а все остальные компоненты нулевые. Стратегия смены состояний  $\Gamma_{i+1}$  обслуживающего устройства в момент  $\tau_{i+1}$  определяется функцией  $U(\cdot, \cdot, \cdot)$ , зависящей от состояния  $\Gamma_i$  на предыдущем шаге, от вектора длин очередей  $\kappa_i$  в момент  $\tau_i$  и от очередности  $\eta_i'$  поступления требований на промежутке  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ :

$$\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i'). \tag{2.2}$$

Соотношение (2.2) определяет математическое описание блока по переработке информации внутренней памяти.

Итак, совместное рассмотрение поблочного строения управляющей системы обслуживания и ее функционирования во времени согласно третьему постулату позволяет выявить функциональные связи (2.1) и (2.2) между некоторыми из блоков системы, а также в дальнейшем установить свойства условных распределений для состояний некоторых блоков. Полезно сравнить представление системы массового обслуживания как абстрактной управляющей системы с классическими моделями, рассматриваемыми в теории массового обслуживания. В системе массового обслуживания при классическом подходе последовательно определяются следующие элементы: входные потоки требований, обслуживающие устройства, дисциплина формирования очередей, структура системы. Кибернетический подход является развитием представлений о системах обслуживания. В то же время, такие блоки как внешняя среда, потоки насыщения, устройства по переработке внешней и внутренней памяти являются новыми.

При классическом подходе задаются вероятностные свойства входного потока и длительностей обслуживания. При этом применяется так называемый

локальный принцип, согласно которому рассматриваются исходные и исследуемые характеристики каждой отдельной заявки. Однако далеко не всегда удается описать входной поток и длительности обслуживания требований с помощью свойств конечномерных распределений. Другие известные в классическом подходе блоки не имеют формализованного описания, а задаются на содержательном уровне. Например, дисциплина формирования очереди может быть «в порядке поступления», «в обратном порядке», «выбор случайного требования из очереди» и др. Более того, структура системы также описывается как «однолинейная система с ожиданиями», «многолинейная система с потерями», «система с разделением времени» и т. д. В результате задания этих составляющих при классическом подходе исследователи изучают такие характеристики системы массового обслуживания, как распределение длины очереди, распределение времени ожидания начала обслуживания, вероятности потери требования, периода занятости прибора. С этой целью анализ уже на первых же шагах сводится к получению уравнений различного вида (дифференциальных, дифференциально-интегральных, интегральных) для распределений и средних величин. Важно также представлять себе принципиальное отличие кибернетического подхода от метода вложенных цепей Маркова, предложенного Д. Кендаллом. Метод вложенных цепей Маркова предполагает классический подход к описанию систем массового обслуживания. Однако, интересующие характеристики системы изучаются только в специально выбранные моменты времени.

Как правило, среди входных потоков в системе можно выделить конфликтные. На содержательном уровне конфликтность потоков означает, что нельзя обслуживать требования таких потоков одновременно. В связи с этим введем следующее определение

**Определение** Входные потоки  $\Pi_{j_1}, \Pi_{j_2}, \ldots, \Pi_{j_k}$   $(1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq m, k \geq 2)$  называются конфликтными, если для каждого  $i = 0, 1, \ldots$  имеет место соотношение

$$\mathbf{P}(\{\omega : \xi_{j_1,i}(\omega) > 0, \xi_{j_2,i}(\omega) > 0, \dots, \xi_{j_k,i}(\omega) > 0\}) = 0.$$

В реальных системах нередко множество входных потоков  $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_m$  можно разбить по принципу конфликтности на m' < m классов. При этом потоки из одного класса между собой не являются конфликтными, а потоки из разных классов являются конфликтными. Будем считать, что потоки из каждого класса удовлетворяют условиям леммы 1. В этом случае сумма потоков

одного класса будет являться неординарным пуассоновским потоком и можно рассматривать в системе m' конфликтных входных потоков. В дальнейшем будем рассматривать m'=2 входных потока. Заметим, что предлагаемый в работе метод изучения управляющих систем обслуживания также позволяет исследовать случай m'>2.

## 2.2 Построение математической модели адаптивного управления конфликтными потоками Кокса-Льюиса

Итак, в управляющей системе имеется два конфликтных неординарных пуассоновских входных потока  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  с параметрами  $\lambda_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$  и  $\lambda_2$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_2$  соответственно. В этом случае  $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i}), \, \xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i})$  и  $\kappa_i = (\kappa_{1,i}, \kappa_{2,i}).$ Здесь и далее будем обозначать номера входных потоков и потоков насыщения символами j и s, где j, s = 1, 2 и  $j \neq s$ . Из-за конфликтности в каждом состоянии внутренней памяти будут обслуживаться требования только одного из потоков. При этом обслуживание каждого потока разбито на 2 этапа, которые отличаются интенсивностью обслуживания требований. На первом этапе длительность обслуживания одной заявки потока  $\Pi_j$ , поступившей из накопителя  $O_j$ , равна постоянной величине  $\mu_{j,1}^{-1}$ . Первый этап обслуживания потока  $\Pi_{i}$  происходит в состоянии  $\Gamma^{(3j-2)}$ . На втором этапе интенсивность обслуживания увеличивается и длительность обслуживания одной заявки становится равна величине  $\mu_{j,2}^{-1} < \mu_{j,1}^{-1}$ . Второй этап обслуживания потока  $\Pi_j$  происходит в состоянии  $\Gamma^{(3j-1)}$ . Из-за конфликтности необходима переналадка системы при смене обслуживаемого потока. Состояние  $\Gamma^{(3j)}$  соответствует режиму переналадки для потока  $\Pi_j$ . В данном состоянии происходит только дообслуживание требований, новые требования к обслуживанию не принимаются. Длительность обслуживания одной заявки соответствует второму этапу обслуживания и равна  $\mu_{j,2}^{-1}$ . Состояние  $\Gamma^{(6+j)}$  соответствует первому этапу обслуживания потока  $\Pi_j$ . В момент перехода в состояние  $\Gamma^{(6+j)}$  длина очереди по потоку  $\Pi_i$  обязательно должна быть нулевой.

Таким образом, обслуживанию потока  $\Pi_j$  соответствует 4 состояния:  $\Gamma^{(3j-2)}, \Gamma^{(3j-1)}, \Gamma^{(3j)}$  и  $\Gamma^{(6+j)}$ . Соответственно для двух входных потоков получаем r=8 состояний для внутренней памяти (обслуживающего устройства). Обо-

значим множество состояний внутренней памяти через  $\Gamma = \{\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \dots, \Gamma^{(8)}\}$ . Далее приведем описание устройства по переработке информации внутренней памяти (алгоритма смены состояний обслуживающего устройства) на содержательном уровне.

При j=1,2 из состояния  $\Gamma^{(3j-2)}$ , соответствующего первому этапу обслуживания потока  $\Pi_j$ , внутренняя память всегда переходит в состояние  $\Gamma^{(3j-1)}$ . Длительность пребывания в  $\Gamma^{(3j-2)}$  равняется постоянной  $T_{3j-2}$ .

Состояние  $\Gamma^{(3j-1)}$  соответствует второму этапу обслуживания потока  $\Pi_j$ . Данное состояние можно назвать «состоянием продлений». Перейдя в это состояние, внутренняя память находится в нем фиксированное время  $T_{3j-1}$ . После этого принимается решение — перейти в другое состояние или продлить состояние  $\Gamma^{(3j-1)}$  еще на время  $T_{3j-1}$ . Продление происходит в 2 случаях: 1) длина очереди по потоку  $\Pi_j$  не меньше параметра  $K_j$ , 2) на предыдущем этапе продления поступили требования, которые еще не были обслужены. При этом задается параметр  $n_j$  — максимальное число продлений. Таким образом, длительность пребывания в состоянии  $\Gamma^{(3j-1)}$  — случайная величина, принимающая значения  $kT_{3j-1}$ ,  $k=\overline{1,n_j}$ . После данного состояния происходит переход в состояние переналадки  $\Gamma^{(3j)}$ .

Длительность пребывания в состоянии  $\Gamma^{(3j)}$  равна постоянной  $T_{3j}$ . Из-за конфликтности входных потоков необходимо, чтобы требования потока  $\Pi_j$  были дообслужены до перехода к обслуживанию потока  $\Pi_s$ . Поэтому разумно ввести следующее ограничение на длительность  $T_{3j} \geq \mu_{j,2}^{-1}$ . Из состояния  $\Gamma^{(3j)}$  возможен переход в состояние  $\Gamma^{(3j-2)}$ , если по потоку  $\Pi_s$  нет требований, очередь по потоку  $\Pi_j$  не превышает  $K_j$  и первой во время переналадки пришла заявка потока  $\Pi_j$ . Если очередь по потоку  $\Pi_s$  пуста, очередь по потоку  $\Pi_j$  меньше  $K_j$  и за время переналадки не пришло ни одного требования по потокам, то переходим в состояние  $\Gamma^{(6+s)}$ . Во всех остальных случаях происходит переход в  $\Gamma^{(3s-2)}$ .

Переход в состояние  $\Gamma^{(6+j)}$  возможен только при нулевой очереди по потоку  $\Pi_j$  во время смены состояния. В данном состоянии отслеживается очередность прихода заявок по обоим входным потокам в течение длительности  $T_{3j-2}$ . Если первой пришла заявка потока  $\Pi_j$ , то дальнейшее функционирование происходит аналогично состоянию  $\Gamma^{(3j-2)}$ . То есть через время  $T_{3j-2}$  произойдет переход в  $\Gamma^{(3j-1)}$ . Если первой поступила заявка потока  $\Pi_s$ , то происходит мгновенный переход в состояние переналадки  $\Gamma^{(3j)}$  для дальнейшего обслуживания потока  $\Pi_s$ . Если за промежуток времени  $T_{3j-2}$  не пришло ни одной заявки по

потокам, то произойдет переход в состояние  $\Gamma^{(3j)}$ . Таким образом, длительность пребывания в  $\Gamma^{(6+j)}$  является смешанной случайной величиной и максимальное время пребывания в этом состоянии равно  $T_{3j-2}$ . Распределение длительности пребывания в  $\Gamma^{(6+j)}$  имеет непрерывную компоненту на интервале  $(0,T_{3j-2})$  и длительность пребывания в этом состоянии принимает с положительной вероятностью значение  $T_{3j-2}$ .

Функция  $U(\cdot,\cdot,\cdot)$  из соотношения (2.2) для описываемого на содержательном уровне алгоритма может быть задана в следующем виде

$$\Gamma_{i+1} = U(\Gamma_{i}, \kappa_{i}, \eta_{i}') = \begin{cases}
\Gamma^{(3j-2)}, & \left\{ \left[ \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)} \right] \& \left[ (\kappa_{j,i} > 0) \lor (\kappa_{s,i} \ge K_{s}) \lor (\eta_{i}' = y_{j}) \right] \right\} \lor \\
& \lor \left\{ \left[ \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)} \right] \& \left[ \kappa_{s,i} = 0 \right] \& \left[ \kappa_{j,i} \le K_{j} \right] \& \left[ \eta_{i}' = y_{j} \right] \right\}, \\
\Gamma^{(3j-1)}, & \left\{ \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j-2)} \right\} \lor \left\{ \left[ \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)} \right] \& \left[ \eta_{i}' = y_{j} \right] \right\}, \\
\Gamma^{(3j)}, & \left\{ \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j-1)} \right\} \lor \left\{ \left[ \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)} \right] \& \left[ \eta_{i}' \ne y_{j} \right] \right\}, \\
\Gamma^{(6+j)}, & \left[ \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)} \right] \& \left[ \kappa_{j,i} = 0 \right] \& \left[ \kappa_{s,i} < K_{s} \right] \& \left[ \eta_{i}' = y_{0} \right].
\end{cases} (2.3)$$

На рис. 2.1 приведен граф переходов состояний внутренней памяти.

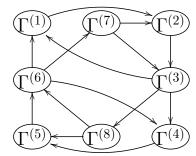


Рисунок 2.1 — Граф смены состояний внутренней памяти

Алгоритм (2.3) управления конфликтными потоками не является циклическим. Смена состояний обслуживающего устройства зависит не только от его текущего состояния, но и от длин очередей и очередности поступления заявок. Таким образом, алгоритм управления (2.3) существенно зависит от входных потоков и, соответственно, является адаптивным. Подобный алгоритм для управления простейшими потоками изучен в [82].

Задание входного полюса, начального момента  $\tau_0$ , состояния внешней памяти и состояния внутренней памяти в момент  $\tau_0$  определяет случайную последовательность  $\{\tau_i; i \geq 0\}$  моментов смены состояний внутренней памяти.

Далее управляющую систему будем рассматривать в моменты  $\tau_i$ ,  $i \geq 0$ , или на промежутках  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ .

Обозначим через  $\overline{\xi}_{j,i}$  — число заявок потока  $\Pi_j$ , которые реально покинут систему на интервале  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ . Для описания процесса обслуживания на промежутке  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ , для любого j=1,2 и  $i\geq 0$  определим механизм обслуживания следующим функциональным соотношением

$$\overline{\xi}_{j,i} = g_{j,i}(\Gamma_i, k_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i})$$

На выбор функции  $g_{j,i}(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_i)$ :  $\Gamma \times X \times X \times X \to X$ ,  $i \geq 0$ , следует наложить естественные ограничения:

$$0 \leq g_{j,i}(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}) \leq \xi_{j,i},$$
  
$$0 \leq g_{j,i}(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}) \leq \kappa_{j,i} + \eta_{j,i}.$$

Отсюда получаем, что

$$0 \le g_{j,i}(\Gamma_i, \kappa_{j,i}, \eta_{j,i}, \xi_{j,i}) \le \min\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\}, i \ge 0.$$

В состоянии переналадки нельзя принимать к обслуживанию новые требования. Поэтому рассмотрим отдельно состояния из  $\Gamma \setminus \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}$  и состояния из  $\{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}$ . Любое состояние из множества  $\Gamma \setminus \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}$  соответствует режиму обслуживания для одного из потоков. Пусть применяется экстремальная стратегия обслуживания [17; 19], при которой обслуживается максимально возможное число находящихся в системе требований:

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\kappa_{j,i} + \eta_{j,i}, \xi_{j,i}\},$$
если  $\Gamma_i \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}, i \ge 0.$  (2.4)

Состояния из множества  $\{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}$  соответствуют режиму переналадки. В данных состояниях течение i-го такта систему покинут те и только те заявки потока  $\Pi_j$ , которые в момент  $\tau_i$  находились на обслуживании. Таким образом, получаем

$$\overline{\xi}_{j,i} = \min\{\kappa_{j,i}, \xi_{j,i}\}, \text{ если } \Gamma_i \in \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}.$$
 (2.5)

Так как объем накопителей очередей неограничен, то

$$\kappa_{j,i+1} = \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \overline{\xi}_{j,i}. \tag{2.6}$$

Подставляя соотношения (2.4) и (2.5) для  $\overline{\xi}_{j,i}$  в (2.6) окончательно получаем, что динамика длины очереди задается следующими рекуррентными равенствами

$$\kappa_{j,i+1} = V_j(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i) = \begin{cases} \max\{0, \kappa_{j,i} + \eta_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \Gamma \setminus \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}; \\ \eta_{j,i} + \max\{0, \kappa_{j,i} - \xi_{j,i}\}, & \text{если } \Gamma_i \in \{\Gamma^{(3)}, \Gamma^{(6)}\}. \end{cases}$$

$$(2.7)$$

Для многих реальных систем одновременно на обслуживании одним обслуживающим устройством может быть несколько требований. Например, перекресток может пересекать несколько автомобилей одновременно. Поэтому введем параметр  $0 < \theta_j \le 1$ , который обозначает часть обслуживания, которую необходимо пройти требованию, чтобы можно было начать обслуживать следующую заявку. В случае  $\theta_j < 1$  одновременно может обслуживаться несколько требований. Будем задавать длительности  $T_{3j-2}$ ,  $T_{3j-1}$  и  $T_{3j}$  таким образом, чтобы при непрерывном обслуживании в момент смены состояния внутренней памяти у одной из заявок закончилось обслуживание. Тогда, с учетом физического смысла  $\mu_{j,1}^{-1}$  и  $\mu_{j,2}^{-1}$ , получаем следующие соотношения:

$$T_{3j-2} = \mu_{j,1}^{-1} + l_{3j-2}\theta_j\mu_{j,1}^{-1},$$

$$T_{3j-1} = l_{3j-1}\theta_j\mu_{j,2}^{-1},$$

$$T_{3j} = l_{3j}\theta_j\mu_{j,2}^{-1},$$
(2.8)

где параметры  $l_{3j-2} \in X = \{0,1,2,\ldots\},\ l_{3j-1} \in \{1,2,\ldots\},\ l_{3j} \in \{1,2,\ldots\}.$  Параметр  $l_{3j}$  выбирается так, чтобы выполнялось неравенство  $T_{3j} \geq \mu_{j,2}^{-1}$ .

Перейдем к определению вероятностных свойств входных потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  и потоков насыщения  $\Pi_1^*$  и  $\Pi_2^*$ . К сожалению, если не известно состояние внутренней памяти на промежутке  $[\tau_i, \tau_{i+1})$ , то не удается найти распределение векторов  $\eta_i = (\eta_{1,i}, \eta_{2,i})$  и  $\xi_i = (\xi_{1,i}, \xi_{2,i})$ . Поэтому перейдем к нахождению совместных условных распределений входных потоков и потоков насыщения.

Пусть функция  $P_j(t;k)$  равна вероятности поступления k требований по потоку  $\Pi_j$  за промежуток длительности t. Вероятность  $P_j(t;k)$  определяется распределением (1.21) с параметрами  $\lambda_j$ ,  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$  потока  $\Pi_j$ . Обозначим

$$\varphi_{3i-2}(b) = \mathbf{P}(\eta_i = b | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x),$$

где 
$$b = (b_1, b_2), x = (x_1, x_2) \in X^2$$
.

В силу независимости входных потоков и того, что поступление заявок имеет распределение (1.21) и время пребывания в состоянии  $\Gamma^{(3j-2)}$  равно  $T^{(3j-2)}$ , получаем:

$$\varphi_{3j-2}(b) = P_1(T_{3j-2}; b_1) P_2(T_{3j-2}; b_2). \tag{2.9}$$

Обозначим условное распределение

$$\varphi_{3j-1,k}(x_j,b) = \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = kl_{3j-1}y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x),$$

где  $b, x \in X^2$ ;  $y_j \in \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ ;  $k = \overline{1,n_j}$ ; k — число продлений;  $l_{3j-1}$  — число заявок, которые могут быть обслужены за один такт продления. Найдем условную вероятность  $\varphi_{3j-1,k}(x_j,b)$ . Введем случайную величину  $\eta_{j,i}^{(d)}(\omega)$  — равную числу заявок потока  $\Pi_j$ , которые поступили в систему на такте продления  $[\tau_i + (d-1)T_{3j-1}; \tau_i + dT_{3j-1})$ . Тогда, для события

$$A_{j,i}(x,k,b) = \{\omega \colon \eta_i(\omega) = b, \xi_i(\omega) = kl_{3j-1}y_j, \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i(\omega) = x\}$$

можно рассмотреть следующие случаи:

1) 
$$1 \leq k < n_{j}, x_{j} - kl_{3j-1} + b_{j} < K_{j}$$

$$A_{j,i}(x, k, b) = \{\omega \colon \Gamma_{i}(\omega) = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_{i}(\omega) = x;$$

$$(\kappa_{j,i}(\omega) + \sum_{v=1}^{d} \eta_{j,i}^{(v)}(\omega) \geq K_{j} + dl_{3j-1} \lor \eta_{j,i}^{(d)}(\omega) > 0), d = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$\sum_{v=1}^{k-1} \eta_{j,i}^{(v)}(\omega) = b_{j}, \eta_{j,i}^{(k)}(\omega) = 0, \eta_{s,i}(\omega) = b_{s}\};$$

2) 
$$k = n_j$$

$$A_{j,i}(x,k,b) = \{\omega \colon \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i(\omega) = x;$$

$$(\kappa_{j,i}(\omega) + \sum_{v=1}^d \eta_{j,i}^{(v)}(\omega) \ge K_j + dl_{3j-1} \lor \eta_{j,i}^{(d)}(\omega) > 0), d = 1, 2, \dots, k-1;$$

$$\sum_{v=1}^{n_j} \eta_{j,i}^{(v)}(\omega) = b_j, \eta_{j,i}^{(k)}(\omega) = 0, \eta_{s,i}(\omega) = b_s\};$$

3) во всех других случаях:  $A_{j,k}(x,k,b) = \emptyset$ . Заметим, что:

$$\varphi_{3j-1,k}(x_j,b) = \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = kl_{3j-1}y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) =$$

$$= \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = kl_{3j-1}y_j, \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, k_i = x | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) =$$

$$= \mathbf{P}(A_{i,i}(x,k,b) | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x).$$

Введем следующие обозначения:

$$A_j^{(1)}(x_j,0) = \{h = (h_1) = (0)\},$$
 при  $x_j < K_j + l_{3j-1};$ 
 $A_j^{(k)}(x_j,b_j) = \{h = (h_1,h_2,\ldots,h_k) \in X^k:$ 
 $(x_j + \sum_{v=1}^d h_v \ge K_j + dl_{3j-1} \lor h_d > 0), d = 1,\ldots,k-1;$ 
 $h_1 + h_2 + \ldots + h_{k-1} = b_j, h_k = 0\},$  если  $1 \le k < n_j;$ 
 $A_j^{(n_j)}(x_j,b_j) = \{h = (h_1,h_2,\ldots,h_{n_j}) \in X^{n_j}:$ 
 $(x_j + \sum_{v=1}^d h_v \ge K_j + dl_{3j-1} \lor h_d > 0), d = 1,\ldots,n_j-1;$ 
 $h_1 + h_2 + \ldots + h_{n_j} = b_j\};$ 
 $A_j^{(k)}(x_j,b_j) = \emptyset$  при других значениях  $x_j,b_j.$ 

Поскольку для любого  $i \geq 0$  случайные величины  $\eta_{j,i}^{(d)}(\omega), d = \overline{1,n_j}$ , являются независимыми и имеющие распределение (1.21), то вид условных распределений можно найти с помощью теорем умножения и сложения:

$$\varphi_{3j-1,k}(x_j,b) = P_s(kT_{3j-1};b_s) \times \sum_{h \in A_j^{(k)}(x_j,b_j)} \prod_{d=1}^k P_j(T_{3j-1};h_d).$$
 (2.10)

Пусть произошло событие  $\{\omega\colon \Gamma(\omega)=\Gamma^{(6+j)}\}$ , где j=1,2. В этом случае опять необходимо рассматривать условные совместные распределения векторов  $\eta_i,\eta_i'$ . Длительность пребывания обслуживающего устройства в состоянии  $\Gamma^{(6+j)}$  является случайной величиной. Значит, распределение случайного вектора  $\xi_i$  не будет вырожденным. Следовательно, нужно рассматривать условные совместные распределения случайных векторов  $\xi_i,\eta_i,\eta_i'$ .

Обозначим:

$$\varphi_{6+j,c,a_i}(b) = \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a_j y_j, \eta_i' = y_c | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x),$$

при 
$$c = 0, 1, 2,$$
 и  $a_j \in \{0, 1, \dots, l_{3j-2}\}.$ 

Если выполнено  $\eta_i' = y_0$  или  $\eta_i' = y_j$ , а случайный элемент  $\Gamma_i$  равен  $\Gamma^{(6+j)}$ , то согласно алгоритму случайная величина  $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i$  принимает значение  $T^{(3j-2)}$ . Следовательно, случайный вектор  $\xi_i$  будет равен  $l_{3j-2}y_j$ . Таким образом, при любом  $x \in X^2$  получаем:

$$\varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) = \mathbf{P}(\eta_i = \eta_i' = y_0 | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)T_{3j-2}}.$$
 (2.11)

Теперь рассмотрим событие  $\{\omega\colon \Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(6+j)},\eta_i'=y_s\}$ . В этом случае обслуживающее устройство переключается в состояние  $\Gamma^{(3j)}$  из состояния  $\Gamma^{(6+j)}$  в момент прихода первой заявки потока  $\Pi_s$ . Таким образом, событие  $\{\omega\colon \Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(6+j)},\eta_i'=y_s,\eta=b\}$  будет возможным только при  $b=ky_s,\,k=1,2,\ldots$  Если  $\omega\in\{\omega\colon \Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(6+j)},\eta_i'=y_s\}$ , то длительность  $\Delta_i(\omega)=\theta_{s,i}(\omega)$ , где случайные величины  $\theta_{1,i}(\omega)$  и  $\theta_{2,i}(\omega)$  равны соответственно длительностям промежутков времени, прошедших с момента  $\tau_i$  до момента прихода первой заявки потоков  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ . Если наступило событие  $\{\omega\colon \Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(6+j)},\eta_i'=y_s\}$ , то случайные величины  $\xi_{j,i}(\omega)$  и  $\theta_{s,i}(\omega)$  связаны соотношением:

$$\xi_{j,i}(\omega) = \begin{cases} \max\{0, \frac{\theta_{s,i}(\omega) - \mu_{j,1}^{-1}}{\theta_{j}\mu_{j,1}^{-1}}\}, & \text{если } \frac{\theta_{s,i}(\omega) - \mu_{j,1}^{-1}}{\theta_{j}\mu_{j,1}^{-1}} - \text{целое}; \\ \max\{0, \left\lfloor \frac{\theta_{s,i}(\omega) - \mu_{j,1}^{-1}}{\theta_{j}\mu_{j,1}^{-1}} \right\rfloor + 1\}, & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

При любом  $i \geq 0$  случайные величины  $\theta_{1,i}(\omega)$ ,  $\theta_{2,i}(\omega)$  являются независимыми и экспоненциально распределенными с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Так как поступление заявок не зависит от значений вектора  $(\Gamma_i, \kappa_i)$ , то функция условной плотности  $f_{\theta_{s,i}}(u|\Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x)$  для случайной величины  $\theta_{s,i}(\omega)$  совпадает с плотностью экспоненциального распределения с параметром  $\lambda_s$ :

$$f_{\theta_{s,i}}(u) = \begin{cases} \lambda_s e^{-\lambda_s u}, & u > 0, \\ 0, & u \le 0. \end{cases}$$

Итак, при любых значениях  $x \in X^2$  находим:

$$\varphi_{6+j,s,0}(ky_s) = \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \theta_{s,i} < \mu_{j,1}^{-1}, \eta_i = ky_s | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) = 
= \int_0^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-\lambda_s u} \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \eta_i = ky_s | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x, \theta_{s,i} = u) du = 
= \int_0^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-\lambda_s u} \int_u^{+\infty} Q_s(k) \lambda_j e^{-\lambda_j v} dv du = 
= Q_s(k) \int_0^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-\lambda_s u} \times e^{-\lambda_j u} du = 
= Q_s(k) \int_0^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_s e^{-(\lambda_s + \lambda_j)u} du = \frac{\lambda_s Q_s(k)}{\lambda_s + \lambda_j} (1 - e^{-(\lambda_s + \lambda_j)\mu_{j,1}^{-1}}).$$
(2.12)

При  $0 < a_i < l_{3i-2}$  имеем

$$\varphi_{6+j,s,a_{j}}(ky_{s}) =$$

$$= \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \frac{1 + (a_{j} - 1)\theta_{j}}{\mu_{j,1}} \le \theta_{s,i} < \frac{1 + a_{j}\theta_{j}}{\mu_{j,1}}, \eta_{i} = ky_{s} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_{i} = x) =$$

$$= \int_{\mu_{j,1}^{-1} + (a_{j} - 1)\theta_{j}\mu_{j,1}^{-1}}^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_{s} e^{-\lambda_{s} u} \mathbf{P}(\theta_{s,i} < \theta_{j,i}, \eta_{i} = ky_{s} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_{i} = x, \theta_{s,i} = u) du =$$

$$= \int_{\mu_{j,1}^{-1} + (a_{j} - 1)\theta_{j}\mu_{j,1}^{-1}}^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_{s} e^{-\lambda_{s} u} \int_{u}^{+\infty} Q_{s}(k) \lambda_{j} e^{-\lambda_{j} u} du =$$

$$= Q_{s}(k) \int_{\mu_{j,1}^{-1} + (a_{j} - 1)\theta_{j}\mu_{j,1}^{-1}}^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_{s} e^{-\lambda_{s} u} \times e^{-\lambda_{j} u} du =$$

$$= Q_{s}(k) \int_{\mu_{j,1}^{-1} + (a_{j} - 1)\theta_{j}\mu_{j,1}^{-1}}^{\mu_{j,1}^{-1}} \lambda_{s} e^{-(\lambda_{s} + \lambda_{j})u} du =$$

$$= \frac{\lambda_{s} Q_{s}(k)}{\lambda_{s} + \lambda_{j}} e^{-(\lambda_{s} + \lambda_{j})(\mu_{j,1}^{-1} + (a_{j} - 1)\theta_{j}\mu_{j,1}^{-1})} \times (1 - e^{-(\lambda_{s} + \lambda_{j})\theta_{j}\mu_{j,1}^{-1}}).$$
(2.13)

Рассмотрим теперь условную вероятность  $\varphi_{3j,d}(b) = \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y_d | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, \kappa_i = x)$ , где d = 0, 1, 2. Получим выражение для  $\varphi_{3j,0}(b)$  в следующем виде

$$\varphi_{3j,0}(y_0) = \mathbf{P}(\eta_i = 0, \eta_i' = y_0 | \Gamma_i = \Gamma^{(3j)}, k_i = x) = e^{-(\lambda_j + \lambda_s)T_{3j}}.$$
 (2.14)

Для  $\varphi_{3j,j}(b)$  получим следующие равенства:

$$\varphi_{3j,j}(b) = \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta'_{i} = y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)}, \kappa_{i} = x) = 
= \mathbf{P}(\eta_{j,i} = b_{j}, \eta_{s,i} = b_{s}, \theta_{j,i} < \theta_{j,i} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)}, \kappa_{i} = x) = 
= \mathbf{P}(\eta_{j,i} = b_{j}, \eta_{s,i} = b_{s}, \theta_{j,i} < \theta_{j,i} | \Delta_{i} = T_{3j}) = 
= \mathbf{P}(\eta_{j,i} = b_{j} | \Delta_{i} = T_{3j}) \mathbf{P}(\eta_{s,i} = b_{s} | \Delta_{i} = T_{3j}) \times 
\times \mathbf{P}(\theta_{j,i} < \theta_{s,i} | \Delta_{i} = T_{3j}, \eta_{j,i} = b_{j}, \eta_{s,i} = b_{s}) = 
= P_{j}(T_{3j}, b_{j}) P_{s}(T_{3j}, b_{s}) \mathbf{P}(\theta_{j,i} < \theta_{s,i} | \Delta_{i} = T_{3j}, \eta_{j,i} = b_{j}, \eta_{s,i} = b_{s}).$$

Потоки в системе являются независимыми неординарными пуассоновскими. Потоки групп (или вызывающих моментов) будут независимыми пуассонов-

скими. Введем следующие обозначения:

$$A^{(d)} = \{ h = (h_1, h_2, \dots, h_d) \in X^d : \sum_{v=1}^d v h_v = d \},$$

$$A_k^{(d)} = \{ h = (h_1, h_2, \dots, h_d) \in X^d : \sum_{v=1}^d v h_v = d, \sum_{v=1}^d h_v = k \}.$$

Множество  $A^{(k)}$  включает все возможные случаи распределения k заявок по вызывающим моментам, а множество  $A^{(k)}(d)$  только случаи, когда число вызывающих моментов равно d. Пусть случайная величина  $\zeta_j$  равна количеству вызывающих моментов на i-м такте по потоку  $\Pi_j$ . Используя введенные обозначения, получаем

$$\mathbf{P}(\theta_{j,i} < \theta_{s,i} | \Delta_i = T_{3j}, \eta_{j,i} = b_j, \eta_{s,i} = b_s) = 
= \sum_{k=1}^{b_j} \sum_{l=1}^{b_s} \frac{k}{k+l} \mathbf{P}(\zeta_j = k | \eta_{j,i} = b_j) \mathbf{P}(\zeta_s = l | \eta_{s,i} = b_s) = 
= \sum_{k=1}^{b_j} \sum_{l=1}^{b_s} \frac{k}{k+l} \times \frac{\sum_{h \in A_k^{(b_j)}} C(h_1, \dots, h_{b_j}) \prod_{u=1}^{b_j} (Q_j(u))^{h_u}}{\sum_{h \in A_l^{(b_s)}} C(h_1, \dots, h_{b_s}) \prod_{u=1}^{b_s} (Q_s(u))^{h_u}} \times \frac{\sum_{h \in A_l^{(b_s)}} C(h_1, \dots, h_{b_s}) \prod_{u=1}^{b_s} (Q_s(u))^{h_u}}{\sum_{h \in A_l^{(b_s)}} C(h_1, \dots, h_{b_s}) \prod_{u=1}^{b_s} (Q_s(u))^{h_u}},$$

где  $C(h_1, \ldots, h_k)$  равняется числу сочетаний с повторениями.

Окончательно получаем

$$\varphi_{3j,j}(b) = P_{j}(T_{3j}, b_{j}) P_{s}(T_{3j}, b_{s}) \times \\
\times \sum_{k=1}^{b_{j}} \sum_{l=1}^{b_{s}} \frac{k}{k+l} \times \frac{\sum_{h \in A_{k}^{(b_{j})}} C(h_{1}, \dots, h_{b_{j}}) \prod_{u=1}^{b_{j}} (Q_{j}(u))^{h_{u}}}{\sum_{h \in A_{l}^{(b_{j})}} C(h_{1}, \dots, h_{b_{j}}) \prod_{u=1}^{b_{j}} (Q_{j}(u))^{h_{u}}} \times \\
\times \frac{\sum_{h \in A_{l}^{(b_{s})}} C(h_{1}, \dots, h_{b_{s}}) \prod_{u=1}^{b_{s}} (Q_{s}(u))^{h_{u}}}{\sum_{h \in A^{(b_{s})}} C(h_{1}, \dots, h_{b_{s}}) \prod_{u=1}^{b_{s}} (Q_{s}(u))^{h_{u}}}.$$
(2.15)

В частном случае при  $b_s=0$  выражение примет вид

$$\varphi_{3j,j}(b_j y_j) = P_j(T_{3j}, b_j) P_s(T_{3j}, 0).$$

Аналогичными рассуждениями получено следующее условное распределение

$$\varphi_{3j,s}(b) = P_{j}(T_{3j}, b_{j})P_{s}(T_{3j}, b_{s}) \times 
\times \sum_{k=1}^{b_{j}} \sum_{l=1}^{b_{s}} \frac{l}{k+l} \times \frac{\sum_{h \in A_{k}^{(b_{j})}} C(h_{1}, \dots, h_{b_{j}}) \prod_{u=1}^{b_{j}} (Q_{j}(u))^{h_{u}}}{\sum_{h \in A^{(b_{j})}} C(h_{1}, \dots, h_{b_{j}}) \prod_{u=1}^{b_{j}} (Q_{j}(u))^{h_{u}}} \times \frac{\sum_{h \in A_{k}^{(b_{s})}} C(h_{1}, \dots, h_{b_{s}}) \prod_{u=1}^{b_{s}} (Q_{s}(u))^{h_{u}}}{\sum_{h \in A^{(b_{s})}} C(h_{1}, \dots, h_{b_{s}}) \prod_{u=1}^{b_{s}} (Q_{s}(u))^{h_{u}}}.$$
(2.16)

В качестве математической модели адаптивного управления конфликтными потоками Кокса-Льюиса будем рассматривать векторную случайную последовательность  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ . Для последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  имеет место следующее утверждение.

**Лемма 2.** Последовательность  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  при заданном векторе  $(\Gamma_0, \kappa_0)$  является марковской.

Доказательство. Пусть  $i=0,1,\ldots; r_i=\overline{1,8},$  и вектора  $x_i=(x_{1,i},x_{2,i})\in X^2,$   $b=(b_1,b_2)\in X^2,$   $a=(a_1,a_2)\in X^2,$   $y\in\{y_0,y_1,y_2\}.$  Для сокращения записи обозначим при каждом  $d=\overline{0,i}$  через  $A_d$  событие

$$\{\omega \colon \Gamma_d(\omega) = \Gamma^{(r_d)}, \kappa_d(\omega) = x_d, \eta_i(\omega) = b, \xi_i(\omega) = a, \eta_i'(\omega) = y\}.$$

Для вычисления вероятностей воспользуемся формулой полной вероятности. Также будем пользоваться свойствами условных вероятностей и теоремой умножения вероятностей. Получаем

$$\begin{split} \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} &= \Gamma^{(r_{i+1})}, \kappa_{i+1} = x_{i+1} | \Gamma_d = \Gamma^{(r_d)}, \kappa_d = x_d, d = \overline{0,i}) = \\ &= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r_{i+1})}, \kappa_{i+1} = x_{i+1}, \eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_d = \Gamma^{(r_d)}, \kappa_d = x_d, d = \overline{0,i}) = \\ &= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_d = \Gamma^{(r_d)}, \kappa_d = x_d, d = \overline{0,i}) \times \\ &\times \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r_{i+1})}, \kappa_{i+1} = x_{i+1} | \Gamma_d = \Gamma^{(r_d)}, \kappa_d = x_d, \eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y, d = \overline{0,i}) = \\ &= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_d = \Gamma^{(r_d)}, \kappa_d = x_d, d = \overline{0,i}) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i') = \Gamma^{(r_{i+1})}, V(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i) = x_{i+1} | A_0, A_1, \dots, A_i) = \\ &= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_d = \Gamma^{(r_d)}, \kappa_d = x_d, d = \overline{0,i}) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_i, y) = \Gamma^{(r_{i+1})}, V(\Gamma^{(r_i)}, x_i, b, a) = x_{i+1} | A_0, A_1, \dots, A_i) = \\ &= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_d = \Gamma^{(r_d)}, \kappa_d = x_d, d = \overline{0,i}) \times \end{split}$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_i, y) = \Gamma^{(r_{i+1})}, \Gamma_i(\Gamma^{(r_i)}, x_i, b, a) = x_{i+1}) = 
= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) \times 
\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_i, y) = \Gamma^{(r_{i+1})}, V(\Gamma^{(r_i)}, x_i, b, a) = x_{i+1}).$$
(2.17)

Совместное распределение случайного вектора  $(\eta_i, \xi_i, \eta'_i)$  зависит только от времени пребывания  $\Delta_i$  в состоянии  $\Gamma_i$ . Величина  $\Delta_i$  зависит только от вектора  $(\Gamma_i, \kappa_i)$  и не зависит от значений в предыдущие моменты  $(\Gamma_0, \kappa_0, \Gamma_1, \kappa_1, \ldots, \Gamma_{i-1}, \kappa_{i-1})$ . Таким образом, случайные векторы  $(\eta_i, \xi_i, \eta'_i)$  и  $(\Gamma_0, \kappa_0, \Gamma_1, \kappa_1, \ldots, \Gamma_{i-1}, \kappa_{i-1})$  будут условно независимыми при известном значении вектора  $(\Gamma_i, \kappa_i)$ . Данное рассуждение является обоснованием последнего равенства в соотношении (2.17).

Аналогично выводим:

$$\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r_{i+1})}, \kappa_{i+1} = x_{i+1} | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) =$$

$$= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r_{i+1})}, \kappa_{i+1} = x_{i+1}, \eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) =$$

$$= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) \times$$

$$\times \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r_{i+1})}, \kappa_{i+1} = x_{i+1} | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i, \eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y) =$$

$$= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i') = \Gamma^{(r_{i+1})}, V(\Gamma_i, \kappa_i, \eta_i, \xi_i) = x_{i+1} | A_i) =$$

$$= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_i, y) = \Gamma^{(r_{i+1})}, V(\Gamma^{(r_i)}, x_i, b, a) = x_{i+1} | A_i) =$$

$$= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_i, y) = \Gamma^{(r_{i+1})}, V(\Gamma^{(r_i)}, x_i, b, a) = x_{i+1} | A_i) =$$

$$= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_i, y) = \Gamma^{(r_{i+1})}, V(\Gamma^{(r_i)}, x_i, b, a) = x_{i+1} | A_i) =$$

$$= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_i, y) = \Gamma^{(r_{i+1})}, V(\Gamma^{(r_i)}, x_i, b, a) = x_{i+1} | A_i) =$$

$$= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r_i)}, x_i, y) = \Gamma^{(r_{i+1})}, V(\Gamma^{(r_i)}, x_i, b, a) = x_{i+1} | A_i) =$$

$$= \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i) \times$$

Из соотношений (2.17) и (2.18) получаем

$$\mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r_{i+1})}, \kappa_{i+1} = x_{i+1} | \Gamma_d = \Gamma^{(r_d)}, \kappa_d = x_d, d = \overline{0, i}) =$$

$$= \mathbf{P}(\Gamma_{i+1} = \Gamma^{(r_{i+1})}, \kappa_{i+1} = x_{i+1} | \Gamma_i = \Gamma^{(r_i)}, \kappa_i = x_i).$$

Таким образом, лемма 2 доказана.

Проведем анализ пространства состояний векторной марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ . По лемме 2, последовательность  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ 

является марковской цепью с множеством состояний  $G = \Gamma \times X \times X$ . Далее докажем, что марковская цепь является разложимой. У разложимой марковской цепи множество состояний не образует один класс сообщающихся состояний. Проведем классификацию состояния марковской цепи  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ , используя алгебраические свойства переходных вероятностей марковской цепи за n шагов [83].

**Теорема 2.** Пусть вектор  $x=(x_1,x_2)\in X^2$  и множества состояний G,  $G^{(3j-2)},$   $G^{(3j-1)},$   $G^{(6+j)},$   $G_j$  определяются равенствами

$$G = \{ (\Gamma^{(h)}, x) : \Gamma^{(h)} \in \Gamma, x \in X^2 \},$$

$$G^{(3j-2)} = \{ (\Gamma^{(3j-2)}, x_s y_s) : x_s < K_s - l_{3s} \},$$

$$G^{(3j-1)} = \{ (\Gamma^{(3j-1)}, x_s y_s) : x_s < K_s - l_{3s} \},$$

$$G^{(6+j)} = \{ (\Gamma^{(6+j)}, x) : x_j > 0 \} \cup \{ (\Gamma^{(6+j)}, x) : x_s \ge K_s - l_{3s} \},$$

$$G_j = \begin{cases} G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)} & l_{3j-2} > 0; \\ G^{(6+j)} \cup G^{(3j-2)} \cup G^{(3j-1)} & l_{3j-2} = 0. \end{cases}$$

Тогда: 1) состояния из множеств  $G_1$  и  $G_2$  являются несущественными; 2) класс  $G_0 = G \setminus (G_1 \cup G_2)$  является неразложимым апериодическим классом существенных состояний.

 $\mathcal{A}$ оказательство. Докажем первый пункт теоремы. Рассмотрим состояния из множества  $G^{(6+j)}$ . Случайное событие

$$\{\omega \colon (\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega)) \in G^{(6+j)}\} =$$

$$= \{\omega \colon \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(6+j)}\} \cap (\{\omega \colon \kappa_{j,i}(\omega) > 0\} \cup \{\omega \colon \kappa_{s,i}(\omega) \ge K_s - l_{3s}\})$$

при i>0 является невозможным. Указанное событие влечет случайное событие  $\{\omega\colon \Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(6+j)}\}$ , которое при i>0 равно событию

$$\{\omega \colon \Gamma_{i-1}(\omega) = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{j,i-1}(\omega) = 0, k_{s,i-1}(\omega) < K_s, \eta'_{i-1}(\omega) = y_0\}.$$

В силу того, что  $\{\omega \colon \eta_i'(\omega) = y_0\} = \{\omega \colon \eta_i(\omega) = y_0\}, \ i \geq 0$  и (2.3), последнее событие влечет событие

$$\{\omega : \kappa_{j,i}(\omega) = 0, \kappa_{s,i}(\omega) < K_s - l_{3s}\}.$$

Таким образом, событие  $\{\omega \colon (\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega)) \in G^{(6+j)}\}$  влечет несовместное с ним событие  $\{\omega \colon \kappa_{j,i}(\omega) = 0, \kappa_{s,i}(\omega) < K_s - l_{3s}\}$ . Это возможно только если  $\{\omega \colon (\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega)) \in G^{(6+j)}\} = \emptyset$ .

Далее докажем, что случайное событие

$$\{\omega \colon (\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega)) \in G^{(3j-2)}\} =$$

$$= \{\omega \colon \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_{j,i}(\omega) = 0, \kappa_{s,i}(\omega) < K_s - l_{3s}\}$$
(2.19)

при i>0 является невозможным. При i>0 данное событие влечет событие  $\{\omega\colon \Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(3j-2)}\}$ , которое при изучаемом алгоритме может произойти тогда и только тогда, когда наступает одно из несовместных событий:

- 1)  $\{\omega \colon \Gamma_{i-1}(\omega) = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{j,i-1}(\omega) > 0\};$
- 2)  $\{\omega : \Gamma_{i-1}(\omega) = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{j,i-1}(\omega) = 0, \kappa_{s,i-1}(\omega) \ge K_s\};$
- 3)  $\{\omega \colon \Gamma_{i-1}(\omega) = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{j,i-1}(\omega) = 0, \kappa_{s,i-1}(\omega) < K_s, \eta'_{i-1} = y_j\};$
- 4)  $\{\omega \colon \Gamma_{i-1}(\omega) = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{j,i-1}(\omega) < K_j, \kappa_{s,i-1}(\omega) = 0, \eta'_{i-1} = y_j\}.$

События из пунктов 1 и 2 согласно описанном алгоритму влекут события  $\{\omega \colon \kappa_{j,i}(\omega) > 0\}$  и  $\{\omega \colon \kappa_{s,i}(\omega) \geq K_s - l_{3s}\}$  соответственно. События из пунктов 3 и 4 влекут событие  $\{\omega \colon \kappa_{j,i}(\omega) > 0\}$ . Таким образом, событие  $\{\omega \colon (\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega)) \in G^{(3j-2)}\}$  влечет событие, несовместное с ним. Значит, событие (2.19) является невозможным.

Теперь докажем, что при i > 1 и  $l_{3i-2} = 0$  случайное событие

$$\{\omega \colon (\Gamma_i(\omega), \kappa_i(\omega)) \in G^{(3j-1)}\} =$$

$$= \{\omega \colon \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_{j,i}(\omega) = 0, \kappa_{s,i}(\omega) < K_s - l_{3s}\}$$

$$(2.20)$$

является невозможным. Данное событие влечет событие  $\{\omega\colon \Gamma_i(\omega)=\Gamma^{(3j-1)}\}$ , которое при i>1 может произойти, если произошло одно из двух несовместных событий:  $\{\omega\colon \Gamma_{i-1}(\omega)=\Gamma^{(3j-2)}\}$  или  $\{\omega\colon \Gamma_{i-1}(\omega)=\Gamma^{(6+j)},\eta'_{i-1}=y_j\}$ . Ранее было показано, что при i>1 из случайного события  $\{\omega\colon \Gamma_{i-1}(\omega)=\Gamma^{(3j-2)}\}$  следует событие  $\{\omega\colon \kappa_{j,i-1}(\omega)>0\}\cup \{\omega\colon \kappa_{s,i-1}(\omega)\geq K_s-l_{3s}\}$ , которое при  $l_{3j-2}=0$  влечет событие  $\{\omega\colon \kappa_{j,i}(\omega)>0\}\cup \{\omega\colon \kappa_{s,i}(\omega)\geq K_s-l_{3s}\}$ . Если i>1 и  $l_{3j-2}=0$ , то случайное событие  $\{\omega\colon \Gamma_{i-1}(\omega)=\Gamma^{(3j-2)}\}$  влечет несовместное с ним событие и, следовательно, является невозможным. Случайное событие  $\{\omega\colon \Gamma_{i-1}(\omega)=\Gamma^{(6+j)},\eta'_{i-1}=y_j\}$  при  $l_{3j-2}=0$  влечет событие  $\{\omega\colon \kappa_{j,i}(\omega)>0\}$ . Таким образом, было показано, что событие (2.20) при i>0,  $l_{3j-2}=0$  всегда влечет несовместное с ним событие и, следовательно, является невозможным.

Таким образом, при i>0 случайное событие  $\{\omega\colon (\Gamma_i(\omega),\kappa_i(\omega))\in G_j\}$  является невозможным. Значит, множество  $G_j$  включает несущественные состояния.

Теперь докажем второе утверждение леммы. Необходимо доказать, что состояния являются сообщающимися. Для этого необходимо рассмотреть неко-

торое состояние из множества  $G_0$  и показать, что остальные состояния из этого множества с ним сообщаются. Рассмотрим состояние  $(\Gamma^{(3)}, y_0) \in G_0$ . Из любого состояния  $(\Gamma^{(r)}, x)$  из G возможен переход в состояние  $(\Gamma^{(3)}, y_0)$  за конечное число шагов. Данный переход возможен, так как  $l_r > 0$  при r = 2, 3, 5, 6, и согласно свойствам потоков Кокса-Льюиса выполнено  $\mathbf{P}(\{\omega \colon \eta_i(\omega) = y_0\} | \{\omega \colon \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(r)}\}) > 0$ ,  $r = \overline{1,8}$ . Значит с положительной вероятностью возможен переход состояний марковской цепи по цепочке

$$(\Gamma^{(r)}, x) \to \ldots \to (\Gamma^{(7)}, y_0) \to (\Gamma^{(3)}, y_0),$$
где  $(\Gamma^{(r)}, x) \in G.$ 

Таким образом, состояние  $(\Gamma^{(3)}, y_0)$  является существенным. Множество состояний из  $G_0$ , сообщающихся с  $(\Gamma^{(3)}, y_0)$  образует минимальный класс существенных сообщающихся состояний.

Покажем, что все состояния из  $G_0$  сообщаются с  $(\Gamma^{(3)}, y_0)$ . Так, переход из состояния  $(\Gamma^{(3)}, y_0)$  в состояние  $(\Gamma^{(6)}, x) \in G_0$  возможен по следующей последовательности состояний

$$(\Gamma^{(3)}, y_0) \to (\Gamma^{(4)}, x + (l_4 + l_5 n_2) y_2) \to (\Gamma^{(5)}, x + l_5 n_2 y_2) \to (\Gamma^{(6)}, x).$$

Такая последовательность переходов имеет положительную вероятность, т. к. входной поток является потоком Кокса-Льюиса. Для любого другого состояния из  $G_0$  доказательство производится аналогично. Таким образом, множество  $G_0$  является единственным классом существенных состояний.

Далее докажем, что множество состояний  $G_0$  является апериодическим классом. Для этого приведем две последовательности переходов, для которых наибольший общий делитель будет равен единице. Следующие цепочки переходов из  $(\Gamma^{(1)}, y_1) \in G_0$  в  $(\Gamma^{(1)}, y_1) \in G_0$ 

1) 
$$(\Gamma^{(1)}, y_1) \to (\Gamma^{(2)}, y_1) \to (\Gamma^{(3)}, y_0) \to (\Gamma^{(4)}, y_2) \to (\Gamma^{(5)}, y_2) \to (\Gamma^{(6)}, y_0) \to (\Gamma^{(1)}, y_1);$$

2) 
$$(\Gamma^{(1)}, y_1) \to (\Gamma^{(2)}, y_0) \to (\Gamma^{(3)}, y_0) \to (\Gamma^{(8)}, y_0) \to (\Gamma^{(6)}, y_0) \to (\Gamma^{(1)}, y_1),$$
 имеют положительную вероятность. Для первой последовательности переходов марковская цепь с положительной вероятностью вернется в состояние  $(\Gamma^{(1)}, y_1)$  за шесть шагов, а во втором за пять шагов. Наибольший общий делитель чисел 5 и 6 равен 1. Получаем, что класс состояний  $G_0$  является апериодическим. Итак, все утверждения теоремы доказаны.

## Получение одномерных распределений для векторной 2.3 марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$

Для любых фиксированных  $i \ge 0, r = \overline{1,8}$  и  $x \in X^2$  введем обозначение

$$Q_i^{(r)}(x) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x).$$

Получим рекуррентные соотношения для одномерных распределений  $\{Q_i^{(r)}(x): r = \overline{1,8}, x \in X^2\}$ . Выпишем соотношения, связывающие значения  $Q_i^{(r)}(x), (\Gamma^{(r)}, x) \in G$  на *i*-ом шаге и значения  $Q_{i+1}^{(r')}(w)$  на i+1-ом шаге при  $w = (w_1, w_2) \in X^2$  и  $(\Gamma^{(r')}, w) \in G$ . Из теоремы 2 следует, что для любых  $Q_{i+1}^{(r)}(w)=0$  из множества несущественных состояний  $(\Gamma^{(r)},w)\in G_1\cup G_2$  при  $i \geq 0$ . Рекуррентные соотношения для существенных состояний будем получать по формуле полной вероятности. В качестве гипотез выбраны события  $\{\omega \colon \Gamma_i(\omega) = \Gamma^{(r)}, \ \kappa_i(\omega) = x\}, \ r = \overline{1,8}, \ x \in X^2$ . Для этого воспользуемся рекуррентным соотношением для состояний обслуживающего устройства (2.3) и выражениями (2.9) – (2.15) для совместных распределений случайных векторов  $\eta_i$ ,  $\xi_i$  и  $\eta'_i$ .

Получим рекуррентные соотношения для всех случаев. При этом, суммирование в выражениях ведется по всем возможным значениям индексов суммирования, если для них явно не указаны границы. Сначала получим выражение для  $Q_{i+1}^{(3j-2)}(w)$ , j=1, 2. Для этого рассмотрим 4 случая:

1) при  $w_i > 0$ ,  $w_s = 0$  получаем

$$\begin{split} Q_{i+1}^{(3j-2)}(w_{j}y_{j}) &= \\ &= \sum_{x} \sum_{r=1}^{8} Q_{i}^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(r)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_{j}y_{j}) = \\ &= \sum_{x} Q_{i}^{(3s)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3s)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(3s)}, x, b, l_{3s}y_{s}) = w_{j}y_{j}) + \\ &+ \sum_{x} Q_{i}^{(3j)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(3j)}, x, b, l_{3j}y_{j}) = w_{j}y_{j}) = \end{split}$$

$$= \sum_{x_{j}=1}^{w_{j}} \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) \mathbf{P}(\eta_{i} = (w_{j} - x_{j})y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) +$$

$$+ \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \mathbf{P}(\eta_{i} = w_{j}y_{j}, \eta'_{i} = y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) +$$

$$+ \sum_{x_{j}=0}^{l_{3j}} Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j}) \mathbf{P}(\eta_{i} = w_{j}y_{j}, \eta'_{i} = y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)}, \kappa_{i} = x) +$$

$$+ \sum_{x_{j}=l_{3j}+1}^{\min\{K_{j}-1, w_{j}+l_{3j}\}} Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j}) \mathbf{P}(\eta_{i} = (w_{j} + l_{3j} - x_{j})y_{j}, \eta'_{i} = y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)}, \kappa_{i} = x) =$$

$$= \sum_{x_{j}=1}^{w_{j}} \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) \varphi_{3s,j}((w_{j} - x_{j})y_{j}) + \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) \varphi_{3s,j}(w_{j}y_{j}) +$$

$$+ \sum_{x_{j}=0}^{l_{3j}} Q_{i}^{(3j)}(x) \varphi_{3j,j}(w_{j}y_{j})) + \sum_{x_{j}=l_{3j}+1}^{\min\{K_{j}-1, w_{j}+l_{3j}\}} Q_{i}^{(3j)}(x) \varphi_{3j,j}(w_{j} - l_{3j})y_{j}; \quad (2.21)$$

2) при  $w_i > 0, w_s \le K_s - l_{3s}$  получаем

$$\begin{split} Q_{i+1}^{(3j-2)}(w) &= \\ &= \sum_{x} \sum_{r=1}^{8} Q_{i}^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(r)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \\ &= \sum_{x} Q_{i}^{(3s)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3s)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(3s)}, x, b, l_{3s}y_{s}) = w) + \\ &+ \sum_{x} Q_{i}^{(3j)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(3j)}, x, b, l_{3j}y_{j}) = w) = \\ &= \sum_{x_{j}=1} \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) \mathbf{P}(\eta_{i} = w - x_{j}y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) + \\ &+ \sum_{x_{j}=1} \sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{w_{s}+l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) \mathbf{P}(\eta_{i} = w - x + l_{3s} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) + \\ &+ \sum_{x_{s}=0} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \mathbf{P}(\eta_{i} = w, \eta_{i}' = y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) + \end{split}$$

$$\begin{aligned}
&\min\{K_{s}-1,w_{s}+l_{3s}\} \\
&+ \sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\log(3s)} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \mathbf{P}(\eta_{i} = (w + (l_{3s} - x_{s})y_{s}, \eta_{i}' = y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) + \\
&+ \sum_{x_{j}=0}^{l_{3j}} Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j}) \mathbf{P}(\eta_{i} = w, \eta_{i}' = y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)}, \kappa_{i} = x) + \\
&+ \sum_{x_{j}=l_{3j}+1}^{\min\{K_{j}-1,w_{j}+l_{3j}\}} Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j}) \mathbf{P}(\eta_{i} = w + (l_{3j-x_{j}})y_{j}, \eta_{i}' = y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)}, \kappa_{i} = x) = \\
&= \sum_{x_{j}=1}^{w_{j}} \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) \varphi_{3s}(w - x_{j}y_{j}) + \sum_{x_{j}=1}^{w_{j}} \sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{w_{s}+l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) \varphi_{3s}(w - x + l_{3s}) + \\
&+ \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \varphi_{3s,j}(w) + \sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\min\{K_{s}-1,w_{s}+l_{3s}\}} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \varphi_{3s,j}(w + (l_{3s} - x_{s})y_{s}) + \\
&+ \sum_{x_{j}=0}^{l_{3j}} Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j}) \varphi_{3j,j}(w) + \sum_{x_{j}=l_{3j}+1}^{\min\{K_{j}-1,w_{j}+l_{3j}\}} Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j}) \varphi_{3j,j}(w + (l_{3j} - x_{j})y_{j}); \quad (2.22)
\end{aligned}$$

3) при  $w_j > 0, w_s \ge K_s - l_{3s}$  получаем

$$\begin{split} Q_{i+1}^{(3j-2)}(w) &= \\ &= \sum_{x} \sum_{r=1}^{8} Q_{i}^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(r)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \\ &= \sum_{x} Q_{i}^{(3s)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3s)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(3s)}, x, b, l_{3s}y_{s}) = w) + \\ &+ \sum_{x} Q_{i}^{(3j)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(3j)}, x, b, l_{3j}y_{j}) = w) = \\ &= \sum_{x_{j}=1} \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) \mathbf{P}(\eta_{i} = w - x_{j}y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) + \\ &+ \sum_{x_{j}=1} \sum_{x_{s}=l_{3s}+1} Q_{i}^{(3s)}(x) \mathbf{P}(\eta_{i} = w - x + l_{3s} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) + \\ &+ \sum_{x_{s}=K_{s}} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \mathbf{P}(\eta_{i} = w + (l_{3s} - x_{s})y_{s} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) + \end{split}$$

$$+\sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\mathbf{P}(\eta_{i}=w,\eta_{i}'=y_{j}|\Gamma_{i}=\Gamma^{(3s)},\kappa_{i}=x)+$$

$$+\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\min\{K_{s}-1,w_{s}+l_{3s}\}}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\mathbf{P}(\eta_{i}=(w+(l_{3s}-x_{s})y_{s},\eta_{i}'=y_{j}|\Gamma_{i}=\Gamma^{(3s)},\kappa_{i}=x)+$$

$$+\sum_{x_{j}=0}^{l_{3j}}Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j})\mathbf{P}(\eta_{i}=w,\eta_{i}'=y_{j}|\Gamma_{i}=\Gamma^{(3j)},\kappa_{i}=x)+$$

$$+\sum_{x_{j}=l_{3j}+1}^{\min\{K_{j}-1,w_{j}+l_{3j}\}}Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j})\mathbf{P}(\eta_{i}=w+(l_{3j-x_{j}})y_{j},\eta_{i}'=y_{j}|\Gamma_{i}=\Gamma^{(3j)},\kappa_{i}=x)=$$

$$=\sum_{x_{j}=1}^{w_{j}}\sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}}Q_{i}^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w-x_{j}y_{j})+\sum_{x_{j}=1}^{w_{j}}\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{w_{s}+l_{3s}}Q_{i}^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w-x+l_{3s})+$$

$$+\sum_{x_{s}=K_{s}}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\varphi_{3s}(w+(l_{3s}-x_{s})y_{s})+\sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\varphi_{3s,j}(w)+$$

$$+\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\varphi_{3s,j}(w+(l_{3s}-x_{s})y_{s})+\sum_{x_{j}=0}^{l_{3j}}Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j})\varphi_{3j,j}(w)+$$

$$+\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\varphi_{3s,j}(w+(l_{3s}-x_{s})y_{s})+\sum_{x_{j}=0}^{l_{3j}}Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j})\varphi_{3j,j}(w)+$$

$$+\sum_{x_{j}=l_{3j}+1}^{\min\{K_{j}-1,w_{j}+l_{3j}\}}Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j})\varphi_{3j,j}(w+(l_{3j}-x_{j})y_{j}); (2.23)$$

4) при  $w_j = 0, \, w_s \geq K_s - l_{3s}$  получаем

$$Q_{i+1}^{(3j-2)}(w_{s}y_{s}) =$$

$$= \sum_{x} \sum_{r=1}^{8} Q_{i}^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(r)}, \kappa_{i} = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_{s}y_{s}) =$$

$$= \sum_{x} Q_{i}^{(3s)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3s)}, x, y) = \Gamma^{(3j-2)}, V(\Gamma^{(3s)}, x, b, l_{3s}y_{s}) = w_{j}y_{j}) =$$

$$= \sum_{x_{s}=K_{s}}^{w_{s}+l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \mathbf{P}(\eta_{i} = (w_{s} - x_{s} + l_{3s})y_{s} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) =$$

$$= \sum_{x_{s}=K_{s}}^{w_{s}+l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \mathbf{P}(\eta_{i} = (w_{s} - x_{s} + l_{3s})y_{s} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) =$$

$$= \sum_{x_{s}=K_{s}}^{w_{s}+l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \varphi_{3s,s}((w_{s} - x_{s} + l_{3s})y_{s}). \quad (2.24)$$

Вывод остальных рекуррентных соотношений для одномерных распределений  $Q_{i+1}^{(3j-1)}(w),\,Q_{i+1}^{(3j)}(w),\,Q_{i+1}^{(6+j)}(w)$  при  $j=1,\,2,$  приведен в приложении B.

Рекуррентные соотношения (2.21) – (2.24), (B.1) – (B.7) задают связь одномерных распределений последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  через один шаг.

## 2.4 Вывод рекуррентных соотношений для производящих функций распределений векторной марковской последовательности $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$

Определим производящие функции одномерных распределений векторной марковской последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$  следующим образом. Введем неслучайный вектор  $z=(z_1,z_2)$ , где  $z_j$  при  $j=1,\,2$  — действительная или комплексная переменная и  $|z_j|\leq 1$ . Определим операцию  $z^x=z_1^{x_1}z_2^{x_2}$  при  $x=(x_1,x_2)\in X^2$ . Тогда производящими функциями являются

$$W_i^{(r)}(z) = \sum_{x \in X^2} Q_i^{(r)}(x) z^x, r = \overline{1, 8};$$

$$W_i(z) = \sum_{r=1}^8 W_i^{(r)}(z).$$
(2.25)

Для вывода рекуррентных соотношений для производящих функций  $W_{i+1}^{(r')}(z)$  при  $r'=\overline{1,8}, i>0$ , представим вероятности  $Q_{i+1}^{(r')}(w)$  под знаком суммы через рекуррентные соотношения (2.21)-(2.24), (B.1)-(B.7). Далее проведем преобразование полученного выражения. Обозначим:

$$\overline{W}_i^{(3j)}(z) = \sum_{x_j=0}^{K_j-1} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) z_j^{x_j}.$$

Получим рекуррентные соотношения для производящих функций последовательно для всех  $r'=3j-2,\,3j-1,\,3j,\,6+j.$ 

Для  $W_{i+1}^{(3j-2)}(z)$  получаем:

$$W_{i+1}^{(3j-2)}(z) = \sum_{w_j=0}^{\infty} \sum_{w_s=0}^{\infty} Q_{i+1}^{(3j-2)} z^w =$$

$$= \sum_{w_j=1}^{\infty} \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{x_j=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \varphi_{3s}(w - x_j y_j) z^w +$$

$$+\sum_{w_{j}=1}^{\infty}\sum_{w_{s}=1}^{\infty}\sum_{x_{j}=1}^{\infty}\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{w_{s}+l_{3s}}Q_{i}^{(3s)}(x)\varphi_{3s}(w-x+l_{3s}y_{s})z^{w}+$$

$$+\sum_{w_{j}=0}^{\infty}\sum_{w_{s}=K_{s}-l_{3s}}^{\infty}\sum_{x_{s}=K_{s}}^{\infty}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\varphi_{3s}(w+(l_{3s}-x_{s})y_{s})z^{w}+$$

$$+\sum_{w_{j}=1}^{\infty}\sum_{w_{s}=0}^{\infty}\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\infty}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\varphi_{3s,j}(w)z^{w}+$$

$$+\sum_{w_{j}=1}^{\infty}\sum_{w_{s}=1}^{\infty}\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\infty}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\varphi_{3s,j}(w+(l_{3s}-x_{s})y_{s})z^{w}+$$

$$+\sum_{w_{j}=1}^{\infty}\sum_{w_{s}=0}^{\infty}\sum_{x_{j}=l_{3j}+1}^{\sum l_{3s}}Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j})\varphi_{3j,j}(w)z^{w}+$$

$$+\sum_{w_{j}=1}^{\infty}\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\sum l_{3s}}Q_{i}^{(3j)}(x)\sum_{w_{j}=x_{j}}^{\infty}\sum_{w_{s}=0}^{\infty}\varphi_{3s}(w-x_{j}y_{j})z^{w}=$$

$$=\sum_{x_{j}=1}^{\infty}\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{l_{3s}}Q_{i}^{(3s)}(x)\sum_{w_{j}=x_{j}}^{\infty}\sum_{w_{s}=u_{s}-l_{3s}}^{\infty}\varphi_{3s}(w-x+l_{3s})z^{w}+$$

$$+\sum_{x_{j}=1}^{\infty}\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\sum l_{3s}}Q_{i}^{(3s)}(x)\sum_{w_{j}=x_{j}}^{\infty}\sum_{w_{s}=x_{s}-l_{3s}}^{\infty}\varphi_{3s}(w-x+l_{3s})z^{w}+$$

$$+\sum_{x_{s}=K_{s}}^{\infty}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\sum_{w_{j}=0}^{\infty}\sum_{w_{s}=x_{s}-l_{3s}}^{\infty}\varphi_{3s}(w+(l_{3s}-x_{s})y_{s})z^{w}+$$

$$+\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\sum l_{3s}}Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s})\sum_{w_{j}=1}^{\infty}\sum_{w_{s}=x_{s}-l_{3s}}^{\infty}\varphi_{3s,j}(w+(l_{3s}-x_{s})y_{s})z^{w}+$$

$$+\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\sum l_{3s}}Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j})\sum_{w_{j}=1}^{\infty}\sum_{w_{s}=0}^{\infty}\varphi_{3j,j}(w)z^{w}+$$

$$+\sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\sum l_{3s}}Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j})\sum_{w_{s}=x_{s}-l_{3s}}^{\infty}\varphi_{3j,j}(w+(l_{3j}-x_{j})y_{j})z^{w}. (2.26)$$

Произведем замену переменных, в первой сумме заменим  $b_j = w_j - x_j$ ,  $b_s = w_s$ , во второй сумме положим  $b_j = w_j - x_j$ ,  $b_s = w_s - x_s + l_{3s}$ , в третьей сумме положим  $b_j = w_j$ ,  $b_s = w_s - x_s + l_{3s}$ , в четвертой сумме  $b_j = w_j$ ,  $b_s = w_s$ ,

в пятой сумме  $b_j=w_j,\,b_s=w_s-x_s+l_{3s},\,$ в шестой сумме  $b_j=w_j,\,b_s=w_s,\,$ в седьмой сумме  $b_j=w_j-x_j+l_{3j},\,b_s=w_s.$  В итоге получаем

$$W_{i+1}^{(3j-2)}(z) = \sum_{x_{j}=1}^{\infty} \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) z^{x_{j}} \sum_{b_{j}=0}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3s}(b) z^{b} +$$

$$+ z^{-l_{3s}} \sum_{x_{j}=1}^{\infty} \sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{\infty} Q_{i}^{(3s)}(x) z^{x} \sum_{b_{j}=0}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3s}(b) z^{b} +$$

$$+ z^{-l_{3s}} \sum_{x_{s}=K_{s}}^{\infty} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) z^{x_{s}} \sum_{b_{j}=0}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3s}(b) z^{b} +$$

$$+ \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) \sum_{w_{j}=1}^{\infty} \sum_{w_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3s,j}(w) z^{w} +$$

$$+ z^{-l_{3s}} \sum_{x_{s}=l_{3s}+1}^{K_{s}-1} Q_{i}^{(3s)}(x_{s}y_{s}) z^{x_{s}} \sum_{b_{j}=1}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3s,j}(b) z^{b} +$$

$$+ \sum_{x_{j}=0}^{l_{3j}} Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j}) \sum_{b_{j}=1}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3j,j}(b) z^{b} +$$

$$+ z^{-l_{3j}} \sum_{x_{j}=l_{3i}+1}^{K_{j}-1} Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j}) z^{x_{j}} \sum_{b_{j}=0}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3j,j}(b) z^{b}. \quad (2.27)$$

Обозначим:

$$q_{r}(z) = z^{-l_{r}} \sum_{b_{j}=0}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{r}(b) z^{b}; r = \overline{3j - 2, 3j};$$

$$q_{3j,0}(z) = z^{-l_{3j}} \varphi_{3j,0}(y_{0});$$

$$q_{3s,j}(z) = z^{-l_{3s}} \sum_{b_{j}=1}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3s,j}(b) z^{b};$$

$$q_{3j,j}(z) = z^{-l_{3j}} \sum_{b_{j}=1}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3j,j}(b) z^{b};$$

$$R_{i,j}^{(3j)}(z) = \sum_{x_{j}=0}^{l_{3j}} Q_{i}^{(3j)}(x_{j}y_{j}) q_{3j,j}(z) (z^{l_{3j}} - z^{x_{j}});$$

$$R_{i,j}^{(3s)}(z) = \sum_{x_{i}=1}^{\infty} \sum_{x_{s}=0}^{l_{3s}} Q_{i}^{(3s)}(x) z^{x_{j}} q_{3s}(z) (z^{l_{3s}} - z^{x_{s}}) +$$

$$+\sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) q_{3s,j}(z) (z^{l_{3s}} - z^{x_s}).$$

Тогда

$$\begin{split} W_{i+1}^{(3j-2)}(z) &= \sum_{x_j=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) z^{x_j} z^{l_{3s}} q_{3s}(z) + \sum_{x_j=1}^{\infty} \sum_{x_s=l_{3s}+1}^{\infty} Q_i^{(3s)}(x) z^{x} q_{3s}(z) + \\ &+ \sum_{x_s=k_s}^{\infty} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) z^{x_s} q_{3s,j}(z) + \sum_{x_s=0}^{l_{2s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) z^{l_{3s}} q_{3s,j}(z) + \\ &+ \sum_{x_s=l_{3s}+1}^{K_s-1} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) z^{x_s} q_{3s,j}(z) + \sum_{x_j=0}^{l_{3j}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) z^{l_{3j}} q_{3j,j}(z) + \\ &+ \sum_{x_j=l_{3j}+1}^{K_j-1} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) z^{x_j} q_{3j,j}(z) = \\ &= \sum_{x_j=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3s)}(x) z^{x} q_{3s}(z) + \sum_{x_j=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) z^{x_j} q_{3s}(z) (z^{l_{3s}} - z^{x_s}) + \\ &+ \sum_{x_j=0}^{K_j-1} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) z^{x_j} q_{3j,j}(z) + \sum_{x_j=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3j)}(x_j y_j) q_{3j,j}(z) (z^{l_{3j}} - z^{x_j}) + \\ &+ \sum_{x_s=0}^{K_s-1} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) z^{x_s} q_{3s,j}(z) + \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) q_{3s,j}(z) (z^{l_{3s}} - z^{x_s}) + \\ &+ \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) z^{x_s} q_{3s}(z) - \sum_{x_s=0}^{K_s-1} Q_i^{(3s)}(x_s y_s) z^{x_s} q_{3s}(z) = \\ &= q_{3s}(z) W_i^{(3s)}(z) + q_{3j,j}(z) \overline{W}_i^{(3j)}(z) - q_{3s,0}(z) \overline{W}_i^{(3s)}(z) + R_{i,j}^{(3j)}(z). \quad (2.29) \end{split}$$

В итоге получаем следующее равенство

$$W_{i+1}^{(3j-2)}(z) = q_{3s}(z)W_i^{(3s)}(z) + q_{3j,j}(z)\overline{W}_i^{(3j)}(z) - q_{3s,0}(z)\overline{W}_i^{(3s)}(z) - q_{3s,s}(z)\overline{W}_i^{(3s)}(z) + R_{i,j}^{(3s)}(z) + R_{i,j}^{(3s)}(z).$$
(2.30)

Далее найдем рекуррентные соотношения для  $W_{i+1}^{(3j-1)}(z)$ .

$$\begin{split} W_{i+1}^{(3j-1)}(z) &= \sum_{w_j=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_{i+1}^{(3j-1)} z^w = \\ &= \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{x_j=0}^{1} \sum_{x_s=0}^{2} \sum_{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{3j-2}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) z_s^{w_s} + \\ &+ \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x) \sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) z_s^{w_s} + \\ &+ \sum_{w_j=1}^{\infty} \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{x_j=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{w_j+l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \varphi_{3j-2}(w - x + l_{3j-2} y_j) z^w + \\ &+ \sum_{w_j=1}^{\infty} \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{3j-2}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) z_s^{w_s} + \\ &+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{3j-2}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) z_s^{w_s} + \\ &+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) \sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) z_s^{w_s} + \\ &+ \sum_{x_j=l_{3j-2}+1}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{w_j=1}^{\infty} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x) \varphi_{3j-2}(w - x + l_{3j-2} y_j) z^w + \\ &+ \sum_{x_j=l_{3j-2}+1}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}}^{\infty} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x) \varphi_{3j-2}(w - x + l_{3j-2} y_j) z^w + \\ &+ \sum_{x_j=l_{3j-2}+1}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w - x + l_{3j-2} y_j) z^w + \\ &+ \sum_{x_j=l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w - x + l_{3j-2} y_j) z^w + \\ &+ \sum_{x_j=l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w - x + l_{3j-2} y_j) z^w + \\ &+ \sum_{x_j=l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_j=x_s}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w - x + l_{3j-2} y_j) z^w + \\ &+ \sum_{x_j=l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2}+1}^{\infty} \sum_{w_j=x_j-l_{3j-2$$

Произведем замену переменных, везде положим  $b_s = w_s - x_s$ , а также в суммах с третьей по шестую положим  $b_j = w_j - x_j + l_{3j-2}$ :

$$\begin{split} W_{i+1}^{(3j-1)}(z) &= \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x) z_s^{x_s} \sum_{b_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{3j-2}(b) z_s^{b_s} + \\ &+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) z_s^{x_s} \sum_{b_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=1}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z_s^{b_s} + \\ &+ z_j^{-l_{3j-2}} \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x) z^x \sum_{b_j=1-x_j+l_{3j-2}}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{3j-2}(b) z^w + \\ &+ z_j^{-l_{3j-2}} \sum_{x_j=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=1-x_j+l_{3j-2}}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{3j-2}(b) z^w + \\ &+ z_j^{-l_{3j-2}} \sum_{x_j=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=1-x_j+l_{3j-2}}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z^w + \\ &+ z_j^{-l_{3j-2}} \sum_{x_j=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) z^x \sum_{b_j=1}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z^w + \\ &+ z_j^{-l_{3j-2}} \sum_{x_j=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) \sum_{b_j=1}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z^w + \\ &+ z_j^{-l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) \sum_{b_j=1}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z^w + \\ &+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-2)}(x) z_s^x \sum_{b_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{3j-2}(b) z_s^{b_s} (1 - z_j^{x_j+b_j-l_{3j-2}}) + \\ &+ \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) z_s^{x_s} \sum_{b_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}-x_j} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z_s^{b_s} (1 - z_j^{x_j+b_j-l_{3j-2}}) = \\ &= q_{3j-2}(z) W_i^{(3j-2)}(z) + q_{6+j,j}(z) W_i^{(6+j)}(z) + R_i^{(3j-2)}(z) + R_{i,j}^{(6+j)}(z). \end{split}$$

Итак, получили окончательную формулу

$$W_{i+1}^{(3j-1)}(z) = q_{3j-2}(z)W_i^{(3j-2)}(z) + +q_{6+j,j}(z)W_i^{(6+j)}(z) + R_i^{(3j-2)}(z) + R_{i,j}^{(6+j)}(z),$$
(2.33)

где обозначено:

$$q_{6+j,j}(z) = z_{j}^{-l_{3j-2}} \sum_{b_{j}=1}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z^{b};$$

$$R_{i}^{(3j-2)}(z) = \sum_{x_{j}=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_{s}=0}^{\infty} Q_{i}^{(3j-2)}(x) z_{s}^{x_{s}} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \sum_{b_{j}=0}^{l_{3j-2}-x_{j}} \varphi_{3j-2}(b) z_{s}^{b_{s}} (1 - z_{j}^{x_{j}+b_{j}-l_{3j-2}});$$

$$R_{i,j}^{(6+j)}(z) = \sum_{x_{j}=0}^{l_{3j-2}-1} \sum_{x_{s}=0}^{\infty} Q_{i}^{(6+j)}(x) z_{s}^{x_{s}} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \sum_{b_{j}=1}^{l_{3j-2}-x_{j}} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b) z_{s}^{b_{s}} (1 - z_{j}^{x_{j}+b_{j}-l_{3j-2}}).$$

$$(2.34)$$

Теперь найдем рекуррентные соотношения для  $W_{i+1}^{(3j)}(z)$ :

$$\begin{split} W_{i+1}^{(3j)}(z) &= \sum_{w_j=0}^{\infty} \sum_{w_s=0}^{\infty} Q_{i+1}^{(3j)} z^w = \\ &= \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{b_j=0}^{kl_{3j-1}-x_j} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b_jy_j + (w_s - x_s)y_s) z^{w_s} + \\ &\quad + \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} Q_i^{(6+j)}(x_jy_j + w_sy_s) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) z^{w_s} + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{w_s=k}^{\infty} \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_j=0}^{a_j} Q_i^{(6+j)}(x_jy_j + (w_s - k)y_s) \varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) z^{w_s} + \\ &\quad + \sum_{w_j=1}^{\infty} \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{x_j=0}^{\infty} \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} Q_i^{(6+j)}(w + l_{3j-2}y_j) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) z^w + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{w_j=1}^{\infty} \sum_{w_s=k}^{\infty} \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} Q_i^{(6+j)}(w + a_jy_j - ky_s) \varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) z^w + \\ &\quad + \sum_{w_j=1}^{K_{j-1}} \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{w_j+kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \varphi_{3j-1,k}(x_j,w - x + kl_{3j-1}) z^w + \\ &\quad + \sum_{w_j=K_j} \sum_{w_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_j=0}^{w_j+n_jl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \varphi_{3j-1,n_j}(x_j,w - x + n_jl_{3j-1}) z^w = \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{b_s=0}^{kl_{3j-1}-x_j} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b_jy_j + (w_s - x_s)y_s) z^{w_s} + \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{b_s=0}^{kl_{3j-1}-x_j} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b_jy_j + (w_s - x_s)y_s) z^{w_s} + \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{b_s=0}^{kl_{3j-1}-x_j} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b_jy_j + (w_s - x_s)y_s) z^{w_s} + \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{b_s=0}^{kl_{3j-1}-x_s} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b_jy_j + (w_s - x_s)y_s) z^{w_s} + \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{k=0}^{kl_{3j-1}-x_s} \sum_{w_s=x_s}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b_jy_j + (w_s - x_s)y_s) z^{w_s} + \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{k=0}^{kl_{3j-1}-x_s} \sum_{x_s=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b_jy_j + (w_s - x_s)y_s) z^{w_s} + \\ &\quad = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{x_s=0}^$$

$$+\sum_{x_{j}=0}^{l_{3j-2}}\sum_{w_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(6+j)}(x_{j}y_{j}+w_{s}y_{s})\varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_{0})z^{w_{s}}+\\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{a_{j}=0}^{l_{3j-2}}\sum_{x_{j}=0}^{a_{j}}\sum_{w_{s}=k}^{\infty}Q_{i}^{(6+j)}(x_{j}y_{j}+(w_{s}-k)y_{s})\varphi_{6+j,s,a_{j}}(ky_{s})z^{w_{s}}+\\ +\sum_{w_{j}=1}^{\infty}\sum_{w_{s}=0}^{\infty}\sum_{w_{s}=k}^{\infty}Q_{i}^{(6+j)}(w+l_{3j-2}y_{j})\varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_{0})z^{w}+\\ +\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{x_{s}=k}^{\infty}\sum_{a_{j}=0}^{\infty}Q_{i}^{(6+j)}(w+a_{j}y_{j}-ky_{s})\varphi_{6+j,s,a_{j}}(ky_{s})z^{w}+\\ +\sum_{k=1}^{n_{j}}\sum_{x_{j}=0}^{kl_{3j-1}}\sum_{x_{s}=0}^{\infty}\sum_{w_{j}=1}^{\infty}\sum_{w_{s}=x_{s}}^{k_{j}-1}Q_{i}^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,k}(x_{j},w-x+kl_{3j-1})z^{w}+\\ +\sum_{k=1}^{n_{j}}\sum_{x_{j}=kl_{3j-1}}^{K_{j}-1}\sum_{x_{s}=0}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-kl_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{s}=x_{s}}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},w-x+n_{j}l_{3j-1})z^{w}+\\ +\sum_{x_{j}=1}^{\infty}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{s}=x_{s}}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},w-x+n_{j}l_{3j-1})z^{w}+\\ +\sum_{x_{j}=K_{j}+n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{x_{s}=0}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{s}=x_{s}}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},w-x+n_{j}l_{3j-1})z^{w}+\\ +\sum_{x_{j}=K_{j}+n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{s}=x_{s}}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},w-x+n_{j}l_{3j-1})z^{w}+\\ +\sum_{x_{j}=K_{j}+n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},w-x+n_{j}l_{3j-1})z^{w}+\\ +\sum_{x_{j}=K_{j}+n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},w-x+n_{j}l_{3j-1})z^{w}+\\ +\sum_{x_{j}=K_{j}+n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},w-x+n_{j}l_{3j-1})z^{w}+\\ +\sum_{x_{j}=K_{j}+n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},w-x+n_{j}l_{3j-1})z^{w}+\\ +\sum_{x_{j}=X_{j}+n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum_{w_{j}=x_{j}-n_{j}l_{3j-1}}^{\infty}\sum$$

Произведем замену переменных, пусть в первой сумме  $b_s=w_s-x_s$ , во второй сумме положим  $x_s=w_s$ , в третьей сумме  $x_s=w_s-1$ , в четвертой сумме  $x_s=w_s-2$ , в пятой сумме  $b_j=w_j+l_{3j-2},\,b_s=w_s$ , в шестой сумме  $b_j=w_j+a_j,\,b_s=w_s-1$ , в седьмой сумме  $b_j=w_j+a_j,\,b_s=w_s-2$ , в восьмой сумме и девятой сумме положим  $b_j=w_j-x_j+kl_{3j-1},\,b_s=w_s-x_s$ , в десятой сумме и одиннадцатой сумме положим  $b_j=w_j-x_j+n_jl_{3j-1}$  и  $b_s=w_s-x_s$ . Тогда получаем

$$W_{i+1}^{(3j)}(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^{x_s} \sum_{b_j=0}^{kl_{3j-1}-x_j} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z_s^{b_s} +$$

$$+ \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) \sum_{x_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) z_s^{x_s} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) z_s^k \sum_{x_j=0}^{a_j} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(x) z^{x_s} +$$

$$\begin{split} &+ \varphi_{6+j,0,l_3j-2}(y_0) \sum_{b_j=1+l_{3j-2}}^{\infty} z^{-l_{3j-2}} \sum_{b_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(b) z^b + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a_j=0}^{l_{3j-1}} \varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) z_j^{-a_j} z_s^k \sum_{b_j=1+a_j}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(b) z^b + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_j} z_j^{-kl_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=1-x_j+kl_{3j-1}}^{K_j-1-x_j+kl_{3j-1}} \sum_{b_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z^b + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_j} z_j^{-kl_{3j-1}} \sum_{x_j=kl_{3j-1}+1}^{K_j-1+kl_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{K_j-1-x_j+kl_{3j-1}} \sum_{b_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z^b + \\ &+ z_j^{-n_j l_{3j-1}} \sum_{x_j=K_j+n_j l_{3j-1}}^{K_j-1+n_j l_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \varphi_{3j-1,n_j}(x_j,b) z^b + \\ &+ z_j^{-n_j l_{2j-1}} \sum_{x_j=K_j+n_j l_{3j-1}}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \varphi_{3j-1,n_j}(x_j,b) z^b = \\ &= \varphi_{6+j,0,l_3j-2}(y_0) z_j^{-l_{3j-2}} \sum_{b_j=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(b) z^b + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) z_j^{-l_{3j-2}} \sum_{b_j=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(b) z^b + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) z_s^k \sum_{b_j=0}^{a_j} \sum_{b_j=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(b) z_s^{b_s} (1-z_j^{b_j-l_{3j-2}}) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \sum_{b_j=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z^b + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j=0}^{kl_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \sum_{b_j=0}^{k_{3j-1}-x_j} \sum_{b_j=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z^b + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_j} z_j^{-kl_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \sum_{b_j=0}^{k_{3j-1}-x_j+kl_{3j-1}} \sum_{b_j=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z^b + \\ &- \sum_{k=1}^{n_j} z_j^{-kl_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{k_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \sum_{b_j=0}^{k_{3j-1}-x_j+kl_{3j-1}} \sum_{b_j=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z^b + \\ &- \sum_{k=1}^{n_j} z_j^{-kl_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{k_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \sum_{b_j=0}^{k_{3j-1}-x_j+kl_{3j-1}} \sum_{b_j=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z^b + \\ &- \sum_{k=1}^{n_j} z_j^{-kl_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{k_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{k_$$

$$\begin{split} &+z_{j}^{-n_{j}l_{3j-1}}\sum_{x_{j}=0}^{K_{j}-1+n_{j}l_{3j-1}}\sum_{x_{s}=0}^{\infty}\sum_{b_{j}=0}^{\infty}\sum_{b_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)z^{x}\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},b)z^{b}+\\ &+z_{j}^{-n_{j}l_{3j-1}}\sum_{x_{j}=K_{j}+n_{j}l_{3j-1}}\sum_{x_{s}=0}^{\infty}\sum_{b_{j}=0}^{\infty}\sum_{b_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)z^{x}\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},b)z^{b}-\\ &-z_{j}^{-n_{j}l_{3j-1}}\sum_{x_{j}=0}^{K_{j}-1+n_{j}l_{3j-1}}\sum_{x_{s}=0}^{\infty}\sum_{b_{j}=0}^{K_{j}-1-x_{j}+n_{j}l_{3j-1}}\sum_{b_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)z^{x}\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},b)z^{b}-\\ &=W_{i}^{(6+j)}(z)(\varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_{0})z_{j}^{-l_{3j-2}}+\sum_{a_{j}=0}^{k_{3j-2}}z_{j}^{-a_{j}}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{6+j,s,a_{j}}(ky_{s})z_{s}^{k}+\\ &+\varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_{0})\sum_{b_{j}=0}^{l_{3j-2}}\sum_{b_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(6+j)}(b)z_{s}^{b}(1-z_{j}^{b_{j}-l_{3j-2}})+\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{a_{j}=0}^{l_{3j-2}}\varphi_{6+j,s,a_{j}}(ky_{s})z_{s}^{k}\sum_{b_{j}=0}^{a_{j}}\sum_{b_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(6+j)}(b)z_{s}^{b}(1-z_{j}^{b_{j}-l_{3j-2}})+\\ &+\sum_{k=1}^{n_{j}-1}z_{j}^{-kl_{3j-1}}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{x_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)z^{x}\sum_{b_{j}=0}^{K_{j}-1-x_{j}+kl_{3j-1}}\sum_{b_{s}=0}^{\infty}\varphi_{3j-1,k}(x_{j},b)z^{b}+\\ &+\sum_{k=1}^{n_{j}}\sum_{x_{j}=0}^{K_{j}-1+kl_{3j-1}}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{x_{s}=0}^{\infty}\sum_{b_{j}=0}^{\infty}\sum_{b_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)z^{x}\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},b)z^{b}+\\ &+z_{j}^{-n_{j}l_{3j-1}}\sum_{x_{j}=0}^{K_{j}-1+n_{j}l_{3j-1}}\sum_{x_{s}=0}^{\infty}\sum_{b_{j}=0}^{\infty}\sum_{b_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)z^{x}\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},b)z^{b}+\\ &+z_{j}^{-n_{j}l_{3j-1}}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{x_{j}=0}^{\infty}\sum_{b_{j}=0}^{\infty}\sum_{b_{s}=0}^{\infty}Q_{i}^{(3j-1)}(x)z^{x}\varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j},b)z^{b}. \end{split}$$

Обозначим:

$$\Phi_{i,k}^{(3j-1)}(z) = \sum_{x_j=0}^{K_j + k l_{3j-1} - 1} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x z_j^{-k l_{3j-1}} \sum_{b \in X^2} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z^b, k = \overline{1,n_j-1};$$

$$R_i^{(3j-1)}(z) = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_i=0}^{k l_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z_s^{x_s} \sum_{b_i=0}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_j,b) z_s^{b_s} (1 - z_j^{b_j + x_j - k l_{3j-1}}).$$

Тогда

$$\begin{split} W_{i+1}^{(3j)}(z) &= W_i^{(6+j)}(z) (\varphi_{6+j,0,l_3j-2}(y_0) z_j^{-l_{3j-2}} + \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} z_j^{-a_j} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) z_s^k + \\ &+ \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) \sum_{b_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{b_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(b) z_s^{b_s} (1 - z_j^{b_j - l_{3j-2}}) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) z_s^k \sum_{b_j=0}^{a_j} \sum_{b_s=0}^{\infty} Q_i^{(6+j)}(b) z_s^{b_s} (1 - z_j^{b_j - l_{3j-2}}) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_j-1} \Phi_{i,k}^{(3j-1)}(z) + R_i^{(3j-1)}(z) + \\ &+ z_j^{-n_j l_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{\infty} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x P(\eta_i = b | \Delta_i = n_j T_{3j-1}) z^b + \\ &+ z_j^{-n_j l_{3j-1}} \sum_{x_j=0}^{K_j-1+n_j l_{3j-1}} \sum_{x_s=0}^{\infty} \sum_{b_j=0}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x z^b [P(\eta_i = b | \Delta_i = n_j T_{3j-1}) - \\ &- \sum_{k=1}^{n_j-1} \sum_{m_i=0}^{b_j} \sum_{m_s=0}^{b_s} \varphi_{3j-1,k}(x_j,m) P(\eta_i = b - m | \Delta_i = (n_j - k) T_{3j-1})]. \end{split}$$

Введем обозначение:

$$q_{3j-1}^{k}(z) = z_{j}^{-kl_{3j-1}} \sum_{b_{j}=0}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} P(\eta_{i} = b | \Delta_{i} = kT_{3j-1}) z^{b}, k = \overline{1, n_{j}};$$

$$q_{6+j,s}(z) = \sum_{a_{i}=0}^{l_{3j-2}} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{6+j,s,a_{j}}(ky_{s}) z_{s}^{k}.$$

$$(2.35)$$

Далее получаем

$$W_{i+1}^{(3j)}(z) = W_{i}^{(6+j)}(z)(\varphi_{6+j,0,l_{3}j-2}(y_{0})z_{j}^{-l_{3j-2}} + \sum_{a_{j}=0}^{l_{3j-2}} z_{j}^{-a_{j}} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{6+j,s,a_{j}}(ky_{s})z_{s}^{k} +$$

$$+ \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_{0}) \sum_{b_{j}=0}^{l_{3j-2}} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} Q_{i}^{(6+j)}(b)z_{s}^{b_{s}}(1 - z_{j}^{b_{j}-l_{3j-2}}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a_{s}=0}^{l_{3j-2}} \varphi_{6+j,s,a_{j}}(ky_{s})z_{s}^{k} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} Q_{i}^{(6+j)}(b)z_{s}^{b_{s}}(1 - z_{j}^{b_{j}-a_{j}}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n_{j}-1} \Phi_{i,k}^{(3j-1)}(z) + R_{i}^{(3j-1)}(z) + q_{3j-1}^{n_{j}}(z)W_{i}^{3j-1}(z) + \sum_{k=1}^{n_{j}-1} \sum_{k=1}^{K_{j}-1+n_{j}l_{3j-1}} \sum_{x_{s}=0}^{\infty} Q_{i}^{(3j-1)}(x)z^{x} \sum_{m_{j}=0}^{\infty} \sum_{m_{s}=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,k}(x_{j},m)z^{m} \times \sum_{b_{j}=0}^{\infty} \sum_{b_{s}=0}^{\infty} P(\eta_{i} = b|\Delta_{i} = (n_{j} - k)T_{3j-1})z^{b}.$$

Окончательное выражение для  $W_{i+1}^{(3j)}(z)$  имеет вид:

$$W_{i+1}^{(3j)}(z) = \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0)W_i^{(6+j)}(z) + q_{6+j,s}W_i^{(6+j)}(z) + q_{6+j,s}W_i^{(6+j)}(z) + q_{3j-1}^{n_j}W_i^{(3j-1)}(z) + \sum_{k=1}^{n_j-1} (1 - q_{3j-1}^{n_j-k}(z))\Phi_{i,k}^{(3j-1)}(z) + R_i^{(3j-1)}(z).$$
(2.36)

Найдем выражение для  $W_{i+1}^{(6+j)}(z)$ :

$$\begin{split} W_{i+1}^{(6+j)}(z) &= \sum_{w_s=0}^{K_s - l_{3s} - 1} Q_{i+1}^{(6+j)} z_s^{w_s} = \\ &= \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \varphi_{3s}(y_0) + \sum_{w_s=1}^{K_s - l_{3s} - 1} Q_i^{(3s)}((w_s + l_{3s})y_s) \varphi_{3s}(y_0) z_s^{w_s} = \\ &= \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \varphi_{3s}(y_0) + z_s^{-l_{3s}} \sum_{w_s=l_{3s} + 1}^{K_s - 1} Q_i^{(3s)}(b_s y_s) \varphi_{3s}(y_0) z_s^{b_s} = \\ &= z_s^{-l_{3s}} \sum_{w_s=0}^{K_s - 1} Q_i^{(3s)}(b_s y_s) \varphi_{3s}(y_0) z_s^{b_s} + z_s^{-l_{3s}} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \varphi_{3s}(y_0) (z_s^{l_{3s}} - z_s^{x_s}) = \\ &= g_{3s,0}(z) W_i^{(3s)}(z) + R_{i,0}^{(3s)}(z), \end{split}$$

где

$$R_{i,0}^{(3s)}(z) = z_s^{-l_{3s}} \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \varphi_{3s}(y_0) (z_s^{l_{3s}} - z_s^{x_s}).$$

Таким образом, для  $W_{i+1}^{(6+j)}(z)$  имеем

$$W_{i+1}^{(6+j)}(z) = q_{3s,0}(z)W_i^{(3s)}(z) + R_{i,0}^{(3s)}(z).$$
(2.37)

Далее перейдем к получению рекуррентных соотношений для производящих функций через несколько шагов. Состояния  $\Gamma^{(r)}$ ,  $r=\overline{1,6}$ , назовем состояниями основного цикла, так как при больших очередях алгоритм начинает

функционировать как циклический. На практике отсутствие стационарного распределения означает бесконечно возрастающие очереди. Поэтому необходимо выявить динамику очередей через 6 шагов. Проитерируем рекуррентные соотношения для производящих функций за один шаг шесть раз (по числу состояний основного цикла). Возможны три различных случая, так как итерирование можно начать с производящих функций  $W_{6i}^{(3j-2)}(z)$ ,  $W_{6i}^{(3j-1)}(z)$ ,  $W_{6i}^{(3j)}(z)$ .

Для упрощения записи результатов итерирования введем следующие обозначения для произвольных  $a', b' \in X$ :

$$a' \oplus b' = \begin{cases} a' + b', & a' + b' \le 6; \\ a' + b' - 6, & a' + b' > 6; \end{cases}$$
$$a' \oplus b' = \begin{cases} a' - b', & a' - b' \ge 1; \\ a' - b' + 6, & a' - b' < 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$q(z) = q_1(z)q_2^{n_1}(z)q_3(z)q_4(z)q_5^{n_2}(z)q_6(z).$$

Далее, при  $r, r' = \overline{1,6}$  введем следующие обозначения:

$$\overline{r} = \begin{cases} r - 1, & r > 1; \\ 6, & r = 1; \end{cases}$$

$$\delta(r) = n_1 \delta_{2,r} + n_2 \delta_{5,r};$$

$$\overline{q_{r,r'}}(z) = \begin{cases} q_r^{\delta(r)}(z) \times q_{r \oplus 1}^{\delta(r \oplus 1)}(z) \times \ldots \times q_{r'}^{\delta(r')}(z), & r' \neq \overline{r}; \\ 1, & r' = \overline{r}. \end{cases}$$

Если итерирование начинается с производящей функции  $W_{6i}^{(3j)}(z)$ , тогда

$$W_{6i+6}^{(3j)}(z) = q_{3j-1}^{n_j}(z) \{q_{3j-2}(z) \{q_{3s}(z) \{q_{3s-1}(z) \{q_{3s-2}(z) \{q_{3j}(z) W_{6i}^{(3j)}(z) + q_{3s,s}(z) \overline{W}_{6i}^{(3s)}(z) - q_{3j,0}(z) \overline{W}_{6i}^{(3j)}(z) - q_{3j,j}(z) \overline{W}_{6i}^{(3j)}(z) + R_{6i,s}^{(3j)}(z) + R_{6i,s}^{(3s)}(z) \} + q_{6+s,s}(z) W_{6i+1}^{(6+s)}(z) + R_{6i+1}^{(3s-2)}(z) + R_{6i+1,s}^{(6+s)}(z) \} + q_{6+s,j}(z) W_{6i+2}^{(6+s)}(z) + \varphi_{6+s,0,l_{3s-2}}(y_0) W_{6i+2}^{(6+s)}(z) + \sum_{k=1}^{n_s-1} (1 - q_{3s-1}^{n_s-k}(z)) \Phi_{6i+2,k}^{(3s-1)}(z) + R_{6i+2}^{(3s-1)}(z) \} + q_{6i+2,k}^{(3s-1)}(z) + R_{6i+2}^{(3s-1)}(z) \} + q_{6i+2,k}^{(3s-1)}(z) + q_{6i+2,k}^{(3s-1)}(z)$$

$$+q_{3j,j}(z)\overline{W}_{6i+3}^{(3j)}(z) - q_{3s,0}(z)\overline{W}_{6i+3}^{(3s)}(z) - q_{3s,s}(z)\overline{W}_{6i+3}^{(3s)}(z) + R_{6i+3,j}^{(3s)}(z) + R_{6i+3,j}^{(3j)}(z)\} + \\ + q_{6+j,j}(z)W_{6i+4}^{(6+j)}(z) + R_{6i+4}^{(3j-2)}(z) + R_{6i+4,j}^{(6+j)}(z)\} + \\ + q_{6+j,s}(z)W_{6i+5}^{(6+j)}(z) + \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0)W_{6i+5}^{(6+j)}(z) + \\ + \sum_{k=1}^{n_j-1} (1 - q_{3j-1}^{n_j-k}(z))\Phi_{6i+5,k}^{(3j-1)}(z) + R_{6i+5}^{(3j-1)}(z).$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые:

$$\begin{split} W_{6i+6}^{(3j)}(z) &= q(z)W_{6i}^{(3j)}(z) + \overline{q}_{3s-2,3j-1}(z)R_{6i,s}^{(3s)}(z) + \overline{q}_{3s-2,3j-1}(z)R_{6i,s}^{(3j)}(z) + \\ &+ \overline{q}_{3s-1,3j-1}(z)R_{6i+1,s}^{(6+s)}(z) + \overline{q}_{3s-1,3j-1}(z)R_{6i+1}^{(3s-2)}(z) + \\ &+ \overline{q}_{3s-3j-1}(z)R_{6i+2}^{(3s-2)}(z) + \overline{q}_{3j-2,3j-1}(z)R_{6i+3,j}^{(3s)}(z) + \overline{q}_{3j-2,3j-1}(z)R_{6i+3,j}^{(3j)}(z) + \\ &+ \overline{q}_{3j-1,3j-1}(z)R_{6i+4}^{(3j-2)}(z) + \overline{q}_{3j-1,3j-1}(z)R_{6i+4,j}^{(3s)}(z) + R_{6i+5}^{(3j-1)}(z) \\ &+ \overline{q}_{3s-2,3j-1}(z)\{q_{3s,s}(z)\overline{W}_{6i}^{(3s)}(z) - q_{3j,0}(z)\overline{W}_{6i}^{(3j)}(z) - q_{3j,j}(z)\overline{W}_{6i}^{(3j)}(z)\} + \\ &+ \overline{q}_{3j-2,3j-1}(z)\{q_{3j,j}(z)\overline{W}_{6i+3}^{(3j)}(z) - q_{3s,0}(z)\overline{W}_{6i+3}^{(3s)}(z) - q_{3s,s}(z)\overline{W}_{6i+3}^{(3s)}(z)\} + \\ &+ \overline{q}_{3s-1,3j-1}(z)q_{6+s,s}(z)W_{6i+1}^{(6+s)}(z) + \\ &+ \overline{q}_{3s,3j-1}(z)q_{6+s,j}(z)W_{6i+2}^{(6+s)}(z) + \overline{q}_{3s,3j-1}(z)\varphi_{6+s,0,l_{3s-2}}(y_0)W_{6i+2}^{(6+s)}(z) + \\ &+ \overline{q}_{3j-1,3j-1}(z)q_{6+s,j}(z)W_{6i+4}^{(6+s)}(z) + q_{6+j,s}(z)W_{6i+5}^{(6+f)}(z) + \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0)W_{6i+5}^{(6+f)}(z) + \\ &+ \overline{q}_{3s,3j-1}(z)\sum_{k=1}^{n_s-1}(1-q_{3s-1}^{n_s-k}(z))\Phi_{6i+2,k}^{(3s-1)}(z) + \sum_{k=1}^{n_j-1}(1-q_{3j-1}^{n_j-k}(z))\Phi_{6i+5,k}^{(3j-1)}(z). \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$Degree Degree Degree$$

$$+\sum_{k=1}^{n_{s}-1} (1 - q_{3s-1}^{n_{s}-k}(z)) \Phi_{6i+4,k}^{(3s-1)}(z) + R_{6i+4}^{(3s-1)}(z) \} +$$

$$+ q_{3j,j}(z) \overline{W}_{6i+5}^{(3j)}(z) - q_{3s,0}(z) \overline{W}_{6i+5}^{(3s)}(z) - q_{3s,s}(z) \overline{W}_{6i+5}^{(3s)}(z) +$$

$$+ R_{6i+5,j}^{(3s)}(z) + R_{6i+5,j}^{(3j)}(z).$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые:

$$W_{6i+6}^{(3j-2)}(z) = q(z)W_{6i}^{(3j-2)}(z) + \overline{q}_{3j-1,3s}(z)R_{6i}^{(3j-2)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3j-1,3s}(z)R_{6i,j}^{(6+j)}(z) + \overline{q}_{3j,3s}(z)R_{6i+1}^{(3j-1)}(z) + \overline{q}_{3s-2,3s}(z)R_{6i+2,s}^{(3j)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3s-2,3s}(z)R_{6i+2,s}^{(3s)}(z) + \overline{q}_{3s-1,3s}(z)R_{6i+3}^{(3s-2)}(z) + \overline{q}_{3s-1,3s}(z)R_{6i+3,s}^{(6+s)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3s-2,3s}(z)R_{6i+2,s}^{(3s-1)}(z) + R_{6i+5,j}^{(3s)}(z) + R_{6i+5,j}^{(3j)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3j,3s}(z)R_{6i+2,j}^{(6+j)}(z) + \overline{q}_{3j,3s}(z)R_{6i+2,j}^{(6+j)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3j-1,3s}(z)R_{6i+2,j}^{(6+j)}(z) + \overline{q}_{3j,3s}(z)R_{6i+2,j}^{(6+j)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3j,3s}(z)R_{6i+2,s}^{(6+j)}(z) + \overline{q}_{3s-1,3s}(z)R_{6i+3,s}^{(6+s)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3s,3s}(z)R_{6i+2,s}^{(6+s)}(z) + \overline{q}_{3s,3s}(z)R_{6i+2,s}^{(6+s)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3s-2,3s}(z)R_{6i+2,s}^{(6+s)}(z) - \overline{q}_{3j,0}(z)\overline{W}_{6i+2}^{(3j)}(z) - \overline{q}_{3j,j}(z)\overline{W}_{6i+2}^{(3j)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3j,3s}(z)\overline{W}_{6i+5}^{(3j)}(z) - \overline{q}_{3s,0}(z)\overline{W}_{6i+2}^{(3s)}(z) - \overline{q}_{3s,s}(z)\overline{W}_{6i+2}^{(3s)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3j,3s}(z)\sum_{k=1}^{n_j-1}(1 - \overline{q}_{3j-1}^{n_j-k}(z))\Phi_{6i+1,k}^{(3j-1)}(z) + \overline{q}_{3s,3s}(z)\sum_{k=1}^{n_s-1}(1 - \overline{q}_{3s-1}^{n_s-k}(z))\Phi_{6i+4,k}^{(3s-1)}(z).$$

$$(2.39)$$

Если начинаем с  $W_{6i}^{(3j-1)}(z)$ , тогда

$$\begin{split} W_{6i+6}^{(3j-1)}(z) &= q_{3j-2}(z) \{q_{3s}(z) \{q_{3s-1}^{n_s}(z) \{q_{3s-2}(z) \{q_{3j}(z) \{q_{3j-1}^{n_j}(z) W_{6i}^{(3j-1)}(z) + \\ &+ q_{6+j,j}(z) W_{6i}^{(6+j)}(z) + \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) W_{6i}^{(6+j)}(z) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_j-1} (1 - q_{3j-1}^{n_j-k}(z)) \Phi_{6i,k}^{(3j-1)}(z) + R_{6i}^{(3j-1)}(z) \} + q_{3s,s}(z) \overline{W}_{6i+1}^{(3s)}(z) - \\ &- q_{3j,0}(z) \overline{W}_{6i+1}^{(3j)}(z) - q_{3j,j}(z) \overline{W}_{6i+1}^{(3j)}(z) + R_{6i+1,s}^{(3j)}(z) + R_{6i+1,s}^{(3s)}(z) \} + \\ &+ q_{6+s,s}(z) W_{6i+2}^{(6+s)}(z) + R_{6i+2}^{(3s-2)}(z) + R_{6i+2,s}^{(6+s)}(z) \} + \\ &+ q_{6+s,s}(z) W_{6i+3}^{(6+s)}(z) + \varphi_{6+s,0,l_{3s-2}}(y_0) W_{6i+3}^{(6+s)}(z) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n_s-1} (1 - q_{3s-1}^{n_s-k}(z)) \Phi_{6i+3,k}^{(3s-1)}(z) + R_{6i+3}^{(3s-1)}(z) \} + q_{3j,j}(z) \overline{W}_{6i+4}^{(3j)}(z) - \\ &- q_{3s,0}(z) \overline{W}_{6i+4}^{(3s)}(z) - q_{3s,s}(z) \overline{W}_{6i+4}^{(3s)}(z) + R_{6i+4,j}^{(3s)}(z) + R_{6i+4,j}^{(6+j)}(z) \} + \\ &+ q_{6+j,j}(z) W_{6i+5}^{(6+j)}(z) + R_{6i+5}^{(3j-2)}(z) + R_{6i+5,j}^{(6+j)}(z). \end{split}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые:

$$W_{6i+6}^{(3j-1)}(z) = q(z)W_{6i}^{(3j-1)}(z) + \overline{q}_{3j,3j-2}(z)R_{6i}^{(3j-1)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3s-2,3j-2}(z)R_{6i+1,s}^{(3j)}(z) + \overline{q}_{3s-2,3j-2}(z)R_{6i+1,s}^{(3s)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3s-1,3j-2}(z)R_{6i+2}^{(3s-2)}(z) + \overline{q}_{3s-1,3j-2}(z)R_{6i+2,s}^{(6+s)}(z) + \overline{q}_{3s,3j-2}(z)R_{6i+3}^{(3s-1)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3j-2,3j-2}(z)R_{6i+4,j}^{(3s)}(z) + \overline{q}_{3j-2,3j-2}(z)R_{6i+4,j}^{(3j)}(z) + R_{6i+5}^{(3j-2)}(z) + R_{6i+5,j}^{(6+j)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3j,3j-2}(z)\sum_{k=1}^{n_j-1}(1 - q_{3j-1}^{n_j-k}(z))\Phi_{6i,k}^{(3j-1)}(z) + \overline{q}_{3s,3j-2}(z)\sum_{k=1}^{n_s-1}(1 - q_{3s-1}^{n_s-k}(z))\Phi_{6i+3,k}^{(3s-1)}(z) +$$

$$+ \overline{q}_{3j,3j-2}(z)\{q_{6+j,j}(z)W_{6i}^{(6+j)}(z) + \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0)W_{6i}^{(6+j)}(z)\} +$$

$$+ \overline{q}_{3s-2,3j-2}(z)\{q_{3s,s}(z)\overline{W}_{6i+1}^{(3s)}(z) - q_{3j,0}(z)\overline{W}_{6i+1}^{(3j)}(z) - q_{3j,j}(z)\overline{W}_{6i+1}^{(3j)}(z)\} +$$

$$+ \overline{q}_{3s-1,3j-2}(z)q_{6+s,s}(z)W_{6i+2}^{(6+s)}(z) + \overline{q}_{3s,3j-2}(z)\{q_{6+s,s}(z)W_{6i+3}^{(6+s)}(z) +$$

$$+ \varphi_{6+s,0,l_{3s-2}}(y_0)W_{6i+3}^{(6+s)}(z)\} + \overline{q}_{3j-2,3j-2}(z)\{q_{3j,j}(z)\overline{W}_{6i+4}^{(3j)}(z) -$$

$$- q_{3s,0}(z)\overline{W}_{6i+4}^{(3s)}(z) - q_{3s,s}(z)\overline{W}_{6i+4}^{(3s)}(z)\} + q_{6+j,j}(z)W_{6i+5}^{(6+j)}(z).$$

$$(2.40)$$

Теперь при  $i \ge 0; j, s = 1, 2; j \ne s$ , введем следующие обозначения:

$$R_{j,6i}^{(r)}(z) = \sum_{v=3j-2}^{3j-1} \overline{q}_{v\oplus 1,\overline{r}}(z) R_{6i+(v\ominus r)}^{(v)}(z) + \overline{q}_{3s-2,\overline{r}}(z) R_{6i+(3j\ominus r),s}^{(3j)}(z) + \overline{q}_{3j-2,\overline{r}}(z) R_{6i+(3s\ominus r),j}^{(3j)}(z) + \overline{q}_{3j-1,\overline{r}}(z) R_{6i+(3j-2)\ominus r),j}^{(6+j)}(z);$$

$$\Psi_{j,6i}^{(r)}(z) = \overline{q}_{3j,\overline{r}}(z) \sum_{k=1}^{n_j-1} (1 - q_{3j-1}^{n_j-k}(z)) \Phi_{6i+((3j-1)\ominus r),k}^{(3j-1)}(z);$$

$$\Upsilon_{6i}^{(r)}(z) = \sum_{j=1}^{2} \{ \overline{q}_{3j,\overline{r}}(z) (q_{6+j,j} + \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0)) W_{6i+((3j-1)\ominus r)}^{(6+j)}(z) + q_{6+j,j}(z) \overline{q}_{3j-1,\overline{r}} W_{6i+((3j-2)\ominus r)}^{(6+j)}(z) - q_{3j,0}(z) \overline{q}_{3s-2,\overline{r}} \tilde{W}_{6i+(3j)\ominus r)}^{(3j)}(z) - q_{3j,j}(z) \overline{q}_{3s-2,\overline{r}} \tilde{W}_{6i+(3j)\ominus r)}^{(3j)}(z) + q_{3j,j}(z) \overline{q}_{3j-2,\overline{r}} \tilde{W}_{6i+(3s)\ominus r)}^{(3j)}(z) \}.$$

Тогда при  $i \ge 0, r = \overline{1,6}$  получим:

$$W_{6(i+1)}^{(r)}(z) = q(z)W_{6i}^{(r)}(z) + \Upsilon_{6i}^{(r)}(z) + \sum_{j=1}^{2} \left\{ R_{j,6i}^{(r)}(z) + \Psi_{j,6i}^{(r)}(z) \right\}. \tag{2.41}$$

При  $i \ge 0$  введем следующие обозначения:

$$R_{j,6i}(z) = \sum_{r=1}^{6} R_{j,6i}^{(r)}(z);$$

$$\Psi_{j,6i}(z) = \sum_{r=1}^{6} \Psi_{j,6i}^{(r)}(z).$$

Далее для любого  $i \ge 0$  обозначим

$$\Upsilon_{6i}(z) = \sum_{r=1}^{6} \Upsilon_{6i}^{(r)}(z) - \sum_{j=1}^{2} q(z) W_{6i}^{(6+j)}(z) + \sum_{j=1}^{2} W_{6(i+1)}^{(6+j)}(z).$$

Просуммируем (2.41) по всем возможным r, затем прибавим и вычтем из правой части полученного равенства слагаемое  $q(z)\sum_{j=1}^2 W_{6i}^{(6+j)}(z)$ , а к левой части прибавим и вычтем из неё слагаемое  $\sum_{j=1}^2 W_{6(i+1)}^{(6+j)}(z)$ . Тогда:

$$W_{6(i+1)}(z) = q(z)W_{6i}(z) + \Upsilon_{6i}(z) + \sum_{j=1}^{2} \{R_{j,6i}(z) + \Psi_{j,6i}(z)\}, i \ge 0.$$
 (2.42)

Соотношения (2.41) и (2.42) будут использованы для вывода необходимых и достаточных условий существования предельного распределения изучаемой марковской последовательности.

## Глава 3. Изучение предельных свойств функционирования системы адаптивного управления конфликтными потоками Кокса-Льюиса

В главе 3 предложен метод определения условий существования предельного распределения последовательности состояний системы управления конфликтными неординарными потоками. При выводе необходимых и достаточных условий существования стационарного распределения использованы рекуррентные соотношения для производящих функций одномерных распределений марковской последовательности состояний. Доказан ряд теорем, которые содержат легко проверяемые условия существования предельного распределения, зависящие от параметров системы.

## 3.1 Вывод необходимых и достаточных условий существования предельного распределения системы, зависящих от значений производящих функций

Для вывода необходимых условий приведем сначала предварительные результаты. В первой главе была получена производящая функция одномерного распределения входного потока, которая имеет следующий вид для потока  $\Pi_i$ :

$$\sum_{b_{j}=0}^{\infty} P_{j}(t,b_{j}) z_{j}^{b_{j}} = e^{\lambda_{j} t(p_{j} z_{j} + \alpha_{j} p_{j} z_{j}^{2} + \alpha_{j} \beta_{j} p_{j} z_{j}^{3} / (1 - \gamma_{j} z_{j}) - 1)}.$$
(3.1)

Используя соотношения (2.28), (2.35) и (3.1), получаем

$$q_{r}(z) = z^{-l_{r}} e^{\lambda_{1} T_{r}(p_{1} z_{1} + \alpha_{1} p_{1} z_{1}^{2} + \alpha_{1} \beta_{1} p_{1} z_{1}^{3}/(1 - \gamma_{1} z_{1}) - 1)} \times$$

$$\times e^{\lambda_{2} T_{r}(p_{2} z_{2} + \alpha_{2} p_{2} z_{2}^{2} + \alpha_{2} \beta_{2} p_{2} z_{2}^{3}/(1 - \gamma_{2} z_{2}) - 1)}, \quad r = 3j - 2, \ 3j - 1, \ 3j;$$

$$q_{3j-1}^{k}(z) = z_{j}^{-kl_{3j-1}} e^{\lambda_{1} k T_{3j-1}(p_{1} z_{1} + \alpha_{1} p_{1} z_{1}^{2} + \alpha_{1} \beta_{1} p_{1} z_{1}^{3}/(1 - \gamma_{1} z_{1}) - 1)} \times$$

$$\times e^{\lambda_{2} k T_{3j-1}(p_{2} z_{2} + \alpha_{2} p_{2} z_{2}^{2} + \alpha_{2} \beta_{2} p_{2} z_{2}^{3}/(1 - \gamma_{2} z_{2}) - 1)}.$$

$$(3.2)$$

Введем обозначение  $m_j$  для производящей функции распределения размера группы потока  $\Pi_i$ 

$$m_j = \sum_{k=1}^{\infty} Q_j(k) z_j^k = p_j z_j + \alpha_j p_j z_j^2 + \alpha_j \beta_j p_j z_j^3 / (1 - \gamma_j z_j).$$

Тогда формулы (3.1) и (3.2) будут представлены в сокращенном виде

$$\sum_{b_j=0}^{\infty} P_j(t,b_j) z_j^{b_j} = e^{\lambda_j t(m_j - 1)},$$

$$q_r(z) = z^{-l_r} e^{\lambda_1 T_r(m_1 - 1)} e^{\lambda_2 T_r(m_2 - 1)}, \quad r = 3j - 2, 3j - 1, 3j;$$

$$q_{3j-1}^k(z) = z_j^{-kl_{3j-1}} e^{\lambda_1 k T_{3j-1}(m_1 - 1)} e^{\lambda_2 k T_{3j-1}(m_2 - 1)}.$$

Найдем теперь выражения для  $q_{3j,j}(z)$  и  $q_{3s,j}(z)$ . Учитывая (2.28), получим

$$q_{3j,j}(z) = z^{-l_{3j}} \sum_{b_j=1}^{\infty} \sum_{b_s=0}^{\infty} \varphi_{3j,j}(b) z^b = z^{-l_{3j}} \sum_{b_j=1}^{\infty} \varphi_{3j,j}(b_j y_j) z_j^{b_j} + z^{-l_{3j}} \sum_{b_j=1}^{\infty} \sum_{b_s=1}^{\infty} \varphi_{3j,j}(b) z^b.$$

Вычислим второе слагаемое

$$z^{-l_{3j}} \sum_{b_{j}=1}^{\infty} \sum_{b_{s}=1}^{\infty} \varphi_{3j,j}(b) z^{b} =$$

$$= z^{-l_{3j}} \sum_{b_{j}=1}^{\infty} \sum_{b_{s}=1}^{\infty} \int_{0}^{T_{3j}} \lambda_{j} e^{-\lambda_{j} u} (\sum_{k=1}^{\infty} Q_{j}(k) P_{j}(T_{3j} - u, b_{j} - k)) z_{j}^{bj} \int_{u}^{T_{3j}} \lambda_{s} e^{-\lambda_{s} v} (\sum_{k=1}^{\infty} Q_{s}(k) P_{s}(T_{3j} - v, b_{s} - k)) z_{s}^{bs} dv du =$$

$$= z^{-l_{3j}} \int_{0}^{T_{3j}} \lambda_{j} e^{-\lambda_{j} u} (\sum_{k=1}^{\infty} Q_{j}(k) \sum_{b_{j}=k}^{\infty} P_{j}(T_{3j} - u, b_{j} - k) z_{j}^{bj}) \int_{u}^{T_{3j}} \lambda_{s} e^{-\lambda_{s} v} (\sum_{k=1}^{\infty} Q_{s}(k) \sum_{b_{s}=k}^{\infty} P_{s}(T_{3j} - v, b_{s} - k) z_{s}^{bs}) dv du =$$

$$= z^{-l_{3j}} \int_{0}^{T_{3j}} \lambda_{j} e^{-\lambda_{j} u} (\sum_{k=1}^{\infty} Q_{j}(k) e^{\lambda_{j}(T_{3j} - u)(m_{j} - 1)} z_{j}^{k}) \int_{u}^{T_{3j}} \lambda_{s} e^{-\lambda_{s} v} (\sum_{k=1}^{\infty} Q_{s}(k) e^{\lambda_{s}(T_{3j} - v)(m_{s} - 1)} z_{s}^{k}) dv du =$$

$$= z^{-l_{3j}} \int_{0}^{T_{3j}} \lambda_{j} e^{-\lambda_{j} u} e^{\lambda_{j}(T_{3j} - u)(m_{j} - 1)} (\sum_{k=1}^{\infty} Q_{j}(k) z_{j}^{k}) \int_{u}^{T_{3j}} \lambda_{s} e^{-\lambda_{s} v} e^{\lambda_{s}(T_{3j} - v)(m_{s} - 1)} (\sum_{k=1}^{\infty} Q_{s}(k) z_{s}^{k}) dv du =$$

$$= z^{-l_{3j}} \int_{0}^{T_{3j}} \lambda_{j} e^{-\lambda_{j} u} e^{\lambda_{j}(T_{3j} - u)(m_{j} - 1)} m_{j} \int_{u}^{T_{3j}} \lambda_{s} e^{-\lambda_{s} v} e^{\lambda_{s}(T_{3j} - v)(m_{s} - 1)} m_{s} dv du =$$

$$= z^{-l_{3j}} \int_{0}^{T_{3j}} \lambda_{j} e^{-\lambda_{j} u} e^{\lambda_{j}(T_{3j} - u)(m_{j} - 1)} m_{j} e^{-\lambda_{s} T_{3j}} (e^{\lambda_{s} m_{s}(T_{3j} - u)} - 1) du =$$

$$= z^{-l_{3j}} e^{-\lambda T_{3j}} \left( \frac{m_{j} \lambda_{j}}{m_{j} \lambda_{j} + m_{s} \lambda_{s}} e^{(m_{j} \lambda_{j} + m_{s} \lambda_{s}) T_{3j}} + \frac{m_{s} \lambda_{s}}{m_{j} \lambda_{j} + m_{s} \lambda_{s}} - e^{m_{j} \lambda_{j} T_{3j}} \right).$$

Отсюда получаем:

$$q_{3j,j}(z) = z^{-l_{3j}} \sum_{b_j=1}^{\infty} \varphi_{3j,j}(b_j y_j) z_j^{b_j} +$$

$$+ z^{-l_{3j}} e^{-\lambda T_{3j}} \left( \frac{m_j \lambda_j}{m_j \lambda_j + m_s \lambda_s} e^{(m_j \lambda_j + m_s \lambda_s) T_{3j}} + \frac{m_s \lambda_s}{m_j \lambda_j + m_s \lambda_s} - e^{m_j \lambda_j T_{3j}} \right) =$$

$$= z^{-l_{3j}} e^{-\lambda T_{3j}} \left( \frac{m_j \lambda_j}{m_j \lambda_j + m_s \lambda_s} e^{(m_j \lambda_j + m_s \lambda_s) T_{3j}} + \right.$$

$$+ \frac{m_s \lambda_s}{m_j \lambda_j + m_s \lambda_s} - e^{m_j \lambda_j T_{3j}} + e^{m_j \lambda_j T_{3j}} - 1 \right) =$$

$$= z^{-l_{3j}} e^{-\lambda T_{3j}} \frac{m_j \lambda_j}{m_j \lambda_j + m_s \lambda_s} (e^{(m_j \lambda_j + m_s \lambda_s) T_{3j}} - 1).$$

Аналогично находим

$$q_{3j,s}(z) = z_j^{-l_{3j}} e^{-\lambda T_{3j}} \frac{m_s \lambda_s}{m_j \lambda_j + m_s \lambda_s} (e^{(m_j \lambda_j + m_s \lambda_s)T_{3j}} - 1);$$

$$q_{6+j,j}(z) = z_j^{-l_{3j-2}} e^{-\lambda T_{3j-2}} \frac{m_j \lambda_j}{m_j \lambda_j + m_s \lambda_s} (e^{(m_j \lambda_j + m_s \lambda_s)T_{3j-2}} - 1).$$

Получим теперь формулу для  $q_{6+j,s}(z)$ :

$$q_{6+j,s}(z) = \sum_{a_j=0}^{l_{3j-2}} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{6+j,s,a_j}(ky_s) z_s^k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} Q_s(k) \frac{\lambda_s}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T_{3j-2}}) z_s^k = \frac{m_s \lambda_s}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T_{3j-2}}).$$

Далее потребуются следующие обозначения:  $Q^{(r)}(x) = \lim_{i \to \infty} Q_i^{(r)}(x), r = \overline{1,8}, x \in X^2$ . Если существует предельное распределение  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ , то это означает, что последовательность  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  сходится по распределению к случайному вектору  $(\Gamma^*, \kappa^*)$  при  $i \to \infty$ , где  $\Gamma^* \in \Gamma$ ,  $\kappa^* = (\kappa_1^*, \kappa_2^*) \in X^2$ , и для любого  $r = \overline{1,8}, x \in X^2$  имеем  $\mathbf{P}(\Gamma^* = \Gamma^{(r)}, \kappa^* = x) = Q^{(r)}(x)$ . Докажем следующую лемму.

**Лемма 3.** Если существует предельное распределение марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ , то для любых значений  $r = \overline{1,8}; x_j \in X$  имеет место предельное равенство:

$$\lim_{i \to \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,i} = x_j) = \mathbf{P}(\Gamma^* = \Gamma^{(r)}, \kappa_j^* = x_j).$$

Доказательство. Пусть предельное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  существует. Рассмотрим случайные величины  $\zeta_i, i \geq 0$  и  $\zeta^*$  такие, что:

$$\mathbf{P}(\zeta_i = r, \kappa_i = x) = Q_i^{(r)}(x), \ i \ge 0, r = \overline{1, 8}, \ x = (x_1, x_2) \in X^2;$$
$$\mathbf{P}(\zeta^* = r, \kappa^* = x) = Q^{(r)}(x), \ r = \overline{1, 8}, \ x = (x_1, x_2) \in X^2.$$

Пусть функция  $F_i(x')$ ,  $x' = (x'_0, x'_1, x'_2) \in R^3$ , есть интегральная функция распределения случайного вектора  $(\zeta_i, \kappa_i)$ , где  $i \geq 0$ . Поскольку для любой точки непрерывности  $x' \in R^3$  интегральной функции распределения  $F^*(x')$  вектора

 $(\zeta^*, \kappa^*)$  выполняется

$$\lim_{i \to \infty} F_i(x') = \lim_{i \to \infty} \sum_{r = \overline{1,8}, r < x'_0} \sum_{0 \le x_1 < x'_1} \sum_{0 \le x_2 < x'_2} Q_i^{(r)}(x) =$$

$$= \sum_{r = \overline{1,8}, r < x'_0} \sum_{0 \le x_1 < x'_1} \sum_{0 \le x_2 < x'_2} \lim_{i \to \infty} Q_i^{(r)}(x) =$$

$$= \sum_{r = \overline{1,8}, r < x'_0} \sum_{0 \le x_1 < x'_1} \sum_{0 \le x_2 < x'_2} Q^{(r)}(x) =$$

$$= \sum_{r = \overline{1,8}, r < x'_0} \sum_{0 \le x_1 < x'_1} \sum_{0 \le x_2 < x'_2} \mathbf{P}(\zeta^* = r, \kappa^* = x) = F^*(x'),$$

то последовательность  $(\zeta_i, \kappa_i)$ ;  $i \geq 0$  сходится по распределению к случайному вектору  $(\zeta^*, \kappa^*)$ .

Пусть теперь для любого j=1,2 функция  $\pi_j(\cdot)\colon R^3\to R^2$  задается равенством  $\pi_j(x')=(x'_0,x'_j)$ . Поскольку отображение  $\pi_j(x')$  непрерывно, то последовательность  $\{(\Gamma_i,\kappa_{j,i});i\geq 0\}$  сходится по распределению к случайному вектору  $(\zeta^*,\kappa_j^*)$ . Очевидно, что для любого i>0 выполняется

$$\mathbf{P}(\zeta_i = r, \kappa_{j,i} = x_j) = \sum_{x_s=0}^{\infty} Q_i^{(r)}(x) = \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,i} = x_j).$$

Значит, для любых  $r = \overline{1,8}; x_j \in X$  имеем:

$$\lim_{i \to \infty} \mathbf{P}(\Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_{j,i} = x_j) = \lim_{i \to \infty} \mathbf{P}(\zeta_i = r, \kappa_{j,i} = x_j) =$$

$$= \mathbf{P}(\zeta^* = r, \kappa_j^* = x_j) = \sum_{x_s = 0}^{\infty} \mathbf{P}(\zeta^* = r, \kappa_j^* = x_j, \kappa_s^* = x_s) =$$

$$= \sum_{x_s = 0}^{\infty} Q^{(r)}(x) = \mathbf{P}(\Gamma^* = \Gamma^{(r)}, \kappa_j^* = x_j).$$

Лемма 3 доказана.

Чтобы при выводе необходимых и достаточных условий существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  было удобно пользоваться соотношениями (2.42) и (2.41), рассмотрим свойства функций  $q_r(z), r = \overline{1,6}, R_{j,6i}(z), \Upsilon_{6i}(z)$  и  $\Psi_{j,6i}(z), i \geq 0$ . Пусть  $\overline{1} = (1,1), \overline{z}_1 = (z_1,1), \overline{z}_2 = (1,z_2)$ . Тогда:

$$q_r(\overline{1}) = 1, \ r = \overline{1,6}; \tag{3.3}$$

$$\Psi_{j,6i}(\overline{1}) = 1, i \ge 0; \tag{3.4}$$

$$R_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_j) = 0, \ i \ge 0.$$
 (3.5)

Так как функции  $q_r(z)$ ,  $r=\overline{1,6}$ , непрерывны при  $z_1,z_2\geq 0$ , то в силу (3.3) существуют значения  $z\colon z_1,z_2>1$  такие, что  $q_r(z)<2$ ,  $r=\overline{1,6}$ . Тогда для всех таких z имеем:

$$0 \le R_{j,6i}(\overline{z}_j) < 6 \times 4 \times 2^{n_1 + n_2 + 3} = C_R; \tag{3.6}$$

$$|\Upsilon_{6i}(z)| < (6 \times 10 + 4) \times 2^{n_1 + n_2 + 3} z_1^{K_1} z_2^{K_2} = C_{\Upsilon}(z);$$
 (3.7)

$$|\Upsilon_{6i}^{(r)}(z)| < 10 \times 2^{n_1 + n_2 + 3} z_1^{K_1} z_2^{K_2} < C_{\Upsilon}(z), \ r = \overline{1, 6}; \tag{3.8}$$

Для исследования последовательностей из производящих функций (2.25) также понадобятся следующие простые утверждения.

**Лемма 4.** Пусть функция G(u),  $|u| \le 1$ , представима в виде равенства  $G(u) = f_0(u)G_0(u)$ , где  $f_0(1) = 0$ ,  $f_0(u)$  является дифференцируемой функцией в точке u = 1;  $G_0(u)$  определена при  $|u| \le 1$ ;  $\lim_{u \to 1-0} G_0(u) = G_0(1)$ . Тогда

$$\frac{d}{du}G(u)|_{u=1-0} = G_0(1)f_0'(1) < \infty.$$

$$\frac{d}{du}f_0(u)G_0(u)|_{u=1-0} = \lim_{u \to 1-0} \frac{f_0(u)G_0(u) - 0 \times G_0(1)}{u - 1} = \lim_{u \to 1-0} \frac{(0 + f_0'(1))(u - 1) + O((u - 1)^2)G_0(u)}{u - 1} = G_0(1)f_0'(1).$$

Лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** Пусть для любых  $i, d \geq 0$  выполняется  $c_{i,d} \geq 0$  и  $\lim_{i \to \infty} c_{i,d} = c_d$ . Если существуют константы C и  $u_0$  такие, что для любого  $i \geq 0$  и  $0 < u < u_0$  выполняется неравенство  $\sum_{d=0}^{\infty} c_{i,d} u^d < C$ , то

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{d=0}^{\infty} c_{i,d} u^d = \sum_{d=0}^{\infty} c_d u^d < C, \ 0 < u < u_0.$$

Доказательство. Докажем от противного, что ряд  $\sum_{d=0}^{\infty} c_{i,d}u^d$  сходится равномерно по i при  $0 < u < u_0$ . Допустим, что нет равномерной сходимости при некотором  $u_1 < u_0$ . Тогда должно существовать число  $\varepsilon_0 > 0$  такое, что для любого D найдется число  $I_0$ , удовлетворяющее неравенству  $\sum_{d=D+1}^{\infty} c_{I_0,d}u_1^d > \varepsilon_0$ .

Пусть  $u_2 \in u_1, u_0$ . По условию леммы сумма ряда ограничена  $\sum_{d=0}^{\infty} c_{I_0,d} u_2^d < C$ . Но выбрав D так, чтобы выполнялось  $\varepsilon_0(u_2/u_1)^D > C$ , получаем:

$$\sum_{d=0}^{\infty} c_{I_0,d} u_2^d \ge \sum_{d=D+1}^{\infty} c_{I_0,d} u_1^d (u_2/u_1)^d \ge \varepsilon_0 (u_2/u_1)^d > C.$$

Получаем противоречие. Значит, ряд  $\sum_{d=0}^{\infty} c_{i,d} u^d$  сходится равномерно по i при  $u < u_0$ . То есть ряд  $\sum_{d=0}^{\infty} c_{i,d} u^d$  сходится при  $u < u_0$ , и возможен почленный переход к пределу. Лемма 5 доказана.

Следствие 1. Пусть случайные величины  $\zeta_i$ ,  $i=0,1,\ldots$  принимают значения g(x), а последовательность  $\{\zeta_i; i \geq 0\}$  сходится по распределению g(x) некоторой случайной величине g(x). Если g(x) еg(x) еg(x) и g(x) g(x) егу g(x

- 1) производящая функция распределения случайной величины  $\zeta$  ограничена при  $u < u_3$ .
- 2) имеют место равенства:

$$\lim_{i \to \infty} M\{\zeta_i^k\} = M\{\zeta^k\} < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$
 (3.9)

Доказательство. Действительно, первое утверждение следует непосредственно из леммы 3. Для доказательства второго утверждения достаточно доказать, что

$$\lim_{i \to \infty} \frac{d^k}{du^k} \overline{V}_i(u) \bigg|_{u=1} = \frac{d^k}{du^k} \overline{V}(u) \bigg|_{u=1} < \infty, \quad k = 1, 2, \dots$$
 (3.10)

Поскольку по признаку Вейерштрасса ряды  $\overline{V}_i(u)$ ,  $i \in X$ , сходятся равномерно по u при  $u < u_3$ , то при  $u < u_3$  их можно почленно дифференцировать по u любое конечное число раз, причем  $\frac{d^k}{du^k}\overline{V}_i(u) < \infty$ ,  $i \in X$ ,  $u < u_3$ ,  $k = 1,2,\ldots$  (см. [84, стр. 447]). Докажем, что при  $u < u_3$  для любого  $k = 1,2,\ldots$  при достаточно большом значении  $C^{(k)}$ , имеют место неравенства  $\frac{d^k}{du^k}\overline{V}_i(u) < C^{(k)}$ ,  $i \in X$ . Действительно, пусть существует такое значение  $u_4 < u_3$  и такое число , что для любого значения  $C^{(K)}$  найдется такое число  $I_1$ , что  $\frac{d^K}{du^K}\overline{V}_{I_1}(u)\Big|_{u=u_4} > C^{(K)}$ . Поскольку  $\overline{V}_i(u) < C$  при  $u < u_3$ , то функции  $\overline{V}_i(u)$  можно разложить в ряд Тейлора по степеням  $(u-u_4)$  в некоторой точке  $u_5$ :  $u_4 < u_5 < u_3$ . Теперь выберем  $C^{(K)} > K!C(u_5 - u_4)^{-K}$ . Тогда в точке  $u_5$  получим:

$$\overline{V}_{I_1}(u_5) \ge \frac{d^K}{du^K} \overline{V}_{I_1}(u) \Big|_{u=u_4} (K!)^{-1} (u_5 - u_4)^K > C.$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно, ряды  $\frac{d^k}{du^k}\overline{V}_i(u)$ ,  $i \in X$ , k = 1, 2, ..., удовлетворяют условиям леммы 3 при  $u < u_3$ . Поскольку  $u_3 > 1$ , то имеет место (3.10), и, следовательно, (3.9). Следствие 1 доказано.

Введем обозначения

$$T_0 = T_1 + T_3 + T_4 + T_6, \quad T = T_0 + n_1 T_2 + n_2 T_5,$$

$$L_j = l_{3j-2} + n_j l_{3j-1} + l_{3j},$$

$$M_j = (1 + 2\alpha_j + \alpha_j \beta_j (2/(1 - \gamma_j) + 1/(1 - \gamma_j)^2)) p_j.$$

В дальнейшем понадобится следующая функция

$$\Phi_{i,n_j}^{(3j-1)}(z) = \sum_{x \in X^2} Q_i^{(3j-1)}(x) z^x \sum_{b_1=0}^{\infty} \sum_{b_2=0}^{\infty} \varphi_{3j-1,n_j}(x_j,b) z^b.$$

**Теорема 3.** Если предельное распределение марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  существует, то найдется такое число  $\varepsilon > 0$ , что при любом распределении случайного вектора  $(\Gamma_0, \kappa_0)$  существует номер I такой, что для любых i > I выполняется:

$$\lambda_{j} M_{j} T - L_{j} + \frac{d}{dz_{j}} \Upsilon_{6i}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} + (\lambda_{j} M_{j} T_{3j-1} - l_{3j-1}) \times \sum_{v=0}^{5} \sum_{k=1}^{n_{j}-1} (k - n_{j}) \Phi_{6i+v,k}^{(3j-1)}(\overline{1}) + \lambda_{j} M_{j} T_{3s-1} \sum_{v=0}^{5} \sum_{k=1}^{n_{s}-1} (k - n_{s}) \Phi_{6i+v,k}^{(3s-1)}(\overline{1}) < -\varepsilon.$$

$$(3.11)$$

Доказательство. Пусть предельное распределение существует. Возьмем это распределение в качестве начального. Тогда из (2.42), с учетом того, что  $R_s(\overline{z}_i) = 0$ , следуют равенства:

$$(q(\overline{z}_i) - 1)W(\overline{z}_i) + R_i(\overline{z}_i) + \Psi_1(\overline{z}_i) + \Psi_2(\overline{z}_i) + \Upsilon(\overline{z}_i) = 0, j = 1, 2.$$
 (3.12)

Пусть j=1. Заметим, что функция  $(q(\overline{z}_1)-1)W(\overline{z}_1)$  удовлетворяет условиям леммы 4. Кроме того, функция  $\Psi_1(\overline{z}_1)$  равна сумме  $6(n_1-1)$  слагаемых, каждое из которых удовлетворяет условиям леммы 4. Функция  $\Psi_2(\overline{z}_1)$  равна сумме  $6(n_2-1)$  слагаемых, также удовлетворяющих условиям леммы 4. Значит производные слева по  $z_1$  функций  $(q(\overline{z}_1)-1)W(\overline{z}_1)$ ,  $\Psi_1(\overline{z}_1)$  и  $\Psi_2(\overline{z}_1)$  в точке  $z_1=1$  существуют и равны  $(\lambda_1M_1T-L_1)$ ,  $6(\lambda_1M_1T_2-l_2)\sum_{k=1}^{n_1-1}(k-n_1)\Phi_k^{(2)}(\overline{1})$  и  $6(\lambda_1M_1T_5\sum_{k=1}^{n_2-1}(k-n_2)\Phi_k^{(5)}(\overline{1})$  соответственно. Остальные слагаемые в (3.12)

равны суммам конечного числа функций, каждая из которых дифференцируема в точке  $z_1 = 1$ . Таким образом, можно найти производную слева от выражения (3.12) в точке  $z_1 = 1$ . Дифференцируя соотношение (3.12) по  $z_1$  в точке  $z_1 = 1$ , получаем

$$\lambda_{1}M_{1}T - L_{1} + \frac{d}{dz_{1}}\Upsilon(\overline{z}_{1})|_{z_{1}=1} + (\lambda_{1}M_{1}T_{5} - l_{2}) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n_{1}-1} (k - n_{1})\Phi_{k}^{(2)}(\overline{1}) + 6\lambda_{1}M_{1}T_{5} \sum_{k=1}^{n_{2}-1} (k - n_{2})\Phi_{k}^{(5)}(\overline{1}) + \frac{d}{dz_{1}}R_{1}(\overline{z}_{1})|_{z_{1}=1} = 0.$$

$$(3.13)$$

Вероятности существенных состояний в предельном распределении должны быть строго положительными, то получаем

$$\frac{d}{dz_{1}}R_{1}(\overline{z}_{1})|_{z_{1}=1} = 6\sum_{x_{1}=0}^{l_{1}}\sum_{x_{2}=0}^{\infty}Q^{(2)}(x)\sum_{b_{2}=0}^{\infty}\sum_{b_{1}=0}^{l_{1}-x_{1}}\varphi_{1}(b)(l_{1}-x_{1}-b_{1}) +$$

$$+6\sum_{k=1}^{n_{1}}\sum_{x_{1}=0}^{kl_{2}}\sum_{x_{2}=0}^{\infty}Q^{(2)}(x)\sum_{b_{1}=0}^{kl_{2}-x_{2}}\sum_{b_{2}=0}^{\infty}\varphi_{2,k}(x_{1},b)(kl_{2}-b_{1}-x_{1}) +$$

$$+6\lambda_{1}\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda T_{3}})\sum_{x_{1}=0}^{l_{3}-1}Q^{(3)}(x_{1}y_{1})(l_{3}-x_{1}) +$$

$$+6\sum_{x_{2}=1}^{\infty}\sum_{x_{1}=0}^{l_{3}}Q^{(3)}(x)(l_{3}-x_{1}) +$$

$$+6\lambda_{2}\lambda^{-1}(1-e^{-\lambda T_{3}})\sum_{x_{1}=0}^{l_{3}-1}Q^{(3)}(x_{1}y_{1})(l_{3}-x_{1}) +$$

$$+6\sum_{x_{1}=0}^{l_{1}-1}\sum_{x_{2}=0}^{\infty}Q^{(7)}(x)\sum_{b_{2}=0}^{\infty}\sum_{b_{1}=1}^{l_{1}-x_{1}}\varphi_{7,1,l_{1}}(b)(l_{1}-x_{1}-b_{1}) > 0.$$

Следовательно, сумма остальных слагаемых в (3.13) должна быть отрицательна. Отсюда существует число  $\varepsilon > 0$ , такое что:

$$\lambda_{1}M_{1}T - L_{1} + \frac{d}{dz_{1}}\Upsilon(\overline{z}_{1})|_{z_{1}=1} + (\lambda_{1}M_{1}T_{5} - l_{2}) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{n_{1}-1} (k - n_{1})\Phi_{k}^{(2)}(\overline{1}) + 6\lambda_{1}M_{1}T_{5} \sum_{k=1}^{n_{2}-1} (k - n_{2})\Phi_{k}^{(5)}(\overline{1}) < -2\varepsilon.$$

$$(3.14)$$

Далее изучим левую часть неравенства (3.11) при  $i \to \infty$  при условии существования предельного распределения. Функция  $\Upsilon_{6i}(\overline{z}_1)$  равна сумме ко-

нечного числа слагаемых, поэтому возможен предельный переход

$$\lim_{i \to \infty} \frac{d}{dz_1} \Upsilon_{6i}(\overline{z}_1)|_{z_1=1} = \frac{d}{dz_1} \Upsilon(\overline{z}_1)|_{z_1=1}.$$

Из леммы 3 следует, что для любого  $v \in \{0, 1, \dots, 5\}$  выполнено

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{x_1=0}^{\infty} Q_{6i+v}^{(5)}(x) = \sum_{x_1=0}^{\infty} Q^{(5)}(x),$$
$$\lim_{i \to \infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} Q_{6i+v}^{(2)}(x) = \sum_{x_2=0}^{\infty} Q^{(2)}(x).$$

Таким образом, получаем

$$\lim_{i \to \infty} \Phi_{6i+v,k}^{(2)}(\overline{1}) = \Phi_k^{(2)}(\overline{1}),$$
$$\lim_{i \to \infty} \Phi_{6i+v,k}^{(5)}(\overline{1}) = \Phi_k^{(5)}(\overline{1}).$$

Значит предел левой части неравенства (3.11) существует и равен левой части неравенства (3.14). Получаем, что для любого  $\varepsilon > 0$  должен существовать номер I, что для всех i > I значение левой части неравенства (3.11) отличается левой части неравенства (3.14) меньше, чем на  $\varepsilon$ . Тогда для всех i > I имеет место (3.11). Аналогично рассматривается случай j = 2. Теорема 3 доказана.

Таким образом, получено первое необходимое условие (3.11) существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ . Заметим, что данное условие является трудно проверяемым для реальной системы.

**Теорема 4.** Если выполняется условие (3.11), то последовательность  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  имеет предельное распределение.

Доказательство. Будем вести доказательство от противного. Пусть предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$  не существует. При i>0 производная  $\frac{d}{dz_j}\Upsilon_{6i}(\overline{z}_j)|_{z_j=1}$  содержит в себе конечную сумму выражений от вероятностей вида  $Q_{6i+v}^{(r)}(x)=0,\ v=\overline{0,5};\ r=3,\ 6,\ 7,\ 8;\ x\in X^2.$  Данные вероятности при отсутствии предельного распределения в пределе равны нулю  $\lim_{i\to\infty}Q_{6i+v}^{(r)}(x)=0$ . Значит, что  $\lim_{i\to\infty}\frac{d}{dz_j}\Upsilon_{6i}(\overline{z}_j)|_{z_j=1}=0$ . Получаем, что должен существовать номер  $I_1>I$ , что при  $i>I_1$  выполняется

 $\left| rac{d}{dz_j} \Upsilon_{6i}(\overline{z}_j)|_{z_j=1} 
ight| < arepsilon/2$ . Тогда из условия теоремы 3 для  $i>I_1$  получаем:

$$\lambda_{j} M_{j} T - L_{j} + (\lambda_{j} M_{j} T_{3j-1} - l_{3j-1}) \sum_{v=0}^{5} \sum_{k=1}^{n_{j}-1} (k - n_{j}) \Phi_{6i+v,k}^{(3j-1)}(\overline{1}) +$$

$$+ \lambda_{j} M_{j} T_{3s-1} \sum_{v=0}^{5} \sum_{k=1}^{n_{s}-1} (k - n_{s}) \Phi_{6i+v,k}^{(3s-1)}(\overline{1}) < -\varepsilon/2.$$

$$(3.15)$$

Пусть j=1. Возьмем начальное распределение таким, чтобы при некотором  $u_0>1$  и при  $z=\overline{z}_1$  для всех  $1\leq z_1< u_0$ , выполнялось

$$W_0(z) < \infty. \tag{3.16}$$

Тогда согласно (2.42) при  $1 \leq z_1 < u_0$  функции  $W_{6i}(\overline{z}_1), \ \Psi_{2,6i}(\overline{z}_1), \ i \geq 0$ , существуют вместе со всеми производными. Используя  $R_{2,6i}(\overline{z}_1) = 0$  и учитывая, что  $W_{6i}^{-1}(\overline{z}_1) \neq 0$  при  $z_1 > 0$ , соотношение (2.42) запишем в виде

$$W_{6(i+1)}(\overline{z}_1) = \{q(\overline{z}_1) + \Psi_{1,6i}(z)W_{6i}^{-1}(\overline{z}_1) + \Psi_{2,6i}(z)W_{6i}^{-1}(\overline{z}_1)\}W_{6i}(\overline{z}_1) + \Upsilon_{6i}(z) + R_{1,6i}(z).$$

Заметим, что при каждом  $i\geq 0$  значение первой производной функции вида  $q(\overline{z}_1)+\Psi_{1,6i}(z)W_{6i}^{-1}(\overline{z}_1)+\Psi_{2,6i}(z)W_{6i}^{-1}(\overline{z}_1)$  совпадает со значением левой части (3.15) в случае j=1. Это означает, что для всех  $i>I_1$  выполняется

$$\frac{d}{dz_1} \left( q(\overline{z}_1) + \Psi_{1,6i}(z) W_{6i}^{-1}(\overline{z}_1) + \Psi_{2,6i}(z) W_{6i}^{-1}(\overline{z}_1) \right) |_{z_1 = 1} < -\varepsilon/2.$$

Тогда существует такое число  $u_1 \in (1, u_0]$ , что

$$q(\overline{z}_1) + \Psi_{1,6i}(z)W_{6i}^{-1}(\overline{z}_1) + \Psi_{2,6i}(z)W_{6i}^{-1}(\overline{z}_1) \le z_1^{-\varepsilon/2}$$
(3.17)

при каждом  $z_1 \in [1, u_1)$ ,  $i > I_1$ . Действительно, при  $z_1 = 1$  обе части (3.17) равны согласно (3.3) и (3.4). При этом первая производная левой части (3.17) в точке  $z_1 = 1$  меньше, чем  $\frac{d}{dz_1} z_1^{-\varepsilon/2}$ . Учитывая (3.6) и (3.7) и (3.17), приходим к выводу, что при  $z_1 \in [1, u_1)$  последовательность  $\{W_{1,6i}(\overline{z}_1); i \geq 0\}$ , заданная рекуррентными соотношениями

$$W_{1,6i}(\overline{z}_1) = W_{6i}(\overline{z}_1), i \le I_1;$$

$$W_{1,6(i+1)}(\overline{z}_1) = z_1^{-\varepsilon/2} W_{6i}(\overline{z}_1) + C_{\Upsilon}(\overline{z}_1) + C_R, i > I_1;$$

является мажорирующей для последовательности  $\{W_{6i}(\overline{z}_1); i \geq 0\}$ .

Нетрудно видеть, что последовательность  $\{W_{1,6i}(\overline{z}_1); i \geq 0\}$  при любом значении  $z_1 \in [1,u_1)$  сходится к числу  $(C_{\Upsilon}(\overline{z}_1)+C_R)(1-z_1^{-\varepsilon/2})^{-1}$ , то есть она ограничена. Это означает, что исходная последовательность  $\{W_{6i}(\overline{z}_1); i \geq 0\}$  ограничена равномерно по i при  $z_1 \in [1,u_1)$ . Отсюда в силу интегральной формулы Коши следует, что существует константа  $C_1$  такая, что для любого  $i \geq 0$  выполняется  $M(\kappa_{1,6i}) = \frac{d}{dz_1}W_{6i}(\overline{z}_1)|_{z_1=1} < C_1$ . Аналогично для случая j=2 из теоремы при доказательстве от противного следует существование константы  $C_2$ , для которой  $M(\kappa_{2,6i}) < C_2$  при любого  $i \geq 0$ . Отсюда при всех  $i \geq 0$   $M(\kappa_{1,6i}+\kappa_{2,6i}) < C_0 = C_1 + C_2$ . При этом выполняется

$$M(\kappa_{1,6i} + \kappa_{2,6i}) \ge \sum_{D=C_0+1}^{\infty} D \sum_{x: x_1+x_2=D} \mathbf{P}(\kappa_{6i} = x) \ge$$

$$\ge (C_0+1) \sum_{D=C_0+1}^{\infty} \sum_{x: x_1+x_2=D} \mathbf{P}(\kappa_{6i} = x) =$$

$$= (C_0+1) (1 - \sum_{D=0}^{C_0} \sum_{x: x_1+x_2=D} \mathbf{P}(\kappa_{6i} = x)).$$

При отсутствии предельного распределения для всех  $x \in X^2$  получаем  $\lim_{i \to \infty} P(\kappa_{6i} = x) = \lim_{i \to \infty} \sum_{r=1}^8 Q_{6i}^{(r)}(x) = 0$ , и, следовательно, найдется номер  $I_2 > I_1$  такой, что  $\sum_{D=0}^{C_0} \sum_{x:x_1+x_2=D} P(\kappa_{6i} = x) < \frac{1}{C_0+1}$  для любого  $i > I_2$ . Тогда для таких i выполняется  $M(\kappa_{1,6i} + \kappa_{2,6i}) \ge C_0$ . Таким образом, предположение о том, что при выполнении условий теоремы векторная марковская последовательность  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \ge 0\}$  не имеет предельного распределения, привело к противоречию. Значит, предположение не верно и предельное распределение существует. Теорема 4 доказана.

Из теорем 3 и 4 следует. что для существования предельного распределения марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.11). С помощью теорем 3 и 4 можно доказать ряд полезных утверждений.

**Лемма 6.** Пусть начальное распределение марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  удовлетворяет условию (3.16) при некотором  $z: z_1, z_2 > 1$ . Тогда для существования предельного распределения последовательности необходимо и достаточно, чтобы функции  $W_{6i}(\overline{z}_j), i \geq 0$ , были ограничены равномерно по i в некоторой правой полуокрестности точки  $z_j = 1$ .

Доказательство. Достаточность условия  $W_{6i}(\overline{z}_j)$  следует из заключительной части доказательства теоремы 4. Необходимость можно показать следующим образом. По теореме 3 выполнение условия (3.11) следует из существования предельного распределения. В доказательстве теоремы 3 было показано, что если при некотором значении  $z = \overline{z}_j$  ( $z_j > 1$ ), выполняется неравенство (3.16), то из соотношения (3.11) следует выполнение условия для функций  $W_{6i}(\overline{z}_j)$ ,  $i \geq 0$ , что и требовалось доказать.

Теперь, используя теоремы 3 и 4, можно доказать лемму 7.

**Лемма 7.** Пусть предельное распределение марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  существует, то при j = 1, 2 выполняется три условия

- 1) функция  $W(\overline{z}_j) < +\infty$  в некоторой правой полуокрестности точки  $z_j = 1;$
- 2) математические ожидания удовлетворяют условиям

$$M\{(\kappa_j^*)^k\} < +\infty, \quad k = 1, 2, \dots;$$

3) если начальное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  удовлетворяет условию (3.16) при некотором  $z = (z_1, z_2) \colon z_1, z_2 > 1$ , то:

$$\lim_{i \to \infty} M\{\kappa_{j,6i}^k\} = M\{(\kappa_j^*)^k\}, \ k = 1, 2, \dots$$
 (3.18)

Доказательство. Предположим, что предельное распределение существует. Если при некотором  $z\colon z_1,\,z_2>1$  выполняется (3.16), то выполнено условие леммы 6. Тогда по утверждению леммы 5 первый пункт теоремы выполнен. Данное утверждение распространяется на производящую функцию предельного распределения. При существовании предельного распределения начальное распределение не влияет на производящую функцию предельного распределения. Итак, первый пункт теоремы доказан. Второй пункт следует из первого, так как для ограниченных в некоторой правой полуокрестности точки  $z_j=1$  степенных рядов для любого  $k=1,\,2,\,\ldots$  получаем

$$\frac{d^k}{dz_j^k}W(\overline{z}_j)|_{z_j=1}<+\infty.$$

Из условия леммы 6 согласно 5 и следствию 1 следует третье утверждение этой леммы. Лемма 7 доказана.

**Теорема 5.** Если начальное распределение марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  при  $z = (z_1, z_2)$  и  $z_1, z_2 > 1$  удовлетворяет условию (3.16), то для существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  необходимо и достаточно, чтобы функции  $W_{6i}(z)$  и  $W_{6i}^{(r)}(z), r = \overline{1,6}$ , были ограничены равномерно по i в некоторой окрестности точки (1,1).

Доказательство. Рассмотрим функции  $W_{6i}(z)$ ,  $i \ge 0$  при  $z_1, z_2 > 1$ . Достаточность следует из леммы 6.

Доказательство необходимости. Пусть начальное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$  при  $z_1,\,z_2>1$  удовлетворяет условию (3.16). Тогда имеет место лемма 6. Заметим, что согласно свойствам степенных рядов следует существование числа  $z_j < z_{j,0}$ . Согласно интегральной формуле Коши производные функций  $W_{6i}(z)$  равномерно ограничены по i. Так как

$$\frac{\partial}{\partial z_j} W_{6i}(z)|_{z=\overline{1}} = \frac{d}{dz_j} W_{6i}(\overline{z}_j)|_{z_j=1}, \ i \ge 0,$$

то по теореме о приращении многомерной функции имеем:

$$W_{6i}(z) = 1 + \frac{d}{dz_1} W_{6i}(\overline{z}_1)|_{z_1=1}(z_1 - 1) + \frac{d}{dz_2} W_{6i}(\overline{z}_2)|_{z_2=1}(z_2 - 1) + o(z_1 - 1) + o(z_2 - 1), i \ge 0.$$

Отсюда следует, что производящие функции  $W_{6i}(z)$  и  $W_{6i}^{(r)}(z)$ ,  $r = \overline{1,6}$ , ограничены равномерно по i в некоторой окрестности точки (1,1), что и требовалось доказать. Таким образом, теорема 5 доказана.

Сформулируем следующее необходимое условие существования предельного распределения.

**Теорема 6.** Если существует предельное распределение марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ , то выполняется следующее неравенство:

$$(\lambda_{j} M_{j} T_{3j-2} - l_{3j-2}) \{ W^{(3j-2)}(\overline{1}) + \lambda_{j} \lambda^{-1} (1 - e^{-\lambda T_{3j-2}}) W^{(6+j)}(\overline{1}) \} +$$

$$+ (\lambda_{j} M_{j} T_{3j-1} - l_{3j-1}) \sum_{k=1}^{n_{j}} k \Phi_{k}^{(3j-1)}(\overline{1}) + (\lambda_{j} M_{j} T_{3j} - l_{3j}) W^{(3j)}(\overline{1}) +$$

$$+ (\lambda_{j} M_{j} T_{3s-2}) \{ W^{(3s-2)}(\overline{1}) + \lambda_{s} \lambda^{-1} (1 - e^{-\lambda T_{3s-2}}) W^{(6+s)}(\overline{1}) \} +$$

$$+ \lambda_{j} M_{j} T_{3s-1} \sum_{k=1}^{n_{s}} k \Phi_{k}^{(3s-1)}(\overline{1}) + \lambda_{j} M_{j} T_{3s} W^{(3s)}(\overline{1}) +$$

$$+ (\lambda_{j} \lambda_{s} M_{j} \lambda^{-2} (1 - e^{-\lambda T_{3j-2}}) + \lambda_{j}^{2} M_{j} T_{3j-2} \lambda^{-1} e^{-\lambda T_{3j-2}}) W^{(6+j)}(\overline{1}) +$$

$$+ (\lambda_{j}^{2} M_{j} \lambda^{-2} (1 - e^{-\lambda T_{3s-2}}) + \lambda_{j} \lambda_{s} M_{j} \lambda^{-1} T_{3s-2} e^{-\lambda T_{3s-2}}) W^{(6+s)}(\overline{1}) < 0.$$

Доказательство теоремы 6 приведено в приложении  $\Gamma$ .

В текущем разделе были получены необходимые и достаточные условия существования предельного распределения марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ . Так как условия в данных теоремах зависят не только от параметров системы, но и от производящих функций одномерных распределений последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ , то проверка условий теорем для реальых систем затруднительна. Поэтому в следующем разделе будут получены и доказаны условия существования предельного распределения, зависящие только от парметоров системы.

## 3.2 Получение необходимых и достаточных условий существования предельного распределения, зависящих от параметров системы

Сформулируем первое необходимое легко проверяемое условие существования предельного распределения векторной марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}.$ 

**Теорема 7.** Если существует предельное распределение марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ , то

$$\frac{\theta_1 \lambda_1 M_1}{\mu_{1,2}} + \frac{\theta_2 \lambda_2 M_2}{\mu_{2,2}} < 1. \tag{3.20}$$

Доказательство. Обозначим:

$$\overline{T}_{j} = T_{3j-2}(W^{(3j-2)})(\overline{1}) + \lambda_{j}\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda T_{3j-2}}))W^{(6+j)}(\overline{1}) + T_{3j-1}\sum_{k=1}^{n_{j}} k\Phi_{k}^{(3j-1)}(\overline{1}) + T_{3j}W^{3j}(\overline{1}).$$

Рассмотрим неравенство (3.19). Так как  $\mu_{j,1} \leq \mu_{j,2}$ , то из (2.8) следует  $l_{3j-2} < T_{3j-2}\theta_j^{-1}\mu_{j,2}$ . Также из (2.8) следует  $l_{3j} < T_{3j}\theta_j^{-1}\mu_{j,2}$ . Значит из (3.19) получаем:

$$(\overline{T}_1 + \overline{T}_2)\lambda_j M_j - \overline{T}_j \theta_j^{-1} \mu_{j,2} < 0.$$

Поделив данное неравенство на  $(\overline{T}_1 + \overline{T}_2)\theta_j^{-1}\mu_{j,2}$ , и сложим два неравенства, полученные при j=1,2. Полученное выражение совпадает с (3.20). Теорема 7 доказана.

Из теоремы 7 можно вывести следствие 2.

**Следствие 2.** Предельное распределение случайной последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  существует только тогда, когда выполняется

$$\theta_j \lambda_j M_j < \mu_{j,2}, \ j = 1, 2.$$
 (3.21)

Далее подробно изучим свойства функций  $\Psi_{j,6i}^{(r)}(z), r=\overline{1,6}$ , и получим для них удобные оценки, при условии существования предельного распределения. Эти свойства основаны на оценке средней длительности периода обслуживания. Заметим, что при  $n_j=1, \ r=\overline{1,6}$ , функции  $\Psi_{j,6i}^{(r)}(z)\equiv 0$ . Рассмотрим случай  $n_1,\ n_2>1$ . Для  $k=1,2,\ldots,n_j$  выполняется:

$$\frac{d}{dz_{j}}q_{3j-1}^{k}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} = k(\lambda_{j}M_{j}T_{3j-1} - l_{3j-1}) < 0,$$

$$\frac{d}{dz_{j}}q_{3s-1}^{k}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} = k(\lambda_{j}M_{j}T_{3s-1}) > 0.$$
(3.22)

Первое неравенство из (3.22) следует из (2.8) и (3.21). Из определения функций  $\Psi_{1,6i}^{(r)}(z)$  и  $\Psi_{2,6i}^{(r)}(z)$  следует, что в некоторой правой полуокрестности точки  $z_j=1$  должны выполняться неравенства  $\Psi_{j,6i}^{(r)}(\overline{z}_j)\geq 0, \ \Psi_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_j)\leq 0.$  Оценим первую функцию  $\Psi_{j,6i}^{(r)}(\overline{z}_j)$  сверху, а вторую функцию  $\Psi_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_j)$  снизу. Для этого выясним, как ведут себя производные этих функций. Предположим, что выполнено условие (3.16) для начального распределения при некотором  $z\colon z_1,z_2>1$ .

В этом случае при некотором  $z_j > 1$  функции  $\Psi_{1,6i}^{(r)}(\overline{z}_j)$  и  $\Psi_{2,6i}^{(r)}(\overline{z}_j)$  для  $r = \overline{1,6}$  существуют для любого  $i \geq 0$ . Получаем:

$$\frac{d}{dz_{j}}\Psi_{j,6i}^{(r)}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} = \sum_{k=1}^{n_{j}} (k-n_{j})(\lambda_{j}M_{j}T_{3j-1} - l_{3j-1})\Phi_{6i+(r\ominus(3j-1)),k}^{(3j-1)}(\overline{1}) \geq 0,$$

$$\frac{d}{dz_{j}}\Psi_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} = \sum_{k=1}^{n_{s}} (k-n_{s})\lambda_{j}M_{j}T_{3s-1}\Phi_{6i+(r\ominus(3s-1)),k}^{(3j-1)}(\overline{1}) \leq 0.$$

Если дополнительно начальное распределение удовлетворяет условию

$$Q_0^{(r)}(K_1 + L_1, K_2 + L_2) > 0, r = \overline{1,6},$$
 (3.23)

то для  $r = \overline{1,6}$  и  $i \ge 0$  будет выполнено

$$Q_{i_1}^{(3j-1)}(K_1 + L_1, K_2 + L_2) > 0,$$

где  $i_1 = 6i + (r \ominus (3s - 1)).$ 

Рассмотрим сумму  $\sum_{k=1}^{n_j} k\Phi_{i_1,k}^{(3j-1)}(\overline{1})$  для произвольного  $i_1 \geq 0$ . Слагаемые  $\Phi_{i_1,k}^{(3j-1)}(\overline{1})$  являются вероятностями того, что на шаге с номером  $i_1$  состояние  $\Gamma_{i_1}$  будет равно  $\Gamma^{(3j-1)}$  и будет произведено ровно k продлений. Обозначим через  $B_{j,i_1}(k)$  событие, заключающееся в том, что на шаге с номером  $i_1$  состояние обслуживающего устройства  $\Gamma_{i_1}$  равно  $\Gamma^{(3j-1)}$  и произведено не менее k продлений. Обозначим через  $B'_{j,i_1}(k)$  событие, заключающееся в том, что на шаге с номером  $i_1$  состояние обслуживающего устройства  $\Gamma_{i_1}$  равно  $\Gamma^{(3j-1)}$  и во время первых k-1 продлений по потоку  $\Pi_j$  будет приходить хотя бы одна заявка. Далее при j=1,2 положим  $B'_{j,i_1}(1)=B_{j,i_1}(1)=\{\omega\colon \Gamma_{i_1}(\omega)=\Gamma^{(3j-1)}\}$ . При изучаемом алгоритме управления предусматривается очередное продление в двух случаях: 1) если во время последнего продления поступили заявки по обслуживаемому потоку; 2) если в конце продления длина очереди по обслуживаемому потоку оказалась не меньше критического значения  $K_j$ . Очевидно, что  $B'_{j,i_1}(k) \subset B_{j,i_1}(k)$ . И следовательно  $P(B'_{j,i_1}(k)) < P(B_{j,i_1}(k))$ . При k>1 выполнено

$$P(\overline{B}'_{j,i_1}(k) \cap B_{j,i_1}(k)) \ge e^{-\lambda_j k T_{3j-1}} Q_{i_1}^{(3j-1)}(K_1 + L_2, K_2 + L_2) > 0.$$

Если при некоторых  $z_1$ ,  $z_2 > 1$  начальное распределение удовлетворяет (3.16) и (3.23), то получаем:

$$\sum_{k=1}^{n_j} k \Phi_{i_1,k}^{(3j-1)}(\overline{1}) = \sum_{k=1}^{n_j} P(B_{j,i_1}(k)) > \sum_{k=1}^{n_j} P(B'_{j,i_1}(k)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_j} (1 - e^{-\lambda_j T_{3j-1}})^{k-1} W_{i_1}^{(3j-1)}(\overline{1}) =$$

$$= e^{\lambda_j T_{3j-1}} (1 - (1 - e^{-\lambda_j T_{3j-1}})^{n_j}) W_{i_1}^{(3j-1)}(\overline{1}).$$
(3.24)

Неравенство (3.24) имеет понятный физический смысл. Действительно, величина

$$\widetilde{n}_{j} = e^{\lambda_{j} T_{3j-1}} (1 - (1 - e^{\lambda_{j} T_{3j-1}})^{n_{j}}) = \sum_{k=1}^{n_{j}} (1 - e^{-\lambda_{j} T_{3j-1}})^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n_{j}-1} k (1 - e^{-\lambda_{j} T_{3j-1}})^{k-1} e^{\lambda_{j} T_{3j-1}} + n_{j} (1 - e^{-\lambda_{j} T_{3j-1}})^{n_{j}-1}$$

равна среднему числу продлений второго этапа обслуживания потока  $\Pi_j$ , если продление будет происходить только по первому условию. Величина  $\widetilde{n}_j$  является нижней оценкой среднего числа продлений второго этапа обслуживания потока  $\Pi_j$ .

Введем функцию

$$\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(z) = \overline{q}_{3j,\overline{r}}(z)(q_{3j-1}^{\widetilde{n}_j}(z) - q_{3j-1}^{n_j}(z))W_{6i+(r\ominus(3s-1))}^{(3j-1)}(z).$$

При  $n_j=1$  данная функция  $\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(z)=\Psi_{j,6i}^{(r)}(z)\equiv 0$ . Пусть  $n_1,\ n_2>1$ . Тогда выполнение условия на начальное распределение (3.16) при некоторых  $z_1,z_2>1$  гарантирует, что функции  $\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(\overline{z}_j)$  и  $\widetilde{\Psi}_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_j)$  определены в некоторой правой полуокрестности точки  $z_j=1$ . Производные данных функций по  $z_j=1$  в точке  $z_j=1$  при всех  $i\geq 0;\ r=\overline{1,6},\ j,s=1,2;\ j\neq s$  равны

$$\frac{d}{dz_{j}}\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} = (\lambda_{j}M_{j}T_{3j-1} - l_{3j-1})(\widetilde{n}_{j} - n_{j})W_{6i+(r\ominus(3j-1)),k}^{(3j-1)}(\overline{1}),$$

$$\frac{d}{dz_{j}}\widetilde{\Psi}_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} = \lambda_{j}M_{j}T_{3s-1}(\widetilde{n}_{s} - n_{s})W_{6i+(r\ominus(3s-1)),k}^{(3j-1)}(\overline{1}).$$

Тогда при выполнении (3.23) и (3.24) следует, что

$$\frac{d}{dz_{j}}\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} > \frac{d}{dz_{j}}\Psi_{j,6i}^{(r)}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} \ge 0, 
\frac{d}{dz_{j}}\widetilde{\Psi}_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} < \frac{d}{dz_{j}}\Psi_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_{j})|_{z_{j}=1} \le 0.$$
(3.25)

Заметим, что  $\Psi_{j,6i}^{(r)}(\overline{1})=\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(\overline{1})=0$ . Если начальное распределение удовлетворяет (3.23) и (3.16), то для всех  $n_1,\ n_2$  в некоторой правой полуокрестности точки  $z_j=1$  выполнено

$$\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(\overline{z}_j) \ge \Psi_{j,6i}^{(r)}(\overline{z}_j) \ge 0, \quad \widetilde{\Psi}_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_j) < \Psi_{s,6i}^{(r)}(\overline{z}_j) \le 0.$$

Теперь получим еще одно необходимое условие существования предельного распределения. Для этого введем следующие обозначения

$$\widetilde{T}_j = T_0 + \widetilde{n}_j T_{3j-1} + n_s T_{3s-1},$$

$$\widetilde{L}_j = l_{3j-2} + \widetilde{n}_j l_{3j-1} + l_{3j}.$$

**Теорема 8.** Для существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i) \ i \geq 0\}$  необходимо выполнение неравенств

$$\lambda_j M_j \widetilde{T}_s - L_j < 0, \ j = 1, 2.$$
 (3.26)

Доказательство. Введем функцию

$$\widetilde{q}_s(z) = \overline{q}_{3s,3s-2}(z)q_{3s-1}^{\widetilde{n}_s}(z) = e^{(\lambda_1(m_1-1)+\lambda_2(m_2-1))\widetilde{T}_s}z_j^{-L_j}z_s^{-\widetilde{L}_s}.$$

Заметим, что  $\widetilde{q}_1(\overline{1}) = \widetilde{q}_2(\overline{1}) = 1$  и что производная  $\frac{d}{dz_j}\widetilde{q}_s(\overline{z}_j)|_{z_j=1}$  равна левой части неравенства (3.26). Нетрудно также убедиться, что

$$\frac{d^2}{dz_j^2} \widetilde{q}_s(\overline{z}_j)|_{z_j=1} = (\lambda_j M_j \widetilde{T}_s - L_j)^2 + L_j + \lambda_j \widetilde{T}_s \frac{d^2}{dz_j^2} m_j|_{z_j=1} > 0.$$

Пусть  $u_0 > 1$  выбрано так, что для любого  $z_1 \in [1, u_0)$  выполняются неравенства  $|q_r(\overline{z}_1)| < 2, r = \overline{1,6}$ . Будем вести доказательство от противного. Допустим, предельное распределение существует, и при этом неравенство (3.26) не выполняется. Рассмотрим случай j=1. Тогда  $\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_s(\overline{z}_1)|_{z_1=1} \geq 0$  и  $\frac{d^2}{dz_1^2}\widetilde{q}_s(\overline{z}_1)|_{z_1=1} > 0$ . Существует число  $u_1 < u_0$  такое, что для всех  $z_1 \in [1, u_1)$  выполнено неравенство  $\widetilde{q}_2(\overline{z}_1) > 1$ .

Пусть для начального распределения выполнено одновременно (3.23) и (3.16). В этом случае существует число  $u_2 \in (1, u_1)$  такое, что для любых  $z_1 \in [1, u_2)$  выполнено (3.25) для j=1. Далее рассмотрим равенство (2.41) при  $z=\overline{z}_1, r=5$ . Функции  $R_{1,6i}^{(5)}(\overline{z}_1) \geq 0$  при  $z_1 \geq 1$ . В силу (3.8) и (3.25) получаем, что для всех  $z_1 \in [1, u_2)$  выполнено

$$W_{6(i+1)}^{(5)}(\overline{z}_1) \ge q(\overline{z}_1)W_{6i}^{(5)}(\overline{z}_1) + \widetilde{\Psi}_{2,6i}^{(5)}(\overline{z}_1) - C_{\gamma}(\overline{z}_1).$$

Выполняется неравенство  $q(\overline{z}_1)W_{6i}^{(5)}(\overline{z}_1)+\widetilde{\Psi}_{2,6i}^{(5)}(\overline{z}_1)=\widetilde{q}_2(\overline{z}_1)W_{6i}^{(5)}(\overline{z}_1)$ . Значит при  $z_1\in [1,u_2)$  последовательность  $\{W_{6i}^{(5)}(\overline{z}_1);\ i\geq 0\}$  является мажорирующей для последовательности  $\{W_{2,6i}(\overline{z}_1);\ i\geq 0\}$ , которая определяется рекуррентными соотношениями

$$W_{2,0}(\overline{z}_1) = W_0^{(5)}(\overline{z}_1),$$

$$W_{2,6(i+1)}(\overline{z}_1) = \widetilde{q}_2(\overline{z}_1)W_{2,6i}(\overline{z}_1) - C_{\gamma}(\overline{z}_1), i \ge 0.$$

Функции  $W_{2,6i}(\overline{z}_1)$ ,  $i \geq 0$ , являются ограничеными равномерно по i константой в некоторой правой полуокрестности точки  $z_1 = 1$  по утверждению леммы 6. Пусть точка  $u_3 \in (1, u_2)$  находится в этой полуокрестности и начальное распределение при  $\overline{z}_1 = (u_3, 1)$  удовлетворяет условию

$$W_0^{(5)}(\bar{z}_1) > (\tilde{q}_2(\bar{z}_1) - 1)^{-1} C_{\Upsilon}(\bar{z}_1). \tag{3.27}$$

Данное условие на начальное распределение не противоречит соотношениям (3.16) и (3.23). Так как  $\widetilde{q}_2(\overline{z}_1) > 1$ , то итеративная процедура при  $z_1 = u_3$  расходится, а из (3.27) следует, что последовательность  $W_{2,6i}(\overline{z}_1)$ ,  $i \geq 0$ , неограниченно возрастает с ростом i при  $z_1 = u_3$ . Получили противоречие. Таким образом, из существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  следует выполнение неравенства (3.26) при j = 1. Случай j = 2 аналогичен. Теорема 8 доказана.

Неравенства (3.26) имеют физический смысл. Назовем интервал времени между последовательными переключениями обслуживающего устройства в состояние  $\Gamma^{(3s-1)}$  циклом. Константу  $\widetilde{T}_s$ , выражаемую через параметры системы, можно рассмотреть как среднюю длительность основного цикла при некоторых условиях. А именно: 1) длительность второго этапа обслуживания для потока  $\Pi_j$  равна максимальному значению  $n_j T_{3j-1}$ ; 2) длительность второго этапа обслуживания для потока  $\Pi_s$  определяется только первым условием для продлений. В этом случае средняя длительность обслуживания потока  $\Pi_j$  максимальна, а средняя длительность обслуживания потока  $\Pi_s$  минимальна. Выражение (3.26) задает условие, что на таком основном цикле среднее число поступивших требований по потоку  $\Pi_j$  должно быть меньше, чем число требований потока насыщения.

Переменные  $z_1$  и  $z_2$  — независимые. Но можно рассмотреть зависимость между ними. Пусть  $z_2=f(z_1)$ . Функция  $f(z_1)$  удовлетворяет следующим свой-

ствам: она дважды дифференцируема в точке  $z_1=1$  и

$$f(1) = 1; (3.28)$$

$$0 \le f'(1) < \infty; \tag{3.29}$$

$$f''(1) \ge 0 \text{ при } f'(1) = 0.$$
 (3.30)

Из условий (3.28), (3.29), (3.30) следует, что: 1) только для  $z_1=1$  выполнено  $z_2=1$ ; 2) в некоторой правой полуокрестности точки  $z_1=1$  для  $z_1=f(z_1)>1$  следует неравенство  $z_2>1$ . Обозначим множество всех функций, дважды дифференцируемых в точке  $z_1=1$  и удовлетворяющих (3.28), (3.29), (3.30) через F.

Рассмотрим правую часть соотношения (2.41) в некоторой правой полуокрестности точки  $z_1=1$ . При  $i\geq 0$  и  $r=\overline{1,6}$  выполнено

$$R_{i,6i}^{(r)}(z_1, f(z_1)) \ge 0, f(\cdot) \in F, z_1 > 1, i \ge 0, r = \overline{1,6}.$$
 (3.31)

Если при  $i \geq 0$  и  $r = \overline{1,6}$  выполнено  $\Psi_{j,6i}^{(r)}(z) \neq 0$ , то знак  $\Psi_{j,6i}^{(r)}(z)$  совпадает со знаком выражения  $(1-q_{3j-1}(z))$ . Так как  $q_{3j-1}(\overline{1})=1$ , то в некоторой правой полуокрестности точки  $z_1=1$  знак этого выражения определяется знаком производной функции  $q_{3j-1}(\overline{z})$  в точке  $z_1=1$ . С помощью дифференцирования получаем:

$$q_2'(\overline{1}) = \lambda_1 M_1 T_2 - l_2 + f'(1)\lambda_2 M_2 T_2; \quad q_5'(\overline{1}) = \lambda_1 M_1 T_5 + f'(1)(\lambda_2 M_2 T_2 - l_5).$$

Обозначим через  $d_1 = \lambda_1 M_1 T_5 (l_5 - \lambda_2 M_2 T_5)^{-1}$  и  $d_2 = (\lambda_2 M_2 T_2)^{-1} (l_2 - \lambda_1 M_1 T_2)$ . Отсюда следует, что в некоторой правой полуокрестности точки z = 1 выполняются следующие утверждения:

- 1) если  $f'(1) \neq d_1$ , то знак выражения  $(1 q_5(z))$  совпадает со знаком выражения  $(f'(1) d_1)$ ;
- 2) если  $f'(1) \neq d_2$ , то знак выражения  $(1 q_2(z))$  совпадает со знаком выражения  $(d_2 f'(1))$ .

Заметим, что неравенство (3.20) эквивалентно неравенству

$$\frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} < \frac{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2}{\lambda_2 M_2 T_2},\tag{3.32}$$

то есть  $d_1 < d_2$ . Таким образом, для построения различных мажорируемых последовательностей нужно рассмотреть три интервала изменения производной f'(1): 1)  $0 \le f'(1) \le d_1$ ; 2)  $d_1 \le f'(1) \le d_2$ ; 3)  $f'(1) \ge d_2$ . Для мажорации вновь воспользуемся функциями  $\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(z)$ ,  $i \ge 0$ , где  $r = \overline{1,6}$ . При  $z = (z_1,f(z_1))$  эти функции также являются функциями одной переменной  $z_1$ . Используя (3.24) и практически повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве предыдущей теоремы, можно сделать следующий вывод. Если начальное распределение удовлетворяет (3.23) и, кроме того, при некоторых  $z_1, z_2 > 1$  имеет место (3.16), то в некоторой правой полуокрестности точки  $z_1 = 1$  при  $r = \overline{1,6}$  выполняется

$$\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(z) \ge \Psi_{j,6i}^{(r)}(z) \ge 0, \text{ при } \frac{d}{dz_1} q_{3j-1}(z)|_{z_1=1} < 0,$$

$$\widetilde{\Psi}_{s,6i}^{(r)}(z) \le \Psi_{s,6i}^{(r)}(z) \le 0, \text{ при } \frac{d}{dz_1} q_{3j-1}(z)|_{z_1=1} > 0.$$

$$(3.33)$$

Рассмотрим случай, когда для некоторого j=1,2 выполняется

$$\frac{d}{dz_1}q_{3j-1}(z)|_{z_1=1} = 0.$$

Так как  $\frac{d}{dz_1}\Psi_{j,6i}^{(r)}(z)|_{z_1=1}=\frac{d}{dz_1}\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(z)|_{z_1=1}=0, \frac{d}{dz_1}\Psi_{j,6i}^{(r)}(\overline{1})=\frac{d}{dz_1}\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(\overline{1})=0,$  то соотношение между рассматриваемыми функциями зависит от вторых производных, которые в этом случае равны:

$$\frac{d^2}{dz_1^2} \Psi_{j,6i}^{(r)}(z)|_{z_1=1} = \frac{d^2}{dz_1^2} q_{3j-1}(z)|_{z_1=1} \sum_{k=1}^{n_j} (k-n_j) \Phi_{6i+(r\ominus(3j-1)),k}^{(3j-1)}(\overline{1}),$$

$$\frac{d^2}{dz_1^2} \widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(z)|_{z_1=1} = \frac{d^2}{dz_1^2} q_{3j-1}(z)|_{z_1=1}(\widetilde{n_j}-n_j) W_{6i+(r\ominus(3j-1))}^{3j-1}(\overline{1}).$$

Значит, согласно (3.24) в этом случае для  $r=\overline{1,6}$  в некоторой правой полуокрестности точки  $z_1=1$  получаем:

$$\widetilde{\Psi}_{j,6i}^{(r)}(z) \ge \Psi_{j,6i}^{(r)}(z) \ge 0 \text{ при } \frac{d^2}{dz_1^2} q_{3j-1}(z)|_{z_1=1} < 0,$$

$$\widetilde{\Psi}_{s,6i}^{(r)}(z) \le \Psi_{s,6i}^{(r)}(z) \le 0 \text{ при } \frac{d^2}{dz_1^2} q_{3j-1}(z)|_{z_1=1} > 0.$$

$$(3.34)$$

Рассмотрим отдельно три интервала изменения производной f'(1).

Пусть выполнено  $0 \le f'(1) \le d_1$ . Тогда функция  $f(\cdot) \in F$  удовлетворяет либо

$$0 \le f'(1) < d_1, \tag{3.35}$$

либо одновременно выполнено два условия

$$f'(1) = d_1, (3.36)$$

$$0 < f''(1) < l_5(\lambda_1 M_1 T_5)^2 (l_5 - \lambda_2 M_2 T_5)^{-3}. \tag{3.37}$$

Множество всех таких функций обозначим через  $F_1 \subset F$ . Из (3.35) следует, что  $\frac{d}{dz_1}q_2(z)|_{z_1=1} < 0$  и  $\frac{d}{dz_1}q_5(z)|_{z_1=1} > 0$ . Из условий (3.36) и (3.37) получаем  $\frac{d}{dz_1}q_5(z)|_{z_1=1} = 0$ ,  $\frac{d^2}{dz_1^2}q_5(z)|_{z_1=1} = l_5d_1^2 + (\lambda_2 M_2 T_5 - l_5)f''(1) > 0$ . Пусть начальное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  удовлетворяет условиям (3.23) и (3.16). Так как f'(1) ограничена при  $f(\cdot) \in F_1$ , то существует число  $u_0 > 1$  такое, что (3.16) выполняется при  $z = (z_1, f(z_1)), z_1 < u_0, f(\cdot) \in F_1$ . Значит всегда найдется такое число  $u_1 \in (1, u_0)$ , что при  $z = (z_1, f(z_1))$ , где  $z_1 \in (1, u_1), f(\cdot) \in F_1$ , из (3.33) и (3.34) получаем:

$$\Psi_{1,6i}^{(5)}(z) \ge 0; \quad \Psi_{2,6i}^{(5)}(z) \ge \widetilde{\Psi}_{2,6i}^{(5)}(z).$$
 (3.38)

Тогда из (2.41) для r = 5, (3.8) и (3.38) имеем:

$$W_{6(i+1)}^{(5)}(z) \ge q(z)W_{6i}^{(5)}(z) + \widetilde{\Psi}_{2,6i}^{(5)}(z) - C_{\gamma}(z).$$

Заметим, что  $q(z)W_{6i}^{(5)}(z)+\widetilde{\Psi}_{2,6i}^{(5)}(z)=\widetilde{q}_2(z)W_{6i}^{(5)}(z)$ . Таким образом, при выполнении  $1< z_1< u_1, z=(z_1,f(z_1)), f(\cdot)\in F_1$  последовательность  $\{W_{6i}^{(5)}(z); i\geq 0\}$  мажорирует последовательность  $\{W_{3,6i}(z); i\geq 0\}$ , которая определяется рекуррентными соотношениями

$$W_{3,0}(z) = W_0^{(5)}(z), \quad W_{3,6(i+1)}(z) = \widetilde{q}_2(z)W_{3,6i}(z) - C_{\Upsilon}(z), \ i \ge 0.$$
 (3.39)

Далее сформулируем следующую лемму.

**Лемма 8.** Если неравенство  $\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1}>0$  верно для некоторой функции  $f(\cdot)\in F_1$ , то предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$  не существует.

Доказательство. Пусть для начального распределения выполнены условия (3.23) и (3.16). Также пусть существует некоторая функция  $f_1(\cdot) \in F_1$  при  $z=(z_1,f_1(z_1))$ , для которой  $\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1}>0$ . Проведем доказательство от противного. Предположим, что существует предельное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$ . По теореме 5 должно существовать значение  $u_2\in(1,u_1)$ , для которого функции  $W_{6i}^{(r)}(z),\,i\geq 0,\,r=\overline{1,6}$  равномерно ограничены по i при условии на переменные  $z_1< u_2$  и  $z=(z_1,f_1(z_1))$ . Отсюда следует, что функции  $W_{3,6i}(z)$  при  $i\geq 0$  также будут равномерно ограничены по i при  $z_1< u_2$ .

В силу предположения  $\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1}>0$ , значит существует значение  $u_3\in(1,u_2)$  такое, что для каждого  $z_1\in(1,u_3)$  выполняется неравенство  $\widetilde{q}_2(z)>1$ . Получаем, то при  $z_1\in(1,u_3)$  рекуррентная последовательность (3.39) должна расходится. Пусть для начального распределения при некотором  $z_1=u_4\in(1,u_3)$  и  $z=(z_1,f_1(z_1))$  выполнено неравенство  $W_0^{(5)}(z)>(\widetilde{q}_2(z)-1)^{-1}C_\Upsilon(z)$ . В этом случае последовательность, определяемая рекуррентными соотношениями (3.39), при  $z_1=u_4$  неограниченно увеличивается с ростом i. Получили противоречие. Лемма 8 доказана.

Продифференцируем функцию  $\widetilde{q}_2(z)$  при  $z=(z_1,f(z_1))$  по  $z_1$ :

$$\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1} = \lambda_1 M_1 \widetilde{T}_2 - L_1 + f'(1)(\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2).$$

Если предельное распределение марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  существует, то найденная производная должна быть неотрицательной при всех значениях  $f'(1), f(\cdot) \in F_1$ . Для получения более сильных необходимых условий необходимо рассмотреть значения производной  $f'(1), f(\cdot) \in F_1$ , при которых производная  $\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1}$  принимает максимальное значение. При  $\lambda_2\widetilde{T}_2 - \widetilde{L} \leq 0$  наибольшее значение производной  $\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1}$  достигается при f'(1)=0. По теореме 8 должно выполняться строгое неравенство  $\lambda_1\widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_1 < 0$ . В случае  $\lambda_2\widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2 > 0$  производная  $\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1}$  достигает своего наибольшего значения при  $f'(1)=d_1$ . Далее сформулируем лемму.

#### **Лемма 9.** Ecnu выполнено

$$\lambda_1 \widetilde{T}_2 M_1 - L_1 + d_1 (\lambda_2 \widetilde{T}_2 M_2 - \widetilde{L}_2) = 0,$$

то предельного распределения марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  не существует.

Доказательство. Будем вести доказательство от противного. Пусть предельное распределение марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  существует и  $\lambda_1 \widetilde{T}_2 M_1 - L_1 + d_1 (\lambda_2 \widetilde{T}_2 M_2 - \widetilde{L}_2) = 0$ . Тогда возьмем функцию  $f_2(\cdot)$  из  $F_1$ ,

удовлетворяющую (3.36) и (3.37). Получаем

$$\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1} = 0,$$

$$\frac{d^2}{dz_1^2}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1} = ((\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 f_2'(1))\widetilde{T}_2)^2 +$$

$$+(\lambda_1 m_1''(1) + \lambda_2 m_2''(1)f_2'(1) + \lambda_2 M_2 f_2''(1))\widetilde{T}_2 +$$

$$+L_1(L_1+1) + \widetilde{L}_2(\widetilde{L}_2+1)(f_2'(1))^2 - \widetilde{L}_2 f_2''(1) +$$

$$+2(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 f_2'(1))\widetilde{T}_2(-L_1 - \widetilde{L}_2 f_2'(1)) + 2L_1\widetilde{L}_2 > 0.$$

По теореме 5 существует число  $u_5 \in (1, u_1)$ , при котором функции  $W_{6i}^{(r)}(z)$  при  $i \geq 0, \ r = \overline{1,6}$  и  $z = (z_1, f_2(z_1))$  равномерно ограничены по i для  $z_1 < u_5$ . В случае  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2 \leq 0$  получаем, что  $\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_1 \geq 0$ . Но это по теореме 8 приводит к отсутствию предельного распределения. Рассмотрим случай  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2 > 0$ . Выше было получено, что  $\frac{d}{dz_1} \widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1} = 0$  и  $\frac{d^2}{dz_1^2} \widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1} > 0$ . Значит существует число  $u_6 \in (1, u_5)$ , для которого при всех  $z_1 \in (1, u_6)$  выполнено неравенство  $\widetilde{q}_2(z) > 1$ . А рекуррентная последовательность (3.39) расходится при  $1 < z_1 < u_5$ . Аналогично доказательству леммы 8 получаем, что предельное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  не существует. Лемма 9 доказана.

Пусть теперь  $d_1 \leq f'(1) \leq d_2$ . Рассмотрим функцию  $f(\cdot)$  из F, для которой выполнено или условие

$$d_1 < f'(1) < d_2, (3.40)$$

или выполнены два условия  $f'(1) = d_1$  и

$$f''(1) > l_5(\lambda_1 M_1 T_5)^2 (l_2 - \lambda_2 M_2 T_5)^{-3}, \tag{3.41}$$

или, наконец, выполнены условия

$$f'(1) = d_2, (3.42)$$

$$f''(1) < -l_2(\lambda_2 M_2 T_2)^{-1}. (3.43)$$

Обозначим через  $F_2 \subset F$  множество всех функций, удовлетворяющих одному из трех указанных выше условий. Также введем зависимость переменных  $z=(z_1,f(z_1))$ , где  $f(\cdot)\in F_2$ . При рассмотрении предыдущего случая было получено, что из (3.40) следует, что  $\frac{d}{dz_1}q_2(z)|_{z_1=1}<0$ ,  $\frac{d}{dz_1}q_5(z)|_{z_1=1}<0$ . Из (3.36)

и (3.41) получаем  $\frac{d}{dz_1}q_5(z)|_{z_1=1}=0$ ,  $\frac{d^2}{dz_1^2}q_5(z)|_{z_1=1}<0$ . Наконец из (3.42) и (3.43) следует  $\frac{d}{dz_1}q_2(z)|_{z_1=1}=0$  и  $\frac{d^2}{dz_1^2}q_2(z)|_{z_1=1}=l_2+\lambda_2T_5f''(1)<0$ . Пусть начальное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$  одновременно удовлетворяет (3.23) и (3.16). Так как производная f'(1) ограничена при  $f(\cdot)\in F_2$ , то существует число  $u_0>1$ , для которого условие (3.16) будет выполняться при  $z=(z_1,f(z_1)),\ z_1< u_0,\ f(\cdot)\in F_2$ . Тогда из (3.33) и (3.34) следует, что существует значение  $u_1\in (1,u_0)$ , для которого при всех  $z_1\in (1,u_1)$  выполнены неравенства

$$\Psi_{1.6i}^{(5)}(z) \ge 0, \quad \Psi_{2.6i}^{(5)}(z) \ge 0.$$
 (3.44)

Тогда получаем, что при  $z_1 < u_1, z = (z_1, f(z_1)), f(\cdot) \in F_2$  последовательность  $\{W_{6i}^{(5)}(z); i \geq 0\}$  мажорирует последовательность  $\{W_{4,6i}(z); i \geq 0\}$ , заданную рекуррентными соотношениями

$$W_{4,0}(z) = W_0^{(5)}(z), \quad W_{4,6(i+1)}(z) = q(z)W_{4,6i}(z) - C_{\Upsilon}(z), \ i \ge 0.$$
 (3.45)

**Лемма 10.** Если неравенство  $\frac{d}{dz_1}q(z)|_{z_1=1} > 0$  верно для некоторой функции  $f(\cdot) \in F_2$ , то предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  не существует.

Доказательство этого утверждения практически повторяет доказательство леммы 8. В качестве мажорируемой последовательности используется последовательность, заданная рекуррентными соотношениями (3.45).

Для установления следующего утверждения, продифференцируем функцию q(z) по  $z_1$  в точке  $z_1=1$ :

$$\frac{d}{dz_1}q(z)|_{z_1=1} = \lambda_1 M_1 T - L_1 + f'(1)(\lambda_2 M_2 T - L_2).$$

Далее рассмотрим функции  $f(\cdot) \in F_2$ , для которых производная  $\frac{d}{dz_1}q(z)|_{z_1=1}$  принимает наибольшие значения. Если  $\lambda_2 M_2 T - L_2 \geq 0$ , то наибольшее значение достигается при  $f'(1) = d_1$ . Отсюда следует равенство производных  $\frac{d}{dz_1}q(z)|_{z_1=1} = \frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_2(z)|_{z_1=1}$  и

$$\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_2 - L_1 + d_1 (\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2) = \lambda_1 M_1 T - L_1 + d_1 (\lambda_2 M_2 T_1 - L_2). \tag{3.46}$$

Из лемм 8 и 9 следует, что соотношение  $\lambda_1 M_1 T - L_1 + d_1(\lambda_2 M_2 T_1 - L_2) < 0$  является необходимым условием существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ . Если  $\lambda_2 M_2 T - L_2 > 0$ , то наибольшее значение

 $\frac{d}{dz_1}q(z)|_{z_1=1}$  будет при  $f'(1)=d_2$ . По утверждению леммы 10 для существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$  необходимо  $\lambda_1 M_1 T - L_1 + d_1(\lambda_2 M_2 T_1 - L_2) < 0$ . Далее докажем, что при условии  $\lambda_1 M_1 T - L_1 + d_2(\lambda_2 M_2 T_1 - L_2) = 0$  предельного распределения не существует.

### Лемма 11. Если выполнено равенство

$$\lambda_1 M_1 T - L_1 + d_2(\lambda_2 M_2 T_1 - L_2) = 0,$$

то предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  не существует.

Доказательство. Пусть предельное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$  существует, тогда выполняется следующее равенство  $\lambda_1 M_1 T - L_1 + d_2(\lambda_2 M_2 T_1 - L_2) = 0$ . Если  $\lambda_2 M_2 T_1 - L_2 \geq 0$ , то  $\lambda_1 M_1 T - L_1 + d_1(\lambda_2 M_2 T_1 - L_2) > 0$ , что противоречит существованию предельного распределения. Пусть  $\lambda_2 M_1 T_1 - L_2 > 0$ . Рассмотрим функцию  $f_3(\cdot) \in F_2$  такую, что выполняется (3.42) и (3.43), причем  $f_3''(1) > -L_1(n_1\lambda_2 M_2 T_2)^{-1}$ . Тогда при  $z = (z_1, f_3(z_1))$  получим, что

$$\frac{d}{dz_1}q(z)|_{z_1=1} = 0,$$

$$\frac{d^2}{dz_1^2}q(z)|_{z_1=1} = \lambda_1 T(1-p_1) + L_1 + L_2 d_2^2 + f_3^{'2}(1-p_2) +$$

$$+(\lambda_2(2-p_2)T_2 - L_2)f_3''(1) = \lambda_1 T(1-p_1) + L_1 + L_2 d_2^2 + f_3^{'2}(1-p_2) +$$

$$+n_1\lambda_2(2-p_2)T_2f_3''(1) + (\lambda_2(2-p_2)(T-n_1T_2) - L_2)f_3''(1) > 0.$$

Итак, в некоторой правой полуокрестности точки  $z_1=1$  имеет место неравенство q(z)>1, и итеративная процедура (3.43) расходится. Далее доказательство повторяет с очевидными изменениями последнюю часть доказательства леммы 8. Лемма 11 доказана.

Рассмотрим последний случай  $f'(1) \geq d_2$ . Пусть для функции  $f(\cdot) \in F$  выполнено либо

$$f'(1) > d_2, (3.47)$$

либо выполнено два условия  $f'(1) = d_2$  и

$$f''(1) > -l_2(\lambda_2 M_2 T_2)^{-1}. (3.48)$$

Обозначим через  $F_3 \subset F$  множество описанных выше функций. Примем  $z=(z_1,f(z_1))$ , где  $f(\cdot)\in F_3$ . Из (3.47) следует, что  $\frac{d}{dz_1}q_2(z)|_{z_1=1}>0$ ,  $\frac{d}{dz_1}q_5(z)|_{z_1=1}<0$ . Из (3.48) и (3.48) имеем  $\frac{d}{dz_1}q_2(z)|_{z_1=1}=0$ ,  $\frac{d^2}{dz_1^2}q_2(z)|_{z_1=1}>0$ . Пусть начальное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$  одновременно удовлетворяет (3.23) и (3.16). Значит для любой функции  $f(\cdot)\in F_3$  существует число  $u_0>1$ , при котором условие (3.16) будет выполнено для  $z=(z_1,f(z_1))$  и  $z< u_0$ ). Для  $z=(z_1,f(z_1))$ , из условий (3.33) и (3.34) следует, что существует число  $u_1\in (1,u_0)$ , для которого при всех  $z_1\in (1,u_0)$  и  $z=(z_1,f(z_1))$  выполняются неравенства

$$\Psi_{1,6i}^{(2)}(z) \ge \widetilde{\Psi}_{2,6i}^{(2)}(z), \quad \Psi_{2,6i}^{(2)}(z) \ge 0.$$

В случае  $f(\cdot) \in F_3$  при  $1 < z_1 < u_1, z = (z_1, f(z_1))$ , последовательность функций  $\{W_{6i}^{(5)}(z); i \geq 0\}$  мажорирует последовательность  $\{W_{5,6i}(z); i \geq 0\}$ , определяемую рекуррентными выражениями

$$W_{5,0}(z) = W_0^{(2)}(z), \quad W_{5,6(i+1)}(z) = \widetilde{q}_1 W_{5,6i}(z) - C_{\Upsilon}(z), \ i \ge 0.$$
 (3.49)

**Лемма 12.** Если неравенство  $\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_1(z)|_{z_1=1}>0$  верно для некоторой функции  $f(\cdot)\in F_3$ , то предельного распределения марковской последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$  не существует.

Ход доказательства повторяет доказательство леммы 8. В качестве мажорируемой последовательности используется последовательность (3.49). Таким образом, лемма 12 доказана.

Дифференцирование функции  $\widetilde{q}_1(z)$  в точке  $z_1=1$  дает:

$$\frac{d}{dz_1}\widetilde{q}_1(z)|_{z_1=1} = \lambda_1 M_1 \widetilde{T}_1 - \widetilde{L}_1 + f'(1)(\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_1 - L_2).$$

По теореме 8 выполняется неравенство  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_1 - L_2 < 0$ . Значит, производная  $\frac{d}{dz_1} \widetilde{q}_1(z)|_{z_1=1}$  достигает наибольшего значения при  $f'(1)=d_2$ . Этот случай был рассмотрен в лемме 11, так как

$$\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_1 - \widetilde{L}_1 + d_2(\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_1 - L_2) = \lambda_1 M_1 \widetilde{T} - \widetilde{L}_1 + d_2(\lambda_2 M_2 \widetilde{T} - L_2). \tag{3.50}$$

Итак, получены необходимые условия существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ , которые сформулированы в теоремах 9 и 10.

**Теорема 9.** Для существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  необходимо выполнение неравенства

$$\lambda_1 M_1 T - L_1 + \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} (\lambda_2 M_2 T - L_2) < 0. \tag{3.51}$$

**Теорема 10.** Для существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  необходимо выполнение неравенства

$$\lambda_1 M_1 T - L_1 + \frac{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2}{\lambda_2 M_2 T_2} (\lambda_2 M_2 T - L_2) < 0. \tag{3.52}$$

Поясним физический смысл необходимых условий 9 и 10. Для случая  $\lambda_2 M_2 T - L_2 < 0$  длительность второго этапа обслуживания потока  $\Pi_2$  не всегда будет максимальной. Значит, можно не требовать, чтобы число  $\lambda_1 M_1 T - L_1$  было отрицательным, а нужно наложить на это значение более мягкое ограничение, которое было бы тем слабее, чем меньше число  $\lambda_2 M_2 T - L_2$ . Неравенство (3.49) как раз и является таким ограничением на значение  $\lambda_1 M_1 T - L_1$ . Аналогично, неравенство (3.52) является ограничением на  $\lambda_2 M_2 T - L_2$ , если  $\lambda_1 M_1 T - L_1 < 0$ . Теперь сформулируем очевидные следствия доказанных теорем.

**Следствие 3.** Для существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  необходимо, чтобы хотя бы для какого-то j=1,2 выполнялось неравенство

$$\lambda_j M_j T - L_j < 0. (3.53)$$

На практике это означает следующее. Пусть по потокам скопились большие очереди. Тогда обслуживающее устройство переключается по циклу только в основные состояния, а длительности периода обслуживания равны своим максимальным значениям. Для существования стационарного режима необходимо, чтобы в этой ситуации хотя бы одна из очередей в среднем уменьшалась.

Если поделить обе части неравенства (3.51) на  $n_1$ , а затем устремить  $n_1$  к бесконечности (длительность второго этапа обслуживания может быть сколь угодно большой), то получим:

$$\lambda_1 M_1 T_2 - l_2 + \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} (\lambda_2 M_2 T_2) < 0,$$

или  $\lambda_1 M_1 T_2 l_5 + \lambda_2 M_2 T_5 l_2 < l_2 l_5$ .

Далее найдем связь между теоремами  $8,\,9$  и 10 при различных значениях параметров.

Лемма 13. Имеют место следующие утверждения:

- 1) при  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 \widetilde{L}_2 < 0$  и j=1 из условия (3.26) следуют неравенства (3.51) и (3.52);
- 2) при  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 \widetilde{L}_2 \ge 0$ ,  $\lambda_2 M_2 T L_2 < 0$  и j = 1 из условия (3.51) следуют неравенства (3.26) и (3.52);
- 3) при  $\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_1 \widetilde{L}_1 < 0$  и j=2 из условия (3.26) следуют неравенства (3.51) и (3.52);
- 4) при  $\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_1 \widetilde{L}_1 \geq 0$ ,  $\lambda_1 M_1 T L_1 < 0$  и j = 2 из условия (3.52) следуют неравенства (3.26) и (3.51).

$$\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_2 - L_1 + \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} (\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2) < 0. \tag{3.54}$$

При условии  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2 < 0$  из (3.26) при j=1 следуют неравенства (3.54) и (3.51). Так как при  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2 < 0$  получаем  $\lambda_2 M_2 T - L_2 < 0$ . Таким образом, при учете неравенства (3.32) из условия (3.51) следует неравенство (3.52) .

Перейдем к доказательству второго пункта. Пусть выполнены неравенства  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2 \geq 0$  и  $\lambda_2 M_2 T - L_2 < 0$ . Тогда из условий (3.51), (3.32) и неравенства  $\lambda_2 M_2 T - L_2 < 0$  следует неравенство (3.52). Из условия (3.54) и неравенства  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_2 - \widetilde{L}_2 \geq 0$  при j=1 следует неравенство (3.26).

Аналогичным образом из условия (3.50) следует, что левая часть неравенства (3.52) равна левой части неравенства

$$\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_1 - L_2 + \frac{\lambda_2 M_2 T_2}{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2} (\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_1 - \widetilde{L}_1) < 0.$$

Третий и четвертый пункт леммы доказывается аналогично. Лемма 13 доказана.

**Теорема 11.** Для существования предельного распределения марковской последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$  достаточно выполнения неравенств

$$\lambda_j M_j T - L_j < 0, \ j = 1, 2. \tag{3.55}$$

Доказательство. Рассмотрим равенство (2.42) при  $z=\overline{z}_1$ . Так как производная  $\frac{d}{dz_1}q(\overline{z}_1)|_{z_1=1}=\lambda_1 M_1 T-L_1<0$ , то существует точка  $u_0$ , для которой при

всех  $z_1 \in (1, u_0)$  выполняется  $q_r(\overline{z}_1) < 2, r = \overline{1,6}, q_5(\overline{z}_1) > 1$  и  $q(\overline{z}_1) < 1$ . Тогда при  $1 < z_1 < u_0$  для всех  $i \ge 0$  имеем:

$$\Psi_{1,6i}(\overline{z}_1) \le 6 \times 2^{n_2+4} z_1^{K_1+n_1 l_2} = C_{1,\psi}(\overline{z}_1), \quad \Psi_{2,6i}(\overline{z}_1) \le 0.$$
 (3.56)

Пусть начальное распределение удовлетворяет (3.16) и  $1 < z_1 \le u_1$ , где  $z = \overline{z}_1$ ,  $1 < u_1 \le u_0$ . Обозначим  $C(\overline{z}_1) = C_{1,\psi}(\overline{z}_1) + C_R + C_{\Upsilon}(\overline{z}_1)$ . В силу (3.56) последовательность  $\{W_{6.6i}(\overline{z}_1); i \ge 0\}$ , заданная рекуррентным соотношением

$$W_{6,0}(\overline{z}_1) = W_0(\overline{z}_1), \quad W_{6,6(i+1)}(\overline{z}_1) = q(\overline{z}_1)W_{6,6i}(\overline{z}_1) + C(\overline{z}_1),$$

является мажорантной для последовательности  $\{W_{6i}(\overline{z}_1); i \geq 0\}$  при условии  $1 \leq z_1 < u_1$ . При этом последовательность  $\{W_{6,6i}(\overline{z}_1); i \geq 0\}$  при всех  $z_1 \in (1,u_1)$  сходится к  $C(\overline{z}_1)(1-q(\overline{z}_1))^{-1}$ . Таким образом последовательность функций  $\{W_{6,6i}(\overline{z}_1); i \geq 0\}$  ограничена. Получаем, что последовательность  $\{W_{6i}(\overline{z}_1); i \geq 0\}$  равномерно ограничена для всех  $z_1 \in [1,u_1)$ . Аналогично можно доказать, что существует число  $u_2$ , для которого для всех  $z_2 \in [1,u_2)$  последовательность  $\{W_{6i}(\overline{z}_2); i \geq 0\}$  является равномерно ограниченной. По теореме 5 существует предельное распределение для последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ . Теорема 11 доказана.

Физический смысл теоремы 11 в том, что если управляющая система находится в стационарном режиме, то очереди не возрастают бесконечно. То есть система должна функционировать, в среднем уменьшая большие очереди. Если очереди по обоим потокам велики, то переключения будут происходить по основному циклу, длительность такого цикла будет равна T, а количество обслуженных заявок потока  $\Pi_j$ , где j=1,2, будет равно  $L_j$ . В этом случае неравенства (3.55) означают, что в среднем очередь ни по одному из потоков бесконечно возрастать не будет.

При  $n_1 = n_2 = 1$  длительность основного цикла становится константой. В этом случае необходимые и достаточными условия совпадают. В итоге при  $n_1 = n_2 = 1$  получаем критерий существования предельного распределения. При  $n_1 = 1$  второе неравенство (3.55) совпадает со вторым неравенством (3.26) и при  $n_2 = 1$  первое неравенство (3.55) совпадает с первым неравенством (3.26). Получаем необходимое и достаточное условие ограниченности средней длины очереди по потоку  $\Pi_2$  при  $n_1 = 1$  и по потоку  $\Pi_1$  при  $n_2 = 1$ .

Таким образом, в главе 3 изучены предельные свойства функционирования системы адаптивного управления конфликтными потоками Кокса-Льюиса.

# Глава 4. Качественное и численное исследование системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований

В главе 4 проведен анализ пространства управляемых параметров системы. Найдены области существования предельного распределения, соответствующие условиям, полученным в теоремах главы 3. Также приведено исследование системы с помощью имитационного моделирования. Описан алгоритм определения момента окончания переходного процесса в имитационной модели. Проведен поиск квази-оптимальных параметров системы.

# 4.1 Определение оценки для загрузки управляющей системы обслуживания на основании предельных свойств марковской последовательности $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$

Определим множество допустимых значений параметров адаптивного алгоритма управления конфликтными потоками Кокса-Льюиса и некоторые его подмножества. Для этого обозначим через  $(\overline{T}, \overline{n})$  вектор допустимых параметров, где

$$\overline{T} = (T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6), T_r > 0, r = \overline{1,6};$$
  
 $\overline{n} = (n_1, n_2), n_1 \in \{1, 2, \ldots\}, n_2 \in \{1, 2, \ldots\}.$ 

Пусть D — множество всех векторов  $(\overline{T}, \overline{n})$ . Тогда имеет место соотношение

$$D = \{(\overline{T}, \overline{n}) : T_r > 0, r = \overline{1,6}, n_1 \in \{1, 2, \ldots\}, n_2 \in \{1, 2, \ldots\}\}.$$

Пусть выполняется необходимое условие (3.20) существования предельного распределения последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ . Обозначим через  $D_{1,0}$  и  $D_{2,0}$  множества векторов  $(\overline{T}, \overline{n})$  таких, что выполнено (3.26):

$$D_{j,0} = \{(\overline{T}, \overline{n}) : \lambda_j M_j \widetilde{T}_s - L_j < 0\}, j, s = 1, 2; j \neq s.$$

Далее, обозначим через  $D_{1,1}$  и  $D_{2,1}$  множества векторов  $(\overline{T}, \overline{n})$  таких, что соответственно выполнено (3.51) и (3.52):

$$D_{1,1} = \{ (\overline{T}, \overline{n}) : \lambda_1 M_1 T - L_1 + \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} (\lambda_2 M_2 T - L_2) < 0 \},$$
  

$$D_{2,1} = \{ (\overline{T}, \overline{n}) : \lambda_1 M_1 T - L_1 + \frac{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2}{\lambda_2 M_2 T_2} (\lambda_2 M_2 T - L_2) < 0 \}.$$

Наконец, обозначим через  $D_{1,2}$  и  $D_{2,2}$  множества векторов  $(\overline{T}, \overline{n})$  таких, что выполнено (3.55):

$$D_{j,2} = \{(\overline{T}, \overline{n}) : \lambda_j M_j T - L_j < 0\}, j = 1, 2.$$

Введем множество  $S \subset D$  векторов  $(\overline{T}, \overline{n})$ , для которых выполнены необходимые условия (3.26), (3.51), (3.52). Обозначим через  $S' \subset D$  множество допустимых наборов параметров, для которых выполняется достаточные условия (3.55). Таким образом, получаем

$$S = D_{1,0} \cap D_{1,1} \cap D_{2,0} \cap D_{2,1},$$
$$S' = D_{1,2} \cap D_{2,2}.$$

Очевидно  $S' \subset S$ . Также для более детального исследования введем  $D_{1,3}$  и  $D_{2,3}$ , такие, что

$$D_{j,3} = \{(\overline{T}, \overline{n}) : \lambda_j M_j \widetilde{T}_s - \widetilde{L}_j < 0\}, \ j = 1, 2, j \neq s.$$

Зафиксируем значения  $\overline{T}$ . Тогда через  $D(\overline{T}), D_{j,\overline{d}}(\overline{T}), S(\overline{T}), S'(\overline{T}), j=1,2;$   $\overline{d} \in \{0,1,2,3\},$  обозначим множества точек  $\overline{n}$ , для которых набор параметров  $(\overline{T},\overline{n})$  при фиксированном  $\overline{T}$  является набором из множеств  $D, D_{j,\overline{d}}, S, S', j=1,2;$   $\overline{d} \in \{0,1,2,3\}.$ 

Достаточные условия существования предельного распределения для марковской последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_j);i\geq 0\}$ , которые дает теорема 11, выполняются при  $\overline{n}\in S'(\overline{T})$ . Уравнение прямой  $\lambda_1M_1T-L_1=0$  при  $T=T_0+n_1T_2+n_2T_5$ ,  $L_1=l_1+n_1l_2+l_3$  имеет вид

$$n_1 = \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2} n_2 + \frac{\lambda_1 M_1 T_0 - l_1 - l_3}{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2} = g_1(n_2). \tag{4.1}$$

Аналогично, уравнение прямой  $\lambda_2 M_2 T - L_1 = 0$  имеет вид

$$n_2 = \frac{\lambda_2 M_2 T_2}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} n_1 + \frac{\lambda_2 M_2 T_0 - l_4 - l_6}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} = g_2(n_1). \tag{4.2}$$

Неравенство (3.20) эквивалентно условию

$$\frac{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2}{\lambda_1 M_1 T_5} > \frac{\lambda_2 M_2 T_2}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5}.$$

Из данного неравенства следует, что на плоскости  $n_1On_2$  угол наклона прямой  $\lambda_1M_1T-L_1=0$  больше, чем угол наклона прямой  $\lambda_2M_2T-L_2=0$ . Значит, данные прямые пересекаются в некоторой точке  $(n_{1,0},n_{2,0})$ . Получаем, что существует сектор, к котором выполнены оба условия существования предельного распределения.

Решая систему (4.1) и (4.2), находим

$$n_{1,0} = \frac{(\lambda_1 M_1 T_0 - l_1 - l_3)(l_5 - \lambda_2 M_2 T_5)}{l_2 l_5 - \lambda_1 M_1 T_2 l_5 - \lambda_2 M_2 T_5 l_2} + \frac{(\lambda_2 M_2 T_0 - l_4 - l_6)\lambda_1 T_5}{l_2 l_5 - \lambda_1 M_1 T_2 l_5 - \lambda_2 M_2 T_5 l_2},$$

$$n_{2,0} = \frac{(\lambda_1 M_1 T_0 - l_1 - l_3)\lambda_2 M_2 T_2}{l_2 l_5 - \lambda_1 M_1 T_2 l_5 - \lambda_2 M_2 T_5 l_2} + \frac{(\lambda_2 M_2 T_0 - l_4 - l_6)(l_2 - \lambda_1 M_1 T_2)}{l_2 l_5 - \lambda_1 M_1 T_2 l_5 - \lambda_2 M_2 T_5 l_2}.$$

На рис. 4.1 приведены границы множеств  $D_{1,2}$  и  $D_{2,2}$  и область  $D_{1,2} \cap D_{2,2}$  при следующих параметрах

$$l_1 = 1, l_2 = 4, l_3 = 2, l_4 = 2, l_5 = 3, l_6 = 2,$$
  
 $T_0 = 6, T_2 = 2, T_5 = 2, \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = 0.35, M_1 = 2, M_2 = 2.$  (4.3)

Границы множеств  $D_{1,2}$  и  $D_{2,2}$  пересекаются в точке  $(n_{1,0}, n_{2,0})$ .

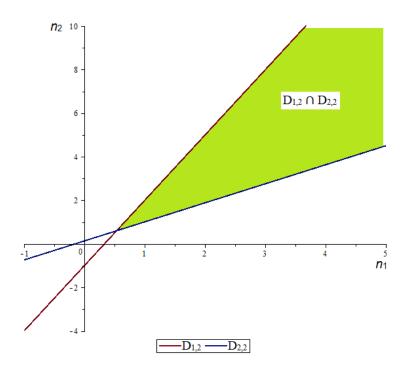


Рисунок 4.1 — Границы множеств  $D_{1,2}, D_{2,2}$  и область  $D_{1,2} \cap D_{2,2}$ 

Определим множества  $D_{1,1}(\overline{T}) \subset D(\overline{T}), D_{2,1}(\overline{T}) \subset D(\overline{T})$ . Найдем границу множества  $D_{1,1}(\overline{T})$  на плоскости  $n_1On_2$ , заменив знак меньше на равно в (3.51). Точка  $(n_{1,0}, n_{2,0})$  удовлетворяет равенству (3.51) и, следовательно, принадлежит границе множества  $D_{1,1}(\overline{T})$ . Преобразуем неравенство (3.51) к следующему виду

$$(\lambda_1 M_1(T_0 + n_1 T_2) - l_1 - n_1 l_2 - l_3) + \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} (\lambda_2 M_2(T_0 + n_1 T_2) - l_4 - l_6) < 0.$$

$$(4.4)$$

В неравенстве (4.4) задано условие только на переменную  $n_1$ . Получаем, что граница данного множества является прямой  $n_1 = n_{1,0}$ , параллельной оси  $On_2$ . Само множество  $D_{1,1}$  находится правее границы и удовлетворяет условию  $n_1 > n_{1,0}$ . Аналогично получаем, что множество  $D_{2,1}$  лежит выше прямой  $n_2 = n_{2,0}$  и удовлетворяет условию  $n_2 > n_{2,0}$ . На рис. 4.2 приведены границы множеств  $D_{1,1}$  и  $D_{2,1}$  и область  $D_{1,1} \cap D_{2,1}$  при значениях параметров (4.3).

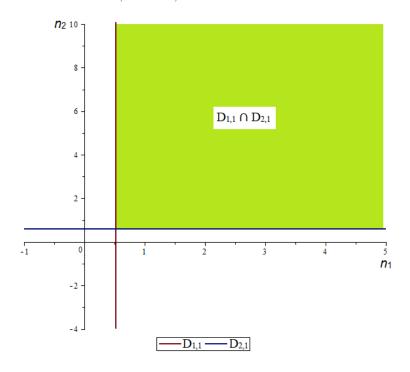


Рисунок 4.2 — Границы множеств  $D_{1,1}, D_{2,1}$  и область  $D_{1,1} \cap D_{2,1}$ 

Рассмотрим неравенство (3.26) при j=1. Граница области (3.26) задается уравнением  $\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_2 - L_1 = 0$ . Выразим  $n_1$ 

$$n_1 = \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2} e^{\lambda_2 T_5} (1 - (1 - e^{-\lambda_2 T_5})^{n_2}) + \frac{\lambda_1 M_1 T_0 - l_1 - l_3}{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2}.$$
 (4.5)

Область  $D_{1,0}(\overline{T})$ , определяемая (3.26) при j=1 удовлетворяет

$$n_1 \ge \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2} e^{\lambda_2 T_5} (1 - (1 - e^{-\lambda_2 T_5})^{n_2}) + \frac{\lambda_1 M_1 T_0 - l_1 - l_3}{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2}.$$
 (4.6)

Кривая (4.5) пересекает прямую  $\lambda_1 M_1 T - L_1 = 0$  при  $n_2 = 1$ , так как именно при  $n_2 = 1$  выполняется  $\widetilde{T}_2 = T$ . При стремлении  $n_2 \to \infty$  правая часть (4.5) имеет предел

$$n_{1,1} = \frac{\lambda_1 M_1 T_5}{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2} e^{\lambda_2 T_5} + \frac{\lambda_1 M_1 T_0 - l_1 - l_3}{l_2 - \lambda_1 M_1 T_2}.$$

Аналогично граница области (3.26) при j=2 удовлетворяет условию  $\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_1 - L_2 = 0.$  Выразим отсюда  $n_2$ 

$$n_2 = \frac{\lambda_2 M_2 T_2}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} e^{\lambda_1 T_2} (1 - (1 - e^{-\lambda_1 T_2})^{n_1}) + \frac{\lambda_2 M_2 T_0 - l_4 - l_6}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5}.$$

При  $n_1 \to \infty$  получаем асимптоту

$$n_{2,1} = \frac{\lambda_2 M_2 T_2}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} e^{\lambda_1 T_2} + \frac{\lambda_2 M_2 T_0 - l_4 - l_6}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5}.$$

Область  $D_{2,0}(\overline{T})$  удовлетворяет неравенству

$$n_2 \ge \frac{\lambda_2 M_2 T_2}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5} e^{\lambda_1 T_2} (1 - (1 - e^{-\lambda_1 T_2})^{n_1}) + \frac{\lambda_2 M_2 T_0 - l_4 - l_6}{l_5 - \lambda_2 M_2 T_5}.$$

На рис. 4.3 приведены границы множеств  $D_{1,0}$  и  $D_{2,0}$  и область  $D_{1,0} \cap D_{2,0}$  при значениях параметров (4.3).

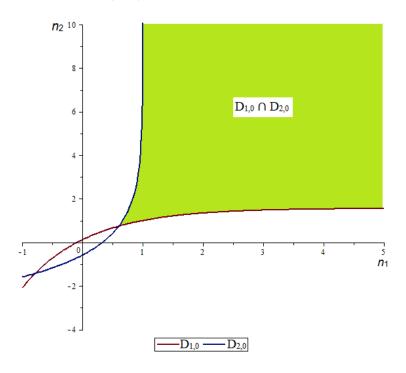


Рисунок 4.3 — Границы множеств  $D_{1,0}, D_{2,0}$  и область  $D_{1,0} \cap D_{2,0}$ 

Большое значение имеет положение точки пересечения  $n_{1,0}, n_{2,0}$  на плоскости  $n_1On_2$ . При увеличении  $n_{j,0}$  повышается загрузка системы по потоку  $\Pi_j$ . На

рис. 4.4 приведено совместное расположение границ множеств  $D_{1,2}, D_{2,2}, D_{1,0}, D_{2,0}, D_{2,1}, D_{1,2}$  при параметрах (4.3).

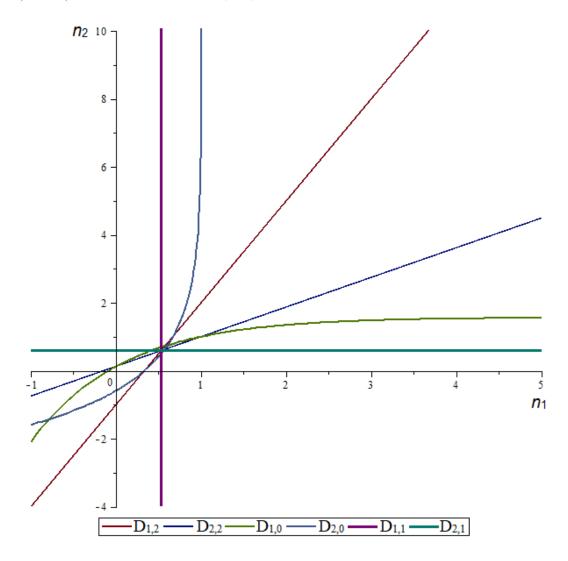


Рисунок 4.4 — Границы множеств  $D_{1,2}$ ,  $D_{2,2}$ ,  $D_{1,0}$ ,  $D_{2,0}$ ,  $D_{1,1}$ ,  $D_{2,1}$ 

На содержательном уровне под загрузкой системы массового обслуживания будем понимать отношение времени, во время которого обслуживающее устройство занято обслуживанием требований, к общему времени ее функционирования. Получим оценки для загрузки системы, используя необходимые условия существования предельного распределения для марковской последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i);i\geq 0\}$ . Под оценкой для загрузки будем понимать некоторую функцию  $\rho(\overline{T},\overline{n})\colon D\to (0,1]$ , зависящую от допустимых параметров системы, значение которой некоторым образом определяет реальную загрузку. Вид оценки загрузки  $\rho(\overline{T},\overline{n})$  зависит от множеств  $S,\,D_{1,2},\,D_{2,2},\,D_{1,3},\,D_{2,3},$  свойства которых ранее были изучены. Определим оценку загрузки для всех  $(\overline{T},\overline{n})\in S$ .

Оценка считается подходящей, если она удовлетворяет следующим ограничениям:

- 1) область значений  $\rho(\overline{T}, \overline{n}) \in (0,1]$  при  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S$ ;
- 2) если значение левой части хотя бы одного из неравенств (3.26), (3.51), (3.52) приближается к нулю при некоторых  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S$ , то должно выполняться  $\rho(\overline{T}, \overline{n}) \to 0$ ,  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S$ ;
- 3) функция  $\rho(\overline{T}, \overline{n})$  при  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S$  не убывает с увеличением интенсивности входных потоков, зависящей от  $\lambda_j$  и  $M_j$ , и не возрастает с ростом интенсивности обслуживания  $\mu_{j,2}$ .

Первое ограничение является свойством загрузки классических систем при условии существования стационарного распределения. Второе ограничение определяет, что при получении оценки для загрузки необходимо учитывать самое сильное ограничение из (3.26), (3.51) и (3.52). Третий пункт следует из физических условий. Загрузка должна возрастать при увеличении интенсивности входных потоков и должна уменьшаться при росте интенсивности обслуживания.

Пусть 
$$(\overline{T}, \overline{n}) \in S \setminus (D_{1,3} \cup D_{2,3})$$
. Получаем

$$S \setminus (D_{1,3} \cup D_{2,3}) = S \cap (D_{1,2} \cup D_{2,2}) \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3} =$$
$$= (S \cap D_{1,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3}) \cup (S \cap D_{2,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3})$$

Рассмотрим набор параметров  $(\overline{T}, \overline{n}) \in (S \cap D_{2,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3})$ . При этом теоремы 8 и 10 являются следствием теоремы 9. Получаем:

$$\frac{\lambda_1 M_1 T}{L_1} + \frac{\lambda_2 M_2}{\theta_2^{-1} \mu_{2,2}} \left(1 - \frac{\lambda_1 M_1 L_2}{\lambda_2 M_2 L_1}\right) < 1.$$

Левую часть данного неравенства можно интерпретировать как величину, характеризующую загрузку при  $(\overline{T}, \overline{n}) \in (S \cap D_{1,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3})$ . Поэтому такую загрузку будем определять формулой

$$\rho_1(\overline{T}, \overline{n}) = \frac{\lambda_1 M_1 T}{L_1} + \frac{\lambda_2 M_2}{\theta_2^{-1} \mu_{2,2}} (1 - \frac{\lambda_1 M_1 L_2}{\lambda_2 M_2 L_1}).$$

Легко проверить, что на данном множестве эта оценка является приемлемой. Аналогично из теоремы 10 на множестве  $(\overline{T}, \overline{n}) \in (S \cap D_{2,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3})$  можно определить оценку

$$\rho_2(\overline{T}, \overline{n}) = \frac{\lambda_2 M_2 T}{L_2} + \frac{\lambda_1 M_1}{\theta_1^{-1} \mu_{1,2}} (1 - \frac{\lambda_2 M_2 L_1}{\lambda_1 M_1 L_2})$$

Итак, для загрузки системы на множестве  $S \cap D_{1,2} \cap \overline{D}_{2,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3}$  определим оценку  $\rho(\overline{T}, \overline{n}) = \rho_1(\overline{T}, \overline{n})$ , на множестве  $S \cap \overline{D}_{1,2} \cap D_{2,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3}$  определим оценку  $\rho(\overline{T}, \overline{n}) = \rho_2(\overline{T}, \overline{n})$  и на множестве  $S \cap D_{1,2} \cap D_{2,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3}$  определим оценку  $\rho(\overline{T}, \overline{n}) = \max(\rho_1(\overline{T}, \overline{n}), \rho_2(\overline{T}, \overline{n}))$ . Рассмотрим подробнее последнее выражение. Заметим, что при  $\lambda_1 M_1 L_2 = \lambda_2 M_2 L_1$  имеем:

$$\rho_1(\overline{T}, \overline{n}) = \frac{\lambda_1 M_1 T}{L_1} = \frac{\lambda_2 M_2 T}{L_2} = \rho_2(\overline{T}, \overline{n}).$$

Кроме того, при  $\lambda_1 M_1 L_2 > \lambda_2 M_2 L_1$  получаем:

$$\rho_1(\overline{T}, \overline{n}) - \rho_2(\overline{T}, \overline{n}) = \frac{(\lambda_1 M_1 L_2 - \lambda_2 M_2 L_1)(\theta_1^{-1} \mu_{1,2} \theta_2^{-1} \mu_{2,2} T - \theta_2^{-1} \mu_{2,2} L_1 - \theta_1^{-1} \mu_{1,2} L_2)}{\theta_1^{-1} \mu_{1,2} \theta_2^{-1} \mu_{2,2} L_1 L_2} > 0.$$

Аналогично при  $\lambda_2 M_2 L_1 > \lambda_1 M_1 L_2$  выполняется  $\rho_2(\overline{T}, \overline{n}) > \rho_1(\overline{T}, \overline{n})$ . Таким образом, на рассматриваемом множестве  $\max(\rho_1(\overline{T}, \overline{n}), \rho_2(\overline{T}, \overline{n})) = \rho_j(\overline{T}, \overline{n})$ , если  $\lambda_j M_j L_s > \lambda_s M_s L_j$ , где  $j, s = 1, 2; j \neq s$ . Заметим, что из выполнения условия  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S \cap \overline{D}_{1,2} \cap D_{2,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3}$  следует  $\lambda_1 M_1 T L_1^{-1} \geq 1 > \lambda_2 M_2 T L_2^{-1}$ , и, значит,  $\lambda_1 M_1 L_2 > \lambda_2 M_2 L_1$ . Аналогично из  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S \cap D_{1,2} \cap \overline{D}_{2,2} \cap \overline{D}_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3}$  вытекает  $\lambda_1 M_1 L_2 < \lambda_2 M_2 L_1$ .

Окончательно получаем, что для  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S \setminus (D_{1,3} \cup D_{2,3})$  оценка для загрузки имеет вид:

$$\rho(\overline{T}, \overline{n}) = \begin{cases} \rho_1(\overline{T}, \overline{n}), & (\overline{T}, \overline{n}) \in S \setminus (D_{1,3} \cup D_{2,3}), \lambda_1 M_1 L_2 \ge \lambda_2 M_2 L_1; \\ \rho_2(\overline{T}, \overline{n}), & (\overline{T}, \overline{n}) \in S \setminus (D_{1,3} \cup D_{2,3}), \lambda_1 M_1 L_2 < \lambda_2 M_2 L_1. \end{cases}$$
(4.7)

Далее получим оценку для загрузки при  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S \cap (D_{1,3} \cup D_{2,3})$ . Рассмотрим сначала случай, когда  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S \cap \overline{D}_{1,3} \cap D_{2,3}$ . В этом случае из утверждения теоремы 8 при j=1 следуют утверждения теорем 9 и 10. Поэтому для того, чтобы оценить загрузку изучаемой системы, воспользуемся теоремой 8. Пусть:

$$\rho_3(\overline{T}, \overline{n}) = \frac{\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_2}{L_1} + \frac{\lambda_2 M_2}{\theta_2^{-1} \mu_{2,2}} (1 - \frac{\lambda_1 M_1 \widetilde{T}_2}{L_1}).$$

Легко проверить, что на данном множестве эта оценка является приемлемой.

Теперь рассмотрим случай, когда  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S \cap D_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3}$ . Тогда утверждения теорем 9 и 10 следуют из утверждения теоремы 8 для j=2. Поэтому в качестве оценки для загрузки на рассматриваемом множестве определим:

$$\rho_4(\overline{T}, \overline{n}) = \frac{\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_1}{L_2} + \frac{\lambda_1 M_1}{\theta_1^{-1} \mu_{1,2}} (1 - \frac{\lambda_2 M_2 \widetilde{T}_1}{L_2}).$$

Для последнего случая  $(\overline{T}, \overline{n}) \in D_{1,3} \cap D_{2,3}$  в качестве оценки загрузки возьмем  $\min(\rho_3(\overline{T}, \overline{n}), \rho_4(\overline{T}, \overline{n})).$ 

Тогда определим оценку на множестве  $(\overline{T}, \overline{n}) \in S \cap (D_{1,3} \cup D_{2,3})$  следующим образом:

$$\rho(\overline{T}, \overline{n}) = \begin{cases}
\rho_3(\overline{T}, \overline{n}), & (\overline{T}, \overline{n}) \in S \cap \overline{D}_{1,3} \cap D_{2,3}; \\
\rho_4(\overline{T}, \overline{n}), & (\overline{T}, \overline{n}) \in S \cap D_{1,3} \cap \overline{D}_{2,3}; \\
\min(\rho_3(\overline{T}, \overline{n}), \rho_4(\overline{T}, \overline{n})), & (\overline{T}, \overline{n}) \in D_{1,3} \cap D_{2,3}.
\end{cases} (4.8)$$

Таким образом, с помощью формул (4.7) и (4.8) определим оценку загрузки системы управления конфликтными потоками неоднородных требований для всех параметров системы, при которых выполняются необходимые условия существования стационарного режима.

## 4.2 Изучение свойств системы адаптивного управления конфликтными потоками Кокса-Льюиса путем имитационного моделирования

К сожалению, не удается аналитически найти такие важные характеристики, как среднее время пребывания произвольного требования в системе и средние длины очередей по потокам.

Для решения поставленных вопросов реализована имитационная модель системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований в виде программы, написанной на языке C++. Текст программы приведен в приложении E. Имитационная модель позволяет не только изучить процесс управления и обслуживания неоднородных требований, но и получить реализации векторной последовательности  $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$ . Каждая реализация задается с помощью следующих входных данных:

- 1) параметров  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$ ,  $\gamma_j$ ,  $\lambda_j$  входных потоков;
- 2) параметров  $T_1, T_2, \ldots, T_6, \mu_{j,1}, \mu_{j,2}, \theta_j, K_j, n_j$  системы;
- 3) начальных значений  $\Gamma^{(r)}$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  случайных элементов  $\Gamma_0$ ,  $\kappa_{1,0}$ ,  $\kappa_{2,0}$ .

В отличие от кибернетического подхода имитационное моделирование позволяет наблюдать за процессами в системе в каждый момент времени, а не

только в специально выбранные моменты дискретной шкалы времени. Поэтому с помощью имитационного моделирования можно построить модель более приближенную к реальной системе. Минусами имитационного моделирования является невозможность получения новых аналитических результатов и полученые результаты являются приближенными.

Перейдем к описанию программы. При кибернетическом подходе входной полюс задается входными потоками и потоками насыщения. В программе входные потоки генерируется до начала моделирования работы системы. При этом интервалы между группами требований моделируются [85] с помощью метода обратной функции, а количество требований в группе — с помощью метода моделирования дискретных распределений. Потоки насыщения в явном виде в программе не вводятся. Описание потоков насыщения задается с помощью параметров  $\mu_{i,1}$ ,  $\mu_{i,2}$  и  $\theta_i$ , j=1,2, через которые определяются длительности обслуживания требований и моменты освобождения обслуживающего устройства. Внешняя память описывает состояние очередей системы. При этом в реализации очередей хранятся моменты поступления и моменты начала обслуживания требований. Данные моменты необходимы для вычисления числовых характеристик функционирования системы. Внутренняя память определяется состоянием обслуживающего устройства. В программе для определения текущего состояния обслуживающего устройства также наблюдаются текущее время моделирования и момент времени, когда обслуживающее устройство освободиться для обслуживания следующего требования. Моделирование работы изучаемого адаптивного алгоритма производится пошагово между моментами смены состояний обслуживающего устройства. В течение моделирования одного шага обрабатываются моменты поступления требований в систему и моменты освобождения обслуживающего устройства. Если во время поступления требования обслуживание невозможно, то требование добавляется в очередь, в противном случае — отправляется на обслуживание. В момент освобождения обслуживающего устройства на обслуживание отправляется первое требование из очереди, если очередь не пуста.

В первую очередь необходимо изучить характеристики функционирования системы для стационарного распределения. Вместо стационарного распределения в имитационной модели будем изучать квази-стационарный режим. В данном режиме числовые оценки важных изучаемых характеристик стабилизировались и имеют незначительные колебания при дальнейшем моделировании.

Поэтому важной задачей является определение времени достижения квази-стационарного режима и изучение переходного процесса. Для этого, при имитационном моделировании будем рассматривать две реализации процесса адаптивного управления потоками Кокса-Льюиса с начальными условиями двух типов:

- 1) нулевых  $\Gamma^{(r)} = \Gamma^{(1)}$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ;
- 2) смещенных  $\Gamma^{(r)} = \Gamma^{(1)}$ ,  $x_1 = K_1' > K_1$ ,  $x_2 = K_2' > K_2$ .

При этом используем одну и ту же реализацию входных потоков. Определим момент окончания переходного процесса следующим образом. Обозначим через  $\gamma_j^0(l)$  и  $\gamma_j^+(l)$  время пребывания в системе заявки с номером  $l=1,\,2,\,\ldots$  потока  $\Pi_j$ , поступившей в систему после начала имитации, при нулевых начальных условиях и при смещенных начальных условиях второго типа. Величины

$$\overline{\gamma}_{j}^{0}(n) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \gamma_{j}^{0}(l), \quad \overline{\gamma}_{j}^{+}(n) = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \gamma_{j}^{+}(l)$$

определяют выборочные средние времена пребывания в системе первых n требований потока  $\Pi_j$  при начальных условиях первого и, соответственно, второго типа. Если для параметра близости  $\delta>0$  выполнено условие

$$\left|\overline{\gamma}_{i}^{+}(n) - \overline{\gamma}_{i}^{0}(n)\right| \le \delta \overline{\gamma}_{i}^{0}(n), \tag{4.9}$$

то на содержательном уровне можно считать, что начальные условия перестали влиять на выборочное среднее время пребывания для требований потока  $\Pi_i$ . В случае существования в системе стационарного режима величина  $n_i(d)$  определяет номер требования, при котором условие (4.9) впервые выполнилось d раз подряд, где d — заданное натуральное число. Пусть  $t_i$  — момент окончания обслуживания требования с номером  $n_j(d)$  потока  $\Pi_j$  и  $t^* = \max(t_1, t_2)$ . Будем считать, что  $t^*$  определяет момент окончания переходного процесса в системе для данной реализации входных потоков. Заметим, что имитационная модель позволяет найти зависимость длительности переходного процесса от параметров  $\delta$ и d. Различным реализациям входных потоков соответствуют разные значения оценок для длительности переходного процесса системы. При использовании N реализаций входных потоков получим N значений оценок  $t_1^*,\,t_2^*,\,\dots,\,t_N^*$  длительностей переходного процесса системы. Пусть  $n_{j,1}^*,\ n_{j,2}^*,\ \dots,\ n_{j,N}^*$  — номера первых заявок потока  $\Pi_j$ , поступивших в систему после моментов  $t_1^*,\ t_2^*,\ \ldots,$  $t_N^*$  достижения квази-стационарного режима в реализациях. Тогда оценку  $\overline{\gamma}_j^*$ среднего времени пребывания для требований потока  $\Pi_i$  будем вычислять по

формуле

$$\overline{\gamma}_j^* = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \overline{\gamma}_{j,l}^0(n_{j,l}^*).$$

Здесь  $\overline{\gamma}_{j,l}^0(n_{j,l}^*)$  — выборочные средние времена пребывания в системе первых  $n_{j,l}^*$  требований потока  $\Pi_j$ , поступивших в систему после начала имитации, при нулевых начальных условиях в l-ой реализации. Оценку  $\overline{\gamma}^*$  среднего времени пребывания произвольного требования будем вычислять по формуле среднего взвешенного

$$\overline{\gamma}^* = \frac{\lambda_1 M_1 \overline{\gamma}_1^* + \lambda_2 M_2 \overline{\gamma}_2^*}{\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2}.$$

Далее определим выборочную среднюю длину очереди для потока  $\Pi_j$ . Пусть имитация работы системы длилась в течение времени t. При этом по потоку  $\Pi_j$  очередь длины  $k=0,\,1,\,\ldots$  наблюдалась  $t_j^{(k)}$  единиц времени. Тогда выборочную среднюю длину очереди  $\overline{\kappa}_j^*$  по потоку  $\Pi_j$  будем вычислять по следующей формуле

$$\overline{\kappa}_j^* = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} k t_j^{(k)}.$$

Выборочную среднюю длину очереди  $\overline{\kappa}^*$  для всей системы определим как среднее арифметическое выборочных длин всех очередей

$$\overline{\kappa}^* = \frac{1}{2} (\overline{\kappa}_1^* + \overline{\kappa}_2^*).$$

Выборочные средние времена пребывания и выборочные средние длины очереди могут служить оценками для соответствующих характеристик.

Приведем пример результатов имитационного моделирования при следующем наборе параметров:

- 1) параметры входных потоков  $\alpha_1=0.8,\ \beta_1=0.7,\ \gamma_1=0.5,\ \lambda_1=0.6,$   $\alpha_2=0.6,\ \beta_2=0.5,\ \gamma_2=0.2,\ \lambda_2=0.3;$
- 2) параметры системы  $T_1=1,\,T_2=2,\,T_3=1,\,T_4=1,\,T_5=3,\,T_6=1,$   $\mu_{1,1}=0.5,\,\mu_{2,1}=1,\,\mu_{1,2}=0.3,\,\mu_{2,2}=0.6,\,\theta_1=1,\,\theta_2=0.5,\,K_1=10,$   $K_2=10,\,n_1=10,\,n_2=10$  системы;
- 3) начальные значения  $\Gamma^{(r)}=\Gamma^{(1)},\ x_1=0,\ x_2=0$  случайных элементов  $\Gamma_0,\ \kappa_{1,0},\ \kappa_{2,0}.$

Параметры системы имеют следующую размерность:  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\mu_{1,1}$ ,  $\mu_{2,1}$ ,  $\mu_{1,2}$ ,  $\mu_{2,2}$  — (ед. времени) $^{-1}$ ;  $T_1$ ,  $T_2$ , ...,  $T_6$  — ед. времени; остальные величины безразмерные.

На рис. 4.5 и 4.6 приведены динамика длины очереди по потоку  $\Pi_1$  и динамика среднего времени ожидания обслуживания требований этого потока при условии, что стационарный режим существует. По оси абсцисс отложен номер шага алгоритма, а по оси ординат — отслеживаемая характеристика. При этом очереди имеют установившиеся колебания, не зависящие от начальных условий. Среднее время ожидания обслуживания существенно отличается для разных начальных условий при старте моделирования, в дальнейшем характеристики сближаются.

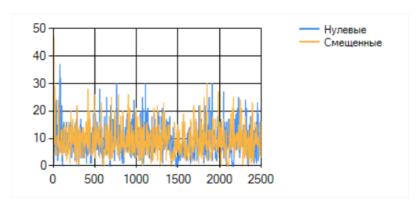


Рисунок 4.5 — Динамика длины очереди по потоку  $\Pi_1$  при условии существования стационарного режима

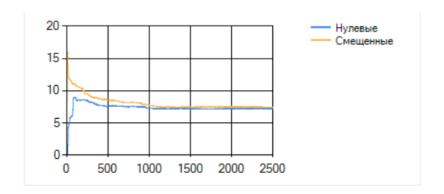


Рисунок 4.6 — Динамика среднего времени ожидания обслуживания требований потока  $\Pi_1$  при условии существования стационарного режима

Увеличим интенсивность входных потоков  $\lambda_1 = 0.8$  и  $\lambda_2 = 0.7$ . В данном случае стационарного режима в системе не существует. На рис. 4.7 и 4.8 приведены динамика длины очереди по потоку  $\Pi_1$  и динамика среднего времени ожидания обслуживания требований этого потока при отсутствии стационарного режима в системе. Аналогично, по оси абсцисс отложен номер шага алгоритма, а по оси ординат — отслеживаемая характеристика. При отсутствии стационарного режима очереди имеют тенденцию неограниченного роста при увеличении

длительности моделирования. Среднее время ожидания обслуживания также возрастает при длительном моделировании.

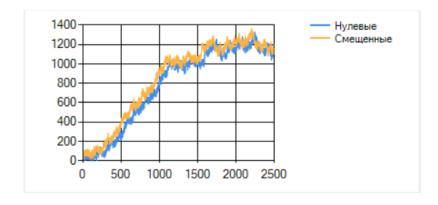


Рисунок 4.7 — Динамика длины очереди по потоку  $\Pi_1$  при отсутствии стационарного режима

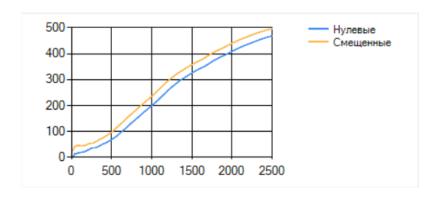


Рисунок 4.8 — Динамика среднего времени ожидания обслуживания требований потока  $\Pi_1$  при отсутствии стационарного режима

Исследуем теперь зависимость длительности переходного процесса от параметров d и  $\delta$  в случае существования в системе стационарного режима. При фиксированном значении  $\delta=0.05$  получаем зависимость от d длительности переходного процесса, приведенную на рис. 4.9. По оси абсцисс отложен параметр d, по оси ординат — номер требования, на котором условие достижения стационара выполнилось. Синий график соответствует потоку  $\Pi_1$ , оранжевый — потоку  $\Pi_2$ . При фиксированном значении d=10 получаем зависимость длительности переходного процесса от  $\delta$ , приведенную на рис. 4.10. Из графиков на рис. 4.9 и 4.10 получаем, что при увеличении параметра d длительность переходного процесса будет больше. Также, при увеличении параметра  $\delta$  наблюдается обратная зависимость.

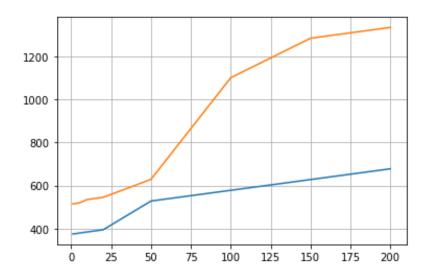


Рисунок 4.9 — Зависимость длительности переходного процесса от параметра d

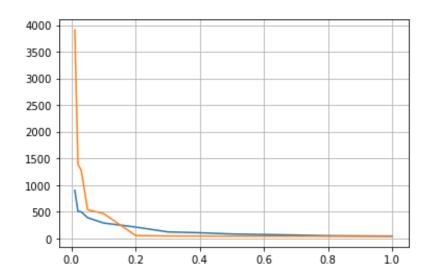


Рисунок 4.10 — Зависимость длительности переходного процесса от параметра  $\delta$ 

При параметрах 1), 2) и 3) управляющей системы получаем следующие оценки средней длительности ожидания обслуживания

$$\overline{\gamma}_1^* = 7,1684, \quad \overline{\gamma}_2^* = 12,8481, \quad \overline{\gamma}^* = 8,6625,$$

и оценки для средних длин очередей

$$\overline{\kappa}_1^* = 10,4691, \quad \overline{\kappa}_2^* = 6,7333, \quad \overline{\kappa}^* = 8,6012.$$

Далее приведем пример поиска квазиоптимальных значений параметров. Для исследуемой системы длительность первого этапа обслуживания не может быть произвольно изменена, так как определяется свойствами входного потока. Также и длительность переналадки нельзя произвольно изменять из-за конфликтности потоков. Недостаточная длительность переналадки может приводить к авариям. Поэтому зафиксируем значения  $T_1=1,\,T_3=1,\,T_4=1$  и  $T_6=1$ . Таким образом для оптимизации доступны следующие параметры  $T_2,\,T_5,\,n_1,\,n_2,\,K_1,\,K_2$ . Оптимизация производится поэтапно по парам параметров  $(T_2,T_5),\,(n_1,n_2)$  и  $(K_1,K_2)$  путем сокращенного перебора. После поиска оптимальных параметров по одной из пар при фиксированных значениях остальных параметров, происходит поиск оптимальных параметров для другой пары. Алгоритм поиска квазиоптимальных параметров завершается, когда при очередной оптимизации не удается улучшить характеристики системы. Используя приведенный алгоритм сокращенного перебора были получены следующие квазиоптимальные параметры

$$T_2^* = 5, T_5^* = 1, n_1^* = 3, n_2^* = 10, K_1^* = 1, K_2^* = 4.$$

Этим квазиоптимальным параметрам соответствуют следующие оценки:

$$\overline{\gamma}_1^* = 2.47241, \quad \overline{\gamma}_2^* = 5.13818, \quad \overline{\gamma}^* = 3.17367$$

среднего времени ожидания обслуживания по потокам  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  и, соответственно, оценка среднего времени ожидания обслуживания произвольного требования.

$\mathbf{R}$	тоблицо '	7 приводоці і	шори	9 HEODIATM9	оптимизации.
D	таолипе	приведены	шаги	алгоритма	оптимизации.

$T_2$	$T_5$	$n_1$	$n_2$	$K_1$	$K_2$	$\overline{\gamma}_1^*$	$\overline{\gamma}_2^*$	$\overline{\gamma}^*$
2	3	10	10	10	10	7.91365	12.9163	9.22965
9	6	10	10	10	10	5.10318	11.3382	6.74334
9	6	6	9	10	10	5.06648	11.4252	6.73919
9	6	6	9	3	6	3.79753	6.81921	4.59241
4	2	6	9	3	6	3.09255	5.72206	3.78427
4	2	8	9	3	6	3.01794	5.58343	3.69281
4	2	8	9	1	4	2.81271	4.77639	3.32928
5	1	8	9	1	4	2.48334	5.29321	3.2225
5	1	3	10	1	4	2.47241	5.13818	3.17367
5	1	3	10	1	8	2.48873	5.21597	3.20615

Таблица 7 — Поиск квазиоптимальных параметров

Значения  $T_2=2, T_5=3, n_1=10, n_2=10, K_1=10, K_2=10$  во второй строке таблицы соответствуют начальным параметрам алгоритма. На первом

шаге алгоритма были зафиксированы параметры  $n_1=10,\ n_2=10,\ K_1=10,\ K_2=10.$  Оптимизировалась пара параметров  $(T_2,T_5).$  Были вычислены характеристики системы при  $T_2=1,\ 2,\ \ldots,\ 10$  и  $T_5=1,\ 2,\ \ldots,\ 10.$  Наименьшее значение оценки  $\overline{\gamma}^*$  соответствует  $T_2=9$  и  $T_5=6.$  Жирным шрифтом в третьей строке выделены найденные параметры, которые были оптимизированы на первом шаге. На втором шаге были зафиксированы параметры  $T_2=9,\ T_5=6,\ K_1=10,\ K_2=10$  и оптимизировались пара параметров  $(n_1,n_2).$  Были использованы значения  $n_1=5,\ 6,\ \ldots,\ 15$  и  $n_2=5,\ 6,\ \ldots,\ 15.$  Оптимальными с точки зрения среднего времени ожидания обслуживания произвольного требования оказались значения  $n_1=6$  и  $n_2=9.$  Данные параметры отмечены жирным шрифтом в четвертой строке таблицы. Следующие шаги производятся аналогичным образом по парам параметров. На последних двух шагах не удалось уменьшить среднее время ожидания обслуживания произвольного требования. Поэтому квазиоптимальные параметры приведены в предпоследней строке таблицы.

#### Заключение

В работе была построена и изучена математическая модель входного потока, содержащего неоднородные требования. Также описана и изучена математическая модель адаптивного управления и обслуживания требований неординарных пуассоновских потоков.

Основные результаты работы заключаются в следующем.

- 1. Поток неоднородных требований представлен в виде кибернетической системы. Показана возможность описания такого рода потоков (потоков Кокса-Льюиса) в виде неординарных пуассоновских. Проведено аналитическое исследование таких потоков.
- 2. Проведено численное исследование реальных потоков разной физической природы. Исследование с помощью статистических критериев показало хорошую согласованность нелокального описания реальных потоков и построенной модели.
- 3. С помощью кибернетического подхода построена математическая модель адаптивного нециклического алгоритма управления и обслуживания требований потоков Кокса-Льюиса. Моделью системы является многомерная цепь Маркова.
- 4. Получены рекуррентные соотношения для одномерных распределений марковской цепи и для производящих функций одномерных распределений. С помощью итеративно-мажорантного метода получены условия существования стационарного режима в системе.
- 5. Описанная система также исследована с помощью имитационного моделирования. Приведен способ определения момента окончания переходного процесса в системе. Проведена численная оптимизация по критерию минимума среднего времени ожидания обслуживания.

В качестве дальнейшего исследования можно выделить следующие возможные направления и задачи.

- 1. Для управляющей системы обслуживания включить в рассмотрение выходные потоки системы. Изучить зависимость выходного потока от параметров системы.
- 2. Сравнить исследованный адаптивный алгоритм с циклическим алгоритмом с продлениями. Получить условия, при которых адаптивный

- алгоритм более эффективен, и условия, при которых алгоритмы функционируют аналогично.
- 3. Рассмотреть модель системы массового обслуживания, в которой m>2 входных потоков.
- 4. Включить в модель внешнюю среду, влияющую на интенсивность и структуру входных потоков.

### Список литературы

- 1. Erlang A. K. The theory of probabilities and telephone conversations // Nyt Tidsskrift for Matematik. 1909. Vol. 20. P. 33–39.
- 2. Erlang A. K. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges // Elektroteknikeren. 1917. Vol. 13. P. 5–13.
- 3. Johannsen F. W. Waiting times and number of calls // P.O. Elec. Engrs. J. 1907. reprinted October, 1910, and January, 1911.
- 4. *Поллачек Ф.* Стохастические системы обслуживания. М. : Наука, 1966. 244 с.
- 5. Palm C. Intensitätsschwankungen in Fernsprechverkehr // Ericsson Technics. 1943. Vol. 1, no. 44. P. 1–189.
- 6. Xинчин A.  $\mathcal{A}$ . Работы по математической теории массового обслуживания. Под ред., с предисл. и закл. ст. Б. В. Гнеденко. Изд. 3-е. М. : Едиториал УРСС, 2009. 240 с.
- 7.  $Koкc\ \mathcal{A}$ .,  $\mathcal{A}bvouc\ \mathcal{H}$ . Статистический анализ последовательностей событий. М. : Мир, 1969. 312 с.
- 8.  $Caamu\ T.\ J.$  Элементы теории массового обслуживания и её приложения. М. : Советское радио, 1965. 512 с.
- 9. Kendall D. G. Some problems in the theory of queues // J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 1951. Vol. 13, no. 2. P. 151–185.
- 10.  $\mathit{Такач}\ \mathcal{J}$ . Некоторые вероятностные задачи в телефонии // Математика. Период сб. перев. ин. статей. 1960. № 6. С. 93—144.
- 11.  $\Gamma$ неденко B. B., Kоваленко M. H. Введение в теорию массового обслуживания. 6-е изд. M. : Издательство ЛКИ, M013. M10 с.
- 12.  $Башарин \Gamma$ .  $\Pi$ . Теоретико-вероятностное исследование двухкаскадной телефонной системы с отказами, работающей в режиме свободного искания // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121, N 1. С. 101—104.
- 13. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М. : Наука, 1966.-244 с.

- 14. Севастьянов Б. А. Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора // Тр. 3-го Всес. матем. съезда. 1969. С. 68—70.
- 15. *Бронштейн О. И.*, *Рыков В. В.* Об оптимальных дисциплинах обслуживания в управляющих системах // Управление производством: Тр. III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (техническая кибернетика). М., 1967. С. 215—224.
- 16.  $Xe \mbox{\it im} \ \Phi$ . Математическая теория транспортных потоков. М. : Мир, 1966. 288 с.
- 17. *Федоткин М. А.* Неполное описание потоков неоднородных требований // В кн.: Теория массового обслуживания. М., 1981.
- 18. *Федоткин М. А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математичекие вопросы кибернетики. Вып. 7: Сборник статей, под ред. С.В. Яблонского. М., 1998. С. 333—344.
- 19.  $\Phi e \partial om \kappa u H M. A.$  Процессы обслуживания и управляющие системы // Математические вопросы кибернетики. М., 1996. Т. 6. С. 51—70.
- 20.  $\Phi$ едоткин А. М.,  $\Phi$ едоткин А. А. Исследование реализации транспортного потока Бартлетта // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. 3(1). С. 195—198.
- 21. *Натан А. А.* Статистический отбор заявок при массовом обслуживании с отказами // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1966. № 1. С. 27— 10.
- 22. Коваленко И. Н. Об одной задаче, связанной с оптимальной обработкой информации системой массового обслуживания // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1968. N 5. С. 75—79.
- 23. *Коваленко И. Н.*, *Юркевич О. М.* О некоторых вопросах оптимального обслуживания требований в системах с ограниченным временем ожидания // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1971. № 1. С. 26—35.
- 24. Neuts M. F. A versatile Markovian point process // J. Appl. Prob. 1979. Vol. 16. P. 764–779.

- 25. Lucantoni D. M., Meier-Hellstern K. S., Neuts M. F. A single server queue with server vacations and a class of non-renewal arrival processes // Adv. Appl. Prob. 1990. Vol. 22, no. 3. P. 676–705.
- 26. Lucantoni D. M., Choudhury G. L., W. W. The transient BMAP|G|1 queue // Stoch. Models. 1993.
- 27. Asmussen S., Koole G. Marked point processes as limits of Markovian arrival streams // J. Appl. Prob. 1993. Vol. 30. P. 365–372.
- 28. Бочаров П. П., Фонг Н. Х. Анализ систем массового обслуживания  $MAP_2|G_2|1|r$  с абсолютным приоритетом // Автомат. и телемех. 1997.  $\mathbb{N}^2$  11. С. 102—117.
- 29. Назаров А. А., Лапатин И. Л. Асимптотически пуассоновские МАР-потоки // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. 4(13). С. 72—78.
- 30. *Моисеев А. Н.*, *Назаров А. А.* Исследование высокоинтенсивного МАР-потока // Изв. Томского политехнического университета. 2013. Т. 322,  $\mathbb{N}_2$  2. С. 16—18.
- 31. Ляпунов А. А., Яблонский С. В. Теоретические проблемы кибернетики // Проблемы кибернетики. 1963. № 9. С. 5—22.
- 32.  $\Phi$ едоткин M. A. O работе автомата, регулирующего уличное движение на перекрестке при показательном законе обслуживания машин // Изв. ВУЗ. Радиофизик. 1967. Т. 10,  $\mathbb{N}$  7. С. 912—925.
- 33.  $\mathit{Теплицкий}\ M.\ \Gamma.\$ Об одной системе массового обслуживания с управляемым режимом работы прибора // Автоматика и вычисл. техн. 1968.  $N^2\ 2.\$  С. 36—42.
- 34. *Теплицкий М. Г.* Об управляемых полумарковских процессах с конечным числом состояний и управлений // Автомат. и телемех. 1969. № 10. С. 45—53.
- 35. Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V., Rachinskaya M. A. About correctness of probabilistic models of traffic flows dynamics on a motorway // Proceedings of International Workshop "Distributed computer and communication networks" (DCCN-2010). M., 2010. P. 86–93.

- 36. Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V., Rachinskaya M. A. Simulation and research of probabilistic regularities in motion of traffic flows // Proceedings of the International conference "Applied Methods of Statistical Analysis. Simulations and Statistical Inference". Novosibirsk: Novosibirsk State Technical University, 2011. P. 117–124.
- 37.  $\Phi$ едоткин М. А.,  $\Phi$ едоткин А. М., Kудрявцев E. В. Построение и анализ математической модели пространственной и временной характеристик транспортных потоков // Автоматика и вычислительная техника. 2014. N 6. С. 62—74.
- 38. Fedotkin M. A., Fedotkin A. M., Kudryavtsev E. V. Construction and analysis of a mathematical model of spatial and temporal characteristics of traffic flows // Automatic Control and Computer Sciences. 2014. Vol. 48, No 6. P. 358–367.
- 39.  $\Phi$ едоткин М. А.,  $\Phi$ едоткин А. М., Kудрявцев E. В. Нелокальное описание временной характеристики входных потоков по наблюдениям // Автоматика и вычислительная техника. 2015. № 1. С. 42—52.
- 40. Fedotkin M. A., Fedotkin A. M., Kudryavtsev E. V. Nonlocal description of the time characteristic for input flows by means of observations // Automatic Control and Computer Sciences. 2015. Vol. 49, No 1. P. 29–36.
- 41. Fedotkin A., Kudryavtsev E. Numerical investigation and optimization of output processes in cyclic control of conflicting flows // Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies. MMST 2020. Communications in Computer and Information Science. 2020. Vol. 1413. P. 220–231.
- 42. *Кудрявцев Е. В.*, *Федоткин М. А.* Исследование математической модели адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 1. С. 23—37.
- 43. *Кудрявцев Е. В.*, *Федоткин М. А.* Анализ дискретной модели системы адаптивного управления конфликтными неоднородными потоками // Вестник московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 2019. N = 1. C. 23 = 37.

- 44.  $\Phi$ едоткин М. А.,  $\Phi$ едоткин А. М., Kудрявцев E. В. Динамические модели неоднородного потока транспорта на магистралях // Автоматика и телемеханика. 2020.  $\mathbb{N}$  8. С. 149—164.
- 45. Fedotkin M., Kudryavtsev E. Necessary Conditions for the Existence of Stationary Distribution in the Adaptive Control System of Conflict Flows // Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017. Lecture Notes in Computer Science. 2015. Vol. 10684. P. 83–96.
- 46. Kudryavtsev E. V., Fedotkin M. A. Analysis of a Discrete Model of an Adaptive Control System for Conflicting Nonhomogeneous Flows // Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 2019. Vol. 43. P. 17–24.
- 47. Fedotkin M. A., Fedotkin A. M., Kudryavtsev E. V. Dynamic models of heterogeneous traffic flow on highways // Autom. Remote Control. 2020. Vol. 81:8. P. 1486–1498.
- 48. Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V. Parameters estimator of the probabilistic model of traffic flow with the intensive movement // Proceedings of International Workshop "Distributed computer and communication networks: Control, Computation, Communications" (DCCN-2013). M.: JSC "TECHNOSPHERA", 2013. P. 365–372.
- 49. Ky∂рявцев E. B. Изучение характеристик транспортного потока большой плотности // Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского. 2014. Деп. в ВИНИТИ 14.01.2014, № 14.
- 50. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Анализ кибернетической дискретной системы адаптивного управления потоками требований // IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем»: Москва и Подмосковье, 20-22 мая 2015 г.: Труды / Отв. ред. В.Б. Алексеев, Д.С. Романов, Б.Р. Данилов. М.: МАКС Пресс, 2015. С. 247—249.
- 51. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Аналитические и численные методы исследования системы адаптивного управления конфликтными потоками // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2017). Материалы XVI Международной конференции имени

- $A.\Phi.$  Терпугова (29 сентября 3 октября 2017 г.) Т. 1. Томск : Изд-во НТЛ, 2017. С. 197—203.
- 52. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Условия существования стационарного распределения в системе нециклического управления потоками неоднородных требований // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2017). Материалы Двадцатой международной научной конференции, под общ. ред. В.М. Вишневского. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2017. С. 144—151.
- 53. Кудрявцев Е. В., Федоткин М. А. Построение, анализ и оптимальный синтез математической модели дискретной управляющей системы адаптивного управления потоками // Дискретные модели в теории управляющих систем: X Международная конференция, Москва и Подмосковье, 23-25 мая 2018 г.: Труды / Отв. ред. В.Б. Алексеев, Д.С. Романов, Б.Р. Данилов. М.: МАКС Пресс, 2018. С. 172—175.
- 54. *Кудрявцев Е. В.*, *Федоткин М. А.* Исследование переходного процесса адаптивного управления потоками неоднородных требований путем имитационного моделирования // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019). Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова (26 июня 30 июня 2019 г.) Ч. 2. Томск: Изд-во НТЛ, 2019. С. 207—212.
- 55. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Изучение числовых характеристик имитационной модели адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований // Материалы XXII Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-19). М.: РУДН, 2019. С. 321—328.
- 56. Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V. Simulation of adaptive control system with conflict flows of non-homogeneous requests // Proceedings of the Twelfth International Conference "Computer Data Analysis and Modeling: Stochastics and Data Science". Minsk: BSU, 2019. P. 163–166.
- 57. Fedotkin M. A., Kudryavtsev E. V. Construction and research of a mathematical model of non-homogeneous road traffic // Queues: Flows, Systems, Networks. Proceedings of the International Conference "Modern Probabilistic

- Methods for Analysis und Optimization of Information and Telecommunication Networks". Minsk: BSU-RIVH, 2011. P. 76–81.
- 58. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Управляющие системы и механизм образования транспортных пачек на магистралях с интенсивным движением // Материалы XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. С. 503—506.
- 59. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Кибернетический подход к изучению вероятностной модели адаптивного управления конфликтными потоками // Сборник научных статей XVII Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». Казань : КФУ, 2014. С. 158—161.
- 60. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Построение математической модели адаптивного управления неординарными потоками // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения. Материалы Международной научной конференции. Минск : БГУ-РИВШ, 2015. С. 106—111.
- 61. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Компьютерная обработка статистических данных потока катастроф на угольных шахтах // Статистича в современном обществе: её роль и значение в вопросах государственного управления и общественного развития: Материалы Межерегиональной научно-практической конференции. Н. Новгород: Нижегородстат Нижегородский госуниверситет, 2015. С. 451—457.
- 62. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Предельные свойства системы адаптивного управления конфликтными потоками неоднородных требований // Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь (DCCN-2015). Материалы Восемнадцатой межедународной научной конференции. М.: ИПУ РАН, 2015. С. 233—240.
- 63. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Необходимые условия существования стационарного распределения в системе адаптивного управления конфликтными потоками // Материалы Международной научной конференции «Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и её приложениях (АВМТВ-2017)». М., 2017. С. 90—96.

- 64. Kudryavtsev E. V. Limit theorems for flow control systems in a class of closed-loop algorithms // Theory Probab. Appl., Abstracts of Talks Given at the 4th International Conference on Stochastic Methods (ICSM-4). 2020. P. 140–140.
- 65. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Синтез и оптимизация управляющей системы обслуживания неоднородных требований // Материалы XIII Межедународного семинара «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (17–22 июня 2019 г.) М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2019. С. 132—134.
- 66. Федоткин М. А., Кудрявцев Е. В. Исследование операций обслуживания и адаптивного управления конфликтными по-токами путем имитационного моделирования // Материалы XIX Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». Казань : КФУ, 2020. С. 123—126.
- 67. Кудрявцев Е. В., Федоткин М. А. Оптимизация системы адаптивного управления конфликтными потоками Кокса-Льюиса // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2021). Материалы XX Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Томск: Изд-во НТЛ, 2021.
- 68.  $\Phi$ едоткин М. А.,  $\Phi$ едоткин А. М. Анализ и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными транспортными потоками Гнеденко–Коваленко // АиТ. 2009. Т. 12. С. 92—108.
- 69. Haight F. A. Mathematical theories of traffic flow. New York: Academic press, 1963. 241 p.
- 70.  $\Phi e \partial om \kappa u H$  M. A. Нетрадиционные проблемы математического моделирования экспериментов. М. : Физматлит, 2018. 424 с.
- 71.  $\Phi$ илиппов А.  $\Phi$ . Введение в теорию дифференциальных уравнений. М. : КомКнига, 2007. 240 с.
- 72. Cinlar E. Introdution to Stochastic Processes. New York : Dover Publications, 1975. 402 p.
- 73. *Федоткин А. М.* Моделирование и оптимизация выходных процессов при циклическом управлении конфликтными потоками Гнеденко-Коваленко: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. Нижний Новгород, 2010. 150 с.

- 74.  $3a\kappa c\ \mathcal{J}$ . Статистическое оценивание. М. : Статистика, 1976. 600 с.
- 75. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И. Математическая статистика. М. : Высшая школа, 1984. 248 с.
- 76. Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. М. : Финансы и статистика, 1983.-472 с.
- 77.  $Крамер \ \Gamma$ . Математические методы статистики. М. : Мир, 1975. 648 с.
- 78.  $\Phi e \partial om \kappa u H M. A.$  Основы прикладной теории вероятностей и статистики. М. : Высшая школа, 2006. 240 с.
- 79.  $\Phi e \partial om \kappa u H$  M. A. Лекции по анализу случайных явлений. M. :  $\Phi$ изматлит, 2016. 464 с.
- 80. Fedotkin A. M., Fedotkin M. A. Model for refusals of elements of a controlling system // Translations of the first French-Russian Conference on «Longevity, Aging and Degradation Models in Reliability, Public Health, Medicine and Biology, LAD' 2004». St. Petersburg, 2004. Vol. 2.
- 81. Fowler H. J., Leland W. E. Network Traffic Characteristics with Implications for Broadband Network Congestion Management // IEEE J. Sel. Area. Comm. 1991. Vol. 9(7).
- 82. Литвак Н. В. Адаптивное управление конфликтными потоками: дис. канд. физ.-мат. наук: 05.13.17.-1998.
- 83. Ширяев А. Н. Вероятность. М. : Наука, 1980. 576 с.
- 84.  $\Phi$ ихтенгольи,  $\Gamma$ . M. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М. : Наука, 1969. 864 с.
- 85. Зорин А. В., Федоткин М. А. Методы Монте-Карло для параллельных вычислений: учебное пособие. М. : Издательство Московского университета, 2013.-192 с.

#### Приложение А

Вывод начальных и центральных моментов случайного числа  $\eta(t)$  требований, поступивших в систему за промежуток времени [0,t)

Начальные моменты  $\alpha_k = \mathbf{M}\eta^k(t)$  порядка k = 1, 2, 3, 4 выражаются через производные производящей функции  $\Psi(t,z)$  в точке z = 1. Поэтому в первую очередь найдем указанные производные. При этом первая и вторая производные приведены с выводом, а получение окончательных выражений для третьей и четвертой производной выполняется аналогично:

$$\begin{split} \frac{d}{dz} \Psi(t,z) \bigg|_{z=1} &= \left[ \lambda t \sum_{i=1}^{\infty} Q(i) i z^{i-1} \exp\left( \lambda t \left( \sum_{i=1}^{\infty} Q(i) z^{i} - 1 \right) \right) \right] \bigg|_{z=1} = \\ &= \lambda t p \left[ 1 + 2\alpha + \sum_{i=3}^{\infty} \alpha \beta \gamma^{i-3} i \right] = \lambda t p \left[ 1 + 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) \right], \end{split}$$

$$\begin{split} \frac{d^2}{dz^2} \Psi(t,z) \bigg|_{z=1} &= \frac{d}{dz} \left[ \lambda t \sum_{i=1}^{\infty} Q(i)iz^{i-1} \exp\left(\lambda t \left(\sum_{i=1}^{\infty} Q(i)z^i - 1\right)\right) \right] \bigg|_{z=1} = \\ &= \left(\lambda t \sum_{i=2}^{\infty} Q(i)i(i-1)z^{i-2} + \lambda^2 t^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} Q(i)iz^{i-1}\right)^2\right) \times \\ &\times \exp\left(\lambda t \left(\sum_{i=1}^{\infty} Q(i)z^i - 1\right)\right) \bigg|_{z=1} = \\ &= \lambda t p \left[ 2\alpha + \alpha\beta \left(\frac{2}{1-\gamma} + \frac{2}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3}\right) \right] + \\ &+ \lambda^2 t^2 p^2 \left[ 1 + 2\alpha + \alpha\beta \left(\frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2}\right) \right]^2, \end{split}$$

$$\begin{split} \frac{d^3}{dz^3} \Psi(t,z) \bigg|_{z=1} &= \lambda t p \alpha \beta \frac{6}{(1-\gamma)^4} + 3\lambda^2 t^2 p^2 \left( 1 + 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) \right) \times \\ &\times \left( 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{2}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3} \right) \right) + \\ &\quad + \lambda^3 t^3 p^3 \left( 1 + 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) \right)^3, \end{split}$$

$$\begin{split} \frac{d^4}{dz^4} \Psi(t,z) \bigg|_{z=1} &= \lambda t p \alpha \beta \left( -\frac{24}{(1-\gamma)^4} + \frac{24}{(1-\gamma)^5} \right) + \\ &+ 3\lambda^2 t^2 p^2 \left( 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{2}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3} \right) \right)^2 + \\ &+ 4\lambda^2 t^2 p^2 \left( 1 + 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) \right) \left( \alpha \beta \frac{6}{(1-\gamma)^4} \right) + \\ &+ 6\lambda^3 t^3 p^3 \left( 1 + 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) \right)^2 \times \\ &\times \left( 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{2}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3} \right) \right) + \\ &+ \lambda^4 t^4 p^4 \left( 1 + 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2} \right) \right)^4 . \end{split}$$

Введем следующие обозначения

$$a = \lambda t p \left( 1 + 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1 - \gamma} + \frac{1}{(1 - \gamma)^2} \right) \right),$$

$$b = \lambda t p \left( 2\alpha + \alpha \beta \left( \frac{2}{1 - \gamma} + \frac{2}{(1 - \gamma)^2} + \frac{2}{(1 - \gamma)^3} \right) \right),$$

$$c = \lambda t p \left( \alpha \beta \frac{6}{(1 - \gamma)^4} \right),$$

$$d = \lambda t p \left( \alpha \beta \left( -\frac{24}{(1 - \gamma)^4} + \frac{24}{(1 - \gamma)^5} \right) \right).$$
(A.1)

Тогда производные от производящей функции в новых обозначениях равны

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\Psi(t,z)\Big|_{z=1} &= a, \\ \frac{d^2}{dz^2}\Psi(t,z)\Big|_{z=1} &= b + a^2, \\ \frac{d^3}{dz^3}\Psi(t,z)\Big|_{z=1} &= c + 3ab + a^3, \\ \frac{d^4}{dz^4}\Psi(t,z)\Big|_{z=1} &= d + 3b^2 + 4ac + 6a^2b + a^4. \end{aligned}$$

Начальные моменты примут следующий вид:

$$\alpha_1(\eta(\omega,t)) = \frac{d}{dz}\Psi(t,z)\Big|_{z=1} = a,$$

$$\alpha_2(\eta(\omega,t)) = \left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz}\right)\Psi(t,z)\Big|_{z=1} = a + b + a^2,$$

$$\alpha_3(\eta(\omega,t)) = \left( \frac{d^3}{dz^3} + 3\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} \right) \Psi(t,z) \Big|_{z=1} = a^3 + 3a^2 + a + 3ab + 3b + c,$$

$$\alpha_4(\eta(\omega,t)) = \left( \frac{d^4}{dz^4} + 6\frac{d^3}{dz^3} + 7\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz} \right) \Psi(t,z) \Big|_{z=1} =$$

$$= a^4 + 6a^3 + 7a^2 + a + 6a^2b + 18ab + 4ac + 3b^2 + 7b + 6c + d.$$

Из формул связи центральных моментов  $\beta_k = \mathbf{M}(\eta(t) - \mathbf{M}\eta(t))^k$  и начальных моментов получим:

$$\beta_2(\eta(\omega,t)) = \alpha_2 - (\alpha_1)^2 = a + b,$$

$$\beta_3(\eta(\omega,t)) = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 3\alpha_1(\alpha_1)^2 - (\alpha_1)^3 =$$

$$= a^3 + 3a^2 + a + 3ab + 3b + c - 3a^2 - 3ab - 3a^3 + 2a^3 = a + 3b + c,$$

$$\beta_4(\eta(\omega,t)) = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2(\alpha_1)^2 - 4\alpha_1(\alpha_1)^3 + (\alpha_1)^4 =$$

$$= a^4 + 6a^3 + 7a^2 + a + 6a^2b + 18ab + 4ac + 3b^2 + 7b + 6c + d - 4a^4 - 12a^3 - 4a^2 - 12a^2b -$$

$$- 12ab - 4ac + 6a^3 + 6a^2b + 6a^4 - 3a^4 = 3a^2 + a + 6ab + 3b^2 + 7b + 6c + d =$$

$$= 3(a+b)^2 + a + 7b + 6c + d.$$

Таким образом, получим

$$\alpha_{1}(\eta(\omega,t)) = a,$$

$$\alpha_{2}(\eta(\omega,t)) = a + b + a^{2},$$

$$\alpha_{3}(\eta(\omega,t)) = a^{3} + 3a^{2} + a + 3ab + 3b + c,$$

$$\alpha_{4}(\eta(\omega,t)) = a^{4} + 6a^{3} + 7a^{2} + a + 6a^{2}b + 18ab + 4ac + 3b^{2} + 7b + 6c + d,$$

$$\beta_{2}(\eta(\omega,t)) = a + b,$$

$$\beta_{3}(\eta(\omega,t)) = a + 3b + c,$$

$$\beta_{4}(\eta(\omega,t)) = 3(a + b)^{2} + a + 7b + 6c + d.$$

где a, b, c и d взяты из формул (A.1).

#### Приложение Б

# Вывод оценки максимального правдоподобия для параметров $\alpha$ , $\beta$ и $\gamma$ размера группы требований

Далее получим оценку параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  распределения (1.14) с помощью метода максимального правдоподобия [78; 79]. Аналогично обозначим через  $m_k$  число значений в выборке равных k (число групп, содержащих k требований). Также как и для метода минимума хи-квадрат перейдем от параметров  $\alpha$  и  $\beta$  к новым параметрам p и f, где p = Q(1) и  $f = \sum_{k=3}^{\infty} Q(k)$  используя соотношение (1.26).

Функция правдоподобия равна

$$L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) = Q(x_1)Q(x_2)\dots Q(x_n) =$$

$$= p^{m_1}(1 - f - p)^{m_2} \prod_{k=3}^{\infty} (f(1 - \gamma)\gamma^{k-3})^{m_k}.$$

Далее найдем натуральный логарифм функции правдоподобия

$$\ln L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) = m_1 \ln p + m_2 \ln(1 - f - p) + \sum_{k=3}^{\infty} m_k \ln(f(1 - \gamma)\gamma^{k-3}).$$
(B.1)

Согласно методу максимального правдоподобия необходимо найти аргументы функции, при которых она достигает максимума. Для этого приведем систему уравнений правдоподобия

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial p} \ln L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial f} \ln L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln L(x_1, \dots, x_n, p, f, \gamma) = 0. \end{cases}$$
(5.2)

Используя соотношения (Б.1) и (Б.2), получим окончательную систему уравнений для нахождения оценок методом максимального правдоподобия в виде

$$\begin{cases}
\frac{m_1}{p} - \frac{m_2}{1 - f - p} = 0, \\
-\frac{m_2}{1 - f - p} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{m_k}{f} = 0, \\
-\frac{m_3}{1 - \gamma} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{m_k}{(1 - \gamma)\gamma^{k-3}} \left( (k - 3)\gamma^{k-4} (1 - \gamma) - \gamma^{k-3} \right) = 0.
\end{cases}$$
(B.3)

Решая систему уравнений (Б.3), получим следующие оценки для параметров p, f и  $\gamma$ 

$$p^* = m_1/n,$$

$$f^* = (n - m_1 - m_2)/n,$$

$$\gamma^* = \sum_{k=3}^{\infty} (k-3)m_k / \sum_{k=3}^{\infty} (k-2)m_k.$$

Оценки  $\alpha^*$ ,  $\beta^*$  и  $\gamma^*$  для исходных параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  выражаются следующим образом

$$\alpha^* = \frac{1 - f - p}{p} = \frac{m_2}{m_1},$$

$$\beta^* = \frac{f(1 - \gamma)}{1 - f - p} = \frac{n - m_1 - m_2}{m_2} \sum_{k=3}^{\infty} m_k / \sum_{k=3}^{\infty} (k - 2) m_k,$$

$$\gamma^* = \sum_{k=3}^{\infty} (k - 3) m_k / \sum_{k=3}^{\infty} (k - 2) m_k.$$
(B.4)

#### Приложение В

## Вывод рекуррентных соотношений для одномерных распределений марковской последовательности $\{(\Gamma_i, \kappa_i); i \geq 0\}$

Найдем выражение для  $Q_{i+1}^{(3j-1)}(w),\ j=1,\ 2.$  Для этого рассмотрим 2 случая:

1) при  $w_j = 0$  получаем

$$\begin{split} Q_{i+1}^{(3j-1)}(w_s y_s) &= \\ &= \sum_x \sum_{r=1}^8 Q_i^{(r)}(x) \times \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_s y_s) = \\ &= \sum_x Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-2)}, x, y) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(3j-2)}, x, b, l_{3j-2} y_j) = w_s y_s) + \\ &\quad + \sum_x Q_i^{(6+j)}(x) \sum_b \mathbf{P}(\eta_i = b, \eta_i' = y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) \times \\ &\quad \times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)}, x, y_j) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(6+j)}, x, b, l_{3j-2} y_j) = w_s y_s) = \\ &= \sum_{x_j = 0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s = 0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b_j = 0}^{l_{3j-2} - x_j} \mathbf{P}(\eta_i = b_j y_j + (w_s - x_s) y_s | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_i = x) \times \\ &\quad + \sum_{x_j = 0}^{l_{3j-2} - 1} \sum_{x_s = 0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x) \sum_{b_j = 1}^{l_{3j-2} - x_j} \mathbf{P}(\eta_i = b_j y_j + (w_s - x_s) y_s | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) \times \\ &= \sum_{x_j = 0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s = 0}^{w_s} Q_i^{(3j-2)}(x) \sum_{b_j = 0}^{l_{3j-2} - x_j} \varphi_{3j-2}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) + \\ &\quad + \sum_{x_j = 0}^{l_{3j-2} - 1} \sum_{x_s = 0}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x) \sum_{b_j = 0}^{l_{3j-2} - x_j} \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(b_j y_j + (w_s - x_s) y_s); \quad (\mathbf{B}.\mathbf{1}) \end{split}$$

2) при  $w_{j} > 0$  получаем

$$Q_{i+1}^{(3j-1)}(w) =$$

$$= \sum_{x} \sum_{r=1}^{8} Q_{i}^{(r)}(x) \times \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a, \eta'_{i} = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(r)}, \kappa_{i} = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) =$$

$$= \sum_{x} Q_{i}^{(3j-2)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta'_{i} = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_{i} = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-2)}, x, y) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(3j-2)}, x, b, l_{3j-2}y_{j}) = w) +$$

$$+ \sum_{x} Q_{i}^{(6+j)}(x) \sum_{b} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \eta'_{i} = y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_{i} = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)}, x, y_{j}) = \Gamma^{(3j-1)}, V(\Gamma^{(6+j)}, x, b, l_{3j-2}y_{j}) = w) =$$

$$= \sum_{x_{j}=0}^{w_{j}+l_{3j-2}} \sum_{x_{s}=0}^{w_{s}} Q_{i}^{(3j-2)}(x) \mathbf{P}(\eta_{i} = w - x + l_{3j-2}y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j-2)}, \kappa_{i} = x) \times$$

$$+ \sum_{x_{j}=0}^{w_{j}+l_{3j-2}} \sum_{x_{s}=0}^{w_{s}} Q_{i}^{(6+j)}(x) \mathbf{P}(\eta_{i} = w - x + l_{3j-2}y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_{i} = x) \times$$

$$= \sum_{x_{j}=0}^{w_{j}+l_{3j-2}} \sum_{x_{s}=0}^{w_{s}} Q_{i}^{(3j-2)}(x) \varphi_{3j-2}(w - x + l_{3j-2}y_{j}) +$$

$$+ \sum_{x_{j}=0}^{w_{j}+l_{3j-2}-1} \sum_{x_{s}=0}^{w_{s}} Q_{i}^{(6+j)}(x) \varphi_{6+j,j,l_{3j-2}}(w - x + l_{3j-2}y_{j}). \quad (B.2)$$

Далее получим выражения для  $Q_{i+1}^{(3j)}(w), j=1,\, 2.$  Для этого рассмотрим 3 случая:

1) при  $w_{j} = 0$  получаем

$$\begin{split} Q_{i+1}^{(3j)}(w_s y_s) &= \\ &= \sum_x \sum_{r=1}^8 Q_i^{(r)}(x) \times \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_s y_s) = \\ &= \sum_x Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = k l_{3j-1} y_j, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-1)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(3j-1)}, x, b, a) = w_s y_s) + \\ &+ \sum_x Q_i^{(6+j)}(x) \sum_{a_j = 0}^{l_{3j-2}} \sum_{b_j = 0} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a_j y_j, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(6+j)}, x, b, a) = w_s y_s) = \\ &= \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{x_j = 0}^{k l_{3j-1}} \sum_{x_s = 0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \times \\ &\times \sum_{b_j = 0}^{k l_{3j-1} - x_j} \mathbf{P}(\eta_i = b_j y_j + (w_s - x_s) y_s, \xi_i = k l_{3j-1} y_j | \Gamma_i = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_i = x) + \\ &+ \sum_{a_j = 0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s = 0}^{a_j} \sum_{x_s = 0}^{k l_{3j-1}} \sum_{x_s = 0}^{w_s} Q_i^{(3j-1)}(x) \sum_{j \neq y_j} \mathbf{P}(\eta_i = w_s - x_s, \xi_i = a_j y_j, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_i = x) = \\ &= \sum_{k=1}^{k l_{3j-2}} \sum_{x_s = 0}^{a_j} \sum_{x_s = 0}^{k l_{3j-1} - x_j} \varphi_{3j-1,k}(x_j, b_j y_j + (w_s - x_s) y_s) + \\ &+ \sum_{x_s = 0}^{l_{3j-2}} Q_i^{(6+j)}(x_j y_j + w_s y_s) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) + \\ &+ \sum_{a_s = 0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_s = 0}^{a_j} \sum_{x_s = 1}^{w_s} Q_i^{(6+j)}(x_j y_j + (w_s - x_s) y_s) \varphi_{6+j,s,a_j}(x_s y_s); \quad (B.3) \end{cases}$$

2) при  $0 < w_i < K_i$  получаем

$$\begin{split} Q_{i+1}^{(3j)}(w) &= \\ &= \sum_{x} \sum_{r=1}^{8} Q_{i}^{(r)}(x) \times \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(r)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \\ &= \sum_{x} Q_{i}^{(3j-1)}(x) \sum_{k=1}^{n_{j}} \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = k l_{3j-1} y_{j}, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-1)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(3j-1)}, x, b, a) = w) + \\ &+ \sum_{x} Q_{i}^{(6+j)}(x) \sum_{a_{j}=0}^{l_{3j-2}} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a_{j} y_{j}, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_{i} = x) \times \\ &\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(6+j)}, x, b, a) = w) = \\ &= \sum_{k=1}^{n_{j}} \sum_{x_{s}=0}^{w_{j}+k l_{3j-1}} \sum_{x_{s}}^{w_{s}} Q_{i}^{(3j-1)}(x) \mathbf{P}(\eta_{i} = w - x + k l_{3j-1}, \xi_{i} = k l_{3j-1} y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_{i} = x) + \\ &+ \sum_{y \neq y_{j}} \mathbf{Q}_{i}^{(3j-1)}(x) \mathbf{P}(\eta_{i} = w - x + k l_{3j-1}, \xi_{i} = k l_{3j-1} y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_{i} = x) + \\ &\times \sum_{y \neq y_{j}} \mathbf{P}(\eta_{i} = w_{s} - x_{s}, \xi_{i} = a_{j} y_{j}, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_{i} = x) = \\ &= \sum_{k=1}^{n_{j}} \sum_{x_{j}=0}^{w_{j}+k l_{3j-1}} \sum_{x_{s}=0}^{w_{s}} Q_{i}^{(6+j)}(x) \varphi_{3j-1,k}(x_{j}, w - x + k l_{3j-1}) + \\ &+ Q_{i}^{(6+j)}(w + l_{3j-2} y_{j}) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_{0}) + \\ &+ \sum_{a_{j}=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_{s}=0}^{w_{s}} Q_{i}^{(6+j)}(w + a_{j} y_{j} - x_{s} y_{s}) \varphi_{6+j,s,a_{j}}(x_{s} y_{s}); \quad (\mathbf{B}.4) \end{split}$$

3) при  $w_j \geq K_j$  получаем

$$Q_{i+1}^{(3j)}(w) = \sum_{x} \sum_{r=1}^{8} Q_{i}^{(r)}(x) \times \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(r)}, \kappa_{i} = x) \times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \sum_{x} Q_{i}^{(3j-1)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = n_{j}l_{3j-1}y_{j}, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_{i} = x) \times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \sum_{x} Q_{i}^{(3j-1)}(x) \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = n_{j}l_{3j-1}y_{j}, \eta_{i}' = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j-1)}, \kappa_{i} = x) \times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w) = \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, b) = w) = w = \mathbf{P}(U(\Gamma^{$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(3j-1)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(3j-1)}, x, b, a) = w) +$$

$$+ \sum_{x} Q_{i}^{(6+j)}(x) \sum_{a_{j}=0}^{l_{3j-2}} \sum_{b,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a_{j}y_{j}, \eta'_{i} = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_{i} = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(6+j)}, x, y) = \Gamma^{(3j)}, V(\Gamma^{(6+j)}, x, b, a) = w) =$$

$$= \sum_{x_{j}=0}^{w_{j}+n_{j}l_{3j-1}w_{s}} \sum_{x_{s}=0}^{q_{i}^{(3j-1)}} (x) \mathbf{P}(\eta_{i} = w - x + n_{j}l_{3j-1}, \xi_{i} = n_{j}l_{3j-1}y_{j} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3j-1)}; \kappa_{i} = x) +$$

$$+ \sum_{a_{j}=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_{s}=0}^{w_{s}} Q_{i}^{(6+j)}(w_{j}y_{j} + a_{j}y_{j} + x_{s}) \times$$

$$\times \sum_{y \neq y_{j}} \mathbf{P}(\eta_{i} = w_{s} - x_{s}, \xi_{i} = a_{j}y_{j}, \eta'_{i} = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(6+j)}, \kappa_{i} = x) =$$

$$= \sum_{x_{j}=0}^{w_{j}+n_{j}l_{3j-1}} \sum_{x_{s}=0}^{w_{s}} Q_{i}^{(3j-1)}(x) \varphi_{3j-1,n_{j}}(x_{j}, w - x + n_{j}l_{3j-1}) +$$

$$+ Q_{i}^{(6+j)}(w + l_{3j-2}y_{j}) \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_{0}) +$$

$$+ \sum_{a_{j}=0}^{l_{3j-2}} \sum_{x_{s}=1}^{w_{s}} Q_{i}^{(6+j)}(w + a_{j}y_{j} - x_{s}y_{s}) \varphi_{6+j,s,a_{j}}(x_{s}y_{s}).$$
 (B.5)

Наконец, получим выражения для  $Q_{i+1}^{(6+j)}(w), j=1,2$ . Для этого рассмотрим 2 случая:

1) при  $w_s = 0$  получаем

$$Q_{i+1}^{(6+j)}(y_0) =$$

$$= \sum_{x} \sum_{r=1}^{8} Q_i^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_i = b, \xi_i = a, \eta_i' = y | \Gamma_i = \Gamma^{(r)}, \kappa_i = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(6+j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = y_0) =$$

$$= \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \mathbf{P}(\eta_i = y_0, \eta_i' = y_0 | \Gamma_i = \Gamma^{(3s)}, \kappa_i = x) = \sum_{x_s=0}^{l_{3s}} Q_i^{(3s)}(x) \varphi_{3s,0}(y_0);$$
(B.6)

2) при  $0 < w_s < K_s - l_{3s}$  получаем

$$Q_{i+1}^{(6+j)}(w_{s}y_{s}) =$$

$$= \sum_{x} \sum_{r=1}^{8} Q_{i}^{(r)}(x) \sum_{b,a,y} \mathbf{P}(\eta_{i} = b, \xi_{i} = a, \eta'_{i} = y | \Gamma_{i} = \Gamma^{(r)}, \kappa_{i} = x) \times$$

$$\times \mathbf{P}(U(\Gamma^{(r)}, x, y) = \Gamma^{(6+j)}, V(\Gamma^{(r)}, x, b, a) = w_{s}y_{s}) =$$

$$= Q_{i}^{(3s)}((w_{s} + l_{3s})y_{s})\mathbf{P}(\eta_{i} = y_{0}, \eta'_{i} = y_{0} | \Gamma_{i} = \Gamma^{(3s)}, \kappa_{i} = x) =$$

$$= Q_{i}^{(3s)}((w_{s} + l_{3s})y_{s})\varphi_{3s,0}(y_{0}). \quad (B.7)$$

#### Приложение Г

#### Доказательство теоремы 6

Предположим, что предельное распределение последовательности  $\{(\Gamma_i,\kappa_i); i\geq 0\}$  существует. Пусть начальное распределение совпадает с предельным. Рассмотрим (2.41) при r=3j и  $z=z_j$ . Учитывая, что  $R_s^{(3j)}(z_j)=0$ , имеем:

$$(q(\overline{z}_j) - 1)W^{(3j)}(\overline{z}_j) + R_j^{(3j)}(\overline{z}_j) + \Psi_1^{(3j)}(\overline{z}_j) + \Psi_2^{(3j)}(\overline{z}_j) + \Upsilon^{(3j)}(\overline{z}_j) = 0 \qquad (\Gamma.1)$$

Как и при доказательстве теоремы 3 первые производные слева функций  $(q(\overline{z}_j)-1)W^{(3j)}(\overline{z}_j),\ \Psi_s^{(3j)}(\overline{z}_j)$  и  $\Psi_j^{(3j)}(\overline{z}_j)$  в точке  $z_j=1$  существуют и равны соответственно

$$(\lambda_{j}M_{j}T - L_{j})W^{(3j)}(\overline{1}),$$

$$(\lambda_{j}M_{j}T_{3j-1} - l_{3j-1})\sum_{k=1}^{n_{j}}(k - n_{j})\Phi_{k}^{3j-1}(\overline{1}),$$

$$\lambda_{j}M_{j}T_{3s-1}\sum_{k=1}^{n_{s}}(k - n_{s})\Phi_{k}^{3s-1}(\overline{1}).$$

Пусть j=1. Продифференцировав ( $\Gamma$ .1) по  $z_j$  при  $z_j=1$  получим:

$$(\lambda_{1}M_{1}T - L_{1})W^{(3)}(\overline{1}) + \frac{d}{dz_{1}}R_{1}^{(3)}(\overline{z}_{1})|_{z_{1}=1} + \frac{d}{dz_{1}}\Upsilon_{1}^{(3)}(\overline{z}_{1})|_{z_{1}=1} + + (\lambda_{1}M_{1}T_{2} - l_{2})\sum_{k=1}^{n_{1}}(k - n_{1})\Phi_{k}^{2}(\overline{1}) + \lambda_{1}M_{1}T_{5}\sum_{k=1}^{n_{1}}(k - n_{1})\Phi_{k}^{5}(\overline{1}) = 0.$$

$$(\Gamma.2)$$

Поскольку

$$\frac{d}{dz_1}R_1^{(3)}(\overline{z}_1)|_{z_1=1} = \frac{1}{6}\frac{d}{dz_1}R_1(\overline{z}_1)|_{z_1=1} > 0,$$

то получаем

$$(\lambda_{1}M_{1}T - L_{1})W^{(3)}(\overline{1}) - n_{1}(\lambda_{1}M_{1}T_{2} - l_{2})W^{(2)}(\overline{1}) - n_{2}\lambda_{1}M_{1}T_{5}W^{(5)}(\overline{1}) + (\lambda_{1}M_{1}T_{2} - l_{2})\sum_{k=1}^{n_{1}}k\Phi_{k}^{2}(\overline{1}) + (\lambda_{1}M_{1}T_{5}\sum_{k=1}^{n_{1}}k\Phi_{k}^{5}(\overline{1}) + \frac{d}{dz_{1}}\Upsilon_{1}^{(3)}(\overline{z}_{1})|_{z_{1}=1} < 0.$$

$$(\Gamma.3)$$

Найдем производную  $\frac{d}{dz_1}\Upsilon_1^{(3)}(\overline{z}_1)|_{z_1=1}$  и подставим ее в последнее выражение. Исходя из (2.38) получаем, что

$$\begin{split} \Upsilon_{1}^{(3)}(\overline{z}_{1}) &= q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})\{q_{6,2}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1}) - \\ &- q_{3,0}(\overline{z}_{1})(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(3)}(\overline{z}_{1}) - q_{3,1}\overline{W}^{(3)}(\overline{z}_{1})\} + \\ &+ q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})\{q_{3,1}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(3)}(\overline{z}_{1}) - q_{6,0}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1}) - q_{6,2}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1})\} + \\ &+ q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})q_{8,2}(\overline{z}_{1})W^{(8)}(\overline{z}_{1}) + \\ &+ q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})W^{(8)}(\overline{z}_{1}) + q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})e^{-\lambda T_{4}}W^{(8)}(\overline{z}_{1}) + \\ &+ q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{7,1}(\overline{z}_{1})W^{(7)}(\overline{z}_{1}) + q_{7,2}(\overline{z}_{1})W^{(7)}(\overline{z}_{1}) + e^{-\lambda T_{1}}W^{(7)}(\overline{z}_{1}) = \\ &= q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})W^{(8)}(\overline{z}_{1})\{q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{8,2}(\overline{z}_{1}) + q_{8,1}(\overline{z}_{1}) + e^{-\lambda T_{4}}\} + \\ &+ W^{(7)}(\overline{z}_{1})\{q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{7,1}(\overline{z}_{1}) + q_{7,2}(\overline{z}_{1}) + q_{7,2}(\overline{z}_{1}) + e^{-\lambda T_{1}}\} + \\ &+ q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6,2}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1})(q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})) + \\ &+ q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6,2}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1})(1 - q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6,0}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1}). \\ &- q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})q_{3,0}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(3)}(\overline{z}_{1}) - q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6,0}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1}). \\ &- q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})q_{3,0}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(3)}(\overline{z}_{1}) - q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6,0}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1}). \\ &- q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})q_{3,0}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1})q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6,0}(\overline{z}_{1}) \\ &+ q_{1}(\overline{z}_{1})q_{1}(\overline$$

Заметим, что если в качестве начального распределения взято предельное и  $z=\overline{z}_1$ , тогда из (2.37) получаем:

$$W^{(8)}(\overline{z}_1) = q_{3,0}(\overline{z}_1)W^{(3)}(\overline{z}_1) + R_0^{(3)}(\overline{z}_1);$$
  
$$W^{(7)}(\overline{z}_1) = q_{6,0}(\overline{z}_1)W^{(6)}(\overline{z}_1);$$

$$\begin{split} \Upsilon_{1}^{(3)}(\overline{z}_{1}) = \\ = q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})W^{(8)}(\overline{z}_{1})\{q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{8,2}(\overline{z}_{1}) + q_{8,1}(\overline{z}_{1}) + e^{-\lambda T_{4}} - q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})\} + \\ + W^{(7)}(\overline{z}_{1})\{q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{7,1}(\overline{z}_{1}) + q_{7,2}(\overline{z}_{1}) + e^{-\lambda T_{1}} - q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})\} + \\ + q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{6,2}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(6)}(\overline{z}_{1})(q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1}) - 1) + \\ + q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{3,1}(\overline{z}_{1})\overline{W}^{(3)}(\overline{z}_{1})(1 - q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})) + \\ + q_{1}(\overline{z}_{1})q_{2}^{n_{1}}(\overline{z}_{1})q_{4}(\overline{z}_{1})q_{5}^{n_{2}}(\overline{z}_{1})q_{6}(\overline{z}_{1})R_{0}^{(3)}(\overline{z}_{1}). \end{split}$$

Используя лемму 4 получаем

$$\frac{d}{dz_{1}}\Upsilon_{1}^{(3)}(\overline{z}_{1})|_{z_{1}=1} =$$

$$= W^{(8)}(\overline{1})\{(1 - e^{-\lambda T_{4}})\frac{\lambda_{1}^{2}M_{1}}{\lambda^{2}} + (1 - e^{-\lambda T_{4}})\frac{\lambda_{1}M_{1}}{\lambda} - \lambda_{1}M_{1}(T_{4} + n_{2}T_{5})\} +$$

$$+W^{(7)}(\overline{1})\{\frac{\lambda_{1}^{2}}{\lambda}M_{1}T_{1}e^{-\lambda T_{1}} + \lambda_{2}\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda T_{1}}) - \lambda_{1}M_{1}(T_{1} + n_{1}T_{2}) + l_{1} + n_{1}l_{2}\} +$$

$$+\frac{\lambda_{2}}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T_{6}})(\lambda_{1}M_{1}(T_{4} + n_{2}T_{5} + T_{6}))\overline{W}^{(6)}(\overline{1}) -$$

$$-\frac{\lambda_{1}}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T_{3}})(\lambda_{1}M_{1}(T_{4} + n_{2}T_{5} + T_{6}))\overline{W}^{(3)}(\overline{1}) + \frac{d}{dz_{1}}R_{0}^{(3)}(z_{1})|_{\overline{z}_{1}=\overline{1}}.$$

Легко проверить, что  $\frac{d}{dz_1}R_0^{(3)}(z_1)|_{\overline{z}_1=\overline{1}}>0$ , поэтому этот член в неравенстве можно не учитывать. Подставим вычисленную производную в (3.12). Тогда:

$$(\lambda_{1}M_{1}T_{1} - l_{1})\{W^{(3)}(\overline{1}) - (1 - \frac{\lambda_{1}}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T_{1}})W^{(7)}(\overline{1})\} + (\lambda_{1}M_{1}T_{2} - l_{2}) \times \\
\times \{n_{1}W^{(3)}(\overline{1}) - n_{1}(1 - \frac{\lambda_{1}}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T_{1}}))W^{(7)} - n_{1}W^{(2)}(\overline{1}) + \sum_{k=1}^{n_{j}} k\Phi_{k}^{(3j-1)}(\overline{1})\} + \\
+ (\lambda_{1}M_{1}T_{3} - l_{3})W^{(3)}(\overline{1}) + \lambda_{1}M_{1}T_{4}\{W^{(3)}(\overline{1}) + \lambda_{1}\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda T_{3}})\overline{W}^{(3)}(\overline{1}) + \\
+ \lambda_{2}\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda T_{6}})\overline{W}^{(6)}(\overline{1}) - (1 - \frac{\lambda_{2}}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T_{4}}))W^{(8)}(\overline{1})\} + \\
+ \lambda_{1}M_{1}T_{5}\{n_{2}W^{(3)}(\overline{1}) - n_{2}\lambda_{1}\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda T_{3}})\overline{W}^{(3)}(\overline{1}) + \\
+ n_{2}\lambda_{2}\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda T_{6}})\overline{W}^{(6)}(\overline{1}) - n_{2}(1 - \frac{\lambda_{2}}{\lambda}(1 - e^{-\lambda T_{4}}))W^{(8)}(\overline{1}) - \\
- n_{2}W^{(5)}(\overline{1}) + \sum_{k=1}^{n_{2}} k\Phi_{k}^{(5)}(\overline{1})\} + \lambda_{1}M_{1}T_{6}\{W^{(3)}(\overline{1}) + \\
+ \lambda_{1}\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda T_{3}})\overline{W}^{(3)}(\overline{1}) + \lambda_{2}\lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda T_{6}})\overline{W}^{(6)}(\overline{1})\} + \\
+ (\lambda_{1}\lambda_{2}M_{1}\lambda^{-2}(1 - e^{-\lambda T_{1}}) + \lambda_{1}^{2}M_{1}T_{1}\lambda^{-1}e^{-\lambda T_{1}})W^{(7)}(\overline{1}) + \\
+ (\lambda_{1}^{2}M_{1}\lambda^{-2}(1 - e^{-\lambda T_{4}}) + \lambda_{1}\lambda_{2}M_{1}\lambda^{-1}T_{4}e^{-\lambda T_{4}})W^{(8)}(\overline{1}) < 0.$$

$$(\Gamma.4)$$

Так как предельное распределение взято в качестве начального, то, положив  $z=\overline{1}$  из рекуррентных соотношений для производящих функций за один шаг

получим:

$$W^{(3j)}(\overline{1}) = W^{(3j-1)}(\overline{1}) + (1 - \lambda_j \lambda^{-1} (1 - e^{-\lambda T_{3j-2}})) W^{(6+j)}(\overline{1}) +$$

$$+ \varphi_{6+j,0,l_{3j-2}}(y_0) W^{(6+j)}(\overline{1});$$

$$W^{(3j-2)}(\overline{1}) = W^{(3s)}(\overline{1}) + q_{3j,j}(\overline{1}) \overline{W}^{(3j)}(\overline{1}) - q_{3s,0}(\overline{1}) \overline{W}^{(3s)}(\overline{1}) - q_{3s,s}(\overline{1}) \overline{W}^{(3s)}(\overline{1});$$

$$W^{(3j-1)}(\overline{1}) = W^{(3j-2)}(\overline{1}) + q_{6+j,j}(\overline{1}) W^{(6+j)}(\overline{1});$$

$$W^{(6+j)}(\overline{1}) = e^{-\lambda T_{3s}} \overline{W}_i^{(3s)}(\overline{1}).$$

Эти соотношения позволяют преобразовать выражения ( $\Gamma$ .4) к виду (3.19) при j=1, что и требовалось доказать.

#### Приложение Д

### Код программы, реализующей разбиение потоков на группы

```
Критерии независимости и одинакового распределения
int Ipsilon (int n, double *arr)
{
       int j=0, *mas,res=0;
       mas=new int[n];
       for (int i = 0; i < n-1; i++)
               if ((arr[i+1]-arr[i])>0) { mas[j++]=1;}
               else if ((arr[i+1]-arr[i])<0) { mas[j++]=-1;}
       }
       for (int i = 0; i < j-1; i++)
       {
               if (mas[i]*mas[i+1]<0) { res++;}</pre>
       delete []mas;
       return res-1;
}
double Dzeta1 (int n, double *arr)
{
       return (Ipsilon(n,arr)-(2.0*n-7.0)/3.0)*sqrt(90.0/(16.0*n-29));
}
int Lambda (int n, double *arr)
{
       int res=0;
       for (int i = 0; i < n-1; i++)
               for (int j = i+1; j < n; j++)
               {
                      if (arr[i]>arr[j]) res++;
               }
       }
       return res;
}
```

```
double Dzeta2 (int n, double *arr)
{
       return (Lambda(n,arr)-double(n*(n-1))/4.0)*6.0/(n*sqrt(n));
}
int* Dzeta3 (int n, double *arr)
{
       double med,*mas1;
       int *mas, j=0, count, temp, max=0;
       mas1 = new double[n];
       for (int i = 0; i < n; i++) {
               mas1[i]=arr[i];
       }
       for (int i = 0; i < n-1; i++) {
               temp=i;
               for (int k = i+1; k < n; k++) {
                       if (mas1[temp]>mas1[k]) {
                              temp=k;
                       }
               }
               med=mas1[temp];
               mas1[temp]=mas1[i];
               mas1[i]=med;
       }
       if (n\%2==1) med=mas1[(n-1)/2];
       else med=0.5*(mas1[n/2]+mas1[n/2-1]);
       mas = new int[n];
       for (int i = 0; i < n; i++)
               if (arr[i]>med) {mas[j++]=1;}
               if (arr[i] < med) { mas[j++] = -1; }</pre>
       }
       count=1;
       temp=0;
       for (int i = 0; i < j-1; i++)
       {
               if (mas[i]*mas[i+1]<0) count++;</pre>
       int i=0;
       while (i<j)
       {
               temp=1;
```

```
while (mas[i]*mas[i+1]>0) {temp++; i++; if(i+1==j) break;}
               if (temp>max) max=temp;
               i++;
       }
       if (temp>max) max=temp;
       int *res;
       res=new int[2];
       res[0]=count;
       res[1]=max;
       delete []mas;
       return res;
}
int* Dzeta4 (int n, double *arr)
{
       int j=0, *mas, count=1, temp, max=0;
       mas=new int[n];
       for (int i = 0; i < n-1; i++)
       {
               if ((arr[i+1]-arr[i])>0) { mas[j++]=1;}
               else if ((arr[i+1]-arr[i])<0) { mas[j++]=-1;}
       }
       for (int i = 0; i < j-1; i++)
               if (mas[i]*mas[i+1]<0) { count++;}</pre>
       int i=0;
       while (i<j)
       {
               temp=1;
               while (mas[i]*mas[i+1]>0) {temp++; i++; if(i+1==j) break;}
               if (temp>max) max=temp;
               i++;
       }
       if (temp>max) max=temp;
       int *res;
       res=new int[2];
       res[0]=count;
       res[1]=max;
       delete []mas;
       return res;
}
```

#### Разбиение на группы

```
void __fastcall TForm5::Button1Click(TObject *Sender)
       switch (ComboBox1->ItemIndex) {
               case 0:
               {
                       double *masd=new double[dataN];
                       int *masint=new int[dataN+1],j=0;
                       double h=Edit1->Text.ToDouble();
                       masint[0]=0;
                       int i=0,k=0;
                       double sum;
                       while (i<dataN)
                       {
                              sum=mas[i];
                              k=1;
                              while((mas[i+k-1]<h)&&(i+k<dataN))
                              {
                                      sum+=mas[i+k];
                                      h*=Edit2->Text.ToDouble();
                              }
                              h*=Edit3->Text.ToDouble();
                              masint[j+1]=i+k;
                              masd[j]=sum;
                              j++;
                              i+=k;
                       }
                       StringGrid2->RowCount=j/6+(j%6!=0);
                       for (int i=0;i<j;i++)
                       {
                              StringGrid2->Cells[i%6][i/6]=AnsiString(masint[i
                                  +1]-masint[i])+AnsiString("; ")+
                              AnsiString(masd[i]);
                       }
                       StringGrid2 - Cells[(j-1)\%6][(j-1)/6] = AnsiString(masd[(j-1)\%6])
                       AnsiString("+;_{\sqcup}")+AnsiString(masint[(j-1)+1]-masint[(j-1)
                          ]+1)+
                       AnsiString("+");
                       for (int i=j\%6; i<6; i++)
                       {
```

```
StringGrid2->Cells[i%6][j/6]="";
       }
       if (arri!=NULL) delete []arri;
       if (arrd!=NULL) delete []arrd;
       count=j;
       arri=new int[count];
       arrd=new double[count];
       for (int i = 0; i < count; i++)
       {
               arri[i]=masint[i+1]-masint[i];
               arrd[i]=masd[i];
       }
       arri[count-1]+=1;
       break;
}
case 1:
{
       double *masd=new double[dataN];
       int *masint=new int[dataN+1],j=0,i=0,k=0;
       double h=Edit1->Text.ToDouble();
       KO=mas[0];
       while (mas[i]<h)
       {
               i++;
               KO+=mas[i];
       }
       masint[0]=++i;
       double sum;
       while (i<dataN)</pre>
       {
               sum=mas[i];
               k=1;
               while((sum<h)&&(i+k<dataN))</pre>
               {
                       sum+=mas[i+k];
                       k++;
               }
               masint[j+1]=i+k;
               masd[j]=sum;
               j++;
               i+=k;
       }
```

```
j++; masint[j]= masint[j-1]; masd[j-1]=10;
       StringGrid2->RowCount=j/6+(j%6!=0);
       for (int i=0;i<j;i++)
       {
              StringGrid2->Cells[i%6][i/6]=AnsiString(masd[i])+
                  AnsiString("; ")+
               AnsiString(masint[i+1]-masint[i]);
       }
       StringGrid2->Cells[(j-1)\%6][(j-1)/6]=AnsiString(masd[(j-1))
       AnsiString("+;_{\sqcup}")+AnsiString(masint[(j-1)+1]-masint[(j-1)
          ]+1)+AnsiString("+");
       for (int i=j\%6; i<6; i++)
       {
               StringGrid2->Cells[i%6][j/6]="";
       }
       if (arri!=NULL) delete []arri;
       if (arrd!=NULL) delete []arrd;
       count=j;
       arri=new int[count];
       arrd=new double[count];
       for (int i = 0; i < count; i++)
       {
               arri[i]=masint[i+1]-masint[i];
              arrd[i]=masd[i];
       }
       break;
}
case 2:
{
       double *masd=new double[dataN], h0=Edit1->Text.ToDouble(),
       int *masint=new int[dataN+1],j=0,i=0,k=0;
       masint[0]=0;
       while (i<dataN)
       {
               sum=mas[i];
              k=1;
               while ((mas[i+k-1]<h0)&&(i+k<dataN))
               {
                      sum+=mas[i+k];
                      k++;
```

```
}
       masint[j+1]=i+k;
       masd[j]=sum;
       j++;
       i+=k;
}
bool flag=true;
double h1=Edit2->Text.ToDouble(), h2=Edit3->Text.ToDouble()
int d=Edit4->Text.ToInt();
while (flag)
{
       flag=false;
       for (int i = 1; i < j; i++)
       {
               if (((masint[i]-masint[i-1]<=d)&&(masint[i</pre>
                  +1]-masint[i]==d+1)&&
               (mas[masint[i]-1]<h1))||
               ((masint[i]-masint[i-1] \le d) \&\& (masint[i+1]-
                  masint[i]<=d)&&
               (mas[masint[i]-1]<h2)))
               {
                       masd[i-1]+=masd[i];
                       for (int l = i; l < j-1; l++)
                       {
                              masint[1]=masint[1+1];
                              masd[l]=masd[l+1];
                       masint[j-1]=masint[j];
                       j--;
                       flag=true;
                       break;
               }
       }
}
StringGrid2->RowCount=j/6+(j%6!=0);
for (int i=0;i<j;i++)</pre>
{
       StringGrid2->Cells[i%6][i/6]=AnsiString(masd[i])+
           AnsiString("; ")+AnsiString(masint[i+1]-masint[i
           ]);
}
```

```
StringGrid2->Cells[(j-1)\%6][(j-1)/6]=AnsiString(masd[(j-1))
           ])+
       AnsiString("+;_{\sqcup}")+AnsiString(masint[(j-1)+1]-masint[(j-1)
           ]+1)+AnsiString("+");
       for (int i=j\%6; i<6; i++)
               StringGrid2->Cells[i%6][j/6]="";
       }
       if (arri!=NULL) delete []arri;
       if (arrd!=NULL) delete []arrd;
       count=j;
       arri=new int[count];
       arrd=new double[count];
       for (int i = 0; i < count; i++)
       {
               arri[i] = masint[i+1] - masint[i];
               arrd[i]=masd[i];
       }
       arri[count-1]+=1;
       break;
}
case 3:
{
       double *masd=new double[dataN], h0=Edit1->Text.ToDouble(),
           sum;
       int *masint=new int[dataN+1], j=0,i=0,k=0;
       masint[0]=0;
       while (i<dataN)
       {
               sum=mas[i];
               k=1;
               while ((mas[i+k-1]<h0)\&\&(i+k<dataN))
                       sum+=mas[i+k];
                       k++;
               }
               masint[j+1]=i+k;
               masd[j]=sum;
               j++;
               i+=k;
       bool flag=true;
```

```
double h1=Edit2->Text.ToDouble();
int d=Edit4->Text.ToInt();
while (flag)
{
       flag=false;
       for (int i = 1; i < j; i++)
               if (i>1)
               {
                       if ((masint[i]-masint[i-1]<=d)&&(</pre>
                           masint[i+1]-masint[i]<=d)&&</pre>
                       (masint[i-1]-masint[i-2]==masint[i]-
                           masint[i-1])&&(mas[masint[i]-1]<h1</pre>
                           ))
                       {
                               masd[i-1]+=masd[i];
                               for (int l = i; l < j-1; l++)
                               {
                                       masint[l]=masint[l+1];
                                       masd[1]=masd[1+1];
                               }
                               masint[j-1]=masint[j];
                               j--;
                               flag=true;
                               break;
                       }
               }else if ((masint[i]-masint[i-1]<=d)&&(</pre>
                   masint[i+1]-masint[i]<=d)&&</pre>
               (mas[masint[i]-1]<h1))
               {
                       masd[i-1]+=masd[i];
                       for (int l = i; l < j-1; l++)
                               masint[l]=masint[l+1];
                               masd[l]=masd[l+1];
                       }
                       masint[j-1]=masint[j];
                       j--;
                       flag=true;
                       break;
               }
       }
```

```
}
                       StringGrid2->RowCount=j/6+(j%6!=0);
                       for (int i=0;i<j;i++)</pre>
                       {
                               StringGrid2->Cells[i%6][i/6]=AnsiString(masd[i])+
                                   AnsiString("; ")+AnsiString(masint[i+1]-masint[i
                                  ]);
                       }
                       StringGrid2 - Cells[(j-1)\%6][(j-1)/6] = AnsiString(masd[(j-1)\%6])
                       AnsiString("+;_{\sqcup}")+AnsiString(masint[(j-1)+1]-masint[(j-1)
                          ]+1)+AnsiString("+");
                       for (int i=j\%6; i<6; i++)
                       {
                               StringGrid2->Cells[i%6][j/6]="";
                       }
                       j--;
                       if (arri!=NULL) delete []arri;
                       if (arrd!=NULL) delete []arrd;
                       count=j;
                       arri=new int[count];
                       arrd=new double[count];
                       for (int i = 0; i < count; i++)</pre>
                       {
                               arri[i]=masint[i+1]-masint[i];
                               arrd[i]=masd[i];
                       }
                       arri[count-1]+=1;
                       break;
               }
               default:
                ;
       }
}
```

#### Приложение Е

### Код программы, реализующей имитационное моделирование системы

```
Класс входного потока
class flow
{
       protected:
       double* times;
       int count;
       int pos1;
       int pos2;
       double lambda;
       public:
       flow() {}
       flow(int n, double l, int value)
       {
              lambda = 1;
              pos1 = 0;
              pos2 = 0;
               count = n;
              times = new double[n];
              srand(value);
              int temp;
              double U;
              temp = rand();
              U = double(temp + 0.5) / (RAND_MAX + 1.0);
               times[0] = double(-log(U) / lambda);
               for (int i = 1; i < n; i++)
               {
                      temp = rand();
                      U = double(temp + 0.5) / (RAND_MAX + 1.0);
                      times[i] = times[i - 1] - double(log(U) / lambda);
              }
       ~flow()
       {
               if (times!=NULL)
              delete[] times;
```

```
double curr(int number = 1)
               if (number == 1)
               return times[pos1];
               else
               return times[pos2];
       }
       double get_pos(int number = 1)
       {
               if (number == 1)
               return pos1;
               else
               return pos2;
       }
       double next(int number = 1)
       {
               if (number == 1)
               {
                      double temp = times[pos1];
                      pos1++;
                      if (pos1 > count)
                      pos1 = 0;
                      return temp;
               }
               else
               {
                      double temp = times[pos2];
                      pos2++;
                       if (pos2 > count)
                      pos2 = 0;
                      return temp;
               }
       }
       void start()
       {
               pos1 = 0;
               pos2 = 0;
       }
};
```

}

Класс неординарного пуассоновского потока

```
class myflow:public flow
{
       double alpha;
       double beta;
       double gamma;
       public:
       myflow() {}
       myflow(int n, double 1, double a, double b, double g, int value)
       {
               lambda = 1;
               alpha = a;
               beta = b;
               double p = 1.0 / (1 + a + a * b / (1 - g));
               gamma = g;
               pos1 = 0;
               pos2 = 0;
               count = n;
               times = new double[n];
               srand(value);
               double U, V;
               U = double(rand() + 0.5) / (RAND_MAX + 1.0);
               V = double(rand() + 0.5) / (RAND_MAX + 1.0);
               int batch = num(V,a,b,g);
               for (int i = 0; i < batch; i++)
               times[i] = -double(log(U) / lambda);
               for (int i = batch; i < n;)</pre>
               {
                      U = double(rand() + 0.5) / (RAND_MAX + 1.0);
                      V = double(rand() + 0.5) / (RAND_MAX + 1.0);
                      batch = num(V, a, b, g);
                      for (int j = 0; (j < batch) && (i + j < n); j++)
                      times[i + j] = times[i - 1] - double(log(U) / lambda);
                      i += batch:
               }
       }
       ~myflow(){}
};
inline int num(double t, double a, double b, double g)
{
       double p = 1.0 / (1.0 + a + a * b / (1.0 - g));
       if (t < p)
```

```
return 1;
       else if (t 
       return 2;
       else
       return ceil(2.0 + log(1.0 - (t - p - p * a) * (1.0 - g) / (a * b * p)) /
          log(g));
}
     Класс очереди
class Queue
{
       double* arrival;
       int arr;
       double* output;
       int out;
       int count;
       int init;
       public:
       Queue(){}
       Queue(int n)
       {
              arrival = new double[150000];
              arr = 0;
              output = new double[150000];
              out = 0;
              count = 0;
              init = n;
              for (int i = 0; i < n; i++)
              Add(1, 0.0);
       }
       ~Queue()
       {
              delete[]arrival;
              delete[]output;
       }
       void Add(int n, double t)
       {
              for (int i = 0; i < n; i++)
              arrival[arr + i] = t;
              arr = arr + n;
              count = count + n;
       }
```

```
output[out] = t;
               out = out + 1;
               count = count - 1;
        }
        int Get()
        {
               return count;
        }
        int GetServ()
        {
               return out - init;
        }
       double SojTime()
               if (out <= init)</pre>
               return 0;
               double sum = 0;
               for (int i = init; i < out; i++)</pre>
               sum += output[i] - arrival[i];
               return sum / (out - init);
        }
       double SojTime(int n)
        {
               if ((out <= init) || n > out - init)
               return 0;
               double sum = 0;
               for (int i = init; i < init + n; i++)</pre>
               sum += output[i] - arrival[i];
               return sum / n;
        }
       double MeanQueue(double t)
        {
               double sum = 0;
               for (int i = 0; i < out; i++)
               sum += output[i] - arrival[i];
               for (int i = out; i < arr; i++)</pre>
               sum += t - arrival[i];
               return sum / t;
        }
};
```

void Sub( double t)

```
Класс системы
```

```
class syst
{
       public:
       double T1, T4, T2, T5, T3, T6;
       double w1, w2, w3, w4;
       double K1, K2, n1, n2;
       Queue *Q1, *Q2;
       int State;
       double time;
       double block;
       syst(int q1, int q2, int st)
       {
               Q1 = new Queue(q1);
               Q2 = new Queue(q2);
               State = st;
               time = 0;
               block = -1;
       ~syst() { delete Q1; delete Q2; }
       int nextState(flow *fl1, flow *fl2, int num=1);
};
int syst::nextState(flow *fl1, flow *fl2, int num)
{
       double end;
       int n;
       bool flag;
       switch (State)
       {
               case 1:
               end = time + T1;
               while ((*fl1).curr(num) < end \mid | ((*Q1).Get() > 0 && block < end))
               if ((*Q1).Get() > 0 && block < (*fl1).curr(num))
               {
                       (*Q1).Sub(block);
                      if (w1 + block <= end)
                      block += w1;
                      else
                      block = end + (1 - (end - block) / w1) * w2;
               }
               else if ((*fl1).curr(num) < end)</pre>
```

```
{
       double temp = (*fl1).next(num);
       if ((*Q1).Get() == 0)
       {
               (*Q1).Add(1, temp);
               (*Q1).Sub(temp);
               if (w1 + temp \le end)
               block += temp + w1;
               else
               block = end + (1 - (end - temp) / w1) * w2;
       }
       else
       (*Q1).Add(1, temp);
}
while ((*fl2).curr(num) < end)
       double temp = (*fl2).next(num);
       (*Q2).Add(1, temp);
}
time = end;
State = 2;
return 2;
break;
case 2:
end = time + T2;
n = 1;
flag = false;
for (int k = 0; (k < n1) && ((flag && ((*Q1).Get() > 0)) || (*Q1).
   Get() > K1); k++, flag = false, end += T2)
{
       while ((*fl1).curr(num) < end \mid | ((*Q1).Get() > 0 && block
           < end))
       if ((*Q1).Get() > 0 && block < (*fl1).curr(num))
       {
               (*Q1).Sub(block);
               block += w2;
       else if ((*fl1).curr(num) < end)</pre>
               double temp = (*fl1).next(num);
               flag = true;
               if ((*Q1).Get() == 0)
```

```
{
                       (*Q1).Add(1, temp);
                       (*Q1).Sub(temp);
                       block += temp + w2;
               }
               else
               (*Q1).Add(1, temp);
       }
}
end -= T2;
while ((*fl2).curr(num) < end)</pre>
{
       double temp = (*fl2).next(num);
       (*Q2).Add(1, temp);
}
time = end;
State = 3;
return 3;
break;
case 3:
end = time + T3;
block = end;
flag = false;
while ((*fl1).curr(num) < end)</pre>
{
       flag = true;
       double temp = (*fl1).next(num);
       (*Q1).Add(1, temp);
}
while ((*f12).curr(num) < end)</pre>
{
       double temp = (*fl2).next(num);
       (*Q2).Add(1, temp);
}
time = end;
if (((*Q2).Get() > 0) \mid | ((*Q1).Get() >= K1))
{
       State = 4;
       return 4;
}
else if (flag)
{
```

```
State = 1;
       return 1;
}
else
{
       State = 8;
       return 8;
}
break;
case 4:
end = time + T4;
while ((*fl2).curr(num) < end \mid | ((*Q2).Get() > 0 && block < end))
if ((*Q2).Get() > 0 && block < (*f12).curr(num))
{
       (*Q2).Sub(block);
       if (w3 + block \le end)
       block += w3;
       else
       block = end + (1 - (end - block) / w3) * w4;
}
else if ((*fl2).curr(num) < end)</pre>
{
       double temp = (*fl2).next(num);
       if ((*Q2).Get() == 0)
       {
               (*Q2).Add(1, temp);
               (*Q2).Sub(temp);
               if (w3 + temp \le end)
               block += temp + w3;
               else
               block = end + (1 - (end - temp) / w3) * w4;
       }
       else
       (*Q2).Add(1, temp);
}
while ((*fl1).curr(num) < end)</pre>
{
       double temp = (*fl1).next(num);
       (*Q1).Add(1, temp);
}
time = end;
State = 5;
```

```
return 5;
break;
case 5:
end = time + T5;
n = 1;
flag = false;
for (int k = 0; (k < n2) && ((flag && ((*Q2).Get() > 0)) || (*Q2).
   Get() > K1); k++, flag = false, end += T5)
{
       while ((*fl2).curr(num) < end \mid | ((*Q2).Get() > 0 && block
           < end))
       if ((*Q2).Get() > 0 && block < (*fl2).curr(num))
       {
               (*Q2).Sub(block);
               block += w4;
       }
       else if ((*fl2).curr(num) < end)</pre>
       {
               double temp = (*f12).next(num);
               flag = true;
               if ((*Q2).Get() == 0)
               {
                       (*Q2).Add(1, temp);
                       (*Q2).Sub(temp);
                       block += temp + w4;
               }
               else
               (*Q2).Add(1, temp);
       }
}
end -= T5;
while ((*fl1).curr(num) < end)</pre>
       double temp = (*fl1).next(num);
       (*Q1).Add(1, temp);
}
time = end;
State = 6;
return 6;
break;
case 6:
end = time + T6;
```

```
block = end;
flag = false;
while ((*fl2).curr(num) < end)</pre>
{
       flag = true;
       double temp = (*fl2).next(num);
        (*Q2).Add(1, temp);
}
while ((*fl1).curr(num) < end)</pre>
{
       double temp = (*fl1).next(num);
        (*Q1).Add(1, temp);
}
time = end;
if (((*Q1).Get() > 0) \mid | ((*Q2).Get() >= K1))
       State = 1;
       return 1;
}
else if (flag)
{
       State = 4;
       return 4;
}
else
{
       State = 7;
       return 7;
}
break;
case 7:
end = time + T1;
if (((*fl1).curr(num) <= (*fl2).curr(num)) && ((*fl1).curr(num) <=
    end))
{
       while ((*fl1).curr(num) < end || ((*Q1).Get() > 0 && block
           < end))
       if ((*Q1).Get() > 0 && block < (*fl1).curr(num))</pre>
               (*Q1).Sub(block);
               if (w1 + block \le end)
               block += w1;
```

```
else
               block = end + (1 - (end - block) / w1) * w2;
       }
       else if ((*fl1).curr(num) < end)</pre>
       {
               double temp = (*fl1).next(num);
               if ((*Q1).Get() == 0)
               {
                       (*Q1).Add(1, temp);
                       (*Q1).Sub(temp);
                       if (w1 + temp \le end)
                       block += temp + w1;
                       else
                       block = end + (1 - (end - temp) / w1) * w2;
               }
               else
               (*Q1).Add(1, temp);
       }
       while ((*fl2).curr(num) < end)</pre>
       {
               double temp = (*fl2).next(num);
               (*Q2).Add(1, temp);
       }
       time = end;
       State = 2;
       return 2;
       break;
}
else
{
       if ((*f12).curr(num) <= end)</pre>
       {
               end = (*fl2).curr(num);
               double temp = (*fl2).next(num);
               (*Q2).Add(1, temp);
               block = end;
       }
       time = end;
       State = 3;
       return 3;
       break;
}
```

```
break;
case 8:
end = time + T4;
if (((*fl2).curr(num) <= (*fl1).curr(num)) && ((*fl2).curr(num) <=
    end))
{
       while ((*fl2).curr(num) < end || ((*Q2).Get() > 0 && block
           < end))
       if ((*Q2).Get() > 0 && block < (*fl2).curr(num))</pre>
       {
               (*Q2).Sub(block);
               if (w3 + block \le end)
               block += w3;
               else
               block = end + (1 - (end - block) / w3) * w4;
       }
       else if ((*fl2).curr(num) < end)</pre>
       {
               double temp = (*f12).next(num);
               if ((*Q2).Get() == 0)
               {
                       (*Q2).Add(1, temp);
                       (*Q2).Sub(temp);
                       if (w3 + temp \le end)
                       block += temp + w3;
                       else
                       block = end + (1 - (end - temp) / w3) * w4;
               }
               else
               (*Q2).Add(1, temp);
       }
       while ((*fl1).curr(num) < end)</pre>
               double temp = (*fl1).next(num);
               (*Q1).Add(1, temp);
       }
       time = end;
       State = 5;
       return 5;
       break;
}
else
```

```
{
                      if ((*fl1).curr(num) <= end)</pre>
                       {
                              end = (*fl1).curr(num);
                              double temp = (*fl1).next(num);
                              (*Q1).Add(1, temp);
                              block = end;
                       }
                      time = end;
                      State = 6;
                      return 6;
                      break;
               }
               default:
               break;
       }
       return 1;
}
```