

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. П.Г. ДЕМИДОВА

На правах рукописи

Куликов Владимир Александрович

**ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В
ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ
ПРОСТРАНСТВЕННОГО АРГУМЕНТА И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: Кубышкин Евгений Павлович,
доктор физико-математических наук, профессор

Ярославль 2022

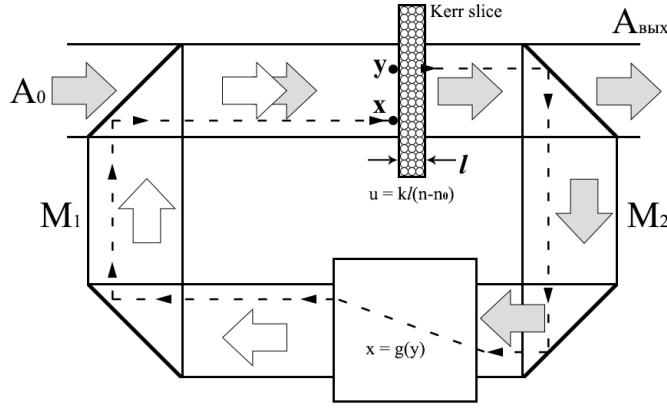
Оглавление

| | | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|------------|
| Введение | | 3 |
| 1 Исследование нелинейных волн в параболическом уравнении с оператором поворота пространственного аргумента | | 16 |
| 1.1 Математическая постановка задачи | 16 | |
| 1.2 Анализ динамики однородных состояний равновесия и их устойчи- вости | 19 | |
| 1.3 Бифуркации автоколебательных решений начально краевой задачи (1.1)–(1.2) | 29 | |
| 2 Исследование нелинейных волн в параболическом уравнении с оператором растяжения пространственного аргумента | | 55 |
| 2.1 Математическая постановка задачи | 55 | |
| 2.2 Анализ устойчивости однородных состояний равновесия начально- краевой задачи (2.7)–(2.8) | 57 | |
| 2.3 Бифуркации автоколебательных решений начально-краевой зада- чи (2.1)–(2.2) | 71 | |
| Заключение | | 101 |
| Список литературы | | 104 |

Введение

Объект исследования. Актуальность темы исследования.

Диссертация посвящена изучению условий и механизмов возникновения пространственно-неоднородных решений математической модели генератора оптического излучения с оператором преобразования пространственных координат в контуре двумерной запаздывающей обратной связи и тонким слоем нелинейной среды. Основные экспериментальные результаты образования пространственно-неоднородных структур в различных нелинейных оптических системах были получены в конце 1980-х годов. В работах [1]-[3], [65] приведены экспериментальные результаты образования пространственно-неоднородных волн в лазерных пучках генератора оптического излучения со специальным нелинейным контуром двумерной обратной связи. Такие структуры возникают в плоскости, ортогональной направлению распространения световой волны. Их возникновение обусловлено нелинейностью системы, которая обеспечивается тонким слоем нелинейной проводящей среды и контуром двумерной обратной связи с оператором пространственного преобразования световой волны в плоскости излучения оптического генератора. В указанных работах также предложена математическая модель для описания этого явления и приведены результаты ее численного анализа в случае оператора поворота плоскости световой волны. Математическая модель является уравнением динамики фазовой модуляции в нелинейной оптической системе и представляет собой начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа с оператором преобразования пространственного аргу-



мента в нелинейном функционале обратной связи. Уравнение рассматривается в области, определяемой апертурой светового излучения, с условиями непроницаемости на границе. Для понимания объекта исследования кратко остановимся на выводе этого уравнения, следуя работе [3] и взяв для определенности распространенную принципиальную схему генератора оптического излучения, представленную на рис. 1, в которой используется нелинейная среда среду керровского типа ("kerr slice") [3, 65].

Обозначим через $A(x, t)$ комплексную амплитуду поля монохроматической волны длины λ непосредственно перед слоем нелинейной среды, где $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ - поперечная координата, относительно направления распространения световой волны, Ω - апертура, t - время. После прохождения тонкого слоя среды протяженности $l, l \ll 1$ комплексная амплитуда $A'(x, t)$ описывается соотношением

$$A'(x, t) = \exp\{-\rho l/2 + ikln(x, t)\}A(x, t) \quad (1)$$

которое учитывает эффекты поглощения с коэффициентом $\rho > 0$ и изменение фазы волны, вызванное наведенными этой волной неоднородностями показателя преломления $n(x, t)$ слоя среды. Здесь $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число. В случае локального отклика среды с характерным временем релаксации нелинейности

динамика показателя преломления среды описывается уравнениями

$$n(x, t) = n_0 + n_2 P(x, t), \quad \tau \partial_t P(x, t) + P(x, t) - D \Delta P(x, t) = |A(x, t)|^2,$$

где n_0 - невозмущенное значение показателя преломления среды, $P(x, t)$ - поляризуемость среды, Δ - оператор Лапласа по поперечным координатам, описывающий диффузионный процесс переориентации молекул среды, вызванный падающей волной τ - коэффициент релаксации слоя среды. В результате приходим к уравнению относительно показателя преломления

$$\tau \partial_t n(x, t) + n(x, t) - D \Delta n(x, t) = n_0 + n_2 |A(x, t)|^2. \quad (2)$$

Для описания системы в замкнутой форме получим зависимость комплексной амплитуды $A(x, t)$ от показателя преломления $n(x, t)$. Для этого достаточно проследить ход лучей в контуре обратной связи, учесть преобразование пространственных аргументов $x = g(y)$ и учесть интерференцию входной волны с комплексной амплитудой $A_0(x)$ и волны обратной связи, считая для определенности, что $x, y \in \bar{\Omega}$. Если пренебречь временем запаздывания волн в контуре обратной связи (об учете запаздывания будет сказано ниже), тогда справедливо равенство

$$A(x, t) = (1 - R)^{1/2} A_0(x) + \eta R A'(y, t), \quad (3)$$

в котором $0 < R < 1$ – коэффициент отражения полупрозрачных зеркал $M_{1,2}$ (по интенсивности), η – коэффициент ослабления в контуре обратной связи. После подстановки (1) в (3) получаем функциональное уравнение, связывающее значения комплексной амплитуды в различных точках x, y апертуры:

$$A(x, t) = (1 - R)^{1/2} A_0(x) + B \exp\{ikln(y, t)\} A(y, t), \quad B = \eta R \exp\{\rho l/2\}$$

В предположении малости B будем использовать приближение

$$A(x, t) = (1 - R)^{1/2}(A_0(x) + BA_0(y)\exp\{ikln(y, t)\}).$$

Отсюда вытекает выражение для интенсивности $I = |A^2|$:

$$|A(x, t)|^2 = (1 - R)(|A_0(x)|^2 + B^2|A_0(x)|^2 + 2B\operatorname{Re}(A_0(x)^*)A_0(y)\exp\{ikln(y, t)\})). \quad (4)$$

Тогда для нелинейной фазовой модуляции $u(x, t) = kl(n(x, t) - n_0)$ согласно (2), (4) имеем уравнение

$$\tau\partial_t u(x, t) + u(x, t) - D\Delta u(x, t) = \mathcal{F}(u, g),$$

где функционал $\mathcal{F}(u, g) = F(x, y, u(y, t)), y = g^{-1}(x)$. Явный вид функции $F(x, y, u)$ определяется правой частью (4), $g(y)$ гладкое обратимое отображение $g(y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, для прообраза которого справедливо включение с $g^{-1}(\bar{\Omega}) \subseteq \Omega$.

После замены переменных имеем выражение

$$\mathcal{F}(u, g) = \begin{cases} \mathcal{F}(u(g^{-1}(x)), g(g^{-1}(x)))/|g'(g^{-1}(x))|, & g(x) \in \bar{\Omega}, \\ 0, & g(x) \notin \bar{\Omega}. \end{cases} \quad (5)$$

В приближении гармонической плоской волны $A_0(x) \equiv A_0 \in \mathbb{R}$, при малых B квадратичное по B слагаемое в (4) отбрасывается, и в результате получается уравнение

$$\tau\partial_t u(x, t) + u(x, t) - D\Delta u(x, t) = F(u(y, t)), \quad (F(u) = K(1 + \gamma \cos(u))),$$

$$\partial_n u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (6)$$

с краевыми и начальными условиями. В (6) $\gamma = 2B, K = n_2 kl(1 - R)|A_0|^2$ - скалярный параметр, характеризующий силу проявления нелинейных эффектов,

параметр $0 < \gamma < 1$ называется видностью интерференционной картины. Преобразование пространственного аргумента задается гладким обратимым преобразованием $y = g^{-1}(x) : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$. Краевые условия моделируют условия непроницаемости на границе Γ области Ω , где n вектор внешней нормали к границе Γ . Начально-краевую задачу (6) принято считать математической моделью генератора оптического излучения с преобразованием пространственного аргумента в контуре обратной связи. Отметим, что в случае временного запаздывания в контуре обратной связи согласно (2), (3), (6) для определения $u(x, t)$ будем иметь начально-краевую задачу

$$\tau \partial_t u(x, t) + u(x, t) - D \Delta u(x, t) = F(u(y, t - T)), \quad \partial_n u(x, t)|_{\Gamma} = 0, \quad (7)$$

где $T > 0$ время запаздывания. Определение начальных условий требует введения специальных функциональных пространств, что будет сделано в дальнейшем.

Объектом исследования в диссертации является начально-краевая задача (7) в круге $|x| = (x_1^2 + x_2^2) \leq R$ с условиями на границе $\partial_\rho u(R, t) = 0$. Рассматриваются два вида преобразования $g(y)$: преобразование (оператор) поворота в круге, задаваемое в полярных координатах $y = (\rho, \phi)$ по формуле $g(y) = (\rho, \phi + \theta)$ и преобразование растяжения полярных радиусов $g(y) = (\alpha\rho, \phi)$, $\alpha > 1$. В соответствии (5) в

$$\mathcal{F}(u, g) = K(1 + \gamma \cos(u(\rho, \phi + \theta, t - T))), \quad \mathcal{F}(u, g) = \alpha^{-2} K(1 + \gamma \cos(u(\rho/\alpha, \phi, t - T))). \quad (8)$$

Генераторы оптического излучения использующиеся в оптических системах передачи и оптических компьютерах. Их математическое моделирование и на этой основе исследование механизмов их работы представляет собой весьма актуальную задачу. Пространственно неоднородные решения, исследованию которых

посвящена диссертация, используются как носители информации в оптических и волоконно-оптических системах связи. Их пространственная неоднородность используется для кодирования и уплотнения информации. В связи с этим решаемые в диссертации задачи являются весьма актуальными.

Степень разработанности темы.

Начально-краевая задача (6), моделирующая оптический генератор, не учитывающий запаздывания контуре обратной связи рассматривалась в большом количестве работ. Отметим наиболее существенные. Во-первых, это работы Ахманова С. А., Воронцова М. А., Иванова В.Ю. [1, 2, 3, 65], где приведен аккуратный вывод математической модели, некоторые экспериментальные данные и результаты численного моделирования. В работах Кащенко С.А. [16, 68] для начально-краевой задачи (6) на окружности строятся асимптотические разложения пространственно-неоднородных решений. Отметим работы Белана Е.П [5, 6, 7], в которых рассмотрены вопросы разрешимости начально-краевой задачи, показана возможность бифуркации Андронова-Хопфа. Во второй работе в качестве метода исследования используется метод Галеркина в сочетании с методом интегральных многообразий. Построены асимптотические формулы бегущих волн. Обсуждается характер их взаимодействия. В работах Скубачевского А.А. [54, 55, 83] изучается многомерные случай рассматриваемой начально-краевой задачи с оператором преобразования пространственных координат общего вида. Рассмотрены вопросы существования решений и их единственности. Для указанного класса функционально-дифференциальных уравнений, показана возможность бифуркации Андронова-Хопфа бегущих волн. Большое количество работ принадлежит Разгулину А.В. [39]- [47], [66, 67]. В значительной степени они суммированы в его докторской диссертации [49] где подробно рассмотрены вопросы разрешимости различных постановок задач. Значительная

часть работы уделена построению численных методов решению рассматриваемых задач. С общих позиций рассмотрены вопросы размерности аттракторов. В работе имеется большая библиография по рассматриваемой проблеме. В настоящее время имеются учебные пособия для студентов, посвященные рассматриваемому классу уравнений [50, 51]. Вопрос бифуркации бегущих волн на окружности рассмотрен в работе Разгулина А. В., Романенко Т. Е. [48]. В работе используется специальный прием, связанный с переходом к врачающейся системе координат. К построению других автоколебательных решений он не применим.

Изучаемые в диссертации задачи – учет влияния запаздывания в контуре обратной связи математической модели оптического генератора – относятся к малоизученным. Наличие запаздывания вносит новые значительные особенности в изучаемую начально-краевую задачу. Запаздывание вносит в задачу большую неустойчивость к изменению параметров. В работах Кубышкина Е.П., Моряковой А.В. [71, 72] частный случай изучаемой математической модели – известное уравнение с запаздыванием Икеды. Показано, что в этом уравнении возможно существование весьма сложных аттракторов, в том числе хаотических, а также хаотической мультистабильности. В диссертации проведено полное исследование возможных вариантов потери устойчивости однородными состояниями равновесия начально-краевой задачи (7), в зависимости от параметров уравнения и величины запаздывания рассмотрены возможные критические случаи потери устойчивости, анализ бифуркаций автоколебательных решений, связанных с изменениями параметров уравнения и запаздывания и обусловленные потерей устойчивости однородных состояний равновесия. Рассмотрены два вида операторов преобразования пространственных координат: оператор поворота на заданный угол и оператор растяжения полярных радиусов. Эти результаты являются новыми и нигде ранее не рассматривались.

Цель диссертационного исследования

Целью диссертационного исследования является изучение условий и механизмы возникновения пространственно-неоднородных решений начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с оператором преобразования пространственных координат и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи. Начально-краевая задача которая является математической моделью генератора оптического излучения с оператором преобразования координат в контуре двумерной запаздывающей обратной связи и тонким слоем нелинейной среды.

Задачи диссертационного исследования

На основе сформулированной выше цели рассматриваются следующие задачи:

1. Математическая постановка начально-краевых для нелинейного параболического уравнения с запаздывающим аргументом и операторами поворота и растяжения пространственных координат. Определение функциональных пространств для начальных условий и решений начально-краевой задачи, доказательство теоремы существования и единственности решения, непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения.
2. Исследование динамики однородных состояний равновесия нелинейной начально-краевой задачи в зависимости от параметров уравнения.
3. Построение картины D-разбиений (областей устойчивости и неустойчивости решений) плоскости основных параметров уравнения и исследование механизмов потери устойчивости (критических случаев потери устойчивости) решений начально-краевой задачи в случае оператора поворота пространственного аргумента.

4. Исследование бифуркаций из однородных состояний равновесия пространственно-неоднородных решений для различных критических случаев потери устойчивости начально-краевой задачи с оператором поворота пространственного аргумента. Построение асимптотических формул пространственно-неоднородных решений.

5. Построение картины D-разбиений (областей устойчивости и неустойчивости решений) плоскости основных параметров уравнения и исследование механизмов потери устойчивости решений начально-краевой задачи в случае оператора растяжения пространственного аргумента.

6. Исследование бифуркаций из однородных состояний равновесия пространственно-неоднородных решений для различных критических случаев потери устойчивости начально-краевой задачи с оператором растяжения пространственного аргумента. Построение асимптотических формул пространственно-неоднородных решений.

Методология и методы исследования. Основными методами исследования являются метод инвариантных (центральных) многообразий распределенных нелинейных динамических систем, метод нормальных форм нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, метод построения уравнений траекторий на центральном многообразии нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, теория нелинейных операторных уравнений, качественная теория и теория бифуркаций нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, численные методы. При исследовании устойчивости решений рассматриваемых начально-краевых задачи широко используется метод D-разбиений Неймарка Ю.И.

Научная новизна. Все представленные в диссертации результаты являются новыми. Научная новизна проявляется в следующем:

1. Поставлены начально-краевые для нелинейного параболического уравнения

ния с запаздывающим аргументом и оператором поворота пространственных координат и оператором растяжения пространственных координат. Доказаны теоремы существования и единственности решения, непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения.

2. Исследована динамика однородных состояний равновесия начально-краевых для нелинейного параболического уравнения с запаздывающим аргументом и операторами поворота и растяжения пространственных координат в зависимости от параметров уравнения. Выявлены возможные механизмы потери устойчивости. Построены картины D-разбиений пространства основных параметров.
3. Исследованы возможные бифуркации пространственно-неоднородных решений (волн) начально-краевых для нелинейного параболического уравнения с запаздывающим аргументом и операторами поворота и растяжения пространственных координат. Для неоднородных решений построены асимптотические формулы.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Диссертация имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Проблема самоорганизации распределенных систем, т.е. изучение механизмов возникновения пространственно-неоднородных структур и волн в однородных распределенных системах имеет важное фундаментальное значение. Генераторы оптического излучения используются в оптических системах передачи и оптических компьютерах. Их математическое моделирование и на этой основе исследование механизмов их работы представляет собой как теоретическую так и прикладную задачу.

Пространственно-неоднородные решения, исследованию которых посвящена диссертация, используются как носители информации в оптических и волоконно-

оптических системах связи. Их пространственная неоднородность используется для кодирования и уплотнения информации.

Основные результаты. На защиту диссертации выносятся следующие **основные положения и результаты:**

1. Математическая постановка начально-краевых для нелинейных параболических уравнений с запаздывающим аргументом и соответственно с операторам поворота и операторам растяжения пространственных координат в функционале обратной связи. Определение функциональных пространств для начальных условий и решений начально-краевой задачи, доказательство теоремы существования и единственности решения, непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения.
2. Исследование динамики однородных состояний равновесия нелинейных начально-краевых задач в зависимости от параметров уравнения.
3. Построение картины D-разбиений плоскости основных параметров уравнения (областей устойчивости и неустойчивости решений начально-краевой задачи) и исследование механизмов потери устойчивости (критических случаев потери устойчивости) решений начально-краевой задачи в случае оператора поворота пространственного аргумента.
4. Исследование бифуркаций из однородных состояний равновесия пространственно неоднородных решений для различных критических случаев потери устойчивости начально-краевой задачи с оператором поворота пространственного аргумента. Построение асимптотических формул пространственно неоднородных решений.
5. Построение картины D-разбиений плоскости основных параметров уравнения и исследование механизмов потери устойчивости решений начально-

краевой задачи в случае оператора растяжения пространственного аргумента.

6. Исследование бифуркаций из однородных состояний равновесия пространственно неоднородных решений для различных критических случаев потери устойчивости начально-краевой задачи с оператором растяжения пространственного аргумента. Построение асимптотических формул пространственно неоднородных решений.

Апробация работы. Результаты исследований были представлены в докладах на следующих конференциях и семинарах:

Международная научная конференция "Динамика. 2019. Ярославль". 10-12 октября 2019. Ярославль. ЯрГУ им. П.Г. Демидова; Международная научная конференция "Актуальные проблемы математической физики". 27-30 ноября 2019. Москва. МГУ им. М.В.Ломоносова; XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. (КРОМШ-2020). Крым, пос. Батилиман 17-26 сентября 2020 г.; II международная конференция по интегрируемым системам и нелинейной динамике ISND-2020. Ярославль 19-23 октября 2020. Second International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics ISND-2020. Yaroslavl, October 19–23 2020 ; XXVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов» 10-27 ноября 2020. Москва. МГУ им. М.В.Ломоносова; Современные методы теории функций и смежные проблемы. Международная конференция : Воронежская зимняя математическая школа. Воронеж, 28 января – 2 февраля 2021 г.; Всероссийская молодежная конференция "Путь в науку. Математика". Ярославль, ЯрГУ им.П.Г.Демидова, 26 апреля - 16 мая 2021 г.

Представленные результаты неоднократно докладывались на семинаре “Нелинейная динамика и синергетика” кафедры математического моделирования Ярославского государственного университета им. П.Г. Демидова.

Результаты диссертационной работы получены при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-31-90133) и Программы развития ЯрГУ на период 2017-2021 гг. (задание ОП-2Г-01-2019).

Публикации и вклад автора. Аналитические результаты получены автором совместно с научным руководителем Кубышкиным Е.П., численные результаты получены лично автором. Кубышкину Е.П. также принадлежит редактирование работ, выполненных совместно.

По теме диссертации опубликовано 5 статей в журналах, индексируемых в Scopus и Web of Science, а также рекомендованных ВАК, и 10 работ в других журналах и тезисов докладов международных конференций.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, 2 глав, заключения и списка цитируемой литературы. Работа изложена на 105 страницах машинописного текста, содержит 34 рисунка. Библиографический раздел содержит 87 наименований.

Глава 1

Исследование нелинейных волн в параболическом уравнении с оператором поворота пространственного аргумента

1.1 Математическая постановка задачи

Для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) + K(1 + \gamma \cos(u_\theta(\rho, \phi, t - T))) \quad (1.1)$$

относительно функции $u(\rho, \phi, t + s)$, заданной в полярных координатах $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ ($R > 0$) и $t \geq 0, -T \leq s \leq 0$ ($T > 0$), в котором $\Delta_{\rho\phi}$ - оператор Лапласа в полярных координатах, $u_\theta(\rho, \phi, t) \equiv u(\rho, (\phi + \theta) \bmod(2\pi), t)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) – оператор поворота пространственного аргумента, D, K – положительные постоянные, $0 < \gamma < 1$, в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^+$, где круг $\bar{K}_R = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$, $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < \infty\}$, рассматривается начально-краевая задача вида

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t),$$

$$u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \quad (1.2)$$

В (1.2) пространство начальных условий $H_0(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \times [-T, 0]), u(\rho, 0, s) = u(\rho, 2\pi, s), u_\phi(\rho, 0, s) = u_\phi(\rho, 2\pi, s)\}$, при каждом s $u(\rho, \phi, s) \in H^2(K_R)\}$, где пространство функций $H^2(K_R) \subset W_2^2(K_R)$ и по-

лучено замыканием множества функций $\{ u(\rho, \phi) : u(\rho, \phi) \in C^2(\bar{K}_R), u_\rho(R, \phi) = 0, u(\rho, 0) = u(\rho, 2\pi), u_\phi(\rho, 0) = u_\phi(\rho, 2\pi) \}$ в метрике пространства функций $W_2^2(K_R)$. В дальнейшем $L_2(K_R)$ – пространство вещественноненулевых определенных в K_R функций $u(\rho, \phi)$, для которых $\|u(\rho, \phi)\|_{L_2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{L_2}^{1/2} < \infty$, $(u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} = \int_{K_R} \rho u(\rho, \phi)v(\rho, \phi)d\rho d\phi$, здесь и в дальнейшем $W_2^2(K_R) \subset L_2(K_R)$, $W_2^2(K_R) = \{u(\rho, \phi) : \|u(\rho, \phi)\|_{W_2^2} = (u(\rho, \phi), u(\rho, \phi))_{W_2^2}^{1/2} < \infty$, $(u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{W_2^2} = (u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{L_2} + (\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi), \Delta_{\rho\phi}v(\rho, \phi))_{L_2}$, $C(\bar{K}_R)$ и $C^2(\bar{K}_R)$ пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых в \bar{K}_R функций, для которых определена норма $\|u(\rho, \phi)\|_C = \max_{\rho, \phi} |u(\rho, \phi)|$, $\|u(\rho, \phi)\|_{C^2} = \|u(\rho, \phi)\|_C + \|\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi)\|_C < \infty$.

Фазовым пространством начально-краевой задачи (1.1)-(1.2) является пространство $H(K_R; -T, 0) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in L_2(K_R) \text{ при каждом } -T \leq s \leq 0, \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2} \in C([-T, 0])\}$, норму в котором определим как $\|u(\rho, \phi, s)\|_H = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{L_2}$. Областью определения правой части уравнения (1.1) является пространство $H_0(K_R; -T, 0)$, Норму в $H_0(K_R; -T, 0)$ определим как $\|u(\rho, \phi, s)\|_{H_0} = \max_s \|u(\rho, \phi, s)\|_{W_2^2}$.

Под решением начально-краевой задачи (1.1)-(1.2), определенным при $t > 0$, будем понимать функцию $u(\rho, \phi, t + s) \in H_0(K_R; -T, 0)$ (при каждом $t > 0$), непрерывно дифференцируемую по t при $t > 0$, обращающую уравнение (1.1) в тождество и удовлетворяющую начальным условиям (1.2).

Решение начально-краевой задачи (1.1)-(1.2) может быть построено методом шагов следующим образом. Решение $u(\rho, \phi, t + s)$ начально-краевой задачи (1.1)-(1.2) построим последовательно на отрезках $t_{k-1} \leq t \leq t_k, t_k = Tk, k = 1, 2, \dots, t_0 = 0$. Значения $u(\rho, \phi, t)$ на указанных отрезках обозначим соответственно через $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$. В результате для определения $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$ получим

рекуррентную последовательность начально-краевых задач вида

$$\begin{aligned} u_t^{(k)} + u^{(k)} - D\Delta_{\rho\phi}u^{(k)} &= K(1 + \gamma \cos(u_\theta^{(k-1)}(\rho, \phi, t - T))) \equiv \\ &\equiv f^{(k)}(\rho, \phi, t) \quad (t_{k-1} \leq t \leq t_k), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$u_\rho^{(k)}(R, \phi, t) = 0, \quad u^{(k)}(\rho, 0, t) = u^{(k)}(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi^{(k)}(\rho, 0, t) = u_\phi^{(k)}(\rho, 2\pi, t), \quad (1.4)$$

$$u^{(k)}(\rho, \phi, t_{k-1}) = u^{(k-1)}(\rho, \phi, t_{k-1}), \quad u^{(1)}(\rho, \phi, 0) = u_0(\rho, \phi, 0), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.5)$$

в которых правая часть уравнений (1.3) и начальные условия (1.5) на каждом шаге вполне определенные функции. Решения (1.3)-(1.5) задаются формулой

$$\begin{aligned} u^{(k)}(\rho, \phi, t) &= \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1) u^{(k-1)}(\rho_1, \phi_1, t_{k-1}) d\rho_1 d\phi_1 + \\ &+ \int_0^t \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t - \tau, \rho_1, \phi_1) f^{(k)}(\rho_1, \phi_1, \tau) d\rho_1 d\phi_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1)$ функция Грина однородной части (при $f^{(k)}(\rho, \phi, t) \equiv 0$) краевой задачи (1.3)-(1.4). Из (1.6) также следует единственность решения начально-краевой задачи (1.1)-(1.2) и его непрерывная зависимость от начальных условий и параметров уравнения, т.е. корректность поставленной начально-краевой задачи, а также нарастание гладкости решения по переменной t при $t \rightarrow \infty$, свойственное решениям уравнений с запаздывающим аргументом.

В работе изучается динамика однородных состояний равновесия (1.1)-(1.2) в зависимости от параметров K, θ, γ, T, D , их устойчивость, а также характер потери устойчивости и бифурцирующие при этом автоколебательные решения.

1.2 Анализ динамики однородных состояний равновесия и их устойчивости

Однородные состояния равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$ начально-краевой задачи (1.1)-(1.2) определяются как решения уравнения

$$u = K(1 + \gamma \cos(u)). \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) в зависимости от K и γ может иметь несколько решений, в том числе кратные. Исследуем условия возникновения состояний равновесия, их устойчивость и механизмы потери устойчивости в зависимости от параметров уравнения (1.1).

Выберем одно из решений $u_* = u_*(K, \gamma)$ уравнения (1.7) и запишем начально-краевую задачу (1.1)-(1.2) в его окрестности, заменив $u(\rho, \phi, t) \rightarrow u_*(K, \gamma) + u(\rho, \phi, t)$. В результате получим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) &= D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu_\theta(\rho, \phi, t - T) + \\ &+ b_2u_\theta^2(\rho, \phi, t - T)/2 + bu_\theta^3(\rho, \phi, t - T)/6 + \dots, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t),$$

$$u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_1(K_R; -T, 0), \quad (1.9)$$

$$b = K\gamma \sin(u_*(K, \gamma)), \quad b_2 = -K\gamma \cos(u_*(K, \gamma)), \quad (1.10)$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие по $u_\theta(\rho, \phi, t - T)$ более высокий порядок малости.

Рассмотрим линейную часть (1.8)-(1.9)

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu_\theta(\rho, \phi, t - T), \quad (1.11)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t),$$

$$u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_1(K_R; -T, 0). \quad (1.12)$$

Определяя решения (1.11)-(1.12) вида $u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi)e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (решения Эйлера) получим пучок операторов

$$P(\lambda)u(\rho, \phi) \equiv \lambda u(\rho, \phi) + u(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho, \phi}u(\rho, \phi) + bu_\theta(\rho, \phi)e^{-\lambda T}, \quad (1.13)$$

действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$, точки спектра которого определяют устойчивость решений начально-краевой задачи (1.11)-(1.12), а соответствующие им собственные функции решения искомого вида. Здесь и в дальнейшем знаком “тильде” будем обозначать комплексное расширение соответствующего функционального пространства, скалярное произведение и норма в котором обобщается стандартным образом. Представим $u(\rho, \phi)$ в виде

$$u(\rho, \phi) = u_0(\rho)v_{00} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_j(\rho, n\phi)v_{nj}, \quad u_0(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}R}, \quad u_j(\rho, n\phi) = \frac{R_{nj}(\rho)e^{in\phi}}{(2\pi)^{1/2}},$$

$$R_{nj}(\rho) = \frac{\sqrt{2}/R J_n(\gamma_{nj}\rho/R)}{(1 - n^2/\gamma_{jn}^2)^{1/2}|J_n(\gamma_{nj})|} \quad (n \geq 0), \quad R_{-nj}(\rho) = R_{nj}(\rho), \quad u_j(\rho, 0) \equiv u_j(\rho),$$

$$(R_{nj}(\rho), R_{np}(\rho)) = \int_0^R \rho R_{nj}(\rho) R_{np}(\rho) d\rho = \delta_{jp}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad v_{00}, v_{0j} \in \mathbb{R}, \quad v_{nj} \in \mathbb{C}, \quad v_{-nj} = \bar{v}_{nj}, \quad (1.14)$$

где $J_n(\rho)$ функции Бесселя первого рода n -го порядка, γ_{nj} j -й положительный ноль функции $J'_n(\rho)$, $\gamma_{00} = 0$, а δ_{jp} – символ Кронекера. Функции $u_j(\rho, n\phi)$, являясь полной системой собственных функций оператора Лапласа, образуют ортогональный базис в $\tilde{H}^2(K_R)$ и ортонормированный в $\tilde{L}_2(K_R)$. Подставим (1.14) в (1.13). В результате получим последовательность уравнений

$$(\lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + be^{in\theta - \lambda T})v_{nj} = 0,$$

из которых ненулевые v_{00}, v_{nj} $n = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots$, могут быть выбиранны лишь при условии

$$P_{nj}(\lambda) \equiv \lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + be^{in\theta - \lambda T} = 0. \quad (1.15)$$

Корни уравнений (1.15) (и комплексно сопряженные им) определяются все множество точек спектра пучка операторов (1.13) и отвечают за устойчивость решений (1.11)-(1.12).

Построим в пространстве параметров K, θ, T, D, γ области устойчивости решений (1.11)-(1.12). Для этого воспользуемся методом D -разбиений [38], в соответствии с которым положим в уравнениях (1.15) $\lambda = i\omega$, $-\infty < \omega < \infty$ и приравняем нулю вещественную и мнимую части каждого уравнения. В результате получим выражения

$$1 + D\gamma_{nj}^2 + b \cos(n\theta - \omega T) = 0, \quad \omega + b \sin(n\theta - \omega T) = 0, \quad (1.16)$$

которые эквивалентны равенствам

$$b = -(1 + D\gamma_{nj}^2) / \cos(n\theta - \omega T), \quad \operatorname{tg}(\theta - \omega T) = \omega / (1 + D\gamma_{nj}^2). \quad (1.17)$$

Выразив теперь из второго равенства (1.17) $n\theta - \omega T$ и подставив в первое, а также разрешив его относительно θ получим последовательность выражений

$$b = b_n(D, \omega) = (-1)^{k+1} (1 + D\gamma_{nj}^2) / \cos(\operatorname{arctg}(\omega / (1 + D\gamma_{nj}^2))), \quad (1.18)$$

$$\theta = \theta_n(D, T, \omega) = (T\omega + \operatorname{arctg}(\omega / (1 + D\gamma_{nj}^2)) + \pi k) / n, \quad (1.19)$$

$n = 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots, 2n, j = 1, 2, \dots$, и

$$b = b_0(D, \omega) = (-1)^{k+1} (1 + D\gamma_{0j}^2) / \cos(\operatorname{arctg}(\omega / (1 + D\gamma_{0j}^2))), \quad (1.20)$$

$$T = T_0(D, \omega) = \omega^{-1}(\pi k - \arctg(\omega/(1 + D\gamma_{0j}^2))),$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, k = 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

Изменяя теперь в (1.18)-(1.19) параметр $-\infty < \omega < \infty$ (при фиксированных других параметрах), получим в области $\{b, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ плоскости (b, θ) семейство кривых, на которых пучек операторов (1.13) имеет точки спектра, принадлежащие мнимой оси комплексной плоскости. Это семейство дополнится прямыми $b = const$, определяемыми выражениями (1.20)-(1.21). Здесь при фиксированном T из равенства (1.21) находим значения ω_{*jk} и подставляем в (1.20). В результате получим искомые значения b . Совокупность таких кривых и прямых позволяет выделить в плоскости (b, θ) (при фиксированных других параметрах) области устойчивости решений начально-краевой задачи (1.11)-(1.12). Однако, нас интересуют области устойчивости состояний равновесия начально-краевой задачи (1.1)-(1.2) в пространстве параметров уравнения (1.1). Выберем в качестве основных параметры K и θ и построим области устойчивости состояний равновесия (1.1)-(1.2) в плоскости этих параметров, считая другие параметры уравнения (1.1) фиксированными.

Рассмотрим выражения

$$K = K(u_*, \gamma) = u_*/(1 + \gamma \cos(u_*)),$$

$$b = b(u_*, \gamma) = \gamma u_* \sin(u_*)/(1 + \gamma \cos(u_*)) \quad (1.22)$$

как функции состояния равновесия $u_* > 0$. Заметим, что

$$dK/du_* = (1 + \gamma u_* \sin(u_*)/(1 + \gamma \cos(u_*)))/(1 + \gamma \cos(u_*)) =$$

$$= (1 + b(u_*, \gamma))/(1 + \gamma \cos(u_*)).$$

Обозначим через $0 < u_{*1}(\gamma) < u_{*2}(\gamma) < \dots < u_{*j}(\gamma) < \dots$ последователь-

ность корней уравнения $b(u_*, \gamma) = -1$ и рассмотрим интервалы $U_j(\gamma) = \{u_* : u_{*j-1}(\gamma) < u_* < u_{*j}(\gamma)\}, j = 1, 2, \dots, u_{*0} = 0$. При $u_* \in U_{2k}(\gamma), k = 1, 2, \dots$, $b(u_*, \gamma) < -1$. В этом случае пучек операторов (1.13) имеет, как следует из (1.15) при $n = 0$, вещественную положительную точку спектра, которой отвечает собственная функция $u_0(\rho)$, т.е. такие состояния равновесия (1.1)-(1.2) всегда неустойчивы, при $u_* \in U_{2k-1}(\gamma), k = 1, 2, \dots, b(u_*, \gamma) > -1$. В этом случае состояния равновесия могут быть как устойчивы, так и неустойчивы, причем неустойчивость может наступить, как следует из первого равенства (1.16), лишь при условии $b(u_*, \gamma) > 1$. В связи с этим в выражении (1.18)–(1.21) в дальнейшем будем рассматривать лишь нечетные значения k . Этот случай и представляет интерес с точки зрения теории бифуркаций. Отметим, что в точках $u_* = u_{*j}(\gamma)$ начально-краевая задача (1.1)–(1.2) имеет кратные состояния равновесия (здесь сливаются и исчезают либо возникают устойчивое и неустойчивое состояния равновесия). Обозначим $K_j(\gamma) = K(u_{*j}(\gamma), \gamma), j = 0, 1, \dots$. На $U_{2k-1}(\gamma), k = 1, 2, \dots$ функция $K(u_*, \gamma)$ монотонно возрастает, а на $U_{2k}(\gamma), k = 1, 2, \dots$ монотонно убывает.

Равенства (1.18) являются четными функциями параметра ω , а (1.19) нечетными функциями параметра ω . При этом (1.18) при нечетных k монотонно возрастают при $\omega \geq 0$. Считая $\omega \geq 0$, выразим из равенства (1.18)

$$\omega = \omega(b) = (1 + D\gamma_{nj}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b)) = \omega(b(u_*, \gamma)) \quad (1.23)$$

и подставим в равенство (1.19), разделив его на два (для $\omega \geq 0$ и $\omega \leq 0$). В результате имеем

$$\begin{aligned} \theta^+ = \theta_n^+(u_*, D, \gamma) &= (T(1 + D\gamma_{nj}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma)))) + \\ &+ \arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma)) + \pi k)/n, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}
\theta^- = \theta_n^-(u_*, D, \gamma) &= (-T(1 + D\gamma_{nj}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma))) - \\
&- \arccos((1 + D\gamma_{nj}^2)/b(u_*, \gamma)) + \pi k)/n, \\
n &= 1, 2, \dots, k = 1, 3, \dots, 2n - 1, j = 1, 2, \dots. \quad (1.25)
\end{aligned}$$

Изменяя теперь $0 \leq u_* < \infty, u_* \in U_{2k-1}(\gamma), k = 1, 2, \dots$, в (1.22), (1.24)–(1.25) при фиксированных значениях T, D, γ, n построим в области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ плоскости (K, θ) кривые, на которых пучек операторов (1.13), построенный для соответствующего состояния равновесия u_* имеет точки спектра, принадлежащие мнимой оси комплексной плоскости. Кроме этого, при $n = 0$ из (1.20)–(1.21) имеем последовательность уравнений

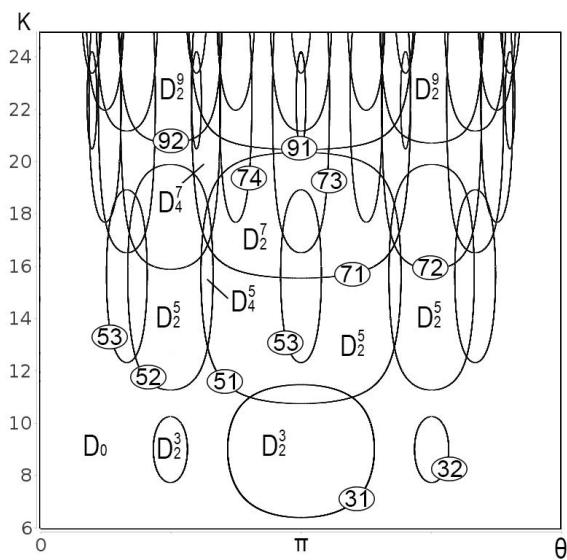
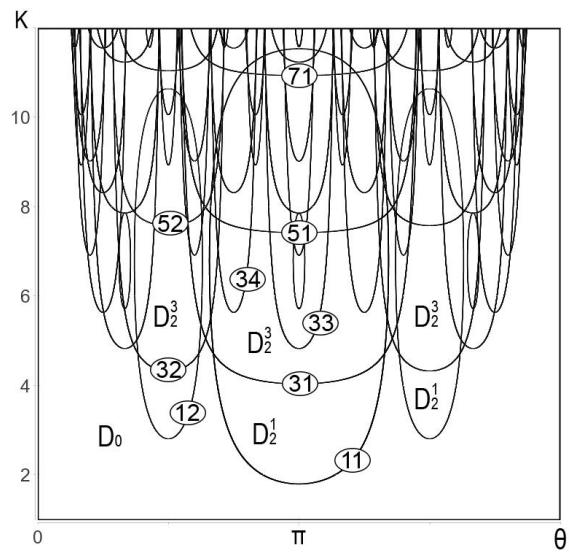
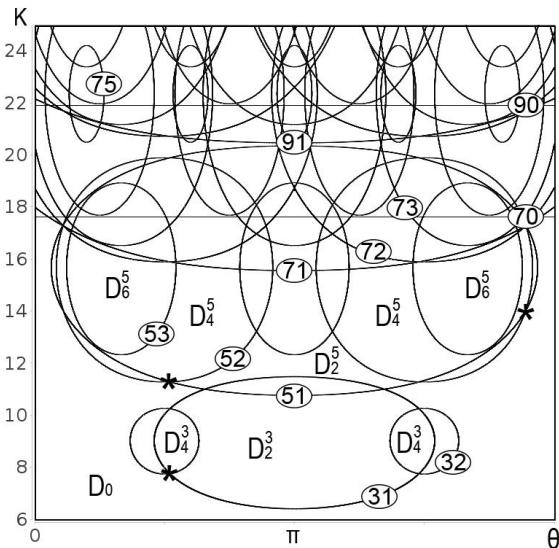
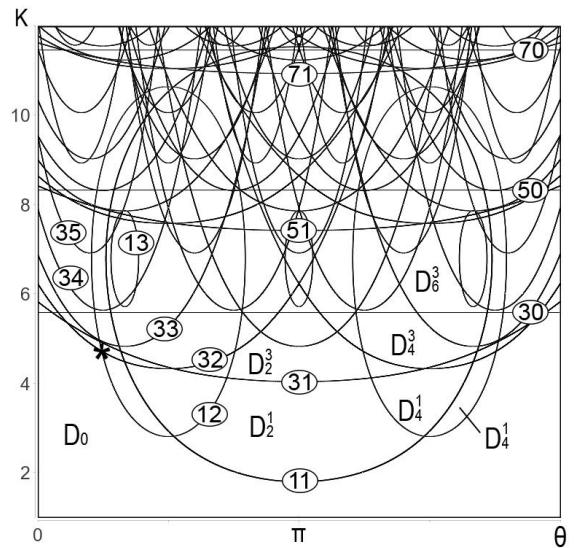
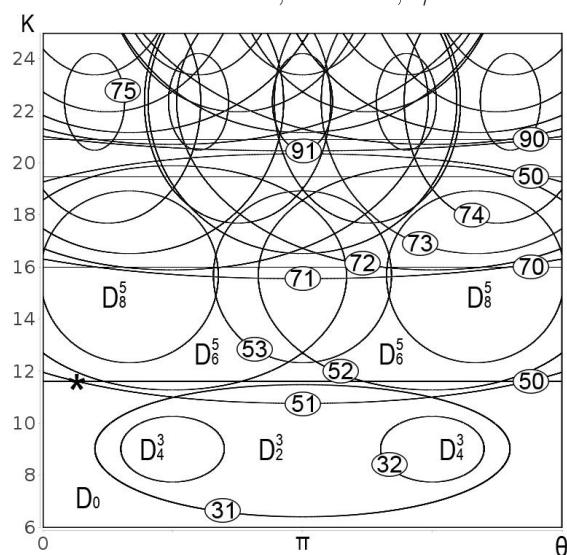
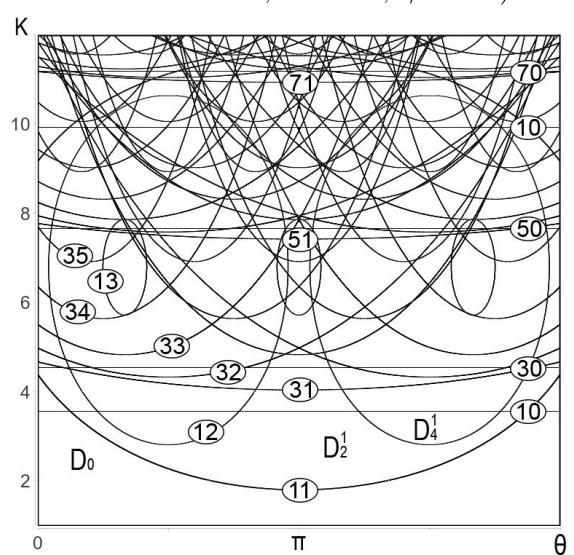
$$\begin{aligned}
T(1 + D\gamma_{0j}^2) \operatorname{tg}(\arccos((1 + D\gamma_{0j}^2)/b(u_*, \gamma))) &= \\
&= (\pi k - \arccos((1 + D\gamma_{0j}^2)/b(u_*, \gamma))), \\
j &= 0, 1, 2, \dots, k = 1, 3, \dots, \quad (1.26)
\end{aligned}$$

положительные нули которых $u_{*kp} \in U_{2k-1}(\gamma), k = 1, 2, \dots$ определяют в области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ последовательность прямых $K = K(u_{*kp}, \gamma)$, на которых пучек операторов (1.13), построенный для состояния равновесия u_{*kp} имеет точки спектра вида $\pm i\omega_*$, $\omega_* > 0$, которым отвечают собственные функции вида $u_j(\rho)$. Для определения направления движения точек спектра (из левой комплексной полуплоскости в правую или наоборот) при пересечении построенных кривых и прямых поступим следующим образом. Пусть (K_*, θ_*) точка кривой или прямой, которая получена при некотором u_* и которой соответствует точка спектра $i\omega_*$, определяемая согласно (1.22), (1.23). Обозначим через $\lambda(K, \theta)$ точку спектра пучка операторов (1.13), удовлетворяющую условию $\lambda(K_*, \theta_*) = i\omega_*$. Вычислим производные $\lambda_K(K_*, \theta_*)$, $\lambda_\theta(K_*, \theta_*)$, воспользовавшись (1.15), (1.22) и теоремой о неявной функции. Направление движения точки спектра определя-

ют величины

$$\begin{aligned}
 Re\lambda_K(K_*, \theta_*) &= (\gamma \sin(u_*) + \\
 &+ u_* \gamma \cos(u_*) / (1 + b(u_*, \gamma))) (\cos(n\theta_* - \omega_* T) - b(u_*, \gamma)T) / \Delta, \\
 Re\lambda_\theta(K_*, \theta_*) &= nb(u_*, \gamma) \sin(n\theta_* - \omega_* T) / \Delta, \\
 \Delta &= 1 - 2b(u_*, \gamma)T \cos(n\theta_* - \omega_* T) + b^2(u_*, \gamma)T^2, \quad (1.27)
 \end{aligned}$$

Таким образом построим картину D -разбиений области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ и получим границы областей устойчивости различных состояний равновесия начально-краевой задачи (1.1)–(1.2), а также изучим характер потери устойчивости соответствующих состояний равновесия. При этом принято через D_j обозначается область, при значении параметров из которой пучек операторов (1.13) имеет j точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости.

Рис. 1.1 $D = 0.1, T = 0, \gamma = 0.25$ Рис. 1.2 $D = 0.1, T = 0, \gamma = 0.75$ Рис. 1.3 $D = 0.1, T = 0.5, \gamma = 0.25$ Рис. 1.4 $D = 0.1, T = 0.5, \gamma = 0.75$ Рис. 1.5 $D = 0.1, T = 1, \gamma = 0.25$ Рис. 1.6 $D = 0.1, T = 1, \gamma = 0.75$

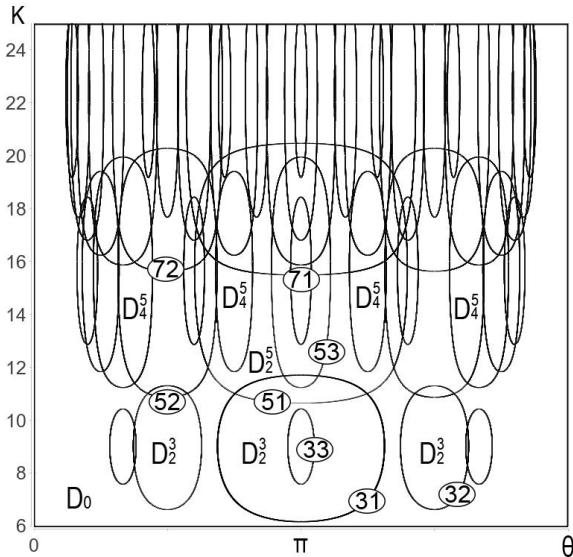


Рис. 1.7 $D = 0.05, T = 0, \gamma=0.25$

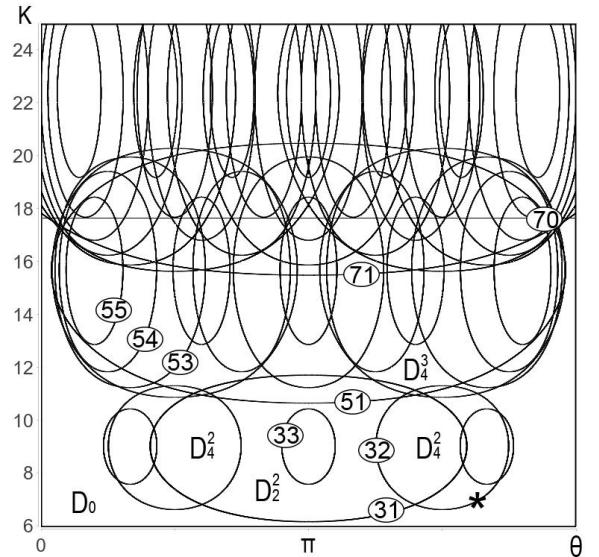


Рис. 1.8 $D = 0.05, T = 0.5, \gamma=0.25$

На рис. 1–8 для различных значений параметров T, D, γ приведены картины D -разбиений области $\{K > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. Каждая замкнутая кривая, форма которой похожа на эллипс, представляет собой совокупность точек рассматриваемой области, на которых пучек операторов (1.13) имеет точки спектра вида $\pm i\omega_*$. При этом, при изменении параметров K, θ внутрь области, ограниченной замкнутой кривой, указанные точки спектра переходят в правую комплексную полуплоскость, и наоборот. Отметим, что некоторые замкнутые кривые представлены на фигурах лишь своей частью в силу ограничений на K и θ . Каждая замкнутая кривая имеет маркер из двух индексов, первый из которых характеризует область $U_k(\gamma)$, к которой относится исследуемое состояние равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$, второй индекс характеризует номер n , фигурирующий в определяющих замкнутую кривую функциях (1.22) – (1.25) и являющийся индексом собственных функций пучка операторов (1.13), соответствующих точкам спектра $\pm i\omega_*$. На приведенных фигурах маркеры проставлены не на всех кривых в силу их плотности. Через D_j^p обозначены области (области неустойчивости), при значениях параметров из которых пучек операторов (1.13), построенный по состоянию равновесия $u_* = u_*(K, \gamma) \in U_p(\gamma)$ имеет j точек спектра,

принадлежащих правой открытой комплексной полуплоскости. Областью D_0 обозначена область, при значении параметров из которой устойчивы все имеющиеся состояния равновесия $u_* \in U_p(\gamma), k = 1, 3, \dots$. Из рис. 1,3.7 видно, что при $T = 0$ и малых θ (близких к 2π) области D_0 принадлежат точки, имеющие большие значения K . Применительно к начально-краевой задаче (1.1)–(1.2) это означает, что при малых θ или близких к 2π бифуркация пространственно неоднородных автоколебательных решений возможна при достаточно больших значения K . При увеличении T область D_0 уменьшается, а области неустойчивости D_j^p увеличиваются в размерах. При этом появляются дополнительные области неустойчивости, обусловленные потерей устойчивости однородными состояниями равновесия по собственным функциям $u_j(\rho), j = 0, 1, \dots$, т.е. не зависящим от n , чего нет при $T = 0$. На фигурах эти области определяются горизонтальными прямыми. Эти прямые появляются парами при некоторых значения K_{*j} , зависящих от T, D, γ . При увеличении T эти прямые расходятся - одна идет вверх, другая вниз, образуя область неустойчивости. При этом сначала потеря устойчивости происходит по собственной функции $u_0(\rho)$, т.е. не зависящей от ρ . Отметим, что при больших значениях T потеря устойчивости однородными состояниями равновесия возможна лишь по собственной функции $u_0(\rho)$. При уменьшении параметра D происходит увеличение количества областей неустойчивости (рис. 7,8). Из приведенных фигур видно, что потеря устойчивости однородным состоянием равновесия $u_* = u_*(K, \gamma)$ может происходить с одновременным прохождением двух пар комплексно сопряженных точек спектра пучка операторов (1.13) через мнимую ось комплексной плоскости (точки, отмеченные на рис. 3 знаком *). При этом одна из собственных функций может быть $u_0(\rho)$ (точка * на рис. 5). Возможна одновременная потеря устойчивости двумя состояниями равновесия (точка отмечена * на рис. 4). При уменьшении D таких состояний равновесия может быть больше.

1.3 Бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи (1.1)–(1.2)

Изучим возможные бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи (1.1)–(1.2) из однородных состояний равновесия, обусловленные потерей их устойчивости. Воспользуемся для этого методом инвариантных (центральных) многообразий распределенных динамических систем [28, 35, 60, 61] и теорией нормальных форм нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности состояний равновесия [?]. При фиксированных T, D, γ выберем параметры K_*, θ_* таким образом, чтобы они соответствовали точке границы области устойчивости состояния равновесия u_* начально-краевой задачи (1.1)–(1.2) и при этом пучок операторов (1.13) имел одну пару комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_*$, где $\omega_* > 0$ определяется согласно (1.23). Пусть для определенности точка спектра $\lambda = i\omega_*$ удовлетворяет уравнению (1.15) при некотором $n > 0$. Это означает, что точка K_*, θ_* удовлетворяет уравнению (1.24) и находится на правой ветви замкнутой кривой, определяющей границу области устойчивости, имеющей минимум в точке $\theta = \pi/n$. Это может быть, например, точка, отмеченная * на фиг 8. Отметим, что на левой ветви упомянутой замкнутой кривой точка K_*, θ_* будет находиться, если выбранные параметры удовлетворяют уравнению (1.24) при $\lambda = -i\omega_*$ и $n > 0$.

Положим $K = K_* + \varepsilon$, где ε – малый параметр, и исследуем возможность бифуркации из состояния равновесия

$$u_*(\varepsilon) = u_* + \varepsilon u_{*1} + \dots, \quad u_{*1} = u_*/(K_*(1 + b(u_*, \gamma))) \quad (1.28)$$

пространственно-неоднородных решений при изменении параметра ε . Здесь и ниже многоточием будем обозначать слугаемые, имеющие более высокий порядок.

док малости по параметру ε . Отметим, что теперь в (1.8),(1.11),(1.13),(1.15)

$$\begin{aligned} b = b(\varepsilon) &= b(u_*, \gamma) + \varepsilon b_1(u_*, \gamma) + \dots, \quad b_1(u_*, \gamma) = \\ &= \gamma \sin(u_*) + u_* \gamma \cos(u_*) / (1 + b(u_*, \gamma)), \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$b_2 = b_2(\varepsilon) = -(K_* + \varepsilon) \gamma \cos(u_*(\varepsilon)), \quad (1.30)$$

соответственно в дальнейшем будем использовать обозначение пучка операторов (1.13) $P(\lambda; \varepsilon)$ и уравнений (1.15) $P_{nj}(\lambda; \varepsilon)$.

Обозначим через $\lambda(\varepsilon), \bar{\lambda}(\varepsilon)$ точки спектра пучка операторов $P(\lambda; \varepsilon)$, удовлетворяющие условию $\lambda(0) = i\omega_*$. Им будут соответствовать собственные функции $u_1(\rho, n\phi)$, $\bar{u}_1(\rho, n\phi)$. $\lambda(\varepsilon)$ аналитически зависит от ε и

$$\begin{aligned} \lambda(\varepsilon) &= \chi(\varepsilon) + i(\omega_* + \sigma(\varepsilon)) = i\omega_* + \varepsilon\lambda_1 + \dots = i\omega_* + \varepsilon(\chi_1 + i\sigma_1) + \dots, \\ \lambda_1 &= -b_1(u_*, \gamma) e^{i(n\theta_* - \omega_* T)} / (1 - b(u_*, \gamma) T e^{i(n\theta_* - \omega_* T)}). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Рассмотрим присоединенную к (1.11)-(1.12) (формально сопряженную с [62] (1.11)-(1.12)) начально-краевую задачу

$$v_t(\rho, \phi, t) - v(\rho, \phi, t) = -D\Delta_{\rho\phi}v(\rho, \phi, t) + bv_{-\theta}(\rho, \phi, t + T), \quad (1.32)$$

$$v_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad v(\rho, 0, t) = v(\rho, 2\pi, t), \quad v_\phi(\rho, 0, t) = v_\phi(\rho, 2\pi, t),$$

$$v(\rho, \phi, s) = v_0(\rho, \phi, s) \in H_1(K_R; 0, T). \quad (1.33)$$

относительно функции $v(\rho, \phi, t + s)$ в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^-$, где $\mathbb{R}^- = \{t : -\infty < t \leq 0\}$, $0 \leq s \leq T$ ($T > 0$), $v_{-\theta}(\rho, \phi, t) \equiv v(\rho, (\phi - \theta) \text{mod}(2\pi), t)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$).

Фазовым пространством начально-краевой задачи (1.32)-(1.33) является пространство $H(K_R; 0, T) = \{v(\rho, \phi, s) : v(\rho, \phi, s) \in L_2(K_R) \text{ при каждом } 0 \leq s \leq T, \|v(\rho, \phi, s)\|_{L_2} \in C([0, T])\}$, областью определения правой части уравнения (1.32) является пространство

$H_0(K_R; 0, T) = \{v(\rho, \phi, s) : v(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \times [0, T]), v(\rho, 0, s) = v(\rho, 2\pi, s), v_\phi(\rho, 0, s) = v_\phi(\rho, 2\pi, s), \text{ при каждом } s, v(\rho, \phi, s) \in H^2(K_R)\}$. Нормы в указанных пространствах вводятся по аналогии с $H(K_R; -T, 0)$, $H_0(K_R; -T, 0)$. Начально-краевая задача (1.32)-(1.33) корректно поставлена (и разрешима) в сторону убывания t .

Между элементами пространств $u(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0)$ и $v(\rho, \phi, s) \in H(K_R; 0, T)$ введем скалярное произведение

$$\begin{aligned} & \langle u(\rho, \phi, s), v(\rho, \phi, s) \rangle = \\ & = (u(\rho, \phi, 0), v(\rho, \phi, 0))_{L_2} - b \int_{-T}^0 (u_\theta(\rho, \phi, \xi), v(\rho, \phi, \xi + T))_{L_2} d\xi. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Решения (1.11)-(1.12) и (1.32)-(1.33) связаны между собой следующим образом. Обозначим через $u(\rho, \phi, t + s)$ и $v(\rho, \phi, t + s)$ решения (1.11)-(1.12) и (1.32)-(1.33) соответственно, определенные при $t > \tau_1$, $u(\rho, \phi, \tau_1 + s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$ и $t < \tau_2$, $v(\rho, \phi, \tau_2 + s) = v_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; 0, T)$, и пусть при этом $\tau_1 < \tau_2$. Тогда при $\tau_1 < t < \tau_2$ справедливо равенство

$$\langle u(\rho, \phi, t + s), v(\rho, \phi, t + s) \rangle = c \quad (c = const), \quad (1.35)$$

которое легко доказывается дифференцированием по t . В частности, для решений $u(\rho, \phi, t + s)$ и $v(\rho, \phi, t + s)$, определенных при $-\infty < t < \infty$, равенства (1.35) выполнены при всех t .

Определяя теперь решения (1.32)-(1.33) вида $v(\rho, \phi, t) = v(\rho, \phi)e^{pt}$, $p \in \mathbb{C}$ получим характеристический пучок операторов

$$Q(p)v(\rho, \phi) \equiv pv(\rho, \phi) - v(\rho, \phi) + D\Delta_{\rho, \phi}v(\rho, \phi) - bv_{-\theta}(\rho, \phi)e^{pT}, \quad (1.36)$$

действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$. Точки спектра (1.36) и точки спектра (1.13) могут быть упорядочены таким образом, что будут вы-

полнены соотношения $p_j = -\bar{\lambda}_j, j = 1, 2, \dots$. Таким образом, пучек операторов $Q(p; \varepsilon)$ имеет пару комплексно сопряженных точек спектра $p(\varepsilon) = -\bar{\lambda}(\varepsilon), \bar{p}(\varepsilon)$, которым отвечают собственные функции $v_1(\rho, n\phi) = R_{n1}(\rho)e^{-in\phi}/(2\pi)^{1/2}$, $\bar{v}_1(\rho, n\phi)$.

Введем в рассмотрение функции

$$e_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = u_1(\rho, n\phi)e^{\lambda(\varepsilon)s}, \quad \bar{e}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \in \tilde{H}_0(K_R; -T, 0) \quad (1.37)$$

$$h_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = u_1(\rho, n\phi)e^{p(\varepsilon)s}/P'_{-n1}(-p(\varepsilon); \varepsilon), \quad \bar{h}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \in \tilde{H}_0(K_R; 0, T),$$

$$\langle e_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon), h_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \rangle = 1, \quad \langle e_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \bar{h}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \rangle = 0.$$

Обозначим через $H_+(\varepsilon)$ линейную оболочку функций (1.37) т.е. множество функций вида

$$u_+(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = e_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon)z + \bar{e}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon)\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (1.38)$$

а через $H_-(\varepsilon)$ множество функций $u_-(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$, для которых $\langle u_-(\rho, \phi, s), h_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \rangle = 0, \langle u_-(\rho, \phi, s), \bar{h}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \rangle = 0$.

Очевидно $H_+(\varepsilon) \oplus H_-(\varepsilon) = H_0(K_R, -T, 0)$. $H_+(\varepsilon)$ определяет двумерное пространство решений $u_+(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ начально-краевой задачи (1.11)-(1.12) вида (1.38), в котором $z = z(t)$ решение уравнения

$$\dot{z} = \lambda(\varepsilon)z. \quad (1.39)$$

Обозначим через $S_{u_*}(R) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0), \|u(\rho, \phi, s) - u_*\|_{H_0} < R\}$ -шар радиуса R с центром в $u_* = u_*(K, \gamma)$ пространства $H_0(K_R; -T, 0)$. В случае $u_* = 0$ будем использовать обозначение $S(R) = S_0(R)$. В дальнейшем $S_\pm(R; \varepsilon) = S(R) \cap H_\pm(\varepsilon)$.

Множество $M(\varepsilon) \subset S(R)$ будем называть инвариантным многообразием

начально-краевой задачи (1.8)–(1.9), если для ее решений $u(\rho, \phi, t+s)$ с начальными условиями $u(\rho, \phi, t_0 + s) \in M(\varepsilon)$ при некотором t_0 следует, что $u(\rho, \phi, t + s) \in M(\varepsilon)$ при всех $t > t_0$ пока $u(\rho, \phi, t + s) \in S(R)$.

Результаты работы [28] и монографий [35, 61] применительно к начально-краевой задаче (1.8)–(1.9) позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1. *Существует такие $\varepsilon_0 > 0$ и $R > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ начально-краевая задача (1.8)–(1.9) имеет инвариантное многообразие $M(\varepsilon) \subset S(R)$, которое может быть представлено в виде*

$$u_- = G(u_+; \varepsilon), \quad u_\pm \in S_\pm(R; \varepsilon), \quad (1.40)$$

где нелинейный оператор $G(u_+; \varepsilon)$ ($G(0; \varepsilon) \equiv 0$) действует из $S_+(R; \varepsilon) \bigoplus [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ в $S_-(R; \varepsilon)$ и гладко зависит от входящих переменных (в смысле дифференцирования по Фреше).

Обозначим через $d(u(\rho, \phi, s); \varepsilon)$ расстояние от точки $u(\rho, \phi, s) \in S(R)$ до множества $M(\varepsilon)$ в метрике пространства $H_0(K_R; -T, 0)$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $u_0(\rho, \phi, s) \in S(R)$ начальное условие решения $u(\rho, \phi, t+s; \varepsilon)$ начально-краевой задачи (1.8)–(1.9) ($u(\rho, \phi, s; \varepsilon) = u_0(\rho, \phi, s)$). Тогда $t > 0$*

$$d(u(\rho, \phi, t+s; \varepsilon); \varepsilon) < K d(u_0(\rho, \phi, s), \varepsilon) e^{-\alpha t}, \quad (1.41)$$

где $K, \alpha > 0$ некоторые постоянные.

Таким образом, поведение решений начально-краевой задачи (1.8)–(1.9) с начальными условиями из $S(R)$ полностью определяется поведением решений на инвариантном многообразии $M(\varepsilon)$, которое может быть описано поведением решений некоторой двумерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Многообразие $M(\varepsilon)$ следуя [?, 61], будем называть центральным многообразием начально-краевой задачи (1.8)–(1.9).

На основании представления (1.38) оператор $G(u_+; \varepsilon)$ будем рассматривать как оператор $G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon)$ ($G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv G(\rho, n\phi + 2\pi, s, z, \bar{z}; \varepsilon)$, $G(\rho, n\phi, s, 0, 0; \varepsilon) \equiv 0$), действующий из $\mathbb{C}^2 \bigoplus [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ в $S_+(R)$ и гладко зависящий от входящих переменных. С учетом этого и (1.39) представим оператор $G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon)$ и систему дифференциальных уравнений траекторий на $M(\varepsilon)$ в виде разложений

$$\begin{aligned} G(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon) = & e_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon)z + \bar{e}_1(\rho, n\phi, s; \varepsilon)\bar{z} + v_{20}(.)z^2 + v_{11}(.)z\bar{z} + v_{02}(.)\bar{z}^2 + \\ & + v_{30}(.)z^3 + v_{21}(.)z^2\bar{z} + v_{12}(.)z\bar{z}^2 + v_{03}(.)\bar{z}^3 + g(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon), \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\dot{z} = \lambda(\varepsilon)z + d(\varepsilon)z^2\bar{z} + Z(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv Z^*(z, \bar{z}; \varepsilon), \quad (1.43)$$

где $v_{kj}(.) = v_{kj}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$, $v_{jk} = \bar{v}_{kj}(.)$, $\|g(\rho, n\phi, s, z, \bar{z}; \varepsilon)\|_{H_1} = o(|z|^3)$, $|Z(z, \bar{z}; \varepsilon)| = o(|z|^3)$. Система (1.43) представлена в нормализованном до кубических слагаемых виде [?].

Отметим следующее. Пусть $u^*(\rho, \phi, t+s; \varepsilon)$ решение начально-краевой задачи (1.8)–(1.9). Продолжим его периодически по ϕ на \mathbb{R} . Функция $u^*(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon)$, где c произвольное вещественное число, также является решением (1.8)–(1.9), в чем легко убедиться непосредственно, обозначив $\phi_1 = \phi + c$ и с учетом равенства $\Delta_{\rho, \phi} u^* = \Delta_{\rho, \phi_1} u^*$. При этом, если $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon) \in M(\varepsilon)$, то $u^*(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon) \in M(\varepsilon)$, т.к. согласно (1.14), (1.37), (1.38) $u_+^*(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon) \in H_+(\varepsilon)$, где $u_+^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ проекция $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ на $H_+(\varepsilon)$ по направлению $H_-(\varepsilon)$. Следствием этого являются справедливые для любого вещественного c тождества

$$\begin{aligned} g(\rho, n(\phi + c), s, z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv & g(\rho, n\phi, s, ze^{inc}, \bar{z}e^{-inc}; \varepsilon), \quad Z(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv zZ_1(z, \bar{z}; \varepsilon), \\ Z_1(ze^{inc}, \bar{z}e^{-inc}; \varepsilon) \equiv & Z_1(z, \bar{z}; \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Для построения центрального многообразия и системы дифференциальных

уравнений траекторий на нем воспользуемся подходом, используемым в работах [71, 72]. Отметим, что близкая к указанному подходу схема построения уравнений траекторий на центральном многообразии для дифференциально-разностных уравнений приведена в [61]. В соответствии со сказанным перейдем от (1.8)–(1.9) к эквивалентной начально-краевой задаче в области $\bar{K}_R \times [-T, 0] \times \mathbb{R}^+$, положив $w(\rho, \phi, s, t) = u(\rho, \phi, t + s)$,

$$w_t(\rho, \phi, s, t) = w_s(\rho, \phi, s, t), \quad (1.45)$$

$$w_s(\rho, \phi, 0, t) = -w(\rho, \phi, 0, t) + D\Delta_{\rho\phi}w(\rho, \phi, 0, t) - b(\varepsilon)w_{\theta_*}(\rho, \phi, -T, t) +$$

$$+ b_2(\varepsilon)w_{\theta_*}^2(\rho, \phi, -T, t) + b(\varepsilon)w_{\theta_*}^3(\rho, \phi, -T, t)/6 + \dots,$$

$$w_\rho(R, \phi, s, t) = 0, \quad w(\rho, 0, s, t) = w(\rho, 2\pi, s, t), \quad w_\phi(\rho, 0, s, t) = w_\phi(\rho, 2\pi, s, t),$$

$$w(\rho, \phi, s, 0) = w_0(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0). \quad (1.46)$$

Условие принадлежности траекторий (1.43) краевой задаче (1.45)–(1.46) в силу многообразия (1.42) определяет тождества

$$\frac{dG(\cdot)}{dt} \equiv \frac{\partial G(\cdot)}{\partial z} Z^*(z, \bar{z}; \varepsilon) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \bar{z}} \bar{Z}^*(z, \bar{z}; \varepsilon) \equiv \frac{\partial G(\cdot)}{\partial s}, \quad (1.47)$$

$$\begin{aligned} G_s(\rho, n\phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) &\equiv \\ &\equiv -G(\rho, n\phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}G(\rho, n\phi, 0, z, \bar{z}; \varepsilon) - b(\varepsilon)G_\theta(\rho, n\phi, -T, z, \bar{z}; \varepsilon) + \\ &+ b_2(\varepsilon)G_\theta(\rho, n\phi, -T, z, \bar{z}; \varepsilon)^2/2 + b(\varepsilon)G_\theta(\rho, n\phi, -T, z, \bar{z}; \varepsilon)^3/6 + \dots, \end{aligned} \quad (1.48)$$

для определения коэффициентов разложений (1.42)–(1.43).

Приравнивая в (1.47)–(1.48) коэффициенты при одинаковых степенях z, \bar{z} получим рекуррентную последовательность краевых задач для определения входящих в (1.42)–(1.43) функций $v_{jk}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \in \tilde{H}_0(K_R; -T, 0)$ и $d(\varepsilon)$, гладко за-

висящих от ε . При первых степенях равенства выполнены в силу (1.38)–(1.39). Приравняв коэффициенты при z^2 , получим для определения $v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$ краевую задачу

$$\begin{aligned} 2\lambda(\varepsilon)v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) &= v_{20s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \\ v_{20s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) &= -v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) - \\ &- b(\varepsilon)v_{20\theta_*}(\rho, n\phi, -T; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)e^{i2n\theta_* - 2\lambda(\varepsilon)T}R_{n1}^2(\rho)e^{i2n\phi}/(4\pi), \end{aligned} \quad (1.49)$$

которая имеет единственное решение

$$v_{20}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = w_{20}(\rho; \varepsilon)e^{i2n\phi + 2\lambda(\varepsilon)s}/(2\pi), \quad w_{20}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{2nj}(\varepsilon)R_{2nj}(\rho),$$

$$\begin{aligned} p_{2nj}(\varepsilon) &= \\ &= b_2(\varepsilon)e^{i2n\theta_* - 2\lambda(\varepsilon)T}(R_{n1}^2(\rho), R_{2nj}(\rho))/(2\lambda(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{2nj}^2 + b(\varepsilon)e^{i2n\theta_* - 2\lambda(\varepsilon)T})/2. \end{aligned}$$

Аналогично для определения $v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$ имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) &= v_{11s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \\ v_{11s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) &= -v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) - \\ &- b(\varepsilon)v_{11\theta_*}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)e^{-(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T}R_{n1}^2(\rho)/(2\pi), \end{aligned} \quad (1.50)$$

единственное решение которой имеет вид

$$v_{11}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) \equiv w_{11}(\rho; \varepsilon)e^{(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))s}/(2\pi) \quad w_{11}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\varepsilon)R_{0j}(\rho),$$

$$p_{0j}(\varepsilon) = b_2(\varepsilon)e^{-(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}(R_{n1}^2(\rho), R_{0j}(\rho))/(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{0j}^2 + b(\varepsilon)e^{-(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T}).$$

С учетом равенства $v_{02}(\rho, n\phi; \varepsilon) = \bar{v}_{20}(\rho, n\phi; \varepsilon)$, приравняем теперь в (1.47)–(1.48) коэффициенты при z^3 . В результате получим для определения $v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon)$ краевую задачу

$$\begin{aligned} 3\lambda(\varepsilon)v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) &= v_{30s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \\ v_{30s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) &= -v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) - \\ &\quad - b(\varepsilon)v_{30\theta_*}(\rho, n\phi, -T; \varepsilon) + (b_2(\varepsilon)w_{20}(\rho; \varepsilon)R_{n1}(\rho) + \\ &\quad + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/6)e^{i3n\theta_* - 3\lambda(\varepsilon)T}e^{i3n\phi}/(2\pi)^{3/2}, \end{aligned} \quad (1.51)$$

которая имеет единственное решение

$$\begin{aligned} v_{30}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) &= w_{30}(\rho; \varepsilon)e^{i3n\phi + 3\lambda(\varepsilon)s}/(2\pi)^{3/2}, \\ w_{30}(\rho; \varepsilon) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{3nj}(\varepsilon)R_{3nj}(\rho), \quad p_{3nj}(\varepsilon) = \\ &= e^{i3n\theta_* - 3\lambda(\varepsilon)T}(b_2(\varepsilon)w_{20}(\rho; \varepsilon)R_{n1}(\rho) + \\ &\quad + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/6, R_{3nj}(\rho))/(3\lambda(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{3nj}^2 + b(\varepsilon)e^{i3n\theta_* - 3\lambda(\varepsilon)T}). \end{aligned}$$

Приравняв теперь в (1.47)–(1.48) коэффициенты при $z^2\bar{z}$, получим краевую задачу вида

$$e_1(\rho, n\phi, s)d(\varepsilon) + (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))v_{21}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = v_{21s}(\rho, n\phi, s; \varepsilon), \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned}
v_{21s}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) = & -v_{21}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{21}(\rho, n\phi, 0; \varepsilon) - \\
& - b(\varepsilon)v_{21\theta_*}(\rho, n\phi, -T; \varepsilon) + (b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + \\
& + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{in\theta_* - (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T}e^{in\phi}/(2\pi)^{3/2}. \quad (1.53)
\end{aligned}$$

При $d(\varepsilon) \equiv 0$ краевая задача (1.52)–(1.53) не разрешима в точке $\varepsilon = 0$. Разрешимости добиваемся выбором $d(\varepsilon)$. Общее решение уравнения (1.52) имеет вид

$$\begin{aligned}
v_{21}(\rho, n\phi, s; \varepsilon) = & e^{(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))s}(w_{21}(\rho)e^{in\phi}/(2\pi)^{3/2} + \\
& + d(\varepsilon)\int_0^s e^{(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))s_1}e_{n1}(\rho, \phi, s_1)ds_1), \quad (1.54)
\end{aligned}$$

где $w_{21}(\rho)e^{in\phi}/(2\pi)^{3/2} \in \tilde{H}_1(K_R)$ произвольная функция. Подставив (1.54) в (1.53), получим

$$\begin{aligned}
L(\varepsilon)w_{21} \equiv & (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))w_{21} + w_{21} - \\
& - D\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dw_{21}}{d\rho}\right) + \frac{n^2}{\rho^2}w_{21} - b(\varepsilon)e^{in\theta_* - (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T}w_{21} = \\
= & f_{21}(\rho; \varepsilon) \equiv -R_{n1}(\rho)(1 + b(\varepsilon)e^{in\theta_* - (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T}(1 - e^{(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T})/ \\
& /(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon)))d(\varepsilon)2\pi + \\
& + (b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{in\theta_* - (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T}. \quad (1.55)
\end{aligned}$$

Краевая задача (1.55) разрешима не всегда, т.к. $L(0)R_{n1}(\rho) = 0$, а также $L^*(0)R_{n1}(\rho) = 0$, где $L^*(0)$ сопряженный с $L(0)$ в смысле скалярного произведения (1.14) оператор. Необходимым и достаточным условием разрешимости

мости является равенство $(f_{21}(\rho; \varepsilon), R_{n1}(\rho)) = 0$, из которого находим

$$\begin{aligned} d(\varepsilon) = a(\varepsilon) + ic(\varepsilon) &= e^{in\theta_* - (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T} ((b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + \\ &+ b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2), R_{n1}(\rho))/ \\ &/ (1 + b(\varepsilon)e^{in\theta_* - (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T} (1 - e^{(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T}) / (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))) / (2\pi). \quad (1.56) \end{aligned}$$

и решение

$$\begin{aligned} w_{21}(\rho; \varepsilon) &= \sum_{j=2}^{\infty} p_{nj}(\varepsilon) R_{nj}(\rho), \\ p_{nj}(\varepsilon) &= ((b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; \varepsilon) + w_{11}(\rho; \varepsilon))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2)e^{in\theta_* - (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T}, \\ &R_{nj}(\rho)) / (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + 1 + D\gamma_{nj}^2 + b(\varepsilon)e^{in\theta_* - (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T}), \end{aligned}$$

которое определяется однозначно и удовлетворяет условию $(w_{21}(\rho; \varepsilon), R_{n1}(\rho)) = 0$.

Проанализируем поведение решений уравнения (1.43). Для выбранной точки (K_*, θ_*) значение $\pi/n < \theta_* < 3\pi/(2n)$. Поэтому $\cos(n\theta_*) < 0$. Знак $b_1(u_*, \gamma)$ в (1.32), (1.31) определяется знаком производной $b_{u_*}(u_*, \gamma)$. Поэтому $b_1(u_*, \gamma) > 0$ на нижней части правой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости решений (1.11), (1.12) (области D_0), $b_1(u_*, \gamma) < 0$ на верхней части правой ветви замкнутой кривой границы области D_0 . Аналогичный знак имеет величина χ_1 в (1.31). Численный анализ, выполненный для различных значений параметров D, T, γ показал, что в точках K_*, θ_* границы области устойчивости решений (1.11)–(1.12) $a(0) < 0$. Поэтому при прохождении нижней части правой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости в сторону увеличения параметра K ($\varepsilon > 0$) в уравнении (1.43) происходит рождение устойчивого периодического решения (прямая бифуркация Андронова-Хопфа). Положим в

(1.43) $z = re^{i\tau}$. В результате с учетом (1.44) будем иметь систему уравнений

$$\dot{r} = r(\chi(\varepsilon) + a(\varepsilon)r^2 + R(r^2; \varepsilon)), \quad \dot{\tau} = \omega_* + \sigma(\varepsilon) + c(\varepsilon)r^2 + T(r^2; \varepsilon), \quad (1.57)$$

где $Z_1(re^{i\tau}, re^{-i\tau}; \varepsilon) \equiv Z_1(r, r; \varepsilon) \equiv Z_1(r^2; \varepsilon) \equiv R(r^2; \varepsilon) + iT(r^2; \varepsilon)$, $|Z_1(r^2; \varepsilon)| = o(r^2)$ - гладкие по r^2 и ε функции. Из первого уравнения (1.57) находим асимптотически устойчивое состояние равновесия $r^2(\varepsilon) = r_*^2\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ($r_*^2 = -\chi_1/a(0)$) и подставим во второе уравнение. В результате имеем асимптотически орбитально устойчивое периодическое решение уравнения (1.43)

$$z_*(t; \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}r_*(1+O(\varepsilon))e^{i\tau}, \quad \dot{\tau} = \omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon) = \omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + O(\varepsilon^2) \quad (\omega_{*1} = \sigma_1 + c(0)r_*^2) \quad (1.58)$$

периода $2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$.

На верхней части правой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости бифуркация рождения устойчивого периодического решения происходит при уменьшении параметра K ($\varepsilon < 0$), т.е. при переходе из области неустойчивости в область устойчивости (при увеличении K происходит “влипание” устойчивого периодического решения в неустойчивое состояние равновесия (обратная бифуркация Андронова-Хопфа). Аналогичная ситуация наблюдается и при прохождении левой ветви замкнутой кривой границы области устойчивости решений (1.11), (1.12). В этом случае уравнению (1.15) при выбранных K_*, θ_*, n удовлетворяет корень $\lambda = -i\omega_*, \omega_* > 0$.

Подставив (1.58) в (1.42), получим периодическое решение $w_*(\rho, n\phi, s, \tau; \varepsilon^{1/2})$ начально-краевой задачи (1.45)–(1.46), которое с учетом (1.44) может быть записано в виде $w_*(\rho, n\phi + \tau, s; \varepsilon^{1/2})$, а согласно (1.45) в виде $u_*(\rho, n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t+s); \varepsilon^{1/2})$. Покажем, что это решение может быть представлено в виде сходящегося ряда по степеням $\varepsilon^{1/2}$. Выпишем в явном виде с учетом (1.42), (1.45),

(1.58) коэффициенты разложения $u_*(.)$ при $\varepsilon^{1/2}$ и ε . В результате имеем

$$u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2} r_* R_{n1}(\rho) (e^{i\psi} + e^{i\psi}) / (2\pi)^{1/2} + \varepsilon r_*^2 (w_{11}(\rho; 0) + w_{21}(\rho; 0)e^{i2\psi} + \\ + \bar{w}_{21}(\rho; 0)e^{-i2\psi}) / (2\pi) + \varepsilon^{3/2} w(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}), \quad \psi = n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1})(t + s) \quad (1.59)$$

Введем в рассмотрение пространство $H_{an}(K_R) \subset H^2(K_R)$ вещественных аналитических функций, состоящее из таких бесконечно дифференцируемых функций $u(\rho, \psi)$, $\partial^k u(\rho, 0)/\partial\psi^k = \partial^k u(\rho, 2\pi)/\partial\psi^k$, $k = 0, 1, \dots$, для которых конечно норма

$$\|u(\rho, \psi)\|_{H_{an}} = \sup_{k=1,2,\dots} (\|u(\rho, \psi)\|_C, (1/(k!)) \|\partial^k u(\rho, \psi)/\partial\rho^{k_1}\partial\psi^{k_2}\|_C)^{1/k}) < \infty.$$

Очевидно, что $H_{an}(K_R)$ банахово пространство. Продолжим функции $u(\rho, \psi)$ 2π -периодически по ψ на \mathbb{R} . Соответствующее пространство 2π -периодических функций обозначим $H_{an}(K_R^*)$.

Обозначив в (1.59) $\rho_* = \rho_1, \omega_{*1} = \omega_1$ и считая $w(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = w(\rho, s) \in H_{an}(K_R^*)$ искомой функцией, а ρ_1, ω_1 параметрами, подставим (1.59) в (1.8). Слагаемые при степенях $\varepsilon^{1/2}$ и ε сократятся в силу выбора функций $w_{jk}(\rho; \varepsilon)$. Сократив полученное равенства на $\varepsilon^{3/2}$, получим для определения $w(\rho, s)$ следующее операторное уравнение в $H_{an}(K_R^*)$

$$Bw \equiv w_\psi(\rho, \psi)\omega_* + w - D\Delta_{\rho, \phi}w(\rho, \psi) + b(0)w(\rho, \psi + n\theta - \omega_*T) = \\ = \Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \varepsilon^{1/2}) \equiv \\ \equiv f_1(\rho)e^{i\psi} + \bar{f}_1(\rho)e^{-i\psi} + f_3(\rho)e^{i3\psi} + \bar{f}_3(\rho)e^{-i3\psi} + \mu r_1 F(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu), \quad (1.60)$$

$$f_1(\rho) = -((1 - Tb(0)e^{i(n\theta_* - \omega_*T)})i\omega_1 + b_1(u_*, \gamma)e^{i(n\theta_* - \omega_*T)}r_1 R_{n1}(\rho)/(2\pi)^{1/2} + \\ + r_1^3(b_2(\varepsilon)(w_{20}(\rho; 0) + w_{11}(\rho; 0))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon)R_{n1}^3(\rho)/2))e^{i(n\theta_* - \omega_*T)}/(2\pi)^{3/2}$$

где $\mu = \varepsilon^{1/2}$, $f_3(\rho)$, $f_{3\rho}(R) = 0$ - аналитическая функция ρ , $F(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu) : H_{an}(K_R^*) \rightarrow H_{an}(K_R^*)$ нелинейный ограниченный аналитический по w и μ ($|\mu| < \mu_0$) оператор (определение имеется, например, в [19]).

Функции $w_1(\rho, \psi) = R_{n1}(\rho)e^{i\psi}/(2\pi)^{1/2}$, $w_{-1}(\rho, \psi) = R_{n1}(\rho)e^{-i\psi}/(2\pi)^{1/2}$ и только они (с точностью до их линейной комбинации) удовлетворяют уравнению $Bw_j(\rho, \psi) = 0$, $j = -1, 1$, а также уравнению $B^*w_j(\rho, s) = 0$, $j = -1, 1$, где $B^*w \equiv -w_\psi\omega_* + w - D\Delta_{\rho, \phi}w + b(0)w(\rho, \psi - n\theta + \omega T)$ сопряженный с B оператор: $(Bw_2, w_3)_{L_2} = (w_2, B^*w_3)_{L_2}$, $w_2, w_3 \in H_{an}(K_R^*)$. В связи с этим, операторное уравнение $Bw = G(\rho, \psi)$, $G(\rho, \psi) \in H_{an}(K_R^*)$ имеет решение тогда и только тогда, когда $(G(\rho, \psi), w_{0j}(\rho, \psi))_{L_2} = 0$ $j = -1, 1$. Решение, удовлетворяющее условию $(w(\rho, \psi), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0$ $j = -1, 1$, будет единственным и определятся $w(\rho, \psi) = B^{-1}G(\rho, \psi)$. При этом обратный оператор B^{-1} будет вполне непрерывным. Условия разрешимости операторного уравнения (1.60)

$$(\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu), w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0, \quad j = -1, 1 \quad (1.61)$$

однозначно определяют аналитические по $w \in H_{an}(K_R^*)$ и μ ($|\mu| < \mu_0$) нелинейные функционалы

$$\rho_1(w; \mu) = \rho_* + \mu\rho_{*1}(w(\rho, \psi); \mu), \quad \omega_1(w; \mu) = \omega_{*1} + \mu\omega_{*2}(w(\rho, \psi); \mu) \quad (1.62)$$

Подставим (1.62) в правую часть уравнения (1.60). В результате будем иметь удовлетворяющий условиям (1.62) нелинейный ограниченный аналитический по $w \in H_{an}(K_R^*)$ и μ ($|\mu| < \mu_0$) оператор $\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu)$, $\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); 0) \equiv \Phi_0(\rho, \psi)$. Это позволяет записать операторное уравнение (1.60) в виде

$$w(\rho, \psi) = B^{-1}\Phi(\rho, \psi, w(\rho, \psi); \mu) \quad w(\rho, \psi) \in H_{an}(K_R^*) \quad (w(\rho, \psi), \\ w_j(\rho, \psi))_{L_2} = 0 \quad j = -1, 1. \quad (1.63)$$

Осталось применить к (1.60) теорему о неявной функции для нелинейных уравнений в банаховых пространствах, доказательство которой имеется, например, в [19]. Полученное решение $w(\rho, \psi; \mu)$ будет аналитической функцией при $|\mu| < \mu_0$. Подставив $w(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$ в (1.59), получим периодическое решение $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$, которое представлено в виде сходящегося ряда по степеням $\varepsilon^{1/2}$

$$u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2}u_1(\rho, \psi) + \varepsilon u_2(\rho, \psi) + \varepsilon^{3/2}u_3(\rho, \psi) + \dots,$$

$$\psi = n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + \varepsilon^2\omega_{*2} + \dots)(t+s), \quad u_1(\rho, \psi) = (2/\pi)^{1/2}r_*R_{n1}(\rho)\cos(\psi). \quad (1.64)$$

Функции $u_j(\rho, \psi)$ и величины ω_{*j} , входящие в (1.64), могут быть получены до любого порядка непосредственно. Для этого в (1.64) необходимо заменить $r_* \rightarrow r_* + \varepsilon r_{*1} + \varepsilon^2 r_{*2} + \dots$ и подставить в начально-краевую задачу (1.8)–(1.9). Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon^{1/2}$, получим рекуррентную последовательность операторных уравнений $Bu_j(\rho, \psi) = G_j(\rho, \psi)$, где $G_j(\rho, \psi) = G_j(\rho, \psi, u_1(\rho, \psi), \dots, u_{j-1}(\rho, \psi))$ при $j = 2k$ и $G_j(\rho, \psi) = G_j(\rho, \psi, u_1(\rho, \psi), \dots, u_{j-1}(\rho, \psi), r_{*k}, \omega_{*k})$ при $j = 2k+1$, $k = 1, 2, \dots$. При $j = 2k$ операторные уравнения однозначно разрешимы, при $j = 2k+1$ условия разрешимости $(G_j(\rho, \psi), w_p(\rho, \psi))_{L_2} = 0$, $p = -1, 1$ однозначно определяют r_{*k}, ω_{*k} , а решение, удовлетворяющее условиям $(u_j(\rho, \psi), w_p(\rho, s))_{L_2} = 0$, $p = -1, 1$ определяется однозначно. При этом $u_{2k}(\rho, \psi)$ содержат лишь четные гармоники по ψ до порядка $2k$ включительно, а $u_{2k+1}(\rho, \psi)$ лишь нечетные гармоники по ψ до порядка $2k+1$ включительно.

Решение вида (1.64) представляет собой ротационную волну, врачающуюся по часовой стрелке.

Если точка K_*, θ_* будет находиться на границе области D_0 , соответствующей левой ветви замкнутой кривой, имеющей минимум в точке $\theta = \pi/n$ и при этом пучек операторов (1.13) имеет пару комплексно сопряженных точек спектра

$\pm i\omega_*, \omega_* > 0$, то все рассуждения почти дословно повторяются. В этом случае начально-краевая задача (1.8)–(1.9) имеет при $\varepsilon > 0$ в окрестности нулевого состояния равновесия периодическое решение вида (1.64), в котором $\psi = -n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s)$, т.е. это решение представляет собой ротационную волну, вращающуюся против часовой стрелки.

Пусть теперь $\theta_* = \pi/n$. В этом случае пучек операторов (1.13) имеет двухкратную нулевую точку спектра, которой отвечает две собственные функции $u_{n1}(\rho, n\phi), \bar{u}_{n1}(\rho, n\phi)$. В этом случае система уравнений (1.43) траекторий на центральном многообразии строится аналогично, при этом имеем, в чем легко убедится непосредственно с учетом (1.44), $Im\lambda(\varepsilon) = 0, Imd(\varepsilon) = 0$, $ImZ_1(z, \bar{z}; \varepsilon) = 0$. В результате, перейдя в (1.43) к полярным координатам $z = re^{i\tau}$, имеем систему уравнений

$$\dot{r} = (\chi(\varepsilon) + a(\varepsilon)r^2 + R(\rho^2; \varepsilon))r, \quad \dot{\tau} = 0 \quad (R(\rho^2; \varepsilon) \equiv Z_1(z, \bar{z}; \varepsilon)), \quad (1.65)$$

которая имеет семейство устойчивых состояний равновесия $r(\varepsilon) = \varepsilon^{1/2}r_*(1 + O(\varepsilon)), \tau = c$, где c произвольная постоянная, $\rho_* = (-\chi_1/a(0))^{1/2}$. Этому семейству состояний равновесия в начально-краевой задаче (1.8)–(1.9) соответствует однопараметрическое семейство устойчивых пространственно неоднородных состояний равновесия, определяемых формулой (1.64), в которой $(\omega_* + \varepsilon\omega_{*1}(\varepsilon))(t + s) \equiv const$.

Таким образом, при изменении θ_* вдоль границы области D_0 при $K = K_* + \varepsilon$ и проходя точку $\theta_* = \pi/n$, в окрестности состояния равновесия $u_* = u_*(K_*(\theta), \gamma)$ устойчивая ротационная волна (пространственно неоднородное периодическое решение периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$) меняет направление вращения, проходя через однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия. При этом период периодического решения $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ при $\theta \rightarrow \pi/n$.

Сказанное сформулируем окончательно в виде следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть при выбранных D, T, γ параметры K_*, θ_* принадлежат границе области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \gamma)$ и при этом уравнение (1.15) имеет решение $\lambda = i\omega_*$ ($-i\omega_*$), $\omega_* > 0$ при некотором $n > 0$, пусть также $\chi_1 > 0$ и $a(0) < 0$. Тогда существуют такие $\varepsilon_0, R > 0$, что при $K = K_* + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в шаре $S_{u_*}(R)$ начально-краевая задача (1.1)–(1.2) имеет пространственно неоднородное периодическое решение $u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) \in H_{an}(K_R)$, $\psi = n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s)$ ($\psi = -n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))(t + s)$), периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$ вида (1.64). Все оставшиеся решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.2) с начальными условиями из $S_{u_*}(R)$ при $t \rightarrow \infty$ стремятся к этому периодическому решению в норме $H_0(K_R; -T, 0)$. Это решение является ротационной волной, вращающейся по часовой стрелке (против часовой стрелки). Если при этом $\theta_* = \pi/n$, то в шаре $S_{u_*}(R)$ начально-краевая задача (1.1)–(1.2) имеет однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия, задаваемых формулой (1.64), в которой $(\omega_* + \varepsilon\omega_{*1}(\varepsilon))(t + s) \equiv const$. При прохождении параметром θ_* точки π/n период периодического решения (1.64) $T(\varepsilon) \rightarrow \infty$ и ротационная волна меняется направление вращения.*

Рассмотрим теперь случай, когда точка K_*, θ_* границы области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \gamma)$ (1.1)–(1.2) является точкой пересечения замкнутых кривых, определяющих границу области D_0 и соответствующих различным значениям n . Это могут быть, например, точки, отмеченные * на рис. 3. В этом случае пучек операторов (1.13) имеет две пары комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_{*j}, \omega_{*j} > 0, j = 1, 2$, которым отвечают собственные функции $e_{n_j 1}(\rho, \phi), \bar{e}_{n_j 1}(\rho, \phi), j = 1, 2$, возможен также случай, когда одна из пар комплексно сопряженных точек спектра превращается в двухкратную нулевую точку. При этом n_1 и n_2 всегда связаны соотношением $n_1 = n, n_2 = n+1$, а урав-

нению (1.15) может удовлетворять как $i\omega_{*j}$, так и $-i\omega_{*j}$. Отметим также, между ω_{*1} и ω_{*2} не возможны резонансные соотношения $\omega_{*1}/\omega_{*2} = 1/3, 1/2, 1, 2, 3$. Это несложно показать, предположив противное и получив противоречие из равенства выражений (1.24), (1.25) для разных n . Поэтому дальнейший анализ будет пройти по “нерезонансной” схеме.

Рассмотрим сначала случай двух пар комплексно сопряженных точек спектра пучек операторов (1.13). При этом для определенности считаем, что уравнению (1.15) при n и $n+1$ удовлетворяют соответственно $i\omega_{*1}$ и $i\omega_{*2}$ и $\omega_{*j} > 0, j = 1, 2$. Этому условию удовлетворяет, например, точка, отмеченная на рис. 3 и имеющая большую координату θ . Положим $K = K_* + \varepsilon_1, \theta = \theta_* + \varepsilon_2$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – малые параметры, в дальнейшем обозначим $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Из (1.15) находим

$$\begin{aligned} \lambda_j(\bar{\varepsilon}) &= \chi_j(\bar{\varepsilon}) + i(\omega_{*j} + \sigma_j(\bar{\varepsilon})) = i\omega_{*j} + \varepsilon_1 \lambda_{1j}^{(1)} + \varepsilon_2 \lambda_{1j}^{(2)} + \dots, \\ \lambda_{1j}^{(1)} &= -b_1(u_*, \gamma) e^{iq\theta_*}, \lambda_{1j}^{(2)} = -b(u_*, \gamma) i p e^{iq\theta_*}, q = n+j-1, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Введем функции

$$e_{1j}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) = u_1(\rho, q\phi) e^{\lambda_j(\bar{\varepsilon})s}, \bar{e}_{1j}(\rho, q\phi, s; \bar{\varepsilon}) \in \tilde{H}_1(K_R; -T, 0), \quad (1.67)$$

$$\begin{aligned} h_{1j}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) &= \\ &= u_1(\rho, q\phi) e^{p_j(\bar{\varepsilon})s} / P'_{-q1}(-p_j(\bar{\varepsilon}); \bar{\varepsilon}), \bar{h}_{1j}(\rho, q\phi, s; \bar{\varepsilon}) \in \tilde{H}_1(K_R; 0, T), \\ &q = n+j-1, j = 1, 2. \end{aligned}$$

В этом случае $H_+(\bar{\varepsilon})$ есть множество функций вида

$$\begin{aligned} u_+(\rho, \phi, s) &= e_{11}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) z_1 + \bar{e}_{11}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) \bar{z}_1 + \\ &+ e_{12}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) z_2 + \bar{e}_{12}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) \bar{z}_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

а $H_-(\bar{\varepsilon})$ соответственно множество функций $u_-(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$, для которых $\langle u_-(\rho, \phi, s), h_{1j}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) \rangle = 0$,

$$\langle u_-(\rho, \phi, s), \bar{h}_{1j}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) \rangle = 0, j = 1, 2 \quad (H_+(\bar{\varepsilon}) \bigoplus H_-(\bar{\varepsilon}) = H_0(K_R; -T, 0)).$$

$H_+(\bar{\varepsilon})$ определяет четырехмерное пространство решений $u_+(\rho, \phi, s, t; \bar{\varepsilon})$ начально-краевой задачи (1.11)-(1.12) вида (1.68), в котором $z_j = z_j(t)$ решение уравнений

$$\dot{z}_j = \lambda_j(\bar{\varepsilon}) z_j, \quad j = 1, 2. \quad (1.69)$$

Обозначим $S_{\pm}(R)(\bar{\varepsilon}) = S(R) \cap H_{\pm}(\bar{\varepsilon})$. В рассматриваемом случае начально-краевая задача (1.8)–(1.9) имеет четырехмерное центральное (инвариантное) многообразие $M(\bar{\varepsilon}) \subset S(R)$, которое определено теоремами 1,2 применительно к рассматриваемому случаю и которое представимо в виде

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) &= \\ &= e_{n1}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) z_1 + \bar{e}_{n1}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) \bar{z}_1 + e_{n+11}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) z_1 + \\ &+ \bar{e}_{n+11}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon}) \bar{z}_1 + v_{2000}(\cdot) z_1^2 + v_{1100}(\cdot) z_1 \bar{z}_1 + v_{0200}(\cdot) \bar{z}_1^2 + \dots \\ &+ v_{0030}(\cdot) z_2^3 + v_{0021}(\cdot) z_2^2 \bar{z}_2 + v_{0012}(\cdot) z_2 \bar{z}_2^2 + \\ &+ v_{0003}(\cdot) \bar{z}_2^3 + g(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (1.70)$$

где $v_{jk}(\cdot) = v_{jk}(\rho, \phi, s; \bar{\varepsilon})$, $\bar{v}_{kj}(\cdot) = \bar{v}_{kj}(\cdot)$, $\|g(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon})\|_{H_1} = o(|z|^3)$, $|z| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$. При этом система обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющая поведение траекторий (1.8)–(1.9) на (1.70) и записанная в нормализованной форме до кубических слагаемых включительно [?], имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1(\bar{\varepsilon}) z_1 + d_{11}(\bar{\varepsilon}) |z_1|^2 z_1 + d_{12}(\bar{\varepsilon}) |z_2|^2 z_1 + Z_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) \equiv \\ &\equiv Z_1^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= \lambda_2(\bar{\varepsilon})z_2 + d_{21}(\bar{\varepsilon})|z_1|^2z_2 + d_{22}(\bar{\varepsilon})|z_2|^2z_2 + Z_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) \equiv \\ &\equiv Z_2^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \quad (1.71)\end{aligned}$$

где $|Z_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon})| = o(|z|^3)$, $j = 1, 2$. По аналогии с (1.44) имеем

$$\begin{aligned}g(\rho, \phi + c, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) &\equiv g(\rho, \phi, z_1 e^{inc}, \bar{z}_1 e^{-inc}, z_2 e^{i(n+1)c}, \bar{z}_2 e^{-i(n+1)c}; \bar{\varepsilon}), \\ Z_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) &\equiv z_j Z_{j1}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \\ Z_{j1}(z_1 e^{inc}, \bar{z}_1 e^{-inc}, z_2 e^{i(n+1)c}, \bar{z}_2 e^{-i(n+1)c}; \bar{\varepsilon}) &\equiv Z_{j1}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \quad j = 1, 2. \quad (1.72)\end{aligned}$$

В рассматриваемом случае условие принадлежности траекторий системы уравнений (1.71) начально-краевой задачи (1.8)–(1.9) в силу многообразия (1.70) определяет тождества

$$\sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial G(\cdot)}{\partial z_j} Z_j^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) + \frac{\partial G(\cdot)}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) \right) + G(\cdot) \equiv \frac{\partial G(\cdot)}{\partial s} \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned}G_s(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) &\equiv \\ &\equiv -G(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) + D\Delta_{\rho\phi}G(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) - \\ &- b(\varepsilon_1)G_\theta(\rho, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) + b_2(\varepsilon_1)G_\theta(\rho, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon})^2/2 + \\ &+ b(\varepsilon_1)G_\theta(\rho, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon})^3/6 + \dots, \quad (1.74)\end{aligned}$$

для определения коэффициентов разложений (1.70)–(1.71).

Приравнивая в (1.73)–(1.74) коэффициенты при одинаковых степенях $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$ получим для определения функций, входящих в (1.70), рекуррентную последовательность краевых задач аналогичных (1.49)–(1.53). Часть этих краевых задач однозначно разрешима автоматически, однозначной разрешимости другой части добиваемся выбором коэффициентов $d_{jk}(\bar{\varepsilon})$ (однозначным) по ана-

логии с краевой задачей (1.53). Опуская громоздкие вычисления, приведем необходимые для бифуркационного анализа выражения для коэффициентов $d_{jk}(\bar{\varepsilon}) = a_{jk}(\bar{\varepsilon}) + ic_{jk}(\bar{\varepsilon})$.

$$d_{11}(\bar{\varepsilon}) = e^{in(\theta_* + \varepsilon_2) - (2\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))T} / (1 + b(\varepsilon_1)e^{in(\theta_* + \varepsilon_2) - (2\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))T}(1 - e^{(\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))T})/$$

$$/(\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))(b_2(\varepsilon_1)(w_{2000}(\rho; \bar{\varepsilon}) + w_{1100}(\rho; \bar{\varepsilon}))R_{n1}(\rho) + b(\varepsilon_1)R_{n1}^3(\rho)/2, R_{n1}(\rho))/(2\pi),$$

$$d_{12}(\bar{\varepsilon}) = e^{in(\theta_* + \varepsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))T} / (2\pi) /$$

$$/(1 + b(\varepsilon_1)e^{in(\theta_* + \varepsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))T}(1 - e^{(\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))T})/(\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))) \times$$

$$\begin{aligned} &\times (b_2(\varepsilon_1)(w_{0011}(\rho; \varepsilon)R_{n1}(\rho) + (w_{1010}(\rho; \varepsilon) + \\ &+ w_{1001}(\rho; \varepsilon))R_{n+11}(\rho)) + b(\varepsilon_1)R_{n+11}^2(\rho)R_{n1}(\rho), R_{n1}(\rho)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{21}(\bar{\varepsilon}) &= e^{in(\theta_* + \varepsilon_2) - (\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))T} / (2\pi) / \\ &/ (1 + b(\varepsilon_1)e^{in(\theta_* + \varepsilon_2) - (\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))T}(1 - e^{(\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))T})/(\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times (b_2(\varepsilon_1)(w_{1100}(\rho; \bar{\varepsilon})R_{n+11}(\rho) + (w_{1010}(\rho; \bar{\varepsilon}) + w_{0110}(\rho; \bar{\varepsilon}))R_{n11}(\rho)) + \\ &+ b(\bar{\varepsilon})R_{n1}^2(\rho)R_{n+11}(\rho), R_{n+11}(\rho)), \end{aligned}$$

$$d_{22}(\bar{\varepsilon}) = e^{in(\theta_* + \varepsilon_2) - (2\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))T} / (1 + b(\varepsilon_1)e^{in(\theta_* + \varepsilon_2) - (2\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))T}(1 - e^{(\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))T})/$$

$$\begin{aligned} &/ (\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))(b_2(\varepsilon_1)(w_{0020}(\rho; \bar{\varepsilon}) + w_{0011}(\rho; \bar{\varepsilon}))R_{n+11}(\rho) + \\ &+ b(\varepsilon_1)R_{n+11}^3(\rho)/2, R_{n+11}(\rho))/(2\pi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{2000}(\rho; \bar{\varepsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{2nj}(\bar{\varepsilon}) R_{2nj}(\rho), \quad p_{2nj}(\bar{\varepsilon}) = (R_{n1}^2(\rho), R_{2nj}(\rho)) \times \\
&\times b_2(\varepsilon_1) e^{i2n(\theta_* + \varepsilon_2) - 2\lambda_1(\bar{\varepsilon})T} / (2\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + 1 + D\gamma_{2nj}^2 + b(\varepsilon_1) e^{i2n(\theta_* + \varepsilon_2) - 2\lambda_1(\bar{\varepsilon})T})/2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{1100}(\rho; \bar{\varepsilon}) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\bar{\varepsilon}) R_{0j}(\rho), \quad p_{0j}(\bar{\varepsilon}) = (R_{n1}^2(\rho), R_{0j}(\rho)) \times \\
&\times b_2(\varepsilon_1) e^{-(\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))T} / (\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + 1 + D\gamma_{0j}^2 + b(\varepsilon_1) e^{-(\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}))T}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{0020}(\rho; \bar{\varepsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{2(n+1)j}(\bar{\varepsilon}) R_{2(n+1)j}(\rho), \quad p_{2(n+1)j}(\bar{\varepsilon}) = (R_{n+11}^2(\rho), R_{2(n+1)j}(\rho)) \times \\
&\times b_2(\varepsilon_1) e^{i2(n+1)(\theta_* + \varepsilon_2) - 2\lambda_2(\bar{\varepsilon})T} / (2\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + 1 + D\gamma_{2(n+1)j}^2 + b(\varepsilon_1) e^{i2(n+1)(\theta_* + \varepsilon_2) - 2\lambda_2(\bar{\varepsilon})T})/2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{0011}(\rho; \bar{\varepsilon}) &= \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\bar{\varepsilon}) R_{0j}(\rho), \quad p_{0j}(\bar{\varepsilon}) = (R_{n+11}^2(\rho), R_{0j}(\rho)) \times \\
&\times b_2(\varepsilon_1) e^{-(\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))T} / (\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}) + 1 + D\gamma_{0j}^2 + b(\varepsilon_1) e^{-(\lambda_2(\bar{\varepsilon}) + \bar{\lambda}_2(\bar{\varepsilon}))T}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{1010}(\rho; \bar{\varepsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{2n+1j}(\bar{\varepsilon}) R_{2n+1j}(\rho), \quad p_{2n+1j}(\bar{\varepsilon}) = (R_{n1}(\rho) R_{n+11}(\rho), R_{2n+1j}(\rho)) \times \\
&\times b_2(\varepsilon_1) e^{i(2n+1)(\theta_* + \varepsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}))T} / (\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}) + 1 + D\gamma_{2n+1j}^2 + \\
&+ b(\varepsilon_1) e^{i(2n+1)(\theta_* + \varepsilon_2) - (\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}))T}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{0110}(\rho; \bar{\varepsilon}) &= \sum_{j=1}^{\infty} p_{1j}(\bar{\varepsilon}) R_{1j}(\rho), \quad p_{1j}(\varepsilon) = \\
&= (R_{n1}(\rho) R_{n+11}(\rho), R_{1j}(\rho)) b_2(\varepsilon_1) e^{i(\theta_* + \varepsilon_2) - (\bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}))T} / \\
&/ (\bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}) + 1 + D\gamma_{1j}^2 + b(\varepsilon_1) e^{i(\theta_* + \varepsilon_2) - (\bar{\lambda}_1(\bar{\varepsilon}) + \lambda_2(\bar{\varepsilon}))T}), \quad w_{1001}(\rho; \bar{\varepsilon}) = \bar{w}_{0110}(\rho; \bar{\varepsilon}).
\end{aligned}$$

Исследуем поведение решений системы уравнений (1.71). Перейдем в плоскости параметров $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ и плоскостях z_1 и z_2 к полярным координатам, соответственно положив

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cos(\alpha), \quad \varepsilon_2 = \varepsilon \sin(\alpha), \quad \varepsilon = (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2}, \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \quad (1.75)$$

и $z_j = \varepsilon^{1/2} \rho_j e^{i\tau_j}$, $\rho_j \geq 0$, $j = 1, 2$. Запишем систему уравнений (1.71) с учетом (1.66), (1.72), (1.75) в новых переменных и в зависимости от новых параметров

$$\dot{\rho}_j = \varepsilon(\chi_j^1(\alpha, \varepsilon) + a_{j1}(\alpha, \varepsilon)\rho_1^2 + a_{j2}(\alpha, \varepsilon)\rho_2^2 + \varepsilon R_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon))\rho_j, \quad (1.76)$$

$$\dot{\tau}_j = \omega_{*j} + \varepsilon(\sigma_j^1(\alpha, \varepsilon) + b_{j1}(\alpha, \varepsilon)\rho_1^2 + b_{j2}(\alpha, \varepsilon)\rho_2^2 + \varepsilon T_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon)), \quad j = 1, 2. \quad (1.77)$$

В (1.76)–(1.77) $\chi_j^1(\alpha, \varepsilon) = \chi_j(\alpha, \varepsilon)/\varepsilon$, $\sigma_j^1(\alpha, \varepsilon) = \sigma_j(\alpha, \varepsilon)/\varepsilon$ непрерывные при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ функции, $a_{jk}(\alpha, \varepsilon) + ib_{jk}(\alpha, \varepsilon) = d_{jk}(\alpha, \varepsilon)$ ($d_{jk}(\alpha, 0) = d_{jk}(0)$), $\varepsilon^2(R_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon)) + iT_j(\rho_1^2, \rho_2^2; \alpha, \varepsilon)) = Z_{j1}(\varepsilon^{1/2}\rho_1 e^{i\tau_1}, \varepsilon^{1/2}\rho_1 e^{-i\tau_1}, \varepsilon^{1/2}\rho_2 e^{i\tau_2}, \varepsilon^{1/2}\rho_2 e^{-i\tau_2}; \alpha, \varepsilon) \equiv Z_{j1}(\varepsilon^{1/2}\rho_1, \varepsilon^{1/2}\rho_1, \varepsilon^{1/2}\rho_2, \varepsilon^{1/2}\rho_2; \alpha, \varepsilon)$.

Поведение решений системы уравнений (1.76)–(1.77) при малых ε определяется в основном (см., например, [57]) поведением решений главной части уравнений “медленных” переменных (1.76)

$$\dot{\rho}_j = (\chi_j^*(\alpha) + a_{j1}(0)\rho_1^2 + a_{j2}(0)\rho_2^2)\rho_j, \quad j = 1, 2, \quad (1.78)$$

где $\chi_j^*(\alpha) = \chi_j^1(\alpha, 0)$. Так, экспоненциально устойчивым состояниям равновесия (1.78) вида $(\rho_{*1}, 0)$ и $(0, \rho_{*2})$ при малых ε в (1.76)–(1.77) и системе уравнений (1.71) соответствуют периодические решения с периодами близкими к $2\pi/\omega_{*1}$ и $2\pi/\omega_{*2}$ соответственно и того же характера устойчивости. Состоянию равновесия вида (ρ_{*1}, ρ_{*2}) , $\rho_{*j} > 0$ в (1.76)–(1.77) и (1.71) соответствует двумерный инвариантный тор, характер устойчивости которого определяется

устойчивостью (неустойчивостью) состояния равновесия. Отметим, что система уравнений (1.78) может иметь периодические решения лишь в исключительных (вырожденных) случаях. Численный анализ, выполненный для различных значений параметров T, D, γ показал, что в точках K_*, θ_* , являющихся точками пересечения замкнутых ветвей границы области D_0 , отвечающих различным значениям $n, n+1$, всегда выполнены следующие неравенства: $a_{jk}(0) < 0$, $j, k = 1, 2$, $\Delta = a_{11}(0)a_{22}(0) - a_{12}(0)a_{21}(0) < 0$. Эти условия считаем в дальнейшем выполненными. Система уравнений вида (1.78) подробно проанализирована в работе [57]. В нашем случае система уравнений (1.78) легко анализируется непосредственно. Формулы состояний равновесия (1.78) имеют вид

$$(\rho_{*1}, 0) = ((-\chi_1^*(\alpha)/a_{11}(0))^{1/2}, 0), \quad (0, \rho_{*2}) = (0, (-\chi_2^*(\alpha)/a_{22}(0))^{1/2}), \quad (1.79)$$

$$(\rho_{*1}, \rho_{*2}) = ((-a_{22}(0)\chi_1^*(\alpha) + a_{12}(0)\chi_2^*(\alpha))/\Delta)^{1/2}, \\ (a_{21}(0)\chi_1^*(\alpha) - a_{11}(0)\chi_2^*(\alpha))/\Delta)^{1/2}). \quad (1.80)$$

В соответствии с этим на плоскости $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ определим прямые (лучи), выходящие из нулевой точки: $\Gamma_1 : \chi_1^*(\alpha) = 0$, $\Gamma_2 : \chi_2^*(\alpha) = 0$, $\Gamma_3 : -a_{22}(0)\chi_1^*(\alpha) + a_{12}(0)\chi_2^*(\alpha) = 0$, $\Gamma_4 : a_{21}(0)\chi_1^*(\alpha) - a_{11}(0)\chi_2^*(\alpha) = 0$. Бифуркационная диаграмма и соответствующие фазовые портреты (1.78) в зависимости от α приведены на рис. 9. Диаграмма приведена применительно к рассматриваемой точке. В других точках границы области D_0 расположение прямых Γ_j может быть несколько иным, но характер фазовых перестроек остается неизменным.

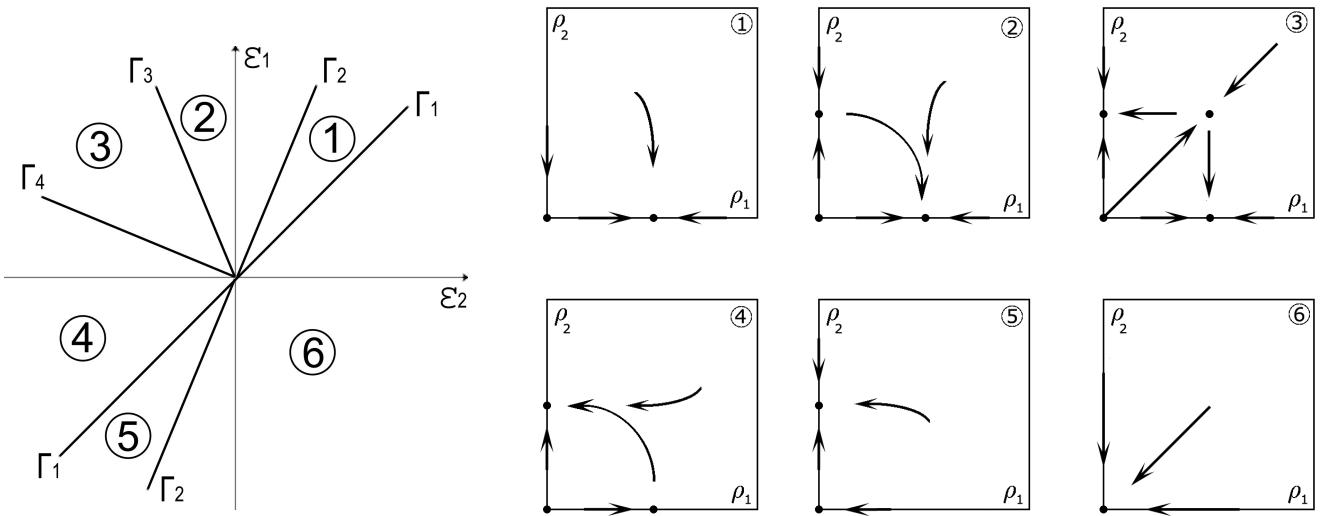


Рис.1.9

Каждому состоянию равновесия вида (1.79) в начально-краевой задача (1.1)–(1.2) соответствует периодическое решение вида (1.64) (ротационная волна), принадлежащее $S_{u_*}(R)$, аналогичного с состоянием равновесия характера устойчивости. Доказательство этого утверждения проводится по изложенной выше схеме. Состоянию равновесия (1.80) в (1.1)–(1.2) соответствует двумерный инвариантный тор, принадлежащий $S_{u_*}(R)$, в нашем случае он всегда неустойчив.

Таким образом, бифуркационный сценарий с окрестности точки K_*, θ_* пересечения замкнутых кривых, соответствующих значениям n и $n + 1$ границы области D_0 , выглядит следующим образом. При $\theta < \theta_*$ и $K > K_*$ в $S_{u_*}(R)$ имеется единственное устойчивое периодическое решение вида (1.64) – ротационная волна, соответствующая значениям n . При увеличении θ из состояния равновесия u_* бифурцирует неустойчивое периодическое решение вида (1.64) – ротационная волна, соответствующая значениям $n + 1$. При дальнейшем увеличении θ из этого периодического решения бифурцирует неустойчивый двумерный инвариантный тор, делая периодическое решение асимптотически орбитально устойчивым. В этом случае начально-краевой задача (1.1)–(1.2) в $S_{u_*}(R)$ имеет два устойчивых периодических решения, являющихся ротационными волнами.

ми. При дальнейшем увеличении θ неустойчивый инвариантный тор “влипает” в устойчивое периодическое решение, соответствующее значению n , делая его неустойчивым. В дальнейшем, это неустойчивое периодическое решение “влипает” в неустойчивое состояние равновесия u_* . В окрестности u_* остается одна ротационная волна, соответствующая значению $n + 1$.

Случай, когда пучек операторов (1.13) при K_*, θ_* имеет пару комплексно сопряженных чисто мнимых точек спектра и двухкратную нулевую точку спектра, а остальные точки спектра имеют отрицательные вещественные части, рассматривается аналогично. При этом роль одной спиральной волны будет играть однопараметрическое семейство пространственно неоднородных состояний равновесия. Также аналогично рассматривается случай, когда одна собственная функция пучка операторов не зависит от ϕ (отмеченный * на рис. 5). В этом случае одно бифурцирующее периодическое решение является пространственно-однородным.

Глава 2

Исследование нелинейных волн в параболическом уравнении с оператором растяжения пространственного аргумента

2.1 Математическая постановка задачи

Для функционально-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) + \alpha^{-2}K(1 + \gamma\cos(u(\rho/\alpha, \phi, t - T))) \quad (2.1)$$

относительно функции $u(\rho, \phi, t + s)$, заданной в полярных координатах $0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ ($R > 0$) и $t \geq 0, -T \leq s \leq 0$ ($T > 0$), в котором $\Delta_{\rho\phi}$ - оператор Лапласа в полярных координатах, выражение $u(\rho/\alpha, \phi, t)$ ($\alpha > 1$) задает оператор растяжения пространственных координат, D, K – положительные постоянные, $0 < \gamma < 1$, в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^+$, где круг $\bar{K}_R = \{(\rho, \phi) : 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$, $\mathbb{R}^+ = \{t : 0 \leq t < \infty\}$, рассматривается начально-краевая задача вида

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t),$$

$$u(\rho, \phi, t + s)|_{t=0} = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \quad (2.2)$$

В (2.2) пространство начальных условий $H_0(K_R; -T, 0)$ определено в параграфе 1.1.. Фазовым пространством начально-краевой задачи (2.1)-(2.2) является пространство $H(K_R; -T, 0)$, определенное в параграфе 1.1.

Под решением начально-краевой задачи (2.1)-(2.2), определенном при $t > 0$, будем понимать функцию $u(\rho, \phi, t + s) \in H_0(K_R; -T, 0)$ (при каждом $t > 0$), непрерывно дифференцируемую по t при $t > 0$, обращающую уравнение (2.1) в тождество в фазовом пространстве и удовлетворяющую начальным условиям (2.2).

Решение начально-краевой задачи (2.1)-(2.2) может быть построено методом шагов следующим образом. Решение $u(\rho, \phi, t + s)$ начально-краевой задачи (2.1)-(2.2) построим последовательно на отрезках $t_{k-1} \leq t \leq t_k, t_k = Tk, k = 1, 2, \dots, t_0 = 0$. Значения $u(\rho, \phi, t)$ на указанных отрезках обозначим соответственно через $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$. В результате для определения $u^{(k)}(\rho, \phi, t)$ получим рекуррентную последовательность начально-краевых задач вида

$$u_t^{(k)} + u^{(k)} - D\Delta_{\rho\phi}u^{(k)} = \alpha^{-2}K(1 + \gamma\cos(u^{(k-1)}(\rho/\alpha, \phi, t - T))) \equiv f^{(k)}(\rho, \phi, t),$$

$$t_{k-1} \leq t \leq t_k, \quad (2.3)$$

$$u_\rho^{(k)}(R, \phi, t) = 0, \quad u^{(k)}(\rho, 0, t) = u^{(k)}(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi^{(k)}(\rho, 0, t) = u_\phi^{(k)}(\rho, 2\pi, t), \quad (2.4)$$

$$u^{(k)}(\rho, \phi, t_{k-1}) = u^{(k-1)}(\rho, \phi, t_{k-1}), \quad u^{(1)}(\rho, \phi, 0) = u_0(\rho, \phi, 0), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

в которых правая часть уравнений (2.3) и начальные условия (2.5) на каждом шаге вполне определенные функции. Решения (2.3)-(2.5) задаются формулой

$$\begin{aligned} u^{(k)}(\rho, \phi, t) &= \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1) u^{(k-1)}(\rho_1, \phi_1, t_{k-1}) d\rho_1 d\phi_1 + \\ &+ \int_0^t \int_{K_R} \rho_1 G(\rho, \phi, t - \tau, \rho_1, \phi_1) f^{(k)}(\rho_1, \phi_1, \tau) d\rho_1 d\phi_1 d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $G(\rho, \phi, t, \rho_1, \phi_1)$ функция Грина однородной части (при $f^{(k)}(\rho, \phi, t) \equiv 0$) кра-

евой задачи (2.3)-(2.4). Из (2.6) также следует единственность решения начально-краевой задачи (2.1)-(2.2) и его непрерывная зависимость от начальных условий и параметров уравнения, т.е. корректность поставленной начально-краевой задачи, а также нарастание гладкости решения по переменной t при $t \rightarrow \infty$, свойственное решениям уравнений с запаздывающим аргументом.

В работе изучаются условия и характер потери устойчивости состояний равновесия $u_*(K, \alpha, \gamma)$ и обусловленные ею бифуркации пространственно-неоднородных автоколебательных решений начально-краевой задачи (2.1)-(2.2), а также их устойчивость.

2.2 Анализ устойчивости однородных состояний равновесия начально-краевой задачи (2.7)-(2.8)

Однородные состояния равновесия $u_* = u_*(K, \alpha, \gamma)$ начально-краевой задачи (1.1)-(1.2) определяются как решения уравнения

$$u = \alpha^{-2} K(1 + \gamma \cos(u)). \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) в зависимости от K, α и γ может иметь несколько решений, в том числе кратные. Исследуем условия возникновения состояний равновесия, их устойчивость и механизмы потери устойчивости в зависимости от параметров уравнения (2.1).

Выберем одно из решений $u_* = u_*(K, \alpha, \gamma)$ уравнения (2.7) и запишем начально-краевую задачу (2.1)-(2.2) в его окрестности, заменив $u(\rho, \phi, t) \rightarrow u_*(K, \alpha, \gamma) + u(\rho, \phi, t)$. В результате получим начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) &= D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu(\rho/\alpha, \phi, t - T) + \\ &+ b_2u(\rho/\alpha, \phi, t - T)^2/2 + bu(\rho/\alpha, \phi, t - T)^3/6 + \dots, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t),$$

$$u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0), \quad (2.9)$$

$$b = b(K, \alpha, \gamma) = u_*(K, \alpha, \gamma) \gamma \sin(u_*(K, \alpha, \gamma)) / (1 + \gamma \cos(u_*(K, \alpha, \gamma))), \quad (2.10)$$

$$b_2 = b_2(K, \alpha, \gamma) = -u_*(K, \alpha, \gamma) \gamma \cos(u_*(K, \alpha, \gamma)) / (1 + \gamma \cos(u_*(K, \alpha, \gamma))), \quad (2.11)$$

где точками обозначены слагаемые, имеющие по $u(\rho/\alpha, \phi, t - T)$ более высокий порядок малости в норме $H_0(K_R; -T, 0)$.

Рассмотрим линейную часть (2.8)-(2.9)

$$u_t(\rho, \phi, t) + u(\rho, \phi, t) = D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi, t) - bu(\rho/\alpha, \phi, t - T), \quad (2.12)$$

$$u_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad u(\rho, 0, t) = u(\rho, 2\pi, t), \quad u_\phi(\rho, 0, t) = u_\phi(\rho, 2\pi, t),$$

$$u(\rho, \phi, s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \quad (2.13)$$

Определяя решения (2.12)-(2.13) вида $u(\rho, \phi, t) = u(\rho, \phi)e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (решения Эйлера) получим пучок операторов

$$P(\lambda)u(\rho, \phi) \equiv \lambda u(\rho, \phi) + u(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho\phi}u(\rho, \phi) + bu(\rho/\alpha, \phi)e^{-\lambda T}, \quad (2.14)$$

действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$, точки спектра которого определяют устойчивость решений начально-краевой задачи (2.12)-(2.13), а соответствующие им собственные функции решения искомого вида. Знаком “тильде” будем обозначать комплексное расширение соответствующего функционального пространства, скалярное произведение и норма в котором обобщается стандартным образом.

Представим $u(\rho, \phi) \in H^2(K_R)$ в виде

$$u(\rho, \phi) = u_{00}(\rho)v_{00} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} u_{nj}(\rho)e^{in\phi}v_{nj}, \quad u_{00}(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}R}, \quad u_{nj}(\rho) = \frac{R_{nj}(\rho)}{(2\pi)^{1/2}},$$

$$R_{nj}(\rho) = \frac{\sqrt{2}/R J_n(\gamma_{nj}\rho/R)}{(1 - n^2/\gamma_{jn}^2)^{1/2}|J_n(\gamma_{nj})|} \quad (n \geq 0), \quad R_{-nj}(\rho) = R_{nj}(\rho),$$

$$(R_{nj}(\rho), R_{np}(\rho))_R = \int_0^R \rho R_{nj}(\rho) R_{np}(\rho) d\rho = \delta_{jp}, \quad i = \sqrt{-1}, v_{00}, \\ v_{0j} \in \mathbb{R}, v_{nj} \in \mathbb{C}, v_{-nj} = \bar{v}_{nj}, \quad (2.15)$$

где $J_n(\rho)$ функции Бесселя первого рода n -го порядка, γ_{nj} j -й положительный ноль функции $J'_n(\rho)$, $\gamma_{00} = 0$, δ_{jp} – символ Кронекера, $v_0 = (v_{00}, v_{01}, v_{02}, \dots) \in l_2^2 \subset l_2$, $l_2^2 = \{v = (v_0, v_1, v_2, \dots), v_k \in \mathbb{R} : \|v\|_{l_2^2} = (v_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^4 v_k^2)^{1/2} < \infty\}$, $v_n = (0, v_{n1}, v_{n2}, v_{n3}, \dots) \in \tilde{l}_2^2 \subset \tilde{l}_2$, $\tilde{l}_2^2 = \{v = (v_0, v_1, v_2, v_3, \dots), v_k \in \mathbb{C} : \|v\|_{\tilde{l}_2^2} = (|v_0|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} k^4 |v_k|^2)^{1/2} < \infty\}$. Функции $u_{00}(\rho), u_{0j}(\rho), u_{nj}(\rho)e^{in\phi}, u_{-nj}(\rho)e^{-in\phi}$, $j, n = 1, 2, \dots$, являясь полной системой собственных функций оператора Лапласа, образуют ортогональный базис в $\tilde{H}^2(K_R)$ и ортонормированный в $\tilde{L}_2(K_R)$, т.е. $v_0 \in l_2^2$ и $v_n \in \tilde{l}_2^2$ определяются однозначно. Подставим ряд (2.15) в (2.14) и спроектируем на $u_{00}(\rho), u_{0j}(\rho), u_{nj}(\rho)e^{in\phi}, u_{-nj}(\rho)e^{-in\phi}$, $j, n = 1, 2, \dots$. В результате получим последовательность операторных уравнений в пространстве \tilde{l}_2 с областью определения \tilde{l}_2^2 вида

$$P^{(n)}(\lambda, \alpha)v_n = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.16)$$

для определения $v_n \in \tilde{l}_2^2$, где $P^{(n)}(\lambda, \alpha)$ бесконечномерные матрицы с элементами

$$P_{jj}^{(n)}(\lambda, \alpha) = \lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + ba_{jj}^{(n)}(\alpha)e^{-\lambda T}, \quad P_{jq}^{(n)}(\lambda, \alpha) = ba_{jq}^{(n)}(\alpha)e^{-\lambda T}, \quad j \neq q, \\ a_{jq}^{(n)}(\alpha) = \int_0^R \rho R_{nj}(\rho/\alpha) R_{qp}(\rho) d\rho, \quad (2.17)$$

$j, q = 0, 1, \dots$, при $n = 0$, и $j, q = 1, 2, \dots$, при $n > 0$. Отметим, что коэффициенты $a_{jq}^{(n)}(\alpha) \rightarrow 0$ при $j, q \rightarrow \infty$.

Совокупность значений $\lambda_*^{(n)}$, при которых операторные уравнения (2.16) имеет ненулевые решения $v_*^{(n)} \in \tilde{l}_2^2$ определяет множество точек спектра пучка операторов (2.14), а решения $v_*^{(n)}$ с учетом (2.15) соответствующие собственные функции. Анализ расположения $\lambda_*^{(n)}$ позволяет построить в пространстве параметров области устойчивости решений начально-краевой задачи (2.12)-(2.13), т.е. исследовать условия потери устойчивости состоянием равновесия $u_* = u_*(K, \alpha, \gamma)$. Воспользуемся для этого методом D -разбиения [38]. Рассмотрим для каждого n последовательность “усеченных” конечномерных матриц $P_N^{(n)}(\lambda, \alpha)$, в которых $j, q = 0, 1, \dots, N$ при $n = 0$, и $j, q = 1, 2, \dots, N$ при $n > 0$. Приравняем нулю определитель матрицы $P_N^{(n)}(\lambda, \alpha)$ и выделим в этом равенстве элемент $P_{jj}^{(n)}(\lambda, \alpha)$. В результате получим равенство

$$\lambda + 1 + D\gamma_{nj}^2 + ba_{jj}^{(n)}(\alpha)e^{-\lambda T} + \Delta_N^{(nj)}(b, T, \lambda, \alpha) = 0, \quad (2.18)$$

в котором функция $\Delta_N^{(nj)}(b, T, \lambda, \alpha)$ получена в результате объединения выражений, не содержащих $P_{jj}^{(n)}\lambda, \alpha$, и $a_{jj}^{(n)}(1) = 1, \Delta_N^{(nj)}(b, T, \lambda, 1) \equiv 0$. Положив в (2.18) в соответствии с методом D -разбиений [?] $\lambda = i\omega$, $\omega \geq 0$, имеем

$$i\omega + 1 + D\gamma_{nj}^2 + ba_{jj}^{(n)}(\alpha)e^{-i\omega T} + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha) + i\Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha) = 0, \quad (2.19)$$

Выделив в (2.19) вещественную и мнимую части, получим равенства

$$\begin{aligned} 1 + D\gamma_{nj}^2 + ba_{jj}^{(n)}(\alpha) \cos(\omega T) + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha) &= 0, \\ \omega - ba_{jj}^{(n)}(\alpha) \sin(\omega T) + \Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha) &= 0, \end{aligned}$$

из которых находим

$$\begin{aligned} b = b(\omega) &= \\ = (-1)^{k+1}(1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha)) / (a_{jj}^{(n)}(\alpha) \cos(\arctg((\omega + \Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha)) / \end{aligned}$$

$$(1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha))), \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} T = T(\omega) = \\ = \omega^{-1}(\pi k - \operatorname{arctg}(\omega + \Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha))/(1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha))), \\ k = 1, 2, \dots \quad (2.21) \end{aligned}$$

При этом $\Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, 1) \equiv 0$, $\Delta_{N2}^{(j)}(b, T, \omega, 1) \equiv 0$. Выражения (2.20), (2.21) определяют совокупность кривых $b(\omega), T(\omega)$, заданных в неявном виде, в плоскости (b, T) на которых пучек операторов (2.14) имеет точки спектра, расположенные на мнимой оси комплексной плоскости. Это дает возможность построить в плоскости (b, T) (при фиксированных других параметрах) область устойчивости решений начально-краевой задачи (2.12)-(2.13).

Построим итерационный процесс

$$\begin{aligned} b^{(p)}(\omega) = (-1)^{k+1}(1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha))/ \\ /(a_{jj}^{(n)}(\alpha) \cos(\operatorname{arctg}((\omega + \Delta_{N2}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), \\ T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha)))/(1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha)))), \quad (2.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{(p)}(\omega) = \omega^{-1}(\pi k - \operatorname{arctg}(\omega + \Delta_{N2}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), \\ T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha))/(1 + D\gamma_{nj}^2 + \Delta_{N1}^{(nj)}(b^{(p-1)}(\omega), \\ T^{(p-1)}(\omega), \omega, \alpha))), \quad k = 1, 2, \dots, \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.23) \end{aligned}$$

При $\alpha = 1$ функции $b(\omega) = b^{(0)}(\omega), T(\omega) = T^{(0)}(\omega)$ в (2.22), (2.23) выражаются явно. Немного увеличим параметр α и выберем в качестве начального приближения $b^{(0)}(\omega), T^{(0)}(\omega)$, полученные при $\alpha = 1$. Итерационный процесс (2.22), (2.23) достаточно быстро сходится как по p , так и по N в силу свойств функций $\Delta_{N1}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha), \Delta_{N2}^{(nj)}(b, T, \omega, \alpha)$ и достаточно быстрого стремления к

нулю коэффициентов $a_{jq}^{(n)}(\alpha)$ при $j \neq q$. Вновь увеличим немного параметр α и выберем в качестве начального приближения $b^{(0)}(\omega)$, $T^{(0)}(\omega)$ выражения, полученные для предыдущего значения α . Получим сходящийся итерационный процесс. Двигаясь таким образом по параметру α , можно построить с любой степенью точности функции $b(\omega)$, $T(\omega)$ как решения уравнений (2.20), (2.21) и соответствующие им кривые в плоскости (b, T) для различных значений n и других параметров. Эти кривые необходимо дополнить прямыми $b = b_*$, где b_* определяются как решения уравнения $\det P_N^{(n)}(0, \alpha) = 0$, $N \rightarrow \infty$ и соответствуют нулевым точкам спектра пучка операторов (2.14). Это дает возможность построить картину D -разбиений плоскости параметров (b, T) при других фиксированных параметрах (2.14). При этом посредством D_j обозначаются области в плоскости (b, T) , при значении параметров из которых пучок операторов (2.14) имеет j точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости, а границы этих областей соответствуют точкам спектра, лежащим на мнимой оси. Заметим, что прямая $b = 0$ согласно (2.16) принадлежит области D_0 . Двигаясь от прямой $b = 0$ в направлении увеличения и уменьшения параметра b при $T > 0$, определяем область D_0 . Дополнительная проверка отсутствия точек спектра пучка операторов (2.14) в правой комплексной полуплоскости при значении параметров $(b, T) \in D_0$ осуществляется следующим образом. На внутренность области D_0 наносится сетка по b и с шагом $h > 0$. В точках сетки вычисляется приращение функции $\text{Arg}(\det P_N^{(n)}(\lambda, \alpha))$ при обходе в положительном направлении границы полукруга $\{\lambda = re^{i\psi}, 0 \leq r \leq R, -\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2\}$. Равенство нулю приращения аргумента обеспечивает отсутствие корней уравнения $\det P_N^{(n)}(\lambda, \alpha) = 0$ в точках указанного полукруга. Увеличивая R , получим аналогичное утверждение для правой комплексной полуплоскости. Границы областей D_j в дальнейшем будем рассматривать в виде зависимости $T = T_j(b)$. Отметим, что анализ движения точек спектра пучка операторов (2.14) при из-

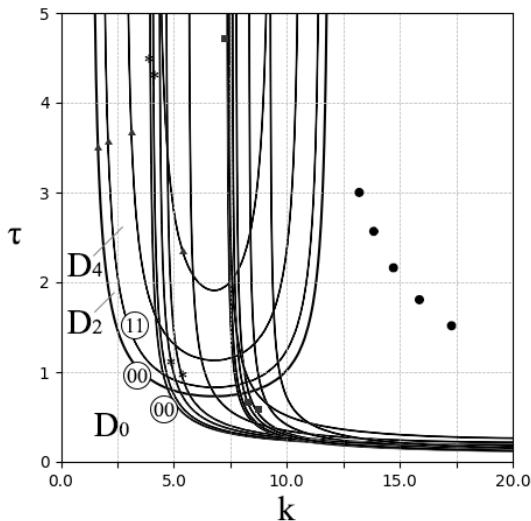
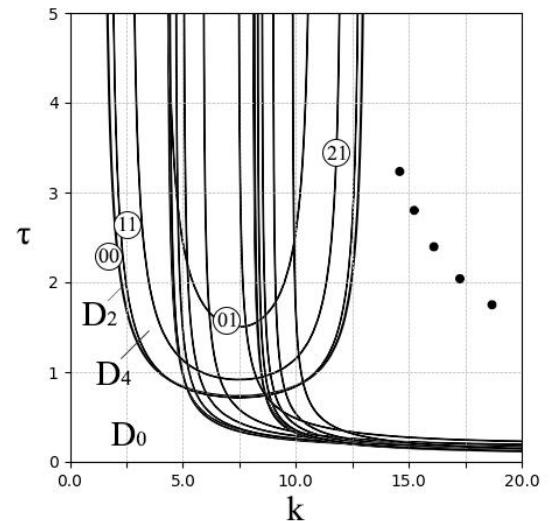
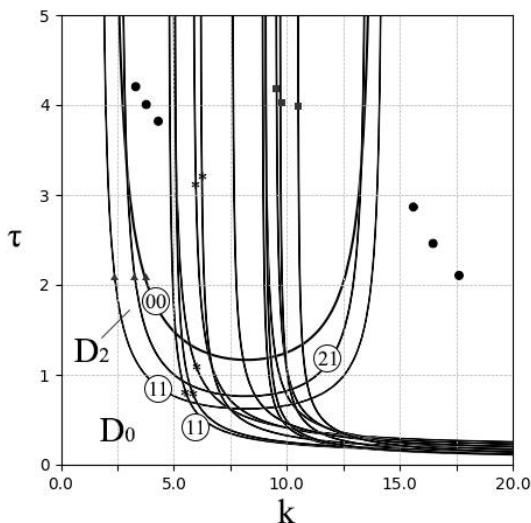
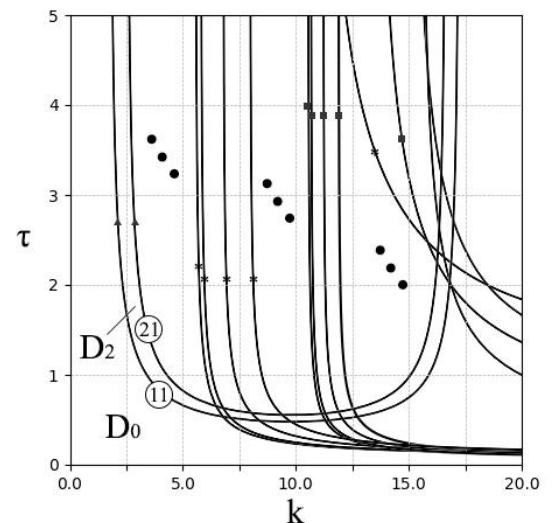
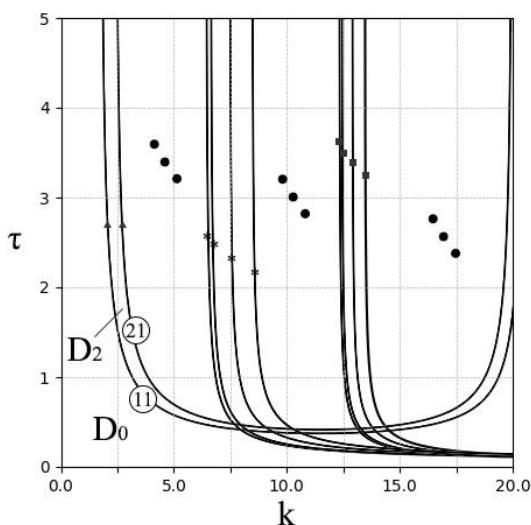
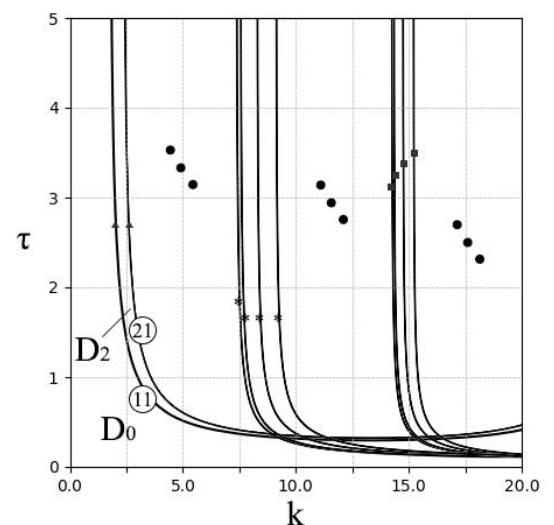
менении параметров b и T , связанного с прохождением границы области D_0 (и других областей) требует отдельного рассмотрения. Об этом будет сказано в дальнейшем.

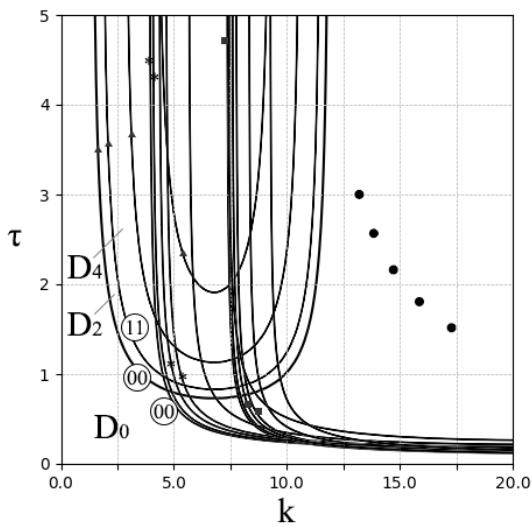
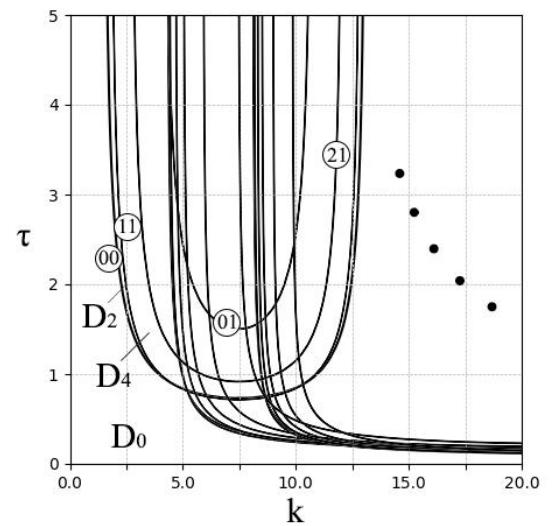
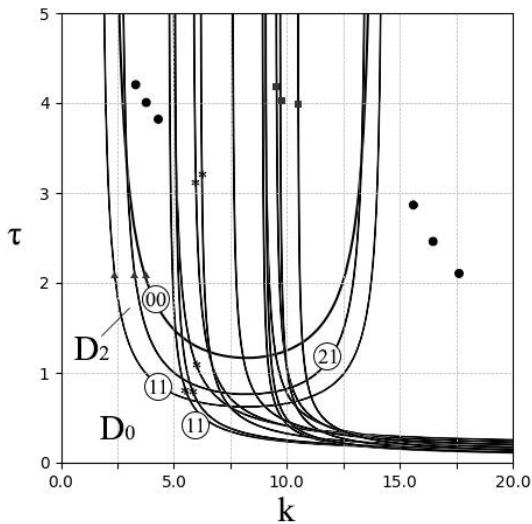
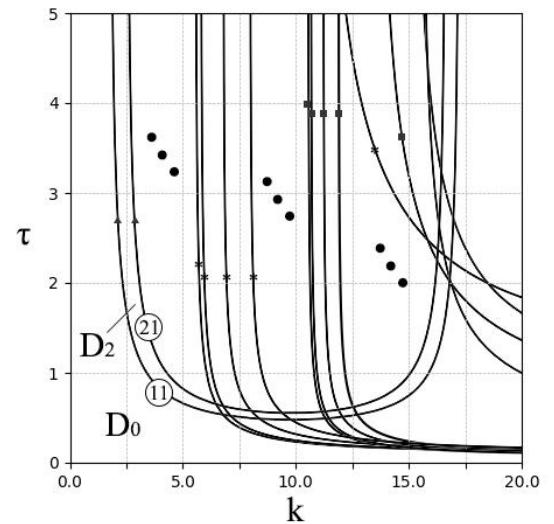
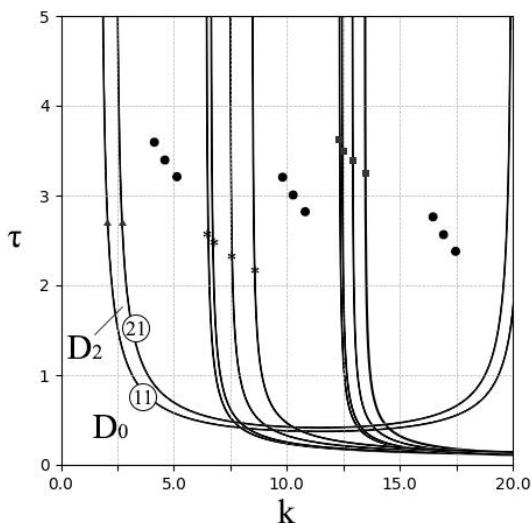
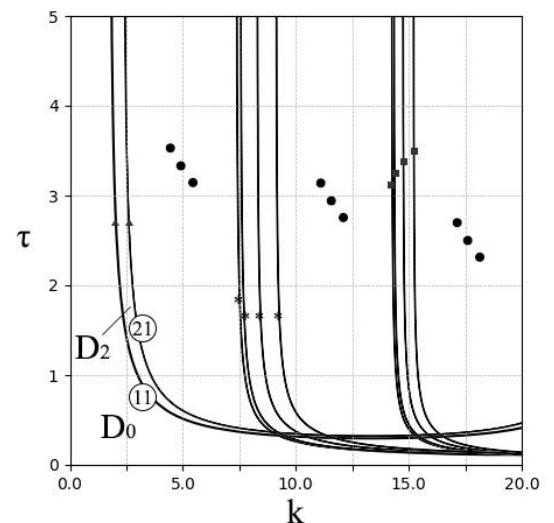
Параметр b не является параметром начально-краевой задачи (2.1)-(2.2) (параметром математической модели), поэтому перестроим плоскость b, T в плоскость параметров K, T . Используем для этого полученные из (2.7)-(2.10) выражения

$$K = K(u) = \alpha^2 u / (1 + \gamma \cos(u)), \quad b = b(u) = u \gamma \sin(u) / (1 + \gamma \cos(u)),$$

$$K'(u) = \alpha^2 (1 + b(u)) / (1 + \gamma \cos(u)), \quad (2.24)$$

которые рассмотрим как функции состояния равновесия u . Обозначим через U_k , $k = 1, 2, \dots$ области на оси $u \geq 0$ в которых $b(u) > -1$. В этих областях $K(u)$ монотонно возрастает при увеличении u . Отметим, что состояния равновесия u начально-краевой задачи (2.1)-(2.2), для которых $b(u) < -1$, всегда неустойчивы, поэтому такие области рассматривать не будем. Выразим в областях $u \in U_j$ $u = u_k(K)$, $k = 1, 2, \dots$ и подставим $b(u)$. В результате получим счетное число функций $b = b_k(K) = b(u_k(K))$. Подставим теперь эти функции в зависимости $T = T_j(b)$. В результате получим уравнения $T = T_{jk}(K) = T_j(b_k(K))$ границ областей D_j в плоскости K, T . При значениях параметров K, T , принадлежащих этим кривым, пучек операторов (2.7), построенные на состоянии равновесия $u_k(K)$ будет иметь точки спектра, принадлежащие мнимой оси комплексной плоскости. На рис. 1-6 для разных значений параметров приведены картины D -разбиений плоскости параметров (K, T) .

Рис. 2.1 $D = 0.1, \alpha=1, \gamma=0.75$ Рис. 2.2 $D = 0.1, \alpha=1.05, \gamma=0.75$ Рис. 2.3 $D = 0.1, \alpha=1.1, \gamma=0.75$ Рис. 2.4 $D = 0.1, \alpha=1.2, \gamma=0.75$ Рис. 2.5 $D = 0.1, \alpha=1.3, \gamma=0.75$ Рис. 2.6 $D = 0.1, \alpha=1.4, \gamma=0.75$

Рис. 2.7 $D = 0.1, \alpha=1, \gamma=0.5$ Рис. 2.8 $D = 0.1, \alpha=1.05, \gamma=0.5$ Рис. 2.9 $D = 0.1, \alpha=1.1, \gamma=0.5$ Рис. 2.10 $D = 0.1, \alpha=1.2, \gamma=0.5$ Рис. 2.11 $D = 0.1, \alpha=1.3, \gamma=0.5$ Рис. 2.12 $D = 0.1, \alpha=1.4, \gamma=0.5$

На рис. 1 - 6 для значений $D = 0.1, \gamma = 0.75$ и различных значений α приведены картины D -разбиений плоскости параметров (K, T) характеристического уравнения (2.18) (пучка операторов (2.14)). На рисунках в соответствии с методом D -разбиений через D_j обозначены области, при значении параметров из которых пучок операторов (2.14) имеет j точек спектра, принадлежащих правой комплексной полуплоскости, а границы этих областей соответствуют точкам спектра, лежащим на мнимой оси. Кривые, отмеченные треугольником, относятся к состояниям равновесия, принадлежащим областям U_1 , отмеченные звездочкой – к области U_2 , отмеченные квадратом – к области U_3 . Каждая кривая имеет маркер (на рисунках они прставлены не всегда), первая цифра которого показывает номер n , вторая – значение j соответствующей собственной функции пучка операторов (2.14). Точками на рисунка условно обозначена совокупность границ областей D_j не имеющих принципиального значения для рассматриваемой задачи.

Из рисунков видно, что имеются значения параметра α, K, T , при которых на границе области устойчивости D_0 (и других D_j), пучек операторов (2.14) имеет пару комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_*, \omega_* > 0$ (правая граница области D_0). Если при этом $n = 0$, то такой точке спектра $i\omega_*$ соответствует одна собственная функция

$$u_{0j}^*(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}(\rho) v_{0k}, \quad v_0 = (v_{00}, v_{01}, \dots) \in \tilde{l}_2^2,$$

$$P^{(0)}(i\omega_*, \alpha)v_0 = 0, \quad \|u_{0j}^*(\rho)\|_{L_2} = 1, \quad j > 0,$$

$$u_{00}^*(\rho) \equiv u_{00}^* = const, \tag{2.25}$$

если $n \neq 0$, то две собственные функции $u_{nj}^*(\rho, \phi) = u_{nj}^*(\rho)e^{in\phi}$, $u_{-nj}^*(\rho, \phi) =$

$u_{nj}^*(\rho)e^{-in\phi}$, $\|u_{nj}^*(\rho, \phi)\|_{L_2} = 1$, где

$$u_{nj}^*(\rho) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{nj}(\rho)v_{nj}, \quad v_n = (0, v_{n1}, \dots) = (0, v_{*n}) \in \tilde{l}_2^2,$$

$$P^{(n)}(i\omega_*, \alpha)v_{*n} = 0. \quad (2.26)$$

Введем в рассмотрение сопряженный с (2.14) пучек операторов $P^*(\lambda)$ из условия

$$(P(\lambda)u(\rho, \phi), v(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = (u(\rho, \phi), P^*(\lambda)v(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2}, \quad u(\rho, \phi), v(\rho, \phi) \in \tilde{H}^2(K_R).$$

С учетом равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho u(\rho/\alpha, \phi) \bar{v}(\rho, \phi) d\rho d\phi &= \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{R_*} \rho u(\rho, \phi) Q_{\alpha_*} \bar{v}(\rho, \phi) d\rho d\phi, \quad \alpha_* = 1/\alpha, \quad R_* = R/\alpha, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$Q_{\alpha_*} v(\rho, \phi) = \begin{cases} \alpha_*^{-2} v(\rho/\alpha_*, \phi), & 0 \leq \rho \leq R_*, \\ 0, & R_* < \rho \leq R \end{cases} \quad (2.28)$$

оператор сжатия, имеем вид сопряженного оператора

$$P^*(\lambda)v(\rho, \phi) \equiv \lambda v(\rho, \phi) + v(\rho, \phi) - D\Delta_{\rho, \phi}v(\rho, \phi) + bQ_{\alpha_*}v(\rho, \phi)e^{-\lambda T}. \quad (2.29)$$

При этом, если λ_* точка спектра пучка операторов (2.14), то $\bar{\lambda}_*$ точка спектра пучка операторов (2.29). Таким образом, точке спектра $i\omega_*$ пучка операторов (2.14) отвечает точка спектра $-i\omega_*$ пучка операторов (2.29), а соответствующие

ей собственные функции имеют вид

$$v_{0j}^*(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} u_{0k}(\rho) w_{0k}, \quad w_0 = (w_{00}, w_{01}, \dots) \in \tilde{l}_2^2,$$

$$P^{(0)*}(-i\omega_*, \alpha) w_0 = 0, \quad j > 0, \quad v_{00}^*(\rho) \equiv v_{00}^* = \text{const}, \quad (2.30)$$

при $n = 0$, и

$$v_{nj}^*(\rho, \phi) = v_{nj}^*(\rho) e^{in\phi}, \quad v_{-nj}^*(\rho, \phi) = v_{nj}^*(\rho) e^{-in\phi},$$

$$v_{nj}^*(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{nk}(\rho) w_{nk},$$

$$w_n = (0, w_{n1}, \dots) = (0, w_{*n}) \in \tilde{l}_2^2, \quad P^{(n)*}(-i\omega^*, \alpha) w_{*n} = 0, \quad (2.31)$$

при $n \neq 0$. Здесь $P^{(n)*}(.)$ сопряженная с $P^{(n)}(.)$ матрица.

Функции (2.30), (2.31) могут быть выбранными, удовлетворяющими следующим условиям

$$(P'(i\omega_*) u_{0j}^*(\rho), v_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 1, \quad (P'(i\omega_*) u_{0j}^*(\rho), \bar{v}_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 0, \quad (2.32)$$

и

$$(P'(i\omega_*) u_{nj}^*(\rho, \phi), v_{nj}^*(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = 1, \quad (P'(i\omega_*) u_{nj}^*(\rho, \phi), \bar{v}_{nj}^*(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = 0,$$

$$(P'(i\omega_*) u_{nj}^*(\rho, \phi), v_{-nj}^*(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = 0,$$

$$(P'(i\omega_*) u_{-nj}^*(\rho, \phi), \bar{v}_{-nj}^*(\rho, \phi))_{\tilde{L}_2} = 1. \quad (2.33)$$

Исследуем движение точек спектра пучка операторов (2.14) при прохождении параметрами K, T границы области D_0 (области D_j). Выберем точку K_*, T_* границы области D_0 (области D_j), при которой пучек операторов (2.14) имеет

точки спектра $\pm i\omega_*$, $\omega_* > 0$, построенный на состоянии равновесия $u_* = u(K_*)$. Положим в (2.14) $K = K^* + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon$ малый параметр, и обозначим соответствующий пучек операторов $P(\lambda; \varepsilon)$. Также имеем

$$u_*(\varepsilon) = u(K_* + \varepsilon) = u_* + \varepsilon u_{*1} + \dots, \quad u_{*1} = u_*/(K_*(1 + b(u_*))),$$

$$b(\varepsilon) = b(u_*(\varepsilon)) = b(u_*) + \varepsilon b_1 + \dots,$$

$$b_1 = \gamma \sin(u_*) + u_* \gamma \cos(u_*)/(1 + b(u_*)). \quad (2.34)$$

Рассмотрим сначала случай $n = 0$. Пучек операторов (2.14) имеет точки спектра $\lambda(\varepsilon), \bar{\lambda}(\varepsilon), \lambda(0) = i\omega_*$ и соответствующие им собственные функции $u_{0j}^*(\rho; \varepsilon), \bar{u}_{0j}^*(\rho; \varepsilon)$, аналитически зависящие от ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Представим

$$\lambda(\varepsilon) = i\omega_* + \varepsilon \lambda_1 + \dots, \quad u_{0j}^*(\rho; \varepsilon) = u_{0j}^*(\rho) + \varepsilon u_{0j}^{(1)}(\rho) + \dots \quad (2.35)$$

и подставим в (2.14). Приравняв коэффициенты при первой степени параметра ε , получим для определения $u_{0j}^{(1)}(\rho)$ операторное уравнение в пространстве $\tilde{L}_2(K_R)$

$$P(i\omega_*; 0)u_{0j}^{(1)}(\rho) + \lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{0j}^*(\rho) + b_1 u_{0j}^*(\rho)e^{-i\omega_* T^*} = 0, \quad (2.36)$$

с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$. Условие разрешимости уравнения (2.36) $(\lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{0j}^*(\rho) + b_1 u_{0j}^*(\rho)e^{-i\omega_* T^*}, v_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 0$ с учетом (2.36) позволяет однозначно определить

$$\lambda_1 = -b_1 e^{-i\omega_* T^*} (u_{0j}^*(\rho/\alpha), v_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2}. \quad (2.37)$$

При выполнении условия (2.37) решение $u_{0j}^{(1)}(\rho)$ уравнения (2.36), удовлетворяющее условию $(u_{0j}^{(1)}(\rho), v_{0j}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 0$, определяется однозначно. Аналогично

определяются последующие слагаемые в разложениях (2.35).

В случае $n > 0$ точкам спектра $\lambda(\varepsilon)(\lambda(0) = i\omega_*)$ и $\bar{\lambda}(\varepsilon)$ отвечают соответственно собственные функции

$$\begin{aligned} u_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon) &= u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) e^{in\phi}, \\ u_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon) &= u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) e^{-in\phi}, \quad \bar{u}_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon), \bar{u}_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.38)$$

которые аналитически зависят от ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Представим $\lambda(\varepsilon)$ в виде (2.35) и

$$u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) = u_{nj}^*(\rho) + \varepsilon u_{nj}^{(1)}(\rho) + \dots, \quad u_{-nj}^*(\rho; \varepsilon) = u_{-nj}^*(\rho) + \varepsilon u_{-nj}^{(1)}(\rho) + \dots. \quad (2.39)$$

Подставим $u_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon)$ в (2.14) и приравняем коэффициенты при первой степени ε . В результате получим для определения $u_{nj}^{(1)}(\rho)$ операторное уравнение в пространстве $\tilde{L}_2(K_R)$

$$P(i\omega_*; 0)u_{nj}^{(1)}(\rho)e^{in\phi} + (\lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{nj}^*(\rho) + b_1 e^{-i\omega_* T_*} u_{nj}^*(\rho/\alpha))e^{in\phi} = 0, \quad (2.40)$$

с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$. Из первого условия разрешимости уравнения (2.40)

$$((\lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{nj}^*(\rho) + b_1 e^{-i\omega_* T_*} u_{nj}^*(\rho/\alpha))e^{in\phi}, v_{nj}^*(\rho)e^{in\phi})_{\tilde{L}_2} = 0,$$

однозначно определяем

$$\lambda_1 = -b_1 e^{-i\omega_* T_*} (u_{nj}^*(\rho/\alpha), v_{nj}^*(\rho))_{\tilde{L}_2}. \quad (2.41)$$

Второе условие разрешимости уравнения (2.40)

$$((\lambda_1 P'(i\omega_*; 0)u_{nj}^*(\rho) + b_1 e^{-i\omega_* T_*} u_{nj}^*(\rho/\alpha))e^{in\phi}, v_{nj}^*(\rho)e^{-in\phi})_{\tilde{L}_2} = 0,$$

выполняется автоматически.

При выполнении условий (2.41) решение $u_{nj}^{(1)}(\rho)$ уравнения (2.40), удовлетворяющее равенству $(u_{nj}^{(1)}(\rho), v_{nj}^*(\rho))_{\tilde{L}_2} = 0$, определяется однозначно. Аналогично определяются последующие слагаемые в разложениях (2.35), (2.39).

Знак $Re\lambda_1$ определяет движение точек спектра (2.14) при прохождении параметрами K и T границ построенных областей, что позволяет определить картину D_j разбиений. В соответствии с этим определена картина D -разбиений, приведенная на рис. 1-6. Отметим, что на границе области устойчивости пучек операторов (2.14) может иметь две пары комплексно спектральных точек спектра, лежащих на мнимой оси комплексной плоскости (см. рис. 2). При этом одной из них отвечает собственная функция вида (2.25), а другой две – вида (2.26), а между точками спектра могут быть выполнены резонансные соотношения.

2.3 Бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.2)

Изучим возможные бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи (2.1)–(2.2) из однородных состояний равновесия, обусловленные потерей их устойчивости. Воспользуемся для этого методом как в главе 1 инвариантных (центральных) многообразий распределенных динамических систем [28, 35] и теорией нормальных форм нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности состояний равновесия [8]. При фиксированных D, γ, α выберем параметры K_*, T_* таким образом, чтобы они соответствовали точке границы области устойчивости состояния равновесия $u_*(K_*)$ (см. рис. 1–6) начально-краевой задачи (2.1)–(2.2) и при этом пучок операторов (2.14) имел одну пару комплексно сопряженных точек спектра $\pm i\omega_*, \omega_* > 0$, отвечающих случаю $n > 0$ (см., например, рис. 5–6).

Положим $K = K_* + \varepsilon$, где ε – малый параметр, и исследуем возможность

биfurкации из состояния равновесия $u^*(\varepsilon)$, определяемого согласно (2.35), пространственно-неоднородных решений при изменении параметра ε . Отметим, что теперь в (2.8)-(2.11), (2.14), (2.29) $b = b(\varepsilon)$ определяется согласно (2.35), а

$$b_2 = b_2(\varepsilon) = -(K^* + \varepsilon)\gamma \cos(u^*(\varepsilon)). \quad (2.42)$$

соответственно в дальнейшем будем использовать обозначение пучка операторов (2.14) $P(\lambda; \varepsilon)$, пучка операторов (2.29) $P^*(\lambda; \varepsilon)$.

Рассмотрим случай $n > 0$. Как и ранее $\lambda(\varepsilon), \bar{\lambda}(\varepsilon)$ точки спектра пучка операторов $P(\lambda; \varepsilon)$, удовлетворяющие условию $\lambda(0) = i\omega_*$. В этом им соответствуют собственные функции (2.38). Соответственно точкам спектра $\bar{\lambda}(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)$ пучка операторов $P^*(\lambda; \varepsilon)$ соответствуют собственные функции

$$v_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon) = v_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{in\phi}, v_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon) = v_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{-in\phi}, \quad \bar{v}_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon), \bar{v}_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon), \quad (2.43)$$

где $v_{nj}^*(\rho; \varepsilon), v_{-nj}^*(\rho; \varepsilon), v_{nj}^*(\rho; 0) = v_{nj}^*(\rho), v_{-nj}^*(\rho; 0) = v_{-nj}^*(\rho)$ аналитически зависящие от ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ функции, а $v_{nj}^*(\rho), v_{-nj}^*(\rho)$ определены в (2.31). Функции (2.43) могут быть выбраны таким образом, чтобы между функциями (2.38) и (2.43) были выполнены условия

$$(P'(\lambda(\varepsilon); \varepsilon)u_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon), v_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon))_{\tilde{L}_2} = 1, \\ (P'(\lambda(\varepsilon); \varepsilon)u_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon), \bar{v}_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon))_{\tilde{L}_2} = 0, \quad (2.44)$$

$$(P'(\lambda(\varepsilon); \varepsilon)u_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon), v_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon))_{\tilde{L}_2} = 0, \\ (P'(\lambda(\varepsilon); \varepsilon)u_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon), \bar{v}_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon))_{\tilde{L}_2} = 1. \quad (2.45)$$

Рассмотрим присоединенную к (2.12)-(2.12) (формально сопряженную [?] с

(2.12)-(2.13)) начально-краевую задачу

$$v_t(\rho, \phi, t) - v(\rho, \phi, t) = -D\Delta_{\rho\phi}v(\rho, \phi, t) + b(\varepsilon)Q_{\alpha_*}v(\rho, \phi, t + T), \quad (2.46)$$

$$v_\rho(R, \phi, t) = 0, \quad v(\rho, 0, t) = v(\rho, 2\pi, t), \quad v_\phi(\rho, 0, t) = v_\phi(\rho, 2\pi, t),$$

$$v(\rho, \phi, s) = v_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; 0, T). \quad (2.47)$$

относительно функции $v(\rho, \phi, t + s)$ в области $\bar{K}_R \times \mathbb{R}^-$, где $\mathbb{R}^- = \{t : -\infty < t \leq 0\}, \quad 0 \leq s \leq T \quad (T > 0)$.

Фазовым пространством начально-краевой задачи (2.46)-(2.48) является пространство

$H(K_R; 0, T) = \{v(\rho, \phi, s) : v(\rho, \phi, s) \in L_2(K_R) \text{ при каждом } 0 \leq s \leq T,$
 $\|v(\rho, \phi, s)\|_{L_2} \in C([0, T])\}$, областью определения правой части уравнения (2.46)
является пространство $H_0(K_R; 0, T) = \{v(\rho, \phi, s) : v(\rho, \phi, s) \in C(\bar{K}_R \times [0, T]),$
 $v(\rho, 0, s) = v(\rho, 2\pi, s), \quad v_\phi(\rho, 0, s) = v_\phi(\rho, 2\pi, s), \quad \text{при каждом } s, \quad v(\rho, \phi, s) \in H^2(K_R)\}$. Нормы в указанных пространствах вводятся по аналогии с
 $H(K_R; -T, 0), \quad H_0(K_R; -T, 0)$. Начально-краевая задача (2.46)-(2.55) корректно
поставлена (и разрешима) в сторону убывания t .

Между элементами пространств $u(\rho, \phi, s) \in H(K_R; -T, 0)$ и
 $v(\rho, \phi, s) \in H(K_R; 0, T)$ определим скалярное произведение

$$\begin{aligned} & \langle u(\rho, \phi, s), v(\rho, \phi, s) \rangle = \\ & = (u(\rho, \phi, 0), v(\rho, \phi, 0))_{\tilde{L}_2} - b(\varepsilon) \int_{-T}^0 (u(\rho/\alpha, \phi, \xi), v(\rho, \phi, \xi + T))_{\tilde{L}_2} d\xi. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Решения (2.12)-(2.13) и (2.46)-(2.47) связаны между собой следующим образом. Обозначим через $u(\rho, \phi, t + s)$ и $v(\rho, \phi, t + s)$ решения (2.12)-(2.13) и (2.46)-(???) соответственно, определенные при $t > \tau_1, u(\rho, \phi, \tau_1 + s) = u_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$ и $t < \tau_2, v(\rho, \phi, \tau_2 + s) = v_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; 0, T)$, и пусть при

этом $\tau_1 < \tau_2$. Тогда при $\tau_1 < t < \tau_2$ справедливо равенство

$$\langle u(\rho, \phi, t + s), v(\rho, \phi, t + s) \rangle = c \quad (c = const). \quad (2.49)$$

Для решений $u(\rho, \phi, t + s)$ и $v(\rho, \phi, t + s)$, определенных при $-\infty < t < \infty$, равенства (2.49) выполнены при всех t . Для доказательства равенства (2.49) продифференцируем его по t с учетом уравнений (2.12) и (2.46). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u(\rho, \phi, t + s), v(\rho, \phi, t + s) \rangle &= \\ &= (u_t(\rho, \phi, t), v(\rho, \phi, t))_{\tilde{L}_2} + (u(\rho, \phi, t), v_t(\rho, \phi, t))_{\tilde{L}_2} - \\ &\quad - b \int_{-T}^0 (u_t(\rho/\alpha, t + \phi, \xi), v(\rho, \phi, \xi + T))_{\tilde{L}_2} d\xi - \\ &\quad - b \int_{-T}^0 (u(\rho/\alpha, \phi, t + \xi), v_t(\rho, \phi, t + \xi + T))_{\tilde{L}_2} d\xi = \\ &= -(u(\rho, \phi, t), v(\rho, \phi, 0))_{\tilde{L}_2} + D(\Delta_{\rho\phi} u(\rho, \phi, t), v(\rho, \phi, t))_{\tilde{L}_2} + (u(\rho, \phi, t), v(\rho, \phi, t))_{\tilde{L}_2} - \\ &\quad - D(u(\rho, \phi, t), \Delta_{\rho\phi} v(\rho, \phi, t))_{\tilde{L}_2} - b(u(\rho/\alpha, \phi, t - T), v(\rho, \phi, t))_{\tilde{L}_2} + \\ &\quad + b(u(\rho, \phi, t), Q_{\alpha_*} v(\rho, \phi, t + T))_{\tilde{L}_2} - \\ &\quad - b(u(\rho/\alpha, \phi, t), v(\rho, \phi, t + T))_{\tilde{L}_2} + b(u(\rho/\alpha, \phi, t - T), v(\rho, \phi, t))_{\tilde{L}_2} + \\ &\quad + b \int_{-T}^0 (u(\rho/\alpha, \phi, t + \xi), v_t(\rho, \phi, t + \xi + T))_{\tilde{L}_2} d\xi - \\ &\quad - b \int_{-T}^0 (u(\rho/\alpha, \phi, t + \xi), v_t(\rho, \phi, t + \xi + T))_{\tilde{L}_2} d\xi = 0. \quad (2.50) \end{aligned}$$

Определяя теперь решения (2.46)-(2.47) вида $v(\rho, \phi, t) = v(\rho, \phi)e^{pt}, p \in \mathbb{C}$

получим характеристический пучок операторов

$$\begin{aligned} Q(p)v(\rho, \phi) &\equiv pv(\rho, \phi) - v(\rho, \phi) + D\Delta_{\rho, \phi}v(\rho, \phi) - bQ_{\alpha_*}v(\rho, \phi)e^{pT} \equiv \\ &\equiv -P^*(-p)v(\rho, \phi) \quad (2.51) \end{aligned}$$

действующий в $\tilde{L}_2(K_R)$ с областью определения $\tilde{H}^2(K_R)$. Точки спектра (2.51) и точки спектра (2.14) могут быть упорядочены таким образом, что будут выполнены соотношения $p_j = -\bar{\lambda}_j, j = 1, 2, \dots$. Таким образом, пучек операторов $Q(p; \varepsilon)$ имеет пару комплексно сопряженных точек спектра $p(\varepsilon) = -\bar{\lambda}(\varepsilon), \bar{p}(\varepsilon)$, которым отвечают собственные функции (2.43).

Введем в рассмотрение функции

$$\begin{aligned} e_1(\rho, \phi, s; \varepsilon) &= u_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon)e^{\lambda(\varepsilon)s} = u_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{in\phi}e^{\lambda(\varepsilon)s}, \quad \bar{e}_1(\rho, \phi, s; \varepsilon), \\ e_2(\rho, \phi, s; \varepsilon) &= u_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon)e^{\lambda(\varepsilon)s} = u_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{-in\phi}e^{\lambda(\varepsilon)s}, \quad \bar{e}_2(\rho, \phi, s; \varepsilon) \quad (2.52) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} h_1(\rho, \phi, s; \varepsilon) &= v_{nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon)e^{p(\varepsilon)s} = v_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{in\phi}e^{p(\varepsilon)s}, \quad \bar{h}_1(\rho, \phi, s; \varepsilon), \\ h_2(\rho, \phi, s; \varepsilon) &= v_{-nj}^*(\rho, \phi; \varepsilon)e^{p(\varepsilon)s} = v_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{-in\phi}e^{p(\varepsilon)s}, \quad \bar{h}_2(\rho, \phi, s; \varepsilon), \quad (2.53) \end{aligned}$$

между которыми согласно (2.44) выполнены соотношения

$$\begin{aligned} < e_j(\rho, \phi, s; \varepsilon), h_k(\rho, \phi, s; \varepsilon) > &= \delta_{jk}, \\ < e_j(\rho, \phi, s; \varepsilon), \bar{h}_k(\rho, \phi, s; \varepsilon) > &= 0, \quad j, k = 1, 2. \quad (2.54) \end{aligned}$$

Обозначим через $H_+(\varepsilon)$ линейную оболочку функций (2.52) т.е. множество

функций вида

$$\begin{aligned} u_+(\rho, \phi, s; \varepsilon) &= e_1(\rho, \phi, s; \varepsilon)z_1 + \bar{e}_1(\rho, \phi, s; \varepsilon)\bar{z}_1 + e_2(\rho, \phi, s; \varepsilon)z_2 + \bar{e}_2(\rho, \phi, s; \varepsilon)\bar{z}_2 = \\ &= (u_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{\lambda(\varepsilon)s}z_1 + \bar{u}_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{\bar{\lambda}(\varepsilon)s}\bar{z}_2)e^{in\phi} + (\bar{u}_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{\bar{\lambda}(\varepsilon)s}\bar{z}_1 + \\ &\quad u_{nj}^*(\rho; \varepsilon)e^{\lambda(\varepsilon)s}z_2)e^{-in\phi}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad (2.55) \end{aligned}$$

а через $H_-(\varepsilon)$ множество функций $u_-(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0)$, для которых справедливы равенства $\langle u_-(\rho, \phi, s), h_j(\rho, \phi, s; \varepsilon) \rangle = 0$, $\langle u_-(\rho, \phi), \bar{h}_j(\rho, \phi, s; \varepsilon) \rangle = 0$, $j = 1, 2$. Согласно (2.54) $H_+(\varepsilon) \oplus H_-(\varepsilon) = H_0(K_R, -T, 0)$. $H_+(\varepsilon)$ определяет четырехмерное пространство решений $u_+(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ начально-краевой задачи (2.12)-(2.13) вида (2.55), в котором $z_j = z_j(t)$ решение уравнения

$$\dot{z}_j = \lambda(\varepsilon)z_j \quad j = 1, 2. \quad (2.56)$$

Обозначим через $S_{u_*}(R) = \{u(\rho, \phi, s) : u(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0), \|u(\rho, \phi, s) - u_*\|_{H_0} < R\}$ -шар радиуса R с центром в $u_* = u_*(K, \alpha, \gamma)$ пространства $H_0(K_R; -T, 0)$. В случае $u_* = 0$ будем использовать обозначение $S(R) = S_0(R)$. В дальнейшем $S_\pm(R; \varepsilon) = S(R) \cap H_\pm(\varepsilon)$.

Множество $M(\varepsilon) \subset S(R)$ будем называть инвариантным многообразием начально-краевой задачи (2.8)–(2.11), если для ее решений $u(\rho, \phi, t+s)$ с начальными условиями $u(\rho, \phi, t_0 + s) \in M(\varepsilon)$ при некотором t_0 следует, что $u(\rho, \phi, t + s) \in M(\varepsilon)$ при всех $t > t_0$ пока $u(\rho, \phi, t + s) \in S(R)$.

Результаты работы [28] и монографии [35] применительно к начально-краевой задаче (2.8)–(2.11) позволяют сформулировать следующие теоремы.

Теорема 4. *Существует такие $\varepsilon_0 > 0$ и $R > 0$, что при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ начально-краевая задача (2.7)–(2.11) имеет инвариантное многообразие $M(\varepsilon) \subset S(R)$,*

которое может быть представлено в виде

$$u_- = G(u_+; \varepsilon), \quad u_{\pm} \in S_{\pm}(R; \varepsilon), \quad (2.57)$$

где нелинейный оператор $G(u_+; \varepsilon)$ ($G(0; \varepsilon) \equiv 0$) действует из $S_+(R; \varepsilon) \oplus [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ в $S_-(R; \varepsilon)$ и гладко зависит от входящих переменных (в смысле дифференцирования по Фреше).

Обозначим через $d(u(\rho, \phi, s); \varepsilon)$ расстояние от точки $u(\rho, \phi, s) \in S(R)$ до множества $M(\varepsilon)$ в метрике пространства $H_0(K_R; -T, 0)$. Справедлива

Теорема 5. Пусть $u_0(\rho, \phi, s) \in S(R)$ начальное условие решения $u(\rho, \phi, t+s; \varepsilon)$ начально-краевой задачи (2.7)–(2.11) ($u(\rho, \phi, s; \varepsilon) = u_0(\rho, \phi, s)$). Тогда $t > 0$

$$d(u(\rho, \phi, t+s; \varepsilon); \varepsilon) < K d(u_0(\rho, \phi, s), \varepsilon) e^{-\alpha t}, \quad (2.58)$$

где $K, \alpha > 0$ некоторые постоянные.

Таким образом, поведение решений начально-краевой задачи (2.8)–(2.11) с начальными условиями из $S(R)$ полностью определяется поведением решений на инвариантном многообразии $M(\varepsilon)$, которое может быть описано поведением решений некоторой четырехмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Многообразие $M(\varepsilon)$ следуя [35], будем называть центральным многообразием начально-краевой задачи (2.8)–(2.11).

На основании представления (2.55) оператор $G(u_+; \varepsilon)$ будем рассматривать как оператор $G(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon)$ ($G(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \bar{z}; \varepsilon) \equiv \equiv G(\rho, \phi + 2\pi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon), G(\rho, \phi, s, 0, 0, 0, 0; \varepsilon) \equiv 0$), действующий из $\mathbb{C}^4 \oplus [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ в $S_+(R)$ и гладко зависящий от входящих переменных. С учетом этого и (2.55), (2.56) представим оператор $G(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon)$ и систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих пове-

дение траекторий траекторий (2.8)–(2.11) на $M(\varepsilon)$ в следующем виде

$$\begin{aligned}
 G(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) = & \\
 = e_1(\rho, \phi, s; \varepsilon)z_1 + \bar{e}_1(\rho, \phi, s; \varepsilon)\bar{z}_1 + e_2(\rho, \phi, s; \varepsilon)z_2 + \bar{e}_2(\rho, \phi, s; \varepsilon)\bar{z}_2 + & \\
 + v_{2000}(\cdot)z_1^2 + v_{1100}(\cdot)z_1\bar{z}_1 + v_{0200}(\cdot)\bar{z}_1^2 + \dots & \\
 + v_{0030}(\cdot)z_2^3 + v_{0021}(\cdot)z_2^2\bar{z}_2 + v_{0012}(\cdot)z_2\bar{z}_2^2 + & \\
 + v_{0003}(\cdot)\bar{z}_2^3 + g(\rho, \phi, s, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), & \quad (2.59)
 \end{aligned}$$

где $v_{jk}(\cdot) = v_{jk}(\rho, \phi, s; \varepsilon)$, $v_{jk}(\cdot) = \bar{v}_{kj}(\cdot)$,

$$\|g(\rho, \phi, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon})\|_{H_1} = o(|z|^3), |z| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2},$$

$$\dot{z}_1 = \lambda_1(\bar{\varepsilon})z_1 + Z_1(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) \equiv Z_1^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \quad (2.60)$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2(\varepsilon)z_2 + Z_2(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) \equiv Z_2^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (2.61)$$

где $|Z_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon)| = o(|z|^3), j = 1, 2$. Уравнения для \bar{z}_1, \bar{z}_2 получаются комплексным сопряжением (2.60)–(2.61).

Отметим важные свойства функций $g(\rho, \phi, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon), Z_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon)$, $j = 1, 2$. Пусть $u^*(\rho, \phi, t + s; \varepsilon)$ решение начально-краевой задачи (2.8)–(2.11). Продолжим его периодически по ϕ на \mathbb{R} . Функция $u^*(\rho, \phi + c, t + s; \varepsilon)$, где c произвольное вещественное число, также является решением (2.8)–(2.11), в чем легко убедиться непосредственно, обозначив $\phi_1 = \phi + c$ и с учетом равенства $\Delta_{\rho, \phi} u^* = \Delta_{\rho, \phi_1} u^*$. Исходя из этого и (2.55), система (2.60)–(2.61) инвариантна относительно преобразований

$$P_c(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = (z_1 e^{ic}, \bar{z}_1 e^{-ic}, z_2 e^{-ic}, \bar{z}_2 e^{ic}),$$

$$P_r(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2) = (z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1), \quad (2.62)$$

а также для любого вещественного c справедливо тождество

$$g(\rho, \phi + c, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) \equiv g(\rho, \phi, z_1 e^{ic}, \bar{z}_1 e^{-ic}, z_2 e^{-ic}, \bar{z}_2 e^{ic}; \varepsilon). \quad (2.63)$$

Следствием этого является представление

$$\dot{z}_1 = \lambda_1(\bar{\varepsilon}) z_1 + z_1 Z_1^\circ(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) + \bar{z}_2 Z_2^\circ(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (2.64)$$

$$\dot{z}_2 = \lambda_2(\varepsilon) z_2 + z_2 Z_1^\circ(z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1; \varepsilon) + \bar{z}_1 Z_2^\circ(z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1; \varepsilon). \quad (2.65)$$

Здесь гладкие по своим переменным функции

$$\begin{aligned} Z_j^\circ(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) &= \\ &= A_j(\varepsilon) |z_1|^2 + B_j(\varepsilon) |z_2|^2 + C_j(\varepsilon) z_1 z_2 + D_j(\varepsilon) \bar{z}_1 \bar{z}_2 + S_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon), \end{aligned}$$

где $A_j(\varepsilon), B_j(\varepsilon), C_j(\varepsilon), D_j(\varepsilon)$ гладкие комплекснозначные функции ε ,

$|S_j(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon)| = O(|z|^4)$, $|z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Приведем теперь систему (2.64)–(2.65) к "резонансной нормальной форме" [8]. На основании (2.62) резонансными кубическими мономами в уравнении для \dot{z}_j являются лишь мономы $z_j |z_1|^2$ и $z_j |z_2|^2$. Таким образом, полиномиальной заменой переменных система (2.64)–(2.65) может быть приведена к виду

$$\dot{z}_1 = z_1 (\lambda(\varepsilon) + d_1(\varepsilon) |z_1|^2 + d_2(\varepsilon) |z_2|^2) + Q(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon), \quad (2.66)$$

$$\dot{z}_2 = z_2 (\lambda(\varepsilon) + d_2(\varepsilon) |z_1|^2 + d_1(\varepsilon) |z_2|^2) + Q(z_2, \bar{z}_2, z_1, \bar{z}_1; \varepsilon), \quad (2.67)$$

где $d_j(\varepsilon) = a_j(\varepsilon) + i b_j(\varepsilon)$, а функция $Q(*) = O(|z|^5)$ инвариантна относительно преобразований P_c в следующем виде

$$e^{ic} Q(z_1 e^{ic}, z_1 e^{-ic}, z_2 e^{-ic}, z_2 e^{ic}; \varepsilon) = Q(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon).$$

Нормализующая замена может быть выбрана коммутирующей с преобразова-

ниями (2.62), откуда следует, что (2.66)–(2.67) сохраняет все свойства симметрии исходной системы. Система (2.66)–(2.67) будем называть "полной нормальной формой" а система, получающаяся из (2.66)–(2.67) отбрасыванием функций $Q(*)$, – "уточненной нормальной формой". Предположим, что $a_1(0) = Red_1(0) < 0$. Случай $a_1(0) > 0$ может быть сведен к этому случаю заменой $t \rightarrow -t$ и поэтому рассматриваться не будет. Система (2.66)–(2.67) будет далее изучаться при малых $|\varepsilon|$ в некоторой, не зависящей от ε , окрестности точки $(z_1, z_2) = (0, 0)$. Уточненную нормальную форму запишем в виде

$$\dot{z}_1 = z_1(\gamma(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)|z_1|^2 + d_2(\varepsilon)|z_2|^2), \quad (2.68)$$

$$\dot{z}_2 = z_2(\gamma(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon) + d_2(\varepsilon)|z_1|^2 + d_1(\varepsilon)|z_2|^2), \quad (2.69)$$

$\lambda(\varepsilon) = \gamma(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon)$, $\gamma(0) = 0$, $\omega(\varepsilon) = \omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon)$. Эта система изучалась в работе [17]). Результаты ее анализа необходимы для понимания дальнейшего изложения, поэтому приведем основные результаты. Введем $z_j = r_j e^{\phi_j}$, $j = 1, 2$. Тогда для квадратов "амплитуд" $p_j = r_j^2$, $j = 1, 2$, получим уравнение:

$$\dot{p}_1 = 2p_1(\gamma(\varepsilon) + a_1(\varepsilon)p_1 + a_2(\varepsilon)p_2), \quad (2.70)$$

$$\dot{p}_2 = 2p_2(\gamma(\varepsilon) + a_2(\varepsilon)p_1 + a_1(\varepsilon)p_2). \quad (2.71)$$

Систему (2.70)–(2.71), очевидно, следует рассматривать лишь при неотрицательных p_j , $j = 1, 2$. Уравнения для амплитуд "отщепились" от уравнений для фаз ϕ_j , по которым имеет место монотонное вращение с угловой скоростью. Свойства уточненной нормальной формы (2.68)–(2.69) определяются свойствами амплитудной системы (2.70)–(2.71). Предположим, что выполнено следующее условие невырожденности

$$d\gamma(\varepsilon)/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \gamma_1 > 0, \quad a_1(0)a_2(0)(a_1^2(0) - a_2^2(0)) \neq 0, \quad (2.72)$$

которое в силу гладкости функций $a_j(\varepsilon)$ выполняется при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Состояниями равновесия системы (2.70)–(2.71) являются следующие точки

$$p_1^0 = p_2^0 = 0,$$

$$p_1^0 = 0, p_2^0 = -\gamma(\varepsilon)/a_1(\varepsilon) = -\varepsilon\gamma_1/a_1(0) + O(\varepsilon^2),$$

$$p_2^0 = 0, p_1^0 = -\gamma(\varepsilon)/a_1(\varepsilon) = -\varepsilon\gamma_1/a_1(0) + O(\varepsilon^2),$$

$$p_1^0 = p_2^0 = -\gamma(\varepsilon)/(a_1(\varepsilon) + a_2(\varepsilon)) = -\varepsilon\gamma_1/(a_1(0) + a_2(0)) + O(\varepsilon^2).$$

Смысл имеют, естественно, лишь $p_j^0 \geq 0, j = 1, 2$. При выбранном нами $a_1(0) < 0$ возможны три типа перестроек фазового портрета системы (2.70)–(2.71) при смене знака ε : два при $a_1(0) + a_2(0) < 0$, отвечающие $a_2(0) < 0$ и $a_2(0) > 0$, и один при $a_1(0) + a_2(0) > 0$ (при этом обязательно $a_2(0) > 0$). Соответствующие фазовые портреты представлены на Рис.2.1-2.3.

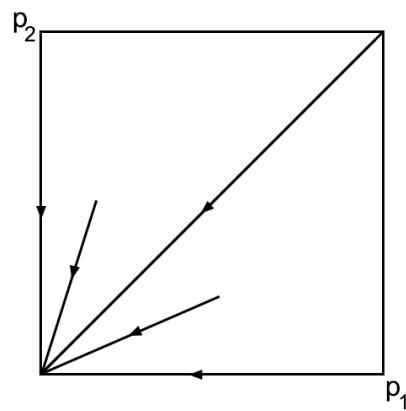
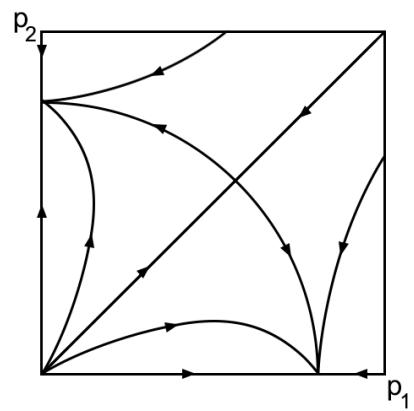

 $\mu < 0$


Рис. 2.1: Рис. 2.13 $a(0) + b(0) < 0, b(0) < 0$

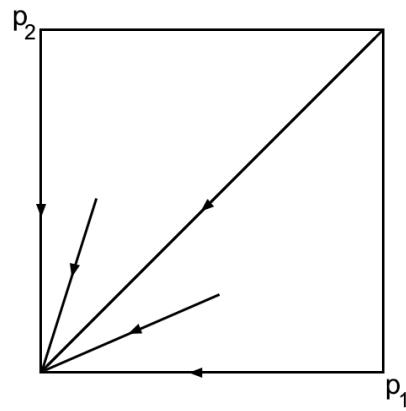
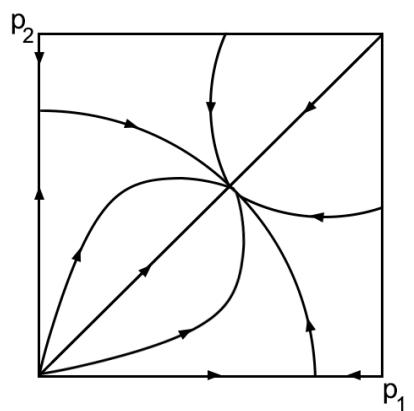

 $\mu < 0$


Рис. 2.2: Рис. 2.14 $a(0) + b(0) < 0, b(0) > 0$

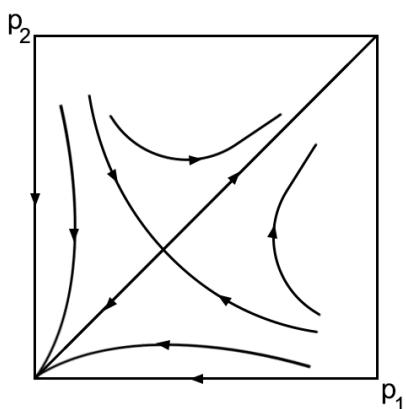
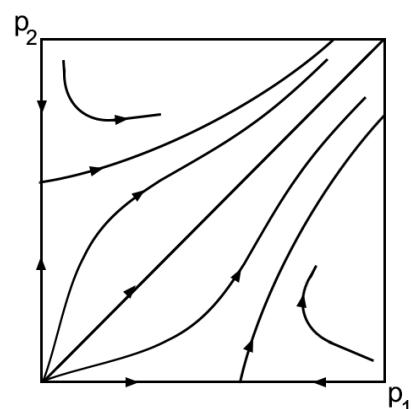

 $\mu < 0$


Рис. 2.3: Рис. 2.15 $a(0) + b(0) > 0, b(0) > 0$

Фазовые портреты не содержат предельных циклов и при достаточно малых $|\varepsilon| \neq 0$ все особые точки на них грубые.

Рассмотрим изолированные инвариантные множества укороченной нормальной формы. Рассмотрим теперь полный (четырехмерный) фазовый портрет системы (2.68)–(2.69). Состоянию равновесия $p_1^0 = p_2^0 = 0$ системы (2.70)–(2.71) отвечает состояние равновесия $z_1^0 = z_2^0 = 0$ системы (2.68)–(2.69). Состояниям равновесия $p_1^0 = 0, p_2^0 > 0$ и $p_2^0 = 0, p_1^0 > 0$ в системе (2.68)–(2.69) отвечают предельные циклы. Действительно, координатные плоскости $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$ инвариантны относительно укороченной нормальной формы (2.68)–(2.69). В плоскости $z_2 = 0$ движение фазовой точки описывается уравнением

$$\dot{z}_1 = z_1(\gamma(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon) + d_1(\varepsilon)|z_1|^2)$$

имеющим предельный цикл L_1^0 в виде окружности радиуса $r_1 = (-\gamma(\varepsilon)/a_1(\varepsilon))^{1/2}$. Угловая скорость движения точки по этому предельному циклу постоянна. Аналогично, существует предельный цикл $L_2^0(\varepsilon)$, лежащий в плоскости $z_2 = 0$. Циклы $L_1^0(\varepsilon)$ и $L_2^0(\varepsilon)$ переводятся в себя преобразованиями P_c и переставляются преобразованием P_r . Особой точке $p_1^0 = p_2^0 > 0$ системы (2.70)–(2.71) соответствует двумерный инвариантный тор $T^0(\varepsilon)$ в системе (2.70)–(2.71), составленный из замкнутых траекторий. Действительно, плоскость $r_1 = r_2$ инвариантна относительно укороченной нормальной формы (2.68)–(2.69). Движение в этой плоскости с начальными фазами ϕ_1^0 и ϕ_2^0 может быть представлено в виде

$$z_1(t) = z(t)e^{i\phi_1^0}, \quad z_2(t) = z(t)e^{i\phi_2^0},$$

где $z(t) = r(t)e^{i\phi(t)}$ и $\phi(0) = 0$. Для z получаем уравнение

$$\dot{z} = z(\gamma(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon) + (d_1(\varepsilon) + d_2(\varepsilon))|z|^2),$$

имеющее предельный цикл в виде окружности радиуса $r = (-\gamma(\varepsilon)/(a_1(\varepsilon) + a_2(\varepsilon)))^{1/2}$. Следовательно, укороченная нормальная форма (2.68)–(2.69) имеет двумерный инвариантный тор $T^0(\varepsilon)$, получающийся всевозможными сдвигами данного цикла с помощью преобразований $P_c, c \in [0, 2\pi]$. Углы ϕ_1^0 и ϕ_2^0 являются координатами на этом торе. Тор $T^0(\varepsilon)$ как целое переводится в себя преобразованием P_r . Каждая замкнутая траектория на торе переводится в себя преобразованием $P_r P_c$, где $c = (\phi_2^0 - \phi_1^0)/2$. Устойчивость перечисленных инвариантных множеств в укороченной нормальной форме (2.68)–(2.69) совпадает с устойчивостью соответствующих особых точек в амплитудной системе (2.70)–(2.71). Других изолированных инвариантных множеств система (2.68)–(2.69) не имеет, так как их нет в отщепляющейся амплитудной системе. Все полученные результаты можно перенести на полную систему (2.66)–(2.67) при достаточно малых $|\varepsilon|$, рассматривая ее как малое возмущение системы (2.68)–(2.69) в некоторой окрестности начала координат. Система (2.66)–(2.67), очевидно, имеет особую точку $p_1^0 = p_2^0 = 0$. При $\varepsilon < 0$ она асимптотически устойчива, а при $\varepsilon > 0$ – неустойчива. При $\varepsilon = 0$ нулевое состояние равновесия в силу предположения $a(0) < 0$ будет асимптотически устойчивым при $a(0) + b(0) > 0$ и неустойчивой – при $a(0) + b(0) < 0$ [18]. Укороченная нормальная форма (2.68)–(2.69) имеет изолированные грубые предельные циклы L_1^0 и L_2^0 в плоскостях $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$.

В полной нормальной форме (2.68)–(2.69) эти плоскости перестают быть инвариантными, однако, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ в системе (2.66)–(2.67) будут существовать изолированные предельные циклы $L_1(\varepsilon)$ и $L_2(\varepsilon)$, близкие к предельным циклам, системы (2.68)–(2.69) (см. [?]) вида

$$z_1(t; \varepsilon^{1/2}) = r_*(t; \varepsilon^{1/2}) e^{i\phi_1(t; \varepsilon)},$$

$$r_*(t; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2} r_* + O(\varepsilon^{3/2}), \quad r_* = -\gamma_1/a_1(0))^{1/2},$$

$$\dot{\phi}_1(t; \varepsilon) = \omega_* + \varepsilon \omega_{*1} + O(\varepsilon^2), \quad \omega_{*1} = \omega_1(0) - \gamma_1/a_1(0),$$

$$z_2(t) = O(\varepsilon^{3/2}), \quad (2.73)$$

$$z_2(t; \varepsilon^{1/2}) = r_*(t; \varepsilon^{1/2}) e^{i\phi_2(t; \varepsilon)}, \quad r_*(t; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2} r_* + O(\varepsilon^{3/2}),$$

$$\dot{\phi}_2(t; \varepsilon) = \omega_* + \varepsilon \omega_{*1} + O(\varepsilon^2), \quad z_1(t) = O(\varepsilon^{3/2}), \quad (2.74)$$

Так как система (2.68)–(2.69) инвариантна относительно преобразований (2.62) и имеет изолированные предельные циклы, то эти циклы переводятся в себя преобразованиями P_c и переставляются преобразованием P_r . Движение по циклам можно представить как равномерный сдвиг под действием $P_{c(t)}$, $\dot{c}(t) = 0$ (см., например, [18]). Укороченная нормальная форма (2.68)–(2.69) имеет изолированный инвариантный тор $T^0(\varepsilon)$ соответствующей устойчивости, заполненный замкнутыми траекториями. При достаточно малых $|\varepsilon| \neq 0$ в полной нормальной форме (2.66)–(2.67) будет существовать близкий изолированный двумерный инвариантный тор $T_2(\varepsilon)$ той же устойчивости (см. в этой связи также[?]). Из симметрии системы (2.66)–(2.67) следует, что структура траекторий на торе в системе (2.66)–(2.67) такая же, как и в укороченной системе(2.68)–(2.69). Действительно, плоскость $r_1 = r_2$ инвариантна и относительно полной нормальной формы (2.66)–(2.67). Как и для укороченной нормальной формы, движение в этой плоскости с начальными фазами ϕ_1^0 и ϕ_2^0 может быть представлено в виде

$$z_1(t) = z(t) e^{i\phi_1^0}, \quad z_2(t) = z(t) e^{i\phi_2^0}, \quad (2.75)$$

где $z(t) = r(t) e^{i\phi(t)}$, $\phi(0) = 0$, а $z(t)$ определяется из уравнения

$$\dot{z} = z(\gamma(\varepsilon) + i\omega(\varepsilon) + (d_1(\varepsilon) + d_2(\varepsilon))|z|^2) + Q(z, \bar{z}, z e^{i(\phi_1^0 + \phi_2^0)}, \bar{z} e^{-i(\phi_1^0 + \phi_2^0)}; \varepsilon). \quad (2.76)$$

При этом использовано свойство инвариантности функции $Q(*)$ относительно

преобразования (2.62). Уравнение (2.76) имеет при $\varepsilon > 0$ предельный цикл, близкий к окружности вида

$$z(t) = r(t)e^{i\phi(t)}, r(t) = \varepsilon^{1/2}(-\gamma_1/(a_1(0) + a_2(0)))^{1/2} + O(\varepsilon),$$

$$\dot{\phi}(t) = \omega_* + \varepsilon\omega_{**1} + O(\varepsilon^2), \quad \omega_{**1} = \omega_1(0) - \gamma_1(b_1(0) + b_2(0))/(a_1(0) + a_2(0)). \quad (2.77)$$

Этот цикл, как и в случае (2.68)–(2.69), порождает в системе (2.66)–(2.67) инвариантный тор $T_2(\varepsilon)$, заполненный замкнутыми траекториями (2.75). Отметим, что в [?] показано, что в некоторой фиксированной окрестности точки $(z_1, z_2) = (0, 0)$ системы уравнений (2.66)–(2.67) нет других замкнутых траекторий, кроме перечисленных выше.

Перенесем полученные результаты на начально-краевую задачу (2.8)–(2.11) с учетом структуры (2.59), (2.63) и уравнений (2.60)–(2.61). Подставив периодические решения (2.73) и (2.74) в (2.59), получим периодические решения (2.8)–(2.9) вида

$$\begin{aligned} u_1(\rho, \psi, s; \varepsilon^{1/2}) &= \varepsilon^{1/2}u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = \\ &= \varepsilon^{1/2}r_*(u_{nj}^*(\rho)e^{i\psi} + \bar{u}_{nj}^*(\rho)e^{i\psi}) + \varepsilon u_2(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}), \\ \psi &= n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + O(\varepsilon^2))(t + s) + c, \quad c = const, \end{aligned} \quad (2.78)$$

где $u_2(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = u_2(\rho, \psi + 2\pi; \varepsilon^{1/2})$ гладко зависящая от своих переменных функция, и

$$\begin{aligned} u_2(\rho, \psi, s; \varepsilon^{1/2}) &= \varepsilon^{1/2}u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}), \\ \psi &= -n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + O(\varepsilon^2))(t + s) + c, \quad c = const, \end{aligned} \quad (2.79)$$

которые являются идентичными спиральными волнами, вращающимися в противоположных направлениях. В этом легко убедиться, записав главную часть

этих решений в виде

$$\begin{aligned} u_{nj}^*(\rho)e^{i\psi} + \bar{u}_{nj}^*(\rho)e^{i\psi} = \\ = R^*(\rho) \cos(\psi + \psi^*(\rho)) \quad R^*(\rho) = |u_{nj}^*(\rho)|, \psi^*(\rho) = \arg(u_{nj}^*(\rho)). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Подставим теперь семейство периодических решения (2.77) в (2.59). С учетом (2.82) получим однопараметрическое семейство периодических решений (инвариантный тор $T_2(\varepsilon)$) начально-краевой задачи (2.8)-(2.9) вида

$$\begin{aligned} u_\circ(\rho, t+s; \varepsilon^{1/2}) = \varepsilon^{1/2}(u_{**}(\rho, n+\psi; \varepsilon^{1/2}) + u_{**}(\rho, -n+\psi; \varepsilon^{1/2}) = \\ = \varepsilon^{1/2}r_{**}(u_{nj}^*(\rho)e^{i(n+\psi)} + \bar{u}_{nj}^*(\rho)e^{i(n-\psi)}) + u_{nj}^*(\rho)e^{i(-n+\psi)} + \bar{u}_{nj}^*(\rho)e^{(-i(n+\psi))} + \\ + \varepsilon(u_{2*}(\rho, n+\psi; \varepsilon^{1/2}) + u_{2*}(\rho, -n+\psi; \varepsilon^{1/2})), \\ \phi = (\omega_* + \varepsilon\omega_{**1} + O(\varepsilon^2))(t+s) + c, \quad c = const, \end{aligned} \quad (2.81)$$

где $u_{2*}(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2}) = u_2(\rho, \psi + 2\pi; \varepsilon^{1/2})$ гладко зависящая от своих переменных функция. Семейство периодических решений (2.81) представляет собой семейство стоячих волн, инвариантных относительно сдвига по угловой переменной (ведущий центр).

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = (\lambda_1(\bar{\varepsilon}) + d_1(\varepsilon))|z_1|^2 + d_2(\varepsilon))|z_2|^2)z_1 + Z_{51}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) \equiv \\ \equiv Z_1^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = \lambda_2(\varepsilon) + d_2(\varepsilon))|z_1|^2 + d_1(\varepsilon))|z_2|^2)z_2 + Z_{52}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) \equiv \\ \equiv Z_2^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon), \end{aligned} \quad (2.83)$$

где $|Z_{5j}(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon)| = o(|z|^5), j = 1, 2$. Уравнения для \bar{z}_1, \bar{z}_2 получаются комплексным сопряжением (2.60)–(2.61).

Рассмотрим алгоритм вычисления коэффициентов разложений (2.59), (2.82)–(2.83). Для этого воспользуемся подходом, используемым в работах [61, ?], для чего перейдем от (2.8)–(2.11) к эквивалентной начально-краевой задаче в области $\bar{K}_R \times [-T, 0] \times \mathbb{R}^+$, положив $w(\rho, \phi, s, t) = u(\rho, \phi, t + s)$,

$$w_t(\rho, \phi, s, t) = w_s(\rho, \phi, s, t), \quad (2.84)$$

$$w_s(\rho, \phi, 0, t) = -w(\rho, \phi, 0, t) + D\Delta_{\rho\phi}w(\rho, \phi, 0, t) - b(\varepsilon)w(\rho/\alpha, \phi, -T, t) +$$

$$+b_2(\varepsilon)w^2(\rho/\alpha, \phi, -T, t) + b(\varepsilon)w^3(\rho/\alpha, \phi, -T, t)/6 + \dots,$$

$$w_\rho(R, \phi, s, t) = 0, \quad w(\rho, 0, s, t) = w(\rho, 2\pi, s, t), \quad w_\phi(\rho, 0, s, t) = w_\phi(\rho, 2\pi, s, t),$$

$$w(\rho, \phi, s, 0) = w_0(\rho, \phi, s) \in H_0(K_R; -T, 0). \quad (2.85)$$

В рассматриваемом случае условие принадлежности траекторий системы уравнений (2.82), (2.83) в силу многообразия (2.59) начально-краевой задаче (2.84)–(2.85) ((2.8)–(2.11)) определяет тождества

$$\frac{dG(.)}{dt} \equiv \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\partial G(.)}{\partial z_j} Z_j^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) + \frac{\partial G(.)}{\partial \bar{z}_j} \bar{Z}_j^*(z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) \right) \equiv \frac{\partial G(.)}{\partial s} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} G_s(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) &\equiv \\ &\equiv -G(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}G(\rho, \phi, 0, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \bar{\varepsilon}) - \\ &- b(\varepsilon)G(\rho/\alpha, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)G(\rho/\alpha, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon)^2/2 + \\ &+ b(\varepsilon)G(\rho/\alpha, \phi, -T, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2; \varepsilon)^3/6 + \dots, \end{aligned} \quad (2.87)$$

для определения коэффициентов разложения (2.59) и коэффициентов $d_1(\varepsilon)$, $d_2(\varepsilon)$. Приравнивая в (2.86)–(2.87) коэффициенты при одинаковых степенях $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$ получим для определения функций, входящих в (2.59), рекуррент-

ную последовательность краевых задач. При первых степенях равенства выполняются автоматически в силу (2.55), (2.56). При других степенях часть краевых задач однозначно разрешима, однозначной разрешимости другой части добиваемся выбором коэффициентов $d_1(\varepsilon)$, $d_2(\varepsilon)$. Остановимся более подробно на этих вычислениях.

Приравняем в (2.86)–(2.87) коэффициенты при z^2 . В результате получим для определения $v_{2000}(\rho, \phi, s; \varepsilon)$ краевую задачу

$$\begin{aligned} 2\lambda(\varepsilon)v_{2000}(\rho, \phi, s; \varepsilon) &= v_{2000s}(\rho, \phi, s; \varepsilon), \quad v_{2000s}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) = -v_{2000}(\rho, \phi, s; \varepsilon) + \\ &+ D\Delta_{\rho\phi}v_{2000}(\rho, \phi, s; \varepsilon) - \\ &- b(\varepsilon)v_{2000}(\rho/\alpha, \phi, -T_*; \varepsilon) + b_2(\varepsilon)e^{-2\lambda(\varepsilon)T_*}(u_{nj}^*(\rho/\alpha))^2e^{i2n\phi}/2, \end{aligned} \quad (2.88)$$

которая имеет единственное решение

$$v_{2000}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = w_{2000}(\rho; \varepsilon)e^{i2n\phi+2\lambda(\varepsilon)s},$$

где

$$\begin{aligned} L(2\lambda(\varepsilon), n; \varepsilon)w_{20000}(\rho; \varepsilon) &\equiv \\ &\equiv 2\lambda(\varepsilon)w_{20000}(\rho; \varepsilon) + w_{2000}(\rho; \varepsilon) - D\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{d}{d\rho}\right) - \frac{n^2}{\rho^2}\right)w_{2000}(\rho; \varepsilon) + \\ &+ b(\varepsilon)w_{2000}(\rho; \varepsilon)e^{-\lambda(\varepsilon)T_*} = b_2(\varepsilon)e^{-2\lambda(\varepsilon)T_*}(u_{nj}^*(\rho/\alpha))^2/2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Так как $2i\omega_*$ не является точкой спектра пучка операторов $P(\lambda; 0)$, то определен ограниченный оператор $L^{-1}(2\lambda(\varepsilon), n; \varepsilon) : L_2(0, 1) \rightarrow H^2(0, 1)$, где $H^2(0, 1) = \{w(\rho) \in W_2^2(0, 1), w_\rho(R) = 0\}$. В связи с этим

$$w_{20000}(\rho; \varepsilon) = b_2(\varepsilon)e^{-2\lambda(\varepsilon)T_*}/2L^{-1}(2\lambda(\varepsilon), n; \varepsilon)(u_{nj}^*(\rho/\alpha))^2. \quad (2.90)$$

Для практического построения $w_{2000}(\rho; \varepsilon)$ представим

$$w_{2000}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} p_{2nj}(\varepsilon) R_{2nj}(\rho),$$

$$(u_{nj}^*(\rho/\alpha))^2 = \sum_{j=1}^{\infty} f_{2nj}(\varepsilon) R_{2nj}(\rho), \quad f_{2nj}(\varepsilon) = ((u_{nj}^*(\rho/\alpha))^2, R_{2nj}(\rho))_R. \quad (2.91)$$

Подставив (2.91) в (2.89) и спроектировав на систему функций $R_{2nj}(\rho), j = 1, 2, \dots$, получим линейную алгебраическую систему уравнений

$$P^{(n)}(2\lambda(\varepsilon), \alpha; \varepsilon) p_{2n}(\varepsilon) = b_2(\varepsilon) e^{-2\lambda(\varepsilon)T_*} / 2f_{2n}(\varepsilon),$$

$$p_{2n}(\varepsilon) = (p_{2n1}(\varepsilon), p_{2n2}(\varepsilon), \dots), \quad f_{2n}(\varepsilon) = (f_{2n1}(\varepsilon), f_{2n2}(\varepsilon), \dots) \quad (2.92)$$

в пространстве l_2 в которой бесконечномерная матрица $P^{(n)}(2\lambda(\varepsilon), \alpha; \varepsilon)$ определена в (2.16). Из (2.92) находим

$$p_{2n}(\varepsilon) = b_2(\varepsilon) e^{-2\lambda(\varepsilon)T_*} / 2(P^{(n)}(2\lambda(\varepsilon), \alpha; \varepsilon))^{-1} f_{2n}(\varepsilon).$$

Аналогично для определения $v_{1100}(\rho, \phi, s; \varepsilon)$ имеем краевую задачу

$$(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon)) v_{1100}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = v_{1100s}(\rho, \phi, s; \varepsilon),$$

$$v_{1100s}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) = -v_{1100}(\rho, \phi, s; \varepsilon) +$$

$$+ D\Delta_{\rho\phi} v_{1100}(\rho, \phi, s; \varepsilon) - b(\varepsilon) v_{1100}(\rho/\alpha, \phi, s; \varepsilon) +$$

$$+ b_2(\varepsilon) e^{-(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*} u_{nj}^*(\rho/\alpha) \bar{u}_{nj}^*(\rho/\alpha), \quad (2.93)$$

единственное решение которой имеет вид

$$v_{1100}(\rho, \phi, s; \varepsilon) \equiv w_{1100}(\rho; \varepsilon) e^{(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))s} \quad w_{11}(\rho; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{0j}(\varepsilon) R_{0j}(\rho),$$

где

$$\begin{aligned}
 L(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon), 0; \varepsilon) w_{1100}(\rho; \varepsilon) &\equiv \\
 &\equiv (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon)) w_{1100}(\rho; \varepsilon) + w_{1100}(\rho; \varepsilon) - D\left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho \frac{d}{d\rho})\right) w_{1100}(\rho; \varepsilon) + \\
 &+ b(\varepsilon) w_{1100}(\rho; \varepsilon) e^{-(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*} = b_2(\varepsilon) e^{-(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*} u_{nj}^*(\rho/\alpha) \bar{u}_{nj}^*(\rho/\alpha), \quad (2.94)
 \end{aligned}$$

или

$$w_{1100}(\rho; \varepsilon) = b_2(\varepsilon) e^{-(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*} / 2L^{-1}(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon); \varepsilon) u_{nj}^*(\rho/\alpha) \bar{u}_{nj}^*(\rho/\alpha), \quad (2.95)$$

т.к. при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ $\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon)$ не является точкой спектра пучка операторов $P(\lambda; \varepsilon)$.

Для практического построения $w_{1100}(\rho; \varepsilon)$ представим

$$\begin{aligned}
 w_{1100}(\rho; \varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_{0k}(\varepsilon) R_{0k}(\rho), \quad u_{nj}^*(\rho/\alpha) \bar{u}_{nj}^*(\rho/\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{0k}(\varepsilon) R_{0k}(\rho), \\
 f_{0k}(\varepsilon) &= (u_{nj}^*(\rho/\alpha) \bar{u}_{nj}^*(\rho/\alpha), R_{0k}(\rho))_R. \quad (2.96)
 \end{aligned}$$

Подставив (2.91) в (2.90) и спроектировав на систему функций $R_{0k}(\rho), k = 0, 1, \dots$, получим линейную алгебраическую систему уравнений

$$\begin{aligned}
 P^{(0)}(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon), \alpha; \varepsilon) p_0(\varepsilon) &= b_2(\varepsilon) e^{-(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*} / 2f_0(\varepsilon), \\
 p_0(\varepsilon) &= (p_{00}(\varepsilon), p_{01}(\varepsilon), \dots), \quad f_0(\varepsilon) = (f_{00}(\varepsilon), f_{01}(\varepsilon), \dots), \quad (2.97)
 \end{aligned}$$

в пространстве l_2 , в которой бесконечномерная матрица $P^0(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon), \alpha; \varepsilon)$ определена в (2.16). Из (2.92) находим

$$p_0(\varepsilon) = b_2(\varepsilon) e^{-(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*} (P^{(0)}(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon), \alpha; \varepsilon))^{-1} f_0(\varepsilon).$$

Аналогичным образом находятся и другие функции $v_{jk}(\rho, \phi, s; \varepsilon)$ представ-

ления (2.59). Отметим имеющиеся равенства между этими функциями.

$$w_{0200}(\rho; \varepsilon) = \bar{w}_{2000}(\rho; \varepsilon), \quad w_{0020}(\rho; \varepsilon) = w_{2000}(\rho; \varepsilon), \quad w_{0002}(\rho; \varepsilon) = \bar{w}_{0020}(\rho; \varepsilon),$$

$$w_{1001}(\rho; \varepsilon) = \bar{w}_{0110}(\rho; \varepsilon), \quad w_{0020}(\rho; \varepsilon) = w_{2000}(\rho; \varepsilon), \quad w_{0002}(\rho; \varepsilon) = \bar{w}_{0020}(\rho; \varepsilon),$$

$$w_{1100}(\rho; \varepsilon) = w_{0011}(\rho; \varepsilon), \quad w_{0101}(\rho; \varepsilon) = \bar{w}_{1010}(\rho; \varepsilon),$$

$$w_{0002}(\rho; \varepsilon) = \bar{w}_{0020}(\rho; \varepsilon), \quad (2.98)$$

С учетом равенств (2.98) приравняем теперь в (2.86)–(2.87) коэффициенты при z^3 . В результате получим для определения $v_{3000}(\rho, \phi, s; \varepsilon)$ краевую задачу

$$3\lambda(\varepsilon)v_{3000}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = v_{3000s}(\rho, \phi, s; \varepsilon),$$

$$\begin{aligned} v_{3000s}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) &= -v_{3000}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) + \\ &+ D\Delta_{\rho\phi}v_{3000}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{3000}(\rho/\alpha, \phi, -T_*; \varepsilon) + \\ &+ (b_2(\varepsilon)w_{2000}(\rho/\alpha; \varepsilon)u_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon) + b(\varepsilon)u_{nj}^{*3}(\rho/\alpha; \varepsilon)/6)e^{-3\lambda(\varepsilon)T_*}e^{i3n\phi}. \end{aligned} \quad (2.99)$$

которая имеет единственное решение

$$v_{3000}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = w_{3000}(\rho; \varepsilon)e^{i3n\phi+3\lambda(\varepsilon)s},$$

в котором $w_{3000}(\rho; \varepsilon)$ определяется из уравнения

$$\begin{aligned} L(3\lambda(\varepsilon), 3n; \varepsilon)w_{3000}(\rho; \varepsilon) &= \\ &= (b_2(\varepsilon)w_{2000}(\rho/\alpha; \varepsilon)u_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon) + b(\varepsilon)u_{nj}^{*3}(\rho/\alpha; \varepsilon)/6)e^{-3\lambda(\varepsilon)T_*}. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Так как $3i\omega_*$ не является точкой спектра пучка операторов $P(\lambda; 0)$, то определен

ограниченный оператор $L^{-1}(3\lambda(\varepsilon), n; \varepsilon) : L_2(0, 1) \rightarrow H^2(0, 1)$. В связи с этим

$$\begin{aligned} w_{30000}(\rho; \varepsilon) = & e^{-3\lambda(\varepsilon)T_*}/2L^{-1}(b_2(\varepsilon)w_{2000}(\rho/\alpha; \varepsilon)u_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon) + \\ & + b(\varepsilon)u_{nj}^{*3}(\rho/\alpha; \varepsilon)/6). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Практическое построение $w_{30000}(\rho; \varepsilon)$ выполняется аналогично $w_{2000}(\rho; \varepsilon)$ по схеме (2.91)–(2.92).

Приравняв теперь в (2.86)–(2.87) коэффициенты при $z_1^2 \bar{z}_1$, получим краевую задачу вида

$$e_1(\rho, \phi, s; \varepsilon)d_1(\varepsilon) + (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))v_{2100}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = v_{2100s}(\rho, \phi, s; \varepsilon), \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned} v_{2100s}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) = & -v_{2100}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{2100}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{2100}(\rho/\alpha, \phi, -T_*; \varepsilon) + \\ & + (b_2(\varepsilon)(w_{2000}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon) + w_{1100}(\rho; \varepsilon)u_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon)) + \\ & + b(\varepsilon)u_{nj}^{*2}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon)/2)e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}e^{in\phi}. \end{aligned} \quad (2.103)$$

При $d_1(\varepsilon) \equiv 0$ краевая задача (2.102)–(2.103) не разрешима при $\varepsilon = 0$. Разрешимости добиваемся выбором $d_1(\varepsilon)$. Общее решение уравнения (2.102) имеет вид

$$\begin{aligned} v_{2100}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = & (w_{2100}(\rho; \varepsilon)e^{in\phi} + \\ & + d(\varepsilon) \int_0^s e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s_1} e_{n1}(\rho, \phi, s_1; \varepsilon) ds_1) e^{(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s}, \end{aligned} \quad (2.104)$$

где $w_{2100}(\rho; \varepsilon) \in \tilde{H}^2(0, R)$ произвольная функция. Подставив (2.104) в (2.103) с учетом вида (2.103), получим операторное уравнение в $H(0, R)$ вида

$$L(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon), n; \varepsilon)w_{2100}(\rho; \varepsilon) = f_{21}(\rho; \varepsilon) \equiv$$

$$\begin{aligned}
&\equiv -d(\varepsilon)(u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) - b(\varepsilon)e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}(1 - e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*})/(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))u_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon)) + \\
&+(b_2(\varepsilon)(w_{2000}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon) + w_{1100}(\rho; \varepsilon)u_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon)) + \\
&+b(\varepsilon)u_{nj}^{*2}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon)/2)e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}. \tag{2.105}
\end{aligned}$$

Операторное уравнение (2.105) разрешимо не всегда,

т.к. $L(2\lambda(0) + \bar{\lambda}(0), n; 0)u_{nj}^*(\rho; 0) = L(i\omega_*, n; 0)u_{nj}^*(\rho; 0)$, а также

$L^*(-i\omega_*)v_{nj}^*(\rho; 0) = 0$, где $L^*(-i\omega_*; 0)$ сопряженный с $L(-i\omega_*; 0)$ в смысле скалярного произведения (2.14) оператор. Обозначим через $\gamma(\varepsilon)$, $\gamma(0) = 0$ и $u_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon)$, $u_{nj}^\gamma(\rho; 0) = u_{nj}^*(\rho; 0)$ соответственно точку спектра и собственную функцию пучка операторов $L(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + \lambda, n; \varepsilon)$, а соответственно через $\bar{\gamma}(\varepsilon)$ и $v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon)$, $v_{nj}^\gamma(\rho; 0) = v_{nj}^*(\rho; 0)$ точку спектра и собственную функцию сопряженного пучка операторов $L^*(2\bar{\lambda}(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon) + \lambda, n; \varepsilon)$, т.е.

$$L(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon), n; \varepsilon)u_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon) = 0, \quad L^*(2\bar{\lambda}(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon) + \bar{\gamma}(\varepsilon), n; \varepsilon)v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon) = 0,$$

и выберем их, удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned}
&(L_\lambda(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon), n; \varepsilon)u_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R = \\
&= (u_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon) - b(\varepsilon)T_*e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon)+\gamma(\varepsilon))T_*}u_{nj}^\gamma(\rho/\alpha; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R = 1, \tag{2.106}
\end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (2.105) является равенство $(f_{2100}(\rho; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R = 0$ [?]. Отсюда с учетом (2.105), (2.106) находим

$$\begin{aligned}
d_1(\varepsilon) &= a_1(\varepsilon) + ic_1(\varepsilon) = e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}(b_2(\varepsilon)(w_{2000}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon) + \\
&+ w_{1100}(\rho; \varepsilon)u_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon)) + b(\varepsilon)u_{nj}^{*2}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon)/2, v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &/(u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) - b(\varepsilon)e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}(1 - e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*})/ \\ &/(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))u_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R. \quad (2.107) \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.105) выберем, удовлетворяющим условию $(w_{2100}(\rho; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R = 0$. Такое решение определяется однозначно.

Для практического построения $w_{2100}(\rho; \varepsilon)$ представим

$$\begin{aligned} w_{2100}(\rho; \varepsilon) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\varepsilon) R_{nk}(\rho), \quad f_{2100}(\rho; \varepsilon) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\varepsilon) R_{nk}(\rho), \quad u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\varepsilon) R_{nk}(\rho), \\ f_k(\varepsilon) &= (f_{2100}(\rho; \varepsilon), R_{nk}(\rho))_R, \quad u_k^*(\varepsilon) = (u_{nj}^*(\rho; \varepsilon), R_{nk}(\rho))_R \quad (2.108) \end{aligned}$$

$$p_{2100}(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon), \dots), \quad f_{2100}(\varepsilon) = (f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon), \dots),$$

$$u^*(\varepsilon) = (u_1^*(\varepsilon), u_2^*(\varepsilon), \dots). \quad (2.109)$$

Подставив (2.109) в (2.105) и спроектировав на систему функций $R_{nj}(\rho), j = 1, 2, \dots$, получим линейную алгебраическую систему уравнений

$$P^{(n)}(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon), \alpha; \varepsilon)p_{2100}(\varepsilon) = f_{2100}(\varepsilon), \quad (2.110)$$

в пространстве l_2 в которой бесконечномерная матрица $P^{(n)}(2\lambda(\varepsilon), \alpha; \varepsilon)$ определена в (2.16).

Решение (2.110) будем строить в виде разложения по параметру ε , предста-

вив

$$\begin{aligned} p_{2100}(\varepsilon) &= p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \quad f_{21}(\varepsilon) = f_0 + \varepsilon f_1 + \dots, \quad u^*(\varepsilon) = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \dots, \\ d_1(\varepsilon) &= d_{10} + \varepsilon d_{11} + \dots, \end{aligned}$$

$$u^*(\varepsilon) = (u_1^*(\varepsilon), u_2^*(\varepsilon), \dots), \quad u_k^*(\varepsilon) = (u_{nj}^*(\rho; \varepsilon), R_{nk}(\rho))_R. \quad (2.111)$$

Подставим (2.111) в (2.110) и приравняем коэффициенты в равенстве при одинаковых степенях ε . В результате получим рекуррентную последовательность линейных уравнений в l_2 вида

$$P^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)p_j = d_{1j}P^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)u_0^* + F_j(p_0, \dots, p_{j-1}). \quad (2.112)$$

При этом $P^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)u_0^* = 0$. Выберем $P^{(n)*}(-i\omega_*, \alpha; 0)v_0^* = 0$, таким образом, чтобы $(P_\lambda^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)u_0^*, v_0^*)_{l_2} = 1$. С учетом этого из условия разрешимости (2.112) $(d_{1j}P^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)u_0^* + F_j(p_0, \dots, p_{j-1}), v_0^*)_{l_2} = 0$ имеем $d_{2j} = -(F_j(p_0, \dots, p_{j-1}), v_0^*)_{l_2}$. При этом решение p_j выбираем удовлетворяющим условию $(P_\lambda^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)p_j, v_0^*)_{l_2} = 0$. В этом случае ряды (2.121) будут сходящимися по ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Приравняв теперь в (2.86)–(2.87) коэффициенты при $z_1 z_2 \bar{z}_2$, получим краевую задачу вида

$$e_1(\rho, \phi, s; \varepsilon)d_2(\varepsilon) + (2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))v_{1011}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = v_{1011s}(\rho, \phi, s; \varepsilon), \quad (2.113)$$

$$\begin{aligned} v_{1011s}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) &= \\ &= -v_{1011}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) + D\Delta_{\rho\phi}v_{1011}(\rho, \phi, 0; \varepsilon) - b(\varepsilon)v_{1011}(\rho/\alpha, \phi, -T_*; \varepsilon) + \\ &+ (b_2(\varepsilon)(w_{1010}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon) + (w_{0011}(\rho; \varepsilon) + w_{1001}(\rho; \varepsilon))u_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon)) + \\ &+ b(\varepsilon)u_{nj}^{*2}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon))e^{-(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}e^{in\phi}. \end{aligned} \quad (2.114)$$

При $d_2(\varepsilon) \equiv 0$ краевая задача (2.113)–(2.114) не разрешима при $\varepsilon = 0$. Разрешимости добиваемся выбором $d_2(\varepsilon)$. Общее решение уравнения (2.113) имеет

вид

$$\begin{aligned} v_{1011}(\rho, \phi, s; \varepsilon) = & (w_{1011}(\rho; \varepsilon)e^{in\phi} + \\ & + d_2(\varepsilon) \int_0^s e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s_1} e_{n1}(\rho, \phi, s_1; \varepsilon) ds_1) e^{(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))s}, \end{aligned} \quad (2.115)$$

где $w_{1011}(\rho; \varepsilon) \in \tilde{H}^2(0, R)$ произвольная функция. Подставив (2.115) в (2.114) с учетом вида (2.114), получим операторное уравнение в $H(0, R)$ вида

$$\begin{aligned} L(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon), n; \varepsilon) w_{1011}(\rho; \varepsilon) = f_{1011}(\rho; \varepsilon) \equiv \\ \equiv -d_2(\varepsilon)(u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) - b(\varepsilon)e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}(1 - e^{(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*})/(\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))u_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon)) + \\ +(b_2(\varepsilon)(w_{1010}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon) + (w_{0011}(\rho; \varepsilon) + w_{1001}(\rho; \varepsilon))u_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon)) + \\ +b(\varepsilon)u_{nj}^{*2}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon))e^{-(2\lambda(\varepsilon)+\bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Операторное уравнение (2.116) разрешимо не всегда,

т.к. $L(2\lambda(0) + \bar{\lambda}(0), n; 0)u_{nj}^*(\rho; 0) = L(i\omega_*, n; 0)u_{nj}^*(\rho; 0)$, а также

$L^*(-i\omega_*)v_{nj}^*(\rho; 0) = 0$, где $L^*(-i\omega_*; 0)$ сопряженный с $L(-i\omega_*; 0)$ в смысле скалярного произведения (2.14) оператор. Обозначим через $\gamma(\varepsilon)$, $\gamma(0) = 0$ и $u_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon)$, $u_{nj}^\gamma(\rho; 0) = u_{nj}^*(\rho; 0)$ соответственно точку спектра и собственную функцию пучка операторов $L(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon), n; \varepsilon)$, а соответственно через $\bar{\gamma}(\varepsilon)$ и $v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon)$, $v_{nj}^\gamma(\rho; 0) = v_{nj}^*(\rho; 0)$ точку спектра и собственную функцию сопряженного пучка операторов $L^*(2\bar{\lambda}(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon), n; \varepsilon)$, т.е.

$$L(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon), n; \varepsilon)u_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon) = 0, \quad L^*(2\bar{\lambda}(\varepsilon) + \lambda(\varepsilon) + \bar{\gamma}(\varepsilon), n; \varepsilon)v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon) = 0,$$

и выберем их, удовлетворяющими условиям

$$(L_\lambda(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon), n; \varepsilon)u_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R =$$

$$= (u_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon) - b(\varepsilon)T_* e^{-(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon) + \gamma(\varepsilon))T_*} u_{nj}^\gamma(\rho/\alpha; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R = 1, \quad (2.117)$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (2.105) является равенство $(f_{1011}(\rho; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R = 0$ [?]. Отсюда с учетом (2.116), (2.3) находим

$$\begin{aligned} d_2(\varepsilon) &= a_2(\varepsilon) + i c_2(\varepsilon) = e^{-(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*} (b_2(\varepsilon)(w_{1010}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon) + \\ &+ (w_{0011}(\rho; \varepsilon) + w_{1001}(\rho; \varepsilon))u_{nj}(\rho/\alpha; \varepsilon)) + b(\varepsilon)u_{nj}^{*2}(\rho/\alpha; \varepsilon)\bar{u}_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R / \\ &/ (u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) - b(\varepsilon)e^{-(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}(1 - e^{(\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))T_*}) / \\ &/ (\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon))u_{nj}^*(\rho/\alpha; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R. \quad (2.118) \end{aligned}$$

Решение уравнения (2.116) выберем, удовлетворяющим условию $(w_{1011}(\rho; \varepsilon), v_{nj}^\gamma(\rho; \varepsilon))_R = 0$. Такое решение определяется однозначно.

Для практического построения $w_{1001}(\rho; \varepsilon)$ представим

$$\begin{aligned} w_{1001}(\rho; \varepsilon) &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k(\varepsilon) R_{nk}(\rho), \quad f_{1001}(\rho; \varepsilon) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\varepsilon) R_{nk}(\rho), \quad u_{nj}^*(\rho; \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\varepsilon) R_{nk}(\rho), \\ f_k(\varepsilon) &= (f_{1001}(\rho; \varepsilon), R_{nk}(\rho))_R, \quad u_k^*(\varepsilon) = (u_{nj}^*(\rho; \varepsilon), R_{nk}(\rho))_R \end{aligned}$$

$$p_{1001}(\varepsilon) = (p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon), \dots), \quad f_{1001}(\varepsilon) = (f_1(\varepsilon), f_2(\varepsilon), \dots),$$

$$u^*(\varepsilon) = (u_1^*(\varepsilon), u_2^*(\varepsilon), \dots). \quad (2.119)$$

Подставив (2.119) в (2.105) и спроектировав на систему функций $R_{nj}(\rho), j = 1, 2, \dots$, получим линейную алгебраическую систему уравнений

$$P^{(n)}(2\lambda(\varepsilon) + \bar{\lambda}(\varepsilon), \alpha; \varepsilon)p_{1001}(\varepsilon) = f_{1001}(\varepsilon), \quad (2.120)$$

в пространстве l_2 в которой бесконечномерная матрица $P^{(n)}(2\lambda(\varepsilon), \alpha; \varepsilon)$ определена в (2.16).

Решение (2.120) будем строить в виде разложения по параметру ε , предста-

вив

$$p_{1001}(\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots, \quad f_{1001}(\varepsilon) = f_0 + \varepsilon f_1 + \dots,$$

$$u^*(\varepsilon) = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \dots, \quad d_2(\varepsilon) = d_{20} + \varepsilon d_{21} + \dots,$$

$$u^*(\varepsilon) = (u_1^*(\varepsilon), u_2^*(\varepsilon), \dots), \quad u_k^*(\varepsilon) = (u_{nj}^*(\rho; \varepsilon), R_{nk}(\rho))_R. \quad (2.121)$$

Подставим (2.121) в (2.120) и приравняем коэффициенты в равенстве при одинаковых степенях ε . В результате получим рекуррентную последовательность линейных уравнений в l_2 вида

$$P^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)p_j = d_{1j}P^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)u_0^* + F_j(p_0, \dots, p_{j-1}). \quad (2.122)$$

При этом $P^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)u_0^* = 0$. Выберем $P^{(n)*}(-i\omega_*, \alpha; 0)v_0^* = 0$, таким образом, чтобы $(P_\lambda^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)u_0^*, v_0^*)_{l_2} = 1$. С учетом этого из условия разрешимости (2.112) $(d_{1j}P^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)u_0^* + F_j(p_0, \dots, p_{j-1}), v_0^*)_{l_2} = 0$ имеем $d_{2j} = -(F_j(p_0, \dots, p_{j-1}), v_0^*)_{l_2}$. При этом решение p_j выбираем удовлетворяющим условию $(P_\lambda^{(n)}(i\omega_*, \alpha; 0)p_j, v_0^*)_{l_2} = 0$. В этом случае ряды (2.121) будут сходящимися по ε при $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

Сказанное выше сформулируем окончательно в виде следующей теоремы.

Теорема 6. Пусть при выбранных D, α, γ параметры K_*, T_* принадлежат границе области устойчивости состояния равновесия $u_* = u_*(K_*, \alpha, \gamma)$ и при этом пучек операторов (2.14) имеет точки спектра $\lambda = \pm i\omega_*, \omega_* > 0$ при некотором $n > 0$ и пусть также величины $\gamma_1 > 0, a_1(0) < 0, a_1(0)a_2(0)(a_1^2(0) - a_2^2(0)) \neq 0$. Тогда существуют такие $\varepsilon_0, R > 0$, что при $K = K_* + \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в шаре $S_{u_*(\varepsilon)}(R)$ начально-краевая задача (2.1)–(2.2) имеет два вза-

имно инвариантных пространственно неоднородных периодических решений $\varepsilon^{1/2}u_*(\rho, \psi; \varepsilon^{1/2})$, $\psi = \pm n\phi + (\omega_* + \varepsilon\omega_{*1} + O(\varepsilon))(t + s) + c$, $c = const$, периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_* + \varepsilon\omega_1(\varepsilon))$ вида (2.78), (2.3), являющихся спиральными волнами, врачающимися в противоположных направлениях, и двумерный инвариантный тор $\varepsilon^{1/2}(u_{**}(\rho, n + \psi; \varepsilon^{1/2}), \phi = (\omega_* + \varepsilon\omega_{**1} + O(\varepsilon^2))(t + s) + c$, $c = const$, вида (2.78), заполненный периодическими решениями одного периода $T(\varepsilon) = 2\pi/(\omega_{**} + \varepsilon\omega_{**1} + O(\varepsilon))$, (ведущий центр). При этом, если $a_1(0) + a_2(0) < 0$, $a_2(0) < 0$, то периодические решения асимптотически орбитально устойчивы, а тор неустойчив, если $a_1(0) + a_2(0) < 0$, $a_2(0) > 0$, то периодические решения неустойчивы, а тор асимптотически орбитально устойчив. Все остальные решения начально-краевой задачи (2.1)–(2.2) с начальными условиями из $S_{u_*}(R)$ при $t \rightarrow \infty$ стремятся к устойчивым автомоделльным решениям в норме $H_0(K_R; -T, 0)$.

Заключение

В диссертационном исследовании изучены условия и механизмы возникновения пространственно-неоднородных решений в начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с оператором преобразования пространственных координат и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи. Начально-краевая задача которая является математической моделью генератора оптического излучения с оператором преобразования координат в контуре двумерной запаздывающей обратной связи и тонким слоем нелинейной среды. Решены следующие задачи:

1. Сформулирована и определена математическая постановка начально-краевых для нелинейного параболического уравнения с запаздывающим аргументом и операторами поворота и растяжения пространственных координат. Определены функциональные пространства для начальных условий и решений начально-краевых задач, доказаны теоремы существования и единственности решения, непрерывной зависимости решения от начальных условий и параметров уравнения, т.е доказана корректность постановки начально-краевых задач.

2. Исследована динамика однородных состояний равновесия исследуемой нелинейной начально-краевой задачи в зависимости от параметров уравнения.

3. Построены картины D-разбиений плоскости основных параметров уравнения и исследованы механизмы потери устойчивости решений начально-краевых задачи в случае оператора поворота пространственного аргумента и в случае оператора растяжения пространственного аргумента.

4. Исследованы бифуркации из однородных состояний равновесия пространственно-неоднородных решений для различных критических случаев потери устойчивости начально-краевых в случае оператора поворота пространственного аргумента и в случае оператора растяжения пространственного аргумента. Построены асимптотических формулы пространственно-неоднородных решений.

В качестве методов исследования использовались: метод инвариантных (центральных) многообразий распределенных нелинейных динамических систем, метод нормальных форм нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, метод построения уравнений траекторий на центральном многообразии нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, теория нелинейных операторных уравнений, качественная теория и теория бифуркаций нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, численные методы. При исследовании устойчивости решений рассматриваемых начально-краевых задачи широко используется метод D-разбиений Неймарка Ю.И.

Выводы

Все полученные результаты являются новыми. Диссертация имеет как теоретическое, так и прикладное значение. Изучены механизмы самоорганизации и возникновения пространственно-неоднородных структур и волн в однородных распределенных системах, которые имеет важное фундаментальное значение. Математическое моделирование генератора оптического излучения позволяет исследовать режимы его работы. Пространственно-неоднородные решения, исследованию которых посвящена диссертация, используются как носители информации в оптических и волоконно-оптических системах связи. Их пространственная неоднородность используется для кодирования и уплотнения информации.

Направления дальнейших исследований

Представляет большой интерес исследование начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с оператором сжатия пространственных координат и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи.

Литература

- [1] Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В.Ю. Крупномасштабные поперечные нелинейные взаимодействия в лазерных пучках; новые типы нелинейных волн, возникновение «оптической турбулентности» // Письма в ЖЭТФ. 1988. Т.47. № 12. С. 611-614.
- [2] Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В.Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей. Новые физические принципы оптической обработки информации. М.: Наука. 1990. С. 263–325.
- [3] Ахманов С.А., Воронцов М.А., Ларичев А.В. Динамика нелинейных вращающихся световых волн: гистерезис и взаимодействие волновых структур // Квантовая электроника. 1990. Т. 17, № 4. С. 391-392.
- [4] Ахромеева Т.С, Курдюмов СИ., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. М.: Наука, 1992.
- [5] Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференц. уравн. 2004. Т. 40, № 5. С. 645-654.
- [6] Белан Е. П., Лыкова О.Б. Вращающиеся структуры в параболическом функционально-дифференциальном уравнении // Дифференц. уравн. 2004. Т. 40, № 10. С. 1348-1357.
- [7] Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной // Журн. матем. физ., анал., геом. Т. 1. № 1. 2005. С. 3–34.
- [8] Брюно А. Д. // Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. Наука. 1979. 252 с.
- [9] Воронцов М.Л. Ахсеалы - новый класс пространственно-временных неустойчивостей световых полей // Квантовая электроника. 1993. Т. 20, № 4. С. 319-321.

- [10] Воронцов М.А., Думаревский Ю.Д., Прудзе Д.В., Шмальгаузен В.И. Автоловные процессы в системах с оптической обратной связью // Известия АН СССР. Сер. физич. 1988. Т. 52, № 2. С. 374-376.
- [11] Воронцов М.А., Иванов В.Ю., Ларичев А.В. Ротационная неустойчивость понеречной структуры световых полей в нелинейных системах с оптической обратной связью // Известия АН СССР. Сер. физич. 1991. Т. 55, № 2. С. 316-321.
- [12] Воронцов М.А., Корябин А.В., Шмальгаузен В.И. Управляемые оптические системы. М.: Наука, 1988.
- [13] Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.:Наука, 1985.
- [14] Иванов В.Ю. WTA-динамика одномерных оптических ревербераторов // Известия РАН, сер. физич. 1992. Т. 56, III 9. С. 2-7.
- [15] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
- [16] Кащенко С.А. Асимптотика пространственно-неоднородных структур в когерентных нелинейно-оптических системах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 3. С. 467-473.
- [17] Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Оптическая буферность и механизмы ее возникновения // ТМФ, т.140, № 1, 2004, с.14–28.
- [18] Кузнецов Ю.А. Бифуркация Андронова-Хопфа в четырехмерной системе с круговой симметрией// Препринт НИВЦ АН СССР, Пущино. 1984 17 с.
- [19] Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. Приближенные методы решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
- [20] Кубышкин Е.П., Морякова А. Р. Особенности бифуркаций периодических решений уравнения Мэкки-Гласса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 59. № 8. 2019. С. 1340–1357.
- [21] Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Анализ устойчивости решений начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием. Интегрируемые сист. и нелин. динамика: тезисы докладов. (Межд. науч. конф., 1-5 октября 2018 г., Яросл.). Ярославль: ЯрГУ, 2018. С.110-111.
- [22] Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Анализ бифуркаций автоколебательных решений в начально-краевой задаче для параболического дифференциального уравнения с оператором поворота и запаздыванием. Современные мет. теор.

краев. задач : матер. Межд. конф.: Воронеж. вес. матем. школа Понtryгинские чт-я XXXI (3–9 мая 2019 г.). С.179.

- [23] Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Анализ условий возникновения пространственно-неоднородных структур световых волн в оптических системах передачи информации. Модел. и анализ информ. систем. Т. 26, № 2. 2019. С. 299–305.
- [24] Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Об одном механизме образования пространственно-неоднородных структур световых волн в оптических системах передачи информации. Модел. и анализ информ. систем. Т. 27, № 2. 2020. С. 138–149.
- [25] Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Исследование пространственно-неоднородных волн в начально-краевой задаче для нелинейного параболического уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием. Сборник тез. докл. Межд. конфер. «Актуальные проблемы математической физики» (27-30 ноября 2019). Москва. МГУ им.М.В.Ломоносова. 2019. С.36-37.
- [26] Кубышкин Е.П., Куликов В.А. Бифуркации автоколебательных решений в параболическом уравнении с оператором преобразования пространственного аргумента и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи. // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2020 - XXXI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам. С.160.
- [27] Е. П. Кубышкин, В. А. Куликов Бифуркации автоколебательных решений нелинейного параболического уравнения с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием// Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 61:3. 2021. С. 428–449.
- [28] Куликов А.Н. О гладких многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаевых пространствах // Исследования по устойчивости и теории колебаний. Ярославль: Ярославский ун-т. 1976. С. 114-129.
- [29] Куликов В. А. Бифуркации автоколебательных решений начально-краевой задачи для параболического уравнения с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием/ Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2021. С.334.
- [30] Куликов В. А. Бифуркации автоколебательных решений в параболическом уравнении с оператором преобразования пространственного аргумента и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи / Сборник матери-

алов международной конференции КРОМШ-2020. – Симферополь: ПОЛИПРИНТ, 2020. С. 306.

- [31] *Куликов В. А.* Исследование бифуркаций автоколебательных решений начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с оператором поворота пространственного аргумента и запаздыванием, Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020»
- [32] *Куликов В. А.* Анализ устойчивости состояний равновесия параболического уравнения с оператором растяжения и запаздыванием в нелинейном функционале обратной связи// Таврический вестник информатики и математики. 2021. №4. С. 70-84.
- [33] *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
- [34] *Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М: Эдиториал УРСС, 2000.
- [35] *Мардсен Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.:Мир. 1980. 368 с.
- [36] *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
- [37] *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колеев А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. М.: Физматлит, 2005.
- [38] *Неймарк Ю. И.* D-разбиение пространства квазиполиномов (к устойчивости линеаризованных распределенных систем) // Прикладная математика и механика. 1949. Т. 13. № 4. С. 349–380.
- [39] *Разгулин А.Б.* Бифуркационные автоколебания в нелинейном параболическом уравнении с пространственным преобразованием аргументов // Моделирование и исследование устойчивости процессов. Тез. докл. межд. конф. Киев: Знание, 1992. Часть 2. О. 29-30.
- [40] *Разгулин А.Б.* Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. 1993. Т. 33, № 1. О. 69-80.
- [41] *Разгулин А.В.* Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Журн. вычисл. матем. и математ. физики. 1993, Т. 33, № 10. С. 1499-1510.

- [42] Разгулин А. В. Ротационные волны в оптической системе с двумерной обратной связью // Матем. моделирование. Т. 5, № 4. 1993. С. 105–119.
- [43] Разгулин А. В. Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 33. № 1. 1993. С. 69–80.
- [44] Разгулин А. В. Устойчивость бифуркационных автоколебаний в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 33. № 10. 1993. С. 1499–1508.
- [45] Разгулин А.В., Чечкина К.А. Бифуркационные автоколебания в нелинейной оптической системе с распределенным поворотом поля// Численные методы в математической физике. Уч. пособие под ред. А.А.Самарского и В.И.Дмитриева. С. 89-99. М.: Изд-во мех. мат. ф-та МГУ, 1996.
- [46] Разгулин А.В. Об аттракторе функционально-дифференциального уравнения диффузии с запаздыванием// Численные методы в математической физике. Уч. пособие под ред. А.А. Самарского и В.И. Дмитриева. С. 147-152. М.: Изд-во мех. мат. ф-та МГУ, 1996.
- [47] Разгулин А.В. Об одном классе функционально-дифференциальных параболических уравнений нелинейной оптики // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 3. С. 400-407.
- [48] Разгулин А. В., Романенко Т. Е. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 53. № 11. 2013. С. 1804–1821.
- [49] Разгулин А.В. Математическое моделирование нелинейных оптических систем с управляемым преобразованием аргументов. Диссерт. на соиск. уч. степени докт. физ.-мат. наук. МГУ им.М.В.Ломоносова. 2006. 330 с.
- [50] Разгулин А. В. Задача управления преобразованием аргументов в функционально-дифференциальных уравнениях математической физики : учеб.-метод. пособие ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, фак. вычисл. математики и кибернетики. - М. : МАКС Пресс, 2006. - 150 с.,
- [51] Разгулин А. В. Нелинейные модели оптической синергетики : учеб.-метод. пособие. Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, фак. вычисл. математики и кибернетики. - М. : МАКС Пресс, 2008. - 201 с.
- [52] Руц Ф., Сёкефалзви-Надъ В. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.

- [53] *Россовский Л.Е.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с растяжением и сжатием аргументов // Труды ММО. 2001. Т. G2. С. 199-228.
- [54] *Скубачевский А.Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений // Успехи математ. наук. 1996. Т. 51, вып. 1(307). С. 169-170.
- [55] *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. Т. 34. № 10. 1998. С. 1394–140.
- [56] *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. М.: Мир, 1966. С. 232.
- [57] *Серебрякова Н.Н.* Качественное исследование одной системы дифференциальных уравнений теории колебаний // Прикладная математика и механика. Т. 27. № 1. 1963. С. 160-166.
- [58] *Хакен Г.* Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам. М.: Мир, 1991.
- [59] *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения М.: Мир, 1970.
- [60] *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
- [61] *Хессард Б., Казаринов Н., Вен И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.:Мир. 1985. 280 с.
- [62] *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1984. 421 с.
- [63] *Чушкин В.А., Разгулин А.В.* Стационарные структуры в функционально-дифференциальном уравнении диффузии с отражением пространственного аргумента // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15, Вычислите. математика и кибернетика. 2003. № 2. С. 13-20.
- [64] *Шен И.Р.* Принципы нелинейной оптики. М.: Наука, 1989.
- [65] *Akhmanov S.A., Vorontsov M.A., Ivanov V.Yu., et al.* Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics: generation and interaction of spatiotemporal structures. // J. Optical Soc. Amer. Ser. B. Vol.9. №.1. 1992. P. 78–90.
- [66] *Budzinskiy S.S., Razgulin A. V.* Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under O (2) Hopf bifurcation // Commun Nonlinear Sci Numer Simulat. Vol. 49. 2017. P. 17–29.

- [67] *Budzinskiy S.S., Larichev A.V., Razgulin A.V.* Reducing dimensionality to model 2D rotating and standing waves in a delayed nonlinear optical system with thin annulus aperture // Nonlinear Analysis: Real World Applications. Vol. 44. 2018. P. 559–572.
- [68] *Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S.A.* Pelster A. Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback // Physica D. 1999. Vol. 125. P. 123-141.
- [69] *Ikeda K., Daido H., Okimoto O.* Optical turbulence: chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity// Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 709-712.
- [70] *Kubyshkin E.P., Moriakova A.R.* Features of Bifurcations of Periodic Solutions of the Ikeda Equation// Russian Journal of Nonlinear Dynamics. T.14. № 3. 2018. P. 301-324.
- [71] *Kubyshkin E.P., Moriakova A.R.* Analysis of Special Cases in the Study of Bifurcations of Periodic Solutions of the Ikeda Equation// Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. vol. 16. No. 3. P. 437–451.
- [72] *Kubyshkin E.P., Moryakova A.R.* Bifurcation Features of Periodic Solutions of the Mackey–Glass Equation// Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019, Vol. 59, No. 8, pp. 1275–1291
- [73] *Kubyshkin E. P., Kulikov V. A.* Analysis of Occurrence Conditions for Spatially Inhomogeneous Structures of Light Waves in Optical Information Transmission Systems// Automatic Control and Computer Sciences. 2020. Vol. 54. No. 7. P. 750–755.
- [74] *Kubyshkin E. P., Kulikov V. A.* On a Mechanism for the Formation of Spatially Inhomogeneous Structures of Light Waves in Optical Information Transmission Systems // Automatic Control and Computer Sciences. 2021. Vol. 55, No. 7. P. 838–846.
- [75] *Kubishkin E. P., Kulikov V. A.* Bifurcations of self-oscillatory solutions to a nonlinear parabolic equation with a rotating spatial argument and time delay. Comput. Math. Math. Phys. 61:3. 2021. P. 403–423.
- [76] *Kulikov V.A.* Analysis of Bifurcations of Spatially Inhomogeneous Solutions of a Nonlinear Parabolic Equation with the Operator of Rotation of the Spatial Argument and Delay// Second International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics : Book of Abstracts. Yaroslavl: Filigran. 2020 . P. 106. (October 19–23, 2020, Yaroslavl)

- [77] *Larichev A.V., Nikolaev I.P., Chulichkov A.L.* Spatiotemporal period doubling in a nonlinear interferometer with distributed optical feedback // Optics Letters. 1996. Vol. 21, № 15. P. 1180-1182.
- [78] *Larichev A.Y., Nikolaev IP., Violino P.* LCLV-based system for high resolution wavefront correction: phase knife as a feedback intensity producer // Optics Communications. 1997. Vol. 138. P. 127-135.
- [79] *Otsuka K., Ikeda K.* Cooperative dynamics and functions in a collective nonlinear optical element system// Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39, № 10. P. 5209-5228.
- [80] *Ramazza P.L., Ducci S., Arecchi F.T.* Optical diffraction-free patterns induced by a discrete translational transport // Physical Review Letters. 1998. Vol. 81. No 19. P. 4128-4131.
- [81] *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback // Chaos in Optics (Rajarshi Roy ed.). Proceedings SPIE. 1993. Vol. 2039. R 342-352.
- [82] *Razgulin A. V.* Bifurcational light structures in nonlinear optical system with nonlocal interactions // Visual Information Processing IL Proceedings SPIE. 1993. Vol. 19G1. R 241-250.
- [83] *Skubachevskii A.L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics // Nonlinear Analysis: TMA. Vol 32. №. 2. 1998. P. 261–278.
- [84] *Vorontsov M.A., Firth W.J.* Pattern formation and competition in nonlinear optical system with two-dimensional feedback// Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. No 4. P. 2891-2903.
- [85] *Vorontsov M.A., Carhart G.W., Dou R.* Spontaneous optical pattern formation in a large array of optoelectronic feedback circuits// J. Opt. Soc. Am. B. 2000. Vol. 17, № 2. P. 266-274.
- [86] *Vorontsov M.A., Iroshnikov N.G.* Nonlinear dynamics of neuromorphic optical system with spatio - temporal interactions // Proceedings SPIE. 1992. Vol. 1621. P. 292-298.
- [87] *Vorontsov M.A., Iroshnikov N.G., Abernathrj R.L.* Diffractive patterns in a nonlinear optical 2-D feedback system with field rotation // Chaos, Solitons and Fractals. 1994. Vol. 4. P. 1701-1716.