

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук»

На правах рукописи

**БРИККЕЛЬ Дмитрий Максимович**



**ВОЛНОВАЯ ДИНАМИКА ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ  
С УЧЕТОМ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ИХ МАТЕРИАЛОВ**

01.02.04 – механика деформируемого твердого тела

ДИССЕРТАЦИЯ  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор,  
**Ерофеев Владимир Иванович**

Нижегород - 2022

## Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1 МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА .....	12
1.1 Современные подходы к оценке повреждаемости материала .....	12
1.2 Общие сведения о неразрушающих методах контроля состояния конструк.20	20
1.3 Спектрально - импульсный метод оценки степени поврежденности.....	25
1.4 Самосогласованная задача оценки степени поврежденности материала акустическим методом.....	31
Выводы по главе 1.....	35
ГЛАВА 2 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ, МАТЕРИАЛ КОТОРОЙ НАКАПЛИВАЕТ ПОВРЕЖДЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ... .....	36
2.1 Линейная математическая модель .....	36
2.2. Анализ дисперсионных зависимостей .....	39
2.3. Учёт геометрической нелинейности .....	43
2.4. Альтернативная математическая модель.....	52
Выводы по главе 2.....	54
ГЛАВА 3 ВОЗБУЖДЕНИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ МАТЕРИАЛА, ОБЛАДАЮЩЕГО НАКОПЛЕННОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ .....	55
3.1. Основные предположения и математическая модель.....	55
3.2. Возбуждение волн движущейся нагрузкой. Волновое давление.....	60
Выводы по главе 3.....	65

ГЛАВА 4 РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ЕГО МАТЕРИАЛА УЛЬТРАЗВУКОВЫМ ЭХО - АКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ.....	66
4.1 Нелинейная математическая модель и анализ волновых процессов.....	66
4.2 Экспериментальные исследования .....	72
Выводы по главе 4.....	77
Заключение .....	78
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	81

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность темы исследования**

Анализ причин технических аварий и даже техногенных катастроф многих ответственных объектов показывает, что значительного их числа, если не всех, можно было бы избежать при наличии необходимых средств неразрушающего контроля и диагностики состояния материала, а также соответствующих методов математического моделирования процессов исчерпания ресурса материала объектов.

Поэтому весьма актуальна разработка эффективных неразрушающих методов с соответствующими аппаратно-программными средствами поддержки, которые позволяют оперативно, в реальном масштабе времени оценить текущее состояние материала объектов и, используя данные предварительно проведенных обучающих экспериментов и специализированную базу данных, позволяют дать обоснованное заключение о возможности дальнейшей его эксплуатации, о величине предполагаемого остаточного ресурса или о необходимости проведения ремонтно-восстановительных работ.

Для построения эффективных математических моделей, которые можно положить в основу методик неразрушающего контроля материалов и конструкций необходимо комплексное использование методов механики поврежденных сред и волновой динамики механических систем.

С 70-х годов прошлого века с применением неразрушающих методов контроля обеспечивается безопасность машиностроительных объектов. В настоящее время из множества методов акустический метод отмечается, как наиболее гибкий и перспективный [1]. Точность определения параметров и дальнейшая оценка состояния конструкции зависит от многих факторов. Важным фактором здесь является эксплуатационные условия работы конструкции. В частности, от условий работы при эксплуатации сильно зависят скорость и характер деградации материала. В свою очередь долговечность характеризуется прочностными параметрами

материала в локальных зонах (узлах конструкции). Легко заметить, что структурные изменения материала длительно эксплуатируемых конструкций при их диагностировании приводят к сравнительно большим изменениям показаний приборов неразрушающего контроля по сравнению с калибровкой прибора.

В процессе накопления повреждений [2-7] элементов конструкций может произойти потеря физических свойств материала, что может привести к дальнейшим отклонениям показателей их нормативной работы. При этом в процессе эксплуатации конструкции происходят необратимые структурные изменения в металле. Результатом этих процессов может быть полное разрушение конструкции (серьезные аварии на производстве).

Наличие точных теорий и методик, с помощью которых можно вовремя выявить накопление и развитие повреждений в материале конструкции позволяет избежать большого количества аварий на различных объектах производства.

### **Степень разработанности темы**

Как правило, в механике деформируемого твердого тела задачи динамики рассматривают отдельно от задач накопления повреждений. При разработке таких методов принято заранее постулировать, что скорость упругой волны является заданной функцией поврежденности, а затем экспериментально определять коэффициенты пропорциональности. Фазовая скорость волны и ее затухание считаются обычно степенными функциями частоты и линейными функциями поврежденности. При несомненных достоинствах (простота) такой подход обладает целым рядом недостатков, как и любой подход, не опирающийся на математические модели процессов и систем.

В работе В.И. Ерофеева и Е.А. Никитиной (2010 г.) [8] сформулированы и исследованы самосогласованные задачи, включающие в себя, кроме уравнения развития поврежденности, динамическое уравнение теории упругости.

### **Цель и задачи диссертационной работы.**

Целью диссертационной работы является развитие волновой динамики механических систем в приложении к решению задач неразрушающего контроля элементов конструкций в процессе накопления повреждений в их материалах.

Достижение цели планируется осуществить путем решения следующих задач:

- формулировки математических моделей (линейных и нелинейных), позволяющих описывать распространение продольных и изгибных волн в стержнях, сдвиговых волн в пластинах с учетом поврежденности их материалов;
- оценки влияния поврежденности материала на процессы дисперсии, затухания и пространственной локализации волновых полей.

### **Научная новизна**

Получены и проанализированы новые математические модели, описывающие распространение линейных и нелинейных волн в балке, сдвиговых волн в пластине, лежащий на упругом основании, нелинейных продольных волн в стержне модели Бишопа с учетом поврежденности материалов перечисленных элементов конструкций.

Получено новое эволюционное уравнение, обобщающее известное в нелинейной волновой динамике уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса. Найдено аналитическое решение этого уравнения.

Впервые поставлена и решена задача о возбуждении движущейся нагрузкой сдвиговой волны в пластине на упругом основании, изготовленной из материала, обладающего накопленной поврежденностью.

Предложен новый практический подход определения степени поврежденности материала цилиндрического образца ультразвуковым эхо-акустическим методом, основанный на самосогласованной динамической задаче оценки поврежденности.

### **Теоретическая значимость работы**

Развиваемый подход позволяет сформулировать новые зависимости, учитывающие физическую нелинейность поврежденного материала, а также нелинейную связь деформации – перемещения.

### **Практическая значимость работы**

При определении экспериментальными методами соответствующих констант, характеризующих поврежденность материала, расчетные зависимости могут быть использованы при диагностировании длительно эксплуатируемых конструкций акустическими методами.

### **Методология и методы диссертационного исследования**

При проведении исследований применялись методы теории упругости, механики поврежденных сред, волновой динамики механических систем. Для получения нелинейных эволюционных уравнений применен асимптотический метод многих масштабов. Экспериментальное определение степени поврежденности материала производилось эхо-акустическим методом.

### **Положения, выносимые на защиту**

На защиту выносятся:

- математические модели (линейные и нелинейные), включающие в себя взаимосвязанные уравнение динамики элемента конструкции (стержень, пластина) и кинетическое уравнение накопления повреждений в материале, из которого этот элемент конструкции изготовлен;
- результаты оценки влияния поврежденности материала на процессы дисперсии, диссипации и пространственной локализации изгибных и продольных волн, распространяющихся в стержне;
- результаты решения задачи о возбуждении движущейся нагрузкой сдвиговой волны в пластине, изготовленной из материала, обладающего накопленной поврежденностью, и лежащей на упругом основании модели Винклера;

- результаты экспериментальных исследований зависимости скорости продольной упругой волны, распространяющейся в стержне, от поврежденности его материала.

**Достоверность результатов проведенных исследований** основана на строгом аппарате математической теории упругости, обеспечивается адекватностью физических моделей, корректностью постановок исследуемых задач и применением строгих математических методов исследования, сравнением результатов, полученных в работе, с известными частными случаями и результатами других авторов.

### **Апробация работы**

Основные положения и полученные в диссертационной работе результаты докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

- IV Международная студенческая научно-практическая конференция «Перспективное развитие системы диагностики, мониторинга и обслуживания объектов транспортной инфраструктуры», Нижний Новгород, 2016 г.
- Международная научно-практическая конференция «Наука сегодня: Задачи и пути их решения», Вологда, 2017 г.
- 4-я Международная научно-техническая конференция, посвященная 80-летию ИМАШ РАН. Живучесть и конструкционное материаловедение (ЖивКоМ – 2018). Москва, 2018 г.
- XLIV Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», Москва, 2018 г.
- Научная конференция 16-го российского архитектурно-строительного форума, Нижний. Новгород, 2018 г.
- Международная научная конференция «Проблемы прочности, динамики и ресурса», Нижний Новгород, Россия, 25-29 ноября 2019 г.

- Международная научно-техническая конференция «Современные направления и перспективы развития технологий обработки и оборудования в машиностроении 2019» (ICMTMTE 2019), Севастополь, Россия, 9-13 сентября 2019г.
- Международных инновационных конференциях молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения «МИКМУС-2019» и «МИКМУС-2021», Москва, Россия, 4-6 декабря 2019г.; 30 ноября – 2 декабря 2021 г.
- Международная летняя школа-конференция «Актуальные проблемы механики», Санкт-Петербург, Россия, 21-27 июня, 2020г. / International Summer School-Conference “Advanced Problems in Mechanics”, St. Petersburg, Russia, June 21-27, 2020.
- XX Международная конференция и молодежная школа "Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии", Нижний Новгород, Россия 23-27 ноября 2020г.
- 27-й международный конгресс по звуку и вибрации, Прага, Чехия, 12-16 июля, 2021г. / The 27th International Congress of Sound and Vibration, Prague (CZ) from 12-16 July 2021.

### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано 15 работ [9–23], в том числе 6 из них [9–14] в журналах, входящих в Перечень ВАК Минобрнауки РФ, в журналах и изданиях, индексируемых в базах данных Web of Science и Scopus

### **Личный вклад автора**

- разработка линейных и нелинейных математических моделей, позволяющих описывать распространение продольных и изгибных волн в стержнях, сдвиговых волн в пластинах с учетом поврежденности их материалов;

- оценка влияния поврежденности материала на процессы дисперсии, затухания и пространственной локализации волновых полей.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертационная работа общим объемом 95 страниц состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего 142 источника. Текст иллюстрируется 21 рисунком и 2 таблицами.

## **Содержание работы**

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертационной работы, ее научная новизна, практическая значимость, сформулированы цели и задачи исследования, приведены основные положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** диссертации, имеющая обзорный характер, включает в себя анализ современных подходов к оценке повреждаемости материалов, общие сведения о неразрушающих методах контроля конструкций, описание спектрально-импульсного метода оценки степени поврежденности.

Во **второй главе** диссертации сформулирована самосогласованная математическая модель, включающая в себя уравнение изгибных колебаний балки (стержня) и кинетическое уравнение накопления повреждений в ее материале. В линейном приближении в рамках предложенной модели исследовано влияние поврежденности материала на параметры изгибной волны, распространяющейся в балке. Далее рассмотрен случай распространения по балке интенсивных вибраций, когда уже нельзя ограничиться изучением гармонических или квазигармонических процессов, а необходимо учитывать широкополосность изгибных волн. Показано, что такие существенно несинусоидальные волны могут быть как периодическими, так и уединенными (локализованными в пространстве). С ростом параметра поврежденности материала амплитуды периодической и уединенной волн увеличиваются, в то время как длина периодической волны и ширина уединенной волны уменьшаются.

**В третьей главе** сформулирована и исследована задача о возбуждении движущейся нагрузкой плоской сдвиговой волны в пластине, изготовленной из

материала, обладающего накопленной поврежденностью. Пластина при этом лежит на упругом основании модели Винклера.

**Четвертая глава** диссертации посвящена исследованию распространения продольной волны в стержне и экспериментальному определению степени поврежденности его материала эхо-акустическим методом. Рассматривается образец материала, выполненный в виде стержня. Динамика стержня описывается моделью Бишопа, дополнительно учитывающей нелинейности: геометрическую (нелинейная связь деформации и перемещения) и физическую (нелинейный закон Гука). Считается, что стержень подвергался статическим или циклическим испытаниям и в его материале могла накопиться поврежденность.

**В заключении** сформулированы основные результаты диссертации.

# ГЛАВА 1.

## МЕТОДЫ ОЦЕНКИ СТЕПЕНИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ МАТЕРИАЛА

Глава имеет обзорный характер и включает в себя анализ современных подходов к оценке повреждаемости материалов, общие сведения о неразрушающих методах контроля конструкций, описание спектрально-импульсного метода оценки степени поврежденности.

### 1.1 Современные подходы к оценке повреждаемости материала

В настоящее время подходы к оценке ресурса, вырабатываемого строительными конструкциями, включают следующие основные положения:

- выбор и рассмотрение основной стадийной физической модели развития процесса накопления повреждений (разрушения);
- определение для каждой модели (механизма) накопления повреждений временных интервалов процесса;
- учёт нелинейности при накоплении повреждений при изменении различных условий нагружения (скорость нагружения, время, температура и т.д.) вследствие изменений механизмов исчерпания ресурса. Учёт нелинейного суммирования повреждений.
- определение и формулирование принципов равносности (эквивалентности) процессов для разных, с физической точки зрения, условий нагружения и напряженно – деформированного состояния и соответствие их экспериментальным данным образцов, выполненных в лабораторных условиях;
- учёт влияния на скорость процессов таких параметров, как вид траектории деформирования и параметров напряженно – деформированного состояния (НДС) конструкции;

- учёт и влияние на скорости процессов исчерпания ресурса реальной истории нагружения материала;
- формулирование процессов накопления повреждений и деформирования материала в виде специальных эволюционных уравнений, которые учитывают взаимное влияние этих процессов и включают критерии, определяющие устойчивость данных процессов;
- разработка и исследования методики (алгоритма) оценки выработанного ресурса на основе эволюционных уравнений процессов накопления повреждений и деформирования, которые на базе предварительных экспериментальных и расчётных данных позволяют проводить оценку степени поврежденности в реальном времени.

Микроструктурные изменения в материале (накопление повреждений, деградация материала) были описаны специально введенными параметрами, изменяющимися с течением времени, которые в той или иной степени характеризуют физико-механические свойства этих материалов. Данные исследований были получены в рамках резко развивающейся механики поврежденной среды.

При описании состояния поврежденности через такие параметры необходимо выбрать соответствующие меры количественной оценки поврежденности материала на макроуровне [24].

В прошлом веке в своих работах Ю.Н. Работнов [25] и Л.М. Качанов [26] ввели макроскопический параметр поврежденности с граничными условиями ( $0 \leq \Psi \leq 1$ ), который характеризует степень поврежденности материала на макроуровне.

Нулевое значение параметра  $\Psi$  в данном случае характеризует полное отсутствием повреждений (микротрещин, пор, дислокаций) в эталонном единичном объёме материала. Значение параметра  $\Psi = 1$  определяет полное разрушение (нарушение сплошности) сечения материала, иными словами равенство относительного объёма микродефектов единице в эталонном образце (рис. 1.1).

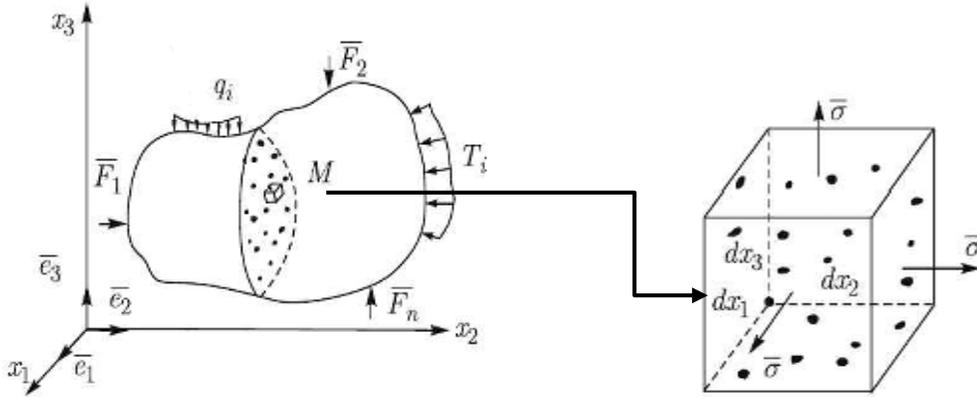


Рис.1.1. Схема накопления повреждений в эталонном образце материала

$$\Psi = \frac{V}{V_f}; \Delta\Psi = \frac{\Delta V}{V_f}; \Psi = \sum \Delta\Psi; 0 \leq \Psi \leq 1, \quad (1.1)$$

где  $\Psi$  – скалярный параметр поврежденности,  $\Delta\Psi$  – приращение параметра поврежденности,  $V$  – объем микродефектов, накопленных в образце,  $V_f$  – единичный объем образца материала,  $\Delta V$  – приращение объема микродефектов в процессе работы конструкции.

Весомый вклад в развитие теоретических основ механики поврежденных сред, в решение прикладных задач этого научного направления внесли отечественные ученые: Астафьев[27] В.И., Баженов В.Г., [28] Березин А.В. [29-31], Бондарь В.С. [2, 32, 33], Ботвина Л.Р. [34], Вакуленко А.А. [35, 36], Васин Р.А. [37], Вильдеман В.Э. [38], Волков В.М. [39], Волков И.А. [3, 5, 40], Горохов В.А. [41], Гусенков А.П. [42], Ерофеев В.И. [8, 56], Игумнов Л.А. [3, 40], Казаков Д.А. [40], Капустин С.А. [41, 43], Когаев В.П. [42], Коротких Ю.Г. [5], Локощенко А.М. [4, 44, 45], Ломакин Е.В. [46], Лурье С.А. [46,47], Маковкин Г.А.[48]., Махутов Н.А. [7, 42], Мишакин В.В. [49], Мовчан А.А. [50], Морозов Н.Ф. [51], Никитина Е.А. [8, 15], Пичков С.Н. [57], Радаев Ю.Н. [27, 52, 53], Романов А.Н. [54], Садырин А.И. [55], Углов А.Л. [56,57], Хлыбов А.А. [57], Шоркин В.С. [58] и другие, а также зарубежные исследователи, среди которых: Bazant Z.P. [59, 60], de Borst R. [61], Collins J.A. [62, 63], Geers M.G.D. [61], Hiraо M. [64], Karihaloo B.L. [65], Krajcinovic D. [66-69], Lemetre J. [70-72], Marigo J.J.

[73], Maugin G.A. [74], Murakami S. [24, 52], Needleman A. [75], Oka F. [76], Pezzyna P. [6], Placidi L. [77,78], Sidoroff F[79]., Twerdaard V. [75], Wang J. [65, 80] и другие.

С применением современных средств неразрушающего контроля и диагностики, а именно с использованием результатов мониторинга состояния материала, может быть достигнуто более высокое качество (уточнённые результаты) оценки степени повреждения конструкций и механизмов машин.

Следует отметить, что большая часть уравнений, описывающих накопление повреждений описывают вышеупомянутые процессы только для отдельных видов нагружения. Другими словами, эти уравнения не могут описать зависимость процесса накопления повреждений от истории нагружения (истории напряжений), температурных процессов и скорости деформаций.

Практика и экспериментальные данные показывают, что такой основной фактор, как история деформирования (характер циклического нагружения (рис.1.2), процесс изменения температуры, вид НДС, история напряжений (рис. 1.3), характер циклического нагружения) оказывают сильное влияние на скорость накопления повреждений в материале [15].

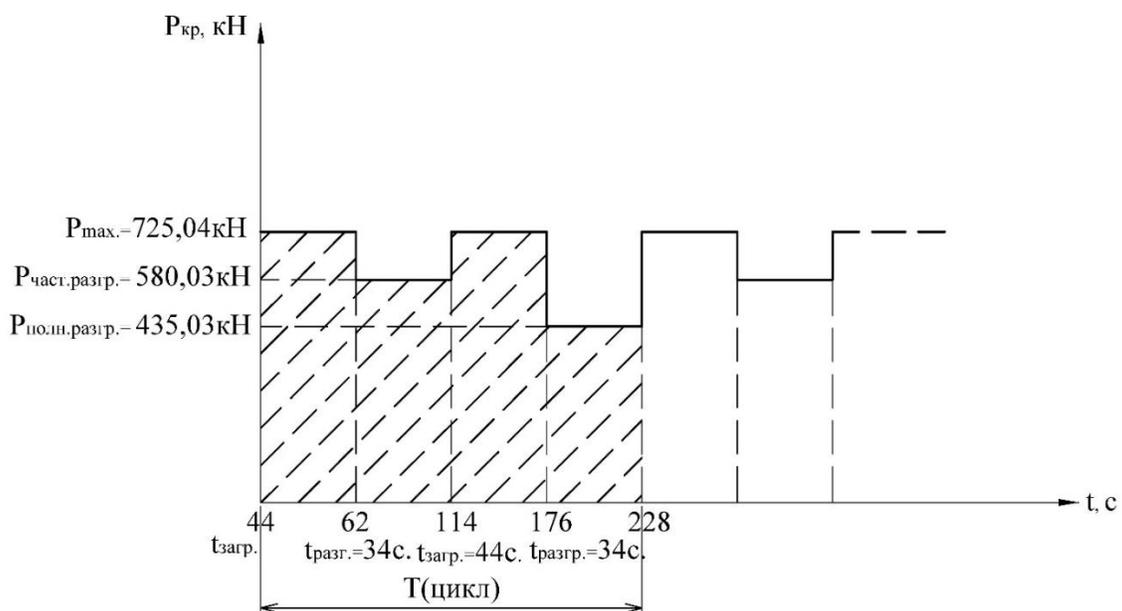


Рис. 1.2. График работы литейного крана на подкрановой конструкции

Этот факт подчеркивает большую важность рассмотрения как характера деталей кинетики напряженно-деформированного состояния в зонах, опасных для образования усталостных повреждений, так и теоретико – аналитического описания НДС при помощи математических уравнений. Здесь также стоит отметить, что очевидной является значимость методов получения экспериментальных данных НДС материала в опасных зонах, особенно в тех случаях, когда точность его теоретического определения недостаточна.

Для того, чтобы построить приближенную модель разрушения конструкции должен использоваться принцип, выделяющий физические механизмы, как основу решения проблемы [5].



Рис. 1.3. График зависимости напряжений от времени в процессе работы литейного крана (история напряжений)

Было принято решить данную проблему при помощи **математического моделирования**. При этом составлять математическую модель при данном подходе необходимо для каждого механизма.

Хочется отметить, что на данный момент уровень знаний о математическом моделировании поведения и накопления повреждений в материалах недостаточен. Таким образом до сих пор **феноменологический подход** считался одним из самых практичных подходов в данной области.

По результатам анализа развития динамической теории упругости, в данной области существует похожая проблема.

Феноменологический подход включает три метода:

1. «Модельный» [81-88]. Моделирование структуры материала происходит при помощи дискретных упруго-вязких элементов;
2. «Статистический» [89-94];
3. «Структурно – феноменологический» [95, 96].

Возможность определения эффективных макроскопических констант среды без опирания на экспериментальные данные является весомым положительным фактором первых двух подходов (модельного и статистического). Главный минус данных подходов состоит в громоздкости решения полученных уравнений и приводит к большим затруднениям при необходимости учёта нелинейностей и подобных факторах, характеризующих реальную работу конструкции. Наиболее предпочтительным и практичным для описания нелинейных эффектов, а также взаимодействия упругих полей между собой и со структурой является структурно – феноменологический подход.

В прошлом веке в работах [97-99] была развита общая теория нелинейно – упругих континуумов с микроструктурой.

Важно отметить, что работы, освещающие нелинейные волновые процессы в таких средах берут своё начало лишь в середине восьмидесятых годов прошлого века [100].

В первую очередь основным фактором механизма взаимодействия упругих волн с дефектами материалов является используемая длина волны. При рассмотрении механизма накопления повреждений от зарождения (начальная стадия поврежденности) вплоть до возникновения макроскопических трещин, длины волн, используемые при диагностировании конструкций, удовлетворяют соотношению

$$\lambda \gg a, \quad (1.2)$$

где  $a$  – характерный размер микротрещин, не превышающий 0,1 мм,  $\lambda$  – длина волны акустического сигнала.

Следовательно, акустические упругие волны могут рассматриваться как плавно геометрически – изменяющиеся во времени поля (в реальном микронеоднородном материале).

Для определения параметров волн в рассматриваемой среде, необходимо решить:

1. Квазистатическую задачу о связи тензоров деформаций и напряжений;
2. Задачу о конкретизации уравнения движения.

На сегодняшний день существует крайне малое количество работ, точно и с единой позиции рассматривающих распространение упругих импульсов в материале с наличием микроповреждений (трещины, дислокации и т.д.) и полем внутренних напряжений, как в неповрежденном, так и поврежденном материале.

Причинами этого могут быть как отсутствие точного представления о характере взаимодействия полей деформаций с полем микротрещин, так и отсутствие точных математических моделей, способных описать это явление. Наиболее подробно эта проблема описана в работе [101].

Однако, методы решения задач статической и динамической теории упругости микroneоднородных сред в настоящее время развиваются всё более интенсивно [94].

В настоящее время, большинство методов основаны на предположении, что все локальные внешние поля с микродефектами и неоднородностей могут быть заменены аналогичным полем заданной структуры. В рассматриваемых задачах решение сводится к построению статистических моментов заданного эффективного поля. В работах [102-104] описан «метод самосогласованного поля», как один из удачных методов последних лет.

Реальные материалы с поликристаллической структурой имеют две группы дефектов, которые приводят к скачку векторов смещения:

1. Границы зёрен кристаллов, зерновых блоков при фрагментации структуры;
2. Система микротрещин.

В процессе расчёта изменения эффективных характеристик материала при наличии развивающихся в нём дефектов, за исходные данные можно принять характеристики материала с зёрненной структурой. Данное допущение принято в соответствии с выводами работы [105].

Эффективные характеристики поликристаллов определяются современными методами, изложенными и развитыми в работах [87, 94, 106-110] и др.

## **1.2 Общие сведения о неразрушающих методах контроля состояния конструкций**

Главным фактором в работе конструкций под динамической (знакопеременной нагрузкой) является резкое изменение во времени внутренних напряжений.

Оценка параметра  $\Psi$  является основной задачей, которую необходимо решать при мониторинге существующих конструкций. Иными словами, напряженно-деформированное состояние таких конструкций имеет ярко выраженный динамический характер.

При этом, наиболее предпочтительными являются неразрушающие методы контроля конструкций, при помощи которых можно определить степень поврежденности, не разрушая его.

А значит необходимы усовершенствование и разработка методов неразрушающего контроля, т.е. таких методов, которые бы не оказывали разрушающего влияния на исследуемую конструкцию.

Подобные задачи приходится рассматривать не только относительно несущих строительных конструкций зданий и сооружений, но и применительно к конструкциям автомобильных и железнодорожных мостов, механизмов машин, подкрановых конструкций в производственных цехах - конструкций, подверженных динамическим воздействиям. Данные конструкции отличаются от остальных характером работы под плавно или резко изменяющейся нагрузкой (положение, характер и величина нагрузки). В «опасных» зонах статистически наблюдаются резкие скачки напряжений (коэффициент концентрации напряжений более единицы. Логично предположить, что именно в таких «опасных» зонах будет происходить истощение ресурса конструкции, т.е. накопление повреждений. Далее, при оценке ресурса материала конструкции в выбранных локальных зонах можно допустить рассмотрение именно материала конструкции не учитывая сечение конкретной конструкции или элемента. Следовательно, задача с принятыми допущениями может вестись с использованием общих методов механики поврежденных сред.

В результате вышеупомянутых процессов характеризуется состояние здания, сооружения, конструкций, детали.

По типу воздействия на конструкцию НМК делятся на «Электромагнитный», «Тепловой», «Радиоволновой», «Оптический», «Ультрафиолетовый» и «Акустический».

На сегодняшний день, определенный, как наиболее эффективный - акустический метод, был предложен в 20-х годах прошлого столетия советским физиком С.Я.

Соколовым. Впоследствии данный метод был назван «ультразвуковая дефектоскопия». В его основе был определен принцип характера распространения, и изменения характеристик ультразвуковых колебаний разных частот в контролируемом материале.

Определение и фиксирование параметров акустических волн, возбужденных в материале, стало основой, с классической точки зрения, ультразвуковой дефектоскопии. К тому же, оценка проводилась только для таких основных параметров, эволюционирующих во времени, которые можно измерить без накопления больших погрешностей, а именно:

- Волновое число,  $k$ ;
- Частота,  $\omega$ ;
- Фазовая и групповая скорости,  $c_{ph}$ ,  $c_{gr}$ .

Предполагается, что в однородном материале без повреждений волны распространяются, не меняя траектории своего движения. При наличии повреждений акустическое сопротивление сред меняется, и происходит отражение акустических волн от границ сред с разными удельными акустическими сопротивлениями. С увеличением разницы между значениями акустических сопротивлений расчёт и количество волн, отраженных от границы раздела сред, что непосредственно связано с увеличением количества микродефектов в рассматриваемой (расчётной) зоне конструкции.

Равенство фазовой и групповой скоростей говорит об отсутствии повреждений (идеальный материал). Но при возникновении и распространении дефектов эти соотношения изменяются по самым различным законам. Анализируя и сравнивая эти соотношения, можно как минимум дать качественную оценку уровня поврежденности материала.

Большое количество аварий, произошедших на гражданских объектах и производственных предприятиях, можно было бы избежать, производя

своевременный мониторинг конструкций с применением неразрушающих методов контроля, а также при составлении наиболее точных математических моделей систем, способных связывать процессы истощения ресурса на стадии эксплуатации конструкции [111, 112].

Если проанализировать и сравнить затраты России и США на обеспечение исправного состояния (обследование, мониторинг) конструкций зданий, сооружений, машин после их возведения, можно заметить, что в процентном соотношении от стоимости сооружений затраты США превосходят затраты России примерно в 3 раза.

В настоящее время существуют следующие, выделяющиеся на ряду с основными, проблемы, решив которые можно прийти к усовершенствованию методов неразрушающего контроля, в частности, к определению точного технического состояния конструкций:

1. Выбор метода контроля, позволяющего через волновые параметры с определенной степенью точности определять значение характеристик поврежденности материала;

2. Правильная постановка комплекса экспериментальных исследований, позволяющих установить соответствующие функциональные или корреляционные связи.

Анализ большого количества современных литературных источников показал, что наиболее перспективным методом физического неразрушающего контроля состояния материала является акустический метод.

На сегодняшний день, используя акустический метод контроля, установлено, что большинство микродефектов (микротрещин) с шириной раскрытия до 0,1 мм в одних из самых распространённых в производстве материалах, можно обнаружить на ранних стадиях нагружения (1-3% от общего количества циклов работы конструкции), практически в самом начале эксплуатации конструкции. Даже под

действием роста таких малогабаритных дефектов акустические свойства материала в рассматриваемой области претерпевают изменения.

Для определения «чувствительности» основных волновых параметров (частоты, коэффициентов затухания, скорости звука, амплитуды колебаний) к особенностям микроструктуры материала (расположение зёрен и его изменения, плотность микродефектов и др.) в 50-х годах прошлого века была заложена экспериментальная и теоретическая база. Результаты этих исследований были освещены в работах [113-116]. В основном, именно данные исследования носили основополагающий характер для развития методов акустического контроля.

Для дальнейшей разработки методов и технических приборов, которые позволили бы определять физические характеристики материалов, влияющие в конечном итоге как на прочностные параметры, так и на параметры надежности конструкций, интенсивно проводится множество исследований. Однако, в России на сегодняшний день нет ни одного надежного решения, позволяющего точно определить данные зависимости.

Недостаточная интеллектуализация и проработанность методов контроля и технических характеристик акустических приборов является в настоящее время одной из главных причин недоработки данной темы. В процессе оценки степени технического состояния материала основной функцией является анализ и выбор ограниченного количества акустических параметров из общего объемного массива первичных данных акустических свойств материала.

Вследствие этого, является очевидным то, что необходимо разработать такой эффективный метод неразрушающего контроля с использованием современных средств (приборов). Так, чтобы с помощью него можно оперативно оценить текущее состояние материала в исследуемой зоне (степень исчерпания ресурса) и дать точную его оценку с рекомендациями о работоспособности конструкции или, в противном

случае, о её переходе в опасное аварийное состояние и необходимости ремонтно-восстановительных работ.

Процессы накопления повреждений являются многостадийными, нелинейными, а также имеют взаимные связи. Такие процессы сильно зависят не только от характера эксплуатации конструкции, но и от качества материала на стадии его изготовления.

Изначально, материалы конструкций в процессе их изготовления содержат минимальный объем микродефектов – микропор, микротрещин, дислокаций (дефекты кристаллической решетки), дефектов на стыке зёрен различных по свойствам материалов, развивающихся впоследствии периодического нагружений конструкций. Одним из основных условий обеспечения надежности конструкции с наличием уже имеющихся дефектов в процессе её работы, является обнаружение повреждений, прежде чем они достигнут опасных размеров на протяжении всего времени эксплуатации, вплоть до разрушения сечения. Ограниченную долговечность имеет любая конструкция, находящаяся под какими-либо внешними воздействиями. А уменьшение остаточной прочности протекает в разных условиях с различной скоростью, зависимость которых нелинейна по природе и не очевидна.

Здесь следует отметить, что волновые параметры в первую очередь связаны с характеристиками поврежденности. Данная задача до настоящего времени решалась в рамках феноменологических моделей.

### **1.3 Спектрально - импульсный метод оценки степени поврежденности**

Одним из наиболее информативных относительно других видов акустических методов является спектрально-импульсный метод.

Определение характеристик материала при разработке акустических методов контроля ставит перед собой одну из главных задач – задача определения динамических констант упругости, выразив которые несложно получить зависимости волновых характеристик в микронеоднородном материале (частотно зависимое затухание, дисперсию скорости упругих волн).

Авторы [56], на основе выводов [94], получили выражение эффективных динамических констант второго порядка:

$$C_{ijkl}^* = \langle C_{ijkl} \rangle + \Delta C_{ijkl}^{корр}, \quad (1.3)$$

где  $\langle C_{ijkl} \rangle$  - усредненные по объему значения констант упругости,  $\Delta C_{ijkl}^{корр}$  - корреляционная добавка, в общем случае имеющая весьма сложный вид [94].

В результате решения уравнения в длинноволновом приближении получены выражения для коэффициентов рассеяния скорости звука.

Анализируя работы [94, 105], для учёта полей микродефектов авторы приходят к уравнению:

$$C_{ijkl}^{**} = C_{ijkl}^* + \Delta C_{ijkl}^a, \quad (1.4)$$

Здесь  $C_{ijkl}^a$  - добавка, определяемая функцией распределения микротрещин по углам и размерам  $F(a, \varphi, \theta)$ . И далее также получают дисперсионные уравнения для коэффициентов рассеяния скорости при наличии дефектов.

Наличие в зонах вершин микротрещин высоких значений растягивающих напряжений приводит к тому, что изменение скорости распространения акустических волн, возникающее вследствие известного акустоупругого эффекта [117-119], оказывается сравнимым с добавками от условий зернистости структуры и зависит от системы микротрещин. Поскольку наряду с развитием системы микротрещин эволюция поля внутренних напряжений является другим важным аспектом накопления повреждений в материале, учет изменения скорости распространения упругих волн вследствие развития поля внутренних напряжений является принципиально необходимым для построения акустического метода оценки характеристик поврежденности и, следовательно, физико-механических характеристик материала.

Далее полученные выражения для скорости распространения упругих волн записываются в корреляционном приближении:

$$V = V_a[F(a, \varphi, \theta)]\{1 - k_{2a}[F(a, \varphi, \theta)]d^2 f^2\} + \Delta C[B_{ijkl}(\Delta r)], \quad (1.5)$$

где  $B_{ijkl}(\Delta r)$  - корреляционный тензор внутренних напряжений, один из способов построения которого для системы микротрещин описан в работе [104].

Данный вид выражения (1.5) может быть получен в рамках линеаризованной теории акусто-упругости [117-119], общепризнанной в настоящее время.

В процессе анализа методов структурометрии авторы работы [56] признали наиболее перспективным спектрально-импульсный метод, если брать в сравнение «чувствительность» и информативность методов.

Основная идея определения параметра поврежденности формулировалась как задача, направленная на извлечение информации из передаточной характеристики материала. В данном случае материал рассматривается как акустический четырёхполюсник.

$$K_M(\omega, x) = \exp\left[-\alpha(\omega)x - j\frac{\omega x}{V(x)}\right], \quad (1.6)$$

где  $x$  - акустический путь упругого зондирующего импульса, величины  $\alpha(\omega)$  и  $V(\omega)$  - коэффициенты рассеяния скорости звука [56].

Основные приёмы восстановления зависимостей  $\alpha(\omega)$  и  $V(\omega)$  изложены в работах [44, 53]. В их основу положен анализ закономерностей трансформации спектра распространяющегося импульса.

Важно отметить, что в последнее время предложены варианты спектрально-акустических измерений, имеющие повышенную чувствительность к структурным особенностям материала, по сравнению с традиционными [120-125]. Следовательно, в настоящее время следует признать перспективным для решения задач

акустического контроля поврежденности конструкционного материала путь поиска наиболее чувствительных в каждом конкретном случае спектрально-акустических параметров.

В итоге, в основу разработки метода неразрушающего контроля по определению характеристик накопления повреждений были положены методы и приёмы спектрально-импульсной структурометрии.

Таким образом, построение метода определения характеристик поврежденности  $\Psi$  спектрально-импульсным методом разделяется на две основные задачи:

1. Записать выражение для передаточной функции материала  $K_M(\omega, x)$  (1.10), содержащее интересующие нас характеристики поврежденности материала  $\Psi$ ;
2. Разработать метод, с применением которого можно восстановить вид передаточной функции, основанный на сравнении параметров зондирующих импульсов на входе и на выходе материала как акустического четырехполюсника.

В данном случае задачу можно конкретизировать следующим образом:

- Необходимо обеспечить ввод характеристик поврежденности  $\Psi$  в выражения для основных параметров передаточной функции  $\alpha(\omega)$  и  $V(\omega)$ . Необходимо обеспечить их взаимосвязь в одном выражении.
- Необходимо наличие методики измерений акустическими приборами характеристик поврежденности.

Если воспользоваться приёмом, описанным в работе [94], конкретизируя факторы, являющиеся причиной неоднородности среды, можно легко построить явный вид зависимостей параметров  $\alpha(\omega)$  и  $V(\omega)$ . Легко предположить, что наличие зёрненной структуры и систем микротрещин, повреждающих материал и, тем самым, определяющих величину поврежденности  $\Psi$ , являются причинами неоднородности среды. На основании выводов работы [94] можно получить следующие выражения:

$$\alpha(\omega) = (k_1 + k_2 \Psi) \omega^4, \quad (1.7)$$

$$V(\omega) = V_0(1 - k_3\Psi - k_4\Psi\omega^2), \quad (1.8)$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_4$  – постоянные материала.

Соотношения (1.7), (1.8) можно использовать в качестве основы для разработки аппаратного способа оценки характеристик поврежденности. Данные соотношения справедливы в длинноволновом диапазоне приближений.

В настоящее время, фазовые измерения с высокой точностью позволяет проводить современная существующая аппаратура. Из [124-126] можно подчеркнуть, что необходимая точность измерения параметра  $V(\omega)$  может быть обеспечена: а) при правильном выборе длительности ультразвукового радиоимпульса (число периодов заполнения не менее 5-7), б) при учете ряда систематических погрешностей (вследствие дифракции и других эффектов).

При рассмотрении узкополосных сигналов (достаточно длинных импульсов), обычно излучаемых типичными пьезопреобразователями, можно допустить линеаризацию зависимостей  $\alpha(\omega)$  и  $V(\omega)$  в области круговой частоты несущей импульса  $\omega_0$ :

$$\alpha(\omega) = (k_1 + k_2\Psi)\omega_0^3(4\omega - 3\omega_0), \quad (1.9)$$

$$V(\omega) = V_0[1 - k_3\Psi - k_4\Psi\omega_0(2\omega - \omega_0)]. \quad (1.10)$$

Далее получены выражения для формы импульса на расстоянии  $x$  от границы среды, если выразить соотношение для передаточной функции (1.6) через выражения (1.9) и (1.10) и выполнить интегрирование:

$$S(t, x) = A(x)e^{-k(t')^2} \cos\{[\omega_0(x) + K_{qM}t']t' + \varphi_0 - \Delta\varphi(x)\}, \quad (1.11)$$

где

$$A(x) = A[1 - 16k^2 \frac{x}{V_0} (1 + 2k_3\Psi)k_4^2\Psi^2\omega_0^2] \times \exp(-(k_1 + k_2\Psi)x\omega_0^4 + 16k \frac{x}{V_0} (1 + 2k_3\Psi)k_4\Psi\omega_0^2), \quad (1.12)$$

$$t' = t - \frac{x}{V_0} (1 + k_3\Psi + k_4\Psi\omega_0^2), \quad (1.13)$$

$$\omega_0(x) = \omega_0 - 8(k_1 + k_2\Psi)x\omega_0^3, \quad (1.14)$$

$$K_{qM} = \frac{\partial \omega_0'}{\partial t'} = 8k^2 \frac{x}{V_0} (1 + k_3\Psi)k_4\Psi\omega_0, \quad (1.15)$$

$$\omega_0' = \omega_0 + K_{qM}t', \quad (1.16)$$

$$\Delta\varphi = 4 \frac{x}{V_0} (1 + k_3\Psi)K_{qM}\omega_0(k + \omega_0^2)\Psi. \quad (1.17)$$

С анализом и выводами выражений (1.11-1.17) можно ознакомиться в работе [56].

Из уравнений (1.11)-(1.17) авторы использовали выражения (1.13), (1.15) на соответствующей центральной частоте и получили три вида оценок функции поврежденности  $\Psi$ .

$$\Psi = K_{S3} \frac{\omega_0(t_1) - \omega_0(t_n)}{t_{1n}\omega_0^3}, \quad (1.18)$$

$$\Psi = K_{S4} \frac{K_{q.M.}(t_n) - K_{q.M.}(t_1)}{t_{1n}\omega_0}, \quad (1.19)$$

$$\Psi = K_{S5} \frac{\Delta\varphi(t_n) - \Delta\varphi(t_1)}{t_{1n}\omega_0^3}. \quad (1.20)$$

Более подробно методика нахождения зависимостей параметра поврежденности спектрально-импульсным методом освещена в работе [56].

#### 1.4 Самосогласованная задача оценки степени поврежденности материала акустическим методом

В настоящее время в механике деформируемого твердого тела, решения задач накопления повреждений и задач динамики рассматриваются отдельно. Эволюция напряженно-деформированного состояния (НДС) в материале, оказывающая большое влияние на развитие в нем повреждений, никак не учитывалась ранее при разработке методов определения степени поврежденности акустическими методами. Как отмечалось ранее, причиной этому может служить недостаточная изученность процесса накопления повреждений и связь её с изменениями НДС и характеристиками упругих волн в материале.

Взяв во внимание методику, предложенную авторами [56], описанную в предыдущем параграфе, её можно обобщенно охарактеризовать следующим образом. Данная методика постулирует заранее, что скорость упругих волн является заданной функцией поврежденности, затем коэффициенты пропорциональности определяются экспериментально (1.18)-(1.20).

Обращаясь к работам И.А. Волкова и Ю.Г. Коротких, следующее кинетическое уравнение представлено в виде эволюционного уравнения накопления повреждений, и при данном подходе описывается в виде [5]:

$$\frac{d\Psi}{dt} = f(\sigma, \Psi) \quad (1.21)$$

где  $\Psi$  – параметр, характеризующий накопление повреждений,  $\sigma$  – внутреннее напряжение.

Данная функция  $f(\sigma, \Psi)$  обычно может быть упрощена линейной зависимостью и иногда полиномиальной зависимостью [5].

Рассмотренные выше решения не опираются на математические модели, которые способны точно описать накопление повреждений и распространение волн в рассматриваемой конструкции. Данный факт может быть использован для описания

такой самосогласованной математической модели, которая способна учесть эволюцию повреждений в материале с течением времени совместно с уравнениями динамики системы.

Понятие поврежденности обычно формулируется через уменьшение с течением времени эффективной, участвующей в работе, площади сечения, которая способна передавать внутренние усилия между соседними участками элемента. В следствии этого происходит уменьшение упругой реакции (отклика) тела на внешние воздействия. Эффективная площадь сечения в процессе работы сокращается за счёт появления и развития полей микродефектов (микротрещины — в упругости, дислокации — в пластичности, микропоры — при ползучести, поверхностные микротрещины — при усталости) [74].

Поврежденность (деградация свойств материала) не измеряется через привычные единицы, как, например, сила, напряжение, температура. Она может быть обнаружена в результате анализа реакции тела от различного рода внешних воздействий. На основании экспериментальных данных, поле повреждений косвенно обнаруживается и частично количественно представлено через уменьшения модуля юнга («дефект модуля»), резкого снижения скорости сигнала приборов, уменьшения электрического потенциала, увеличения или уменьшения твёрдости материала, снижения плотности, падения амплитуды напряжений (циклическое нагружение) и на третьей стадии увеличения скорости ползучести. Данные явления описаны в работах [39, 62-64, 80, 127-129].

Наиболее распространённой мерой количественной оценки повреждённости при расчётах принимают скалярный параметр поврежденности  $\Psi(x, t)$ . Данный параметр характеризует относительную плотность микродефектов, рассеянных по всему объему элементарного кубического образца. Его значение равно нулю при отсутствии повреждений (новый материал, до начала использования) и близко к

единице при полном разрушении конструкции, узла (нарушение сплошности сечения)

Подход в виде последовательного решения при каждом нагружении кинетического уравнения, описывающего поврежденность полностью описывает процесс накопления повреждений в материале конструкции. Проанализировав конечное кинетическое уравнение, можно прийти к получению новых зависимостей влияния поля поврежденности на параметры волн. Данные параметры, в свою очередь, можно получить посредством измерения при помощи приборов неразрушающего контроля.

Исследование процесса накопления повреждений в элементе конструкции продолжается до достижения параметром  $\Psi(x, t)$  заданного предельного значения, близкого к единице.

После достижения численного значения параметра  $\Psi(x, t)$  единицы, исследование процесса повреждаемости материала элемента считается завершенным. Жизненный цикл материала конструкции в определенной области элемента расположен в пределах скалярного параметра от нуля до единицы.

Тем самым, самосогласованная динамическая задача оценки поврежденности формулируется в следующей последовательности:

1. Рассматривается элементарный стержень, по которому распространяются акустические (продольная, изгибная, крутильная) волны. Через соответствующие математические обозначения принимают продольные, поперечные, угловые перемещение частиц срединной линии элемента (рис. 1.4). Продольные перемещения -  $u(x, t)$ , поперечные -  $W(x, t)$ , угловые -  $\theta(x, t)$ . В элементе или в отдельной его части по мере нагружения (циклические и статические нагрузки) происходит накопление и объединение микродефектов. Мера поврежденности описывается скалярным параметром Качанова - Работнова  $\Psi(x, t)$  [25, 26].

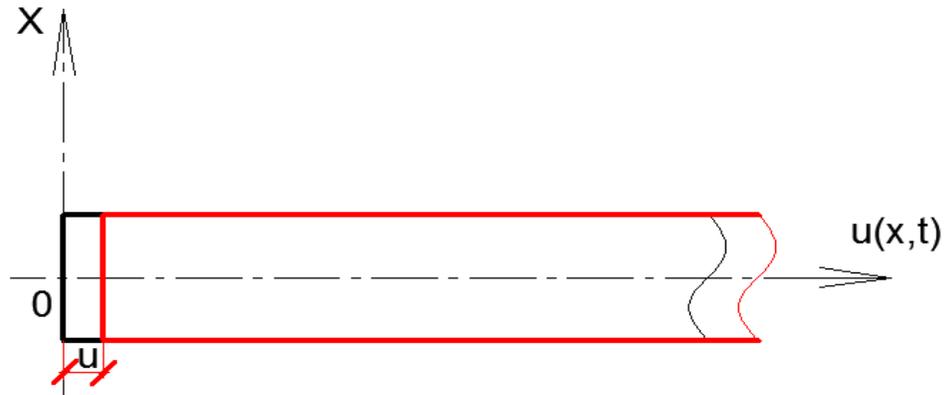


Рис. 1.4. Объект исследования – элементарный стержень

2. Записывается основная математическая модель распространения волн в поврежденном стержне. Рассматриваемая математическая модель включает как уравнение развития повреждений, так и уравнение, характеризующее динамику системы. Данная математическая модель описана уравнениями.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi = \beta_2 E \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1.23)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – константы, характеризующие поврежденность материала и связь циклических процессов и процессов накопления повреждений.

Здесь уравнение, характеризующее динамику стержня, рассматривается совместно с эволюционным уравнением поврежденности.

Избранные модели могут рассматриваться как в линейной, так и в нелинейной (геометрическая и физическая нелинейность) постановках.

Предложенную методику можно разделить условно на три основных этапа:

1. Постановка задачи. Определение самосогласованной математической модели вида (1.22), (1.23).

2. Аналитическое решение системы уравнений.

3. Выявление аналитических  $f\Psi = f(\omega, A, \nu, \lambda)$  или численных (графических) дисперсионных зависимостей параметров упругих волн от параметра поврежденности.

4. Анализ результатов зависимостей.

### **Выводы по главе 1**

В первой главе диссертационной работы изложены следующие основополагающие теоретические данные:

1. Рассмотрены и изложены основные подходы к оценке повреждаемости материала;

2. Освещены общие сведения о неразрушающих методах контроля состояния конструкций, основные виды неразрушающего контроля, теоретические основы распространения и эволюции акустических волн в поврежденных и неповрежденных средах.

3. Изложен алгоритм определения параметров поврежденности спектрально-импульсным методом.

4. Рассмотрены недостатки спектрально-импульсного метода определения зависимостей волновых параметров от параметра поврежденности, а также описан краткий алгоритм определения степени поврежденности с помощью самосогласованной задачи.

## ГЛАВА 2.

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В БАЛКЕ, МАТЕРИАЛ КОТОРОЙ НАКАПЛИВАЕТ ПОВРЕЖДЕНИЯ В ПРОЦЕССЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ

В главе сформулирована самосогласованная математическая модель, включающая в себя уравнение изгибных колебаний балки (стержня) и кинетическое уравнение накопления повреждений в ее материале. В линейном приближении в рамках предложенной модели исследовано влияние поврежденности материала на параметры изгибной волны, распространяющейся в балке. Далее рассмотрен случай распространения по балке интенсивных вибраций, когда уже нельзя ограничиться изучением гармонических или квазигармонических процессов, а необходимо учитывать широкополосность изгибных волн.

#### 2.1. Линейная математическая модель

Рассматривается стержень на упругом основании, по которому распространяется поперечная (изгибная) волна. В соответствии с теорией Эйлера – Бернулли [130]:

- 1) Поперечные сечения балки, плоские и перпендикулярные её оси, во время изгиба остаются плоскими и перпендикулярными деформированной оси балки;
- 2) Продольные сечения балки сопротивляются изгибу независимо, не оказывая друг на друга влияния (т.е. нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, пренебрежимо малы);
- 3) Инерцией вращения балки при изгибе можно пренебречь.

Из второго предположения следует, что из компонент тензора напряжений и деформаций существенным признаются только  $\sigma_{11}$  и  $\varepsilon_{11}$ , т.е. волокна либо растягиваются, либо сжимаются, в результате чего запасается потенциальная энергия.

Считаем, что балка подвергалась статическим или циклическим испытаниям и в её материале могла накопиться поврежденность. Для описания меры поврежденности введем функцию Качанова – Работнова  $\Psi(x, t)$ .

Обозначим через  $W(x, t)$  перемещение частиц срединной линии балки при изгибе. Динамика балки с учетом поврежденности ее материала описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \beta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi = \beta_2 E \frac{\partial W}{\partial x}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь введены обозначения  $c_s = \sqrt{E\rho^{-1}}$ ,  $r_y = \sqrt{J_y F^{-1}}$ , где  $E$  – Модуль Юнга,  $\rho$  – плотность материала,  $J_y$  – осевой момент инерции,  $F$  – площадь поперечного сечения балки,  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  – константы, характеризующие поврежденность материала (среди которых  $\alpha = T^{-1}$ , где  $T$  – время релаксации [131], физический смысл других коэффициентов не столь очевиден;  $\beta_1 \cdot \beta_2 < 0$ ).

Предполагаем, что балка является бесконечной. Такая идеализация допустима, если на ее границах находятся оптимальные демпфирующие устройства, т.е. параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не будут отражаться. В [132, 138] на основе точных решений модельных задач для упругих систем обосновано существование согласованных концевых гасителей различных типов колебаний, не дающих отраженных возмущений в системе. Это позволяет рассматривать модель балки (2.1) без учета граничных условий, а вибрации, распространяющиеся по балке, рассматривать как бегущие изгибные волны.

Система (2.1) сводится к одному уравнению относительно поперечного перемещения  $W(x, t)$ , которое имеет вид:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + c_s^2 r_y^2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + \frac{c_s^2 r_y^2}{\alpha} \cdot \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial t} = 0. \quad (2.2)$$

Легко видеть, что наличие поврежденности материала приводит к появлению в уравнении (2.2) слагаемых, эквивалентных тем, что появляются в результате сжатия балки продольной силой (второе слагаемое) и наличия в материале балки внутреннего трения (третье и четвертое слагаемые).

Введение безразмерных величин для поперечного перемещения, координаты и времени

$$U = W \cdot W_0^{-1}; z = x \cdot r_y^{-1}; \tau = (c_s \cdot r_y^{-1})t \quad (2.3)$$

Приводит уравнение (2.2) к виду:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + a \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \frac{\partial^5 U}{\partial z^4 \partial \tau} = 0 \quad (2.4)$$

где  $a = \frac{-\beta_1 \beta_2 E}{\alpha^2 c_s^2 r_y^2} > 0$ .

Исследуем далее влияние поврежденности материала на параметры изгибной волны, распространяющейся в балке.

Отыскивая решение уравнения (2.4) в виде бегущей гармонической волны  $U = A \cdot e^{i(\omega\tau - kz)}$  (здесь  $A$  – комплексная амплитуда,  $\omega$  – круговая частота,  $k$  – волновое число), приходим к дисперсионному уравнению:

$$\omega^2 + a k^2 - k^4 + i\omega^3 - i\omega k^4 = 0 \quad (2.5)$$

из которого следует, что волновое число должно быть комплексным:

$$k = k_1 + ik_2 \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в комплексное дисперсионное уравнение (2.5) и выделяя его действительную и мнимую части, придём к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\omega^2 - ak_1^2 + ak_2^2 + k_1^4 - 6k_1^2k_2^2 + k_2^4 - 4\omega k_1^3k_2 + 4\omega k_1k_2^3 = 0; \\ -2ak_1k_2 + 4k_1^3k_2 - 4k_1k_2^3 - \omega^3 + \omega k_1^4 - 6\omega k_1^2k_2^2 + \omega k_2^4 = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

## 2.2. Анализ дисперсионных зависимостей

Поскольку аналитическое исследование системы (2.7) крайне затруднительно, для ее анализа применяем численное моделирование, в результате которого получаем частотные зависимости действительной  $k_1(\omega)$  и мнимой  $k_2(\omega)$  частей волнового числа (рис.2.1).

Если в классической балке Бернулли–Эйлера для изгибных волн имеется одна дисперсионная ветка  $k_1 = \sqrt{\omega}$ ,  $k_2 = 0$  при любом значении  $\omega$  (пунктирная линия на рис. 2.1), то для волн в балке, описываемой уравнением (2.4), во всем частотном диапазоне существуют две дисперсионные ветки для  $k_1$ , характеризующей распространение волны и две дисперсионные ветки для  $k_2$ , характеризующей ее частотно - зависимое затухание.

Важным фактором, характеризующим процесс распространения изгибной волны в этом случае, является частотная зависимость параметра  $\gamma = k_2k_1^{-1}$  – отношение коэффициента, характеризующего затухание волны ( $k_2$ ) к постоянной ее распространения ( $k_1$ ).

Неявное уравнение зависимости коэффициента затухания  $\gamma = k_2k_1^{-1}$  от частоты имеет вид:

$$a^2\omega^2\gamma^8 - 4m\gamma^6 - 2(a^2\omega^2 + 8a^2 - 4m)\gamma^4 - 4m\gamma^2 + a^2\omega^2 = 0 \quad (2.8)$$

где для сокращения записи введено обозначение  $m = a^2 + 4\omega^2(1 + \omega^2)^2$ . Зависимость изображена на рисунке 2.1 (красная линия).

Из рисунка видно, что для нижней по  $k_1$  дисперсионной ветки  $\gamma > 1$  во всем частотном диапазоне, следовательно, здесь преобладает затухание и бегущих изгибных волн не существует. Для верхней по  $k_1$  дисперсионной ветки  $\gamma < 1$  во всем

частотном диапазоне, следовательно, здесь существуют бегущие затухающие изгибные волны.

Динамика кривой при различных значениях параметра изображена на рисунке 2.2, где пунктиром с пробелами отмечена асимптота  $\gamma = 1$ . Координаты точки максимума нижней ветви кривой зависят от параметра и определяются из решения системы уравнений.

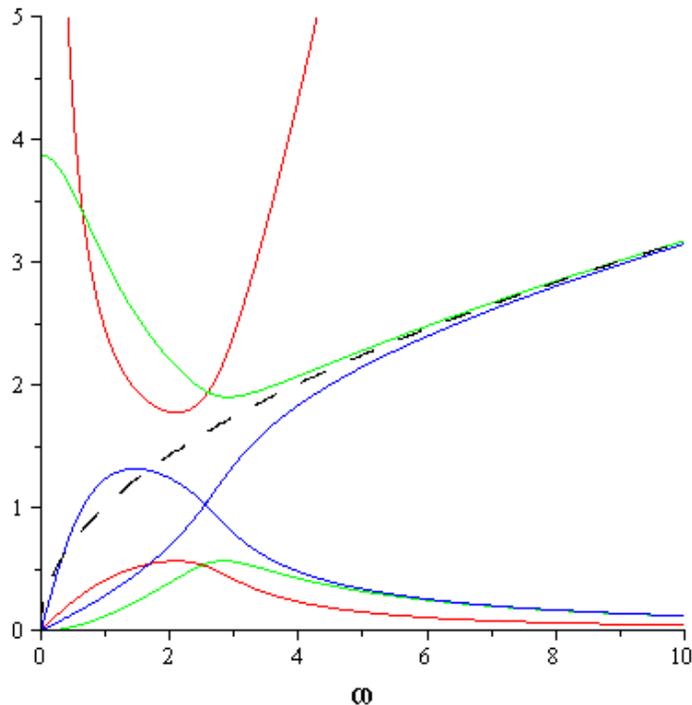


Рис. 2.1. Зависимости действительной (зеленый), мнимой (синий) частей волнового числа и коэффициента затухания (красный) от частоты

Производная  $\gamma'(\omega)$  обращается в ноль на кривой

$$a^2\gamma^4 + 2(a^2 - 8(3\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1))\gamma^2 + a^2 = 0 \quad (2.9)$$

и отмечена голубым цветом на рисунке 2.2. Совместное решение уравнений (2.8) и (2.9) позволяет найти координаты точки максимума  $(\omega_{\max}, \gamma_{\max})$  при фиксированном значении  $a$ . При увеличении параметра  $a$  кривая приближается к асимптоте, а точка максимума сдвигается в направлении увеличения частоты и коэффициента затухания (рис. 2.3).

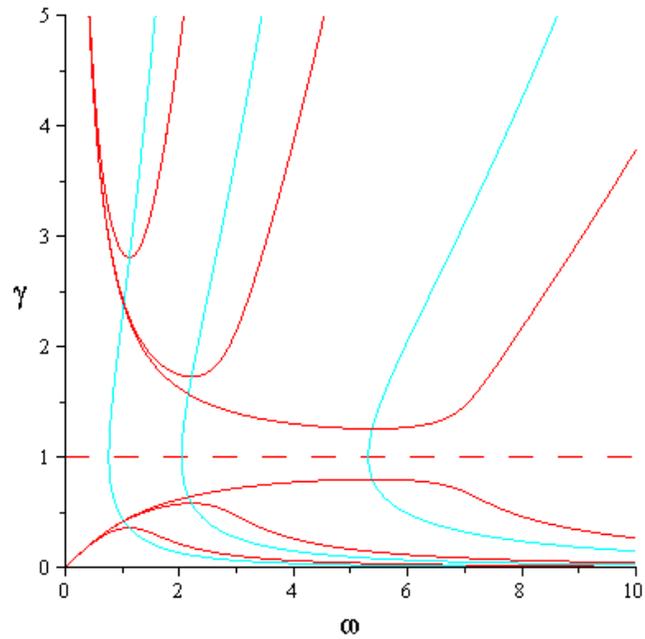


Рис. 2.2. Зависимость коэффициента затухания  $\gamma'(\omega)$  (красный) от частоты при различных значениях параметра  $a$

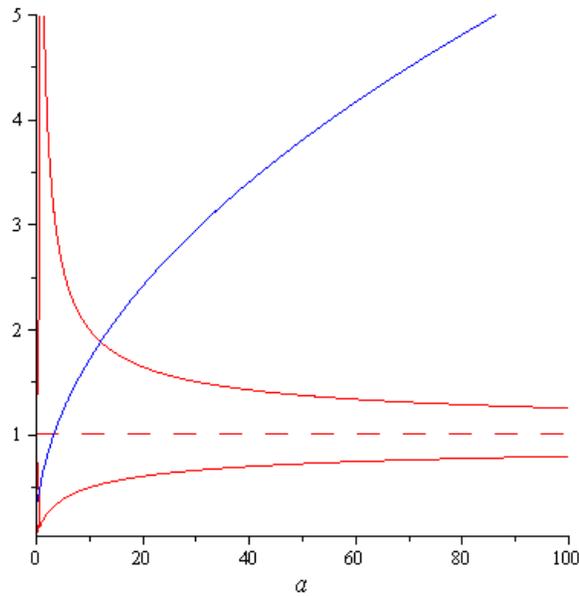


Рис. 2.3. Зависимости  $\gamma_{max}(a)$  (верхняя красная ветвь),  $\gamma_{min}(a)$  (нижняя красная ветвь),  $\omega_{max}(a)$ ,  $\omega_{min}(a)$  (синий)

На рисунке 2.4 показаны зависимости от постоянной распространения  $k_1$  фазовой  $v_{ph} = \omega k_1^{-1}$  и групповой  $v_{gr} = \partial\omega(\partial k_1)^{-1}$  скоростей изгибной волны. Пунктиром на рисунке отображен линейный рост в зависимости от  $k_1$  фазовой (нижняя линия) и

групповой (верхняя линия) скоростей изгибных волн, распространяющихся в классической балке Бернулли–Эйлера.

На рис. 2.5. Представлена зависимость фазовой скорости от частоты  $v_{ph}(\omega)$  при фиксированном значении параметра  $a$ .

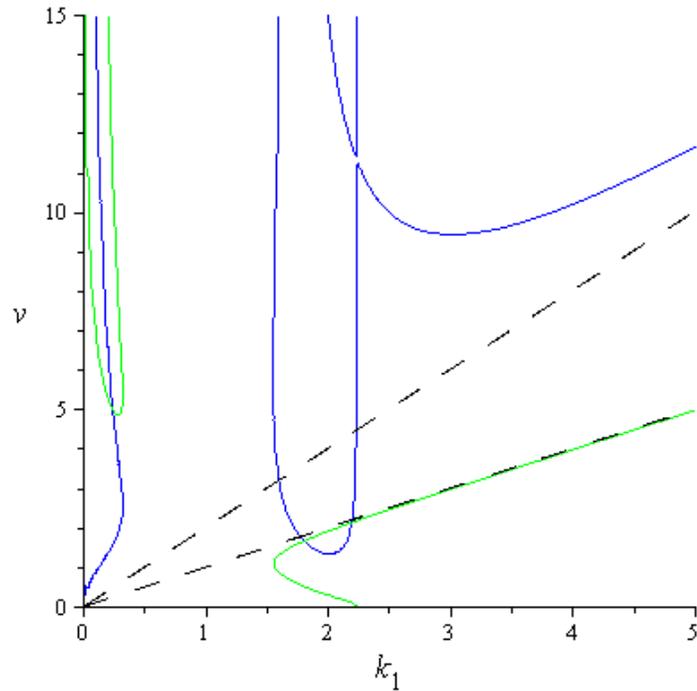


Рис. 2.4. Зависимости фазовой  $v_{ph}(k_1)$  (зеленый) и групповой  $v_{gr}(k_1)$  (синий) скоростей от волнового числа при фиксированном значении параметра  $a$

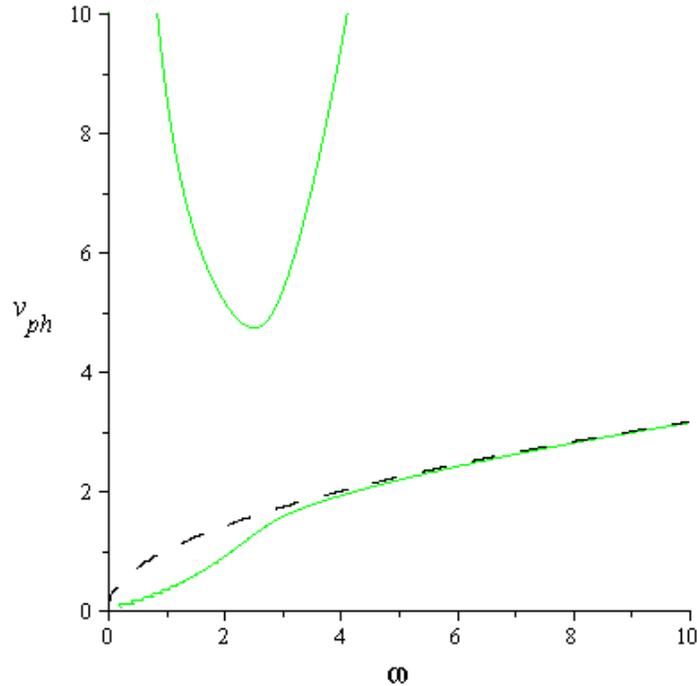


Рис. 2.5. Зависимость фазовой скорости от частоты  $v_{ph}(\omega)$  при фиксированном значении параметра

### 2.3. Учёт геометрической нелинейности

Рассмотрим случай распространения по балке интенсивных вибраций, когда уже нельзя ограничиться изучением гармонических или квазигармонических процессов, а необходимо учитывать широкополосность изгибных волн.

Учитываем геометрическую нелинейность балки (т.е. нелинейную связь деформации и перемещения), считая при этом, что срединная линия балки остается нерастяжимой.

Система уравнений (2.1) в этом случае примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{c_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \right] = \beta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi = \beta_2 E \frac{\partial W}{\partial x}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Здесь обозначения для формулы (2.10) аналогичны обозначениям для (2.1).

Система (2.10) сводится к одному уравнению относительно поперечного перемещения  $W(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + c_s^2 r_y^2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} + \frac{c_s^2 r_y^2}{\alpha} \cdot \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial t} - \\ - \frac{c_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \right] - \frac{c_s^2}{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Это уравнение в приведённых безразмерных переменных  $U = W \cdot W_0^{-1}; z = x \cdot r_y^{-1}; \tau = (c_s \cdot r_y^{-1})t$  запишется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + a_1 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + a_2 \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + a_2 \frac{\partial^5 U}{\partial z^4 \partial \tau} - \\ - \frac{a_3}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^3 \right] - \frac{a_2 a_3}{2} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \tau} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)^3 \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где  $a_1 = \frac{-\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_s^2}, a_2 = \frac{c_s}{r_y \alpha}, a_3 = \frac{W_0^2}{r_y^2}$ .

Будем искать решение уравнения (2.12) в классе стационарных волн:

$$U = U(\xi), \quad (2.13)$$

где  $\xi = z - V\tau$  – «бегущая» координата,  $V = const$  – скорость волны.

При малых временах релаксации  $T \rightarrow 0$  (т.е. при  $\alpha \rightarrow \infty$ ) при подстановке (2.13), уравнение (2.12) сведётся к уравнению Дуффинга [133]:

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + m_1 \theta + m_2 \theta^3 = 0. \quad (2.14)$$

Здесь  $\theta = \frac{dW}{d\xi}$  – угол поворота поперечного сечения балки;  $m_1 = a_1 + V^2; m_2 = \frac{-a_3}{2}$ .

Здесь знаки коэффициентов  $m_1$  и  $m_2$  показывают возможность существования нелинейных стационарных изгибных волн (при этом  $m_1 > 0$ ,  $m_2 < 0$ ).

Если проинтегрировать уравнение (2.14) получим:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 = E - \frac{m_1}{2} \theta^2 - \frac{m_2}{4} \theta^4. \quad (2.15)$$

Данное соотношение можно сформулировать, как закон сохранения энергии для негармонического осциллятора. Где начальная энергия системы выражается в виде постоянной интегрирования  $E$ , а потенциальная энергия в виде:

$$f(\theta) = \frac{m_1}{2} \theta^2 - \frac{m_2}{4} \theta^4 \quad (2.16)$$

Разделяя переменные в уравнении (2.28), получим следующее соотношение:

$$\sqrt{2} d\xi = \frac{d\theta}{E - f(\theta)}. \quad (2.17)$$

Данное уравнение имеет решения на границах области между любыми действительными корнями многочлена  $E - f(\theta)$ , где  $E - f(\theta) > 0$ .

Функция потенциальной энергии (2.16) имеет локальный максимум  $f_{\max} = m_1^2 / 4m_2$  когда  $\theta = \pm \sqrt{-m_1/m_2}$ , и локальный минимум  $f_{\min} = 0$ , когда  $\theta = 0$  (рис. 2.6). Вследствие этого на фазовой плоскости  $(\theta, d\theta/d\xi)$  точка  $(0; 0)$  является устойчивым положением равновесия типа «центр», а точки  $(\pm \sqrt{-m_1/m_2}, 0)$  – неустойчивыми положениями равновесия типа «узел». Фазовый портрет системы показан на рисунке 2.9.

Граничные решения уравнения в данном случае (2.15) существуют в интервале  $0 \leq E \leq f_{\max}$ . Кроме того, многочлен  $E - f(\theta)$  имеет четыре действительных корня  $\theta_{1,2} = \pm \alpha_0; \theta_{3,4} = \pm \beta_0$ , где

$$\alpha_0 = \frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{-m_2}, \quad (2.18)$$

$$\beta_0 = \frac{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{-m_2}, \quad (2.19)$$

$$\alpha_0 > \beta_0, \quad (2.20)$$

и принимает положительные значения, когда  $-\alpha_0 < \theta < \alpha_0$ . В случае, когда  $E = f_{\max} = m_1^2/4m_2$ , корни совпадают попарно  $\theta_1 = \theta_3; \theta_2 = \theta_4$ , что соответствует движению по сепаратрисе на фазовой плоскости.

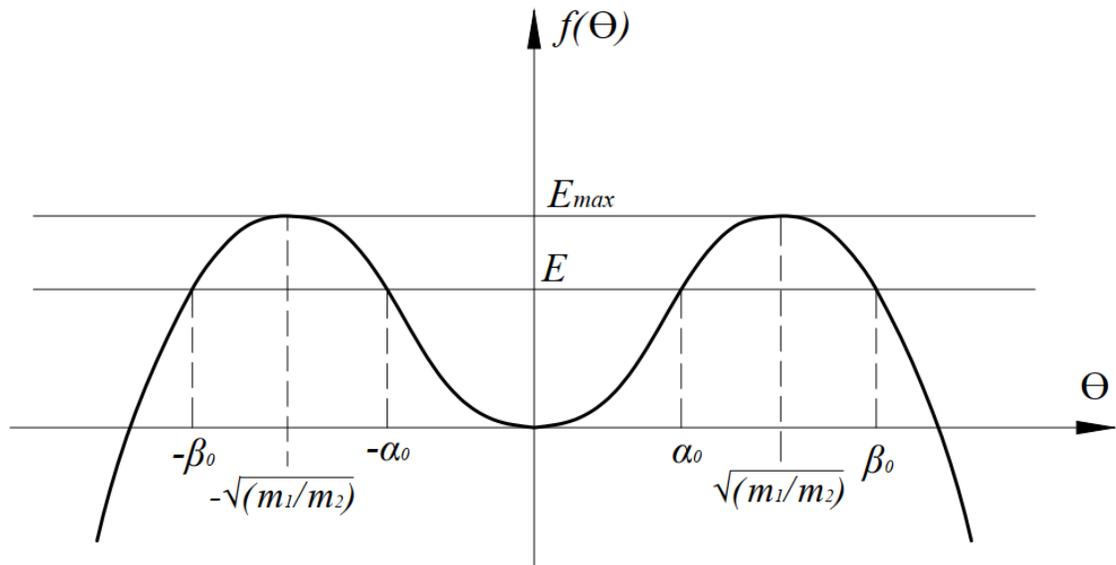


Рис. 2.6. Потенциальная энергия нелинейного осциллятора

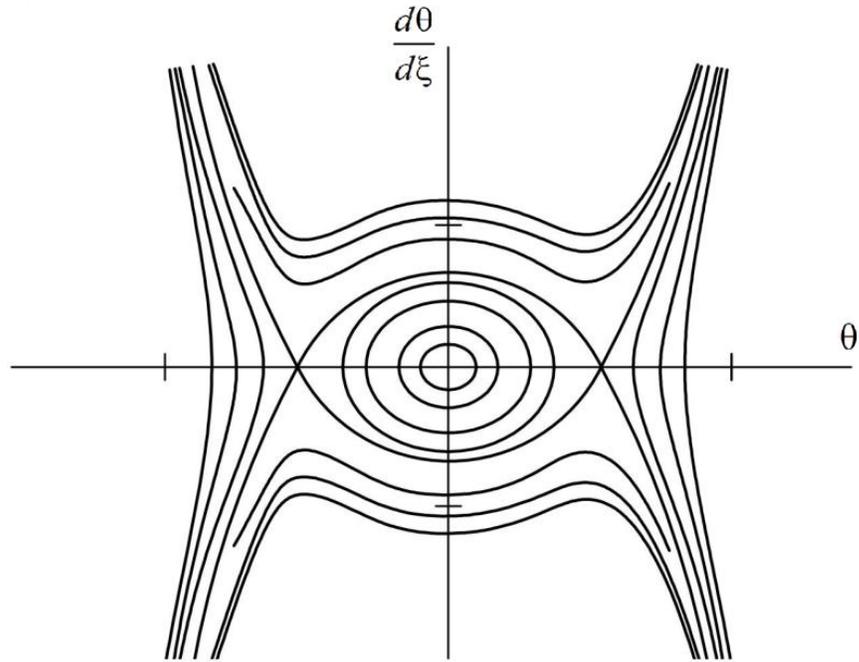


Рис. 2.7. Фазовый портрет нелинейного осциллятора

На фазовом портрете видно, что в рассматриваемом элементе могут существовать два типа волн:

1. Периодические (движения по фазовым траекториям вокруг устойчивого положения равновесия);
2. Уединённые стационарные волны (движение по сепаратрисе, идущей из «седла» в «седло»).

Зависимость (2.17) принимает следующую форму:

$$\alpha_0 \beta_0 \sqrt{-\frac{m_2}{2}} d\xi = \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - (\theta^2/\alpha_0^2))(1 - (\theta^2/\beta_0^2))}}, \quad (2.21)$$

И с помощью замены

$$\frac{\theta}{\alpha_0} = Z \quad (2.22)$$

Сводится к эллиптическому интегралу первой степени

$$\sqrt{\frac{m_2}{2}}(\xi - \xi_0) = \frac{1}{\beta_0} \int_0^z \frac{dZ}{\sqrt{(1-Z^2)(1-S^2Z^2)}}, \quad (2.23)$$

где  $S^2 = \alpha_0^2/\beta_0^2$ .

$$\theta(\xi) = \alpha_0 sn \left( -\sqrt{\frac{1}{2} m_2 \beta_0^2 \xi}, S \right). \quad (2.24)$$

В выражении (2.24) введём обозначения

$$A = \alpha_0 = \sqrt{\frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{-m_2}}, \quad (2.25)$$

$$k = \sqrt{-\frac{1}{2} m_2 \beta_0^2} = \sqrt{\frac{1}{2} (m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E})}, \quad (2.26)$$

$$S^2 = \frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} = \frac{m_1 - \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}{m_1 + \sqrt{m_1^2 + 4m_2 E}}, \quad (2.27)$$

где  $A$  – амплитуда стационарной волны,  $k$  – нелинейный аналог волнового числа,  $S$  – модуль эллиптической функции, длина волны  $\Lambda$  равна  $\Lambda = 4K(S)/k$ . Из соотношений (2.25), (2.26), (2.27) следует, что при изменении  $E$  от 0 до  $E_{\max} = m_1^2/4m_2$  частота колебаний уменьшается от  $k = \sqrt{m_1}$  до  $k = \sqrt{m_1/2}$ , а амплитуда колебаний изменяется в пределах  $0 \leq A \leq A^{(c)} = \sqrt{m_1/m_2}$ , где  $A^{(c)}$  – амплитуда колебаний, соответствующих движению по сепаратрисе на фазовой плоскости. Модуль эллиптической функции (коэффициент линейного искажения) при этом изменяется в интервале  $0 \leq S^2 \leq 1$ .

Исключая  $E$  из соотношений (2.25), (2.26), (2.27), получаем соотношения между параметрами  $A$ ;  $k$ ;  $S$  в решении (2.24):

$$S^2 = -\frac{m_1 A^2}{2m_1 + m_2 A^2}, \quad (2.28)$$

$$k = \sqrt{\frac{2m_1 + m_2 A^2}{2}}, \quad (2.29)$$

$$\Lambda = \frac{4K(S)}{\sqrt{2m_1 + \frac{m_2 A^2}{2}}}, \quad (2.30)$$

Перепишем полученные выражения в другой форме:

$$A = \pm \sqrt{-\frac{2m_1}{m_2} \frac{S^2}{1 + S^2}}, \quad (2.31)$$

$$k = \sqrt{\frac{m_1}{1 + S^2}}, \quad (2.32)$$

Решение уравнения (2.24), описывающее распространение нелинейных периодических колебаний вдоль замкнутых фазовых траекторий вблизи сепаратрисы представим в виде функции эллиптического синуса [133] (рис. 2.8):

$$\theta = A \operatorname{sn}(k\xi, S), \quad (2.33)$$

где  $A$  – амплитуда волны;  $k = \sqrt{0,5(2m_1 + m_2 A^2)}$  – волновое число;  $S^2 = m_2 A^2 (2m_1 + m_2 A^2)^{-1}$  – квадрат модуля эллиптической функции, изменяющийся в интервале  $0 \leq S^2 \leq 1$ .

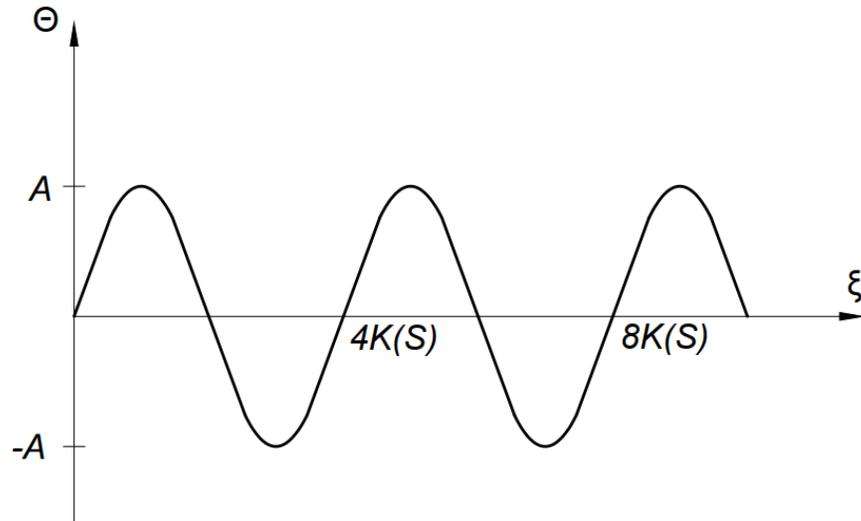


Рис. 2.8. Профиль нелинейной периодической стационарной волны

В результате решения системы уравнений волновое число и амплитуда волны выражаются в виде уравнений:

$$A = \sqrt{\frac{4 \left( \frac{-\gamma}{c_s^2} + V^2 \right) r_y^2 \cdot S^2}{W_0^2 (1 + S^2)}}, \quad (2.34)$$

$$k = \sqrt{\frac{\left( \frac{-\gamma}{c_s^2} + V^2 \right)}{(1 + S^2)}}. \quad (2.35)$$

Уединённая стационарная волна имеет форму кинка (рис.2.9) и описывается в виде функции гиперболического тангенса:

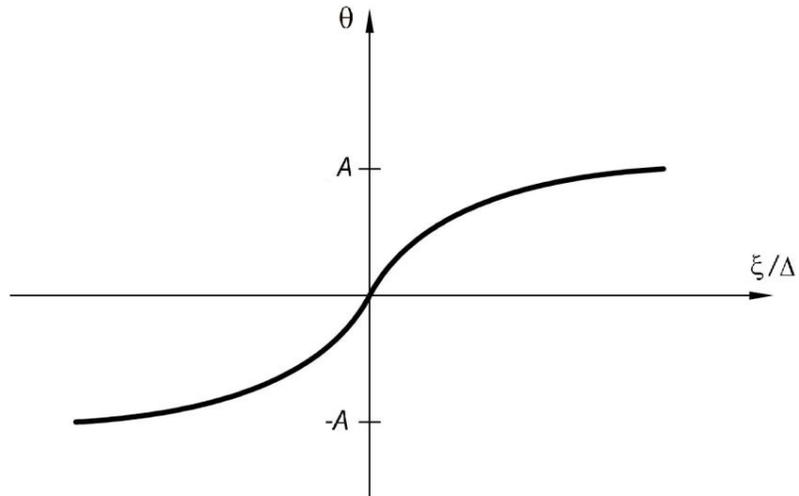


Рис. 2.9. Кривая профиля нелинейной уединённой стационарной волны

$$\theta(\xi) = A^{(c)} \operatorname{th}\left(\frac{\xi}{\Delta}\right), \quad (2.36)$$

где

$$A^{(c)} = \pm \sqrt{\frac{2\left(-\frac{\gamma}{c_s^2} + V^2\right) r_y^2}{W_0^2}} \quad (2.37)$$

– амплитуда продольной волны,

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\left(-\frac{\gamma}{c_s^2} + V^2\right)}} \quad (2.38)$$

– ширина продольной волны.

Где  $\gamma = \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha}$ , коэффициент, характеризующий поврежденность материала.

В ходе решения задачи были получены следующие результаты:

1. Амплитуды уединённых и периодических волн увеличиваются с ростом параметра поврежденности, что можно видеть из уравнений (2.34) и (2.37). Из

уравнений (2.35) и (2.38) видно, что длина периодической и ширина уединенной волны уменьшаются с ростом параметра  $\gamma$ .

Здесь можно отметить, что отношение амплитуды стационарной волны к волновому числу, а также произведение амплитуды волны на её ширину остаются неизменными:

$$\frac{A}{k} = \frac{2r_y S}{W_0} = const, \quad (2.39)$$

$$A^{(c)} \Delta = \frac{2r_y}{W_0} = const. \quad (2.40)$$

Соотношение (2.39) зависит только от радиуса инерции сечения элемента.

Также, при условии, что модуль эллиптической функции  $S=1$ , соотношения (2.39) и (2.40) полностью тождественны. При этом значении эллиптический синус переходит в гиперболический тангенс.

В случае, когда элемент имеет круговое сечение, радиус инерции равен половине радиуса сечения. Соотношение (2.40) будет представлено в следующем виде

$$2A^{(c)} \Delta = \frac{d}{W_0}, \text{ где } d \text{ – диаметр балки}$$

#### 2.4. Альтернативная математическая модель

При формулировке математической модели (2.10) предполагалось, что основным источником поврежденности материала является угол поворота поперечного сечения балки при изгибе. Не менее естественным будет предположение, что повреждения в основном зависят от объемной деформации и это приведет вместо (2.10) к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{c_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \right] = \beta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi = \beta_3 E \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \end{cases} \quad (2.41)$$

где  $\beta_3 \neq \beta_2$

Эта система сводится к одному уравнению относительно поперечного перемещения:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + c_s^2 r_y^2 \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} - \frac{\beta_1 \beta_3 E}{\alpha} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \\ & + \frac{c_s^2 r_y^2}{\alpha} \cdot \frac{\partial^5 W}{\partial x^4 \partial t} - \frac{c_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \right] - \frac{c_s^2}{2\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^3 \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Заметим, что уравнение (2.42) содержит слагаемое  $\sim \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}$ , в отличие от уравнения (2.12), содержащего слагаемое  $\sim \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ .

Если искать решение уравнения (2.42) в виде бегущей стационарной волны:

$$W(x, t) = W(\eta), \quad (2.43)$$

где  $\eta = x - Vt$ .

Тогда легко убедиться, что при малом времени релаксации, т.е. при  $L = 0$  данное уравнение не сведётся к уравнению классического осциллятора Дуффинга, а будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + m_1 \theta + l_1 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + m_1 \theta^3 = 0, \quad (2.44)$$

Здесь введены обозначения:

$$\theta = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad (2.45)$$

$$m_1 = \frac{V^2}{c_s^2 r_y^2}, \quad (2.46)$$

$$m_2 = \frac{c_s^2}{2r_y^2}, \quad (2.47)$$

$$l_1 = -\frac{\beta_1 \beta_3}{\alpha c_s^2 r_y^2}. \quad (2.48)$$

В фазовом портрете осциллятора (2.44) особая точка типа «центр» перейдёт в особую точку типа «фокус», а особая точка типа «седло» в особую точку типа «узел».

Согласно математической модели (2.41) невозможно формирование нелинейных стационарных изгибных волн в балке, в материале которой накапливаются повреждения.

## Выводы по главе 2

В ходе решения задачи о распространении изгибной волны в балке были получены следующие результаты:

1. Было показано, что поврежденность материала привносит частотно-зависимое затухание и существенно изменяет характер дисперсии фазовой скорости изгибной упругой волны.
2. При формировании нелинейных поперечных волн, определено наличие волн периодического профиля, а также уединенных несинусоидальных волн.
3. Амплитуды уединённых и периодических волн увеличиваются с ростом параметра поврежденности. Из уравнений видно, что длина периодической и ширина уединенной волны уменьшаются с ростом параметра  $\gamma$ .

### ГЛАВА 3.

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКОЙ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНЕ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ МАТЕРИАЛА, ОБЛАДАЮЩЕГО НАКОПЛЕННОЙ ПОВРЕЖДЕННОСТЬЮ

В главе сформулирована и исследована задача о возбуждении движущейся нагрузкой плоской сдвиговой волны в пластине, изготовленной из материала, обладающего накопленной поврежденностью. Пластина при этом лежит на упругом основании модели Винклера.

### 3.1. Основные предположения и математическая модель

Существует множество инженерных технических объектов, геометрическая неизменяемость которых обеспечивается опиранием на упругое (в некотором приближении) основание. Математически тип связи «упругое основание» можно описать как распределенную по площади конструктивного элемента связь с линейной податливостью (рис. 3.1), то есть такую связь, реакция в каждой точке которой прямо пропорциональна линейному перемещению в ее направлении

$$K = \frac{R}{\Delta S}. \quad (3.1)$$

При этом основным параметром, описывающим упругое основание, является модуль Юнга материала. В зависимости от геометрического типа объекта (линейный, поверхностный) модуль Юнга (модуль упругости для строительных конструкций и модуль деформации для грунтового основания) может быть представлен в виде производных единиц, отнесенных к различным степеням длины, в этом случае он называется коэффициентом постели.

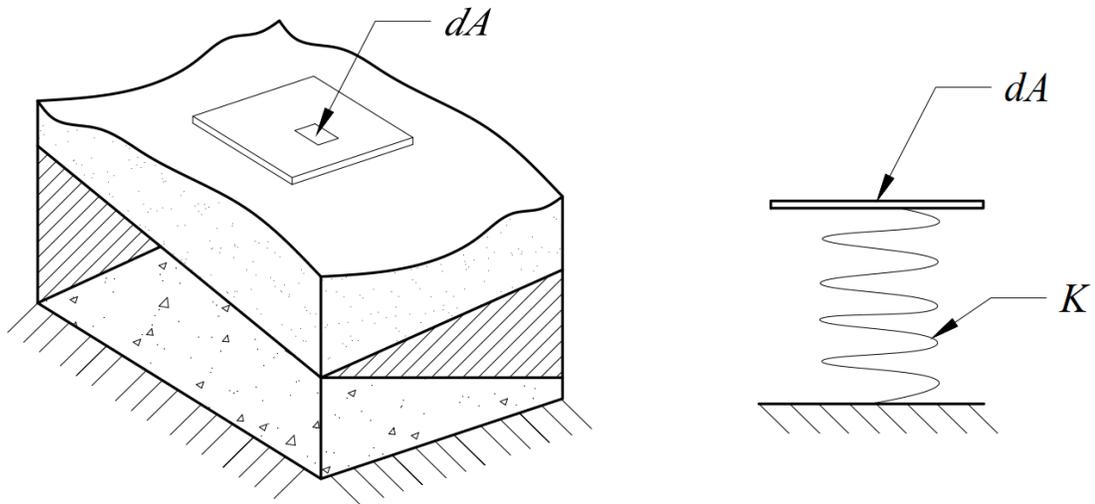


Рис. 3.1. Модель связи типа «упругое основание»

Большинство грунтовых оснований можно считать упругими лишь условно, поскольку поведение материала грунта обычно является нелинейным. Тем не менее, в большинстве инженерных расчетов аппроксимация диаграммы напряженно-деформированного состояния к условной прямой является приемлемой (рис. 3.2).

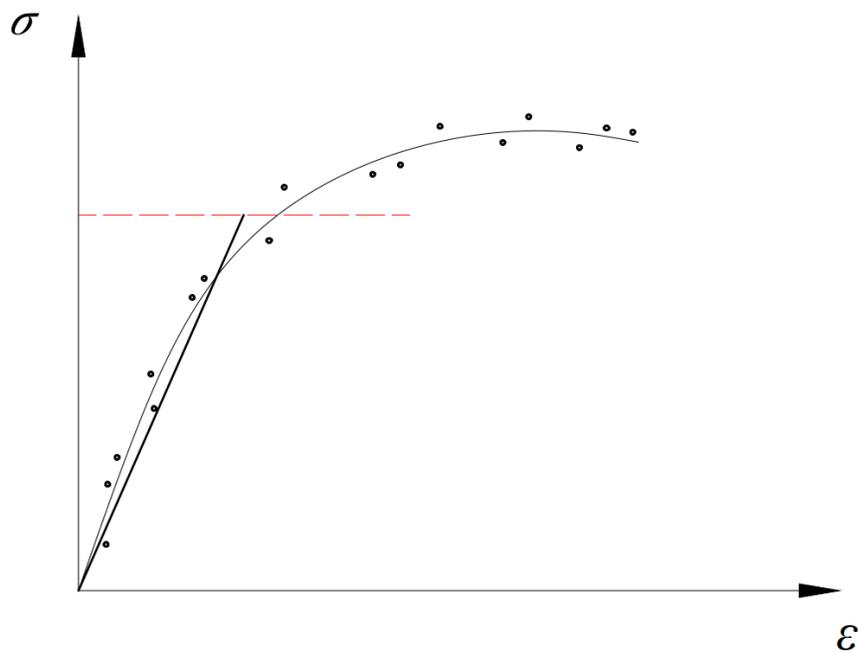


Рис. 3.2. Диаграмма состояния истинной работы грунта и ее аппроксимация.

По типу воздействия объекты, опирающиеся на упругое основание, можно разделить на 3 группы:

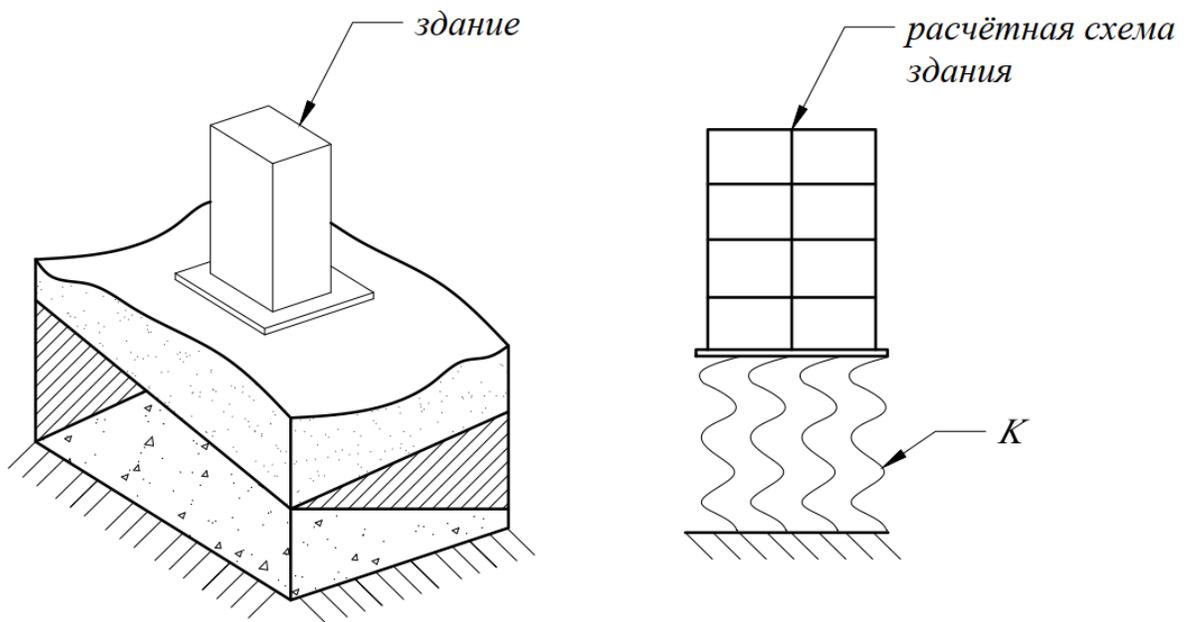
- объекты, подверженные воздействию преимущественно статических нагрузок. К ним можно отнести различные типы фундаментных конструкций зданий и сооружений: фундаментные плиты, балки, отдельно стоящие фундаменты (рис. 3.3.а);
- объекты, воспринимающие помимо статических нагрузок еще и подвижные динамические нагрузки: асфальтобетонное дорожное полотно, дорожные плиты, шпалы железнодорожных и крановых путей (рис. 3.3.б);
- объекты, воспринимающие помимо статических нагрузок и подвижных динамических нагрузок значительные ударные нагрузки. К таким объектам в первую очередь следует отнести покрытия взлетно-посадочных полос аэродромов (рис. 3.3.в).

Проблема взаимодействия упругих систем с движущимися по ним сосредоточенными системами возникла более 150 лет назад в приложении к задачам динамики мостов. В прошлом веке соответствующие задачи решались в квазистатическом приближении, без учета инерционных свойств упругой системы. С позиции динамики упругих систем эти задачи начал решать С.П. Тимошенко [134], предложивший действие движущейся системы заменить движущейся силой и учитывать ее в правой части уравнения динамики упругой системы с помощью  $\delta$ -функции Дирака. Все последующие успехи теории и ее технических приложений были во многом обязаны именно этому подходу [135-137].

Ниже рассматривается задача о возбуждении движущейся нагрузкой сдвиговой волны в пластине, лежащей на упругом основании Винклера и изготовленной из материала, обладающего накопленной поврежденностью. Поперечные колебания пластины удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - c_{\perp}^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \omega_0^2 u = \beta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi = \beta_2 N \frac{\partial W}{\partial x}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь  $W(x, t)$  – поперечное смещение пластины,  $\Psi(x, t)$  – функция поврежденности,  $c_{\perp}$  – скорость сдвиговой волны,  $\rho$  – плотность материала пластины,  $k$  – коэффициент упругости основания,  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  – коэффициенты, характеризующие поврежденность.



(a)

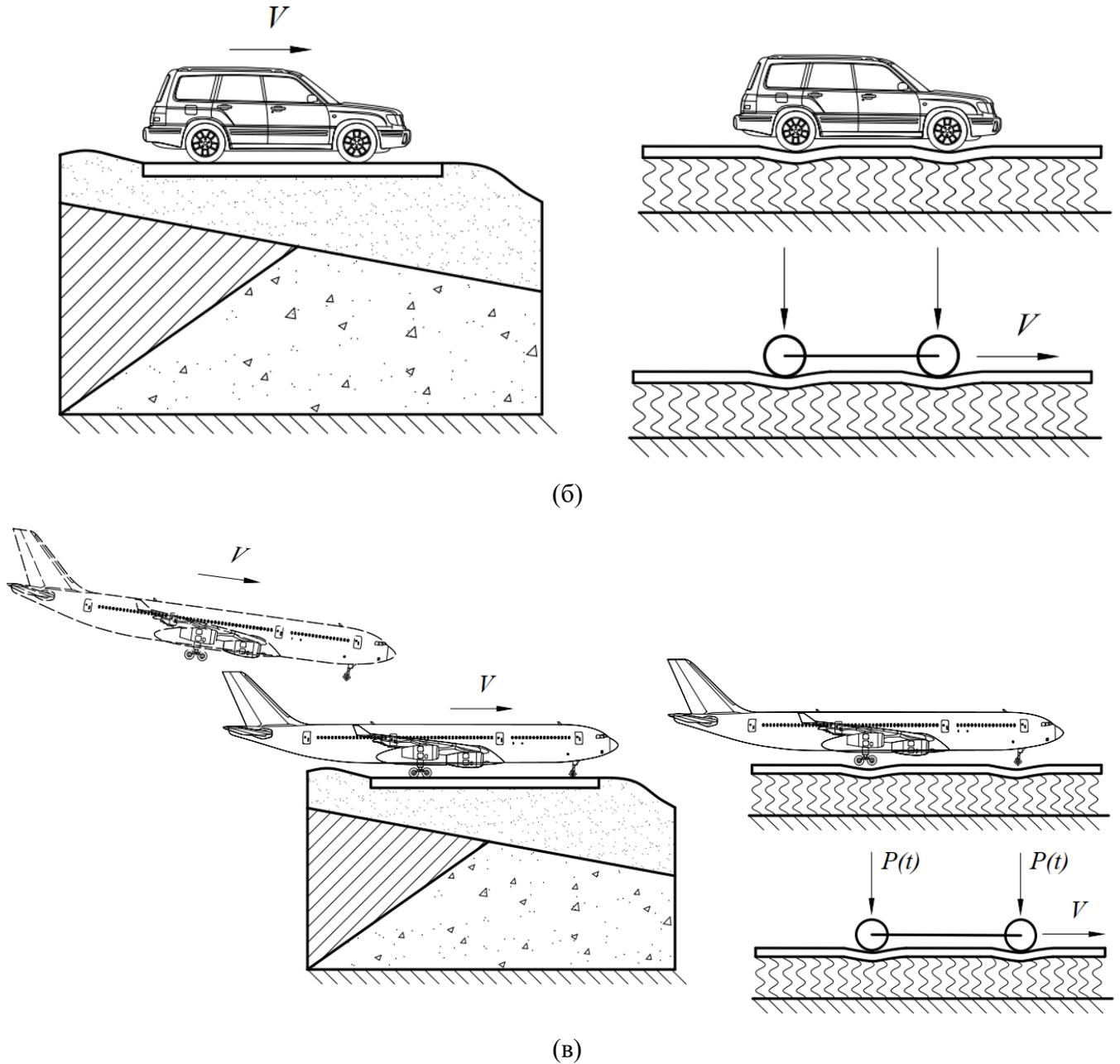


Рис. 3.3. Объекты, опертые на упругое основание, воспринимающие статические (а), подвижные (б) и ударно-подвижные (в) нагрузки

Если продифференцировать первое уравнение системы (3.1) по  $t$ , а второе – по  $x$ , и решить данную систему относительно поперечного перемещения частиц пластины  $W(x, t)$ , получим единое уравнение вида:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - c_{\perp}^2 \left( 1 + \frac{\beta_1 \beta_2 \rho}{\alpha} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \omega_0^2 W + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial t^3} - \frac{c_{\perp}^2}{\alpha} \cdot \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\omega_0^2}{\alpha} \frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (3.3)$$

В случае использования безразмерных переменных  $U = W/W_0$ ,  $y = x/X$ ,  $\tau = t/T$ ,  $X = c_{\perp}/\alpha\sqrt{\gamma}$ ,  $T = 1/\alpha\gamma$ ,  $\gamma = 1 + (\beta_1\beta_2\rho/\alpha)$ , уравнение (3.3) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\omega_0^2}{\alpha^2 \gamma^2} U + \gamma \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} - \frac{\partial^3 U}{\partial y^2 \partial \tau} + \frac{\omega_0^2}{\alpha^2 \gamma} \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad (3.4)$$

Здесь  $\gamma = 1 + (\beta_1\beta_2\rho/\alpha)$  – параметр, характеризующий степень поврежденности системы, равный единице в абсолютно неповрежденной структуре и близкий к нулю в структуре с критическим накоплением повреждений.

Для того, чтобы функция  $U \sim e^{i(\tilde{\omega}\tau - \tilde{k}y)}$  была решением уравнения (3.4), необходимо выполнение условия:

$$-i\gamma\tilde{\omega}^3 - \tilde{\omega}^2 + i(\tilde{\omega}_0^2\gamma + \tilde{k}^2)\tilde{\omega} + \tilde{\omega}_0^2 + \tilde{k}^2 = 0 \quad (3.5)$$

где  $\tilde{\omega} = \omega/\alpha\gamma$ ,  $\tilde{\omega}_0 = \omega_0/\alpha\gamma$ ,  $\tilde{k} = c_{\perp}k/\alpha\sqrt{\gamma}$  – безразмерные частоты и волновое число.

### 3.2. Возбуждение волн движущейся нагрузкой. Волновое давление

Для исследования элементарных эффектов, лежащих в основе динамического поведения систем с движущимися нагрузками, упростим уравнение (3.5) таким образом, чтобы для больших частот степень затухания определялась только параметром поврежденности  $\gamma$  в соответствии с формулой:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \tilde{\omega}_0^2 U + \frac{(1-\gamma)}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad (3.6)$$

Пусть вдоль пластины по равномерному закону движется нагрузка, представляющая собой массу  $m$ , на которую действует постоянная поперечная сила  $G$ . В движущейся точке контакта выполняются условия непрерывности:

$$U = {}^I U(\tilde{V}\tau, \tau) = {}^{II} U(\tilde{V}\tau, \tau) \quad (3.7)$$

и баланс сил:

$$\begin{cases} m^0 \ddot{U} = \frac{\rho c_{\perp}}{\alpha \gamma \sqrt{\gamma}} \left[ U_y + \tilde{V} \gamma U_{\tau} \right]_{\tilde{V}_{\tau}^{-0}}^{\tilde{V}_{\tau}^{+0}} - \frac{G}{W_0 \alpha^2 \gamma^2}; \\ m \ddot{l} = -\frac{\rho W_0^2}{2\gamma} \left[ \gamma U_{\tau}^2 + U_y^2 + 2\tilde{V} \gamma U_{\tau} U_y \right]_{\tilde{V}_{\tau}^{-0}}^{\tilde{V}_{\tau}^{+0}} + \frac{Q}{\alpha^2 \gamma^2}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Условие (3.7) позволяет записать выражение для силы давления волн в более сжатом виде:

$$F_{pr} = -\frac{1}{2} \rho W_0^2 \alpha^2 \gamma (1 - \gamma \tilde{V}^2) \left[ U_y^2 \right]_{\tilde{V}_{\tau}^{-0}}^{\tilde{V}_{\tau}^{+0}} \quad (3.9)$$

Считая процесс возбуждения колебаний в пластине установившимся, решение задачи будем искать в виде бегущих волн слева и справа от точки контакта  $y = \tilde{V} \tau$ . Тогда частоты и волновые числа искомым волн определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} -\omega^2 + i \frac{1-\gamma}{\sqrt{\gamma}} \tilde{\omega} + \tilde{\omega}_0^2 + \tilde{k}^2 = 0; \\ \tilde{\omega} - \tilde{V} \tilde{k} = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

первое из которых является дисперсионным уравнением, а второе – кинематическим инвариантом [138], выражающим равенство частот волн в системе отсчёта, связанной с движущимся источником. Отсюда получим, что в зависимости от параметров пластины и скорости движения точки контакта, частоты и волновые числа могут быть либо чисто мнимыми, либо комплексно-сопряжёнными.

Для того, чтобы однозначно определить возбуждаемые волны и направления их распространения, необходимо задать некоторые условия их физической реализуемости. В данном случае это условия ограниченности решений на бесконечности:

$$|U(y, \tau)|_{<+\infty} \quad (3.11)$$

$$y \rightarrow \pm \infty \quad (3.12)$$

С учётом вышеописанного, если  $\tilde{\omega}_0 > 1 - \gamma / 2\sqrt{\gamma}$ , то можно выделить три случая поведения упругой системы:

$$0 < \tilde{V} < 1, \quad (3.13)$$

$$1 < \tilde{V} < \frac{2\tilde{\omega}_0\sqrt{\gamma}}{\sqrt{4\tilde{\omega}_0^2\gamma - (1-\gamma)^2}}, \quad (3.14)$$

$$\tilde{V} > \frac{2\tilde{\omega}_0\sqrt{\gamma}}{\sqrt{4\tilde{\omega}_0^2\gamma - (1-\gamma)^2}}, \quad (3.15)$$

При  $0 < \tilde{V} < 1$  функция прогибов пластины слева и справа от нагрузки имеет вид:

$$U(y, \tau) = A \begin{cases} \exp \left\{ \frac{-(1-\gamma)\tilde{V} + \sqrt{(1-\gamma)^2\tilde{V}^2 + 4\tilde{\omega}_0^2\gamma(1-\tilde{V}^2)}}{2(1-\tilde{V}^2)\sqrt{\gamma}} (y - \tilde{V}\tau) \right\} \in y \leq \tilde{V}\tau \\ \exp \left\{ \frac{-(1-\gamma)\tilde{V} - \sqrt{(1-\gamma)^2\tilde{V}^2 + 4\tilde{\omega}_0^2\gamma(1-\tilde{V}^2)}}{2(1-\tilde{V}^2)\sqrt{\gamma}} (y - \tilde{V}\tau) \right\} \in y \geq \tilde{V}\tau \end{cases} \quad (3.16)$$

Если  $1 < \tilde{V} < \frac{2\tilde{\omega}_0\sqrt{\gamma}}{\sqrt{4\tilde{\omega}_0^2\gamma - (1-\gamma)^2}}$ , то

$$U(y, \tau) = \begin{cases} A \exp \left\{ \frac{(1-\gamma)\tilde{V} - \sqrt{(1-\gamma)^2\tilde{V}^2 - 4\tilde{\omega}_0^2\gamma(\tilde{V}^2 - 1)}}{2(\tilde{V}^2 - 1)\sqrt{\gamma}} (y - \tilde{V}\tau) \right\} \\ -A \exp \left\{ \frac{(1-\gamma)\tilde{V} + \sqrt{(1-\gamma)^2\tilde{V}^2 - 4\tilde{\omega}_0^2\gamma(\tilde{V}^2 - 1)}}{2(\tilde{V}^2 - 1)\sqrt{\gamma}} (y - \tilde{V}\tau) \right\} \in y \leq \tilde{V}\tau \\ 0 \in y \leq \tilde{V}\tau \end{cases} \quad (3.17)$$

$$A = \frac{-G(1-\tilde{V}^2)}{\rho c_{\perp} W_0 \alpha (1-\gamma\tilde{V}^2) \sqrt{(1-\gamma)^2\tilde{V}^2 + 4\tilde{\omega}_0^2\gamma(1-\tilde{V}^2)}} \quad (3.18)$$

Наконец, если  $\tilde{V} > \frac{2\tilde{\omega}_0\sqrt{\gamma}}{\sqrt{4\tilde{\omega}_0^2\gamma - (1-\gamma)^2}}$ , то

$$U(y, \tau) = \frac{-2G(\tilde{V}^2 - 1) e^{\frac{(1-\gamma)\tilde{V}(y-\tilde{V}\tau)}{\sqrt{\gamma}}} \sin \left\{ \frac{\sqrt{4\tilde{\omega}_0^2\gamma(\tilde{V}^2 - 1) - (1-\gamma)^2\tilde{V}^2}}{2\sqrt{\gamma}(\tilde{V}^2 - 1)} (y - \tilde{V}\tau) \right\}}{\rho c_{\perp} W_0 \alpha (1-\gamma\tilde{V}^2) \sqrt{4\tilde{\omega}_0^2\gamma(\tilde{V}^2 - 1) - (1-\gamma)^2\tilde{V}^2}} \quad (3.19)$$

при  $y \leq \tilde{V}\tau$  и  $U(y, \tau) = 0$  при  $y \geq \tilde{V}\tau$ .

Подставляя полученные решения в (3.8), найдём выражение для  $F_{pr}$ :

$$F_{pr} = \begin{cases} \frac{-G^2(1-\gamma)\tilde{V}}{2\rho c_{\perp}^2(1-\gamma\tilde{V}^2)\sqrt{(1-\gamma)^2\tilde{V}^2 + 4\tilde{\omega}_0^2\gamma(1-\tilde{V}^2)}} \in \tilde{V} < 1 \\ \frac{G^2}{2\rho c_{\perp}^2(1-\gamma\tilde{V}^2)} \in \tilde{V} > 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

При  $\tilde{\omega}_0 < (1-\gamma)/2\sqrt{\gamma}$  качественно-различных случаев два: а)  $0 < \tilde{V} < 1$ , б)  $\tilde{V} > 1$ .

На рис. 3.4 приведены качественные зависимости силы давления волн ( $\tilde{F}_{pr} = F_{pr} \rho c_{\perp}^2 / G^2$ ) от скорости движения нагрузки. При отсутствии поврежденности ( $\gamma = 1$ ) для  $\tilde{v} < 1$  имеем  $F_{pr} \equiv 0$ . В этом случае  $\tilde{v} = 1$  является «резонансным» значением скорости, сопровождающейся неограниченным ростом  $F_{pr}$  (кривая 1, рис. 3.4). Начиная с него в системе происходит излучение волны, бегущей вслед за нагрузкой, подобно эффекту Вавилова-Черенкова [139]. Наличие поврежденности приводит всегда к отличной от нуля силе давления волн. Постоянная составляющая силы давления волн в зависимости от скорости движения нагрузки может быть как положительной, так и отрицательной (кривая 2, рис. 3.4).

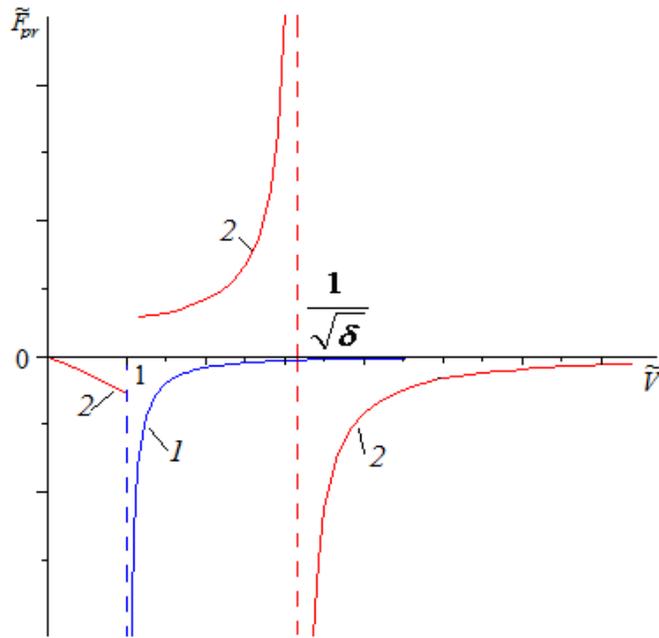


Рис. 3.4. Зависимость силы давления волн от скорости движения нагрузки.

Таким образом, в результате излучения волн, движущихся по направляющей с поврежденностью источником силы, появляется горизонтальная составляющая силы реакции со стороны направляющей, которая может быть направлена как в сторону движения нагрузки, т.е. способствовать её движению, так и против, т.е. оказывать сопротивление движению нагрузки.

### **Выводы по главе 3**

В результате решения задачи о распространении плоской сдвиговой волны в повреждённой пластине на упругом основании при движении нагрузки получены следующие выводы:

1. Изучено влияние параметра, характеризующего поврежденность материала пластины на упругом основании, на фазовую и групповую скорости сдвиговой волны.
2. Получены качественные зависимости силы давления волн от скорости движения нагрузки.

## ГЛАВА 4.

### РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНОЙ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ПОВРЕЖДЕННОСТИ ЕГО МАТЕРИАЛА УЛЬТРАЗВУКОВЫМ ЭХО - АКУСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

#### 4.1 Нелинейная математическая модель и анализ волновых процессов

Рассматривается образец материала, выполненный в виде стержня. Динамика стержня описывается моделью Бишопа предполагающей, что выполняются: гипотеза плоских сечений, условия одноосного деформированного состояния  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu\varepsilon_{11}$ , где  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций,  $\nu$  – коэффициент Пуассона); поперечные напряжения равны нулю ( $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ ); общая кинетическая энергия складывается из кинетической энергии продольного движения частиц стержня (доминирующее слагаемое) и кинетической энергии поперечного движения (малая добавка); общая потенциальная энергия складывается из потенциальной энергии растяжения – сжатия (доминирующее слагаемое) и потенциальной энергии сдвиговой деформации (малая добавка).

В избранной модели дополнительно учитываются нелинейности: геометрическая (нелинейная связь деформации и перемещения) и физическая (нелинейный закон Гука).

Считаем, что стержень подвергался статическим или циклическим испытаниям и в его материале могла накопиться поврежденность. Для описания меры поврежденности введем функцию Качанова – Работнова  $\Psi(x,t)$ , значения которой равно нулю, когда повреждений нет, и близко к единице в момент разрушения материала. Обозначим через  $u(x,t)$  перемещение его срединной линии.

Нелинейная динамика стержня с учетом поврежденности его материала описывается системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left( 1 + \frac{\alpha_0}{E} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v^2 r_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \beta_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \alpha \Psi = \beta_2 E \frac{\partial u}{\partial x}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь  $C_0 = \sqrt{E\rho^{-1}}$  – скорость, с которой распространялась бы продольная упругая волна в материале стержневого образца, если в нем не было бы повреждений;  $E$  – модуль Юнга;  $\rho$  – плотность материала,  $r_0 = \sqrt{I_0 F^{-1}}$  – полярный радиус инерции поперечного сечения стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения,  $c_\tau = \sqrt{G\rho^{-1}}$  – скорость распространения упругой сдвиговой волны,  $G$  – модуль сдвига. Через выражение  $\alpha_0 = 3E + \nu_1(1 - 6\nu) + 6\nu_2(1 - 2\nu) + 2\nu_3$  обозначен коэффициент, характеризующий геометрическую и физическую упругие нелинейности стержня;  $\nu_{1,2,3}$  – упругие модули Ламе третьего порядка;  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  – константы, характеризующие поврежденность материала (среди которых  $\alpha = T^{-1}$ , где  $T$  – время релаксации [131]; физический смысл двух других коэффициентов не столь очевиден).

Если линеаризовать систему (4.1), и с ее помощью исследовать распространение гармонической волны в образце поврежденного материала, то выяснится, что наличие поврежденности приводит к частотно-зависимому затуханию  $K = K(\omega)$  продольной волны и вносит вклад в закон её дисперсии, т.е. в зависимость фазовой скорости волны от частоты  $v_{ph} = v_{ph}(\omega)$ , где  $\omega$  – круговая частота.

В [8] было показано, что константы  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  могут быть вычислены через измеряемые параметры волнового процесса:

$$\alpha = \frac{K(\infty)\omega}{K(0)\sqrt{1 + \frac{K(\infty)}{c_0\omega}}}, \quad (4.2)$$

$$\beta_1\beta_2 = \frac{c_0 K^2(\infty)}{EK(0)\sqrt{1 + \frac{K(\infty)}{c_0\omega}}}, \quad (4.3)$$

где  $K(0), K(\infty)$  – мнимые части волнового числа в низкочастотном и высокочастотном диапазонах.

Система (4.1) сводится к одному уравнению относительно продольного перемещения  $u(x, t)$ , которое имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \left( 1 + \frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_0^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v^2 r_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_\tau^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \\ & + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{c_0^2}{\alpha} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{v^2 r_0^2}{\alpha} \left( \frac{\partial^5 u}{\partial x^2 \partial t^3} - c_\tau^2 \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t} \right) - \\ & - \frac{6c_0^2 \alpha_0}{E} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{6c_0^2 \alpha_0}{E\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Будем предполагать, что затухание волны, обусловленное поврежденностью и нелинейность, являются величинами одного порядка малости  $\varepsilon = \frac{A|\alpha_0|}{E\Lambda}$ , ( $A$  – амплитуда волны,  $\Lambda$  – длина волны).

Решение уравнения (4.4) ищем в виде асимптотического разложения по малому параметру:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots \quad (4.5)$$

Введем при этом новые переменные:

$$z = x - ct; \tau = \varepsilon t \quad (4.6)$$

Такой выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью  $c$  вдоль оси  $x$ , медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации.

После подстановки (4.5) и (4.6) в (4.4) в нулевом приближении по  $\varepsilon$  получим выражение для скорости:

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2}}. \quad (4.7)$$

Первое приближение по  $\varepsilon$  приводит к эволюционному уравнению относительно осевой деформации  $U = \frac{\partial u_0}{\partial z}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + a_1 \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \\ + \alpha_1 U \frac{\partial U}{\partial z} - \alpha_2 \frac{\partial}{\partial z} \left( U \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Здесь введены обозначения:

$$a_1 = \frac{v^2 r_0^2 c_0 \left( 1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2} - \frac{c_\tau^2}{c_0^2} \right)}{2\varepsilon \sqrt{1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2}}}, \quad (4.9)$$

$$a_2 = \frac{\beta_1 \beta_2 E}{2\varepsilon \alpha^2}, \quad (4.10)$$

$$a_3 = \frac{v^2 r_0^2 c_0 \left( 1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2} - \frac{c_\tau^2}{c_0^2} \right)}{2\varepsilon \alpha}, \quad (4.11)$$

$$\alpha_1 = \frac{3c_0 \alpha_0}{\varepsilon E \sqrt{1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha c_0^2}}}, \quad (4.12)$$

$$\alpha_2 = \frac{3c_0^2 \alpha_0}{\varepsilon E \alpha}, \quad (4.13)$$

Заметим, что полученное уравнение (4.5) обобщает уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргера [140] одним диссипативным (с коэффициентом  $\alpha_3$ ) и одним нелинейным (с коэффициентом  $\alpha_2$ ) слагаемыми.

Уравнение (4.8) имеет точное аналитическое решение, выражающееся через гиперболический косинус:

$$U = Ach^{-2} \left( \frac{z - V\tau}{\Delta} \right) + B \quad (4.14)$$

где

$$A = \frac{12a_3}{\alpha_2 \Delta^2}, \quad (4.15)$$

$$B = \frac{\left( a_2 - \frac{4a_3}{\Delta^2} \right)}{\alpha_2}, \quad (4.16)$$

$$V = \frac{\alpha_1 a_2}{\alpha_2}, \quad (4.17)$$

$$a_1 = \frac{\alpha_1 a_3}{\alpha_2}. \quad (4.18)$$

Соотношения между параметрами (4.15)-(4.18) находятся непосредственной подстановкой выражения (4.14) в уравнении (4.8). Из (4.9)-(4.13) и (4.14) следует, что соотношение в (4.18) выполняется тождественно.

График функции (4.14) имеет колоколообразную форму и характеризует нелинейную уединенную стационарную волну – солитон деформации, распространяющийся со скоростью  $V$ , имеющий амплитуду  $A$  и ширину  $\Delta$ . Физически реализуемым является лишь тот случай, когда в волне деформации (4.14) отсутствует постоянная составляющая. Рассмотрение такого случая заставляет добавить к

соотношениям (4.15)-(4.18) ещё одно условие  $B = 0$ , что приводит к следующей зависимости ширины солитона от параметров уравнения (4.8):

$$\Delta^2 = \frac{4a_3}{a_2}. \quad (4.19)$$

Соотношения (4.9)-(4.14), (4.15-4.18) и (4.19) позволяют установить, как зависят параметры солитона от коэффициента  $\gamma = \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha}$ , характеризующего поврежденность материала.

Амплитуда солитона

$$A = \frac{\gamma \rho}{2\alpha_0}. \quad (4.20)$$

линейно растёт с увеличением  $\gamma$ .

Ширина солитона определяется соотношением

$$\Delta = \frac{2\nu r_0 c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{c_0^2} - \frac{c_\tau^2}{c_0^2}}}{\sqrt{\gamma}}, \quad (4.21)$$

а его скорость – соотношением

$$V = \frac{\gamma}{2\varepsilon c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{c_0^2}}} \quad (4.22)$$

Поскольку  $\frac{\gamma}{c_0^2} < 1$ , то этой величиной под радикалом в числителе формулы (4.21)

и радикалом в знаменателе формулы (4.22) можно пренебречь. Тогда из (4.21) следует, что ширина солитона ( $\Delta$ ) будет уменьшаться как  $\gamma^{-1}$ , а из (4.22) следует, что скорость солитона ( $V$ ) будет линейно увеличиваться с ростом  $\gamma$ .

## 4.2 Экспериментальные исследования

**Исходные зависимости.** Уже говорилось, что первое приближение по  $\varepsilon$  сводит исходную систему уравнений к эволюционному уравнению (4.8), при этом нулевое приближение по  $\varepsilon$  дает значение скорости распространения продольной волны (4.7) или в других обозначениях:

$$V_N = c_0 \sqrt{1 + \frac{\gamma}{c_0^2}}. \quad (4.23)$$

Здесь  $c_0$  – скорость волны в неповрежденном образце,  $\gamma = \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha}$  – коэффициент, характеризующий поврежденность материала.

Из уравнения (4.23) видно, что скорость продольной волны должна меняться по мере накопления дефектов и микроповреждений, т.е. увеличения коэффициента  $\gamma$ .

**Аппаратурное обеспечение.** Для оценки степени поврежденности было решено исследовать распространение в стержне продольных волн, причем внутренние повреждения исследуемых образцов достигались за счет деформаций кручения, как одного из наиболее точных методов для испытания металлов в пластической области. Самые пластичные материалы испытывают равномерную деформацию на протяжении всей длины элемента. При этом форма образца остается неизменной в процессе деформирования. Это необходимо для дальнейшего измерения скорости импульса.

Кручение в данном случае имеет преимущество в отличие от сжатия или изгиба. При кручении до разрушения можно довести любой материал и по сравнению с испытанием на сжатие и изгиб довольно точно определить напряжённо-деформированное состояние пластического материала.

В качестве образцов было представлено несколько одинаковых стальных элементов с рабочей частью в виде цилиндра. В качестве аппаратного обеспечения была использована машина КМ-50-1 (рис.4.1).

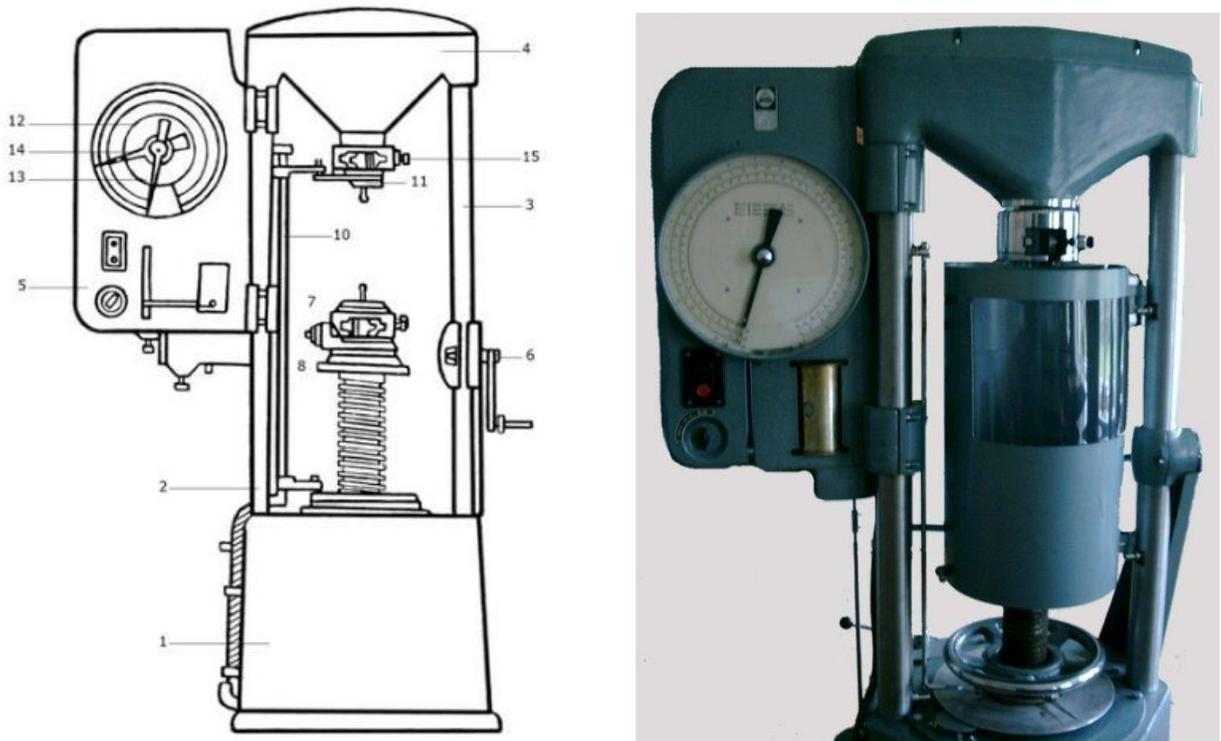


Рис. 4.1 Схема и фотография испытательной машины КМ-50-1

Составные части машины КМ-50-1: 1 - чугунный корпус привода, 2, 3 - боковые стороны - две стальные цилиндрические колонны, 4 - механизм нагружения, 5 - корпус моментоизмерителя, 6 - ручной привод, 8 - маховик, 9 - шкала образования, 10 - автоматически корректирующее приспособление (поправка на поворот верхнего захвата), 11 - верхний захват образца, 12 - шкала моментов, 13 - рабочая стрелка момента, 14 - контрольная стрелка момента, 15 - фиксатор верхнего захвата.

Образцы закручивались на разное количество оборотов. Также, в качестве эталона было решено, оставить один образец в идеальном (заводском) состоянии. В следствии разрыва образцов после четвёртого оборота было принято отобрать четыре элемента закрученных под разным углом – на половину, один, два и три оборота.

Здесь и далее считаем, что повреждения (микротрещины) накапливаются в том временном промежутке, когда происходит закручивание образца.

Измерения скорости продольных волн производились на специальной экспериментальной установке. Выбор образцов был сделан из расчета работы на частоте 5 МГц.

Установка для измерения скорости волн в твердой среде изображена на рис. 4.2. [141].

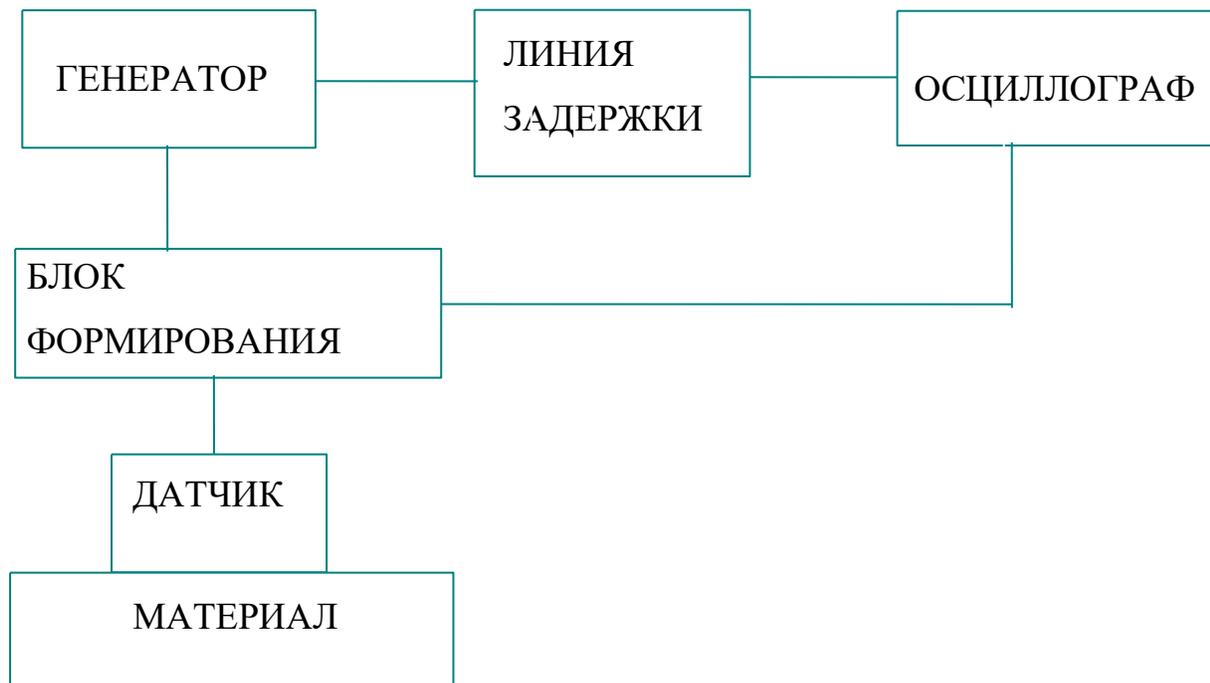


Рис. 4.2. Блок-схема экспериментальной установки.

Технические требования к специализированным пьезопреобразователям для прецизионного измерения скорости ультразвука описаны в статье [142].

***Определение скорости продольной волны и коэффициента поврежденности.***

Полученные зависимости скорости продольной волны от количества оборотов закручивания образцов представлены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Число оборотов образца $N$	Скорость волны $V_N$ , м/с
0	5912,9
0,5	5907,1
1	5904,7
2	5904,5
3	5897,9

Данные зависимостей скорости продольной волны от количества оборотов закручивания образца можно отобразить в графическом виде на рисунке 3.3.

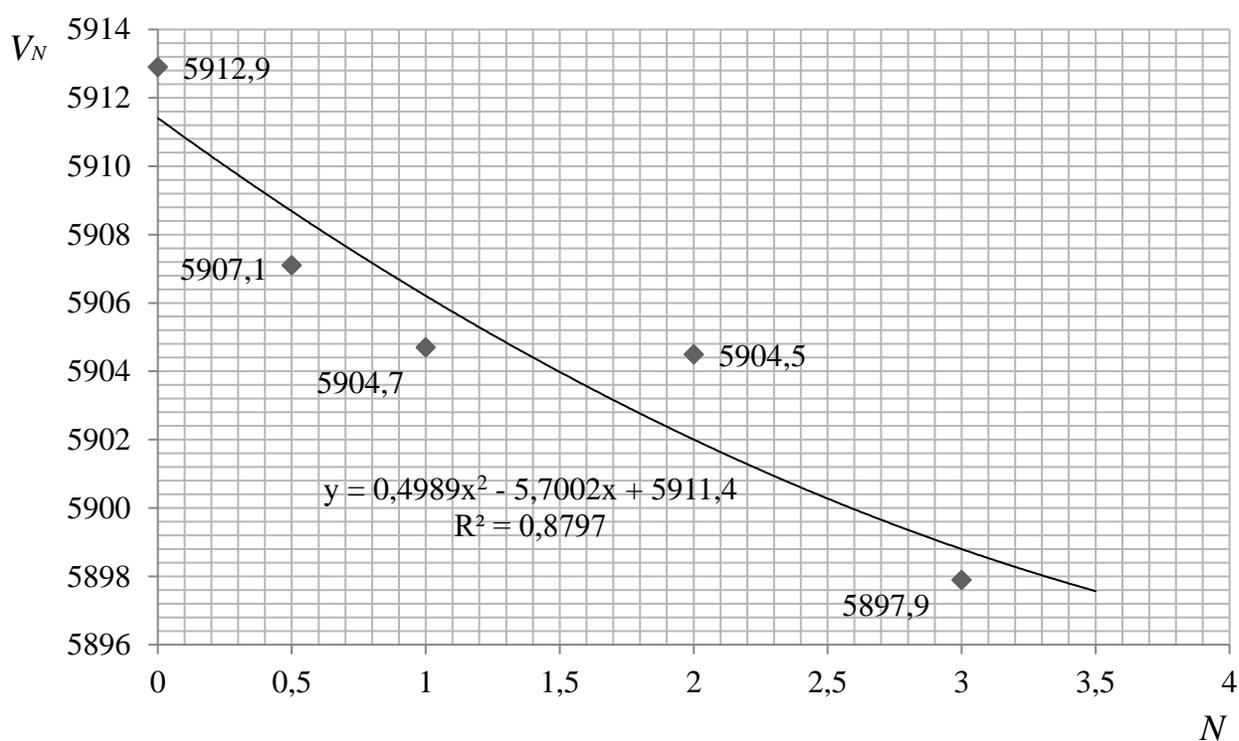


Рис.4.3. График зависимости скорости продольной волны от количества оборотов закручивания образца

Из уравнения (4.23) определяем коэффициент поврежденности в зависимости от количества закручивания образца:

$$|\gamma| = c_0^2 - V_N^2. \quad (4.24)$$

где  $c_0^2$  – квадрат начальной скорости (неповрежденный образец),  $V_N$  – скорость продольной волны при закручивании,  $N$  – количество оборотов закручивания образца. Подставляя в (4.24) значения табл. 1, получаем зависимость  $\gamma$  от  $N$ , приведенную в табл. 4.2.

**Таблица 4.2**

Число оборотов образца $N$	$ \gamma  * 10^{-4}$
0	0
0,5	6,855
1	9,690
2	9,926
3	17,716

Результаты, сведённые в таблицу 4.2, нетрудно отобразить на графике зависимости коэффициента, характеризующего накопление повреждений от количества закручивания образца (рис.4.4).

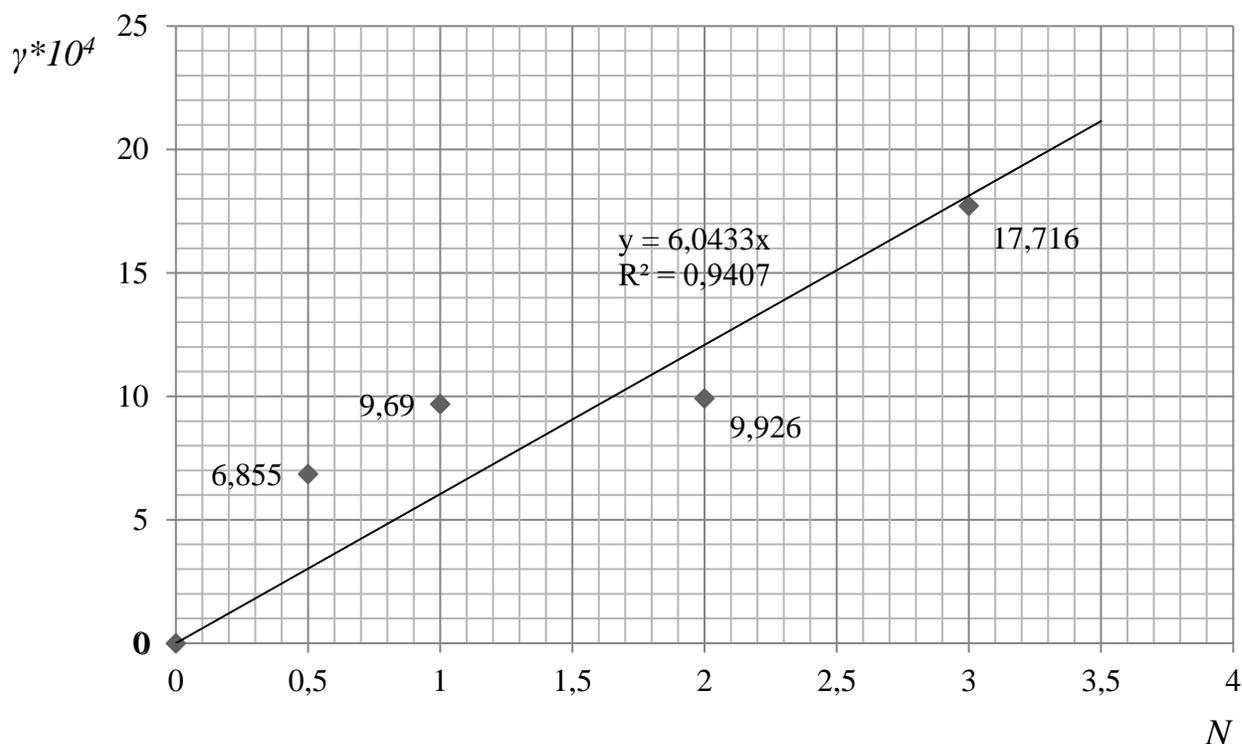


Рис.4.4. График зависимости коэффициента поврежденности от степени закрутки образца

Стоит отметить, что до момента начала последнего (третьего) закручивания образца рост поврежденности носит логарифмический характер. Между вторым и третьим закручиванием на графике наблюдается экспоненциальный рост поврежденности.

#### Выводы по главе 4

В четвертой главе диссертационной работы:

- Получены основные зависимости характеристик продольной волны (скорость, амплитуда, длина периодической волны, ширина волны импульсной формы) от коэффициента, характеризующего накопление повреждений в материале.
- Предложен практический подход к определению степени поврежденности материала элементарного цилиндрического образца ультразвуковым эхо-акустическим методом, с учётом самосогласованной динамической задачи оценки поврежденности.

## Заключение

В диссертации получены следующие **основные результаты**:

1. В линейной и нелинейной постановках сформулирована самосогласованная математическая модель, включающая в себя уравнение изгибных колебаний балки (стержня) и кинетическое уравнение накопления повреждений в ее материале. В результате аналитических исследований и численного моделирования, показано, что поврежденность материала приводит к частотно-зависимому затуханию и существенно изменяет характер дисперсии фазовой скорости изгибной упругой волны. Если в классической балке Бернулли-Эйлера у изгибных волн имеется одна дисперсионная ветка при любом значении частоты, то для балки, материал которой накапливает повреждения, во всем частотном диапазоне существует две пары дисперсионных веток, при этом одна пара описывает распространение волны, а другая - ее затухание. В рамках геометрически нелинейной модели поврежденной балки исследовано формирование интенсивных изгибных волн стационарного профиля. Показано, что такие существенно несинусоидальные волны могут быть как периодическими, так и уединенными (локализованными в пространстве). Определены зависимости, связывающие параметры волн (амплитуду, ширину, длину волны) с поврежденностью материала. Выявлено, что с ростом параметра поврежденности материала амплитуды периодической и уединенной волн увеличиваются, в то время как длина периодической волны и ширина уединенной волны уменьшаются.

2. Рассмотрена задача о возбуждении движущейся нагрузкой сдвиговой волны в пластине, изготовленной из материала, обладающего накопленной поврежденностью. Пластина при этом лежит на упругом основании модели Винклера. При отсутствии поврежденности материала в системе существует так называемая «зона непропускания», где действительным частотам не соответствуют

действительные волновые числа, а волны излучаются лишь при частотах, больших частоты отсечки. Наличие поврежденности приводит к существованию волн с комплексными волновыми числами во всем частотном диапазоне. Кроме того, показано, что если при отсутствии повреждений в материале пластины, сдвиговая волна в ней генерируется лишь нагрузкой, движущейся со скоростью, превышающей скорость сдвиговой волны, то при наличии повреждений в материале сдвиговую волну способна генерировать нагрузка, движущаяся со сколь угодно малой скоростью.

3. Исследована динамика стержня (модель Бишопа), по которому может распространяться продольная упругая волна. В избранной модели дополнительно учитываются нелинейности: геометрическая (нелинейная связь деформации и перемещения) и физическая (нелинейный закон Гука) и то обстоятельство, что в материале стержня при его эксплуатации могла поврежденность. Показано, что нелинейная динамика стержня с учетом поврежденности его материала описывается системой двух связанных между собой дифференциальных уравнений. Введены новые переменные, выбор которых объясняется тем, что возмущение, распространяясь с постоянной скоростью вдоль стержня, медленно эволюционирует во времени из-за нелинейности, дисперсии и диссипации. Первое приближение по малому параметру приводит исходную систему уравнений к одному эволюционному уравнению относительно осевой деформации, обобщающему уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргерса одним диссипативным и одним нелинейным слагаемыми. Найдено точное аналитическое решение этого уравнения, выражающееся через гиперболический косинус. График этой функции имеет колоколообразную форму и характеризует нелинейную уединенную стационарную волну – солитон деформации. Кроме самого решения найдены соотношения, позволяющие установить, как зависят

параметры солитона (амплитуда, скорость, ширина) от коэффициента, характеризующего поврежденность материала.

4. Предложен практический подход определения степени поврежденности материала цилиндрического образца ультразвуковым эхо-акустическим методом, основанный на самосогласованной динамической задаче оценки поврежденности. Получены зависимости изменения скорости продольной волны, и, как следствие, коэффициента поврежденности от изменения степени закрутки образца. Показано, что при увеличении степени закрутки образца, скорость продольных волн в материале уменьшается. В свою очередь, коэффициент, характеризующий поврежденность материала, увеличивается.

Развиваемый подход, позволяющий сформулировать и решить самосогласованную задачу, включающую в себя уравнение динамики балки и кинетическое уравнение поврежденности ее материала, может найти применение при разработке методик неразрушающего акустического контроля материалов и элементов конструкций.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Неразрушающий контроль: Справочник: В 7 т. Под общ. ред. В.В. Клюева. Т.3: Ультразвуковой контроль / И.Н. Ермолов, Ю.В. Ланге. – М.: Машиностроение, 2004. – 864 с.
2. Бондарь В.С. Неупругость. Варианты теории. – М.: Физматлит, 2004. – 144 с.
3. Волков И.А., Игумнов Л.А. Введение в континуальную механику поврежденной среды. – М.: Физматлит, 2017. – 304 с.
4. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. – М.: Физматлит, 2016. – 504 с.
5. Волков И.А., Коротких Ю.Г. Уравнения состояния вязкоупругопластических тел с повреждениями. – М.: Наука, Физматлит, 2008. – 424 с.
6. Duszer M., Pezzya P. Plasticity of damaged solids and shear band localization // *Ing. Arch.* 1988. No 5. P.380-392.
7. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчет элементов конструкций на прочность. – М.: Машиностроение, 1981. – 272 с.
8. Ерофеев В.И., Никитина Е.А. Самосогласованная динамическая задача оценки поврежденности материала акустическим методом // *Акустический журнал.* – 2010. – Т.56, № 4. – С. 554-557.
9. Бриккель Д.М., Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. Распространение изгибных волн в балке, материал которой накапливает повреждения в процессе эксплуатации // *Вычислительная механика сплошных сред.* – 2020. – Т. 13 – №1. – С. 108-116.
10. Brikkel D., Erofeev V., Leonteva A. Dispersion and attenuation of bending waves propagating in a beam in the material there of damages accumulate during the operation // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* – 2020. – Vol. 709. Article ID: 033059. 6 pages. (*Scopus*).

11. Brikkel D., Erofeev V., Nikitina E. Influence of material damage on the parameters of a nonlinear longitudinal wave which spread in a rod // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2020. – Vol. 747. Article ID: 012048. 5 pages. (*Scopus*).

12. Brikkel D., Erofeev V. Influence of material damage on the parameters of a nonlinear flexible wave which spread in a beam // Communications in Computer and Information Science (CCIS). – 2020. – Vol. 1413. – P. 105-116. (*Scopus*).

13. Brikkel D., Erofeev V., Nikitina E. Effect of damage in the material on the parameters of nonlinear flexural waves // Advances in Acoustics, Noise and Vibration – 2021. Proceedings of the 27th International Congress on Sound and Vibration. The Annual Congress of the International Institute of Acoustics and Vibration (IIAV), 11-16 July, 2021 / edited by: E. Carletti, M. Crocker, Pawelczyk M., Tuma J. Published by: Silesian University Press, Gliwice, Poland. – 2021. – Article 1116. 6 pages. (*Scopus*).

14. Brikkel D.M., Erofeev V.I., Leonteva A.V. Propagation of bending waves in a beam the material of which accumulates damage during its operation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2121. Vol. 62. No 7. P.1097-1105. (*Web of Science, Scopus*).

15. Никитина Е.А., Хазов П.А., Бриккель Д.М. Определение остаточного ресурса подкраново-подстропильной фермы с учетом накопления повреждений в реальных условиях эксплуатации // Приволжский научный журнал. – 2018. – №1(45) – С. 9-14. (*входит в Перечень ВАК Минобрнауки РФ по специальностям: 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения; 05.23.05 – Строительные материалы и изделия; 05.23.22 – Гидротехническое строительство*).

16. Бриккель Д.М., Ерофеев В.И. Влияние поврежденности материала на параметры нелинейной изгибной и продольной волн, распространяющихся в балке // Проблемы информатики. – 2021. – №1(50). – С. 6-14. (*входит в Перечень ВАК Минобрнауки РФ по специальностям: 1.2.2. – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; 2.3.5 – Математическое и программное*

*обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей; 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения; 05.13.17 – Теоретические основы информатики).*

17. Лампси Б.Б., Хазов П.А., Маркина Ю.Д., Бриккель Д.М. Влияние жесткости элементов решетки на податливость ездового пояса подкраново- подстропильной фермы (ППФ) // Приволжский научный журнал. – 2022. – №1(45) – С. 9-14. *(входит в Перечень ВАК Минобрнауки РФ по специальностям: 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения; 05.23.05 – Строительные материалы и изделия; 05.23.22 – Гидротехническое строительство).*

18. Бриккель Д.М., Хазов Д.А. Определение срока эксплуатации и остаточного ресурса подкраново-подстропильных ферм (ппф) на стадии роста усталостной трещины. Статический расчёт // Перспективное развитие системы диагностики, мониторинга и обслуживания объектов транспортной инфраструктуры. Материалы IV Международной студенческой научно-практической конференции. Нижний Новгород. Изд-во: «Стимул-СТ». – 2016. – С. 72-77.

19. Бриккель Д.М. Анализ НДС подкраново-подстропильной фермы (ппф) на стадии роста усталостной трещины // Наука сегодня: задачи и пути их решения. Материалы международной научно-практической конференции. г. Вологда, Научный центр «Диспут». 31 мая 2017. Вологда: Изд-во «Маркет». – 2017. – С. 10-11.

20. Бриккель Д.М. Определение остаточного ресурса подкраново-подстропильной фермы с учетом накопления повреждений в реальных условиях эксплуатации // Сборник трудов Международной молодежной научной конференции «XLIV Гагаринские чтения». Серия: «Механика и моделирование материалов и технологий». М.: ИПМех им. А.Ю. Ишлинского РАН. – 2018. – С. 369-370.

21. Ерофеев В.И., Никитина Е.А., Хазов П.А., Бриккель Д.М. Влияние поврежденности на остаточный ресурс и несущую способность подкрановой конструкции при эксплуатационных режимах нагружения // Живучесть и

конструкционное материаловедение (ЖивКоМ-2018). Научные труды 4-ой Международной конференции, посвященной 80-летию ИМАШ РАН. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2018. С. 112-114.

22. Бриккель Д.М., Ерофеев В.И., Никитина Е.А. Влияние поврежденности материала на параметры нелинейной продольной волны, распространяющейся в стержне // Материалы XXXI международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения «МИКМУС – 2019». М.: ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН. – 2020. – С. 286-289.

23. Бриккель Д.М., Ерофеев В.И. Определение степени поврежденности материала стержня ультразвуковым эхо - акустическим методом // Материалы XXXIII международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения «МИКМУС – 2021». М.: ИМАШ им. А.А. Благонравова РАН. – 2021. – С. 496-501.

24. Мураками С. Сущность механики поврежденной среды и ее приложения к теории анизотропных повреждений при ползучести // Теоретические основы инженерных расчетов. – 1983. – № 2. – С. 28-36.

25. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

26. Качанов Л.М. Основы механики разрушения / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1974. – 311 с.

27. Астафьев В.И., Радаев Ю.Н., Степанова Л.В. Нелинейная механика разрушения. Самара: Изд-во Самарского ун-та. 2001. 632 с.

28. Баженов В.Г., Осетров С.Л., Осетров Д.А., Рябов А.А. Связанная модель разрушения упругопластических материалов на основе кинетического уравнения на основе кинетического уравнения накопления повреждений и критерия прочности Писаренко-Лебедева // Прикладная механика и техническая физика. 2022. Т.63. № 1(371). С.122-129.

29. Березин А.В., Козинкина А.И. Физические модели и методы оценки накопления повреждений в твердых телах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. № 3. С.115-121.
30. Березин А.В., Козинкина А.И. О поведении дефектных упругопластических материалов при деформировании // Механика твердого тела. 2004. № 6. С.114-120.
31. Березин А.В. Влияние повреждений на деформационные и прочностные характеристики твердых тел. М.: Наука. 1990. 135 с.
32. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Нелинейные процессы накопления повреждений при нестационарных циклических нагружениях // Проблемы прочности и пластичности. 2012. № 75. С.96.
33. Бондарь В.С., Фролов А.Н. Математическое моделирование процессов неупругого поведения и накопления повреждений материалов при сложном нагружении // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 6. С.99-107.
34. Ботвина Л.Р., Баренблатт Г.И. Автомодельность накопления повреждаемости // Проблемы прочности. 1985. № 12. С.17-24.
35. Вакуленко А.А. О связях между напряжениями и деформациями в неупругих средах // Доклады АН СССР. 1958. Т.118. № 4. С.665-668.
36. Вакуленко А.А., Литов Ю.Н., Чебанов В.М. О разрыхлении структуры и прочности полимерных материалов // Доклады АН СССР. 1967. Т.175. № 3. С.539-541.
37. Васин Р.А., Моссаковский П.А. Вариант соотношений для тензора поврежденности упругопластической среды // Прикладная математика и механика. 2011. Т.75. № 1. С.8-14.
38. Вильдеман В.Э., Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика неупругого деформирования и разрушения композиционных материалов. М.: Наука. Физматлит. 1997. 288 с.

39. Волков В.М. Разрыхление металлов и разрушение конструкций машин // Вестник ВГАВТ. Сер. «Надежность и ресурс конструкций». Нижний Новгород: Изд-во ВГАВТ. 2003. Вып. 4. С.50-69.

40. Волков И.А., Игумнов Л.А., Казаков Д.А., Шишулин Д.Н., Тарасов И.С., Сметанин И.В. Определяющие соотношения механики поврежденной среды для оценки длительной прочности конструкционных сплавов // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т.60. № 1(353). С.181-194.

41. Горохов В.А., Капустин С.А., Чурилов Ю.А. Численное моделирование процессов пластического деформирования и накопления повреждений в материалах конструкций при различных режимах малоциклового нагружения // Прикладная механика и техническая физика. 2017. Т.58. № 3(343). С.98-107.

42. Когаев В.П., Махутов Н.А., Гусенков А.П. Расчеты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность. М.: Машиностроение, 1985. 224 с.

43. Капустин С.А. Численное моделирование процессов деформирования конструкции на основе соотношений механики поврежденной среды // Моделирование в механике: Сб.научн.трудов. Новосибирск. 1990. Т. 4(21). С.90-97.

44. Локощенко А.М. Новый метод измерения поврежденности металлов при ползучести // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. № 5. С.108-122.

45. Локощенко А.М. Исследование поврежденности материала при ползучести и длительной прочности // Прикладная механика и техническая физика. 1982. № 6. С.129-133.

46. Ломакин Е.В., Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н. Моделирование локально-функциональных свойств металла, поврежденного полями дефектов // Доклады академии наук. 2017. Т. 472. № 3. С.282-285.

47. Дудченко А.А., Лурье С.А. Моделирование процессов роста поврежденности и деградации механических свойств слоистых композитов. М.: МАИ. 2019. 160 с.

48. Маковкин Г.А., Шаров Р.А., Штенберг В.Б. О формулировке кинетического уравнения накопления повреждений // Приволжский научный журнал. 2017. № 1 (41). С.13-20.
49. Мишакин В.В., Наумов М.Ю., Мишакин С.В., Кассина Н.В. Разработка акустического метода оценки поврежденности металлических сплавов до образования макротрещины // Дефектоскопия. 2007, № 10. С.49-57.
50. Мовчан А.А. Микромеханический подход к задаче описания накопления анизотропного рассеянного урона // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 3. С.115-123.
51. Морозов Н.Ф. Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
52. Мураками С., Радаев Ю.Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // Известия РАН. Механика твердого тела. 1996. № 4. С.93-110.
53. Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2000. № 5. С.27.
54. Романов А.Н. Разрушение при малоцикловом нагружении. – М.: Наука. – 1988. – 278 с.
55. Садырин А.И. Модели накопления повреждений и критерии разрушения конструкционных упругопластических материалов при динамическом нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2012. № 74. С.28-39.
56. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука. 2009. 320 с.
57. Хлыбов А.Л., Пичков С.Н., Углов А.Л. Исследование накопления рассеянных микроповреждений в образцах из стали 08Х18Н10Т при малоцикловой усталости // Контроль. Диагностика. 2011. № 4. С.55-61.

58. Шоркин В.С., Якушина С.И. математический расчет параметров начальной поврежденности композиционных материалов // Математическое моделирование и экспериментальная механика деформируемого твердого тела. Межвузовский сборник научных трудов под ред. Зубчанинова В.Г., Алексеева А.А. Тверь, 2020. С.100-106.
59. Bazant Z.P. Stable states and paths of structures with plasticity or damage // J. Eng. Mech. 1988. Vol. 114. No 12. P. 1666-1692.
60. Bazant Z.P. Compression fracture – mechanics of damage localization and size effect // Material Instabilities in Solids. Edited by R. de Borst, E. van der Giessen. Chichester, New York, Wienheim, Brisbane, Singapore, Toronto: Willey. 1998. P.355-368.
61. Geers M.G.D., Peerlings R.H.J., de Borst R., Brekelmans W.A.M. Higher-order damage models for the analysis of fracture in quasi-brittle materials // Material Instabilities in Solids. Edited by R. de Borst, E. van der Giessen. Chichester, New York, Wienheim, Brisbane, Singapore, Toronto: Willey. 1998. P.405-424.
62. Collins, J. A. Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention. (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.1993.
63. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение. М.: Мир, 1984. 624 с.
64. Hiraο M., Ogi H., Suzuki N., Ohtani T. Ultrasonic Attenuation Peak During Fatigue of Polycrystalline Copper // Acta Mater. 2000. Vol. 48. P. 517-524.
65. Karihaloo B.L., Wang J. Damage localization in short fibre cementitious // Material Instabilities in Solids. Edited by R. de Borst, E. van der Giessen. Chichester, New York, Wienheim, Brisbane, Singapore, Toronto: Willey. 1998. P.323-338.
66. Krajcinovic D. Damage Mechanics. Amsterdam: Elsevier Science B.V. 1996.
67. Krajcinovic D., Fonseka G.U. The continuous damage theory of brittle materials. Part 1: General theory // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. Vol. 48. No 4. P.809-815.

68. Fonseka G.U., Krajcinovic D. The continuous damage theory of brittle materials. Part 2: Uniaxial and plane response modes // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1981. Vol. 48. No 4. P.816-824.
69. Krajcinovic D. Continuous damage mechanics revisited: basic concepts and definitions // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1985. Vol. 52. No 4. P.829-834.
70. Леметр Ж. Континуальная модель повреждения, используемая для расчета разрушения пластичных материалов // Труды Американского общества инженеров-механиков. Теоретические основы инженерных расчетов. 1985. Т.107. № 1. С.90-98.
71. Lemaitre J. A continuous damage mechanics model for ductile fracture // Trans. ASME. J. Eng. Mater. and Technol. 1985. Vol. 107. No 1. P.83-89.
72. Lemaitre J. A Course on Damage Mechanics. Berlin, New York: Springer. 1992. 210.
73. Marigo J.J. Constitutive relations in plasticity, damage and fracture mechanics based on a work property // Nuclear Engineering and Design. 1989. Vol. 114 (3). P. 249-272.
74. Maugin G.A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge University Press, UK. 1992. 350 p.
75. Tvergaard V., Needleman A. Nonlocal damage effects on plastic flow localization under dynamic loading // Material Instabilities in Solids. Edited by R. de Borst, E. van der Giessen. Chichester, New York, Wienheim, Brisbane, Singapore, Toronto: Willey. 1998. P.457-472.
76. Oka F., Muhlhaus H.-B., Yashima A., Sawada K. Quasi-static and dynamic characteristic of strain gradient dependent non-local constitutive models. // Material Instabilities in Solids, R. De Borst, E. Van der Giessen (Eds.). Chichester : John Wiley & Sons, 1998, pp.55-64.

77. Placidi L. A variational approach for a nonlinear 1-dimensional second gradient continuum damage model // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2015. 27(4-5), pp. 623-638.

78. Placidi L. A variational approach for a nonlinear one-dimensional damage-elasto-plastic second- gradient continuum model // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2016. 28(1-2), pp. 119-137.

79. Supartono F., Sidoroff F. Anisotropic damage modelling for brittle elastic materials // *Arch. Mech.* 1985. Vol. 37. No 4-5. P.521-534.

80. Wang J., Fang Q.F., Zhu Z.G. Sensitivity of Ultrasonic Attenuation and Velocity Change to Cyclic Deformation in Pure Aluminum // *Phys. Stat. Sol. (a)*. 1998. Vol. 169. P.43-48.

81. Аэро Э.Л. Существенно нелинейная микромеханика среды с изменяемой периодической структурой // *Успехи механики*. – 2002. – Т. 1, № 3. – С. 130-176.

82. Короткина М.Р. Моментные теории упругости и их связь с полевыми теориями, построенными на дискретных структурах // *Упругость и неупругость*. / М.: Изд-во Московского университета. – 1975. – № 4. – С. 225-240.

83. Короткина М.Р. Термодинамика сред с внутренней структурой // *ДАН СССР*. – 1978. – Т. 242 – № 6. – С. 1269-1272.

84. Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой. – М.: Наука, 1975. – 415 с.

85. Askes H., Metrikine A.V. High-Order Derived from Discrete Media: Continualisation Aspects and Boundary Conditions // *International Journal of Solids and Structures*. – 2005. – Vol. 42. – P 187-202.

86. Kroner E. Elastic moduli of perfectly disordered composite materials // *J. Mech. Phys. Solids*. – 1967. – Vol. 15. – No 4. – С. 319.

87. Kroner E., Datta B.K. Non-Local Theory of Elasticity for a Finite Inhomogeneous Medium - a Derivation from Lattice Theory // *Fundamental Aspects of Dislocation Theory*. Wash. (D.C.). – 1970. – Vol. 2. – P 737 - 746.
88. Metrikine A.V., Askes H. One-Dimensional Dynamically Consistent Gradient Elasticity Models Derived from a Discrete Microstructure. Part 1: Generic Formulation. Part 2: Static and Dynamic Response // *European Journal of Mechanics A/Solids*. – 2002. – Vol. 21. – No 4. – P 555-588.
89. Ильюшин А.А. Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // *Прочность и пластичность* / М.: Наука. – 1971. – С. 54-61.
90. Илюшина Е.А. Одна из моделей сплошной среды с учетом микроструктуры // *Прикладная математика и механика*. – 1969. – Т. 33. – № 5. – С. 917-923.
91. Левин В.М., Николаевский В.Н. Осреднение по объему и континуальная теория упругих сред с микроструктурой // *Современные проблемы механики и авиации* / М.: Машиностроение. – 1982. – С. 182-193.
92. Ломакин В. А. Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука. – 1970. – 139 с.
93. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и упругими деформациями в поликристаллах. // *Проблемы гидродинамики и механики сплошных сред* / М.: Наука. – 1969. – С. 365-376.
94. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 399 с.
95. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир. – 1975. – 872 с.
96. Tiersten T. R., Jahamir M. A Theory of Composites Modeled as Interpenetrating Solids Continua. // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 1977. – Vol. 54. – No 2. – P 153-163.
97. Kafadar C.B., Eringen A.C. Micropolar Media, 1 and 2. // *Int. J. Engng. Sci.* – 1971. – Vol. 9. – P 271-329.
98. Stojanovic R. *Mechanics of Polar Continua*. – CISM. Udine, 1969. – 253 p.

99. Stojanovic R. Nonlinear Micropolar Elasticity // Micropolar Elasticity; eds. W. Nowacki, W. Olszak. – CISM. Udine. – 1972. – P 73-103.
100. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. – М.: Изд-во Московского университета. – 1999. – 328 с.
101. Кузьменко В.А. О влиянии микронеоднородности напряженного состояния на рост трещин // Проблемы прочности. – 1984. – № 3. – С.12-14.
102. Канаун С.К. Пуассоновское множество трещин в упругой сплошной среде // Прикладная математика и механика. – 1980. – Т.44. – № 6. – С.1129-1139.
103. Канаун С.К. Метод эффективного поля в линейных задачах статики композитной среды // Прикладная математика и механика. – 1982. – Т.46. – № 2. – С. 655-665.
104. Канаун С.К. Корреляционная функция поля напряжений в упругой среде с точечными дефектами // Прикладная математика и механика. – 1983. – Т. 47. – № 4. – С.652-661.
105. Салганик Р.Л. Механика тел с большим числом трещин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – № 4. – С. 149-158.
106. Budiansky B. On the elastic moduli of Some heterogeneous materials // J. Mech. Phys. – 1965. – Vol. 13. – No 4. – P 223.
107. Hashing Z. Theory of mechanical behaviour of heterogeneous media // Appl. Mech. Rev. – 1964. – Vol. 17. – No 1. – P 1.
108. Hill R. The elastic behaviour of a crystalline aggregate // Proc. Phys. Soc. – 1952. – A.65. – No 389. – P 349.
109. Morris P.R. Elastic constants of polycrystals // Int. J. Engng. Sci. – 1970. – Vol. 8 – No 1. – P 49.
110. Zeller R. Dederiches P.H. Elastic constants of polycrystals // Phys. Stat. Solids. – 1973. – Vol. B55. – P 831.

111. Бондаренко А.П., Кондратьев А.И. Измерение дисперсии скорости и затухания упругих волн // Акустический журнал. – 1981. – Т. 27. – № 1. – С. 51-55.

112. Гудрамович В.С., Переверзев Е.С. Несущая способность и долговечность элементов конструкций. – Киев: Наукова думка, 1981. – 284 с.

113. Баранов В.М. Ультразвуковые измерения в атомной технике. – М.: Атомиздат. – 1975. – 220 с.

114. Бурд М.Б., Гитис М.Б. О возможности контроля пористости горячекатанного бериллия по затуханию ультразвука // Дефектоскопия. – 1989. – № 1. – С. 81-88.

115. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / И.А. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 288 с.

116. Витвицкий П.М., Попина С.Ю. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. – Киев: Наукова думка, 1980. – 186 с.

117. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. Общие вопросы. – Киев: Наукова думка, 1986. – Т.1. – 376 с.

118. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуща О.И. Введение в акустоупругость. – Киев: Наукова думка, 1977. – 162 с.

119. Ланге Ю.В. Акустический спектральный метод неразрушающего контроля // Дефектоскопия. – 1978. – № 3. – С. 7-14.

120. Takashi I., Takashi M., Chihiro K., Masato N., Shin-ichi Y. Measurement of ultrasonic attenuation coefficient using echo signals // Jap. J. Appl Phys. / Supply N22-3: 3 Symp. Ultrason. Electron. – 1982. – P 66-68.

121. Noronda P.J., Chapmann J.R., Wert J.J. Residual stress measurement and analysis using ultrasonic techniques // J. Test. Eval. – 1973. – Vol.1. – No 3. – P 209-214.

122. Ophir J., Jaeger P.M. Spektral shifts of ultrasonic propagation through media with nonlinear dispersive-attenuation // Ultrasonic Imaging. – 1982. – Vol. 4. – P 282-289.

123. Serabian S. Influence of attenuation up on the frequency content of a stress wave packet in graphite // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1967. – Vol. 42. – No 5. – P 1052-1059.

124. Кондратьев А.И. Прецизионные измерения скорости и затухания ультразвука в твердых телах // *Акустический журнал.* – 1990. – Т.36. – № 3. – С. 470-476.

125. Никитина Н.Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. – Нижний Новгород: Изд-во «ТАЛАМ», 2005. – 208 с.

126. Труэлл Р., Эльбаум И., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. – М.: Мир, 1972. – 307 с.

127. Зуев Л.Б. Муравьев В.В., Данилова Ю.С. О признаке усталостного разрушения сталей // *Письма в ЖТФ.* – 1999. – Т.25. – № 9. – С. 31-34.

128. Клепко В.В., Колупаев Б.Б., Колупаев Б.С., Лебедев Е.В. Диссипация энергии и дефект модуля в гетерогенных системах на основе гибкоцепных линейных полимеров // *Высокомолекулярные соединения.* – 2007. – Т.49. – № 1. – С. 139-143.

129. Шкарлет Ю.М. О теоретических основах электромагнитных и электромагнитоакустических методов неразрушающего контроля // *Дефектоскопия.* – 1974. – № 4. – С. 12-20.

130. Вибрации в технике. Справочник: в 6 томах. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

131. Stulov A., Erofeev V. Frequency-dependent attenuation and phase velocity dispersion of an acoustic wave propagating in the media with damages // *Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. Series: Advances Structured Materials*; Altenbach H., Forest S. (Eds.), Springer, Switzerland. – 2016. – Vol. 42. – P. 413-423.

132. Весницкий А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Физматлит», 2001. – 320 с.

133. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
134. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука. 1967. – 444 с.
135. Филиппов А.П. Колебания деформированных систем. – М.: Машиностроение. 1970. – 736 с.
136. Филиппов А.П. Кохманюк С.С., Воробьев Ю.С. Воздействие динамических нагрузок на элементы конструкций. – Киев: Наукова думка. 1974. – 344 с.
137. Кохманюк С.С., Янютин В.Г., Романенко Л.Г. Колебания деформируемых систем при импульсных и подвижных нагрузках. – Киев: Наукова думка. 1980. – 231 с.
138. Весницкий, А. И. Избранные труды по механике. – Нижний Новгород: Наш дом, 2010. – 248 с.
139. Болотовский Б. М., Гинзбург В. Л. Эффект Вавилова – Черенкова и эффект Доплера при движении источников со скоростью больше скорости света в вакууме // Успехи физических наук. – 1972. – Т. 106, № 4. – С. 577-592.
140. Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации / А.В. Порубов. – М.: Физматлит, 2009. – 208 с.
141. Методика. Диагностирование конструкционных материалов. Определение динамических констант упругости второго порядка акустическим методом. – Горький: Гф ВНИИНМАШ Госстандарта СССР. 1979. – 32 с.
142. Никитина Н.Е. Разработка технических требований к ультразвуковым преобразователям для контроля машин в процессе эксплуатации // Повышение эффективности эксплуатации машин и оборудования на основе стандартизации. М.: ВНИИНМАШ. – 1988. – Вып. 62. – С. 78-81.