На правах рукописи

Голубенец Вячеслав Олегович

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ СОСТОЯНИЯ

Специальность 01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль – 2022

Работа выполнена на кафедре математического моделирования математического факультета ФГБОУ ВО “Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова”

Научный руководитель: **Кащенко Илья Сергеевич**
доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова», заведующий кафедры математического моделирования

Официальные оппоненты: **Нестеров Андрей Владимирович**
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова», профессор кафедры информатики

Левашова Наталия Тимуровна
кандидат физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО “Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова”, доцент кафедры математики физического факультета

Ведущая организация: Нижегородский филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Защита состоится «13» октября 2022 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО “Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского” по адресу 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23, корп. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО “Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского” и на официальном сайте организации: https://diss.unn.ru

Автореферат разослан «____» ___________ 2022 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20,
канд. физ.-мат. наук Бирюков Р.С.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования

Объектами исследований в настоящей работе являются дифференциальные уравнения с запаздыванием, зависящим от состояния. Главным отличием уравнений с запаздыванием от ОДУ является то, что скорость изменения их решений определяется не только состоянием системы в текущий момент времени, но и ее состояниями в моменты времени, предшествующие текущему. Такие уравнения хорошо описывают многие процессы с последействием, и довольно давно используются в качестве их математических моделей, например, в биологии, медицине, нейродинамике, радиофизике и электронике. Однако активное развитие теории уравнений с запаздыванием началось лишь в XX веке.

Во многих моделях запаздывание не является постоянной величиной, а зависит от состояния системы. Большое количество приложений стимулирует развитие теории уравнений с запаздыванием, зависящим от состояния. Они выступают математическими моделями таких процессов, как горение топлива в жидкостных ракетных двигателях, токарная и фрезерная обработка металлических заготовок, изменение рыночных цен на товары по закону спроса и предложения, и другие. Например, известна модель, в которой функция предложения товара завсит от цены на этот товар в прошлый момент времени, причем запаздывание является переменной величиной, зависящей от цены в текущий момент времени. Это возможно благодаря одному важному практическому допущению, принятому при составлении этой модели. А именно, производители некоторых товаров могут хранить на складах партии произведенных но еще не реализованных товаров до тех пор, пока не сочтут текущую рыночную цену выгодной для продажи. Поэтому с ростом рыночной цены время хранения произведенных партий снижается. И наоборот, при стремлении рыночной цены к величине затрат на производство время хранения возрастает. Если же рыночная цена становится существенно ниже затрат на производство, то это тоже может повлечь ускорение поставок произведенного товара на реализацию, поскольку инвесторы заинтересованы в сохранении хотя бы части средств, вложенных в производство. Таким образом, объем текущего предложения зависит от рыночной цены в прошлом, причем на величину запаздывания влияет текущая рыночная цена.

В настоящей работе рассмотрены уравнения первого и второго порядков с одним запаздыванием, зависящим от состояния. Исследована их локальная динамика, построены асимптотические приближения решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркаций, а также вычислены точные значения коэффициентов нормальных и квазинормальных форм. Основное внимание в данной работе уделено изучению динамики уравнения, которое является обобщением уравнения Хатчинсона (т.н. логистического уравнения с запаздыванием) на случай запаздывания, зависящего от искомой функции. Для него также исследуется вопрос о существовании нелокального периодического решения.

Цели и задачи исследования

Цель работы заключается в исследовании динамических свойств решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, зависящим от искомой функции. Во-первых, рассматривается скалярное нелинейное уравнение первого порядка

$$\dot{u}(t) + u(t) = F(u(t - T(u(t)))), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Здесь функции F и T достаточно гладкие в окрестности точки $u = 0$, причем $F(0) = 0$, а $T(u) > 0$ при всех значениях аргумента. Также функция T ограничена некоторой константой $T_1 > 0$. Требуется изучить локальную динамику уравнения в окрестности его нулевого положения равновесия в фазовом пространстве непрерывных на отрезке $[-T_1, 0]$ функций.

Во-вторых, рассматривается логистическое уравнение с переменными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния:

$$\dot{N}(t) = f(N(t))\,[1 - g(N(t))N(t - T(N(t)))]\,N(t).$$

Предполагается, что при некотором $\varphi > 0$ функции f, g и T удовлетворяют следующим условиям: все они определены и достаточно гладкие в окрестности точки $N = \varphi$; $T(\varphi) = 1$; $f(\varphi) > 0$ и $\varphi g(\varphi) = 1$. Последнее из этих предположений означает, что $N \equiv \varphi$ является состоянием равновесия этого уравнения. Ставится задача исследовать локальную динамику этого уравнения в окрестности положения равновесия $N \equiv \varphi$ в фазовом пространстве непрерывных на отрезке $[-T_1, 0]$ функций (где $T_1 > 0$ – верхняя граница функции $T(N)$).

В-третьих, рассматривается нелинейное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}(t) + \sigma\dot{x}(t) + x(t) = ax(t - T\varphi(x(t))) + f(x(t - T\varphi(x(t)))), \quad x \in \mathbb{R},$$

где функция $T\varphi(x(t))$ играет роль большого запаздывания: $T \gg 1$, а $\varphi(x(t))$ положительна, ограничена сверху, и является достаточно гладкой в нуле. В предположении существования нулевого положения равновесия у этого уравнения изучается его локальная динамика в малой (но не зависящей от T) окрестности этого состояния равновесия.

В-четвертых, рассматривается логистическое уравнение с постоянными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния:

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t)\,[1 - N(t - T(N(t - L), \lambda))]\,,$$

и доказывается существование у него нелокального релаксационного периодического решения при $\lambda \gg 1$ и $L \geqslant 0$, а также описываются его асимптотические характеристики.

Научная новизна результатов

Новизна полученных результатов состоит в следующем.

1. Для уравнения первого порядка с запаздыванием, зависящим от искомой функции, выполнен бифуркационный анализ в окрестности нулевого положения равновесия. Выведены условия реализации бифуркации обмена устойчивостью и суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа. Во всех случаях построена асимптотика решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркаций.

2. Аналогичный анализ в окрестности положительного состояния равновесия выполнен для обобщенного логистического уравнения с переменными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния. Исследованы сценарии потери им устойчивости: транскритическая и вилообразная бифуркации, а также бифуркация Андронова – Хопфа. Новыми и важными являются также выводы о бифуркационных свойствах частных случаев этого уравнения. А именно, когда запаздывание зависит от состояния, уравнение может обладать бифуркационными свойствами даже при линейной правой части.

3. Для уравнения второго порядка с большим запаздыванием, зависящим от состояния, изучены критические случаи бесконечной размерности в задаче об устойчивости нулевого положения равновесия. В случаях, близких к критическим, построены специальные нелинейные уравнения, решения которых определяют главную часть асимптотического приближения решений исходной задачи.

4. Для логистического уравнения с постоянными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния, доказано существование нелокального релаксационного периодического решения при достаточно больших значениях мальтузианского коэффициента. Получены асимптотические оценки основных его характеристик, таких как максимальное и минимальное значения, а также период. Показано, что это решение имеет один асимптотически большой всплеск на асимптотически большом периоде, а минимальное значение сверхэкспоненциально мало.

Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований

Главная значимость работы с теоретической точки зрения заключается в расширении набора методов исследования локальной и нелокальной динамики уравнений с запаздыванием, зависящим от искомой функции. А именно, в работе показано, что методы нормальных и квазинормальных форм, а также метод большого параметра применимы для анализа динамики уравнений из этого класса. Эти методы являются асимптотическими и позволяют строить асимптотические приближения решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркаций. В применении к исследованным уравнениям эти методы позволили обнаружить классические бифуркационные эффекты, такие как суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа и релаксационный характер колебаний при больших значениях бифуркационного параметра.

Работа также ценна для приложений, поскольку для математического моделирования процессов с последействием часто используются уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции.

Методология и методы исследования

Основными методами, использованными при решении поставленных задач, являются метод нормальных форм, метод кванормальных форм и метод большого параметра. Все они являются асимптотическими.

Метод нормальных форм позволяет в ситуациях, близких к критическим, свести исходную систему уравнений с малым параметром к системе без такового, называемой нормальной формой исходной системы. Также этот метод позволяет получить асимптотическое приближение решений исходной системы по малому параметру. При этом, главной частью этой асимптотики является решение нормальной формы. При использовании метода требуется выполнить несколько шагов:

- изучить корни характеристических квазиполиномов для соответствующих линеаризованных уравнений, выделить критические случаи;
- для каждого критического случая построить асимтотические приближения решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркций.

Метод квазинормальных форм используется для изучения локальной динамики сингулярно возмущенных уравнений в критических случаях бесконечной размерности. Он использует формализм метода нормальных форм и так же позволяет построить асимптотические приближения устойчивых решений. Главными частями асимптотики являются решения так называемых квазинормальных форм.

Метод большого параметра опирается на асимптотическое интегрирование по шагам и построение асимптотики оператора сдвига по траектории (оператора Пуанкаре). Суть метода заключается в следующем. В фазовом пространстве исходного уравнения специальным образом выбирается множество $\mathbb{S}$. Далее с помощью интегрирования исходного уравнения по шагам изучается асимптотика всех его решений с начальными условиями из $\mathbb{S}$ и показывается, что через некоторое время они снова попадают в $\mathbb{S}$. Таким образом определяется оператор последования Π, отображающий множество $\mathbb{S}$ в себя. Динамика отображения $\Pi : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ определяет структуру решений исходного уравнения с начальными условиями из множества $\mathbb{S}$. Например, если множество $\mathbb{S}$ является замкнутым, ограниченным и выпуклым, то у этого оператора существует неподвижная точка, которой соответствует периодическое решение исходного уравнения.

Положения, выносимые на защиту

1. Сформулированы и доказаны условия возникновения бифуркации обмена устойчивостью и суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности нулевого положения равновесия уравнения первого порядка с запаздыванием, зависящим от состояния.

2. Выполнен подробный бифуркационный анализ в окрестности положительного состояния равновесия обобщенного логистического уравнения с переменными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния. Сформулированы и доказаны условия возникновения транскритической и вилообразной бифуркаций, а также бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности положительного состояния равновесия. На частных случаях этого уравнения продемонстрировано влияние непостоянного запаздывания на формирование нелинейной динамики.

3. Исследован вопрос о построении асимптотики решений в окрестности нуля в критических случаях для уравнения второго порядка с большим запаздыванием, зависящим от состояния.

4. Доказано существование нелокального релаксационного периодического решения в логистическом уравнении с постоянными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния, и построена асимптотика его свойств.

Апробация результатов исследования

Результаты проведенных исследований были представлены на следующих научных конференциях:

1. International Student Conference «Science and Progress – 2014», Санкт-Петербург (ноябрь, 2014).
2. III Международная молодежная научно-практическая конференция «Путь в науку», Ярославль (апрель, 2015).
3. International Conference-School «Infinite-dimensional dynamics, dissipative systems, and attractors», Нижний Новогород (июль, 2015).
4. International Student Conference «Science and Progress – 2015», Санкт-Петербург (ноябрь, 2015).
5. Международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферми-Паста-Улама, Ярославль (октябрь, 2015).
6. XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва (апрель, 2016).
7. 13th Workshop on Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena, Москва (апрель, 2016).
8. IV Международная молодежная научно-практическая конференция «Путь в науку», Ярославль (апрель, 2016).
9. Международная конференция Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVII», Воронеж (май, 2016)
10. Второй Всероссийский научный форум «Наука будущего – наука молодых», Казань (сентябрь, 2016)
11. International student conference "Science and Progress" (октябрь, 2016).
12. V Международная молодежная научно-практическая конференция «Путь в науку», Ярославль (апрель, 2017).
13. XII Международная школа-конференция "Хаотические автоколебания и образование структур" (ХАОС-2019), Саратов (октябрь, 2019).
14. Динамика. 2019. Ярославль (октябрь, 2019).
15. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем», online (июль, 2020).
16. Second International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics, Ярославль (октябрь, 2020).
17. Международная конференция «Математические идеи П.Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П.Л. Чебышёва, online (май, 2021).

18. Third International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics, Ярославль (октябрь, 2021).
19. International Conference-School «Shilnikov Workshop 2021», online (декабрь, 2021).

Публикации

Результаты исследований, представленных в работе, опубликованы в 24 работах. Из них 5 статей в журналах из перечня ВАК. Все публикации, кроме одной, выполнены без соавторов. В статье, выполненной совместно с научным руководителем, соавтором были получены результаты в одном специальном частном случае.

Основное содержание работы

В работе рассматриваются несколько уравнений с запаздыванием, зависящим от состояния. В первой главе изучается их локальная динамика, а во второй – рассматривается вопрос о существовании нелокальных релаксационных периодических решений в логистическом уравнении с постоянными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния.

В **первом параграфе** рассматривается уравнение

$$\dot{u}(t) + u(t) = F\left(u(t - T(u(t)))\right), \quad u \in R. \tag{1}$$

Функции F и T достаточно гладкие в окрестности точки $u = 0$, причем $F(0) = 0$, а $T(u) > 0$ при всех значениях аргумента. Тейлоровские разложения для этих функций в окрестности нуля выглядят следующим образом:

$$F(u) = au + f_2u^2 + f_3u^3 + ..., \quad T(u) = T_0 - \alpha u - \beta u^2 + ..., \quad T_0 > 0.$$

Условие $T_0 > 0$ выполняется в силу требования положительности $T(u)$ во всей области определения. Предполагается, что для решений уравнения (1) выполняется $|u(t)| \leqslant M \ \forall t \geqslant 0$ для некоторого положительного M. Таким образом, функция $T(u)$ ограничена некоторой константой $T_1 > 0$. В качестве фазового пространства уравнения (1) выбирается пространство функций, непрерывных на отрезке $[-T_1, 0]$ и абсолютная величина которых ограничена константой M.

При сформулированных условиях на функции F и T ставится задача исследовать поведение решений уравнения (1) в окрестности его нулевого положения равновесия.

Для ответа на вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия уравнения (1) необходимо линеаризовать это уравнение и изучить корни характиристического квазиполинома, который в данном случае имеет вид:

$$\lambda + 1 = ae^{-\lambda T_0}. \tag{2}$$

Свойства его корней хорошо известны и позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Нулевое решение уравнения* (1) *асимптотически устойчиво при* $a \in (a_0, 1)$ *и неустойчиво при* $a < a_0$ *или* $a > 1$. *Здесь* $a_0 = -\sqrt{1+\omega_0^2}$, *а* ω_0 *– это наименьший положительный корень уравнения* $\omega_0 = -tg(\omega_0 T_0)$.

Для изучения динамики уравнения (1) в случаях, близких к критическим, используется метод нормальных форм, а также известный факт о том, что при $a = 1$ характеристический квазиполином (2) имеет на мнимой оси единственный корень $\lambda = 0$, а при $a = a_0$ – пару комплексно сопряженных чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$.

Сначала изучается ситуация, когда a близко к единице. В уравнении (1) вводится малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ с помощью подстановки $a = 1 + \varepsilon$, и согласно методу нормальных форм делается асимптотическая замена

$$u(t) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + o\left(\varepsilon^2\right), \tag{3}$$

где $\tau = \varepsilon t$. В результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра получается нормальная форма для (1) в окрестности нуля при условии близости параметра a к 1:

$$(1 + T_0)z' = z + f_2 z^2. \tag{4}$$

Теорема 2. *При всех* $T_0 > 0$, α, β, $f_2 \neq 0$, f_3 *и при* $0 < \varepsilon \ll 1$ *уравнение* (1) *имеет нетривиальное состояние равновесия* u_1 *с асимптотикой* $u_1 = -\varepsilon/f_2 + O\left(\varepsilon^2\right)$, *которое является локально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от* ε*) окрестности нуля. Других устойчивых решений в этой окрестности нет.*

Далее изучается случай, когда a находится в окрестности a_0. Для этого в (1) вводится малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ с помощью подстановки $a = a_0(1+\varepsilon)$ и делается следующая асимптотическая замена:

$$u = \sqrt{\varepsilon}\left(e^{i\omega_0 t} z(\tau) + e^{-i\omega_0 t}\bar{z}(\tau)\right) + \varepsilon u_2(t,\tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t,\tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \tag{5}$$

где $\tau = \varepsilon t$, $z(\tau)$ – комплекснозначная функция, а $u_i(t,\tau)$ $(i = 2, 3)$ — периодические по t функции с периодом $2\pi/\omega_0$. В результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε, при $\varepsilon^{3/2}$ получается нормальная форма для уравнения (1) в окрестности нуля при условии близости параметра a к a_0:

$$rz' = \mu z + \nu z|z|^2. \tag{6}$$

Для дальнейшего исследования параметров бифуркации важны знаки чисел $\eta = Re\ \mu/r$ и $d = Re\ \nu/r$. Формулы для них приведены в основном тексте работы. Здесь отметим только, что $\eta > 0$. Если $d < 0$, то все решения нормальной формы (6) стремятся к циклу амплитуды $\rho_0 = (-\eta/d)^{1/2}$. Если же $d > 0$, то все ее решения (кроме нулевого) по модулю стремятся к бесконечности. Связь периодического решения системы (6) с периодическим решением уравнения (1), обеспечиваемая формулой (5), позволяет сформулировать основной результат.

Теорема 3. *Пусть* $0 < \varepsilon \ll 1$, *а параметры* $T_0 > 0$, α, β, f_2, f_3 *таковы, что* $Re\ \nu < 0$. *Тогда уравнение* (1) *имеет периодическое решение с равномерной по* $t \geqslant 0$ *асимптотикой* $u(t) = 2\rho_0\sqrt{\varepsilon}\cos\left([\omega_0 + o(1)]\,t\right) + o\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, *которое является локально орбитально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от* ε*) окрестности нуля. Других устойчивых решений в этой окрестности нет.*

Если же $d > 0$, то задача исследования динамики уравнения (1) становится нелокальной: в окрестности нулевого состояния равновесия нет устойчивых режимов. Таким образом при выполнении условий теоремы 3 в уравнении (1) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа.

Во **втором параграфе** изучается локальная динамика уравнения следующего вида:

$$\dot{N}(t) = f(N(t))\,[1 - g(N(t))N(t - T(N(t)))]\,N(t). \tag{7}$$

Предполагается, что при некотором $\varphi > 0$ функции f, g и T удовлетворяют следующим условиям: все они определены и достаточно гладкие в окрестности точки $N = \varphi$; $T(\varphi) = 1$; $f(\varphi) > 0$ и $\varphi g(\varphi) = 1$. Последнее из этих предположений означает, что $N \equiv \varphi$ является состоянием равновесия уравнения (7).

Заменой $N(t) = (1 + x(t))\varphi$ уравнение (7) преобразуется к виду

$$\dot{x}(t) = r(x(t))\big[1 - \varphi a(x(t))[1 + x(t - h(x(t)))]\big]\,[1 + x(t)]. \tag{8}$$

Здесь $r(x) = f\left((1 + x)\varphi\right)$, $a(x) = g\left((1 + x)\varphi\right)$, $h(x) = T\left((1 + x)\varphi\right)$, а тейлоровские разложения этих функций в окрестности нуля имеют вид:

$$\begin{aligned} r(x) &= \lambda + r_1x + r_2x^2 + ..., \\ a(x) &= \frac{1}{\varphi} + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ..., \\ h(x) &= 1 - \alpha x - \beta x^2 + ..., \end{aligned} \tag{9}$$

где λ, r_1, r_2, a_1, a_2, a_3, α, β – вещественные параметры, а через λ обозначено $r(0)$. $x \equiv 0$ является состоянием равновесия уравнения (8). Пусть также $0 < h(x) < h_1$, $h_1 > 0$. Фазовым пространством уравнения (8) является $C[-h_1, 0]$.

Ставится задача исследовать локальную динамику уравнения (8) в малой окрестности нулевого состояния равновесия. Исследование начинается с изучения корней характеристического уравнения для линеаризации в нуле уравнения (8):

$$\mu = -\lambda\left(A + e^{-\mu}\right), \quad (A = a_1\varphi). \tag{10}$$

Анализ этих корней приведен в основном тексте работы. На его основе делается следующий вывод об устойчивости нулевого решения уравнения (8). Введем параметрически заданную кривую:

$$\ell_0 := \left\{(A,\lambda) \quad | \quad A = -\cos\omega, \quad \lambda = \frac{\omega}{\sin\omega}, \quad \omega \in (0,\pi)\right\}, \quad n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Теорема 4. *Пусть $|A| < 1$. Если при этом точка с координатами (A,λ) лежит выше кривой ℓ_0, то состояние равновесия $x \equiv 0$ уравнения (8) неустойчиво. В случае, когда (A,λ) располагается ниже ℓ_0, это состояние равновесия локально асимптотически устойчиво.*

При $A \geqslant 1$ состояние равновесия $x \equiv 0$ уравнения (8) локально асимптотически устойчиво, а при $A < -1$ оно неустойчиво.

Случаи $(A,\lambda) \in \{A = -1, \lambda \in (0,1)\}$ и $(A,\lambda) \in \ell_0$ являются критическими и изучаются отдельно.

Сначала изучается случай, когда точка (A,λ) близка к прямой $A = -1$. Здесь предполагаются выполненными условия

$$A = -(1+\varepsilon) \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad 0 < \lambda < 1, \tag{11}$$

что гарантирует неустойчивость нулевого состояния равновесия уравнения (8) (в силу теоремы 4). Далее в (8) производится асимптотическая замена переменных

$$x(t) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + o\left(\varepsilon^2\right), \tag{12}$$

где $\tau = \varepsilon t$, и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε. В итоге получается нормальная форма вида

$$z' = \frac{\lambda}{1-\lambda}\left[z + (1 - a_2\varphi)z^2\right].$$

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (11) и $a_2 \neq 1/\varphi$. Тогда уравнение (8) имеет состояние равновесия x_ε с асимптотикой $x_\varepsilon = \varepsilon/(a_2\varphi - 1) + o(\varepsilon)$, которое является локально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Других устойчивых решений в этой окрестности нет.*

Таким образом, в этом случае происходит транскритическая бифуркация.

Пусть далее $a_2 = 1/\varphi$. В этом случае асимптотическая замена (12) не позволяет построить нормальную форму. Тогда вместо нее в уравнении (8) делается замена вида

$$x(t) = \sqrt{\varepsilon} z(\tau) + \varepsilon x_2(t,\tau) + \varepsilon^{3/2} x_3(t,\tau) + o\left(\varepsilon^{3/2}\right),$$

где $\tau = \varepsilon t$, а функции $x_i(t,\tau)$ $(i = 2,3)$ ограничены по t. Нормальная форма в этом случае имеет следующий вид:

$$z' = \frac{\lambda}{1-\lambda}\left[z - (1 + a_3\varphi)z^3\right].$$

Это позволяет сформулировать слудующую теорему.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (11), *а также* $a_2 = 1/\varphi$ *и* $a_3 > -1/\varphi$. *Тогда уравнение* (8) *имеет два состояния равновесия* $x_{\pm\varepsilon}$ *с асимптотикой* $x_{\pm\varepsilon} = \pm\sqrt{\varepsilon}/\sqrt{a_3\varphi+1} + o\left(\sqrt{\varepsilon}\right)$, *которые являются локально асимптотически устойчивыми в некоторой малой (но не зависящей от* ε*) окрестности нуля, причем других устойчивых решений в этой окрестности нет.*

Таким образом в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (8) может происходить как бифуркация обмена устойчивостью, так и бифуркация вилка при переходе точки с координатами (A,λ) через область $\{A = -1, \lambda \in (0,1)\}$ в направлении убывания A. Если же в условиях теоремы 6 выполнено неравенство $a_3 < -1/\varphi$, то в уравнении (8) происходит жесткая потеря устойчивости.

Далее в этом параграфе изучается критический случай, когда точка в плоскости параметров (A,λ) переходит через кривую ℓ_0. На кривой ℓ_0 произвольно выбирается точка с координатами (A_0,λ_0). Если в равенствах (9) $\lambda = \lambda_0$ и $a_1 = A_0/\varphi$, то уравнение (10) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_0$, где ω_0 – корень уравнения $A_0 = -\cos\omega$ из интервала $(0,\pi)$. Далее в (9) делается подстановка

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad a_1 = \frac{A_0}{\varphi}. \tag{13}$$

В силу теоремы 4 нулевое состояние равновесия уравнения (8) неустойчиво. Для изучения способа потери устойчивости в этом уравнении выполняется асимптотическая замена

$$x(t) = \sqrt{\varepsilon}\left[z(\tau)\exp\left(i\omega_0 t\right) + \overline{z}(\tau)\exp\left(-i\omega_0 t\right)\right] + \\ + \varepsilon u_2(t,\tau) + \varepsilon^{3/2}u_3(t,\tau) + \ldots . \tag{14}$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$, $z(\tau)$ – комплекснозначная функция, а функции $u_i(t,\tau)$ $(i = 2,3)$ периодичны по t с периодом $2\pi/\omega_0$.

В результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра, при $\varepsilon^{3/2}$ получается нормальная форма:

$$z' = \eta z + dz|z|^2. \tag{15}$$

Динамика этой системы зависит от знаков надкритичности $Re(\eta)$ и первой ляпуновской величины $Re(d)$, точные формулы для которых приводятся в основном тексте работы. Здесь лишь важно, что $Re(\eta) > 0$, поэтому поведение решений зависит от знака $Re(d)$. Нулевое положение равновесия системы (15) неустойчиво, а если A_0, φ, r_1, r_2, a_2, a_3, α, β таковы, что $Re(d) < 0$, то у системы (15) существует асимтотически устойчивый цикл $z_0(\tau) = \rho_0 \exp(i\psi(\tau))$, где

$$\rho_0 = \sqrt{-Re(\eta)/Re(d)} \tag{16}$$

Если A_0, φ, r_1, r_2, a_2, a_3, α, β таковы, что $Re(d) > 0$, то все решения системы (15) (кроме $z = 0$) по модулю стремятся к бесконечности. Случай $Re(d) = 0$ является вырожденным, требует отдельного изучения и в работе не рассматривается.

При выполнении условия $Re(d) < 0$ формула (14) устанавливает соответствие между асимптотически орбитально устойчивым циклом $z_0(\tau)$ системы (15) и локально асимптотически орбитально устойчивым периодическим решением уравнения (8).

Теорема 7. *Пусть для равенств* (9) *выполнены условия* (13). *Пусть также числа A_0, φ и значения параметров r_1, r_2, a_2, a_3, α, β таковы, что $Re(d) < 0$. Тогда у уравнения* (8) *существует периодическое решение с равномерной по $t \geqslant 0$ асимптотикой $x(t) = 2\rho_0\sqrt{\varepsilon}\cos([\omega_0 + o(1)]t) + o(\sqrt{\varepsilon})$, которое является локально орбитально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Причем других устойчивых решений в этой окрестности нет.*

Здесь ρ_0 определяется формулой (16).

Таким образом, при выполнении условий (13) в малой окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (8) происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа при переходе точки с координатами (A, λ) через кривую ℓ_0 в направлении возрастания λ. Если условие (13) не выполнено, то в уравнении (8) происходит жесткая потеря устойчивости.

В **третьем параграфе** рассматривается уравнение второго порядка с большим запаздыванием

$$\ddot{x}(t) + \sigma\dot{x}(t) + x(t) = ax(t - T\varphi(x(t))) + f(x(t - T\varphi(x(t))))$$

где $T \gg 1$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ – параметры, а функция $\varphi(x)$ положительна, ограничена сверху некоторой константой $M > 0$, и является достаточно гладкой в нуле. Также предполагается, что функция f достаточно гладкая в нуле, $f(0) = f'(0) = 0$ и $\varphi(0) = 1$. Таким образом $x \equiv 0$ является состоянием равновесия этого уравнения.

Функции φ и f допускают следующие разложения в нуле по формуле Тейлора:

$$\varphi(x) = 1 + \alpha x + \beta x^2 + o(x^2), \quad f(y) = f_2 y^2 + f_3 y^3 + o(y^3).$$

Нормировкой времени $t \to Tt$ это уравнение сводится к

$$\varepsilon^2\ddot{x}(t) + \varepsilon\sigma\dot{x}(t) + x(t) = ax(t - \varphi(x(t))) + f(x(t - \varphi(x(t)))), \tag{17}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon = T^{-1}$).

Ставится задача исследовать поведение решений в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия (17) в фазовом пространстве $C_{[-M,0]}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-M, 0]$ функций.

Изучение локальной динамики опирается на известные результаты линейного анализа для уравнения (17), которые заключаются в следующем. Во-первых, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Если $|a| < a(\sigma)$, то при достаточно малых ε нулевое решение* (17) *асимптотически устойчиво. Все решения с начальными условиями из его некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности стремятся к нулю.*

Если $|a| > a(\sigma)$, то нулевое решение (17) *неустойчиво и в его некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нет устойчивых решений.*

Здесь функция $a(\sigma)$ определена следующим образом:

$$a(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \geqslant \sqrt{2}, \\ \sigma\sqrt{1-\sigma^2/4}, & \sigma < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Во-вторых, если значение $|a|$ близко к $a(\sigma)$, то характеристическое уравнение

$$\varepsilon^2\lambda^2 + \sigma\varepsilon\lambda + 1 = ae^{-\lambda} \tag{18}$$

при малых ε имеет сколь угодно большое количество корней в окрестности мнимой оси. В этом смысле критический случай имеет бесконечную размерность. Асимптотика таких корней приводится в основном тексте работы.

В первую очередь изучается критический случай $\sigma > \sqrt{2}$, $a = 1 + \varepsilon^2 a_1$ ($a_1 \in \mathbb{R}$). Согласно методу квазинормальных форм в уравнении (17) выполняется замена

$$x = \varepsilon^2 u(\tau, r) + \varepsilon^4 u_2(\tau, r) + o(\varepsilon^4), \tag{19}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = (1 - \sigma\varepsilon + \sigma^2\varepsilon^2)t$, а функции $u(\tau, r)$ и $u_2(\tau, r)$ периодичны по r с периодом 1. Полученная квазинормальная форма имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 - 2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \alpha u\frac{\partial u}{\partial r} + a_1 u + f_2 u^2, \quad u(\tau, r+1) = u(\tau, r). \tag{20}$$

Вывод о локальной динамике в этом случае сформулирован в следующей теореме.

Теорема 9. *Пусть $a_1 > 0$. Тогда нулевое решение уравнения* (17) *неустойчиво, и у него существует асимптотически устойчивое состояние равновесия $x_*(t, \varepsilon)$, имеющее следующую асимптотику:*

$$x_*(t, \varepsilon) = -\varepsilon^2\frac{a_1}{f_2} + o(\varepsilon^4).$$

Если $a_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (17) *асимптотически устойчиво, а $x_*(t,\varepsilon)$ – неустойчиво.*

Далее рассматривается критический случай $\sigma > \sqrt{2}$, $a = -1 - \varepsilon^2 a_1$, $a_1 \in \mathbb{R}$. В исходном уравнении выполняется асимптотическая замена

$$x = \varepsilon u(\tau, r) + \varepsilon^2 u_2(\tau, r) + \varepsilon^3 u_3(\tau, r) + o(\varepsilon^3), \tag{21}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = (1 - \sigma\varepsilon + \sigma^2\varepsilon^2)t$, $u(\tau, r+1) = -u(\tau, r)$, а функции $u_{2,3}(\tau, r)$ периодичны по r с периодом 1. В этом случае квазинормальная форма имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 - 2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\alpha^2}{2}u^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \left(\beta + \frac{\alpha f_2}{2}\right)u^2\frac{\partial u}{\partial r} + a_1 u - \left(f_2^2 + f_3\right)u^3, \\ u(\tau, r+1) = -u(\tau, r),\end{gathered} \tag{22}$$

и имеет место следующая теорема.

Теорема 10. *Пусть краевая задача* (22) *имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение* (17) *имеет асимптотическое по невязке решение $x_*(t,\varepsilon)$ с точностью до $O(\varepsilon^4)$ равномерно по всем $t \geqslant 0$ вида*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon u_* + \varepsilon^2\left[\frac{f_2}{2}u^2 - \frac{\alpha}{2}u\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \frac{\varepsilon^3}{2}\left[\alpha\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \alpha\sigma u\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\alpha^2}{2}u\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right].$$

Для изучения локальной динамики в критическом случае $0 < \sigma < \sqrt{2}$, в уравнении (17) полагается $a = a_0(1 + \varepsilon^2 a_1)$, где $a_0 = \pm\sigma\sqrt{1 - \sigma^2/4}$ и производится асимптотическая замена вида

$$x = \varepsilon^2\left[u(\tau, r)e^{is} + \bar{u}(\tau, r)e^{-is}\right] + \varepsilon^3 u_2(\tau, r, s) + \varepsilon^4 u_3(\tau, r, s) + o(\varepsilon^4), \tag{23}$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$,

$$\begin{aligned} r &= \left(1 - \varepsilon\frac{2}{\sigma} + \varepsilon^2\frac{4}{\sigma^2} + 2d_2\varepsilon^2(\theta + \Omega)\right)t, \\ s &= \left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta + \Omega + \varepsilon\frac{2}{\sigma}(\theta + \Omega) - \varepsilon^2 d_2(\theta + \Omega)^2\right)t, \end{aligned} \tag{24}$$

функция $u(\tau, r)$ периодична по второму аргументу с периодом 1, а функции $u_{2,3}(\tau, r, s)$ периодичны по r с периодом 1 и по s с периодом 2π.

Квазинормальная форма в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \tau} = (d_1 + id_2)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2(\theta + \Omega)d_1 i\frac{\partial u}{\partial r} + a_1 u - d_1(\theta + \Omega)^2 u + \\ + \left[\frac{\alpha\omega_0 i}{e^{-i\Omega}}\left\{\ell_1\left(e^{i\Omega} - 2e^{-2i\Omega}\right) - \ell_2 e^{-i\Omega}\right\} - \frac{\alpha^2\omega_0^2}{2e^{-i\Omega}}\left(2e^{-i\Omega} + e^{i\Omega}\right)\right]u|u|^2,\end{aligned} \tag{25}$$

$$u(\tau, r+1) = u(\tau, r). \tag{26}$$

Здесь $d_1 = a_0^{-2}\left(2-\sigma^2\right)$, $d_2 = a_0^{-2}\sigma\sqrt{1-\sigma^2/2}$. Коэффициенты уравнения (17) зависят от $\theta = \theta(\varepsilon)$. В силу определения функции $\theta(\varepsilon)$ для каждого значения $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ найдется такая последовательность ε_n, что $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ и $\theta(\varepsilon_n) = \theta_0$.

Теорема 11. *Пусть квазинормальная форма* (25), (26) *при некотором* $\theta = \theta_0$ *имеет периодическое по* τ *решение* $u_*(\tau, r)$. *Пусть* ε_n *– такая стремящаяся к нулю последовательность, что* $\theta(\varepsilon_n) = \theta_0$. *Тогда существуют такие периодические по* r *и по* s *функции* $u_2(\tau, r, s)$ *и* $u_3(\tau, r, s)$, *что уравнение* (17) *при* $\varepsilon = \varepsilon_n$ *имеет асимптотическое по невязке решение* $x_*(t, \varepsilon)$ *с точностью до* $O(\varepsilon^5)$ *равномерно по* $t \in [0, +\infty)$ *вида*

$$x_*(t,\varepsilon) = \varepsilon^2\left[u(\varepsilon^2 t, r)e^{is} + \bar{u}(\varepsilon^2 t, r)e^{-is}\right] + \varepsilon^3 u_2(\varepsilon^2 t, r, s) + \varepsilon^4 u_3(\varepsilon^2 t, r, s),$$

где r *и* s *определяются формулой* (24).

Во **второй главе** рассматривается логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от состояния:

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t)\left[1 - N(t - h(\lambda) - f(N(t-L)))\right], \tag{27}$$

где λ – положительный параметр, число $L \geqslant 0$, а функции h и f обладают особыми свойствами, о которых будет сказано далее. Основной задачей является доказательство существования у этого уравнения нелокального релаксационного решения при больших значениях параметра λ, а также построение его асимптотического приближения по параметру λ. Для решения задачи используется метод большого параметра.

Далее везде предполагается, что параметр λ достаточно большой ($\lambda \gg 1$). Для удобства изложения вводится число δ_L, определяемое формулой:

$$\delta_L = \begin{cases} 1, & L = 0, \\ L, & L > 0. \end{cases} \tag{28}$$

Предполагается, что функция $h(\lambda)$ из (27) положительна, у нее сущетсвует предел: $\lim\limits_{\lambda\to\infty} h(\lambda) = \ell$, где $0 \leqslant \ell < \delta_L$, и если $\ell = 0$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda h(\lambda)/\ln\lambda = \infty$. Функция $f(N)$ положительна и достаточно гладкая при $N \geqslant 0$, монотонно убывает при $N > 0$ и стремится к нулю на бесконечности: $\lim\limits_{N\to\infty} f(N) = 0$. Также предполагается выполненым условие нормировки: $f(1) = \delta_L - \ell$.

Примером такой функции может служить функция

$$f(N) = \frac{2(\delta_L - \ell)}{1 + N^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Чтобы выбрать фазовое простанство, вводится обозначение $\tau_0 = f(0)+\sup\limits_{\lambda\gg 1} h(\lambda)$. Т.к. $\tau_0 > \delta_L$, то пространство $C([-\tau_0, 0])$ можно выбрать в качестве фазового для уравнения (27). Далее, произвольно фиксируется число $a \in (0,1)$ и класс начальных условий определяется следующим образом:

$$\mathbb{S} = \{\varphi(t) \in C([-\tau_0, 0]), \quad e^{\lambda t} \leqslant \varphi(t) \leqslant e^{a\lambda t}, \quad \varphi(0) = 1\}.$$

Это множество является замкнутым, выпуклым и ограниченным. Стоит отметить, что τ_0 зависит от L, а значит и фазовое пространство, и класс начальных условий $\mathbb{S}$ различаются при разных L.

Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть зафиксировано $L \geqslant 0$. Пусть функции $h(\lambda)$ и $f(N)$ из (27) удовлетворяют наложенным на них ограничениям. Тогда при $\lambda \gg 1$ уравнение (27) имеет нелокальное релаксационное периодическое решение $N(t,\lambda)$ с начальным условием из класса $\mathbb{S}$.*

Пусть $N(t,\lambda)$ – то периодическое решение, существование которого гарантирует теорема 12. Пусть $T(\lambda)$ – период этого решения, а $M(\lambda)$ и $m(\lambda)$ – его наибольшее и наименьшее значения соответственно:

$$M(\lambda) = \max_{0\leqslant t\leqslant T(\lambda)} N(t,\lambda), \quad m(\lambda) = \min_{0\leqslant t\leqslant T(\lambda)} N(t,\lambda).$$

Пусть $t_M(\lambda)$ – точка, в которой решение впервые достигает максимума: $N(t_M(\lambda),\lambda) = M(\lambda)$, а $t_0(\lambda)$ – время, за которое решение убывает от своего максимального значения до значения $N \equiv 1$.

Далее приводятся результаты об асимптотических свойствах решения $N(t,\lambda)$ для ситуаций $L = 0$ и $L > 0$.

Теорема 13. *Пусть $L = 0$ и выполнены условия теоремы 12. Тогда, во-первых, справедливы предельные равенства:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} t_M(\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} h(\lambda) = \ell. \tag{29}$$

Во-вторых, для всякого $0 < \delta < 1$ найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda > \lambda_0$ справедливо неравенство

$$t_0(\lambda) > 1 - \ell - \delta. \tag{30}$$

В-третьих, при $\lambda \gg 1$ выполнены неравенства:

$$M(\lambda) \geqslant d\exp(\lambda h(\lambda)), \tag{31}$$

$$m(\lambda) \leqslant \exp\left(\lambda\left[-\frac{d}{\lambda e}\exp(\lambda h(\lambda)) + 1 + \tau_0\right]\right), \tag{32}$$

$$T(\lambda) \geqslant \frac{d}{\lambda e}\exp(\lambda h(\lambda)) - 1 - \tau_0. \tag{33}$$

Здесь $d = \exp(-1/a)$.

Теорема 14. *Пусть $L > 0$ и выполнены условия теоремы 12. Тогда, во-первых, справедливо асимптотическое равенство*

$$t_M(\lambda) = L + O(h(\lambda) - \ell), \quad \lambda \to \infty. \tag{34}$$

Во-вторых, величина $t_0(\lambda)$ имеет предел при $\lambda \to \infty$, причем

$$\lim_{\lambda \to \infty} t_0(\lambda) = 0. \tag{35}$$

В-третьих, справедливы неравенства:

$$T(\lambda) \geqslant \frac{\exp\left(a\lambda h(\lambda)/2\right)}{a\lambda} - t_M(\lambda) - \tau_0. \tag{36}$$

$$\exp\left(\frac{a\lambda t_M(\lambda)}{1 + p + L - \min\{L, 1\}}\right) < M(\lambda) < \exp\left(\lambda t_M(\lambda)\right) \quad (\forall\ 0 < p \ll 1), \tag{37}$$

$$m(\lambda) \leqslant \exp\left(\lambda\left[-\frac{\exp\left(a\lambda h(\lambda)/2\right)}{a\lambda} + t_M(\lambda) + \tau_0\right]\right), \tag{38}$$

Эти теоремы раскрывают зависимость асимптотических свойств решения $N(t, \lambda)$ от функции $h(\lambda)$. Также они позволяют увидеть различия в асимптотических свойствах периодического решения для случаев $L = 0$ и $L > 0$.

Заключение

В работе были рассмотрены уравнения с запаздыванием, зависящим от состояния, исследована их локальная динамика, а также рассмотрены аспекты нелокальной динамики.

1. Для уравнения первого порядка с запаздыванием, зависящим от состояния, были изучены способы потери устойчивости нулевым положением равновесия. Установлены условия возникновения транскритической бифуркации и суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа. В обоих случаях получены асимптотики решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркаций.

2. Подробно изучена локальная динамика логистического уравнения с переменными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния. В плоскости бифуркационных параметров выявлены области асимптотической устойчивости и неустойчивости нетривиального положения равновесия, а также определены все критические случаи. С помощью метода нормальных форм исследована локальная динамика уравнения в случаях, близких к критическим. Установлены условия возникновения в этом уравнении как бифуркации Андронова-Хопфа, так и транскритической и вилообразной бифуркаций. Построены асимптотические приближения решений, приобретающих устойчивость в результате возникающих бифуркаций.

3. Исследован вопрос о локальной динамике уравнения второго порядка с большим запаздыванием, зависящим от состояния, в окрестности нулевого положения равновесия. На основе известных результатов о расположении корней характеристического уравнения выделены и рассмотрены три критических случая. С помощью метода квазинормальных форм построены асимптотические по невязке решения исходного уравнения в случаях, близких к критическим, а также в одном из случаев доказано возникновение бифуркации обмена устойчивостью и построена асимптотика состояния равновесия, приобретающего устойчивость.

4. Проведено исследование существования нелокальных периодических релаксационных решений для логистического уравнения с постоянными коэффициентами и запаздыванием, зависящим от состояния. Доказано, что при достаточно больших значениях мальтузианского коэффициента такие решения существуют. Построены асимптотические оценки их периодов и экстремальных значений по большому параметру. Также проведено сравнение асимптотических свойств основных характеристик найденных релаксационных решений с аналогичными характеристиками для решений классического уравнения Хатчинсона.

Основные публикации по теме диссертации

1. Golubenets, V. O. Local Bifurcations Analysis of a State-Dependent Delay Differential Equation / V. O. Golubenets // Automatic Control and Computer Sciences. — 2016. — Vol. 50, no. 7. — P. 617–624.

2. Голубенец, В. О. Локальная динамика обобщенного логистического уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции / В. О. Голубенец // Вестник национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". — 2018. — Т. 7, № 3. — С. 232–239.

3. Голубенец, В. О. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с непостоянным запаздыванием / В. О. Голубенец // Математические заметки. — 2020. — Т. 107, № 6. — С. 833–847.

4. Голубенец, В. О. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с запаздыванием, зависящим от состояния в прошлом / В. О. Голубенец // Теоретическая и математическая физика. — 2021. — Т. 207, № 3. — С. 389–402.

5. Голубенец, В. О. Локальная динамика сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с запаздыванием, зависящим от состояния / В. О. Голубенец, И. С. Кащенко // Математические заметки. — 2022. — Т. 111, № 5. — С. 795–799.