

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. П.Г. ДЕМИДОВА

На правах рукописи

Голубенец Вячеслав Олегович

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ,
ЗАВИСЯЩИМ ОТ СОСТОЯНИЯ**

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: Кащенко Илья Сергеевич,
доктор физико-математических наук, доцент

Ярославль 2022

Оглавление

Введение	2
1 Локальная динамика уравнений с запаздыванием, зависящим от состояния	21
Введение	21
1.1 Уравнение первого порядка с конечномерными критическими случаями	24
1.1.1 Постановка задачи	24
1.1.2 Линейный анализ	24
1.1.3 Транскритическая бифуркация	25
1.1.4 Бифуркация Андронова – Хопфа	26
1.2 Логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от состояния	29
1.2.1 Постановка задачи	29
1.2.2 Линейный анализ	30
1.2.3 Основные результаты	32
1.2.4 Транскритическая и вилообразная бифуркации	33
1.2.5 Бифуркация Андронова-Хопфа	34
1.2.6 Примеры	38
1.3 Уравнение второго порядка с бесконечномерными критическими случаями . .	40
1.3.1 Постановка задачи	40
1.3.2 Линейный анализ	41
1.3.3 Случай $\sigma > \sqrt{2}$	42
1.3.4 Случай $0 < \sigma < \sqrt{2}$	43
Выводы	46
2 Релаксационные колебания в логистическом уравнении с запаздыванием, зависящим от состояния	47
Введение	47
2.1 Случай, когда запаздывание зависит от состояния в настоящем времени . . .	49
2.1.1 Постановка задачи	49
2.1.2 Основные результаты	49
2.1.3 Доказательство существования периодического решения	50
2.1.4 Свойства периодического решения	59
2.2 Случай, когда запаздывание зависит от состояния в прошлом времени	62
2.2.1 Постановка задачи	62

2.2.2	Основные результаты	63
2.2.3	Характеристики периодического решения	65
2.2.4	Доказательство свойств периодического решения	67
Выводы	75
Заключение		76
Литература		77

Введение

Актуальность темы исследования

Объектами исследований в настоящей работе являются дифференциальные уравнения с запаздыванием, зависящим от состояния. Главным отличием уравнений с запаздыванием от ОДУ является то, что скорость изменения их решений определяется не только состоянием системы в текущий момент времени, но и ее состояниями в моменты времени, предшествующие текущему. Такие уравнения хорошо описывают многие процессы с последствием, и довольно давно используются в качестве их математических моделей [21, 33, 42], например, в биологии [6], медицине [26], нейродинамике [15], радиофизике и электронике [32]. Однако активное развитие теории уравнений с запаздыванием началось лишь в XX веке.

Во многих моделях запаздывание не является постоянной величиной, а зависит от состояния системы. Большое количество приложений стимулирует развитие теории уравнений с запаздыванием, зависящим от состояния. Они выступают математическими моделями таких процессов, как горение топлива в жидкостных ракетных двигателях [1, 19, 30, 47, 48], токарная [40] и фрезерная [27] обработка металлических заготовок, изменение рыночных цен на товары по закону спроса и предложения [44, 45], и другие. Например, в работе [44] рассматривается модель, в которой функция предложения товара зависит от цены на этот товар в прошлый момент времени, причем запаздывание является переменной величиной, зависящей от цены в текущий момент времени. Это возможно благодаря одному важному практическому допущению, принятому при составлении этой модели. А именно, производители некоторых товаров могут хранить на складах партии произведенных но еще не реализованных товаров до тех пор, пока не сочтут текущую рыночную цену выгодной для продажи. Поэтому с ростом рыночной цены время хранения произведенных партий снижается. И наоборот, при стремлении рыночной цены к величине затрат на производство время хранения возрастает. Если же рыночная цена становится существенно ниже затрат на производство, то это тоже может повлечь ускорение поставок произведенного товара на реализацию, поскольку инвесторы заинтересованы в сохранении хотя бы части средств, вложенных в производство. Таким образом, объем текущего предложения зависит от рыночной цены в прошлом, причем на величину запаздывания влияет текущая рыночная цена.

В настоящей работе рассмотрены уравнения первого и второго порядков с одним запаздыванием, зависящим от состояния. Исследована их локальная динамика, построены асимптотические приближения решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркций, а также вычислены точные значения коэффициентов нормальных и квазинормальных форм. Вопросы существования и устойчивости решений таких уравнений рассматривались, напри-

мер, в работах [23, 25]. Основное внимание в данной работе уделено изучению динамики уравнения, которое является обобщением уравнения Хатчинсона (т.н. логистического уравнения с запаздыванием) на случай запаздывания, зависящего от искомой функции. Для него также исследуется вопрос о существовании нелокального периодического решения. Классическое уравнение Хатчинсона было впервые введено в работе [39], его локальная динамика подробно исследована в [43], а нелокальные релаксационные колебания (в том числе его модификаций) изучались в [13, 17, 18].

Цели и задачи исследования

Цель работы заключается в исследовании динамических свойств решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, зависящим от искомой функции. Во-первых, рассматривается скалярное нелинейное уравнение первого порядка

$$\dot{u}(t) + u(t) = F(u(t - T(u(t)))), \quad u \in \mathbb{R}.$$

Здесь функции F и T достаточно гладкие в окрестности точки $u = 0$, причем $F(0) = 0$, а $T(u) > 0$ при всех значениях аргумента. Также функция T ограничена некоторой константой $T_1 > 0$. Требуется изучить локальную динамику уравнения в окрестности его нулевого положения равновесия в фазовом пространстве непрерывных на отрезке $[-T_1, 0]$ функций.

Во-вторых, рассматривается логистическое уравнение с переменными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния:

$$\dot{N}(t) = f(N(t)) [1 - g(N(t))N(t - T(N(t)))] N(t).$$

Предполагается, что при некотором $\varphi > 0$ функции f , g и T удовлетворяют следующим условиям: все они определены и достаточно гладкие в окрестности точки $N = \varphi$; $T(\varphi) = 1$; $f(\varphi) > 0$ и $\varphi g(\varphi) = 1$. Последнее из этих предположений означает, что $N \equiv \varphi$ является состоянием равновесия этого уравнения. Ставится задача исследовать локальную динамику этого уравнения в окрестности положения равновесия $N \equiv \varphi$ в фазовом пространстве непрерывных на отрезке $[-T_1, 0]$ функций (где $T_1 > 0$ – верхняя граница функции $T(N)$).

В-третьих, рассматривается нелинейное уравнение второго порядка

$$\ddot{x}(t) + \sigma \dot{x}(t) + x(t) = ax(t - T\varphi(x(t))) + f(x(t - T\varphi(x(t)))), \quad x \in \mathbb{R},$$

где функция $T\varphi(x)$ играет роль большого запаздывания: $T \gg 1$, а $\varphi(x)$ положительна, ограничена сверху, и является достаточно гладкой в нуле. В предположении существования нулевого положения равновесия у этого уравнения изучается его локальная динамика в малой (но не зависящей от T) окрестности этого состояния равновесия.

В-четвертых, рассматривается логистическое уравнение с постоянными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния:

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t) [1 - N(t - T(N(t - L), \lambda))],$$

и доказываемое существование у него нелокального релаксационного периодического реше-

ния при $\lambda \gg 1$ и $L \geq 0$, а также описываются его асимптотические характеристики.

Научная новизна результатов

Новизна полученных результатов состоит в следующем.

1. Для уравнения первого порядка с запаздыванием, зависящим от искомой функции, выполнен бифуркационный анализ в окрестности нулевого положения равновесия. Выведены условия реализации бифуркации обмена устойчивостью и суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа. Во всех случаях построена асимптотика решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркаций.
2. Аналогичный анализ в окрестности положительного состояния равновесия выполнен для обобщенного логистического уравнения с переменными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния. Исследованы сценарии потери им устойчивости: транскритическая и виллообразная бифуркации, а также бифуркация Андронова – Хопфа. Новыми и важными являются также выводы о бифуркационных свойствах частных случаев этого уравнения. А именно, когда запаздывание зависит от состояния, уравнение может обладать бифуркационными свойствами даже при линейной правой части.
3. Для уравнения второго порядка с большим запаздыванием, зависящим от состояния, изучены критические случаи бесконечной размерности в задаче об устойчивости нулевого положения равновесия. В случаях, близких к критическим, построены специальные нелинейные уравнения, решения которых определяют главную часть асимптотического приближения решений исходной задачи.
4. Для логистического уравнения с постоянными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния, доказано существование нелокального релаксационного периодического решения при достаточно больших значениях мальтузианского коэффициента. Получены асимптотические оценки основных его характеристик, таких как максимальное и минимальное значения, а также период. Показано, что это решение имеет один асимптотически большой всплеск на асимптотически большом периоде, а минимальное значение сверхэкспоненциально мало.

Теоретическая и практическая значимость проведенных исследований

Главная значимость работы с теоретической точки зрения заключается в расширении набора методов исследования локальной и нелокальной динамики уравнений с запаздыванием, зависящим от искомой функции. А именно, в работе показано, что методы нормальных и квазинормальных форм, а также метод большого параметра применимы для анализа динамики уравнений из этого класса. Эти методы являются асимптотическими и позволяют строить асимптотические приближения решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркаций. В применении к исследованным уравнениям эти методы позволили обнаружить классические бифуркационные эффекты, такие как суперкритическая бифуркация Андроно-

ва – Хопфа и релаксационный характер колебаний при больших значениях бифуркационного параметра.

Работа также ценна для приложений, поскольку для математического моделирования процессов с последствием часто используются уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции.

Методология и методы исследования

Основными методами, использованными при решении поставленных задач, являются метод нормальных форм, метод квазирормальных форм и метод большого параметра. Все они являются асимптотическими.

Метод нормальных форм позволяет в ситуациях, близких к критическим, свести исходную систему уравнений с малым параметром к системе без такового, называемой нормальной формой исходной системы. Также этот метод позволяет получить асимптотическое приближение решений исходной системы по малому параметру. При этом, главной частью этой асимптотики является решение нормальной формы. При использовании метода требуется выполнить несколько шагов:

- изучить корни характеристических квазиполиномов для соответствующих линеаризованных уравнений, выделить критические случаи;
- для каждого критического случая построить асимптотические приближения решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркций.

Метод квазинормальных форм используется для изучения локальной динамики сингулярно возмущенных уравнений в критических случаях бесконечной размерности. Он использует формализм метода нормальных форм и так же позволяет построить асимптотические приближения устойчивых решений. Главными частями асимптотики являются решения так называемых квазинормальных форм.

Метод большого параметра опирается на асимптотическое интегрирование по шагам и построение асимптотики оператора сдвига по траектории (оператора Пуанкаре). Суть метода заключается в следующем. В фазовом пространстве исходного уравнения специальным образом выбирается множество \mathbb{S} . Далее с помощью интегрирования исходного уравнения по шагам изучается асимптотика всех его решений с начальными условиями из \mathbb{S} и показывается, что через некоторое время они снова попадают в \mathbb{S} . Таким образом определяется оператор последования Π , отображающий множество \mathbb{S} в себя. Динамика отображения $\Pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ определяет структуру решений исходного уравнения с начальными условиями из множества \mathbb{S} . Например, если множество \mathbb{S} является замкнутым, ограниченным и выпуклым, то у этого оператора существует неподвижная точка, которой соответствует периодическое решение исходного уравнения.

Положения, выносимые на защиту

1. Сформулированы и доказаны условия возникновения бифуркации обмена устойчивостью и суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности нулевого поло-

жения равновесия уравнения первого порядка с запаздыванием, зависящим от состояния.

2. Выполнен подробный бифуркационный анализ в окрестности положительного состояния равновесия обобщенного логистического уравнения с переменными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния. Сформулированы и доказаны условия возникновения транскритической и вилообразной бифуркаций, а также бифуркации Андронова-Хопфа в окрестности положительного состояния равновесия. На частных случаях этого уравнения продемонстрировано влияние непостоянного запаздывания на формирование нелинейной динамики.
3. Исследован вопрос о построении асимптотики решений в окрестности нуля в критических случаях для уравнения второго порядка с большим запаздыванием, зависящим от состояния.
4. Доказано существование нелокального релаксационного периодического решения в логистическом уравнении с постоянными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния, и построена асимптотика его свойств.

Апробация результатов исследования

Результаты проведенных исследований были представлены на следующих научных конференциях:

1. International Student Conference «Science and Progress – 2014», Санкт-Петербург (ноябрь, 2014).
2. III Международная молодежная научно-практическая конференция «Путь в науку», Ярославль (апрель, 2015).
3. International Conference-School «Infinite-dimensional dynamics, dissipative systems, and attractors», Нижний Новгород (июль, 2015).
4. International Student Conference «Science and Progress – 2015», Санкт-Петербург (ноябрь, 2015).
5. Международная конференция «Нелинейные методы в физике и механике», посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферми-Паста-Улама, Ярославль (октябрь, 2015).
6. XXIII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва (апрель, 2016).
7. 13th Workshop on Numerical Methods for Problems with Layer Phenomena, Москва (апрель, 2016).
8. IV Международная молодежная научно-практическая конференция «Путь в науку», Ярославль (апрель, 2016).

9. Международная конференция Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVII», Воронеж (май, 2016)
10. Второй Всероссийский научный форум «Наука будущего – наука молодых», Казань (сентябрь, 2016)
11. International student conference “Science and Progress” (октябрь, 2016).
12. V Международная молодежная научно-практическая конференция «Путь в науку», Ярославль (апрель, 2017).
13. XII Международная школа-конференция “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2019), Саратов (октябрь, 2019).
14. Динамика. 2019. Ярославль (октябрь, 2019).
15. Международная школа молодых ученых «Моделирование и оптимизация сложных систем», online (июль, 2020).
16. Second International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics, Ярославль (октябрь, 2020).
17. Международная конференция «Математические идеи П.Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П.Л. Чебышёва, online (май, 2021).
18. Third International Conference on Integrable Systems & Nonlinear Dynamics, Ярославль (октябрь, 2021).
19. International Conference-School «Shilnikov Workshop 2021», online (декабрь, 2021).

Публикации

Результаты исследований, представленных в работе, опубликованы в 24 работах. Из них 5 статей в журналах из перечня ВАК:

1. Golubenets, V. O. Local Bifurcations Analysis of a State-Dependent Delay Differential Equation / V. O. Golubenets // Automatic Control and Computer Sciences. — 2016. — Vol. 50, no. 7. — P. 617–624.
2. Голубенец, В. О. Локальная динамика обобщенного логистического уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции / В. О. Голубенец // Вестник национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". — 2018. — Т. 7, № 3. — С. 232–239.
3. Голубенец, В. О. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с непостоянным запаздыванием / В. О. Голубенец // Математические заметки. — 2020. — Т. 107, № 6. — С. 833–847.
4. Голубенец, В. О. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с запаздыванием, зависящим от состояния в прошлом / В. О. Голубенец // Теоретическая и математическая физика. — 2021. — Т. 207, № 3. — С. 389–402.

5. Голубенец, В. О. Локальная динамика сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с запаздыванием, зависящим от состояния / В. О. Голубенец, И. С. Кащенко // Математические заметки. — 2022. — Т. 111, № 5. — С. 795–799.

и 19 тезисов докладов конференций:

1. Golubenets, V. O. Andronov – Hopf bifurcation in equation with inconstant delay / V. O. Golubenets // International student conference “Science and Progress – 2014”: conference abstracts. – SPb.: SOLO. — 2014. — P. 41.
2. Голубенец, В. О. Бифуркация Андронова–Хопфа в уравнении Хатчинсона с запаздыванием, зависящим от искомой функции / В. О. Голубенец // Путь в науку: Материалы III Международной молодежной научно-практической конференции. – Ярославль: ЯрГУ. — 2015. — С. 30–33.
3. Golubenets, V. O. Dynamical properties of logistic equation with state-dependent delay / V. O. Golubenets // International Conference-School “Infinite-dimensional dynamics, dissipative systems, and attractors”: book of abstracts. – Nizhni Novgorod. — 2015. — P. 4–5.
4. Golubenets, V. O. Stable periodic solutions of generalized logistic equation with state-dependent delay / V. O. Golubenets // International student conference “Science and Progress – 2015”: conference abstracts. – SPb.: SOLO. — 2015. — P. 52.
5. Голубенец, В. О. Исследование динамики логистического уравнения с переменным запаздыванием / В. О. Голубенец // Нелинейные методы в физике и механике: Международная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Мартина Крускала, 60-летию публикации результатов вычислительного эксперимента по проблеме Ферми-Паста-Улама: тезисы конференции. – Ярославль: ЯрГУ. — 2015. — С. 26–28.
6. Голубенец, В. О. Устойчивые периодические решения уравнения Хатчинсона с непостоянным запаздыванием / В. О. Голубенец // Ломоносов: материалы международного молодежного научного форума. – Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова. — 2016.
7. Golubenets, V. O. Bifurcation analysis of logistic equation with state-dependent delay / V. O. Golubenets // Numerical methods for problems with Layer phenomena: Abstracts of the 13th annual workshop. Moscow: Lomonosov Moscow State University. — 2016. — P. 63–64.
8. Голубенец, В. О. Релаксационные колебания в уравнении с запаздыванием, зависящим от неизвестной функции / В. О. Голубенец // Путь в науку. Математика: материалы IV международной молодежной научно-практической конференции. – Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова. — 2016. — С. 13–15.
9. Голубенец, В. О. Бифуркация нетривиального состояния равновесия логистического уравнения с переменным запаздыванием / В. О. Голубенец // Материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXVII». – Воронеж: Издательский дом ВГУ. — 2016. — С. 75–77.

10. Голубенец, В. О. Нелинейная динамика уравнений с запаздыванием, зависящим от искомой функции / В. О. Голубенец // Сборник тезисов участников форума «Наука будущего – наука молодых». – Москва: Инконсалт К. – 2016. – С. 316–318.
11. Golubenets, V. O. Nonlocal analysis of equation with state-dependent delay / V. O. Golubenets // International student conference “Science and Progress”: conference abstracts. – SPb.: SOLO. – 2016. – P. 118.
12. Голубенец, В. О. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с непостоянным запаздыванием / В. О. Голубенец // Путь в науку. Математика: материалы V международной молодежной научно-практической конференции. – Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова. – 2017. – С. 19–21.
13. Голубенец, В. О. Релаксационные решения логистического уравнения с запаздыванием, зависящим от состояния / В. О. Голубенец // Материалы XII Международной школы-конференции “Хаотические автоколебания и образование структур” (ХАОС-2019). – Саратов: ООО “Издательский центр “Наука”. – 2019. – С. 110–111.
14. Голубенец, В. О. Релаксационные решения уравнения Хатчинсона с непостоянным запаздыванием / В. О. Голубенец // Динамика. 2019. Ярославль: тезисы докладов конференции. – Ярославль: ЯрГУ им. П.Г. Демидова. – 2019. – С. 30–31.
15. Golubenets, V. O. Periodic relaxation solutions of logistic equation with state-dependent delay / V. O. Golubenets // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. Суздаль, 3-8 июля 2020 – Владимир: ООО «Аркаим». – 2020. – С. 205.
16. Golubenets, V. O. Periodic relaxation solutions of certain generalization of logistic equation with state-dependent delay / V. O. Golubenets // Second International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics: Book of Abstracts. Yaroslavl: Filigran. – 2020. – P. 35.
17. Golubenets, V. O. On nonlocal periodic solutions in a logistic equation with state-dependent delay / V. O. Golubenets // Международная конференция «Математические идеи П.Л. Чебышёва и их приложения к современным проблемам естествознания», приуроченная к 200-летию со дня рождения великого русского математика, академика П.Л. Чебышёва: Материалы конференции. Под ред. акад. В.Б. Бетелина. – Калуга: Калужский печатный двор. – 2021. – С. 108.
18. Golubenets, V. O. Local dynamics of singularly perturbed second order equation with state-dependent delay / V. O. Golubenets // Third International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics, and school "Integrable and Nonlinear Days": Book of Abstracts. Yaroslavl: YarSU. – 2021. – P. 31–32.
19. Golubenets, V. O. Relaxation solutions in a logistic equation with state-in-the-past-dependent delay / V. O. Golubenets // International Conference-School «Shilnikov Workshop 2021»: Book of Abstracts. Nizhny Novgorod: Lobachevsky State University. – 2021. – P. 13.

Все публикации, кроме одной, выполнены без соавторов. В статье, выполненной совместно с научным руководителем, соавтором были получены результаты в одном специальном частном случае.

Основное содержание работы

В работе рассматриваются несколько уравнений с запаздыванием, зависящим от состояния. Это, во-первых, скалярное уравнение первого порядка вида

$$\dot{u}(t) + u(t) = F(u(t - T(u(t)))),$$

во-вторых, обобщенное логистическое уравнение

$$\dot{N}(t) = f(N(t)) [1 - g(N(t))N(t - T(N(t)))] N(t),$$

и в-третьих, уравнение второго порядка с большим запаздыванием

$$\ddot{x}(t) + \sigma \dot{x}(t) + x(t) = ax(t - \varphi(x(t))) + f(x(t - T\varphi(x(t)))).$$

В первой главе изучается их локальная динамика, а во второй – рассматривается вопрос о существовании нелокальных релаксационных периодических решений в логистическом уравнении с постоянными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния.

В параграфе 1.1 рассматривается уравнение

$$\dot{u}(t) + u(t) = F(u(t - T(u(t)))), \quad u \in R. \quad (1)$$

Функции F и T достаточно гладкие в окрестности точки $u = 0$, причем $F(0) = 0$, а $T(u) > 0$ при всех значениях аргумента. Тейлоровские разложения для этих функций в окрестности нуля выглядят следующим образом:

$$F(u) = au + f_2u^2 + f_3u^3 + \dots, \quad T(u) = T_0 - \alpha u - \beta u^2 + \dots, \quad T_0 > 0.$$

Условие $T_0 > 0$ выполняется в силу требования положительности $T(u)$ во всей области определения. Предполагается, что для решений уравнения (1) выполняется $|u(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$ для некоторого положительного M . Таким образом, функция $T(u)$ ограничена некоторой константой $T_1 > 0$. В качестве фазового пространства уравнения (1) выбирается пространство функций, непрерывных на отрезке $[-T_1, 0]$ и абсолютная величина которых ограничена константой M .

При сформулированных условиях на функции F и T ставится задача исследовать поведение решений уравнения (1) в окрестности его нулевого положения равновесия.

Для ответа на вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия уравнения (1) необходимо линеаризовать это уравнение и изучить корни характеристического квазиполинома, который в данном случае имеет вид:

$$\lambda + 1 = ae^{-\lambda T_0}. \quad (2)$$

Свойства его корней хорошо известны (см., например, [8]) и позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 1. *Нулевое решение уравнения (1) асимптотически устойчиво при $a \in (a_0, 1)$ и неустойчиво при $a < a_0$ или $a > 1$. Здесь $a_0 = -\sqrt{1 + \omega_0^2}$, а ω_0 – это наименьший положительный корень уравнения $\omega_0 = -tg(\omega_0 T_0)$.*

Для изучения динамики уравнения (1) в случаях, близких к критическим, используется метод нормальных форм, а также известный факт о том, что при $a = 1$ характеристический квазиполином (2) имеет на мнимой оси единственный корень $\lambda = 0$, а при $a = a_0$ – пару комплексно сопряженных чисто мнимых корней $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$.

Сначала изучается ситуация, когда a близко к единице. В уравнении (1) вводится малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ с помощью подстановки $a = 1 + \varepsilon$, и согласно методу нормальных форм делается асимптотическая замена

$$u(t) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + o(\varepsilon^2), \quad (3)$$

где $\tau = \varepsilon t$. В результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра получается нормальная форма для (1) в окрестности нуля при условии близости параметра a к 1:

$$(1 + T_0)z' = z + f_2 z^2. \quad (4)$$

Теорема 2. *При всех $T_0 > 0$, α , β , $f_2 \neq 0$, f_3 и при $0 < \varepsilon \ll 1$ уравнение (1) имеет нетривиальное состояние равновесия u_1 с асимптотикой*

$$u_1 = -\frac{\varepsilon}{f_2} + O(\varepsilon^2),$$

которое является локально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Других устойчивых решений в этой окрестности нет.

Далее изучается случай, когда a находится в окрестности a_0 . Для этого в (1) вводится малый параметр $0 < \varepsilon \ll 1$ с помощью подстановки $a = a_0(1 + \varepsilon)$ и делается следующая асимптотическая замена:

$$u = \sqrt{\varepsilon} (e^{i\omega_0 t} z(\tau) + e^{-i\omega_0 t} \bar{z}(\tau)) + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (5)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $z(\tau)$ – комплекснозначная функция, а $u_i(t, \tau)$ ($i = 2, 3$) – периодические по t функции с периодом $2\pi/\omega_0$. В результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε , при $\varepsilon^{3/2}$ получается нормальная форма для уравнения (1) в окрестности нуля при условии близости параметра a к a_0 :

$$rz' = \mu z + \nu z|z|^2. \quad (6)$$

Для дальнейшего исследования параметров бифуркации важны знаки чисел $\eta = Re \mu/r$ и $d = Re \nu/r$. Формулы для них приведены в параграфе 1.1. Здесь отметим только, что $\eta > 0$. Если $d < 0$, то все решения нормальной формы (6) стремятся к циклу амплитуды

$\rho_0 = (-\eta/d)^{1/2}$. Если же $d > 0$, то все ее решения (кроме нулевого) по модулю стремятся к бесконечности.

Связь периодического решения системы (6) с периодическим решением уравнения (1), обеспечиваемая формулой (5), позволяет сформулировать основной результат.

Теорема 3. Пусть $0 < \varepsilon \ll 1$, а параметры $T_0 > 0$, α , β , f_2 , f_3 таковы, что $\operatorname{Re} \nu < 0$. Тогда уравнение (1) имеет периодическое решение с равномерной по $t \geq 0$ асимптотикой

$$u(t) = 2\rho_0\sqrt{\varepsilon} \cos([\omega_0 + o(1)]t) + o(\sqrt{\varepsilon}),$$

которое является локально орбитально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Других устойчивых решений в этой окрестности нет.

Если же $d > 0$, то задача исследования динамики уравнения (1) становится нелокальной: в окрестности нулевого состояния равновесия нет устойчивых режимов. Таким образом при выполнении условий теоремы 3 в уравнении (1) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа.

В параграфе 1.2 изучается локальная динамика уравнения следующего вида:

$$\dot{N}(t) = f(N(t)) [1 - g(N(t))N(t - T(N(t)))] N(t). \quad (7)$$

Предполагается, что при некотором $\varphi > 0$ функции f , g и T удовлетворяют следующим условиям: все они определены и достаточно гладкие в окрестности точки $N = \varphi$; $T(\varphi) = 1$; $f(\varphi) > 0$ и $\varphi g(\varphi) = 1$. Последнее из этих предположений означает, что $N \equiv \varphi$ является состоянием равновесия уравнения (7).

Заменой $N(t) = (1 + x(t))\varphi$ уравнение (7) преобразуется к виду

$$\dot{x}(t) = r(x(t)) [1 - \varphi a(x(t)) [1 + x(t - h(x(t)))]] [1 + x(t)]. \quad (8)$$

Здесь $r(x) = f((1 + x)\varphi)$, $a(x) = g((1 + x)\varphi)$, $h(x) = T((1 + x)\varphi)$, а тейлоровские разложения этих функций в окрестности нуля имеют вид:

$$r(x) = \lambda + r_1x + r_2x^2 + \dots, \quad a(x) = \frac{1}{\varphi} + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots, \quad h(x) = 1 - \alpha x - \beta x^2 + \dots, \quad (9)$$

где λ , r_1 , r_2 , a_1 , a_2 , a_3 , α , β – вещественные параметры, а через λ обозначено $r(0)$. $x \equiv 0$ является состоянием равновесия уравнения (8).

Частным случаем уравнения (8) является логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от состояния: $\dot{x} = \lambda(1 + x)x(t - h(x))$. В конце параграфа 1.2 приводятся выводы о его локальной динамике, а также о локальной динамике других частных случаев уравнения (8).

Предполагается, что все рассматриваемые решения уравнения (8) ограничены некоторой положительной константой M при $t > 0$, в силу чего можно гарантировать ограниченность непрерывной функции $h(x)$ в рассматриваемой области изменения x : $0 < h(x) < h_1$, $h_1 > 0$. Фазовым пространством уравнения (8) является пространство непрерывных на отрезке

$[-h_1, 0]$ функций, ограниченных константой M .

Ставится задача исследовать локальную динамику уравнения (8) в малой окрестности нулевого состояния равновесия. Исследование начинается с изучения корней характеристического уравнения для линеаризации в нуле уравнения (8):

$$\mu = -\lambda (A + e^{-\mu}), \quad (A = a_1\varphi). \quad (10)$$

Анализ этих корней приведен в параграфе 1.2. На его основе делается следующий вывод об устойчивости нулевого решения уравнения (8). Введем параметрически заданную кривую:

$$\ell_0 := \left\{ (A, \lambda) \mid A = -\cos \omega, \quad \lambda = \frac{\omega}{\sin \omega}, \quad \omega \in (0, \pi) \right\}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Теорема 4. Пусть $|A| < 1$. Если при этом точка с координатами (A, λ) лежит выше кривой ℓ_0 , то состояние равновесия $x \equiv 0$ уравнения (8) неустойчиво. В случае, когда (A, λ) располагается ниже ℓ_0 , это состояние равновесия локально асимптотически устойчиво.

При $A \geq 1$ состояние равновесия $x \equiv 0$ уравнения (8) локально асимптотически устойчиво, а при $A < -1$ оно неустойчиво.

Случаи $(A, \lambda) \in \{A = -1, \lambda \in (0, 1)\}$ и $(A, \lambda) \in \ell_0$ являются критическими и изучаются отдельно.

Сначала изучается случай, когда точка (A, λ) близка к прямой $A = -1$. Здесь предполагаются выполненными условия

$$A = -(1 + \varepsilon) \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad 0 < \lambda < 1, \quad (11)$$

что гарантирует неустойчивость нулевого состояния равновесия уравнения (8) (в силу теоремы 4). Далее в (8) производится асимптотическая замена переменных

$$x(t) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + o(\varepsilon^2), \quad (12)$$

где $\tau = \varepsilon t$, и приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях ε . В итоге получается нормальная форма вида

$$z' = \frac{\lambda}{1 - \lambda} [z + (1 - a_2\varphi)z^2].$$

Если $a_2 \neq 1/\varphi$, то это уравнение имеет два состояния равновесия: $z_0 = 0$ и $z_1 = (a_2\varphi - 1)^{-1}$. При всех значениях параметра $a_2 \neq 1/\varphi$ состояние равновесия z_0 неустойчиво, а z_1 — локально асимптотически устойчиво. При этом состоянию равновесия z_1 соответствует состояние равновесия уравнения (8). Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 5. Пусть выполнены условия (11) и $a_2 \neq 1/\varphi$. Тогда уравнение (8) имеет состояние равновесия x_ε с асимптотикой

$$x_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{a_2\varphi - 1} + o(\varepsilon),$$

которое является локально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Других устойчивых решений в этой окрестности нет.

Таким образом, в этом случае происходит транскритическая бифуркация.

Пусть далее $a_2 = 1/\varphi$. В этом случае асимптотическая замена (12) не позволяет построить нормальную форму. Тогда вместо нее в уравнении (8) делается замена вида

$$x(t) = \sqrt{\varepsilon} z(\tau) + \varepsilon x_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} x_3(t, \tau) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $\tau = \varepsilon t$, а функции $x_i(t, \tau)$ ($i = 2, 3$) ограничены по t . Нормальная форма в этом случае имеет следующий вид:

$$z' = \frac{\lambda}{1 - \lambda} [z - (1 + a_3 \varphi) z^3].$$

При $a_3 \leq -1/\varphi$ эта нормальная форма не имеет состояний равновесия, отличных от $z_0 = 0$, а при $a_3 > -1/\varphi$ существует еще два состояния равновесия $z_{\pm} = \pm(a_3 \varphi + 1)^{-1/2}$. Состояние равновесия z_0 неустойчиво, а z_{\pm} — локально асимптотически устойчивы. При этом состояниям равновесия z_{\pm} соответствуют состояния равновесия уравнения (8). Это позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 6. Пусть выполнены условия (11), а также $a_2 = 1/\varphi$ и $a_3 > -1/\varphi$. Тогда уравнение (8) имеет два состояния равновесия $x_{\pm\varepsilon}$ с асимптотикой

$$x_{\pm\varepsilon} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{a_3 \varphi + 1}} + o(\sqrt{\varepsilon}),$$

которые являются локально асимптотически устойчивыми в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля, причем других устойчивых решений в этой окрестности нет.

Таким образом в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (8) может происходить как бифуркация обмена устойчивостью, так и бифуркация вилка при переходе точки с координатами (A, λ) через область $\{A = -1, \lambda \in (0, 1)\}$ в направлении убывания A . Если же в условиях теоремы 6 выполнено неравенство $a_3 < -1/\varphi$, то в уравнении (8) происходит жесткая потеря устойчивости.

Далее в этом параграфе изучается критический случай, когда точка в плоскости параметров (A, λ) переходит через кривую ℓ_0 . На кривой ℓ_0 произвольно выбирается точка с координатами (A_0, λ_0) . Если в равенствах (9) $\lambda = \lambda_0$ и $a_1 = A_0/\varphi$, то уравнение (10) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_0$, где ω_0 — корень уравнения $A_0 = -\cos \omega$ из интервала $(0, \pi)$. Далее в (9) делается подстановка

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad a_1 = \frac{A_0}{\varphi}. \quad (13)$$

В силу теоремы 4 нулевое состояние равновесия уравнения (8) неустойчиво. Для изучения способа потери устойчивости в этом уравнении выполняется асимптотическая замена

$$x(t) = \sqrt{\varepsilon} [z(\tau) \exp(i\omega_0 t) + \bar{z}(\tau) \exp(-i\omega_0 t)] + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau) + \dots \quad (14)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$, $z(\tau)$ — комплекснозначная функция, а функции $u_i(t, \tau)$ ($i = 2, 3$) периодичны по t с периодом $2\pi/\omega_0$.

В результате приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра, при $\varepsilon^{3/2}$ получается нормальная форма:

$$z' = \eta z + dz|z|^2. \quad (15)$$

Динамика этой системы зависит от знаков надкритичности $Re(\eta)$ и первой ляпуновской величины $Re(d)$, точные формулы для которых приводятся в параграфе 1.2. Здесь лишь важно, что $Re(\eta) > 0$, поэтому поведение решений зависит от знака $Re(d)$. Нулевое положение равновесия системы (15) неустойчиво, а если $A_0, \varphi, r_1, r_2, a_2, a_3, \alpha, \beta$ таковы, что $Re(d) < 0$, то у системы (15) существует асимптотически устойчивый цикл $z_0(\tau) = \rho_0 \exp(i\psi(\tau))$, где

$$\rho_0 = \sqrt{-\frac{Re(\eta)}{Re(d)}} \quad (16)$$

Если $A_0, \varphi, r_1, r_2, a_2, a_3, \alpha, \beta$ таковы, что $Re(d) > 0$, то все решения системы (15) (кроме $z = 0$) по модулю стремятся к бесконечности. Случай $Re(d) = 0$ является вырожденным, требует отдельного изучения и в работе не рассматривается.

При выполнении условия $Re(d) < 0$ формула (14) устанавливает соответствие между асимптотически орбитально устойчивым циклом $z_0(\tau)$ системы (15) и локально асимптотически орбитально устойчивым периодическим решением уравнения (8).

Теорема 7. Пусть для равенств (9) выполнены условия (13). Пусть также числа A_0, φ и значения параметров $r_1, r_2, a_2, a_3, \alpha, \beta$ таковы, что $Re(d) < 0$. Тогда у уравнения (8) существует периодическое решение с равномерной по $t \geq 0$ асимптотикой

$$x(t) = 2\rho_0\sqrt{\varepsilon} \cos([\omega_0 + o(1)]t) + o(\sqrt{\varepsilon}),$$

которое является локально орбитально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Причем других устойчивых решений в этой окрестности нет.

Здесь ρ_0 определяется формулой (16).

Таким образом, при выполнении условий (13) в малой окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (8) происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа при переходе точки с координатами (A, λ) через кривую ℓ_0 в направлении возрастания λ . Если условие (13) не выполнено, то в уравнении (8) происходит жесткая потеря устойчивости.

В параграфе 1.3 рассматривается уравнение второго порядка с большим запаздыванием

$$\ddot{x}(t) + \sigma \dot{x}(t) + x(t) = ax(t - T\varphi(x(t))) + f(x(t - T\varphi(x(t))))$$

где $T \gg 1, a \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ – параметры, а функция $\varphi(x)$ положительна, ограничена сверху некоторой константой $M > 0$, и является достаточно гладкой в нуле. Также предполагается, что функция f достаточно гладкая в нуле, $f(0) = f'(0) = 0$ и $\varphi(0) = 1$. Таким образом $x \equiv 0$ является состоянием равновесия этого уравнения.

Функции φ и f допускают следующие разложения в нуле по формуле Тейлора:

$$\varphi(x) = 1 + \alpha x + \beta x^2 + o(x^2), \quad f(y) = f_2 y^2 + f_3 y^3 + o(y^3).$$

Нормировкой времени $t \rightarrow Tt$ это уравнение сводится к

$$\varepsilon^2 \ddot{x}(t) + \varepsilon \sigma \dot{x}(t) + x(t) = ax(t - \varphi(x(t))) + f(x(t - \varphi(x(t)))), \quad (17)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon = T^{-1}$).

Ставится задача исследовать поведение решений в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия (17) в фазовом пространстве $C_{[-M,0]}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[-M, 0]$ функций.

Изучение локальной динамики опирается на известные результаты линейного анализа для уравнения (17), которые заключаются в следующем. Во-первых, справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Если $|a| < a(\sigma)$, то при достаточно малых ε нулевое решение (17) асимптотически устойчиво. Все решения с начальными условиями из его некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности стремятся к нулю.*

Если $|a| > a(\sigma)$, то нулевое решение (17) неустойчиво и в его некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нет устойчивых решений.

Здесь функция $a(\sigma)$ определена следующим образом:

$$a(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \geq \sqrt{2}, \\ \sigma \sqrt{1 - \sigma^2/4}, & \sigma < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Во-вторых, если значение $|a|$ близко к $a(\sigma)$, то характеристическое уравнение

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \sigma \varepsilon \lambda + 1 = a e^{-\lambda} \quad (18)$$

при малых ε имеет сколь угодно большое количество корней в окрестности мнимой оси. В этом смысле критический случай имеет бесконечную размерность. Асимптотика таких корней приводится в параграфе 1.3.

В первую очередь изучается критический случай $\sigma > \sqrt{2}$, $a = 1 + \varepsilon^2 a_1$ ($a_1 \in \mathbb{R}$). Согласно методу квазинормальных форм в уравнении (17) выполняется замена

$$x = \varepsilon^2 u(\tau, r) + \varepsilon^4 u_2(\tau, r) + o(\varepsilon^4), \quad (19)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = (1 - \sigma \varepsilon + \sigma^2 \varepsilon^2)t$, а функции $u(\tau, r)$ и $u_2(\tau, r)$ периодичны по r с периодом 1. Полученная квазинормальная форма имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 - 2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial r} + a_1 u + f_2 u^2, \quad u(\tau, r + 1) = u(\tau, r). \quad (20)$$

Вывод о локальной динамике в этом случае сформулирован в следующей теореме.

Теорема 9. *Пусть $a_1 > 0$. Тогда нулевое решение уравнения (17) неустойчиво, и у него су-*

существует асимптотически устойчивое состояние равновесия $x_*(t, \varepsilon)$, имеющее следующую асимптотику:

$$x_*(t, \varepsilon) = -\varepsilon^2 \frac{a_1}{f_2} + o(\varepsilon^4).$$

Если $a_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (17) асимптотически устойчиво, а $x_*(t, \varepsilon)$ — неустойчиво.

Далее рассматривается критический случай $\sigma > \sqrt{2}$, $a = -1 - \varepsilon^2 a_1$, $a_1 \in \mathbb{R}$. В исходном уравнении выполняется асимптотическая замена

$$x = \varepsilon u(\tau, r) + \varepsilon^2 u_2(\tau, r) + \varepsilon^3 u_3(\tau, r) + o(\varepsilon^3), \quad (21)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = (1 - \sigma\varepsilon + \sigma^2 \varepsilon^2)t$, $u(\tau, r+1) = -u(\tau, r)$, а функции $u_{2,3}(\tau, r)$ периодичны по r с периодом 1. В этом случае квазинормальная форма имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 - 2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\alpha^2}{2} u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \left(\beta + \frac{\alpha f_2}{2} \right) u^2 \frac{\partial u}{\partial r} + a_1 u - (f_2^2 + f_3) u^3, \quad u(\tau, r+1) = -u(\tau, r), \quad (22)$$

и имеет место следующая теорема.

Теорема 10. Пусть краевая задача (22) имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$. Тогда уравнение (17) имеет асимптотическое по невязке решение $x_*(t, \varepsilon)$ с точностью до $O(\varepsilon^4)$ равномерно по всем $t \geq 0$ вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u_* + \varepsilon^2 \left[\frac{f_2}{2} u^2 - \frac{\alpha}{2} u \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{\varepsilon^3}{2} \left[\alpha \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \alpha \sigma u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\alpha^2}{2} u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right].$$

Для изучения локальной динамики в критическом случае $0 < \sigma < \sqrt{2}$, в уравнении (17) полагается $a = a_0(1 + \varepsilon^2 a_1)$, где $a_0 = \pm \sigma \sqrt{1 - \sigma^2/4}$ и производится асимптотическая замена вида

$$x = \varepsilon^2 [u(\tau, r)e^{is} + \bar{u}(\tau, r)e^{-is}] + \varepsilon^3 u_2(\tau, r, s) + \varepsilon^4 u_3(\tau, r, s) + o(\varepsilon^4), \quad (23)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$,

$$r = \left(1 - \varepsilon \frac{2}{\sigma} + \varepsilon^2 \frac{4}{\sigma^2} + 2d_2 \varepsilon^2 (\theta + \Omega) \right) t, \quad s = \left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta + \Omega + \varepsilon \frac{2}{\sigma} (\theta + \Omega) - \varepsilon^2 d_2 (\theta + \Omega)^2 \right) t, \quad (24)$$

функция $u(\tau, r)$ периодична по второму аргументу с периодом 1, а функции $u_{2,3}(\tau, r, s)$ периодичны по r с периодом 1 и по s с периодом 2π .

Квазинормальная форма в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & (d_1 + id_2) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2(\theta + \Omega) d_1 i \frac{\partial u}{\partial r} + a_1 u - d_1 (\theta + \Omega)^2 u + \\ & + \left[\frac{\alpha \omega_0 i}{e^{-i\Omega}} \{ \ell_1 (e^{i\Omega} - 2e^{-2i\Omega}) - \ell_2 e^{-i\Omega} \} - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{2e^{-i\Omega}} (2e^{-i\Omega} + e^{i\Omega}) \right] u|u|^2, \end{aligned} \quad (25)$$

$$u(\tau, r+1) = u(\tau, r). \quad (26)$$

Здесь $d_1 = a_0^{-2} (2 - \sigma^2)$, $d_2 = a_0^{-2} \sigma \sqrt{1 - \sigma^2/2}$. Коэффициенты уравнения (17) зависят от $\theta = \theta(\varepsilon)$. В силу определения функции $\theta(\varepsilon)$ для каждого значения $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ найдется такая

последовательность ε_n , что $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\theta(\varepsilon_n) = \theta_0$.

Теорема 11. Пусть квазинормальная форма (25), (26) при некотором $\theta = \theta_0$ имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$. Пусть ε_n — такая стремящаяся к нулю последовательность, что $\theta(\varepsilon_n) = \theta_0$. Тогда существуют такие периодические по r и по s функции $u_2(\tau, r, s)$ и $u_3(\tau, r, s)$, что уравнение (17) при $\varepsilon = \varepsilon_n$ имеет асимптотическое по невязке решение $x_*(t, \varepsilon)$ с точностью до $O(\varepsilon^5)$ равномерно по $t \in [0, +\infty)$ вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 [u(\varepsilon^2 t, r)e^{is} + \bar{u}(\varepsilon^2 t, r)e^{-is}] + \varepsilon^3 u_2(\varepsilon^2 t, r, s) + \varepsilon^4 u_3(\varepsilon^2 t, r, s),$$

где r и s определяются формулой (24).

Во второй главе рассматривается логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от состояния:

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t) [1 - N(t - h(\lambda) - f(N(t - L)))], \quad (27)$$

где λ — положительный параметр, число $L \geq 0$, а функции h и f обладают особыми свойствами, о которых будет сказано далее. Основной задачей является доказательство существования у этого уравнения нелокального релаксационного решения при больших значениях параметра λ , а также построение его асимптотического приближения по параметру λ . Для решения задачи используется метод большого параметра (см., например, [13]).

Далее везде предполагается, что параметр λ достаточно большой ($\lambda \gg 1$). Для удобства изложения вводится число δ_L , определяемое формулой:

$$\delta_L = \begin{cases} 1, & L = 0, \\ L, & L > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Предполагается, что функция $h(\lambda)$ из (27) положительна и удовлетворяет условиям:

$$(H_1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = \ell, \text{ где } 0 \leq \ell < \delta_L;$$

$$(H_2) \quad \text{если } \ell = 0, \text{ то } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda h(\lambda) / \ln \lambda = \infty;$$

а на функцию $f(N)$ наложены следующие ограничения:

$$(F_1) \quad f(N) \text{ положительна и достаточно гладкая при } N \geq 0;$$

$$(F_2) \quad f(N) \text{ монотонно убывает при } N > 0;$$

$$(F_3) \quad f(1) = \delta_L - \ell;$$

$$(F_4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} f(N) = 0.$$

Примером такой функции может служить функция

$$f(N) = \frac{2(\delta_L - \ell)}{1 + N^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Чтобы выбрать фазовое пространство, вводится обозначение

$$\tau_0 = f(0) + \sup_{\lambda \gg 1} h(\lambda).$$

Т.к. $\tau_0 > \delta_L$ в силу свойств (H_1) , (F_2) и (F_3) , то пространство $C([- \tau_0, 0])$ можно выбрать в качестве фазового для уравнения (27). Далее, произвольно фиксируется число $a \in (0, 1)$ и класс начальных условий определяется следующим образом:

$$\mathbb{S} = \{\varphi(t) \in C([- \tau_0, 0]), \quad e^{\lambda t} \leq \varphi(t) \leq e^{a\lambda t}, \quad \varphi(0) = 1\}.$$

Это множество является замкнутым, выпуклым и ограниченным. Стоит отметить, что τ_0 зависит от L , а значит и фазовое пространство, и класс начальных условий \mathbb{S} различаются при разных L .

Основным результатом этой главы является следующая теорема.

Теорема 12. Пусть зафиксировано $L \geq 0$. Пусть функции $h(\lambda)$ и $f(N)$ из (27) удовлетворяют соответственно ограничениям (H_1) – (H_2) и (F_1) – (F_4) . Тогда при $\lambda \gg 1$ уравнение (27) имеет нелокальное релаксационное периодическое решение $N(t, \lambda)$ с начальным условием из класса \mathbb{S} .

Пусть $N(t, \lambda)$ – то периодическое решение, существование которого гарантирует теорема 12. Пусть $T(\lambda)$ – период этого решения, а $M(\lambda)$ и $m(\lambda)$ – его наибольшее и наименьшее значения соответственно:

$$M(\lambda) = \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} N(t, \lambda), \quad m(\lambda) = \min_{0 \leq t \leq T(\lambda)} N(t, \lambda).$$

Пусть $t_M(\lambda)$ – точка, в которой решение впервые достигает максимума:

$$N(t_M(\lambda), \lambda) = M(\lambda),$$

а $t_0(\lambda)$ – время, за которое решение убывает от своего максимального значения до значения $N \equiv 1$.

Далее приводятся результаты об асимптотических свойствах решения $N(t, \lambda)$ для ситуаций $L = 0$ и $L > 0$.

Теорема 13. Пусть $L = 0$ и выполнены условия теоремы 12. Тогда, во-первых, справедливы предельные равенства:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_M(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = \ell. \quad (29)$$

Во-вторых, для всякого $0 < \delta < 1$ найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda > \lambda_0$ справедливо неравенство

$$t_0(\lambda) > 1 - \ell - \delta. \quad (30)$$

В-третьих, при $\lambda \gg 1$ выполнены неравенства:

$$M(\lambda) \geq d \exp(\lambda h(\lambda)), \quad (31)$$

$$m(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \left[-\frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda h(\lambda)) + 1 + \tau_0\right]\right), \quad (32)$$

$$T(\lambda) \geq \frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda h(\lambda)) - 1 - \tau_0. \quad (33)$$

Здесь

$$d = \exp\left(-\frac{1}{a}\right).$$

Теорема 14. Пусть $L > 0$ и выполнены условия теоремы 12. Тогда, во-первых, справедливо асимптотическое равенство

$$t_M(\lambda) = L + O(h(\lambda) - \ell), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Во-вторых, величина $t_0(\lambda)$ имеет предел при $\lambda \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_0(\lambda) = 0. \quad (35)$$

В-третьих, справедливы неравенства:

$$T(\lambda) \geq \frac{\exp(a\lambda h(\lambda)/2)}{a\lambda} - t_M(\lambda) - \tau_0. \quad (36)$$

$$\exp\left(\frac{a\lambda t_M(\lambda)}{1+p+L-\min\{L, 1\}}\right) < M(\lambda) < \exp(\lambda t_M(\lambda)) \quad (\forall 0 < p \ll 1), \quad (37)$$

$$m(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \left[-\frac{\exp(a\lambda h(\lambda)/2)}{a\lambda} + t_M(\lambda) + \tau_0\right]\right), \quad (38)$$

Эти теоремы раскрывают зависимость асимптотических свойств решения $N(t, \lambda)$ от функции $h(\lambda)$. Также они позволяют увидеть различия в асимптотических свойствах периодического решения для случаев $L = 0$ и $L > 0$.

В **заключении** приведены общие выводы.

Глава 1

Локальная динамика уравнений с запаздыванием, зависящим от состояния

Введение

В первой главе рассматриваются три уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции. Во-первых, это уравнение первого порядка вида

$$\dot{u}(t) + u(t) = F(u(t - T(u(t)))) , \quad u \in R,$$

во-вторых, обобщенное логистическое уравнение

$$\dot{N}(t) = f(N(t)) [1 - g(N(t))N(t - T(N(t)))] N(t).$$

а в-третьих, уравнение второго порядка с большим запаздыванием:

$$\ddot{x}(t) + \sigma \dot{x}(t) + x(t) = ax(t - T\varphi(x(t))) + f(x(t - T\varphi(x(t)))) , \quad x \in R.$$

Такие уравнения встречаются в приложениях (по уравнению первого порядка см. [1, 19, 30, 47–49], а по уравнению второго порядка см., например, [46]).

Для изучения динамики уравнений с запаздыванием, зависящим от искомой функции, разработаны методы, многие из которых являются аналогами методов для уравнений с постоянным запаздыванием, или для ОДУ. В ряде работ установлено, что для анализа динамики и свойств таких уравнений во многих случаях применимы методы теории уравнений с постоянным запаздыванием (см., например, [28, 29, 37, 38]). Вопросы существования и устойчивости решений рассматривались, например, в [19, 25, 31, 36].

Основной целью настоящей главы является исследование локальной динамики всех приведенных выше уравнений в окрестности их положений равновесия. Существуют методы проведения таких исследований. Исследование всегда начинается с изучения корней характеристического уравнения для линеаризации исходного уравнения на состоянии равновесия. В зависимости от параметров уравнения определяются случаи, в которых неприменима теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Такие случаи называются критическими, и для изучения каждого из них в разрабатываются отдельные методы.

В рассматриваемом уравнении первого порядка, динамика которого подробно изучается в п. 1.1, для всех критических случаев характеристическое уравнение имеет не более двух корней с нулевой вещественной частью. Для изучения локальной динамики в случаях, близких к таким критическим, существует метод нормальных форм, который позволяет свести исходную систему уравнений с малым параметром к системе без такового. Эта новая система называется нормальной формой исходной системы. Также этот метод позволяет получить асимптотическое приближение решений исходной системы по малому параметру.

Логистическое уравнение подробно исследуется в параграфе 1.2. Для исследования бифуркаций во всех случаях используются классические методы инвариантных многообразий и нормальных форм (см., например, [20]). Это уравнение имеет важное приложение в математической экологии: описывает закон динамики численности популяций микроорганизмов, а также массовых видов млекопитающих (см. [16, 39]). Здесь $r > 0$ – вещественный параметр, называемый мальтузианским коэффициентом, а $h > 0$ – фиксированное число, играющее роль постоянного запаздывания.

Интерес к изучению логистического уравнения с запаздыванием объясняется многими факторами. Во-первых, это уравнение в своем классическом виде является достаточно точной математической моделью изменения численности популяций. Оно описывает закон динамики численности популяций микроорганизмов, а также массовых видов млекопитающих (см. [39]). Прикладной смысл параметров r, h подробно описан в работе [16]. Во-вторых, с математической точки зрения образцовыми являются некоторые его бифуркационные свойства, например, возникновение суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа, а также приобретение устойчивым циклом релаксационной формы при дальнейшем изменении бифуркационного параметра. Динамика логистического уравнения в классическом виде подробно исследована. Об устойчивости состояний равновесия см., например, [14, 43]. В [10, 13] исследована динамика логистического уравнения с распределенным запаздыванием вида

$$\dot{N} = r \left[1 - \int_{-h_2}^{-h_1} dr(s) N(t+s) \right] N,$$

частным случаем которого является уравнение с постоянным запаздыванием, приведенное выше. По поводу других модификаций логистического уравнения см., например, работы [9, 17].

Изучению динамики уравнения второго порядка посвящен п. 1.3. Для этого уравнения в случаях, когда теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению неприменима, характеристический квазиполином не имеет корней с положительной вещественной частью, но при этом имеет сколь угодно большое количество корней, сколь угодно близких к мнимой оси. Будем говорить, что такой критический случай имеет бесконечную размерность. Для изучения динамики в таких критических случаях применяется метод квазинормальных форм [11]. Его суть состоит в том, что исходное сингулярно возмущенное уравнение в бесконечномерном критическом случае сводится к специальной нелинейной задаче – аналогу (укороченной) нормальной формы Пуанкаре, – решения которой определяют главные части асимптотического разложения решений исходной задачи. Такие задачи мы будем называть

квазинормальными формами. Важным является то, что квазинормальная форма не зависит от малого параметра либо зависит от него регулярно, а следовательно, может быть исследована, например, численно. Как будет показано, квазинормальные формы, как правило, имеют вид нелинейных параболических уравнений.

Приведенные в настоящей главе результаты опубликованы в работах [2, 5, 35].

1.1 Уравнение первого порядка с конечномерными критическими случаями

1.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение с запаздывающим аргументом, зависящим от искомой функции:

$$\dot{u}(t) + u(t) = F(u(t - T(u(t)))) , \quad u \in R. \quad (1.1)$$

Функции F и T достаточно гладкие в окрестности точки $u = 0$, причем $F(0) = 0$, а $T(u) > 0$ при всех значениях аргумента. Априори предполагаем, что для решений уравнения (1.1) выполняется $|u(t)| \leq M \quad \forall t \geq 0$ для некоторого положительного M . Тогда для непрерывной функции $T(u)$ можно гарантировать ее ограниченность: $T(u) \leq T_1$, $T_1 > 0$. Положим $X = [-T_1, 0]$ и дополним (1.1) начальным условием:

$$u = \psi(t) \in C(X), \quad |\psi| \leq M.$$

Таким образом пространство $C_M(X)$ функций, непрерывных на X , абсолютная величина которых ограничена константой M , будет фазовым пространством уравнения (1.1).

Поставим задачу исследовать поведение решений (1.1) в малой окрестности нулевого положения равновесия этого уравнения. Т.к. u предполагается малым, функции $F(u)$ и $T(u)$ удобно разложить по формуле Тейлора:

$$F(u) = au + f_2 u^2 + f_3 u^3 + o(u^3), \quad (1.2)$$

$$T(u) = T_0 - \alpha u - \beta u^2 + o(u^2), \quad T_0 > 0. \quad (1.3)$$

Условие $T_0 > 0$ выполняется в силу требования положительности $T(u)$ во всей области определения.

1.1.2 Линейный анализ

Для исследования динамики уравнения (1.1) построим линеаризованное на нулевом состоянии уравнение

$$\dot{u} + u = au(t - T_0). \quad (1.4)$$

Это уравнение с постоянным запаздыванием. Хорошо известно (см., например, [8]), что его характеристический квазиполином $\lambda + 1 = ae^{-\lambda T_0}$ имеет чисто мнимые корни $\lambda = 0$ при $a = 1$ и $\lambda = \pm i\omega_0$ при $a = a_0$, где ω_0 – наименьший положительный корень уравнения $\omega_0 = -tg(\omega_0 T_0)$ и $a_0 = -\sqrt{1 + \omega_0^2}$. При $a > 1$ и при $a < a_0$ у него существуют корни с положительной вещественной частью, а при $a_0 < a < 1$ все корни расположены слева от мнимой оси. Таким образом уравнение (1.4) экспоненциально устойчиво при $a \in (a_0, 1)$ и экспоненциально неустойчиво при $a < a_0$ или $a > 1$. Справедливо следующее утверждение

Теорема 1.1. *Нулевое решение уравнения (1.1) асимптотически устойчиво при $a \in (a_0, 1)$ и неустойчиво при $a < a_0$ или $a > 1$.*

Таким образом значения $a = a_0$ и $a = 1$ являются точками бифуркации нулевого состояния равновесия уравнения (1.1). Изучим, как происходит потеря устойчивости при переходе параметра a через эти значения.

1.1.3 Транскритическая бифуркация

Изучим сначала случай, когда $a = 1 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon \ll 1$. Воспользуемся методом нормальных форм (см., например, [7, 20, 22]) и сделаем в уравнении (1.1) асимптотическую замену

$$u(t) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + o(\varepsilon^2), \quad (1.5)$$

где $\tau = \varepsilon t$. Тогда

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon^2 z'(\tau) + o(\varepsilon^2), \\ u(t - T_0) &= \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 (x_2(\tau) - T_0 z'(\tau)) + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Учитывая малость u , запишем уравнение (1.1) в ином виде. Для этого, воспользовавшись равенством (1.3), формально напишем тейлоровское разложение для $u(t - T(u))$:

$$u(t - T(u)) = u(t - T_0) + \dot{u}(t - T_0) (\alpha u + \beta u^2) + \frac{\ddot{u}(t - T_0)}{2} (\alpha u + \beta u^2)^2 + \dots$$

и подставим это разложение в (1.1):

$$\begin{aligned} \dot{u} + u &= (1 + \varepsilon)u(t - T_0) + (1 + \varepsilon)\dot{u}(t - T_0) (\alpha u + \beta u^2) + \\ &\quad + \frac{(1 + \varepsilon)}{2}\ddot{u}(t - T_0) (\alpha u + \beta u^2)^2 + \\ &\quad + f_2 [u^2(t - T_0) + 2\alpha\dot{u}(t - T_0)uu(t - T_0)] + f_3 u^3(t - T_0) + \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

Порядок слагаемых в правой части (1.6), содержащих производную функции u , будет выше ε^2 . После подстановки (1.5) в (1.6) получим следующее уравнение

$$\varepsilon^2 z' + \varepsilon z + \varepsilon^2 x_2 + \dots = \varepsilon z - \varepsilon^2 T_0 z' + \varepsilon^2 x_2 + \varepsilon^2 z + f_2 \varepsilon^2 z^2 + \dots$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. При ε получаем тождество, а при ε^2 имеем

$$(1 + T_0)z' = z + f_2 z^2. \quad (1.7)$$

Получившееся уравнение (1.7) является нормальной формой для (1.1) в окрестности нуля при условии близости параметра a к 1.

Теорема 1.2. *При всех $T_0 > 0$, $\alpha, \beta, f_2 \neq 0, f_3$ и при $0 < \varepsilon \ll 1$ уравнение (1.1) имеет нетривиальное состояние равновесия u_1 с асимптотикой*

$$u_1 = -\frac{\varepsilon}{f_2} + O(\varepsilon^2),$$

которое является локально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Других устойчивых решений в этой окрестности нет.

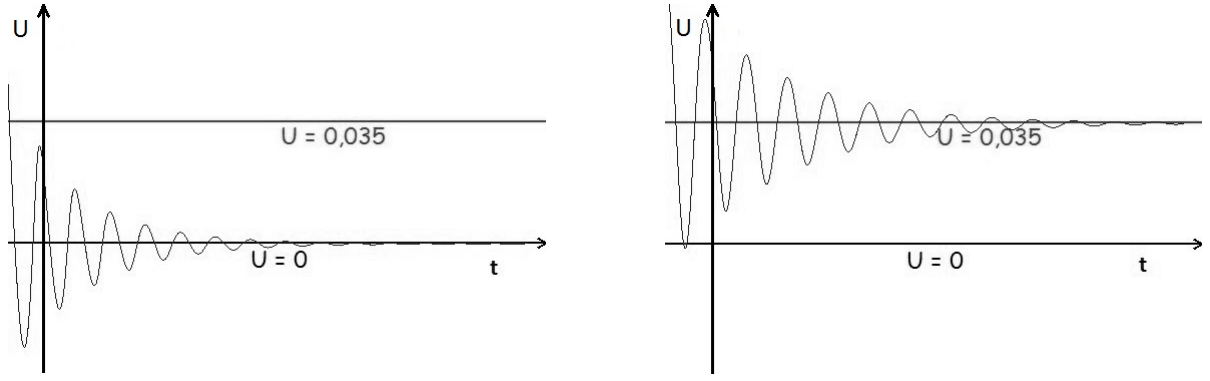


Рис. 1.1: Графики решений уравнения (1.1) при $a = 0.93$ (слева) и $a = 1.07$ (справа).

Таким образом в уравнении (1.1) при $a = 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) происходит следующая бифуркация: если $\varepsilon < 0$, то нулевое состояние равновесия этого уравнения (локально) асимптотически устойчиво; если $\varepsilon > 0$, то нулевое состояние равновесия неустойчиво, но состояние равновесия u_1 становится (локально) асимптотически устойчивым при всех $T_0 > 0$, α , β , $f_2 \neq 0$, f_3 . Рис. 1.1 иллюстрирует эту ситуацию.

1.1.4 Бифуркация Андронова – Хопфа

Здесь изучим изменение поведения решений уравнения (1.1) в окрестности нуля при переходе a через a_0 . Положим в (1.1) $a = a_0(1 + \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon \ll 1$.

Согласно идеологии метода нормальных форм сделаем в (1.1) асимптотическую замену

$$u = \sqrt{\varepsilon} (e^{i\omega_0 t} z(\tau) + e^{-i\omega_0 t} \bar{z}(\tau)) + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau) + o(\varepsilon^{3/2}), \quad (1.8)$$

где $\tau = \varepsilon t$, а $u_i(t, \tau)$ ($i = 2, 3$) — периодические по t функции с периодом $2\pi/\omega_0$.

После подстановки получится равенство, в левой и правой частях которого стоят ряды по степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Начнем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях.

При $\sqrt{\varepsilon}$ будет тождество, а при ε получим линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянным запаздыванием относительно функции u_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 - a_0 u_2(t - T_0, \tau) = |z|^2 [2f_2 + e^{-i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha - e^{i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha] + \\ + e^{2i\omega_0 t} z^2 [e^{-2i\omega_0 T_0} f_2 + e^{-i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha] + e^{-2i\omega_0 t} \bar{z}^2 [e^{2i\omega_0 T_0} f_2 - e^{i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

В правой части этого уравнения нет резонансных слагаемых, поэтому его решение ищем в виде $u_2 = d_1 e^{2i\omega_0 t} z^2 + \bar{d}_1 e^{-2i\omega_0 t} \bar{z}^2 + d_2 |z|^2$. Подставляя это в (1.9), определяем d_1, d_2 :

$$d_1 = \frac{e^{-2i\omega_0 T_0} f_2 + e^{-i\omega_0 T_0} i a_0 \omega_0 \alpha}{1 + 2i\omega_0 - a_0 e^{-2i\omega_0 T_0}}, \quad d_2 = \frac{2f_2 - 2\omega_0^2 \alpha}{1 - a_0}. \quad (1.10)$$

При $\varepsilon^{3/2}$ опять получаем линейное неоднородное уравнение первого порядка с постоянным

запаздыванием относительно функции u_3 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial t} + u_3 - a_0 u_3(t - T_0, \tau) = e^{3i\omega_0 t} z^3 k + e^{-3i\omega_0 t} \bar{z}^3 \bar{k} + \\ + e^{i\omega_0 t} (-r z' + \mu z + \nu z |z|^2) + e^{-i\omega_0 t} (-\bar{r} \bar{z}' + \bar{\mu} \bar{z} + \bar{\nu} \bar{z} |\bar{z}|^2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

где

$$r = 1 + T_0 + i\omega_0 T_0, \quad \mu = 1 + i\omega_0, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \nu = \omega_0 \left[-3\omega_0 \left(\beta + \frac{\alpha^2}{2} \right) + i \left(\beta - \frac{\omega_0^2 \alpha^2}{2} \right) \right] + 3f_3 \frac{1 + i\omega_0}{a_0} + \\ + \frac{d_1}{a_0} [2f_2 - 4\omega_0^2 \alpha - a_0 \omega_0^2 \alpha + i\omega_0 (2f_2 + 2(1 - \omega_0^2) \alpha - a_0 \alpha)] + \\ + \frac{d_2}{a_0} [2f_2 - a_0 \omega_0^2 \alpha + i\omega_0 (2f_2 + a_0 \alpha)] - 2\omega_0 f_2 \alpha \frac{2\omega_0 - i(1 - \omega_0^2)}{a_0^2}, \end{aligned}$$

а числа d_1 и d_2 определены формулами (1.10). Точное значение константы k нам не важно. Уравнение (1.11) содержит в правой части резонансные слагаемые, т.к. характеристическое уравнение для уравнения (1.4) при $a = a_0$ имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_0$. Из условия разрешимости уравнения (1.11) в классе ограниченных функций получаем нормальную форму для уравнения (1.1)

$$r z' = \mu z + \nu z |z|^2. \quad (1.13)$$

Переходя в (1.13) к полярным координатам с помощью замены $z(\tau) = \rho(\tau) e^{i\varphi(\tau)}$ ($\rho(\tau) > 0$) и вводя обозначения

$$\eta = \operatorname{Re} \frac{\mu}{r}, \quad \xi = \operatorname{Im} \frac{\mu}{r}, \quad d = \operatorname{Re} \frac{\nu}{r}, \quad c = \operatorname{Im} \frac{\nu}{r},$$

получим:

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \eta \rho + d \rho^3 \\ \dot{\varphi} = \xi + c \rho^2. \end{cases} \quad (1.14)$$

В случае $\eta > 0$, $d < 0$ у первого уравнения все решения $\rho(\tau)$ стремятся к состоянию равновесия $\rho_0 = (-\eta/d)^{1/2}$, т.е. все решения $z(\tau) = \rho(\tau) e^{i\varphi(\tau)}$ притягиваются к циклу радиуса ρ_0 ; а при $\eta > 0$, $d > 0$ все решения (кроме нулевого) монотонно стремятся к бесконечности. Формула (1.8) связывает периодическое решение системы (1.14) с периодическим решением уравнения (1.1) для поставленной задачи. Таким образом для исследования локальной динамики уравнения (1.1) необходимо определить знаки вещественных чисел η и d .

Имеем $\eta = (1 + T_0 + \omega_0^2 T_0) |r|^{-2} > 0$ в силу равенств (1.12) и неравенства $T_0 > 0$, поэтому осталось лишь определить знак d .

После выполнения стандартных действий получим для d следующее выражение:

$$d = \frac{V(a_0)}{a_0^2 (a_0 - 1) (5a_0 + 4) |r|^2}. \quad (1.15)$$

Здесь $V(a_0)$ вычисляется по формуле

$$V(a_0) = \frac{\alpha^2}{2} a_0^2 (a_0^2 - 1) [p_1(a_0) + T_0 p_2(a_0)] - 2f_2^2 [p_3(a_0) + T_0 p_4(a_0)] + \\ + f_2 \alpha a_0 (a_0^2 - 1) [p_5(a_0) + T_0 p_6(a_0)] + 3f_3 a_0 (a_0 - 1)(5a_0 + 4)(1 + T_0 a_0^2) - \\ - \beta a_0^2 (a_0^2 - 1) (a_0 - 1)(5a_0 + 4)(3 + 2T_0),$$

где

$$p_1(a_0) = 10a_0^3 + a_0^2 - 33a_0 - 20, \quad p_2(a_0) = -5a_0^4 + 15a_0^3 + 10a_0^2 - 38a_0 - 24, \\ p_3(a_0) = 2a_0^3 + 13a_0^2 + 4a_0 - 4, \quad p_4(a_0) = a_0^2 (11a_0^2 + 6a_0 - 2), \\ p_5(a_0) = 11a_0^2 + 12a_0 + 4, \quad p_6(a_0) = 2a_0^2(4a_0 + 5).$$

Так как знаменатель в правой части (1.15) положителен, то знак d определяется знаком $V(a_0)$.

То есть, если параметры $T_0 > 0$, α , β , f_2 , f_3 таковы, что $V(a_0) < 0$, то в системе (1.14) у первого уравнения все решения $\rho(\tau)$ стремятся к состоянию равновесия ρ_0 . Если $V(a_0) > 0$, то все решения этого уравнения монотонно стремятся к бесконечности.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1.3. Пусть $0 < \varepsilon \ll 1$, а параметры $T_0 > 0$, α , β , f_2 , f_3 таковы, что $V(a_0) < 0$. Тогда уравнение (1.1) имеет периодическое решение с равномерной по $t \geq 0$ асимптотикой

$$u(t) = 2\rho_0 \sqrt{\varepsilon} \cos([\omega_0 + o(1)]t) + o(\sqrt{\varepsilon}),$$

которое является локально орбитально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Других устойчивых решений в этой окрестности нет.

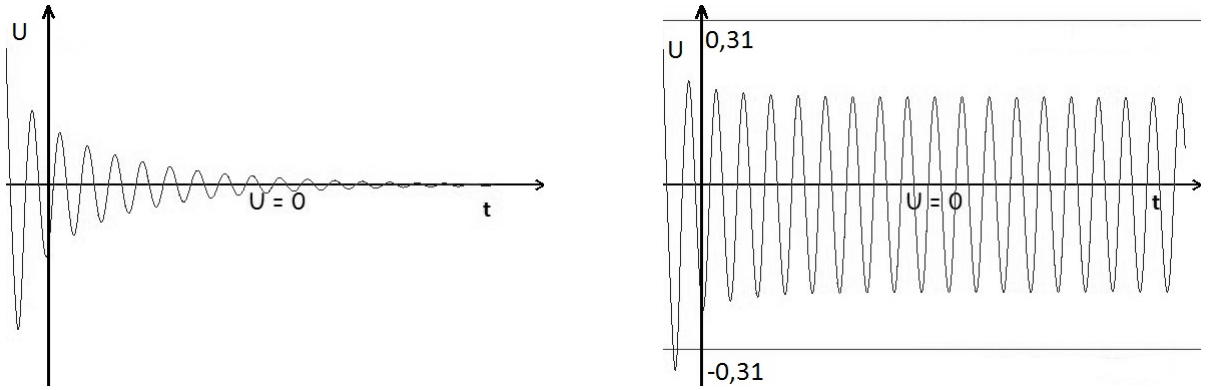


Рис. 1.2: Графики решений уравнения (1.1) при $\varepsilon = -0.1$ (слева) и $\varepsilon = 0.1$ (справа).

Отметим, что если $V(a_0) > 0$, то задача исследования динамики уравнения (1.1) становится нелокальной: в окрестности нулевого состояния равновесия нет устойчивых режимов. Таким образом при выполнении условий теоремы 3 в уравнении (1.1) реализуется суперкритическая бифуркация Андронова – Хопфа. Эта ситуация изображена на Рис. 1.2. В левой части изображен график решения уравнения (1.1) в случае, когда $\varepsilon < 0$; как видно, нулевое состояние равновесия устойчиво. Правая часть демонстрирует случай, когда $\varepsilon > 0$; видно,

что траектория, изображенная на этом рисунке, приближается к периодической траектории.

1.2 Логистическое уравнение с запаздыванием, зависящим от состояния

1.2.1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\dot{N}(t) = f(N(t)) [1 - g(N(t))N(t - T(N(t)))] N(t). \quad (1.16)$$

Предполагается, что при некотором $\varphi > 0$ функции f , g и T удовлетворяют следующим условиям: все они определены и достаточно гладкие в окрестности точки $N = \varphi$; $T(\varphi) = 1$, $f(\varphi) > 0$ и $\varphi g(\varphi) = 1$. Последнее из этих предположений означает, что $N \equiv \varphi$ является состоянием равновесия уравнения (1.16).

Заменой $N = (1 + x)\varphi$ уравнение (1.16) преобразуется к виду

$$\dot{x}(t) = r(x(t)) [1 - \varphi a(x(t)) [1 + x(t - h(x(t)))]] [1 + x(t)], \quad (1.17)$$

где $r(x) = f((1 + x)\varphi)$, $a(x) = g((1 + x)\varphi)$, $h(x) = T((1 + x)\varphi)$, а $x \equiv 0$ является состоянием равновесия. Будем предполагать, что все рассматриваемые решения уравнения (1.17) ограничены сверху некоторой положительной константой M при $t > 0$, в силу чего можно гарантировать ограниченность непрерывной функции $h(x)$ в рассматриваемой области изменения x : $0 < h(x) < h_1$, $h_1 > 0$. Дополним уравнение (1.17) начальным условием

$$x = \psi(t) \in C([-h_1, 0]), \quad |\psi| \leq M.$$

Поставим задачу исследовать локальную динамику уравнения (1.17) в малой окрестности нулевого состояния равновесия.

При x близком к нулю верны формулы

$$\begin{aligned} r(x) &= \lambda + r_1 x + r_2 x^2 + o(x^2), \\ a(x) &= \frac{1}{\varphi} + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + o(x^3), \\ h(x) &= 1 - \alpha x - \beta x^2 + o(x^2). \end{aligned} \quad (1.18)$$

где $\lambda, r_1, r_2, a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta$ – вещественные параметры, а через λ обозначено $r(0)$. Линеаризуем уравнение (1.17) на состоянии равновесия $x \equiv 0$, учитывая (1.18). В результате получим уравнение

$$\dot{x} = -\lambda[Ax + x(t - 1)] \quad (A = a_1\varphi),$$

характеристическим уравнением для которого является уравнение

$$\mu = -\lambda(A + e^{-\mu}). \quad (1.19)$$

Расположение корней уравнения (1.19) относительно мнимой оси определяет локальную устойчивость нулевого состояния равновесия уравнения (1.17).

1.2.2 Линейный анализ

В настоящем пункте исследуем подробно зависимость корней уравнения (1.19) от параметров λ и A . В первую очередь определим, при каких значениях этих параметров уравнение (1.19) имеет чисто мнимые корни. Полагая $\mu = i\omega$, приходим к уравнению

$$i\omega = -\lambda [A + \exp(-i\omega)],$$

от которого перейдем к системе

$$\begin{cases} A = -\cos \omega, \\ \omega = \lambda \sin \omega. \end{cases} \quad (1.20)$$

Отсюда видно, что при $|A| > 1$ уравнение (1.19) не имеет чисто мнимых корней. Из (1.20) также следует, что если ω является решением этой системы, то $-\omega$ тоже является ее решением. Поэтому далее считаем $\omega > 0$.

Лемма 1.1. *При $A \geq 1$ и при всех $\lambda > 0$ вещественные части всех корней уравнения (1.19) отрицательны.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $\exists \mu_* = a + ib$: $a > 0$. Тогда (1.19) переходит в равенство

$$a + ib = -\lambda [A + \exp(-a) \cos b - i \exp(-a) \sin b].$$

Отсюда получаем $a = -\lambda [A + \exp(-a) \cos b]$. В силу положительности a имеем:

$$A + \exp(-a) \cos b > A - \exp(-a) > A - 1 \geq 0.$$

Из этой цепочки неравенств следует, что $a < 0$, что противоречит исходному предположению и доказывает лемму.

Отметим, что если пара (A, λ) располагается на одной из параметрически заданных кривых

$$\ell_n := \left\{ (A, \lambda) \mid A = -\cos \omega, \quad \lambda = \frac{\omega}{\sin \omega}, \quad \omega \in (2\pi n, \pi(2n+1)) \right\},$$

где n – неотрицательное целое, то уравнение (1.19) имеет пару чисто мнимых корней $\mu = \pm i\omega$. Положительное число ω удовлетворяет ограничениям $\omega \in (2\pi n, \pi(2n+1))$ и может быть найдено из уравнения $A = -\cos \omega$.

Таким образом, непересекающиеся кривые ℓ_n и прямые $A = -1$, $A = 1$ делят полуплоскость параметров $A \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$ на области, в каждой из которых вещественные части всех корней уравнения (1.19) сохраняют знак. Фрагмент этого разбиения представлен на рис. 1.3.

Лемма 1.2. *Если точка с координатами (A, λ) лежит выше кривой ℓ_0 , то уравнение (1.19) имеет по крайней мере два корня с положительной вещественной частью.*

Лемма 1.2 вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 1.1. *Пусть $\mu(A, \lambda) = \alpha(A, \lambda) + i\omega(A, \lambda)$ – такой корень уравнения (1.19), что при $(A_0, \lambda_0) \in \ell_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ верно $\alpha(A_0, \lambda_0) = 0$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \delta$ верно $\alpha(A_0, \lambda) > 0$, а при $\lambda_0 - \delta < \lambda < \lambda_0$ верно $\alpha(A_0, \lambda) < 0$.*

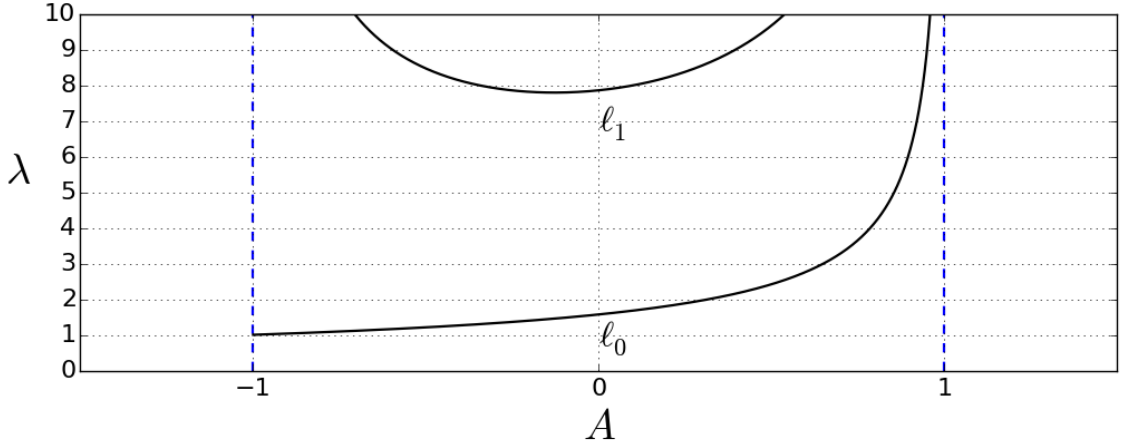


Рис. 1.3: Разбиение плоскости (A, λ) на области знакопостоянства вещественных частей корней уравнения (1.19).

Доказательство. Для доказательства достаточно вычислить $Re \left(\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}(A, \lambda) \right)$ в точке (A_0, λ_0) . Дифференцируя обе части уравнения (1.19) по λ , получаем

$$\frac{\partial \mu}{\partial \lambda}(A, \lambda) = -\frac{A + \exp(-\mu(A, \lambda))}{1 - \lambda \exp(-\mu(A, \lambda))} = \frac{\mu(A, \lambda)}{\lambda(1 + \mu(A, \lambda) + \lambda A)}.$$

Подставим в полученное выражение $A = A_0$, $\lambda = \lambda_0$, при этом учитывая, что $\mu(A_0, \lambda_0) = i\omega(A_0, \lambda_0)$, и выделим в нем вещественную часть:

$$Re \left(\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\substack{A=A_0 \\ \lambda=\lambda_0}} = \frac{1}{\lambda} \frac{\omega^2(A_0, \lambda_0)}{(1 + \lambda_0 A_0)^2 + \omega^2(A_0, \lambda_0)} > 0.$$

Последнее неравенство завершает доказательство.

Лемма 1.3. При $A < -1$ уравнение (1.19) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, а для точек (A, λ) , лежащих ниже кривой ℓ_0 , все корни этого уравнения имеют отрицательные вещественные части.

Доказательство. Заметим, что при $A = -1$ и при любом $\lambda > 0$ система (1.20) имеет нулевое решение, а уравнение (1.19) имеет корень $\mu_*(A, \lambda)$, для которого $\mu_*(-1, \lambda) = 0$. Из того, что

$$Re \left(\frac{\partial \mu_*}{\partial A} \right) \Big|_{A=-1} = -Re \left(\frac{\lambda}{1 - \lambda \exp(-\mu_*)} \right) \Big|_{A=-1} = -Re \left(\frac{\lambda}{1 + \mu_* + \lambda A} \right) \Big|_{A=-1} = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

следует, что при $\lambda \in (0, 1)$ выполнено неравенство

$$Re \left(\frac{\partial \mu_*}{\partial A} \right) \Big|_{A=-1} < 0.$$

Этот факт доказывает лемму.

1.2.3 Основные результаты

Из рассуждений предыдущего пункта можно сделать выводы об устойчивости нулевого состояния равновесия уравнения (1.17). Как и ранее считаем, что $\lambda > 0$.

Теорема 1.4. Пусть $|A| < 1$. Если при этом точка с координатами (A, λ) лежит выше кривой ℓ_0 , то состояние равновесия $x \equiv 0$ уравнения (1.17) неустойчиво. В случае, когда (A, λ) располагается ниже ℓ_0 , это состояние равновесия локально асимптотически устойчиво.

При $A \geq 1$ состояние равновесия $x \equiv 0$ уравнения (1.17) локально асимптотически устойчиво, а при $A < -1$ оно неустойчиво.

На рисунке 1.4 серым цветом выделена область в плоскости параметров (A, λ) устойчивости нулевого положения равновесия уравнения (1.17), а белым цветом – область неустойчивости.

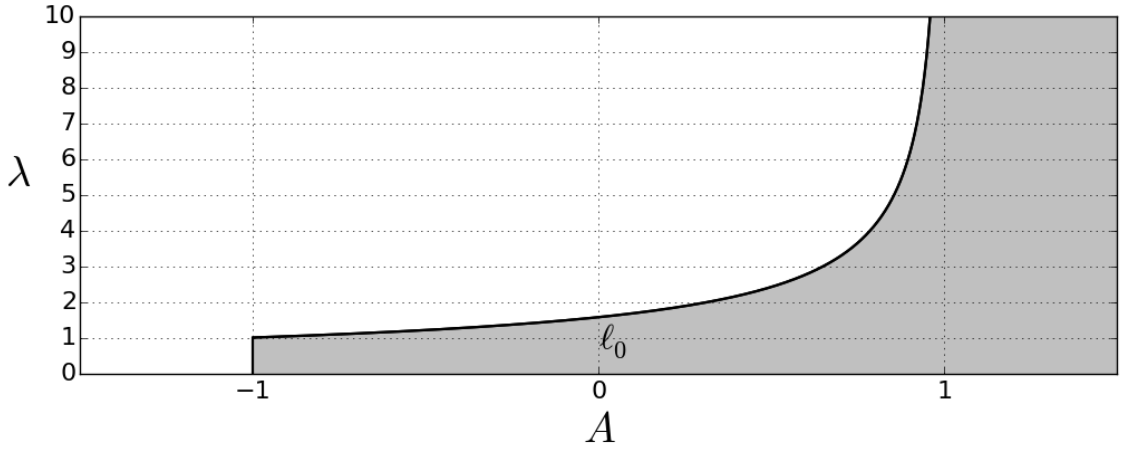


Рис. 1.4: Области в плоскости (A, λ) устойчивости и неустойчивости решения $x \equiv 0$ уравнения (1.17).

Случаи $(A, \lambda) \in \{A = -1, \lambda \in (0, 1)\}$ и $(A, \lambda) \in \ell_0$ являются критическими и требуют дополнительного изучения. Именно этой задаче посвящена оставшаяся часть параграфа.

Следующие условия:

$$A = -(1 + \varepsilon) \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad 0 < \lambda < 1, \quad (1.21)$$

описывают случаи, близкие к первому критическому (точка (A, λ) близка к прямой $A = -1$). Отметим, что при сформулированных условиях нулевое состояние равновесия уравнения (1.17) неустойчиво (в силу теоремы 1.4). Сформулируем результаты относительно бифуркаций, возникающих в первом критическом случае.

Теорема 1.5. Пусть выполнены условия (1.21) и $a_2 \neq 1/\varphi$. Тогда уравнение (1.17) имеет состояние равновесия x_ε с асимптотикой

$$x_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{a_2\varphi - 1} + o(\varepsilon),$$

которое является локально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Других устойчивых решений в этой окрестности нет.

Теорема 1.6. Пусть выполнены условия (1.21), а также $a_2 = 1/\varphi$ и $a_3 > -1/\varphi$. Тогда уравнение (8) имеет два состояния равновесия $x_{\pm\varepsilon}$ с асимптотикой

$$x_{\pm\varepsilon} = \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{a_3\varphi + 1}} + o(\sqrt{\varepsilon}),$$

которые являются локально асимптотически устойчивыми в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля, причем других устойчивых решений в этой окрестности нет.

Таким образом в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (1.17) может происходить как бифуркация обмена устойчивостью, так и бифуркация вилка при переходе точки с координатами (A, λ) через область $\{A = -1, \lambda \in (0, 1)\}$ в направлении убывания A . Отметим также, что если в условиях теоремы 1.6 выполнено неравенство $a_3 < -1/\varphi$, то в уравнении (1.17) происходит жесткая потеря устойчивости.

В случае, когда точка (A, λ) при увеличении λ переходит через кривую ℓ_0 , в окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (1.17) может происходить суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа. Соответствующий результат аккуратно сформулирован и доказан в разделе 1.2.5 в виде теоремы 1.7. Здесь лишь отметим, что в этом случае устойчивость приобретает периодическое решение с равномерной по $t \geq 0$ асимптотикой

$$x = 2\rho_0\sqrt{\varepsilon} \cos([\omega + o(1)]t) + o(\sqrt{\varepsilon}),$$

где $\rho_0 = \rho_0(A, \varphi, r_1, r_2, a_2, a_3, \alpha, \beta)$, $\omega = \omega(A) \in (0, \pi)$, $0 < \varepsilon = \lambda - \omega/\sin \omega \ll 1$.

1.2.4 Транскритическая и вилообразная бифуркации

В этом разделе будем считать условия (1.21) выполненными. В уравнении (1.17) произведем асимптотическую замену переменных

$$x(t) = \varepsilon z(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + o(\varepsilon^2),$$

где $\tau = \varepsilon t$. В получившемся равенстве приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . При ε в первой степени получим тождество, а при ε^2 — уравнение на функцию $x_2(\tau)$, разрешимость которого равносильна выполнению равенства:

$$z' = \frac{\lambda}{1 - \lambda} [z + (1 - a_2\varphi)z^2],$$

которое является нормальной формой уравнения (1.17). Если $a_2 \neq 1/\varphi$, то это уравнение имеет два состояния равновесия: $z_0 = 0$ и $z_1 = (a_2\varphi - 1)^{-1}$.

Лемма 1.4. При всех значениях параметра $a_2 \neq 1/\varphi$ состояние равновесия z_0 неустойчиво, а z_1 — локально асимптотически устойчиво. При этом состоянию равновесия z_1 соответствует состояние равновесия x_ε уравнения (1.17):

$$x_\varepsilon = \varepsilon z_1 + o(\varepsilon).$$

Из этого утверждения следует теорема 1.5 (см., например, [34]).

Пусть теперь $a_2 = 1/\varphi$. Тогда в уравнении (1.17) сделаем асимптотическую замену переменных вида

$$x(t) = \sqrt{\varepsilon} z(\tau) + \varepsilon x_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} x_3(t, \tau) + o(\varepsilon^{3/2}),$$

где $\tau = \varepsilon t$, а функции $x_i(t, \tau)$ ($i = 2, 3$) ограничены по t . Нормальная форма в этом случае получается из условия ограниченности функции $x_3(t, \tau)$ по переменной t (это условие выводится из соотношения при $\varepsilon^{3/2}$). Она имеет следующий вид:

$$z' = \frac{\lambda}{1 - \lambda} [z - (1 + a_3 \varphi) z^3].$$

При $a_3 \leq -1/\varphi$ эта нормальная форма не имеет состояний равновесия, отличных от $z_0 = 0$, а при $a_3 > -1/\varphi$ существует еще два состояния равновесия $z_{\pm} = \pm(a_3 \varphi + 1)^{-1/2}$. Отсюда и из следующего утверждения следует теорема 1.6.

Лемма 1.5. Пусть $a_3 > -1/\varphi$. Тогда z_0 неустойчиво, а z_{\pm} — локально асимптотически устойчивы. При этом состояниям равновесия z_{\pm} соответствуют состояния равновесия $x_{\pm\varepsilon}$ уравнения (1.17) с асимптотикой

$$x_{\pm\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon} z_{\pm} + o(\sqrt{\varepsilon}).$$

1.2.5 Бифуркация Андронова-Хопфа

Выберем произвольно на кривой ℓ_0 точку с координатами (A_0, λ_0) . Если в равенствах (1.18) $\lambda = \lambda_0$ и $a_1 = A_0/\varphi$, то уравнение (1.19) имеет пару чисто мнимых корней $\pm i\omega_0$, где ω_0 — корень уравнения $A_0 = -\cos \omega$ из интервала $(0, \pi)$. Важно отметить, что значение λ_0 может быть выражено через A_0 следующим образом:

$$\lambda_0 = \frac{\omega_0}{\sin \omega_0}, \quad \omega_0 = \omega_0(A_0). \quad (1.22)$$

Положим в (1.18)

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad a_1 = \frac{A_0}{\varphi}. \quad (1.23)$$

Отметим, что в этом случае в силу теоремы 1.4 нулевое состояние равновесия уравнения (1.17) неустойчиво. Для изучения способа потери устойчивости воспользуемся методом нормальных форм, делая в уравнении (1.17) асимптотическую замену

$$x(t) = \sqrt{\varepsilon} [z(\tau) \exp(i\omega_0 t) + \bar{z}(\tau) \exp(-i\omega_0 t)] + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau) + \dots \quad (1.24)$$

Здесь $\tau = \varepsilon t$, $z(\tau)$ — комплекснозначная функция, а функции $u_i(t, \tau)$ ($i = 2, 3$) периодичны по t с периодом $2\pi/\omega_0$.

Приравнивая в получившемся равенстве коэффициенты при одинаковых степенях ε , при $\sqrt{\varepsilon}$ получим тождество. При ε в первой степени получим линейное неоднородное уравнение с постоянным запаздыванием на функцию $u_2(t, \tau)$:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = -\lambda_0 [A_0 u_2(t, \tau) + u_2(t - 1, \tau)] + k z^2 \exp(2i\omega_0 t) + \bar{k} \bar{z}^2 \exp(-2i\omega_0 t) + m |z|^2,$$

$$k = \frac{i\omega_0}{\lambda_0} r_1 - \lambda_0 \varphi a_2 - \omega_0(\omega_0 - i\lambda_0 A_0) \alpha + \lambda_0 A_0^2 + i\omega_0(1 + A_0),$$

$$m = -2\lambda_0 \varphi a_2 - 2\omega_0^2 \alpha + 2\lambda_0 A_0^2.$$

Отметим, что для соответствующего однородного уравнения характеристическое уравнение совпадает с (1.19), а неоднородность не содержит резонансных слагаемых. Поэтому частное решение этого уравнения можно выбрать в виде

$$u_2(t, \tau) = pz^2 e^{2i\omega_0 t} + \overline{p}\overline{z}^2 e^{-2i\omega_0 t} + q|z|^2,$$

$$p = \frac{1}{\ell} (\mathbb{P}_1 r_1 + \mathbb{P}_2 a_2 + \mathbb{P}_3 \alpha + \mathbb{P}_4), \quad q = \mathbb{X} a_2 + \mathbb{Y} \alpha + \mathbb{Z}.$$

Здесь

$$\ell = \lambda_0^2 (1 + A_0^2 + 2A_0^3) + 2\omega_0^2 (2 + 3A_0),$$

$$\mathbb{P}_1 = 2\frac{\omega_0^2}{\lambda_0} (1 + A_0) + i\omega_0 \left[A_0(1 + A_0) - \frac{\omega_0^2}{\lambda_0^2} \right],$$

$$\mathbb{P}_2 = -\varphi \lambda_0^2 A_0(1 + A_0) + \varphi \omega_0^2 + 2i\varphi \omega_0 \lambda_0(1 + A_0),$$

$$\mathbb{P}_3 = \lambda_0 A_0 \omega_0^2 (1 + A_0) + \frac{\omega_0^4}{\lambda_0} + i\omega_0 [\lambda_0^2 A_0^2 (1 + A_0) + \omega_0^2 (2 + A_0)],$$

$$\mathbb{P}_4 = \lambda_0^2 A_0^3 (1 + A_0) + \omega_0^2 (2 + 4A_0 + A_0^2) + i\omega_0(1 + A_0) \left[\lambda_0 A_0(1 - A_0) - \frac{\omega_0^2}{\lambda_0} \right],$$

$$\mathbb{X} = -\frac{2\varphi}{1 + A_0}, \quad \mathbb{Y} = -\frac{2\omega_0^2}{\lambda_0(1 + A_0)}, \quad \mathbb{Z} = \frac{2A_0^2}{1 + A_0}.$$

При $\varepsilon^{3/2}$ получим линейное неоднородное уравнение с постоянным запаздыванием на функцию $u_3(t, \tau)$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} = -\lambda_0 [A_0 u_3(t, \tau) + u_3(t - 1, \tau)] +$$

$$+ \left[-(1 + \lambda_0 A_0 + i\omega_0) z' + i\frac{\omega_0}{\lambda_0} z + \xi z |z|^2 \right] \exp(i\omega_0 t) + v z^3 \exp(3i\omega_0 t) + \overline{c\overline{c}},$$

где значение комплексного числа v в данный момент не важно, а явное выражение для ξ будет приведено ниже. Слагаемые, содержащие первую гармонику, являются резонансными. Для существования периодичной по переменной t функции $u_3(t, \tau)$ необходимо выполнение условия

$$z' = \eta z + dz |z|^2. \tag{1.25}$$

Система (1.25) является нормальной формой для уравнения (1.17) в окрестности состояния равновесия $x \equiv 0$. Здесь

$$\eta = \frac{i\omega_0}{\lambda_0(1 + \lambda_0 A_0 + i\omega_0)}, \quad d = \frac{\xi}{(1 + \lambda_0 A_0 + i\omega_0)},$$

$$\begin{aligned}\xi = \xi_0 + \xi_1 r_1 + \xi_2 r_2 + \xi_3 a_2 + \xi_4 a_3 + \xi_5 \alpha + \xi_6 \beta + \\ + \xi_7 r_1 a_2 + \xi_8 r_1 \alpha + \xi_9 a_2 \alpha + \xi_{10} r_1^2 + \xi_{11} a_2^2 + \xi_{12} \alpha^2,\end{aligned}$$

а ниже приведены формулы для вещественных и мнимых частей ξ_i ($i = \overline{0, 12}$).

$$\begin{aligned}Re\xi_0 &= \Delta_1 \mathbb{Z} + 3\lambda_0 A_0^2 + \Delta_2 \frac{Re\mathbb{P}_4}{\ell} + \Delta_3 \frac{Im\mathbb{P}_4}{\ell}, \\ Im\xi_0 &= \omega_0(1 + A_0)\mathbb{Z} - \Delta_3 \frac{Re\mathbb{P}_4}{\ell} + 3\omega_0 A_0 + \Delta_2 \frac{Im\mathbb{P}_4}{\ell}, \\ Re\xi_1 &= 3A_0^2 - (1 + A_0)\mathbb{Z} + \Delta_2 \frac{Re\mathbb{P}_1}{\ell} + \Delta_3 \frac{Im\mathbb{P}_1}{\ell} - \Delta_4 \frac{Re\mathbb{P}_4}{\ell} + \\ &\quad + \frac{\omega_0}{\lambda_0}(1 + 2A_0) \frac{Im\mathbb{P}_4}{\ell}, \\ Im\xi_1 &= \frac{\omega_0}{\lambda_0} \mathbb{Z} - \Delta_3 \frac{Re\mathbb{P}_1}{\ell} + \Delta_2 \frac{Im\mathbb{P}_1}{\ell} - \frac{\omega_0}{\lambda_0}(1 + 2A_0) \frac{Re\mathbb{P}_4}{\ell} - \Delta_4 \frac{Im\mathbb{P}_4}{\ell} + \\ &\quad + \frac{\omega_0}{\lambda_0}(1 + A_0), \\ \xi_2 &= i \frac{\omega_0}{\lambda_0}, \\ Re\xi_3 &= -2\lambda_0 \varphi \left[\frac{Re\mathbb{P}_4}{\ell} + \mathbb{Z} \right] + \Delta_1 \mathbb{X} + 3\varphi \lambda_0 (A_0 - 1) + \Delta_2 \frac{Re\mathbb{P}_2}{\ell} + \Delta_3 \frac{Im\mathbb{P}_2}{\ell}, \\ Im\xi_3 &= -2\lambda_0 \varphi \frac{Im\mathbb{P}_4}{\ell} + \omega_0(1 + A_0)\mathbb{X} + \omega_0 \varphi - \Delta_3 \frac{Re\mathbb{P}_2}{\ell} + \Delta_2 \frac{Im\mathbb{P}_2}{\ell}, \\ \xi_4 &= -3\lambda_0 \varphi, \\ Re\xi_5 &= \Delta_1 \mathbb{Y} - \omega_0^2 \mathbb{Z} - \omega_0^2(3 + A_0) + \Delta_2 \frac{Re\mathbb{P}_3}{\ell} + \Delta_3 \frac{Im\mathbb{P}_3}{\ell} + \omega_0^2(4A_0 - 1) \frac{Re\mathbb{P}_4}{\ell} + \\ &\quad + \Delta_5 \frac{Im\mathbb{P}_4}{\ell}, \\ Im\xi_5 &= \omega_0(1 + A_0)\mathbb{Y} + \lambda_0 \omega_0 A_0 \mathbb{Z} + \lambda_0 \omega_0 A_0(1 + A_0) + \Delta_2 \frac{Im\mathbb{P}_3}{\ell} - \Delta_3 \frac{Re\mathbb{P}_3}{\ell} + \\ &\quad + \omega_0^2(4A_0 - 1) \frac{Im\mathbb{P}_4}{\ell} - \Delta_5 \frac{Re\mathbb{P}_4}{\ell}, \\ \xi_6 &= -3\omega_0^2 + i\lambda_0 \omega_0 A_0, \\ Re\xi_7 &= -2\lambda_0 \varphi \frac{Re\mathbb{P}_1}{\ell} - (1 + A_0)\mathbb{X} - 3\varphi - \Delta_4 \frac{Re\mathbb{P}_2}{\ell} + \frac{\omega_0}{\lambda_0}(1 + 2A_0) \frac{Im\mathbb{P}_2}{\ell}, \\ Im\xi_7 &= -2\lambda_0 \varphi \frac{Im\mathbb{P}_1}{\ell} + \frac{\omega_0}{\lambda_0} \mathbb{X} - \Delta_4 \frac{Im\mathbb{P}_2}{\ell} - \frac{\omega_0}{\lambda_0}(1 + 2A_0) \frac{Re\mathbb{P}_2}{\ell}, \\ Re\xi_8 &= -(1 + A_0)\mathbb{Y} - 3\frac{\omega_0^2}{\lambda_0} + \omega_0^2(4A_0 - 1) \frac{Re\mathbb{P}_1}{\ell} + \Delta_5 \frac{Im\mathbb{P}_1}{\ell} - \Delta_4 \frac{Re\mathbb{P}_3}{\ell} + \\ &\quad + \frac{\omega_0}{\lambda_0}(1 + 2A_0) \frac{Im\mathbb{P}_3}{\ell}, \\ Im\xi_8 &= \frac{\omega_0}{\lambda_0} \mathbb{Y} + A_0 \omega_0 - \Delta_5 \frac{Re\mathbb{P}_1}{\ell} + \omega_0^2(4A_0 - 1) \frac{Im\mathbb{P}_1}{\ell} - \frac{\omega_0}{\lambda_0}(1 + 2A_0) \frac{Re\mathbb{P}_3}{\ell} - \\ &\quad - \Delta_4 \frac{Im\mathbb{P}_3}{\ell},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re\xi_9 &= -2\lambda_0\varphi \left[\frac{Re\mathbb{P}_3}{\ell} + \mathbb{Y} \right] - \omega_0^2\mathbb{X} + \omega_0^2(4A_0 - 1)\frac{Re\mathbb{P}_2}{\ell} + \Delta_5\frac{Im\mathbb{P}_2}{\ell}, \\
Im\xi_9 &= -2\lambda_0\varphi\frac{Im\mathbb{P}_3}{\ell} + \lambda_0A_0\omega_0\mathbb{X} + \omega_0^2(4A_0 - 1)\frac{Im\mathbb{P}_2}{\ell} - \Delta_5\frac{Re\mathbb{P}_2}{\ell}, \\
Re\xi_{10} &= -\Delta_4\frac{Re\mathbb{P}_1}{\ell} + \frac{\omega_0}{\lambda_0}(1 + 2A_0)\frac{Im\mathbb{P}_1}{\ell}, \\
Im\xi_{10} &= -\Delta_4\frac{Im\mathbb{P}_1}{\ell} - \frac{\omega_0}{\lambda_0}(1 + 2A_0)\frac{Re\mathbb{P}_1}{\ell}, \\
\xi_{11} &= -2\lambda_0\varphi \left[\frac{\mathbb{P}_2}{\ell} + \mathbb{X} \right], \\
Re\xi_{12} &= -\omega_0^2\mathbb{Y} - \frac{3}{2}\lambda_0A_0\omega_0^2 + \omega_0^2(4A_0 - 1)\frac{Re\mathbb{P}_3}{\ell} + \Delta_5\frac{Im\mathbb{P}_3}{\ell}, \\
Im\xi_{12} &= \lambda_0\omega_0A_0\mathbb{Y} - \frac{\omega_0^3}{2} + \omega_0^2(4A_0 - 1)\frac{Im\mathbb{P}_3}{\ell} - \Delta_5\frac{Re\mathbb{P}_3}{\ell}.
\end{aligned}$$

В этих формулах использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \lambda_0 [A_0^2 - 2A_0 - 1], & \Delta_2 &= \lambda_0 \left[(1 + A_0)\frac{\omega_0^2}{\lambda_0^2} - A_0^3 - A_0 \right], \\
\Delta_3 &= \omega_0(1 + A_0)(1 + 2A_0), & \Delta_4 &= \left[A_0^2 + A_0 - \frac{\omega_0^2}{\lambda_0^2} \right], \\
\Delta_5 &= \lambda_0\omega_0 \left[A_0 + 2 \left(A_0^2 - \frac{\omega_0^2}{\lambda_0^2} \right) \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, учитывая (1.22), можно сделать вывод о том, что $\xi_i = \xi_i(A_0, \varphi)$, ($i = \overline{0, 12}$). Тогда $\xi = \xi(A_0, \varphi, r_1, r_2, a_2, a_3, \alpha, \beta)$.

Динамика системы (1.25) зависит от знаков надкритичности ($Re(\eta)$) и первой ляпуновской величины ($Re(d)$), которые определяются следующими формулами:

$$Re(\eta) = \frac{\omega_0^2}{\lambda_0 [(1 + \lambda_0 A_0)^2 + \omega_0^2]}, \quad Re(d) = \frac{(1 + \lambda_0 A_0)Re\xi + \omega_0 Im\xi}{(1 + \lambda_0 A_0)^2 + \omega_0^2}.$$

Видно, что $Re(\eta) > 0$, поэтому поведение решений зависит от знака $Re(d)$. Отметим также, что $d = d(A_0, \varphi, r_1, r_2, a_2, a_3, \alpha, \beta)$.

Лемма 1.6. *Нулевое положение равновесия системы (1.25) неустойчиво. Пусть $A_0, \varphi, r_1, r_2, a_2, a_3, \alpha, \beta$ таковы, что $Re(d) < 0$. Тогда у системы (1.25) существует асимптотически устойчивый цикл $z_0(\tau) = \rho_0 \exp(i\psi(\tau))$, где*

$$\rho_0 = \sqrt{-\frac{Re(\eta)}{Re(d)}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{-\lambda_0 [(1 + \lambda_0 A_0)Re\xi + \omega_0 Im\xi]}}. \quad (1.26)$$

Если $A_0, \varphi, r_1, r_2, a_2, a_3, \alpha, \beta$ таковы, что $Re(d) > 0$, то все решения системы (1.25) (кроме $z = 0$) по модулю стремятся к бесконечности.

Случай $Re(d) = 0$ является вырожденным, требует отдельного изучения и далее не рассматривается. Условие $Re(d) < 0$ эквивалентно следующему:

$$(1 + \lambda_0 A_0)Re\xi + \omega_0 Im\xi < 0. \quad (1.27)$$

При выполнении условия (1.27) формула (1.24) устанавливает соответствие между асимптотически орбитально устойчивым циклом $z_0(\tau)$ системы (1.25) и локально асимптотически орбитально устойчивым периодическим решением уравнения (1.17).

Теорема 1.7. Пусть для равенств (1.18) выполнены условия (1.23). Пусть также числа A_0 , φ и значения параметров r_1 , r_2 , a_2 , a_3 , α , β таковы, что выполнено условие (1.27). Тогда у уравнения (1.17) существует периодическое решение с равномерной по $t \geq 0$ асимптотикой

$$x(t) = 2\rho_0\sqrt{\varepsilon} \cos([\omega_0 + o(1)]t) + o(\sqrt{\varepsilon}),$$

которое является локально орбитально асимптотически устойчивым в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нуля. Причем других устойчивых решений в этой окрестности нет.

Здесь ρ_0 определяется формулой (1.26).

Таким образом, при выполнении условия (1.27) в малой окрестности нулевого состояния равновесия уравнения (1.17) происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа при переходе точки с координатами (A, λ) через кривую ℓ_0 в направлении возрастания λ . Если условие (1.27) не выполнено, то в уравнении (1.17) происходит жесткая потеря устойчивости.

1.2.6 Примеры

Ниже рассмотрим возникновение бифуркации Андронова-Хопфа в трех частных случаях уравнения (1.17). Рассмотрим уравнение с запаздыванием, зависящим от искомой функции:

$$\dot{x}(t) = -\lambda x(t - h(x(t))), \quad (1.28)$$

нелинейное уравнение с постоянным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = -R(x(t))x(t - 1), \quad (1.29)$$

а также логистическое уравнение с непостоянным запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = -\lambda(1 + x(t))x(t - h(x(t))). \quad (1.30)$$

Здесь $\lambda > 0$, функция $h(x)$ определена так же, как и для уравнения (1.17). Функция $R(x)$ в окрестности нуля представима в виде

$$R(x) = R_0 + R_1x + R_2x^2 + o(x^2),$$

где $R_0 > 0$, а R_1 и R_2 одновременно не равны нулю.

Все эти уравнения являются частными случаями уравнения (1.17) и имеют нулевое состояние равновесия. Уравнение (1.28) можно получить из (1.17), положив в нем $\varphi a(x) \equiv 1$ и $r(x) = \lambda/(1 + x)$ ($\lambda > 0$). Уравнение (1.29) получается из (1.17) после подстановок $\varphi a(x) \equiv 1$, $h(x) \equiv 1$ и после переобозначения $R(x) = r(x)(1 + x)$. А подстановками $\varphi a(x) \equiv 1$ и $r(x) = \lambda/(1 + x)$ ($\lambda > 0$) уравнение (1.17) приводится к виду (1.30). Характеристическим

уравнением для (1.30) является уравнение

$$\mu = -\lambda \exp(-\mu),$$

которое имеет пару чисто мнимых корней $\mu = \pm i\pi/2$ при $\lambda = \pi/2$. Аналогичное утверждение верно и для уравнений (1.28), (1.29).

В силу сказанного выше, для уравнений (1.28) – (1.30) справедлива теорема 1.7 со следующими уточнениями. Во-первых, для (1.28) и (1.29) условие (1.27) представляет собой соответственно неравенства

$$\frac{\pi(4-\pi)}{8}\alpha^2 < 3\beta - 1, \quad R_2 < \frac{6\pi-4}{5\pi^2}R_1^2,$$

а для уравнения (1.30) это условие эквивалентно следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} \beta_0 < \beta, \\ \alpha_-(\beta) < \alpha < \alpha_+(\beta), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \frac{1}{75\pi(4-\pi)} [5(\pi-4)(3\pi-2) - 8(1+\pi)^2], \\ \alpha_{\pm}(\beta) &= \frac{8(1+\pi) \pm 2\sqrt{150\pi(4-\pi)(\beta-\beta_0)}}{5\pi(4-\pi)}, \end{aligned}$$

Приближенные значения для β_0 , α_{\pm} таковы:

$$\begin{aligned} \beta_0 &\approx -0.84, \\ \alpha_{\pm} &\approx 2.5 \pm 0.2\sqrt{202\beta + 169}. \end{aligned}$$

а на рисунке 1.5 изображена область в плоскости параметров α , β , иллюстрирующая эту систему неравенств. Во-вторых, формула (1.26) для величины ρ_0 в случае уравнений (1.28) и (1.29) принимает соответственно вид

$$\rho_0 = \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi(\pi-4)}{8}\alpha^2 + 3\beta - 1 \right) \right]^{-1/2}, \quad \rho_0 = \left[\frac{(6\pi-4)}{5\pi^2}R_1^2 - R_2 \right]^{-1/2}$$

а в случае уравнения (1.30):

$$\rho_0 = 4\sqrt{5} [5\pi^2(\pi-4)\alpha^2 + 16\pi(1+\pi)\alpha + 120\beta\pi + 24\pi - 16]^{-1/2},$$

И в-третьих, формула для асимптотического приближения устойчивого периодического решения преобразуется к виду

$$x(t) = 2\rho_0\sqrt{\varepsilon} \cos \left(\left[\frac{\pi}{2} + o(1) \right] t \right) + o(\sqrt{\varepsilon}).$$

Отметим, что если в уравнении (1.28) $h(x) \equiv \text{const}$, то это уравнение является линейным и его динамика тривиальна. Если же $h(x) \not\equiv \text{const}$, то в уравнение (1.28) реализуется бифуркация Андронова-Хопфа.

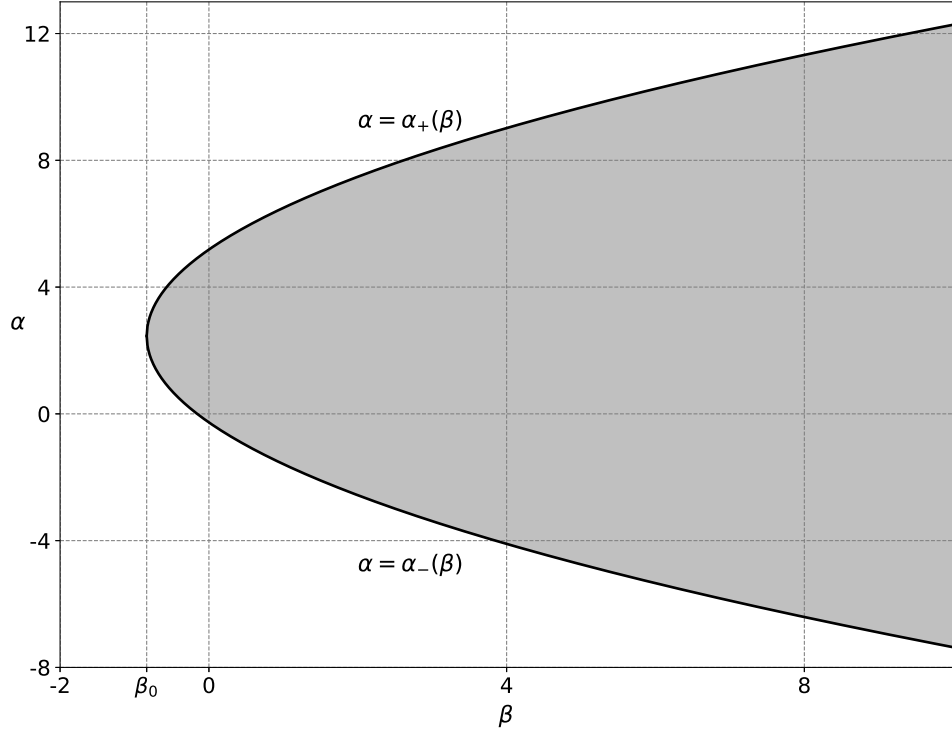


Рис. 1.5: Область значений параметров α, β , при которых происходит бифуркация.

1.3 Уравнение второго порядка с бесконечномерными критическими случаями

1.3.1 Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с запаздыванием, зависящим от состояния,

$$\ddot{x}(t) + \sigma \dot{x}(t) + x(t) = ax(t - T\varphi(x(t))) + f(x(t - T\varphi(x(t))))$$

при условии, что $T \gg 1$. Здесь $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ – параметры, а функция $T\varphi(x)$ играет роль большого запаздывания. Будем предполагать, что $\varphi(x)$ положительна, ограничена сверху некоторой константой $M > 0$, и является достаточно гладкой в нуле. Также, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(0) = 1$. Нелинейная функция f в точке $x = 0$ обращается в нуль вместе со своей первой производной, а также является достаточно гладкой в этой точке. Таким образом $x \equiv 0$ является состоянием равновесия этого уравнения.

Нормировкой времени $t \rightarrow Tt$ это уравнение сводится к

$$\varepsilon^2 \ddot{x}(t) + \varepsilon \sigma \dot{x}(t) + x(t) = ax(t - \varphi(x(t))) + f(x(t - \varphi(x(t)))), \quad (1.31)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon = T^{-1}$).

Поставим задачу исследовать поведение решений в некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нулевого состояния равновесия (1.31). Фазовым пространством уравнения (1.31) будем считать $C_{[-M,0]} \times \mathbb{R}$, где $C_{[-M,0]}$ – пространство непрерывных на отрезке $[-M, 0]$ функций.

Функции φ и f допускают следующие разложения в нуле по формуле Тейлора:

$$\varphi(x) = 1 + \alpha x + \beta x^2 + o(x^2), \quad f(y) = f_2 y^2 + f_3 y^3 + o(y^3).$$

1.3.2 Линейный анализ

Уравнение (1.31) является обобщением уравнения

$$\varepsilon^2 \ddot{x}(t) + \varepsilon \sigma \dot{x}(t) + x(t) = ax(t-1) + f(x(t-1)) \quad (1.32)$$

с постоянным запаздыванием. Уравнения такого типа используются в качестве математических моделей оптоэлектронного осциллятора (см., например, [46]). Анализ его локальной динамики выполнен, например, в работе [12].

Линеаризация уравнения (1.32) в нуле совпадает с линеаризацией в нуле уравнения (1.31), поэтому выводы об устойчивости и неустойчивости их тривиальных состояний равновесия идентичны и известны. Характеристическое уравнение для этой линеаризации выглядит следующим образом:

$$\varepsilon^2 \lambda^2 + \sigma \varepsilon \lambda + 1 = a e^{-\lambda}. \quad (1.33)$$

Для того чтобы описать зависимость расположения корней этого уравнения от параметров a и σ , введем функцию $a(\sigma)$ следующим образом:

$$a(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \geq \sqrt{2}, \\ \sigma \sqrt{1 - \sigma^2/4}, & \sigma < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Лемма 1.7. Пусть $|a| < a(\sigma)$. Тогда существует такое $q > 0$, что при всех достаточно малых ε все корни уравнения (1.33) удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda < -q < 0$.

Пусть $|a| > a(\sigma)$. Тогда существует такое $q > 0$, что при всех достаточно малых ε найдется корень уравнения (1.33), удовлетворяющий условию $\operatorname{Re} \lambda > q > 0$.

Из приведенной леммы следует вывод об устойчивости нулевого положения равновесия исходного уравнения.

Теорема 1.8. Если $|a| < a(\sigma)$, то при достаточно малых ε нулевое решение (1.31) асимптотически устойчиво. Все решения с начальными условиями из его некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности стремятся к нулю.

Если $|a| > a(\sigma)$, то нулевое решение (1.31) неустойчиво и в его некоторой малой (но не зависящей от ε) окрестности нет устойчивых решений.

Далее будем полагать, что значение $|a|$ близко к $a(\sigma)$. В этом случае уравнение (1.33) при малых ε имеет сколь угодно большое количество корней в окрестности мнимой оси. Выпишем их асимптотическое приближение.

В случае $\sigma > \sqrt{2}$ корни λ_n ($n \in \mathbb{Z}$) характеристического уравнения (1.33), вещественная часть которых стремится к нулю (т.е. при $|a| = a(\sigma)$), имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_n = 2\pi i n(1 - \sigma\varepsilon + \sigma^2\varepsilon^2) - \varepsilon^2(\sigma^2 - 2)(2\pi n)^2/2 + o(\varepsilon^2) \quad (a > 0),$$

$$\lambda_n = i\pi(2n+1)(1 - \sigma\varepsilon + \sigma^2\varepsilon^2) - \varepsilon^2(\sigma^2 - 2)\pi^2(2n+1)^2/2 + o(\varepsilon^2) \quad (a < 0).$$

При $\sigma < \sqrt{2}$ асимптотика корней, расположенных сколь угодно близко к мнимой оси, имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\omega_0}{\varepsilon}i + (\theta + \Omega + 2\pi n)i - \varepsilon\frac{2}{\sigma}(\theta + \Omega + 2\pi n)i - \varepsilon^2(d_1 + d_2i)(\theta + \Omega + 2\pi n)^2 + \\ + \varepsilon^2\frac{4}{\sigma^2}(\theta + \Omega + 2\pi n)i + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{1 - \sigma^2/2}$, $\Omega \in [0, 2\pi)$ – корень уравнения $\sigma^2/2 + i\sigma\sqrt{1 - \sigma^2/2} = a_0e^{-i\Omega}$, ($a_0 = \pm\sigma\sqrt{1 - \sigma^2/4}$), а через $\theta = \theta(\varepsilon)$ обозначено такое значение из полуинтервала $[0, 2\pi)$, что $\varepsilon^{-1}\omega_0 + \theta$ является кратным 2π числом. Также

$$d_1 = a_0^{-2}(2 - \sigma^2), \quad d_2 = a_0^{-2}\sigma\sqrt{1 - \sigma^2/2}. \quad (1.34)$$

1.3.3 Случай $\sigma > \sqrt{2}$

Пусть $\sigma > \sqrt{2}$. Сначала рассмотрим случай, когда a близко к единице, т.е. $a = 1 + \varepsilon^2a_1$ ($a_1 \in \mathbb{R}$). Согласно методу квазинормальных форм сделаем в исходном уравнении (1.31) замену

$$x = \varepsilon^2u(\tau, r) + \varepsilon^4u_2(\tau, r) + o(\varepsilon^4). \quad (1.35)$$

Здесь $\tau = \varepsilon^2t$, $r = (1 - \sigma\varepsilon + \sigma^2\varepsilon^2)t$, а функции $u(\tau, r)$ и $u_2(\tau, r)$ периодичны по r с периодом 1. Получим асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} \varepsilon^2u + \varepsilon^3\sigma\frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon^4\left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \sigma^2\frac{\partial u}{\partial r} + u_2\right] + \dots = \\ = \varepsilon^2u + \varepsilon^3\sigma\frac{\partial u}{\partial r} + \varepsilon^4\left[-\frac{\partial u}{\partial \tau} - \sigma^2\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \alpha u\frac{\partial u}{\partial r} + a_1u + f_2u^2 + u_2\right] + \dots \end{aligned}$$

Приравнивая в получившемся асимптотическом равенстве коэффициенты при одинаковых степенях ε , при ε^4 получим квазинормальную форму:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 - 2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \alpha u\frac{\partial u}{\partial r} + a_1u + f_2u^2, \quad u(\tau, r+1) = u(\tau, r). \quad (1.36)$$

У этой краевой задачи устойчивыми являются только пространственно-однородные решения, что обеспечивает следующий результат.

Теорема 1.9. Пусть $a_1 > 0$. Тогда нулевое решение уравнения (1.31) неустойчиво, и у него существует асимптотически устойчивое состояние равновесия $x_*(t, \varepsilon)$, имеющее следующую асимптотику:

$$x_*(t, \varepsilon) = -\varepsilon^2\frac{a_1}{f_2} + o(\varepsilon^4).$$

Если $a_1 < 0$, то нулевое решение уравнения (1.31) асимптотически устойчиво, а $x_*(t, \varepsilon)$ – неустойчиво.

Далее рассмотрим случай $a = -1 - \varepsilon^2a_1$, $a_1 \in \mathbb{R}$. Для этого случая в уравнении (1.31)

сделаем асимптотическую замену

$$x = \varepsilon u(\tau, r) + \varepsilon^2 u_2(\tau, r) + \varepsilon^3 u_3(\tau, r) + o(\varepsilon^3), \quad (1.37)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$, $r = (1 - \sigma\varepsilon + \sigma^2\varepsilon^2)t$, $u(\tau, r+1) = -u(\tau, r)$, а функции $u_{2,3}(\tau, r)$ периодичны по r с периодом 1. Приравнявая в получившемся асимптотическом равенстве

$$\begin{aligned} \varepsilon u + \varepsilon^2 \left[u_2 + \sigma \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \varepsilon^3 \left[u_3 + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \sigma^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \sigma \frac{\partial u_2}{\partial r} \right] + \dots = \varepsilon u + \varepsilon^2 \left[\sigma \frac{\partial u}{\partial r} - \alpha u \frac{\partial u}{\partial r} - u_2 + f_2 u^2 \right] + \\ \varepsilon^3 \left[-\frac{\partial u}{\partial \tau} - \sigma^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \left(\alpha \sigma + \frac{\alpha^2}{2} \right) u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \sigma(\alpha - 2f_2) u \frac{\partial u}{\partial r} - (\beta + 2\alpha f_2) u^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right. \\ \left. - \sigma \frac{\partial u_2}{\partial r} - \alpha u_2 \frac{\partial u}{\partial r} + \alpha u \frac{\partial u_2}{\partial r} - u_3 + a_1 u - 2f_2 u u_2 - f_3 u^3 \right] + \dots \end{aligned}$$

коэффициенты при одинаковых степенях ε , при ε^2 получим выражение для функции u_2 :

$$u_2 = -\frac{\alpha}{2} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{f_2}{2} u^2.$$

При ε^3 получим выражение для функции u_3

$$2u_3 = \alpha \sigma \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \alpha \sigma u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\alpha^2}{2} u \frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

и квазинормальную форму

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\sigma^2 - 2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{\alpha^2}{2} u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \left(\beta + \frac{\alpha f_2}{2} \right) u^2 \frac{\partial u}{\partial r} + a_1 u - (f_2^2 + f_3) u^3, \quad u(\tau, r+1) = -u(\tau, r). \quad (1.38)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.10. Пусть $a_1 > 0$. Если краевая задача (1.38) имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$, то уравнение (1.31) имеет асимптотическое по невязке решение $x_*(t, \varepsilon)$ с точностью до $O(\varepsilon^4)$ равномерно по всем $t \geq 0$ вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon u_* + \varepsilon^2 \left[\frac{f_2}{2} u_*^2 - \frac{\alpha}{2} u_* \frac{\partial u_*}{\partial r} \right] + \frac{\varepsilon^3}{2} \left[\alpha \sigma \left(\frac{\partial u_*}{\partial r} \right)^2 - \alpha \sigma u_* \frac{\partial u_*}{\partial r} - \frac{\alpha^2}{2} u_* \frac{\partial^2 u_*}{\partial r^2} \right].$$

Доказательство. Для доказательства необходимо подставить выражение для $x_*(t, \varepsilon)$ в (1.31) и провести необходимые упрощения. В результате все слагаемые при степенях ε вплоть до ε^4 сократятся. Равномерность полученной оценки по $t \geq 0$ следует из периодичности $u_*(\tau, r)$ и его производных. \square

1.3.4 Случай $0 < \sigma < \sqrt{2}$

Пусть теперь $0 < \sigma < \sqrt{2}$.

Отметим, что этот случай был рассмотрен в работе [9] в предположении, что параметр α достаточно мал. В настоящей работе не делаются предположения относительно малости этого параметра.

Положим $a = a_0(1 + \varepsilon^2 a_1)$, где $a_0 = \pm \sigma \sqrt{1 - \sigma^2/4}$. В уравнении (1.31) сделаем замену

$$x = \varepsilon^2 [u(\tau, r)e^{is} + \bar{u}(\tau, r)e^{-is}] + \varepsilon^3 u_2(\tau, r, s) + \varepsilon^4 u_3(\tau, r, s) + o(\varepsilon^4), \quad (1.39)$$

где $\tau = \varepsilon^2 t$,

$$r = \left(1 - \varepsilon \frac{2}{\sigma} + \varepsilon^2 \frac{4}{\sigma^2} + 2d_2 \varepsilon^2 (\theta + \Omega)\right) t, \quad s = \left(\frac{\omega_0}{\varepsilon} + \theta + \Omega + \varepsilon \frac{2}{\sigma} (\theta + \Omega) - \varepsilon^2 d_2 (\theta + \Omega)^2\right) t, \quad (1.40)$$

функция $u(\tau, r)$ периодична по второму аргументу с периодом 1, а функции $u_{2,3}(\tau, r, s)$ периодичны по r с периодом 1 и по s с периодом 2π .

После выполнения замены (1.39) получим асимптотическое равенство:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 [(1 - \omega_0^2 + i\sigma\omega_0) u e^{is} + \text{к.с.}] + \\ & + \varepsilon^3 \left[\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \sigma\omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial s} + u_2 + e^{is} \left\{ (\sigma + 2i\omega_0) \frac{\partial u}{\partial r} + (\theta + \Omega)(-2\omega_0 + i\sigma)u \right\} + \text{к.с.} \right] + \\ & + \varepsilon^4 \left[\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial s^2} + \sigma\omega_0 \frac{\partial u_3}{\partial s} + u_3 + 2\omega_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r \partial s} + 2\omega_0(\theta + \Omega) \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \sigma \frac{\partial u_2}{\partial r} + \sigma(\theta + \Omega) \frac{\partial u_2}{\partial s} + \right. \\ & + e^{is} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (\sigma\xi_1 + 2i\omega_0\xi_1 + 2i(\theta + \Omega)) \frac{\partial u}{\partial r} - (2\omega_0\omega_1 + (\theta + \Omega)^2 - i\omega_0\omega_1) u \right\} + \text{к.с.} \left. \right] + \dots = \\ & \varepsilon^2 (a_0 e^{-i\Omega} u e^{is} + \text{к.с.}) + \\ & + \varepsilon^3 \left[a_0 u_2(\tau, r, s - \Omega) + a_0 e^{-i\Omega} e^{is} \left\{ -\xi_1 \frac{\partial u}{\partial r} - i\omega_1 u \right\} + \text{к.с.} - a_0 \alpha i \omega_0 \{ u^2 e^{-i\Omega} e^{2is} - \bar{u}^2 e^{i\Omega} e^{-2is} + (e^{-i\Omega} - e^{i\Omega}) u \} \right. \\ & + \varepsilon^4 \left[a_0 u_3(\tau, r, s - \Omega) - a_0 \xi_1 \frac{\partial u_2}{\partial r}(\tau, r, s - \Omega) - a_0 \omega_1 \frac{\partial u_2}{\partial s}(\tau, r, s - \Omega) + \right. \\ & + a_0 e^{-i\Omega} e^{is} \left\{ -\frac{\partial u}{\partial \tau} + (-\xi_2 + i\omega_1 \xi_1) \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\xi_1^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \left(\frac{\omega_1^2}{2} + i\omega_2 \right) u \right\} + \text{к.с.} - \\ & - a_0 \alpha i \omega_0 u_2 (u e^{i(s-\Omega)} - \bar{u} e^{-i(s-\Omega)}) - a_0 \alpha \omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial s}(\tau, r, s - \Omega) (u e^{is} + \bar{u} e^{-is}) - \\ & - a_0 \alpha \left\{ e^{2is} e^{-i\Omega} \left((1 - i\omega_0 \xi_1) u \frac{\partial u}{\partial r} + (\omega_0 \omega_1 + i(\theta + \Omega)) u^2 \right) + \right. \\ & + e^{-i\Omega} \left((1 - i\omega_0 \xi_1) \bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} + (\omega_0 \omega_1 + i(\theta + \Omega)) |u|^2 \right) + \text{к.с.} \left. \right\} - \\ & - a_0 \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{2} \{ u^3 e^{3is} e^{-i\Omega} + (2e^{-i\Omega} + e^{i\Omega}) u |u|^2 e^{is} + \text{к.с.} \} + (a_1 a_0 e^{-i\Omega} u e^{is} + \text{к.с.}) + \\ & + f_2 \{ u^2 e^{-2i\Omega} e^{2is} + \text{к.с.} + 2|u|^2 \} \left. \right] + \dots \end{aligned}$$

Выполним замену (1.39) и в получившемся равенстве будем приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . При ε^2 получим тождество

$$1 + \omega_0^2 + i\sigma\omega_0 = a_0 e^{-i\Omega}.$$

При ε^3 получим линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянным запазды-

ванием на функцию u_2 :

$$\omega_0^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + \sigma \omega_0 \frac{\partial u_2}{\partial s} + u_2 - a_0 u_2(\tau, r, s - \Omega) = -a_0 \alpha \omega_0 i (u e^{is} + \bar{u} e^{-is}) (u e^{is-i\Omega} - \bar{u} e^{-is+i\Omega}).$$

В неоднородности нет резонансных слагаемых, поэтому у этого уравнения существует периодическое по s решение u_2 , которое может быть выбрано в виде:

$$u_2 = \ell_1 u^2 e^{2is} + \bar{\ell}_1 \bar{u}^2 e^{-2is} + \ell_2 |u|^2, \quad (1.41)$$

где

$$\ell_1 = -i \frac{a_0 e^{-i\Omega} \alpha \omega_0}{1 - a_0 e^{-2i\Omega} - 4\omega_0^2 + 2i\sigma\omega_0}, \quad \ell_2 = i \frac{a_0 \alpha \omega_0 (e^{i\Omega} - e^{-i\Omega})}{1 - a_0}. \quad (1.42)$$

Отметим, что функция (1.41) также является периодической по r .

Далее, при ε^4 получим линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянным запаздыванием на функцию u_3 . Из условия разрешимости этого уравнения в классе периодических по s функций получается квазинормальная форма для исходного уравнения (1.31):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & (d_1 + id_2) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2(\theta + \Omega) d_1 i \frac{\partial u}{\partial r} + a_1 u - d_1 (\theta + \Omega)^2 u + \\ & + \left[\frac{\alpha \omega_0 i}{e^{-i\Omega}} \{ \ell_1 (e^{i\Omega} - 2e^{-2i\Omega}) - \ell_2 e^{-i\Omega} \} - \frac{\alpha^2 \omega_0^2}{2e^{-i\Omega}} (2e^{-i\Omega} + e^{i\Omega}) \right] u |u|^2, \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$u(\tau, r + 1) = u(\tau, r). \quad (1.44)$$

Здесь d_1 и d_2 определяются формулами (1.34). Отметим, что коэффициенты уравнения (1.43) зависят от $\theta = \theta(\varepsilon)$. В силу определения функции $\theta(\varepsilon)$ для каждого значения $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ найдется такая последовательность ε_n , что $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\theta(\varepsilon_n) = \theta_0$.

Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 1.11. Пусть $a_1 > 0$ и квазинормальная форма (1.43), (1.44) при некотором $\theta = \theta_0$ имеет периодическое по τ решение $u_*(\tau, r)$. Пусть ε_n — такая стремящаяся к нулю последовательность, что $\theta(\varepsilon_n) = \theta_0$. Тогда существуют такие периодические по r и по s функции $u_2(\tau, r, s)$ и $u_3(\tau, r, s)$, что уравнение (1.31) при $\varepsilon = \varepsilon_n$ имеет асимптотическое по невязке решение $x_*(t, \varepsilon)$ с точностью до $O(\varepsilon^5)$ равномерно по $t \in [0, +\infty)$ вида

$$x_*(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 [u(\varepsilon^2 t, r) e^{is} + \bar{u}(\varepsilon^2 t, r) e^{-is}] + \varepsilon^3 u_2(\varepsilon^2 t, r, s) + \varepsilon^4 u_3(\varepsilon^2 t, r, s),$$

где r и s определяются формулой (1.40).

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.10.

Динамика системы (1.43), (1.44) может качественно различаться при разных значениях θ . Таким образом в уравнении (1.31) возможен бесконечный процесс бифуркаций при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. [41]).

Выводы

Во-первых, для уравнения (1.1) были изучены способы потери устойчивости нулевым положением равновесия при переходе параметра a через значения 1 и a_0 . А именно: в первом случае установлено возникновение бифуркации обмена устойчивостью, а во втором случае найдено достаточное условие реализации суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа. В обоих случаях получены асимптотики решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркаций. Важно отметить, что даже если функция F является линейной (при нелинейном запаздывании), то для уравнения (1.1) сохраняется вывод о бифуркации Андронова – Хопфа.

Во-вторых, подробно изучена локальная динамика логистического уравнения с запаздыванием, зависящим от текущего состояния. Исследована устойчивость нетривиального состояния равновесия. В плоскости параметров (A, λ) выявлены области его асимптотической устойчивости и неустойчивости, а также найдены критические случаи (те значения параметров A и λ , при которых неприменима теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению).

Затем с помощью метода нормальных форм была исследована локальная динамика уравнения при значениях параметров, близких к критическим. Установлены необходимые и достаточные условия (накладываемые на значения параметров $A, \varphi, r_1, r_2, a_2, a_3, \alpha, \beta$) возникновения в этом уравнении как бифуркации Андронова-Хопфа, так и транскритической и виллообразной бифуркаций. Наконец, построены асимптотические приближения решений, приобретающих устойчивость в результате возникающих бифуркаций.

В-третьих, для уравнения (1.31) второго порядка с запаздыванием, зависящим от состояния, исследован вопрос о его локальной динамике в окрестности нулевого положения равновесия. Рассмотрены три критических случая. С помощью метода квазинормальных форм построены асимптотические по невязке решения исходного уравнения в случаях, близких к критическим, а также в одном из случаев доказано возникновение бифуркации обмена устойчивостью и построена асимптотика состояния равновесия, приобретающего устойчивость.

Глава 2

Релаксационные колебания в логистическом уравнении с запаздыванием, зависящим от состояния

Введение

В настоящей главе проводится исследование нелокальной динамики логистического уравнения с запаздыванием, зависящим от состояния, а также от большого параметра. А именно изучается вопрос существования нелокальных релаксационных периодических решений у этого уравнения. Под релаксационным периодическим решением далее понимается такое периодическое решение, которое имеет асимптотически большую амплитуду колебаний, а также чередование интервалов быстрых и медленных движений.

Рассматриваемое уравнение имеет вид

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t)[1 - N(\tau(t, N(t - L), \lambda))],$$

где λ – положительный параметр, число $L \geq 0$, а функция $\tau(t, N, \lambda)$ выглядит следующим образом:

$$\tau(t, N(t - L), \lambda) = t - h(\lambda) - f(N(t - L)).$$

Случаи $L = 0$ и $L > 0$ имеют различия в точной постановке задачи и в деталях доказательства. Ситуация $L = 0$ рассмотрена в параграфе 2.1, а случаю $L > 0$ посвящен параграф 2.2.

Исследование поставленного вопроса в обоих случаях проводится с помощью метода большого параметра (см. [10, 13]). Для этого в фазовом пространстве исходного уравнения выбирается замкнутое, ограниченное и выпуклое множество \mathbb{S} . Далее с помощью интегрирования этого уравнения по шагам изучается асимптотика всех решений $N_\psi(t, \lambda)$ с начальными условиями $\psi(t) \in \mathbb{S}$ и показывается, что через некоторое время $t = T_\psi(\lambda)$ решение $N_\psi(t, \lambda)$ снова попадает в множество \mathbb{S} . Таким образом определяется оператор последования Π , отображающий множество \mathbb{S} в себя. У этого оператора существует неподвижная точка (см., например, [24]), которой соответствует периодическое решение исходного уравнения.

В работе [13] подробно исследовано существование, устойчивость и асимптотика нелокаль-

ного релаксационного периодического решения логистического уравнения с распределенным запаздыванием.

Результаты этой главы опубликованы в работах [3, 4].

2.1 Случай, когда запаздывание зависит от состояния в настоящем времени

2.1.1 Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t) [1 - N(\tau(t, N(t), \lambda))], \quad (2.1)$$

где λ – положительный параметр, а функция $\tau(t, N, \lambda)$ имеет вид:

$$\tau(t, N(t), \lambda) = t - h(\lambda) - f(N(t)). \quad (2.2)$$

При исследовании нелокальной динамики уравнения (2.1) будем предполагать, что параметр λ является достаточно большим: $\lambda \gg 1$. Функция $h(\lambda)$ из (2.2) положительна и удовлетворяет условиям:

$$(H_1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = \ell, \text{ где } 0 \leq \ell < 1;$$

$$(H_2) \quad \text{если } \ell = 0, \text{ то } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda h(\lambda) / \ln \lambda = \infty;$$

а на функцию $f(N)$ наложены следующие ограничения:

$$(F_1) \quad f(N) \text{ положительна и достаточно гладкая при } N \geq 0;$$

$$(F_2) \quad f(N) \text{ монотонно убывает при } N > 0;$$

$$(F_3) \quad f(1) = 1 - \ell;$$

$$(F_4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} f(N) = 0.$$

Примером такой функции может служить функция

$$f(N) = \frac{2(1 - \ell)}{1 + N^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Отметим, что условие (F_3) является условием нормировки, и может быть достигнуто заменой переменных.

Обозначим $\tau_0 = f(0) + \sup_{\lambda \gg 1} h(\lambda)$ и в качестве фазового пространства для уравнения (2.1) выберем пространство $C([- \tau_0, 0])$. Фиксируем произвольно $a \in (0, 1)$ и определим класс начальных условий следующим образом:

$$\mathbb{S} = \{\varphi(t) \in C([- \tau_0, 0]), \quad e^{\lambda t} \leq \varphi(t) \leq e^{a\lambda t}, \quad \varphi(0) = 1\}.$$

Отметим, что множество \mathbb{S} является выпуклым, ограниченным и замкнутым.

Ставится задача изучить существование нелокальных релаксационных решений уравнения (2.1) с начальными условиями из класса \mathbb{S} , а также исследовать их характеристики.

2.1.2 Основные результаты

Основными результатами настоящего параграфа являются следующие теоремы.

Теорема 2.1. Пусть функции $h(\lambda)$ и $f(N)$ из (2.2) удовлетворяют соответственно ограничениям (H_1) – (H_2) и (F_1) – (F_4) . Тогда при $\lambda \gg 1$ уравнение (2.1) имеет нелокальное релаксационное периодическое решение $N(t, \lambda)$ с начальным условием из класса \mathbb{S} .

Доказательство этой теоремы приведено в разделе 2.1.3.

Обозначим через $T(\lambda)$ период этого решения, а также введем следующие обозначения:

$$M(\lambda) = \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} N(t, \lambda), \quad m(\lambda) = \min_{0 \leq t \leq T(\lambda)} N(t, \lambda).$$

Положим также

$$d = \exp\left(-\frac{1}{a}\right).$$

Пусть $t_0(\lambda)$ – промежуток времени, за который решение $N(t, \lambda)$ изменяется от максимального значения $M(\lambda)$ до значения $N \equiv 1$.

Асимптотические свойства указанного периодического решения зависят от выбора конкретного вида функции $h(\lambda)$. Следующая теорема описывает эти зависимости.

Теорема 2.2. Пусть $L = 0$ и выполнены условия теоремы 2.1. Тогда, во-первых, справедливы предельные равенства:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_M(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = \ell. \quad (2.3)$$

Во-вторых, для всякого $0 < \delta < 1$ найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda > \lambda_0$ справедливо неравенство

$$t_0(\lambda) > 1 - \ell - \delta. \quad (2.4)$$

В-третьих, при $\lambda \gg 1$ выполнены неравенства:

$$M(\lambda) \geq d \exp(\lambda h(\lambda)), \quad (2.5)$$

$$m(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \left[-\frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda h(\lambda)) + 1 + \tau_0\right]\right), \quad (2.6)$$

$$T(\lambda) \geq \frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda h(\lambda)) - 1 - \tau_0. \quad (2.7)$$

Здесь

$$d = \exp\left(-\frac{1}{a}\right).$$

Доказательство этой теоремы приведено в разделе 2.1.4.

На рис. 2.1 приведено решение уравнения (2.1) при $a = 0.3$ и $\lambda = 8$ с начальным условием $\varphi(t) = \exp(a\lambda t)$, функцией $h(\lambda) = 1/2 + \cos \lambda/\sqrt{\lambda}$, функцией $f(N) = 1/(1 + N)$.

2.1.3 Доказательство существования периодического решения

Для доказательства теоремы 2.1 используем метод большого параметра. Возьмем некоторое $\varphi(t) \in \mathbb{S}$ и будем интегрировать уравнение (2.1) по шагам. В силу теоремы существования и единственности решения начальному условию $\varphi(t)$ соответствует решение $N_\varphi := N_\varphi(t, \lambda)$. Обозначим

$$g(t, \lambda) := \tau(t, N_\varphi, \lambda) = t - h(\lambda) - f(N_\varphi).$$

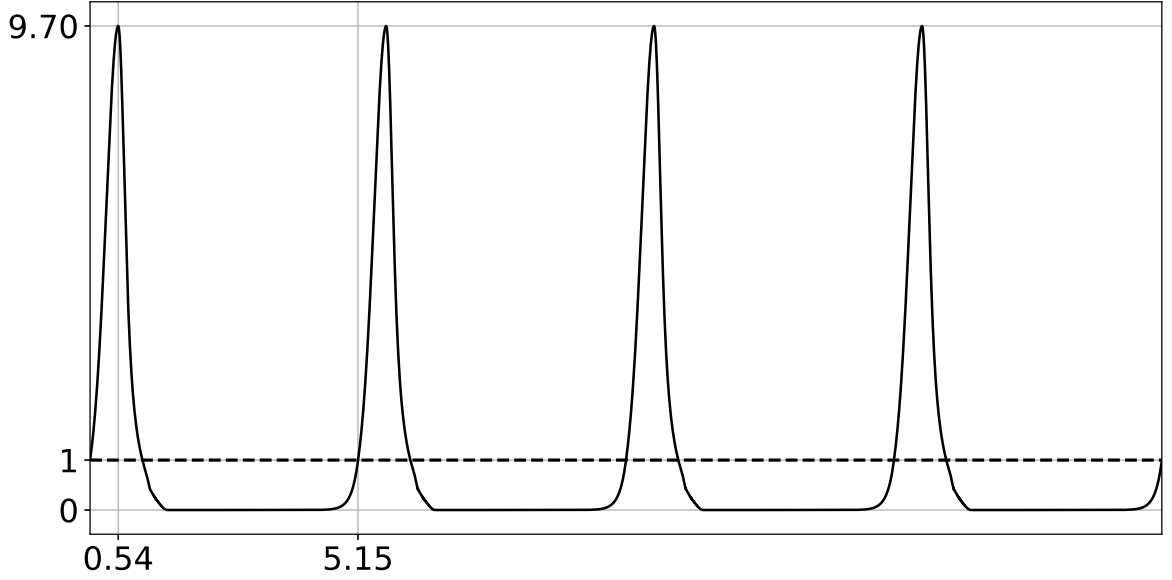


Рис. 2.1: Пример решения уравнения (2.1).

Лемма 2.1. $\exists \xi > 0: \forall t \in (0, \xi)$ и при каждом λ функция $g(t, \lambda)$ строго отрицательна.

Доказательство. В силу положительности $h(\lambda)$ справедливо неравенство

$$g(t, \lambda) < t - f(N_\varphi(t, \lambda)), \quad t, \lambda > 0.$$

Выберем $\alpha > 0$ настолько малым, что $1 - \ell - \alpha > 0$. Введем обозначение $\alpha_0 = 1 - \ell - \alpha$. В силу непрерывности функции f , гарантируемой ограничением (F_1) , для этого α найдется такое $\beta > 0$, что $\forall |z - 1| < \beta$ верно

$$|f(z) - f(1)| = |f(z) - 1 + \ell| < \alpha.$$

Здесь равенство справедливо в силу (F_3) . При всех $\lambda > 0$ функция $N_\varphi(t, \lambda)$ непрерывна в точке $t = 0$, т.е. для выбранного ранее β найдется такое $\delta > 0$, что при $|t| < \delta$ верно

$$|N_\varphi(t, \lambda) - 1| < \beta.$$

Т.о. $\forall \lambda > 0, |t| < \delta$ выполнено $|f(N_\varphi(t, \lambda)) - 1 + \ell| < \alpha$, откуда следует, что

$$f(N_\varphi(t, \lambda)) > \alpha_0.$$

Тогда $g(t, \lambda) < t - \alpha_0$. Для завершения доказательства достаточно положить $\xi = \min\{\alpha_0, \delta\}$. □

Интегрирование уравнения на первом шаге

Как было указано выше, функция $g(t, \lambda)$ строго отрицательна при некоторых значениях $t \geq 0$. При таких значениях t решение N_φ удовлетворяет соотношению

$$\dot{N}_\varphi = \lambda N_\varphi [1 - \varphi(g(t, \lambda))]. \quad (2.8)$$

Отсюда следует, что N_φ монотонно возрастает (а значит $N_\varphi > 1$) при рассматриваемых t (для всех $\lambda > 0$). В силу ограничения (F_2) найдется такой момент времени $t_M = t_M(\lambda)$, что $g(t_M, \lambda) = 0$. Так как $\dot{N}_\varphi(t_M, \lambda) = 0$ и $\dot{g}(t_M, \lambda) > 0$, то существует такое $z > t_M$ (зависящее от λ), что решение N_φ убывает при $t \in (t_M, t_M + z)$. Поэтому точка t_M является точкой максимума решения уравнения (2.1). Введем обозначение

$$M_\varphi(\lambda) := N_\varphi(t_M, \lambda).$$

Еще раз отметим, что точка t_M является первым положительным корнем уравнения

$$t_M = h(\lambda) + f(M_\varphi(\lambda)). \quad (2.9)$$

Отсюда и из условий (H_1) , (F_1) – (F_3) следует справедливость неравенств

$$h(\lambda) < t_M < 1 \quad (2.10)$$

при достаточно больших λ . На рис. 2.2 показано поведение функции $N_\varphi(t, \lambda)$ на отрезке $[0, t_M]$.

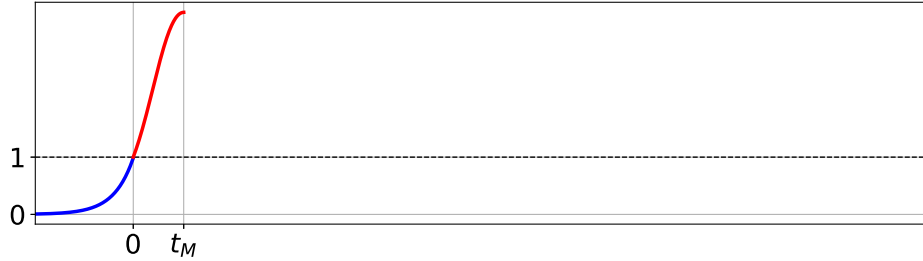


Рис. 2.2: График решения $N_\varphi(t, \lambda)$ уравнения (2.1) на отрезке $[0, t_M]$.

Вспомогательные утверждения

Функция $g(t, \lambda)$ играет важную роль в доказательстве теоремы 2.1, поэтому установим несколько ее свойств, которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 2.2. Для всех $\lambda > 0$ и для всех $t \in [0, t_M]$ справедливы неравенства $-\tau_0 \leq g(t, \lambda) \leq 0$.

Лемма 2.3. Для всех $\lambda > 0$ и для всех $t \in [0, t_M]$ верно неравенство

$$g(t, \lambda) \leq t - t_M.$$

Доказательство. При всех $\lambda > 0$ и при всех $0 \leq t \leq t_M$ выполнено неравенство $N_\varphi(t, \lambda) \leq M_\varphi(\lambda)$. Отсюда и из (F_2) следует неравенство $f(N_\varphi(t, \lambda)) \geq f(M_\varphi(\lambda))$. Поэтому

$$g(t, \lambda) = t - h(\lambda) - f(N_\varphi(t, \lambda)) \leq t - h(\lambda) - f(M_\varphi(\lambda)) = t - t_M.$$

□

Лемма 2.4. При всех $\lambda > 0$ и при всех $t > t_M$ верно неравенство $g(t, \lambda) > 0$.

Доказательство. Предположим, что это не так, т.е. $\exists \lambda_0 > 0$ и $\exists x > t_M(\lambda_0)$, что $g(x, \lambda_0) = 0$. Функция $g(t, \lambda)$ может либо пересечь нулевое значение убывая, либо коснуться его, поэтому ее производная в этой точке должна быть неположительна: $\dot{g}(x, \lambda_0) \leq 0$. Поскольку $g(x, \lambda_0) = 0$, то $N_\varphi(g(x, \lambda_0)) = 1$ и в силу исходного уравнения

$$\dot{N}_\varphi(x, \lambda_0) = \lambda_0 N_\varphi(x, \lambda_0) [1 - N_\varphi(g(x, \lambda_0))] = 0.$$

Для $\dot{g}(t, \lambda)$ имеем формулу:

$$\dot{g}(t, \lambda) = 1 - f'(N_\varphi(t, \lambda)) \dot{N}_\varphi(t, \lambda).$$

Остюда сразу получается, что $\dot{g}(x, \lambda_0) = 1$. Получено противоречие. \square

Асимптотические оценки решения на первом шаге

Из леммы 2.2 следует, что уравнение (2.8) имеет смысл на отрезке $t \in [0, t_M]$. Поэтому для функции $N_\varphi(t, \lambda)$, являющейся его решением, справедлива формула:

$$N_\varphi(t, \lambda) = \exp \left(\lambda t - \lambda \int_0^t \varphi(g(s, \lambda)) ds \right), \quad t \in [0, t_M]. \quad (2.11)$$

На этой формуле и на лемме 2.3 основано доказательство следующей леммы, устанавливающей асимптотические оценки рассматриваемого решения $N_\varphi(t, \lambda)$ при $t \in [0, t_M]$.

Лемма 2.5. При $t \in [0, t_M]$ и при всех $\lambda > 0$ справедливы неравенства

$$N_\varphi(t, \lambda) < \exp(\lambda t), \quad N_\varphi(t, \lambda) \geq \exp \left(\lambda t - \frac{1}{a} [e^{a\lambda t} - 1] e^{-a\lambda t_M} \right). \quad (2.12)$$

Доказательство. Решение имеет вид (2.11). Первое из неравенств (2.12) справедливо, т.к. $\varphi(u) > 0$ при $u \in [-\tau_0, 0]$. Для доказательства второго из них воспользуемся тем, что $\varphi(u) \leq \exp(a\lambda u)$ при $u \in [-\tau_0, 0]$. Тогда получаем, что

$$N_\varphi(t, \lambda) \geq \exp \left(\lambda t - \lambda \int_0^t e^{a\lambda g(s, \lambda)} ds \right).$$

Используя лемму 2.3, продолжим оценку следующим образом:

$$N_\varphi(t, \lambda) \geq \exp \left(\lambda t - \lambda \int_0^t e^{a\lambda(s-t_M)} ds \right) = \exp \left(\lambda t - \frac{1}{a} [e^{a\lambda t} - 1] e^{-a\lambda t_M} \right).$$

\square

Второй шаг интегрирования

Поскольку функция $g(t, \lambda)$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow \infty$ и непрерывна, то $\exists t_* = t_*(\lambda)$, $t_* > t_M$ такая, что $g(t_*, \lambda) = t_M$. Используя определение функции $g(t, \lambda)$, установим

оценки на величину t_* . Выражение для t_* имеет вид:

$$t_* = t_M + h(\lambda) + f(N(t_*, \lambda)).$$

Тогда при всех $\lambda > 0$

$$t_M + h(\lambda) < t_* < t_M + h(\lambda) + f(0). \quad (2.13)$$

Замечание 2.1. Напомним, что t_* – первая точка, в которой функция g принимает значение t_M . Отсюда и из леммы 2.4 следует, что $g(s, \lambda) \in [0, t_M]$ при $s \in [t_M, t_*]$, т.е. при каждом $\lambda > 0$ функция $g(s, \lambda)$ переводит отрезок $[t_M, t_*]$ в отрезок $[0, t_M]$.

Таким образом, решение уравнения (2.1) на отрезке $[t_M, t_*]$ имеет вид

$$N_\varphi(t, \lambda) = M_\varphi(\lambda) \exp \left(\lambda[t - t_M] - \lambda \int_{t_M}^t N_\varphi(g(s, \lambda)) ds \right). \quad (2.14)$$

Также отметим, что на этом отрезке функция $N_\varphi(t, \lambda)$ монотонно убывает.

Следующая лемма дает оценку сверху на значение $N_\varphi(t_*, \lambda)$ решения уравнения (2.1) в точке t_* .

Лемма 2.6. При $\lambda \gg 1$ справедливо неравенство

$$N_\varphi(t_*, \lambda) < \exp(-\lambda\eta(\lambda)), \quad (2.15)$$

где $\eta(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Доказательство. Используя последовательно выражение (2.14), неравенства (2.12), неравенства $\exp(-a\lambda t_M) > 0$ и $(-\exp[a\lambda(g(s, \lambda) - t_M)]) \geq -1$ ($s \in [t_M, t_*]$), получаем

$$N_\varphi(t_*, \lambda) < \exp \left(\lambda t_* - \lambda d \int_{t_M}^{t_*} \exp(\lambda g(s, \lambda)) ds \right). \quad (2.16)$$

Первая из оценок (2.13) говорит о том, что при всех $\lambda > 0$ расстояние между точками t_M и t_* не меньше $h(\lambda)$. Заметим, что в силу условия (H_2) верно неравенство $h(\lambda) > \lambda^{-1}$ при $\lambda \gg 1$. Тогда можно гарантировать, что при $\lambda \gg 1$ точка $t_* - \lambda^{-1}$ лежит в интервале (t_M, t_*) . Поэтому справедливо равенство:

$$\int_{t_M}^{t_*} \exp(\lambda g(s, \lambda)) ds = \int_{t_M}^{t_* - \lambda^{-1}} \exp(\lambda g(s, \lambda)) ds + \int_{t_* - \lambda^{-1}}^{t_*} \exp(\lambda g(s, \lambda)) ds.$$

Первый из интегралов в правой части приведенного равенства оценивается снизу нулем. Рассмотрим функцию $g(t, \lambda)$ при $t \in [t_* - \lambda^{-1}, t_*]$. Используя условие (F_2) , получаем:

$$g(t, \lambda) = t - h(\lambda) - f(N_\varphi(t, \lambda)) > t_* - \frac{1}{\lambda} - h(\lambda) - f(N_\varphi(t_*, \lambda)) = t_M - \frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{t_* - \frac{1}{\lambda}}^{t_*} \exp(\lambda g(s, \lambda)) ds > \int_{t_* - \frac{1}{\lambda}}^{t_*} \exp(\lambda t_M - 1) ds = \frac{e^{\lambda t_M}}{\lambda e} > \frac{e^{\lambda h(\lambda)}}{\lambda e}.$$

Последняя величина в этой цепочке стремится к бесконечности в силу условия (H_2) .

Возвращаясь к неравенству (2.16), положим

$$\eta(\lambda) = -t_* + d \int_{t_M}^{t_*} \exp(\lambda g(s, \lambda)) ds.$$

Из сказанного выше ясно, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \eta(\lambda) = \infty$. □

В силу доказательства приведенной леммы справедливо неравенство:

$$\eta(\lambda) > -t_* + \frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda h(\lambda)).$$

Используя последовательно неравенства (2.13) и (2.10), а также определение τ_0 , получаем

$$t_* < 1 + \tau_0.$$

Отсюда получаем оценку снизу на $\eta(\lambda)$:

$$\eta(\lambda) > \frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda h(\lambda)) - 1 - \tau_0. \quad (2.17)$$

Следствие 2.1. При $\lambda \gg 1$ существует момент времени $t_1 = t_1(\lambda)$ ($t_1 \in [t_M, t_*]$) такой, что $N_\varphi(t_1, \lambda) = 1$.

Замечание 2.2. Отметим, что

$$g(t_1, \lambda) = t_1 - h(\lambda) - f(N(t_1, \lambda)) = t_1 - h(\lambda) - f(1) = t_1 - h(\lambda) - 1 + \ell.$$

Используя лемму 2.4, получаем неравенство

$$t_1 > 1 + h(\lambda) - \ell. \quad (2.18)$$

Таким образом доказано существование момента времени $t_m = t_m(\lambda)$ при $\lambda \gg 1$ такого, что $g(t_m, \lambda) = t_1$. Эта точка является точкой локального минимума для N_φ , а доказательство этого факта аналогично доказательству экстремальности точки t_M в параграфе 2.1.3. Рис. 2.3 иллюстрирует убывание функции $N_\varphi(t, \lambda)$ на интервале между ее экстремальными значениями.

Интегрирование на третьем шаге

Лемма 2.7. Пока решение $N_\varphi(t, \lambda)$ на промежутке справа от t_m ограничено сверху единицей, оно возрастает.

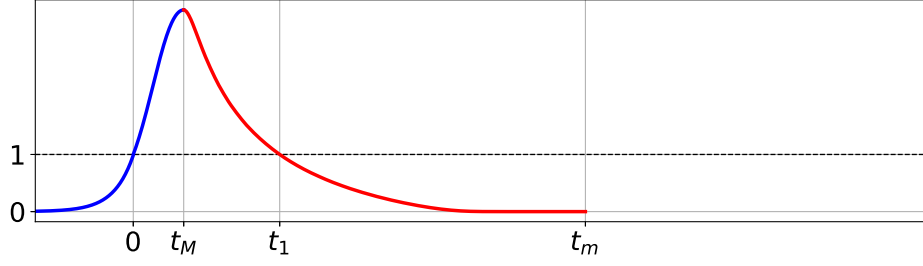


Рис. 2.3: График решения $N_\varphi(t, \lambda)$ уравнения (2.1) на отрезке $[0, t_m]$.

Доказательство. Т.к. $\dot{g}(t_m, \lambda) = 1 > 0$, то функция g принимает значение t_1 возрастая. Пусть $\bar{t} > t_m$ – первая точка, для которой $g(\bar{t}, \lambda) = t_1$. В силу непрерывности функции g это означает, что в этой точке она принимает значение t_1 убывая. С другой стороны, $\dot{g}(\bar{t}, \lambda) = 1 > 0$, т.е. g возрастает в точке \bar{t} , что приводит к противоречию. Таким образом, $g(t, \lambda) > t_1 \forall t > t_m$.

Пусть теперь $t_2 > t_m$ – первая точка, для которой $N_\varphi(t_2, \lambda) = 1$. Если такой точки не существует, положим $t_2 = +\infty$. По условию $N_\varphi(t, \lambda) < 1 \forall t \in (t_1, t_2)$. Отсюда, а также из неравенств

$$t_1 < g(t, \lambda) < t_2, \quad \forall t \in (t_m, t_2),$$

получаем, что

$$N_\varphi(g(t, \lambda), \lambda) < 1, \quad \forall t \in (t_m, t_2).$$

Поэтому $\forall t \in (t_m, t_2)$ верно

$$\dot{N}_\varphi(t, \lambda) > 0.$$

□

Лемма 2.8. При $\lambda \gg 1$ существует точка $t_2 = t_2(\lambda)$, $t_2 > t_m$: $N_\varphi(t_2, \lambda) = 1$, причем $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_2(\lambda) = +\infty$.

Доказательство. Предположим, что не существует такой точки при $t > t_m$, в которой было бы верно равенство $N_\varphi(t, \lambda) = 1$. Тогда согласно лемме 2.7 для всех $t > t_m$ выполнено $N_\varphi(t, \lambda) < 1$ и $\dot{N}_\varphi(t, \lambda) > 0$. Т.е. решение $N_\varphi(t, \lambda)$ монотонно возрастает и стремится к константе $p \leq 1$ при $t \rightarrow \infty$. Такой константой p может быть только состояние равновесия, а значит $p = 1$. Т.е. решение $N_\varphi(t, \lambda)$ на бесконечности сколь угодно близко к единице.

Выберем любое число $0 < \gamma < 1$. Выберем функцию $\varepsilon(\lambda)$ следующим образом: $\varepsilon(\lambda) = h(\lambda) - \lambda^{-1}$. Отметим, что $0 < \varepsilon(\lambda) < h(\lambda)$, а также $\lambda \varepsilon(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в силу свойства (H_2) . Далее фиксируем λ_0 настолько большим, чтобы $\gamma \exp[\lambda_0 \varepsilon_0 (1 - \gamma)] > 1$ (здесь и далее $\varepsilon_0 = \varepsilon(\lambda_0)$). Благодаря тому, что $\varepsilon_0 < h(\lambda_0)$, для любого $x > t_m(\lambda_0)$ на отрезке $s \in [x, x + \varepsilon_0]$ выполнено неравенство:

$$g(s, \lambda_0) = s - h(\lambda_0) - f(N_\varphi(s, \lambda_0)) \leq x + \varepsilon_0 - h(\lambda_0) - f(N_\varphi(s, \lambda_0)) < x + \varepsilon_0 - h(\lambda_0) < x,$$

откуда следует, что

$$\tilde{g} := \max_{s \in [x, x + \varepsilon_0]} g(s, \lambda_0) < x.$$

Решение $N_\varphi(t, \lambda_0)$ монотонно возрастает, а значит

$$N_\varphi(\tilde{g}, \lambda_0) < N_\varphi(x, \lambda_0).$$

В силу того, что $N_\varphi(t, \lambda_0) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, обязательно найдется точка y : $N_\varphi(y, \lambda_0) = \gamma$. Проинтегрируем уравнение (2.1) на отрезке $t \in [y, y + \varepsilon_0]$.

$$\begin{aligned} N_\varphi(y + \varepsilon_0, \lambda_0) &= N_\varphi(y, \lambda_0) \exp \left(\lambda_0 \int_y^{y+\varepsilon_0} [1 - N_\varphi(g(t, \lambda_0), \lambda_0)] dt \right) > \\ &> N_\varphi(y, \lambda_0) \exp (\lambda_0 \varepsilon_0 [1 - N_\varphi(\tilde{g}, \lambda_0)]) > \\ &> N_\varphi(y, \lambda_0) \exp (\lambda_0 \varepsilon_0 [1 - N_\varphi(y, \lambda_0)]) = \\ &= \gamma \exp (\lambda_0 \varepsilon_0 [1 - \gamma]) > 1. \end{aligned}$$

Получено противоречие с исходным предположением, согласно которому решение $N_\varphi(t, \lambda)$ ограничено сверху константой $p = 1$ при всех $t > t_m$.

Таким образом, доказано существование точки $t_2 = t_2(\lambda) > t_m$ при $\lambda \gg 1$, такой, что $N_\varphi(t_2, \lambda) = 1$. Далее считаем, что $\lambda \gg 1$. Заметим, что

$$N_\varphi(t, \lambda) = N_\varphi(t_m, \lambda) \exp \left(\lambda \int_{t_m}^t [1 - N_\varphi(g(s, \lambda), \lambda)] ds \right) < N_\varphi(t_m, \lambda) e^{\lambda(t-t_m)}.$$

В силу леммы 2.6 имеем

$$N_\varphi(t_m, \lambda) e^{\lambda(t-t_m)} < \exp \{-\lambda \eta(\lambda) + \lambda(t - t_m)\} =: L(t).$$

Найдем выражение для такого момента $t_L = t_L(\lambda)$, что $L(t_L) = 1$:

$$t_L = t_m + \eta(\lambda).$$

Заметим, что $t_2 > t_L$, или иначе

$$t_2 > t_m + \eta(\lambda), \tag{2.19}$$

откуда следует, что $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_2(\lambda) = +\infty$. □

На рис. 2.4 изображен график решения $N_\varphi(t, \lambda)$ на отрезке от нуля до t_2 .

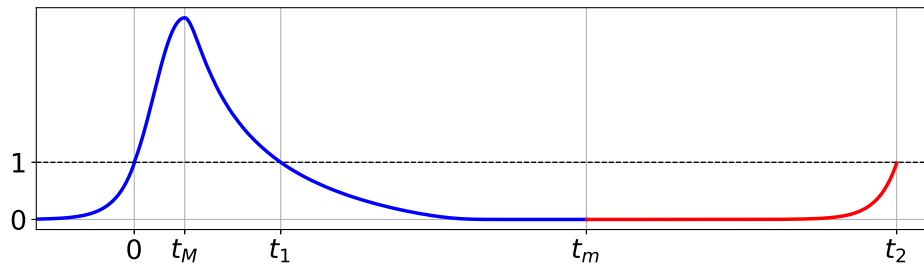


Рис. 2.4: График решения $N_\varphi(t, \lambda)$ уравнения (2.1) на отрезке $[0, t_2]$.

Завершение доказательства существования периодического решения

Лемма 2.9. *Существует такая константа $1/2 < c < 1$ и существует такое $\lambda_0 > 0$, что при всех $\lambda > \lambda_0$*

$$N_\varphi(t_2 - 1 + \ell, \lambda) < c.$$

Доказательство. Предположим противное: какую бы мы ни взяли константу $1/2 < c < 1$ и какое бы ни взяли $\lambda_0 > 0$, всегда найдется $\lambda_1 > \lambda_0$ такое, что

$$N_\varphi(t_2(\lambda_1) - 1 + \ell, \lambda_1) > c. \quad (2.20)$$

Пусть зафиксированы c , λ_0 и λ_1 , для которых верно (2.20). Тогда для всякого $\lambda > \lambda_1$ найдется такое $\lambda_2 > \lambda$, что

$$N_\varphi(t_2(\lambda_2) - 1 + \ell, \lambda_2) > c.$$

Действуя таким образом до бесконечности, можем построить монотонно возрастающую и неограниченную сверху последовательность $\lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$ значений параметра λ , при каждом из которых выполнено неравенство

$$N_\varphi(t_2(\lambda_k) - 1 + \ell, \lambda_k) > \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.21)$$

Выберем произвольно ε : $0 < \varepsilon < 1 - \ell$. Из последовательности $\{\lambda_i\}$ выберем настолько большое λ_n , что

$$\frac{\exp(\varepsilon \lambda_n / 2)}{2} > 1,$$

и далее будем считать λ равным фиксированному числу λ_n . При написании выражения $N_\varphi(t, \lambda_n)$ в дальнейшем будем опускать второй аргумент.

Функция $N_\varphi(t)$ непрерывна и монотонно возрастает на $[t_m, t_2]$, поэтому существует такая точка $q \in [t_m, t_2]$, что $N_\varphi(q) = 1/2$. В силу неравенства (2.21) точка q находится от $t_2(\lambda_n)$ на расстоянии, не меньшем $1 - \ell$.

Положим $b = q + \varepsilon$. Тогда $N_\varphi(b) < N_\varphi(t_2(\lambda_n)) = 1$ в силу выбора числа ε . Заметим, что при $t \in [q, b]$ верна цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} N_\varphi(t - h(\lambda_n) - f(N_\varphi(t))) &< N_\varphi(t - 1 + \ell) \leq \\ &\leq N_\varphi(b - 1 + \ell) = N_\varphi(q + \varepsilon - 1 + \ell) < N_\varphi(q). \end{aligned}$$

Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} N_\varphi(b) &= N_\varphi(q) \exp \left(\lambda_n \int_q^b [1 - N_\varphi(t - h(\lambda_n) - f(N_\varphi(t)))] dt \right) > \\ &> N_\varphi(q) \exp(\lambda_n [b - q][1 - N_\varphi(q)]) = \exp(\varepsilon \lambda_n / 2) / 2 > 1. \end{aligned}$$

Противоречие. □

Пусть теперь $t \in [t_2 - \tau_0, t_2]$. Тогда решение на этом отрезке представимо формулой:

$$N_\varphi(t, \lambda) = \exp \left(\lambda \int_t^{t_2} [N_\varphi(s - h(\lambda) - f(N_\varphi(s, \lambda)), \lambda) - 1] ds \right).$$

В силу положительности решения N_φ получаем оценку

$$N_\varphi(t, \lambda) \geq \exp(\lambda(t - t_2)), \quad t \in [t_2 - \tau_0, t_2]. \quad (2.22)$$

Ниже приведено доказательство неравенства

$$N_\varphi(t, \lambda) \leq \exp(a\lambda(t - t_2)), \quad t \in [t_2 - \tau_0, t_2]. \quad (2.23)$$

которое необходимо для завершения доказательства теоремы 2.1.

Учитывая $h(\lambda) > 0$, $N_\varphi(t, \lambda) < 1$ (при рассматриваемых t) и (F_3) , имеем

$$\begin{aligned} N_\varphi(t, \lambda) &\leq \exp \left(\lambda \int_t^{t_2} [N_\varphi(t_2 - 1 + \ell, \lambda) - 1] ds \right) = \\ &= \exp(\lambda[1 - N_\varphi(t_2 - 1 + \ell, \lambda)](t - t_2)). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Заметим, что $\tau_0 > 1 - \ell$, поэтому момент времени $t = t_2 - 1 + \ell$ принадлежит отрезку $[t_2 - \tau_0, t_2]$, а значит при таком t справедливо неравенство (2.24). Подставив $t = t_2 - 1 + \ell$ в (2.24), получим неравенство

$$N_\varphi(t_2 - 1 + \ell, \lambda) \leq \exp\{\lambda(1 - \ell)[N_\varphi(t_2 - 1 + \ell, \lambda) - 1]\}.$$

Теперь видно, что из леммы 2.9 следует возможность за счет выбора достаточно большого λ сделать выражение $N_\varphi(t_2 - 1 + \ell, \lambda)$ сколь угодно близким к нулю.

Тогда для любой константы $a \in (0, 1)$ можно подобрать настолько большое λ , что $1 - N_\varphi(t_2 - 1 + \ell, \lambda) > a$. И при достаточно больших λ оценка (2.24) переходит в (2.23).

Оценки (2.22) и (2.23) обеспечивают включение $N_\varphi(t + t_2, \lambda) \in \mathbb{S}$, $t \in [-\tau_0, 0]$. Таким образом, для уравнения (2.1) построен оператор последования $\Pi : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, действие которого описывается формулой

$$\Pi\varphi = N_\varphi(t + t_2(\lambda), \lambda).$$

В силу его компактности на ограниченном, замкнутом и выпуклом множестве \mathbb{S} у этого оператора существует неподвижная точка (см. теорему Шаудера в [24]), которой соответствует периодическое решение уравнения (2.1).

Отметим также, что орбитальную асимптотическую устойчивость этого решения можно доказать способом, аналогичным изложенному в работе [13] для логистического уравнения с распределенным запаздыванием.

2.1.4 Свойства периодического решения

Ниже приводится доказательство теоремы 2.2, которое представляет собой последовательное обоснование неравенств (2.3) – (2.7).

Сначала докажем важное следствие из леммы 2.5. Именно оно обеспечивает доказательство неравенства (2.5). Пусть $N(t, \lambda)$ – периодическое решение, существование которого было доказано в предыдущем пункте.

Следствие 2.2. *При $\lambda \gg 1$ для величины $M(\lambda)$ справедливы неравенства*

$$de^{\lambda h(\lambda)} < M(\lambda) < e^\lambda. \quad (2.25)$$

Доказательство. При подстановке значения $t = t_M$ во второе неравенство (2.12), получим оценку

$$M(\lambda) \geq \exp \left(\lambda t_M - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} e^{-a\lambda t_M} \right) > \exp \left(\lambda t_M - \frac{1}{a} \right).$$

В силу первой из оценок (2.10) получаем первое из неравенств (2.25) при $\lambda \gg 1$.

Подставив $t = t_M$ в первое из неравенств (2.12) и воспользовавшись второй из оценок (2.10), получим второе из неравенств (2.25). \square

Для доказательства неравенств (2.6) и (2.7) отметим, что $m(\lambda) = N(t_m, \lambda)$ и $T(\lambda) = t_2$. Т.к. t_m является точкой минимума периодического решения, то неравенство (2.15) дает $m(\lambda) < \exp(-\lambda\eta(\lambda))$. Из (2.19) следует, что $T(\lambda) > \eta(\lambda)$. Используя в этих неравенствах оценку (2.17), получаем обоснование (2.6), (2.7).

Отметим также еще одно важное следствие из леммы 2.5.

Следствие 2.3. *Имеют место предельные равенства*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_M(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = \ell.$$

Доказательство. Подставим первое из неравенств (2.25) в формулу (2.9). В силу ограничения (F_2) имеем следующую оценку:

$$t_M < h(\lambda) + f(de^{\lambda h(\lambda)}).$$

В силу свойства (H_2) величина $\exp(\lambda h(\lambda))$ стремится к бесконечности при $\lambda \rightarrow \infty$. Тогда (в силу (F_4)) для всякого $\delta > 0$ найдется такое $\lambda_0 > 0$, что для каждого $\lambda > \lambda_0$ выполнено неравенство $t_M < h(\lambda) + \delta$. Это, вместе с первым неравенством из (2.10) и свойством (H_1) , гарантирует существование предела для величины t_M и доказывает утверждение. \square

Заметим теперь, что $t_0(\lambda) = t_1 - t_M$. Применяя (2.18) к этому равенству, получаем:

$$t_0(\lambda) > 1 + h(\lambda) - \ell - t_M.$$

Это неравенство и следствие 2.3 гарантируют доказательство неравенства (2.4). Таким образом, теорема 2.2 доказана.

Рассмотрим далее три варианта выбора функции $h(\lambda)$ в уравнении (2.1):

$$h_1(\lambda) \equiv \ell \quad (0 < \ell < 1), \quad h_2(\lambda) = \lambda^{-\alpha} \quad (0 < \alpha < 1), \quad h_3(\lambda) = \frac{1}{\ln \lambda}.$$

Заметим, что все приведенные функции удовлетворяют условиям (H_1) – (H_2) , поэтому для каждой из них верны теоремы 2.1 и 2.2. Экстремальные значения и период решения уравнения, соответствующего выбору функции $h_i(\lambda)$ будем обозначать через $M_i(\lambda)$, $m_i(\lambda)$ и $T_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$).

Опираясь на теорему 2.2, получаем следующие неравенства:

$$M_1(\lambda) \geq d \exp(\lambda \ell), \quad M_2(\lambda) \geq d \exp(\lambda^{1-\alpha}), \quad M_3(\lambda) \geq d \exp\left(\frac{\lambda}{\ln \lambda}\right);$$

$$m_1(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \left[-\frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda \ell) + 1 + \tau_0\right]\right),$$

$$m_2(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \left[-\frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda^{1-\alpha}) + 1 + \tau_0\right]\right),$$

$$m_3(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \left[-\frac{d}{\lambda e} \exp\left(\frac{\lambda}{\ln \lambda}\right) + 1 + \tau_0\right]\right);$$

$$T_1(\lambda) \geq \frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda \ell) - 1 - \tau_0,$$

$$T_2(\lambda) \geq \frac{d}{\lambda e} \exp(\lambda^{1-\alpha}) - 1 - \tau_0,$$

$$T_3(\lambda) \geq \frac{d}{\lambda e} \exp\left(\frac{\lambda}{\ln \lambda}\right) - 1 - \tau_0.$$

На рис. 2.5, 2.6 и 2.7 иллюстрируются оценки снизу для величин $M_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) при изменении λ , а также решения уравнения (2.1) при $h(\lambda) = h_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$) и $\lambda = 5$. Графики построены при $a = 0.8$ (значит, $d \approx 10/35 \Rightarrow 1/d \approx 3.5$), начальном условии $\varphi(t) = \exp(0.8\lambda t)$ и функции $f(N) = 1/(1 + N)$.

В таблице 2.1 приведены числовые значения основных характеристик каждого из решений при $\lambda = 5$.

	$h_1(\lambda)$ ($\ell = 0.5$)	$h_2(\lambda)$ ($\alpha = -0.5$)	$h_3(\lambda)$
t_M	0.608	0.572	0.697
M	8.206	6.988	12.172
t_m	2.628	2.523	2.871
m	$6.207 \cdot 10^{-10}$	$1.886 \cdot 10^{-8}$	$7.979 \cdot 10^{-15}$
T	7.077	6.291	9.562

Таблица 2.1: Характеристики решений

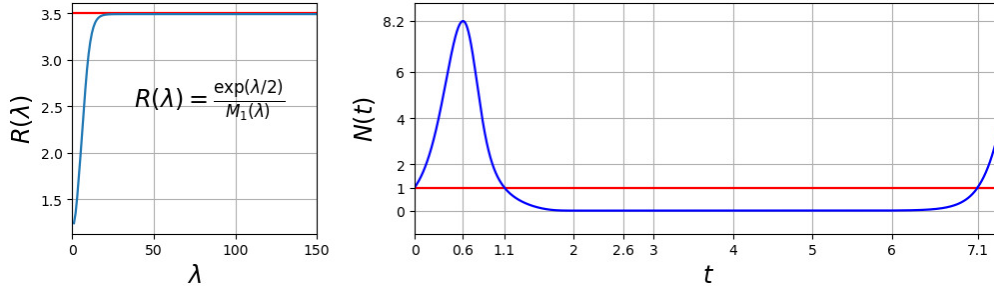


Рис. 2.5: График отношения функции $\exp(\lambda\ell)$ к $M_1(\lambda)$ (слева) и график решения уравнения (2.1) (справа) при $h(\lambda) = h_1(\lambda)$ и $\ell = 0.5$.

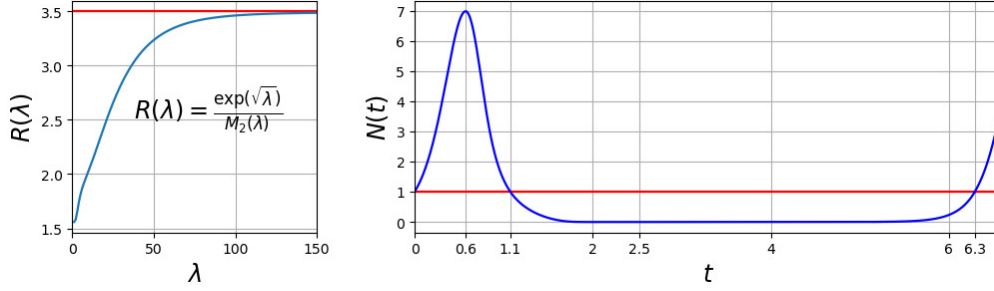


Рис. 2.6: График отношения функции $\exp(\sqrt{\lambda})$ к $M_2(\lambda)$ (слева) и график решения уравнения (2.1) (справа) при $h(\lambda) = h_2(\lambda)$ и $\alpha = -0.5$.

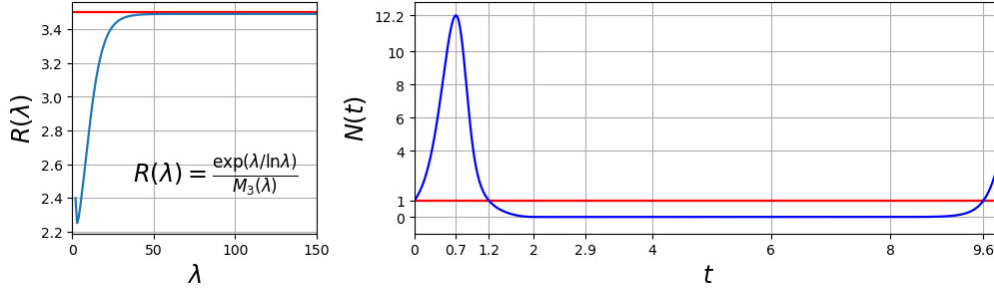


Рис. 2.7: График отношения функции $\exp(\lambda/\ln \lambda)$ к $M_3(\lambda)$ (слева) и график решения уравнения (2.1) при $h(\lambda) = h_3(\lambda)$.

2.2 Случай, когда запаздывание зависит от состояния в прошлом времени

2.2.1 Постановка задачи

В этом параграфе рассматривается логистическое уравнение вида

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t)[1 - N(\tau(t, N(t-L), \lambda))], \quad (2.26)$$

$$\tau(t, N(t-L), \lambda) = t - h(\lambda) - f(N(t-L)).$$

Здесь $\lambda \gg 1$ – большой параметр, а функция $h(\lambda) + f(N(t-L))$ играет роль запаздывания, которое зависит от состояния N в момент времени $t-L$ ($L > 0$).

Пусть $L > 0$ в (2.26). Как и в предыдущем параграфе, при изучении нелокальной динамики (2.26) будем предполагать, что параметр λ достаточно велик: $\lambda \gg 1$. Функция $h(\lambda)$ положительна и удовлетворяет условиям:

(H₁) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = \ell$, где $0 \leq \ell < L$;

(H₂) если $\ell = 0$, то $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda h(\lambda) / \ln \lambda = \infty$.

На функцию $f(N)$ наложены следующие ограничения:

(F₁) $f(N)$ положительна и достаточно гладкая при $N \geq 0$;

(F₂) $f(N)$ монотонно убывает при $N > 0$;

(F₃) $f(1) = L - \ell$;

(F₄) $\lim_{N \rightarrow \infty} f(N) = 0$.

Обозначим $\tau_0 = \sup_{\lambda \gg 1} h(\lambda) + \max_{N \geq 0} f(N) = \sup_{\lambda \gg 1} h(\lambda) + f(0)$. Заметим, что $\tau_0 > L$ в силу свойств (H₁), (F₂) и (F₃). Поэтому пространство $C([- \tau_0, 0])$ можно выбрать в качестве фазового для уравнения (2.26). Будем рассматривать это уравнение на интервале $t > 0$. Класс начальных условий \mathbb{S} выберем аналогично тому, как это сделано в [3]:

$$\mathbb{S} = \{\varphi(t) \in C([- \tau_0, 0]), \quad e^{\lambda t} \leq \varphi(t) \leq e^{a\lambda t}, \quad \varphi(0) = 1\}.$$

Тут $a \in (0, 1)$ – заранее произвольно фиксировано. Отметим, что множество \mathbb{S} является ограниченным, выпуклым и замкнутым.

Как и в предыдущем параграфе основной задачей является изучение существования нелокальных релаксационных решений уравнения (2.1) с начальными условиями из класса \mathbb{S} , исследование их характеристик и сравнение полученных результатов с аналогичными результатами для уравнения с запаздыванием, зависящим от состояния в настоящем времени, а также для классического уравнения Хатчинсона

$$\dot{N}(t) = \lambda N(t) [1 - N(t - L)], \quad L > 0. \quad (2.27)$$

2.2.2 Основные результаты

Сформулируем основные результаты.

Теорема 2.3. Пусть функции $h(\lambda)$ и $f(N)$ из (2.26) удовлетворяют соответственно ограничениям (H₁)-(H₂) и (F₁)-(F₄), а $L > 0$. Тогда при $\lambda \gg 1$ уравнение (2.26) имеет нелокальное релаксационное периодическое решение $N(t, \lambda)$ с начальным условием из класса \mathbb{S} .

Пусть $T(\lambda)$ – период этого решения, а $M(\lambda)$ и $m(\lambda)$ – его наибольшее и наименьшее значения соответственно:

$$M(\lambda) = \max_{0 \leq t \leq T(\lambda)} N(t, \lambda), \quad m(\lambda) = \min_{0 \leq t \leq T(\lambda)} N(t, \lambda).$$

Обозначим через $t_M(\lambda)$ точку, в которой решение впервые достигает максимума:

$$N(t_M(\lambda), \lambda) = M(\lambda),$$

а через $t_0(\lambda)$ – время, за которое решение убывает от своего максимального значения до значения $N \equiv 1$.

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда, во-первых, справедливо асимптотическое равенство

$$t_M(\lambda) = L + O(h(\lambda) - \ell), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Во-вторых, величина $t_0(\lambda)$ имеет предел при $\lambda \rightarrow \infty$, причем

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_0(\lambda) = 0. \quad (2.29)$$

В-третьих, справедливы неравенства:

$$T(\lambda) \geq \frac{\exp(a\lambda h(\lambda)/2)}{a\lambda} - t_M(\lambda) - \tau_0, \quad (2.30)$$

$$\exp\left(\frac{a\lambda t_M(\lambda)}{1+p+L-\min\{L, 1\}}\right) < M(\lambda) < \exp(\lambda t_M(\lambda)) \quad (\forall 0 < p \ll 1), \quad (2.31)$$

$$m(\lambda) \leq \exp\left(\lambda \left[-\frac{\exp(a\lambda h(\lambda)/2)}{a\lambda} + t_M(\lambda) + \tau_0\right]\right). \quad (2.32)$$

Доказательство теоремы 2.3 аналогично доказательству такого же результата для случая $L = 0$ (см. раздел 2.1.3). Доказательство теоремы 2.4 описано в разделе 2.2.4.

На графике 2.8 приведен фрагмент решения уравнения (2.26) на отрезке длины периода при $\lambda = 5$, $L = 0.8$, $a = 0.3$, начальном условии $\varphi(t) = \exp(a\lambda t)$ и функциях

$$h(\lambda) = \frac{\cos \lambda}{\sqrt{\lambda}} + \frac{L}{2}, \quad f(N) = \frac{L}{1+N},$$

которые удовлетворяют условиям (H_1) – (H_2) и (F_1) – (F_4) соответственно. Здесь пунктиром отмечено состояние равновесия $N \equiv 1$, а сплошной линией – само периодическое решение.

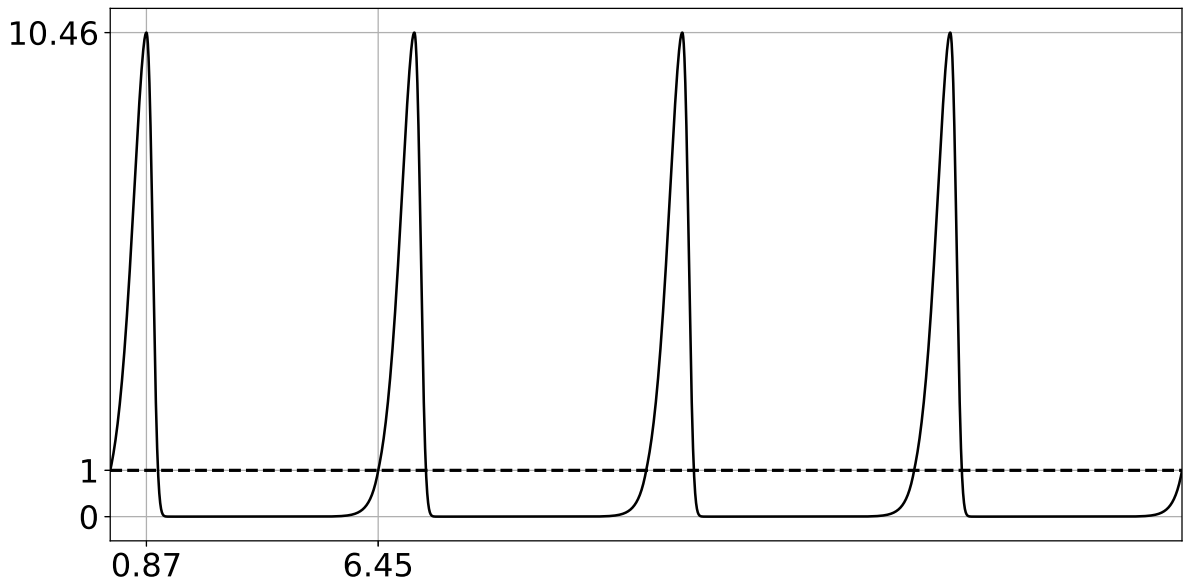


Рис. 2.8: Нелокальное релаксационное решение уравнения (2.26) на периоде.

2.2.3 Характеристики периодического решения

Далее на примерах будет проиллюстрирована динамика характеристик найденного периодического решения уравнения (2.26), описанных в теореме 2.4. Во всех примерах в качестве начального условия используется функция $\varphi(t) = \exp(a\lambda t)$, а функция $f(N)$ имеет вид:

$$f(N) = \frac{2(L - \ell)}{1 + N}.$$

Выбор функции $h(\lambda)$ ограничивается четырьмя вариантами

$$h_1(\lambda) \equiv 0.1, \quad h_2(\lambda) = \frac{1}{\ln \lambda}, \quad h_3(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad h_4(\lambda) = \frac{\cos \lambda}{\sqrt{\lambda}} + \frac{L}{2},$$

и указывается отдельно в каждом примере.

Осцилляционные свойства

Отметим, что решение уравнения (2.26) имеет ровно один всплеск на отрезке длины периода.

Величина $t_M(\lambda)$ показывает, насколько быстро решение возрастает от $N \equiv 1$ до своего максимального значения. В классическом уравнении (2.27) справедливо тождество $t_M(\lambda) \equiv L$. В случае же уравнения (2.26) при $L = 0$ имеем (см. [3])

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_M(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} h(\lambda) = \ell, \quad 0 \leq \ell < 1. \quad (2.33)$$

Асимптотическое равенство (2.28) демонстрирует сходство динамики величины $t_M(\lambda)$ у решений (2.26) при $L > 0$ с динамикой аналогичной величины в обоих частных случаях. С одной стороны, $t_M(\lambda)$ всегда отделена от нуля, как в случае уравнения (2.27). С другой стороны, она имеет зависимость от λ , как в случае уравнения (2.26) при $L = 0$. На рисунках 2.9 - 2.11 приведено сравнение динамики величины $t_M(\lambda)$ у решений уравнения (2.26) для случаев $L = 0$ и $L = 1$. Левые графики на этих рисунках иллюстрируют равенство (2.33), а правые – равенство (2.28). Графики построены при $a = 0.5$.

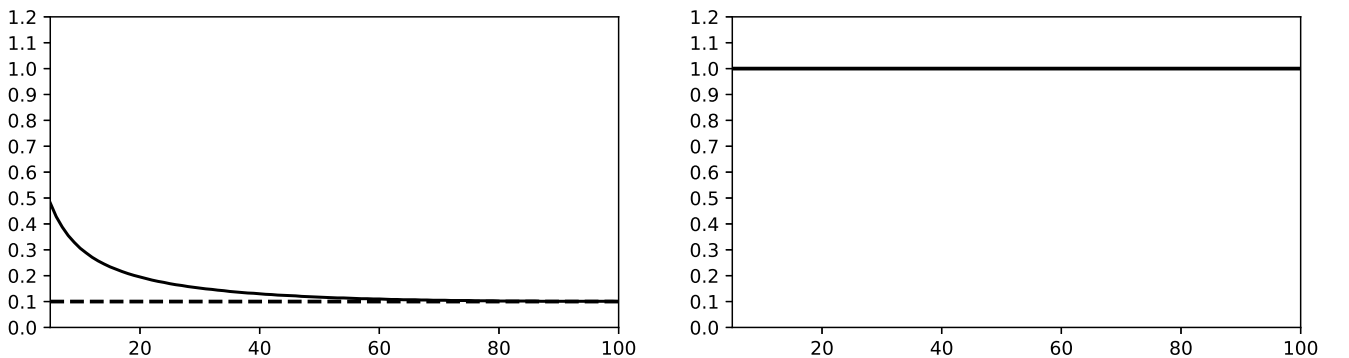


Рис. 2.9: Графики $t_M(\lambda)$ при $L = 0$ (слева) и $L = 1$ (справа). В обоих случаях $h(\lambda) \equiv 0.1$, $f(N) = 1.8/(1 + N)$.

Величина $t_0(\lambda)$ характеризует область быстрого убывания решения. В силу предельного равенства (2.29) эта область асимптотически мала. Интересно, что аналогичное равенство справедливо для уравнения (2.27) (см. [13]), но при этом не имеет места для уравнения (2.26) при $L = 0$: величина $t_0(\lambda)$ отделена от нуля (см. [3]). Графики на рисунке 2.12 иллюстри-

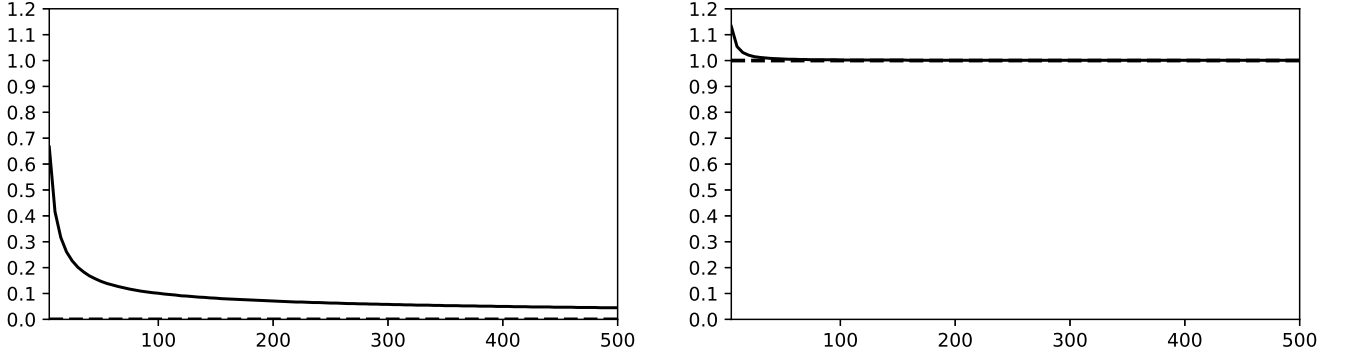


Рис. 2.10: Графики $t_M(\lambda)$ при $L = 0$ (слева) и $L = 1$ (справа). В обоих случаях $h(\lambda) = 1/\ln \lambda$, $f(N) = 2/(1+N)$.

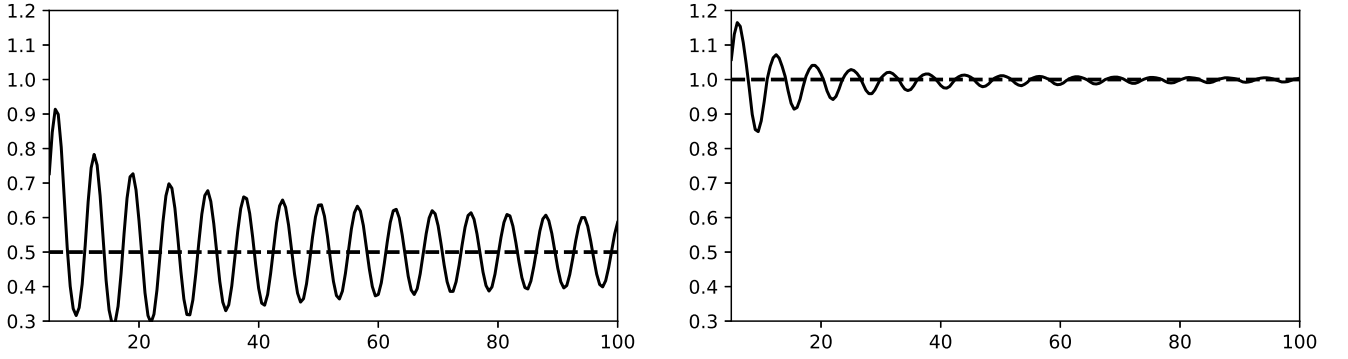


Рис. 2.11: Графики $t_M(\lambda)$ при $L = 0$ (слева) и $L = 1$ (справа). В обоих случаях $h(\lambda) = \cos \lambda/\sqrt{\lambda}$, $f(N) = 1/(1+N)$.

руют динамику $t_0(\lambda)$. Все они построены при $L = 0.8$ и $a = 0.7$, но при разном выборе запаздывания. Для левого графика $h(\lambda) = h_1(\lambda)$, для среднего $h(\lambda) = h_3(\lambda)$, и для правого $h(\lambda) = h_4(\lambda)$.

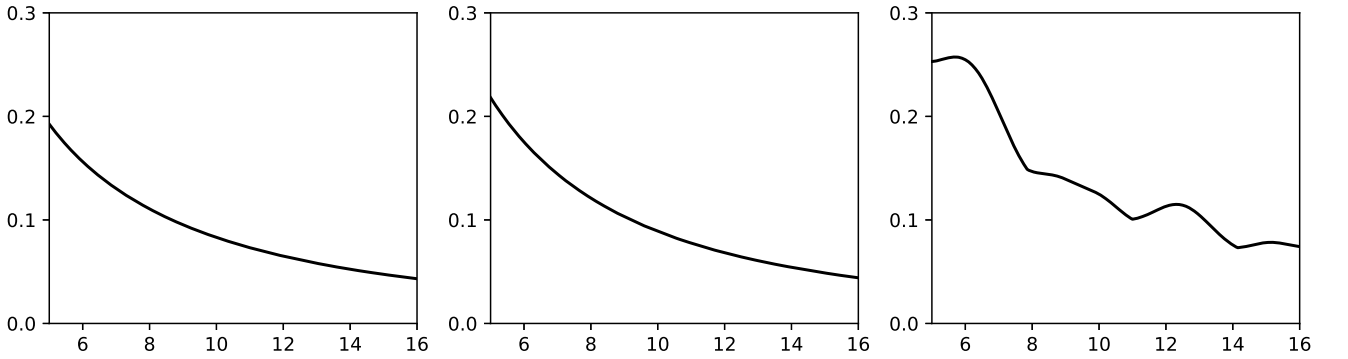


Рис. 2.12: Графики $t_0(\lambda)$ у решений (2.26) при разном выборе функции запаздывания.

Период решения является асимптотически большим, что следует из неравенства (2.30). Отсюда (и из ограниченности величин $t_M(\lambda)$ и $t_0(\lambda)$) следует наличие асимптотически большого участка, на котором решение меняется медленно. Этот факт имеет место и в обоих частных случаях. На рисунке 2.13 проиллюстрирована динамика $T(\lambda)$ при $L = 0.3$ и $a = 0.9$.

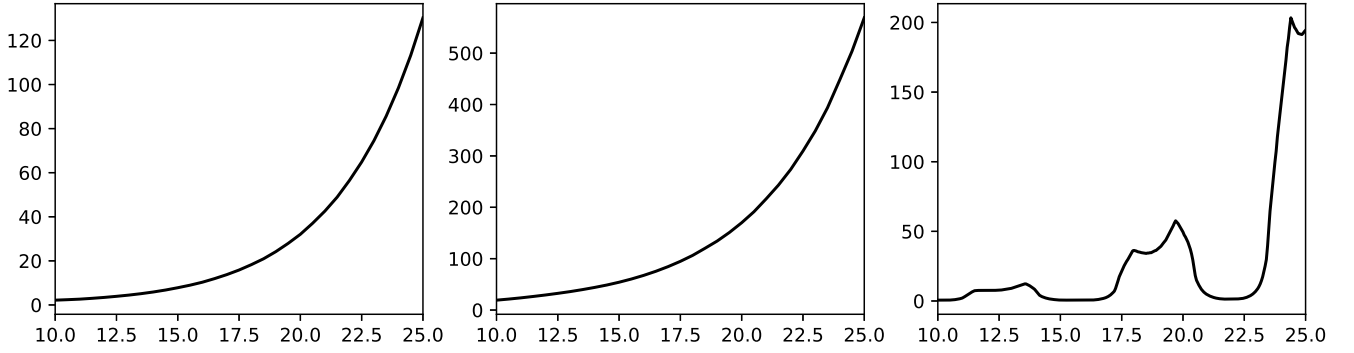


Рис. 2.13: Графики $T(\lambda)$ при $h(\lambda) = h_1(\lambda)$ (слева), $h(\lambda) = h_3(\lambda)$ (в центре) и $h(\lambda) = h_4(\lambda)$ (справа)

Экстремальные свойства графиков

Левая часть неравенства (2.31) показывает, что максимальное значение решения уравнения (2.26) является экспоненциально большим, а равенство (2.28) подчеркивает его зависимость от параметров запаздывания. На рисунке 2.14 приведены примеры $M(\lambda)$ при $L = 0.3$, $a = 0.9$ и при разном выборе функции запаздывания. Пунктирными линиями обозначены верхняя и нижняя границы неравенства (2.31). Для построения нижних границ значение p выбрано как 0.1.

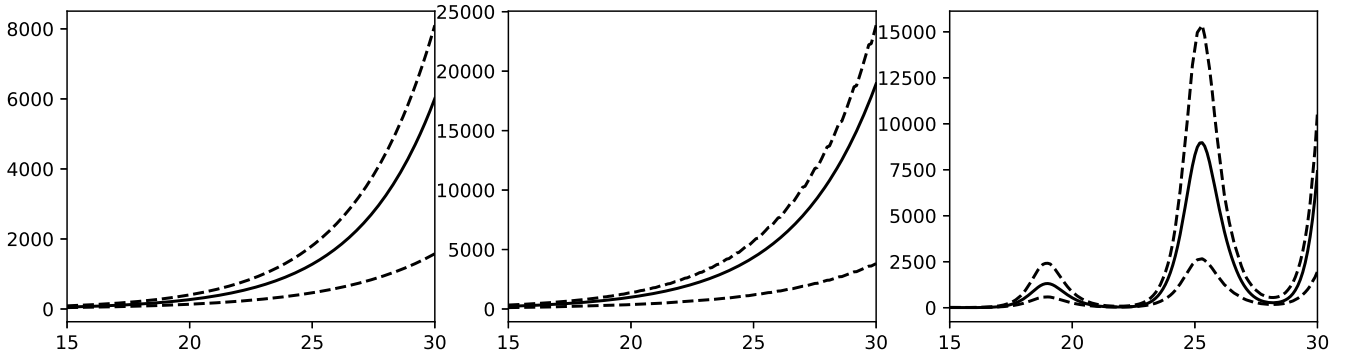


Рис. 2.14: Графики $M(\lambda)$ при $h(\lambda) = h_1(\lambda)$ (слева), $h(\lambda) = h_3(\lambda)$ (в центре) и $h(\lambda) = h_4(\lambda)$ (справа).

Минимальное значение при росте λ доходит до сверхэкспоненциально малых значений, о чем свидетельствует неравенство (2.32). Иллюстрации динамики $m(\lambda)$ не приводятся ввиду слишком малых значений, а также малой важности этих иллюстраций.

Аналогичные характеристики имеют экстремальные значения в обоих частных случаях.

2.2.4 Доказательство свойств периодического решения

Пусть выполнены условия теоремы 2.3 и $N_\varphi = N_\varphi(t, \lambda)$ – периодическое решение (2.26), существование которого гарантирует теорема 2.3 и соответствующее начальное условие $\varphi(t) \in \mathbb{S}$. Это означает, в частности, что $N_\varphi(t, \lambda) = \varphi(t)$ при $t \in [-\tau_0, 0]$. Положим

$$g(t, \lambda) = \tau(t, N_\varphi(t - L), \lambda) = t - h(\lambda) - f(N_\varphi(t - L, \lambda)). \quad (2.34)$$

Сразу отметим важные свойства этой функции.

Замечание 2.3. *Справедливо равенство:*

$$g(t_M(\lambda), \lambda) = 0. \quad (2.35)$$

Доказательство. Действительно, точка $t_M(\lambda)$ по определению является точкой максимума функции $N_\varphi(t, \lambda)$, поэтому $\dot{N}_\varphi(t_M(\lambda), \lambda) = 0$. В силу уравнения (2.26) это означает, что

$$N_\varphi(g(t_M(\lambda), \lambda), \lambda) = 1.$$

В силу периодичности функции N_φ по первому аргументу это равенство возможно только при условии

$$g(t_M(\lambda), \lambda) = kT(\lambda), \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \quad (2.36)$$

Отсюда и из определения функции g получаем неравенство

$$t_M(\lambda) > kT(\lambda), \quad k \in \{0\} \cup \mathbb{N}.$$

Однако если принять во внимание, что $t_M(\lambda)$ – это именно первая точка, в которой достигается максимум, то это неравенство невозможно ни при каком k кроме нуля. А значит и равенство (2.36) справедливо только при $k = 0$. \square

Замечание 2.4. *При $t \in [0, t_M(\lambda))$ справедливы неравенства:*

$$-\tau_0 < g(t, \lambda) < 0. \quad (2.37)$$

Доказательство. В силу формулы (2.34) имеем для всех $t \geq 0$:

$$g(t, \lambda) \geq -h(\lambda) - f(N_\varphi(t - L, \lambda)) > -h(\lambda) - f(0) > -\tau_0.$$

Левое неравенство из (2.37) доказано.

Докажем правое. Заметим, что g непрерывна по t и $g(0, \lambda) < 0$. Предположим противное: существует такая точка $\tilde{t}(\lambda) \in (0, t_M(\lambda))$, что $g(\tilde{t}(\lambda), \lambda) = 0$. Тогда из уравнения (2.26) следует, что

$$\dot{N}_\varphi(\tilde{t}(\lambda), \lambda) = 0.$$

Т.к. первой точкой, в которой решение достигает максимума, является именно точка $t_M(\lambda)$, то $\tilde{t}(\lambda)$ не является точкой экстремума. Это значит, что существует такое $\hat{t}(\lambda) > \tilde{t}(\lambda)$, что при $t \in (\tilde{t}(\lambda), \hat{t}(\lambda))$ справедливо неравенство $\dot{N}_\varphi(t, \lambda) > 0$. Тогда в силу уравнения (2.26) $N_\varphi(g(t, \lambda), \lambda) < 1$ при таких t , что возможно только при условии $g(t, \lambda) < 0$. Это означает, что $\tilde{t}(\lambda)$ является точкой максимума для функции $g(t, \lambda)$, т.е. $\dot{g}(\tilde{t}(\lambda), \lambda) = 0$.

С другой стороны, из формулы (2.34) следует, что

$$\dot{g}(\tilde{t}(\lambda), \lambda) = 1 - f'(N_\varphi(\tilde{t}(\lambda) - L, \lambda))\dot{N}_\varphi(\tilde{t}(\lambda) - L, \lambda).$$

Заметим, что в силу свойства (F_2) величина $f'(N_\varphi(\tilde{t}(\lambda) - L, \lambda))\dot{N}_\varphi(\tilde{t}(\lambda) - L, \lambda)$ не может быть положительной, потому что промежутки возрастания (убывания) функции $N_\varphi(t - L, \lambda)$ соответствуют промежуткам убывания (возрастания) функции $f(N_\varphi(t - L, \lambda))$. Поэтому

$\dot{g}(\tilde{t}(\lambda), \lambda) \geq 1$. Получено противоречие. □

Теперь докажем равенство (2.28). Оно вытекает из леммы

Лемма 2.10. *При $\lambda \gg 1$ справедливо неравенство:*

$$|t_M(\lambda) - L| \leq |h(\lambda) - \ell|$$

Доказательство. Рассмотрим разность $t_M(\lambda) - L$ с учетом равенства (2.35) и условия (F_3) :

$$t_M(\lambda) - L = h(\lambda) + f(N_\varphi(t_M(\lambda) - L, \lambda)) - L = h(\lambda) - \ell + f(N_\varphi(t_M(\lambda) - L, \lambda)) - f(1).$$

Пусть λ_0 таково, что $t_M(\lambda_0) - L \leq 0$. Тогда $N_\varphi(t_M(\lambda_0) - L, \lambda_0) \leq 1$ и в силу условия (F_2)

$$t_M(\lambda_0) - L \geq h(\lambda_0) - \ell.$$

Если λ_0 таково, что $t_M(\lambda_0) - L \geq 0$, то аналогично получаем неравенство

$$t_M(\lambda_0) - L \leq h(\lambda_0) - \ell.$$

Поэтому при всех $\lambda \gg 1$ справедливы неравенства

$$\min(h(\lambda) - \ell, 0) \leq t_M(\lambda) - L \leq \max(h(\lambda) - \ell, 0),$$

которые и доказывают лемму. □

Далее докажем неравенства (2.31).

Лемма 2.11. *Для любого числа $0 < \delta \ll 1$ и при всех $\lambda \gg 1$ верно неравенство*

$$g(t, \lambda) < -\delta, \quad \forall t \in [0, L - 2\delta].$$

Доказательство. В силу условия (H_1) для всякого $\delta > 0$ найдется $\Delta \gg 1$ такое, что

$$\ell - h(\lambda) < \delta$$

для всех $\lambda > \Delta$. Зафиксируем произвольно такую пару Δ и δ .

Заметим, что для всех $x \in [0, L - 2\delta]$ справедливо неравенство

$$N_\varphi(x - L, \lambda) = \varphi(x - L, \lambda) < 1.$$

Используем его, а также условие (F_3) , для оценки значения $g(x, \lambda)$:

$$g(x, \lambda) = x - h(\lambda) - f(N_\varphi(x - L, \lambda)) < x - h(\lambda) - f(1) = x - h(\lambda) - L + \ell \leq -2\delta + \ell - h(\lambda) < -\delta.$$

□

Лемма 2.12. *Существует такое число $0 < \delta \ll 1$, что для каждого $0 < p \ll 1$, для каждого*

$t \in [0, t_M(\lambda)]$ и при всех $\lambda \gg 1$ справедливо неравенство:

$$\frac{t}{\alpha} < L - 2\delta,$$

где

$$\alpha = 1 + p + L - \min\{L, 1\}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольно $0 < p \ll 1$. В качестве δ возьмем такое число, чтобы

$$(L - 2\delta)\alpha > L.$$

В силу леммы 2.10 для каждого $0 < \varepsilon \ll 1$ верно $t_M(\lambda) < L + \varepsilon$ при всех $\lambda \gg 1$. Возьмем в качестве ε число

$$\varepsilon = (L - 2\delta)\alpha - L.$$

Тогда для всех $t \in [0, t_M(\lambda)]$ при $\lambda \gg 1$ справедлива цепочка

$$\frac{t}{\alpha} \leq \frac{t_M(\lambda)}{\alpha} < \frac{L + \varepsilon}{\alpha} = \frac{L + (L - 2\delta)\alpha - L}{\alpha} = L - 2\delta.$$

Лемма доказана. □

Подставим в уравнение (2.26) функцию $N_\varphi(s, \lambda)$ и воспользуемся определением (2.34) функции $g(t, \lambda)$:

$$\dot{N}_\varphi(s, \lambda) = \lambda N_\varphi(s, \lambda)[1 - N_\varphi(g(s, \lambda), \lambda)]$$

Далее проинтегрируем получившееся равенство на интервале $[0, t]$ при $t \in (0, t_M(\lambda))$:

$$\ln N_\varphi(t, \lambda) - \ln N_\varphi(0, \lambda) = \lambda \int_0^t [1 - N_\varphi(g(s, \lambda), \lambda)] ds.$$

Приняв во внимание, что $N_\varphi(0, \lambda) = \varphi(0) = 1$, а также $N_\varphi(g(s, \lambda), \lambda) = \varphi(g(s, \lambda))$ при $s \in [0, t_M(\lambda)]$ (в силу замечаний 2.3 и 2.4), получаем формулу решения уравнения (2.26) на полуинтервале $t \in (0, t_M(\lambda))$:

$$N_\varphi(t, \lambda) = \exp \left(\lambda \int_0^t [1 - \varphi(g(s, \lambda))] ds \right). \quad (2.38)$$

Лемма 2.13. При $t \in (0, t_M(\lambda))$ и при всех $\lambda \gg 1$ справедливы неравенства

$$N_\varphi(t, \lambda) < \exp \lambda t, \quad (2.39)$$

$$N_\varphi(t, \lambda) > \exp \left(\frac{a\lambda t}{\alpha} \right). \quad (2.40)$$

Доказательство. Для получения оценки (2.39) достаточно воспользоваться формулой (2.38) и неравенством $\varphi(g(s, \lambda)) > 0$.

Чтобы получить оценку (2.40), воспользуемся формулой (2.38) и леммами 2.11 и 2.12:

$$\begin{aligned}
N_\varphi(t, \lambda) &= \exp \left(\lambda \int_0^{t/\alpha} [1 - \varphi(g(s, \lambda))] ds \right) \cdot \exp \left(\lambda \int_{t/\alpha}^t [1 - \varphi(g(s, \lambda))] ds \right) \geq \\
&\geq \exp \left(\lambda \int_0^{t/\alpha} [1 - \varphi(g(s, \lambda))] ds \right) \geq \exp \left(\lambda \int_0^{t/\alpha} [1 - \exp(a\lambda g(s, \lambda))] ds \right) > \\
&> \exp \left(\lambda \int_0^{t/\alpha} [1 - \exp(-a\lambda\delta)] ds \right) = \exp \left(\lambda t \frac{1 - \exp(-a\lambda\delta)}{\alpha} \right)
\end{aligned}$$

Т.к. за счет выбора λ величину $1 - \exp(-a\lambda\delta)$ можно сделать больше константы a , то неравенство (2.40) доказано. \square

Очевидно, что из неравенств (2.39) и (2.40) вытекают неравенства (2.31), если положить $t = t_M(\lambda)$.

Теперь перейдем к доказательству свойств (2.29), (2.30), (2.32). Для этого докажем несколько вспомогательных утверждений. Т.к. $g(t, \lambda) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то существует точка $t_* = t_*(\lambda)$, $t_*(\lambda) > t_M(\lambda)$ для всех $\lambda \gg 1$, такая что $g(t_*(\lambda), \lambda) = t_M(\lambda)$. Таким образом справедлива формула

$$t_*(\lambda) = t_M(\lambda) + h(\lambda) + f(N(t_*(\lambda) - L, \lambda)) \quad (2.41)$$

Получается, что $g(t, \lambda) \in [0, t_M(\lambda)]$ при $t \in [t_M(\lambda), t_*(\lambda)]$.

Лемма 2.14. При $\lambda \gg 1$ справедливо неравенство

$$\int_{t_M}^{t_*} \exp(a\lambda g(s, \lambda)/2) ds > \frac{\exp(a\lambda h(\lambda)/2)}{a\lambda}. \quad (2.42)$$

Доказательство. Пусть сначала $\ell = 0$. Тогда используя доказательство леммы 2.10, получаем, что $t - L \geq 0$ для всех $t \in [t_M(\lambda), t_*(\lambda)]$.

Из формулы (2.41) следует неравенство $t_*(\lambda) > t_M(\lambda) + h(\lambda)$, поэтому выполнено включение $[t_M(\lambda), t_M(\lambda) + h(\lambda)] \subset [t_M(\lambda), t_*(\lambda)]$. В силу (2.28) и условия (H_1) можно выбрать настолько малое положительное число ε , что

$$t_M(\lambda) + h(\lambda) - L < \varepsilon < t_M(\lambda)$$

при $\lambda \gg 1$. Поэтому $t - L \in [0, t_M(\lambda)]$ для всех t из отрезка $[t_M(\lambda), t_M(\lambda) + h(\lambda)]$ при $\lambda \gg 1$. Поэтому для всех t из этого отрезка справедливо неравенство

$$N_\varphi(t - L, \lambda) \geq N_\varphi(t_M(\lambda) - L, \lambda).$$

Тогда на этом отрезке получаем для функции $g(t, \lambda)$ следующую оценку:

$$g(t, \lambda) = t - h(\lambda) - f(N_\varphi(t - L, \lambda)) \geq t - h(\lambda) - f(N_\varphi(t_M(\lambda) - L, \lambda)) = t - t_M(\lambda).$$

Теперь можем получить нужную оценку на интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{t_M}^{t_*} \exp(a\lambda g(s, \lambda)/2) ds &> \int_{t_M}^{t_M+h} \exp(a\lambda g(s, \lambda)/2) ds \geq \\ &\geq \int_{t_M}^{t_M+h} \exp(a\lambda(s - t_M(\lambda))/2) ds = \frac{2}{a\lambda} (\exp(a\lambda h(\lambda)/2) - 1) > \frac{\exp(a\lambda h(\lambda)/2)}{a\lambda}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $\ell = 0$ лемма доказана.

Пусть теперь $\ell > 0$. Рассмотрим отрезок $I^\lambda = [t_M(\lambda) + h(\lambda) - 2h(\lambda)/a\lambda, t_M(\lambda) + h(\lambda)]$. Очевидно при $\lambda \gg 1$ выполнено включение $I^\lambda \subset [t_M(\lambda), t_*(\lambda)]$. В силу (2.28) при всех $\lambda \gg 1$ и при всех $t \in I^\lambda$ справедливо $t - L \in [0, t_M(\lambda)]$. Поэтому для всех $t \in I^\lambda$ верно неравенство

$$N_\varphi(t - L, \lambda) \geq N_\varphi(t_M(\lambda) - L, \lambda),$$

а значит и неравенство

$$g(t, \lambda) \geq t - t_M(\lambda).$$

Нужная оценка на интеграл получается следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{t_M}^{t_*} \exp(a\lambda g(s, \lambda)/2) ds &> \int_{I^\lambda} \exp(a\lambda g(s, \lambda)/2) ds \geq \\ &\geq \int_{I^\lambda} \exp(a\lambda(s - t_M(\lambda))/2) ds = \frac{2 \exp(a\lambda h(\lambda)/2)}{a\lambda} (1 - e^{-h(\lambda)}) > \frac{\exp(a\lambda h(\lambda)/2)}{a\lambda}. \end{aligned}$$

□

Отметим, что правая часть неравенства (2.42) стремится к бесконечности при $\lambda \rightarrow \infty$ в силу условий (H_1) – (H_2) . Также отметим, что решение уравнения (2.26) на отрезке $[t_M(\lambda), t_*(\lambda)]$ имеет вид

$$N_\varphi(t, \lambda) = N_\varphi(t_M, \lambda) \exp \left(\lambda[t - t_M] - \lambda \int_{t_M}^t N_\varphi(g(s, \lambda)) ds \right). \quad (2.43)$$

Лемма 2.15. При $\lambda \gg 1$ справедливо неравенство

$$N_\varphi(t_*(\lambda), \lambda) < \exp(-\lambda\eta(\lambda)),$$

где $\eta(\lambda) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Доказательство. Используя последовательно формулу (2.43) и неравенства (2.39), (2.40), получаем

$$N_\varphi(t_*, \lambda) < \exp \left(\lambda t_* - \lambda \int_{t_M}^{t_*} \exp(a\lambda g(s, \lambda)/2) ds \right).$$

С учетом леммы 2.14 для завершения доказательства достаточно положить

$$\eta(\lambda) = -t_* + \int_{t_M}^{t_*} \exp(a\lambda g(s, \lambda)/2) ds.$$

□

Отметим, что для функции $\eta(\lambda)$ справедлива следующая оценка снизу:

$$\eta(\lambda) > \frac{\exp(a\lambda h(\lambda)/2)}{a\lambda} - t_M(\lambda) - \tau_0,$$

Из леммы 2.15 следует существование при $\lambda \gg 1$ момента времени $t_1 = t_1(\lambda)$ ($t_1(\lambda) \in [t_M(\lambda), t_*(\lambda)]$) такого, что $N_\varphi(t_1(\lambda), \lambda) = 1$. Эта лемма дает доказательство для неравенства (2.32), если учесть, что $m(\lambda) \leq N_\varphi(t_*(\lambda), \lambda)$. Также она дает основу для доказательства неравенства (2.30), оставшуюся часть которого здесь не приводим, т.к. она аналогична случаю $L = 0$. Предельное равенство (2.29) вытекает из формулы $t_0(\lambda) = t_1(\lambda) - t_M(\lambda)$, равенства (2.28) и леммы

Лемма 2.16. *Существует предел величины $t_1(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, причем*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} t_1(\lambda) = L$$

Доказательство. Предположим противное: найдется число $c_0 > 0$ такое, что при всех $\lambda \gg 1$ выполнено неравенство

$$|t_1(\lambda) - L| > c_0$$

В силу (2.28) это означает, что

$$t_1(\lambda) - t_M(\lambda) = |t_1(\lambda) - t_M(\lambda)| = |t_1(\lambda) - L - O(h(\lambda) - \ell)| \geq |t_1(\lambda) - L| - |O(h(\lambda) - \ell)| > c_0 - |O(h(\lambda) - \ell)|.$$

Поэтому при $\lambda \gg 1$ и при некотором $c > 0$ верно неравенство

$$t_1(\lambda) - t_M(\lambda) > c. \quad (2.44)$$

Положим $N = N_\varphi$ в уравнении (2.26) и проинтегрируем получившееся равенство на отрезке $[t_M(\lambda), t_1(\lambda)]$:

$$\ln N_\varphi(t_1(\lambda), \lambda) - \ln N_\varphi(t_M(\lambda), \lambda) = \lambda \int_{t_M}^{t_1} [1 - N_\varphi(g(s, \lambda))] ds.$$

Отсюда получаем выражение для интеграла:

$$\int_{t_M}^{t_1} [N_\varphi(g(s, \lambda)) - 1] ds = \frac{\ln N_\varphi(t_M(\lambda), \lambda)}{\lambda}.$$

Воспользовавшись неравенством (2.39), получаем, что этот интеграл ограничен сверху кон-

стантой:

$$\int_{t_M}^{t_1} [N_\varphi(g(s, \lambda)) - 1] ds = \frac{\ln N_\varphi(t_M(\lambda), \lambda)}{\lambda} < \frac{\ln e^{\lambda t_M(\lambda)}}{\lambda} = t_M(\lambda) < \frac{3}{2}L. \quad (2.45)$$

С другой стороны, заметим, что в силу (2.28) и условий (H_1) , (F_3) для всякого $0 < \varepsilon \ll 1$ справедлива цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} g(t_M(\lambda) + \varepsilon, \lambda) &= t_M(\lambda) + \varepsilon - h(\lambda) - f(N_\varphi(t_M(\lambda) + \varepsilon - L, \lambda)) > \\ &> t_M(\lambda) + \varepsilon - h(\lambda) - f(1) = t_M(\lambda) + \varepsilon - h(\lambda) - L + \ell > \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

В силу (2.44) можно выбрать $\varepsilon < c/2$ так, чтобы $t_1(\lambda) - \varepsilon > t_M(\lambda) + \varepsilon$. Тогда используя неравенство (2.40), получаем

$$\begin{aligned} \int_{t_M}^{t_1} [N_\varphi(g(s, \lambda)) - 1] ds &> \int_{t_M + \varepsilon}^{t_1} [N_\varphi(g(s, \lambda)) - 1] ds > \\ &> \int_{t_M + \varepsilon}^{t_1} [\exp(a\lambda g(s, \lambda)/2) - 1] ds > \int_{t_M + \varepsilon}^{t_1} [\exp(a\lambda\varepsilon/4) - 1] ds > \varepsilon[\exp(a\lambda\varepsilon/4) - 1]. \end{aligned}$$

Последняя величина в этой цепочке неравенств стремится к бесконечности при $\lambda \rightarrow \infty$, что противоречит неравенству (2.45). \square

Таким образом, теорема 2.4 полностью доказана.

Выводы

С помощью метода большого параметра проведено исследование существования нелокальных периодических релаксационных решений уравнений (2.1) и (2.26) при достаточно больших значениях параметра λ , а также построены асимптотические оценки их периодов и экстремальных значений.

Основываясь на доказательстве теоремы 2.1 и на результатах теоремы 2.2, можно сделать вывод о том, что периодическое решение уравнения (2.1) имеет единственный всплеск асимптотически большой амплитуды на периоде, который также является асимптотически большим. Однако порядки этих величин существенно зависят от выбора функции $h(\lambda)$, что иллюстрируется результатами параграфа 2.2.

Выявлены различия в асимптотических свойствах релаксационных решений уравнений (2.1) и (2.26). Важным отличием этих случаев является поведение величины $t_M(\lambda)$: в случае $L > 0$ она отделена от нуля при любом выборе функции $h(\lambda)$, в то время как в случае $L = 0$ это не выполнено при $h(\lambda) \rightarrow 0$ ($\lambda \rightarrow \infty$). Величина $t_0(\lambda)$ при любом выборе $h(\lambda)$, наоборот, отделена от нуля в случае $L = 0$, и стремится к нулю при $L > 0$. В этом смысле найденное релаксационное решение в случае $L = 0$ существенно отличается от аналогичного решения логистического уравнения с постоянным запаздыванием.

Заключение

В работе были рассмотрены уравнения с запаздыванием, зависящим от состояния, исследована их локальная динамика, а также рассмотрены аспекты нелокальной динамики.

1. Для уравнения первого порядка с запаздыванием, зависящим от состояния, были изучены способы потери устойчивости нулевым положением равновесия при переходе бифуркационного параметра через критические значения. В первом случае установлено возникновение транскритической бифуркации, а во втором случае найдено условие реализации суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа. В обоих случаях получены асимптотики решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркаций.

2. Подробно изучена локальная динамика логистического уравнения с переменными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния. В плоскости бифуркационных параметров выявлены области асимптотической устойчивости и неустойчивости нетривиального положения равновесия, а также определены все критические случаи. С помощью метода нормальных форм исследована локальная динамика уравнения в случаях, близких к критическим. Установлены условия возникновения в этом уравнении как бифуркации Андронова-Хопфа, так и транскритической и вилообразной бифуркаций. Построены асимптотические приближения решений, приобретающих устойчивость в результате возникающих бифуркаций.

3. Исследован вопрос о локальной динамике уравнения второго порядка с большим запаздыванием, зависящим от состояния, в окрестности нулевого положения равновесия. На основе известных результатов о расположении корней характеристического уравнения выделены и рассмотрены три критических случая. С помощью метода квазинормальных форм построены асимптотические по невязке решения исходного уравнения в случаях, близких к критическим, а также в одном из случаев доказано возникновение бифуркации обмена устойчивостью и построена асимптотика состояния равновесия, приобретающего устойчивость.

4. Проведено исследование существования нелокальных периодических релаксационных решений для логистического уравнения с постоянными коэффициентами и запаздыванием, зависящим от состояния. Доказано, что при достаточно больших значениях мальтузианского коэффициента такие решения существуют. Построены асимптотические оценки их периодов и экстремальных значений по большому параметру. Также проведено сравнение асимптотических свойств основных характеристик найденных релаксационных решений с аналогичными характеристиками для решений классического уравнения Хатчинсона.

Литература

- [1] Валентайн, Р.С. Экономичность, устойчивость и работоспособность ЖРД / Р.С. Валентайн // Вопросы ракетной техники. — 1973. — Т. 1, № 217.
- [2] Голубенец, В.О. Локальная динамика обобщенного логистического уравнения с запаздыванием, зависящим от искомой функции / В.О. Голубенец // Вестник национального исследовательского ядерного университета "МИФИ". — 2018. — Т. 7, № 3. — С. 232–239.
- [3] Голубенец, В.О. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с непостоянным запаздыванием / В.О. Голубенец // Математические заметки. — 2020. — Т. 107, № 6. — С. 833–847.
- [4] Голубенец, В.О. Релаксационные колебания в логистическом уравнении с запаздыванием, зависящим от состояния в прошлом / В.О. Голубенец // Теоретическая и математическая физика. — 2021. — Т. 207, № 3. — С. 389–492.
- [5] Голубенец, В.О. Локальная динамика сингулярно возмущенного уравнения второго порядка с запаздыванием, зависящим от состояния / В.О. Голубенец, И.С. Кащенко // Математические заметки. — 2022. — Т. 111, № 5. — С. 795–799.
- [6] Горяченко, В.Д. Исследование динамики численности отдельной популяции с учетом последствий. Краткий обзор / В.Д. Горяченко // Нелинейные колебания и экология. — 1984. — С. 66–82.
- [7] Брюно, А.Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений / А.Д. Брюно. — М. : Наука, 1979.
- [8] Кащенко, Д.С. Динамика уравнений первого порядка с запаздыванием: учебное пособие / Д.С. Кащенко, И.С. Кащенко. — Ярославль : ЯрГУ, 2006.
- [9] Кащенко, И.С. Локальная динамика уравнения с большим запаздыванием, зависящим от искомой функции / И.С. Кащенко, С.А. Кащенко // Доклады академии наук. — 2015. — Т. 464, № 5. — С. 521–524.
- [10] Кащенко, С.А. Асимптотика периодического решения обобщенного уравнения Хатчинсона / С.А. Кащенко // Исследования по устойчивости и теории колебаний / Под редакцией Ю.С. Колесова. — 1981. — С. 64–85.
- [11] Кащенко, С.А. Применение метода нормализации к изучению динамики дифференциально-разностных уравнений с малым множителем при производной / С.А. Кащенко // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, № 2. — С. 262–270.

- [12] Кащенко, С.А. Уравнение Гинзбурга-Ландау – нормальная форма для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с большим запаздыванием / С.А. Кащенко // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1998. — Т. 38, № 3. — С. 457–465.
- [13] Кащенко, С.А. Асимптотика решений обобщенного уравнения Хатчинсона / С.А. Кащенко // Моделирование и анализ информационных систем. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 32–61.
- [14] Кащенко, С.А. О бифуркациях при малых возмущениях в логистическом уравнении с запаздыванием / С.А. Кащенко // Моделирование и анализ информационных систем. — 2017. — Т. 24, № 2. — С. 168–185.
- [15] Кащенко, С.А. Модели волновой памяти / С.А. Кащенко, В.В. Майоров. — [Б. м.] : Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009.
- [16] Колесов, А.Ю. Релаксационные колебания в математических моделях экологии / А.Ю. Колесов, Ю.С. Колесов // Тр. МИАН. — 1993. — Т. 199, № 3.
- [17] Колесов, А.Ю. Об одной модификации уравнения Хатчинсона / А.Ю. Колесов, Е.Ф. Мищенко, Н.Х. Розов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2010. — Т. 50, № 12. — С. 2099–2112.
- [18] Колесов, А.Ю. Теория релаксационных колебаний для уравнения Хатчинсона / А.Ю. Колесов, Н.Х. Розов // Матем. сб. — 2011. — Т. 202, № 6. — С. 51–82.
- [19] Колесов, Ю.С. Математическое моделирование процесса горения в камере жидкостного ракетного двигателя / Ю.С. Колесов, Д.И. Швитра // Литовский математический сборник. — 1975. — Т. 15, № 4.
- [20] Марсден, Дж. Бифуркация рождения цикла и ее приложения / Дж. Марсден, М. Мак Кракен. — М. : Мир, 1980.
- [21] Мышкис, А.Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А.Д. Мышкис // УМН. — 1949. — Т. 4, № 5. — С. 99–141.
- [22] Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. — М. : Мир, 1970.
- [23] Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл. — М. : Мир, 1984.
- [24] Эдварс, Р. Функциональный анализ. Теория и приложения / Р. Эдварс. — М. : Мир, 1969.
- [25] Эльсгольц, Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин. — М. : Наука, 1971.
- [26] Age-structured and delay differential-difference model of hematopoietic stem cell dynamics / M. Adimy, A. Chekroun, T.-M. Touaoula, Y. Kuang // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. — 2015. — Vol. 20. — P. 2765–2791.

- [27] Bachrathy, D. State Dependent Regenerative Effect in Milling Processes / D. Bachrathy, G. Stépán, J. Turi // Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. — 2011. — Vol. 6.
- [28] Brokate, M. Linearizing equations with state-dependent delays / M. Brokate, F. Colonius // Appl. Math. Optim. — 1990. — Vol. 21. — P. 45–52.
- [29] Cooke, K.L. On the problem of linearization for state-dependent delay differential equations / K.L. Cooke, W.Z. Huang // Proc. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 124, no. 5. — P. 1417–1426.
- [30] Crocco, L. Transverse combustio instability in liquid propellant rocket motors / L. Crocco, D.T. Harrie, Reardon F.H. // ARS Journal. — 1962. — Vol. 32, no. 3.
- [31] Driver, R.D. Existence theory for a delay-differential system / R.D. Driver // Contrib. Different. Equat. — 1963. — Vol. 1, no. 3.
- [32] Electronic chaos generators – design and applications / T. Kiliyas, K. Kutzer, A. Moegel, W. Schwarz // International Journal of Electronics. — 1995. — Vol. 79, no. 6. — P. 737–753.
- [33] Erneux, T. Applied delay differential equations / T. Erneux. — Berlin : Springer, 2009.
- [34] Functional differential equations with state-dependent delays: theory and applications / F. Hartung, T. Krisztin, H.-O. Walther, J. Wu // Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, The Netherlands. — 2006. — Vol. 3. — P. 435–545.
- [35] Golubenets, V.O. Local Bifurcations Analysis of a State-Dependent Delay Differential Equation / V.O. Golubenets // Automatic Control and Computer Sciences. — 2016. — Vol. 50, no. 7. — P. 617–624.
- [36] Halanay, A. Some new results and problems in the theory of differential-delay equations / A. Halanay, J. Yorke // SIAM Rev. — 1971. — Vol. 13, no. 1.
- [37] Hartung, F. On differentiability of solutions with respect to parameters in state-dependent delay equations / F. Hartung, J. Turi // J. Differential Equations. — 1997. — Vol. 135, no. 192–237.
- [38] Hu, Q. Global Hopf bifurcation for differential equations with state-dependent delay / Q. Hu, J. Wu // Journal of Differential Equations. — 2010. — Vol. 248, no. 12. — P. 2801–2840.
- [39] Hutchinson, G. E. Circular causal systems in ecology / G. E. Hutchinson // Ann. N. Y. Acad. of Sci. — 1948. — Vol. 50, no. 4. — P. 221–246.
- [40] Insperger, T. Criticality of Hopf bifurcation in state-dependent delay model of turning processes / T. Insperger, D. Barton, G. Stépán // International Journal of Non-Linear Mechanics, Elsevier. — 2008. — Vol. 43, no. 2. — P. 140.
- [41] Kashchenko, I. Infinite Process of Forward and Backward Bifurcations in the Logistic Equation with Two Delays / I. Kashchenko, S. Kaschenko // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. — 2019. — Vol. 22, no. 4. — P. 407–412.

- [42] Kolmanovskii, V. Introduction to the theory and applications of functional differential equations / V. Kolmanovskii, A. Myshkis. — Berlin : Springer Science & Business Media, 2013.
- [43] Kuang, Y. Delay Differential Equations, With Applications in Population Dynamics / Y. Kuang. — [S. l.] : Academic Press, 1993.
- [44] Mackey, M.C. Commodity price fluctuations: price dependent delays and nonlinearities as explanatory factors / M.C. Mackey // Journal of Economic Theory. — 1989. — Vol. 48. — P. 497–509.
- [45] Mackey, M.C. Consumer Memory and Price Fluctuations in Commodity Markets: An Integro-differential Model / M.C. Mackey, J. Belair // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 1989. — Vol. 1, no. 3. — P. 299–325.
- [46] Mixed-mode oscillations in slow-fast delay optoelectronic systems / J.H. Talla Mbe, A.F. Talla, G.R. Goune Chengui [et al.] // Phys. Rev. — 2015. — Vol. 91, no. 1.
- [47] Reardon, F.H. Velocity effects in transverse mode liquid propellant rocket combustion instability / F.H. Reardon, L. Crocco, D.T. Harrje // AIAA Journal. — 1964. — Vol. 2, no. 9.
- [48] Sabersky, R.H. Effect of wave propagation in feed lines on low frequency rocket instability / R.H. Sabersky // Jet Propulsion. — 1964. — Vol. 24, no. 172.
- [49] Zager, M.G. A delayed nonlinear PBPK model for genistein dosimetry in rats / M.G. Zager, P.M. Schlosser, H.T. Tran // Bulletin of Mathematical Biology. — 2007. — Vol. 69. — P. 93–117.