Отзыв
официального оппонента на диссертационную работу
Голубенца Вячеслава Олеговича
«Исследование решений уравнений с запаздыванием, зависящим от состояния»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности **01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление**

В диссертационной работе Голубенца В.О. исследуются дифференциальные уравнения первого и второго порядков с одним запаздыванием, зависящим от состояния. Основное внимание уделено изучению динамики уравнения, которое является обобщением уравнения Хатчинсона на случай запаздывания, зависящего от состояния. Для всех рассматриваемых уравнений изучается их локальная динамика в окрестности состояний равновесия, а для уравнения Хатчинсона также исследуется вопрос о существовании нелокального периодического решения.

Работа состоит из введения, 2 глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 83 страницы, включая 19 рисунков. Список литературы содержит 49 наименований. Структура работы соответствует логике исследования и хорошо организована. Автореферат соответствует тексту диссертации, отражает основные положения, достижения и выводы работы.

Во введении описывается актуальность выбранной темы, цели и задачи исследования, научная новизна результатов, теоретическая и практическая значимость проведенных исследований, методология и методы исследования, положения, выносимые на защиту, апробация работы, список публикаций по теме исследования, приведено содержание диссертации в сжатой форме.

В первой главе исследуется локальная динамика уравнений с запаздыванием, зависящим от состояния. Рассматриваются уравнения первого порядка (1.1), (1.16) и уравнение второго порядка (1.31) с большими запаздываниями. Во введении к первой главе приведены ссылки на работы других авторов, в том числе и на прикладные работы. В разделе 1.1 исследуется уравнение $\dot{u(t)} + u(t) = F(u\left(t - T\left(u(t)\right)\right))$. При наложении определенных условий на данные задачи исследуются устойчивость состояний равновесия и их бифуркации, в частности, бифуркации Андронова-

Хопфа. Получены условия, при которых нулевое состояние равновесия устойчиво, а так же условия, при которых уравнение имеет периодическое орбитально асимптотически устойчивое решение (теорема 1.3). В разделе 1.2 исследуется обобщенное логистическое уравнение $\dot{N(t)} = f(N(t))[1 - g(N(t)(N(t - T(N(t)))]N(t)$. При наложении определенных условий на данные задачи так же исследуются устойчивость состояний равновесия и их бифуркации (теоремы 1.4-1.6), изучены транскритические бифуркации и бифуркации Андронова-Хопфа, получено условие существования периодического орбитально асимптотически устойчивого решения, получена асимптотика этого решения (теорема 1.7). Приведены примеры возникновения бифуркации Андронова-Хопфа (раздел 1.2.6). В разделе 1.3 исследуется уравнение второго порядка $(x(t))^{\cdot\cdot} + \sigma(x(t))^{\cdot} + x(t) = ax(t - T\varphi(x(t))) + f(x((t - T\varphi(x(t))))$, изучена динамика решения в окрестности нулевого положения равновесия, построены асимптотические по невязке решения в близком к критическому случае, изучены бифуркации решения и показана возможность бесконечного процесса бифуркаций. Получены условия устойчивости нулевого состояния равновесия (теорема 1.8), исследованы условия устойчивости других состояний равновесия (теорема 1.9).

Во второй главе исследуются релаксационные колебания решений логистических уравнений с запаздыванием, зависящем от состояния – обобщений уравнения Хатчисона $\dot{N(t)} = \lambda N(t)[1 - N(\tau(t, N(t - L), \lambda))]$. Рассмотрены случай L=0 и L>0, которые существенно различны по поведению решения (разделы 2.1 и 2.2). В разделе 2.1 исследуется уравнение $\dot{N(t)} = \lambda N(t)[1 - N(\tau(t, N(t), \lambda))], \tau(t, N(t), \lambda) = t - h(\lambda) - f(N(t))$. Доказана теорема о существовании релаксационного решения при больших значениях параметра λ (теорема 2.1), а также получены некоторые свойства периодического решения (теорема 2.2) при больших значениях параметра λ. В разделе 2.2 исследуется уравнение $\dot{N(t)} = \lambda N(t)[1 - N(\tau(t, N(t - L), \lambda))], \tau(t, N(t - L), \lambda) = t - h(\lambda) - f(N(t - L))$ при больших значениях параметра λ и L>0. Доказана теорема о существовании релаксационного решения при больших значениях параметра λ (теорема 2.3), а также получены некоторые свойства периодического решения (теорема 2.4) при больших значениях параметра λ.

В заключении сформулированы основные результаты работы и выводы.

Основные результаты диссертационной работы

1. Для ряда обобщений уравнения Хатчисона с запаздыванием, зависящем от состояния, при наложении определенных условий на данные задачи, проведен бифуркационный анализ состояний равновесия, получены условия существования и орбитальной асимптотической устойчивости периодических решений. Найдены условия реализации бифуркации обмена устойчивостью и суперкритической бифуркации Андронова – Хопфа. Построены асимптотики решений, приобретающих устойчивость в результате бифуркаций.

2. Доказано, что обобщенное логистическое уравнение с переменными коэффициентами и с запаздыванием, зависящим от состояния, имеет нелокальное релаксационное периодическое решение. Получены асимптотические оценки основных его характеристик, таких как максимальное и минимальное значения, а также период. Показано, что это решение имеет один асимптотически большой всплеск на асимптотически большом периоде, а минимальное значение сверхэкспоненциально мало

3. Для уравнения второго порядка с большим запаздыванием, зависящим от состояния, проведен бифуркационный анализ состояний равновесия, получены достаточные условия существования периодического решения, построена асимптотика этого решения, изучены критические случаи бесконечной размерности в задаче об устойчивости нулевого положения равновесия. В случаях, близких к критическим, построены специальные нелинейные уравнения, решения которых определяют главную часть асимптотического приближения решений исходной задачи.

.

Общая характеристика диссертационной работы

Диссертационная работа Голубенца В.О. представляет законченное самостоятельное исследование в области теории дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящем от состояния. В работе изучены свойства решений ряда не исследованных ранее уравнений – обобщений уравнения Хатчисона. В качестве основного метода исследования автор успешно выбрал метод нормальных и квазинормальных форм, что позволило получить и обосновать ряд новых результатов, относящихся к теории дифференциальных уравнений с запаздыванием. Исследованы бифуркации состояний равновесия для различных значений параметров, получены асимптотические разложения решений в окрестностях положений равновесий.

Получение результатов главы 2 потребовало хорошего владения методом нормальных форм и техникой исследования решений дифференциальных уравнений, продемонстрированных автором. Теоретические выкладки иллюстрируются примерами (раздел 1.2.6), а так же подтверждаются численными расчетами (табл. 2.1, стр. 63). Полученные результаты могут использоваться как в теории дифференциальных уравнений с запаздыванием, так и в прикладных областях, таких, как биология, медицина, нейродинамика, электроника и других. Основные результаты исследований, представленных в диссертации, опубликованы в 24 работах, из них 5 статей в журналах из перечня ВАК. Все публикации, кроме одной, выполнены без соавторов. В статье, выполненной совместно с научным руководителем, соавтором были получены результаты в одном специальном частном случае. Также результаты прошли апробацию на различных конференциях, в том числе международных.

К работе есть и замечания.

Замечания по диссертационной работе

1. Работа написана небрежно. Нумерация теорем во Введении не совпадает с нумерацией теорем в тексте работы. В формулировках ряда теорем и лемм использованы неудачные обороты (например, стр. 26, Теорема 1.2, «…ε <<1»). На стр. 29 в формулировке теоремы 1.3 наложено условие $\varepsilon>0$, на рис. 1.2, иллюстрирующем теорему, приведен случай ε=-0,1. Следовало бы прокомментировать появление такого значения.
2. Было бы полезным привести более подробные доказательства ряда теорем и лемм в главе 1 (теорем 1.5,1.6, лемм 1.5,1,7 и других).
3. Из текста работы не ясно, являются ли асимптотические оценки, приведенные после формулировки теоремы 1.8, стр.43, равномерными по номеру n.
4. Численные расчеты (рис. 2.8, стр. 66, стр. и другие) желательно описать подробнее, учитывая, что численно находится решение с областями асимптотически больших градиентов.
5. Оценивались ли погрешности численного счета ? Это существенно, поскольку величина m достаточно мала (10^{-8}-10^{-15}, табл. 2.1, стр. 63) и погрешности численного счета могут повлиять на решение.
6. Из работы не ясно, допускают ли полученные результаты на случаи неавтономных уравнений и систем уравнений подобного типа.

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертации. Диссертационная работа Голубенца В.О. выполнена на высоком научном уровне и является законченной научно-квалификационной работой.

Считаю, что диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям в пп. 9, 10, 11, 13, 14 Положения о порядке присуждения ученых степеней, утвержденного постановлением Правительства РФ № 842 от 24.09.2013 г. (в редакции от 11.09.2011), а ее автор, Голубенец Вячеслав Олегович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:
Нестеров Андрей Владимирович,
профессор, доктор физико-математических наук
по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление,
профессор кафедры информатики
ФГБОУ ВО «РЭУ им. Г.В. Плеханова»,
117997, Российская Федерация, г. Москва, Стремянный пер. 36,
тел.: +7 (495) 958-24-10 (раб), 8 906 641 87 45 (моб),
email: Nesterov.AV@rea.ru, andrenesterov@yandex.ru.

Андрей Владимирович Нестеров