

На правах рукописи

ГОРДЕЕВА ОЛЬГА ВЛАДИМИРОВНА

**О БИФУРКАЦИЯХ ДВУМЕРНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С
ГОМОКЛИНИЧЕСКИМИ ТРАЕКТОРИЯМИ К НЕГРУБЫМ
НЕПОДВИЖНЫМ ТОЧКАМ**

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2022

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений, математического и численного анализа федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Научный руководитель:

Гонченко Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории динамического хаоса кафедры теории управления и динамики систем Института информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Официальные оппоненты:

Мамаев Иван Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, профессор РАН, профессор кафедры теоретической физики ФГАОУ ВО «Удмуртский государственный университет».

Кашенко Илья Сергеевич, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова».

Ведущая организация:

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Защита диссертации состоится « 13 » октября 2022 года в 16-00 на заседании диссертационного совета Д 212.166.20 при ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского», пр. Гагарина, д. 23.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» и на официальном сайте организации: <https://diss.unn.ru/1289>

Автореферат разослан « ____ » _____ 2022 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.20
канд. физ-мат. наук

Р.С. Бирюков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования.

Настоящая работа относится к одному из наиболее важных и интересных разделов качественной теории динамических систем – теории многомерных систем со сложным, хаотическим поведением траекторий.

Основы качественной теории динамических систем были заложены еще в конце 19-го и начале 20-го века в классических работах А. Пуанкаре, Ж. Адамара, А.М. Ляпунова, И. Бендиксона, Дж. Биркгофа. Ее важнейший раздел, теория бифуркаций, как самостоятельная математическая дисциплина, оформилась в 30-е годы в работах А.А. Андронова, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера, Л.С. Понтрягина, в которых были изучены основные локальные и глобальные бифуркации динамических систем на плоскости. Основы качественной теории и теории бифуркации систем на замкнутых двумерных многообразиях были заложены в 40-50-х годах в работах А.Г. Майера, М. Морса, М. Пейксото, Х. ДеБаггиса, К. Пью и др. В 60-е годы началось бурное развитие качественной теории многомерных динамических систем (размерность которых не меньше трех для потоков и двух для отображений). Прежде всего это касалось построения теории грубых или гиперболических систем. Понятие грубой динамической системы на плоскости было введено в знаменитой работе А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина, в которой были также сформулированы необходимые условия грубости, достаточность этих условий была вскоре показана Е.А. Леонтович и А.Г. Майером. Многомерные грубые системы традиционно называются гиперболическими, основы теории таких систем были заложены в работах В.М. Алексеева, Д.В. Аносова, Р. Боуэна, Р. Вильямса, Р. Манэ, К. Пью, К. Робинсона, Я.Г. Синая, С. Смейла, Д. Френкса, Л.П. Шильникова, М. Шуба и др.

Основы теории нелокальных бифуркаций многомерных динамических систем были заложены в работах Л.П. Шильникова еще в 60-х годах. В дальнейшем бифуркации многомерных динамических систем изучались в работах В.И. Арнольда, В.С. Афраймовича, В.Н. Белых, Л.А. Белякова, Х. Брура, В.В. Быкова, М. Вианы, Р. Вильямса, Н.К. Гаврилова, С.В. Гонченко,

Дж. Гукенхайера, Л. Диаса, Ю.С. Ильяшенко, Ю.А. Кузнецова, Л.М. Лермана, В.И. Лукьянова, В.С. Медведева, А.Д. Морозова, Ю.И. Неймарка, А.И. Нейштадта, Ш. Ньюхауса, Дж. Пэлиса, К. Симо, Ф. Такенса, Д.В. Тураева, А.Я. Хомбурга, А.Л. Шильникова и др.

Развитие гиперболической теории и теории бифуркаций привело, в свою очередь, к открытию, в 60-70-е годы, динамического хаоса, что по праву считается одним из самых замечательных достижений современной науки. Одним из фундаментальных результатов в теории динамического хаоса по праву считается открытие сложной структуры множества N траекторий, целиком лежащих в окрестности грубой гомоклинической траектории Пуанкаре, т.е. траектории по которой трансверсально пересекаются инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия грубой седловой периодической орбиты. Существование таких гомоклинических траекторий было установлено А.Пуанкаре еще в конце 19-го века. Однако сама задача описания структуры множества N , так называемая задача Пуанкаре-Биркофа, была решена лишь в 60-х годах в работах С.Смейла и Л.П. Шильникова. Причем в работе Л.П. Шильникова¹ было дано полное описание структуры этого множества:

***Теорема Шильникова.** N является локально максимальным равномерно гиперболическим множеством, траектории которого находятся во взаимнооднозначном соответствии с траекториями топологической схемы Бернулли из двух символов.*

В случае же систем с гомоклиническими касаниями, то есть когда устойчивое и неустойчивое многообразия грубой седловой периодической орбиты пересекаются не трансверсально, ситуация становится гораздо более сложной и в некотором смысле непредсказуемой. Дело в том, что бифуркации таких систем, как показано в работах С.В. Гонченко, Д.В. Тураева и Л.П. Шильникова, могут приводить к возникновению периодических и гомоклинических траекторий любых порядков вырождения. Поэтому полное описание динамики и бифуркаций в таких системах с помощью конечнопараметрических семейств становится принципиально невозможным.

¹ Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре-Биркофа // Матем. сборник. 1967, т.74, №. 4. С. 475-492.

Здесь на первый план должны выступать задачи, связанные с изучением основных бифуркаций и характеристических свойств динамики. В полной мере это же относится и к рассматриваемой в настоящей работе задачи исследования бифуркаций многомерных динамических систем с гомоклиническими орбитами к негрубым периодическим траекториям.

Основы теории бифуркаций систем с негрубыми (нетрансверсальными) гомоклиническими траекториями к грубым седловым периодическим орбитам были заложены в известной работе Н.К. Гаврилова и Л.П. Шильникова.² По сути, в этой работе, а также в работах Л.П. Шильникова о многомерных системах с гомоклиническими петлями к состояниям равновесия типа седло-фокус, были заложены основы математической теории гомоклинического хаоса. К этой тематике примыкает также работа В.И. Лукьянова и Л.П. Шильникова³, в которой были изучены глобальные бифуркации многомерных систем с трансверсальными гомоклиническими орбитами к негрубым периодическим траекториям седло-узлового типа. Решение этой задачи, помимо ее важности для теории динамических систем, послужило еще и математическим обоснованием известного сценария «перехода к хаосу через перемежаемость», когда большой странный аттрактор проявляется сразу же после исчезновения устойчивой периодической траектории.

Объект исследования.

Настоящую диссертацию можно рассматривать как логическое продолжение исследований Лукьянова и Шильникова на случаи большей коразмерности: когда негрубая периодическая траектория является вырожденной, когда гомоклиническая траектория нетрансверсальна, а также некоторые комбинации этих случаев. Конкретно, в диссертации рассматриваются:

1. Двумерные диффеоморфизмы с $(n-1)$ -кратно вырожденной неподвижной точкой, $n \geq 2$, и трансверсальной к ней гомоклинической траекторией.

² Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой // Часть 1. – Матем. Сборник, 1972, т.88, №. 4. 475-492; Часть 2. – Матем. сборник, 1973. т.90. №. 1. 139-156.

³ Лукьянов В.И., Шильников Л.П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами // ДАН СССР. 1978. т.243. №1, 26-29.

2. Двумерные диффеоморфизмы с $(n-1)$ -кратно вырожденной неподвижной точкой, $n \geq 2$, многообразия которой касаются квадратично. Здесь изучаются бифуркации в однопараметрических семействах, которые расщепляют гомоклиническое касание общим образом, но сохраняют вырождение неподвижной точки.

3. Бифуркации в двухпараметрическом семействе общего положения двумерных диффеоморфизмов с неподвижной точкой типа седло-узел ($n=2$) и квадратичным гомоклиническим касанием к ней.

4. Бифуркации в двухпараметрическом семействе общего положения двумерных диффеоморфизмов с неподвижной точкой типа сложное седло ($n=3$) и трансверсальной к ней гомоклинической траекторией.

Цели и задачи исследования.

Основная задача работы состоит в исследовании динамических свойств двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими траекториями к негрубым неподвижным точкам, а также в изучении основных глобальных бифуркаций в параметрических семействах общего положения.

Методы исследования.

В диссертации используются методы качественной теории динамических систем и теории бифуркаций.

Результаты работы и научная новизна исследования.

Все сформулированные в работе результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Перечислим основные из них.

1. Получены новые формулы для локального отображения вблизи $(n-1)$ -кратно вырожденной неподвижной точки двумерного диффеоморфизма. Показано, что множество N траекторий, целиком лежащих в окрестности трансверсальной гомоклинической траектории к такой точке, находится во взаимно-однозначном соответствии с траекториями топологической схемы Бернулли из двух символов.

2. Изучены основные бифуркации в однопараметрических семействах двумерных диффеоморфизмов, имеющих $(n-1)$ -кратно вырожденную неподвижную точку с квадратичным гомоклиническим касанием, в

которых неподвижная точка не претерпевает бифуркаций, а гомоклиническое касание расщепляется общим образом.

3. Изучены основные бифуркации двумерных диффеоморфизмов, имеющих квадратичное гомоклиническое касание к неподвижной точке типа невырожденный седло-узел. На плоскости параметров построены бифуркационные диаграммы для однобходных периодических траекторий из малой фиксированной окрестности гомоклинической орбиты.

4. Изучены бифуркации в двухпараметрическом семействе общего положения двумерных диффеоморфизмов с неподвижной точкой типа сложное седло ($n=3$) и трансверсальной к ней гомоклинической траекторией. Установлено полное описание множества N траекторий из окрестности гомоклинической траектории, открыто явление «скачка гиперболичности», когда гиперболическое множество, становясь на мгновение неравномерно гиперболическим в результате седло-узловой бифуркации неподвижной точки, после этой бифуркации резко, скачком, меняет свое местоположение.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы могут быть применены как в теории динамических систем, так и при исследовании конкретных моделей, в том числе моделей математической теории синхронизации.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Теорема о структуре множества N траекторий, целиком лежащих в окрестности трансверсальной гомоклинической траектории к $(n-1)$ -кратно вырожденной неподвижной точки двумерного диффеоморфизма.

2. Теорема об основных бифуркациях в однопараметрических семействах двумерных диффеоморфизмов, имеющих $(n-1)$ -кратно вырожденную неподвижную точку с квадратичным гомоклиническим касанием, в которых неподвижная точка не претерпевает бифуркаций, а гомоклиническое касание расщепляется общим образом.

3. Теоремы об бифуркациях двумерных диффеоморфизмов, имеющих квадратичное гомоклиническое касание к неподвижной точке типа невырожденный седло-узел. Описание бифуркационных диаграмм на плоскости параметров для однобродных гомоклинических и периодических траекторий из малой фиксированной окрестности исходной гомоклинической орбиты.

4. Теоремы о полном описании как структуры множества N траекторий из окрестности трансверсальной гомоклинической траектории к неподвижной точки типа сложное седло двумерного диффеоморфизма, так и бифуркаций этого множества в двухпараметрических семействах общего положения.

Апробация результатов.

По теме диссертации опубликовано 17 работ. Результаты работ докладывались на конференциях: VI International Congress on Mathematical Modeling, Н. Новгород, 2004. VII Всероссийская научная конференция «Нелинейные колебания механических систем», Н. Новгород, 2005; Итоговая научная конференция учебно-научного инновационного комплекса «Модели и методы и программные средства». Н. Новгород 2007г; VIII научная конференция «Нелинейные колебания механических систем», ННГУ, 2008; 8-ая международная школа хаотические автоколебания и образование структур (хаос–2007); International Conference-School «Dynamics Bifurcations and Chaos», Nizhny Novgorod, 2017; International Conference-School Shilnikov WorkShop 2018. International Conference-«Topological methods in dynamics and related topics», N. Novgorod, 2019; 7th Bremen Summer School and Symposium Dynamical systems - pure and applied, 2019; International Conference-School shilnikov workshop 2020, Н. Новгород, 2020; математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии, Н.Новгород, 2020, XV Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Н. Новгород, 2021.

По теме диссертации сделаны доклады на научном семинаре ИИТММ ННГУ «Нелинейная динамика: теория и приложения» им. Л.П. Шильникова (руководитель С.В. Гонченко), а также на научном семинаре Лаборатории динамических систем ВШЭ, Нижний Новгород (руководитель В.З. Гринес).

Результаты диссертации явились составной частью работ, выполнявшихся при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, грант 0729–2020– 0036.

Публикации по теме работы.

Всего по теме диссертации автором опубликовано 17 работ, из них 6 работ - в журналах, рекомендованных ВАК. Основные результаты, выносимые на защиту, являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, вошедших в диссертацию.

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Общий объем работы 100 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дано обоснование актуальности диссертационной работы, определены цели и задачи исследования, аргументирована научная новизна, практическая значимость работы, выделены выносимые на защиту положения, приведены сведения об апробации результатов работы, сведения о публикациях, дано краткое изложение диссертации по главам.

В первой главе рассматриваются двумерные диффеоморфизмы, имеющие $(n - 1)$ -кратно вырожденную, $n \geq 2$, неподвижную точку O , типа седло-узел при n четном, и типа сложное седло при n нечетном, и трансверсальную к ней гомоклиническую траекторию Γ_0 .

Здесь решается задача полного описания множества N траекторий, целиком лежащих в достаточно малой окрестности $U(O \cup \Gamma_0)$, которая представляет собой объединение малой окрестности (диска) U_0 , содержащую точку O , и конечного числа малых окрестностей (дисков) тех точек траектории Γ_0 , которые не попали в U_0 , см. рисунок 1.

Пусть B_2 – топологическая схема Бернулли из двух символов «0» и «1».

Рассмотрим ее подсистему $\Omega_{\bar{k}}$, выделяемую следующими условиями:

- 1) $\Omega_{\bar{k}}$ не содержит последовательностей, в которых есть два соседних символа «1»;
- 2) у последовательностей из $\Omega_{\bar{k}}$ длина любого отрезка, состоящего из символов «0», не меньше $\bar{k}$

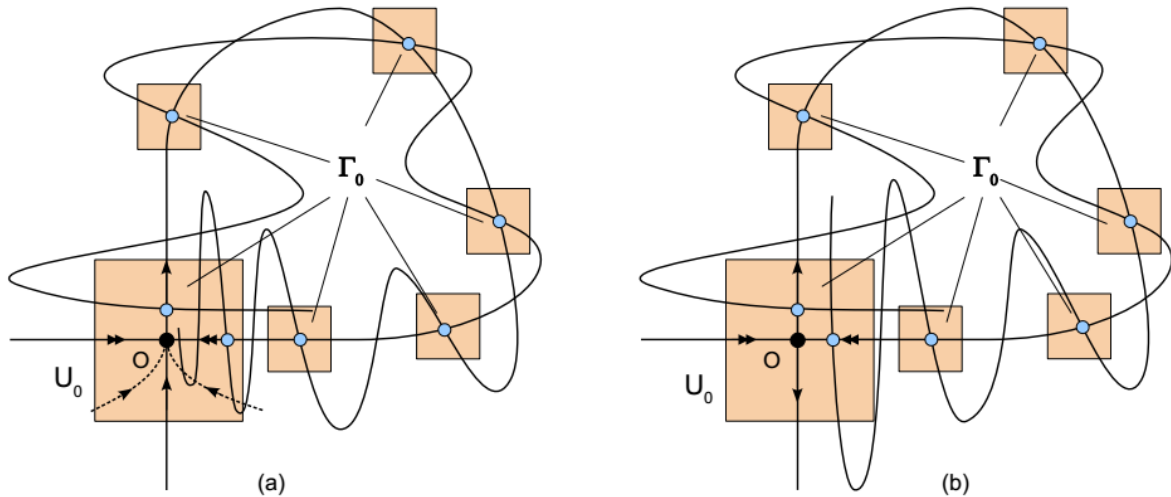


Рисунок 1. Окрестность трансверсальной гомоклинической траектории Γ_0 к неподвижной точке типа (а) седло-узел; (б) сложное седло.

Основной результат первой главы – это следующая

Теорема 1.1. Пусть f – рассматриваемый диффеоморфизм. Тогда динамическая система $f|_N$ (ограничение f на N) топологически сопряжена с подсистемой $\Omega_{\bar{k}}$.

Доказательство теоремы проводится с помощью метода седловых отображений, предложенного Л.П. Шильниковым в его работе о структуре окрестности грубой гомоклинической траектории, а также модификации этого метода, развитой в работах Лукьянова и Шильникова, основанной на построении инвариантных устойчивого и неустойчивого многообразий траекторий из множества N .⁴

Общая схема доказательства теоремы 1.1 следующая.

⁴ Принципиально важным моментом в этой модификации является то, что она позволяет строить такие многообразия даже в неравномерно гиперболической ситуации. Так, в работе В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, Тр. ММО, 1982, Т.44, 150–212- этот метод был эффективно применен для установления структуры аттрактора Лоренца в геометрической модели Афраймовича-Быкова-Шильникова.

Пусть f_0 является C^r -гладким диффеоморфизмом с $r \geq n+1$. Тогда через точку O в силу условия А) проходят два C^r -гладких инвариантных многообразия, центрально-неустойчивое многообразие $W^u(O)$ и сильно устойчивое многообразие $W^{ss}(O)$, которые трансверсально пересекаются в точке O . В случае сложного седла локальные куски $W^u(O)$ и $W^{ss}(O)$ на U_0 являются гладкими кривыми, которые трансверсально пересекаются в O , а в седло-узловом случае локальный кусок $W^{ss}(O)$ является кривой, разделяющей U_0 на узловой и седловой сектора, а локальный кусок $W^u(O)$ лежит в седловом секторе. Эти локальные многообразия продолжаются до глобальных, и мы предполагаем, что они пересекаются трансверсально в точках гомоклинической траектории Γ_0 , см. рисунок 1.

В работе⁵ показано, что в U_0 можно выбрать C^{r-1} -гладкие локальные координаты (x, y) , в которых локальное отображение $T = f_0|_{U_0}$ запишется в виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda x + f(x, y)x, \\ \bar{y} = y + y^n + g(y), \end{cases} \quad (1)$$

где $f(0,0)=0$ и $g(y)=O(y^n)$. Отметим, что в этих координатах второе уравнение системы (1) не зависит от x . В координатах (x, y) неподвижная точка O лежит в начале координат и ее локальные инвариантные многообразия W^{ss} и W^{cu} распрямлены: $W^{cu} : \{x=0\}, W^{ss} : \{y=0\}$.

Выберем в U_0 две точки траектории $\Gamma_0 : M^+ \in W^{ss}(0)$ и $M^- \in W^{cu}(0)$. Пусть гомоклинические точки M^+ и M^- имеют координаты $M^+(x^+, 0)$ и $M^-(0, y^-)$, где $x^+ > 0$ и $y^- > 0$. Выберем на U_0 их достаточно малые окрестности $\Pi^+ : \{(x, y) : |x - x^+| \leq \varepsilon, |y| \leq \varepsilon\}$ и $\Pi^- : \{(x, y) : |x| \leq \varepsilon, |y - y^-| \leq \varepsilon\}$ так, что $\Pi^+ \cap T \Pi^+ = \emptyset$ и $\Pi^- \cap T^{-1} \Pi^- = \emptyset$. Так как точки M^+ и M^- принадлежат одной и той же траектории Γ_0 , то существует натуральное q такое, что

⁵ В.И.Лукиянов. О существовании гладких инвариантных слоений в окрестности некоторых негрубых неподвижных точек диффеоморфизма. Межвуз. сб. Горький.-1979.-с.60-66.

$M^+ = f_0^q(M^-)$. Соответственно, в U_0 будут определены два отображения по траекториям диффеоморфизма f_0 : *локальное* $T = f_0|_{U_0}$ и *глобальное* $T_1 = f_0^q: \Pi^- \rightarrow \Pi^+$.

По построению, любая траектория из множества N должна обязательно иметь точки пересечения с окрестностями Π^+ и Π^- . При этом точки из Π^+ попадают в Π^- под действием итераций локального отображения T , а из Π^- в Π^+ под действием глобального отображения T_1 . Таким образом, любой неасимптотической к O траектории из множества N можно поставить в соответствие бесконечную в обе стороны последовательность отображений-сомножителей $T^{i_k} \cdot T_1$, где $k = 0, \pm 1; \pm 2; \dots$ $j_k \geq \bar{k}$

В работе показывается, что каждой такой последовательности отвечает единственная траектория диффеоморфизма f_0 , которая является к тому же траекторией седлового типа. Доказательство здесь прямое: устанавливается существование и единственность соответствующих устойчивых и неустойчивых инвариантных слоев, которые являются липшицируемыми кривыми вида $y = h_1(x)$ и $x = h_2(y)$ с константами Липшица меньше 1, а следовательно пересекаются в одной точке.

Во **второй главе** также рассматриваются двумерные диффеоморфизмы с гомоклиническими траекториями к негрубым неподвижным точкам. Однако в отличие от главы 1 предполагается, что исходная гомоклиническая траектория является нетрансверсальной – квадратичное гомоклиническое касание. Кроме того, здесь не решается «задача полного описания», как в главе 1, а рассматривается так называемая ограниченная бифуркационная задача – исследуются бифуркации однообходных периодических траекторий в рамках однопараметрических семейств f_μ специфического типа. Такое семейство при изменении параметра μ расщепляет исходное квадратичное гомоклиническое касание общим образом, но сохраняет тип и вырождение неподвижной точки O . Основным результатом главы 2 – это следующая

Теорема 2.1. *В любой окрестности точки $\mu = 0$ существует счетное множество непересекающихся интервалов Δ_k значений параметра μ таких,*

что при $\mu \in \Delta_k$ диффеоморфизм f_μ имеет асимптотически устойчивую однообходную периодическую траекторию. Границами интервалов Δ_k являются точки L_k^+ и L_k^- , отвечающие бифуркациям коразмерности один, седло-узловой и удвоения периода соответственно. При $k \rightarrow +\infty$ интервалы Δ_k накапливаются к точке $\mu = 0$.

Напомним, что однообходной периодической траекторией называется траектория, которая замыкается после одного обхода итераций диффеоморфизма f_μ вокруг окрестности $U(O \cup \Gamma_0)$, рисунок 1. Таким образом, по нашей конструкции, точка такой траектории из Π^+ является неподвижной точкой отображения первого возвращения $T_k = T_1 \cdot T^k$. Главным моментом в доказательстве теоремы 2.1 является лемма 2.1 (рескейлинг лемма), в которой показывается, что отображение T_k с помощью линейных замен координат и параметра (перемасштабирований) приводится к отображению, асимптотически близкому к одномерному отображению параболы $\bar{Y} = M - Y^2$, в котором рескейлинг-параметр M и координата Y , могут принимать произвольные конечные значения. Бифуркации в отображении параболы хорошо известны, и по лемме 2.1, они могут быть перенесены и на искомые отображения первого возвращения T_k для всех достаточно больших k .

В рассматриваемом случае существуют два типа гомоклинических касаний к точке O – это «касание сверху», рисунок 2а, и «касание снизу», рисунок 2б. Во всех случаях геометрия отображения первого возвращения $T_k = T_1 \cdot T^k$ похожа на геометрию отображения подковы: областью определения отображения T_k на Π^+ является горизонтальная полоска B_k^0 , которая под действием итераций T^k локального отображения T переходит в вертикальную полоску B_k^1 на Π^- , а последняя – в «подкову» $T_1(B_k^1)$ под действием глобального отображения T_1 , см. рисунок 2. При этом отображение T_k при изменении μ действует по-разному в случаях касания снизу и касания сверху. В случае касания сверху отображение T^k при $\mu = 0$ имеет нетривиальное инвариантное множество, гомеоморфное подкове Смейла, и при увеличении μ здесь происходят бифуркации разрушения этой подковы, последними из

Рассматриваемый в третьей главе случай глобальной бифуркации коразмерности 2 – квадратичное гомоклиническое касание к неподвижной точки типа невырожденный седло-узел, естественным образом связан с двумя другими хорошо известными задачами исследования глобальных бифуркаций

коразмерности один: бифуркации двумерных диффеоморфизмов с квадратичным гомоклиническим касанием к седловой неподвижной точке и бифуркации диффеоморфизмов с трансверсальной гомоклинической траекторией к седло-узловой неподвижной точке.

Перейдем теперь к обзору основных результатов, полученных в главе 3. Рассмотрим C^r -гладкий диффеоморфизм f_0 ($r \geq 4$), имеющий неподвижную точку O типа седло-узел и гомоклиническую к ней траекторию Γ_0 (см. рисунок 1а). Предполагается, что f_0 удовлетворяет следующим условиям.

А) f_0 имеет неподвижную точку O типа седло-узел с мультипликаторами $\lambda_1 = \lambda$, где $0 < \lambda < 1$ и $\lambda_2 = 1$, и первой ляпуновской величиной не равной нулю;

В) Инвариантные многообразия $W^u(O)$ и $W^{ss}(O)$ имеют квадратичное касание в точках некоторой гомоклинической траектории Γ_0 .

Пусть $M \in W^{ss} \cap U_0$ – некоторая гомоклиническая точка траектории Γ_0 и $\Pi^+ \subset U_0$ – ее достаточно малая окрестность. Обозначим через l_u кусок $W^u \cap \Pi^+$ многообразия W^u , который содержит точку M . Мы будем различать два основных случая квадратичного гомоклинического касания: касание «сверху», когда $l_u \subset U^-$, и касание «снизу», когда $l_u \subset U^+$, см. рисунок 3.

Диффеоморфизмы, удовлетворяющие условиям **А)** и **В)**, образуют в пространстве C^r -гладких диффеоморфизмов локально связную бифуркационную поверхность B_2 коразмерности два. Поэтому для изучения бифуркаций диффеоморфизма f_0 рассматриваются двухпараметрические семейства f_μ , $\mu = (\mu_1, \mu_2)$, диффеоморфизмов, которые пересекают B_2 трансверсально при $\mu = 0$. Выберем управляющие параметры μ_1 и μ_2 следующим образом. Параметр μ_1 – это параметр расщепления многообразий W^u и W^{ss} относительно некоторой гомоклинической точки, например, точки M^+ , при условии, что седло-узел сохраняется. При этом W^u и W^{ss} будут трансверсально пересекаться в двух точках, близких к M^+ , при $\mu_1 < 0$ в случае касания «сверху» и при $\mu_1 > 0$ в случае касания «снизу»; соответственно W^u и W^{ss} не пересекаются вблизи M^+ , если соответственно $\mu_1 > 0$ и $\mu_1 < 0$. Вторым параметром μ_2 – это параметр, управляющий бифуркацией седло-узловой

неподвижной точки так, что f_μ имеет неподвижную точку типа седло-узел при $\mu_2 = 0$, не имеет в U_0 неподвижных точек (седло-узел исчезает) при $\mu_2 > 0$, а при $\mu_2 < 0$ седло-узел распадается на две неподвижные точки, седло O_1 и устойчивый узел O_2 .

При изменениях параметров (μ_1, μ_2) в семействе f_μ будут происходить бифуркации. В частности, они будут связаны с образованием новых гомоклинических структур (см. рисунок 3).

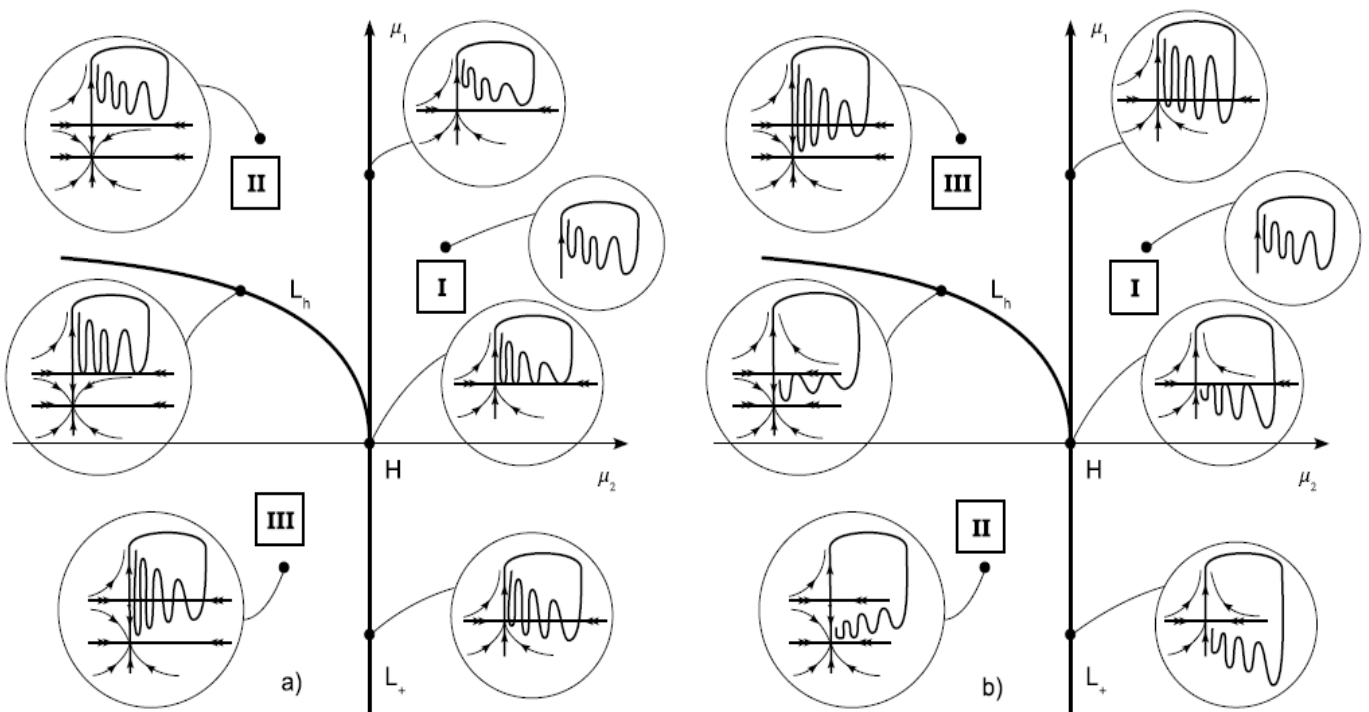


Рисунок 3. Бифуркационная диаграмма к Теореме 3.1 в случаях
а) касания «сверху»; б) касания «снизу».

Теорема 3.1. В окрестности начала координат $\mu = 0$ на плоскости параметров (μ_1, μ_2) существуют две бифуркационные кривые $L_+ : \mu_2 = 0$ и $L_h : \mu_1 = \sqrt{-\mu_2} + O(|\mu_2|)$. При $\mu \in L_+$ диффеоморфизм f_μ имеет неподвижную точку типа седло-узел, близкую к O ; при $\mu \in L_h$ у f_μ существует негрубая гомоклиническая траектория Γ_μ , близкая к Γ_0 , в точках которой квадратично

касаются инвариантные многообразия $W^u(O_1)$ и $W^s(O_1)$. Кривые L_+ и L_h разбивают окрестность начала координат на три области (рисунок 3):

- В области **I** ($\mu_2 > 0$) диффеоморфизм f_μ не имеет неподвижных точек;
- В областях **II** и **III** у f_μ существуют две неподвижные точки, седло O_1 и узел O_2 . При $\mu \in \Pi$ у O_1 нет гомоклинических траекторий, близких к Γ_μ , а при $\mu \in \Pi$ у O_1 появляются две грубые гомоклинические траектории, близкие к Γ_μ .

В главе 3 также изучаются бифуркации однообходных периодических траекторий в двухпараметрическом семействе f_μ при достаточно малых μ . Для этого, так же как и в главе 2, рассматриваются отображения первого возвращения $T_k = T_1 \cdot T_0^k : \Pi^+ \rightarrow \Pi^- \rightarrow \Pi^+$. Бифуркации их неподвижных точек для всех достаточно больших k описываются следующей теоремой.

Теорема 3.2. На плоскости параметров (μ_1, μ_2) в любой достаточно малой окрестности начала координат существует счетное множество непересекающихся областей Δ_k таких, что при $\mu \in \Delta_k$ диффеоморфизм f_μ имеет асимптотически устойчивую однообходную периодическую траекторию. Границами областей Δ_k являются бифуркационные кривые L_k^+ и L_k^- , отвечающие бифуркациям коразмерности один, седло-узловой и удвоения периода соответственно. При $k \rightarrow +\infty$ области Δ_k накапливаются к кривой $L_h \cup \{L_+ \cap \{\mu_1 < 0\}\}$.

Рисунок 4 представляет собой некоторую иллюстрацию к теореме 3.2. Здесь показано также изменение геометрии отображения первого возвращения T_k при варьировании параметров внутри области Δ_k .

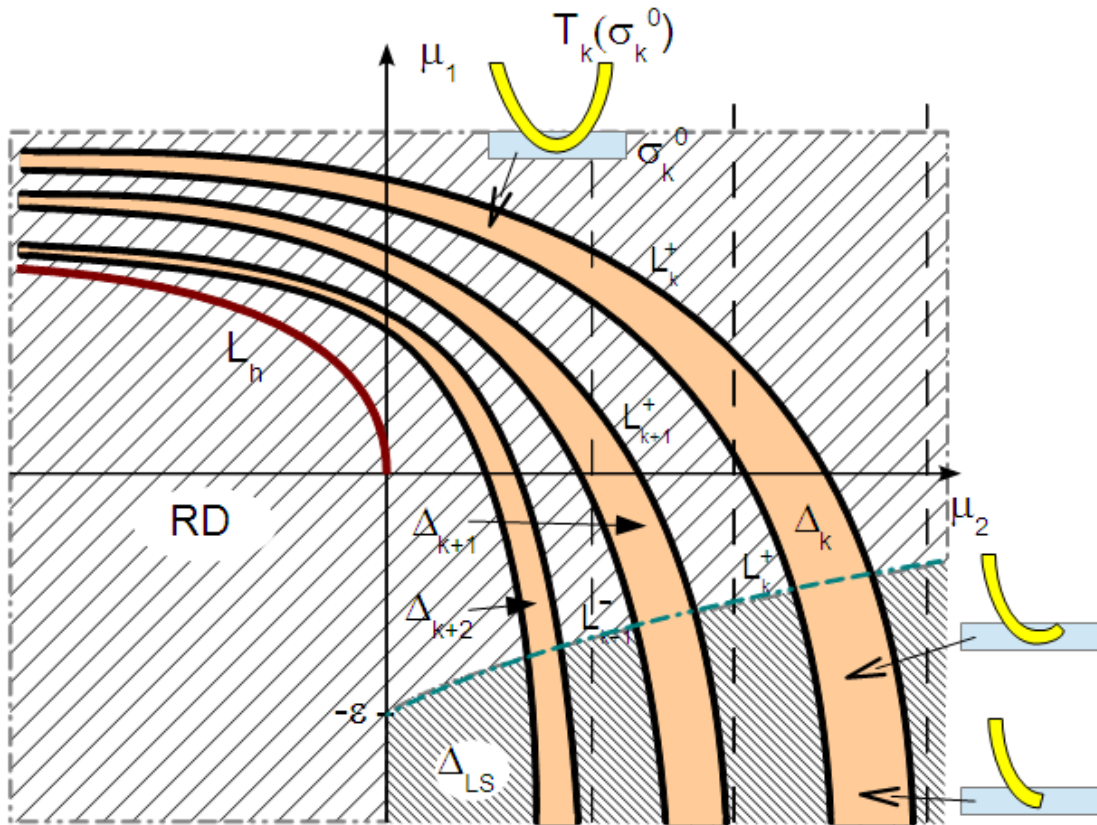


Рисунок 4. Бифуркационная диаграмма в случае касания «сверху». В случае касания «снизу» она будет иметь такой же вид, с той лишь разницей, что теперь кривые L_k^+ и L_k^- поменяются местами (L_k^+ будет нижней, а L_k^- верхней границами области Δ_k).

Вертикальные штриховые линии $\mu_2 = \text{const} \sim \frac{1}{k^2}$ — это условные границы, за которые области Δ_k не могут перейти. На рисунке выделено две области RD (Rescaling Domain) и D_{LS} (область Лукьянова – Шильникова), в которых геометрия отображений первого возвращения будет сильно отличаться. А именно, если $\mu \in RD$, то геометрия будет похожей на ту, которая наблюдается при развитии подковы Смейла во многих задачах, связанных с исследованием гомоклинических касаний. И здесь применим рескейлинг-метод (реализованный в виде леммы 3.2 диссертации), который показывает, что отображение первого возвращения может быть представлено в форме отображения Эно, асимптотически близкого к отображению параболы при $k \rightarrow \infty$. При $\mu \in D_{LS}$ геометрия будет другой: здесь образ «полоски» будет иметь

вид «половинки подковы» (см. рисунок 4).

В четвертой главе рассматривается случай трансверсальной гомоклинической траектории к негрубой неподвижной точке типа невырожденное сложное седло (т.е. его первая ляпуновская величина равна нулю, а вторая положительна). В главе 4 рассматривается двухпараметрическое семейство f_μ диффеоморфизмов, где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ - параметры, управляющие бифуркациями сложного седла.

Пусть U - достаточно малая окрестность контура $O \cup \Gamma_0$. Обозначим через B_2 топологическую схему Бернулли из двух символов, а через N_μ множество траекторий диффеоморфизма f_μ , целиком лежащих в U .

Стандартно доказывается, что на плоскости параметров (μ_1, μ_2) существуют две бифуркационные кривые L_1 и L_2 , отвечающие седло-узловым бифуркациям неподвижной точки (см. рисунок 5), которые разбивают эту плоскость на две области E_1 и E_2 такие, что в E_1 существует только одна грубая седловая неподвижная точка O , а в области E_2 — три неподвижные точки: седло O_1 , устойчивая O_2 и седло O_3 ; на кривой L_1 точки O_1 и O_2 сливаются в седло-узел O_{12} , на кривой L_2 точки O_2 и O_3 сливаются в седло-узел O_{23} . Основным результатом главы 4 составляет следующая

Теорема 4.1. *Множество N_μ всегда содержит нетривиальное подмножество Ω_μ , траектории которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с траекториями B_2 , и кроме того N_μ допускает полное описание следующего типа:*

(i) $N_\mu = \Omega_\mu$ при $(\mu_1, \mu_2) \in E_1$; $N_\mu = \Omega_\mu + O_2 + O_3$ при $(\mu_1, \mu_2) \in E_2$, и здесь для любого такого t множество Ω_μ является равномерно гиперболическим.

(ii) При $(\mu_1, \mu_2) \in L_1$ множество Ω_μ содержит седло-узел O_{12} , т.е. $N_\mu = \Omega_\mu + O_{12}$ («скачок гиперболичности»), и является неравномерно гиперболическим; при $(\mu_1, \mu_2) \in L_2$ множество Ω_μ равномерно гиперболично и $N_\mu = \Omega_\mu + O_{23}$.

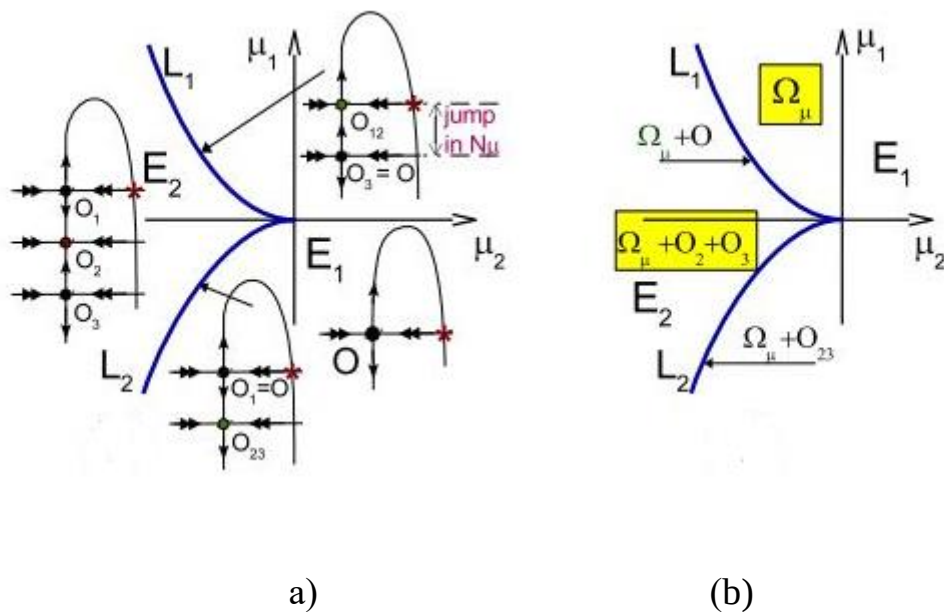


Рисунок 5. Бифуркационная диаграмма к теореме 4.1.

Иллюстрация к этой теореме представлена на рисунке 5. Показанная здесь бифуркационная диаграмма является полной. Теорема 4.1 показывает, что никаких других бифуркаций, кроме локальных бифуркаций сложного седла в семействе f_μ нет. Однако, бифуркации при прохождении через бифуркационные кривые L_1 и L_2 имеют совершенно разный характер. Первая носит глобальный характер: при рождении седло-узла O_{12} множество N_μ целиком мгновенно перестраивается. При $(\mu_1, \mu_2) \in E_1$ граничной точкой множества N_μ является седло O , а при $(\mu_1, \mu_2) \in L_1$ седло O становится сразу изолированной компонентой в N_μ : здесь седло-узел O_{12} , лежащий на конечном расстоянии от O , становится граничной точкой множества Ω_μ . Бифуркация при переходе через кривую L_2 — чисто локальная: на кривой E_2 точки O_2 и O_3 , лежащие на конечном расстоянии от множества Ω_μ , сливаются в седло-узел O_{23} и исчезают в области E_1 .

СПИСОК ОСНОВНЫХ ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК

1. Гордеева О.В., Лукьянов В.И. О системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой коразмерности два // Вестник Нижегородского университета. 2005. № 2. С. 59-66.
2. Гордеева О.В., Лукьянов В.И. О бифуркациях динамических систем коразмерности два с негрубой гомоклинической структурой село-узла // Вестник Нижегородского университета. 2007. № 2. С. 175-180.
3. Гордеева О.В., Лукьянов В.И. Некоторые бифуркации предельных множеств в окрестности негрубой гомоклинической структуры с вырожденным периодическим движением // Нелинейный мир. 2007. Т.5. №1-2. С. 95-100.
4. Gonchenko S.V, Gordeeva O.V., Lukyanov V.I., Ovsyannikov I.I. On bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with a quadratic homoclinic tangency to a saddle-node // Regular and chaotic dynamics, 2014, V. 19, № 4, P. 461-473.
5. Гонченко С.В., Гордеева О.В., В.И. Лукьянов, Овсянников И.И. О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием к седло-узловой неподвижной точке // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 2. С. 198-209.
6. Гордеева О.В., Лукьянов В.И. О некоторых бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием к негиперболической неподвижной точке // Вестник Нижегородского университета. 2015. Т. 1, № 4. С. 178-184.

Материалы конференций и прочие издания

7. Лукьянов В.И., Шилова О.В. О системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой коразмерности четыре // Труды Средневолжского математического общества. 1999. Т.2. С. 56.
8. Гордеева О.В., Лукьянов В.И. Описание траекторий динамических систем в окрестности гомоклинической структуры с двойным вырождением // Труды VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». 2005. С. 68-70.
9. Гордеева О.В., Лукьянов В.И. Некоторые свойства динамических систем в окрестности гомоклинической структуры двукратного периодического движения // Труды итоговой научной конференции учебно-научного

- инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства» Н. Новгород, 2007. С.102 -105.
10. Гордеева О.В., Лукьянов В.И. О свойствах траекторий динамических систем в окрестности негрубой гомоклинической структуры // Труды VIII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем», Н. Новгород, 2008. т. I.С.137-141.
11. Gordeeva O.V., Lukyuanov V.I. On bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with a homoclinic tangency to a nonhyperbolic saddle fixed point//International Conferense-School Dynamics, Bifurcations and Chaos 2017, Nizhny Novgorod, Russia, 2017, Book of Abstracts.- p. 11.
12. Gordeeva O.V., Lukyuanov V.I. On bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with a quadratic homoclinic tangency to a nonhyperbolic saddle // International Conference-School Shilnikov WorkShop 2018., Book of Abstract, P. 22.
13. Gordeeva O.V., Lukyanov V.I. On Bifurcations of a 3 parameter Family of Two-dimensional Diffeomorphisms with a Quadratic Homoclinic Tangency to a Nonhyperbolic Saddle at $\mu = 0$ // International Conference «Topological methods in dynamics and related topics». Nizhny Novgorod, 2019, Book of Abstracts.- p. 22.
14. Gordeeva O.V. About two-dimensional diffeomorphisms with a quadratic homoclinic tangency to a nonhyperbolic saddle // 7th Bremen Summer School and Symposium Dynamical systems - pure and applied, 2019. P. 45-46.
15. Gordeeva O.V., Gonchenko S.V. On two-dimensional diffeomorphisms with a transversal homoclinic trajectory to a non-hyperbolic saddle // International Conference-School Shilnikov WorkShop 2020 Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, P. 28-30.
16. Гордеева О.В., Гонченко С.В. О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с трансверсальным пересечением многообразий сложного седла// Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии, труды XX международной конференции. Нижний Новгород, 2020. С. 124-129.
17. Гордеева О.В. О бифуркациях динамических систем с гомоклиническими траекториями к негрубым периодическим движениям // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии, труды XXI международной конференции. Нижний Новгород, 2021. С. 89-92.