МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

На правах рукописи

ГОРДЕЕВА ОЛЬГА ВЛАДИМИРОВНА

О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими траекториями к негрубым неподвижным точкам

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Гонченко Сергей Владимирович

Нижний Новгород – 2022

Оглавление

Введение

Актуальность исследования. Настоящая работа относится к одному из наиболее важных и интересных разделов качественной теории динамических систем -- теории многомерных систем со сложным, хаотическим поведением траекторий.

Основы качественной теории динамических систем были заложены еще в конце 19-го и начале 20-го века в классических работах А. Пуанкаре, Ж. Адамара, А.М. Ляпунова, И. Бендиксона, Дж. Биркгофа. Ее важнейший раздел, теория бифуркаций, как самостоятельная математическая дисциплина, оформилась в 30-е годы в работах А.А. Андронова, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера, Л.С. Понтрягина, в которых были изучены основные локальные и глобальные бифуркации динамических систем на плоскости. Основы качественной теории и теории бифуркации систем на замкнутых двумерных многообразиях были заложены в 40-50-х годах в работах А.Г. Майера, М. Морса, М. Пейксото, Х. ДеБаггиса, К. Пью и др.

В 60-е годы началось бурное развитие качественной теории многомерных динамических систем (размерность которых не меньше трех для потоков и двух для отображений). Прежде всего это касалось построения теории грубых или гиперболических систем. Понятие грубой динамической системы на плоскости было введено в знаменитой работе А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина, в которой были также сформулированы необходимые условия грубости, достаточность этих условий была вскоре показана Е.А. Леонтович и А.Г. Майером. Многомерные грубые системы традиционно называются гиперболическими, основы теории таких систем были заложены в работах В.М. Алексеева, Д.В. Аносова, Р. Боуэна, Р. Вильямса, Р. Манэ, К. Пью, К. Робинсона, Я.Г. Синая, С. Смейла, Д. Френкса, Л.П. Шильникова, М. Шуба и др.

Основы теории нелокальных бифуркаций многомерных динамических систем были заложены в работах Л.П. Шильникова еще в 60-х годах.

В дальнейшем бифуркации многомерных динамических систем изучались в работах В.И. Арнольда, В.С. Афраймовича, В.Н. Белых, Л.А. Белякова, Х. Брура, В.В. Быкова, М. Вианы, Р. Вильямса, Н.К. Гаврилова, С.В. Гонченко, Дж. Гукенхейиера, Л. Диаса, Ю.С. Ильяшенко, Ю.А. Кузнецова, Л.М. Лермана, В.И. Лукьянова, В.С. Медведева, А.Д. Морозова, Ю.И. Неймарка, А.И. Нейштадта, Ш. Ньюхауса, Дж. Пэлиса, К. Симо, Ф. Такенса, Д.В. Тураева, А.Я. Хомбурга, А.Л. Шильникова и др.

Развитие гиперболической теории и теории бифуркаций привело, в свою очередь, к открытию, в 60-70-е годы, динамического хаоса, что по праву считается одним из самых замечательных достижений современной науки.

Одним из фундаментальных результатов в теории динамического хаоса по праву считается открытие сложной структуры множества $\boldsymbol{N}$ траекторий, целиком лежащих в окрестности грубой гомоклинической траектории Пуанкаре, т.е. траектории по которой трансверсально пересекаются инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия грубой седловой периодической орбиты. Существование таких гомоклинических траекторий было установлено А.Пуанкаре еще в конце 19-го века. Однако сама задача описания структуры множества $\boldsymbol{N}$, так называемая задача Пуанкаре-Биркофа, была решена лишь в 60-х годах в работах С.Смейла и Л.П. Шильникова. Причем в работе Л.П. Шильникова [1] было дано полное описание структуры этого множества:

Теорема Шильникова. *$\boldsymbol{N}$ является локально максимальным равномерно гиперболическим множеством, траектории которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с траекториями топологической схемы Бернулли из двух символов.*

В случае же систем с гомоклиническими касаниями, то есть, когда устойчивое и неустойчивое многообразия грубой седловой периодической орбиты пересекаются нетрансверсально, ситуация становится гораздо более сложной и в некотором смысле непредсказумой. Дело в том, что бифуркации таких систем, как показано в работах С.В. Гонченко, Д.В. Тураева и Л.П.

Шильникова, могут приводить к возникновению периодических и гомоклинических траекторий любых порядков вырождения. Поэтому полное описание динамики и бифуркаций в таких системах с помощью конечнопараметрических семейств становится принципиально невозможным. Здесь на первый план должны выступать задачи, связанные с изучением основных бифуркаций и характеристических свойств динамики. В полной мере это же относится и к рассматриваемой в настоящей работе задаче исследования бифуркаций многомерных динамических систем с гомоклиническими орбитами к негрубым периодическим траекториям.

Основы теории бифуркаций систем с негрубыми (нетрансверсальными) гомоклиническими траекториями к грубым седловым периодическим орбитам были заложены в известной работе Н.К. Гаврилова и Л.П. Шильникова [4]. По сути, в этой работе, а также в работах Л.П. Шильникова о многомерных системах с гомоклиническими петлями к состояниям равновесия типа седло-фокус, были заложены основы математической теории гомоклинического хаоса. К этой тематике примыкает также работа В.И. Лукьянова и Л.П. Шильникова [5], в которой были изучены глобальные бифуркации многомерных систем с трансверсальными гомоклиническими орбитами к негрубым периодическим траекториям седло-узлового типа. Решение этой задачи, помимо ее важности для теории динамических систем, послужило еще и математическим обоснованием известного сценария «перехода к хаосу через перемежаемость», когда большой странный аттрактор проявляется сразу же после исчезновения устойчивой периодической траектории.

Объект исследования. Настоящую диссертацию можно рассматривать как логическое продолжение исследований Лукъянова и Шильникова на случаи большей коразмерности: когда периодическая траектория является $(n-1)$-кратно вырожденной, когда гомоклиническая траектория нетрансверсальна, а также некоторые комбинации этих случаев. Конкретно, в диссертации рассматриваются

1. Двумерные диффеоморфизмы с $(n-1)$-кратно вырожденной неподвижной точкой, $n \geq 2$, и трансверсальной к ней гомоклинической траекторией.

2. Двумерные диффеоморфизмы с $(n-1)$-кратно вырожденной неподвижной точкой, $n \geq 2$, многообразия которой касаются квадратично. Здесь изучаются бифуркации в однопараметрических семействах, которые расщепляют гомоклиническое касание общим образом, но сохраняют вырождение неподвижной точки.

3. Бифуркации в двухпараметрическом семействе общего положения двумерных диффеоморфизмов с неподвижной точкой типа седло-узел $(n = 2)$ и квадратичным гомоклиническим касанием к ней.

4. Бифуркации в двухпараметрическом семействе общего положения двумерных диффеоморфизмов с неподвижной точкой типа сложное седло $(n = 3)$ и трансверсальной к ней гомоклинической траекторией.

Цели и задачи исследования. Основная задача работы состоит в исследовании динамических свойств двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническими траекториями к негрубым неподвижным точкам, а также в изучении основных глобальных бифуркаций, в параметрических семействах общего положения.

Теоретическая ценность и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты и методы могут быть применены как в теории динамических систем, так и при исследовании конкретных моделей, в том числе моделей математической теории синхронизации.

Методологическая и теоретическая основа исследовавия. В диссертации используются методы качественной теории динамических систем и теории бифуркаций.

Основные результаты работы и научная новизна исследования. Все сформулированные в работе результаты являются новыми и получены автором самостоятельно. Перечислим основные из них.

1) Получены новые формулы для локального отображения вблизи $(n-1)$-кратно вырожденной неподвижной точки двумерного диффеоморфизма. Показано, что множество N траекторий, целиком лежащих в окрестности трансверсальной гомоклинической траектории к такой точке, находится во взаимно-однозначном соответствии с траекториями топологической схемы Бернулли из двух символов.

2) Изучены основные бифуркации в однопараметрических семействах двумерных диффеоморфизмов, имеющих $(n-1)$-кратно вырожденную неподвижную точку с квадратичным гомоклиническим касанием, в которых неподвижная точка не бифурцирует, а гомоклиническое касание расщепляется общим образом.

3) Изучены основные бифуркации двумерных диффеоморфизмов, имеющих квадратичное гомоклиническое касание к неподвижной точке типа невырожденный седло-узел. На плоскости параметров построены бифуркационные диаграммы для однообходных периодических траекторий из малой фиксированной окрестности гомоклинической орбиты.

4) Изучены бифуркации в двухпараметрическом семействе общего положения двумерных диффеоморфизмов с неподвижной точкой типа сложное седло $(n=3)$ и трансверсальной к ней гомоклинической траекторией. Установлено полное описание множества N траекторий из окрестности гомоклинической траектории, открыто явление «скачка гиперболичности».

Апробация результатов. По теме диссертации опубликовано 17 работ. Результаты работ докладывались на конференциях:VI International

Congress on Mathematical Modeling, Н. Новгород, 2004. VII Всеросийская научная корференция «Нелинейные колебания механических систем», Н. Новгород, 2005; Итоговая научная конференция учебно-научного инновационного комплекса «Модели и методы и программные средства». Н. Новгород 2007г; VIII научная конференция «Нелинейные колебания механических систем», ННГУ, 2008; 8-ая международная школа хаотические автоколебания и образование структур (хаос–2007); International Conferense-School «Dynamics Bifurcations and Chaos», Nizhny Novgorod, 2017; International Conference-School Shilnikov WorkShop 2018. International Conferense-«Topological methods in dynamics and related topics», N. Novgorod, 2019; 7th Bremen Summer School and Symposium Dynamical systems - pure and applied, 2019; International Conference-School shilnikov workshop 2020, Н. Новгород, 2020; математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии, Н.Новгород, 2020, XV Международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании", Н. Новгород, 2021.

По теме диссертации сделаны доклады на научном семинаре ИИТММ ННГУ «Нелинейная динамика: теория и приложения» им. Л.П. Шильникова (руководитель С.В. Гонченко), а также на научном семинаре Лаборатории динамических систем ВШЭ, Нижний Новгород (руководитель В.З. Гринес).

Результаты диссертации явились составной частью работ, выполнявшихся при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, грант 0729–2020– 0036.

Публикации. Всего по теме диссертации автором опубликовано 17 работ, из них 6 работ - в журналах, рекомендованных ВАК. Основные результаты, выносимые на защиту, являются новыми и принадлежат автору. В работах, выполненных совместно, автору принадлежат доказательства всех основных результатов, вошедших в диссертацию.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Объем диссертации: 100 стр., 21 рис., 30 наименований литературы.

Содержание работы

В первой главе рассматриваются двумерные диффеоморфизмы, имеющие $(n-1)$-кратно вырожденную, $n \geq 2$, неподвижную точку O, типа седло-узел, если n четное, и типа сложное седло если n нечетное, и трансверсальную к ней гомоклиническую траекторию Γ_0.

Здесь решается задача полного описания множества N траекторий, целиком лежащих в достаточно малой окрестности $U(O \cup \Gamma_0)$. В рассматриваемом случае окрестность U представляет собой объединение малой окрестности (диска) U_0, содержащую точку O, и конечного числа малых окрестностей (дисков) тех точек траектории Γ_0, которые не попали в U_0, см. рис. 1.

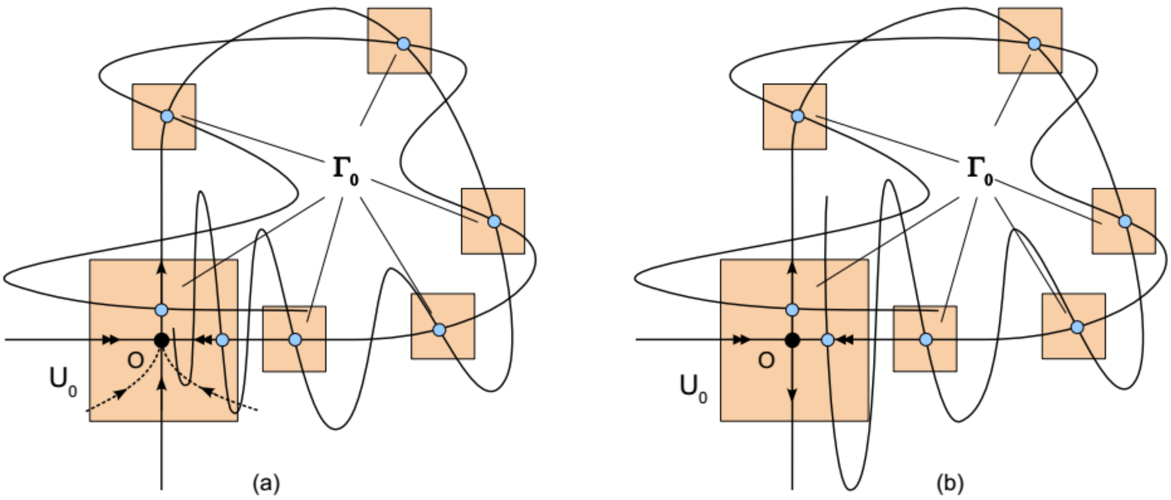


Рис. 1. Окрестность трансверсальной гомоклинической траектории Γ_0 к неподвижной точке типа (a) седло-узел; (b) сложное седло.

Пусть B_2 – топологическая схема Бернулли из двух символов «0» и «1».

Рассмотрим ее подсистему $\Omega_{\bar{k}}$, выделяемую следующими условиями:

1) $\Omega_{\bar{k}}$ не содержит последовательностей, в которых есть два соседних символа «1»;

2) у последовательностей из $\Omega_{\bar{k}}$ длина любого отрезка, состоящего из символов «0», не меньше $\bar{k}$

Основной результат первой главы – это следующая

Теорема 1.1. *Пусть f – рассматриваемый диффеоморфизм. Тогда динамическая система $f|_N$ (ограничение f на N) топологически сопряжена с подсистемой $\Omega_{\bar{k}}$*

Во **второй главе** также рассматриваются двумерные диффеоморфизмы с гомоклиническими траекториями к негрубым неподвижным точкам. Однако в отличие от главы 1, предполагается, что исходная гомоклиническая траектория является нетрансверсальной – квадратичное гомоклиническое касание. Кроме того, здесь не решается «задача полного описания», как в главе 1, а рассматривается т.н. ограниченная бифуркационная задача – исследуются бифуркации однообходных периодических траекторий в рамках однопараметрических семейств специфического типа. Такое семейство при изменении параметра расщепляет исходное квадратичное гомоклиническое касание общим образом, но сохраняет тип и вырождение неподвижной точки. Основной результат главы – это **теорема 2.1** о существовании бесконечного каскада бифуркаций при изменении параметра, приводящих к возникновению асимптотически устойчивых однообходных периодических траекторий (периодиче6ских стоков), последовательных периодов $\bar{k}$, $\bar{k}+1,\ \ldots$, начиная с некоторого достаточно большого $\bar{k}$. Главным моментом в доказательстве теоремы 2.1 является лемма 2.1 (Рескейлинг лемма), в которой показывется, что отображение первого возвращения $T_{\mathrm{k}} = T_1\ T_{\mathrm{k}} : B_k^0 \rightarrow B_k^0$ с помощью линейных замен координат и параметра (перемасштабирований) приводится к отображению, асимптотически близкому к одномерному отображению параболы $\bar{Y} = M - Y^2$, в котором рескейлинг-параметр M а также координата Y могут принимать произвольные конечные значения. Бифуркации в отображении параболы хорошо известны, и по лемме 2.1, все они (во всяком случае для периодических траекторий) могут быть перенесены и на искомые отображения первого возвращения $T_k = T_1\, T_k$: $B_k^0 \to B_k^0$ для всех достаточно больших k.

В третьей главе рассматривается случай глобальной бифуркации коразмерности 2 – квадратичное гомоклиническое касание к неподвижной точки типа невырожденный седло-узел (см. рис. 2a), естественным образом связан с двумя другими хорошо известными задачами исследования глобальных бифуркаций коразмерности один.

Первая из них, впервые рассмотренная Н.К. Гавриловым и Л.П Шильниковым в работе [4], относится к исследованию бифуркаций двумерных диффеоморфизмов с квадратичным гомоклиническим касанием к седловой неподвижной точке (см. рис 2 b) с мультипликаторами λ и γ такими, что $0<|\lambda|<1<|\gamma|$ и седловой величиной $|\lambda\gamma|$ отлична от 1. В работе [4] были, фактически, заложены основы математической теории гомоклинического хаоса.

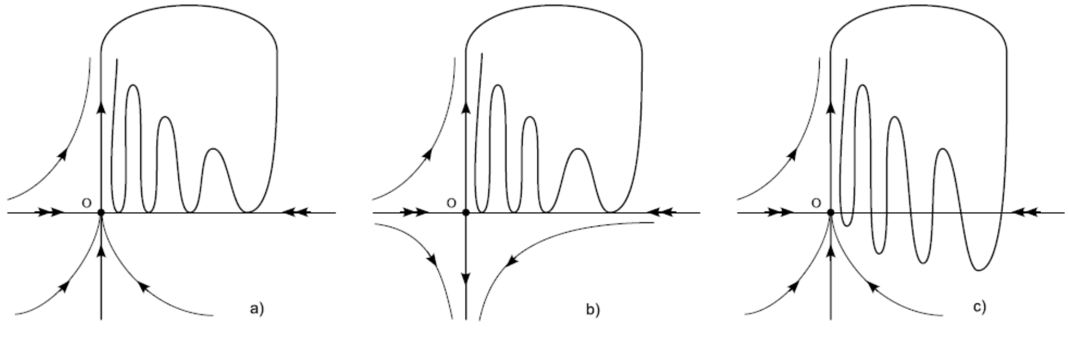


Рис. 2. a) седло-узел с гомоклиническим касанием, b) седло с гомоклиническим касанием, c) седло-узел с трансверсальными гомоклиническими траекториями.

Вторая задача – исследование динамики и бифуркаций диффеоморфизмов с трансверсальной гомоклинической траекторией к седло-узловой неподвижной точке (см. рис 2 с.), была рассмотрена В.И.Лукьяновым и Л.П.Шильниковым в работе [5]. В ней были получены условия возникновения хаотической динамики сразу после исчезновения седло-узла. Эта задача имеет важное значение для теории динамического хаоса. Фактически, в работе [5] было дано математическое обоснование такого хорошо известного механизма возникновения хаоса как «перемежаемость».

Основные результаты главы 2, теорему 2.1 и теорему 2.2, можно рассматривать как обобщение на случай гомоклинического касания к седло-узлу известных теорем о «каскаде устойчивых периодических траекторий» из работ [4,5]. Можно сказать, что наш случай является «точкой пересечения» случаев Гаврилова-Шильникова и Лукьянова-Шильникова, чем и объясняется наш интерес к этой задаче.

Заметим, что исследование бифуркаций, связанных с исчезновением седло-узла с гомоклиническими траекториями, имеет также важное значение для приложений. В частности, такие бифуркации лежат в основе некоторых сценариев возникновения странных аттракторов типа «тор-хаос». Эти сценарии описывают бифуркационные явления, которые происходят при переходе от режима синхронизации к хаотическому режиму, наблюдаемому во многих физических экспериментах. Математические основы соответствующей теории были заложены в известной работе В.С.Афраймовича и Л.П.Шильникова [6] (в связи с этим см. также работы [7, 8]).

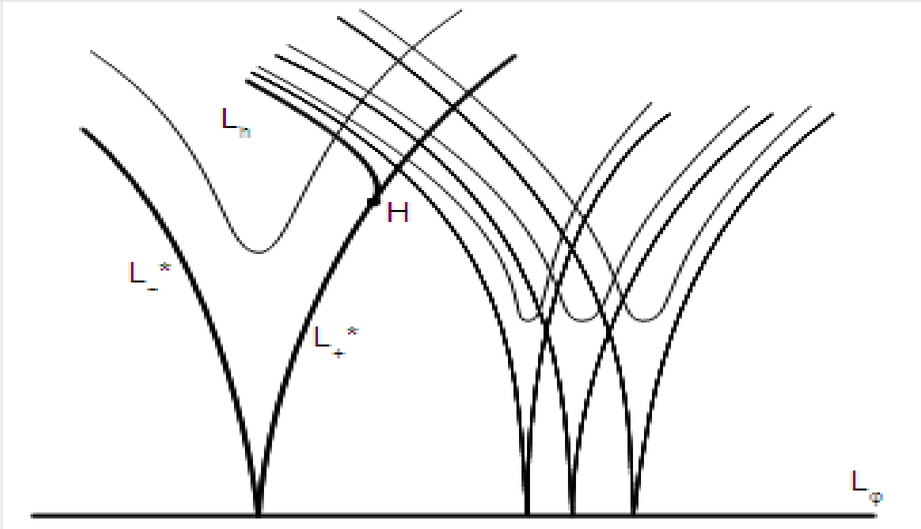


Рис. 3. Зоны синхронизации (языки Арнольда) на плоскости параметров. Здесь точка H отвечает коразмерности 2 случаю резонансного седло-узла с гомоклиническим касанием.

В этих сценариях бифуркация коразмерности два, бифуркация гомоклинического касания к седло-узловой периодической точке, играет важную роль. На рис.3 показан фрагмент бифуркационной диаграммы в окрестности линии L_ϕ, отвечающей существованию неподвижной точки с мультипликаторами $e^{\pm i\omega}, 0 < \omega < \pi$. Переходу параметров через L_ϕ отвечает бифуркация Неймарка-Сакера, в результате которой устойчивая неподвижная точка становится неустойчивой (типа фокус), а в ее окрестности рождается замкнутая устойчивая инвариантная кривая. Хорошо известно [9], что из каждой резонансной точки на L_φ (отвечающей значениям $\omega = 2\pi p/q$, где p и q – взаимно простые натуральные числа) выходит пара бифуркационных кривых L_+^* и L_-^*, соответствующих тому, что на инвариантной кривой появляется седло-узловая периодическая точка (периода q). Область значений параметров между L_+^* и L_-^* (см.рис.3) называется зоной синхронизации, или на математическом жаргоне – «языком Арнольда». Внутри «языка» седло-узел распадается на седло и узел, а вне «языка» эти периодические точки исчезают. При изменении значений параметров от линии L_φ вдоль L^*_+ инвариантная кривая сначала будет гладкой, рис. 4а, а затем она теряет гладкость (становится «гофрированной»), рис.4b. Более того, на L_+^* (и L_-^*) существует точка H, отвечающая тому, что неустойчивое и неведущее (сильно устойчивое) инвариантные многообразия седло-узла касаются друг друга, рис. 4c. В этот момент замкнутой инвариантной кривой уже не существует. В рассматриваемой зоне существует также бифуркационная кривая L_h, выходящая из точки H, значениям параметров на которой отвечает появление гомоклинического касания к седловой периодической точке. Это означает, в соответствии с [4], что в окрестности линии L_h наблюдается бесконечный каскад бифуркаций, связанных с рождением устойчивых периодических траекторий.

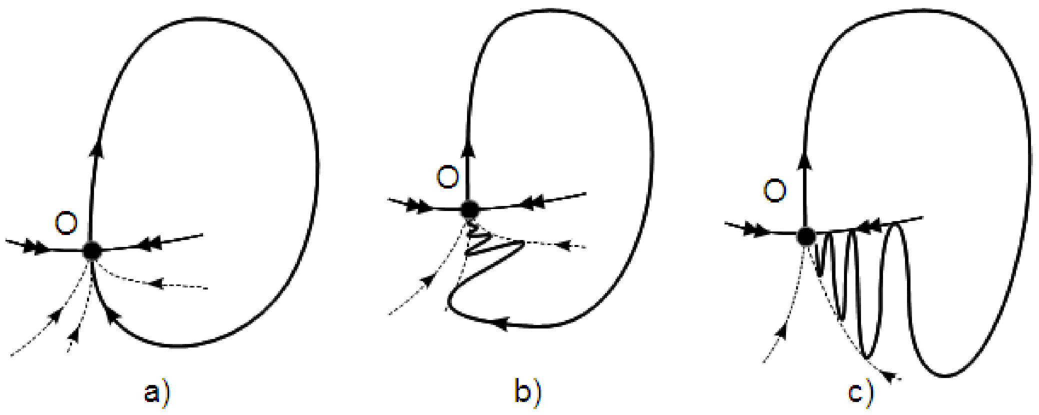


Рис. 4. a) гладкая; b) негладкая замкнутая инвариантная кривая;
c) появление гомоклинического касания.

Заметим, что диффеоморфизмы с гомоклиническими касаниями к седло-узлу могут естественным образом также возникать при периодических неавтономных возмущениях автономных систем. Так, например, в работе [10] был рассмотрен двумерный поток, имеющий гомоклиническую петлю Γ состояния равновесия типа седло-узел, которая входит в равновесие по его неведущему многообразию ($\Gamma \subset W^{ss}$). При малых периодических возмущениях такой системы у соответствующего отображения Пуанкаре могут возникать гомоклинические касания к неподвижной точке типа седло-узел [11].

Динамические свойства систем с гомоклинической траекторией к седло-узлу, а также и к негиперболическому седлу изучались в работах В.И.Лукьянова, см., например, [12, 13], в которых с помощью надстроек над схемой Бернулли из трех символов было дано описание некоторого подмножества траекторий, целиком лежащих в малой окрестности гомоклинической структуры. В настоящей работе мы продолжаем эти исследования, и наша основная цель – это изучение основных бифуркаций в системах с нетрансверсальными гомоклиническими траекториями к седло-узловым неподвижным точкам.

В **четвертой главе** рассматривается случай трансверсальной гомоклинической траектории к негрубой неподвижной точке типа невырожденное сложное седло (т.е. его первая ляпуновская величина равна нулю, а вторая положительна). По своей постановке, соответствующая бифуркационная задача имеет (как минимум) коразмерность 2, так как ее видимая негрубость связана только с вырождением лишь одной периодической траектории — неподвижной точки O рассматриваемого двумерного диффеоморфизма f_0, инвариантные устойчивое и неустойчивое одномерные многообразия которой пересекаются трансверсально в точках гомоклинической траектории Γ_0. В главе рассматривается двухпараметрическое семейство f_μ диффеоморфизмов, где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ - параметры, управляющие бифуркациями сложного седла.

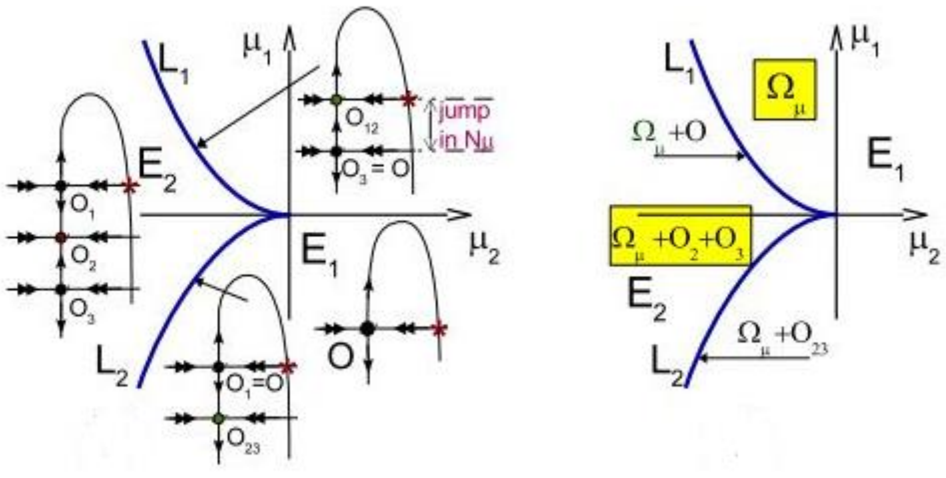
Пусть U — достаточно малая окрестность контура $O \cup \Gamma_0$. Обозначим через B_2 топологическую схему Бернулли из двух символов, а через N_m множество траекторий диффеоморфизма f_μ, целиком лежащих в U.

Стандартно доказывается, что на плоскости параметров (μ_1, μ_1) существуют две бифуркационные кривые L_1 и L_2, отвечающие седло-узловым бифуркациям неподвижной точки (см. рис. 4.1), которые разбивают эту плоскость на две области E_1 и E_2 такие, что в E_1 существует только одна грубая седловая неподвижная точка O и, а в области E_2 — три неподвижные точки: седло O_1, устойчивая O_2 и седло O_3; на кривой E_1 точки O_1 и O_2 сливаются в седло-узел O_{12}, на кривой E_2 точки O_2 и O_3 сливаются в седло-узел O_{23}. Основной результат статьи составляет следующая

Теорема 4.1. *Множество N_μ всегда содержит нетривиальное подмножество Ω_μ, траектории которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с траекториями B_2, и кроме того N_μ допускает полное описание следующего типа:*

(i) $N_\mu = \Omega_\mu$ при $(\mu_1, \mu_2) \in E_1$; $N_\mu = \Omega_\mu + O_2 + O_3$ при $(\mu_1, \mu_2) \in E_2$, и здесь для любого такого m множество Ω_μ является равномерно гиперболическим.

(ii) При $(\mu_1, \mu_2) \in L_1$ множество Ω_μ содержит седло-узел O_{12}, т.е. $N_\mu = \Omega_\mu + O_{12}$ («скачок гиперболичности»), и является неравномерно гиперболическим; при $(\mu_1, \mu_2) \in L_2$ множество Ω_μ равномерно гиперболично и $N_\mu = \Omega_\mu + O_{23}$.



a) b)

Рис. 5. Иллюстрация к теореме 4.1: (a) бифуркационная диаграмма на плоскости парамеров; (b) схема перестроек в множестве N на этой же плоскости параметров.

Иллюстрация к этой теореме представлена на рис. 5. Показанная здесь бифуркационная диаграмма является полной. Теорема 4.1 показывает, что никаких других бифуркаций, кроме локальных бифуркаций сложного седла в семействе f_μ нет. Однако, бифуркации при прохождении через бифуркационные кривые L_1 и L_2 имеют совершенно разный характер. Первая носит глобальный характер: при рождении седло-узла O_{12} множество N_μ целиком мгновенно перестраивается. При $(\mu_1, \mu_2) \in E_1$ граничной точкой множества N_μ является седло O, а при $(\mu_1, \mu_2) \in L_1$ седло O становится сразу изолированной компонентой в N_μ: здесь седло-узел O_{12}, лежащий на конечном расстоянии от O , становится граничной точкой множества Ω_μ. Мы назвали это явление «скачком гиперболичности». Бифуркация при переходе через кривую L_2 – чисто локальная: на кривой L_2 точки O_2 и O_3, лежащие на конечном расстоянии от множества Ω_μ , сливаются в седло-узел O_{23} и исчезают в области E_1.

Отметим, что рассмотренная в главе 4 задача была отмечена (в несколько другой форме) в обзоре [26] 1986 года, как одна из важных нерешенных на то время проблем. Как оказалось, это одна из немногих задач, бифуркации которых в классе систем со сложной динамикой (с бесконечным множеством периодических траекторий) допускают полное описание. Более того, здесь построена полная бифуркационная диаграмма и описано интересное явление «скачка гиперболичности». Тем самым, отмечен новый тип бифуркаций в классе систем со сложной структурой, когда вследствии простой бифуркации (в рассматриваемом случае – невырожденной седло-узловой бифуркации неподвижной точки) топологическая структура нетривиальной части неблуждающего множества не меняется (остается гиперболической), но само это множество скачком и целиком перемещается в фазовом пространстве на другое место.

Глава 1. О структуре окрестности трансверсальной гомоклинической траектории к негрубой неподвижной точке двумерного диффеоморфизма

В первой главе рассматриваются двумерные диффеоморфизмы, имеющие $(n-1)$ -кратно вырожденную, $n \geq 2$, неподвижную точку O, типа седло-узел, если n четное, и типа сложное седло если n нечетное, и трансверсальную к ней гомоклиническую траекторию Γ_0.

Здесь решается задача полного описания множества N траекторий, целиком лежащих в достаточно малой окрестности $U(O \cup \Gamma_0)$. В рассматриваемом случае окрестность U представляет собой объединение малой окрестности (диска) U_0 , содержащую точку O, и конечного числа малых окрестностей (дисков) тех точек траектории Γ_0, которые не попали в U_0 , см. рис. 1.1 ниже.

Пусть B_2 – топологическая схема Бернулли из двух символов «0» и «1». Рассмотрим ее подсисему $\Omega_{\bar{k}}$, выделяемую следующими условиями:

1) $\Omega_{\bar{k}}$ не содержит последовательностей, в которых есть два соседних символа «1»;
2) у последовательностей из $\Omega_{\bar{k}}$ длина любого отрезка, состоящего из символов «0», не меньше $\bar{k}$

Основной результат первой главы – это следующая

Теорема 1.1. *Пусть f – рассматриваемый диффеоморфизм. Тогда динамическая система $f|_N$ (ограничение f на N) топологически сопряжена с подсистемой $\Omega_{\bar{k}}$*

1.1 Постановка задачи

В этой главе рассматриваются двумерные диффеоморфизмы, имеющие негрубую неподвижную точку O типа седло-узел или сложное седло и трансверсальную к ней гомоклиническую траекторию Γ_0. Пусть f_0 - такой диффеоморфизм, и мы предполагаем, что для него выполнены следующие условия A) и B).

A) *Диффеоморфизм* f_0 *имеет* $(n-1)$*-кратно вырожденную,* $n \geq 2$, *неподвижную точку O с мультипликаторами* $\lambda_1 = \lambda$, *где* $0 < \lambda < 1$, *и* $\lambda_2 = 1$, *которая является точкой либо типа седло-узел, если* n*-четное, либо типа сложное седло, если* n *- нечетное.*

Пусть f_0 является C^r- гладким диффеоморфизмом с $r \geq n+1$. Тогда через точку O в силу условия A) проходят два C^r- гладких инвариантных многообразия, центрально-неустойчивое многообразие $W^u(O)$ и сильно устойчивое многообразие $W^{ss}(O)$. которые трансверсально пересекаются в точке O. Пусть U_0 – достаточно малая фиксированная окрестность неподвижной точки O. Тогда в случае сложного седла локальные куски $W^u(O)$ и $W^{ss}(O)$ на U_0 являются гладкими кривыми, которые трансверсально пересекаются в O, а в седло-узловом случае локальный кусок $W^{ss}(O)$ является кривой, разделяющей U_0 на узловой и седловой сектора, а локальный кусок $W^u(O)$ лежит в седловом секторе. Эти локальные многообразия продолжаются до глобальных, и мы предполагаем, что

B) *Инвариантные многообразия* $W^u(O)$ *и* $W^{ss}(O)$ *пересекаются трансверсально в точках некоторой гомоклинической траектории* Γ_0, *см. рис. 1.1.*

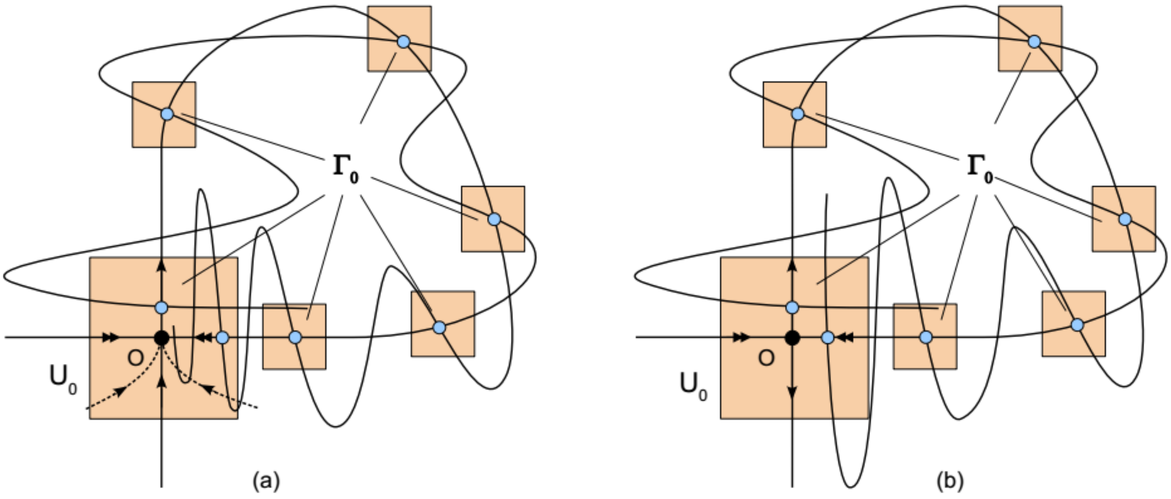


Рис. 1.1. Окрестность трансверсальной гомоклинической траектории Γ_0 к неподвижной точке типа (a) седло-узел; (b) сложное седло.

Из [5] известно, что в U_0 можно выбрать C^{r-1}- гладкие локальные координаты (x, y), в которых отображение T запишется виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda x + f(x,y)x, \\ \bar{y} = y + y^n + g(y), \end{cases} \qquad (1.1)$$

где $f(0,0) = 0$ и $g(y) = O(y^{n+1})$. Отметим, что в этих координатах второе уравнение системы (1.1) не зависит от x. В координатах (x, y) неподвижная точка O лежит в начале координат и ее локальные инвариантные многообразия W^{ss} и W^{cu} распрямлены: W^{cu}: $\{x = 0\}, W^{ss}$: $\{y = 0\}$.

Формула (1.1) отражает также тот факт, что точка $O(0,0)$ является $(n$-1)-кратно вырожденной неподвижной точкой. При n четном она является седло-узлом с устойчивым сектором $\{y<0\}$ и с седловым сектором $\{y>0\}$, разделенными локальным куском $W^{ss} \cap U_0$: $\{y=0\}$ сильно устойчивого инвариантного многообразия W^{ss} . Отрезок $\{x = 0, y>0\}$ на U_0 является здесь локальным куском$W^{cu} \cap U_0$ центрального неустойчивого многообразия W^{cu} точки $O(0,0)$, рис. 1.1a. При n нечетном точка $O(0,0)$ является сложным седлом, через который проходят два инвариантных многообразия: центральное неустойчивое многообразие W^{cu} , имеющее в пересечении с U_0

уравнение x=0 и сильно устойчивое инвариантное многообразие W^{ss} - уравнение y=0, рис. 1.1b.

Выберем в U_0 две точки траектории Γ_0: $M^+ \in W^{ss}(O)$ и $M^- \in W^{cu}(O)$. Пусть гомоклинические точки M^+ и M^- имеют координаты $M^+(x^+, 0)$ и $M^-(0, y^-)$, где $x^+ > 0$ и $y^- > 0$. Выберем на U_0 их достаточно малые окрестности

$$\Pi^+: \{(x, y): |x - x^+| \le \varepsilon, |y| \le \varepsilon\},$$
$$\Pi^- : \{(x, y): |x| \le \varepsilon, |y - y^-| \le \varepsilon\}$$

где ε достаточно мало так, что $\Pi^+ \bigcap\ T\ \ \Pi^+ = \varnothing$ и $\Pi^- \bigcap\ T^{-1}\ \Pi^-\ = \varnothing$.

Так как гомоклинические точки M^+ и M^- принадлежат одной и той же траектории Γ_0, то существует натуральное q такое, что $M^+ = f_0^q(M^-)$. Соответственно, в U_0 будут определены два отображения по траекториям диффеоморфизма f_0: *локальное* $T = f_0|U_0$ и *глобальное* $T_1 = f_0^q: \Pi^- \to \Pi^+$.

По построению, любая траектория из множества N должна обязательно иметь точки пересечения с окрестностями Π^+ и Π^-. При этом точки из Π^+ попадают в Π^- под действием итераций локального отображения T, а из и Π^- в Π^+ под действием глобального отображения T_1 . Таким образом, любой неасимптотической к $O^{\bullet}$ раектории из множества N можно поставить в соответствие бесконечную в обе стороны последовательность отображений-сомножителей $T^{i_k} \cdot T_1$, где $k = 0, \pm 1; \pm 2; \ldots\ j_k \ge \bar{k}$.

Глобальное отображение $T_1 = f_0 : \Pi^- \to \Pi^+$ может быть записано в виде:

$$\begin{cases} \bar{\mathrm{x}} - \mathrm{x}^+ = F(x, y - y^-), \\ \bar{y} = G(x, y - y^-), \end{cases}$$

где F и G определены на Π^- и $F(0,0) = G(0,0) = 0$. Так как T_1 – диффеоморфизм, то его якобиан отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \ne 0, \text{ где } a = F_x(0,0); b = F_y(0,0); c = G_x(0,0); d = G_y(0,0)$$

Условие В) трансверсальности пересечения многообразий $W^u(O)$ и $W^{ss}(O)$ в точках гомоклинической траектории Γ_0 выглядит теперь следующим образом

$$d = G_y(0,0) \neq 0.$$

Тогда отображение T_1 можно переписать в развернутом виде:

$$\begin{cases} \bar{x} - x^+ = F(x, y - y^-) = a \cdot x + b(y - y^-) + O(x^2 + (y - y^-)^2), \\ \bar{y} = c \cdot x + d(y - y^-) + O(x^2 + (y - y^-)^2). \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2 Свойства локального отображения

В этом параграфе решается задача построения итераций отображения T с начальными точками в седловых секторах. Для определенности, мы рассматриваем сектор U^+:$\{x>0, y>0\}$, см. рис. 1.2.

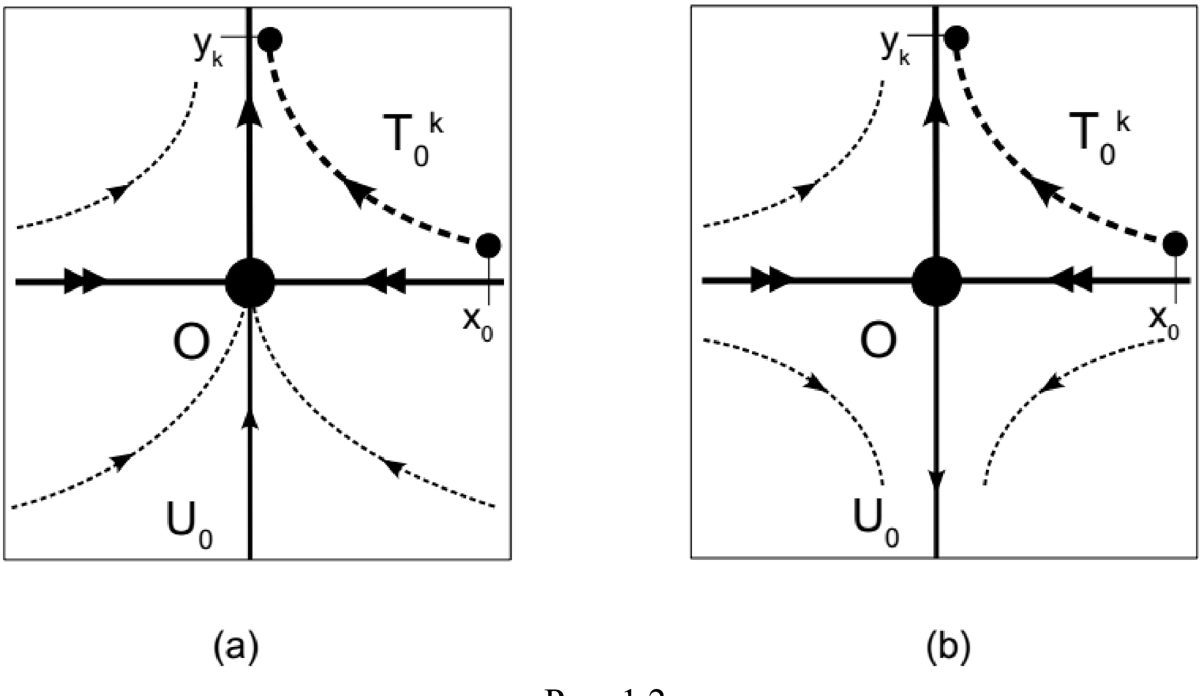


Рис. 1.2.

Пусть (x_i,y_i), $i = 0,\ldots,k$, - последовательность точек в U^+ таких, что $(x_{i+1},y_{i+1}) = T(x_i,y_i)$. Тогда имеет место следующий результат.

Лемма 1.1. *Пусть локальное отображение T имеет вид (1.1). Тогда для любых* $x_0, y_k \in U^+$ *и для любого целого* $k \geq 1$ *существует единственный набор точек* $(x_i, y_i) \in U^+$ *таких, что* $(x_{i+1}, y_{i+1}) = T(x_i, y_i)$ *и отображение*

T_0^k: $(x_0, y_0) \to (x_k, y_k)$ *может быть записано в так называемой перекрестной форме как*

$$T^k \begin{cases} x_k = u(x_0, y_k, k), \\ y_0 = v(y_k, k), \end{cases} \tag{1.3}$$

где функции $u(x_0, y_k, k)$ *и* $v(y_k, k)$ *являются* C^{r-1}*-гладкими функциями своих координат* (x_0, y_k).

Доказательство.

Рассмотрим взаимно-однозначное гладкое отображение T в локальных координатах (x, y)

$$\begin{cases} \bar{x} = a \cdot x + f(x, y)\, x, \\ \bar{y} = y + y^n + O(y^{n+1}). \end{cases} \tag{1.4}$$

Так как в силу (1.1) отображение T по координате y не зависит от x, то искомый набор точек строится конструктивным образом. Действительно, рассматривая второе равенство в (1.1) как отображение

$T_y \; : y_k = y_{k-1} + y^n{}_{k-1} + \ldots$

видно, что это гладкое взаимно-однозначное в окрестности нуля отображение, так как $\dfrac{dy_k}{dy_{k-1}} = 1 + n y_{k-1}^{n-1} + \ldots$ больше 0 в достаточно малой окрестности точки $y = 0$,

Следовательно , существует обратное гладкое отображение T_y^{-1} малой окрестности точки $y = 0$. Искомый набор точек строится так.

Пусть заданы числа k, y_k и вектор x_0. Тогда выбирая за $y_0 = T_y^{-k} y_k$ легко строится весь набор $\{y_0, y_1, \ldots, y_k\}$, если положить $y_s = T^s y_0 = T^{-k+s} y_0$. Причем, выбранное y_0 принадлежит некоторой окрестности начала координат. Теперь нетрудно построить набор точек $\{x_0, x_1, ..., x_k\}$положив $x_s = ax_{s-1} + f\left(x_{s-1}, y_{s-1}\right)x_{s-1}$.Так как по координате x у нас устойчивость, следовательно , по x не выйдем из окрестности нуля. ПосколькуT_y -взаимно-однозначное гладкое отображение и не зависит от x, то $y_s = v\left(y_{k,} k - s\right)$,причём функция является гладкой по y_k .Следовательно, гладкой функцией обоих переменных является $x_s = u\left(x_0, y_k, k, s\right)$. □

Локальные оценки для набора точек (1.3) выводятся в следующей лемме.

Лемма 1.2. *Отображение* T^k: $(x_0, y_0) \to (x_k, y_k)$ *может быть записано в виде:*

$$y_0 = \frac{y_k}{\sqrt[n-1]{1+(n-1)\cdot\gamma(y_k)\cdot y_k^{n-1}\cdot k}}, x_k = \lambda^k x_0 + x_0 h(x_0, y_k), \tag{1.5}$$

где $h(x_0, y_k) = O\left(\lambda_1^k\right)$, $\lambda_1 > 0$ *некоторое число, удовлетворяющее условию* $\lambda_1 < \lambda + \delta < 1$, *и* $\delta > 0$ *– достаточно малая константа (стремящаяся к нулю при уменьшении до нуля размеров окрестности* U_0*). Кроме того, справедлива оценка*

$$\frac{dy_0}{dy_k} \sim \sqrt[n-1]{k^{-n}}, \tag{1.6}$$

Доказательство.

Рассмотрим отображения $T: \overline{z} = z + \beta z^n + o(\beta z^n)$, где $\beta > 0$ и T_i^c: $\overline{z}_i^c = \dfrac{z}{\sqrt[n-1]{1-(n-1)\beta\gamma_i z^{n-1}}} = z\cdot\left(1+\beta\gamma_i z^{n-1} + o\left(\beta\gamma_i z^{n-1}\right)\right) i \in \{1,2\}$, где T_i^c являются отображениями сдвига на единицу времени вдоль траекторий дифференциального уравнения $\dot{z} = \beta\gamma_i z^n$. Заметим, что

$$z\cdot\left(1+\beta\gamma_2 z^{n-1} + o\left(\beta\gamma_2 z^{n-1}\right)\right) \le z + \beta z^n + o(\beta z^n) \le z\cdot\left(1+\beta\gamma_1 z^{n-1} + o\left(\beta\gamma_1 z^{n-1}\right)\right),$$

в качествеγ_i. можно взять, например, $\gamma_1 = \dfrac{3}{2}$ и $\gamma_2 = \dfrac{1}{2}$.

Для производных отображений $T:\frac{d\overline{z}}{dz}=1+n\beta z^{n-1}+o(\beta z^{n-1})$ и T_i^c: $\frac{d\overline{z}_i^c}{dz}=1+n\beta\gamma_i z^{n-1}+...$ справедливы оценки $\frac{d\overline{z}_2^c}{dz}\le\frac{d\overline{z}}{dz}\le\frac{d\overline{z}_1^c}{dz}$. (1.7)

В силу строгой монотонности функций, задающих отображения T и T_i^c, набор точек отображения $T\left\{y_0,y_1,...y_k\right\}$, мажорируется наборами $\left\{y_0,y_1,...y_k\right\}_i^c$.Нетрудно вывести соотношение для $\left(T_i^c\right)^{-k}$: $z_0^c=\frac{z_k}{\sqrt[n-1]{1+(n-1)\beta\gamma_i z_k^{n-1}}}$, следовательно , для отображения T^{-k} справедливо

$\frac{z_k}{\sqrt[n-1]{1+(n-1)\beta\gamma_2 z_k^{n-1}k}}\le z_0\le\frac{z_k}{\sqrt[n-1]{1+(n-1)\beta\gamma_1 z_k^{n-1}k}}$, так как $z_0=\gamma(z_k)$ непрерывная функция своих переменных, следовательно существует $\gamma(z_k)\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$, такое что, $z_0=\frac{z_k}{\sqrt[n-1]{1+(n-1)\beta\cdot\gamma(z_k)\cdot z_k^{n-1}\cdot k}}$,

заметим, что функция $\gamma(z_k)$ дифференцируемая по z_k, так как является средним значением, дифференцируемой функции на отрезке.

Докажем теперь оценку для производных:

Известно, что $\frac{dz_k}{dz_0}=\frac{dz_k}{dz_{k-1}}\cdot\frac{dz_{k-1}}{dz_{k-2}}...\frac{dz_1}{dz_0}$, но учитывая (1.7), получим:

$$\frac{dz_k}{dz_0}\le\frac{d\left(z_k\right)_1^c}{d\left(z_{k-1}\right)_1^c}\cdot\frac{d\left(z_{k-1}\right)_1^c}{d\left(z_{k-2}\right)_1^c}...\frac{d\left(z_1\right)_1^c}{dz_0}=\frac{d\left(z_k\right)_1^c}{d\left(z_0\right)}.$$

Аналогично получаем оценку снизу. Таким образом, $\frac{dz_0}{d\left(z_k\right)_2^c}\le\frac{dz_0}{dz_k}\le\frac{dz_0}{d\left(z_k\right)_1^c}$,

Легко получить, что $\frac{dz_0}{d\left(z_k\right)_i^c}=\frac{1}{\sqrt[n-1]{\left(1+(n-1)\beta\gamma_i z_k^{n-1}k\right)^n}}$. Отсюда получаем оценки на производную отображения T^{-k}:

$\frac{1}{\sqrt[n-1]{\left(1+(n-1)\beta\gamma_1 z_k^{n-1}k\right)^n}} \le \frac{dz_0}{dz_k} \le \frac{1}{\sqrt[n-1]{\left(1+(n-1)\beta\gamma_2 z_k^{n-1}k\right)^n}}$. С другой стороны,

$$\frac{dz_0}{dz_k} = \frac{1-\beta z_k^{n-1}k\frac{d\gamma(z_k)}{dz_k}}{\sqrt[n-1]{\left(1+(n-1)\beta\gamma(z_k)z_k^{n-1}k\right)^n}}$$, то есть $\frac{d\gamma(z_k)}{dz_k} \sim \frac{C_k}{z_k^{n-1}k}$

В нашем случае $\beta = 1$, тогда $y_0 = \frac{y_k}{\sqrt[n-1]{1+(n-1)\cdot\gamma(y_k)\cdot y_k^{n-1}\cdot k}}$, где $\gamma(y_k) \in \left[\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right]$

и $\frac{d\gamma(y_k)}{dy_k} \sim \frac{C_k}{z_k^{n-1}k}$

Нетрудно получить оценку для x_k. Запишем в виде:

$x_k = \lambda^k x_0\left(1+f(x_{k-1},y_{k-1})\right)\cdot\left(1+f(x_{k-2},y_{k-2})\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+f(x_0,y_0)\right)$.

Раскрывая скобки и оценивая множители $\left(1+f(x_i,y_i)\right)$

как $\left(1+f(x_i,y_i)\right) < 1+\delta$, где δ >0 – малая константа, тем меньшая, чем меньше окрестность U_0, получим что $x_k = \lambda^k x_0 + h(x_0, y_k)$, где $h(x_0,y_k) = O\left(\lambda_1^k\right)$, $0 < \lambda < \lambda_1 = (\lambda+\delta) < 1$.

Лемма 1.2. *Пусть окрестности* Π^+ *и* Π^- *гомоклинических точек* M^+ *и* M^- *выбраны так, что* $T\Pi^+ \cap \Pi^+ = \varnothing$, $T^{-1}\Pi^- \cap \Pi^- = \varnothing$. *Тогда определено отображение* $T_0 : \Pi^+ \to \Pi^-$ *по траекториям отображения T в окрестности начала координат, причем областью определения* T_0 *является область* B_0, *представляющая собой счетное объединение непересекающихся полосок* B_0^k, $B_0 = \bigcup_{k=\bar{k}}^{\infty} B_0^k \subset \Pi_0$, $T_0 B_0 = B_1 \subset \Pi_1$, *причем на каждом* B_0^k *отображение* T_0 *совпадает с* T^k, *т.е.* $T_0\Big|B_0^k = T^k$ *и* $k \to \infty$ *при* $\varepsilon \to 0$,

Доказательство.

Полоски B_0^k определяются как $B_0^k = T^{-k}\Pi^- \cap \Pi^+$

Тогда их координаты (x,y), в силу леммы 1.2, таковы, что $\left|x - x^+\right| \le \varepsilon$

$\frac{c_1^1}{\sqrt[n-1]{k}} \le y_0 \le \frac{c_1^2}{\sqrt[n-1]{k}}$, c_1^1, c_1^2 некоторые константы, не зависящие от k.

□

Отображение $T_0 : \Pi^+ \to \Pi^-$, используя запись (1.4) можно переписать в следующей координатной форме (обозначим при этом $x_k = x_1$, $y_k = y_1$) для каждой полоски B_0^k.

$$\begin{cases} x_1 = u(x_0, y_1, k), \\ y_0 = v(y_1, k). \end{cases}$$

Введем в рассмотрение пространство $H_1(L_1)$ графиков непрерывных функций $x = h_1(y)$ липшицируемых с константой Липшица $L_1 \le \varepsilon$:

$H_1(L_1) = \{x = h_1(y) : y^- - \varepsilon \le y \le y^- + \varepsilon,\ |h|_\varepsilon \le \varepsilon,\ |h_1(y_1) - h_1(y_2)| \le L_1|y_1 - y_2|\}$.

Расстояние между двумя кривыми $\aleph_1$ и $\aleph_2$ пространства $H_1(L_1)$ введем следующим образом:

$$d(\aleph_1^1, \aleph_1^2) = \max_{y^- - \varepsilon \le y \le y^- + \varepsilon} |h_1^1(y) - h_1^2(y)|,$$

где $x = h_1^1(y)$ и $x = h_1^2(y)$ соответственно уравнения кривых $\aleph_1^1$ и $\aleph_1^2$. Так как множество кривых $H_1(L_1)$ в C_0 компактно (является шаром), то пространство $H_1(L_1)$ с такой метрикой является полным метрическим пространством. Полоски $B_1^k \subset B_1$ «высекают» из пространства $H_1(L_1)$ пространство кривых $H_1^k\ (L_1)$.

Введем также в рассмотрение пространство $H_0(L_0)$ графиков непрерывных функций $x = h_0(y)$, липшицируемых с константой Липшица L_0, а именно

$H_0(L_0) = \{x = h_0(y):\ x^+ - \varepsilon \le x \le x^+ + \varepsilon,\ 0 \le y \le \varepsilon_0,\ h_0 \in C_0,$

$|h_0(y_1) - h_0(y_2)| \le L_0|y_1 - y_2|\}$

В силу леммы 1.3, а также в силу записи элементов пространства $H_0(L_0)$ в виде $x = h_0(y)$ пересечение произвольного элемента $\aleph_0$ из пространства $H_0(L_0)$ с областью определения B_0 отображения $T_0 : \Pi^+ \to \Pi^-$ состоит из счетного множества компонент. Каждая компонента есть пересечение графика функции $x = h_0(y)$ с полоской B_0^i и, очевидно, также записывается в виде $x = h_{0\,i}(y)$.

Лемма 1.3. *Образ кривой* $\aleph_{0i} : x = h_{0\,i}(y)$ *при отображении* $T_0 \big| B_0^i = T^i$ *есть график непрерывной липшицируемой функции с постоянной Липшица* $L_0^i = \lambda_1^{\,i} L_0$.

Доказательство.

То, что образ кривой $\aleph_{0i}$ есть график непрерывной липшицируемой функции, следует из записи отображения $T_0 \big| B_0^i$ в виде

$$\begin{cases} x_1 = u\left(x_0, y_1, k\right), \\ y_0 = v\left(y_1, k\right). \end{cases}$$

Действительно, уравнение $T^i \aleph_{0i}$ в неявном виде запишется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 = \bar{u}\left(h_{0i}\left(y_0\right), y_1, i\right), \\ y_0 = \bar{v}\left(y_1, i\right). \end{cases} \tag{1.8}$$

Подставляя второе неравенство в первое, получим:

$$x_1 = \bar{u}\left(h_{0i}\left(\bar{v}\left(y_1, i\right)\right), y_1, i\right).$$

Заметим, что $\aleph_{0i}$ переходит в кривую $x = h(y_1, i)$ за i итераций локального отображения T.

Оценим константу Липшица на каждом шаге отдельно. Из (1.1) уравнение $T\aleph_{0i}$ запишется в неявном виде:

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda \cdot h_{0i}\left(y\right) + f\left(h_{0i}\left(y\right), y\right) h_{0i}\left(y\right) \\ \bar{y} = y + \tilde{R}\left(y\right) \end{cases}$$

Выражая из второго равенства y как функцию $\varsigma(\bar{y})$, что возможно в достаточно малой окрестности начала координат, в силу монотонности $y+y^n+...$ и подставляя в первое равенство, получим:

$$\bar{x}=\bar{h}(y)=\lambda h_{0i}(\varsigma(\bar{y}))+f(h_{0i}(\varsigma(\bar{y})),\varsigma(y))h_{0i}(\varsigma(y))$$

Заметим, что $|\varsigma(\bar{y}_1)-\varsigma(\bar{y}_2)|\leq\left(1-\left|\widetilde{R}_y\right|\right)^{-1}|y_1-y_2|$

Оценим константу Липшица функции $\bar{x}=\bar{h}(\bar{y})$.

$$\begin{aligned}&\bar{h}(\bar{y}_1)-\bar{h}(\bar{y}_2)=\lambda\left[h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_1))-h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_2))\right]+\\&+f(h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_1)),\varsigma(\bar{y}_1))h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_1))-f(h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_2)),\varsigma(\bar{y}_2))h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_2))=\\&=\lambda\left[h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_1))-h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_2))\right]+f(h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_1)),\varsigma(\bar{y}_1))h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_1))-\\&-f(h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_1)),\varsigma(\bar{y}_1))h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_2))+\\&+\left[f(h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_1)),\varsigma(\bar{y}_1))h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_2))-f(h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_2)),\varsigma(\bar{y}_2))h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_2))\right]\end{aligned}$$

Оценим неравенство по норме:

$$\begin{aligned}&\left\|\bar{h}(\bar{y}_1,\mu)-\bar{h}(\bar{y}_2,\mu)\right\|\leq\lambda L_0|\varsigma(\bar{y}_1)-\varsigma(\bar{y}_2)|+\left\|f(h_{0i}(\varsigma(\bar{y}_1)),\varsigma(\bar{y}_1))\right\|L_0|\varsigma(\bar{y}_1)-\varsigma(\bar{y}_2)|+\\&\qquad+(x^++\varepsilon)\left[\|f_x\|L_0\left(1-\left|\tilde{R}_y\right|\right)^{-1}|\bar{y}_1-\bar{y}_2|+\|f_y\|\left(1-\left|\tilde{R}_y\right|\right)^{-1}|\bar{y}_1-\bar{y}_2|\right]\end{aligned}$$

Упрощая, получим:

$$\left\|\bar{h}(\bar{y}_1)-\bar{h}(\bar{y}_2)\right\|=\left(\lambda L_0+\|f\|L_0+(x^++\varepsilon_0)\left[\|f_x\|L_0+\|f_y\|\right]\right)\left(1-\left|\tilde{R}_y\right|\right)^{-1}|\bar{y}_1-\bar{y}_2|$$

Последнее неравенство можно переписать в следующем виде:

$$\left\|\bar{h}(\bar{y}_1)-\bar{h}(\bar{y}_2)\right\|\leq\lambda_1 L_0|\bar{y}_1-\bar{y}_2|,\ 0<\lambda_1<1$$

Таким образом, при каждой итерации константа Липшица уменьшается в $\frac{1}{\lambda_1}$ раз, за i итераций она уменьшится в λ^{-i} раз. Константа Липшица функции $x_1=h(y_1,i)$ равна $\lambda^i L_0$, т.е.

$$\left\|h(y_1^1,i)-h(y_1^2)\right\|\leq\lambda^i L_0\left|y_1^1-y_1^2\right| \tag{1.9}$$

Доказательство леммы закончилось. □

Следствие. *Так как функции $\bar{u}(x_0, y, k)$ и $\bar{v}(y,k)$ гладкие, то в достаточно малой окрестности U^+ справедливы оценки:*

$$\left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_0}\right\| + \left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial y_1}\right\| \le \tilde{c}\lambda_1^{\,k} \qquad (1.10),$$

где $\tilde{c}$ - некоторая положительная константа.

Доказательство этого утверждения следует из записи функции $x_1 = h(y_1, i)$ в виде (1.8) и теоремы о среднем, ранее полученных оценок леммы 1.2 и неравенства (1.9), в силу произвольности функции $x = h_0(y)$. Так же заметим, что оценка (1.8) может быть полученные непосредственно используя оценки леммы 1.2.

Аналогично введем в пространстве $H_0(L_0)$ расстояние между элементами следующим образом:

$$d\left(\aleph_0^1, \aleph_0^2\right) = \max_{0 \le y \le \varepsilon}\left|h_0^1(y) - h_0^2(y)\right|,$$

где $x = h_0^1(y)$ и $x = h_0^2(y)$ уравнения кривых $\aleph_0^1$ и $\aleph_0^2$. Очевидно, с такой метрикой пространство $H_0(L_0)$ является компактным, а, следовательно, и полным метрическим. Полоски $B_0^j \subset B_0$ “вырезают” из пространства $H_0(L_0)$ пространство $H_0^j(L_0)$. Обозначим также через $\aleph_{0j}$ компоненту кривой $\aleph_0$. Через $\tau_0^j \aleph_{0j}$ обозначим пересечение $\tau_0^j \aleph_{0j} \cap B_1^j$.

Лемма 1.5. *Для любого L_1, определён оператор τ_0^j: $H_0^j(L_0) \to H_1^j(L_1)$ удовлетворяющий условиям сжимаемости:*

$$d\left(\tau_0^j \aleph_{0j}^1, \tau_0^j \aleph_{0j}^2\right) \le \tilde{c}\lambda_1^{\,j} d\left(\aleph_{0j}^1, \aleph_{0j}^2\right).$$

Доказательство. леммы следует из оценки (1.8) записи оператора τ_0^j в виде (1.6). Действительно, $j \ge k^*$, поэтому константа Липшица может быть сделана сколь угодно малой. Кроме того

$$\left\|h^1(y_1, j) - h^2(y_1, j)\right\| \le \left\|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_0}\right\| \; \left\|h_{0j}^1(y_1) - h_{oj}^2(y_1)\right\| \le \tilde{c}\lambda_1^{\,j} d\left(\aleph_{0j}^1, \aleph_{0j}^2\right).$$

В силу произвольности функции h_{0j}^{1} и h_{0j}^{2} имеем

$$d\left(\tau_0^j \aleph_{0j}^1, \tau_0^j \aleph_{0j}^2\right) \leq \tilde{c}\lambda_1{}^j d\left(\aleph_{0j}^1, \aleph_{0j}^2\right).$$

1.3 Свойства глобального отображения

Как указывалось в разделе 1.1, отображение T_1 записывается в виде:

$$\begin{cases} \bar{x} - x^{+} = F\left(x, y - y^{-}\right) = a \cdot x + b\left(y - y^{-}\right) + O\left(x^2 + \left(y - y^{-}\right)^2\right), \\ \bar{y} = c \cdot x + d\left(y - y^{-}\right) + O\left(x^2 + \left(y - y^{-}\right)^2\right) \end{cases} \tag{1.11}$$

Так как пересечение трансверсальное и отображение взаимно-однозначное , то $d \neq 0$ и $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$

Рассмотрим отображение:

$$\begin{cases} \bar{x} = x^{+} + \tilde{F}\left(x, \bar{y}\right) = x^{+} + a \cdot x - \dfrac{b}{d} cx + \dfrac{b}{d}\bar{y} + O\left(x^2 + \bar{y}^2\right) \\ y - y^{-} = -\dfrac{1}{d} cx + \dfrac{1}{d}\bar{y} + O\left(x^2 + \bar{y}^2\right) \end{cases} \tag{1.12}$$

Выведем условия, при которых $T_1 B_1^i \cap B_0^j \neq 0$. Для этого нужно показать, что кривые $x_1 = u_{x_0}\left(y_1, k\right)$, на которые расслаивается B_1^k, при отображении T_1 переходят в кривые, пересекающиеся с кривыми $y_0 = v_{y_1}\left(j\right)$, на которые расслаивается область B_0^j , или что система:

$$\begin{cases} x_0 = x^{+} + F\left(u_{x_0}\left(y_1, i\right), y_1 - y^{-}\right) \\ y_1 - y^{-} = -\dfrac{1}{d} c \cdot u_{x_0}\left(y_1, i\right) + \dfrac{1}{d} v_{y_1}\left(j\right) + O\left(u_{x_0}\left(y_1, i\right)^2 + v_{y_1}\left(j\right)^2\right) \end{cases} \tag{1.13}$$

при всех $\left|x_0 - x^{+}\right| \leq \varepsilon$, $\left|y_1 - y^{-}\right| \leq \varepsilon$ имеет решение $x_0^*,\ y_1^*$ такое , что $\left|x_0^* - x^{+}\right| \leq \varepsilon$ $y_1^* \in B_1^i$.

Докажем, что второе уравнение (1.13) имеет единственное решение y_1^*.

Рассмотрим отображение τ^*:

$\bar{y}_1 - y^{-} = -\dfrac{1}{d} c \cdot u_{x_0}\left(y_1, i\right) + \dfrac{1}{d} v_{y_1}\left(j\right) + O\left(u_{x_0}\left(y_1, i\right)^2 + v_{y_1}\left(j\right)^2\right)$, оно определено при любых

$\left|x_0 - x^+\right| \le \varepsilon$, $\left|y_1 - y^-\right| \le \varepsilon$

Сначала найдем условия при которых y_1^* будут принадлежать Π^-. Для этого воспользуемся тождествами: $\left|y_1 - y^-\right| \le c_3 \cdot \lambda_1^{\,i} + c_4 \cdot \frac{1}{\sqrt[n-1]{j}} \le \varepsilon$

при подходящих значениях i и j отображение τ^* переводит отрезок $\left|y_1 - y^-\right| \le \varepsilon$ в себя. Выберем условие, при котором отображение τ^* будет сжимающим. $\left|\frac{\partial \overline{y}}{\partial y_1}\right| \le c_5 \cdot \lambda^i + c_6 \cdot \frac{1}{\sqrt[n-1]{j}} = q$. Очевидно, отображение τ^* будет сжимающим, если $\left|\frac{\partial \overline{y}_1}{\partial y_1}\right| \le q < 1$.Что очевидно выполняется, при больших i и j

.

Лемма 1.6. *При подходящих значениях* ε *,* i *,* j *пересечение* $T_1 B_1^i$ *с* B_0^j *не пусто.*

Следствие. $T_1 B_1^i \cap B_0^j = T_1 \cdot T^i B_1^i \cap B_0^j$ *гомеоморфно квадрату* $\left|x_0 - x^+\right| \le \varepsilon$, $\left|y_1 - y^-\right| \le \varepsilon$.

Пусть i , j удовлетворяют всем вышеперечисленным условиям. Тогда образом точки $\overline{M}_0(\overline{x}_0, \overline{y}_0) \in T_1 \cdot T^i B_0^i \cap B_0^j$ при действии T^j будет точка $\overline{M}_1(\overline{x}_1, \overline{y}_1)$ Поэтому отображение $T_1 \cdot T^i : B_1^i \to B_0^j$ в переменных (x_0, y_1) запишется в виде:

$$\begin{cases} \overline{x}_0 = x^+ + F\left(u_{x_0}(y_1, i), y_1 - y^-\right), \\ y_1 - y^- = -\dfrac{1}{d} c \cdot u_{x_0}(y_1, i) + \dfrac{1}{d} v_{y_1}(j) + O\left(u_{x_0}(y_1, i)^2 + v_{y_1}(j)^2\right) \end{cases}$$

На эти уравнения можно смотреть как на некоторые соотношения связывающие $(\overline{x}_0, y_1)$ с $(x_0, \overline{y}_1)$. Используя оценки, можно получить, что для якобиана $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(\overline{x}_0, y_1)}$, где

$$\Phi_1 = \overline{x}_0 - x^+ - F\,,$$

$\Phi_2 = y_1 - y^- + \frac{1}{d} c \cdot u_{x_0}(y_1, i) - \frac{1}{d} v_{y_1}(j) + O\left(u_{x_0}(y_1, i)^2 + v_{y_1}(j)^2\right)$, имеет место следующая оценка: $\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(\bar{x}_0, y_1)} \geq \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial F}{\partial y_1} \\ 0 & 1-q \end{vmatrix} = 1 - q$. Но $q < 1$, следовательно $\bar{x}_0, y_1$ можно выразить через $x_0, \bar{y}_1$. Таким образом, при малом ε, и соответствующих i и j, мы получаем новую форму представления отображения $T_1 \cdot T^i$:

$$\begin{cases} \bar{x}_0 - x^+ = \tilde{F}(x_0, \bar{y}, i, j) \\ y_1 - y^- = \tilde{G}(x_0, \bar{y}, i, j) \end{cases}, \qquad (1.14)$$

где для производных функций $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ имеет место оценка:

$$\left|\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_0}\right| + \left|\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \bar{y}_1}\right| + \left|\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_0}\right| + \left|\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \bar{y}_1}\right| \leq \frac{\delta q}{1-q}, \qquad (1.15)$$

так как $\left|\frac{\partial \tilde{F}}{\partial x_0}\right| \leq \frac{1}{1-q} \left|\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(x_0, y_1)}\right|$, $\left|\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \bar{y}_1}\right| \leq \frac{1}{1-q} \left|\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(\bar{y}_1, y_1)}\right|$,

$\left|\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x_0}\right| \leq \frac{1}{1-q} \left|\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(\bar{x}_0, x_0)}\right|$, $\left|\frac{\partial \tilde{G}}{\partial \bar{y}_1}\right| \leq \frac{1}{1-q} \left|\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(\bar{x}_0, \bar{y}_1)}\right|$ и δ некоторая положительная константа. Тогда имеет место следующая лемма 1.7.

Лемма 1.7. *Отображение $T_1 \cdot T^i$: $B_1^i \to B_0^j$ будет представлено в виде (1.14) и для первых производных будет выполняться (1.15).*

Замечание. С рассматриваемым отображением $T_1 \cdot T^i$ удобно связать отображение $T_{ij} : (x_0, \bar{y}_1) \to (\bar{x}_0, y_1)$, которое в явном виде задается формулами (1.12). Из леммы 1.6 следует, что оно определено в квадрате $|x_0 - x^+| \leq \varepsilon$, $|\bar{y}_1 - y^-| \leq \varepsilon$ и отображает его в $|\bar{x}_0 - x^+| \leq \varepsilon$ $|y_1 - y^-| \leq \varepsilon$ Заметим, что T_{ij} будет сжимающим, если $\frac{\delta q}{1-q} < \frac{1}{2}$, и, следовательно, будет иметь единственную неподвижную точку M_i^*. Видно, что эта неподвижная точка будет неподвижной точкой отображения $T_1 \cdot T^i$ при $i = j$.

Следствие. *Образ любой кривой $\aleph_1 \in H_1(L_1)$ при отображении T_1 в пересечении с полоской B_0^j есть непрерывная кривая, записываемая в виде:* $x = h_0(y)$

Лемма 1.8. *Образ любой кривой $\aleph_1 \in H_1(L_1)$, при отображении T_1 в пересечении с фиксированной полоской B_0^j есть график непрерывной липшицируемой функции $x = h_0(y)$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $\aleph_1$ пространства $H_1(L_1)$, который в координатах (x, y) задается уравнением $x = h_1(y)$. При отображении T_1 образ этого элемента согласно (1.14) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \bar{x} - x^+ = F\left(h_1(y), y - y^-\right) \\ y - y^- = \tilde{G}\left(h_1(y), \bar{y}\right) \end{cases} \tag{1.16}$$

Если мы покажем, что эти равенства задают $\bar{x}$ как непрерывную и липшицируемую функцию $\bar{y}$, то тем самым докажем, что $\bar{x}$ является однозначной непрерывной функцией $\bar{x} = h(\bar{y})$ с данной константой Липшица. Таким образом, доказательство леммы сводится к доказательству этого утверждения.

Пусть $(x_1 = h_1(y_1), y_1)$ и $(x_2 = h_1(y_2), y_2)$ две точки на кривой $\aleph_1 \in H_1$, уравнение которой $x = h_1(y)$. Образы точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) при отображении T_1 обозначим соответственно $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ и $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$. Согласно (1.14) координаты (x_ν, y_ν), где $i = 1,2$, удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \bar{x}_\nu - x^+ = F\left(h_1(y_i), y - y^-\right) \\ y_\nu - y^- = \tilde{G}\left(h_1(y_i), \bar{y}\right) \end{cases} \tag{1.17}$$

Оценим разность $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ по норме:

$\|\bar{x}_1-\bar{x}_2\|\le\|F_x\|\cdot\|h_1(y_1)-h_1(y_2)\|+\|F_y\|\cdot|y_1-y_2|\le(L_1\cdot\|F_x\|+\|F_y\|)\cdot|y_1-y_2|$

Очевидно, имеют место оценки $\|F_x\|+\|F_y\|\le\mathrm{N}$, где N -некоторая положительная константа . С учетом этого получим:

$$\|\bar{x}_1-\bar{x}_2\|\le\mathrm{N}\cdot(1+L_1)\cdot|y_1-y_2| \tag{1.18}$$

Вычтем в (1.15) вторые уравнения при разных значениях i

$y_1-y_2=\tilde{G}(h_1(y_1),\bar{y}_1)-\tilde{G}(h_1(y_2),\bar{y}_2)=\tilde{G}_x\cdot(h_1(y_1)-h_1(y_2))+\tilde{G}_{\bar{y}}\cdot(\bar{y}_1-\bar{y}_2)$

Оценим разность $|y_1-y_2|$

$|y_1-y_2|\le|\tilde{G}_x|\cdot L_1|y_1-y_2|+|\tilde{G}_{\bar{y}}|\cdot|\bar{y}_1-\bar{y}_2|$ За счет выбора i, j и L_1 можно добиться того, чтобы величина $P^{ij}=|\tilde{G}_x|\cdot L_1$ была меньше $\frac{1}{2}$.

Преобразуем неравенство:

$(1-P^{ij})\cdot|y_1-y_2|\le|\tilde{G}_y||\bar{y}_1-\bar{y}_2|$, где $\frac{1}{2}<1-P^{ij}<1$.

Обозначим $\bar{L}_0^{ij}=\dfrac{|\tilde{G}_{\bar{y}}|}{(1-P^{ij})}$, так как $|\tilde{G}_{\bar{y}}|\le\dfrac{\delta q}{1-q}$.

Тогда наше неравенство эквивалентно неравенству $|y_1-y_2|\le\bar{L}_0^{ij}\cdot|\bar{y}_1-\bar{y}_2|$ и с учетом получившегося неравенства (1.18) перепишется в виде: $|\bar{x}_1-\bar{x}_2|\le\bar{L}_0^{ij}\cdot\mathrm{N}\cdot(1+L_1)\cdot|\bar{y}_1-\bar{y}_2|$ и после переобозначения константы Липшица получим неравенство $|\bar{x}_1-\bar{x}_2|\le L_0^{ij}\cdot|\bar{y}_1-\bar{y}_2|$, где L_0^{ij}- константа Липшица, зависящая от выбора полосок B_1^i и B_0^j, она конечна и определяется формулой: $L_0^{ij}=\bar{L}_0^{ij}\cdot\mathrm{N}\cdot(1+L_1)$. Непрерывность функции $\bar{x}=h(\bar{y})$ очевидна. Лемма доказана. □

Ранее мы ввели в рассмотрение пространство $H_0(L_0)$ графиков непрерывных функций $x=h_0(y)$ липшицируемых с константой Липшица L_0, причем оставили за собой выбор константы L_0. Выберем её на каждом $H_0^j(L_0)$ такой, как получили в доказательстве леммы 1.8. Обозначим через $\Im_1^i\aleph_1$

пересечение $\mathrm{T}_1\aleph_{1i}\bigcap\Pi^+$. Приведенные рассуждения делают справедливой следующее утверждение.

Лемма 1.9. *Определен оператор* $\Im_{10}^{ij}:\mathrm{H}_1^i\left(L_1\right)\to\mathrm{H}_1^j\left(L_1\right)$*, удовлетворяющий условию сжимаемости:*

$$d\left(\Im_{10}^{ij}\aleph_1^1;\Im_{10}^{ij}\aleph_1^2\right)\le q_1 d\left(\aleph_1^1;\aleph_1^2\right), \tag{1.17}$$

где $0<q_1<1$.

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать сжимаемость уже определенных фактически операторов $\Im_{10}^{ij}$. Пусть $\aleph_1^1$ и $\aleph_1^2$ - две произвольные кривые пространства $\mathrm{H}_1^i\left(L_1\right)$, уравнения которых записываются соответственно в виде $x=h_{1i}^1\left(y\right)$ и $x=h_{1i}^2\left(y\right)$. Образы $\Im_1^i\aleph_1^1$ и $\Im_1^i\aleph_1^2$ кривых $\aleph_1^1$ и $\aleph_1^2$ при действии оператора $\Im_1^i$ в неявном виде согласно с (1.15) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases}\bar{x}^{\nu}-x^{+}=F\left(h_{1i}^{\nu}\left(y\right),y-y^{-}\right)\\ y-y^{-}=\tilde{G}\left(h_{1i}^{\nu}\left(y\right),\bar{y}\right)\end{cases} \tag{1.18}$$

Вычитая в (1.18) первые равенства, взятые с разными значениями ν, получаем равенство:

$$\begin{aligned}&\bar{x}^1-\bar{x}^2=F\left(h_{1i}^1\left(y\right),\tilde{G}\left(h_{1i}^{\nu}\left(y\right),\bar{y}\right)\right)-F\left(h_{1i}^2\left(y\right),\tilde{G}\left(h_{1i}^{\nu}\left(y\right),\bar{y}\right)\right)=\\&=F_x\cdot\left(h_{1i}^1\left(y\right)-h_{1i}^2\left(y\right)\right)+F_y\cdot\tilde{G}_x\cdot\left(h_{1i}^1\left(y\right)-h_{1i}^2\left(y\right)\right)\end{aligned}$$

Применяя разложение по формуле Тейлора и неравенство треугольника, получим неравенство: $\left|\bar{x}^1-\bar{x}^2\right|\le\left(\left|F_x\right|+\left|F_y\cdot\tilde{G}_x\right|\right)\left|h_{1i}^1\left(y\right)-h_{1i}^2\left(y\right)\right|$

С учётом равенства $\left\|F_x\right\|+\left\|F_y\right\|\le\mathrm{N}$ получим следующее неравенство:

$$\left|\bar{x}^1-\bar{x}^2\right|\le N\cdot\left(1+\frac{\delta q}{1-q}\right)\left|h_{1i}^1\left(y\right)-h_{1i}^2\left(y\right)\right|.$$

В силу произвольности взятых кривых $\aleph_{1i}^1$ и $\aleph_{1i}^2$ мы фактически доказали, что

$$d\left(\Im_1^i\aleph_{1i}^1;\Im_1^i\aleph_{1i}^2\right)\le N\cdot\left(1+\frac{\delta q}{1-q}\right)\cdot d\left(\aleph_{1i}^1;\aleph_{1i}^2\right), \tag{1.19}$$

где q конечная величина, зависящая от значений i и j.

Обозначим через $\aleph_0^1(i)$ и $\aleph_0^2(i)$ образы кривых $\aleph_{1i}^1$ и $\aleph_{1i}^2$ соответственно при действии $\Im_1^i$, а компоненты пересечения $\mathrm{B}_0 \cap \aleph_0(i)$ принадлежащие B_0^j через $\aleph_{0j}(i)$. Тогда, очевидно, что из (1.19) следует $d\left(\aleph_{0j}^1(i);\aleph_{0j}^2\right) \le N \cdot \left(1+\dfrac{\delta q}{1-q}\right) \cdot d\left(\aleph_{1i}^1;\aleph_{1i}^2\right)$. Применяя теперь к кривым $\aleph_{0j}^{\nu}(i)$ оператор $\Im_0^j : \mathrm{H}_0^j(L_0) \to \mathrm{H}_{11}^j(L_1)$, получим $d\left(\Im_0^j \aleph_{0j}^1;\Im_0^j \aleph_{0j}^2\right) = d\left(\Im_{10}^{ij}\aleph_{1i}^1;\Im_{10}^{ij}\aleph_{1i}^2\right) \le \tilde{c}\cdot\lambda^j \cdot d\left(\aleph_{0j}^1(i);\aleph_{0j}^2(i)\right)$.

Подставляя последнее в (1.19) получим неравенство:

$$d\left(\Im_{10}^{ij}\aleph_{1i}^1;\Im_{10}^{ij}\aleph_{1i}^2\right) \le c_6 \cdot \lambda^j \cdot N \cdot \left(1+\frac{\delta q}{1-q}\right) \cdot d\left(\aleph_{1i}^1;\aleph_{1i}^2\right) . \qquad (1.20)$$

Обозначим, через $q_1 = \tilde{c}\cdot\lambda^j \cdot N \cdot \left(1+\dfrac{\delta q}{1-q}\right)$, q_1 можно сделать сколь угодно малым.

Подставляя эту оценку в (1.20) получаем: $d\left(\Im_{10}^{ij}\aleph_{1i}^1;\Im_{10}^{ij}\aleph_{1i}^2\right) \le q_1 \cdot d\left(\aleph_{1i}^1;\aleph_{1i}^2\right)$. Это означает сжимаемость $\Im_{10}^{ij}$. Лемма доказана. □

1.4 Описание множества N траекторий из окрестности $U(O \cup \Gamma_0)$

Введем в рассмотрение связный ориентированный граф G (рис.1.3), где ребра графа есть состояния, а вершины – переходы.

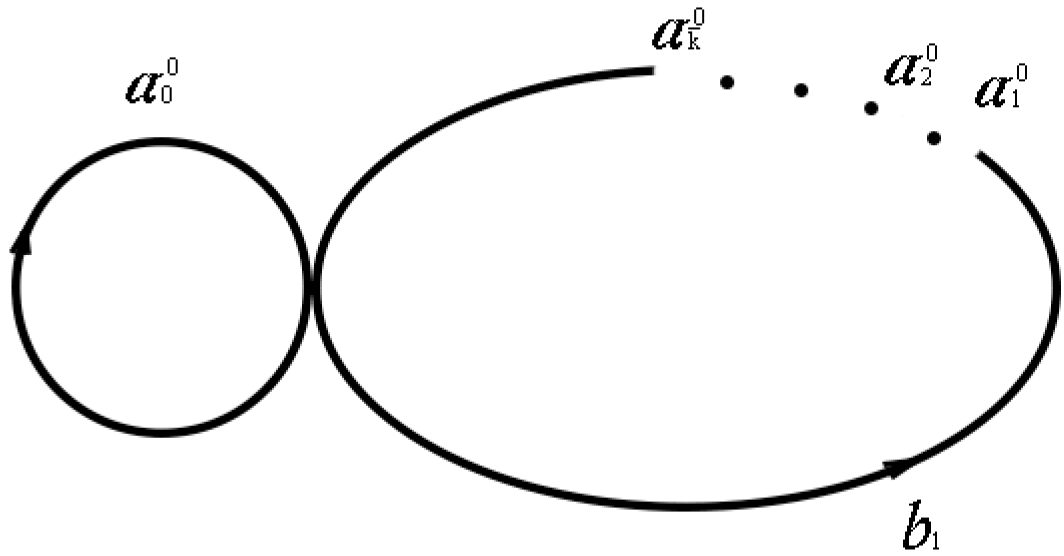


Рис. 1.3.

Вместе с графом G рассмотрим множество Ω допустимых относительно графа G бесконечных в обе стороны последовательностей с отмеченной нулевой координатой:

$$\overline{\omega} = \{\ldots;\omega^{-1};\widehat{\omega}^{0};\omega^{1};\omega^{2};\ldots\},$$

составленных из символов a_j^0, $j = 0,1,\ldots\bar{k}$ и b_1, где $\bar{k}$ - число шагов с Π^+ на Π^- с первой полоски $B_0^{\bar{k}} \in B_0$. Каждый из символов a_j^0, $j = 0,1,\ldots\bar{k}$ есть число $0,1,\ldots,\bar{k}$ а и $b_1 = \bar{k} + 1$ Очевидно, что в этом случае последовательности $\overline{\omega}$ состоят из блоков $A_1^1 = a_0^0$ и $A_2^1 = b_1, a_1^0, \ldots a_{\bar{k}}^0$, взятых в произвольном порядке. После введения в Ω стандартной метрики

$$d(\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} 2^{-|j|} \cdot \left|\omega_1^j - \omega_2^j\right|, \text{ где}$$

$$\overline{\omega}_1 = \{\ldots;\omega_1^{-1};\widehat{\omega}_1^{0};\omega_1^{1};\omega_1^{2};\ldots\},$$

$$\overline{\omega}_2 = \{\ldots;\omega_2^{-1};\widehat{\omega}_2^{0};\omega_2^{1};\omega_2^{2};\ldots\}\text{-}$$

элементы Ω, множество Ω становится метрическим пространством.

Рассмотрим отображение $\sigma:\Omega\to\Omega$, $\sigma\overline{\omega}=\{\ldots;\widehat{\omega}^{-1};\omega^0;\omega^1;\omega^2;\ldots\}$, $\widehat{\omega}^j=\omega^{j+1}$,эквивалентное сдвигу последовательности на единицу влево. Нетрудно доказать, что σ - гомеоморфизм.

Определение 1.1. *Тройку (G,Ω,σ), где G - некоторый связный ориентированный граф, Ω - метрическое пространство, допустимых относительно графа G-бесконечных последовательностей с отмеченным символом, а σ - гомеоморфизм сдвига на единицу влево в пространстве Ω-, будем называть топологической цепью Маркова /Т.Ц.М./* [27]

Т.Ц.М. $(\widetilde{G},\widetilde{\Omega},\widetilde{\sigma})$ и Т.Ц.М. (G,Ω,σ) будем называть *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h:\widetilde{\Omega}\to\Omega$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\Omega} & \xrightarrow{\widetilde{\sigma}} & \widetilde{\Omega}\\ h\downarrow & & \downarrow h\\ \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega\end{array}$$

коммутативна.

Описание множества траекторий Ω_u в $U(O\cup\Gamma_0)$ удобнее проводить на языке надстроек над Т.Ц.М.

Перейдем теперь к описанию множества траекторий N. Все точки $\overline{\omega}$ Т.Ц.М. (G,Ω,σ) разобьем на классы и условимся относительно их обозначения. Как уже отмечалось выше, в этом случае последовательности $\overline{\omega}$ состоят из блоков $A_1^1=a_0^0$ и $A_2^1=b_1,a_1^0,\ldots a_k^0$, взятых в произвольном порядке. Очевидно, допустимые последовательности $\overline{\omega}$ Т.Ц.М. (G,Ω,σ) могут быть пяти типов:

1. $\overline{\omega}_1=\left(\ldots;\omega_1^{-1};\omega_1^0;\omega_1^1;\omega_1^2;\ldots\right)$,
2. $\overline{\omega}_1=\left[b_1;a_1^0;a_2^0;\ldots;a_k^0;\ldots;\omega^i;\ldots\right)$,
3. $\overline{\omega}_1=\left(\ldots;\omega_1^{-1};\omega_1^0;\omega_1^1;\omega_1^2;\ldots;b_1\right]$,

4. $\overline{\omega}_1 = \left[b_1; a_1^0; a_2^0; \ldots; a_{k_1^*}^0; \ldots; \omega^i; \ldots; \ldots b_1 \right],$

5. $\overline{\omega}_1 = \left(\ldots; a_0^0; a_0^0; a_0^0; \ldots \right),$

где в последовательности второго типа влево от символа b_1 стоят только символы a_0^0; в последовательности третьего типа вправо от символа b_1 стоят только символы a_j^0, $j = 1, \ldots, \bar{k}$, а потом за символом $a_{k_1^*}^0$ только символы a_0^0; в последовательности четвертого типа слева от b_1 до бесконечности - символы a_0^0, а справа от b_1 сначала a_j^0, а потом за символом $a_{\bar{k}}^0$ до бесконечности символы a_0^0. Последовательности 2-4 типов будем называть асимптотическими в Т.Ц.М(G, Ω, σ). Последовательность 5-го типа - единственная, она является неподвижной точкой гомеоморфизма σ.

В предыдущем разделе мы ввели в рассмотрение пространства $\mathrm{H}_1(L_1)$, $i \geq \bar{k}$, липшицируемых кривых $\aleph_{1i}: x = h_{1i}(y)$ и построили операторы $\mathfrak{I}_{10}^{ij}: \mathrm{H}_1^i(L_1) \to \mathrm{H}_1^j(L_1)$ удовлетворяющие условию сжимаемости (1.20).

Определение 1.2. *Бесконечную в обе стороны последовательность кривых* $\left(\ldots; h_1^{-v}; \ldots; h_1^{-1}; h_1^0; h_1^1; \ldots \right)$ *будем называть инвариантным неустойчивым слоем, если для любого* $k \in Z$ *кривая* $h_1^k \in \mathrm{H}_1^i(L_1)$, $h_1^{k+1} \in \mathrm{H}_1^j(L_1)$ *и* $\left(\mathfrak{I}_{10}^{ij} \right)^{-1} h_1^{k+1} \in h_1^k$

Бесконечную только вправо /влево/ последовательность

$$\left[\ldots; h_1^{-v}; \ldots; h_1^{-1}; h_1^0; h_1^1; \ldots \right) \qquad /\left(\ldots; h_1^{-v}; \ldots; h_1^{-1}; h_1^0; h_1^1; \ldots; h_1^k \right)/$$

будем называть инвариантным неустойчивым (+) – полуслоем / (-) – полуслоем /, если для любого целого $p \geq -v$, $p \leq k - 1$ *имеют место соотношения:*

$h_1^p \in \mathrm{H}_1^i(L_1)$; $h_1^{p+1} \in \mathrm{H}_1^j(L_1)$ и $\left(\mathfrak{I}_{10}^{ij} \right)^{-1} h_1^{p+1} \in h_1^p$.

Конечный набор кривых $\left[\ldots; h_1^{-v}; h_1^{-v+1}; \ldots; h_1^{-1}; h_1^0; h_1^1; \ldots; h_1^k \right]$, *удовлетворяющий этим же соотношениям для любого* $p, v \leq p \leq k - 1$ *будем называть инвариантным отрезком неустойчивого слоя.*

Лемма 1.10. *Множество всех инвариантных неустойчивых слоев находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек Т.Ц.М. (G,Ω,σ) исключая неподвижную относительно σ последовательность 5-го типа.*

Доказательство. Покажем, что каждой точке типа 1-4 из Т.Ц.М. (G,Ω,σ) соответствует единственный либо инвариантный неустойчивый слой, либо отрезок слоя. Действительно, каждой точке Т.Ц.М. (G,Ω,σ) любого из четырех типов можно поставить в соответствие единственную последовательность пространств и операторов:

1. $\left(\ldots \to \mathrm{H}_1^{i_0}(L_1) \xrightarrow{\Im_{10}^{i_0 j_1}} \mathrm{H}_1^{j_1}(L_1) \to \ldots\right)$

2. $\left[\mathrm{H}_1^{i_{-\nu}}(L_1) \xrightarrow{\Im_{10}^{i_{-\nu} j_{-\nu+1}}} \mathrm{H}_1^{j_{-\nu+1}}(L_1) \xrightarrow{\Im_{10}^{j_{-\nu+1} i_{-\nu+2}}} \ldots\right)$

3. $\left(\ldots \to \mathrm{H}_1^{i_0}(L_1) \xrightarrow{\Im_{10}^{i_0 j_1}} \mathrm{H}_1^{j_1}(L_1)\right]$

4. $\left[\mathrm{H}_1^{i_{-\nu}}(L_1) \xrightarrow{\Im_{10}^{i_{-\nu} j_{-\nu+1}}} \mathrm{H}_1^{j_{-\nu+1}}(L_1) \to \ldots \xrightarrow{\Im_{10}^{j i_0 j_0}} \mathrm{H}_1^{j_1}(L_1)\right]$

Это делается следующим образом. Ребру b_1 в графе ставим в соответствие отображение $\mathrm{T}_1 : \Pi^- \to \Pi^+$. За символом b_1 в последовательности $\overline{\omega}$ следует конечное 'число символов $a_j^0,\ \ j = 1, 2, \ldots, \overline{k}$, а потом символ b_1. Конечную длину отрезка Δ_i из i - символов a_j^0 между символами b_1 обозначим через i, тогда отрезку Δ_i поставим в соответствие отображение T^i, которое в свою очередь единственным образом определяет пространство $\mathrm{H}_1^i(L_1)$. Далее определяем длину следующего отрезка Δ_j из символов $a_j^0,\ j = 1,2,\ldots,k_1^*$, а по нему - оператор $\Im_{10}^{ij}$ и пространство $\mathrm{H}_1^j(L_1)$ и т. д. т.е. $\Delta_{i+1} = j$, $\Delta_i = i$. Далее рассматриваем только допустимые i и j. При этом отметим, что каждое пространство $\mathrm{H}_1^i(L_1)$ полное, а все операторы $\Im_{10}^{ij}$ - сжимающие . Но тогда для точек 1-го и 3-го типов применима теорема работы [1] о существовании и единственности неподвижной точки в счетном произведении полных метрических пространств. Эта единственная неподвижная точка будет для точек $\overline{\varpi}$ Т.Ц.М. (G,Ω,σ) 1-го типа инвариантным неустойчивым слоем, а для 3-го типа - инвариантным неустойчивым (-) - полуслоем.

Для последовательности 2-го и 4-го типов инвариантный неустойчивый (+) - полуслой и инвариантный отрезок неустойчивого полуслоя строятся конструктивно. Последовательности пространств и операторов 2-го типа ставим в соответствие единственный инвариантный неустойчивый (+) - полуслой следующим образом. Отобразим пересечение $y=0$,

с помощью отображения T_1 в пространство кривых $\mathrm{H}_0(L_0)$ образ имеет уравнение $x=h_0(y)$. Компоненту пересечения кривой h_0 с полоской B_0^i обозначим h_0^i. Применяя к h_0^i отображение, T^i получим кривую $h_1^i \in \mathrm{H}_1^i(L_1)$. Затем к h_1^i применим оператор $\Im_{10}^{ij}$ и получив кривую h_1^j и т.д. весь инвариантный (+) - полуслой. Для точек 4-го типа инвариантный отрезок слоя строится аналогично. Только за конечное число шагов и на последнем шаге мы можем найти точку пересечения образа слоя h_1^p при отображении T_1 с инвариантным многообразием $y=0$. Взаимная однозначность следует из единственности. Лемма доказана. □

Выше было показано, определена совокупность отображений $T^k \cdot T_1 : B_1^j \to B_1^k$, . Для удобства обозначим всю совокупность таких отображений через $\widehat{T}:\Pi^- \to \Pi^-$.

Лемма 1.10. *Неустойчивому инвариантному слою* $(\ldots,h_1^{-v},\ldots,h_1^{-1},h_1^0,h_1^1,\ldots,h_1^p)$ *соответствует единственная бесконечная в обе стороны последовательность точек* $\{P_1^i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ *такая, что для любого* $i \in Z$

точка $P_1^i \in h_1^i$ *и* $\widehat{T} \cdot P_1^i = P_1^{i+1} \in h_1^{i+1}$*, каждому неустойчивому (+) – полуслою /(-)-полуслою/*

$$[h_1^{-\nu}, h_1^{-\nu+1},..., h_1^0,...) \qquad /(..., h_1^{-\nu}, h_1^{-\nu+1},..., h_1^0, h_1^1, h_1^2,..., h_1^p]/$$

соответствует единственная последовательность точек $\{P_1^i\}_{i=-\nu}^{\infty}$ $/\{P_1^i\}_{i=-\infty}^{p}/$ *такая, что для любого* $i \geq \nu, / i \leq k-1/$ *точка* $P_1^i \in h_1^i$ *и* $\widehat{T} \cdot P_1^i = P_1^{i+1} \in h_1^{i+1}$*, а каждому отрезку неустойчивого слоя* $[..., h_1^{-\nu},..., h_1^{-1}, h_1^0, h_1^1,..., h_1^p]$ *единственный набор* $\{P_1^i\}_{i=-\nu}^{p}$ *точек* $P_1^i \in h_1^i$, $-\nu \leq i \leq p$ *удовлетворяющий условию:*

$$P_1^{-\nu} \xrightarrow{\widehat{T}} P_1^{-\nu+1} \xrightarrow{\widehat{T}} ... \xrightarrow{\widehat{T}} P_1^k$$

Доказательство. Для инвариантного отрезка неустойчивого слоя и для инвариантного неустойчивого (-) – полуслоя такой набор точек строится конструктивно. Действительно, каждому отрезку неустойчивого слоя $[h_1^{-\nu},..., h_1^{-1}, h_1^0, h_1^1,..., h_1^k]$, как показано выше, соответствует единственный набор пространств и операторов:

$$\left[H_1^{i-\nu}(L_1) \xrightarrow{\Im_l^{i-\nu_j-\nu+1}} H_1^{j-\nu+1}(L_1) \to .... \xrightarrow{\Im_l^{i_p+j_p}} H_1^{j_p}(L_1) \right] \tag{1.21}$$

Кроме того, в конце доказательства леммы 1.10 мы нашли точку пересечения $T_1 \cdot h_1^p$ с инвариантной прямой *y=0*. Обозначим эту точку через P_0^k. Очевидно также, что точка P_0^p является образом некоторой точки $P_1^p \in h_1^p$ при действии отображения T_{1a}. Точка P_1^p и будет одной из точек искомого набора. Остальные точки строятся следующим образом. Набору пространств и операторов (1.21) естественным образом ставится в соответствие набор отображений $T^i \cdot T_1$. Следующая точка набора $P_1^{p-1} = T_1^{-1} \cdot T^{-ip} \cdot P_1^p$, причем из определения оператора T_l^{ij} вытекает, что $P_1^{p-1} \in h_1^{p-1}$ и т.д. За конечное число шагов мы получим, таким образом, весь искомый набор точек $[P_1^{-\nu},..., P_1^p]$. Для инвариантного неустойчивого (-) – полуслоя последовательность точек, бесконечная влево, строится аналогично, только за счетное число шагов.

Рассмотрим теперь инвариантный неустойчивый слой:

$$[\dots, h_1^{-\nu}, \dots, h_1^{-1}, h_1^0, h_1^1, \dots, h_1^p, \dots]$$

(Для инвариантного неустойчивого (+) - полуслоя доказательство проводится аналогично). На каждой кривой h_1^i инвариантного неустойчивого слоя произвольная точка однозначно задается координатой y. Будем смотреть на каждую кривую h_1^i, как на точечное пространство:

$$\overline{h}_1^i = \{(h_1^i(y), y)\}$$

В пространстве $\overline{h}_1^i$ введем расстояние между точками $P_1^i(1) = (h_1^i(y_1), y_1)$ и $P_1^i(2) = (h_1^i(y_2), y_2)$ по следующему правилу:

$$d\left(P_1^i(1), P_1^i(2)\right) = |y_1 - y_2|.$$

С введенной метрикой каждое пространство $\overline{h}_1^i$ становится компактным, а, следовательно, и полным метрическим.

Инвариантному неустойчивому слою соответствует единственный набор пространств $\mathrm{H}_1^{i_k}(L_1)$ и операторов $\Im_{10}^{i_k j_{k+1}}$, которые в свою очередь задают бесконечную последовательность отображений $T^{i_k} \cdot T_1$. При этом важно отметить, что отображение $\left[T^{i_k} \cdot T_1\right]^{-1}$ поточечно действует так, что точки слоя h_1^{k+1} переводятся на точки слоя h_1^k. Таким образом, на пространствах $\overline{h}_1^k$ заданы операторы:

$$\Im_{i_{k+1}, i_k} : \overline{h}_1^{k+1} \to \overline{h}_1^k,$$

действие которых эквивалентно действию отображения $\left[T^{i_k} \cdot T_1\right]^{-1}$.

Покажем, что каждый оператор $\Im_{i_{k+1}, i_k}$ является сжимающим, то есть справедливо неравенство:

$$d\left(\Im_{i_{k+1}, i_k} P_1^{k+1}(1); \Im_{i_{k+1}, i_k} P_1^{k+1}(2)\right) \le q_2 d\left(P_1^{k+1}(1), P_1^{k+1}(2)\right).$$

для всех k и произвольных точек $P_1^{k+1}(1)$ и $P_1^{k+1}(2)$. Действительно, пусть кривая $h_1^{k+1} \in \mathrm{H}^{i_{k+1}}_1(L_1)$, а $h_1^k \in \mathrm{H}^{i_k}_1(L_1)$. Возьмем в пространстве $\overline{h}_1^{k+1}$ две произвольные точки: $P_1^{k+1}(1)$ с координатами $(h_1^{k+1}(y_1), y_1)$ и $P_1^{k+1}(2)$ с координатами $(h_1^{k+1}(y_2), y_2)$. Применим к точкам $P_1^{k+1}(i), i=1,2$ сначала отображение $\overline{T}^{\,i_{k+1}}$. Обозначим образы точек при действии $\overline{T}^{\,i_{k+1}}$ соответственно $P_0^{k+1}(i), i=1,2$. Тогда $y_0^{k+1}(i) = T_y^{-i_{k+1}} y_i$ в силу локальных оценок леммы 1.2:

$$\left|y_0^{k+1}(1) - y_0^{k+1}(2)\right| \le \tilde{\tilde{c}}\,(i_{k+1})^{-n/n-1} |y_1 - y_2| \ . \qquad (1.22)$$

К полученным точкам $P_0^{k+1}(i)$ применим теперь отображение T_1^{-1}. Образы точек $P_0^{k+1}(i)$ обозначим через $P_1^k(i), i=1,2$. Очевидно, $P_1^k(i) = \Im_{10}^{i_k j_{k+1}} P_1^{k+1}(i)$ и пусть их координаты соответственно равны $\left(h_1^k(\bar{y}_i), \bar{y}_i\right), i=1,2$. Из утверждения леммы 1.8 вытекает существование такой положительной константы $\bar{c}$, что справедливо неравенство:

$$d\left(P_1^k(1), P_1^k(2)\right) = |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| \le c_7 \left|y_0^{k+1}(1) - y_0^{k+1}(2)\right| \qquad (1.23)$$

Подставляя неравенство (1.22) в (1.23), получаем:

$$d\left(P_1^k(1), P_1^k(2)\right) \le \bar{c} \cdot \tilde{\tilde{c}} \cdot \left(\bar{k}\right)^{-n/n-1} \le q_2 < 1,$$

Так как $i_{k+1} \ge \bar{k}$ но это и означает сжимаемость оператора $\Im_{i_{k+1}, i_k}$.

Таким образом, мы опять попадаем под условие теоремы о существовании единственной неподвижной точки в счетном произведении полных метрических пространств [1]. Такой неподвижной точкой в случае инвариантного неустойчивого слоя будет бесконечная в обе стороны последовательность точек $\left\{P_1^i\right\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, а в случае инвариантного неустойчивого (+) полуслоя - последовательность $\left\{P_1^i\right\}_{i=-\nu}^{+\infty}$. Лемма доказана.

Замечание 1. Произвольной траектории отображения $\widehat{T}: \Pi^- \to \Pi^-$, т.е. последовательности точек $\left\{P_1^i\right\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ естественным образом ставится в соответствие некий путь в графе G, а значит, по лемме 1.10 инвариантный неустойчивый слой. Таким образом, полученное соответствие является взаимнооднозначным.

Теперь можно решить основную задачу - Поставим в соответствие каждой траектории L бесконечную в обе стороны последовательность точек $\{P_k(L)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ по следующему правилу. Неподвижной точке ставим в соответствие $P_k(L)=O(0,0),\ k=0;\pm1;\pm2;\ldots$. Если L является ω-предельной траекторией к L_0, но не α- предельной, то она будет высекать в окрестности Π^- последовательность точек $\{P_1^i\}_{i=-\infty}^{p}$. До искомой последовательности $\{P_k(L)\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ эта последовательность продолжается следующим образом. Согласно замечанию 1 последовательности $\{P_1^i\}_{i=-\infty}^{p}$ соответствует единственный инвариантный неустойчивый (-) - полуслой $\left(\ldots,h_1^{-1},h_1^0,h_1^1,\ldots,h_1^p\right]$ такой, что $P_1^k\in h_1^k$. Этому (-) - полуслою единственным образом ставится в соответствие последовательность пространств $\mathrm{H}_{\ 1}^{j_k}(L_1)$ и отображений $T^{j_k}\cdot T_1$. В последовательности $\{P_1^i\}_{i=-\infty}^{p}$ вместо каждой точки $P_1^k,\ k\neq p$ вставим блок из точек

$$\left[T_1P_1^k;T\cdot T_1P_1^k;T_2\cdot T_1P_1^k;\ldots;T^{j_{k=1}}P_1^k\right],$$

а вместо P_1^p - бесконечную последовательность точек $\{T_1P_1^p;T^i\cdot T_1P_1^p\}_{i=1}^{\infty}$.

Если траектория L является α - предельной, но не ω -предельной, то она будет высекать Π^- последовательность точек

В случае, когда траектория L является и ω - предельной и α - предельной, то она высекает в Π^- конечный набор точек $\{P_1^i\}_{i=-\nu}^{p}$. До бесконечной в обе стороны последовательности точек этот набор продолжается аналогично.

И, наконец, если L не является ни α-предельной, ни ω-предельной , то она будет высекать бесконечную последовательность точек $\{P_1^i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ в окрестности Π^-. Вставляя, как и выше, вместо каждой точки P_1^k

последовательности блок из точек $\left\{T_1 \cdot P_1^k ; T^i \cdot T_1 P_1^k\right\}_{i=1}^{i_k}$, получим искомую последовательность. Нетрудно показать также, что если на траектории указать начальную точку, то это равносильно фиксированию в последовательности $\left\{P_1^i\right\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ начальной точки. Множество точек $\bigcup\limits_{L \in \Omega_u} \left\{P_k(L)\right\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, рассматриваемое как топологическое пространство с относительной топологией, обозначим через N. Отображение N в себя по траекториям из множества N обозначим через T.

Лемма 1.12. *Существует окрестность* $U(O \bigcup \Gamma_0)$ *и гомеоморфизм* $\aleph : \Omega \to N$ *такие, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \\ \aleph \downarrow & & \downarrow \aleph \\ N & \xrightarrow{T(N)} & N \end{array} \tag{1.24}$$

коммутативна.

Доказательство. Неподвижной точке $\overline{\omega}^* = \left(\ldots; a_0^0; a_0^0; \ldots\right)$ гомеоморфизма сдвига σ поставим в соответствие последовательность точек $\left\{P_1^i\right\}_{i=-\infty}^{+\infty}$, где каждая $P_i = O(0,0)$. Пусть теперь $\overline{\omega}$ - произвольная допустимая последовательность Т.Ц.М. (G, Ω, σ). По лемме 1.10 множество точек Т.Ц.М. (G, Ω, σ) без неподвижной точки $\overline{\omega}^*$ находится во взаимно-однозначном соответствии со множеством всех инвариантных неустойчивых слоев, полуслоев и отрезков слоев. По лемме 1.11 и замечанию 1 множество неустойчивых слоев, полуслоев и отрезков слоев, в свою очередь находится во взаимно-однозначном соответствии с последовательностями точек $\left\{p_1^i\right\}$, которые продолжаются единственным образом до бесконечных последовательностей точек из N.По построению множества N нетрудно получить, что если $\overline{\omega}$ соответствует точка $P_0(L_0)$, то $\sigma^k \overline{\omega}$ соответствует точка $P_k(L) = T_\Omega^k P_0(L_0)$. Если теперь обозначить отображение $\Omega \to N$, ставящее в соответствие $\overline{\omega}$ точку $P_k(L)$ из множества N , через $\aleph$, то из построения $\aleph$ следует коммутативность диаграммы (1.24), т.е. $\aleph\sigma = T_\Omega \aleph$.

Для доказательства леммы осталось показать непрерывность $\aleph$, т.е. нужно показать, что для любого $\delta > 0$ существует такое $\rho > 0$, что как только $d(\overline{\omega}(1), \overline{\omega}(2)) < \rho$, то $\overline{d}(\overline{\omega}(1), \overline{\omega}(2)) \le \delta$, где $\overline{d}$ - метрика в N. Действительно, пусть $\overline{\omega}(1)$ и $\overline{\omega}(2)$- две достаточно близкие последовательности Ω, что определяется числом к совпадающих в последовательностях $\overline{\omega}(1)$ и $\overline{\omega}(2)$ символов влево и вправо от фиксированного начального символа. Пусть $\overline{\omega}(1) = \{...;\omega^0(1);\omega^1(1);...\}$, $\overline{\omega}(2) = \{...;\omega^{-1}(2);\omega^0(2);\omega^1(2);...\}$ и блоки $[\omega^{-k}(i);\omega^{-k+1}(i);...;\omega^0(i);...\omega^k(i)]$ совпадают, причем, чем больше $k \in Z$, тем ближе $\overline{\omega}(1)$ и $\overline{\omega}(2)$. В доказательстве леммы 1.11 каждой точке Т.Ц.М. мы поставили в соответствие либо бесконечную в обе стороны после-довательность пространств и операторов, либо бесконечную только в одну сторону. В случае бесконечной в обе стороны последовательности отображения, соответствующие символам $\omega^{-k}(i);\omega^{-k+1}(i);...;\omega^0(i);...\omega^k(i)$, и пространства, в которых они действуют совпадают. В силу сжимаемости операторов $\Im_{10}^{ij}$ это означает, что в соответствующих $\overline{\omega}(1)$ и $\overline{\omega}(2)$ инвариантных неустойчивых слоях $\{..h_1^{-1}(1);h_1^0(1);...\}$ и $\{..h_1^{-1}(2);h_1^0(2);...\}$ кри-вая $h_1^0(1)$ близка к кривой $h_1^0(2)$. Действительно, пусть кривая $h_1^{-k}(i) \in \mathrm{H}_1^{j_{-k}}$,а $h_1^0(i) \in \mathrm{H}_1^{j_0}$, $i = 1,2$. Тогда в силу оценок (1.22), (1.23) образ $\mathrm{H}_1^{j_{-k}}(L_1)$ при сквозном отображении, определяемом блоком $[\omega^{-k};\omega^{-k+1};...;\omega^0]$ имеет в $H_1^{j_0}(L_1)$ размеры не более $c_6 \cdot \lambda^{\overline{k}} \cdot q_1$, где $\lambda < 1$, а $q_1 < 1$ - общая для всех $\Im_{10}^{ij}$ константа сжатия. Применяя теперь рассуждения леммы (1.11), аналогично получим, что координата y_1 точки P_1^1 на $h_1^0(1)$ близка к координате y_2 точки P_1^2 на $h_1^0(2)$, причем чем больше число k, тем ближе y_1 и y_2.

В случае бесконечной влево последовательности пространств и операторов все показывается аналогично. Для бесконечной вправо или конечной последовательности, не ограничивая общности, можно считать, что она имеет вид $\left[H_1^{s_0}\cdot\xrightarrow{\Im^{s_0 s_1}}H_1^{1_1}(L_1)\longrightarrow\ldots\right]$, но тогда в силу конструктивного построения (+) - полуслоя и отрезка слоя в лемме 1.11 кривые $h_1^0(1)$ и $h_1^0(2)$ просто совпадают. В силу леммы 1.12 (+) - полуслою (отрезку слоя) ставится в соответствие последовательность точек $\left[P_1^0;P_1^1;\ldots\right)$ $\left(\left[P_1^0;P_1^1;\ldots;P_1^p\right]\right)$, причем аналогичными рассуждениями получаем, что точки $P_1^0(i)$, $P_1^0\in h_1^0$ близки. Применяя теперь теорему о непрерывной зависимости от начальных условий, получаем доказательство леммы. □

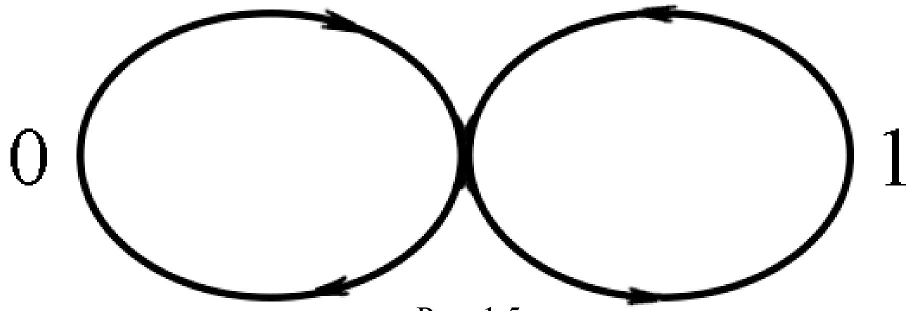


Рис. 1.5

Т.Ц.М. $\left(G^*,\Omega^*,\sigma^*\right)$, соответствующая графу G^*, представляет собой топологическую схему Бернулли из двух символов. Таким образом, теорема 1.1 доказана.

Глава 2. О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с квадратичным гомоклиническим касанием к негрубой неподвижной точке

В этой главе также рассматриваются двумерные диффеоморфизмы с гомоклиническими траекториями к негрубым неподвижным точкам. Однако в отличие от главы 1 предполагается, что исходная гомоклиническая траектория является нетрансверсальной – квадратичное гомоклиническое касание. Кроме того, здесь не решается «задача полного описания», как в главе 1, а рассматривается т.н. ограниченная бифуркационная задача – исследуются бифуркации однообходных периодических траекторий в рамках однопараметрических семейств специфического типа. Такое семейство при изменении параметра расщепляет исходное квадратичное гомоклиническое касание общим образом, но сохраняет тип и вырождение неподвижной точки. Основной результат главы – это теорема 2.1 о существовании бесконечного каскада бифуркаций при изменении параметра, приводящих к возникновению асимптотически устойчивых однообходных периодических траекторий (периодиче6ских стоков), последовательных периодов $\bar{k}$, $\bar{k}+1, \ldots$, начиная с некоторого достаточно большого $\bar{k}$. Главным моментом в доказательстве теоремы 2.1 является лемма 2.1 (Рескейлинг лемма), в которой показывется, что отображение первого возвращения $T_{\mathrm{k}} = T_1\ T_{\mathrm{k}} : B_k^0 \rightarrow B_k^0$ с помощью линейных замен координат и параметра (перемасштабирований) приводится к отображению, асимптотически близкому к одномерному отображению параболы $\bar{Y} = M - Y^2$, в котором рескейлинг-параметр M а также координата Y могут принимать произвольные конечные значения. Бифуркации в отображении параболы хорошо известны, и по лемме 2.1, все они (во всяком случае для периодических траекторий) могут быть перенесены и на искомые отображения первого возвращения $T_{\mathrm{k}} = T_1\ T_{\mathrm{k}} : B_k^0 \rightarrow B_k^0$ для всех достаточно больших k.

2.1 Постановка задачи

Как и в первой главе здесь рассматривается C^r - гладкий диффеоморфизм f_0 $(r \geq n+1)$, имеющий $(n-1)$-кратно вырожденную, $n \geq 2$, неподвижную точку O, которая имеет либо тип седло-узла при n четном, либо тип сложного седла при n нечетном. Соответственно, мы предполагаем, что здесь выполняется условие A) из главы 1. Однако теперь мы предполагаем, что исходный диффеоморфизм f_0 удовлетворяет (вместо условия B)) следующему условию.

C) Инвариантные многообразия $W^{cu}(O)$ и $W^{ss}(O)$ касаются квадратично в точках некоторой гомоклинической траектории Γ_0, рис. 2.1.

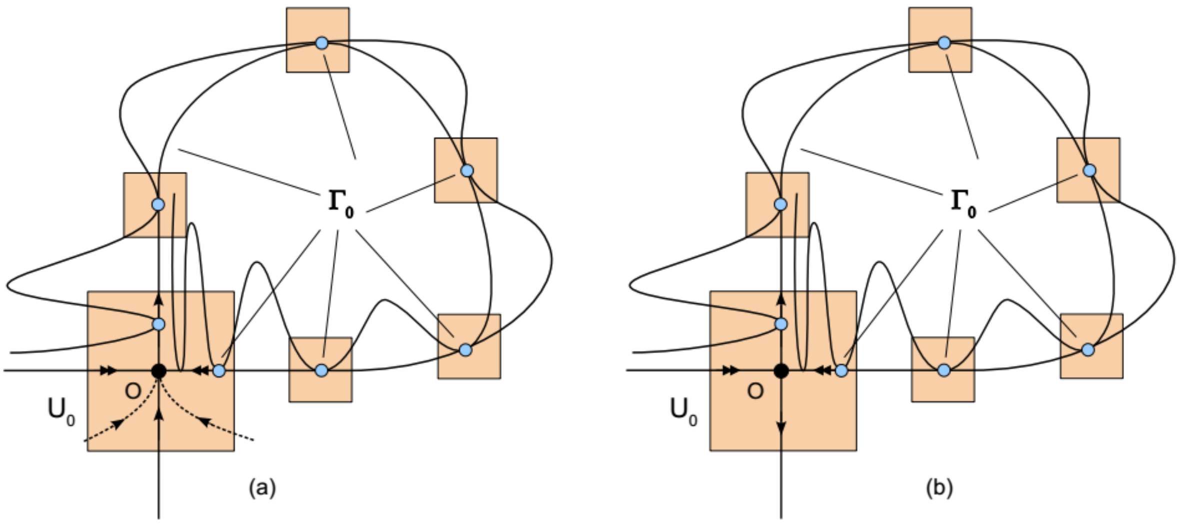


Рис. 2.1. Двумерные диффеоморфизмы с гомоклиническим касанием к негрубой неподвижной точке типа (a) седло-узел; (b) сложное седло.

Рассматривается U_0 – малая фиксированная окрестность неподвижной точки O.

Пусть $M \in W^{ss} \cap U_0$ – некоторая гомоклиническая точка траектории Γ_0 и $\Pi^+ \subset U_0$ – ее достаточно малая окрестность.

Выберем в U_0 две точки траектории Γ_0: $M^+ \in W^{ss}(O)$ и $M^- \in W^{cu}(O)$. Пусть Π^+ и Π^- – достаточно малые, диаметра ε, окрестности точек M^+ и M^- соответственно. Очевидно, существует натуральное q такое, что

$M^+ = f_0^q(M^-)$. В U_0 будут определены два отображения по траекториям диффеоморфизма f_0: *локальное* $T = f_0\big|_{U_0}$ и *глобальное* $T_1 = f_0 : \Pi^- \to \Pi^+$.

Настоящая глава посвящена изучению основных бифуркаций в специальных однопараметрических семействах f_μ двумерных диффеоморфизмов, для которых выполняется следующее условие:

D) Семейство f_μ при всех достаточно малых μ имеет $(n-1)$-кратно вырожденную неподвижную точку O, многообразия $W^{cu}(O)$ и $W^{ss}(O)$ которой касаются квадратично при $\mu=0$ и расщепляются общим образом при варьировании μ. Мы предполагаем также, что локальное отображение T вообще не зависит от μ.

В силу условия D) и согласно (1.1) локальное отображение T будет по-прежнему иметь «треугольный вид»:

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda x + f(x,y)x \\ \bar{y} = y + y^n + O(y^{n+1}), \end{cases}$$

В координатах (x,y) неподвижная точка O лежит в начале координат и ее инвариантные многообразия W^{ss} и W^{cu} распрямлены: $W^{cu}:\{x=0\}$, $W^{ss}:\{y=0\}$. $f(x,y)$ гладкая функция переменных x и y, непрерывная вместе с производными, причем $f(0,0)=0$ и $0<\lambda<1$.

Глобальное отображение $T_1: \Pi^- \to \Pi^+$ при всех достаточно малых μ может быть записано в следующем виде:

$$\begin{cases} \bar{x} - x^+ = F(x, y - y^-, \mu) \\ \bar{y} = G(x, y - y^-, \mu) \end{cases}, \tag{2.1}$$

где F и G определены на Π^- и $F(0,0,0) = G(0,0,0) = 0$. Условие C) квадратичности гомоклинического касания означает теперь, что

$$G_y(0,0,0) = 0, G_{yy}(0,0,0) \neq 0.$$

Будем считать, что гомоклинические точки M^+ и M^- имеют координаты $M^+(x^+, 0)$ и $M^-(0, y^-)$, где $x^+ > 0$ и $y^- > 0$. Тогда отображение $T_1 : \Pi^- \to \Pi^+$ может быть записано в виде:

$$
\begin{aligned}
&\bar{x} - x^+ = ax + b(y - y^-) + O(x^2 + (y - y^-)^2), \\
&\bar{y} = y^+(\mu) + cx + d(y - y^-)^2 + O(x^2 + |x(y_1 - y^-)| + |y - y^-|^3)
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

где $y^+(0) = 0$, и коэффициенты a, b, c, d, гладко зависят от μ.

Условие D) того, что исходное гомоклиническое касание расщепляется в семействе f_μ общим образом, означает, что параметр расщепления $y^+(\mu)$ является строго монотонной при μ=0 функцией, т.е. $dy^+(0)/d\mu \neq 0$. Тогда мы можем обозначить $y^+(\mu)$ за новый параметр $\mu_1 = y^+(\mu)$

Так как T_1 – диффеоморфизм, то $bc \neq 0$. Квадратичность гомоклинического касания означает, что $d \neq 0$. Заметим при этом, что $d > 0$ отвечает случаю гомоклинического касания «сверху», а $d < 0$ – случаю касания «снизу», рис. 2.2.

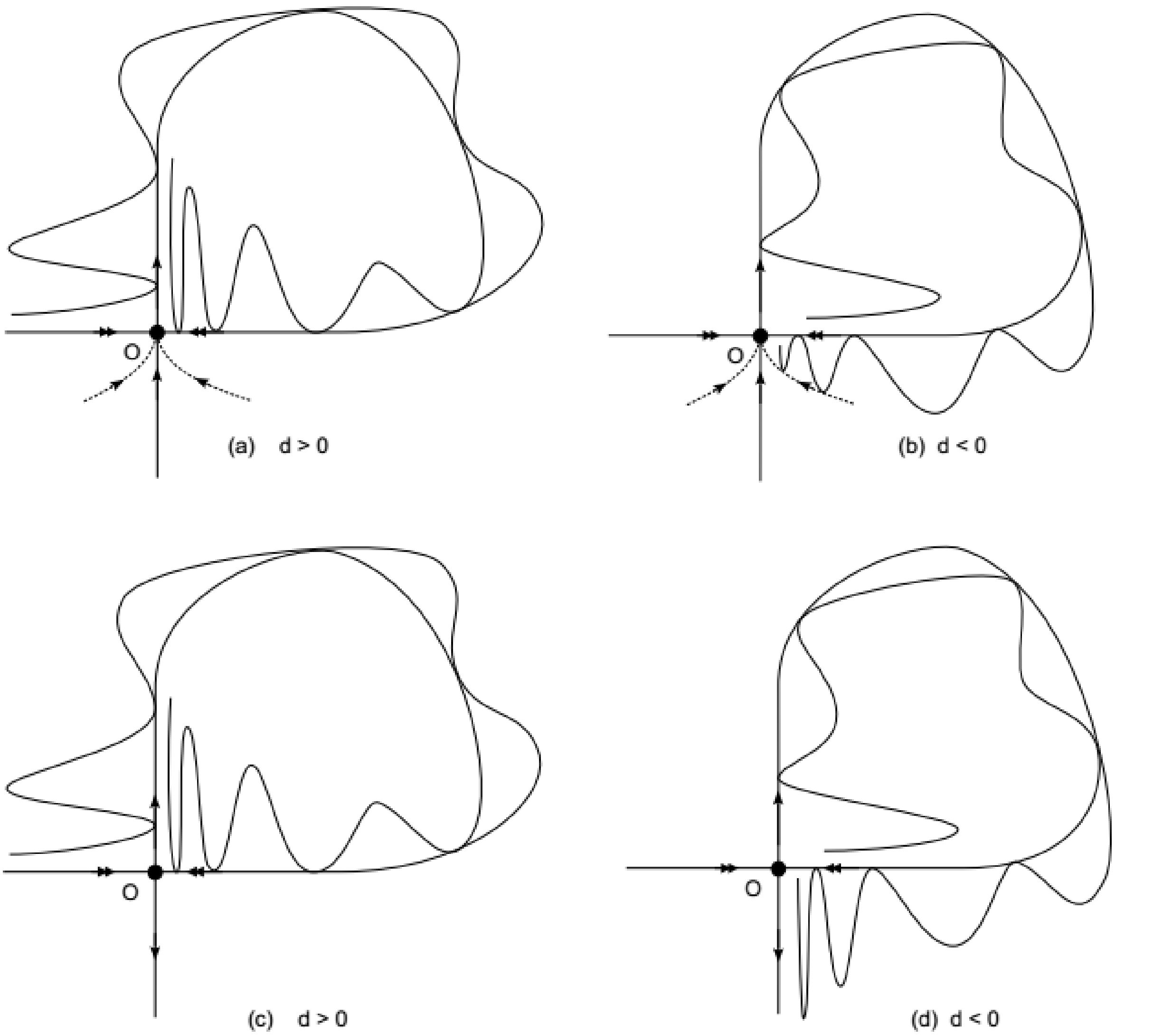


Рис. 2.2. Примеры квадратичных гомоклинических касаний: в случае седло-узла – (a) касание «сверху», (b) касание «снизу»; и в случае сложного седла – (c) касание «сверху», (d) касание «снизу».

По построению, любая *однообходная* периодическая траектория, целиком лежащая в U_0, должна иметь ровно по одной точке пересечения с окрестностями Π^+ и Π^-. Точку такой траектории на Π^+ можно рассматривать как неподвижную точку соответствующего отображения первого возвращения $T_k = T_1 \cdot T^k : \Pi^+ \to \Pi^- \to \Pi^+$, где T^k действует из Π^+ в Π^-. Из рис. 2.3 можно понять, что геометрически отображение T^k представляет собой отображение подковы (или, в одномерном приближении, отображение параболы, так его пробраз, полоска B_k^0, и в особенности образ, «подкова» $T_1(B_k^1)$, являются очень узкими). При этом, в случае $d > 0$ отображение T_k при $\mu = 0$ является гиперболическим отображением с подковой Смейла, и при увеличении μ в нем происходят бифуркации разрушения подковы. В случае $d < 0$ у отображения T_k при μ = 0 вообще нет неподвижных точек, и здесь при увеличении μ в нем происходят бифуркации развития подковы. В следующем параграфе мы изучим некоторые из этих бифуркаций, акцентируя внимание на бифуркациях, связанных с возникновением динамики у отображения T_k , когда у него появляются неподвижные точки.

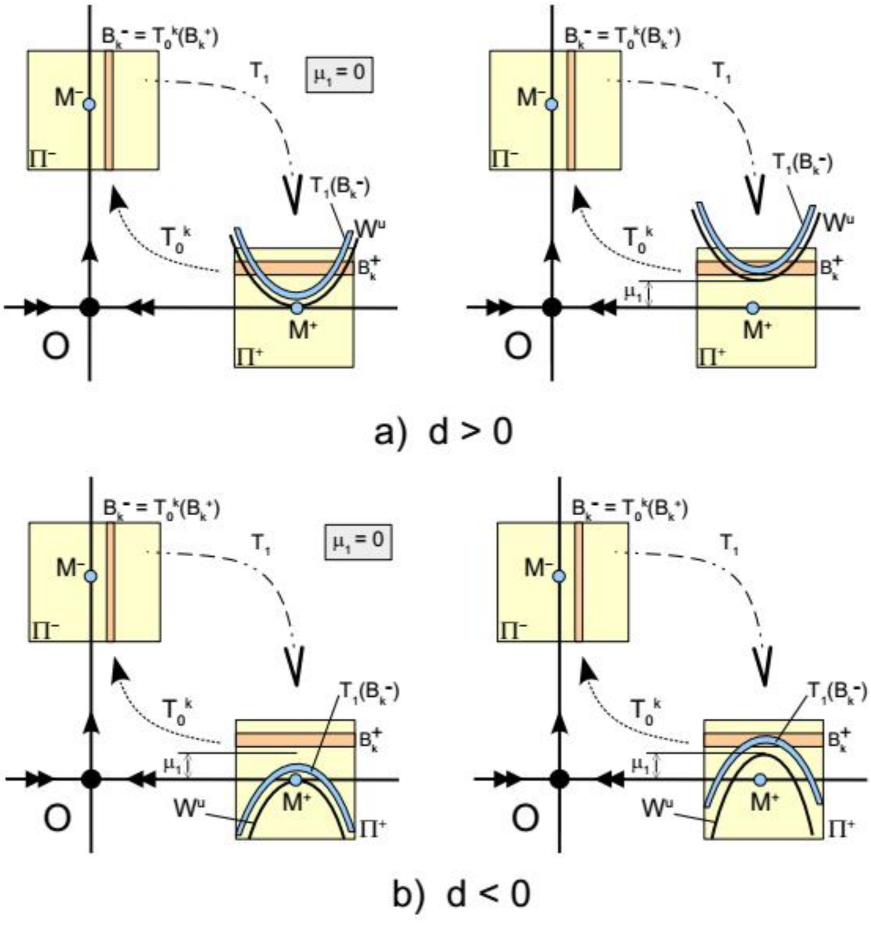


Рис. 2.3. Геометрия отображений первого возвращения $T_k = T_1 \cdot T^k$ в случаях (a) $d > 0$ – касание «сверху», (b) $d < 0$ – касание «снизу».

Основной результат главы 2 – это следующая

Теорема 2.1.

1) *На прямой параметров μ в любой достаточно малой окрестности начала координат существует счетное множество непересекающихся областей Δ_k таких, что при $\mu \in \Delta_k$ диффеоморфизм f_μ имеет асимптотически устойчивую однообходную периодическую траекторию.*
2) *Границами областей Δ_k являются бифуркационные кривые L_k^+ и L_k^-, отвечающие бифуркациям коразмерности один, седло-узловой и удвоения периода соответственно.*
3) *При $k \to +\infty$ области Δ_k накапливаются к точке 0.*

В следующем §2.2 мы докажем эту теорему, используя технику рескейлинга для построения нормальных форм отображений T_k первого возвращения для всех достаточно больших k.

2.2 Отображения первого возвращения и их бифуркации в семействе f_μ

Для исследования отображения первого возвращения $T_k = T_1 T^k : B_k^0 \to \Pi^+$, используем рескейлинг – метод [18],[2]. Суть этого метода заключается в том, чтобы с помощью гладких замен координат и параметров (перенормировок) привести отображение к некоторому стандартному виду, в котором малые члены уже не будут влиять на динамику. Следующая лемма формализует этот подход для нашего случая.

Лемма 2.1. ***(Рескейлинг-лемма)*** *Пусть f_μ – семейство диффеоморфизмов, определенное выше. С помощью гладких замен координат $(x_0, y_k) \to (X, Y)$ и параметра, отображение первого возвращения T_k может быть приведено к следующему виду:*

$$\bar{X} = Y$$

$$\bar{Y} = M - Y^2 + o(1)_{k\to\infty} \tag{2.3}$$

где X,Y,M *определены в шаре* $\|X,Y,M\| < L_k$, *где* $L_k \to +\infty$ *при* $k \to \infty$. *Через* $o(1)$ *обозначены некоторые функции переменных* (X,Y,M), *которые стремятся к нулю при* $k \to \infty$ *вместе со своими производными (до порядка* $(r-2)$*), и*

$$M = -\left(\mu_1 - \frac{m}{\sqrt[n-1]{k}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right)\right)\frac{d}{A_1^2}\sqrt[n-1]{k^{2n}}\,, \tag{2.4}$$

где m, A_1 *- некоторые отличные от нуля константы (см. формулу (2.5)).*

Доказательство. Используя лемму 1.2 главы 1, отображение $T_0 = T^k : (x_0, y_0) \to (x_k, y_k)$ можно записать перекрестном виде:

$$y_0 = \frac{y_k}{\sqrt[n-1]{1 + (n-1)\cdot\gamma(y_k)\cdot y_k^{n-1}\cdot k}}\,, \tag{2.5}$$

$$x_k = \lambda^k x_0 + x_0 h(x_0, y_k)\,.$$

Используя разложение первого уравнения из (2.3) по формуле Тейлора в окрестности точки y^-, несложно получить

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt[n-1]{(n-1)\cdot\gamma(y^-)\cdot k}} + \frac{A\left(y_k - y^-\right)}{\sqrt[n-1]{\left((n-1)\cdot\gamma(y^-)\left(y^-\right)^{n-1}\cdot k\right)^n}} + \,, \tag{2.6}$$
$$+o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right) + o\left(\frac{\left(y_k - y^-\right)}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right)$$

где $\gamma\left(y_k\right) = \gamma\left(y^-\right) + \frac{C_k}{y_k^{n-1}k}\left(y_k - y^-\right)$, $A \in \left(\sqrt[n-1]{\frac{1}{16}}; \sqrt[n-1]{9}\right)$

Обозначим в (2.3) и (2.4) $y_1 = y_k$, $x_1 = x_k$, тогда они запишутся в виде:

$$x_1 = \lambda^k x_0 + x_0 h(x_0, y_1) \tag{2.7}$$

$$y_0 = \frac{m}{\sqrt[n-1]{k}} + \frac{A_1\left(y_1 - y^-\right)}{\sqrt[n-1]{k^n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right) + o\left(\frac{\left(y_1 - y^-\right)}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right),$$

$$m=\frac{1}{\sqrt[n-1]{(n-1)\cdot\gamma(y^-)}};A_1=\frac{A}{\sqrt[n-1]{\left((n-1)\cdot\gamma(y^-)\left(y^-\right)^{n-1}\right)^n}}$$

Так же отображение $T_1:\Pi^-\to\Pi^+$ может быть записано в виде:

$$\bar{x}_0-x^+=ax_1+b(y_1-y^-)+O(x_1^2+|x_1(y_1-y^-)|+(y_1-y^-)^2)$$

(2.7)

$$\bar{y}_0=y^+(\mu)+cx_1+d(y_1-y^-)^2+O(x_1^2+|x_1(y_1-y^-)|+|y_1-y^-|^3)$$

В силу (2.6) и (2.7) мы можем записать отображение первого возвращения T_k в виде:

$$\bar{x}_0-x^+=a\left(\lambda^k+h(x_0,y_1)\right)x_0+b(y-y^-)+O(\left(\lambda^k+h(x_0,y_1)\right)^2{x_0}^2$$
$$+\left(\lambda^k+h(x_0,y_1)\right)x_0|y_1-y^-|+(y_1-y^-)^2),$$

$$\frac{m}{\sqrt[n-1]{k}}+\frac{A_1(\bar{y}-y^-)}{\sqrt[n-1]{k^n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^{n-1}}}\right)+o\left(\frac{(\bar{y}-y^-)}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right)=$$

$=\mu_1+c(\lambda^k+h(x_0,y_1))x_0+d(y-y^-)^2+O((\lambda^k+h(x_0,y_1))^2{x_0}^2+(\lambda^k+h(x_0,y_1))x_0|(y_1-y^-)|+(y_1-y^-)^3)$

Введем новые координаты $x=x_0-x^+$, $y=y_1-y^-$, так чтобы обнулить в первом уравнении свободный член и втором уравнении – линейный член. Тогда отображение T_k запишется в виде:

$$\bar{x}=a(\lambda^k+h(x_0,y_1))(x_0+x^+)+by+O((\lambda^k+h(x_0,y_1))^2(x_0+x^+)^2$$
$$+(\lambda^k+h(x_0,y_1))(x_0+x^+)|y|+y^2)\cdot$$

$$\frac{m}{\sqrt[n-1]{k}}+\frac{A_1\bar{y}}{\sqrt[n-1]{k^n}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^{n-1}}}\right)+o\left(\frac{\bar{y}}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right)=$$
$$=\mu_1+c(\lambda^k+h(x_0,y_1))(x_0+x^+)+dy^2+$$
$$+O((\lambda^k+h(x_0,y_1))^2(x_0+x^+)^2+(\lambda^k+h(x_0,y_1))(x_0+x^+)|y|+y^3)$$

Обозначим $M_1=\mu_1-\frac{m}{\sqrt[n-1]{k}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^{n-1}}}\right)$.

Теперь сделаем перенормировку (рескейлинг) координат следующим образом $x=-b\frac{A_1}{d^n\sqrt[n-1]{k^n}}X,\ y=-\frac{A_1}{d^n\sqrt[n-1]{k^n}}Y$ и условие леммы 1.2, что

$h(x_0,y_k)=O\left(\lambda_1^k\right)$, где $0<\lambda<\lambda_1<1$

$$\bar{X}=\frac{daO(\lambda_1^k)}{-b}X+\frac{daO(\lambda_1^k)^n\sqrt[n-1]{k^n}x^+}{-b}+Y+O(\lambda_1^{2k}\cdot\sqrt[n-1]{k^{2n}})+O(\lambda_1^{2k}X^2)+O(\lambda_1^kXY)+O(Y^2)$$

$$\bar{Y}+O(\bar{Y}^2)=M+\frac{cbO(\lambda_1^k)^n\sqrt[n-1]{k^n}}{A}X-Y^2+O(\lambda_1^{2k}\cdot X^2)+O(\lambda_1^k\cdot\sqrt[n-1]{k^n}\cdot XY)+O(\frac{Y}{\sqrt[n-1]{k^n}}^3),$$

где

$$M=-\left(\mu_1-\frac{m}{\sqrt[n-1]{k}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right)\right)\frac{d^2}{A^2}\sqrt[n-1]{k^{2n}}$$

Это завершает доказательство леммы. □

Лемма 2.1 показывает, что исследование бифуркаций отображений первого возвращения T_k при всех достаточно больших k сводится, по существу, к исследованию стандартного отображения параболы:

$$\bar{Y}=M-Y^2, \tag{2.8}$$

бифуркации которого хорошо известны. Так, при $M\in(-1/4,3/4)$ отображение (2.7) имеет устойчивую неподвижную точку, которая рождается в результате седло-узловой бифуркации при $M=-1/4$ и претерпевает бифуркацию удвоения периода при $M=3/4$.

Теперь, используя формулу (2.4), связывающие значения рескейлинг параметра M и исходного параметра μ_1, мы находим бифуркационные границы $\mu_1=\mu_k^{sn}$ и $\mu_1=\mu_k^{pd}$, отвечающие соответственно седло-узловой бифуркации и бифуркации удвоения периода в отображении T_k:

$$-1/4=-\left(\mu_1-\frac{m}{\sqrt[n-1]{k}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right)\right)\frac{d}{A_1^2}\sqrt[n-1]{k^{2n}}$$

$$3/4=-\left(\mu_1-\frac{m}{\sqrt[n-1]{k}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right)\right)\frac{d}{A_1^2}\sqrt[n-1]{k^{2n}}$$

Обозначим величину $-\frac{m}{\sqrt[n-1]{k}}+o\left(\frac{1}{\sqrt[n-1]{k^n}}\right)=d_k$, тогда

$$\mu_{1k}^{sn}=d_k+\frac{A_1^2}{4\cdot d\cdot\sqrt[n-1]{k^{2n}}} \tag{2.9}$$

$$\mu_{1k}^{pd}=d_k-\frac{3A_1^2}{4\cdot d\cdot\sqrt[n-1]{k^{2n}}}$$

Заметим также, что $\Delta_k=\left(\mu_{1k}^{pd},\mu_{1k}^{sn}\right)$в случае d < 0 (гомоклиническое касание «снизу») $\Delta_k=\left(\mu_{1k}^{pd},\mu_{1k}^{sn}\right)$ в случае d > 0 (гомоклиническое касание «сверху»). Это отвечает тому, что в отображении T_k при возрастании значений параметра расщепления μ_1 от нуля в случае d < 0 происходят бифуркации развития подковы Смейла, а в случае d > 0 – бифуркации ее разрушения.

Из формулы (2.9) вытекает также, что ширина интервалов Δ_k = (μ_{1k}^{sn} , μ_{1k}^{pd}) есть величина порядка $\sqrt[n-1]{k^{-2n}}$, и они центрированы около точек с координатами $\mu_1 \sim \frac{1}{\sqrt[n-1]{k}}$. Это влечет что интервалы Δ_k при разных k не пересекаются. Это завершает доказательство теоремы 2.1.

Глава 3. О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием к седло-узловой неподвижной точке

3.1 Введение

Рассмотренный в данной главе случай глобальной бифуркации коразмерности 2 – квадратичное гомоклиническое касание к неподвижной точки ттипа невырожденный седло-узел (см. рис. 3.1a), естественным образом связан с двумя другими хорошо известными задачами исследования глобальных бифуркаций коразмерности один. Первая из них, впервые рассмотренная Н.К. Гавриловым и Л.П Шильниковым в работе [4], относится к исследованию бифуркаций двумерных диффеоморфизмов с квадратичным гомоклиническим касанием к седловой неподвижной точке (см. рис 3.1 b) с мультипликаторами λ и γ такими, что $0<|\lambda|<1<|\gamma|$ и седловой величиной $|\lambda\gamma|$ отлична от 1. В работе [4] были, фактически, заложены основы математической теории гомоклинического хаоса.

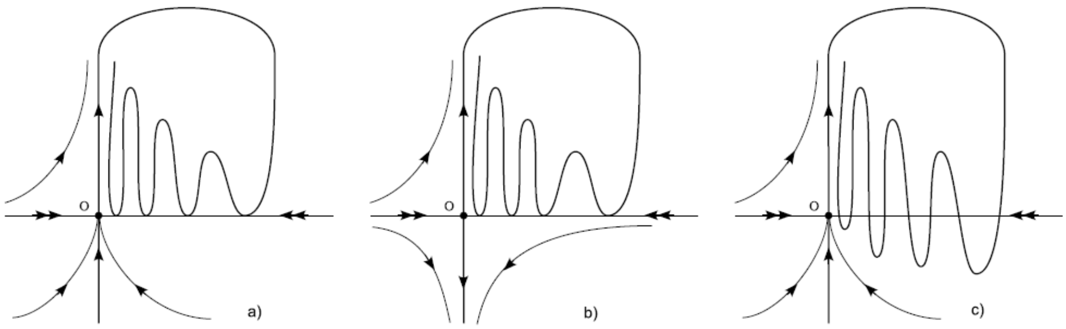


Рисунок 3.1.а) седло-узел с гомоклиническим касанием, b) седло с гомоклиническим касанием, с) седло-узел с трансверсальными гомоклиническими траекториями.

Вторая задача – исследование динамики и бифуркаций диффеоморфизмов с трансверсальной гомоклинической траекторией к седло-узловой неподвижной точке (см. рис 1 с.), была рассмотрена В.И.Лукьяновым и Л.П.Шильниковым в работе [5]. В ней были получены условия возникновения хаотической динамики сразу после исчезновения седло-узла. Эта задача имеет важное значение для теории динамического хаоса. Фактически, в работе [5] было дано математическое обоснование такого хорошо известного механизма возникновения хаоса как «перемежаемость».

Основные результаты настоящей работы, Теоремы 1 и 2, можно рассматривать как обобщение на случай гомоклинического касания к седло-узлу известных теорем о «каскаде устойчивых периодических траекторий» из работ [4,5]. Можно сказать, что наш случай является «точкой пересечения» случаев Гаврилова-Шильникова и Лукьянова-Шильникова, чем и объясняется наш интерес к этой задаче.

Заметим, что исследование бифуркаций, связанных с исчезновением седло-узла с гомоклиническими траекториями, имеет также важное значение для приложений. В частности, такие бифуркации лежат в основе некоторых сценариев возникновения странных аттракторов типа «тор-хаос». Эти сценарии описывают бифуркационные явления, которые происходят при переходе от режима синхронизации к хаотическому режиму, наблюдаемому во многих физических экспериментах. Математические основы соответствующей теории были заложены в известной работе В.С.Афраймовича и Л.П.Шильникова [6] (в связи с этим см. также работы [7,8]).

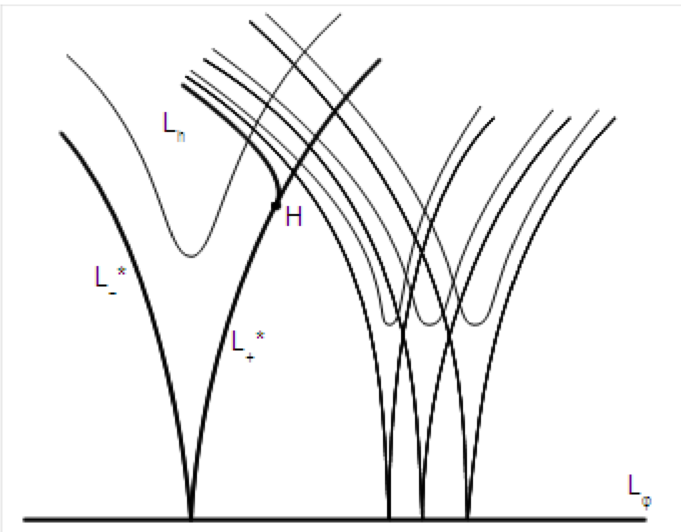


Рисунок 3.2: Зоны синхронизации (языки Арнольда) на плоскости параметров. Здесь точка H отвечает коразмерности 2 случаю резонансного седло-узла с гомоклиническим касанием.

В этих сценариях бифуркация коразмерности два, гомоклинического касания к седло-узловой периодической точке, играет важную роль. На рис.3.2 показан фрагмент бифуркационной диаграммы в окрестности линии L_ϕ, отвечающей существованию неподвижной точки с мультипликаторами $e^{\pm i\omega}, 0 < \omega < \pi$. Переходу параметров через L_ϕ отвечает бифуркация Неймарка-Сакера, в результате которой устойчивая неподвижная точка становится неустойчивой (типа фокус), а в ее окрестности рождается замкнутая устойчивая инвариантная кривая. Хорошо известно [9], что из каждой резонансной точки на L_φ (отвечающей значениям $\omega = 2\pi p/q$, где p и q

– взаимно простые натуральные числа) выходит пара бифуркационных кривых L_+^* и L_-^*, соответствующих тому, что на инвариантной кривой появляется седло-узловая периодическая точка (периода q). Область значений параметров между L_+^* и L_-^* (см.рис.2) называется зоной синхронизации, или на математическом жаргоне – «языком Арнольда». Внутри «языка» седло-узел распадается на седло и узел, а вне «языка» эти периодические точки исчезают. При изменении значений параметров от линии L_φ вдоль L^*_+ инвариантная кривая сначала будет гладкой, рис. 3а, а затем она теряет гладкость (становится «гофрированной»), рис3.3b. Более того, на L_+^* (и L_-^*) существует точка H, отвечающая тому, что неустойчивое и неведущее (сильно устойчивое) инвариантные многообразия седло-узла касаются друг друга, рис 3с. В этот момент замкнутой инвариантной кривой уже не существует. В рассматриваемой зоне существует также бифуркационная кривая L_h, выходящая из точки H, значениям параметров на которой отвечает появление гомоклинического касания к седловой периодической точке. Это означает, в соответствии с [4], что в окрестности линии L_h наблюдается бесконечный каскад бифуркаций, связанных с рождением устойчивых периодических траекторий.

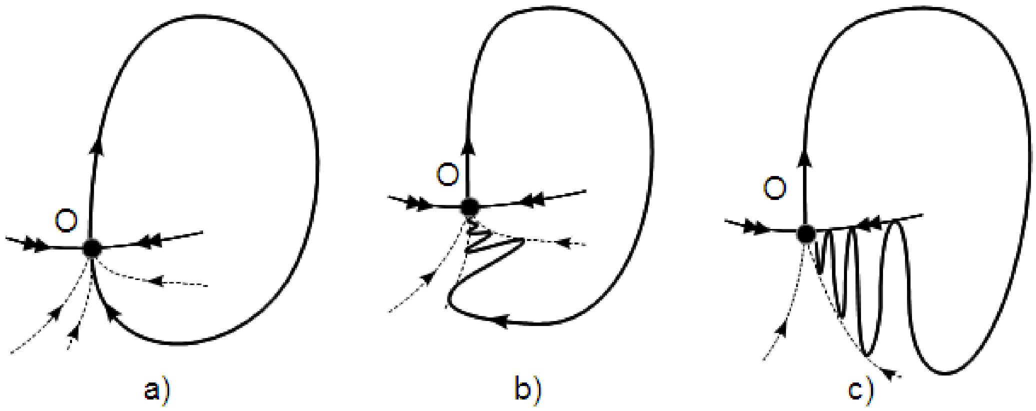


Рис. 3.3 a) гладкая; b) негладкая замкнутая инвариантная кривая;
c) появление гомоклинического касания.

Заметим, что диффеоморфизмы с гомоклиническими касаниями к седло-узлу могут естественным образом также возникать при периодических неавтономных возмущениях автономных систем. Так, например, в работе [10] был рассмотрен двумерный поток, имеющий гомоклиническую петлю Γ состояния равновесия типа седло-узел, которая входит в равновесие по его неведущему многообразию ($\Gamma \subset W^{ss}$). При малых периодических возмущениях такой системы у соответствующего отображения Пуанкаре могут возникать гомоклинические касания к неподвижной точке типа седло-узел [11].

Динамические свойства систем с гомоклинической траекторией к седло-узлу а также и к негиперболическому седлу изучались в работах В.И.Лукьянова, см., например, [12], [13], в которых с помощью надстроек над схемой Бернулли из трех символов было дано описание некоторого подмножества траекторий, целиком лежащих в малой окрестности гомоклинической структуры. В настоящей работе мы продолжаем эти исследования, и наша основная цель – это изучение основных бифуркаций в системах с негрубыми гомоклиническими траекториями к седло-узловым неподвижным точкам.

3.2 Постановка задачи и основные результаты

В этой главе рассматривается C^r- гладкий диффеоморфизм f_0 ($r \geq 4$), имеющий неподвижную точку типа седло-узел и гомоклиническую к ней траекторию Γ_0 (см. рис 1а). Предполагается, что других вырождений f_0 не имеет, т.е. f_0 удовлетворяет условиям A) и B), которые мы сформулируем ниже.

A) f_0 имеет неподвижную точку O типа село-узел с мультипликаторами $\lambda_1 = \lambda$, где $0 < \lambda < 1$ и $\lambda_2 = 1$, и первая ляпуновская величина l_1 седло-узла не равна нулю;

Пусть U_0 – это малая фиксированная окрестность точки O. Тогда, как хорошо известно, через точку O проходит неведущее (сильно устойчивое)

C^r-гладкое инвариантное многообразие W^{ss}, касающееся собственного направления, отвечающего мультипликатору λ. Это многообразие представляет собой гладкую кривую, которая разделяет U_0 на две подобласти, узловую U^+ и седловую U^-. Положительная полутраектория диффеоморфизма f_0 любой точки из U^+ стремится к O, касаясь ведущего собственного направления, отвечающего мультипликатору $\lambda_2 = 1$. В седловой области U^- существует C^r-гладкое инвариантное неустойчивое многообразие W^u, состоящее из точек, отрицательные полутраектории которых стремятся к O. Остальные точки из U^- покидают U_0 как при положительных так и отрицательных итерациях f_0. Неустойчивое многообразие W^u выходит из точки O, касаясь ведущего собственного направления (отвечающего мультипликатору $\lambda_2 = 1$).

B) Инвариантные многообразия $W^u(O)$ и $W^{ss}(O)$ имеют квадратичное касание в точках некоторой гомоклинической траектории Γ_0.

Пусть $M \in W^{ss} \cap U_0$ – некоторая гомоклиническая точка траектории Γ_0 и $\Pi^+ \subset U_0$ – ее достаточно малая окрестность. Обозначим через l_u кусок $W^u \cap \Pi^+$ многообразия W^u, который содержит точку M . Мы будем различать два основных случая квадратичного гомоклинического касания: касание «сверху», т.е. когда $l_u \subset U^-$ (рис. 3.4a), и касание «снизу», т.е. когда $l_u \subset U^+$ (рис.3.4b).

Напомним также следующие необходимые факты из теории инвариантных многообразий, [8,10]. Во-первых, у диффеоморфизма f_0 в U_0 существует центральное многообразие $W^C(O)$, которое в данном случае определяется неоднозначно. Каждое такое многообразие представляет собой инвариатную C^r-гладкую кривую, совпадающую с $W^u{}_{loc}(O)$ в области U^-, пересекающую область U^+ и касающуюся в ней ведущего собственного направления. Кроме того, у f_0 в U_0 существует единственное сильно устойчивое инвариантное C^r- гладкое слоение F^{ss}, состоящее из одномерных кривых – слоев, и W^{ss} – это один из его слоев. Каждый слой слоения F^{ss}

пересекает трансверсально любое центральное многообразие $W^C(O)$ точки O, в том числе все слои из U^- трансверсальны W^u.

Диффеоморфизмы, удовлетворяющие условиям **A)** и **B)**, образуют в пространстве C^r-гладких диффеоморфизмов локально связную бифуркационную поверхность B_2 коразмерности два. Поэтому для изучения бифуркаций диффеоморфизма f_0 мы будем рассматривать двухпараметрические семейства f_μ, $\mu=(\mu_1,\mu_2)$, диффеоморфизмов, которые пересекают B_2 трансверсально при $\mu=0$. При этом f_0 является элементом этого семейства при $\mu=0$.

Выберем управляющие параметры μ_1 и μ_2 следующим образом. Параметр μ_1 – это параметр расщепления многообразий W^u и W^{ss} относительно некоторой гомоклинической точки, например, точки M^+, при условии, что седло-узел сохраняется. При этом W^u и W^{ss} будут трансверсально пересекаться в двух точках, близких к M^+, при $\mu_1<0$ в случае касания «сверху» (при $\mu_1>0$ в случае касания «снизу»); соответственно W^u и W^{ss} не пересекаются вблизи M^+, если $\mu_1>0$ (если $\mu_1<0$). Второй параметр μ_2 – это параметр, управляющий бифуркацией седло-узловой неподвижной точки так, что диффеоморфизм f_μ имеет неподвижную точку типа седло-узел при $\mu_2=0$, не имеет в U_0 неподвижных точек (седло-узел исчезает) при $\mu_2>0$, а при $\mu_2<0$ седло-узел распадается на две неподвижные точки (седловую и узловую).

При изменениях параметров (μ_1,μ_2) в семействе f_μ будут происходить бифуркации. В частности, они будут связаны с образованием новых гомоклинических структур.

Теорема 3.1. *В окрестности начала координат $\mu=0$ на плоскости параметров (μ_1,μ_2) существуют две бифуркационные кривые $L_+ : \mu_2=0$ и L_h: $\mu_1=\sqrt{-\mu_2}+O(|\mu_2|)$. При $\mu\in L_+$ каждый диффеоморфизм f_μ имеет* *невырожденную неподвижную точку типа седло-узел, близкую к O; при* $\mu \in L_h$ *у* f_μ *существует негрубая гомоклиническая траектория* Γ_μ, *близкая к* Γ_0, *в точках которой квадратично касаются инвариантные многообразия* $W^u(O_1)$ *и* $W^s(O_1)$ *седловой неподвижной точки* O_1. *Кривые* L_+ *и* L_h *разбивают окрестность начала координат на три области:*

- *В области* ***I*** $(\mu_2 > 0)$ *диффеоморфизм* f_μ *не имеет неподвижных точек;*
- *В областях* ***II*** *и* ***III*** *у* f_μ *существуют две неподвижные точки, седло* O_1 *и узел* O_2. *Если* $\mu \in II$ *то у седла* O_1 *нет гомоклинических траекторий близких к* Γ_μ, *а при* $\mu \in III$ *у седла* O_1 *появляются две грубые гомоклинические траектории, близкие к* Γ_μ.

Иллюстрация к теореме 1 приведена на рис.3.4 .

Рассмотрим достаточно малую фиксированную окрестность $U = U(O \bigcup \Gamma_0)$, которая называется расширенной окрестностью седло-узла O. Эта окрестность состоит из малой окрестности U_0 точки O и конечного набора малых окрестностей V_i, тех точек траектории Γ_0, которые не принадлежат U_0. Периодическую траекторию диффеоморфизма f_μ, целиком лежащую в U, назовем *однообходной*, если она пересекает каждую окрестности V_i ровно в одной точке.

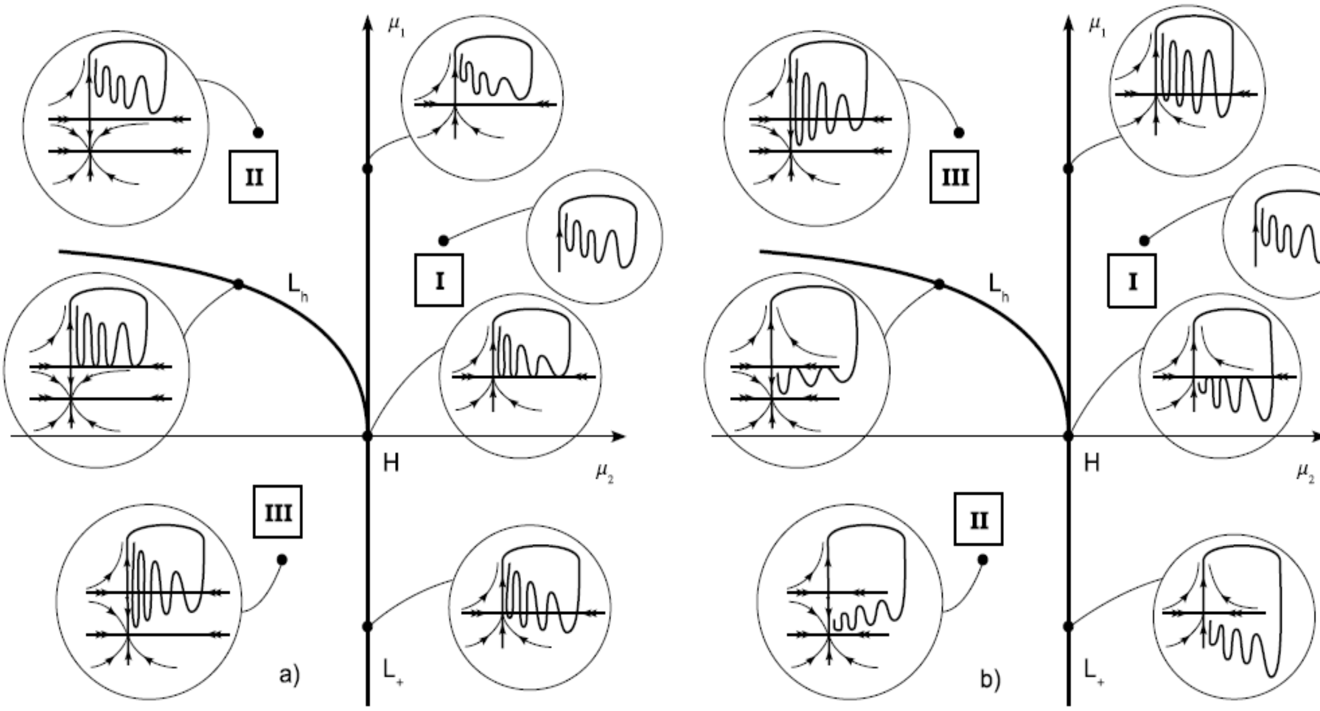


Рис. 3.4. Бифуркационная диаграмма к Теореме 1 в случаях
a) касания «сверху»; b) касания «снизу».

Далее будем изучать бифуркации однообходных периодических траекторий в двухпараметрическом семействе f_μ при достаточно малых μ.

Выберем в U_0 при $\mu = 0$ две точки траектории Γ_0: $M^+ \in W^{ss}_{loc}(O)$ и $M^- \in W^u_{loc}(O)$. Пусть Π^+ и Π^- – достаточно малые, диаметра ε, окрестности точек M^+ и M^- соответственно. Очевидно, существует натуральное q такое, что $M^+ = f_0^q(M^-)$. При всех достаточно малых μ в U_0 будут определены два отображения по траекториям диффеоморфизма f_μ: *локальное* $T_0 = f_\mu\big|_{U_0}$ и *глобальное* $T_1 = f_\mu^q : \Pi^- \to \Pi^+$. По построению, любая однообходная периодическая траектория, целиком лежащая в U, должна иметь ровно по одной точке пересечения с окрестностями Π^+ и Π^-. Точку такой траектории на Π^+ можно рассматривать как неподвижную точку соответствующего отображения первого возвращения $T_k = T_1 \cdot T_0^k : \Pi^+ \to \Pi^- \to \Pi^+$, где T_0^k действует из Π^+ в Π^-. Мы будем изучать бифуркации неподвижных точек отображений первого возвращения T_k для всех достаточно больших k. В результате этих исследований мы построим бифуркационную диаграмму для однообходных периодических траекторий диффеоморфизмов семейства f_μ, которая описывается следующей теоремой.

Теорема 3.2.

1) *На плоскости параметров* (μ_1, μ_2) *в любой достаточно малой окрестности начала координат существует счетное множество непересекающихся областей* Δ_k *таких, что при* $\mu \in \Delta_k$ *диффеоморфизм* f_μ *имеет асимптотически устойчивую однообходную периодическую траекторию.*

2) *Границами областей* Δ_k *являются бифуркационные кривые* L_k^+ *и* L_k^-*, отвечающие бифуркациям коразмерности один, седло-узловой и удвоения периода соответственно.*

3) *При* $k \to +\infty$ *области* Δ_k *накапливаются к кривой* $L_h \cup \{L_+ \cap \{\mu_1 < 0\}\}$.

Рисунок 3.5 иллюстрирует утверждение теоремы. Здесь показано также изменение геометрии отображения первого возвращения $T_k : \sigma_k^0 \to \sigma_k^0$ при варьировании параметров внутри области Δ_k. Вертикальные штриховые линии $\mu_2 = const \sim \frac{1}{k^2}$ – это условные границы, за которые области Δ_k не могут перейти. На рисунке выделено две области RD (Rescaling Domain) и D_{LS} (область Лукьянова – Шильникова), в которых геометрия отображений первого возвращения будет сильно отличаться. А именно, если $\mu \in RD$, то геометрия будет похожей на ту, которая наблюдается при развитии подковы Смейла во многих задачах, связанных с исследованием гомоклинических касаний. И здесь применим рескейлинг-метод (см. лемму 3.2), который показывает, что отображение первого возвращения может быть представлено

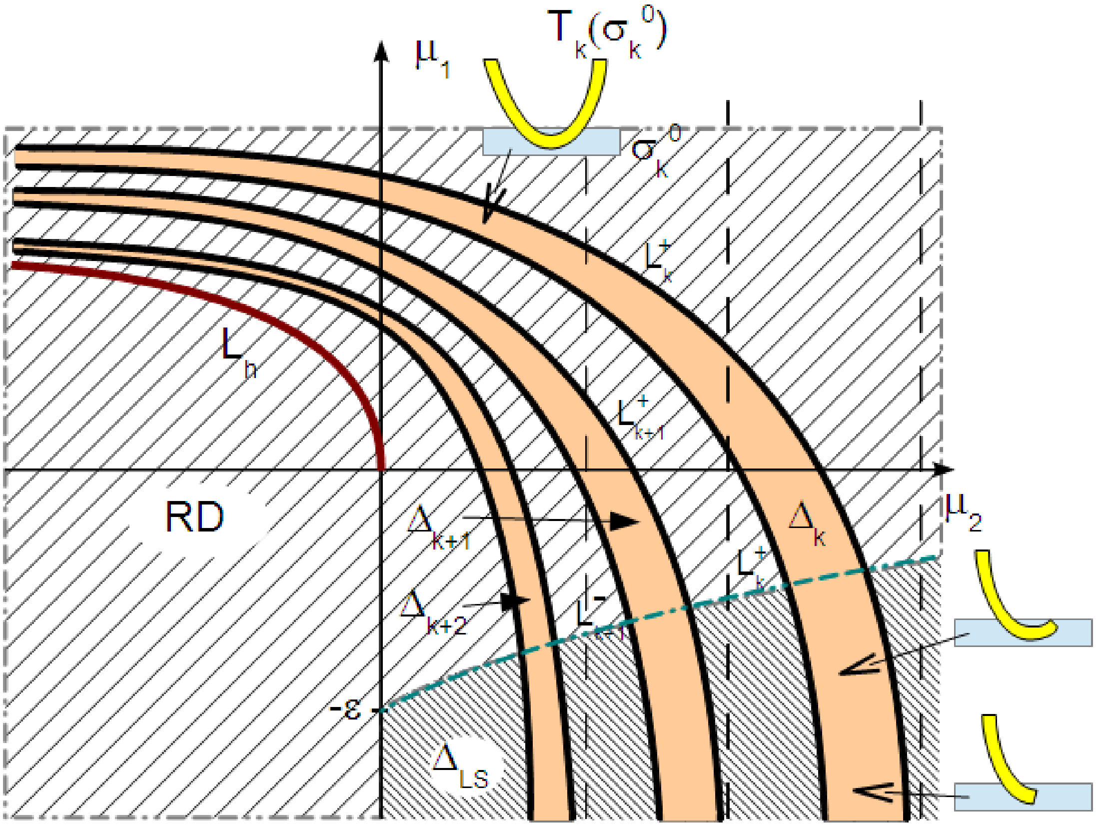


Рис 3.5. Бифуркационная диаграмма в случае касания «сверху». В случае касания «снизу» она будет иметь такой же вид, с той лишь разницей, что теперь кривые L_k^+ и L_k^- поменяются местами (L_k^+ будет нижней, а L_k^- верхней границами области Δ_k).

в форме отображения Эно. При $\mu \in D_{LS}$ геометрия будет другой: здесь образ «полоски» будет иметь вид «половинки подковы» (см. рис.3.5), такая геометрия наблюдалась, в частности, в работе [5]. Вообще говоря, области RD и D_{LS} не пересекаются, но бифуркационные кривые гладко продолжаются из области RD в область D_{LS}. Заметим, что область D_{LS} появляется на бифуркационой диаграмме вследствие хорошо известного «эффекта окрестности», когда траектории, не претерпевая бифуркаций, могут просто выйти из рассматриваемой окрестности фазовой плоскости, и тем самым, информация о них теряется. Однако стоит только лишь увеличить окрестность фазовой плоскости или уменьшить значение параметров – эффект пропадает.

В любом случае достаточно малая окрестность начала координат – это область RD.

Замечание. В области RD при фиксированном $\mu_2 < 0$ в соответствующем однопараметрическом семействе f_{μ_1} будет наблюдаться бесконечный каскад (последовательность интервалов $\delta_k = \Delta_k \cap \{\mu_2 = const\}$) периодических стоков, в соответствии известной теоремой Гаврилова – Шильникова [4]. Аналогичный каскад бифуркаций будет наблюдаться и в семействе f_{μ_2} при фиксированном $\mu_1 > -\varepsilon$. Однако, когда $\mu \in D_{LS}$ в семействе f_{μ_2} будет наблюдаться каскад ($\tilde{\delta}_k = \Delta_k \cap \{\mu_1 = const\})$ в соответствии с известной теоремой Лукьянова – Шильникова [5]. Вместе с тем заметим, что в любом однопараметрическом семействе f_{μ_1} при фиксированном $\mu_2 > 0$ будет наблюдаться лишь конечный каскад периодических стоков.

3.3 Свойства локального отображений T

В U_0 при всех достаточно малых μ можно выбрать C^{r-1}-гладкие локальные координаты (x, y), в которых отображение T запишется в следующем виде ([5], [14]):

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda(\mu)x + f(x, y, \mu)x, \\ \bar{y} = \mu_2 + y + y^2 + g(y), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $g(y) = O\left(y^3\right)$, $\lambda(0) = \lambda$. Обратим внимание, что второе уравнение системы (3.1) не зависит от x. В координатах (x, y) при $\mu = 0$ неподвижная точка O лежит в начале координат и ее неведущее W^{ss} и неустойчивое W^u инвариантные многообразия распрямлены: $W^u : \{x = 0\}, W^{ss} : \{y = 0\}$. В новых координатах, при всех достаточно малых μ, слоение F^{ss} состоит из горизонтальных прямых $y = const$. Отметим, что $x = 0$ также является инвариантной прямой. При $\mu_2 < 0$ локальное отображение T_0 имеет две неподвижные точки O_1 и O_2 типа седло и узел соответственно:

$$O_1 : \{x = 0, y = \sqrt{-\mu_2} + O(|\mu_2|^{3/2})\} \text{ и } O_2 : \{x = 0, y = -\sqrt{-\mu_2} + O(|\mu_2|^{3/2})\} \tag{3.2}$$

В силу (3.1) и (3.2) локально устойчивое многообразие $W^s_{loc}(O_1)$ седловой неподвижной точки O_1 имеет уравнение: $\{-\varepsilon < x < \varepsilon, y = \sqrt{-\mu_2} + O(|\mu_2|^{3/2})\}$, а $W^u_{loc}(O_1)$ – уравнение $\{x = 0, -\sqrt{-\mu_2} + O(|\mu_2|^{3/2}) < y < \varepsilon\}$.

В соответствии с (1), будем считать, что гомоклинические точки M^+ и M^- имеют координаты $M^+(x^+,0)$ и $M^-(0,y^-)$, где $x^+ > 0$ и $y^- > 0$. Для построения отображения из Π^+ в Π^- по траекториям локального отображения T_0, опишем сначала его геометрические свойства в зависимости от параметра μ_2. Для этого определим прежде всего структуру множества тех точек из окрестности Π^+, которые могут достигать Π^- при итерациях T_0.

В случае $\mu_2 \le 0$ (рис.3.6), очевидно, начиная с некоторого номера $\bar{k}$, образы $T_0^k \Pi^+$ имеют непустые пересечения с Π^-. Соответственно на Π^- существует счетное множество непересекающихся «полосок» $\sigma_k^1 = T_0^k \Pi^+ \cap \Pi^-$, которые накапливаются к $W^u_{loc}(O)$ при $k \to \infty$. Прообразами этих «полосок» являются «полоски» $\sigma_k^0 = T_0^{-k} \sigma_k^1 \subset \Pi^+$, которые накапливаются к неведущему многообразию $W^{ss}_{loc}(O)$ седло-узла при $\mu_2 = 0$ или к устойчивому многообразию $W^s_{loc}(O_1)$ седловой точки при $\mu_2 < 0$.

Так как второе уравнение в (3.1) не зависит от x, рассмотрим сначала его.

$$\bar{y} = \mu_2 + y + y^2 + O(y^3) \tag{3.3}$$

Заметим, что оценки для $\mu_2 = 0$ получены в главе 1, лемма 1.2 для $n = 2$, т.е $T_y : y_0 = \dfrac{y_k}{1 + \gamma(y_k) \cdot y_k \cdot k}$

Заметим, что локальная оценка по координате x получается аналогично лемме 1.2, т.е $x_k = \lambda^k x_0 + x_0 h(x_0, y_k)$, где $h(x_0, y_k) = O\left(\lambda_1^k\right)$, а λ_1 некоторое число, удовлетворяющее условию $0 < \lambda < \lambda_1 < 1$.

Утверждение 3.1.

Пусть $\mu_2 > 0$*, тогда отображение* T_y^{-1} *может быть записано в виде:*

а) $y_0 = \dfrac{y_k}{1+\gamma(y_k)\cdot y_k\cdot k}$*, при* $y_k \ge \sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}} + o\left(\sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}}\right)$*, где* $\gamma(y_k) \in \left(\dfrac{1}{2};4\right)$,.

б) $y_0 = \dfrac{y_k - \sqrt{\mu_2}\,tg\left(\tilde{\gamma}k\sqrt{\mu_2}\right)}{1+\dfrac{y_k}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\tilde{\gamma}k\sqrt{\mu_2}\right)}$*, при* $|y_k| \le \sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}} + o\left(\sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}}\right)$*где* $\tilde{\gamma} \in (\dfrac{5}{6};\dfrac{7}{6})$ (3.4)

Рассмотрим уравнение (3.3). Отметим, что выполняется неравенство $y+\gamma_1 y^2 \le \mu_2 + y + y^2 + O(y^3) \le y + \gamma_2 y^2$, где $\gamma_1 = \dfrac{1}{2}$ и $\gamma_2 = 4$. Из доказательства леммы 1.2 следует, что для области

$$|y| \ge \sqrt{\frac{\mu_2}{3}} + o\left(\sqrt{\frac{\mu_2}{3}}\right) \tag{3.5}$$

справедливы оценки леммы 1.2, то есть наше отображение мажорируется стандартными отображениями T_i^c сдвига на единицу времени вдоль траекторий дифференциального уравнения $\dot{y} = \gamma_i y^2$. Тогда, аналогично лемме 1.2 , получим для области (3.6), что $y_0 = \dfrac{y_k}{1+\gamma(y_k)\cdot y_k\cdot k}$, где $\gamma(y_k) \in \left(\dfrac{1}{2};4\right)$,

Рассмотрим значения

$$|y| \le \sqrt{\frac{\mu_2}{3}} + o\left(\sqrt{\frac{\mu_2}{3}}\right) \tag{3.6}$$

Введем в рассмотрение стандартные отображения T_1^c и T_2^c являющиеся отображением на единицу времени вдоль траекторий дифференциального уравнения $\dot{y} = \gamma^1{}_i\left(\mu_2 + y^2\right)$, Возьмем $\gamma_1^1 = \dfrac{5}{6}$, $\gamma_2^1 = \dfrac{7}{6}$

Решением данного дифференциального уравнения за единицу времени является интеграл $arctg\dfrac{\overline{y}}{\sqrt{\mu_2}} - arctg\dfrac{y}{\sqrt{\mu_2}} = \gamma_i^1\sqrt{\mu_2}$, тогда

$arctg\frac{\bar{y}}{\sqrt{\mu_2}} - arctg\frac{y}{\sqrt{\mu_2}} = \gamma_i^1\sqrt{\mu_2}$, выразим $\bar{y}$ через y,

$\bar{y} = \frac{y + \sqrt{\mu_2}tg\left(\gamma_i^1\sqrt{\mu_2}\right)}{1 - \frac{y}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\gamma_i^1\sqrt{\mu_2}\right)}$, разложим данное выражение по формуле Тейлора,

получим:

$$\bar{y} = \sqrt{\mu_2}tg\left(\gamma_i^1\sqrt{\mu_2}\right) + y \cdot tg^2\left(\gamma_i^1\sqrt{\mu_2}\right) + y + y^2\left(\frac{tg\left(\gamma_i^1\sqrt{\mu_2}\right)}{\sqrt{\mu_2}}\right)^2 + y^2\frac{tg^3\left(\gamma_i^1\sqrt{\mu_2}\right)}{\sqrt{\mu_2}} + \ldots,$$

Многоточием обозначены члены большего порядка малости. Так как мы рассматриваем y, удовлетворяющие условию (3.5), то $T_1^c y \le \mu_2 + y + y^2 + O(y^3) \le T_2^c y$, для произвольного стандартного сдвига на k единиц, несложно получить соотношение

$$arctg\frac{y_k}{\sqrt{\mu_2}} - arctg\frac{y_0^c}{\sqrt{\mu_2}} = \gamma_i^1 k\sqrt{\mu_2} \tag{3.7}$$

$y_{i0}^c = \frac{y_k - \sqrt{\mu_2}tg\left(\gamma k\sqrt{\mu_2}\right)}{1 + \frac{y_k}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\gamma k\sqrt{\mu_2}\right)},\ i = 1,2$

таким образом $\frac{y_k - \sqrt{\mu_2}tg\left(\gamma_2^1 k\sqrt{\mu_2}\right)}{1 + \frac{y_k}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\gamma_2^1 k\sqrt{\mu_2}\right)} \le y_0 \le \frac{y_k - \sqrt{\mu_2}tg\left(\gamma_1^1 k\sqrt{\mu_2}\right)}{1 + \frac{y_k}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\gamma_1^1 k\sqrt{\mu_2}\right)}$,

аналогично лемме 1.2, используя монотонность и непрерывность функций, несложно получить, что всегда существует $\tilde{\gamma} \in (\frac{5}{6};\frac{7}{6})$ (3.8)

такая что $y_0 = \frac{y_k - \sqrt{\mu_2}tg\left(\tilde{\gamma} k\sqrt{\mu_2}\right)}{1 + \frac{y_k}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\tilde{\gamma} k\sqrt{\mu_2}\right)}$, важно заметить, что из условий (3.) и

(3.8) следует, что величина $k\sqrt{\mu_2} \le \frac{\pi}{2,5}$

Найдем $\dfrac{dy_0}{dy_k}=\dfrac{1+tg^2\left(\tilde{\gamma}k\sqrt{\mu_2}\right)-\dfrac{k}{\cos\left(\tilde{\gamma}k\sqrt{\mu_2}\right)}\left(\mu_2+y_k^2\right)\dfrac{d\tilde{\gamma}}{dy_k}}{\left(1+\dfrac{y_k}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\tilde{\gamma}k\sqrt{\mu_2}\right)\right)^2}$,

$\dfrac{dy_{i0}^c}{dy_k}=\dfrac{1+tg^2\left(\gamma_i^1k\sqrt{\mu_2}\right)}{\left(1+\dfrac{y_k}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\gamma_i^1k\sqrt{\mu_2}\right)\right)^2}$, из неравенства, $\dfrac{dy_{10}^c}{dy_k}<\dfrac{dy_0}{dy_k}<\dfrac{dy_{20}^c}{dy_k}$ следует, что

$$\frac{1+tg^2\left(\gamma_1^1k\sqrt{\mu_2}\right)}{\left(1+\frac{y_k}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\gamma_1^1k\sqrt{\mu_2}\right)\right)^2}<\frac{dy_0}{dy_k}<\frac{1+tg^2\left(\gamma_2^1k\sqrt{\mu_2}\right)}{\left(1+\frac{y_k}{\sqrt{\mu_2}}tg\left(\gamma_2^1k\sqrt{\mu_2}\right)\right)^2} \tag{3.8}$$

Утверждение доказано.

При $\mu_2>0$,если $y_k\geq\sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}}+o\left(\sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}}\right)$, а $|y_0|\leq\sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}}+o\left(\sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}}\right)$, то мы имеем суперпозицию отображений. Из утверждения 3.1 и из (2.4) главы 2, запишем

$y_0=\dfrac{\nu_k y^1{}_k-\mu_2}{\nu_k+y^1{}_k}$, где $\nu_k=\dfrac{\sqrt{\mu_2}}{tg\left(\tilde{\gamma}k\sqrt{\mu_2}\right)}$.

$$y^1{}_k=\frac{m}{k_1}+\frac{A_1\left(y_1-y^-\right)}{k^2{}_1}+O\left(\frac{1}{k^2{}_1}\right)+O\left(\frac{\left(y_1-y^-\right)^2}{k^2{}_1}\right)=\omega_{k_1}+A_{k_1}\left(y_1-y^-\right)+O\left(\frac{\left(y_1-y^-\right)^2}{k^2{}_1}\right)$$

$$m=\frac{1}{(n-1)\cdot\gamma(y^-)};A_1=\frac{A}{\left(\gamma(y^-)\left(y^-\right)\right)^2},\ \omega_{k_1}=\frac{m}{k_1}+o\left(\frac{1}{k_1}\right)$$

Используя, разложений функций по формуле Тейлора, отображение T_y^{-1} можно записать в виде:

$$y_0=\frac{\nu_k\omega_{k_1}-\mu_2}{\nu_k+\omega_{k_1}}+\frac{\nu_k^2+\mu_2}{\left(\nu_k+\omega_{k_1}\right)^2}A_{k_1}(y_1-y^-)+O\left(\frac{(y_1-y^-)^2}{k_1^3}\right) \tag{3.9}$$

Утверждение 3.2.

Пусть $\mu_2 < 0$, тогда отображение T_y^{-1} может быть записано в виде:

а) $y_0 = \dfrac{y_k}{1+\gamma(y_k)\cdot y_k\cdot k}$, при $y_k \geq \sqrt{-2\mu_2} + o\left(\sqrt{-2\mu_2}\right)$, где $\gamma(y_k) \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$,.

б) $y_0 = \alpha + \alpha\left(1+2\alpha\right)^{-k}\left(1+\tilde{\tilde{\gamma}}\left(y_k\right)\right)^{-1} + y_k\left(1+2\alpha\right)^{-k}\left(1+\tilde{\tilde{\gamma}}\left(y_k\right)\right)^{-1}$, при

$\alpha \leq y_k \leq \sqrt{-2\mu_2} + o\left(\sqrt{-2\mu_2}\right)$,

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\mu_2 < 0$. Тогда отображение (3.2) имеет неподвижную точку $\alpha = \sqrt{-\mu_2} + \ldots$. Тогда будем исследовать область $y \geq \alpha$. Исходное (3.2) отображение, для $y \geq \sqrt{-2\mu_2} + o\left(\sqrt{-2\mu_2}\right)$, можно «зажать» двумя стандартными T_1^c и T_2^c так, что

$y + \gamma_1 y^2 + O(y^3) \leq \mu_2 + y + y^2 + O(y^3) \leq y + \gamma_2 y^2 + O(y^3)$, в качестве $\gamma_1 = \dfrac{1}{2}$ и $\gamma_2 = \dfrac{3}{2}$. И тогда, аналогично лемме 1.2 получим, $y_0 = \dfrac{y_k}{1+\gamma(y_k)\cdot y_k\cdot k}$, где $\gamma(y_k) \in \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$, где $y_0, y_k \geq \sqrt{-2\mu_2}$, напишем оценки для локального отображения (3.2), если $\alpha \leq y \leq \sqrt{-2\mu_2} + o\left(\sqrt{-2\mu_2}\right)$

Сделаем в (3.2) замену координат $z = y - \alpha$, тогда отображение запишется в виде:

$$\overline{z} = z + 2\alpha z + z^2 + o(z^2)\ . \tag{3.10}$$

Причем, будем рассматривать область

$$0 < z < \sqrt{-\mu_2} \tag{3.11}$$

Запишем (3.10) в виде:

$\overline{z} = z\left(1+2\alpha\right) + z^2 + o(z^2) = z\left(1+2\alpha\right)\left(1+\dfrac{z+o(z)}{1+2\alpha}\right)$

Тогда получаем на каждой итерации, что

$$z(1+\alpha) < \overline{z} = z(1+2\alpha) + z^2 + o(z^2) \le z(1+4\alpha),$$

и следовательно,

$$z_0(1+\alpha)^k < z_k \le z_0(1+4\alpha)^k \qquad (3.12)$$

Перепишем (3.12) в виде

$$z_k(1+4\alpha)^{-k} < z_0 < z_k(1+\alpha)^{-k} \qquad (3.13)$$

Тогда $z_k = z_0(1+2\alpha)^k \left(1+\frac{z_{k-1}+o(z_{k-1})}{1+2\alpha}\right)...\left(1+\frac{z_0+o(z_0)}{1+2\alpha}\right)$,

Или $z_k = z_0(1+2\alpha)^k\left(1+\tilde{\tilde{\gamma}}(z_k)\right)$, и где $\tilde{\tilde{\gamma}}(z_k) \in (1{,}100)$,

$$z_0 = z_k(1+2\alpha)^{-k}\left(1+\tilde{\tilde{\gamma}}(z_k)\right)^{-1}$$

Вернемся к исходным координатам

$$y_0 = \alpha + \alpha(1+2\alpha)^{-k}\left(1+\tilde{\tilde{\gamma}}(y_k)\right)^{-1} + y_k(1+2\alpha)^{-k}\left(1+\tilde{\tilde{\gamma}}(y_k)\right)^{-1}$$

Замечание.3.2

При $\mu_2 < 0$, е*сли* $y_k \ge \sqrt{-2\mu_2} + o\left(\sqrt{-2\mu_2}\right)$, а $\alpha \le y_0 \le \sqrt{-2\mu_2} + o\left(\sqrt{-2\mu_2}\right)$, то имеем суперпозицию отображений.

$$y_0 = \alpha + \alpha(1+2\alpha)^{-k}\left(1+\tilde{\tilde{\gamma}}(y_k)\right)^{-1} + y_k^1(1+2\alpha)^{-k}\left(1+\tilde{\tilde{\gamma}}(y_k)\right)^{-1} \text{ и}$$

$$y^1{}_k = \frac{m}{k_1} + \frac{A_1\left(y_1-y^-\right)}{k^2{}_1} + O\left(\frac{1}{k^2{}_1}\right) + O\left(\frac{\left(y_1-y^-\right)^2}{k^2{}_1}\right) = \omega_{k_1} + A_{k_1}\left(y_1-y^-\right) + O\left(\frac{\left(y_1-y^-\right)^2}{k^2{}_1}\right),$$

где $m = \frac{1}{(n-1)\cdot\gamma(y^-)}; A_1 = \frac{A}{\left(\gamma(y^-)\left(y^-\right)\right)^2}$, $\omega_{k_1} = \frac{m}{k_1} + o\left(\frac{1}{k_1}\right)$, тогда

$$y_0 = \alpha + \left(\alpha+\omega_{k_1}\right)(1+2\alpha)^{-k} + A_{k_1}\left(y_1-y^-\right)(1+2\alpha)^{-k} + O\left(\frac{\left(y_1-y^-\right)^2}{k^2{}_1}(1+2\alpha)^{-k}\right) \qquad (3.14)$$

В случае $\mu_2 \le 0$ (рис.3.6), очевидно, начиная с некоторого номера $\bar{k}$, образы $T_0^k\Pi^+$ имеют непустые пересечения с Π^-. Соответственно на Π^- существует счетное множество непересекающихся «полосок» $\sigma_k^1 = T_0^k\Pi^+ \cap \Pi^-$, которые накапливаются к $W^u_{loc}(O)$ при $k \to \infty$. Прообразами этих «полосок» являются «полоски» $\sigma^0_k = T_0^{-k}\sigma^1_k \subset \Pi^+$, которые накапливаются к неведущему многообразию $W^{ss}_{loc}(O)$ седло-узла при $\mu_2 = 0$ или к устойчивому многообразию $W^s_{loc}(O_1)$ седловой точки при $\mu_2 < 0$.

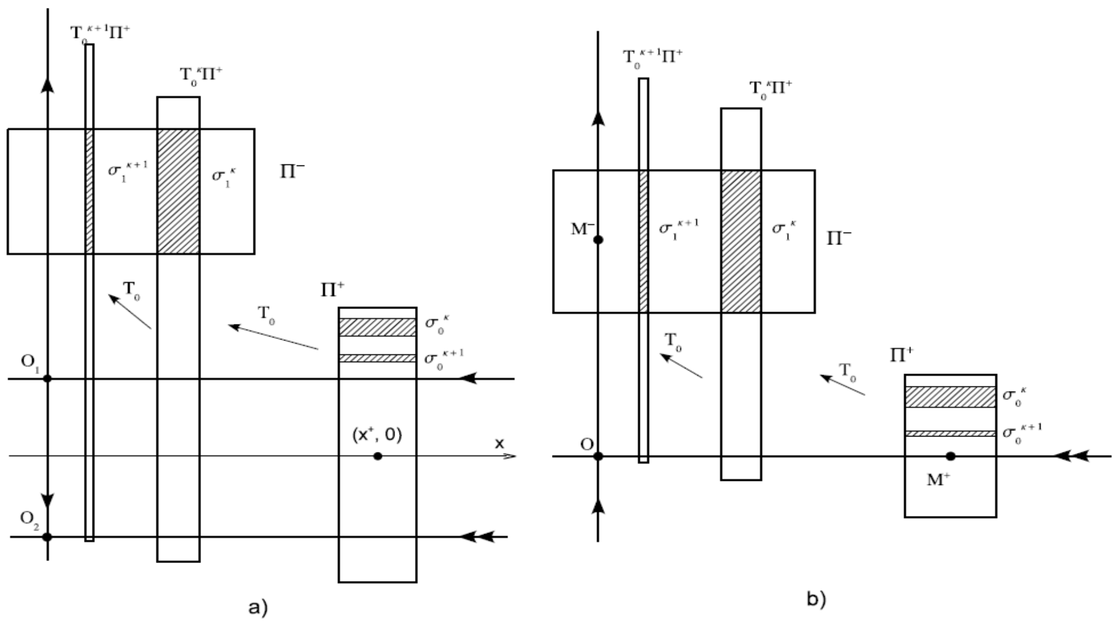


Рис.3.6 Геометрия локального отображения для a) $\mu_2 < 0$; b) $\mu_2 = 0$.

Принципиально другая ситуация будет при $\mu_2 > 0$ (см рис.7), поскольку любая траектория покидает U_0 за конечное число итераций отображения T_0. Соответственно на Π^+ останется лишь конечное число «полосок» σ^0_k, таких что $T_0^k\sigma^0_k \bigcap \Pi^- \neq \emptyset$. Таким образом, для каждого положительного μ_2, существует некоторое натуральное число $k^* = k^*(\mu_2) > \bar{k}$, где $k^* \to \infty$ при $\mu_2 \to +0$, такое, что $T_0^k\Pi^+ \bigcap \Pi^- = \emptyset$ для всех $k \geq k^*$.

Пусть (x_i, y_i), $i = \overline{0,..,k}$, – множество точек на U_0 таких, что $T_0(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$. Одним из важных достоинств локальных координат (1) является то, что соотношение $(x_k, y_k) = T_0^k(x_0, y_0)$ допускает в них весьма удобное для дальнейших исследований представление. А именно, в следующей лемме дано такое представление отображения $T_0^k : U_0 \to U_0$ в так называемой *перекрестной форме* [1].

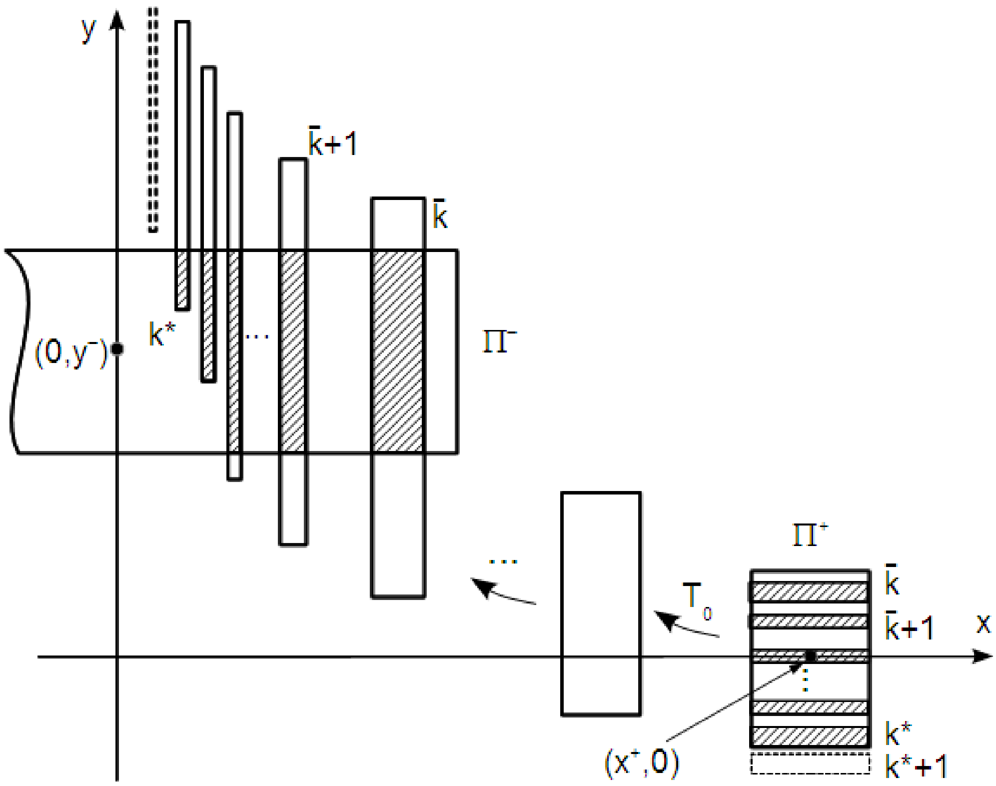


Рис. 3.7. Геометрия локального отображения для $\mu_2 > 0$.

Замечание, важно заметить , что при любых малых значениях параметра μ_2 полоски при попадании в Π_0 имеют тот же порядок коэффициента сжатия, что и при седло-узле, сжатие полосок меняется, когда подходим $y = 0$.

3.4 Свойства глобального отображения T_1 и рескейлинг-лемма

Глобальное отображение $T_1 : \Pi^- \to \Pi^+$ при всех достаточно малых μ может быть записано в следующем виде:

$$\begin{cases} \bar{x}_0 - x^+ = F\left(x_1, y_1 - y^-, \mu\right), \\ \bar{y}_0 = G\left(x_1, y_1 - y^-, \mu\right), \end{cases} \qquad (3.15)$$

где $(x_0, y_0) \in \Pi^+$, $(x_1, y_1) \in \Pi^-$; функции F и G – C^{r-1}-гладкие и $F(0{,}0{,}0) = G(0{,}0{,}0) = 0$. Условие **B)** означает, что $W^u(O)$ и $W^{ss}(O)$ при $\mu = 0$ касаются квадратично в точке $M^+(x^+, 0)$, откуда следует, что $G_y(0{,}0{,}0) = 0, G_{yy}(0{,}0{,}0) \neq 0$.

Перепишем отображение (3.15) еще и таким образом

$$\bar{x}_0 - x^+ = ax_1 + b(y_1 - y^-) + O(x_1^2 + |x_1(y_1 - y^-)| + (y_1 - y^-)^2)$$

$$\bar{y}_0 = y^+(\mu) + cx_1 + d\left(y_1 - y^-\right)^2 + O(x_1^2 + |x_1(y_1 - y^-)| + |y_1 - y^-|^3) \ , \qquad (3.16)$$

где $y^+(0) = 0$, а коэффициенты a, b, c, d, включая x^+ и y^-, гладко зависят от μ. Так как T_1 – диффеоморфизм, то $bc \neq 0$. Квадратичность гомоклинического касания означает, что $d \neq 0$. Заметим при этом, что $d > 0$ отвечает случаю гомоклинического касания «сверху», а $d < 0$ – случаю касания «снизу».

Без ограничения общности, можно положить, что $\mu_1 = y^+(\mu)$. Из формулы (3.16) видно, что μ_1 – это расстояние между $T_1 W^u_{loc}(O)$ и $W^s_{loc}(O)$ при $\mu_2 = 0$.

Лемма 3.2. (Рескейлинг-лемма) *Пусть f_μ – семейство диффеоморфизмов, определенное выше. На плоскости параметров существует окрестность RD (Rescaling Domain) начала координат такая, что с помощью гладких замен координат $(x_0, y_k) \to (X, Y)$ и параметров отображение первого возвращения T_k при любом достаточно большом k может быть приведено к следующему виду:*

$$\bar{X} = Y + o(1)_{k\to\infty}$$

$$\bar{Y} = M - Y^2 + o(1)_{k\to\infty} \qquad (3.16)$$

где X, Y, M *определены в шаре* $\|X,Y,M\| < L_k$, *где* $L_k \to +\infty$ *при* $k \to \infty$. *Через* $o(1)$ *обозначены некоторые функции переменных* (X,Y,M), *которые стремятся к нулю при* $k \to \infty$ *вместе со своими производными (до порядка* $(r-2)$*), и*

M определяется формулами (3.19), (3.20).

Доказательство. Для $\mu_2 = 0$ результат совпадает, леммой 1.2, главы 2 для $n = 2$.

Пусть $\mu_2 > 0$, если $y \ge \sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}} + o\left(\sqrt{\dfrac{\mu_2}{3}}\right)$, так же можно использовать результаты леммы 1.2 , главы 2, иначе рассмотрим случай, когда отображение удовлетворяет условию (3.9), запишем отображение первого возвращения в виде:

$$\bar{x}_0 - x^+ = a\left(\lambda^k + h\right)x_0 + b(y_1 - y^-) + O(\lambda_1^{2k}{x_0}^2 + \lambda_1^k\,|\,x_0(y_1 - y^-)\,| + (y_1 - y^-)^2)$$

$$\frac{\nu_k\omega_{k_1} - \mu_2}{\nu_k + \omega_{k_1}} + \frac{\nu_k^2 + \mu_2}{\left(\nu_k + \omega_{k_1}\right)^2}A_{k_1}(\bar{y}_1 - y^-) + O(\frac{(\bar{y}_1 - y^-)^2}{k^3}) =$$
$$= \mu_1 + c\left(\lambda^k + h\right)x_0 + d(y_1 - y^-)^2 + O(\lambda_1^{2k}{x_0}^2 + \lambda_1^k\,|\,x_0(y_1 - y^-)\,| + |\,y_1 - y^-\,|^3) \tag{3.17}$$

Введем новые координаты $x = x_0 - x^+$, $y = y_1 - y^-$, Тогда отображение запишется в виде:

$$\bar{x} = a\left(\lambda^k + h\right)x + a\left(\lambda^k + h\right)x^+ + by + O(\lambda_1^{2k})O(x^2) + \lambda^k O(xy) + O(y^2)$$

$$\bar{y}\frac{\nu_k^2 + \mu_2}{\left(\nu_k + \omega_{k_1}\right)^2}A_{k_1} + O(\bar{y}^2) = M_1 + c\lambda^k x + dy^2 + o(\lambda^k)O(x^2) + \lambda^k O(xy) + O(y^3), \tag{3.18}$$

где $M_1 = \mu_1 - \dfrac{\nu_k\omega_{k_1} - \mu_2}{\nu_k + \omega_{k_1}} + cx^+\lambda_1^k$.

Теперь сделаем перенормировку (рескейлинг) координат следующим образом

$$x = -b\frac{\nu_k^2 + \mu_2}{d\left(\nu_k + \omega_{k_1}\right)^2}A_{k_1}X,\; y = -\frac{\nu_k^2 + \mu_2}{d\left(\nu_k + \omega_{k_1}\right)^2}A_{k_1}Y$$

Получим

$$\bar{X}=\frac{daO(\lambda_1^k)}{-b}X+\frac{daO(\lambda_1^k)\left(\nu_k+\omega_{k_1}\right)^2x^+}{-b\left(\nu_k^2+\mu_2\right)A_{k_1}}+Y+o(\lambda_1^k)+O(\lambda_1^{2k}X^2)+O(\lambda_1^kXY)+O(Y^2)$$

$$\bar{Y}+O(\bar{Y}^2)=M+\frac{cbO(\lambda_1^k)\left(\nu_k+\omega_{k_1}\right)^2}{A_{k_1}\left(\nu_k^2+\mu_2\right)}X-Y^2+O(\lambda_1^{2k}\cdot X^2)+O(\lambda_1^kXY)+O\left(\frac{\nu_k^2+\mu_2}{\left(\nu_k+\omega_{k_1}\right)^2}A_{k_1}Y^3\right),$$

Где $M=-\left(\mu_1-\frac{\nu_k\omega_{k_1}-\mu_2}{\nu_k+\omega_{k_1}}+cx^+\lambda_1^k\right)\frac{d\left(\nu_k+\omega_{k_1}\right)^4}{\left(\nu_k^2+\mu_2\right)^2A_{k_1}^2},$ (3.19)

Пусть $\mu_2<0$, тогда воспользуемся (3.14) подставив его в (3.15)

$$\bar{x}_0-x^+=a\left(\lambda^k+h\right)x_0+b(y_1-y^-)+O(\lambda_1^{2k}x_0{}^2+\lambda_1^k\,|\,x_0(y_1-y^-)\,|+(y_1-y^-)^2)$$

$$\alpha+\left(\alpha+\omega_{k_1}\right)\left(1+2\alpha\right)^{-k}+A_{k_1}\left(y_1-y^-\right)\left(1+2\alpha\right)^{-k}+O\left(\frac{\left(y_1-y^-\right)^2}{k^2{}_1}\left(1+2\alpha\right)^{-k}\right)=$$

$$=\mu_1+c\left(\lambda^k+h\right)x_0+d(y_1-y^-)^2+O(\lambda_1^{2k}x_0{}^2+\lambda_1^k\,|\,x_0(y_1-y^-)\,|+|\,y_1-y^-\,|^3)$$

Введем новые координаты $x=x_0-x^+$, $y=y_1-y^-$, Тогда отображение запишется в виде: $\bar{x}=a\left(\lambda^k+h\right)x+a\left(\lambda^k+h\right)x^++by+O(\lambda_1^{2k})O(x^2)+\lambda^kO(xy)+O(y^2)$

$$A_{k_1}\bar{y}\left(1+2\alpha\right)^{-k}+O\left(\frac{\bar{y}^2}{k^2{}_1}\left(1+2\alpha\right)^{-k}\right)=$$

$$=M_1+c\left(\lambda^k+h\right)x+dy^2+O(\lambda_1^{2k}x^2+\lambda_1^k\,|\,x_0y\,|+y^3)$$

$$M_1=\mu_1-\left(\alpha+\left(\alpha+\omega_{k_1}\right)\left(1+2\alpha\right)^{-k}\right)+cx^+O\left(\lambda_1^k\right)$$

Теперь сделаем перенормировку (рескейлинг) координат следующим образом

$$x=\frac{-b}{d}\left(1+2\alpha\right)^{-k}A_{k_1}X,\; y=-\frac{1}{d}\left(1+2\alpha\right)^{-k}A_{k_1}Y$$

$$\bar{X}=\frac{daO(\lambda_1^k)}{-b}X+\frac{daO(\lambda_1^k)\left(1+2\alpha\right)^kx^+}{-bA_{k_1}}+Y+$$

$$+O(\lambda_1^k)+O(\lambda_1^{2k}\left(1+2\alpha\right)^kX^2)+O(\lambda_1^k\left(1+2\alpha\right)^kXY)+O((1+2\alpha)^{-k}Y^2)$$

$$\bar{Y}+O(\bar{Y}^2)=M+\frac{cbO(\lambda_1^k)\left(1+2\alpha\right)^k}{A_{k_1}}X-Y^2+O(\lambda_1^{2k}\cdot X^2)+O(\lambda_1^k\left(1+2\alpha\right)^kXY)+O\left(A_{k_1}\left(1+2\alpha\right)^{-k}Y^3\right)$$

$$M=-\left(\mu_1-\left(\alpha+\left(\alpha+\omega_{k_1}\right)\left(1+2\alpha\right)^{-k}\right)+cx^+O\left(\lambda_1^k\right)\right)\frac{d\left(1+2\alpha\right)^{2k}}{A_{k_1}^2} \qquad (3.20)$$

Это завершает доказательство леммы. □

3.5 Доказательство Теоремы 3.1

Теперь доказательство теоремы 1 легко вытекает из (3.1) и (3.15). Действительно, при $\mu_2<0$ уравнения многообразия $W^s_{loc}(O_1)$, в силу (2), имеет вид: $\{-\varepsilon<x<\varepsilon, y=\sqrt{-\mu_2}+O(|\mu_2|^{3/2})\}$. Из (7) получаем, что уравнение кривой $T_1(W^u_{loc}(O_1):\{x_1=0\})$ имеет вид $y_0=\mu_1+\frac{d}{b^2}\left(x_0-x^+\right)^2+O\left(\left(x_0-x^+\right)^3\right)$. Таким образом, $T_1(W^u_{loc}(O_1))$ квадратично касается $W^s_{loc}(O_1)$ при $\mu_1=\sqrt{-\mu_2}+O(|\mu_2|^{3/2})$ – это уравнение бифуркационной кривой L_h. Заметим, что уравнение бифуркационной кривой L^+, отвечающей существованию у диффеоморфизма f_μ неподвижной точки типа седло-узел, в силу (1), имеет вид $\mu_2=0$.

Лемма 3.2 показывает, что исследование бифуркаций отображений первого возвращения T_k при всех больших k сводится, по существу, к исследованию стандартного отображения параболы:

$$\bar{Y}=M-Y^2\ , \qquad (3.21)$$

бифуркации которого хорошо известны. Так, при значениях параметра $M\in(-1/4,3/4)$ отображение (10) имеет устойчивую неподвижную точку, которая рождается в результате седло-узловой бифуркации при $M=-1/4$ и претерпевает бифуркацию удвоения периода при $M=3/4$.

Получаем, что для отображения T_k соответствующие бифуркационные кривые его неподвижных точек на плоскости параметров (μ_1,μ_2) будут иметь вид:

При $\mu_2<0$ $\quad L_k^+:\ \mu_1=\alpha+\dfrac{A_{k_1}^2}{4d\left(1+2\alpha\right)^{2k}}+\left(\alpha+\omega_{k_1}\right)\left(1+2\alpha\right)^{-k}-cx^+O\left(\lambda_1^k\right)$

$$L_k^-:\ \mu_1=\alpha-\frac{3A_{k_1}^2}{4d\left(1+2\alpha\right)^{2k}}+\left(\alpha+\omega_{k_1}\right)\left(1+2\alpha\right)^{-k}-cx^+O\left(\lambda_1^k\right) \qquad (3.22)$$

При $\mu_2 > 0 \quad L_k^+ \,:\, \mu_1 = \frac{\nu_k \omega_{k_1} - \mu_2}{\nu_k + \omega_{k_1}} + \frac{\left(\nu_k^2 + \mu_2\right)^2 A_{k_1}^2}{4d\left(\nu_k + \omega_{k_1}\right)^4} - cx^+ \lambda_1^k$

$$L_k^- \,:\, \mu_1 = \frac{\nu_k \omega_{k_1} - \mu_2}{\nu_k + \omega_{k_1}} - \frac{3\left(\nu_k^2 + \mu_2\right)^2 A_{k_1}^2}{4d\left(\nu_k + \omega_{k_1}\right)^4} - cx^+ \lambda_1^k$$

Здесь кривая L_k^+ отвечает седло-узловой бифуркации, а L_k^- – бифуркации удвоения периода соответствующей неподвижной точки.

На рис. 3.5 изображена бифуркационная диаграмма однообходных периодических траекторий семейства f_μ в случае касания «сверху» ($d > 0$). В случае касания «снизу» ($d < 0$) она будет иметь такой же вид, с той лишь разницей, что теперь кривые L_k^+ и L_k^- поменяются местами (L_k^+ будет нижней, а L_k^- верхней границами области Δ_k).

Таким образом, теоремы доказана.

Глава 4. О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с трансверсальным пересечением многообразий сложного седла

В этой главе рассматривается случай трансверсальной гомоклинической траектории к негрубой неподвижной точке типа невырожденное сложное седло (т.е. его первая ляпуновская величина равна нулю, а вторая положительна). По своей постановке, соответствующая бифуркационная задача имеет (как минимум) коразмерность 2, так как ее видимая негрубость связана только с вырождением лишь одной периодической траектории — неподвижной точки O рассматриваемого двумерного диффеоморфизма f_0, инвариантные устойчивое и неустойчивое одномерные многообразия которой пересекаются трансверсально в точках гомоклинической траектории Γ_0. В главе рассматривается двухпараметрическое семейство f_μ диффеоморфизмов, где $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ - параметры, управляющие бифуркациями сложного седла.

Пусть U — достаточно малая окрестность контура $O \bigcup \Gamma_0$. Обозначим через B_2 топологическую схему Бернулли из двух символов, а через N_μ множество траекторий диффеоморфизма f_μ, целиком лежащих в U.

Стандартно доказывается, что на плоскости параметров (μ_1, μ_1) существуют две бифуркационные кривые L_1 и L_2, отвечающие седло-узловым бифуркациям неподвижной точки (см. рис. 4.1), которые разбивают эту плоскость на две области E_1 и E_2 такие, что в E_1 существует только одна грубая седловая неподвижная точка O и, а в области E_2 — три неподвижные точки: седло O_1 , устойчивая O_2 и седло O_3; на кривой E_1 точки O_1 и O_2 сливаются в седло-узел O_{12}, на кривой E_2 точки O_2 и O_3 сливаются в седло-узел O_{23}. Основной результат статьи составляет следующая

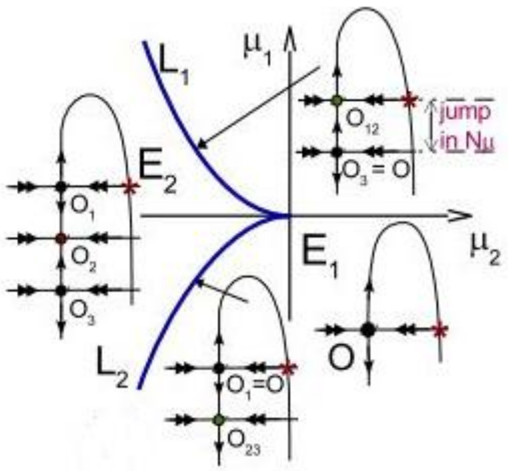
Теорема 4.1. *Множество* N_μ *всегда содержит нетривиальное подмножество* Ω_μ, *траектории которого находятся во взаимно-*

однозначном соответствии с траекториями B_2, и кроме того N_μ допускает полное описание следующего типа:

(i) $N_\mu = \Omega_\mu$ при $(\mu_1, \mu_2) \in E_1$; $N_\mu = \Omega_\mu + O_2 + O_3$ при $(\mu_1, \mu_2) \in E_2$, и здесь для любого такого μ множество Ω_μ является равномерно гиперболическим.

(ii) При $(\mu_1, \mu_2) \in L_1$ множество Ω_μ содержит седло-узел O_{12}, т.е. $N_\mu = \Omega_\mu + O_{12}$ («скачок гиперболичности»), и является неравномерно гиперболическим; при $(\mu_1, \mu_2) \in L_2$ множество Ω_μ равномерно гиперболично и $N_\mu = \Omega_\mu + O_{23}$.

Иллюстрация к этой теореме представлена на рис. 4.1. Показанная здесь бифуркационная диаграмма является полной. Теорема 4.1 показывает, что



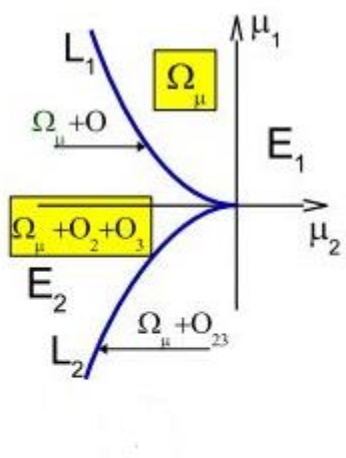


Рис 4.1. Иллюстрация к теореме 4.1. (a) бифуркационная диаграмма; (b) схема структуры неблуждающего множества N_μ на плоскости параметров.

никаких других бифуркаций, кроме локальных бифуркаций сложного седла в семействе f_μ нет. Однако, бифуркации при прохождении через бифуркационные кривые кривые L_1 и L_2 имеют совершенно разный характер. Первая носит глобальный характер: при рождении появлении седло-узла O_{12} множество N_μ целиком мгновенно перестраивается. При $(\mu_1, \mu_2) \in E_1$ граничной точкой множества N_μ является седло O, а при $(\mu_1, \mu_2) \in L_1$ седло O становится сразу изолированной компонентой в N_μ: здесь седло-узел O_{12}, лежащий на конечном расстоянии от O, становится граничной точкой множества Ω_μ. Бифуркация при переходе через кривую и L_2– чисто локальная: на кривой E_2 точки O_2 и O_3, лежащие на конечном расстоянии от множества Ω_μ, сливаются в седло-узел O_{23} и исчезают в области E_1.

Отметим, что рассмотренная в главе 4 задача была отмечена (в несколько другой форме) в обзоре [26] 1986 года, как одна из важных нерешенных на то время проблем. Как оказалось, это одна из немногих задач, бифуркации которых в классе систем со сложной динамикой (с бесконечным множеством периодических траекторий) допускают полное описание. Более того, здесь построена полная бифуркационная диаграмма и описано интересное явление «скачка гиперболичности». Тем самым, отмечен новый тип бифуркаций в классе систем со сложной структурой, когда вследствии простой бифуркации (в рассматриваемом случае – невырожденной седло-узловой бифуркации неподвижной точки) топологическая структура нетривиальной части неблуждающего множества не меняется (остается гиперболической), но само это множество скачком и целиком перемещается в фазовом пространстве на другое место.

4.1 Постановка задачи

Рассматривается C^r- гладкий диффеоморфизм f_0 $(r \geq 4)$, имеющий неподвижную точку типа сложное седло и гомоклиническую к ней траекторию Γ_0. Предполагается, что других вырождений f_0 не имеет, т.е. f_0 удовлетворяет условиям:

A) f_0 имеет неподвижную точку O типа сложное седло с мультипликаторами $\lambda_1 = \lambda$, где $0 < \lambda < 1$, и $\lambda_2 = 1$, первая ляпуновская равна нулю, а вторая Ляпуновская величина $l > 0$.

B) Инвариантные многообразия $W^u(O)$ и $W^{ss}(O)$ пересекаются трансверсально в точках некоторой гомоклинической траектории Γ_0.

Рассматривается U_0 – малая фиксированная окрестность неподвижной точки O.

Пусть $M \in W^{ss} \cap U_0$ – некоторая гомоклиническая точка траектории Γ_0 и $\Pi^+ \subset U_0$ – ее достаточно малая окрестность.

Диффеоморфизмы, удовлетворяющие условиям **A)** и **B)**, образуют в пространстве C^r-гладких диффеоморфизмов, бифуркационную кривую коразмерности 2. (см.рис. 4.1) Параметры отвечают за бифуркации сложного седла. Для изучения бифуркаций диффеоморфизма f_0 мы будем рассматривать параметрическое семейство $f_{\bar{\mu}}$, диффеоморфизмов, при этом f_0 является элементом этого семейства при $\bar{\mu} = 0$.Показывается, что семейство двух параметрическое и параметры отвечают за бифуркации сложного седла.

Выберем в U_0 при $\bar{\mu} = 0$ две точки траектории Γ_0: $M^+ \in W^{ss}_{loc}(O)$ и $M^- \in W^u_{loc}(O)$. Пусть Π^+ и Π^- – достаточно малые, диаметра ε, окрестности точек M^+ и M^- соответственно. Очевидно, существует натуральное q такое, что $M^+ = f_0^q(M^-)$. При всех достаточно малых $\bar{\mu}$ в U_0 будут определены два отображения по траекториям диффеоморфизма $f_{\bar{\mu}}$: *локальное* $T = f_{\bar{\mu}}\big|_{U_0}$ и *глобальное* $T_1 = f_{\bar{\mu}}^{q} : \Pi^- \to \Pi^+$. пересечения с окрестностями Π^+ и Π^-. Мы опишем множество траекторий целиком лежащих в U_0.

Гомоклинические точки M^+ и M^- имеют координаты $M^+(x^+,0)$ и $M^-(0,y^-)$, где $x^+ > 0$ и $y^- > 0$. Выберем на U_0 их достаточно малые окрестности

$$\Pi^+ : \{(x,y) : |x - x^+| \le \varepsilon, |y| \le \varepsilon\}$$
$$\Pi^- : \{(x,y) : |x| \le \varepsilon, |y - y^-| \le \varepsilon\}$$

так, что $\Pi^+ \bigcap T \ \Pi^+ = \varnothing$ и $\Pi^- \bigcap T^{-1} \ \Pi^- = \varnothing$.

В U_0 можно выбрать C^{r-1}-гладкие локальные координаты (x,y), в которых отображение T запишется виде, аналогичном [5]:

$$\begin{cases} \bar{x} = \lambda(\bar{\mu})x + h(x,y,\bar{\mu})x \\ \bar{y} = \mu_1 + (1+\mu_2)y + y^3 + g(y) \end{cases} \tag{4.1}$$

где $0 < \lambda(\bar{\mu}) < 1, g(y) = O(y^3)$ В координатах (x,y) неподвижная точка O лежит в начале координат и ее инвариантные многообразия W^{ss} и W^u распрямлены: $W^u : \{x = 0\}, W^{ss} : \{y = 0\}$.

Глобальное отображение $T_1 = f_0 : \Pi^- \to \Pi^+$ может быть записано в виде:

$$\begin{cases} \bar{x} - x^+ = F\left(x, y - y^-, \bar{\mu}\right) \\ \bar{y} = G\left(x, y - y^-, \bar{\mu}\right) \end{cases}, \tag{4.2}$$

где F и G определены на Π^- и $F(0,0,0) = G(0,0,0) = 0$.Так как T_1-диффеоморфизм (взаимно-однозначное, гладкое отображение), то якобиан для функций F и G, в точке отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \ne 0, \quad \text{где} \quad a = F_x(0,0,0); b = F_y(0,0,0); c = G_x(0,0,0); d = G_y(0,0,0),$$

коэффициенты a,b,c,d, а также x^+и y^-, гладко зависят от $\bar{\mu}$.

Условия трансверсального пересечения многообразий второго порядка следующие: $d = G_y(0,0) \ne 0$. Гомоклинические точки M^+ и M^- имеют координаты $M^+(x^+,0)$ и $M^-(0,y^-)$, где $x^+ > 0$ и $y^- > 0$

Запишем отображение T_1 в виде:

$$\begin{cases} \bar{x} - x^+ = F\left(x, y - y^-\right) = a \cdot x + b\left(y - y^-\right) + O\left(x^2 + \left(y - y^-\right)^2\right) \\ \bar{y} = c \cdot x + d\left(y - y^-\right) + O\left(x^2 + \left(y - y^-\right)^2\right) \end{cases} \tag{4.3}$$

4.2 Свойства отображений T

Рассмотрим второе уравнение системы (4.1). Опишем неподвижные точки этого отображения в зависимости от параметров системы. За поведение неподвижной точки в окрестности нуля отвечают два бифуркационных параметра (μ_1, μ_2). Плоскость параметров разбивается на три области бифуркационной кривой $\left(\frac{\mu_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^3 = 0$ Введем вспомогательные обозначения $\left(\frac{\mu_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\mu_2}{3}\right)^3 = Q$, а через α обозначим наибольшую координату по переменной y неподвижной точки.

$\bar{y} = \mu_1 + (1 + \mu_2)y + y^3 + g\left(y\right)$

Равенство нулю параметра Q соответствуют трем различным биффуркационным случаям:

1. Если $(\mu_1 = 0, \mu_2 = 0)$ имеем вырождение неподвижной точки в сложное седло., тогда $a = 0$; Этот случай изучен в главе 1 и 2 для n=3.

2. Если $(\mu_1, \mu_2) \in L_1$: $\mu_1 = 2\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, то имеем две неподвижные точки с ординатой $y_1 = \sqrt{-\frac{\mu_2}{3}} = a$, соответствующей седло-узлу и $y_2 = -2\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}$ соответствующей седлу;

3. Если $(\mu_1, \mu_2) \in L_2 : \mu_1 = -\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, неподвижные точки с ординатой $y_1 = 2\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}} = a$ соответствующей седлу и $y_2 = -\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}$ - седло-узлу.

Неравенство $Q > 0$, задает область E_1, в этом случае неподвижная точка седло с ординатой $y = \sqrt[3]{-\frac{\mu_1}{2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{-\frac{\mu_1}{2} - \sqrt{Q}} = a$;

В случае $Q < 0$, имеем в области область E_2, три неподвижные точки.

Обозначим через a наибольшую координату по переменной y неподвижной точки.

Пусть (x_i, y_i), $i = \overline{0,..,k}$, – множество точек на U_0 таких, что $T(x_i, y_i) = (x_{i+1}, y_{i+1})$. Очевидно нас интересуют итерации в верхнем седловом секторе, а именно $y \geq a$. Одним из важных достоинств локальных координат (4.1) является то, что соотношение $(x_k, y_k) = T^k(x_0, y_0)$ допускает в них весьма удобное для дальнейших исследований представление.

Начнем с исследования второго уравнения системы (4.1).

$$\overline{y} = \mu_1 + (1+\mu_2)y + y^3 + \dots, \tag{4.4}$$

Сделаем замену переменных, перенеся начало координат в наибольшую неподвижную точку отображения (4.1), т.е. в соотношении $\overline{y} = \mu_1 + (1+\mu_2)y + y^3 + g(y)$, сделаем замену $z = y - \alpha$, тогда отображение (4.4) запишется в виде:

$$T_z:\ \overline{z} = z + (3\alpha^2 + \mu_2)z + 3\alpha z^2 + z^3 + \dots \tag{4.5}$$

Важно заметить, что $3\alpha^2 + \mu_2 \geq 0$, при любых α и μ_2.

Пусть $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ - две произвольные точки, а $\overline{z}_1$ и $\overline{z}_2$ образы этих точек.

Тогда $\left|\overline{z}_1 - \overline{z}_2\right| = \left|z_1 - z_2\right|\left|1 + 3\alpha^2 + 3\alpha\left(z_1 + z_2\right) + z_1^{\,2} + z_2^{\,2} + z_1 z_2 + \dots\right|$

Очевидно, что расстояние между точками и расстояние между их образами увеличивается (не уменьшается) на каждой итерации, кроме случая, когда $\mu_2 < 0$ и $\alpha < 0$, при этом

Если $0 < z_1, z_2 < \sqrt{-\frac{\mu_2}{3}} - \alpha$, расстояние между точками и расстояние между их образами увеличивается на каждой итерации.

Если $\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}} - \alpha < z_1, z_2 < -\alpha$ расстояние между точками и расстояние между их образами уменьшается.

Если $-\alpha < z_1, z_2$, расстояние между точками и расстояние между их образами увеличивается на каждой итерации.

Утверждение 4.1.

Пусть $(\mu_1, \mu_2) \in L_1$, тогда отображение T_z^{-1} может быть записано в виде:

а) $z_0 = \dfrac{z_k}{1 + 3\alpha\gamma(z_k) \cdot z_k \cdot k}$, при $0 < z_k < 3\alpha + o(\alpha)$, где $\gamma(z_k) \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$,.

б) $z_0 = \dfrac{z_k}{\sqrt{1 + \gamma(z_k) \cdot z^2{}_k \cdot k}}$, при $z_k \geq 3\alpha + o(\alpha)$, $z_0 \geq 3\alpha + o(\alpha)$ $\gamma(y_k) \in \left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

в) $z_k \geq 3\alpha + o(\alpha)$, $z_0 \leq 3\alpha + o(\alpha)$ при построении T_z^{-1} мы имеем суперпозицию функций пункта а) и б)

Доказательство.

При $(\mu_1, \mu_2) \in L_1$, значение $3\alpha^2 + \mu_2 = 0$.Исходное отображение (4.5) перепишется в виде $\overline{z} = z + 3\alpha z^2 + z^3 + \ldots$ (4.6)

Для $0 < z_k < 3\alpha + o(\alpha)$, отображение (4.6) можно «зажать» двумя стандартными T_1^c и T_2^c так, что $z + \gamma_1 3\alpha z^2 \leq z + 3\alpha z^2 + z^3 + \ldots \leq z + \gamma_2 3\alpha z^2$, в качестве $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ и $\gamma_2 = 2$. И тогда, воспользуемся результатом лемме 1.2 получим, $z_0 = \dfrac{z_k}{1 + 3\alpha\gamma(z_k) \cdot z_k \cdot k}$.

Для $z_k \geq 3\alpha + o(\alpha)$, $z_0 \geq 3\alpha + o(\alpha)$, отображение (4.6) можно «зажать» двумя стандартными T_1^c и T_2^c так, что $z + \frac{1}{2}z^3 \leq z + 3\alpha z^2 + z^3 + \ldots \leq z + 2z^3$, и тогда, воспользуемся опять результатом лемме 1.2 получим, $z_0 = \dfrac{z_k}{\sqrt{1 + \gamma(z_k) \cdot z^2{}_k \cdot k}}$.

Утверждение 4.2.

Пусть $3\alpha^2+\mu_2=O(|\alpha|)$ или $3\alpha^2+\mu_2 \gg 3|\alpha|$, тогда существует такая константа $C_1>0$, такая что отображение T_z^{-1} может быть записано в виде:

а) $z_0=\dfrac{z_k}{\sqrt{1+\gamma(z_k)\cdot z^2{}_k\cdot k}}$, при $z_k,z_0\ge C_1\left(3\alpha^2+\mu_2\right)$, где $\gamma(z_k)\in\left(\dfrac{1}{2};2\right)$,.

б) $z_0=z_k\left(1+3a^2+\mu_2\right)^{-k}\left(1+\tilde{\gamma}(z_k)\right)$, при $z_k\ge C_1\left(3\alpha^2+\mu_2\right)$, $\gamma(y_k)$ некоторая ограниченная функция.

в) $z_k\ge C_1\left(3\alpha^2+\mu_2\right)$, $0<z_0\le C_1\left(3\alpha^2+\mu_2\right)$ при построении T_z^{-1} мы имеем суперпозицию функций пункта а) и б)

Доказательство. Доказательство этого утверждения аналогичное лемме 1.2 главы 1 и утверждению 3.2 главы 3.

Особый интерес представляют следующие.

Речь в них пойдет, о значениях параметра (μ_1,μ_2) близких к кривой L_1

Утверждение 4.3.

Пусть $(\mu_1,\mu_2)\in E_2$, и $3\alpha^2+\mu_2\ll 3\alpha$ тогда отображение T_z^{-1} может быть записано в виде:

а) $z_0=\dfrac{z_k}{\sqrt{1+\gamma(z_k)\cdot z^2{}_k\cdot k}}$ $z_k,z_0\ge 3\alpha+o(\alpha)$

б) $z_0=\dfrac{z_k}{1+3\alpha\gamma(z_k)\cdot z_k\cdot k}$ $C_2\left(3\alpha^2+\mu_2\right)\le z_k,z_0\le 3\alpha+o(\alpha)$

в) $z_0=z_k\left(1+3a^2+\mu_2\right)^{-k}\left(1+\tilde{\gamma}(z_k)\right)$, при $z_k\le C_2\left(3\alpha^2+\mu_2\right)$

с) иначе, применяем при построении T_z^{-1} суперпозицию функций пункта а) , б),в)

Доказательство. Заметим, что при $(\mu_1,\mu_2)\in E_2$ $\alpha>0$.

Для $z_k\ge 3\alpha+o(\alpha)$, отображение (4.6) можно «зажать» двумя стандартными T_1^c и T_2^c так, что

$z+\gamma_1 z^3 \le \overline{z} = z + (3\alpha^2+\mu_2)z + 3\alpha z^2 + z^3 + ... \le z + \gamma_2 z^3 + ...$, в качестве $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ и $\gamma_2 = 2$ и $z_k, z_0 \ge 3\alpha + o(\alpha)$ И тогда, воспользуемся результатом лемме 1.2 получим, $z_0 = \frac{z_k}{\sqrt{1+\gamma(z_k)\cdot z^2{}_k \cdot k}}$.

Для $C_2\left(3\alpha^2+\mu_2\right) \le z_k, z_0 \le 3\alpha + o(\alpha)$, отображение (4.5) можно «зажать» двумя стандартными T_1^c и T_2^c такими, что $z+\gamma_1 3\alpha z^2 \le z + 3\alpha z^2 + z^3 + ... \le z + \gamma_2 3\alpha z^2$, в И тогда, воспользуемся опять результатом лемме 1.2 получим, $z_0 = \frac{z_k}{1+3\alpha\gamma(z_k)\cdot z_k \cdot k}$.

И аналогично, утверждению 3.2 главы 3, получаем оценку в).

Утверждение 4.5.

Пусть $(\mu_1,\mu_2)\in E_1$, и $3\alpha^2+\mu_2 \ll 3\alpha$ тогда отображение T_z^{-1} может быть записано в виде:

а) $z_0 = \frac{z_k}{\sqrt{1+\gamma(z_k)\cdot z^2{}_k \cdot k}}$ $z_k, z_0 \ge 3\alpha + o(\alpha)$

б) записывается используя формулы (4.10) и (4.8) в диапазоне (4.7)

в) $z_0 = z_k\left(1+3a^2+\mu_2\right)^{-k}\left(1+\tilde{\gamma}(z_k)\right)$, при $z_k \le \sqrt{-\frac{\mu_2}{3}} - \alpha$

с) иначе, применяем при построении T_z^{-1} суперпозицию функций пункта а) , б),в)

Доказательство.При $(\mu_1,\mu_2)\in E_2$ и $\mu_2 < 0$,то $\alpha < 0$.

а)Для $z_k \ge 3\alpha + o(\alpha)$, $z_0 \ge 3\alpha + o(\alpha)$, отображение (4.6) можно «зажать» двумя стандартными T_1^c и T_2^c так, что $z+\frac{1}{2}z^3 \le z + 3\alpha z^2 + z^3 + ... \le z + 2z^3$, и тогда, воспользуемся результатом лемме 1.2 получим, $z_0 = \frac{z_k}{\sqrt{1+\gamma(z_k)\cdot z^2{}_k \cdot k}}$.

б) Для получения оценок при

$$\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}-\alpha \le z_k \le 3\alpha + o(\alpha) \text{ и } \sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}-\alpha \le z_0 \le 3\alpha + o(\alpha), \tag{4.7}$$

воспользуемся заменой $w = z - \left(\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}-\alpha\right)$, (4.8)

отображение (4.5) перепишется виде:

$$\begin{aligned}\bar{w} &= -\alpha^3 - \alpha\mu_2 - 2\sqrt{\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^3} + w + 3\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}w^2 + w^3 + \ldots \\ &= \mu_1 - 2\sqrt{\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^3} + w + 3\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}w^2 + w^3 + \ldots\end{aligned} \tag{4.9}$$

Видно, что это отображение в окрестности седло-узла и его можно мажорировать стандартными и получить оценки на w

$$\gamma_2\left(\mu_1 - 2\sqrt{\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^3}\right) + w + 3\gamma_2\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}w^2 \le \mu_1 - 2\sqrt{\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^3} + w + 3\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}w^2 + w^3 + \ldots$$

$$\le \gamma_1\left(\mu_1 - 2\sqrt{\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^3}\right) + w + 3\gamma_1\sqrt{-\frac{\mu_2}{3}}w^2$$

Тогда $$w_0 = \frac{w_k - \sqrt{\mu_1 - 2\sqrt{\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^3}}\, tg\left(\gamma k\sqrt{\mu_1 - 2\sqrt{\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^3}}\right)}{1 + \dfrac{w_k tg\left(\gamma k\sqrt{\mu_1 - 2\sqrt{\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^3}}\right)}{\sqrt{\mu_1 - 2\sqrt{\left(-\frac{\mu_2}{3}\right)^3}}}} \tag{4.10}$$

При $z_k \le \sqrt{-\frac{\mu_2}{3}} - \alpha$, имеем оценки $z_0 = z_k\left(1 + 3a^2 + \mu_2\right)^{-k}\left(1 + \tilde{\gamma}(z_k)\right)$

Замечание. *По координате x, аналогично лемме 1.2 главы 1 возможно записать оценку* $x_k = \lambda^k x_0 + x_0 h(x_0, y_k)$, (4.11)

где $h(x_0, y_k) = O\left(\lambda_1^k\right)$, $\lambda_1 > 0$ *некоторое число, удовлетворяющее условию* $\lambda_1 < \lambda + \delta < 1$, *и* $\delta > 0$ *– достаточно малая константа (стремящаяся к* *нулю при уменьшении до нуля размеров окрестности U_0). Кроме того, справедлива оценка*

Утверждения 1-5 дают нечто большее, чем оценки на производные

Лемма 4.1. *Пусть окрестности Π^+ и Π^- гомоклинических точек M^+ и M^- выбраны так, что $T\Pi^+ \bigcap \Pi^+ = \varnothing$, $T^{-1}\Pi^- \bigcap \Pi^- = \varnothing$. Тогда определено отображение $T_0 : \Pi^+ \to \Pi^-$ по траекториям отображения T в окрестности начала координат, причем областью определения T_0 является область B_0, представляющая собой счетное объединение непересекающихся полосок B_0^k, $B_0 = \bigcup\limits_{k=\bar{k}}^{\infty} B_0^k \subset \Pi_0$, $T_0 B_0 = B_1 \subset \Pi_1$, причем на каждом B_0^k отображение T_0 совпадает с T^k, т.е. $T_0 \big| B_0^k = T^k$ и $k \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.*

Более того, при $(\mu_1, \mu_2) \in E_1$, и $3\alpha^2 + \mu_2 \ll 3\alpha$ *в окрестности точки* $y = \sqrt{-\dfrac{\mu_2}{3}}$ полосы сжимаются и накапливаются, при переходе по параметрам на кривую L_1 происходит рождение седло-узловой неподвижной точки. «скачок гиперболичности»

Аналогично выкладкам главы 1, доказывается ***Основная теорема 4.1.***

Список литературы:

1. Л.П. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре –Биркгофа Матем. сб. 1967.-т.74(116).-стр.378-397.
2. S.V. Gonchenko, L.P. Shil'nikov, D.V. Turaev, On models with non-rough Poincare homo-clinic curves, Physica D., 1993, vol. 62, pp. 1-14.
3. S.V. Gonchenko, L.P. Shilnikov, D.V. Turaev, Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps, Nonlinearity, 2007, vol. 20, pp. 241-275.
4. Н.К. Гаврилов, Л.П. Шильников О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой I.- Матем сб. - 1972,-т.88(130). - №4. -475-492; II.- Матем сб.-1973.- т.90(132).- №1.- с139-157.
5. В.И. Лукьянов, Л.П.Шильников, О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами. ДАН СССР .-1978.-т.-243.-№1.-с. 26-29.
6. V.S.Afraimovich, L.P. Shilnikov, Invariant tori, their breakdown and stochasticity, Amer.Math. Soc. Transl., 1991, vol. 149, pp. 201-211.
7. S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms .IHES Publ. Math., 1983, vol. 57, 5-71.
8. L.P.Shilnikov, D.V.Turaev, A new simple bifurcation of a periodic orbit of “blue sky Catastrophe” type, Methods of qualitative theory of differential equations and related topics ,Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 200, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 165-188.
9. В.И.Арнольд, Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений .Из-во «Наука» 1978. – с 304.
10. В.И.Лукьянов, О бифуркациях динамических систем с петлей сепаратрисы «седло-узла». Диф.уравнения.-1982.-т.XVIII.-№9.-1493-1506.
11. В.И. Лукьянов, О периодических возмущениях динамических систем с петлей сепаратрисы седло – узла.- Статья в Трудах IX Международной конференции

по нелинейным колебаниям. -Т. II. - Качественные методы. – 1984.- Наукова думка, Киев.

12. О.В. Гордеева, В.И. Лукьянов, О бифуркациях динамических систем коразмерности два с негрубой гомоклинической структурой седло-узел.Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.- Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. – 2007.- № 2. - С.175-180.
13. О.В. Гордеева, В.И. Лукьянов Некоторые бифуркации предельных множеств в окрестности негрубой гомоклинической структуры с вырожденным периодическим движением.Нелинейный мир, 2007, т.5,№1-2. С.95-100.
14. В.И.Лукьянов. О сущетвовании гладких инвариантных слоений в окрестности некоторых негрубых неподвижных точек диффеоморфизма. Межвуз. сб. Горький .-1979.-с.60-66.
15. Tedeschini-Lalli L., Yorke J.A. How often do simple dynamical processes have infinitely many coexisting sinks? Commun.Math.Phys. 1986. V.106. P.635--657.
16. S.V. Gonchenko, L.P. Shilnikov, On moduli of systems with a structurally unstable homoclinic Poincare curve, Russian Acad. Sci. Izv. Math., 1993, vol. 41, no. 3, pp. 417-445.
17. L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, Methods of qualitative theory innonlinear dynamics. Part I, World Scientific, 1998.
18. Gonchenco S.V, Gordeeva O.V., Lukyyanov V.I., Ovsyannikov I.I. On bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with a quadratic homoclinic tangency to a saddle-node //Regular and chaotic dynamics. V. 19. № 4. 2014. P. 461-473.
19. С.В. Гонченко, О.В. Гордеева, В.И. Лукьянов, И.И. Овсянников. О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием к седло-узловой неподвижной точке.// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского.- Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. – 2014.- № 2.
20. О.В. Гордеева, В.И. Лукьянов. О некоторых бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием к негиперболической неподвижной точке // Вестник ННГУ им.Н.И.Лобачевского, раздел

математическое моделирование и оптимальное управление. Т. 1. № 4. 2015. С. 178-184.

21. С.В. Гонченко, О.В. Гордеева. О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с трансверсальным пересечением многообразий сложного седла. // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XX Международной конференции (г. Нижний Новгород). — Нижний Новгород: Изд-во Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2020. С. 124-129.
22. О.В.Гордеева. О бифуркациях динамических систем с гомоклиническими траекториями к негрубым периодическим движениям // математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии труды XXI Международной конференции. Нижний Новгород, 2021. С. 89-92.: Издательство: Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород). 2021.
23. О.В. Гордеева, В.И. Лукьянов. О системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой коразмерности два. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2005. № 2. (29) С. 59-66.
24. О.В. Гордеева, В.И. Лукьянов. Описание траекторий динамических систем в окрестности гомоклинической структуры с двойным вырождением//труды VII всеросийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» 19-22 сентября 2005.С.68-70
25. О.В. Гордеева, В.И. Лукьянов.О свойствах траекторий динамических систем в окрестности негрубой гомоклинической структуры. / Статья в Трудах УIII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем».- 2008. - том I.- Н. Новгород.
26. В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников, Теория Бифуркаций. Динамические системы-5, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, 1986.
27. В.М.Алексеев. Символическая динамика. -Одиннацитая математическая школа, г. Киев.Институт математики АН СССР, 1976.

28. O.V. Gordeeva. About two-dimensional diffeomorphisms with a quadratic homoclinic tangency to a nonhyperbolic saddle// 7th Bremen Summer School and Symposium Dynamical systems - pure and applied, August 5-9, 2019. The 7th Bremen Summer School and Symposium Dynamical Systems - pure and applied August 5-9, 2019 Faculty of Mathematics University of Bremen. 2019. P. 45-46
29. O.V Gordeeva, V.I.Lukyyanov On bifurcations of two-dimensional diffeomorphisms with a quadratic homoclinic tangency to a nonhyperbolic saddle// International Conference-School Shilnikov WorkShop 2018. International Conference-School Shilnikov WorkShop 2018, Book of Abstract, 22 p. 2018. P. 22.
30. O.V Gordeeva, V.I.Lukyyanov On Bifurcations of a 3 pa-rameter Family of Two-dimensional Diffeomor-phisms with a Quadratic Homoclinic Tangency to a Nonhyperbolic Saddle at $\mu = 0$.// International Conferense-«Topological methods in dy-namics and related topics». Nizhny Novgorod, Russia, January 3 – 6, 2019, Book of Abstracts. - p. 22.. 2019. P. 22.