

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского»

На правах рукописи



Харчева Анна Александровна

**Исследование нелинейных систем со случайными возмущениями  
различной природы в приложении к аномальной диффузии,  
динамике популяций и мемристорам**

Специальность 1.3.4. —  
Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, доцент  
Дубков Александр Александрович

Нижегород — 2022

## Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Статистические характеристики аномальной диффузии в форме полетов Леви . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1 Общие соотношения марковской теории для расчета статистических характеристик в переходном и установившемся режимах . . . . .	10
1.2 Среднее время пребывания частицы в нестабильном состоянии под действием шума Леви . . . . .	17
1.3 Аномальная диффузия в форме полетов Леви в бистабильном потенциале . .	22
1.3.1 Установившееся вероятностное распределение координаты частицы . .	24
1.3.2 Получение точной формулы для времени корреляции в установившемся состоянии . . . . .	27
1.4 Спектральные характеристики установившихся полетов Леви в удерживающих потенциалах с одним устойчивым состоянием . . . . .	33
1.5 Сравнительные вероятностные характеристики диффузионного движения в двумерных потенциалах . . . . .	38
1.5.1 Случай гауссовых белых шумов . . . . .	40
1.5.2 Случай шумов с распределением Леви . . . . .	41
1.6 Выводы по первой главе . . . . .	44
<b>Глава 2. Влияние шумов различной природы на поведение нелинейных динамических систем . . . . .</b>	<b>46</b>
2.1 Переходные и стационарные статистические характеристики модели Мальтуса–Ферхюльста–Бернулли (МФБ) . . . . .	47
2.1.1 Модель МФБ с полностью коррелированными негауссовыми источниками шума . . . . .	48
2.1.2 Модель МФБ с флуктуирующим объемом ресурсов . . . . .	51
2.2 Установившиеся вероятностные характеристики моделей Ферхюльста и Хонглера с мультипликативным белым пуассоновским шумом . . . . .	57
2.2.1 Модель Ферхюльста с мультипликативным белым пуассоновским шумом	58
2.2.2 Модель Хонглера с импульсными случайными возмущениями . . . . .	61
2.3 Динамическая мультимодальность, вызванная процессом Орнштейна–Уленбека и дихотомическим шумом . . . . .	64
2.3.1 Бимодальность в моностабильном потенциале четвертой степени . . . .	64
2.3.2 Мультимодальность в потенциалах другого вида . . . . .	65
2.3.3 Мультимодальность в системе со случайно переключающимся потенциалом . . . . .	69
2.4 Выводы по второй главе . . . . .	71

<b>Глава 3. Стохастические модели мемристора</b> . . . . .	74
3.1 Обзор теоретических моделей мемристивных систем . . . . .	75
3.2 Вероятностный анализ макромоделей идеального мемристора с внешним источником шума . . . . .	77
3.3 Физическая макромодель мемристора с учетом влияния внешних и внутренних шумов и её экспериментальная проверка . . . . .	82
3.3.1 Описание макромоделей . . . . .	82
3.3.2 Эволюция концентрации дефектов и сопоставление с другими моделями резистивного переключения . . . . .	89
3.4 Стохастическая модель мемристора на основе длины проводящего филамента	93
3.4.1 Описание сосредоточенной стохастической модели . . . . .	93
3.4.2 Индуцированные шумом явления в мемристивных системах . . . . .	95
3.5 Выводы по третьей главе . . . . .	102
<b>Заключение</b> . . . . .	103
<b>Список литературы</b> . . . . .	105
<b>Публикации автора по теме диссертации</b> . . . . .	117
<b>Приложение А. Метод решения неоднородного дифференциального     уравнения третьего порядка при вычислении времени     корреляции в установившемся состоянии</b> . . . . .	119
<b>Приложение Б. Модификация формул для установившегося     вероятностного распределения в симметричном степенном     потенциале с одним устойчивым состоянием</b> . . . . .	123
<b>Приложение В. Вывод уравнения для совместной характеристической     функции координат в случае диффузии в двумерном     потенциале</b> . . . . .	126
<b>Приложение Г. Динамические системы, управляемые процессом     Орнштейна–Уленбека и марковским дихотомическим шумом</b>	128
Г.1 Нелинейная динамическая система, возмущаемая процессом Орнштейна–Уленбека . . . . .	128
Г.2 Нелинейная динамическая система, находящаяся под одновременным воздействием процесса Орнштейна–Уленбека и марковского дихотомического шума . . . . .	133
<b>Приложение Д. Нахождение нестационарного решения управляющего     уравнения стохастической модели мемристора</b> . . . . .	139

## Введение

В теории неравновесных систем, где макропеременные подчиняются некоторым нелинейным уравнениям движения, шум играет ключевую роль. Только в присутствии шума, в мультистабильных системах происходят так называемые индуцированные шумом переходы из одного состояния в другое.

По этой причине изучение нелинейных систем, управляемых шумом, с последующими междисциплинарными приложениями привлекает быстро растущий интерес.

Получение строгих аналитических результатов в этой области сопряжено с серьезными трудностями: исходные уравнения являются нелинейными, а источники флуктуаций могут иметь самую различную природу. В большинстве случаев удастся ограничиться гауссовыми белыми или цветными шумами, но часто случайные воздействия должны рассматриваться как принципиально негауссовские. Например, в целом ряде экспериментов было обнаружено явление аномальной диффузии, отличающееся от обычного броуновского движения более быстрым, либо более медленным разбеганием облака частиц. Решение таких задач, наряду с мощным аппаратом марковской теории случайных процессов, требует использования специальных математических методов, таких как дробное исчисление, расщепление корреляции стохастических функционалов, метод обратного дифференциального оператора и т.д. Несмотря на большой интерес к изучению мультистабильности и метастабильности, проблема, связанная с детальным пониманием процессов, происходящих в нелинейных динамических системах в условиях шума, и его теоретическим описанием, все еще остается открытой проблемой.

Актуальным остается вопрос о влиянии шумов различной природы на поведение нелинейных систем в задачах экологии и генетики. Экологические модели находят все большее применение не только в различных естественнонаучных сферах (физике, химии и т.д.), но и играют важную роль для понимания механизмов применения нелинейной динамики к социальным и экономическим задачам. Заметим, что многие стохастические процессы, происходящие в популяционной динамике, нейродинамике и экологии демонстрируют мгновенные скачки, и поэтому не могут быть описаны возмущениями в виде гауссова шума.

Развитие методов статистической радиофизики применительно к задачам нелинейной динамики и аномальной диффузии нашло свое отражение в работах последних лет ведущих отечественных и зарубежных ученых (Metzler R., Klafter J., Chechkin A.V., Spagnolo B., Dybiec B., Gudowska—Nowak E., Sokolov I.M., Barkai E., Hänggi P., Дубков А.А., Панкратов А.Л., Агудов Н.В., Руденко О.В., Ряшко Л.Б., Башкирцева И.А., Учайкин В.В. и другие).

Мемристивные устройства и системы на их основе как элементы памяти в последнее время активно исследуются как мультистабильные системы, обладающие большим потенциалом для расширения фундаментальных основ теории нелинейной динамики. Наибольший интерес вызывают такие подходы и модели, которые учитывают стохастичность поведения мемристивных систем. Стохастичность мемристоров, наблюдаемая во многих экспериментах, проявляется в значительных флуктуациях величин сопротивлений состояний при каждом

переключении и в недостаточной предсказуемости отклика на импульсы управляющего напряжения. Стохастичное поведение в значительной степени имитирует биологические среды в мозге. Поэтому использование мемристивных структур для обучения нейронных сетей является очень перспективным. В настоящей работе уделяется внимание исследованию стохастичности мемристора, а именно, изучения влияния внешних и внутренних шумов на поведение мемристивных систем, поиск и анализ явлений с конструктивной ролью шума. Это необходимо для разработки адекватной физической модели мемристора, учитывающей его стохастичность, использование которой позволит повысить предсказуемость поведения и управляемость мемристивными устройствами.

Среди значимых работ можно выделить труды зарубежных и отечественных исследователей (Демин В.А., Михайлов А.Н., Chua L., Strukov D.B., Ielmini D., Kim S., Savel'ev S.E., Waser R., Pershin Y.V., Patterson G.A. и другие).

На основе сказанного можно сделать вывод о том, что актуальность научного направления и тема настоящей диссертационной работы сочетается с научными интересами широкого круга специалистов в мировой науке и является востребованной и важной для исследований в современной радиофизике.

**Целью** данной работы является дальнейшее развитие аппарата статистического анализа нелинейных динамических систем со случайными воздействиями негауссовой природы и его применение для исследования вероятностных, временных и спектрально-корреляционных характеристик аномальной диффузии в форме полетов Леви и некоторых распространенных моделей экологии и генетики, а также мемристивных системах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать методы статистического анализа систем с негауссовыми источниками шума.
2. Получить новые точные результаты для установившихся вероятностных и временных характеристик аномальной диффузии в форме полетов Леви в различных потенциальных профилях.
3. Исследовать вероятностные характеристики в эволюционных моделях с негауссовыми случайными воздействиями.
4. На основе ранее развитых стохастических моделей исследовать конструктивную роль внутренних и внешних шумов в мультистабильных мемристивных системах.

**Научная новизна** полученных результатов:

1. Впервые получено точное аналитическое выражение для времени корреляции установившейся аномальной диффузии в форме полетов Леви с единичным индексом Леви ( $\alpha = 1$ ) в симметричном бистабильном потенциале четвертой степени, на основе которого проведена ревизия формулы Крамерса для темпа преодоления потенциального барьера броуновской частицей.
2. Впервые найдены точные аналитические соотношения для установившихся вероятностных распределений координаты частицы при полетах Леви с индексом ( $\alpha = 1$ ) в симметричном степенном потенциале вида  $U(x) \propto x^{2m}$  с одним устойчивым состоянием, подтвердившие их бимодальность. В предельном переходе к бесконечно

глубокой прямоугольной потенциальной яме результат стыкуется с ранее полученным в литературе.

3. Впервые найдено и подтверждено результатами численного моделирования асимптотическое выражение для спектральной плотности мощности координаты частицы при установившейся супердиффузии Леви в симметричных степенных потенциальных профилях для шума с произвольным индексом Леви  $\alpha$ .
4. Впервые исследована эволюция вероятностного распределения плотности биологической популяции, описываемой обобщенной моделью Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли с флуктуациями объема жизненных ресурсов в форме белого негауссова шума с односторонним устойчивым распределением. Впервые обнаружена немонотонная релаксация средней плотности популяции к стационарному значению для шума с односторонним устойчивым распределением Леви—Смирнова.
5. На основе интегро-дифференциального уравнение Колмогорова—Феллера впервые получена точная формула для установившегося вероятностного распределения плотности биологической популяции, описываемой уравнением Ферхюльста с флуктуациями объема жизненных ресурсов в форме одностороннего пуассоновского белого шума, моделирующего быстрое уменьшение численности популяции в результате эпидемий или катастроф.
6. Впервые показано, что в генетической модели Хонглера при воздействии пуассоновской последовательности импульсов с экспоненциально распределенными амплитудами происходят индуцированные шумом переходы при изменении средней частоты появления импульсов, а также их амплитуды. Трансформация плотностей вероятности от унимодальности к бимодальности свидетельствует о наличии мутаций в рассматриваемой системе.
7. Впервые установлено, что в стохастической модели мемристивной системы, в которой управляющим параметром выступает концентрация вакансий, время релаксации концентрации вакансий к стационарному состоянию демонстрирует немонотонную зависимость от интенсивности шума с характерным минимумом.
8. В стохастической модели мемристивной системы, в которой переменной состояния является длина проводящего филамента, формирующегося внутри мемристора, впервые аналитически обнаружено индуцированное шумом явление переходной бимодальности вероятностного распределения длины филамента.

**Практическая значимость** Предложенные в работе идеи и методы могут иметь большое значение для понимания взаимовлияния флуктуаций, диссипации и нелинейности в различных системах, а также при решении практических задач, связанных с правильным учетом воздействия шумов с негауссовой статистикой на поведение нелинейных динамических систем. Результаты для статистических характеристик времени резистивного переключения позволят глубже понять физику происходящих внутри мемристора процессов и выработать рекомендации по оптимизации работы этих устройств.

Результаты работы могут представлять интерес для ряда научно-исследовательских учреждений таких как Институт прикладной физики РАН (ФИЦ ИПФ РАН, г. Нижний Нов-

город), Московский государственный университет (МГУ), Московский физико-технический институт (МФТИ), Казанский федеральный университет (КФУ), Саратовский государственный университет (СГУ), Уральский федеральный университет (УрФУ). часть полученных результатов внедрены в содержание курса “Конструктивная роль шума в нелинейных неравновесных системах”, читаемого аспирантам радиофизического факультета.

**Методология и методы исследования.** Для решения поставленных в диссертационной работе задач применялись методы статистической радиофизики, основанные на аппарате теории марковских случайных процессов и функциональном подходе к анализу стохастических систем, а также методы теории вероятностей и теории случайных процессов, выполнялось сравнение результатов аналитических расчетов с результатами численного моделирования.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Развита математический аппарат анализа нелинейных динамических систем с негауссовыми случайными воздействиями различной природы.
2. Установлена новая форма закона Крамерса для темпа преодоления потенциального барьера частицей при аномальной диффузии в форме полетов Леви на примере симметричного бистабильного потенциала.
3. Определены эволюции вероятностного распределения и среднего значения плотности биологической популяции, описываемой обобщенной моделью Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли с негауссовыми флуктуациями темпа воспроизводства и объема жизненных ресурсов.
4. Показано, что в генетической модели Хонглера при воздействии пуассоновской последовательности импульсов с экспоненциально распределенными амплитудами происходят индуцированные шумом переходы при изменении параметров шума.
5. Обнаружено индуцированное шумом явление переходной бимодальности вероятностного распределения в стохастической модели мемристивной системы, где переменной состояния служит длина филамента.

**Достоверность** научных положений и выводов, полученных в диссертации, обеспечивается строгостью применяемого математического аппарата. Обоснованность большинства результатов работы следует из получаемых точных соотношений в рамках рассматриваемых моделей и их стыковки с ранее известными результатами, а в случае приближенных расчетов подтверждается результатами численного моделирования.

**Апробация работы.** Основные результаты работы были представлены на 9-ти российских и 12-ти международных научных конференциях в 2013-2022 гг. в форме секционных и стендовых докладов:

- XIX-XXIV научные конференции по радиофизике (Н.Новгород, ННГУ им. Н.И. Лобачевского)
- XX-XXII Нижегородские сессии молодых ученых (естественные, математические науки)
- International Conference on Statistical Physics – SigmaPhi (Greece, 2014, 2017)
- 27th Marian Smoluchowski Symposium on Statistical Physics (Poland, 2014)

- 23rd (China, 2015) and 25th (Switzerland, 2019) International Conferences on Noise and Fluctuations
- 7th International Conferences “Unsolved Problems on Noise” (Spain, 2015)
- Summer school on Lévy processes (France, 2016)
- Summer School on Stochastic Processes with Applications to Physics and Biophysics (Israel, 2017)
- International Conference “New Trends in Nonequilibrium Statistical Mechanics: Classical and Quantum Systems” (Italy, 2018)
- 2nd International Workshop “From ReRAM and Memristors to new Computing Paradigms (MEM-Q)” (Greece, 2018)
- International Conference “New Trends in Nonequilibrium Stochastic Multistable Systems and Memristors” (Italy, 2019)

Материалы диссертации обсуждались на научных семинарах кафедры “Математические методы в радиофизике” радиофизического факультета ННГУ и лаборатории стохастических мультстабильных систем, организованной в рамках гранта Правительства Российской Федерации (договор № 074-02-2018-330 (2)), а также на заседаниях межуниверситетской аспирантской комиссии на факультете физики и химии университета г. Палермо (Италия).

**Личный вклад.** Все результаты, представленные в диссертационной работе, выполнены при непосредственном активном участии соискателя либо получены им лично. В большинстве совместных работ автором выполнены аналитические расчеты. Постановка задач, разработка подходов, объяснение и интерпретация результатов были осуществлены совместно с соавторами научных работ, опубликованных соискателем.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 21 печатном издании: 7 – в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 14 – в тезисах докладов.

**Объем и структура работы.** Научная работа состоит из введения, трех глав, заключения и пяти приложений. Полный объем диссертации составляет 141 страницу с 48 рисунками и 1 таблицей. Список литературы содержит 184 наименования.

## Глава 1. Статистические характеристики аномальной диффузии в форме полетов Леви

В последнее время непрерывно возрастает количество публикаций, в которых изучается так называемая аномальная (прыжковая) диффузия, отличающаяся от обычного броуновского движения более быстрым, либо более медленным разбеганием облака частиц, и наблюдаемая в различных физических и химических системах [1–6]. Медленная диффузия, называемая субдиффузией, проявляется в веществах со сложной геометрией – мутных кристаллах и стеклах, аморфных полупроводниках, в то время как ускоренная диффузия или супердиффузия встречается в хаотической динамике и турбулентности.

Особое внимание в литературе уделяется одной из форм аномальной диффузии – так называемым полетам Леви, характеризующимся наличием в реализации наряду с обычными непрерывными участками экстремально больших скачков. Подобный вид супердиффузии наблюдается во многих физических системах, таких как диффузия потоков в плазме [7], движение отдельного иона в одномерной оптической решетке [8–10], движение фотонов [11], гидродинамика [12; 13], долговременные изменения климата [14] и мобильность людей [15; 16].

Большим плюсом для описания аномальной диффузии в форме полетов Леви является то, что здесь применим хорошо разработанный аппарат марковских случайных процессов. Это позволяет последовательно вывести уравнение Фоккера–Планка с дробной пространственной производной непосредственно из ланжевеновского уравнения для координаты прыгающей частицы с источником в форме устойчивого процесса Леви [17; 18]. На данный момент хорошо изучен вопрос о стационарных вероятностных распределениях и конформном преобразовании аномальной диффузии в форме полетов Леви в различных потенциалах [7; 19–22].

Аналитическое исследование корреляционных и спектральных свойств установившихся полетов Леви в удерживающих потенциалах остается открытой проблемой. В последнее время наибольшее внимание в литературе уделяется анализу временных характеристик полетов Леви, таких как среднее время первого достижения границ, среднее время прихода, время пребывания в заданной области [14; 20; 23–29]. Стоит отметить, что большинство результатов, полученных в данной области, являются либо приближенными аналитическими, либо численными.

Активно изучаются и известные нелинейные флуктуационные явления, в которых явно проявляется конструктивная роль шума: стохастический резонанс и резонансная активация при диффузии в форме полетов Леви [30; 31], явление бимодальности [20] и мультимодальности [32; 33], двойной стохастический резонанс [34]. Наконец, особенности однонаправленного переноса частиц вдоль периодической структуры (рэтчет-эффект) при наличии полетов Леви анализировались в работах [26; 35]. Хорошо разработанная теория полетов Леви нашла приложение в задачах глобальной оптимизации [36–39].

В разделе 1.1 изложены общие соотношения марковской теории для расчетов переходных и установившихся характеристик движения.

Раздел 1.2 посвящен эффекту задержки шумом распада нестабильных состояний (ЗРШ) под действием шума Леви в полностью неустойчивой системе, а именно в обратном симметричном параболическом потенциале.

В разделе 1.3 исследуются стационарные вероятностные и временные характеристики аномальной диффузии в форме полетов в симметричном бистабильном потенциале четвертой степени.

В разделе 1.4 теоретически и численными методами исследуются установившиеся корреляционные характеристики супердиффузии в форме полетов Леви в симметричных степенных потенциальных профилях для шума с произвольным индексом Леви  $\alpha$ . Теоретические результаты, полученные для полетов Леви, сравниваются с результатами для нормальной броуновской диффузии.

В разделе 1.5 рассматриваются вероятностные характеристики диффузии частицы для произвольных статистически независимых источников белого шума в двумерном потенциале произвольного вида, также проводится сравнение установившихся вероятностных характеристик броуновской диффузии и аномальной диффузии в форме полетов Леви в потенциале с радиальной симметрией.

Настоящая глава подготовлена по материалам, опубликованным в работах [A2—A4; A8; A12—A14; A16—A18].

## 1.1 Общие соотношения марковской теории для расчета статистических характеристик в переходном и установившемся режимах

В данном вводном разделе представлен основной аппарат марковской теории для расчета переходных и установившихся характеристик. Наряду с известными в нем представлены новые результаты, являющиеся отправной точкой этой исследовательской работы.

Рассмотрим произвольный однородный во времени марковский процесс  $x(t)$  с плотностью вероятностей переходов  $P(x, t | x_0, t_0)$ , которая зависит только от разницы времен  $\tau = t - t_0 \geq 0$ . Условная плотность вероятности  $P(x, t | x_0, t_0) = P(x, t - t_0 | x_0, 0)$  удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова [40]

$$\frac{\partial P(x, t - t_0 | x_0, 0)}{\partial t} = \hat{L}(x) P(x, t - t_0 | x_0, 0), \quad (1.1)$$

где  $\hat{L}(x)$  – кинетический оператор, не зависящий от времени. В то же время, плотность вероятности переходов  $P(x, t - t_0 | x_0, 0)$  может быть описана обратным уравнением Колмогорова

$$-\frac{\partial P(x, t - t_0 | x_0, 0)}{\partial t_0} = \hat{L}^+(x_0) P(x, t - t_0 | x_0, 0), \quad (1.2)$$

где  $\hat{L}^+(x_0)$  – сопряженный кинетический оператор.

В соответствии с определением, если случайный процесс  $x(t)$  стартует с значения  $x_0$  в момент времени  $t = 0$ , время его пребывания  $T(x_0)$  в заданной области  $G$  для бесконечного времени наблюдения выражается следующей формулой [41]

$$T(x_0) = \int_0^\infty \mathbb{1}_G(x(t)) dt, \quad (1.3)$$

где  $\mathbb{1}_G(y)$  – индикаторная функция множества  $G$ , определяемая равенством

$$\mathbb{1}_G(y) = \begin{cases} 1, & y \in G, \\ 0, & y \notin G. \end{cases} \quad (1.4)$$

Проводя усреднение по ансамблю обеих частей уравнения (1.3), находим среднее время пребывания случайного процесса  $x(t)$  в области  $G$

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_0^\infty dt \int_G P(x, t | x_0, 0) dx = \int_0^\infty \text{Pr}(t, x_0) dt, \quad (1.5)$$

где  $\text{Pr}(t, x_0)$  – это вероятность найти частицу в области  $G$  в момент времени  $t$ . Для сходимости несобственного интеграла в уравнении (1.5) необходимо, чтобы условная плотность вероятности  $P(x, t | x_0, 0)$  стремилась к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Это означает, что у марковского процесса  $x(t)$  отсутствует установившийся режим.

Меняя порядок интегрирования, можно записать уравнение (1.5) в следующем виде

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_G Y(x, x_0) dx, \quad (1.6)$$

где

$$Y(x, x_0) = \int_0^\infty P(x, t | x_0, 0) dt. \quad (1.7)$$

Из определения (1.3) второй момент времени пребывания вычисляется как

$$\begin{aligned} \langle T^2(x_0) \rangle &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\tau \langle \mathbb{1}_G(x(t)) \mathbb{1}_G(x(\tau)) \rangle = \\ &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty d\tau \int_{G \times G} P(x, t; y, \tau | x_0, 0) dx dy. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Используя свойство отсутствия последействия марковского случайного процесса  $x(t)$

$$P(x, t_2; y, t_1 | x_0, t_0) = P(x, t_2 | y, t_1) P(y, t_1 | x_0, t_0), \quad (1.9)$$

где  $t_0 < t_1 < t_2$ , имеем

$$\langle T^2(x_0) \rangle = \int_0^\infty dt \int_t^\infty d\tau \int_G dx \int_G P(y, \tau - t | x, 0) P(x, t | x_0, 0) dy + \quad (1.10)$$

$$+ \int_0^\infty d\tau \int_\tau^\infty dt \int_G dx \int_G P(x, t - \tau | y, 0) P(y, \tau | x_0, 0) dy. \quad (1.11)$$

Заменяя переменные под интегралами и принимая во внимание уравнения (1.6) и (1.7), окончательно находим

$$\langle T^2(x_0) \rangle = 2 \int_G Y(x, x_0) dx \int_G Y(y, x) dy = 2 \int_G Y(x, x_0) \langle T(x) \rangle dx. \quad (1.12)$$

Дисперсия времени пребывания подсчитывается по следующей формуле

$$\text{Var}(x_0) = \langle T^2(x_0) \rangle - \langle T(x_0) \rangle^2. \quad (1.13)$$

Аналогично,  $n$ -ый момент времени пребывания (1.3) может быть записан в рекуррентной форме

$$\langle T^n(x_0) \rangle = n \int_G Y(x, x_0) \langle T^{n-1}(x) \rangle dx. \quad (1.14)$$

Соотношения для моментов (1.6), (1.12) и (1.14) позволяют получить замкнутые уравнения для характеристической функции случайного времени пребывания. В соответствии с определением, имеем

$$\theta(k, x_0) = \langle e^{ikT(x_0)} \rangle = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \langle T^n(x_0) \rangle. \quad (1.15)$$

Подстановка (1.14) в (1.15) даёт

$$\begin{aligned} \theta(k, x_0) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n}{(n-1)!} \int_G Y(x, x_0) \langle T^{n-1}(x) \rangle dx = \\ &= 1 + ik \int_G Y(x, x_0) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \langle T^m(x) \rangle dx. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Таким образом, из (1.15) и (1.16) получаем следующее интегральное уравнение для характеристической функции времени пребывания  $T(x_0)$

$$\theta(k, x_0) = 1 + ik \int_G Y(x, x_0) \theta(k, x) dx. \quad (1.17)$$

Интегро-дифференциальное уравнение для функции плотности вероятности  $W_{x_0}(\tau) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \theta(k, x_0) e^{-ikt} dk$  времени пребывания (1.3) может быть получено обратным преобразованием Фурье соотношения (1.17)

$$W_{x_0}(t) = \delta(t) - \frac{d}{dt} \int_G Y(x, x_0) W_x(t) dx. \quad (1.18)$$

Выражения (1.17) и (1.18) описывают полную статистику времени пребывания случайного однородного во времени марковского процесса  $x(t)$ , который не имеет установившегося режима. Конечно, для решения уравнений (1.17) и (1.18), как аналитически, так и численно, необходимо знать условную плотность вероятности  $P(x, t | x_0, 0)$  марковского процесса.

В качестве примера однородного марковского процесса рассмотрим симметричный процесс Леви  $L(t)$  с произвольным индексом  $\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 2$ ) и характеристической функцией вида

$$\vartheta(k, t) = \langle e^{ikL(t)} \rangle = e^{ikx_0 - \sigma^\alpha |k|^\alpha t}, \quad (1.19)$$

где  $\sigma^\alpha$  – интенсивность шума [22; 42],  $x(0) = x_0$ . Этот марковский случайный процесс не имеет стационарного распределения и переходит в винеровский процесс при  $\alpha = 2$ . Применяя обратное преобразование Фурье к (1.19) для отыскания условной плотности вероятности

$P(x, t | x_0, 0)$  и подставляя результат в (1.7), находим функцию  $Y(x, x_0)$ , включенную в интегральное уравнение (1.17)

$$Y(x, x_0) = \frac{1}{\pi\sigma^\alpha} \int_0^\infty \frac{\cos k(x - x_0)}{k^\alpha} dk. \quad (1.20)$$

Интеграл в (1.20) расходится для индекса Леви  $\alpha \geq 1$ , что означает, что для этих случаев, в том числе для винеровского процесса ( $\alpha = 2$ ), среднее время пребывания (1.3) бесконечно. В то же время, для процессов Леви с индексом  $\alpha < 1$  из (1.20) получаем конечное выражение

$$Y(x, x_0) = \frac{|x - x_0|^{\alpha-1}}{2\sigma^\alpha \Gamma(\alpha) \cos(\pi\alpha/2)}, \quad (1.21)$$

где  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция. В частности, из (1.6) и (1.21) следует, что для области  $G$  в форме интервала  $(-L, L)$  среднее время пребывания таково (см. для сравнения уравнение (31) в работе [41])

$$\langle T(x_0) \rangle = \frac{(L - x_0)^\alpha + (L + x_0)^\alpha}{2\Gamma(\alpha + 1)\sigma^\alpha \cos(\pi\alpha/2)}. \quad (1.22)$$

Следует подчеркнуть, что задача нахождения асимптотического вероятностного распределения ( $t \rightarrow \infty$ ) времен пребывания марковских процессов со стационарными приращениями ранее рассматривалась в работе [43]. Основным результатом [43] является доказательство того, что при подходящих, но довольно общих условиях, предельным распределением должно быть распределение Миттага–Леффлера.

Приведем далее соотношения для вычисления спектрально-корреляционных характеристик марковских процессов в установившемся режиме.

В соответствии с определением, корреляционная функция марковского процесса  $x(t)$  в установившемся состоянии вычисляется как

$$K[\tau] = \langle x(t)x(t + \tau) \rangle_{st} = \int_{-\infty}^{+\infty} x_0 P_{st}(x_0) dx_0 \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x, \tau | x_0, 0) dx. \quad (1.23)$$

Здесь угловые скобки с индексом  $st$  означают усреднение по установившемуся вероятностному распределению  $P_{st}(x)$ , удовлетворяющему уравнению (1.1),

$$\hat{L}(x) P_{st}(x) = 0. \quad (1.24)$$

С учетом очевидного начального условия  $P(x, 0 | x_0, 0) = \delta(x - x_0)$ , решение обратного уравнения Колмогорова (1.2) может быть представлено в операторной форме

$$P(x, \tau | x_0, 0) = e^{\hat{L}^+(x_0)\tau} \delta(x - x_0). \quad (1.25)$$

Подставляя (1.25) в (1.23) и выполняя интегрирование, приходим к [44]

$$K[\tau] = \left\langle x e^{\hat{L}^+(x)\tau} x \right\rangle_{st}. \quad (1.26)$$

Исходя из (1.26), корреляционная функция может быть представлена следующим рядом (см. [45])

$$K[\tau] = \langle x \rangle_{st}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 e^{-\lambda_n \tau}, \quad (1.27)$$

где  $\alpha_n = \langle x \psi_n(x) \rangle_{st}$ , а  $\psi_n(x)$  и  $\lambda_n > 0$  – соответственно собственные функции и собственные значения сопряженного кинетического оператора  $\hat{L}^+(x)$ , определяемые из уравнения

$$\hat{L}^+(x)\psi_n(x) = -\lambda_n\psi_n(x). \quad (1.28)$$

Время корреляции стационарного случайного процесса  $x(t)$  может быть определено через ширину эквивалентного прямоугольника (см., например, [46] и Рисунок 1.1)

$$\tau_c = \frac{1}{\langle x, x \rangle} \int_0^{\infty} (K[\tau] - \langle x \rangle^2) d\tau \quad (1.29)$$

при условии сходимости интеграла.

Здесь корреляционная функция  $K[\tau]$  изменяется от  $K[0] = \langle x^2 \rangle$  до  $K[\infty] = \langle x \rangle^2$ , а  $\langle x, x \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$  – дисперсия случайного процесса  $x(t)$ . Как видно из (1.27) и Рисунка 1.1, корреляционная функция любого стационарного марковского процесса является неотрицательной и монотонно убывающей, что указывает на применимость определения (1.29) в данном случае.

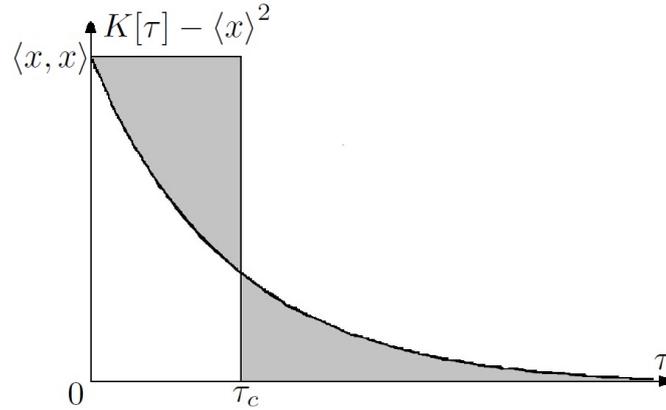


Рис. 1.1 — Иллюстрация к определению (1.29) времени корреляции  $\tau_c$ . Закрашенные области должны иметь одинаковую площадь

Покажем, что расчет времени корреляции стационарного марковского процесса по формуле (1.29) в ряде случаев может быть выполнен точно без отыскания плотности вероятностей переходов. Подставляя (1.26) в (1.29) и интегрируя под знаком среднего, приходим к

$$\tau_c = -\frac{1}{\langle x, x \rangle_{st}} \left\langle x, \frac{1}{\hat{L}^+(x)} x \right\rangle_{st}, \quad (1.30)$$

где  $\langle f(x), g(x) \rangle = \langle f(x)g(x) \rangle - \langle f(x) \rangle \langle g(x) \rangle$ . Применяя определение сопряженного оператора  $\hat{L}^+(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{L}(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \hat{L}^+(x)f(x) dx, \quad (1.31)$$

из (1.30) получаем

$$\tau_c = \frac{1}{\langle x, x \rangle_{st}} \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\hat{L}(x)} (\langle x \rangle_{st} - x) P_{st}(x) dx. \quad (1.32)$$

Как следует из (1.32), сначала необходимо найти частное решение  $\phi(x)$  следующего уравнения

$$\hat{L}(x)\phi(x) = (\langle x \rangle_{st} - x) P_{st}(x) \quad (1.33)$$

и затем вычислить время корреляции как

$$\tau_c = \frac{1}{\langle x, x \rangle_{st}} \int_{-\infty}^{\infty} x \phi(x) dx. \quad (1.34)$$

Для разрывного марковского процесса  $x(t)$  уравнение Колмогорова для плотности вероятности становится интегро-дифференциальным [17], и для решения (1.33) обычно применяют преобразование Фурье. В этом смысле, время корреляции  $\tau_c$  в (1.34) удобно выразить через функцию  $\tilde{\phi}(k)$ , являющуюся Фурье-изображением  $\phi(x)$

$$\tilde{\phi}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{ikx} dx. \quad (1.35)$$

С помощью первого замечательного предела можно записать (1.34) в более простом виде (см. [47])

$$\tau_c = \frac{1}{\langle x, x \rangle_{st}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{k} dx = \frac{1}{\langle x, x \rangle_{st}} \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\varphi(k) - \varphi(0)}{k} dx = \frac{\varphi'(0)}{\langle x, x \rangle_{st}}, \quad (1.36)$$

где, в соответствии с (1.35),

$$\varphi(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \sin kx dx = \text{Im}\{\tilde{\phi}(k)\}. \quad (1.37)$$

Таким образом, для нахождения времени корреляции после Фурье-преобразования уравнения (1.33) необходимо получить уравнение для мнимой части функции  $\tilde{\phi}(k)$ , решить его и затем подставить результат в (1.36).

Исходя из общей операторной формулы (1.26) для корреляционной функции  $K[\tau]$  стационарного марковского процесса  $x(t)$ , можно найти его спектральные характеристики. В соответствии с теоремой Винера—Хинчина, запишем выражение для спектральной плотности мощности в следующем виде

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K[\tau] \cos \omega\tau d\tau = 2 \text{Re} \left\{ \int_0^{\infty} K[\tau] e^{-i\omega\tau} d\tau \right\} = 2 \text{Re} \left\{ \tilde{K}[i\omega] \right\}, \quad (1.38)$$

где  $\tilde{K}[p]$  – изображение по Лапласу функции  $K[\tau]$  и запись  $\text{Re}\{\tilde{K}[i\omega]\}$  означает взятие реальной части выражения. Согласно (1.26), для  $\tilde{K}[p]$  имеем

$$\tilde{K}[p] = \left\langle x \frac{1}{p - \hat{L}^+(x)} x \right\rangle_{st}. \quad (1.39)$$

Как видно из (1.39), необходимо решить следующее уравнение для вспомогательной функции  $\varphi_p(x)$

$$\hat{L}^+(x)\varphi_p(x) - p\varphi_p(x) = -x \quad (1.40)$$

и затем вычислить среднее

$$\tilde{K}[p] = \langle x\varphi_p(x) \rangle_{st}. \quad (1.41)$$

В рамках данной исследовательской работы рассматриваются две модели марковских случайных процессов, наиболее часто встречающихся в вычислениях.

Передемпфированное движение в потенциале  $U(x)$  под действием негауссового белого шума  $\xi(t)$  описывается следующим уравнением Ланжевена для координаты частицы  $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = -U'(x) + \xi(t). \quad (1.42)$$

Соответствующее уравнение Колмогорова для плотности вероятности марковского процесса  $x(t)$  было получено в работе [17] и имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)P] + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(z)}{z^2} \left[ \exp \left\{ -z \frac{\partial}{\partial x} \right\} - 1 + \sin z \frac{\partial}{\partial x} \right] dz P, \quad (1.43)$$

где функция  $\rho(z) \geq 0$ .

В частности, для белого гауссова шума  $\xi(t)$  с нулевым средним и интенсивностью  $2D$  функция  $\rho$  является сингулярной  $\rho(x) = 2D\delta(x)$ . Тогда из уравнение (1.43) переходит в известное уравнение Фоккера—Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)P] + D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (1.44)$$

описывающее броуновскую диффузию.

В то же время, для негауссовой сторонней силы  $\xi_\alpha(t)$  с симметричным устойчивым вероятностным распределением Леви ( $0 < \alpha < 2$  – индекс Леви), функция  $\rho$  является степенной  $\rho(x) = Q_\alpha |x|^{1-\alpha}$ . В результате, уравнение (1.43) превращается в интегро-дифференциальное уравнение Фоккера—Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)P] + D_\alpha \frac{\partial^\alpha P}{\partial |x|^\alpha} \quad (1.45)$$

с дробной пространственной производной

$$D_\alpha \frac{\partial^\alpha P(x,t)}{\partial |x|^\alpha} = Q_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x-z,t) - P(x,t)}{|z|^{1+\alpha}} dz, \quad (1.46)$$

где параметр  $D_\alpha$  характеризует интенсивность воздействующего шума  $\xi_\alpha(t)$

$$D_\alpha = \frac{\pi Q_\alpha}{\Gamma(\alpha + 1) \sin(\pi\alpha/2)}. \quad (1.47)$$

Заметим, что уравнение (1.45) описывает так называемую аномальную диффузию в форме полетов Леви.

## 1.2 Среднее время пребывания частицы в нестабильном состоянии под действием шума Леви

Эффект задержки шумом распада нестабильных состояний (ЗРШ) хорошо исследован для систем с броуновской диффузией. Проанализируем в данном разделе, как обстоят дела в системах с аномальной диффузией. Найдем среднее время пребывания частицы в заданной области в случае полетов Леви в обратном параболическом потенциале вида  $U(x) = -bx^2/2$  ( $b > 0$ ) (см. Рисунок 1.2).

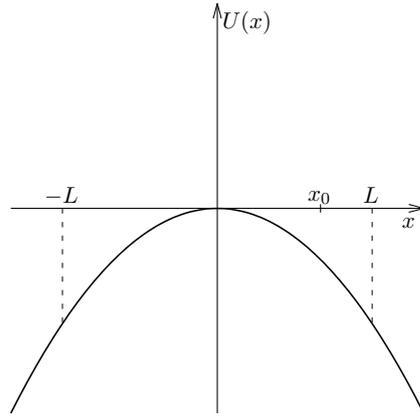


Рис. 1.2 — Обратный параболический потенциал

Подставляя потенциал  $U(x)$  в уравнение Ланжевена (1.42) с негауссовым белым шумом  $\xi_\alpha(t)$ , обладающим симметричным распределением Леви, получаем следующее линейное дифференциальное уравнение для координаты частицы

$$\frac{dx}{dt} = bx + \xi_\alpha(t). \quad (1.48)$$

Решение уравнения (1.48) может быть записано в явном виде

$$x(t) = x_0 e^{bt} + \int_0^t e^{b(t-\tau)} \xi_\alpha(\tau) d\tau, \quad (1.49)$$

где  $x_0$  – начальное положение частицы. Используя точное решение (1.49), можно найти характеристическую функцию координаты частицы  $x(t)$  в соответствии с определением

$$\vartheta(k, t) = \langle e^{ikx(t)} \rangle. \quad (1.50)$$

Подставляя  $x(t)$  из соотношения (1.49) в (1.50), получаем

$$\vartheta(k, t) = e^{ikx_0 e^{bt}} \left\langle e^{ik \int_0^t e^{b(t-\tau)} \xi_\alpha(\tau) d\tau} \right\rangle. \quad (1.51)$$

Для подсчета среднего в (1.51) воспользуемся выражением для характеристического функционала  $\xi_\alpha(t)$  с параметром интенсивности  $D_\alpha = \sigma^\alpha$  (см. формулу (4) в работе [22], а также общий результат (8) в работе [17])

$$\left\langle \exp \left\{ i \int_0^t u(\tau) \xi_\alpha(\tau) d\tau \right\} \right\rangle = \exp \left\{ - \int_0^t |\sigma u(\tau)|^\alpha d\tau \right\}, \quad (1.52)$$

где  $u(t)$  – произвольная детерминистическая функция. Заменяя в (1.52)  $u(\tau)$  на  $ke^{b(t-\tau)}$  и подставляя в (1.51), окончательно приходим к

$$\vartheta(k, t) = \exp \left\{ ikx_0 e^{bt} - \frac{\sigma^\alpha |k|^\alpha}{\alpha b} (e^{\alpha b t} - 1) \right\}. \quad (1.53)$$

Далее проанализируем время пребывания частицы в симметричном интервале  $(-L, L)$  для начальной позиции частицы  $x_0 \in (-L, L)$ . Применяя обратное преобразование Фурье к (1.53), находим условную плотность вероятности переходов  $P(x, t | x_0, 0)$  и вероятность нахождения частицы в интервале  $(-L, L)$

$$\text{Pr}(t, x_0) = \int_{-L}^L P(x, t | x_0, 0) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kL}{k} \cos(kx_0 e^{bt}) \exp \left\{ -\frac{(\sigma k)^\alpha (e^{\alpha b t} - 1)}{\alpha b} \right\} dk. \quad (1.54)$$

В пределе  $t \rightarrow \infty$  основной вклад в интеграл (1.54) дает область, близкая к  $k = 0$ , так что, используя приближение  $\sin kL \simeq kL$  и условие  $e^{\alpha b t} \gg 1$ , получаем из (1.54)

$$\text{Pr}(t, x_0) \simeq \frac{2L}{\pi} \int_0^\infty \cos(kx_0 e^{bt}) \exp \left\{ -\frac{(\sigma k e^{bt})^\alpha}{\alpha b} \right\} dk$$

или после замены переменной  $q = ke^{bt}$

$$\text{Pr}(t, x_0) \simeq \frac{2L}{\pi} e^{-bt} \int_0^\infty \cos(qx_0) \exp \left\{ -\frac{(\sigma q)^\alpha}{\alpha b} \right\} dq. \quad (1.55)$$

В силу экспоненциального убывания вероятности (1.55), интеграл в (1.5) сходится. Более того, в соответствии с (1.55) все моменты времени пребывания (1.3) также конечны.

Подставляя (1.54) в (1.5), после некоторых преобразований получаем следующую точную формулу для среднего времени пребывания как функцию начального положения частицы, параметров системы и шума Леви

$$\langle T(x_0) \rangle = \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\cos(qx_0)}{q} \exp \left\{ -\frac{(\sigma q)^\alpha}{\alpha b} \right\} dq \times \int_0^q \frac{\sin kL}{k} \exp \left\{ \frac{(\sigma k)^\alpha}{\alpha b} \right\} dk$$

или

$$\langle T(x_0) \rangle = \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\sin kL}{k} \exp \left\{ \frac{(\sigma k)^\alpha}{\alpha b} \right\} dk \times \int_k^\infty \frac{\cos(qx_0)}{q} \exp \left\{ -\frac{(\sigma q)^\alpha}{\alpha b} \right\} dq. \quad (1.56)$$

Проверим, во что переходит результат (1.56) при отсутствии шума  $\xi_\alpha(t)$ . Полагая в (1.56)  $\sigma = 0$ , находим динамическое время пребывания частицы в интервале  $(-L, L)$

$$T_{dyn} = \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\cos(qx_0)}{q} dq \int_0^q \frac{\sin kL}{k} dk = \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\cos(qx_0) \text{Si}(qL)}{q} dq, \quad (1.57)$$

где  $\text{Si}(x)$  – интегральный синус [48]

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Используя известный интеграл ( $\alpha, \beta > 0$ )

$$\int_0^\infty \frac{\cos(\beta x) \text{Si}(\alpha x)}{x} dx = \begin{cases} (\pi/2) \ln(\alpha/\beta), & \alpha > \beta, \\ 0, & \alpha < \beta \end{cases}$$

и принимая во внимание, что  $|x_0| < L$ , получаем

$$T_{dyn} = \frac{1}{b} \ln \frac{L}{|x_0|}. \quad (1.58)$$

Результат (1.58) соответствует динамике рассматриваемой системы. В самом деле, прямое интегрирование уравнения (1.48) с  $\xi_\alpha(t) = 0$  дает

$$\int_{x_0}^L \frac{dx}{x} = \int_0^{T_{dyn}} b dt,$$

откуда получаем соотношение (1.58).

Покажем, что в случае устойчивого шума Коши с индексом  $\alpha = 1$ , можно записать результат (1.56) в виде одного интеграла. Подставляя  $\alpha = 1$  в (1.56), приходим к

$$\langle T(x_0) \rangle = \frac{2}{\pi b} \int_0^\infty \frac{\sin kL}{k} e^{\sigma k/b} dk \int_k^\infty \frac{\cos(qx_0)}{q} e^{-\sigma q/b} dq. \quad (1.59)$$

Дифференцируя соотношение (1.59) по параметру  $x_0$  и вычисляя внутренний интеграл, имеем

$$\frac{d \langle T(x_0) \rangle}{dt} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{(bx_0 \cos kx_0 + \sigma \sin kx_0) \sin kL}{k(\sigma^2 + b^2 x_0^2)} dk. \quad (1.60)$$

Используя формулы для интеграла Дирихле

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(\alpha)$$

и интеграла Фруллани

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx = \ln \left| \frac{b}{a} \right|,$$

где  $\operatorname{sgn}(x)$  – знаковая функция, из (1.60) получаем

$$\langle T(x_0) \rangle' = \frac{\frac{\sigma}{\pi} \ln \left| \frac{L-x_0}{L+x_0} \right| - bx_0 1(L-x_0)}{\sigma^2 + b^2 x_0^2}, \quad (1.61)$$

где  $1(x)$  – единичная функция. В соответствии с (1.56),

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \langle T(x_0) \rangle = 0.$$

Как следствие, из (1.61) находим

$$\langle T(x_0) \rangle = \int_{x_0}^\infty \frac{bz 1(L-z) + \frac{\sigma}{\pi} \ln \left| \frac{L+z}{L-z} \right|}{\sigma^2 + b^2 z^2} dz$$

или

$$\langle T(x_0) \rangle = \frac{1}{2b} \ln \frac{\sigma^2 + b^2 L^2}{\sigma^2 + b^2 x_0^2} + \frac{\sigma}{\pi} \int_{x_0}^\infty \ln \left| \frac{L+z}{L-z} \right| \frac{dz}{\sigma^2 + b^2 z^2}, \quad (1.62)$$

где  $|x_0| < L$ . Очевидно, что в случае  $\sigma = 0$  (1.62) совпадает с (1.58).

Используя уравнения (1.12), (1.53) и (1.56), находим второй момент времени пребывания

$$\begin{aligned} \langle T^2(x_0) \rangle &= \frac{4}{\pi^2 b^2} \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{(\sigma k)^\alpha}{\alpha b} \right\} dk \int_k^\infty \frac{\cos(qx_0)}{q} \exp \left\{ -\frac{(\sigma q)^\alpha}{\alpha b} \right\} dq \\ &\times \int_0^\infty \frac{\sin(k_1 L)}{k_1} \exp \left\{ \frac{(\sigma k_1)^\alpha}{\alpha b} \right\} dk_1 \int_{k_1}^\infty \left[ \frac{\sin(q_1 + k)}{q_1 + k} + \frac{\sin(q_1 - k)}{q_1 - k} \right] e^{-\frac{(\sigma q_1)^\alpha}{\alpha b}} \frac{dq_1}{q_1}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Нормированное среднее время пребывания  $\tau(x_0) = \langle T(x_0) \rangle / T_{dyn}$  как функция параметра интенсивности шума  $\sigma$  для различных значений начальной позиции частицы  $x_0$  и различных значений индекса Леви  $\alpha$  изображено на Рисунке 1.3. Точки соответствуют численному моделированию уравнения Ланжевена (1.48) методом Монте—Карло, в то время как сплошные линии – численному интегрированию точной аналитической формулы (1.56). Видно, что метод Монте—Карло прекрасно подтверждает точные результаты.

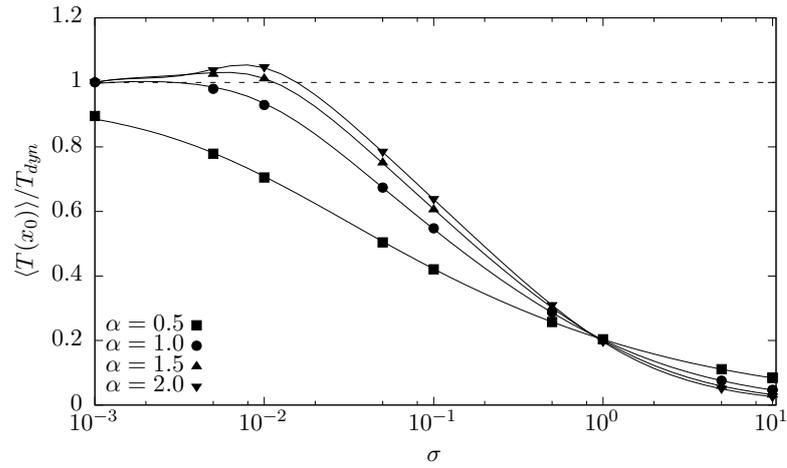
На Рисунке 1.3 наблюдается немонотонное поведение с максимумом нормированного среднего времени пребывания частицы в интервале  $(-L, L)$  как функции масштабного параметра  $\sigma$ . Это признак эффекта задержки шумом распада нестабильных состояний, поскольку шум увеличивает средний срок нахождения частицы в определенной области потенциального профиля [49–54]. Более того, порядок величины параметра  $\sigma$ , при котором наблюдается максимум, равен  $\sigma \approx (\Delta U)^{(1/\alpha)}$ , где  $\Delta U$  – высота потенциального барьера и максимум потенциального профиля. Это находится в согласии с тем, что было найдено для броуновской диффузии в метастабильных системах (см. работы [52; 54; 55] и ссылки в них). Эффект ЗРШ нестабильных состояний усиливается по мере увеличения индекса Леви и приближения начального положения частицы к границе интервала. Более того, значение параметра  $\sigma$ , для которого наблюдается максимум, увеличивается с увеличением значения  $x_0$ , т.к. в тоже время увеличивается высота потенциального барьера и частице “необходима” большая интенсивность шума для преодоления потенциального барьера во время ее пребывания в заданном интервале. Снижение эффекта ЗРШ нестабильных состояний с уменьшением индекса Леви обусловлено увеличением вероятности появления больших скачков частицы под действием шума Леви.

В случае броуновской диффузии ( $\alpha = 2$ ) (1.53) легко “обратить” и найти условную плотность вероятности в аналитическом виде

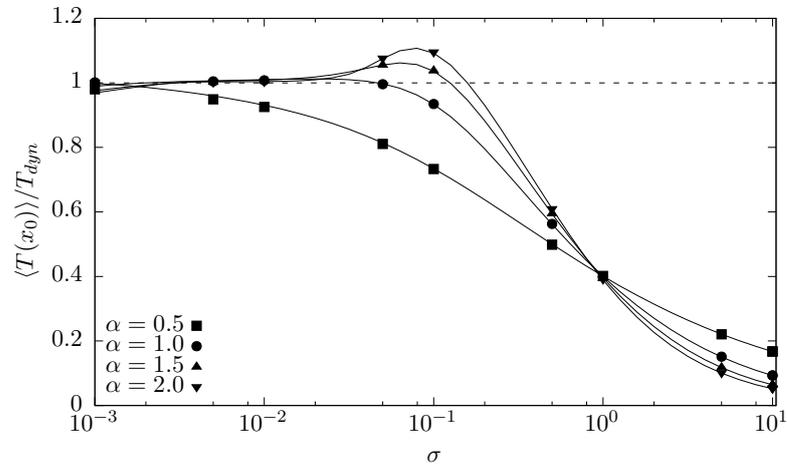
$$P(x, t | x_0, 0) = e^{-bt} \sqrt{\frac{b}{2\pi D(1 - e^{-2bt})}} \exp \left\{ -\frac{b(x_0 - x e^{-bt})^2}{2D(1 - e^{-2bt})} \right\}, \quad (1.64)$$

где  $D = \sigma^2$  – интенсивность белого гауссова шума. Как видно из (1.64), данное вероятностное распределение имеет гауссову форму с максимумом, смещенным в сторону одного из стоков  $x_{max} = x_0 e^{bt}$ , и экспоненциально уменьшается во времени. В результате, используя (1.6) и (1.7), можно переписать формулу (1.56) для среднего времени пребывания в следующем виде

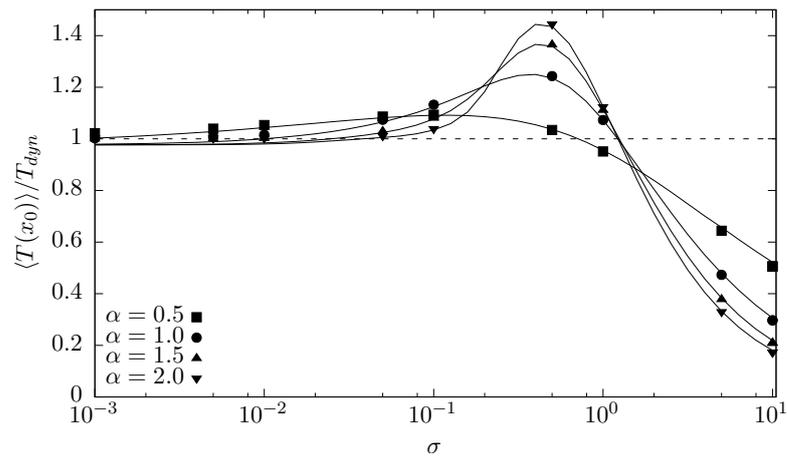
$$\langle T(x_0) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi b D}} \int_{-L}^L dx \int_0^{\pi/2} \exp \left\{ -\frac{b(x_0 - x \sin y)^2}{2D \cos^2 y} \right\} dy. \quad (1.65)$$



(a)



(б)



(в)

Рис. 1.3 — Нормированное среднее время пребывания  $\langle T(x_0) \rangle / T_{dyn}$  как функция параметра интенсивности  $\sigma$  при различных значениях начальной позиции частицы: (а)  $x_0 = 0,01$ , (б)  $x_0 = 0,1$  и (в)  $x_0 = 0,5$  и различных значений индекса Леви  $\alpha$ . Значения остальных параметров:  $L = 1$ ,  $b = 1$

На Рисунке 1.3 кривые, соответствующие среднему времени пребывания в случае броуновской диффузии ( $\alpha = 2$ ), обозначены перевернутыми треугольниками. Для рассматриваемого вида нестабильного потенциала эти кривые демонстрируют аналогичное поведение, как и для полетов Леви, но эффект более выражен. Это объясняется особенностью полетов Леви в рассматриваемом потенциальном профиле. Действительно, при аномальной диффузии в форме полетов Леви частице легче преодолеть барьер неустойчивого параболического потенциала и она быстрее достигает границ интервала  $(-L, L)$  по сравнению с броуновской диффузией.

Рисунок 1.4 демонстрирует зависимость второго момента времени пребывания от параметра интенсивности  $\sigma$  для различных значений начальной позиции частицы  $x_0$  и различных значений индекса Леви  $\alpha$ . Точки на рисунке соответствуют численному моделированию уравнения Ланжевена (1.48) методом Монте—Карло, в то время как сплошные линии показывают теоретические значения, заданные уравнением (1.63). Наблюдается хорошее согласие между теоретическими предсказаниями и результатами численного моделирования. Кроме того, зависимость среднего квадрата времени пребывания  $\langle T^2(x_0) \rangle$  от параметра  $\sigma$  демонстрирует то же самое немонотонное поведение, что и среднее время пребывания. В частности, максимум сдвигается вправо с увеличением значения  $x_0$  и уменьшается с уменьшением значения индекса Леви  $\alpha$ .

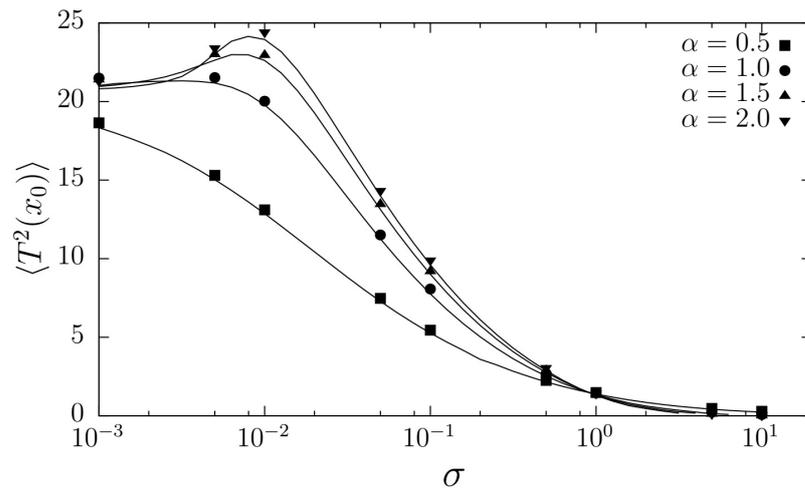
### 1.3 Аномальная диффузия в форме полетов Леви в бистабильном потенциале

Поскольку аномальная диффузия в форме полетов Леви может быть описана в рамках теории марковских процессов, имеется хорошая возможность применить мощный аппарат этой теории для исследования статистических характеристик полетов Леви в установившемся режиме. Следует заметить, что не любые потенциалы могут в этом случае обеспечить конфайнмент диффузионного движения. Авторами статьи [56] было установлено, что для степенных потенциалов вида  $|x|^c$  ( $c > 2$ ) дисперсия координаты частицы становится конечной при  $c > 4 - \alpha$ .

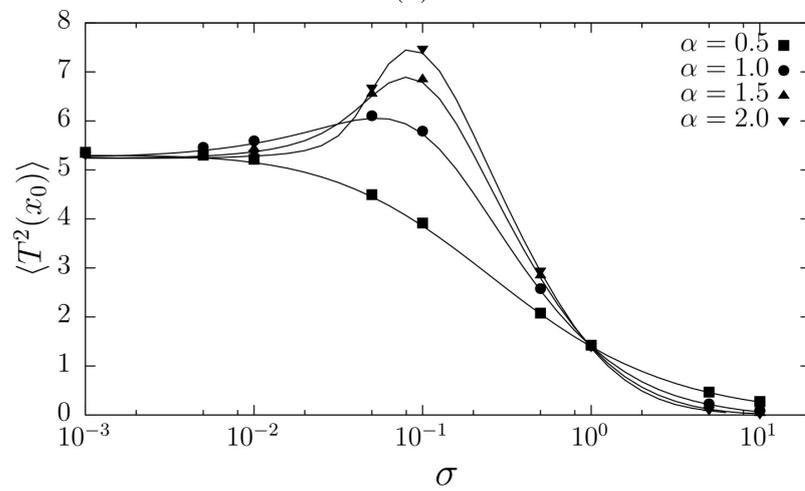
Поэтому рассмотрим установившиеся полеты Леви в асимметричном бистабильном потенциале четвертой степени

$$U(x) = \gamma \left( \frac{x^4}{4} - \frac{ax^2}{2} - bx \right), \quad (1.66)$$

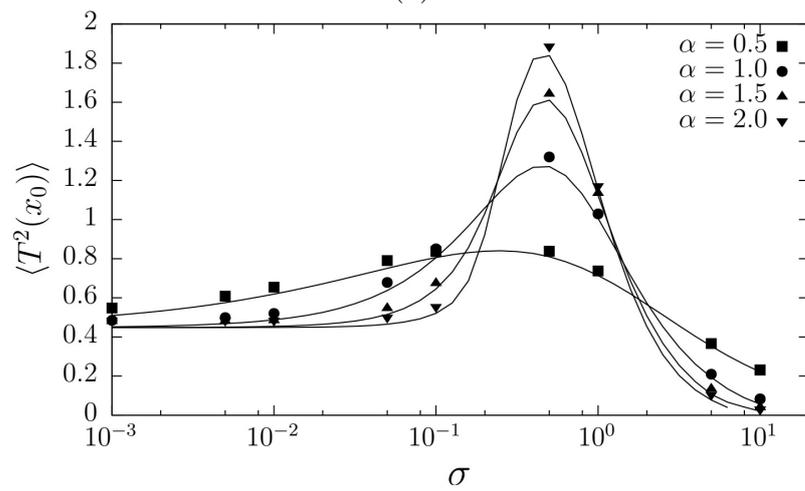
где  $\gamma$  – крутизна потенциала и  $b$  – параметр асимметрии ( $a, b, \gamma > 0$ ).



(a)



(б)



(в)

Рис. 1.4 — Второй момент времени пребывания  $\langle T^2(x_0) \rangle$  как функция параметра интенсивности  $\sigma$  при  $L = 1$  и различных значениях начальной позиции частицы: (а)  $x_0 = 0,01$ , (б)  $x_0 = 0,1$ , (в)  $x_0 = 0,5$ , для различных значений индекса Леви  $\alpha$

### 1.3.1 Установившееся вероятностное распределение координаты частицы

В асимптотике ( $t \rightarrow \infty$ ), после преобразования Фурье уравнения Фоккера–Планка с дробной пространственной производной (1.45), получаем

$$U' \left( \frac{d}{d(ik)} \right) \vartheta_{st} - iD_\alpha |k|^{\alpha-1} \text{sgn}(k) \vartheta_{st} = 0, \quad (1.67)$$

где  $\vartheta_{st}(k)$  – характеристическая функция координаты частицы  $x(t)$  в установившемся состоянии, являющаяся преобразованием Фурье стационарного вероятностного распределения  $P_{st}(x)$

$$\vartheta_{st}(k) = \langle e^{ikx} \rangle_{st} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} P_{st}(x) dx. \quad (1.68)$$

Для асимметричного потенциала четвертой степени (1.66) уравнение (1.67) становится однородным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$\frac{d^3 \vartheta_{st}}{dk^3} + a \frac{d\vartheta_{st}}{dk} + [ib - \beta_\alpha |k|^{\alpha-1} \text{sgn}(k)] \vartheta_{st} = 0, \quad (1.69)$$

где  $\beta_\alpha = D_\alpha/\gamma$ . Уравнение (1.69) может быть решено аналитически только для индекса Коши  $\alpha = 1$ , когда оно принимает вид

$$\frac{d^3 \vartheta_{st}}{dk^3} + a \frac{d\vartheta_{st}}{dk} + [ib - \beta_1 \text{sgn}(k)] \vartheta_{st} = 0. \quad (1.70)$$

Необходимо рассмотреть как положительные, так и отрицательные значения параметра  $k$  в (1.70). Для  $k > 0$ , полагая в уравнении (1.70)  $\vartheta_{st}(k) = Ce^{zk}$ , получаем следующее характеристическое уравнение

$$z^3 + az + (ib - \beta_1) = 0. \quad (1.71)$$

Как показывает анализ, кубическое уравнение (1.71) имеет три комплексных корня, два из которых ( $z_1$  и  $z_2$ ) имеют отрицательную действительную часть и один ( $z_3$ ) – положительную. Тогда, учитывая, что  $\vartheta_{st}(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ , установившаяся характеристическая функция для положительных значений  $k$  записывается в виде

$$\vartheta_{st}(k) = C_1 e^{z_1 k} + C_2 e^{z_2 k}. \quad (1.72)$$

В соответствии со свойством  $\vartheta_{st}(-k) = \vartheta_{st}^*(k)$ , вытекающим из определения (1.68), для отрицательных значений  $k$  из (1.72) имеем

$$\vartheta_{st}(k) = C_1^* e^{-z_1^* k} + C_2^* e^{-z_2^* k}, \quad (1.73)$$

где символ  $*$  означает комплексное сопряжение.

Два неизвестных комплексных коэффициента  $C_1$  и  $C_2$  определяются из условия нормировки  $\vartheta_{st}(0) = 1$  и условия непрерывности первой и второй производных функции  $\vartheta_{st}(k)$  в точке  $k = 0$ , т.е.

$$\frac{d\vartheta_{st}(0^+)}{dk} = \frac{d\vartheta_{st}(0^-)}{dk}, \quad \frac{d^2\vartheta_{st}(0^+)}{dk^2} = \frac{d^2\vartheta_{st}(0^-)}{dk^2}. \quad (1.74)$$

В результате из (1.72)–(1.74) находим:  $C_1 = c_1 + id_1$  и  $C_2 = c_2 + id_2$ , где

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{x_2}{x_1 + x_2} \left[ 1 - \frac{2x_1(x_1 - x_2)}{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \right], \\ c_2 &= 1 - c_1, \\ d_1 &= \frac{2x_1x_2(y_2 - y_1)}{(x_1 + x_2) [(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2]}, \\ d_2 &= -d_1 \end{aligned} \quad (1.75)$$

и  $z_k = -x_k + iy_k$  ( $k = 1, 2$ ) – комплексные корни уравнения (1.71) с отрицательной действительной частью ( $x_k > 0$ ).

Применяя обратное преобразование Фурье к (1.72) и (1.73), находим установившееся вероятностное распределение координаты частицы в потенциале (1.66)

$$\begin{aligned} P_{st}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \vartheta_{st}(k) e^{-ikx} dk = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{C_1}{ix - z_1} + \frac{C_2}{ix - z_2} \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{d_1(x - y_1) + c_1x_1}{(x - y_1)^2 + x_1^2} + \frac{d_2(x - y_2) + c_2x_2}{(x - y_2)^2 + x_2^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Для симметричного случая ( $b = 0$ ) формула (1.76) переходит в точный результат, полученный ранее в работе [57].

На Рисунке 1.5 приведены потенциал (1.66) и установившиеся вероятностные распределения (1.76) для различных значений параметра интенсивности шума  $D_1$ . Для выбранных значений параметров ( $a = 7$ ,  $b = 6$  и  $\gamma = 1$ ) минимумы потенциала расположены в точках  $x_1 = -2$  и  $x_2 = 3$ . Как и в случае симметричного бистабильного потенциала, положение минимумов потенциала и максимумов стационарного вероятностного распределения (1.76) не совпадают в отличие от распределения Больцмана для броуновской диффузии. В работе [57] было показано, что расстояние между максимумами  $P_{st}(x)$  и минимумами симметричного потенциала  $U(x)$  ( $b = 0$ ) неограниченно возрастает при увеличении параметра  $D_1$ , характеризующего интенсивность воздействующего шума (т. к. увеличивается длина полетов Леви) и уменьшается с ростом высоты потенциального барьера.

Установившиеся вероятностные распределения  $P_{st}(x)$  (1.76) для различных значений параметра асимметрии потенциала  $b$  показаны на Рисунке 1.6. Максимумы смещаются вправо и влево относительно положений минимумов потенциала с увеличением параметра асимметрии  $b$ . В то время как левый максимум уменьшается по величине и становится шире, правый увеличивается и сужается.

Наличие двух максимумов в установившемся вероятностном распределении – особенность супердиффузионного движения. В случае моностабильного симметричного потенциала, т. е. при отсутствии потенциального барьера, из-за быстрой диффузии, вызванной

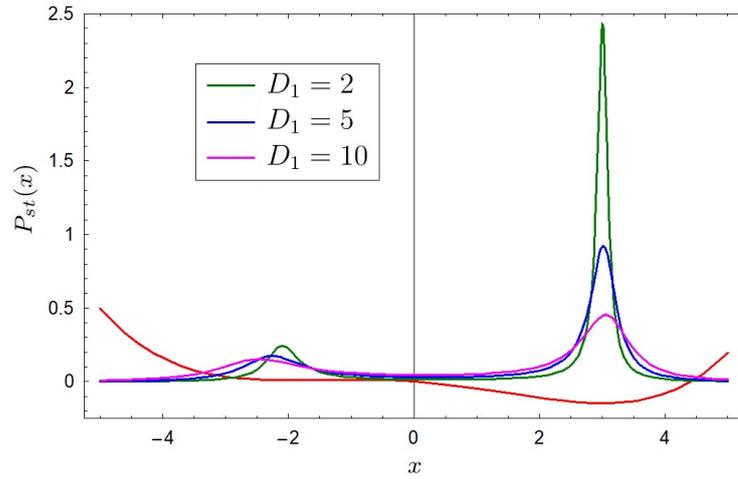


Рис. 1.5 — Асимметричный бистабильный потенциал  $U(x)$  (1.66) (красная кривая) и установившиеся вероятностные распределения  $P_{st}(x)$  (1.76) координаты частицы для различных значений параметра интенсивности шума  $D_1$ . Значения остальных параметров:  $\gamma = 1$ ,  $a = 7$ ,  $b = 6$

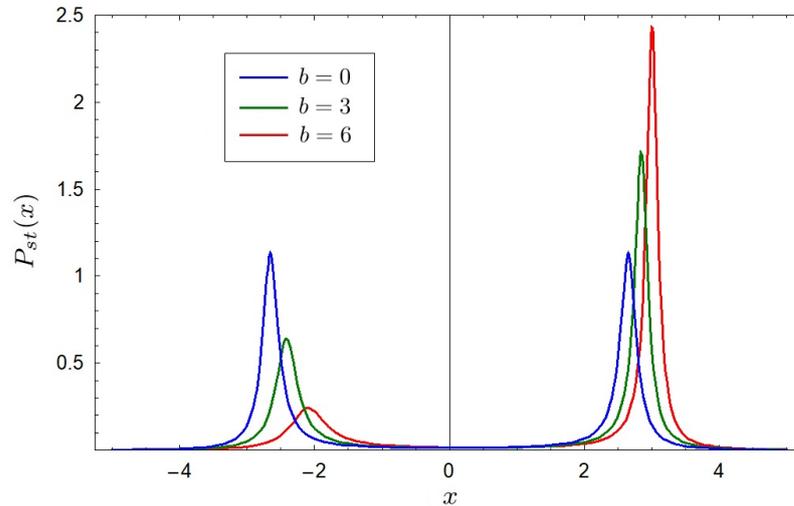


Рис. 1.6 — Установившиеся вероятностные распределения  $P_{st}(x)$  (1.76) для различных значений параметра асимметрии потенциала  $b$ . Значения остальных параметров:  $\gamma = 1$ ,  $D_1 = 2$  и  $a = 7$ . Случай  $b = 0$  соответствует симметричному бистабильному потенциалу

полетами Леви, частица очень быстро достигает областей вблизи «стенок» потенциала слева или справа по отношению к точке отсчета  $x = 0$ . Затем частица диффундирует вокруг этой позиции до тех пор, пока новый полет не перемещает ее в противоположном направлении и она не достигает другой «стенки» потенциала. В результате частица проводит большую часть времени в некоторых симметричных областях по отношению к положению состояния равновесия системы  $x = 0$ , в отличие от броуновской диффузии в моностабильном потенциальном профиле. Эти симметричные области расположены вблизи максимумов бимодального установившегося вероятностного распределения. В случае бистабильного потенциала большую часть времени частица проводит в окрестности локальных минимумов потенциала. В фазе полета частица достигает одной из внешних «стенок» потенциального барьера, затем потен-

циальная сила возвращает частицу в состояние равновесия. Поскольку система имеет два потенциальных минимума, максимумы вероятностного распределения раздвигаются по отношению к максимумам для моностабильного потенциала, находятся между минимумами и «стенками» потенциала и являются более узкими.

### 1.3.2 Получение точной формулы для времени корреляции в установившемся состоянии

Системы с бистабильным потенциалом имеют два характерных временных масштаба: один из них связан со случайными блужданиями частицы в окрестности одного из состояний равновесия (внутренняя динамика), другой временной масштаб характеризует среднее время перехода через потенциальный барьер (глобальная динамика). Проблема выхода из метастабильного состояния в случае броуновской диффузии была исследована Крамерсом [58]. Согласно формуле Крамерса, характерное время перехода частицы через потенциальный барьер имеет экспоненциальную зависимость от отношения высоты барьера  $\Delta U$  к интенсивности шума  $D$

$$\tau_{kr} = C(D) e^{\Delta U/D}.$$

Данное выражение было получено Крамерсом в приближении малости интенсивности шума по сравнению с высотой барьера. В этом случае поток броуновских частиц через потенциальный барьер настолько незначителен, что распределение вероятностей в добарьерной области можно аппроксимировать больцмановским распределением.

Для случайных процессов, существенно отличающихся от гауссова, поведение времени Крамерса будет отличаться от обычного экспоненциального закона. Этот раздел посвящен отысканию времени корреляции установившихся полетов Леви в симметричном бистабильном потенциале, которое определяется переходами частицы из одного устойчивого состояния в другое и поэтому имеет очевидную аналогию со временем Крамерса.

Подставляя кинетический оператор из (1.45) в уравнение (1.33), получаем

$$D_\alpha \frac{d^\alpha \phi}{d|x|^\alpha} + \frac{d}{dx} [U'(x)\phi] = (\langle x \rangle_{st} - x) P_{st}(x). \quad (1.77)$$

После преобразования Фурье уравнения (1.77) с дробной пространственной производной приходим к

$$ikU' \left( \frac{d}{idk} \right) \tilde{\phi} + D_\alpha |k|^\alpha \tilde{\phi} = - \left( \langle x \rangle_{st} + i \frac{d}{dk} \right) \vartheta_{st}(k), \quad (1.78)$$

В случае  $b = 0$  потенциал четвертой степени (1.66) становится симметричным и может быть записан в следующем виде

$$U(x) = \Delta U \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)^2, \quad (1.79)$$

где  $\Delta U$  – высота потенциального барьера, разделяющего два устойчивых состояния в точках  $\pm a$ .

В этой ситуации  $\langle x \rangle_{st} = 0$ , и (1.78) становится неоднородным линейным дифференциальным уравнением третьего порядка

$$\frac{d^3 \tilde{\phi}}{dk^3} + a \frac{d\tilde{\phi}}{dk} - \frac{D_\alpha}{\gamma} |k|^{\alpha-1} \text{sgn}(k) \tilde{\phi} = \frac{i}{k\gamma} \frac{d\vartheta_{st}(k)}{dk}, \quad (1.80)$$

где  $\gamma = 4\Delta U/a^4$ . Согласно (1.36), достаточно найти только мнимую часть решения уравнения (1.80). В силу нечетности  $\varphi(k)$ , являющейся следствием свойств синус-преобразования Фурье и симметрии характеристической функции  $\vartheta_{st}(k)$ , вытекающей из симметрии потенциала (1.79), можно рассмотреть только случай  $k \geq 0$ , т. е. найти частное решение следующего уравнения

$$\frac{d^3 \varphi}{dk^3} + a^2 \frac{d\varphi}{dk} - \frac{D_\alpha}{\gamma} k^{\alpha-1} \varphi = \frac{1}{k\gamma} \frac{d\vartheta_{st}(k)}{dk}. \quad (1.81)$$

Уравнение (1.81) может быть решено аналитически только для полетов Леви с индексом  $\alpha = 1$ , когда оно принимает вид

$$\frac{d^3 \varphi}{dk^3} + a^2 \frac{d\varphi}{dk} - \frac{D_1}{\gamma} \varphi = \frac{1}{k\gamma} \frac{d\vartheta_{st}(k)}{dk}. \quad (1.82)$$

Воспользуемся выражением для характеристической функции  $\vartheta_{st}(k)$ , ранее найденной в работе [57],

$$\vartheta_{st}(k) = \frac{1}{z - z^*} (ze^{z^*|k|} - z^*e^{z|k|}). \quad (1.83)$$

Здесь:  $z$ ,  $z^*$  и  $z_3 = p - q$  – три корня характеристического уравнения:  $z^3 + a^2z - D_1/\gamma = 0$  однородного дифференциального уравнения, соответствующего (1.82);  $z = -(p - q)/2 + i\sqrt{3}(p + q)/2$  и

$$p = \left( \sqrt{\left(\frac{a^2}{3}\right)^3 + \left(\frac{D_1}{2\gamma}\right)^2} + \frac{D_1}{2\gamma} \right)^{1/3}, \quad (1.84)$$

$$q = \left( \sqrt{\left(\frac{a^2}{3}\right)^3 + \left(\frac{D_1}{2\gamma}\right)^2} - \frac{D_1}{2\gamma} \right)^{1/3} \quad (p > q).$$

Установившееся вероятностное распределение координаты частицы находится из (1.83) обратным преобразованием Фурье и имеет вид

$$P_{st}(x) = -\frac{2|z|^2}{\pi} \frac{\text{Re } z}{(x^2 - |z|^2)^2 + 4(\text{Re } z)^2 x^2}. \quad (1.85)$$

На Рисунке 1.7 представлены рассматриваемый бистабильный симметричный потенциал (1.79) (красная линия) и стационарное вероятностное распределение (1.85) для различных значений параметра интенсивности шума  $D_1$  при фиксированных  $a = \sqrt{2}$ ,  $\Delta U = 1$ . Как легко установить из (1.85), максимумы стационарного вероятностного распределения  $P_{st}(x)$  расположены в точках  $\pm x_P$ , где  $x_P = \sqrt{(p^2 + 4pq + q^2)/2}$ .

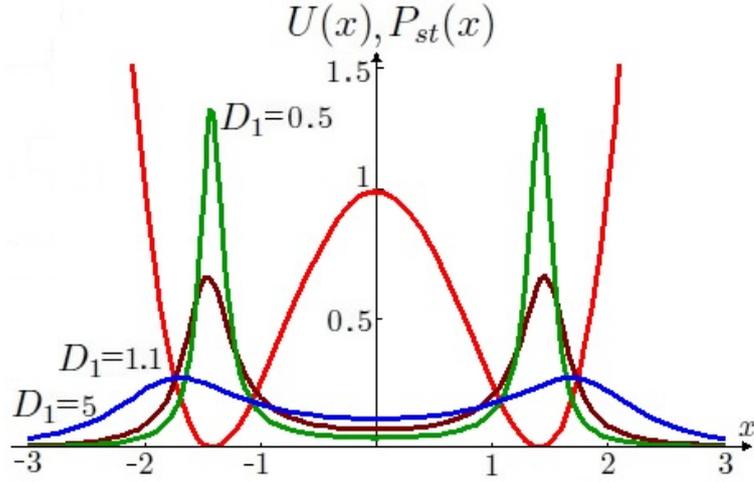


Рис. 1.7 — Симметричный бистабильный потенциал четвертой степени (1.79) (красная линия) и соответствующие плотности вероятности (1.85) координаты частицы для различных значений параметра интенсивности шума  $D_1$ . Значения других параметров:  $a = \sqrt{2}$ ,  $\Delta U = 1$

Подставляя (1.83) в (1.82), приходим к

$$\frac{d^3\varphi}{dk^3} + a^2 \frac{d\varphi}{dk} - \frac{D_1}{\gamma} \varphi = \frac{|z|^2}{k\gamma(z-z^*)} (e^{z^*k} - e^{zk}). \quad (1.86)$$

Общее решение линейного дифференциального уравнения (1.86) может быть найдено методом обратного оператора и имеет вид (подробное решение приведено в Приложении А)

$$\begin{aligned} \varphi(k) = & C_1 e^{zk} + C_2 e^{z^*k} + C_3 e^{z_3k} + \\ & + \frac{|z|^2}{\gamma(z-z^*)} \left( \frac{1}{z-z_3} e^{zk} \int_0^k e^{(z^*-z)y} \ln y \, dy - \frac{1}{z-z_3} e^{z_3k} \int_0^k e^{(z^*-z_3)y} \ln y \, dy - \right. \\ & \left. - \frac{1}{z^*-z_3} e^{z^*k} \int_0^k e^{(z-z^*)y} \ln y \, dy + \frac{1}{z^*-z_3} e^{z_3k} \int_0^k e^{(z-z_3)y} \ln y \, dy \right). \end{aligned} \quad (1.87)$$

Три неизвестных коэффициента  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  определяются из свойств преобразования Фурье и нечетности функции  $\varphi(k)$  (см. (1.37))

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(k) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0.$$

Используя эти условия в (1.87), приходим к

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 0, \\ C_1 z^2 + C_2 z^{*2} + C_3 z_3^2 &= 0, \\ C_3 &= \frac{|z|^2}{\gamma(z-z^*)} \left( \frac{1}{z-z_3} \int_0^\infty e^{(z^*-z_3)y} \ln y \, dy - \frac{1}{z^*-z_3} \int_0^\infty e^{(z-z_3)y} \ln y \, dy \right). \end{aligned} \quad (1.88)$$

Из соотношения (1.87) находим первую производную функции  $\varphi(k)$  при  $k = 0$ , входящую в (1.36)

$$\varphi'(0) = C_1 z + C_2 z^* + C_3 z_3. \quad (1.89)$$

Согласно определению кумулянтов, дисперсию процесса можно найти из (1.83) как

$$\langle x, x \rangle_{st} = - \left. \frac{d^2 \ln \vartheta_{st}(k)}{dk^2} \right|_{k=0^+} = |z|^2. \quad (1.90)$$

После ряда преобразований из (1.88)-(1.90) и (1.36) получаем следующее выражение для времени корреляции координаты частицы в установившемся состоянии

$$\tau_c = \frac{1}{\gamma (z^2 - z^{*2})} \left[ (z - z_3) \int_0^\infty e^{(z-z_3)y} \ln y \, dy - (z^* - z_3) \int_0^\infty e^{(z^*-z_3)y} \ln y \, dy \right].$$

Интегрирование по частям выражения в скобках дает

$$\tau_c = \frac{1}{\gamma (z^2 - z^{*2})} \int_0^\infty \frac{e^{z^*y} - e^{zy}}{y} e^{-z_3y} \, dy. \quad (1.91)$$

Выражая корни кубического уравнения  $z$ ,  $z^*$  и  $z_3$  в (1.91) через параметры  $p$  и  $q$ , получаем

$$\tau_c = \frac{2}{\sqrt{3} \gamma (p^2 - q^2)} \int_0^\infty e^{-\frac{3}{2}(p-q)y} \frac{\sin \frac{\sqrt{3}}{2}(p+q)y}{y} \, dy. \quad (1.92)$$

Окончательно, из (1.92) находим точную формулу для времени корреляции ограниченных полетов Леви с единичным индексом  $\alpha$  в симметричном бистабильном потенциале четвертой степени (1.79)

$$\tau_c = \frac{2}{\sqrt{3} \gamma (p^2 - q^2)} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{p+q}{p-q} \right). \quad (1.93)$$

Интересно проанализировать зависимость времени корреляции от высоты потенциального барьера и от положения потенциальных ям. В случае достаточно высокого потенциального барьера (или малого параметра интенсивности шума  $D_1$ ) при фиксированном положении  $\pm a$  потенциальных ям

$$\frac{\Delta U}{aD_1} \gg 1,$$

из (1.84) и (1.93) находим

$$\tau_c \simeq \frac{\pi a}{2D_1}, \quad (1.94)$$

т. е. время корреляции не зависит от высоты потенциального барьера.

Попытаемся объяснить этот результат, используя аналогию между временем выхода из метастабильного состояния и временем корреляции установившейся диффузии в бистабильном потенциале. В самом деле, время корреляции установившейся диффузии в симметричном двухъямном потенциале определяется быстрым внутриямным движением и медленными переходами частицы через потенциальный барьер. При достаточно высоких барьерах вклад во время корреляции редких событий пересечения становится доминирующим, и мы имеем дело с некоторой временной характеристикой, подобной времени выхода из глубокой потенциальной ямы. Результаты работы [45], где характерный экспоненциальный

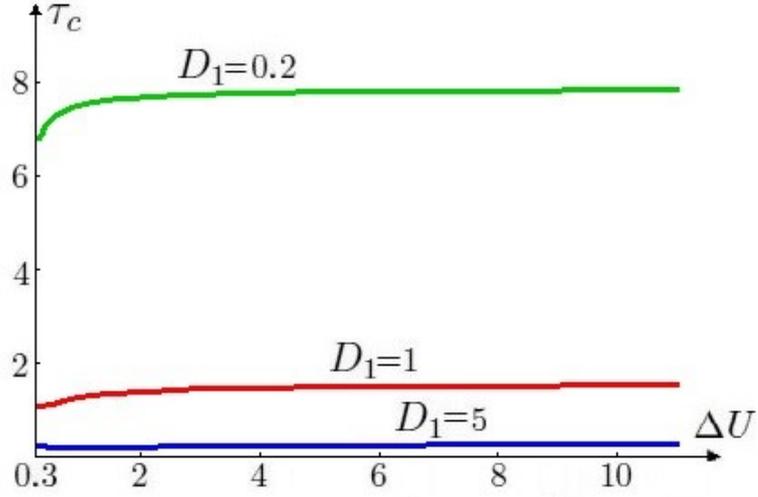


Рис. 1.8 — Зависимость времени корреляции от высоты потенциального барьера  $\Delta U$  при фиксированном положении потенциальных ям ( $a = 1$ ) для различных значений параметра интенсивности шума  $D_1$

фактор Крамерса  $e^{\Delta U/D}$  (см. [58]) был обнаружен в зависимости времени корреляции стационарной броуновской диффузии в бистабильном потенциале, подтверждают эту аналогию. В этой ситуации для преодоления потенциального барьера частица должна иметь бесконечную энергию активации  $D$ , которая, по существу, является интенсивностью гауссова белого шума. Формальная подстановка  $D = \infty$  в показатель Крамерса указывает на независимость времени корреляции от высоты потенциального барьера для полетов Леви.

В контексте вышеупомянутой аналогии между двумя временами необходимо также упомянуть результат для среднего времени перехода частицы Леви из одной потенциальной ямы в другую в бистабильном потенциале четвертой степени (1.79) с  $\gamma = 1$  ( $\Delta U = a^4/4$ ), полученный в [27] в пределе малого параметра интенсивности шума  $D_\alpha$  с произвольным индексом Леви  $\alpha$ . Это выражение таково

$$\langle \tau_{tr} \rangle \simeq \frac{\alpha a^\alpha}{D_\alpha}. \quad (1.95)$$

Соотношение (1.95) подобно (1.94) в случае  $\alpha = 1$ .

Зависимость времени корреляции от высоты потенциального барьера  $\Delta U$  при фиксированном положении потенциальных ям для различных значений параметра интенсивности шума  $D_1$  представлена на Рисунке 1.8. Рисунок 1.8 подтверждает слабую зависимость времени корреляции от высоты потенциального барьера, с насыщением, даваемым соотношением (1.94). Таким образом, можно говорить о новом законе Крамерса для аномальной диффузии в форме полетов Леви в полиномиальных потенциалах, описываемой дробным уравнением Фоккера—Планка (1.45).

Зависимость времени корреляции от расстояния  $a$  между потенциальными ямами и потенциальным барьером при фиксированной высоте барьера для различных значений параметра интенсивности шума  $D_1$  показана на Рисунке 1.9 в обычном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах. Как видно из Рисунка 1.9(б), для достаточно больших расстояний  $a$  наблюдается степенная зависимость.

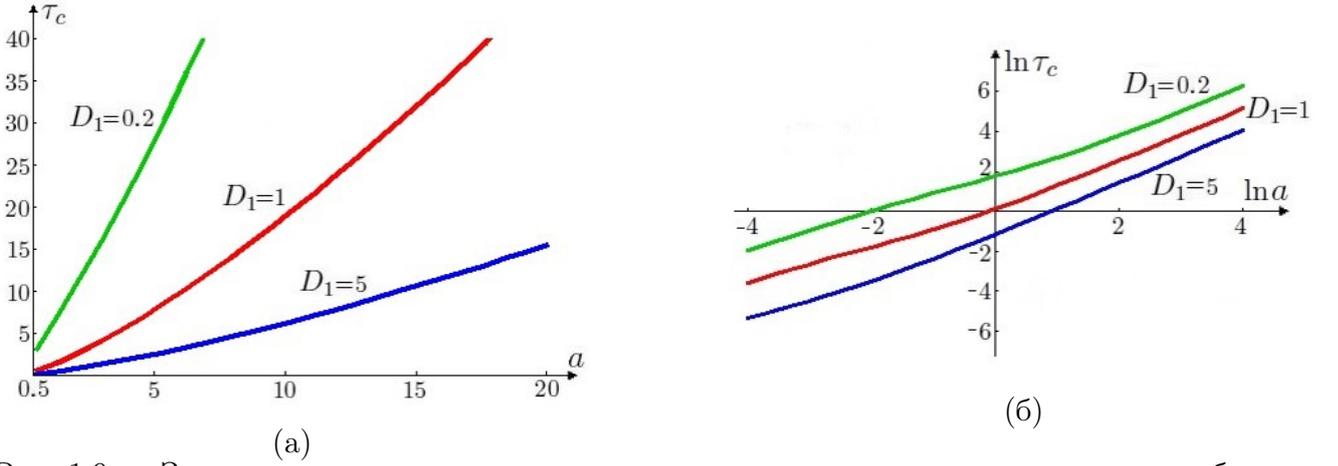


Рис. 1.9 — Зависимость времени корреляции от положения потенциальных ям в обычном (а) и двойном логарифмическом (б) масштабах при фиксированной высоте потенциального барьера  $\Delta U = 0.1$  для различных значений параметра интенсивности шума  $D_1$

Найдем показатель этой зависимости. В самом деле, для достаточно больших значений  $a$

$$a \gg \frac{\Delta U}{D_1}$$

из (1.84) и (1.93) для времени корреляции получаем

$$\tau_c \simeq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \sqrt[3]{\frac{a^4}{4\Delta U D_1^2}} \sim a^{4/3}. \quad (1.96)$$

Таким образом, время корреляции координаты частицы возрастает с увеличением расстояния между потенциальными ямами и барьером по степенному закону с показателем  $4/3$ . Для объяснения этого поведения заметим, что, как следует из (1.66), с увеличением параметра  $a$  при фиксированной высоте потенциального барьера потенциальные ямы отдаляются от начала координат одновременно с уменьшением их крутизны. В результате, внутриямное движение частицы становится медленнее, и время корреляции увеличивается.

Как и следовало ожидать, Рисунок 1.10 показывает, что время корреляции уменьшается с увеличением параметра интенсивности шума, но вид этой зависимости при фиксированной высоте потенциального барьера изменяется от гиперболической (1.94) (см. также (1.95)) для очень малых  $D_1$  до степенной  $D_1^{-2/3}$  при больших  $D_1$  согласно (1.96).

Наконец, в отсутствие барьера:  $\Delta U \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 0$ ,  $\gamma = 4\Delta U/a^4$  из (1.84) имеем  $p = (D_1/\gamma)^{1/3}$ ,  $q = 0$ , и соотношение (1.93) дает

$$\tau_c \simeq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \sqrt[3]{\gamma D_1^2}. \quad (1.97)$$

Выражение (1.97) совпадает с результатом, недавно полученным в [47] для моностабильного симметричного потенциала четвертой степени, что доказывает правильность выполненных расчетов.

Необходимо отметить, что предложенный метод может быть применен для аналитических расчетов временных характеристик ограниченных полетов Леви в более крутых потенциалах.

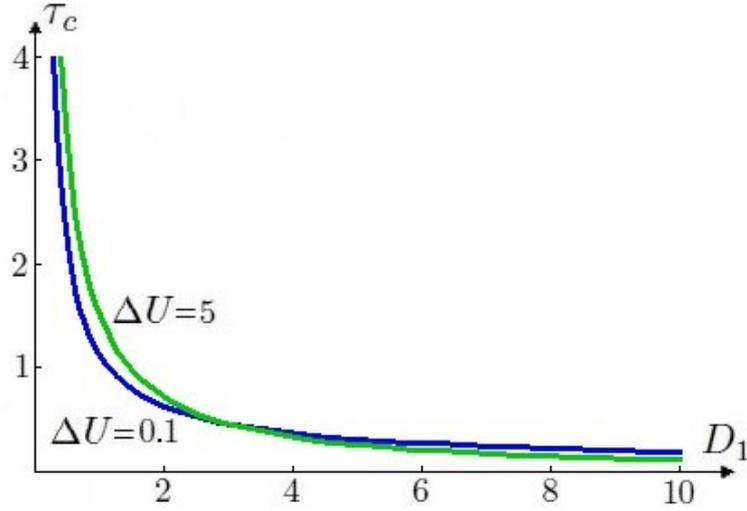


Рис. 1.10 — Зависимость времени корреляции от параметра интенсивности шума  $D_1$  для различных высот потенциального барьера  $\Delta U$ . Положение потенциальных ям фиксировано:  $a = 1$

#### 1.4 Спектральные характеристики установившихся полетов Леви в удерживающих потенциалах с одним устойчивым состоянием

Аналитическое исследование корреляционных и спектральных свойств установившихся полетов Леви в удерживающих потенциалах является открытой проблемой. Здесь можно отметить только точный результат, полученный в работе [47] для времени корреляции полетов Леви в симметричном потенциале четвертой степени. В данном разделе теоретически и численными методами исследуются установившиеся корреляционные и спектральные характеристики супердиффузии в форме полетов Леви в одномерных потенциалах с одним устойчивым состоянием.

Рассмотрим аномальную диффузию в форме полетов Леви в симметричном удерживающем степенном потенциале следующего вида

$$U(x) = \frac{\gamma}{2m} \left( \frac{x}{L} \right)^{2m}, \quad (1.98)$$

где  $L$  — ширина потенциальной ямы.

Для этого потенциального профиля, как показано в [22], стационарное вероятностное распределение координаты частицы при аномальной диффузии в форме полетов Леви с индексом  $\alpha = 1$  имеет следующее выражение для нечетных  $m = 2n + 1$

$$P_{st}(x) = \frac{\beta^{4n+1}}{\pi(x^2 + \beta^2)} \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{x^4 - 2\beta^2 x^2 \cos[\pi(4l + 1)/(4n + 1)] + \beta^4} \quad (1.99)$$

и для четных  $m = 2n$

$$P_{st}(x) = \frac{\beta^{4n-1}}{\pi} \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{x^4 - 2\beta^2 x^2 \cos[\pi(4l + 1)/(4n - 1)] + \beta^4}, \quad (1.100)$$

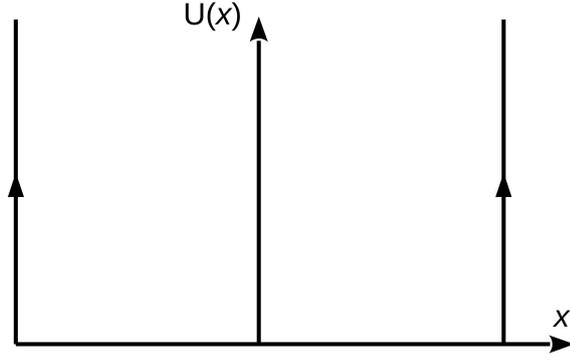


Рис. 1.11 — Бесконечно глубокая прямоугольная потенциальная яма

где  $\beta = L \sqrt[2m-1]{D_1 L / \gamma}$ , а  $D_1$  – параметр интенсивности шума с устойчивым распределением Коши.

В случае предельно большого показателя  $m$  потенциал (1.98) превращается в бесконечно глубокую прямоугольную потенциальную яму (см. Рисунок 1.11)

$$U(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq L, \\ \infty, & |x| > L. \end{cases} \quad (1.101)$$

Чтобы осуществить этот предельный переход в уравнениях (1.99) и (1.100), необходимо преобразовать их к более удобной форме (см. Приложение Б)

$$P_{st}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\beta} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k \cos \frac{\pi k}{2m-1}} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} \right\}, & |x| \leq \beta, \\ \frac{1}{\pi\beta} \left( \frac{\beta}{x} \right)^{2m} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k \cos \frac{\pi k}{2m-1}} \left( \frac{\beta}{x} \right)^{2k} \right\}, & |x| > \beta. \end{cases} \quad (1.102)$$

В пределе  $m \rightarrow \infty$  установившееся вероятностное распределение (1.102) переходит в распределение арксинуса

$$P_{st}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{L^2 - x^2}}, & |x| \leq L, \\ 0, & |x| > L. \end{cases} \quad (1.103)$$

Справедливость результата (1.103) может быть подтверждена его сравнением с точным результатом, полученным в [21] для шума с произвольным индексом Леви  $\alpha$

$$P_{st}(x) = \frac{(2L)^{1-\alpha} \Gamma(\alpha)}{\Gamma^2(\alpha/2) (L^2 - x^2)^{1-\alpha/2}}, \quad (1.104)$$

где  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция. Формула (1.104) была получена для бесконечно глубокой потенциальной ямы путем применения специальных условий на непроницаемых границах  $x = \pm L$ .

Установившиеся плотности вероятности (1.104) для различных значений индекса Леви  $\alpha$  показаны сплошными линиями на Рисунке 1.12. Точки соответствуют результатам моделирования методом Монте-Карло уравнения Ланжевена (1.42) для потенциального профиля (1.98) с  $m = 800$  и шумом Леви. Кривая с  $\alpha = 2$  соответствует обычному броуновскому движению. В этом случае стационарная плотность вероятности описывается распределением Больцмана  $P_{st}(x) = C_0 e^{-U(x)/D}$  ( $C_0$  – постоянная нормировки) и для бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной ямы (1.101) является равномерной.

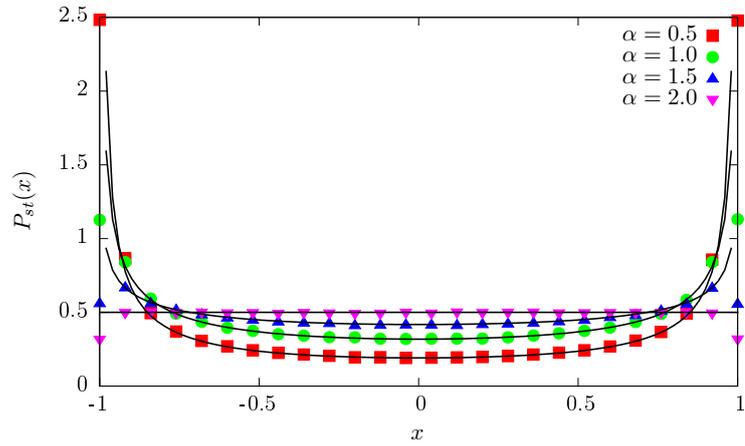


Рис. 1.12 — Установившиеся вероятностные распределения (1.104) для различных значений индекса Леви  $\alpha$ . Значения остальных параметров:  $\gamma = 1$ ,  $D_\alpha = 1$  и  $L = 1$

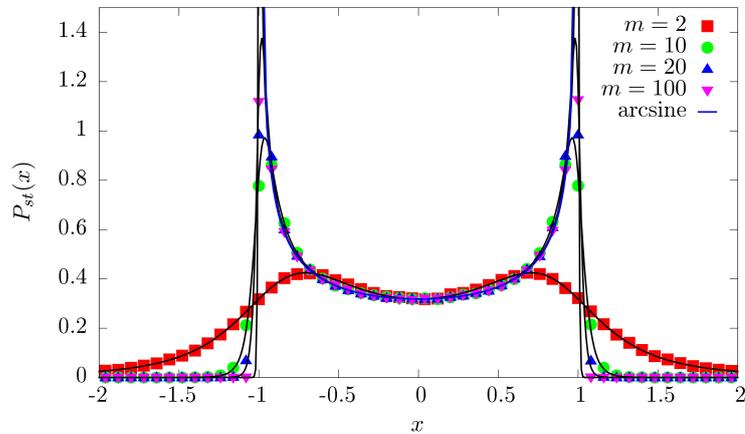


Рис. 1.13 — Установившиеся вероятностные распределения для  $\alpha = 1$  и различных показателей  $m$  (см. (1.98)–(1.100)). Значения других параметров системы те же самые, что и на Рисунке 1.12

На Рисунке 1.13 приведены графики установившейся плотности вероятности для индекса Леви  $\alpha = 1$ , полученные для различных показателей  $m$  потенциального профиля (1.98). Сплошные линии отвечают точным результатам, которые даются уравнениями (1.99) и (1.100), в то время как точки соответствуют численному моделированию уравнения Ланжевена (1.42) с потенциалом (1.98) и шумом Леви. В пределе  $m \rightarrow \infty$  стационарная плотность стремится к распределению арксинуса (1.103). Оно практически достигается уже для  $m = 50$ . Рисунок 1.13 показывает, как, стартуя со степенного потенциала, мы получаем бесконечно глубокую прямоугольную потенциальную яму без рассмотрения вопроса о граничных условиях.

Установившиеся спектральные характеристики полетов Леви в потенциальном профиле (1.98) не могут быть получены аналитически для произвольного индекса Леви  $\alpha$ , в отличие от асимптотической зависимости спектральной плотности мощности установившихся полетов Леви от частоты. Из (1.26), (1.45), (1.98) и (1.102) находим первую производную корреляци-

онной функции в нуле

$$K' [0^+] = \left\langle x \hat{L}^+ (x) x \right\rangle = - \left\langle x U'(x) \right\rangle = -\gamma \left\langle \left( \frac{x}{L} \right)^{2m} \right\rangle = -\infty, \quad (1.105)$$

что отличается от случая обычного броуновского движения ( $\alpha = 2$ ), для которого

$$K' [0^+] = -D.$$

Рисунок 1.14 демонстрирует автокорреляционные функции  $K[\tau]$  для различных значений показателя  $m$  (см. (1.98)) при фиксированном значении индекса  $\alpha$ . Из Рисунка 1.14 видно, что с уменьшением значения индекса Леви  $\alpha$  спадание корреляционной функции ускоряется, т.е. ее производная быстро уменьшается при приближении к точке  $\tau = 0$ . Кроме того, из Рисунка 1.14(в) видно, что для симметричного степенного потенциала  $K'[0^+] = -\infty$ , как предсказывается формулой (1.105). Это асимптотическое поведение становится более заметным при меньших значениях индексах Леви  $\alpha$ .

В соответствии с формулой (1.105), можно предположить наличие неаналитической зависимости корреляционной функции вблизи точки  $\tau = 0$  в следующей форме

$$K [\tau] \simeq \sigma^2 \exp \left\{ - \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^\nu \right\} \simeq \sigma^2 \left[ 1 - \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^\nu \right], \quad 0 < \nu < 1. \quad (1.106)$$

Применяя преобразование Лапласа в (1.106), приходим к

$$\tilde{K}[p] \simeq \sigma^2 \left[ \frac{1}{p} - \frac{\Gamma(1 + \nu)}{\tau_0^\nu p^{1+\nu}} \right], \quad p \rightarrow \infty. \quad (1.107)$$

Подстановка (1.107) в (1.39) дает ожидаемую асимптотическую зависимость спектральной плотности мощности от частоты

$$S(\omega) \sim \frac{1}{\omega^{1+\nu}}, \quad \omega \rightarrow \infty. \quad (1.108)$$

Показатель  $\nu$  является функцией показателя потенциала  $m$ , параметра интенсивности шума  $D_\alpha$  и индекса Леви  $\alpha$ .

На верхнем и среднем Рисунках 1.14 показана также наилучшая подгонка нормированной корреляционной функции  $K[\tau]$ , полученная с помощью численного моделирования уравнения Ланжевена (1.42) с потенциальным профилем (1.98) и  $m = 100$  к зависимости (1.106). Полученные из процедуры подгонки значения параметров  $\sigma^2$ ,  $\tau_0$  и  $\nu$  приведены в Таблице 1.

На Рисунке 1.15 приведены спектральные плотности мощности координаты частицы, полученные численным моделированием уравнения Ланжевена (1.42) с потенциальным профилем (1.98) и  $m = 100$  для различных значений  $\alpha$ . Цветные линии представляют спектральные плотности мощности, оцененные из длинных траекторий  $x(t)$ . Сплошные черные линии представляют спектральные плотности мощности для  $\alpha = 1,3; 1,5$  и  $1,9$ , оцененные как преобразование Фурье подгоночной зависимости (1.106). Согласие между этими кривыми и рассчитанными прямым моделированием уравнения Ланжевена (1.42) является удовлетворительным. Во всех расчетах бралось значение параметра интенсивности шума  $D_\alpha = 1$ . Траектории были сконструированы из ланжевенской динамики с шагом интегрирования  $\Delta t = 10^{-6}$ . Каждая траектория  $x(t)$  состоит из  $2^{24}$  элементов. Полученные спектральные плотности мощности были усреднены по 300 реализациям.

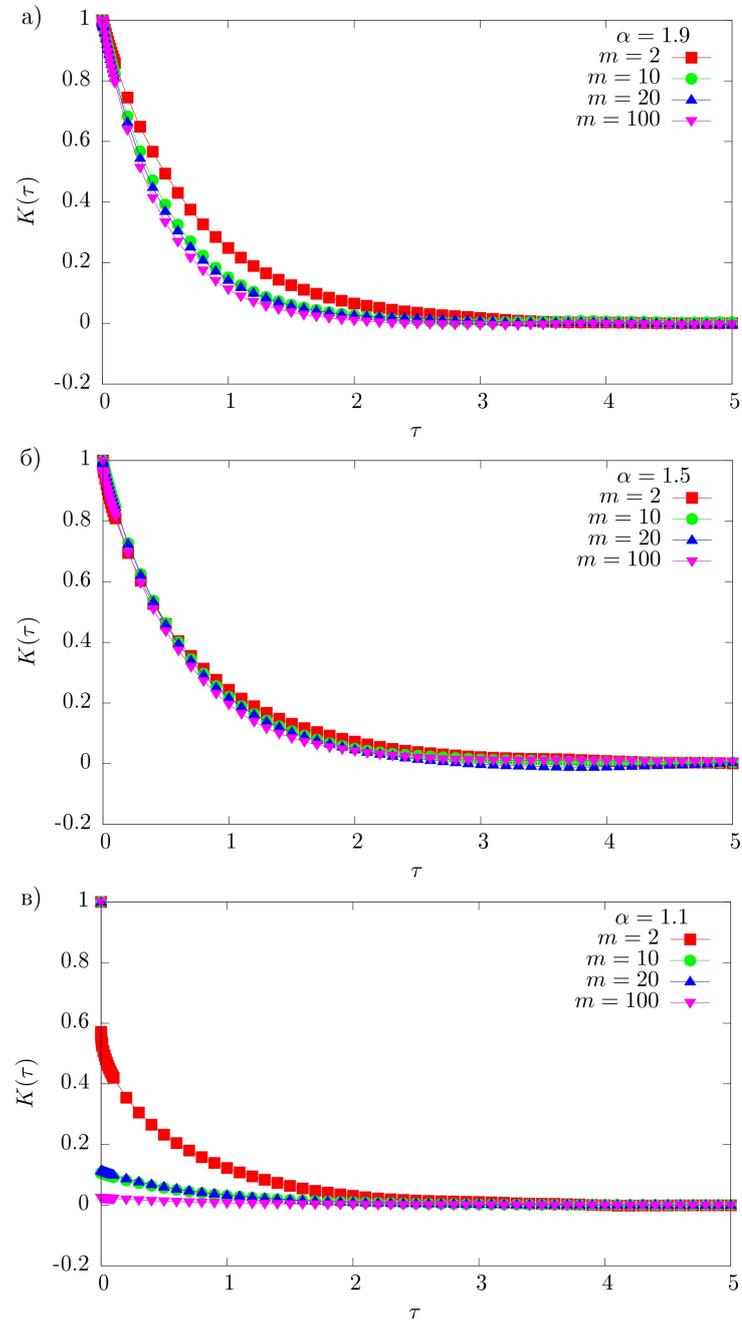


Рис. 1.14 — Автокорреляционные функции  $K[\tau]$  для (а)  $\alpha = 1,9$ , (б)  $\alpha = 1,5$  и (в)  $\alpha = 1,1$ . Различные кривые соответствуют различным значениям показателя  $m$  потенциального профиля (1.98). Значения других параметров системы те же самые, что и на Рисунке 1.13

$\alpha$	$\sigma^2$	$\tau_0$	$\nu$
1.0	$0.342 \pm 0.008$	$0.608 \pm 0.062$	$0.686 \pm 0.057$
1.1	$0.025 \pm 3 \times 10^{-5}$	$0.790 \pm 0.003$	$0.975 \pm 0.005$
1.3	$0.950 \pm 0.001$	$0.702 \pm 0.003$	$0.987 \pm 0.006$
1.5	$0.967 \pm 0.001$	$0.622 \pm 0.002$	$0.980 \pm 0.004$
1.9	$0.999 \pm 0.001$	$0.452 \pm 0.002$	$0.984 \pm 0.005$

Табл. 1. Значения параметров зависимости (1.106), полученные подгонкой нормированной корреляционной функции

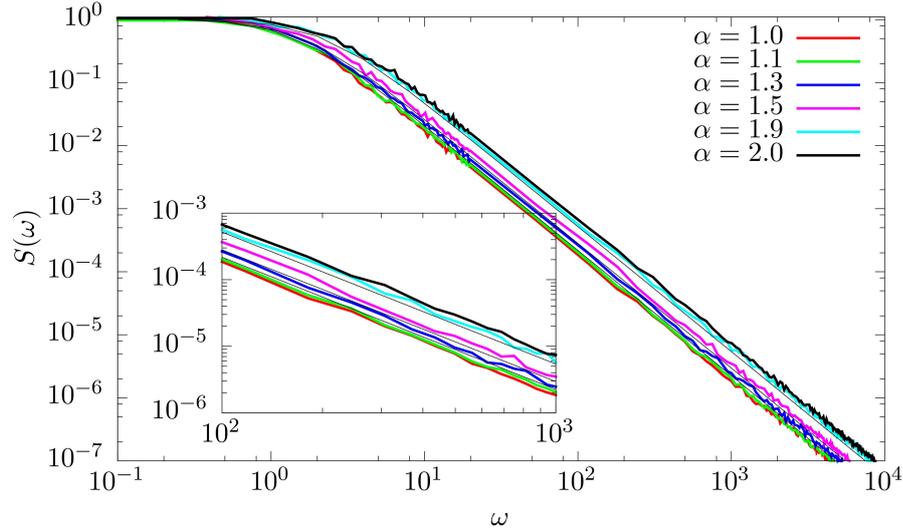


Рис. 1.15 — Спектральные плотности мощности координаты частицы

## 1.5 Сравнительные вероятностные характеристики диффузионного движения в двумерных потенциалах

В данном разделе изучаются установившиеся вероятностные характеристики диффузии в двумерных потенциалах. В частности, с помощью функциональных методов выводится общее уравнение Колмогорова для совместной плотности вероятности координат частицы непосредственно из уравнений Ланжевена с произвольными статистически независимыми источниками белого шума. Также будет проведено сравнение установившихся вероятностных характеристик броуновской диффузии и аномальной диффузии в форме полетов Леви на плоскости в потенциале с радиальной симметрией.

Согласно динамике Ньютона, движение частицы массы  $m$  на плоскости в вязкой среде под действием случайных внешних сил можно описать системой уравнений

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \nu\dot{x} &= -U'_x(x,y) + \xi_1(t), \\ m\ddot{y} + \nu\dot{y} &= -U'_y(x,y) + \xi_2(t), \end{aligned} \quad (1.109)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  — координаты частицы на плоскости  $(x,y)$ ,  $\nu$  — коэффициент вязкости,  $U(x,y)$  — потенциал поля, а  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  — внешние случайные возмущения. Ускорением частицы (инер-

ционными эффектами) можно пренебречь, если коэффициент вязкости достаточно велик. В этом случае приходим к следующей системе уравнений Ланжевена, описывающих диффузию частицы в произвольном двумерном потенциальном профиле  $U(x,y)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -U'_x(x,y) + \xi_1(t), \\ \dot{y} &= -U'_y(x,y) + \xi_2(t),\end{aligned}\tag{1.110}$$

где коэффициент вязкости положен для простоты равным 1.

Предположим, что случайные воздействия  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  являются произвольными статистически независимыми источниками белого шума с нулевыми средними значениями  $\langle \xi_1(t) \rangle = \langle \xi_2(t) \rangle = 0$ . В этой ситуации совокупность случайных процессов  $\{x(t), y(t)\}$  в (1.110) является марковской и для их совместной плотности вероятности

$$P(x,y,t) = \langle \delta(x - x(t))\delta(y - y(t)) \rangle,\tag{1.111}$$

можно записать замкнутое уравнение с помощью функционального метода, развитого в статье [17].

Для начала продифференцируем обе части соотношения (1.111) по времени. В результате имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta(x - x(t))\delta(y - y(t)) \rangle = \\ &= \left\langle \delta'_t(x - x(t))\delta(y - y(t)) \right\rangle + \left\langle \delta'_t(y - y(t))\delta(x - x(t)) \right\rangle = \\ &= - \left\langle \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x(t))\dot{x}(t)\delta(y - y(t)) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial y} \delta(y - y(t))\dot{y}(t)\delta(x - x(t)) \right\rangle.\end{aligned}$$

С учетом уравнений (1.110) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left[ -U'_x + \xi_1(t) \right] \delta(x - x(t))\delta(y - y(t)) \right\rangle - \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left\langle \left[ -U'_y + \xi_2(t) \right] \delta(y - y(t))\delta(x - x(t)) \right\rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} P \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} P \right) - \frac{\partial}{\partial x} \langle \xi_1(t)\delta(x - x(t))\delta(y - y(t)) \rangle - \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \langle \xi_2(t)\delta(x - x(t))\delta(y - y(t)) \rangle.\end{aligned}$$

Для расщепления корреляции между стохастическим функционалом и процессами  $\xi_i(t)$  ( $i = 1,2$ ), применяем следующую формулу (см. (10) в [17])

$$\begin{aligned}\langle \xi_i(t)\delta(x - x(t))\delta(y - y(t)) \rangle &= \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_i(z)}{z^2} dz \int_0^z \left\langle \left( e^{k \frac{\delta}{\delta \xi_i(t)}} - 1 \right) \delta(x - x(t))\delta(y - y(t)) \right\rangle dk,\end{aligned}$$

где  $\rho_i(z)$  – функции, определяющие статистику белых шумов  $\xi_i(t)$ .

Используя эквивалентность операторов  $\frac{\delta}{\delta \xi_1(t)}$  и  $\left( -\frac{\partial}{\partial x} \right)$ ,  $\frac{\delta}{\delta \xi_2(t)}$  и  $\left( -\frac{\partial}{\partial y} \right)$  по отношению к произведению  $\delta(x - x(t))\delta(y - y(t))$ , которая следует из уравнений Ланжевена (1.109),

получаем общее интегро-дифференциальное уравнение Колмогорова для совместной плотности вероятности координат частицы

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x,y,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} P(x,y,t) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} P(x,y,t) \right) + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_1(z)}{z^2} \left( e^{-z \frac{\partial}{\partial x}} - 1 + z \frac{\partial}{\partial x} \right) P(x,y,t) dz + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_2(z)}{z^2} \left( e^{-z \frac{\partial}{\partial y}} - 1 + z \frac{\partial}{\partial y} \right) P(x,y,t) dz. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Следующим шагом является нахождение из (1.112) установившегося совместного вероятностного распределения в потенциале с радиальной симметрией  $U(r)$  ( $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ) в случае шумов  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  с идентичными статистическими характеристиками:  $\rho_1(z) = \rho_2(z)$ .

### 1.5.1 Случай гауссовых белых шумов

В случае двух гауссовых белых шумов с одинаковыми интенсивностями функции, определяющие статистику шумов имеют вид  $\rho_1(z) = \rho_2(z) = 2D\delta(z)$ . При этом (1.112) преобразуется в двумерное уравнение Фоккера—Планка

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \text{div}(P \text{grad} U) + D \Delta P, \quad (1.113)$$

которое записывается в полярных координатах следующим образом

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r U'_r P \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( U'_\varphi P \right) + \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial P}{\partial r} \right) + \frac{D}{r^2} \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2}. \quad (1.114)$$

В установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ) для потенциала с радиальной симметрией  $U(r)$  стационарное вероятностное распределение не зависит от полярного угла  $\varphi$ , поэтому (1.114) переходит в дифференциальное уравнение в обыкновенных производных

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r U'_r P_{st}(r) \right) + \frac{D}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dP_{st}(r)}{dr} \right) = 0. \quad (1.115)$$

Из (1.115) следует, что совместное стационарное вероятностное распределение координат в случае гауссовых шумов имеет вид распределения Больцмана

$$P_{st}(x,y) = C e^{-\frac{U(r)}{D}}, \quad (1.116)$$

где постоянная нормировки  $C$  может быть рассчитана как

$$C = \left( 2\pi \int_0^\infty r e^{-\frac{U(r)}{D}} dr \right)^{-1}.$$

В качестве примера потенциала с радиальной симметрией рассмотрим параболический потенциал  $U(x,y) = \gamma(x^2 + y^2)/2 = \gamma r^2/2$ . В этом случае совместное установившееся вероятностное распределение (1.116) примет вид

$$P_{st}(x,y) = \frac{\gamma}{2\pi D} e^{-\frac{\gamma(x^2+y^2)}{2D}}. \quad (1.117)$$

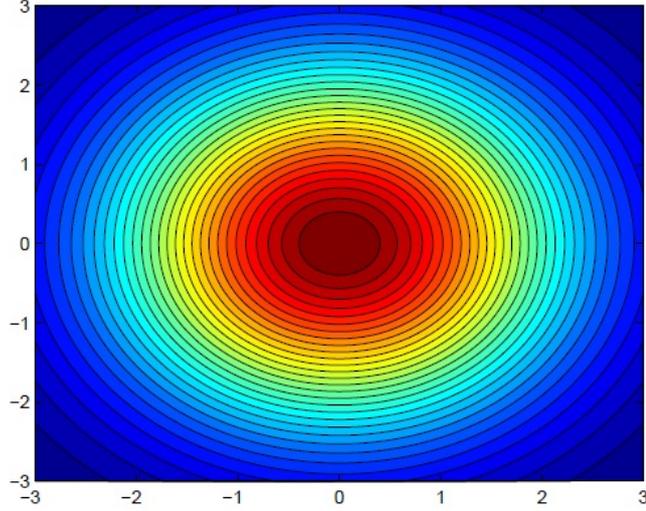


Рис. 1.16 — Топограмма стационарной совместной плотности вероятности координат частицы для гармонического потенциала  $U(x,y) = \gamma(x^2 + y^2)/2$  в случае гауссовых воздействующих шумов. Значения параметров:  $D = 5$ ,  $\gamma = 2$

Топограмма стационарной совместной плотности вероятности (1.117) в параболическом потенциале  $U(x,y)$  представлена на Рисунке 1.16 и иллюстрирует свойство радиальной симметрии установившегося совместного вероятностного распределения для броуновской диффузии на плоскости.

### 1.5.2 Случай шумов с распределением Леви

Перейдем к рассмотрению случая двух идентичных источников шума с симметричным  $\alpha$ -устойчивым распределением Леви:  $\rho_1(z) = \rho_2(z) = Q_\alpha |z|^{1-\alpha}$ . Тогда уравнение (1.112) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} P \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} P \right) + \\ &+ Q_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|z|^{\alpha+1}} (P(x-z, y, t) + P(x, y-z, t) - 2P(x, y, t)) dz = \\ &= \operatorname{div}(P \operatorname{grad} U) + D_\alpha \nabla^\alpha P(x, y, t), \end{aligned} \quad (1.118)$$

где  $D_\alpha = \frac{\pi Q_\alpha}{\Gamma(\alpha+1) \sin(\pi\alpha/2)}$  и  $\nabla^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial |x|^\alpha} + \frac{\partial^\alpha}{\partial |y|^\alpha}$  — лапласиан дробного порядка.

После двумерного преобразования Фурье уравнения (1.118) (см. Приложение В) приходим к следующему уравнению для совместной характеристической функции  $\Theta(k, q, t)$

координат частицы

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(k, q, t)}{\partial t} = & -ikU'_x \left( -i\frac{\partial}{\partial k}, -i\frac{\partial}{\partial q} \right) \Theta(k, q, t) - iqU'_y \left( -i\frac{\partial}{\partial k}, -i\frac{\partial}{\partial q} \right) \Theta(k, q, t) - \\ & - D_\alpha (|k|^\alpha + |q|^\alpha) \Theta(k, q, t). \end{aligned} \quad (1.119)$$

Уравнение (1.119) обобщает результаты, полученные ранее в работе [59] для конкретного потенциала  $U(x)$  в случае бивариантного шума с дискретной спектральной мерой, на случай произвольного потенциала при воздействии шумов.

В установившемся режиме уравнение (1.119) принимает вид

$$\begin{aligned} ikU'_x \left( -i\frac{\partial}{\partial k}, -i\frac{\partial}{\partial q} \right) \Theta_{st}(k, q) + iqU'_y \left( -i\frac{\partial}{\partial k}, -i\frac{\partial}{\partial q} \right) \Theta_{st}(k, q) + \\ + D_\alpha (|k|^\alpha + |q|^\alpha) \Theta_{st}(k, q) = 0. \end{aligned} \quad (1.120)$$

В качестве примера вновь рассмотрим параболический потенциал  $U(x, y) = \gamma(x^2 + y^2)/2 = \gamma r^2/2$ , обладающий радиальной симметрией. В этом случае уравнения Ланжевена (1.110) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\gamma x + \xi_1(t), \\ \dot{y} &= -\gamma y + \xi_2(t) \end{aligned} \quad (1.121)$$

и становятся независимыми.

В силу статистической независимости переменных  $x(t)$  и  $y(t)$ , вытекающей из статистической независимости источников  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$ , совместная плотность вероятности распадается на произведение отдельных плотностей, а совместная характеристическая функция – на произведение отдельных характеристических функций. Поэтому ищем решение уравнения (1.120) в факторизованном виде

$$\Theta_{st}(k, q) = \vartheta_{st}(k) \cdot \vartheta_{st}(q).$$

Это приводит нас к следующему дифференциальному уравнению

$$k\gamma\vartheta_{st}(q) \frac{d\vartheta_{st}(k)}{dk} + q\gamma\vartheta_{st}(k) \frac{d\vartheta_{st}(q)}{dq} + D_\alpha (|k|^\alpha + |q|^\alpha) \vartheta_{st}(k) \cdot \vartheta_{st}(q) = 0.$$

Применяя стандартный метод разделения переменных и принимая во внимание условие  $\vartheta_{st}(0) = 1$ , окончательно приходим к

$$\Theta_{st}(k, q) = \exp \left\{ -\frac{D_\alpha}{\gamma\alpha} (|k|^\alpha + |q|^\alpha) \right\}. \quad (1.122)$$

Как известно [1], весь класс устойчивых вероятностных распределений  $P_{\alpha, \beta}(x)$  имеет характеристическую функцию следующего вида

$$\vartheta_{\alpha, \beta}(k) = \exp \left\{ -|k|^\alpha e^{\frac{i\pi\beta}{2} \operatorname{sgn} k} \right\}, \quad (1.123)$$

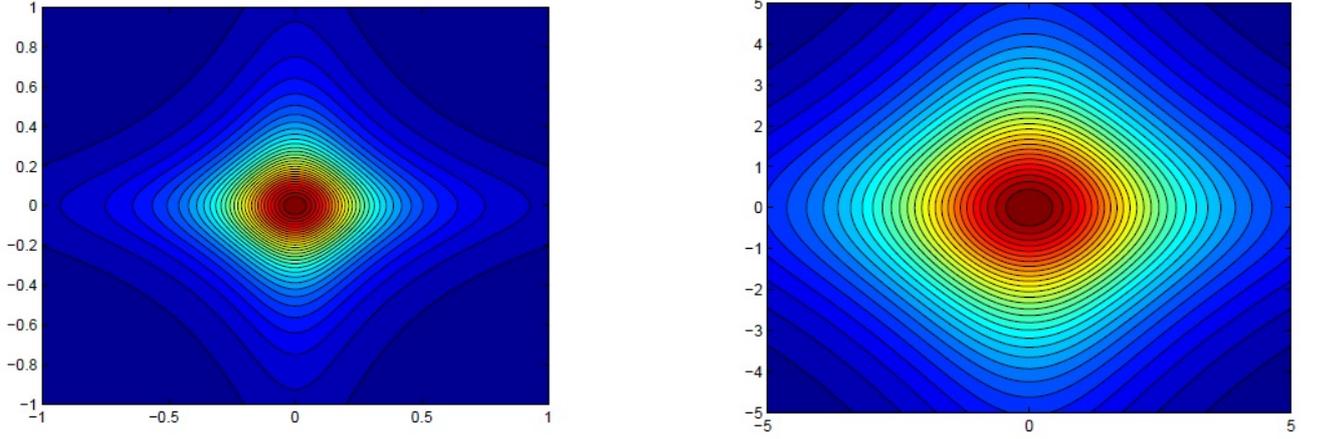
(a)  $D_1 = 0,5$ (б)  $D_1 = 5$ 

Рис. 1.17 — Топограммы стационарной совместной плотности вероятности координат частицы для гармонического потенциала  $U(x,y) = \gamma(x^2 + y^2)/2$  в случае полетов Леви на плоскости для различных значений параметра  $D_1$ . Значения параметров:  $\alpha = 1$ ,  $\gamma = 2$

где  $\alpha$  — индекс Леви ( $0 < \alpha < 2$ ),  $\beta$  — параметр асимметрии ( $|\beta| \leq 1 - |\alpha - 1|$ ). В симметричном случае ( $\beta = 0$ ) соответствующее устойчивое вероятностное распределение может быть вычислено с помощью обратного преобразования Фурье характеристической функции (1.123)

$$P_{\alpha,0}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|k|^\alpha - ikz} dk. \quad (1.124)$$

Установившееся совместное вероятностное распределение получаем из (1.122) путем двойного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} P_{st}(x,y) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta_{st}(k,q) e^{-ikx - iqu} dk dq = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{D_\alpha}{\gamma^\alpha} |k|^\alpha - ikx} dk \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{D_\alpha}{\gamma^\alpha} |q|^\alpha - iqu} dq. \end{aligned}$$

С учетом (1.124) находим

$$P_{st}(x,y) = \left(\frac{\gamma\alpha}{D_\alpha}\right)^{2/\alpha} \cdot P_{\alpha,0}\left(\left(\frac{\gamma\alpha}{D_\alpha}\right)^{1/\alpha} x\right) \cdot P_{\alpha,0}\left(\left(\frac{\gamma\alpha}{D_\alpha}\right)^{1/\alpha} y\right). \quad (1.125)$$

В частности, для шумов Коши ( $\alpha = 1$ ) из (1.124)-(1.125) приходим к

$$P_{st}(x,y) = \left(\frac{\gamma D_1}{\pi}\right)^2 \frac{1}{(D_1^2 + \gamma^2 x^2)(D_1^2 + \gamma^2 y^2)}. \quad (1.126)$$

Топограммы стационарной совместной плотности вероятности координат (1.126) в гармоническом потенциале  $U(x,y) = \gamma(x^2 + y^2)/2$  для различных значений параметра  $D_1$  представлены на Рисунке 1.17. Видно, что в отличие от стационарного распределения для гауссовых шумов (см. (1.117) и Рисунок 1.16) полеты Леви на плоскости не обладают свойством симметрии из-за независимости полетов в перпендикулярных направлениях.

Следует отметить также следующее: если в качестве потенциала с радиальной симметрией рассмотреть потенциал четвертой степени  $U(x,y) = \gamma r^4/4$ , система уравнений Ланжевена (1.109) не распадется на независимые уравнения, как в случае гармонического потенциала. Это является естественным следствием того, что движения вдоль координатных осей более не являются независимыми, несмотря на статистическую независимость источников шума.

Нарушение радиальной симметрии совместного вероятностного распределения координат частицы было впервые обнаружено авторами работы [59] для источников шума с дискретной спектральной мерой путем численного моделирования. Авторы также показали, что если источники скоррелированы специальным образом, полеты частицы будут изотропны, и распределение сохранит симметрию, присущую исходному потенциалу.

## 1.6 Выводы по первой главе

Исследован эффект задержки шумом распада нестабильных состояний (ЗРШ) в полностью неустойчивой системе, а именно в обратном симметричном параболическом потенциале. Изучена статистика времени пребывания для произвольного однородного по времени марковского процесса в нелинейных системах, выведено замкнутое интегральное уравнение для распределения вероятностей времени пребывания. В частном случае нестабильного параболического потенциала с источником шума Леви получены выражения для условной плотности вероятности положения частицы и среднего времени пребывания в симметричном интервале.

Впервые получен и проанализирован точный аналитический результат для времени корреляции координаты частицы в случае ограниченных полетов Леви с единичным индексом Леви ( $\alpha = 1$ ) в симметричном бистабильном потенциале четвертой степени. Показано, что при достаточно высоких барьерах время корреляции перестает зависеть от высоты потенциального барьера, разделяющего два устойчивых состояния, что отличается от закона Крамерса для броуновского движения. Кроме того, была обнаружена интересная степенная зависимость с показателем  $4/3$  времени корреляции от положения потенциальных ям. Полученные результаты хорошо стыкуются с предыдущими точными результатами и данными численного моделирования. Наконец, необходимо отметить, что предложенный метод может быть, в принципе, применен для аналитических расчетов временных характеристик ограниченных полетов Леви в более крутых потенциалах.

Получено точное аналитическое выражение для установившегося вероятностного распределения в симметричной степенной потенциальной яме вида  $U(x) \propto x^{2m}$  в случае шума Леви с устойчивым распределением Коши ( $\alpha = 1$ ), позволяющее в предельном переходе получить распределение в бесконечно глубокой прямоугольной яме без формулировки граничных условий.

Впервые найдено и подтверждено результатами численных расчетов асимптотическое выражение для спектральной плотности мощности координаты частицы при установившейся-

ся супердиффузии Леви в симметричных степенных потенциальных профилях для шума с произвольным индексом Леви  $\alpha$ . Приведенный анализ, описывающий удерживаемые полеты Леви, может быть полезен для описания распределения летающих объектов в пространственно ограниченных структурах, таких как удерживаемая плазма и турбулентные потоки.

Выведено общее уравнение Колмогорова для совместной плотности вероятности координат частицы в двумерном потенциале произвольного вида при диффузии, вызванной статистически независимыми источниками белого шума. Проведено сравнение установившихся вероятностных характеристик броуновской диффузии и аномальной диффузии в форме полетов Леви в потенциале с радиальной симметрией.

## Глава 2. Влияние шумов различной природы на поведение нелинейных динамических систем

Мейнстримом современной науки являются различные нелинейные модели, и особенно востребованными оказались возможности нелинейной науки в изучении и моделировании живых систем в биологии и экологии. Экологические системы – это открытые для потоков вещества и энергии системы, т.е. далекие от термодинамического равновесия. В них взаимодействие между составными частями нелинейно, а взаимодействие с окружающей средой является зашумленным. Эта внутренняя нелинейность может привести к сложному поведению системы, которая становится очень чувствительной к начальным условиям, различным детерминированным внешним возмущениям и флуктуациям, всегда присутствующим в природе.

Взаимодействие между шумом и нелинейным детерминизмом в экологической динамике добавляет дополнительный уровень сложности по сравнению со стохастической динамикой, скажем, экономических систем или детерминированной динамикой многих физических и химических процессов.

В последнее время исследователи проявляют растущий интерес к более глубокому пониманию эффектов флуктуаций в биологических системах, начиная от неврологии и заканчивая биологической эволюцией и динамикой популяций [60–70]. Поэтому для описания сложных экосистем принципиально важно понимать взаимосвязь между шумом, параметрами окружающей среды и внутренней нелинейностью моделей экосистем. Даже небольшие стохастические возмущения в биологических системах могут резко изменить их динамику [71–73]. В частности, случайные возмущения в популяционных системах могут привести к вымиранию, вызванному шумом [74; 75]. Следует отметить, что многие стохастические процессы проявляют мгновенные дискретные скачки и поэтому не могут быть обеспечены возмущением в виде белого гауссова шума, что затрудняет аналитический анализ таких нелинейных динамических систем [76].

Таким образом, понимание роли шума в динамике нелинейных систем играет ключевой аспект в изучении и дальнейшем моделировании сложных систем.

В разделе 2.1 аналитически исследуются два обобщенных уравнения Ферхюльста с негауссовыми флуктуациями темпа воспроизводства и объема ресурсов (параметр насыщения).

В разделе 2.2 анализируются некоторые модели экологии и генетики на основе недавно полученных из уравнения Колмогорова–Феллера точных аналитических результатов для стационарной плотности вероятности нелинейных динамических систем с возмущением в форме белого пуассоновского шума с экспоненциально распределенными амплитудами импульсов. В частности, рассматривается известная модель Ферхюльста для плотности изолированной биологической популяции с изменяющимся темпом роста. Модель с мультипликативным белым шумом Пуассона, имеющим импульсы положительной полярности,

адекватно описывает эффект эпидемий, стихийные бедствия и другие негативные явления, приводящие к значительному сокращению численности популяции в короткие сроки. Далее изучаются вероятностные характеристики модели Хонглера, являющейся подходящим приближением для описания процесса генетического отбора.

В разделе 2.3 изучается влияние коррелированных шумов на вероятностные свойства нелинейной динамической системы, возбуждаемой шумом Орнштейна—Уленбека, являющийся гауссовым шумом с конечным временем корреляции.

В разделе 2.4 представлены основные выводы по данной главе.

Исследования и результаты второй главы опубликованы в работах [A1; A5; A10; A11; A15; A19; A21].

## 2.1 Переходные и стационарные статистические характеристики модели Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли (МФБ)

Поведение некоторых нелинейных динамических систем в присутствии случайных возмущений может быть описано уравнением Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли (МФБ)

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x - \beta(t)x^{\mu+1}, \quad (2.1)$$

которое является обобщением широко известной модели Ферхюльста [77] или логистического уравнения ( $\mu = 1$ ). Применительно к динамике популяции  $x(t)$  – плотность популяции (из биологического смысла следует, что  $x(t) \geq 0$  для всех  $t \geq 0$ ),  $r(t)$  – это темп роста изолированной популяции, а нелинейный член с положительными параметрами  $\mu$  и  $\beta(t)$  отвечает за ограничение роста, связанное с конечным количеством пищевых ресурсов, наличием хищников и т.д.

Модель МФБ нашла широкое применение в различных областях науки, таких как динамика популяции фотонов в одномодовом лазере [78; 79], динамика биологических популяций [76; 80], самовоспроизведение макромолекул [81], рост опухолевых клеток [82], стохастический резонанс в линейных системах [83; 84], социальные науки [85; 86].

В большинстве работ, посвященных рассмотрению модели (2.1), предполагается, что один из коэффициентов  $r(t)$  или  $\beta(t)$  постоянен, а другой флуктуирует вокруг некоторого среднего значения. Широко изучены основные свойства (как стационарные, так и зависящие от времени) модели (2.1) с флуктуациями темпа роста  $r(t) = r + \xi(t)$  и  $\beta(t) = \beta$  для различных источников шума  $\xi(t)$ : белый гауссов шум (см. [87] и ссылки внутри), белый дробовой шум [88; 89], марковский дихотомический шум (см. обзор [90]).

Случай флуктуаций параметра насыщения, когда  $r(t) = r$  и  $\beta(t) = \beta + \xi(t)$ , получил в литературе меньшее освещение. Причина состоит в том, что условие  $\beta(t) > 0$  не может быть удовлетворено для гауссова и для многих других видов шума. В работах [91; 92] получены некоторые точные результаты для кинетических и установившихся характеристик уравнения

МФБ (2.1) с флуктуирующим параметром  $\beta(t)$  в форме марковского дихотомического шума и периодических возмущений со случайной фазой.

Модель МФБ, возбуждаемая полностью коррелированными шумами ( $r(t) \sim \beta(t)$ ), была исследована в серии работ [5; 93–95]. Авторы [93] рассмотрели в качестве внешнего возмущения процесс Орнштейна—Уленбека и получили точные результаты для вероятностного распределения плотности популяции. Точное выражение для плотности вероятности  $x(t)$  в модели (2.1) с асимметричным марковским дихотомическим шумом было выведено в работе [94]. В работе [95] была рассмотрена модель МФБ под воздействием симметричного дихотомического шума с непуассоновской статистикой скачков и найдена кинетика вероятностного распределения. Также несколько случаев белого негауссова шума были детально изучены в [5].

В данном разделе проводится анализ переходных и установившихся статистических характеристик модели МФБ динамики популяций как с полностью коррелированными параметрами (негауссовым цветным шумом), так и отдельно с флуктуациями параметра насыщения в форме белого шума с односторонним устойчивым вероятностным распределением.

### 2.1.1 Модель МФБ с полностью коррелированными негауссовыми источниками шума

Проанализируем модель МФБ, в которой оба параметра в уравнении (2.1) флуктуируют одинаково, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = [r + \xi(t)] x (1 - x^\mu), \quad (0 < x < 1), \quad (2.2)$$

где  $r > 0$  – средний темп роста популяции и  $\xi(t)$  – негауссов шум с нулевым средним  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  и ненулевым временем корреляции  $\tau_c$ . Далее используем тот факт, что точное решение стохастического уравнения (2.2) имеет вид

$$x(t) = \left( 1 + \frac{1 - x_0^\mu}{x_0^\mu} \exp \left\{ -rt - \int_0^t \xi(\tau) d\tau \right\} \right)^{-1/\mu}, \quad (2.3)$$

где  $x_0 = x(0)$  – начальное значение плотности популяции. В соответствии с центральной предельной теоремой (ЦПТ) интеграл от шума  $\xi(t)$  с конечным временем корреляции в уравнении (2.3) становится квази-гауссовым процессом на достаточно больших временах  $t \gg \tau_c$ . Используя формулу преобразования случайных величин из теории вероятностей из (2.3) можно получить следующее приближенное выражение для вероятностного распределения плотности популяции

$$P(x,t) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi S_\xi(0)t} x (1 - x^\mu)} \exp \left\{ -\frac{[rt + \ln(x^{-\mu} - 1) - \ln(x_0^{-\mu} - 1)]^2}{2S_\xi(0)t} \right\}, \quad (2.4)$$

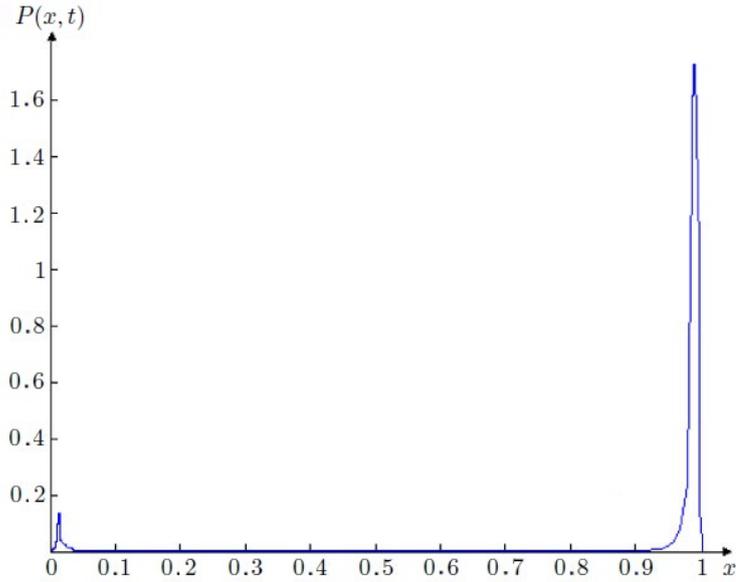


Рис. 2.1 — Вероятностное распределение  $P(x, t)$  плотности популяции в случае марковского дихотомического шума для  $t = 100$  ( $t \gg \tau_c$ ). Значения параметров:  $\tau_c = 1$ ;  $\mu = 3$ ;  $r = 1$ ;  $\Delta = 0,5$ ;  $x_0 = 0,2$

где  $S_\xi(\omega)$  — спектральная плотность мощности случайного процесса  $\xi(t)$ . В соответствии с выражением (2.4) для границ интервала  $x = 0$  и  $x = 1$  имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} P(x, t) = 0.$$

В качестве примера цветного негауссова шума рассмотрим далее марковский дихотомический шум, переключающийся между двумя значениями  $\pm\Delta$  ( $\Delta < r$ ) со средней частотой  $\nu$ . Этот шум, имеющий экспоненциально убывающую корреляционную функцию  $K[\tau] = \Delta^2 e^{-2\nu|\tau|}$ , дает хорошее понимание самой простой и наиболее распространенной физической ситуации: переходов между двумя конфигурациями системы. Например, он может описывать сезонные скачкообразные колебания рождаемости и смертности в биологических системах.

Вероятностное распределение плотности популяции (2.4) в случае марковского дихотомического шума для времен  $t \gg \tau_c = 1/(2\nu)$  изображено на Рисунке 2.1. Видно, что максимум вероятностного распределения, расположенный рядом с левой границей  $x = 0$ , намного меньше максимума около правой границы  $x = 1$ . Это означает, что биологическая популяция выживает в случае негауссовского возбуждения с конечным временем корреляции. Данный вывод также подтверждается результатами, ранее полученными в [93] для процесса Орнштейна—Уленбека.

Для нахождения эволюции момента  $n$ -го порядка плотности популяции в случае марковского дихотомического шума применим прямое усреднение с использованием точного решения (2.3) [91]

$$\langle x^n(t) \rangle = \left\langle \left( 1 + \frac{1 - x_0^\mu}{x_0^\mu} e^{-rt - \int_0^t \xi(\tau) d\tau} \right)^{-n/\mu} \right\rangle. \quad (2.5)$$

Применяя разложение в ряд Маклорена для произвольной дифференцируемой функции, имеем

$$\left\langle f \left( e^{-rt - \int_0^t \xi(\tau) d\tau} \right) \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} e^{-krt} \left\langle e^{-k \int_0^t \xi(\tau) d\tau} \right\rangle. \quad (2.6)$$

Для выполнения усреднения в (2.6) необходимо знать точное выражение для характеристического функционала марковского дихотомического шума  $\xi(t)$

$$\Theta_t[u] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t u(\tau) \xi(\tau) d\tau \right\} \right\rangle, \quad (2.7)$$

где  $u(t)$  – произвольная детерминированная функция. Как показано в [96], функция  $\Theta_t[u]$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению второго порядка

$$\ddot{\Theta}_t[u] + \left( 2\nu - \frac{\dot{u}}{u} \right) \dot{\Theta}_t[u] + \Delta^2 u^2 \Theta_t[u] = 0. \quad (2.8)$$

Полагая в (2.8)  $u(t) = ik$  в соответствии с (2.6), получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{\Theta}_t + 2\nu \dot{\Theta}_t - \Delta^2 k^2 \Theta_t = 0, \quad (2.9)$$

общее решение которого запишется в виде

$$\Theta_t(ik) = e^{-\nu t} \left[ C_1 \operatorname{sh} \left( \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t \right) + C_2 \operatorname{ch} \left( \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t \right) \right]. \quad (2.10)$$

Используя очевидные начальные условия  $\Theta_0[u] = 1$  и  $\dot{\Theta}_0[u] = 0$ , находим константы  $C_1$  и  $C_2$

$$C_1 = \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2}}, \quad C_2 = 1. \quad (2.11)$$

Окончательное выражение для искомого среднего в (2.6) таково

$$\Theta_t(ik) = e^{-\nu t} \left[ \operatorname{ch} \left( \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t \right) + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t \right) \right], \quad (2.12)$$

а итоговая общая формула (2.6) для среднего в случае марковского дихотомического шума имеет вид

$$\begin{aligned} \left\langle f \left( e^{-rt - \int_0^t \xi(\tau) d\tau} \right) \right\rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} e^{-(kr+\nu)t} \times \\ &\times \left( \operatorname{ch} \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

В силу того, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f \left( e^{-\int_0^t [r + \xi(\tau)] d\tau} \right) = f(0), \quad (2.14)$$

стационарное значение момента плотности популяции любого порядка в соответствии с (2.5)

$$\langle x^n \rangle_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle x^n(t) \rangle = 1, \quad (2.15)$$

о чем свидетельствует Рисунок 2.1. Таким образом, в асимптотике процесс перестает быть случайным, и все его моменты (в т. ч. среднее значение) равны 1.

Как следует из (2.5), (2.6) и (2.13), эволюция момента  $n$ -го порядка плотности популяции будет описываться выражением

$$\begin{aligned} \langle x^n(t) \rangle = & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1 - x_0^\mu}{x_0^\mu} \right)^k \frac{\Gamma(k + n/\mu)}{\Gamma(n/\mu) k!} e^{-(kr+\nu)t} \times \\ & \times \left( \operatorname{ch} \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\nu^2 + \Delta^2 k^2} t \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Необходимым условием сходимости ряда (2.16) является неравенство  $\Delta < r$ , однако данный ряд сходится в абсолютном смысле только для времен

$$t > \frac{1}{r - \Delta} \ln \frac{1 - x_0^\mu}{x_0^\mu}, \quad (2.17)$$

в противном случае момент  $n$ -го порядка плотности популяции следует находить по определению через её вероятностное распределение.

Как видно из (2.17), эволюцию момента  $n$ -го порядка можно наблюдать для всех времен  $t > 0$  только для начальных значений плотности популяции  $x_0$  из диапазона

$$\frac{1}{\sqrt[\mu]{2}} < x_0 < 1. \quad (2.18)$$

Используя ЦПТ и точное решение (2.3) для произвольного цветного шума, приходим к результату (2.15)

$$\langle x^n \rangle_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-rt)^2}{2\sigma^2(t)}} dx}{\left( 1 + \frac{1-x_0^\mu}{x_0^\mu} e^{-x} \right)^{n/\mu}} = 1. \quad (2.19)$$

Рисунок 2.2 демонстрирует релаксацию средней плотности популяции ( $n = 1$ ) при различных начальных значениях  $x_0$  и значениях параметра нелинейности  $\mu$ . Анализ выражения (2.16) показывает, что время релаксации увеличивается с увеличением показателя  $\mu$  при фиксированном начальном значении плотности популяции  $x_0$ . Как и следовало ожидать, все кривые монотонно стремятся к установившемуся значению  $\langle x \rangle_{st} = 1$ .

### 2.1.2 Модель МФБ с флуктуирующим объемом ресурсов

Далее рассмотрим модель МФБ (2.1) для плотности популяции  $x(t)$  с флуктуирующим объемом ресурсов (параметр насыщения)

$$\frac{dx}{dt} = rx - \xi(t) x^{\mu+1}, \quad (2.20)$$

где  $\xi(t)$  – белый негауссов шум с односторонним устойчивым распределением ( $\xi(t) \geq 0$ ).

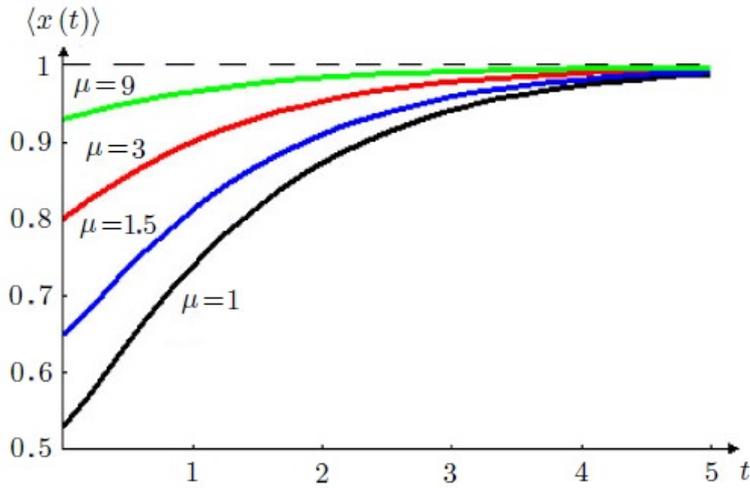


Рис. 2.2 — Монотонная релаксация средней плотности популяции к установившемуся значению для различных начальных значений:  $x_0 = 0,52; 0,64; 0,8; 0,93$  и показателя нелинейности:  $\mu = 1; 1,5; 3; 9$ . Значения параметров соответствуют области (2.17) и равны  $r = 1$ ,  $\nu = 1$ ,  $\Delta = 0,5$

В соответствии с формулой (1.123), характеристическую функцию шума  $\xi(t)$  в (2.20) выберем в виде

$$\theta_\xi(k) = \theta_{\alpha, -\alpha}(\sigma k) = \exp \left\{ -|\sigma k|^\alpha e^{-\frac{i\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn} k} \right\}, \quad (2.21)$$

где  $\sigma$  — параметр интенсивности. Здесь учтено, что для  $0 < \alpha < 1$  и  $\beta = -\alpha$  вероятностное распределение является ненулевым только для положительных аргументов.

Вероятностное распределение  $P(x, t)$  марковского случайного процесса  $x(t)$  можно найти непосредственно из стохастического уравнения (2.20), избегая сложности получения и решения замкнутого интегро-дифференциального уравнения, как в работе [17].

Используя ту же технику, что и в [97], вводим вспомогательный случайный процесс

$$\eta(t) = \int_0^t e^{-\mu\tau(t-\tau)} \xi(\tau) d\tau. \quad (2.22)$$

В этих обозначениях точное решение стохастического уравнения (2.20) принимает вид

$$x(t) = [\mu\eta(t) + e^{-\mu t}/x_0^\mu]^{-1/\mu}. \quad (2.23)$$

В первую очередь необходимо найти вероятностное распределение случайного процесса (2.22), а далее применить стандартную формулу преобразования вероятностного распределения случайной величины после нелинейного преобразования (2.23).

Используем тот факт, что любые устойчивые вероятностные распределения принадлежат классу безгранично делимых распределений с характеристической функцией, представляемой формулой Леви—Хинчина [98]

$$\Phi(k) = \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikz} - 1}{z^2} \rho(z) dz \right\}, \quad (2.24)$$

где  $\rho(z) \geq 0$ . Представляя логарифм характеристической функции (2.21) в интегральной форме как в (2.24)

$$\ln \theta_\xi(k) = \frac{\alpha \sigma^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{ikz} - 1}{z^{1+\alpha}} dz, \quad (2.25)$$

получаем

$$\rho(z) = \frac{\alpha \sigma^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} z^{1-\alpha} \quad (z > 0). \quad (2.26)$$

Для вычисления характеристической функции вспомогательного случайного процесса (2.22)

$$\vartheta_\eta(k, t) = \langle e^{ik\eta(t)} \rangle = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t k e^{-\mu r(t-\tau)} \xi(\tau) d\tau \right\} \right\rangle \quad (2.27)$$

используем общее выражение для характеристического функционала белого негауссова шума  $\xi(t)$  с ненулевым средним и приращениями, распределенными по безгранично делимому закону (см. [17])

$$\begin{aligned} \Theta_t[u] &= \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t u(\tau) \xi(\tau) d\tau \right\} \right\rangle = \\ &= \exp \left\{ \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iu(\tau)z} - 1}{z^2} \rho(z) dz \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Подставляя, согласно (2.27),  $u(\tau) = k e^{-\mu r(t-\tau)}$  и функцию  $\rho(z)$  из (2.26) в (2.28), приходим к

$$\vartheta_\eta(k, t) = \exp \left\{ - \frac{(1 - e^{-\mu r a t}) |k|^\alpha \sigma^\alpha}{\mu r \alpha} e^{-\frac{i\pi\alpha}{2} \operatorname{sgn} k} \right\}. \quad (2.29)$$

Сравнивая выражения (2.21) и (2.29), заключаем, что

$$\vartheta_\eta(k, t) = \theta_{\alpha, -\alpha}(k \sigma(t)), \quad (2.30)$$

где

$$\sigma(t) = \sigma \left( \frac{1 - e^{-\mu r a t}}{\mu r \alpha} \right)^{1/\alpha}. \quad (2.31)$$

Установившееся вероятностное распределение случайного процесса  $\eta(t)$  получается обратным преобразованием Фурье характеристической функции (2.30) и имеет вид

$$P_\eta(y, t) = \frac{1}{\sigma(t)} P_{\alpha, -\alpha} \left( \frac{y}{\sigma(t)} \right), \quad (2.32)$$

где  $P_{\alpha, -\alpha}(x)$  – устойчивое вероятностное распределение, соответствующее характеристической функции  $\theta_{\alpha, -\alpha}(k)$ .

Используя известную формулу преобразования вероятностного распределения случайной величины после нелинейного преобразования, из (2.23) и (2.32) получаем окончательное точное выражение для вероятностного распределения плотности популяции

$$P(x, t) = \frac{1}{x^{\mu+1} \sigma(t)} P_{\alpha, -\alpha} \left( \frac{1}{\mu \sigma(t)} \left( \frac{1}{x^\mu} - \frac{e^{-\mu r t}}{x_0^\mu} \right) \right). \quad (2.33)$$

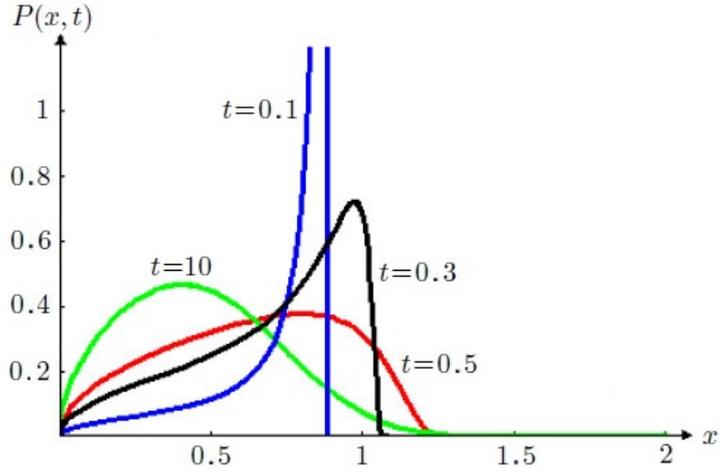


Рис. 2.3 — Эволюция вероятностного распределения плотности популяции (2.36). Значения параметров:  $\mu = 3$ ;  $x_0 = 0,8$ ;  $r = 1$ ;  $\sigma = \pi$

Выражение (2.33) определяет переходную динамику вероятностного распределения из начального состояния  $P(x,0) = \delta(x - x_0)$  к установившемуся  $P_{st}(x)$  в асимптотике ( $t \rightarrow \infty$ ), которое, исходя из (2.33), имеет вид

$$P_{st}(x) = \frac{(\mu r \alpha)^{1/\alpha}}{x^{\mu+1} \sigma} P_{\alpha, -\alpha} \left( \frac{(\mu r \alpha)^{1/\alpha}}{\mu x^\mu \sigma} \right). \quad (2.34)$$

Полученные точные результаты (2.33) и (2.34) могут быть проанализированы только в некоторых частных случаях, так как устойчивые распределения  $P_{\alpha, \beta}(x)$  имеют сложное представление в виде рядов.

Далее рассмотрим пример белого негауссова шума  $\xi(t)$  с односторонним устойчивым распределением Леви—Смирнова ( $\alpha = 1/2$ ). В силу того, что данное распределение может быть записано в простой аналитической форме (см., например, [1])

$$P_{1/2, -1/2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{3/2} e^{-1/(4x)} \quad (x > 0), \quad (2.35)$$

из (2.31) и (2.33) находим

$$P(x, t) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\sigma \mu}{\pi}} \frac{(1 - e^{-\mu r t / 2}) x^{\mu/2-1}}{(1 - x^\mu e^{-\mu r t / x_0^\mu})^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\sigma x^\mu (1 - e^{-\mu r t / 2})^2}{\mu r^2 (1 - x^\mu e^{-\mu r t / x_0^\mu})} \right\} \quad (0 < x < x_0 e^{rt}). \quad (2.36)$$

Эволюция вероятностного распределения плотности популяции (2.36) с параметром нелинейности  $\mu = 3$  в (2.20) показана на Рисунке 2.3. Видно, что начальное распределение в форме дельта-функции расширяется, оставаясь унимодальным для всех времен  $t$ .

Согласно выражению (2.36) установившееся вероятностное распределение ( $t \rightarrow \infty$ ) имеет вид

$$P_{st}(x) = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\sigma \mu}{\pi}} x^{\mu/2-1} e^{-\sigma x^\mu / (\mu r^2)} \quad (x > 0). \quad (2.37)$$

На Рисунке 2.4 изображены графики установившегося вероятностного распределения плотности популяции (2.37) для различных значений параметра нелинейности  $\mu$ , который может быть как целым, так и дробным.

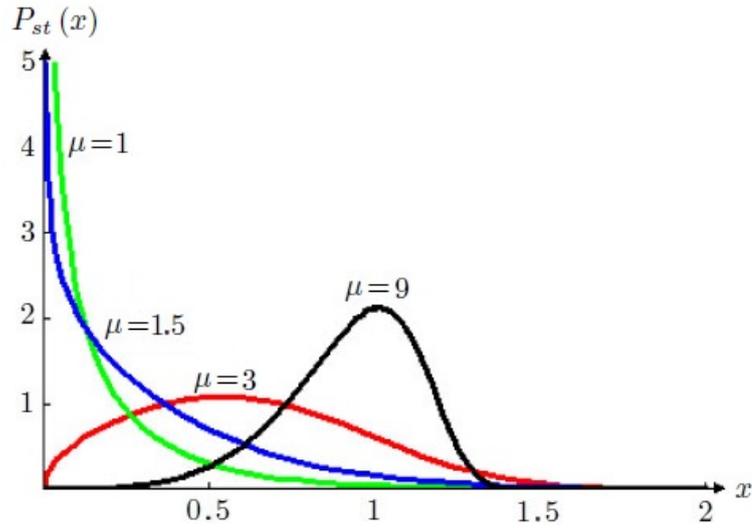


Рис. 2.4 — Установившееся вероятностное распределение плотности популяции (2.37) для различных значений параметра нелинейности  $\mu$ . Значения параметров:  $r = 1$ ,  $\sigma = \pi$

Нетрудно показать из (2.36), что для любых времен

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x, t) = \infty$$

в случае  $0 < \mu < 2$  и

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} P(x, t) = 0$$

для  $\mu \geq 2$ , что также отчетливо видно из Рисунка 2.4. Согласно (2.37), если  $0 < \mu < 2$  установившееся распределение не имеет экстремумов. В то же время, для значений показателя  $\mu \geq 2$  наиболее вероятная величина плотности популяции не является нулевой, а определяется выражением

$$x^* = \left[ \frac{(\mu - 2)r^2}{2\sigma} \right]^{1/\mu}, \quad (2.38)$$

и максимум установившегося вероятностного распределения равен

$$P_{st}(x^*) = \sqrt{\frac{\mu(\mu - 2)}{2\pi e}} \left[ \frac{2\sigma e}{r^2(\mu - 2)} \right]^{1/\mu}. \quad (2.39)$$

Как видно из Рисунка 2.4 и соотношений (2.38), (2.39), максимум увеличивается по величине и сдвигается вправо с увеличением показателя нелинейности  $\mu$ . Для модели Ферхюльста ( $\mu = 1$ ) соответствующая кривая совпадает с кривой, полученной в [97]. Это означает, что в случае  $0 < \mu < 2$  флуктуации ресурсов с бесконечным средним значением (см. (2.35)) приводят к уничтожению популяции по наиболее вероятному сценарию. Однако, для  $\mu \geq 2$  максимум установившегося распределения находится не в начале, и биологическая популяция выживает.

Из (2.37) можно найти стационарное значение момента  $n$ -го порядка

$$\langle x^n \rangle_{st} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\mu r^2}{\sigma} \right)^{n/\mu} \Gamma \left( \frac{n}{\mu} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.40)$$

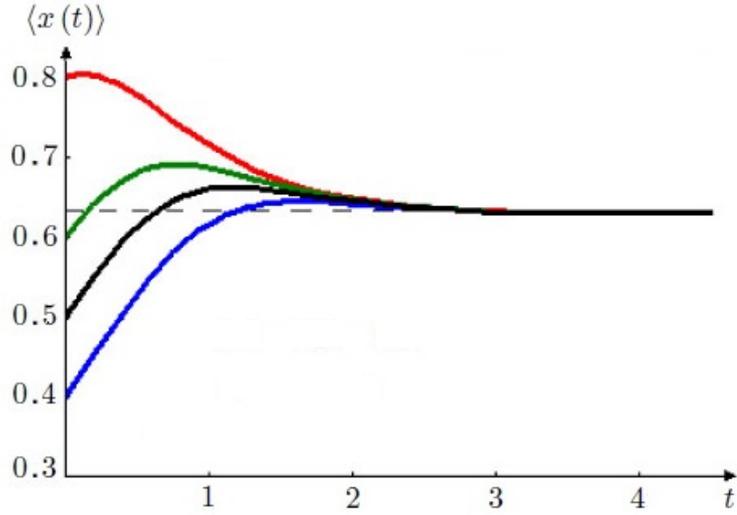


Рис. 2.5 — Немонотонная релаксация средней плотности популяции к установившемуся значению для различных начальных значений  $x_0 = 0,4; 0,5; 0,6; 0,8$ . Значения параметров:  $\mu = 3$ ,  $r = 1$ ,  $\sigma = \pi$

и, в частности, установившееся среднее значение

$$\langle x \rangle_{st} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\mu r^2}{\sigma} \right)^{1/\mu} \Gamma \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.41)$$

а также дисперсию

$$\sigma_{st}^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{\mu r^2}{\sigma} \right)^{2/\mu} \left[ \Gamma \left( \frac{2}{\mu} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma^2 \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (2.42)$$

Найдем эволюцию средней плотности популяции для общего случая. Используя выражение (2.33), приходим к

$$\langle x(t) \rangle = \frac{1}{\sigma(t)} \int_0^{x_0 e^{rt}} P_{\alpha, -\alpha} \left( \frac{1}{\mu \sigma(t)} \left( \frac{1}{x^\mu} - \frac{e^{-\mu r t}}{x_0^\mu} \right) \right) \frac{dx}{x^\mu} = \int_0^\infty \frac{P_{\alpha, -\alpha}(z) dz}{[\mu \sigma(t) z + e^{-\mu r t} / x_0^\mu]^{1/\mu}}. \quad (2.43)$$

Релаксация средней плотности популяции, полученная численным вычислением интеграла (2.43) для устойчивого распределения Леви—Смирнова (2.35) и различных начальных значений плотности популяции  $x_0$ , изображена на Рисунке 2.5. На Рисунке 2.5 все кривые на больших временах сходятся к значению  $\langle x \rangle_{st} \simeq 0.627$ , что соответствует (2.41) с параметрами  $\mu = 3$ ,  $r = 1$ ,  $\sigma = \pi$ . Кроме того, кривые имеют немонотонное поведение в отличие от модели (2.2) (см. Рисунок 2.2). Этот интересный факт был впервые обнаружен в работе [91] для модели МФБ (2.20) с возбуждением в форме марковского дихотомического шума и синусоидального сигнала со случайной фазой, а затем был подтвержден численным моделированием.

## 2.2 Установившиеся вероятностные характеристики моделей Ферхюльста и Хонглера с мультипликативным белым пуассоновским шумом

Рассмотрим нелинейную динамическую систему, описываемую следующим стохастическим дифференциальным уравнением первого порядка

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \xi(t), \quad (2.44)$$

где  $\xi(t)$  – белый пуассоновский шум

$$\xi(t) = \sum_k a_k \delta(t - t_k). \quad (2.45)$$

Моменты появления импульсов  $t_k$  образуют пуассоновский поток событий со средней частотой  $\nu$ , а случайные “амплитуды”  $a_k$  являются статистически независимыми от  $t_k$  и одинаково распределенными с плотностью вероятности  $W_a(z)$ . Случайный процесс  $x(t)$  в (2.44) является марковским и его вероятностное распределение  $P(x,t)$  удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Колмогорова—Феллера [99]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) P] + \nu \int_{-\infty}^{\infty} dz W_a(z) \left[ \exp \left\{ -z \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right\} - 1 \right] P(x,t), \quad (2.46)$$

которое является частным случаем обобщенного уравнения Колмогорова (1.43) для произвольного негауссова белого шума  $\xi(t)$ . Следует заметить, что уравнение (2.46) может быть переписано в дифференциальной форме в терминах характеристической функции  $\theta_a(u) = \langle e^{iua_k} \rangle$  случайных амплитуд  $a_k$  (см. (5) в [100])

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) P] + \nu \left[ \theta_a \left( i \frac{\partial}{\partial x} g(x) \right) - 1 \right] P. \quad (2.47)$$

В случае одностороннего экспоненциального вероятностного распределения амплитуд (положительная полярность импульсов в (2.45))

$$W_a(z) = \lambda e^{-\lambda z}, \quad z \geq 0, \quad (2.48)$$

уравнение (2.47) принимает следующий вид [88]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ f(x) + \nu g(x) \frac{1}{\lambda + (\partial/\partial x) g(x)} \right] P. \quad (2.49)$$

Используя условие нулевого вероятностного потока в установившемся состоянии в (2.49), приходим к следующему дифференциальному уравнению первого порядка для стационарного распределения

$$\frac{d}{dx} [f(x) P_{st}] + \left[ \nu + \lambda \frac{f(x)}{g(x)} \right] P_{st} = 0. \quad (2.50)$$

Точное решение уравнения (2.50) может быть найдено в квадратурах

$$P_{st}(x) = \frac{1}{f(x)} \exp \left\{ - \int \left[ \frac{\nu}{f(x)} + \frac{\lambda}{g(x)} \right] dx \right\}. \quad (2.51)$$

В частном случае аддитивного шума ( $g(x) = 1$ ) формула (2.51) переходит в формулу, полученную в [101]

$$P_{st}(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{f(x)} \exp \left\{ -\nu \int \frac{dx}{f(x)} \right\}, \quad x \geq 0. \quad (2.52)$$

С физической точки зрения большой интерес представляет двустороннее экспоненциальное вероятностное распределение амплитуд импульсов

$$W_a(z) = \frac{\beta}{2} e^{-\beta|z|} \quad (2.53)$$

с  $\langle a \rangle = 0$  и  $\langle a^2 \rangle = 2/\beta^2$ . В этом случае уравнение Колмогорова—Феллера (2.47) записывается следующим образом

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) P] + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left\{ g(x) \frac{\partial}{\partial x} g(x) \frac{1}{[(\partial/\partial x) g(x)]^2 - \beta^2} \right\} P. \quad (2.54)$$

Уравнение для установившегося вероятностного распределения случайного процесса  $x(t)$ , соответствующее (2.54), принимает вид

$$\left( g(x) \frac{d}{dx} \right)^2 [f(x) P_{st}] + \nu g(x) \frac{d}{dx} [g(x) P_{st}] - \beta^2 f(x) P_{st} = 0. \quad (2.55)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.55) второго порядка, в отличие от (2.50), не может быть записано в квадратурах для произвольных функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Необходимо заметить, что для системы (2.44), возмущенной аддитивным белым пуассоновским шумом ( $g(x) = 1$ ), уравнение (2.55) переходит в уравнение (11) из работы [100] (см. также уравнение (13) в [102]).

### 2.2.1 Модель Ферхюльста с мультипликативным белым пуассоновским шумом

Рассмотрим уравнение Ферхюльста для плотности изолированной биологической популяции  $x(t)$

$$\dot{x} = rx - b(t)x^2, \quad (2.56)$$

где  $r$  — темп роста популяции и случайный процесс  $b(t)$  описывает флуктуации объема ресурсов (см. [88; 91; 92; 97] и также [A1; 95; 103]). Устойчивость модели (2.56) обеспечивается условием  $b(t) > 0$ . Для сравнения с динамикой удобно представить случайный процесс  $b(t)$  в форме  $b(t) = r/K + \xi(t)$ , где  $K$  — установившаяся численность популяции в отсутствии

флуктуаций ( $b(t) = 0$ ) (данный параметр принято называть емкостью среды). В результате, уравнение (2.56) переходит в

$$\dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \xi(t) x^2. \quad (2.57)$$

Замена шума  $\xi(t)$  в уравнении (2.57) на белый пуассоновский (2.45) с импульсами положительной полярности соответствует следующей ситуации. Во временных интервалах между импульсами  $\xi(t)$  (см. (2.45)) биологическая популяция развивается в соответствии с обычной моделью Мальтуса—Ферхюльста, стремясь достичь установившегося значения  $K$ , но происходит резкое снижение её плотности в моменты возникновения импульсов. Эта эволюционная модель может адекватно описать последствия внезапных эпидемий, стихийных бедствий и других негативных явлений, которые приводят к значительному снижению плотности популяции за короткий промежуток времени.

В силу того, что скачок плотности популяции в момент появления импульсов  $t_i$  не должен превышать ее текущую численность  $x_i$ , необходимо потребовать выполнение следующего условия:  $a_i x_i^2 < x_i$  или  $a_i < 1/x_i$  (см. уравнения (2.45) и (2.57)). Учитывая вероятностное распределение амплитуд (2.48) и тот факт, что случайный процесс  $x(t)$  попадает в интервал  $(0, K)$  в асимптотике, мы приходим к следующему ограничению на параметры рассматриваемой модели

$$\lambda/K > 1. \quad (2.58)$$

Подставляя в (2.51), в соответствии с (2.57),  $f(x) = rx(1 - x/K)$  и  $g(x) = -x^2$ , находим установившееся вероятностное распределение плотности популяции

$$P_{st}(x) = \frac{\lambda^\mu (1 - x/K)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu) x^{\mu+1}} e^{-\lambda(1/x-1/K)} \quad (0 \leq x \leq K), \quad (2.59)$$

где  $\mu = \nu/r$ .

Как уже отмечалось, в отсутствие флуктуаций  $\xi(t) = 0$  при любых начальных условиях, плотность популяции стремится к своему асимптотическому значению  $K$ . Тогда в результате скачков плотности популяции, вызванных импульсным шумом, все реализации случайного процесса  $x(t)$  с начальным значением  $x(0) > K$  в пределе  $t \rightarrow \infty$  рано или поздно пересекут границу  $x = K$  и попадут в интервал  $[0, K]$ .

Вероятностное распределение (2.59) для различных значений безразмерного темпа  $\mu$  и фиксированных значений других параметров изображено на Рисунке 2.6. Как видно из выражения (2.59) и Рисунка 2.6, вероятностное распределение спадает очень быстро, когда  $x$  стремится к нулю, но наиболее вероятное значение плотности популяции стремится к нулю для очень частых импульсов, которые могут привести к вымиранию биологического вида.

Из выражения (2.59) находим среднее значение плотности популяции

$$\langle x \rangle_{st} = K \left(\frac{\lambda}{K}\right)^\mu e^{\lambda/K} \Gamma\left(1 - \mu, \frac{\lambda}{K}\right), \quad (2.60)$$

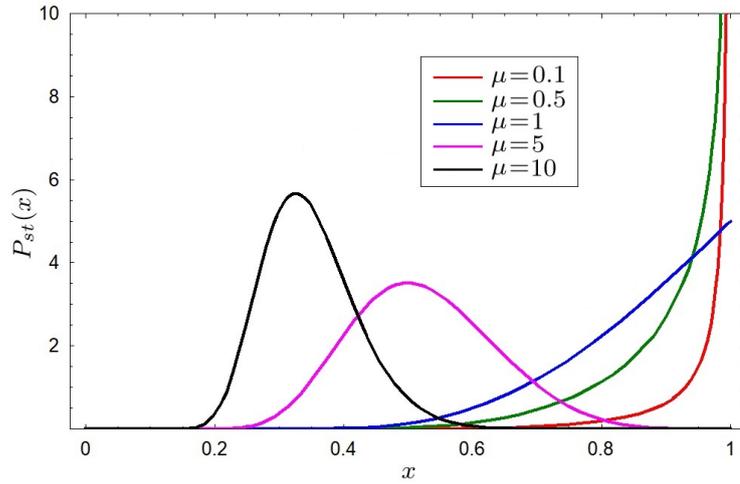


Рис. 2.6 — Установившееся вероятностное распределение плотности популяции (2.59) для различных значений безразмерного темпа  $\mu$ . Значения параметров:  $\lambda = 5$ ,  $K = 1$

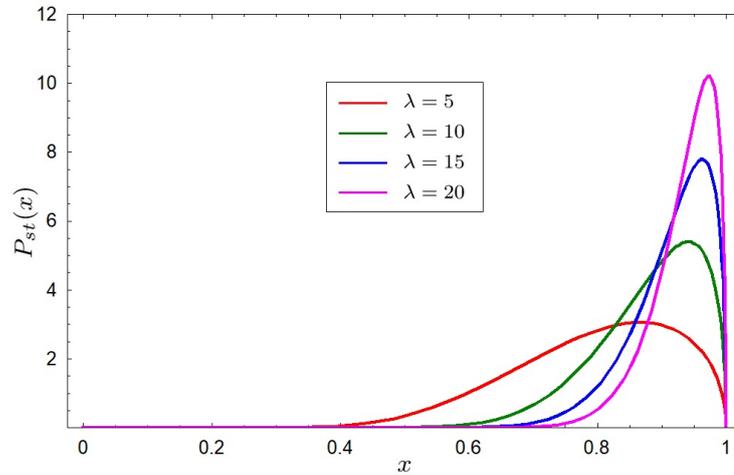


Рис. 2.7 — Установившееся вероятностное распределение плотности популяции (2.59) для различных значений средних амплитуд импульсов  $1/\lambda$ . Значениях остальных параметров:  $\mu = 1.5$ ,  $K = 1$

где  $\Gamma(\alpha, z)$  – неполная гамма-функция, и наиболее вероятное значение

$$x_{max} = \begin{cases} \frac{K}{4} \left[ \frac{\lambda}{K} + \mu + 1 - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{K} + \mu + 1\right)^2 - \frac{8\lambda}{K}} \right], & \mu > 1, \\ K, & \mu \leq 1. \end{cases} \quad (2.61)$$

Вероятностное распределение (2.59) для различных значений средних амплитуд импульсов  $1/\lambda$  при фиксированных значениях остальных параметров показано на Рисунке 2.7. Как следует из Рисунка 2.7, наиболее вероятное значение плотности популяции (2.61) уменьшается с увеличением средних амплитуд импульсов.

## 2.2.2 Модель Хонглера с импульсными случайными возмущениями

Далее рассмотрим другую нелинейную систему, которая характеризуется изменением числа максимумов вероятностного распределения с изменением параметров шума [90], т. е. наличием индуцированных шумом переходов. Имеется в виду стохастическое уравнение Хонглера [104]

$$\dot{x} = -\gamma \operatorname{th} x + \frac{\xi(t)}{\operatorname{ch} x}, \quad (2.62)$$

которое является удовлетворительной аппроксимацией модели генетического отбора ( $\gamma > 0$ ). Рассмотрим белый пуассоновский шум с двусторонним экспоненциальным вероятностным распределением амплитуд импульсов (2.53) в качестве случайного процесса  $\xi(t)$  в уравнении (2.62).

Поиск решения уравнения (2.55) для установившегося вероятностного распределения  $x(t)$  с  $f(x) = -\gamma \operatorname{th} x$  и  $g(x) = 1/\operatorname{ch} x$  представляется затруднительным. Однако, проблему можно решить, используя тот факт, что уравнение (2.62) линеаризуется заменой  $y = \operatorname{sh} x$  и превращается в следующее

$$\dot{y} = -\gamma y + \xi(t). \quad (2.63)$$

Решение уравнения (2.63) может быть записано в явном виде

$$y(t) = y_0 e^{-\gamma t} + \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \xi(\tau) d\tau, \quad (2.64)$$

где  $y_0 = y(0)$ .

В соответствии с определением и выражением (2.64), характеристическая функция случайного процесса  $y(t)$  имеет вид

$$\theta_y(u, t) = \langle e^{iuy(t)} \rangle = e^{iuy_0 e^{-\gamma t}} \times \left\langle \exp \left\{ iu \int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} \xi(\tau) d\tau \right\} \right\rangle. \quad (2.65)$$

Дальнейшие вычисления связаны с нахождением характеристического функционала белого пуассоновского шума, а именно среднего в (2.65).

Общее выражение для характеристического функционала произвольного белого негауссова шума  $\xi(t)$  было получено в [17] (см. (8)). Для белого пуассоновского шума оно становится следующим (см. уравнение (A14) в [105])

$$\Theta_t[u(\tau)] = \left\langle \exp \left\{ i \int_0^t u(\tau) \xi(\tau) d\tau \right\} \right\rangle = \exp \left\{ \nu \int_0^t [\theta_a(u(\tau)) - 1] d\tau \right\}. \quad (2.66)$$

Подставляя  $u(\tau) = u e^{-\gamma(t-\tau)}$  в (2.66), а затем полученный результат в (2.65) и заменяя переменную под интегралом  $z = u e^{-\gamma(t-\tau)}$ , получаем

$$\theta_y(u, t) = e^{iuy_0 e^{-\gamma t}} \exp \left\{ \frac{\nu}{\gamma} \int_{u e^{-\gamma t}}^u \frac{\theta_a(z) - 1}{z} dz \right\}. \quad (2.67)$$

Из (2.67) находим характеристическую функцию случайного процесса  $y(t)$  в асимптотике ( $t \rightarrow \infty$ )

$$\theta_y^{st}(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta_y(u, t) = \exp \left\{ \frac{\nu}{\gamma} \int_0^u \frac{\theta_a(z) - 1}{z} dz \right\}. \quad (2.68)$$

Характеристическая функция амплитуд импульсов  $\theta_a(u)$ , соответствующая двухстороннему экспоненциальному вероятностному распределению (2.53), такова

$$\theta_a(u) = \frac{\beta^2}{\beta^2 + u^2}. \quad (2.69)$$

Подставляя (2.69) в (2.68), получаем

$$\theta_y^{st}(u) = \frac{1}{(1 + u^2/\beta^2)^\alpha}, \quad (2.70)$$

где  $\alpha = \nu/(2\gamma)$ . Применяя обратное преобразование Фурье к (2.70), определяем установившееся вероятностное распределение случайного процесса  $y(t)$ , описываемого стохастическим линейным дифференциальным уравнением (2.63),

$$P_y^{st}(y) = \frac{\beta}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \left( \frac{\beta|y|}{2} \right)^{\alpha-1/2} K_{\alpha-1/2}(\beta|y|), \quad (2.71)$$

где  $K_p(x)$  – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда).

Применяя, наконец, известную формулу преобразования вероятностного распределения случайной величины после нелинейного преобразования, находим искомое установившееся вероятностное распределение случайного процесса  $x(t)$  в уравнении Хонглера (2.62)

$$P_{st}(x) = \frac{\beta \operatorname{ch} x}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha)} \left( \frac{\beta |\operatorname{sh} x|}{2} \right)^{\alpha-1/2} K_{\alpha-1/2}(\beta |\operatorname{sh} x|), \quad (2.72)$$

которое является решением уравнения (2.55) с  $f(x) = -\gamma \operatorname{th} x$  и  $g(x) = 1/\operatorname{ch} x$ . Следует подчеркнуть, что для целых значений параметра  $\alpha$  решение может быть записано в элементарных функциях. Например, для  $\alpha = 1$ , используя хорошо известное выражение для функции Макдональда полуцелого порядка [106]

$$K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

из (2.72) получаем

$$P_{st}(x) = \frac{\beta \operatorname{ch} x}{2} e^{-\beta |\operatorname{sh} x|}. \quad (2.73)$$

Графики установившихся вероятностных распределений случайного процесса  $x(t)$  для различных значений среднего темпа импульсов  $\alpha = \nu/(2\gamma)$  при заданном значении  $\beta = 1$  представлены на Рисунке 2.8. Как видно из Рисунка 2.8, индуцированный шумом переход к бимодальности в системе (2.62) (см. [90]) наблюдается при изменении средней частоты появления импульсов  $\nu$ . Установившееся вероятностное распределение с  $\alpha = 0,5$  ( $\nu = \gamma$ ) является унимодальным и становится бимодальным с увеличением параметра  $\nu$ . Более детальный

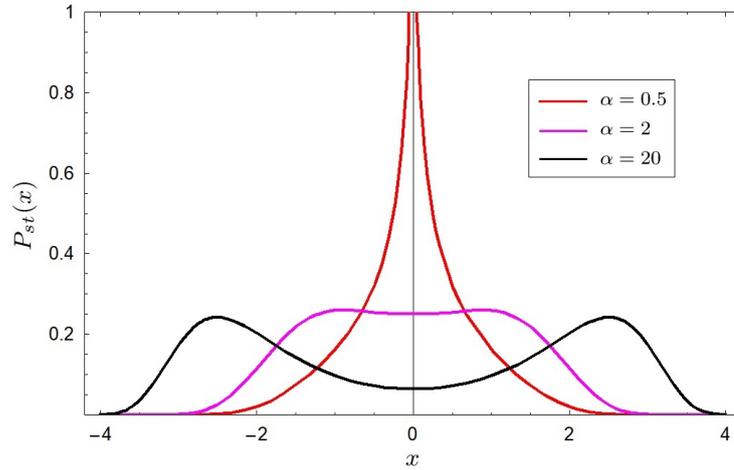


Рис. 2.8 — Установившееся вероятностное распределение (2.72) случайного процесса  $x(t)$  для различных значений безразмерного среднего темпа стимулов  $\alpha = \nu/(2\gamma)$  при фиксированном значении параметра  $\beta = 1$

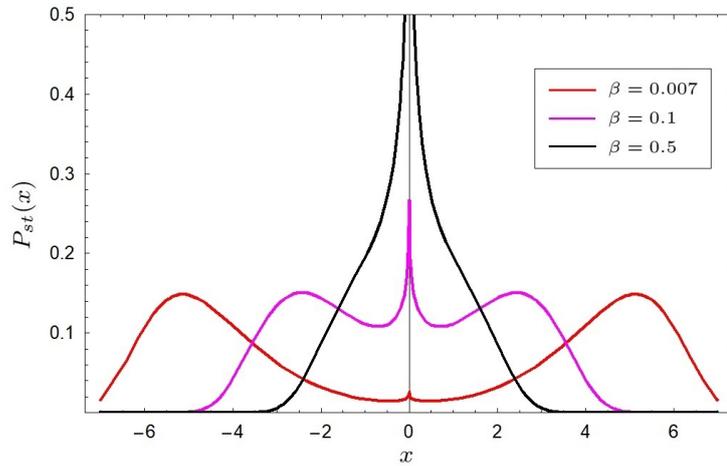


Рис. 2.9 — Установившееся вероятностное распределение (2.72) случайного процесса  $x(t)$  для различных значений параметра  $\beta$  при фиксированных значениях темпа  $\alpha = \nu/(2\gamma) = 0,5$

анализ показывает, что первоначальное унимодальное установившееся вероятностное распределение проходит через тримодальную фазу в диапазоне  $\alpha \in (1,85; 1,88)$  и только тогда становится бимодальным. Для редких стимулов наиболее вероятное значение равно нулю, а вероятностное распределение имеет сингулярную особенность интегрирования в нуле для  $\nu \leq \gamma$  ( $\alpha \leq 0,5$ ). Для частых импульсов наиболее вероятны два противоположных по знаку значения. Они увеличиваются по абсолютному значению с увеличением  $\nu$  и остаются конечными в пределе  $\nu \rightarrow \infty$  при фиксированном значении параметра  $\beta$ .

Другое поведение вероятностного распределения можно наблюдать на Рисунке 2.9, где изображены кривые для различных значений  $\beta$  и фиксированного значения параметра  $\alpha = 0,5$ .

Существует прямой переход от унимодального вероятностного распределения к тримодальному без бимодальной фазы, но с увеличением среднего квадрата амплитуд импульсов, т.е. с уменьшением параметра  $\beta$  (см. (2.53)). Это явно видно из распределения (2.73) при

$\alpha = 1$ . Как показывает анализ, распределение имеет один максимум в нуле для  $\beta \geq 0,5$  и два дополнительных максимума в точках

$$x_{max} = \pm \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta^2} + \sqrt{2(1 + \sqrt{1 - 4\beta^2})}}{2\beta} \quad (2.74)$$

для  $\beta < 0,5$ . Как видно из (2.74),  $x_{max} \simeq \pm \ln(2/\beta)$  и стремится к бесконечности при  $\beta \rightarrow 0$ , но значение плотности вероятности в максимуме остается конечной  $P_{st}(x_{max}) \simeq 1/(2e)$ .

### 2.3 Динамическая мультимодальность, вызванная процессом Орнштейна–Уленбека и дихотомическим шумом

Рассмотрим передемпфированное движение частицы с координатой  $x(t)$  во внешнем потенциале  $U(x)$  под воздействием процесса Орнштейна–Уленбека  $\eta(t)$  [46; 107]

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -U'(x) + \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -\frac{1}{\tau_c} \eta(t) + \sqrt{2D} \xi(t), \end{aligned} \quad (2.75)$$

где  $\tau_c$  – время корреляции процесса Орнштейна–Уленбека,  $\xi(t)$  – дельта-коррелированный белый гауссовский шум с нулевым средним  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  и единичной интенсивностью.

Соответствующее уравнение Фоккера–Планка для совместной плотности вероятности  $P_2(x, \eta, t)$  может быть получено непосредственно из уравнений Ланжевена (2.75) функциональными методами и имеет следующий вид (см. вывод в Приложении Г.1)

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x) - \eta] P_2 + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta P_2) + D \frac{\partial^2 P_2}{\partial \eta^2}. \quad (2.76)$$

К сожалению, установившееся вероятностное распределение не может быть аналитически найдено из уравнения (2.76).

#### 2.3.1 Бимодальность в моностабильном потенциале четвертой степени

В работе [108] было продемонстрировано, что шум Орнштейна–Уленбека может производить бимодальные вероятностные распределения фазовой переменной в потенциалах  $U(x)$  четвертой степени. Проанализируем это явление более подробно.

Установившееся вероятностное распределение может быть получено из уравнений Ланжевена (2.75) в унифицированном приближении цветного шума (UCNA) [109] и имеет следующий вид

$$P_{st}(x, \tau_c) = C |1 + \tau_c U''| \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{D} \left( \frac{\tau_c U'^2}{2} + U \right) \right\}, \quad (2.77)$$

где  $C$  – константа нормировки.

Из уравнения (2.77) получаем следующее уравнение для нахождения экстремумов установившегося вероятностного распределения ( $U''(x) > 0$ )

$$D\tau_c U'''(x) - U'(x) [1 + \tau_c U''(x)]^2 = 0. \quad (2.78)$$

Для потенциала вида  $U(x) = bx^{2m}/(2m) + ax^2/2$  уравнение (2.78) демонстрирует наличие экстремума в точке  $x = 0$ . Условие существования минимума в этой точке имеет следующий вид

$$6b\tau_c\delta_{m,2} - \frac{a}{D}(1 + a\tau_c)^2 > 0. \quad (2.79)$$

Из уравнения (2.79) видно, что для потенциалов с показателем  $m > 2$  вероятностное распределение всегда остается унимодальным. Условие бимодальности (2.79) становится нетривиальным только в случае потенциала четвертой степени ( $m = 2$ ) и принимает следующий вид

$$a(1 + a\tau_c)^2 < 6bD\tau_c. \quad (2.80)$$

Как следует из (2.80), для потенциала четвертой степени ( $a = 0$ ) наблюдается бимодальность для всех значений параметров. В дополнение к работе [108] после замены  $\rho = 1/\tau_c$  уравнение (2.80) преобразуется в следующее

$$\rho a(\rho + a)^2 < 6bD \quad (2.81)$$

и совпадает с уравнением (33) в [108].

На Рисунке 2.10 представлена эволюция вероятностного распределения  $P(x,t)$ , полученная путем численного анализа модели, описываемой системой (2.75), для потенциала четвертой степени с гармонической добавкой  $U(x) = bx^4/4 + ax^2/2$  ( $m = 2$ ) при фиксированном времени корреляции и для двух значений амплитуды цветного шума  $D$ . Сравнение левого и правого рисунков подтверждает, что для фиксированного времени корреляции шума Орнштейна–Уленбека изменение амплитуды  $D$  может индуцировать бимодальность стационарных состояний.

Кроме того, интересно сравнить установившееся вероятностное распределение на Рисунке 2.10 (а) и Рисунке 2.11, поскольку они соответствуют одному и тому же значению амплитуды  $D$  и разным значениям параметра  $\rho$ . Очевидно, для фиксированного значения амплитуды  $D$  изменение времени корреляции процесса Орнштейна–Уленбека может вызвать бимодально-унимодальную трансформацию установившегося распределения.

### 2.3.2 Мультимодальность в потенциалах другого вида

Начнем с анализа возможных форм установившегося вероятностного распределения в системе уравнений (2.75) для фиксированных одноямыных потенциалов вида

$$U(x) = \frac{1}{n}|x|^n \quad (1 < n < 4) \quad (2.82)$$

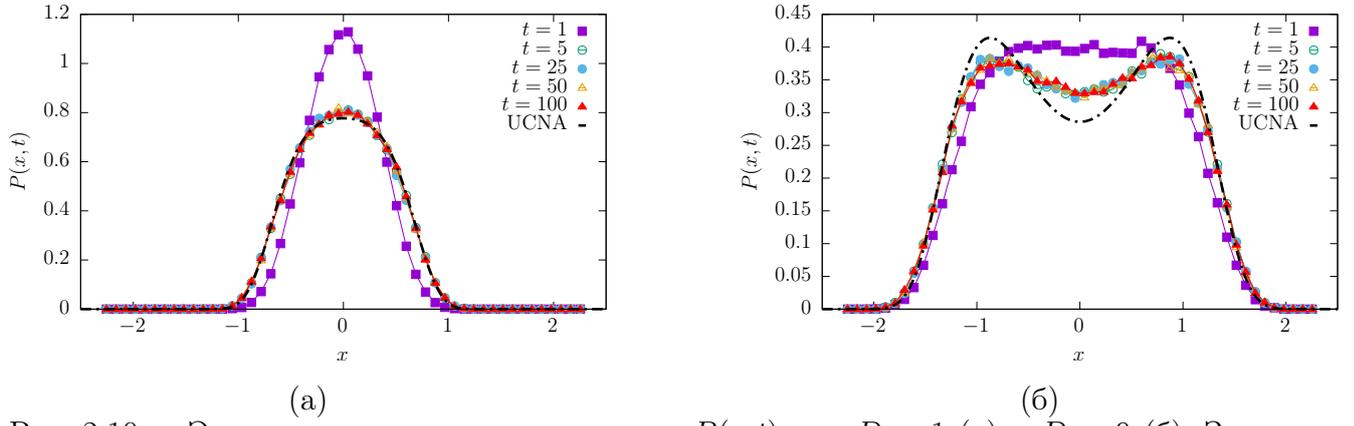


Рис. 2.10 — Эволюция плотности вероятности  $P(x,t)$  для  $D = 1$  (а) и  $D = 9$  (б). Значения остальных параметров:  $\rho = 1,4$ ;  $a = 1$ ;  $b = 1$

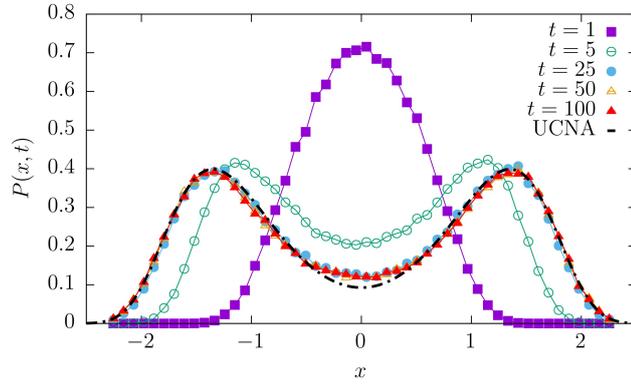


Рис. 2.11 — Эволюция плотности вероятности  $P(x,t)$  для  $D = 1$ ;  $\rho = 0,05$ ;  $a = 1$ ;  $b = 1$

Как следует из (2.77) и (2.82), приближение унифицированного цветного шума приводит к неправильному результату для  $n = 1$ , потому что этот случай соответствует белому гауссову шуму, т.е.  $P_{st} \propto e^{-V(x)/D}$ .

Для произвольного значения  $n$  существует экстремум в точке  $x = 0$ . В силу симметрии вероятностного распределения для обнаружения мультимодальности достаточно проанализировать количество экстремумов в области положительных значений  $x$ . Воспользовавшись тем, что  $U''(x) > 0$  для потенциала (2.82), можно исключить модуль в уравнении (2.77) и получить следующее уравнение для нахождения экстремумов ( $x > 0$ )

$$\frac{U'(x)}{U'''(x)} = \frac{D\tau_c}{[1 + \tau_c U''(x)]^2}. \quad (2.83)$$

Подставляя (2.82) в (2.83), приходим к

$$\frac{x^2}{(n-1)(n-2)} = \frac{D\tau_c}{[1 + \tau_c(n-1)x^{n-2}]^2}. \quad (2.84)$$

Для значений  $1 < n < 2$  левая часть (2.84) отрицательна, в то время как правая часть всегда положительна. В результате уравнение (2.84) не имеет решений и вероятностное распределение является унимодальным с единственным максимумом в начале координат. В то же время для  $n > 2$  графический анализ указывает на наличие корня уравнения (2.84) в области  $x > 0$ , что соответствует бимодальному вероятностному распределению с минимумом в точке  $x = 0$ .

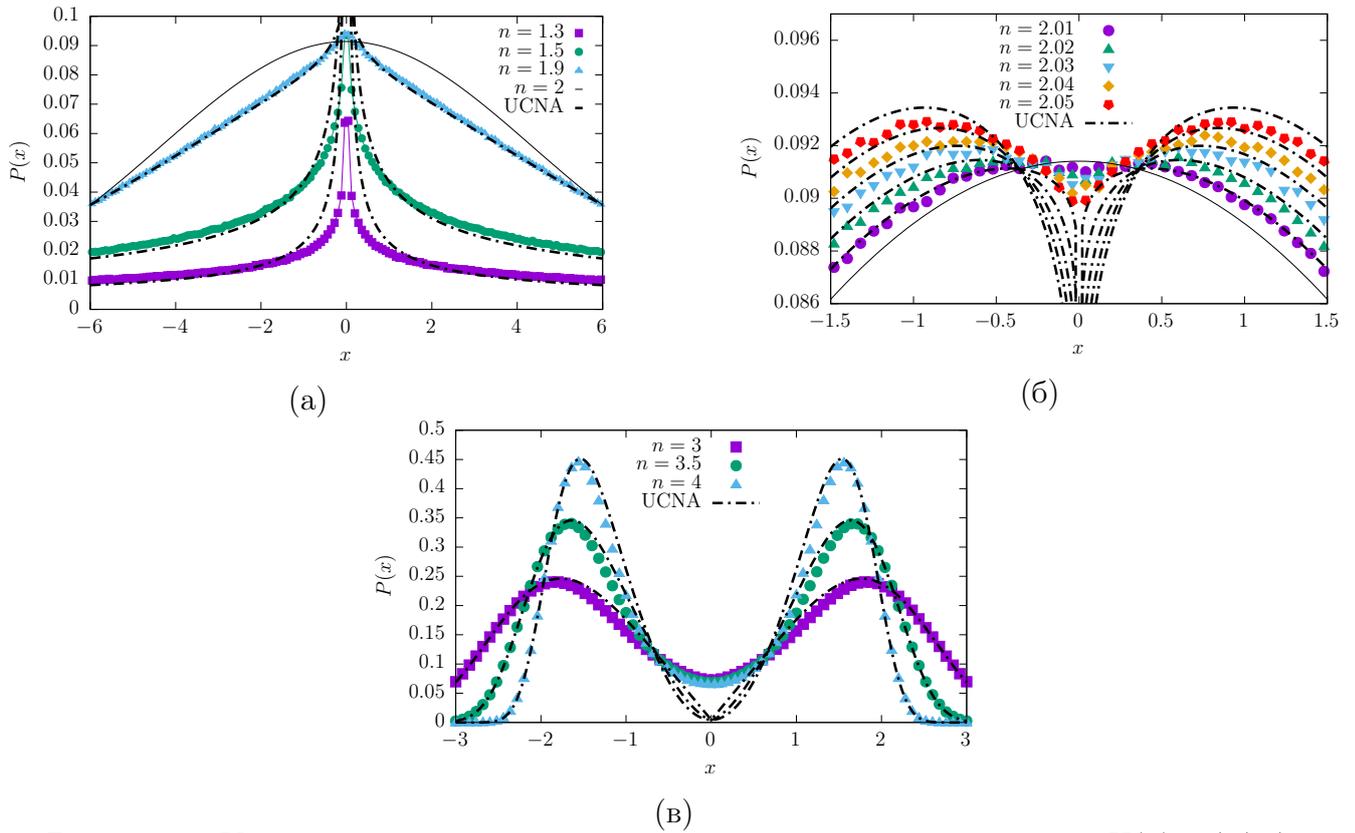


Рис. 2.12 — Установившиеся вероятностные распределения в потенциале  $U(x) = |x|^n/n$

Рисунок 2.12 демонстрирует установившиеся вероятностные распределения в потенциале (2.82) для различных наборов значений показателя  $n$ . Сплошная линия на Рисунках (а) и (б) соответствует нормальному распределению. Рисунок 2.12 доказывает, что для значений  $n \leq 2$  ((а) и (б)) стационарные состояния унимодальны, а для  $n > 2$  (в) установившиеся вероятностные распределения в одноямыном потенциале (2.82) могут быть бимодальными. Уже для  $n = 2.01$  стационарное распределение существенно отличается от нормального, в частности, виден неглубокий минимум стационарного распределения. В то же время, для  $n = 2.02$  существует отчетливый минимум стационарной плотности вероятности в точке  $x = 0$ . Результаты для  $n \geq 3$  демонстрируют сильную бимодальность (см. Рисунок 2.12 (в)).

Эта ситуация очень напоминает проблему стационарных состояний в одноямыных потенциалах под воздействием белого шума Леви [4; 7; 19; 23; 110]. В этом случае для потенциалов вида (2.82) стационарные состояния существуют для достаточно больших значений показателя  $n$  [111]. Для  $n < 2$ , если они существуют, то являются унимодальными [7; 111]. В предельном случае  $n = 2$  по аналогии с системами, управляемыми белым гауссовым шумом, стационарное состояние воспроизводит распределение шума, т.е. задается  $\alpha$ -стабильным распределением. Следовательно, для  $n = 2$  стационарные состояния являются унимодальными и имеют степенную асимптотику. Наконец, для  $n > 2$  стационарные состояния являются бимодальными.

Для сравнения рассмотрим экспоненциальный одноямыный потенциал вида

$$U(x) = U_0 (\operatorname{ch} \beta x - 1), \quad (2.85)$$

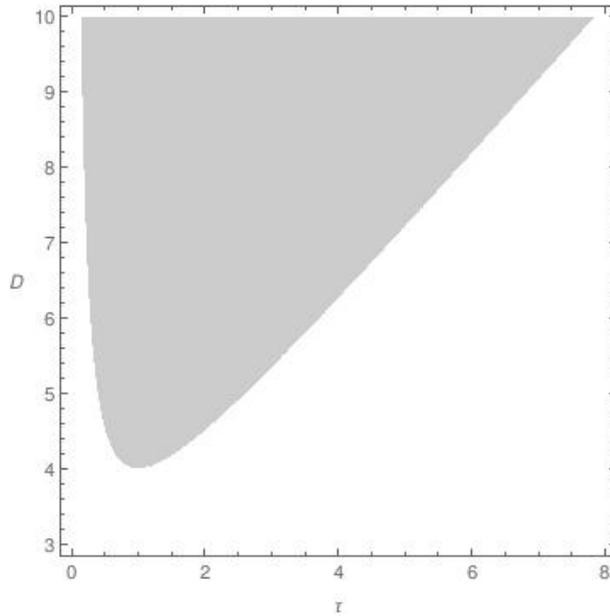


Рис. 2.13 — Область бимодальности (2.87) для экспоненциального потенциала (2.85)

который имеет форму параболического потенциала для малых значений  $x$

$$U(x) \simeq \frac{U_0 \beta^2 x^2}{2}.$$

В соответствии с (2.77) в точке  $x = 0$  гарантированно существует экстремум. Подставляя (2.85) в (2.83), получаем следующее условие для нахождения остальных экстремумов ( $x > 0$ )

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{D\tau_c}{(1 + V_0\tau_c\beta^2\text{ch}\beta x)^2}$$

или

$$\text{ch}\alpha x = \frac{\alpha\sqrt{D\tau_c} - 1}{V_0\tau_c\alpha^2}. \quad (2.86)$$

Уравнение (2.86) имеет один положительный корень только в случае

$$\frac{\beta\sqrt{D\tau_c} - 1}{U_0\tau_c\beta^2} > 1$$

или

$$D > \left( U_0\beta\sqrt{\tau_c} + \frac{1}{\beta\sqrt{\tau_c}} \right)^2. \quad (2.87)$$

Таким образом, в унифицированном приближении цветного шума для экспоненциального потенциала (2.85) обнаружена бимодальность установившегося вероятностного распределения в ограниченной области на плоскости время корреляции  $\tau_c$ , интенсивность  $D$  (см. Рисунок 2.13).

### 2.3.3 Мультимода́льность в системе со случайно переключающимся потенциалом

Продолжая исследование, начатое в [20] и расширенное в [112], проверим, может ли добавление марковского дихотомического шума индуцировать стационарные состояния с более, чем двумя модальными значениями. Подставим в систему (2.75) одномерный переключающийся потенциал

$$U(x,t) = \frac{b}{4} [x - \xi_{DN}(t)]^4 + \frac{a}{2} [x - \xi_{DN}(t)]^2, \quad (2.88)$$

где  $\xi_{DN}(t)$  – симметричный марковский дихотомический шум, переключающийся между двумя значениями  $\pm\Delta$  со средней частотой  $\nu$ .

Эволюция совместного вероятностного распределения  $P(x,\eta,t)$  для совокупности случайных процессов  $\{x(t),\eta(t)\}$  может быть получена аналитически и задается следующей системой уравнений (см. вывод в Приложении Г.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\eta - bx^3 - 3b\Delta^2 x - ax) P + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta P) - \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} ((3bx^2 + b\Delta^2 + a) Q) + D \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= -2\nu Q - \frac{\partial}{\partial x} (\eta - bx^3 - 3b\Delta^2 x - ax) Q + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta Q) - \\ &\quad - \Delta^2 \frac{\partial}{\partial x} ((3bx^2 + b\Delta^2 + a) P) + D \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

где введена вспомогательная функция

$$Q(x,\eta,t) = \langle \xi_{DN}(t) \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) \rangle.$$

Установившиеся вероятностные распределения, полученные путем численного моделирования системы (2.75) с потенциалом (2.88), для различных темпов переключений  $\nu$  и различных значений дихотомического шума  $\Delta$  изображены на Рисунке 2.14. Левый столбец соответствует чистому потенциалу четвертой степени ( $a = 0, b = 1$ ), в то время как правый столбец – “смеси” параболического потенциала и потенциала четвертой степени ( $a = 1, b = 1$ ). Из Рисунка 2.14 можно сделать вывод, что путем соответствующего выбора параметров можно увеличить количество мод вероятностного распределения. В частности, наблюдаются бимодальные, тримодальные и четырехмодальные стационарные состояния, можно также получить унимодальное распределение.

Одномерная модель с комбинированным действием симметричного марковского дихотомического шума и шума Орнштейна–Уленбека может быть обобщена на двумерный случай.

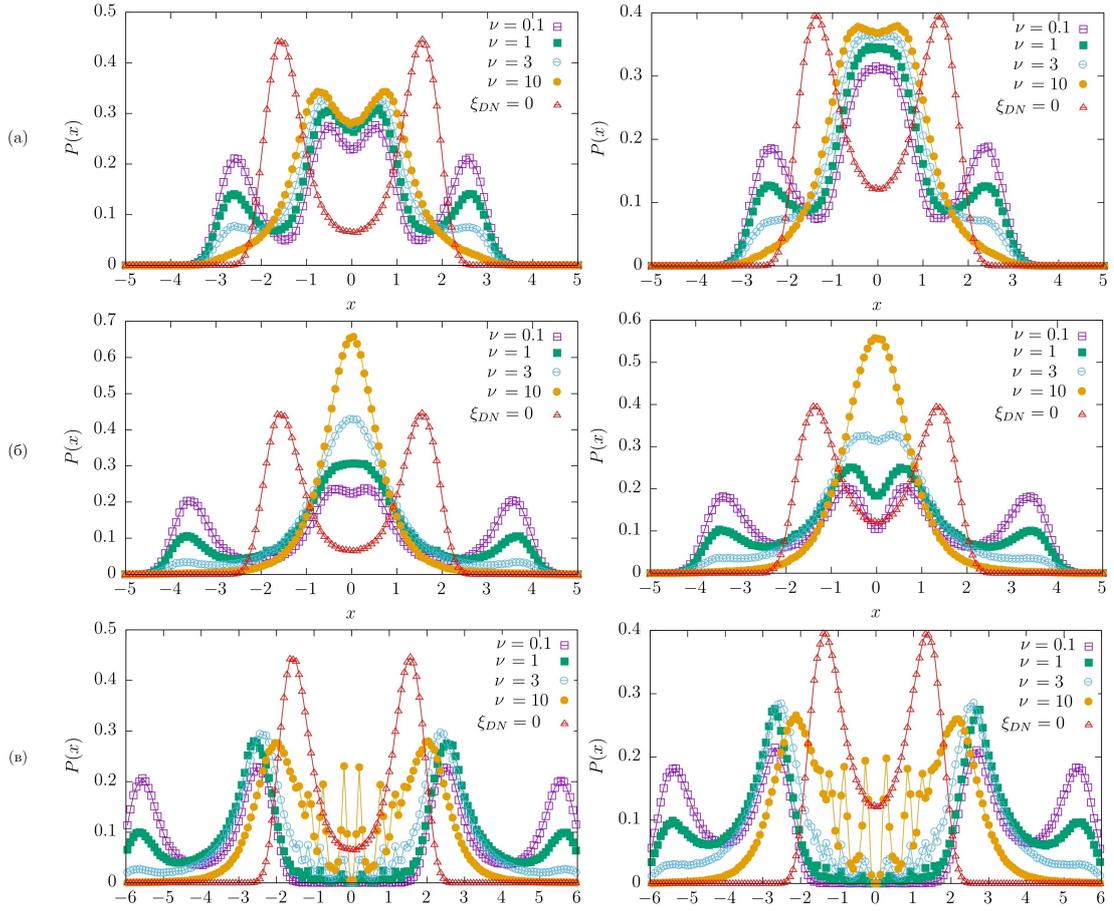


Рис. 2.14 — Установившиеся вероятностные распределения для различных средних темпов переключений  $\nu$  дихотомического шума с (а)  $\Delta = 1$ , (б)  $\Delta = 2$  и (в)  $\Delta = 4$ . Левый столбец соответствует случаю  $a = 0$ , правый столбец —  $a = 1$ . Значения остальных параметров:  $\tau_c = 20$ ,  $D = 1$ ,  $b = 1$

Движение частицы в потенциале  $U(x, y, t)$  под воздействием двумерного процесса Орнштейна—Уленбека  $\vec{\eta}(t) = (\eta_x(t), \eta_y(t))$  описывается следующим набором уравнений Ланжевена

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}(t) &= -\nabla U(\vec{r}, t) + \vec{\eta}(t), \\ \dot{\vec{\eta}}(t) &= -\frac{1}{\tau_c} \nabla \left[ \frac{1}{2} \vec{\eta}^2 \right] + \sqrt{2D} \vec{\xi}(t),\end{aligned}\quad (2.90)$$

где  $\vec{\xi}(t)$  — двумерный белый гауссов шум с корреляционной функцией

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t + \tau) \rangle = \delta_{ij} \delta(\tau).$$

Рассмотрим двумерный потенциал четвертой степени

$$U(\vec{r}, t) = U(x, y, t) = \frac{1}{4} [(x - \xi_{DN}^1(t))^2 + (y - \xi_{DN}^2(t))^2]^2, \quad (2.91)$$

где  $\xi_{DN}^i(t)$  — независимые симметричные марковские дихотомические шумы ( $i = 1, 2$ ), принимающие одинаковые значения  $\pm\Delta$  с одним и тем же средним темпом переключений  $\nu$ .

На Рисунке 2.15 показаны результаты численного моделирования системы (2.90) для потенциала (2.91) при  $\Delta = 1$ . Верхняя строка соответствует фиксированному одноявному потенциалу  $U(x,y) = (x^2 + y^2)^2/4$ . Последующие строки соответствуют различным значениям темпа переключений дихотомического шума  $\nu$ . В то же время разные столбцы демонстрируют результаты для различных значений времени корреляции  $\tau_c$  аддитивного шума Орнштейна—Уленбека. Верхний ряд обобщает результаты работы [108] на двумерный случай. Для  $\xi_{DN}(t) = 0$  при  $D = 1$  стационарные состояния сферически симметричные с минимумом установившегося вероятностного распределения в начале координат. Дополнительное воздействие симметричного марковского дихотомического шума может индуцировать динамическую мультимодальность. Для больших темпов переключений  $\nu$  стационарные состояния остаются унимодальными (см. нижний ряд Рисунка 2.15).

## 2.4 Выводы по второй главе

Для модели Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли (МФБ) с полностью коррелированными шумами найдено асимптотическое поведение вероятностного распределения плотности популяции для произвольного негауссового цветного источника шума. Аналитически установлена монотонная релаксация средней плотности популяции к установившемуся значению в случае возмущения марковским дихотомическим шумом. Показано, что в асимптотике процесс перестает быть случайным, и все моменты плотности популяции (в т.ч. среднее значение) равны 1, что свидетельствует о выживании биологической популяции. Для модели МФБ с флуктуирующим объемом ресурсов, имеющим одностороннее устойчивое вероятностное распределение, изучена переходная динамика распределения плотности популяции и статистические характеристики в установившемся режиме. Показано, что сценарий эволюции популяции существенно зависит от показателя нелинейности  $\mu$  в рассматриваемом стохастическом уравнении. В отличие от первой рассмотренной модели, наблюдается немонотонная релаксация средней плотности популяции к установившемуся значению. При анализе обеих моделей не накладывалось ограничения на значение степени нелинейности  $\mu$ , кроме того, что она должна быть положительной. Полученные результаты верны не только для целых значений  $\mu$ , но и дробных.

На основе уравнения Колмогорова—Феллера получена точная формула для установившегося вероятностного распределения плотности популяции, подчиняющейся уравнению Ферхюльста с флуктуациями параметра насыщения в форме одностороннего пуассоновского белого шума. Это распределение оказывается унимодальным, и положение его максимума сдвигается к нулю с увеличением средней частоты пуассоновских импульсов. Для генетической модели Хонглера при воздействии пуассоновской последовательности импульсов с экспоненциально распределенными амплитудами обеих полярностей продемонстрировано наличие индуцированных шумом переходов от унимодальности к бимодальности и даже тримодальности в установившемся вероятностном распределении при изменении параметров

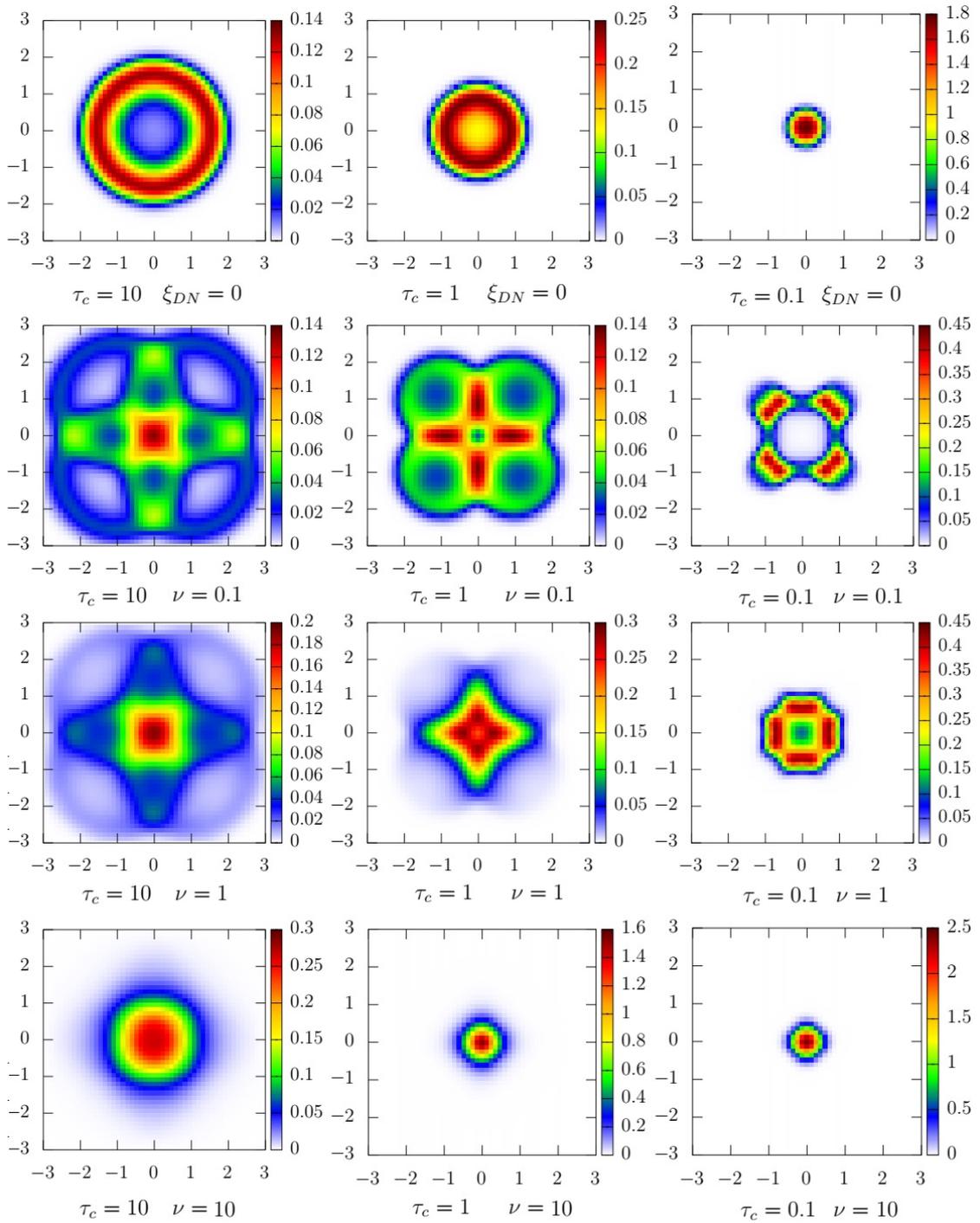


Рис. 2.15 — Топограммы установившихся вероятностных распределений для двумерного фиксированного (верхняя строка) и случайно переключающегося потенциала (2.91). Разные строки соответствуют различным значениям темпа переключений дихотомического шума  $\nu$ . Разные столбцы соответствуют различным значениям времени корреляции  $\tau_c$  процесса Орнштейна—Уленбека

шума. Впервые показано, что в модели Хонглера переход от унимодальности к бимодальности вероятностного распределения с увеличением средней частоты появления пуассоновских импульсов происходит через тримодальную фазу, а прямой переход от унимодальности к тримодальности наблюдается при изменении среднего квадрата амплитуд импульсов.

Исследовано влияние коррелированных шумов на вероятностные свойства нелинейных динамических систем. Проанализировано, при каких условиях воздействие шума Орнштейна—Уленбека индуцирует мультимодальность стационарных состояний в фиксированных одноямыных степенных и экспоненциальных потенциалах. В частности, показан переход от унимодальности к бимодальности для фиксированных одноямыных потенциалов при увеличении показателя степени. Кроме того, изучено, что дополнительное воздействие симметричного марковского дихотомического шума может индуцировать динамическую мультимодальность в потенциалах четвертой степени.

### Глава 3. Стохастические модели мемристора

Мемристор – это пассивный элемент электрических цепей, способный изменять свое внутреннее сопротивление в зависимости от приложенного напряжения и, что наиболее важно, запоминать свое состояние при отключении питания [113]. Это свойство делает мемристоры и мемристивные структуры наиболее перспективными кандидатами для следующего поколения устройств энергонезависимой памяти RRAM (Resistive Random Access Memory) и нейроморфных системах [114–116]. Среди преимуществ мемристора можно также выделить его превосходную масштабируемость до нанометров, быстрое переключение, низкое энергопотребление и простую структуру [117–131].

Более четверти века мемристор оставался гипотетическим элементом цепи [132], не имеющим материальной реализации. Впервые эффект мемристивности был экспериментально продемонстрирован в 2008 году группой исследователей из компании Hewlett Packard во главе со Стэнли Уильямсом для системы металл-диэлектрик-металл Pt-TiO<sub>2</sub>-Ti<sub>n</sub>O<sub>2n-1</sub>-Pt [113]. Показано, что мемристивный эффект возникает в наноразмерных структурах металл-диэлектрик-металл за счет перемещения зарядов в сверхтонком диэлектрическом слое при приложении электрического поля, например, при движении вакансий кислорода в слое диоксида титана.

Типичная мемристивная структура (МС) представляет собой тонкий диэлектрический слой, размещенный между двумя металлическими контактами – верхним электродом (ВЭ) и нижним электродом (НЭ). С одной стороны слоя находится легирующая примесь (положительные ионы металла). В качестве диэлектрика часто используют оксиды переходных металлов (Ti, Ta, Hf, Zr и др.) [133] или оксид кремния (SiO<sub>2</sub>, SiO<sub>x</sub>) [134].

Мемристоры имеют, по крайней мере, два резистивных состояния: состояние с низким сопротивлением (СНС)  $R_{ON}$  и состояние с высоким сопротивлением (СВС)  $R_{OFF}$  ( $R_{ON} \ll R_{OFF}$ ). Переход между этими состояниями происходит при подаче напряжения определенной величины и знака. Для обеспечения нормального функционирования МС на основе оксидов обычно подвергают так называемой электроформовке, при которой в диэлектрической пленке образуется один или множество локальных проводящих каналов (филаментов), разрушение которых вызывает переход в СВС, а восстановление – переход в СНС.

Полное сопротивление рассматриваемого устройства можно представить как сумму сопротивлений двух переменных резисторов, соединенных последовательно [113]

$$R_m = R_{ON}s(t) + R_{OFF}(1 - s(t)), \quad (3.1)$$

где  $s(t) = y(t)/L$  – нормированный размер легирующей области ( $s(t) \in [0; 1]$ ),  $L$  – полная длина мемристора. Когда к металлическим контактам прикладывается напряжение, заряженные ионы начинают дрейфовать, и граница между двумя областями смещается. Схематическое изображение мемристора представлено на Рисунке 3.1.

Хотя исследования в области МС на основе оксидных диэлектриков интенсивно ведутся на протяжении последнего десятилетия, большинство работ носят эмпирический

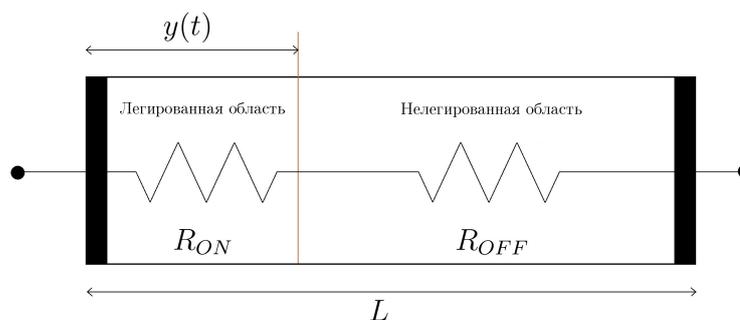


Рис. 3.1 — Схематическое изображение мемристора длины  $L$ . Легированная область с нормированным размером  $s(t) = y(t)/L$  имеет сопротивление  $s(t)R_{ON}$ , в то время как сопротивление нелегированной области задается выражением  $[1 - s(t)]R_{OFF}$

характер и ограничиваются качественными модельными соображениями. Количественные расчеты, описывающие процессы, происходящие в мемристивных структурах, можно разделить на две категории. В работах первой категории предложены и реализованы численные (компьютерные) модели, а в работах второй категории использован аналитический (феноменологический) подход.

Раздел 3.1 посвящен обзору основных теоретических моделей мемристивных систем.

В разделе 3.2 проводится анализ двух макромоделей идеального мемристора с внешним гауссовым шумом: управляемый зарядом и управляемый ток мемристоры.

В разделе 3.3 рассматривается обобщенная стохастическая модель для мемристивной системы. Данная модель учитывает флуктуации и позволяет получать точные аналитические решения для концентрации дефектов, рассматриваемой как внутренний параметр системы.

В разделе 3.4 изучаются эффекты, возникающие в стохастической модели мемристора на основе длины филамента в качестве переменной состояния.

В разделе 3.5 представлены выводы по главе.

Материалы третьей главы изложены в работах [А6; А7; А9; А20]. Настоящая работа поддержана Правительством Российской Федерации, договор № 074-02-2018-330 (2).

### 3.1 Обзор теоретических моделей мемристивных систем

В литературе предложены различные теоретические модели мемристивных систем. Можно выделить четыре основных подхода к построению модели: динамический, микроструктурный, термодинамический и стохастический.

Динамический подход основан на довольно простых динамических уравнениях, которые отражают основные физические свойства поведения мемристора. К данному подходу можно отнести модели, используемые в работах [113; 135–139], и модель роста проводящего филамента (ПФ) в [140]. Эти модели обычно включают по крайней мере два уравнения: одно из них – соотношение омического типа между напряжением и током, а второе – диф-

ференциальное уравнение первого порядка для переменной состояния. При динамическом подходе для построения модели используются только основные свойства мемристивной системы и опускаются другие детали. Указанные свойства определяются выбором внутренней переменной состояния, которая зачастую не может наблюдаться напрямую в эксперименте [138]. Существуют модели мемристивных систем, описываемых различными переменными состояния, такими как толщина ПФ [140], ширина области легирования [137], коэффициент легирования [138], концентрация вакансий в области разрыва [141], ширина туннельного барьера [142] и др. Динамические модели широко используются для компьютерного моделирования мемристора как части интегральной схемы в симуляторах электронных схем SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis).

Микроструктурный подход обеспечивает более точные модели для всех физических процессов, происходящих на микроуровне [143–145]. В то время как динамический подход дает практическое соответствие абстрактной математической модели обобщенным экспериментальным данным процессов переключения, микроструктурные модели нацелены на получение точного соответствия физической динамике изготовленных устройств. В этом случае математическая сложность описания существенно возрастает, поскольку такая модель должна включать в себя большое количество различных дифференциальных уравнений. Это приводит к тому, что микроструктурные модели допускают только численное моделирование с высокими затратами вычислительных ресурсов. Несмотря на эти сложности, смоделированные значения иногда дают только качественное соответствие экспериментальным данным [145]. Действительно, для моделирования микроструктурной модели могут потребоваться десятки дополнительных физических параметров, и каждый из них может содержать некоторые ошибки. В результате сохраняется значительная неопределенность в описании системы в целом.

Термодинамические модели учитывают флуктуации естественным образом. Как и в динамическом подходе, в термодинамической модели состояние мемристивной системы описывается внутренней переменной состояния, системным параметром, репрезентативной или конфигурационной координатой и т.д. Система стремится к состоянию с минимальным значением термодинамического потенциала, например, свободной энергии  $F$  как функции переменной внутреннего состояния. Согласно работе [146], свободная энергия мемристивной системы может иметь три локальных минимума, разделенных энергетическими барьерами разной высоты. Термодинамическая система может менять локально стабильное состояние под действием флуктуаций или вследствие изменения внешних параметров (например, под действием внешнего электрического поля). В равновесии термодинамические модели имеют вероятностное распределение Больцмана

$$W(r) = A e^{-\frac{F(r,V)}{k_B T}}, \quad (3.2)$$

где  $r$  – переменная внутреннего состояния, которой может быть радиус ПФ,  $A$  – коэффициент нормировки,  $V$  – напряжение на электродах мемристора,  $k_B$  – постоянная Больцмана и  $T$  – термодинамическая температура. Эволюция неравновесной термодинамической системы

обычно описывается уравнением Фоккера—Планка (УФП) для вероятностного распределения переменной состояния в поле термодинамической силы, определяемой профилем свободной энергии [146; 147]. УФП описывает нелинейную релаксацию от начального неравновесного распределения к состоянию равновесия. Если существует постоянный поток, то система может прийти к неравновесному стационарному состоянию [148—150].

В рамках стохастического подхода в математической модели используют случайные переменные. Аналогично динамическому подходу в основе стохастических моделей лежат, по крайней мере, два уравнения: соотношение омического типа и дифференциальное уравнение первого порядка, но с источником шума [151—153]. Стохастическая часть модели — это уравнение Ланжевена первого порядка, известное как модель сверхвязкого броуновского движения в силовом поле [87]. Если вместо отдельной броуновской частицы мы рассматриваем ансамбль частиц, где каждая из них движется хаотично и независимо друг от друга в соответствии с уравнением Ланжевена, то можно ввести среднюю концентрацию частиц в единице объема [121; 154; 155]. Соответствующим уравнением для концентрации частиц (или плотности вероятности, если выполнено условие нормировки) является УФП. Поэтому уравнение Ланжевена первого порядка и УФП эквивалентны в том смысле, что они оба описывают одну и ту же динамику броуновских частиц, но разными способами: на основе стохастического уравнения, описывающего случайную траекторию движения частицы или с использованием динамического уравнения описывающего усредненную эволюцию концентрации частиц [87]. Поэтому термодинамический и стохастический подходы имеют общую основу и могут рассматриваться как вариации одной и той же базовой математической модели. Таким образом, флуктуации учитываются явным образом только в стохастических и термодинамических моделях.

Стохастичность мемристоров, наблюдаемая во многих экспериментах проявляется как их важное внутреннее свойство. Под стохастичностью мемристивных систем мы понимаем внутренние флуктуации, присущие самой структуре, а также флуктуации значений химических и физических параметров, времен переключений, которые могут происходить на разных пространственных и временных масштабах во время переключений или при нахождении системы в одном из состояний. Для исследования свойств стохастичности и понимания того, как она влияет на динамику системы, важно построить соответствующую теоретическую модель, отражающую фундаментальные свойства мемристора.

### **3.2 Вероятностный анализ макромоделей идеального мемристора с внешним источником шума**

В этом разделе на основе анализа вероятностных характеристик простых макромоделей изучается влияние гауссовых флуктуаций приложенного напряжения или тока на состояние мемристора.

В простейшей модели идеальный мемристор Чуа [132] как нелинейный элемент электрической цепи описывается законом Ома и связанным с ним уравнением состояния

$$V(t) = R(q)I(t), \quad I(t) = \frac{dq}{dt}, \quad (3.3)$$

где  $V(t)$ ,  $I(t)$  и  $q(t)$  – напряжение, ток и заряд на мемристоре соответственно. Уравнение (3.3) описывает мемристор, управляемый зарядом (в этом случае сопротивление мемристора  $R(q)$  зависит от заряда). Как следует из уравнения (3.3), идеальный мемристор является интегрируемой моделью и поэтому определяется эквивалентной алгебраической функцией

$$w(t) = \int_0^t V(t)dt = \int_0^{q(t)} R(q)dq = \Phi(q(t)). \quad (3.4)$$

Приложим к мемристору напряжение  $V(t)$  в форме стационарного гауссова шума со средним значением  $V_0$  и ковариационной функцией  $K(\tau)$ . Согласно уравнению (3.4), случайный процесс  $w(t)$  является также гауссовым и обладает следующим вероятностным распределением

$$P_w(y,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t)}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(y - V_0 t)^2}{4D(t)} \right\}, \quad (3.5)$$

где

$$D(t) = \int_0^t (t - \tau)K(\tau)d\tau. \quad (3.6)$$

Теперь для вычисления из уравнений (3.4)-(3.6) плотности вероятности заряда, протекающего через мемристор, можно применить известную теорему теории вероятностей о нелинейном преобразовании случайных величин. Это дает следующий результат

$$P_q(z,t) = \frac{\Phi'(z)}{\sqrt{4\pi D(t)}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\Phi(z) - V_0 t)^2}{4D(t)} \right\}. \quad (3.7)$$

В соответствии с (3.4),  $R(q) = d\Phi(q)/dq$ , тогда, применяя указанную теорему еще раз, найдем вероятностное распределение сопротивления мемристора

$$P_R(r,t) = \frac{r}{\sqrt{4\pi D(t)}} \sum_k \frac{1}{|\Phi''(q_k(r))|} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\Phi(q_k(r)) - V_0 t)^2}{4D(t)} \right\}, \quad (3.8)$$

где  $q_k(R)$  –  $k$ -ая ветвь однозначности обратной функции к  $R = \Phi'(q)$ . Путем экспериментального измерения плотности вероятности (3.8) можно восстановить неизвестную алгебраическую функцию  $\Phi(q)$  и определить все интересующие нас статистические характеристики мемристора.

В качестве примера рассмотрим следующую физически обоснованную монотонную экспоненциальную зависимость сопротивления мемристора от заряда [156]

$$R(q) = R_{ON} + \frac{\Delta R}{e^{-(q+q_1)/q_0} + 1}, \quad (3.9)$$

где  $\Delta R = R_{OFF} - R_{ON}$  ( $R_{ON} \ll R_{OFF}$ ). Параметр  $q_0$  характеризует заряд, необходимый для переключения мемристора, и определяет крутизну перехода между состоянием СНС и

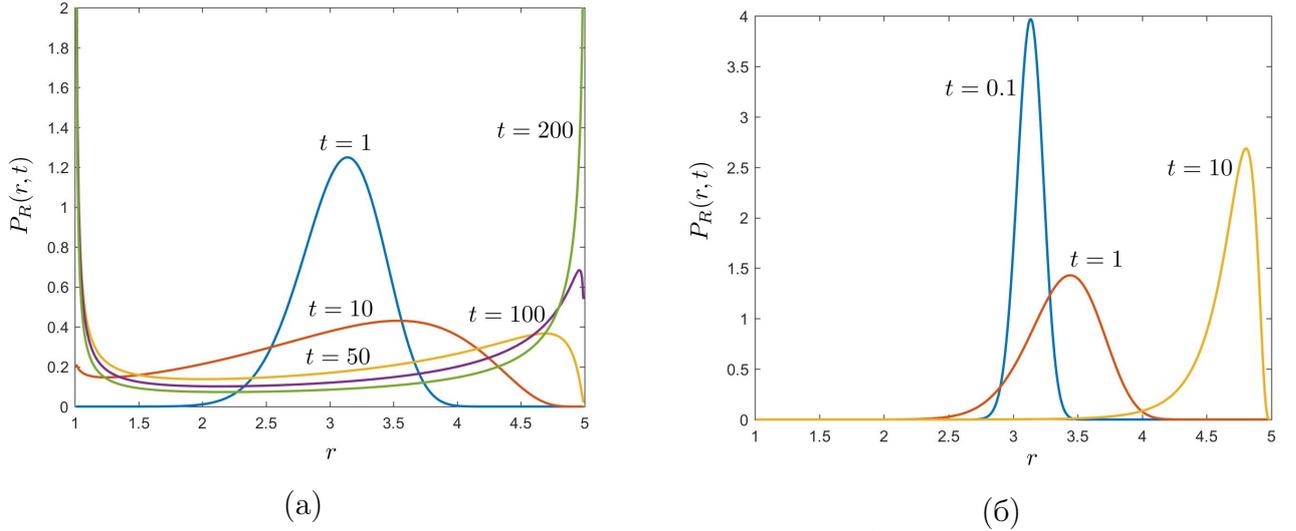


Рис. 3.2 — Графики плотности вероятности сопротивления (3.10) в случае подачи на мемристор гауссова белого шума  $V(t)$  для различных моментов времени при (а) нулевом  $V_0 = 0$  и (б) положительном смещении  $V_0 = 1$ . Значения остальных параметров:  $q_0 = 1$ ;  $q_1 = 0,1$ ;  $R_{ON} = 1$ ;  $R_{OFF} = 5$ ;  $D = 0,5$

СВС, параметр  $q_1$  задает сопротивление мемристора в начальный момент времени  $t = 0$ . В рассматриваемом случае точное выражение для плотности вероятности сопротивления  $R(t)$  имеет вид

$$P_R(r, t) = \frac{q_0 \Delta R}{\sqrt{4\pi D(t)}} \frac{r}{(R_{OFF} - r)(r - R_{ON})} \cdot \exp \left\{ -\frac{(\Phi(q(r)) - V_0 t)^2}{4D(t)} \right\}, \quad (3.10)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(q(r)) = & -q_1 R_{ON} - q_0 \Delta R \ln(e^{q_1/q_0} + 1) + q_0 R_{OFF} \ln \left( \frac{\Delta R}{R_{OFF} - r} \right) - \\ & - q_0 R_{ON} \ln \left( \frac{\Delta R}{r - R_{ON}} \right) \quad (R_{ON} < r < R_{OFF}). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Рассмотрим далее два вида подаваемого на мемристор случайного напряжения. Для гауссова белого шума  $V(t)$  с интенсивностью шума  $2D$  и ковариационной функцией

$$K(\tau) = 2D\delta(\tau), \quad (3.12)$$

необходимо подставить в формулу (3.10) в соответствии с уравнением (3.6),  $D(t) = Dt$ . Эволюция соответствующих вероятностных распределений сопротивления представлена на Рисунке 3.2. Как видно из рисунка, в случае шума с нулевым средним значением наблюдаются переключения мемристора в два состояния (начиная с момента времени  $t = 50$ ), в то время как случайное напряжение с положительным смещением переводит мемристор в состояние с высоким сопротивлением.

Для цветного гауссова шума  $V(t)$  с экспоненциальной ковариационной функцией

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-|\tau|/\tau_c}, \quad (3.13)$$

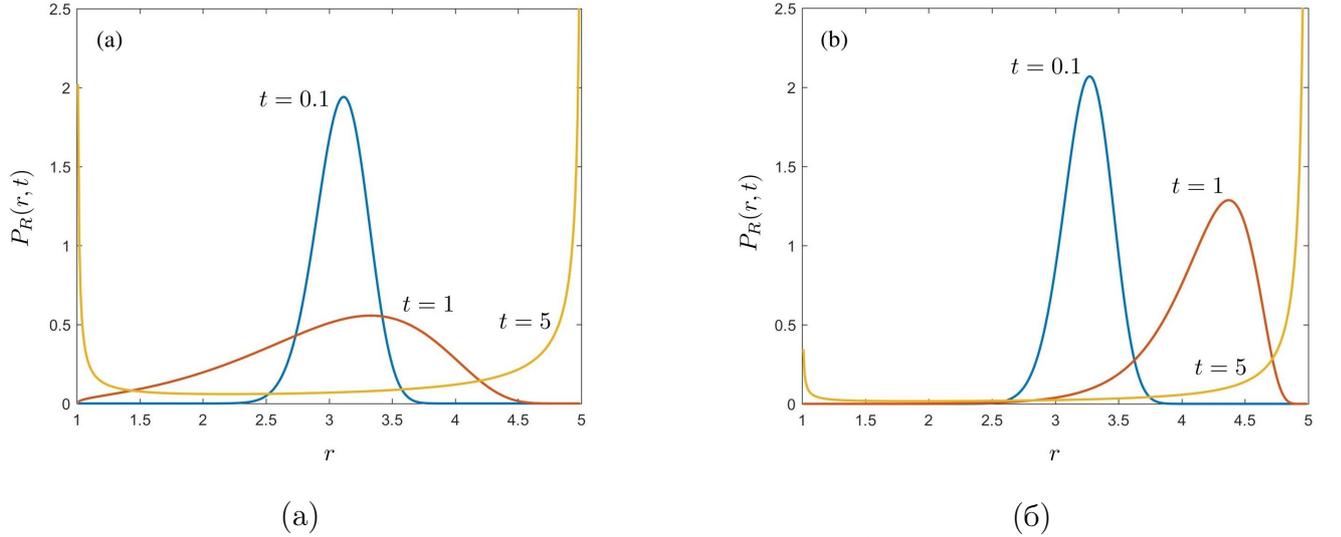


Рис. 3.3 — Графики плотности вероятности сопротивления (3.10) в случае подачи на мемристор гауссова коррелированного шума  $V(t)$  для различных моментов времени при (а) нулевом  $V_0 = 0$  и (б) положительном смещении  $V_0 = 5$ . Значения остальных параметров:  $q_0 = 1$ ;  $q_1 = 0,1$ ;  $R_{ON} = 1$ ;  $R_{OFF} = 5$ ;  $\sigma^2 = 1$ ;  $\tau_c = 1$

где  $\sigma^2$  и  $\tau_c$  — дисперсия и время корреляции соответственно, выражение (3.6) принимает вид

$$D(t) = \sigma^2 \tau_c [t - \tau_c (1 - e^{-t/\tau_c})]. \quad (3.14)$$

Эволюция вероятностного распределения сопротивления мемристора (3.10) в случае цветного гауссова шума приведена на Рисунке 3.3. Как видно, для коррелированного шума наблюдается аналогичная эволюция плотности вероятности сопротивления, что и для белого шума.

В качестве сопоставления с полученными результатами рассмотрим мемристор и протекающий через него ток  $I(t)$  в форме стационарного гауссова шума с нулевым средним значением и корреляционной функцией  $K(\tau)$ . Согласно системе уравнений (3.3), заряд  $q(t)$  будет также гауссовым процессом с вероятностным распределением

$$P_q(r, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t)}} \cdot \exp \left\{ -\frac{z^2}{4D(t)} \right\}. \quad (3.15)$$

В соответствии с уравнениями (3.3) и (3.15), плотность вероятности сопротивления мемристора в этом случае такова

$$P_R(r, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t)}} \sum_k \frac{1}{|R'(q_k(r))|} \cdot \exp \left\{ -\frac{q_k^2(r)}{4D(t)} \right\}. \quad (3.16)$$

Здесь использованы те же самые обозначения, что и в уравнении (3.8). Для рассматриваемого случая экспоненциальной зависимости сопротивления мемристора от заряда (3.9) из уравнения (3.16) получаем

$$P_R(r, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D(t)}} \frac{q_o \Delta R}{(R_{OFF} - r)(r - R_{ON})} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{4D(t)} \left( q_1 + q_0 \ln \frac{R_{OFF} - r}{r - R_{ON}} \right)^2 \right\}. \quad (3.17)$$

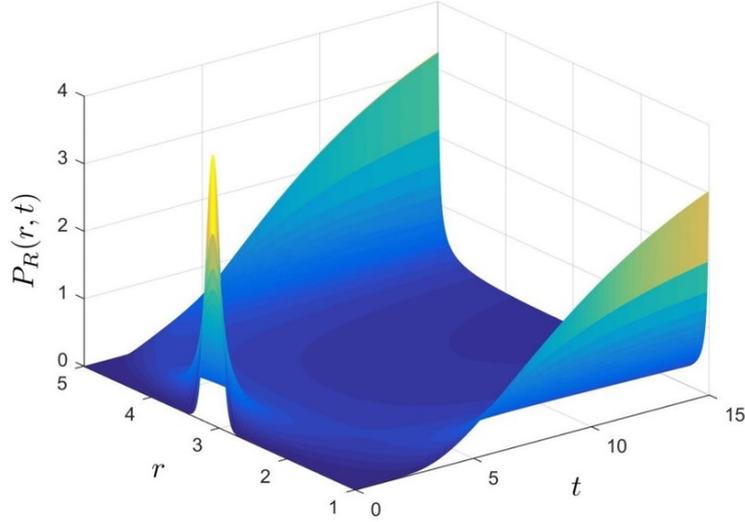


Рис. 3.4 — Плотность вероятности сопротивления мемристора (3.17) для случая гауссовых флуктуаций тока с нулевым временем корреляции как функция двух переменных  $r$  и  $t$ . Значения остальных параметров:  $q_0 = 1$ ;  $q_1 = 0,1$ ;  $R_{ON} = 1$ ;  $R_{OFF} = 5$ ;  $D = 0,5$

Пространственный график вероятностного распределения сопротивления мемристора для флуктуаций тока в форме белого гауссова шума представлен на Рисунке 3.4. Как следует из рисунка, начальное унимодальное вероятностное распределение с увеличением времени наблюдения становится бимодальным. Два пика соответствуют состояниям мемристора с низким и высоким сопротивлением и указывают на переключения между ними, вызванные флуктуациями тока.

Далее рассмотрим управляемый током идеальный мемристор. Опираясь на ранее описанную в [113] теоретическую модель, проанализируем те же самые статистические характеристики, что и для управляемого зарядом мемристора.

В рассматриваемой модели система управляющих уравнений такова

$$\begin{aligned} V(t) &= R_m I(t), \\ \frac{ds(t)}{dt} &= \frac{\mu_V R_{ON}}{L^2} I(t), \end{aligned} \quad (3.18)$$

где  $I(t)$  и  $V(t)$  – ток и напряжение на мемристоре соответственно,  $\mu_V$  – средняя подвижность ионов,  $R_m$  – полное сопротивление мемристора, заданное формулой (3.1).

Исследуем случай флуктуаций тока  $I(t)$  в форме гауссова белого шума с ненулевым средним значением  $I_0$  и интенсивностью  $2D_1$ . Заряд  $q(t)$ , протекающий через мемристор, является также гауссовым процессом, но в соответствии со вторым уравнением системы (3.18), вероятностное распределение ограниченного процесса  $s(t)$  является негауссовым и содержит две дельта-функции

$$P_s(z, t) = p_1(t)\delta(z) + p_2(t)\delta(1 - z) + \frac{1}{\sqrt{4\pi D_1 c_0^2 t}} \cdot \exp\left\{-\frac{(z - c_0 I_0 t)^2}{4D_1 c_0^2 t}\right\} 1_{(0,1)}(z), \quad (3.19)$$

где  $c_0 = \mu_V R_{ON} / L^2$ ,  $1_A(z)$  – индикаторная функция множества  $A$  и

$$p_1(t) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi D_1 c_0^2 t}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(z - c_0 I_0 t)^2}{4D_1 c_0^2 t} \right\} dz,$$

$$p_2(t) = \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi D_1 c_0^2 t}} \cdot \exp \left\{ -\frac{(z - c_0 I_0 t)^2}{4D_1 c_0^2 t} \right\} dz.$$

На основании вышеизложенной методики можно записать плотность вероятности сопротивления мемристора из уравнений (3.18) и (3.19) в следующем виде

$$P_R(r, t) = \frac{1}{\Delta R} \cdot P_s \left( \frac{R_{OFF} - r}{\Delta R}, t \right). \quad (3.20)$$

Главным недостатком рассмотренных моделей является неспособность обеспечить свойства реального мемристора (например, обнаружено отсутствие установившегося вероятностного распределения сопротивления мемристора) и учесть внутренние тепловые шумы.

### 3.3 Физическая макро модель мемристора с учетом влияния внешних и внутренних шумов и её экспериментальная проверка

#### 3.3.1 Описание макро модели

Сопротивление является ключевым физическим параметром, описывающим состояние мемристора. Среди большого разнообразия резистивно-коммутационных запоминающих устройств, изготовленных из различных материалов, значительная часть функционирует на основе механизма образования и разрушения проводящего филамента в тонкой диэлектрической пленке при подаче внешнего напряжения. Этот процесс обуславливает стохастичность мемристоров [120; 151; 157]. Процесс образования и разрушения проводящего филамента основан на случайных переходах ионов металла или положительно заряженных структурных дефектов (вакансий кислорода) между ловушками в структуре диэлектрического материала. Назовем эти ионы или вакансии диффузионными частицами. Процесс диффузии приводит, в конечном итоге, к образованию или разрушению проводящего филамента в зависимости от направления внешнего электрического поля, которое определяет среднее направление дрейфа. Таким образом, проводящий филамент образуется через области, где концентрация частиц достаточно высока. Согласно [158], движение диффундирующих частиц может быть описано уравнением Ланжевена

$$\eta \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial U(x, V)}{\partial x} + \xi(t), \quad (3.21)$$

где  $x(t)$  – координата частицы,  $\eta$  – коэффициент вязкости,  $U(x, V)$  – потенциальный профиль, зависящий от напряжения  $V$  на электродах мемристора и определяющий регулярную силу,

действующую на частицу,  $\xi(t)$  – белый гауссов шум с нулевым средним и интенсивностью  $2\theta$ . Если флуктуации имеют только тепловую природу, то, согласно соотношению Эйнштейна—Сазерленда, их интенсивность пропорциональна температуре термостата  $T$ :  $\theta = \eta k_B T$ . В качестве переменной, определяющей состояние мемристора, используется средняя концентрация случайно движущихся частиц, являющаяся функцией времени и пространственных координат. Вслед за работами [154; 155; 159] для простоты анализа здесь рассматривается одномерную модель, которую при необходимости можно обобщить на трехмерный случай. Считаем, что верхний электрод (ВЭ) расположен в точке  $x = 0$ , а нижний (НЭ) – в точке  $x = L$ . Стохастическая сила  $\xi(t)$  позволяет описать неопределенности, обусловленные самой моделью, неизбежные неточности при расчете макрофизических параметров (например, электро- и теплопроводность материала, вязкость, изменения энергий активации для переноса дефектов и электронов), неидеальности структуры материала, неполную информацию о граничных и начальных условиях (например, начальная концентрация дефектов, неоднородность начальных состояний и т. д.), наличие тепловых флуктуаций.

Потенциальный профиль  $U(x, V)$  для скачкообразно перемещающихся частиц представлен потенциальными ямами, разделенными барьерами (см. Рисунок 3.5). Высота барьеров – это энергия активации  $E_a$ , которую должна приобрести частица для преодоления барьера и перехода в соседнюю яму в случайном направлении. Помимо периодической составляющей  $\Phi(x)$  потенциальный профиль  $U(x)$  имеет регулярный наклон  $F$ , направленный на тот или иной электрод в зависимости от полярности приложенного напряжения

$$U(x, V) = \Phi(x) - Fx, \quad (3.22)$$

где  $F = qV/\varepsilon L$ ,  $q$  – заряд частицы и  $\varepsilon$  – диэлектрическая постоянная.

Используя различные материалы электродов, можно менять энергетические свойства этих участков, что влияет на форму потенциального профиля  $U(x, V)$  вблизи границ  $x = 0$  и  $x = L$ , на значения сопротивления в состояниях СВС и СНС, а также на свойства динамики переключения [160; 161]. Как правило, ВЭ легко окисляется и имеет низкое значение величины работы выхода, а НЭ – высокое. В общем случае, это может быть учтено введением дополнительной потенциальной ямы с глубиной  $E_t$  вблизи ВЭ и потенциального барьера с высотой  $E_b$  вблизи НЭ, как показано на Рисунке 3.5 (г, д, е). В данном разделе рассмотрено два частных случая:  $E_t = E_b = E_a$  и случай идеально инертного материала НЭ, когда  $E_b \rightarrow \infty$  при  $E_t = E_a$ .

Уравнению Ланжевена (3.21) соответствует следующее уравнение Фоккера—Планка для концентрации частиц  $n(x, t)$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial U(x, V)}{\partial x} n \right] + D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}, \quad (3.23)$$

где  $D = \theta/\eta^2$  – коэффициент диффузии. Броуновская диффузия в наклонном периодическом потенциале (3.22), описываемая уравнением (3.23), может быть заменена диффузией в наклонном потенциале  $U_1$  без барьеров [17; 87; 162–165]

$$U_1(x, V) = -v_{eff} x \quad (3.24)$$

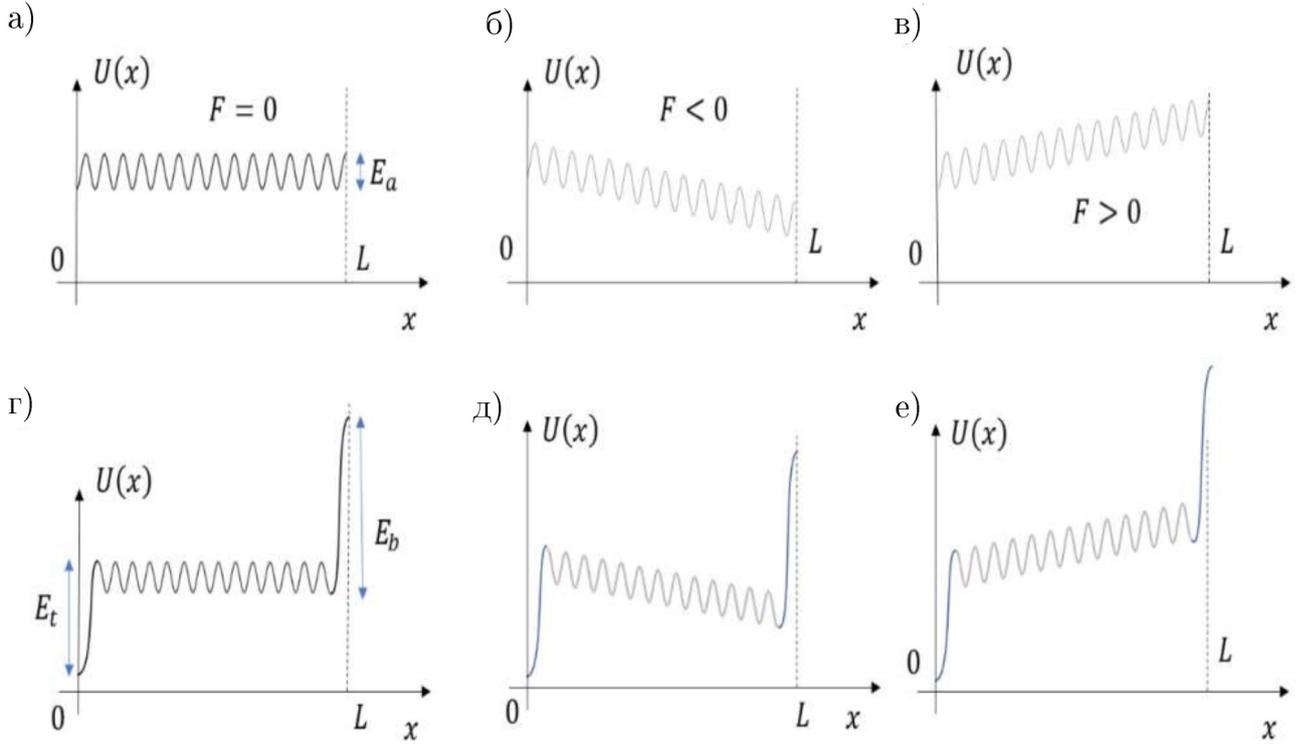


Рис. 3.5 — Вид потенциального профиля  $U(x, V)$ , определяющего регулярную силу, действующую на диффузионные частицы при нулевом внешнем смещении  $V = 0$  (а, г), положительном  $V > 0$ , соответствующем СНС (б, д) и отрицательном  $V < 0$ , соответствующем СВС (в, е)

с эффективным коэффициентом сноса  $v_{eff}$ , пропорциональным напряжению на электродах мемристора  $V$ . В результате уравнение (3.23) для концентрации частиц  $n_1(x, t)$  принимает следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t} n_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ n_1(x, t) \frac{\partial U_1(x, V)}{\partial x} \right] + D_{eff} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n_1(x, t), \quad (3.25)$$

где  $D_{eff}$  — эффективный коэффициент диффузии дефектов.

Точные выражения для эффективных коэффициентов сноса и диффузии, справедливые для произвольных значений  $F = qV/\varepsilon L$  и  $\theta$ , имеют следующий вид [163; 164]

$$v_{eff} = \frac{l}{T_1(x_0, x_0 + l)}, \quad (3.26)$$

$$D_{eff} = \frac{l^2 \Delta T_2(x_0, x_0 + l)}{2 [T_1(x_0, x_0 + l)]^3}, \quad (3.27)$$

где  $l$  — период компоненты  $\Phi(x)$  потенциала (3.22),  $T_1$  — среднее время первого достижения частицей границы  $x_0 + l$ , когда она начинает движение из точки  $x_0$ ,  $\Delta T_2$  — дисперсия времени первого достижения. Если для любого значения внешнего напряжения  $V$  можно считать, что результирующая энергия активации значительно больше, чем интенсивность флуктуаций, т.е.  $E \approx E_a - Fl/2 \gg \theta$ , то можно использовать следующие приближенные

выражения для (3.26) и (3.27)

$$v_{eff} = \frac{2l}{\tau_{kr}} \operatorname{sh} \frac{Fl}{2\theta}, \quad (3.28)$$

$$D_{eff} = \frac{l^2}{\tau_{kr}} \operatorname{ch} \frac{Fl}{2\theta}, \quad (3.29)$$

где  $\tau_{kr}$  – время Крамерса

$$\tau_{kr} = \tau_0 \exp \{E_a/\theta\}. \quad (3.30)$$

Здесь  $E_a$  – энергия активации для нулевого смещения и  $\tau_0(\theta)$  определяется спецификой формы периодического потенциала  $\Phi(x)$ . Для тепловых флуктуаций  $\theta = k_B T$  эффективные коэффициенты сноса (3.28) и диффузии (3.29) связаны следующим соотношением [166]

$$D_{eff} = \theta \frac{d}{dF} v_{eff}. \quad (3.31)$$

Приближенные выражения для эффективных коэффициентов дрейфа (3.28) и диффузии (3.29) обеспечивают монотонную зависимость от параметров  $\theta$  и  $F$  и были получены при некотором конкретном предположении о форме периодического потенциального профиля  $\Phi(x)$ . Ширина барьеров примерно равна ширине ям и верхняя часть каждого барьера находится посередине между двумя соседними ямами при любом значении  $F$ . Реальная форма потенциального профиля определяется специфической структурой диэлектрического материала и может быть иной. В работах [17; 164; 167; 168] было показано, что функции  $D_{eff}(\theta)$  и  $D_{eff}(F)$  могут быть немонотонными для некоторых конкретных форм потенциальных ям и барьеров. Например, эти функции будут иметь максимум, если потенциальный профиль  $\Phi(x)$  имеет широкие ямы и узкие барьеры или наоборот, как это показано на вставках а) и б) на Рисунке 3.6.

Подобный потенциальный профиль может быть создан путем вставки рядов из металлических наночастиц в диэлектрический слой [169]. Эта немонотонность с максимумом является признаком явления ускорения диффузии в субкритически наклоненном периодическом потенциале [17; 164; 168]. Чтобы принять это во внимание, необходимо использовать точные выражения для эффективных коэффициентов дрейфа и диффузии (3.26) и (3.27).

Полная физическая модель мемристора, в дополнении к уравнению дрейфа-диффузии (3.25) и соотношению омического типа, должна также включать уравнения, связывающие концентрацию дефектов  $n_1(x, t)$  с сопротивлением  $R$ . Нужно учитывать, что ток  $I$ , протекающий между электродами, нагревает материал локально и поэтому способствует увеличению интенсивности шума. Кроме того, электрическое поле внутри мемристора может искажаться, так как существуют области с различными проводимостями в зависимости от распределения  $n_1(x, t)$ . Поэтому в общем случае можно рассмотреть потенциальное поле как функцию большего числа параметров  $U_1(x, V, I, n_1)$ , подчиняющихся дополнительным уравнениям. В этом случае уравнение Фоккер–Планка (3.25) может стать нелинейным по отношению к  $n_1$ . Заметим, что дрейфовый член в уравнении (3.25) можно представить в виде следующей суммы

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial U_1(x, V, I, n_1)}{\partial x} n_1 \right] = \frac{\partial U_1(x, V, I, n_1)}{\partial x} \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_1(x, V, I, n_1)}{\partial x^2} n_1. \quad (3.32)$$

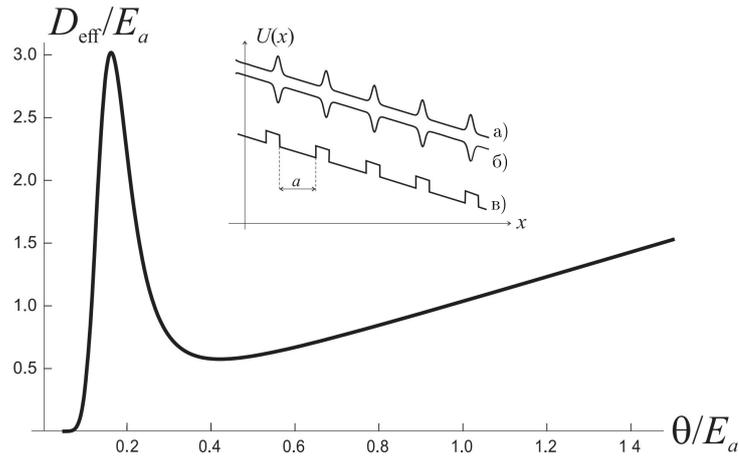


Рис. 3.6 — Эффективный коэффициент диффузии как функция безразмерной интенсивности  $\theta/E_a$  для профиля потенциала (в), показанного на вставке со значением  $a = 0,8l$ . Вставка: примеры наклонных периодических потенциалов, для которых может наблюдаться ускорение диффузии

Случай  $U_1 = U_1(x, n_1)$  был исследован в работе [154] для одномерного случая в предположении, что вторым членом в уравнении (3.32) можно пренебречь. Это справедливо, если  $U_1(x)$  является линейной функцией. В данном разделе анализируется наиболее простой случай, когда джоулев разогрев и нелинейные эффекты в расчет не принимаются. Влияние джоулевого нагрева было исследовано численно в работах [121; 143–145] для трехмерного случая. Конкретный вид функции  $R(n_1)$  не является решающим для рассматриваемой модели и зависит от свойств конкретных материалов. Далее рассматривается случай, когда низкое значение  $n_1$  приводит к высокому сопротивлению и наоборот [170]. Предположим, что данная зависимость сильно нелинейна и имеет порог: сопротивление резко уменьшается, когда  $n_1$  становится больше порогового значения  $n_1 = n_{th}$ . В этом упрощенном случае полное сопротивление мемристора можно рассчитать, используя формулу (3.1).

Приведем результаты экспериментальной верификации стохастической модели мемристорного устройства, описываемой уравнениями (3.23) и (3.25). Эксперимент был выполнен лабораторией стохастических мультистабильных систем, организованной в рамках гранта Правительства Российской Федерации (договор № 074-02-2018-330 (2)). Используемое для проверки экспериментальное мемристорное устройство было изготовлено на основе недавно спроектированной многослойной структуры Au/Ta/ZrO<sub>2</sub>(Y)/Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub>/TiN/Ti, которая описана более подробно в работе [171].

Измеренные ВАХ представлены на Рисунке 3.7, где разные цвета соответствуют различным циклам. Знак смещения на приборе соответствует потенциалу электрода Au относительно заземленного электрода TiN/Ti. Экспериментальное мемристорное устройство демонстрирует типичное биполярное переключение анионного типа, связанного с образованием и разрушением проводящего филамента, состоящего из кислородных вакансий [172]. Переключение мемристора из СНС в СВС (так называемый процесс RESET на Рисунке 3.7) достигается путем разрыва филамента импульсом напряжения соответствующей

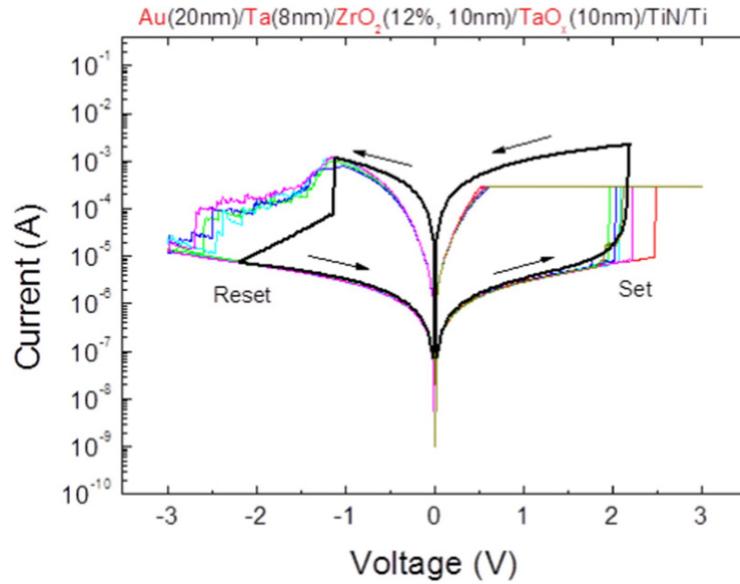


Рис. 3.7 — Вольт-амперная характеристика мемристивного устройства. Период развертки равен  $4s$ , а амплитуда развертки —  $3\text{ В}$ . Значения остальных параметров:  $E_a/\theta = 23$ ,  $\Delta E/\theta = 4,23$ ,  $l^2/\tau_0 = 6 \cdot 10^{-13}\text{ см}^2\text{ с}^{-1}$ ,  $L = 10\text{ нм}$

полярности. Восстановление токнесущей способности филамента может быть реализовано импульсом напряжения противоположной полярности, что приводит к переключению из СВС в СНС (процесс SET на Рисунке 3.7). Результаты численного решения уравнений стохастической модели (3.24), (3.25), (3.28), (3.29) и (3.30) приведены в виде черной линии на Рисунке 3.7.

Для моделирования были использованы следующие граничные условия

$$n_1(0,t) = N_1, \quad n_1(L,t) = N_2, \quad (3.33)$$

где  $0$  и  $L$  — координаты ВЭ и НЭ, изготовленных из различных материалов. Относительная концентрации дефектов (вакансий) на границах с электродами определяет вклад соответствующего интерфейса в процесс резистивного переключения. Высокое значение  $N$  соответствует легко окисляемому электроду и наоборот. В случае идеальной инертности материала соответствующий электрод в модели рассматривается как отражающая граница. Для моделирования выбраны следующие значения:  $N_1 = 100\%$  для легко окисляемого электрода TiN/Ti и  $N_2 = 25\%$  для противоположного электрода. Пороговое значение параметра концентрации для переключения сопротивления составляет  $n_{th} = 50\%$ .

Сравнивая экспериментальные и смоделированные результаты, представленные на Рисунке 3.7, можно заключить, что стохастическая прогнозная модель достаточно хорошо описывает эксперимент и отражает ключевые фундаментальные свойства реальной ВАХ (гистерезисный тип, площадь и форма соответствуют тому, что наблюдалось в эксперименте).

Аналитические уравнения стохастической модели не моделируют цепи с ограничением тока в режиме SET. Поэтому значение сопротивления в СНС, достигнутое в модели, меньше по сравнению с экспериментальным. При необходимости можно добавить дополнительные

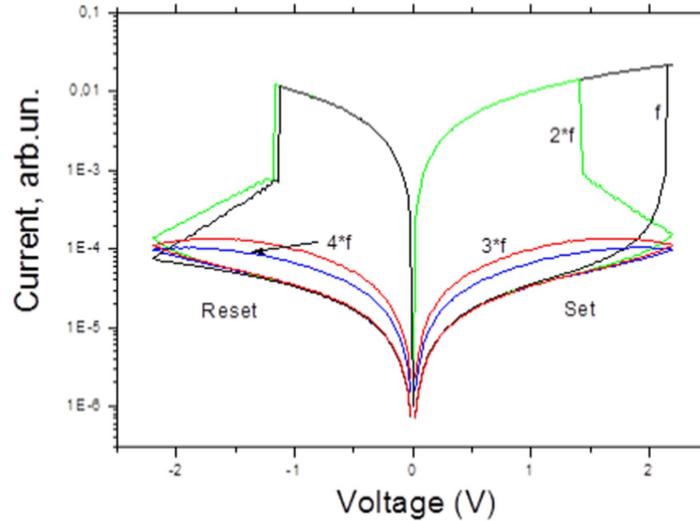


Рис. 3.8 — Теоретическая вольт-амперная характеристика для различных значений частоты развертки управляющего напряжения: черная кривая соответствует  $f = 0,25$  Гц (та же частота, что для черной кривой на Рисунке 3.7), зеленая —  $2f$ , красная —  $3f$ , синяя —  $4f$ . Остальные параметры те же, что для Рисунка 3.7

уравнения, моделирующие ограничение тока в экспериментальной системе, хотя это и не является критичным для верификации.

Расчёты, выполненные в рамках модели показывают, что процесс перехода от СНС к СВС начинается примерно при том же значении управляющего напряжения  $V = -1,1$  В, как и в эксперименте. В то же время модель переходит в СВС немного быстрее. Это различие может быть связано с выбором граничных условий. Условия (3.33) допускают уменьшение концентрации дефектов при  $V < 0$  двумя способами: через обратный поток дефектов к ВЭ, расположенному в точке  $x = 0$  и через границу НЭ, расположенного в точке  $x = L$ , который работает как приемник дефектов, когда  $n_1(L, t) > N_2$ . Если использовать условие отражающей границы при  $x = L$ , соответствующее идеально инертному материалу, из которого изготовлен электрод, то прохождение дефектов через такой электрод станет невозможным, и мы будем наблюдать замедление процесса переключения. С другой стороны, в литературе можно найти экспериментальные данные с ВАХ, которые показывают более быстрый процесс RESET, соответствующий результату приведенного выше моделирования с граничными условиями (3.33) (см., например, статью [173]).

Еще одним фундаментальным свойством мемристивных устройств является сжатие петли гистерезиса с увеличением частоты развертки [174]. Рассмотренная модель отражает и это основное свойство: на Рисунке 3.8 изображена теоретическая ВАХ при тех же параметрах, но для разных значений частоты возбуждения. Такая зависимость гистерезиса ВАХ от частоты возбуждения является одним из фундаментальных свойств мемристора и хорошо согласуется с экспериментальными результатами, приведенными в работе [174] и ссылками в ней.

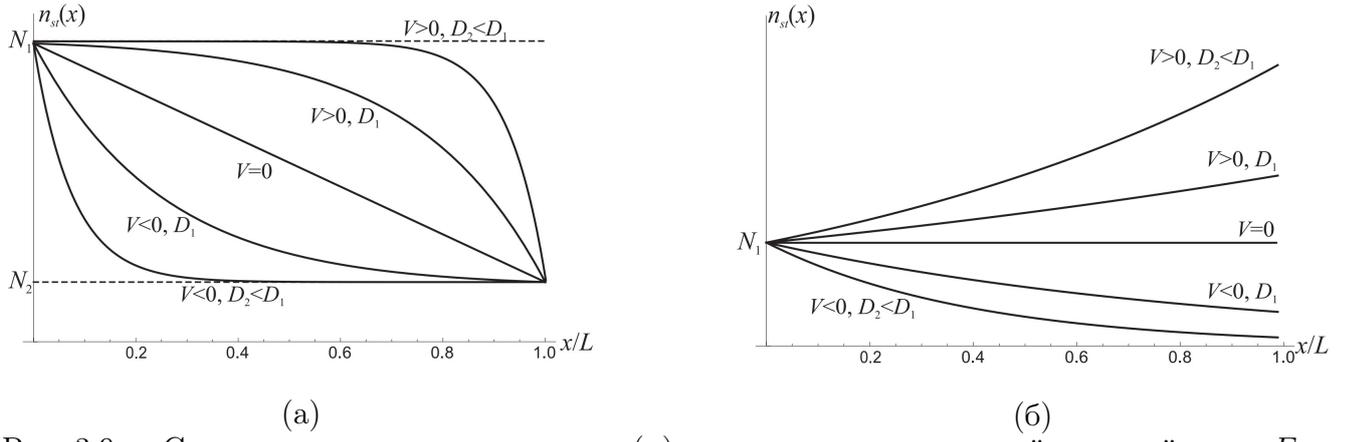


Рис. 3.9 — Стационарные концентрации  $n_{st}(x)$  для различных значений внешней силы  $F = qV/L$  и коэффициента диффузии  $D_{eff}$ , равного  $D_1$  и  $D_2$ , где  $D_2 < D_1$ : (а) для граничных условий (3.33); (б) для граничных условий (3.37), соответствующих идеальному инертному материалу НЭ

### 3.3.2 Эволюция концентрации дефектов и сопоставление с другими моделями резистивного переключения

Рассмотрим стационарные и нестационарные решения управляющих уравнений рассмотренной в предыдущем разделе физической макромодели и проанализируем их свойства.

Стационарное решение  $n_{st}(x)$  уравнения Фоккера–Планка (3.23) подчиняется следующему уравнению

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial U_1(x, V)}{\partial x} + D_{eff} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] n_{st}(x) = 0. \quad (3.34)$$

Для линейного потенциального профиля (3.22) уравнение (3.34) переходит в

$$D_{eff} \frac{d^2 n_{st}(x)}{dx^2} - v_{eff} \frac{dn_{st}(x)}{dx} = 0. \quad (3.35)$$

Учитывая граничные условия (3.33), можно получить следующее стационарное решение (показано на Рисунке 3.9(а))

$$n_{st}(x) = \frac{N_2 - N_1}{\exp\left(\frac{v_{eff}L}{D_{eff}}\right) - 1} \left[ \exp\left(\frac{v_{eff}x}{D_{eff}}\right) - 1 \right] + N_1. \quad (3.36)$$

Как упоминалось ранее, если нижний электрод изготовлен из инертного материала с очень высокой работой выхода, то его можно моделировать как отражающую границу, т. е. как бесконечно высокий барьер для дефектов в точке  $x = L$ . Заменяя граничные условия (3.33) на следующие

$$n_{st}(0) = N_1, \quad G_{st}(L) = v_{eff}n_{st}(L) - D_{eff} \left. \frac{dn_{st}(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0, \quad (3.37)$$

где  $G_{st}(L)$  – установившийся поток диффузионных дефектов в точке  $x = L$ , можно повторить всю процедуру и получить следующую равновесную концентрацию (см. Рисунок 3.9 (б))

$$n_{st}(x) = N_1 \exp\left(\frac{v_{eff}x}{D_{eff}}\right). \quad (3.38)$$

Как видно из Рисунка 3.9, для отражающих граничных условий (3.37) изменение  $n_{st}(L)$  с внешним смещением  $F$  значительно шире, чем то, которое получается при граничных условиях (3.33). Это означает, что амплитуда резистивного переключения между СНС и СВС будет больше, если материал нижнего электрода инертен. Такой же вывод был сделан и в работе [160] на основе экспериментальных результатов. Экспоненциальная зависимость величины сопротивления от максимального напряжения сброса экспериментально наблюдалась также в мемристивных устройствах с инертным нижним электродом [165]. Концентрация (3.38) соответствует равновесному состоянию системы и описывается выражением (3.23), в то время как концентрация (3.36) появляется в неравновесном установившемся состоянии, т. к. в установившемся состоянии происходит постоянный поток дефектов между электродами.

Чтобы узнать, как изменяется концентрация дефектов со временем при изменении внешнего напряжения, интенсивности шума, эффективного коэффициента диффузии, температуры и других параметров, необходимо найти нестационарное решение уравнения (3.23) (подробное решение приведено в Приложении Д). Точное нестационарное решение уравнения Фоккера—Планка (3.23) с граничными условиями (3.33) имеет вид

$$n_{nst}(x,t) = \exp\left(\frac{v_{eff}x}{2D_{eff}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_0(n) \exp[C(n)t] \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right), \quad (3.39)$$

где множество произвольных констант  $C_0(n)$  определяется начальными условиями

$$C_0(n) = \frac{2}{L} \int_0^L \exp\left(-\frac{v_{eff}x}{2D_{eff}}\right) n_{nst}(x,0) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx. \quad (3.40)$$

Рисунок 3.10(а) демонстрирует эволюцию концентрации  $n_1(x,t)$  для различных времен во время процесса SET при  $V > 0$  и константы, когда система переключается от высокоомного к низкоомному состоянию. Легированная область, изначально расположенная только вблизи верхнего электрода, растет и приходит в установившееся состояние, в котором заполняет почти всю область между верхним и нижним электродами. Согласно уравнению (3.1), это соответствует переключению значения сопротивления от СВС к СНС. Процесс роста легированной области качественно аналогичен модели дрейфа-диффузии, введенной в работе [159]. Нестационарная концентрация (3.39) естественно эволюционирует в сторону стационарного состояния под действием регулярной и случайной сил.

Нестационарную концентрацию  $n_1(x,t)$  для отражающих граничных условий (3.37) можно получить с помощью процедуры, описанной в Приложении Д, стартуя с уравнения (Д.1) и задания первого члена уравнением (3.38). Аналогично уравнению (3.39)

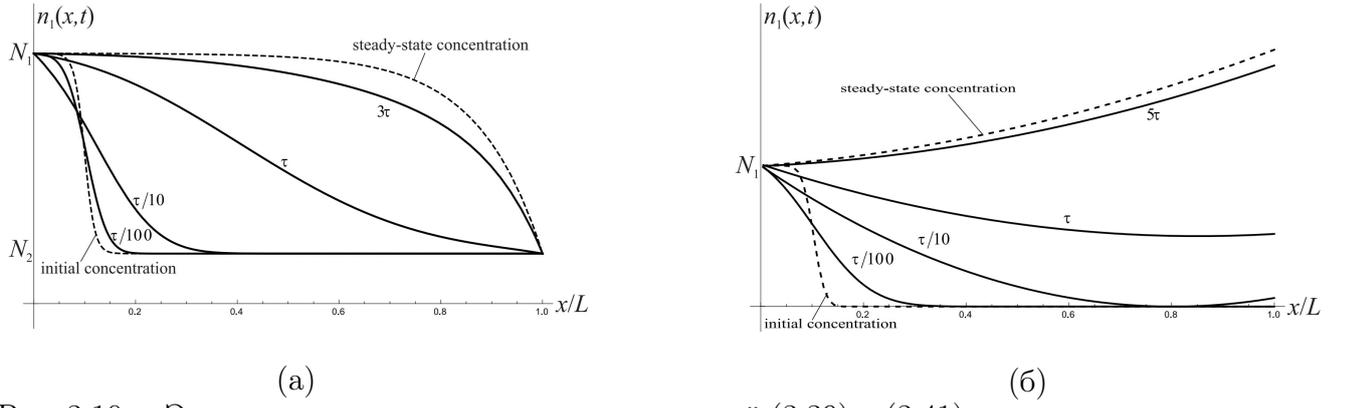


Рис. 3.10 — Эволюция нестационарных концентраций (3.39) и (3.41) из начального состояния в установившееся состоянии ОН при постоянном напряжении  $V > 0$  для времен, кратных времени релаксации  $\tau$ : (а) для граничных условий (3.33); (б) для граничных условий (3.37), соответствующих идеальному инертному материалу НЭ

нестационарный член имеет вид

$$n_{nst}(x,t) = \exp\left(\frac{v_{eff}x}{D_{eff}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_0(n) \exp(C(n)t) \sin b(n)x \quad (3.41)$$

с единственной разницей в уравнениях для констант  $C$ ,  $a$  и  $b$ . Из граничных условий (3.37) имеем

$$S(0) = 0, \quad (3.42)$$

$$v_{eff}S(L) - D_{eff} \left. \frac{dS(x)}{dx} \right|_{x=L} = 0. \quad (3.43)$$

Следовательно, вместо уравнения (Д.13) получаем

$$\hat{C}_3(n) = 0, \quad (3.44)$$

$$\hat{C}_2(n) \left[ \left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} - a \right) \sin(bL) - b \cos(bL) \right] = 0. \quad (3.45)$$

Принимая во внимание уравнения (Д.10) и (Д.11), приводим выражение (3.45) к следующему трансцендентному уравнению для  $a$  и  $b$

$$\text{tg}(bL) = \frac{b}{a}, \quad (3.46)$$

которое не имеет аналитического решения, но может быть решено численно или графически. Нестационарная концентрация частиц  $n_1(x,t)$  для отражающей границы (3.37) показана на Рисунке 3.10(б) для различных времен в течение заданного процесса при  $V > 0$ , когда система находится в состоянии перехода от СВС к СНС.

Для понимания вариабельности значений сопротивления в СНС и СВС важно сравнить время переключения, наблюдаемое в эксперименте, со временем релаксации концентрации дефектов к стационарному состоянию. Другими словами, для полного анализа необходимо понять, достигла ли рассматриваемая система стационарного состояния или остается далеко

от равновесия. Из уравнения (Д.15) легко понять зависимость времени релаксации  $\tau$  от установившейся концентрации при выполнении граничных условий (3.33). Действительно, для каждой пространственной координаты  $x$  функция  $n_{nst}(x,t)$  стремится к нулю со временем как сумма убывающих экспонент. Самая медленная из них соответствует темпу  $C(1)$

$$C(1) = \frac{D_{eff}}{8} \left( -\frac{4\pi^2}{L^2} - \left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} \right)^2 \right). \quad (3.47)$$

Таким образом, время релаксации имеет вид

$$\tau = -\frac{1}{C(1)} = \frac{2L}{v_{eff}} \frac{2D_{eff}/v_{eff}L}{1 + \pi^2 (2D_{eff}/v_{eff}L)^2}. \quad (3.48)$$

Время релаксации (3.48) как функция напряжения смещения показано на Рисунке 3.11 для двух значений интенсивности флуктуаций. В соответствии с известными теоретическими и экспериментальными результатами [151; 157; 159] эта зависимость близка к закону Аррениуса, как показано пунктирными линиями на Рисунке 3.11. Точное выражение  $\tau(V)$  отклоняется от закона Аррениуса для малых значений напряжения, когда времена переключения становятся большими.

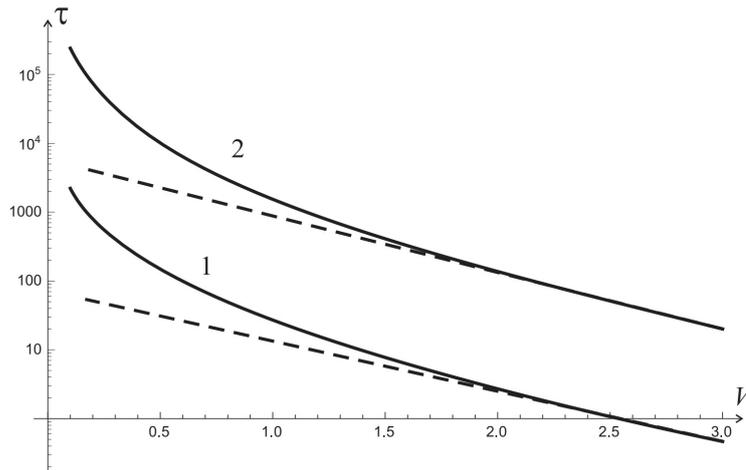


Рис. 3.11 — Время релаксации как функция напряжения смещения для двух значений интенсивности шума  $\theta_1$  (кривая 1) и  $\theta_2$  (кривая 2), где  $\theta_1 > \theta_2$ . Пунктирные прямые линии соответствуют закону Аррениуса

Зависимость времени релаксации (3.48) от интенсивности флуктуаций показана на Рисунке 3.12. Флуктуации могут быть как тепловыми, так и вызванными добавленным в систему шумом управляющего напряжения. В общем случае  $\tau(\theta)$  является немонотонной функцией (см. вставку на Рисунке 3.12). Диапазон, в котором  $\tau$  уменьшается с увеличением интенсивности флуктуаций  $\theta < E_a$ , является наиболее интересным с практической точки зрения, т. к. он обеспечивает возможность ускорения процесса релаксации посредством шума. Как видно из вставки на Рисунке 3.12, существует оптимальное значение интенсивности шума, для которого время релаксации минимально. Дальнейший рост времени релаксации с интенсивностью шума является эффектом задержки шумом распада нестабильного состояния. В мемристивной системе данный эффект будет играть негативную роль, поскольку он

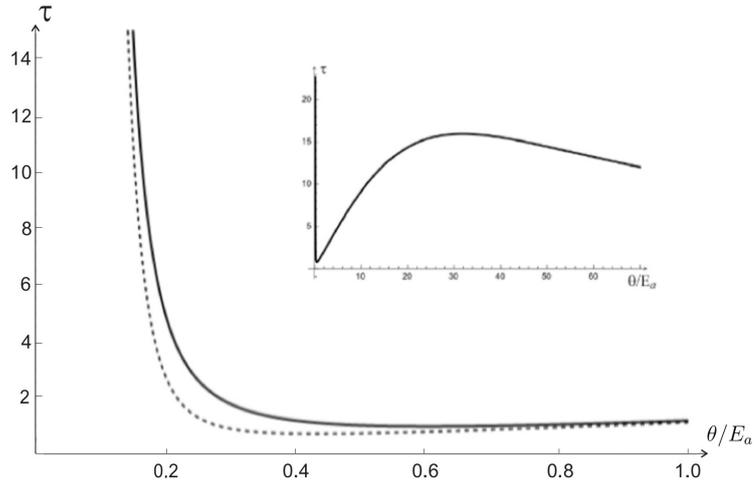


Рис. 3.12 — Время релаксации как функция безразмерной интенсивности шума  $\theta/E_a$  для потенциального профиля с одинаковыми размерами барьеров и ям  $a = b = 0,5l$ , где  $E_a$  — энергия активации для  $V = 0$  (сплошная линия). Время релаксации для потенциального профиля с широкими ямами  $a = 0,8l$  и узкими барьерами  $b = 0,2l$  показано на вставке 3.6(в) (пунктирная линия). Вставка: время релаксации как функция безразмерной интенсивности шума для больших значений  $\theta/E_a$

приведет к замедлению переключений. Таким образом, позитивная роль шума в этом случае возникает только при значениях интенсивности шума  $\theta < 0,3E_a$ .

В случае использования диэлектрических структур, обладающих особыми формами потенциальных барьеров и ям, позволяющих ускорить диффузию (т. е. немонотонное поведение  $D_{eff}(\theta)$  на Рисунке 3.6), время релаксации станет меньше. В частности, пунктирная кривая на Рисунке 3.6 относится к периодическому профилю потенциала с широкими ямами  $a = 0,8l$  и узкими барьерами  $b = 0,2l$ , в то время как сплошная кривая соответствует периодическому профилю потенциала с  $a = b = 0,5l$ . Поэтому выбор конкретного потенциального профиля порождает дополнительную возможность ускорения процесса релаксации.

### 3.4 Стохастическая модель мемристора на основе длины проводящего филамента

#### 3.4.1 Описание сосредоточенной стохастической модели

В этом разделе рассматривается новая стохастическая модель [A9], где переменной состояния выступает длина проводящего филамента или координата границы легированной области  $y$ . Предполагается, что мемристивное устройство длины  $L$  содержит две области: легированную и нелегированную с сопротивлениями  $R_{ON}$  и  $R_{OFF}$  соответственно, как было

показано на Рисунке 3.1. Легированная область может быть представлена в виде одной или нескольких проводящих нитей. В этом случае  $y$  – длина самой длинной нити накала.

Выбор переменной состояния обусловлен тем, что наиболее активная и наиболее важная часть диффундирующих частиц, ответственная за изменение мемристивности, находится вблизи границы проводящего филамента. Действительно, филамент является проводящей средой, поэтому электрическое поле действует на частицы внутри проводящего филамента гораздо слабее, чем на частицы на границе. Кроме того, диффузия внутри проводящего филамента не влияет на суммарную мемристивность устройства до тех пор, пока концентрация остается достаточно высокой, чтобы обеспечить низкое сопротивление. Снаружи проводящего филамента электрическое поле действует сильнее, но там гораздо меньше диффундирующих частиц. Поэтому далеко от границы не может произойти ничего важного, а основные изменения происходят именно вблизи точки  $x = y$ .

Важность движения диффузионных частиц вблизи границы между легированной и нелегированной областями была отмечена также в работе [175], где было показано, что стохастические процессы вблизи конца проводящей нити играют ключевую роль в динамике переключения мемристивных устройств.

Будем считать далее, что проводящий филамент состоит из одной части, т. е. имеет одну границу. Это предположение является некоторым упрощением, так как, согласно стохастической крупномасштабной модели, при некоторых значениях параметров филамент в процессе эволюции может состоять из двух частей (он растет с обеих сторон).

Для построения стохастического уравнения для границы проводящего филамента исходим из стохастической крупномасштабной модели, предполагая, что частицы на границе движутся аналогично другим диффузионным частицам. Запишем уравнение Фоккера—Планка для функции плотности вероятности  $P(y,t)$  координаты границы проводящего филамента  $y(t)$  непосредственно из (3.25), заменяя  $n(x,t)$  на  $P(y,t)$ ,  $x$  на  $y$ ,

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left[ P(y,t) \frac{\partial U_{eff}(y,V)}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} D_{eff}(y,V) \frac{\partial P(y,t)}{\partial y}, \quad (3.49)$$

где  $U_{eff}(y,V)$  и  $D_{eff}(y,V)$  – те же функции, что и для крупномасштабной модели (3.29).

Функция  $P(y,t)$ , в отличие от концентрации  $n(x,t)$  пропорциональна вероятности того, что граница проводящего филамента находится в момент времени  $t$  внутри интервала  $[y, y + \Delta y]$ , и уравнение (3.49) должно решаться с условиями равенства нулю вероятностного потока  $G(y,t)$  на границах  $y = 0$  и  $y = 1$ , так как значение  $y$  не может выходить за пределы интервала  $[0, L]$ :

$$\begin{aligned} G(0,t) &= G(L,t) = 0, \\ G(y,t) &= -P(y,t) \frac{\partial U_{eff}(y,V)}{\partial y} - D_{eff}(y,V) \frac{\partial P(y,t)}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Уравнение (3.49) соответствует стохастическому уравнению Ланжевена [87]:

$$\frac{dy}{dt} = - \frac{\partial U_{eff}(y,V)}{\partial y} + \xi(t) \quad (3.51)$$

с аддитивным белым гауссовским источником шума  $\xi(t)$ , имеющим нулевое среднее значение и интенсивность, равную  $2D_{eff}$ . Граничные условия (3.50) соответствуют потенциальным стенкам (или бесконечно высоким потенциальным барьерам) в точках  $y = 0$  и  $y = L$ .

Таким образом, новая модель дает в среднем ту же картину, что и динамическая модель, но позволяет на основе уравнения Ланжевена (3.51) и соответствующего уравнения Фоккера—Планка (3.49) получить информацию обо всех высших моментах случайного процесса  $y(t)$ . Кроме того, уравнение (3.49) позволяет определить временные характеристики случайного процесса  $y(t)$ , важные для эксперимента и влияющие на процесс резистивного переключения.

### 3.4.2 Индуцированные шумом явления в мемристивных системах

Анализ уравнения (3.49) с граничными условиями (3.50) показывает, что  $P(y,t)$  эволюционирует со временем к стационарному распределению Больцмана (если разность потенциалов  $V$  фиксирована):

$$P_{st}(y) = Ae^{-\frac{U_{eff}(y)}{D_{eff}}} = Ae^{\frac{v_{eff}}{D_{eff}}y}, \quad (3.52)$$

где  $A$  – нормировочный коэффициент. Это распределение имеет максимум вблизи минимума потенциального профиля. Он расположен в точке  $y = L$  для  $V > 0$  и  $y = 0$  для  $V < 0$ . Распределение сужается, когда интенсивность шума мала, и становится шире с увеличением интенсивности шума.

Для исследования процесса переключения необходимо найти нестационарное распределение  $P(y,t)$ . Уравнение (3.49) с линейным потенциалом достаточно простое и точное нестационарное распределение может быть получено аналитически. Запишем общее решение уравнения (3.49) в виде суммы двух членов

$$P(y,t) = P_{st}(y) + P_{nst}(y,t), \quad (3.53)$$

где  $P_{st}(y)$  – стационарная часть (3.52), удовлетворяющая граничному условию (3.50) и  $P_{nst}(y,t)$  – нестационарная часть с теми же граничными условиями, как и для  $P(y,t)$  (см. уравнение (3.50)).

Используя метод разделения переменных, описанный в Приложении Д, можно получить следующее точное выражение для нестационарной части в виде бесконечного ряда

$$P_{nst}(y,t) = e^{\frac{v_{eff}}{2D_{eff}}y} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \left[ A_n \sin\left(\pi n \frac{y}{L}\right) + B_n \cos\left(\pi n \frac{y}{L}\right) \right], \quad (3.54)$$

где

$$\lambda_n = \frac{D_{eff}}{4} L^2 [(2\pi n)^2 + \gamma^2], \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.55)$$

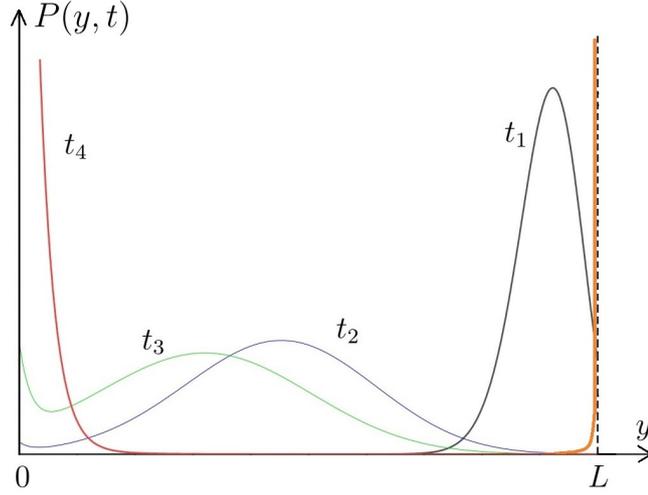


Рис. 3.13 — Нестационарное вероятностное распределение  $P(y, t)$  расположения границ проводящего филамента с начальным условием  $y_0 = L$  (соответствующее СРС) и постоянной разностью потенциалов  $V < 0$  в различные моменты времени  $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

и безразмерный параметр  $\gamma = v_{eff}L/D_{eff}$ . Множество констант  $A_n$  и  $B_n$  определяется из начальных условий:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L e^{-\frac{v_{eff}y}{2D_{eff}}} P_{nst}(y, 0) \sin\left(\frac{\pi ny}{L}\right), \quad (3.56)$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L e^{-\frac{v_{eff}y}{2D_{eff}}} P_{nst}(y, 0) \cos\left(\frac{\pi ny}{L}\right). \quad (3.57)$$

Возьмем в качестве начального условия  $P(y, 0) = \delta(y - y_0)$ . Это означает, что в момент времени  $t = 0$  граница проводящего филамента находится в точке  $y = y_0$ . Например, если  $y_0 = 0$  (начальный размер проводящего филамента равен нулю), тогда константы имеют вид

$$A_n = 2\pi n \frac{v_{eff}}{\lambda_n} L^2 \cdot (-1)^n e^{\gamma/2} - \frac{1}{e^\gamma} - 1 \quad (3.58)$$

$$B_n = \frac{2}{L} + \frac{v_{eff}^2}{\lambda_n} DL \cdot 1 - (-1)^n \frac{e^{\gamma/2}}{e^\gamma} - 1. \quad (3.59)$$

Эволюция нестационарного распределения (3.54) из начальной точки  $y_0 = L$ , когда к системе прикладывается постоянная разность потенциалов  $V = V_0 < 0$ , показана на Рисунке 3.13.

Видно, что со временем начальное распределение в виде дельта-функции начинает перемещаться от  $y = L$  к минимуму потенциального профиля при  $y = 0$  и расширяется. При этом второй пик формируется вблизи минимума. В течение некоторого времени эти две вершины сосуществуют. Позже первый пик исчезает, а второй эволюционирует к стационарному распределению (3.52). Появление двух сосуществующих пиков известно как переходная бимодальность, и было исследовано ранее для других физических систем [176; 177]. Для мемристивной системы это означает, что в процессе переключения граница филамента находится достаточно длительное время в областях расположения пиков. Это состояния СНС и СВС соответственно. При этом переход между этими состояниями происходит за относительно короткое, но случайное время.

Наблюдается индуцированный шумом эффект переходной бимодальности, который отсутствует в динамической системе. В последнем случае граница филамента движется с постоянной скоростью от начальной точки  $y = y_0$  до минимума в точке  $y = 0$ . Время переключения в этом случае определяется скоростью и расстоянием дрейфа  $\tau = (L - y_0)/v_{eff}$ . Флуктуации могут ускорить этот процесс. На первый взгляд, это показывает позитивную роль шума, однако временной интервал, когда происходит переход, становится случайным и в некоторых случаях флуктуации могут замедлить процесс переключения. Более того, иногда система может вернуться обратно после первого перехода. Это увеличивает вариативность устройства.

Для дальнейшего анализа явления переходной бимодальности было проведено экспериментальное исследование процесса переключения в мемристивного устройства со структурой Au(40 нм)/Zr(8 нм)/ZrO<sub>2</sub>(12% Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)(20 нм)/TiN(25 нм)/Ti(20 нм)/SiO<sub>2</sub>(800 нм)/Si.

На Рисунке 3.14 показаны четыре реализации процесса переключения из состояния СНС в состояние СВС при постоянной разности потенциалов  $V = -0,8$  В. Первоначально в состоянии СНС длина проводящего филамента максимальна ( $y = L$ ), а сопротивление низкое. При прикладывании отрицательной разности потенциалов, ток изначально высокий, но затем длина филамента начинает уменьшаться, так как граница филамента  $y(t)$  перемещается случайным образом к минимуму потенциального профиля, расположенному в точке  $y = 0$ . Следовательно, ток  $I(t)$  также является случайной функцией и соответствующим образом убывает от максимального значения до минимального. Типичные зависимости  $I(t)$ , измеренные в эксперименте, приведены на Рисунке 3.14. Это четыре разные реализации одного и того же случайного процесса, который описывается нестационарным распределением вероятностей (3.53) с некоторым начальным распределением  $P(y,0) = P_0(y)$ . При постоянной разности потенциалов  $V < 0$  распределение качественно будет выглядеть аналогично изображенному на Рисунке 3.13. Переходная бимодальность появляется во время этого процесса, когда два пика  $P(y,t)$  возникают одновременно. Как видно из Рисунка 3.14, процесс начинается со случайного дрейфа, направленного в сторону уменьшения тока. Это соответствует первой фазе эволюции плотности вероятности, когда первый пик расширяется и смещается к точке минимума. Далее видно, что ток иногда переключается на относительно короткое время на более низкое значение, соответствующее второму пику распределения вероятностей, который появляется на второй фазе эволюции (см. Рисунок 3.14 (а, б, в)). Однако время этого быстрого переключения является случайным и поэтому оно разное для разных реализаций. Это соответствует бистабильному распределению вероятностей с двумя пиками. Некоторые реализации  $I(t)$  показывают, что во время второй фазы ток может вернуться к значению, соответствующему расположению первого пика вероятностного распределения (см. Рисунок 3.14 (б, г)), до того как первый пик исчезнет, и система окончательно релаксирует в стационарное состояние (третья стадия эволюции).

Таким образом, измеренные реализации процесса переключения тока  $I(t)$  качественно подтверждают картину переходной бимодальности. Всего было измерено 112 реализаций процесса переключения из СВС в СНС при разности потенциалов  $V = 0,8$  В. Эволюция нестационарной плотности вероятности, полученная на основе этого ансамбля реализаций,

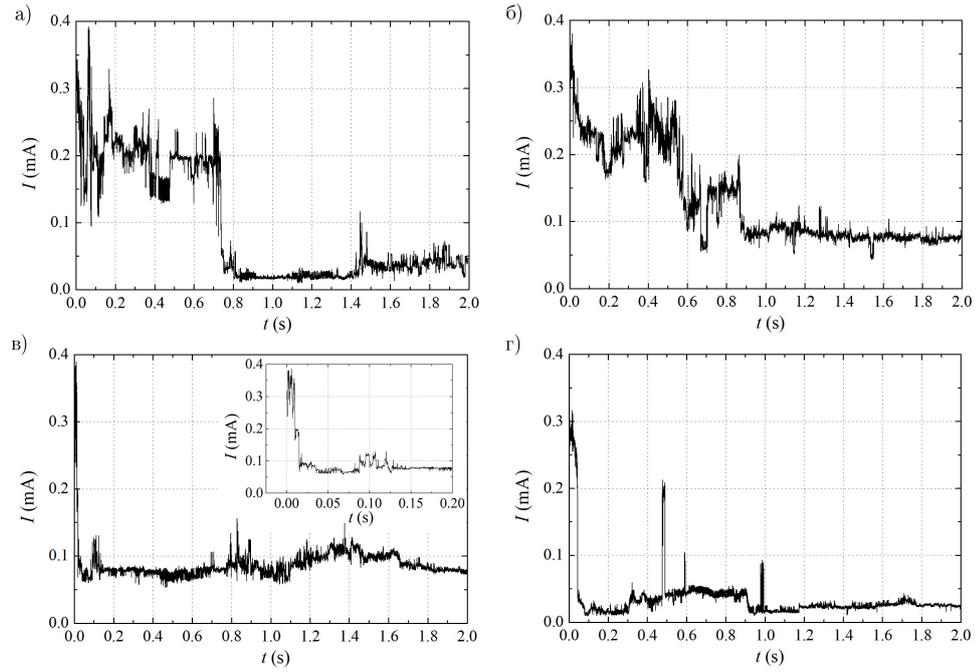


Рис. 3.14 — Экспериментальные реализации  $I(t)$  резистивного переключения из СНС в СВС (процесс RESET) при постоянной разности потенциалов  $V = -0,8$  В. Начальные значения тока  $I(0)$  для всех реализаций близки к  $0,3$  мкА и соответствуют СНС. Финальные значения, соответствующие СВС — ниже  $0,1$  мкА

показана на Рисунке 3.15. Можно видеть, что начальное распределение, соответствующее СНС в момент времени  $t_1 = 0$ , начинает смещаться в сторону более низких значений тока и расплываться (см. распределение при  $t_2 = 0,1$  с). В момент времени  $t_3 = 0,7$  с наблюдается бимодальное распределение с двумя пиками, а позже в момент времени  $t_4 = 1,1$  с распределение становится одномодальным с единственным пиком, соответствующим СВС. Видно, что экспериментальное распределение мемристорного тока изменяется аналогично теоретическому распределению вероятностей (3.54) границы  $y(t)$  проводящего филамента, показанному на Рисунке 3.13, и имеет два сосуществующих пика в течение некоторого интервала времени. Таким образом, теоретически выявленный эффект переходной бимодальности можно наблюдать в эксперименте.

Статистические свойства времени переключения могут быть более подробно исследованы методами, разработанными для времени первого достижения границы марковским процессом. Пусть  $y = y_0$  — начальное значение случайного процесса  $y(t)$ , подчиняющегося уравнению (3.51). Например, оно может соответствовать СНС, СВС или промежуточному состоянию. Случайный процесс  $y(t)$  впервые проходит значение  $y = y_1$  через время первого достижения, которое является случайной величиной. Момент  $n$ -го порядка времени первого достижения  $T_n(y_0)$  можно найти из обратного уравнения Фоккера-Планка [107]

$$\frac{K_2(y_0)}{2} \frac{d^2 T_n}{dy_0^2} + K_1(y_0) \frac{dT_n}{dy_0} = -nT_{n-1}, \quad (3.60)$$

где  $K_1(y_0)$  и  $K_2(y_0)$  — первые два кинетических коэффициента марковского случайного процесса  $y(t)$ . В частности, как следует из уравнения (3.60), среднее время первого достижения

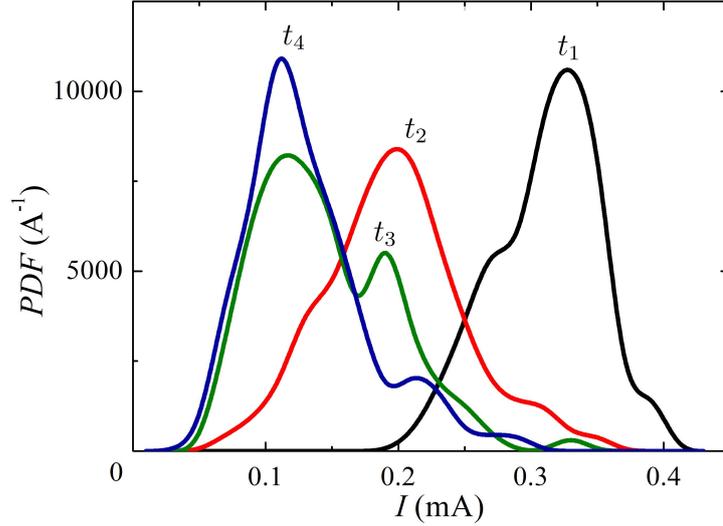


Рис. 3.15 — Нестационарное вероятностное распределение, полученное на основе 112 реализаций тока  $I(t)$  резистивного переключения из СНС в СВС при постоянной разности потенциалов  $V = -0,8$  В в разные моменты времени:  $t_1 = 0$  с,  $t_2 = 0,1$  с,  $t_3 = 0,7$  с и  $t_4 = 1,1$  с. Моменты времени  $t_1$  и  $t_4$  соответствуют СНС и СВС, а времена  $t_2$  и  $t_3$  принадлежат интервалу процесса переключения

границ определяется из решения уравнения

$$\frac{K_2(y_0)}{2} \frac{d^2 T_1}{dy_0^2} + K_1(y_0) \frac{dT_1}{dy_0} = -1, \quad (3.61)$$

а дисперсия времени первого достижения границ  $\text{Var}(y_0) = T_2(y_0) - T_1^2(y_0)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{K_2(y_0)}{2} \frac{d^2 \text{Var}}{dy_0^2} + K_1(y_0) \frac{d\text{Var}}{dy_0} = -K_2(y_0) \left( \frac{dT_1}{dy_0} \right)^2. \quad (3.62)$$

Для рассматриваемого УФП (3.49) кинетические коэффициенты будут иметь следующие значения

$$K_1(y_0) = v_{eff}, \quad K_2(y_0) = 2D_{eff}. \quad (3.63)$$

Поставим задачу о достижении границы  $y_1 > y_0$ . В этом случае из-за наличия отражающей границы в точке  $y = 0$  уравнения (3.61) и (3.62) должны быть решены со следующими граничными условиями

$$T_1'(0) = 0, \quad T_1(y_1) = 0, \quad \text{Var}'(0) = 0, \quad \text{Var}(y_1) = 0. \quad (3.64)$$

Подставляя уравнение (3.63) в уравнения (3.61) и (3.62) и принимая во внимание условия (3.64), приходим к следующим точным выражениям для среднего значения и дисперсии

времени первого достижения для процесса переключения из СВС в СНС

$$T_1(y_0) = \frac{y_1 - y_0}{v_{eff}} - \frac{D_{eff}}{v_{eff}^2} \left( e^{-\frac{v_{eff}}{D_{eff}} y_0} - e^{-\frac{v_{eff}}{D_{eff}} y_1} \right), \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_0) = \frac{D_{eff}}{v_{eff}^3} & \left\{ 2(y_1 - y_0) - \frac{D_{eff}}{v_{eff}} \left( e^{-2\frac{v_{eff}}{D_{eff}} y_0} - e^{-2\frac{v_{eff}}{D_{eff}} y_1} \right) \right. \\ & \left. + 4 \left[ \left( y_1 + \frac{D_{eff}}{v_{eff}} \right) e^{-\frac{v_{eff}}{D_{eff}} y_1} - \left( y_0 + \frac{D_{eff}}{v_{eff}} \right) e^{-\frac{v_{eff}}{D_{eff}} y_0} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

При переключении из СНС в СВС разность потенциалов  $V$  и значение  $v_{eff}$  имеют обратный знак, случайный дрейф идет в противоположном направлении, а  $y_1 < y_0$ . В этом случае можно использовать те же выражения (3.65) и (3.66), но нужно поменять местами  $y_1$  и  $y_0$ . Поэтому характеристики времени переключения для процессов SET и RESET одинаковы (или симметричны), если абсолютные значения всех параметров одинаковы. Экспериментально наблюдаемая асимметрия процессов переключения SET и RESET означает, что параметры для процессов SET и RESET должны быть разными. В рамках рассмотренной модели это объясняется различным распределением электрического поля слева и справа от границы филамента из-за разной проводимости сред внутри и снаружи филамента, что было исследовано в [178].

Зависимости среднего значения (3.65) и дисперсии (3.66) времени первого достижения от разности потенциалов  $V$  и обратной интенсивности флуктуаций  $\theta^{-1}$  при резистивном переключении из СВС с длиной проводящего филамента  $y_0 = L/2$  в СНС с  $y_1 = L$  изображены на Рисунке 3.16. Эти зависимости очень близки к прямым линиям в полулогарифмической шкале. В самом деле, точные выражения (3.65) и (3.66) могут быть аппроксимированы следующими асимптотическими зависимостями, нанесенными круглыми точками на Рисунке 3.16,

$$T_1\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\tau_0 L}{2 \ell} e^{\beta - \alpha}, \quad (3.67)$$

$$\text{Var}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{\tau_0 L}{2 \ell} e^{2(\beta - \alpha)}, \quad (3.68)$$

где  $\beta = E_a/\theta \gg 1$  и  $\alpha = BV/\theta \gg 1$ .

Линейные зависимости в полулогарифмическом масштабе для времен переключения SET и RESET были обнаружены теоретически и экспериментально в [145; 151; 159; 160; 179] для различных мемристивных структур.

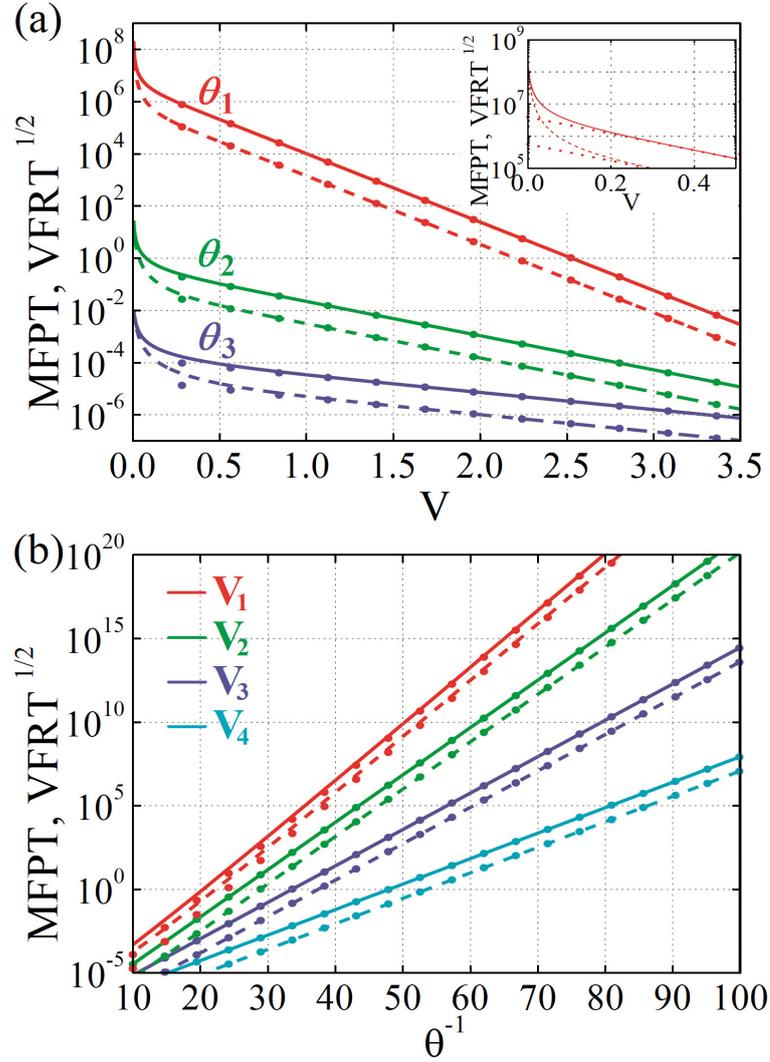


Рис. 3.16 — Среднее время первого достижения (3.65) (сплошная линия) и квадратный корень из дисперсии времени первого достижения (3.66) (пунктирная линия) для процесса переключения SET из СВС с  $y_0 = L/2$  в СНС с  $y_1 = L$  как функции: (а) разности потенциалов  $V$  для различных значений интенсивности флуктуаций,  $\theta_1 = 0.025$  эВ,  $\theta_2 = 0.05$  эВ,  $\theta_3 = 0.2$  эВ и (б) обратной интенсивности флуктуаций  $\theta^{-1}$  для разности потенциалов  $V_1 = 0.1$  В,  $V_2 = 1.0$  В,  $V_3 = 2.0$  В,  $V_4 = 3.0$  В. Круглые точки изображены согласно асимптотическим выражениям (3.67) и (3.68). Значения параметров:  $\tau_0 = 10^{-9}$  с и  $L/\ell = 20$ . Вставка: зависимость MFPT и VFRT от  $V$  при  $\theta_1$  для малых значений  $V$

### 3.5 Выводы по третьей главе

Проведено исследование двух макромоделей идеального мемристора с внешним гауссовым шумом. Для обоих случаев получены точные аналитические выражения для плотности вероятности сопротивления мемристора. Показано, что для управляемого зарядом мемристора форма вероятностного распределения сопротивления зависит от того, что прикладывается в качестве гауссова шума – напряжение или ток. Проанализированы различные шумовые воздействия в виде белого и цветного гауссова шума. На конкретном примере физически обоснованной экспоненциальной зависимости сопротивления от протекающего заряда анализировалось влияние среднего значения и интенсивности гауссова шума на переключения мемристора между двумя состояниями. Главным недостатком рассмотренной модели является неспособность обеспечить свойства реального мемристора: обнаружено отсутствие установившегося вероятностного распределения сопротивления мемристора.

Впервые установлено, что в стохастической модели мемристивной системы, в которой управляющим параметром выступает концентрация вакансий, время релаксации концентрации вакансий к стационарному состоянию демонстрирует немонотонную зависимость от интенсивности шума с характерным минимумом.

В стохастической модели мемристивной системы на основе длины филамента в качестве переменной состояния впервые аналитически обнаружено индуцированное шумом явление переходной бимодальности вероятностного распределения длины филамента. Рассматриваемая модель описывается довольно простыми уравнениями броуновской диффузии, не требует значительных вычислительных ресурсов для численного моделирования и позволяет в некоторых случаях получать точные аналитические решения.

## Заключение

Сформулируем кратко основные результаты диссертационного исследования.

1. Впервые получено и проанализировано точное аналитическое выражение для времени корреляции установившейся аномальной диффузии в форме полетов Леви с единичным индексом Леви ( $\alpha = 1$ ) в симметричном бистабильном потенциале четвертой степени, на основе которого проведена ревизия формулы Крамерса для темпа преодоления потенциального барьера броуновской частицей.
2. Впервые найдены точные аналитические соотношения для установившихся вероятностных распределений координаты частицы при полетах Леви с индексом ( $\alpha = 1$ ) в симметричном степенном потенциале вида  $U(x) \propto x^{2m}$  с одним устойчивым состоянием, подтвердившие их бимодальность. В предельном переходе к бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме результат стыкуется с ранее полученным в литературе.
3. Впервые найдено и подтверждено результатами численных расчетов асимптотическое выражение для спектральной плотности мощности координаты частицы при установившейся супердиффузии Леви в симметричных степенных потенциальных профилях для шума с произвольным индексом Леви  $\alpha$ .
4. Впервые выведено общее уравнение Колмогорова для совместной плотности вероятности координат частицы в двумерном потенциале произвольного вида при диффузии, вызванной статистически независимыми источниками белого шума. Проведено сравнение установившихся вероятностных характеристик броуновской диффузии и аномальной диффузии в форме полетов Леви в потенциале с радиальной симметрией.
5. Впервые исследована эволюция вероятностного распределения плотности биологической популяции, описываемой обобщенной моделью Мальтуса—Ферхюльста—Бернулли с флуктуациями объема жизненных ресурсов в форме белого негауссова шума с односторонним устойчивым распределением. Впервые обнаружена немонотонная релаксация средней плотности популяции к стационарному значению для шума с односторонним устойчивым распределением Леви—Смирнова.
6. На основе интегро-дифференциального уравнения Колмогорова—Феллера впервые получена точная формула для установившегося вероятностного распределения плотности биологической популяции, описываемой уравнением Ферхюльста с флуктуациями объема жизненных ресурсов в форме одностороннего пуассоновского белого шума, моделирующего быстрое уменьшение численности популяции в результате эпидемий или катастроф.
7. Впервые показано, что в генетической модели Хонглера при воздействии пуассоновской последовательности импульсов с экспоненциально распределенными амплитудами индуцированный шумом переход от унимодальности к бимодальности вероятностного распределения с увеличением средней частоты появления импуль-

сов происходит через тримодальную фазу, а прямой переход от унимодальности к тримодальности наблюдается при изменении среднего квадрата амплитуд импульсов.

8. Исследовано влияние коррелированных шумов на вероятностные свойства нелинейных динамических систем. Проанализировано, при каких условиях воздействие шума Орнштейна—Уленбека индуцирует мультимодальность стационарных состояний в фиксированных одноямыных степенных и экспоненциальных потенциалах. В частности, показан переход от унимодальности к бимодальности для фиксированных одноямыных потенциалов при увеличении показателя степени. Кроме того, изучено, что дополнительное воздействие симметричного марковского дихотомического шума может индуцировать динамическую мультимодальность в потенциалах четвертой степени.
9. Проведено исследование двух макромоделей идеального мемристора с внешним гауссовым шумом. Для обоих случаев получены точные аналитические выражения для плотности вероятности сопротивления мемристора. Показано, что для управляемого зарядом мемристора форма вероятностного распределения сопротивления зависит от того, что прикладывается в качестве гауссова шума – напряжение или ток. Проанализированы различные шумовые воздействия в виде белого и цветного гауссова шума. На конкретном примере физически обоснованной экспоненциальной зависимости сопротивления от протекающего заряда анализировалось влияние среднего значения и интенсивности гауссова шума на переключения мемристора между двумя состояниями. Главным недостатком рассмотренной модели является неспособность обеспечить свойства реального мемристора: обнаружено отсутствие установившегося вероятностного распределения сопротивления мемристора.
10. Впервые установлено, что в стохастической модели мемристивной системы, в которой управляющим параметром выступает концентрация вакансий, время релаксации концентрации вакансий к стационарному состоянию демонстрирует немонотонную зависимость от интенсивности шума с характерным минимумом.
11. В стохастической модели мемристивной системы на основе длины филамента в качестве переменной состояния впервые аналитически обнаружено индуцированное шумом явление переходной бимодальности вероятностного распределения длины филамента. Рассматриваемая модель описывается довольно простыми уравнениями броуновской диффузии, не требует значительных вычислительных ресурсов для численного моделирования и позволяет в некоторых случаях получать точные аналитические решения.

## Список литературы

- [1] Metzler, R. The random walk's guide to anomalous diffusion: A fractional dynamics approach / R. Metzler, J. Klafter // *Physics Reports*. — 2000. — Vol. 339. — P. 1.
- [2] Zaslavsky, G. M. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport / G. M. Zaslavsky // *Physics Reports*. — 2002. — Vol. 371. — P. 461.
- [3] Metzler, R. Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking / R. Metzler [et al.] // *Physical Chemistry Chemical Physics*. — 2014. — Vol. 16. — P. 24128.
- [4] Checkin, A. Fundamentals of Lévy flight processes / A. Checkin [et al.] // *Advances in Chemical Physics*. — 2006. — Vol. 133. — P. 439.
- [5] Dubkov, A. Lévy flight superdiffusion: an introduction / A. Dubkov, B. Spagnolo, V. Uchaikin // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2008. — Vol. 18. — P. 2649.
- [6] Mukherjee, S. Anomalous diffusion and Lévy walks distinguish active from inertial turbulence / S. Mukherjee [et al.] // *Physical Review Letters*. — 2021. — Vol. 12711. — P. 118001.
- [7] Checkin, A. Stationary states of non-linear oscillators driven by Lévy noise / A. Checkin [et al.] // *Chemical Physics*. — 2002. — Vol. 284. — P. 233.
- [8] Katori, H. Anomalous dynamics of a single ion in an optical lattice / H. Katori, S. Schlipf, H. Walther // *Physical Review Letters*. — 1997. — Vol. 79. — P. 2221.
- [9] Barthelemy, P. A Lévy flight for light / P. Barthelemy, J. Bertolotti, D. S. Wiersma // *Nature*. — 2008. — Vol. 453. — P. 495.
- [10] Raposo, E. P. Analytical solution for the Lévy-like steady-state distribution of intensities in random lasers / E. P. Raposo, A. S. L. Gomes // *Physical Review A*. — 2015. — Vol. 91. — P. 043827.
- [11] Mercadier, N. Lévy flights of photons in hot atomic vapours / N. Mercadier [et al.] // *Nature Physics*. — 2009. — Vol. 5. — P. 602.
- [12] Solomon, T. Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow / T. Solomon, E. Weeks, H. Swinney // *Physical Review Letters*. — 1993. — Vol. 71. — P. 3975.
- [13] Venkataramani, S. C. Lévy flights in fluid flows with no Kolmogorov–Arnold–Moser surfaces / S. C. Venkataramani, T. M. (Antonsen, E. Ott // *Physical Review Letters*. — 1997. — Vol. 78. — P. 3864.
- [14] Ditlevsen, P. D. Observation of  $\alpha$ -stable noise induced millennial climate changes from an ice-core record / P. D. Ditlevsen // *Geophysical Research Letters*. — 1999. — Vol. 26. — P. 1441.

- [15] Brockmann, D. The scaling laws of human travel / D. Brockmann, L. Hufnagel, T. Geisel // Nature. — 2006. — Vol. 439. — P. 462.
- [16] Gonzalez, M. C. Understanding individual human mobility patterns / M. C. Gonzalez, C. A. Hidalgo, A.-L. Barabasi // Nature. — 2008. — Vol. 453. — P. 779.
- [17] Dubkov, A. Generalized Wiener process and Kolmogorov's equation for diffusion induced by non-Gaussian noise source / A. Dubkov, B. Spagnolo // Fluctuation and Noise Letters. — 2005. — Vol. 5. — P. L267.
- [18] Denisov, S. I. Generalized Fokker-Planck equation: derivation and exact solutions / S. I. Denisov, W. Horsthemke, P. Hänggi // European Physical Journal B. — 2009. — Vol. 68. — P. 567.
- [19] Chechkin, A. Lévy flights in a steep potential well / A. Chechkin [et al.] // Journal of Statistical Physics. — 2004. — Vol. 115. — P. 1505.
- [20] Dybiec, B. Escape driven by  $\alpha$ -stable white noises / B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak, P. Hänggi // Physical Review E. — 2007. — Vol. 75. — P. 021109.
- [21] Denisov, S. I. Steady-state Lévy flights in a confined domain / S. I. Denisov, W. Horsthemke, P. Hänggi // Physical Review E. — 2008. — Vol. 77. — P. 061112.
- [22] Dubkov, A. Langevin approach to Lévy flights in fixed potentials: exact results for stationary probability distributions / A. Dubkov, B. Spagnolo // Acta Physica Polonica B. — 2007. — Vol. 38. — P. 1745.
- [23] Chechkin, A. Bifurcation, bimodality, and finite variance in confined Lévy flights / A. Chechkin [et al.] // Physical Review E. — 2003. — Vol. 67. — 010102(R).
- [24] Chechkin, A. Natural cutoff in Lévy flights caused by dissipative nonlinearity / A. Chechkin [et al.] // Physical Review E. — 2005. — Vol. 72. — P. 010101.
- [25] Chechkin, A. Barrier crossing of a Lévy flight / A. Chechkin [et al.] // Europhysics Letters. — 2007. — Vol. 72. — P. 348.
- [26] Bao, J.-D. Cancellation phenomenon of barrier escape driven by a non-Gaussian noise / J.-D. Bao [et al.] // Physical Review E. — 2005. — Vol. 72. — P. 051105.
- [27] Imkeller, P. Lévy flights: transitions and meta-stability / P. Imkeller, I. Pavlyukevich // Journal of Physics A. — 2006. — Vol. 39. — P. L237.
- [28] Padash, A. First-passage properties of asymmetric Lévy flights / A. Padash [et al.] // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2019. — Vol. 52. — P. 454004.
- [29] Padash, A. First passage time moments of asymmetric Lévy flights / A. Padash [et al.] // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. — 2020. — Vol. 53.
- [30] Dybiec, B. Levy stable noise-induced transitions: stochastic resonance, resonant activation and dynamic hysteresis / B. Dybiec, E. Gudowska-Nowak // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2009. — Vol. 2009. — P05004.

- [31] Zeng, L. Effects of Lévy noise in aperiodic stochastic resonance / L. Zeng, R. Bao, B. Xu // Journal of Physics A Mathematical and Theoretical. — 2007. — Vol. 40. — P. 7175.
- [32] Capała, K. Multimodal stationary states in symmetric single-well potentials driven by Cauchy noise / K. Capała, B. Dybiec // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2019. — Vol. 99. — P. 033206.
- [33] Ciesla, M. Multimodal stationary states under Cauchy noise / M. Ciesla, K. Capała, B. Dybiec // Physical Review E. — 2019. — Vol. 99. — P. 052118.
- [34] Dybiec, B. Levy noises: double stochastic resonance in a single-well potential / B. Dybiec // Physical Review E. — 2009. — Vol. 80. — P. 041111.
- [35] Ai, B. Competition between ac driving forces and Lévy flights in a nonthermal ratchet / B. Ai, Y. He // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. — 2010. — P. P04010.
- [36] Yang, X. Firefly algorithm, Lévy flights and global optimization / X. Yang // SGAI Conf. — 2009.
- [37] Ling, Y. Lévy flight trajectory-based whale optimization algorithm for global optimization / Y. Ling, Y. Zhou, Q. Luo // IEEE Access. — 2017. — Vol. 5. — P. 6168.
- [38] Sharma, H. Lévy flight artificial bee colony algorithm / H. Sharma [et al.] // International Journal of Systems Science. — 2016. — Vol. 47. — P. 2652.
- [39] Ewees, A. Improved seagull optimization algorithm using Lévy flight and mutation operator for feature selection / A. Ewees [et al.] // Neural Computing and Applications. — 2022. — Vol. 34. — P. 1.
- [40] Malakhov, A. N. Cumulative analysis of random non-Gaussian processes and their transformations / A. N. Malakhov // Soviet Radio. — 1978.
- [41] Dybiec, B. Lévy flights versus Lévy walks in bounded domains / B. Dybiec [et al.] // Physical Review E. — 2017. — Vol. 95. — P. 052102.
- [42] Chechkin, A. Barrier crossing driven by Lévy noise: universality and the role of noise intensity / A. Chechkin [et al.] // Physical Review E. — 2007. — Vol. 75. — P. 041101.
- [43] Darling, D. A. On occupation times for Markoff processes / D. A. Darling, M. Kac // Transactions of the American Mathematical Society. — 1957. — Vol. 84. — P. 444.
- [44] Medvedev, S. Exact expansion for the correlation function of an arbitrary stationary Markovian process / S. Medvedev // Izv. vuzov. Radiophysica. — 1977. — Vol. 20. — P. 1241.
- [45] Dubkov, A. A. The correlation time and the structure of the correlation functions of the nonlinear equilibrium Brownian movements in potential pits of arbitrary shape / A. A. Dubkov, A. N. Malahov, A. I. Saichev // Izv. vuzov. Radiophysica. — 2000. — Vol. 43. — P. 369.
- [46] Risken, H. The Fokker-Planck Equation / H. Risken. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1989. — 441 p.

- [47] Dubkov, A. Time characteristics of Lévy flights in a steep potential well / A. Dubkov, B. Spagnolo // *European Physical Journal Special Topics*. — 2013. — Vol. 216. — P. 31.
- [48] Gradshteyn, I. S. Table of integrals, series, and products / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. — Amsterdam : Elsevier, 2007. — 1220 p.
- [49] Agudov, N. Noise delayed decay of unstable states / N. Agudov // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 57. — P. 2618.
- [50] Agudov, N. Decay of unstable equilibrium and nonequilibrium states with inverse probability current taken into account / N. Agudov, A. Malakhov // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 60. — P. 6333.
- [51] Malakhov, A. Time scales of overdamped nonlinear Brownian motion in arbitrary potential profiles / A. Malakhov // *Chaos*. — 1997. — Vol. 7. — P. 488.
- [52] Agudov, N. V. Noise-enhanced stability of periodically driven metastable states / N. V. Agudov, B. Spagnolo // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 64. — 035102(R).
- [53] Agudov, N. V. Escape from a metastable state with fluctuating barrier / N. V. Agudov, A. A. Dubkov, B. Spagnolo // *Physica A*. — 2003. — Vol. 325. — P. 144.
- [54] Dubkov, A. A. Noise-enhanced stability in fluctuating metastable states / A. A. Dubkov, N. V. Agudov, B. Spagnolo // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 69. — P. 061103.
- [55] Valenti, D. Stabilization of quantum metastable states by dissipation / D. Valenti [et al.] // *Physical Review B*. — 2015. — Vol. 91. — P. 235412.
- [56] Chechkin, A. First passage and arrival time densities for Lévy flights and the failure of the method of images / A. Chechkin [et al.] // *Journal of Physics A Mathematical and General*. — 2003. — Vol. 36. — P. L537.
- [57] Sliusarenko, O. Stationary states in bistable system driven by Lévy noise / O. Sliusarenko [et al.] // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2013. — Vol. 216. — P. 133.
- [58] Kramers, H. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions / H. Kramers // *Physica*. — 1940. — Vol. 7. — P. 284.
- [59] Szczepaniec, K. Stationary states in two-dimensional systems driven by bivariate Lévy noises / K. Szczepaniec, B. Dybiec // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90. — P. 032128.
- [60] Valenti, D. Pattern formation and spatial correlation induced by the noise in two competing species / D. Valenti, A. Fiasconaro, B. Spagnolo // *Acta Physica Polonica B*. — 2004. — Vol. 35. — P. 1481.
- [61] Manjoo-Docrat, R. A spatio-stochastic model for the spread of infectious diseases / R. Manjoo-Docrat // *Journal of Theoretical Biology*. — 2022. — Vol. 533. — P. 110943.
- [62] Katriel, G. Stochastic discrete-time age-of-infection epidemic models / G. Katriel // *International Journal of Biomathematics*. — 2013. — Vol. 06. — P. 1250066.

- [63] Kolinichenko, A. P. Stochastic sensitivity analysis of patterns in population dynamics models / A. P. Kolinichenko, L. B. Ryashko // AIP Conference Proceedings. — 2022. — Vol. 2466. — P. 070008.
- [64] Bashkirtseva, I. Regular and chaotic variability caused by random disturbances in a predator–prey system with disease in predator / I. Bashkirtseva, T. Perevalova, L. Ryashko // Chaos, Solitons and Fractals. — 2022. — Vol. 163. — P. 112551.
- [65] Bashkirtseva, I. Analysis of stochastic dynamics in a multistable logistic-type epidemiological model / I. Bashkirtseva, L. Ryashko // The European Physical Journal Special Topics. — 2022. — P. 1.
- [66] Spagnolo, B. Noise-induced effects in population dynamics / B. Spagnolo [et al.] // Journal of Physics: Condensed Matter. — 2002. — Vol. 14. — P. 2247.
- [67] La Barbera, A. Spatio-temporal patterns in population dynamics / A. La Barbera, B. Spagnolo // Physica A. — 2002. — Vol. 314. — P. 120.
- [68] May, R. Simple mathematical models with very complicated dynamics / R. May // Nature. — 1976. — Vol. 261. — P. 459.
- [69] Lande, R. Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation / R. Lande, S. Engen, B. E. Saether. — Oxford : Oxford University Press, 2003. — 224 p.
- [70] Allen, L. J. S. An introduction to the stochastic process with applications to biology / L. J. S. Allen. — CRC Press, 2003. — 496 p.
- [71] Chesson, P. Stochastic population models / P. Chesson. — Springer, 1991. — 496 p.
- [72] Scheffer, M. Catastrophic shifts in ecosystems / M. Scheffer [et al.] // Nature. — 2001. — Vol. 413. — P. 591.
- [73] Blasius, B. Complex population dynamics: nonlinear modeling in ecology / B. Blasius, J. Kurths, L. Stone. — Singapore : World Scientific, 2007. — 257 p.
- [74] Bashkirtseva, I. A stochastic hierarchical population system: excitement, extinction and transition to chaos / I. Bashkirtseva, T. Perevalova, L. Ryashko // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 2021. — Vol. 31. — P. 2130043.
- [75] Roth, G. Pushed beyond the brink: allee effects, environmental stochasticity, and extinction / G. Roth, S. J. Schreiber // Journal of Biological Dynamics. — 2014. — Vol. 8. — P. 187.
- [76] Ciuchi, S. Self-regulation mechanism of an ecosystem in a non-Gaussian fluctuation regime / S. Ciuchi, F. de Pasquale, B. Spagnolo // Physical Review E. — 1996. — Vol. 54. — P. 706.
- [77] Eigen, M. The hypercycle: a principle of natural self-organization / M. Eigen, P. Schuster. — Berlin : Springer, 1979. — 98 p.
- [78] Ogata, H. Logistic equations in nonlinear systems / H. Ogata // Physical Review A. — 1983. — Vol. 28. — P. 2296.

- [79] Zhu, S. Steady-state analysis of a single-mode laser with correlations between additive and multiplicative noise / S. Zhu // *Physical Review A*. — 1993. — Vol. 47. — P. 2405.
- [80] Matis, J. H. Stochastic population models: a compartmental perspective / J. H. Matis, T. R. Kiffe. — Berlin : Springer-Verlag, 1984. — 216 p.
- [81] Eigen, M. Self-Organization of Matter and the Evolution of Biological Macromolecules / M. Eigen // *Naturwissenschaften*. — 1971. — T. 58. — C. 465.
- [82] Ai, B.-Q. Correlated noise in a logistic growth model / B.-Q. Ai [et al.] // *Physical Review E*. — 2003. — Vol. 67. — P. 022903.
- [83] Berdichevsky, V. Stochastic resonance in linear systems subject to multiplicative and additive noise / V. Berdichevsky, M. Gitterman // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 60. — P. 1494.
- [84] Góra, P. The logistic equation and a linear stochastic resonance / P. Góra // *Acta Physica Polonica B*. — 2004. — Vol. 35. — P. 1583.
- [85] Herman, R. A manner of characterizing the development of countries / R. Herman, E. W. Montroll // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1972. — Vol. 69. — P. 3019.
- [86] Montroll, E. W. Social dynamics and the quantifying of social forces / E. W. Montroll // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 1978. — Vol. 75. — P. 4633.
- [87] Risken, H. The Fokker-Planck equation: methods of solution and applications / H. Risken. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1984. — 472 p.
- [88] Sancho, J. M. Positivity requirements on fluctuating parameters / J. M. Sancho [et al.] // *Physica A*. — 1987. — Vol. 142. — P. 532.
- [89] Zygadło, R. Verhulst-type kinetics driven by white shot noise: Exact solution by direct averaging / R. Zygadło // *Physical Review E*. — 1993. — Vol. 47. — P. 106.
- [90] Horsthemke, W. Noise-induced transitions: theory and applications in physics, chemistry and biology / W. Horsthemke, R. Lefever. — Berlin : Springer-Verlag, 1984. — 338 p.
- [91] Zygadło, R. Kinetics of a Verhulst-type system with nonlinearly coupled noise / R. Zygadło // *Physical Review E*. — 1996. — Vol. 54. — P. 5964.
- [92] Zygadło, R. Power-law distribution as a result of asynchronous random switching between Malthus and Verhulst kinetics / R. Zygadło // *Physical Review E*. — 2008. — Vol. 77. — P. 021130.
- [93] Calisto, H. Exact probability distribution for the Bernoulli-Malthus-Verhulst model driven by a multiplicative colored noise / H. Calisto, M. Bologna // *Physical Review E*. — 2007. — Vol. 75. — 050103(R).
- [94] Aquino, G. An exact analytical solution for generalized growth models driven by a Markovian dichotomic noise / G. Aquino, M. Bologna, H. Calisto // *Europhysics Letters*. — 2010. — Vol. 89. — P. 50012.

- [95] Bologna, M. Effects on generalized growth models driven by a non-Poissonian dichotomic noise / M. Bologna, H. Calisto // *European Physical Journal B*. — 2011. — Vol. 83. — P. 409.
- [96] Klyatskin, V. I. Dynamic systems with parameter fluctuations of the telegraphic-process type / V. I. Klyatskin // *Radiophysics and Quantum Electronics*. — 1977. — Vol. 20. — P. 382.
- [97] Dubkov, A. Transient dynamics of Verhulst model with fluctuating saturation parameter / A. Dubkov // *Acta Physica Polonica B*. — 2012. — Vol. 43. — P. 935.
- [98] Feller, W. An introduction to probability theory and its applications / W. Feller. — New York : John Wiley, Sons, Inc., 1971. — 527 p.
- [99] Gnedenko, B. V. The theory of probability / B. V. Gnedenko. — Moscow : MIR Publishers, 1969. — 390 p.
- [100] Dubkov, A. Probability characteristics of nonlinear dynamical systems driven by *delta*-pulse noise / A. Dubkov, O. V. Rudenko, S. N. Gurbatov // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93. — P. 062125.
- [101] Cox, D. R. The virtual waiting time and related processes / D. R. Cox, V. Isham // *Advances in Applied Probability*. — 1986. — Vol. 18. — P. 558.
- [102] Rudenko, O. V. On exact solutions to the Kolmogorov–Feller equation / O. V. Rudenko, A. A. Dubkov, S. N. Gurbatov // *Doklady Mathematics*. — 2016. — Vol. 94. — P. 476.
- [103] Dubkov, A. Verhulst model with Lévy white noise excitation / A. Dubkov, B. Spagnolo // *European Physical Journal B*. — 2008. — Vol. 65. — P. 361.
- [104] Hongler, M.-O. Exact time dependent probability density for a nonlinear non-Markovian stochastic process / M.-O. Hongler // *Helvetica Physica Acta*. — 1979. — Vol. 52. — P. 280.
- [105] Chichigina, O. A. Stability in a system subject to noise with regulated periodicity / O. A. Chichigina [et al.] // *Physical Review E*. — 2011. — Vol. 84. — P. 021134.
- [106] Abramowitz, M. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables / M. Abramowitz, I. A. Stegun. — New York : Dover Publications, Inc., 1972. — 1046 p.
- [107] Gardiner, C. W. Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences / C. W. Gardiner. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1985. — 415 p.
- [108] Jacquet, Q. Time-dependent probability density functions and attractor structure in self-organised shear flows / Q. Jacquet, E.-J. Kim, R. Hollerbach // *Entropy*. — 2018. — Vol. 20. — P. 613.
- [109] Jung, P. Dynamical systems: a unified colored-noise approximation / P. Jung, P. Hänggi // *Physical Review A*. — 1987. — Vol. 35. — P. 4464.

- [110] Chechkin, A. Introduction to the theory of Lévy flights / A. Chechkin [et al.] // *Anom. Transp.* — 2008. — P. 129.
- [111] Dybiec, B. Stationary states in single-well potentials under symmetric Lévy noises / B. Dybiec, I. M. Sokolov, A. V. Chechkin // *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment.* — 2010. — P07008.
- [112] Calisto, H. Forced dichotomic diffusion in a viscous media / H. Calisto, M. Bologna, K. J. Chandía // *European Physical Journal B.* — 2017. — Vol. 90. — P. 24.
- [113] Strukov, D. The Missing memristor found / D. Strukov [et al.] // *Nature.* — 2008. — Vol. 453. — P. 80.
- [114] Zidan, M. A. The future of electronics based on memristive systems / M. A. Zidan, J. P. Strachan, W. D. Lu // *Nature Electronics.* — 2018. — Vol. 1. — P. 22.
- [115] Xia, Q. Memristive crossbar arrays for brain-inspired computing / Q. Xia, J. J. Yang // *Nature Materials.* — 2019. — Vol. 18. — P. 309.
- [116] Andreeva, N. V. Memristive logic design of multifunctional spiking neural network with unsupervised learning / N. V. Andreeva, E. A. Ryndin, M. I. Gerasimova // *Bio-NanoScience.* — 2020. — Vol. 10. — P. 824.
- [117] Prodromakis, T. Two centuries of memristors / T. Prodromakis, C. Toumazou, L. Chua // *Nature Materials.* — 2012. — Vol. 11. — P. 478—81.
- [118] Johnsen, G. K. An introduction to the memristor? A valuable circuit element in bioelectricity and bioimpedance / G. K. Johnsen // *Journal of Electrical Bioimpedance.* — 2012. — Vol. 3. — P. 20—8.
- [119] Waser, R. Nanoionics-based resistive switching memories / R. Waser, M. Aono // *Nature Materials.* — 2007. — Vol. 8. — P. 833.
- [120] Yang, J. J. Memristive devices for computing / J. J. Yang, D. B. Strukov, D. R. Stewart // *Nature Nanotechnology.* — 2013. — Vol. 8. — P. 13.
- [121] Ielmini, D. Resistive switching memories based on metal oxides: mechanisms, reliability and scaling / D. Ielmini // *Semiconductor Science and Technology.* — 2016. — Vol. 31. — P. 063002.
- [122] Choi, B. J. High-speed and low-energy nitride memristors / B. J. Choi [et al.] // *Advanced Functional Materials.* — 2016. — Vol. 26. — P. 5290.
- [123] Li, C. Analogue signal and image processing with large memristor crossbars / C. Li [et al.] // *Nature Electronics.* — 2018. — Vol. 1. — P. 52.
- [124] Yang, Y. Probing memristive switching in nanoionic devices / Y. Yang, R. Huang // *Nature Electronics.* — 2018. — Vol. 1. — P. 274—87.
- [125] Cai, F. A fully integrated reprogrammable memristor-CMOS system for efficient multiply-accumulate operations / F. Cai [et al.] // *Nature Electronics.* — 2012. — Vol. 2. — P. 290—9.

- [126] Marinella, M. J. Efficient reservoir computing with memristors / M. J. Marinella, S. Agarwal // *Nature Electronics*. — 2019. — Vol. 2. — P. 437—8.
- [127] Petrov, A. A. Mechanism of electron transport and bipolar resistive switching in lead oxide thin films / A. A. Petrov, N. V. Andreeva, A. S. Ivanov // *AIP Advances*. — 2018. — Vol. 8. — P. 105015.
- [128] Ryndin, E. Compact model for bipolar and multilevel resistive switching in metal-oxide memristors / E. Ryndin, N. Andreeva, V. Luchinin // *Micromachines*. — 2022. — Vol. 13. — P. 98.
- [129] Patterson, G. A. On the beneficial role of noise in resistive switching / G. A. Patterson, P. I. Fierens, D. F. Grosz // *Applied Physics Letters*. — 2013. — Vol. 103. — P. 074102.
- [130] Butusov, D. N. Semi-explicit composition methods in memcapacitor circuit simulation / D. N. Butusov [et al.] // *International Journal of Embedded and Real-Time Communication Systems*. — 2019. — Vol. 10. — P. 37.
- [131] Бутусов, Д. Н. Методы бифуркационного и рекуррентного анализа нелинейных динамических систем на примере мемристивной цепи / Д. Н. Бутусов [и др.] // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. — 2019. — Т. 19. — С. 126.
- [132] Chua, L. Memristor the missing circuit element / L. Chua // *IEEE Transactions on Circuit Theory*. — 1971. — Vol. 18. — P. 507.
- [133] Daniele, I. Resistive switching: from fundamentals of nanoionic redox processes to memristive device applications / I. Daniele, W. Rainer. — WILEY-VCH, 2016. — 784 p.
- [134] Mehonic, N. Silicon oxide (SiO<sub>x</sub>): a promising material for resistance switching? / N. Mehonic [et al.] // *Advanced Materials*. — 2018. — Vol. 2018. — P. 1801187.
- [135] Chua, L. Memristive devices and systems / L. Chua, S.-M. Kang // *Proceedings of the IEEE*. — 1976. — Vol. 64. — P. 209.
- [136] Chua, L. Five non-volatile memristor enigmas solved / L. Chua // *Applied Physics A*. — 2018. — Vol. 124. — P. 563.
- [137] Joglekar, Y. The elusive memristor: properties of basic electrical circuits / Y. Joglekar, S. Wolf // *European Journal of Physics*. — 2008. — Vol. 30. — P. 661.
- [138] Shang, Y. Analysis and modeling of internal state variables for dynamic effects of non-volatile memory devices / Y. Shang, W. Fei, H. Yu // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*. — 2012. — Vol. 59. — P. 1906.
- [139] Linn, E. Applicability of well-established memristive models for simulations of resistive switching devices / E. Linn [et al.] // *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*. — 2014. — Vol. 61. — P. 2402.
- [140] Ielmini, D. Modeling the universal Set/Reset characteristics of bipolar RRAM by field and temperature-driven filament growth / D. Ielmini // *IEEE Transactions on Electron Devices*. — 2011. — Vol. 58. — P. 4309.

- [141] Borghetti, J. Electrical transport and thermometry of electroformed titanium dioxide memristive switches / J. Borghetti [et al.] // *Journal of Applied Physics*. — 2009. — Vol. 106. — P. 124504.
- [142] Pickett, M. Switching dynamics in titanium dioxide memristive devices / M. Pickett [et al.] // *Journal of Applied Physics*. — 2009. — Vol. 106. — P. 074508.
- [143] Kim, S. Physical electro-thermal model of resistive switching in bi-layered resistance-change memory / S. Kim [et al.] // *Scientific Reports*. — 2013. — Vol. 3. — P. 1680.
- [144] Kim, S. Comprehensive Physical Model of Dynamic Resistive Switching in an Oxide Memristor / S. Kim, S. Choi, W. Lu // *ACS nano*. — 2014. — Vol. 8. — P. 2369.
- [145] Marchewka, A. Nanoionic resistive switching memories: on the physical nature of the dynamic reset process / A. Marchewka [et al.] // *Advanced Electronic Materials*. — 2016. — Vol. 1. — P. 1500233.
- [146] Karpov, V. G. Thermodynamics of phase transitions and bipolar filamentary switching in resistive random-access memory / V. G. Karpov [et al.] // *Physical Review Applied*. — 2017. — Vol. 8. — P. 024028.
- [147] Malakhov, A. N. The kinetics of liquid-gas phase transitions of a Van der Waals substance with fluctuations taken into account / A. N. Malakhov, N. V. Agudov // *Chaos*. — 1994. — Vol. 4. — P. 665.
- [148] Valenti, D. Switching times in long-overlap Josephson junctions subject to thermal fluctuations and non-Gaussian noise sources / D. Valenti, C. Guarcello, B. Spagnolo // *Physical Review B*. — 2014. — Vol. 89. — P. 214510.
- [149] Carollo, A. Uhlmann curvature in dissipative phase transitions / A. Carollo, B. Spagnolo, D. Valenti // *Scientific Reports*. — 2018. — Vol. 8. — P. 9852.
- [150] Carollo, A. Symmetric logarithmic derivative of fermionic Gaussian states / A. Carollo, B. Spagnolo, D. Valenti // *Entropy*. — 2018. — Vol. 20. — P. 485.
- [151] Naous, R. Stochasticity modeling in memristors / R. Naous, M. Al-Shedivat, K. Salama // *IEEE Transactions on Nanotechnology*. — 2016. — Vol. 15. — P. 1.
- [152] Stotland, A. Stochastic memory: memory enhancement due to noise / A. Stotland, M. Di Ventra // *Physical Review E*. — 2012. — Vol. 85. — P. 011116.
- [153] Jiang, H. e. a. A novel true random number generator based on a stochastic diffusive memristor / H. e. a. Jiang // *Nature Communications*. — 2017. — Vol. 8. — P. 882.
- [154] Tang, S. Shock waves and commutation speed of memristor / S. Tang [et al.] // *Physical Review X*. — 2016. — Vol. 6. — P. 011028.
- [155] Rozenberg, M. Mechanism for bipolar resistive switching in transition metal oxides / M. Rozenberg [et al.] // *Physical Review B*. — 2010. — Vol. 81. — P. 115101.

- [156] Slipko, V. Changing the state of a memristive system with white noise / V. Slipko, Y. Pershin, M. Di Ventra // *Physical Review E*. — 2013. — Vol. 87. — P. 042103.
- [157] Jo, S. Programmable resistance switching in nanoscale two-terminal devices / S. Jo, K.-H. Kim, W. Lu // *Nano Letters*. — 2009. — Vol. 9. — P. 496.
- [158] Jiang, H. A novel true random number generator based on a stochastic diffusive memristor / H. Jiang [et al.] // *Nature Communications*. — 2017. — Vol. 8. — P. 882.
- [159] Medeiros-Ribeiro, G. Lognormal switching times for titanium dioxide bipolar memristors: Origin and resolution / G. Medeiros-Ribeiro [et al.] // *Nanotechnology*. — 2011. — Vol. 22. — P. 095702.
- [160] Kim, W. Impact of oxygen exchange reaction at the ohmic interface in Ta<sub>2</sub>O<sub>5</sub>-based ReRAM devices / W. Kim [et al.] // *Nanoscale*. — 2016. — Vol. 8. — P. 17774.
- [161] Ambrosi, E. Impact of oxide and electrode materials on the switching characteristics of oxide ReRAM devices / E. Ambrosi [et al.] // *Faraday Discuss.* — 2019. — Vol. 213. — P. 87.
- [162] Stratonovich, R. L. Conditional Markov processes and their application to the theory of optimal control / R. L. Stratonovich. — New York : Elsevier, 1968. — 368 p.
- [163] Reinmann, P. Giant acceleration of free diffusion by use of tilted periodic potentials / P. Reinmann [et al.]. — 2001.
- [164] Linder, B. Optimal diffusive transport in a tilted periodic potential / B. Linder, M. Kotstur, L. Shimansky-Geier. — 2001.
- [165] Ambrosi, E. Impact of oxide and electrode materials on the switching characteristics of oxide ReRAM devices / E. Ambrosi [et al.] // *Faraday Discussions*. — 2018. — Vol. 213. — P. 6.
- [166] Costantini, G. Threshold diffusion in a tilted washboard potential / G. Costantini, F. Marchesoni // *Europhysics Letters*. — 1999. — Vol. 48. — P. 491.
- [167] Reinmann, P. Diffusion in tilted periodic potentials: enhancement, universality, and scaling / P. Reinmann [et al.]. — 2002.
- [168] Agudov, N. Acceleration of diffusion in subcritically tilted periodic potentials / N. Agudov, A. Safonov // *Fluctuation and Noise Letters*. — 2005. — Vol. 5. — P. L283.
- [169] Filatov, D. Conductive atomic force microscopy study of the resistive switching in yttria-stabilized zirconia films with Au nanoparticles / D. Filatov [et al.] // *Scanning*. — 2018. — Vol. 2018. — P. 5489596.
- [170] Larentis, S. Resistive switching by voltage-driven ion migration in bipolar RRAM – Part II: Modeling / S. Larentis [et al.] // *IEEE Transactions on Electron Devices*. — 2012. — Vol. 59. — P. 2468.

- [171] Tikhov, S. Electrophysical characteristics of multilayer memristive nanostructures based on yttrium-stabilized zirconium dioxide and tantalum oxide / S. Tikhov [et al.] // *Technical Physics*. — 2020. — Vol. 90. — P. 298.
- [172] Mikhaylov, A. Field- and irradiation-induced phenomena in memristive nanomaterials / A. Mikhaylov [et al.] // *Physica Status Solidi*. — 2016. — Vol. 13. — P. 870.
- [173] Ascoli, A. History erase effect in a non-volatile memristor / A. Ascoli [et al.] // *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. — 2016. — Vol. 63. — P. 389.
- [174] Tetzlaff, R. Memristors and memristive systems / R. Tetzlaff. — New York : Springer, 2014. — 409 p.
- [175] Yi, W. Quantized conductance coincides with state instability and excess noise in tantalum oxide memristors / W. Yi [et al.] // *Nature Communications*. — 2016. — Vol. 7. — P. 11142.
- [176] Agudov, N. Transient bimodality of nonequilibrium states in monostable systems with noise / N. Agudov, R. Devyataykin, A. Malakhov // *Radiophysics and Quantum Electronics*. — 1999. — Vol. 42. — P. 902.
- [177] Broggi, G. Transient bimodality in optically bistable systems / G. Broggi, L. Lugiato, A. Colombo // *Physical Review A*. — 1985. — Vol. 32. — P. 2803.
- [178] Strukov, D. B. Exponential ionic drift: fast switching and low volatility of thin-film memristors / D. B. Strukov, R. S. Williams // *Applied Physics A*. — 2009. — Vol. 94. — P. 515.
- [179] Jo, S. Programmable resistance switching in nanoscale two-terminal devices / S. Jo, K.-H. Kim, W. Lu // *Nano Letters*. — 2009. — Vol. 9. — P. 496.
- [180] Dubkov, A. Stationary probability characteristics of superdiffusion / A. Dubkov, B. Spagnolo // *Modern Problems of Statistical Physics*. — 2006. — Vol. 5. — P. 55.
- [181] Furutsu, K. On the theory of radio wave propagation over inhomogenous Earth / K. Furutsu // *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*. — 1963. — Vol. 67. — P. 303.
- [182] Novikov, E. A. Functionals and the random-force method in turbulence theory / E. A. Novikov // *Soviet Physics JETP*. — 1965. — Vol. 20. — P. 1290.
- [183] Kłosek-Dygas, M. M. Uniform asymptotic expansions in dynamical systems driven by colored noise / M. M. Kłosek-Dygas, B. J. Matkowsky, Z. Schuss // *Physical Review A*. — 1988. — Vol. 38. — P. 2605.
- [184] Shapiro, V. “Formulae of differentiation” and their use for solving stochastic equations / V. Shapiro, V. Loginov // *Physica A*. — 1978. — Vol. 91. — P. 563.

## Публикации автора по теме диссертации

- [A1] Dubkov, A. A. Transient and stationary characteristics of Malthus–Verhulst–Bernoulli model with non-Gaussian fluctuating parameters / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 89. — P. 052146.
- [A2] Dubkov, A. A. Time characteristics of one-dimensional and two-dimensional stationary Lévy flights in different potential profiles / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // *IEEE 2015 International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF)*. — 2015.
- [A3] Dubkov, A. A. Features of barrier crossing event for Lévy flights / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // *Europhysics Letters*. — 2016. — Vol. 113. — P. 30009.
- [A4] Kharcheva, A. A. Spectral characteristics of steady-state Lévy flights in confinement potential profiles / A. A. Kharcheva [et al.] // *JSTAT: Theory and Experiment*. — 2016. — Vol. 2016. — P. 054039.
- [A5] Dubkov, A. A. Exact results for steady-state probability characteristics of Verhulst and Hongler models with multiplicative Poisson white noise / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // *The European Physical Journal B*. — 2019. — Vol. 92. — P. 222.
- [A6] Kharcheva, A. A. Probabilistic analysis of two models of ideal memristor with external noise / A. A. Kharcheva, A. A. Dubkov, B. Spagnolo // *IEEE 2019 International Conference on Noise and Fluctuations (ICNF)*. — 2019.
- [A7] Agudov, N. V. Nonstationary distributions and relaxation times in a stochastic model of memristor / N. V. Agudov [et al.] // *JSTAT: Theory and Experiment*. — 2020. — Vol. 2020. — P. 024003.
- [A8] Dubkov, A. A. Statistics of residence time for Lévy flights in unstable parabolic potentials / A. A. Dubkov [et al.] // *Physical Review E*. — 2020. — Vol. 102. — P. 042142.
- [A9] Agudov, N. V. Stochastic model of memristor based on the length of conductive region / N. V. Agudov [et al.] // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2021. — Vol. 150. — P. 111131.
- [A10] Харчева, А. А. Эволюция моментных и вероятностных характеристик модели Мальтуса–Ферхюльста–Бернулли под воздействием белых и цветных шумов / А. А. Харчева, А. А. Дубков // *Труды XVII научной конференции по радиофизике*. — 2013. — С. 286.
- [A11] Харчева, А. А. Эволюция моментных и вероятностных характеристик модели Мальтуса–Ферхюльста–Бернулли при воздействии негауссовых цветных шумов / А. А. Харчева // *Сборник научных статей и тезисов исследовательских работ “Российских Чтений-конкурса памяти нижегородских ученых”*. — 2013. — С. 231.
- [A12] Dubkov, A. A. Effect of potential barrier on correlation characteristics of steady-state Lévy flights in bistable potential / A. A. Dubkov, A. A. Kharcheva // *Abstracts International Conference on Statistical Physics SigmaPhi2014*. — 2014. — P. 76.

- [A13] Kharcheva, A. A. The correlation time of stationary superdiffusion in the form of Lévy flights in bistable symmetric quartic potential / A. A. Kharcheva // Abstracts 27th Marian Smoluchowski Symposium on Statistical Physics. — 2014. — P. 29.
- [A14] Харчева, А. А. Влияние потенциального барьера на корреляционные характеристики полетов Леви в бистабильном симметричном потенциале / А. А. Харчева, А. А. Дубков // Труды XVIII научной конференции по радиофизике. — 2014. — С. 277.
- [A15] Харчева, А. А. Переходная динамика модели Бернулли для различных видов негауссовых шумовых воздействий / А. А. Харчева, А. А. Дубков // Сборник тезисов 19-й Сессии молодых ученых. — 2014. — С. 187.
- [A16] Харчева, А. А. Сравнительные вероятностные характеристики диффузионного движения в двумерных потенциалах / А. А. Харчева, А. А. Дубков // Труды XIX научной конференции по радиофизике, посв. 70-летию радиофизического факультета. — 2015. — С. 264.
- [A17] Харчева, А. А. Время корреляции установившихся полетов Леви в бистабильном симметричном потенциале / А. А. Харчева, А. А. Дубков // XX Нижегородская сессия молодых ученых. Естественные, математические науки: материалы докладов. — 2015. — С. 202.
- [A18] Харчева, А. А. Вероятностные и спектральные характеристики установившихся полетов Леви в бесконечно глубокой прямоугольной потенциальной яме / А. А. Харчева, А. А. Дубков // Труды XX научной конференции по радиофизике, посв. 110-летию со дня рожд. Г.С. Горелика. — 2016. — С. 282.
- [A19] Kharcheva, A. A. Multistability in nonlinear systems with colored noise and applicability of UCNA / A. A. Kharcheva [et al.] // Book of Abstracts FisMat 2019. — 2019. — P. 24.
- [A20] Kharcheva, A. A. Probabilistic analysis of ideal memristor models under Gaussian noise / A. A. Kharcheva, A. A. Dubkov, B. Spagnolo // Труды XXIII научной конференции по радиофизике. — 2019. — С. 493.
- [A21] Харчева, А. А. Мультистабильность в нелинейных динамических системах, вызванная воздействием цветных шумов / А. А. Харчева, А. А. Дубков, Б. Дыбиец // Труды XIV научной конференции по радиофизике. — 2020. — С. 394.

## Приложение А

### Метод решения неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка при вычислении времени корреляции в установившемся состоянии

Требуется найти решение следующего неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{d^3\varphi}{dk^3} + a^2\frac{d\varphi}{dk} - \beta_1\varphi = \frac{1}{k\gamma} \frac{d\vartheta_{st}(k)}{dk}, \quad (\text{A.1})$$

где  $\beta_1 = D_1/\gamma$  и установившаяся характеристическая функция  $\vartheta_{st}(k)$  в правой части уравнения была недавно найдена в [57] и задается выражением (1.73).

Для случая  $k > 0$  решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (A.1), ищется в виде  $\varphi(k) = Ce^{zk}$ . В таком случае уравнению (A.1) соответствует характеристическое уравнение

$$z^3 + a^2z - \beta_1 = 0,$$

имеющее три корня: два комплексных  $z = -(p - q)/2 + i\sqrt{3}(p + q)/2$  и  $z^*$  и один действительный  $z_3 = p - q$ , где

$$p = \left( \beta_1/2 + \sqrt{(a^2/3)^3 + (\beta_1/(2))^2} \right)^{1/3},$$

$$q = \left( \sqrt{(a^2/3)^3 + (\beta_1/(2))^2} - \beta_1/(2) \right)^{1/3}, \quad p > q.$$

Тогда решение однородного дифференциального уравнения, соответствующего уравнению (A.1), имеет вид

$$\varphi_{oo} = C_1e^{zk} + C_2e^{z^*k} + C_3e^{z_3k}. \quad (\text{A.2})$$

Обозначим через  $D$  оператор дифференцирования, т.е.  $D = \frac{d}{dx}$ . Тогда с учетом задания установившейся характеристической функции (1.73) уравнение (A.1) запишется в операторном виде как

$$(D^3 + a^2D - \beta_1)\varphi = \frac{A}{k} (e^{z^*k} - e^{zk}), \quad (\text{A.3})$$

где введено обозначение  $A = |z|^2/(\gamma(z - z^*))$ .

Уравнение (A.3) можно переписать в виде

$$F(D)\varphi = f(k),$$

где  $F(D) = D^3 + a^2D - \beta_1$  – операторный многочлен.

Применяя к уравнению (A.3) обратный оператор  $\frac{1}{F(D)}$ , приходим к

$$\varphi_{pi}(k) = \frac{1}{F(D)} f(k).$$

Пользуясь свойствами обратного оператора, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{pi}(k) &= \frac{1}{D^3 + a^2 D - \beta_1} \frac{A}{k} (e^{z^*k} - e^{zk}) \\ &= \frac{1}{(D-z)(D-z^*)(D-z_3)} \frac{A}{k} (e^{z^*k} - e^{zk}) \\ &= \frac{1}{(D-z)(D-z_3)} A e^{z^*k} \frac{1}{D} \frac{1}{k} - \frac{1}{(D-z^*)(D-z_3)} A e^{zk} \frac{1}{D} \frac{1}{k} \\ &= \frac{A}{z-z_3} \left[ \frac{1}{D-z} - \frac{1}{D-z_3} \right] e^{z^*k} \ln k - \frac{A}{z^*-z_3} \left[ \frac{1}{D-z^*} - \frac{1}{D-z_3} \right] e^{zk} \ln k \\ &= \frac{A}{z-z_3} e^{zk} \int_0^k e^{(z^*-z)y} \ln y dy - \frac{A}{z^*-z_3} e^{z^*k} \int_0^k e^{(z-z^*)y} \ln y dy \\ &\quad - \frac{A}{z-z_3} e^{z_3k} \int_0^k e^{(z^*-z_3)y} \ln y dy + \frac{A}{z^*-z_3} e^{z_3k} \int_0^k e^{(z-z_3)y} \ln y dy. \end{aligned}$$

Окончательно, общее решение уравнения (A.3) запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi(k) &= C_1 e^{zk} + C_2 e^{z^*k} + C_3 e^{z_3k} + \frac{A}{z-z_3} e^{zk} \int_0^k e^{(z^*-z)y} \ln y dy \\ &\quad - \frac{A}{z^*-z_3} e^{z^*k} \int_0^k e^{(z-z^*)y} \ln y dy - \frac{A}{z-z_3} e^{z_3k} \int_0^k e^{(z^*-z_3)y} \ln y dy \\ &\quad + \frac{A}{z^*-z_3} e^{z_3k} \int_0^k e^{(z-z_3)y} \ln y dy. \end{aligned} \quad (A.4)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$  в (A.4) воспользуемся, в первую очередь, условием, вытекающим из свойств преобразования Фурье,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(k) = 0.$$

В силу того, что  $\operatorname{Re} z < 0$  и  $\operatorname{Re} z^* < 0$ , для первых двух слагаемых (A.4) имеем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (C_1 e^{zk} + C_2 e^{z^*k}) = 0.$$

Применяя дважды правило Лопиталья для четвертого и пятого слагаемых (A.4), легко показать, что

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{zk} \int_0^k e^{(z^*-z)y} \ln y dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_0^k e^{(z^*-z)y} \ln y dy}{e^{-zk}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{(z^*-z)k} \ln k}{-z e^{-zk}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{-z e^{-z^*k}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|^2 k e^{-z^*k}} = 0, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e^{z^*k} \int_0^k e^{(z-z^*)y} \ln y dy &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\int_0^k e^{(z-z^*)y} \ln y dy}{e^{-z^*k}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e^{(z-z^*)k} \ln k}{-z^* e^{-z^*k}} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{-z^* e^{-zk}} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|z|^2 k e^{-zk}} = 0. \end{aligned}$$

Тогда из (A.4) получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{z_3 k} \left( C_3 - \frac{A}{z - z_3} \int_0^k e^{(z^* - z_3)y} \ln y \, dy + \frac{A}{z^* - z_3} \int_0^k e^{(z - z_3)y} \ln y \, dy \right) = 0$$

и находим коэффициент  $C_3$

$$C_3 = \frac{A}{z - z_3} \int_0^\infty e^{(z^* - z_3)y} \ln y \, dy - \frac{A}{z^* - z_3} \int_0^\infty e^{(z - z_3)y} \ln y \, dy.$$

Тогда значение первой производной функции  $\varphi$  в нуле можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= C_1 z + C_2 z^* - \frac{A z_3}{z^* - z_3} \int_0^\infty e^{(z - z_3)y} \ln y \, dy \\ &\quad + \frac{A z_3}{z - z_3} \int_0^\infty e^{(z^* - z_3)y} \ln y \, dy. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Неизвестные коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  в уравнении (A.5) могут быть подсчитаны из условий  $\varphi(0) = 0$  и  $\varphi''(0) = 0$ , вытекающих из нечетности функции  $\varphi(k)$  (см. (1.37)). Окончательно приходим к

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \frac{A(z - z_3)}{z + z^*} \int_0^\infty e^{(z - z_3)y} \ln y \, dy - \frac{A(z^* - z_3)}{z + z^*} \int_0^\infty e^{(z^* - z_3)y} \ln y \, dy \\ &= \frac{A}{z + z^*} \left[ \int_0^\infty \ln y \frac{d}{dy} e^{(z - z_3)y} dy - \int_0^\infty \ln y \frac{d}{dy} e^{(z^* - z_3)y} dy \right] \\ &= \frac{A}{z + z^*} \left[ \ln y [e^{(z - z_3)y} - e^{(z^* - z_3)y}] \Big|_0^\infty - \int_0^\infty (e^{zy} - e^{z^*y}) e^{-z_3 y} \frac{dy}{y} \right] \\ &= -\frac{2i|z|^2}{\gamma(z^2 - z^{*2})} \int_0^\infty (e^{zy} - e^{z^*y}) e^{-z_3 y} \frac{dy}{y}. \end{aligned}$$

Используя выражения для переменных  $z$ ,  $z^*$  и  $z_3$  через параметры  $p$  и  $q$  и принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} |z|^2 &= p^2 + pq + q^2, \\ z^2 - z^{*2} &= -i\sqrt{3}(p^2 - q^2), \end{aligned}$$

приходим к

$$\varphi'(0) = \frac{2}{\sqrt{3}\gamma} \frac{p^2 + pq + q^2}{p^2 - q^2} \int_0^\infty e^{-3(p-q)y/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}(p+q)y \frac{dy}{y}. \quad (\text{A.6})$$

Таким образом, требуется вычислить интеграл вида

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx,$$

после дифференцирования которого по параметру  $\beta$  имеем

$$I'_\beta(\alpha, \beta) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \cos \beta x \, dx = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^\infty e^{-\alpha x} e^{i\beta x} dx \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\alpha - i\beta} \right\} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Тогда

$$I(\alpha, \beta) = \int \frac{\alpha d\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \int \frac{d(\beta/\alpha)}{1 + (\beta/\alpha)^2} = \arctan \frac{\beta}{\alpha} + C(\alpha).$$

Учтем, что  $I(\alpha, 0) = 0 = C(\alpha)$ . Следовательно,

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \arctan \frac{\beta}{\alpha}.$$

В обозначениях данной работы:  $\alpha = 3(p - q)/2$ ,  $\beta = \sqrt{3}(p + q)/2$ .

Тогда первая производная функции  $\varphi(k)$  в нуле равна

$$\varphi'(0) = \frac{2}{\sqrt{3}\gamma} \frac{p^2 + pq + q^2}{p^2 - q^2} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{p + q}{p - q}.$$

## Приложение Б

### Модификация формул для установившегося вероятностного распределения в симметричном степенном потенциале с одним устойчивым состоянием

Ранее в работе [180] было получено общее выражение для стационарной плотности вероятности координаты частицы в гладком симметричном потенциале вида

$$U(x) = \gamma \frac{x^{2m}}{2m} \quad (\text{Б.1})$$

при аномальной диффузии в форме полетов Леви с индексом Леви  $\alpha = 1$ . Для нечетного показателя  $m = 2n + 1$  оно имеет вид

$$P_{st}(x) = \frac{\beta^{4n+1}}{\pi(x^2 + \beta^2)} \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{x^4 - 2\beta^2 x^2 \cos [\pi(4l + 1)/(4n + 1)] + \beta^4} \quad (\text{Б.2})$$

и соответственно для четного  $m = 2n$

$$P_{st}(x) = \frac{\beta^{4n-1}}{\pi} \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{x^4 - 2\beta^2 x^2 \cos [\pi(4l + 1)/(4n - 1)] + \beta^4}, \quad (\text{Б.3})$$

где  $\beta = \sqrt[2m-1]{D_1/\gamma}$ , а  $D_1$  – параметр интенсивности воздействующего шума с устойчивым распределением Коши.

Заменяя крутизну  $\gamma$  на  $\gamma/L^{2m}$  в (Б.1), приходим к

$$U(x) = \frac{\gamma}{2m} \left(\frac{x}{L}\right)^{2m} \quad (\text{Б.4})$$

Для нового потенциала (Б.4) параметр  $\beta$  перепишется в виде  $\beta = L \sqrt[2m-1]{DL/\gamma}$ .

Преобразуем выражение (Б.2) для случая нечетного показателя  $m$ . Для удобства введем обозначение  $A \equiv A(l) = \frac{4l+1}{4n+1}$ . Выполнив разложение на множители знаменателя дроби под знаком произведения

$$x^4 - 2\beta^2 x^2 \cos \pi A + \beta^4 = (\beta^2 - x^2 e^{-i\pi A})(\beta^2 - x^2 e^{i\pi A}), \quad (\text{Б.5})$$

перейдем от произведения к сумме

$$\begin{aligned} P_{st}(x) &= \frac{\beta^{4n+1}}{\pi(x^2 + \beta^2)} \prod_{l=0}^{n-1} \frac{1}{(\beta^2 - x^2 e^{-i\pi A})(\beta^2 - x^2 e^{i\pi A})} \\ &= \frac{\beta^{4n+1}}{\pi(x^2 + \beta^2)} \exp \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} \ln \frac{1}{(\beta^2 - x^2 e^{-i\pi A})(\beta^2 - x^2 e^{i\pi A})} \right\} \\ &= \frac{\beta^{4n+1}}{\pi(x^2 + \beta^2)} \exp \left\{ - \sum_{l=0}^{n-1} [\ln (\beta^2 - x^2 e^{-i\pi A}) + \ln (\beta^2 - x^2 e^{i\pi A})] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Б.6})$$

Воспользуемся разложением логарифма в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}\ln(\beta^2 - x^2 e^{-i\pi A}) &= \ln \left[ \beta^2 \left( 1 - \frac{x^2 e^{-i\pi A}}{\beta^2} \right) \right] = \ln \beta^2 + \ln \left( 1 - \frac{x^2 e^{-i\pi A}}{\beta^2} \right) \\ &= \ln \beta^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} e^{-i\pi k A},\end{aligned}$$

справедливым при  $|x| < \beta$ .

Аналогично

$$\ln(\beta^2 - x^2 e^{i\pi A}) = \ln \beta^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} e^{i\pi k A}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}P_{st}(x) &= \frac{\beta^{4n+1}}{\pi(x^2 + \beta^2)} \exp \left[ \sum_{l=0}^{n-1} \left( \ln \frac{1}{\beta^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} (e^{i\pi k A} + e^{-i\pi k A}) \right) \right] \\ &= \frac{\beta^{4n+1}}{\pi(x^2 + \beta^2)} \exp \left[ n \ln \frac{1}{\beta^4} + \sum_{l=0}^{n-1} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} (e^{i\pi k A} + e^{-i\pi k A}) \right) \right] \\ &= \frac{\beta}{\pi(x^2 + \beta^2)} \exp \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} \sum_{l=0}^{n-1} (e^{i\pi k \frac{4l+1}{4n+1}} + e^{-i\pi k \frac{4l+1}{4n+1}}) \right].\end{aligned}\quad (\text{Б.7})$$

Для подсчета внутренней суммы по  $l$  воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n-1} (e^{i\pi k \frac{4l+1}{4n+1}} + e^{-i\pi k \frac{4l+1}{4n+1}}) &= \sum_{l=0}^{n-1} (e^{\frac{i\pi k}{4n+1}})^{4l+1} + \sum_{l=0}^{n-1} (e^{-\frac{i\pi k}{4n+1}})^{4l+1} \\ &= e^{\frac{i\pi k}{4n+1}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{4i\pi nk}{4n+1}}}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}}} + e^{-\frac{i\pi k}{4n+1}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{4i\pi nk}{4n+1}}}{1 - e^{-\frac{4i\pi k}{4n+1}}} = \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n+1}} - e^{i\pi k}}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}}} + \frac{e^{-\frac{i\pi k}{4n+1}} - e^{-i\pi k}}{1 - e^{-\frac{4i\pi k}{4n+1}}} \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n+1}} - (-1)^k}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}}} + \frac{e^{-\frac{i\pi k}{4n+1}} - (-1)^k}{1 - e^{-\frac{4i\pi k}{4n+1}}} = \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n+1}} - (-1)^k}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}}} + \frac{e^{\frac{3i\pi k}{4n+1}} - (-1)^k e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}}}{e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}} - 1} \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n+1}} - (-1)^k - e^{\frac{3i\pi k}{4n+1}} + (-1)^k e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}}}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}}} = \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n+1}} (1 - e^{\frac{2i\pi k}{4n+1}}) - (-1)^k \cdot (1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}})}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n+1}}} \\ &= \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n+1}}}{1 + e^{\frac{2i\pi k}{4n+1}}} - (-1)^k = \frac{1}{e^{-\frac{i\pi k}{4n+1}} + e^{\frac{i\pi k}{4n+1}}} - (-1)^k = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{4n+1}} - (-1)^k.\end{aligned}$$

Подставляя полученный результат в (Б.7), получаем

$$\begin{aligned}P_{st}(x) &= \frac{\beta}{\pi(x^2 + \beta^2)} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{4n+1}} \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} + (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} \right] \right\} \\ &= \frac{\beta}{\pi(x^2 + \beta^2)} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{4n+1}} \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} + \ln \left( 1 + \left( \frac{x}{\beta} \right)^2 \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{\pi \beta} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{4n+1}} \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} \right\} = \frac{1}{\pi \beta} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{2m-1}} \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} \right\}.\end{aligned}\quad (\text{Б.8})$$

Результат для случая четного показателя  $m = 2n$  получается аналогично, однако подсчет внутренней суммы по  $l$  будет отличаться, а именно

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^{n-1} \left( e^{i\pi k \frac{4l+1}{4n-1}} + e^{-i\pi k \frac{4l+1}{4n-1}} \right) = \sum_{l=0}^{n-1} \left( e^{\frac{i\pi k}{4n-1}} \right)^{4l+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \left( e^{\frac{-i\pi k}{4n-1}} \right)^{4l+1} \\
& = e^{\frac{i\pi k}{4n-1}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{4i\pi n k}{4n-1}}}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n-1}}} + e^{-\frac{i\pi k}{4n-1}} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{4i\pi n k}{4n-1}}}{1 - e^{-\frac{4i\pi k}{4n-1}}} \\
& = e^{\frac{i\pi k}{4n-1}} \cdot \frac{1 - e^{i\pi k} e^{\frac{i\pi k}{4n-1}}}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n-1}}} + e^{-\frac{i\pi k}{4n-1}} \cdot \frac{1 - e^{-i\pi k} e^{-\frac{i\pi k}{4n-1}}}{1 - e^{-\frac{4i\pi k}{4n-1}}} \\
& = \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n-1}} - (-1)^k e^{\frac{2i\pi k}{4n-1}}}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n-1}}} + \frac{e^{-\frac{i\pi k}{4n-1}} - (-1)^k e^{-\frac{2i\pi k}{4n-1}}}{1 - e^{-\frac{4i\pi k}{4n-1}}} \\
& = \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n-1}} - (-1)^k e^{\frac{2i\pi k}{4n-1}}}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n-1}}} + \frac{e^{\frac{3i\pi k}{4n-1}} - (-1)^k e^{\frac{2i\pi k}{4n-1}}}{e^{\frac{4i\pi k}{4n-1}} - 1} \\
& = \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n-1}} - (-1)^k e^{\frac{2i\pi k}{4n-1}} - e^{\frac{3i\pi k}{4n-1}} + (-1)^k e^{\frac{2i\pi k}{4n-1}}}{1 - e^{\frac{4i\pi k}{4n-1}}} \\
& = \frac{e^{\frac{i\pi k}{4n-1}}}{1 + e^{\frac{2i\pi k}{4n-1}}} = \frac{1}{e^{-\frac{i\pi k}{4n-1}} + e^{\frac{i\pi k}{4n-1}}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{4n-1}}.
\end{aligned}$$

Окончательно для  $m = 2n$  имеем

$$\begin{aligned}
P_{st}(x) &= \frac{1}{\pi\beta} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{4n-1}} \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} \right\} \\
&= \frac{1}{\pi\beta} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{2m-1}} \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} \right\}.
\end{aligned} \tag{Б.9}$$

Получаем полное совпадение со случаем (Б.8) для нечетного показателя  $m$ .

С помощью аналогичных выкладок нетрудно получить установившееся вероятностное распределение для случая  $|x| > \beta$  при четных и нечетных значениях параметра  $m$ . Итоговое выражение для произвольного  $m$  имеет вид

$$P_{st}(x) = \frac{1}{\beta\pi} \left( \frac{\beta}{x} \right)^{2m} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{2m-1}} \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{\beta}{x} \right)^{2k} \right\}. \tag{Б.10}$$

Окончательно имеем следующую модификацию исходных соотношений (Б.2)-(Б.3)

$$P_{st}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\beta} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{2m-1}} \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{x}{\beta} \right)^{2k} \right\}, & |x| < \beta; \\ \frac{1}{\pi\beta} \left( \frac{\beta}{x} \right)^{2m} \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cos \frac{\pi k}{2m-1}} \cdot \frac{1}{k} \left( \frac{\beta}{x} \right)^{2k} \right\}, & |x| > \beta. \end{cases} \tag{Б.11}$$

## Приложение В

### Вывод уравнения для совместной характеристической функции координат в случае диффузии в двумерном потенциале

Чтобы получить уравнение относительно совместной характеристической функции координат  $\Theta(k, q, t)$ , применим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} P \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} P \right) + K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|z|^{\alpha+1}} (P(x-z, y, t) \\ + P(x, y-z, t) - 2P(x, y, t)) dz \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

двойное преобразование Фурье.

Рассмотрим первое слагаемое правой части уравнения (B.1), введя обозначение  $f = \frac{\partial U}{\partial x} P$ . Преобразование Фурье от него дает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot e^{ikx+iqy} dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqy} dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot e^{ikx} dx \\ &= \left| \begin{array}{l} dv = \frac{\partial f}{\partial x} dx \rightarrow v = f \\ u = e^{ikx} \rightarrow du = ik \cdot e^{ikx} dx \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqy} dy (e^{ikx} f) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &- ik \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f e^{ikx+iqy} dx dy. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

В силу того, что распределение  $P$  убывает быстрее, чем растет  $U'_x$ , подстановка в выражении (B.2) обращается в ноль.

Представим производную гладкого потенциала в виде следующей суммы

$$U'_x(x, y) = \sum_{n, m} a_{nm} x^n y^m,$$

тогда

$$\begin{aligned} &- ik \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U'_x P \cdot e^{ikx+iqy} dx dy \\ &= -ik \sum_{n, m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_{nm} x^n y^m P \cdot e^{ikx+iqy} dx dy \\ &= -ik \sum_{n, m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_{nm} \left( \frac{\partial}{\partial ik} \right)^n \left( \frac{\partial}{\partial iq} \right)^m P \cdot e^{ikx+iqy} dx dy \\ &= -ik U'_x \left( \frac{\partial}{\partial ik}, \frac{\partial}{\partial iq} \right) \cdot \Theta(k, q, t) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Прделав аналогичные действия для второго слагаемого уравнения (B.1), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial U}{\partial y} P \right) \cdot e^{ikx+iqy} dx dy = -iq U'_y \left( \frac{\partial}{\partial ik}, \frac{\partial}{\partial iq} \right) \cdot \Theta(k, q, t). \quad (\text{B.4})$$

Рассмотрим интегральное слагаемое исходного уравнения (B.1). После двойного преобразования Фурье и применения формулы смещения, приходим к

$$\begin{aligned} K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikz} + e^{iqz} - 2}{|z|^{\alpha+1}} dz \cdot \Theta(k, q, t) &= K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz \cdot \Theta(k, q, t) \\ &+ K \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iqz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz \cdot \Theta(k, q, t). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Каждый из интегралов выше можно свести с помощью формулы Эйлера к следующему виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikz} - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos kz + i \sin kz - 1}{|z|^{\alpha+1}} dz = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos kz - 1}{z^{\alpha+1}} dz,$$

где

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos kz}{z^{\alpha+1}} dz = -|k|^\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma(-\alpha) = \frac{|k|^\alpha}{\alpha} \cos \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma(1 - \alpha).$$

Если  $0 < \alpha < 1$

$$\frac{|k|^\alpha}{\alpha} \cos \frac{\pi\alpha}{2} \frac{\pi}{\Gamma(\alpha) \sin \pi\alpha} = \frac{|k|^\alpha \pi}{\Gamma(\alpha + 1) 2 \sin(\pi\alpha/2)};$$

если  $1 < \alpha < 2$

$$\begin{aligned} \frac{|k|^\alpha}{\alpha(1-\alpha)} \cos \frac{\pi\alpha}{2} \Gamma(2-\alpha) &= \frac{|k|^\alpha}{\alpha(1-\alpha)} \cos \frac{\pi\alpha}{2} \frac{\pi}{\Gamma(\alpha-1) \sin \pi(\alpha-1)} \\ &= \frac{|k|^\alpha \pi \cos(\pi\alpha/2)}{-\alpha \Gamma(\alpha) \sin \pi\alpha \cos \pi} = \frac{|k|^\alpha \pi}{\Gamma(\alpha+1) 2 \sin(\pi\alpha/2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, правая часть уравнения (B.5) примет вид

$$-\frac{K\pi}{\Gamma(\alpha+1) \sin(\pi\alpha/2)} (|k|^\alpha + |q|^\alpha) \Theta(k, q, t).$$

Если ввести обозначение  $D_\alpha = \frac{K\pi}{\Gamma(\alpha+1) \sin(\pi\alpha/2)}$ , итоговое уравнение для совместной характеристической функции запишется следующим образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(k, q, t)}{\partial t} &= -ikU'_x \left( -i \frac{\partial}{\partial k}, -i \frac{\partial}{\partial q} \right) \Theta(k, q, t) \\ &- iqU'_y \left( -i \frac{\partial}{\partial k}, -i \frac{\partial}{\partial q} \right) \Theta(k, q, t) - D_\alpha (|k|^\alpha + |q|^\alpha) \Theta(k, q, t). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

## Приложение Г

### Динамические системы, управляемые процессом Орнштейна–Уленбека и марковским дихотомическим шумом

#### Г.1 Нелинейная динамическая система, возмущаемая процессом Орнштейна–Уленбека

Рассмотрим следующую нелинейную систему под воздействием процесса Орнштейна–Уленбека  $\eta(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x) + g(x)\eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -\frac{1}{\tau_c} \eta(t) + \frac{1}{\tau_c} \sqrt{2D} \xi(t),\end{aligned}\quad (\text{Г.1})$$

где  $f(x)$  и  $g(x)$  — произвольные функции,  $\tau_c$  — время корреляции шума  $\eta(t)$  и  $\xi(t)$  — белый гауссов шум с нулевым средним и единичной интенсивностью, т.е.

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \delta(\tau). \quad (\text{Г.2})$$

Параллельно с теорией, разработанной в [87], уравнение Смолуховского–Фоккера–Планка для функции совместной плотности вероятности  $P_2(x, \eta, t)$  может быть получено непосредственно из системы (Г.1) методами размыкания функциональных средних, используя хорошо известное представление совместного вероятностного распределения в виде среднего

$$P_2(x, \eta, t) = \langle \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) \rangle. \quad (\text{Г.3})$$

Дифференцируя соотношение (Г.3) по времени и принимая во внимание уравнения (Г.1), приходим к

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + g(x)\eta] P_2 + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta P_2) - \frac{1}{\tau_c} \sqrt{2D} \frac{\partial}{\partial \eta} \langle \xi(t) \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) \rangle. \quad (\text{Г.4})$$

Для расщепления среднего в (Г.4) применим формулу Фуруцу–Новикова [181; 182] для произвольного функционала  $R_t[\xi]$  белого гауссова шума с единичной интенсивностью

$$\langle \xi(t) R_t[\xi] \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\delta R_t[\xi]}{\delta \xi(t)} \right\rangle. \quad (\text{Г.5})$$

Опираясь на соотношения (Г.4) и (Г.1), вычисляем вариационную производную от  $\delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t))$  в (Г.5), используя правила функционального дифференцирования

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta \xi(t)} \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) &= -\frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) \frac{\delta x(t)}{\delta \xi(t)} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \eta} \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) \frac{\delta \eta(t)}{\delta \xi(t)} = -\frac{1}{\tau_c} \sqrt{2D} \frac{\partial}{\partial \eta} \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)).\end{aligned}\quad (\text{Г.6})$$

При дифференцировании использован тот факт, что, в соответствии с (Г.1),

$$\frac{\delta x(t)}{\delta \xi(t)} = 0, \quad \frac{\delta \eta(t)}{\delta \xi(t)} = \frac{1}{\tau_c} \sqrt{2D}.$$

Из уравнений (Г.3)–(Г.6) окончательно находим

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + g(x)\eta] P_2 + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta P_2) + \frac{D}{\tau_c^2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \eta^2}. \quad (\text{Г.7})$$

Подставляя в (Г.7)  $f(x) = -U'(x)$  и  $g(x) = 1$  в соответствии с (2.75), приходим к (2.76)

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x) - \eta] P_2 + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta P_2) + \frac{D}{\tau_c^2} \frac{\partial^2 P_2}{\partial \eta^2}. \quad (\text{Г.8})$$

К сожалению, установившееся вероятностное распределение случайного процесса  $x(t)$  не может быть получено из уравнения (Г.8) аналитически, однако его можно найти в пределе малого времени корреляции  $\tau_c$  воздействующего цветного шума  $\eta(t)$ .

После интегрирования обеих частей (Г.8) по  $\eta$  в бесконечных пределах, приходим к следующему уравнению для вероятностного распределения  $P(x,t)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)P - Q_1], \quad (\text{Г.9})$$

где

$$Q_1(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta P(x,\eta,t) d\eta. \quad (\text{Г.10})$$

Чтобы получить уравнение для новой функции  $Q_1$ , умножим обе части уравнения (Г.8) на  $\eta$  и проинтегрируем по  $\eta$  в той же области. В результате находим

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)Q_1 - Q_2] - \frac{1}{\tau_c} Q_1, \quad (\text{Г.11})$$

где

$$Q_2(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 P(x,\eta,t) d\eta. \quad (\text{Г.12})$$

Аналогичным образом получаем уравнение для функции  $Q_2$

$$\frac{\partial Q_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)Q_2 - Q_3] - \frac{2}{\tau_c} Q_2 + \frac{2D}{\tau_c^2} P, \quad (\text{Г.13})$$

где

$$Q_3(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^3 P(x,\eta,t) d\eta. \quad (\text{Г.14})$$

Продолжая данную процедуру, приходим к бесконечной цепочке уравнений для последовательности функций  $Q_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\frac{\partial Q_k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [U'(x)Q_k - Q_{k+1}] - \frac{k}{\tau_c} Q_k + k(k-1) \frac{D}{\tau_c^2} Q_{k-2}, \quad (\text{Г.15})$$

где

$$Q_k(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^k P(x,\eta,t) d\eta, \quad Q_0(x,t) = P(x,t). \quad (\text{Г.16})$$

В пределе  $t \rightarrow \infty$  из (Г.15) получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\tau_c^2 \frac{d}{dx} [U'(x)Q_k - Q_{k+1}] - k\tau_c Q_k + Dk(k-1)Q_{k-2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Г.17})$$

Интегрируя обе части (Г.16) по  $x$  в бесконечных пределах, получаем в установившемся состоянии

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_k(x) dx = \langle \eta^k \rangle. \quad (\text{Г.18})$$

Тогда из второго уравнения системы (Г.1) имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_{2m+1}(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} Q_{2m}(x) dx = (2m-1)!! \left( \frac{D}{\tau_c} \right)^m. \quad (\text{Г.19})$$

В пределе  $\tau_c \rightarrow 0$  случайный процесс  $\eta(t)$  становится белым гауссовым шумом с нулевым средним значением и интенсивностью  $2D$ .

Подставляя  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  в уравнение (Г.17), приходим к системе

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [U'(x)P_{st} - Q_1] &= 0, \\ \tau_c \frac{d}{dx} [U'(x)Q_1 - Q_2] - Q_1 &= 0, \\ \tau_c^2 \frac{d}{dx} [U'(x)Q_2 - Q_3] - 2\tau_c Q_2 + 2DP_{st} &= 0, \\ \tau_c^2 \frac{d}{dx} [U'(x)Q_3 - Q_4] - 3\tau_c Q_3 + 6DQ_1 &= 0, \\ \tau_c^2 \frac{d}{dx} [U'(x)Q_4 - Q_5] - 4\tau_c Q_4 + 12DQ_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Г.20})$$

Используя условие равенства нулю вероятностного потока на бесконечности, из уравнения (Г.9) имеем

$$Q_1 = U'(x)P_{st}. \quad (\text{Г.21})$$

Подставляя уравнение (Г.21) в другие уравнения системы (Г.20), получаем

$$\begin{aligned} \tau_c \frac{d}{dx} [U'^2(x)P_{st} - Q_2] - U'(x)P_{st} &= 0, \\ \tau_c^2 \frac{d}{dx} [U'(x)Q_2 - Q_3] - 2\tau_c Q_2 + 2DP_{st} &= 0, \\ \tau_c^2 \frac{d}{dx} [U'(x)Q_3 - Q_4] - 3\tau_c Q_3 + 6DU'(x)P_{st} &= 0, \\ \tau_c^2 \frac{d}{dx} [U'(x)Q_4 - Q_5] - 4\tau_c Q_4 + 12DQ_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Г.22})$$

В соответствии с уравнениями (Г.19), можно поискать решение уравнений (Г.22) в форме следующего разложения по малому параметру  $\tau_c$

$$\begin{aligned}
P_{st}(x) &= R_0(x) + \tau_c S_0(x) + \tau_c^2 T_0(x) + \dots, \\
Q_2(x) &= \frac{1}{\tau_c} [R_2(x) + \tau_c S_2(x) + \tau_c^2 T_2(x) + \dots], \\
Q_3(x) &= \frac{1}{\tau_c} [R_3(x) + \tau_c S_3(x) + \tau_c^2 T_3(x) + \dots], \\
Q_4(x) &= \frac{1}{\tau_c^2} [R_4(x) + \tau_c S_4(x) + \tau_c^2 T_4(x) + \dots], \\
Q_5(x) &= \frac{1}{\tau_c^2} [R_5(x) + \tau_c S_5(x) + \tau_c^2 T_5(x) + \dots].
\end{aligned} \tag{Г.23}$$

Подставляя разложение (Г.23) в первые два уравнения системы (Г.22) и приравнивая члены без  $\tau_c$ , получаем

$$\begin{aligned}
R'_2 + U'(x)R_0 &= 0, \\
R_2 - DR_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{Г.24}$$

Общее решение системы (Г.24) имеет вид

$$\begin{aligned}
R_0(x) &= P_{st}(x; \tau_c = 0) = C e^{-U(x)/D}, \\
R_2(x) &= DR_0(x),
\end{aligned} \tag{Г.25}$$

где  $C$  — постоянная нормировки, и представляет собой, в нулевом порядке по малому параметру  $\tau_c$ , хорошо известное распределение Больцмана для случая воздействия белого гауссова шума.

Аналогично, подставляя разложение (Г.23) и приравнивая члены с первой степенью по малому параметру  $\tau_c$  в первых двух уравнениях (Г.22), без  $\tau_c$  в третьем уравнении и с  $1/\tau_c$  в четвертом уравнении, приходим к следующей системе уравнений для нахождения следующей поправки  $S_0(x)$  к точному решению (см. уравнение (Г.23))

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} [U'^2(x)R_0 - S_2] - U'(x)S_0 &= 0, \\
\frac{d}{dx} [U'(x)R_2 - R_3] - 2S_2 + 2DS_0 &= 0, \\
\frac{d}{dx} R_4 + 3R_3 - 6DU'(x)R_0 &= 0, \\
R_4 - 3DR_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{Г.26}$$

Учитывая уравнение (Г.24) и исключая переменные  $R_2$  и  $R_4$  из системы (Г.26), находим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} [U'^2(x)R_0 - S_2] - U'(x)S_0 &= 0, \\
\frac{d}{dx} [DU'(x)R_0 - R_3] - 2S_2 + 2DS_0 &= 0, \\
R_3 - 3DU'(x)R_0 &= 0.
\end{aligned} \tag{Г.27}$$

Окончательно, исключая переменные  $R_3$  и  $S_2$  из системы (Г.27), получаем уравнение для отыскания следующей поправки  $S_0(x)$  к установившемуся вероятностному распределению

$$S_0' + \frac{U'(x)}{D} S_0 = \frac{1}{D} \frac{d}{dx} [U'^2(x) R_0] + \frac{d^2}{dx^2} [U'(x) R_0]. \quad (\text{Г.28})$$

Частное решение уравнения (Г.28) имеет вид

$$S_0(x) = e^{-U(x)/D} \int e^{U(x)/D} \frac{d}{dx} [U''(x) R_0] dx. \quad (\text{Г.29})$$

Применяя в уравнении (Г.29) интегрирование по частям и учитывая уравнения (Г.25), приходим к

$$S_0(x) = C e^{-U(x)/D} \left[ U''(x) - \frac{U'^2(x)}{2D} \right]. \quad (\text{Г.30})$$

Принимая во внимание общее решение уравнения (Г.28) и уравнения (Г.23), (Г.25) и (Г.30), можно записать окончательное выражение для установившегося вероятностного распределения в первом приближении по малому параметру  $\tau_c$

$$P_{st}(x) = C e^{-U(x)/D} \left\{ 1 + \tau_c \left[ C_1 + U''(x) - \frac{U'^2(x)}{2D} \right] \right\}, \quad (\text{Г.31})$$

где  $C_1$  – новая постоянная.

Результат (Г.31) был недавно получен в работе [183] с помощью разложения совместной плотности вероятности  $P_2(x, \eta, t)$ .

Наконец сравним полученный общий результат (Г.31) с уже полученным результатом в приближении унифицированного цветного шума (UCNA) [109]. В этом случае установившееся вероятностное распределение имеет следующий вид

$$P_{st}(x) = C_0 e^{-U(x)/D} |1 + \tau_c U''(x)| e^{-\tau_c U'^2(x)/(2D)}. \quad (\text{Г.32})$$

Если разложить данное выражение в степенной ряд по  $\tau_c$  в случае  $U''(x) > 0$  и ограничиться членами первого порядка, приходим к

$$P_{st}(x) = C_0 e^{-U(x)/D} \left\{ 1 + \tau_c \left[ U''(x) - \frac{U'^2(x)}{2D} \right] \right\}. \quad (\text{Г.33})$$

Таким образом, приближение (Г.33) совпадает с полученным результатом (Г.31), если  $C_1 = 0$ .

## Г.2 Нелинейная динамическая система, находящаяся под одновременным воздействием процесса Орнштейна–Уленбека и марковского дихотомического шума

**1. Одномерный случай.** Рассмотрим нелинейную динамическую систему, возмущаемую марковским дихотомическим шумом  $\xi_{DN}(t)$  и процессом Орнштейна–Уленбека  $\eta(t)$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x)\xi_{DN}(t) + \eta(t), \\ \dot{\eta} &= -\frac{1}{\tau_c}\eta + \sqrt{2D}\xi(t).\end{aligned}\quad (\text{Г.34})$$

Марковский дихотомический шум  $\xi_{DN}(t)$  переключается между значениями  $\pm\Delta$  со средней частотой  $\gamma$ ,  $f(x)$  и  $g(x)$  – произвольные нелинейные функции и  $\xi(t)$  – гауссов белый шум с нулевым средним значением и единичной интенсивностью.

В силу того, что совокупность случайных процессов  $\{x(t), \eta(t)\}$  является марковской, можно записать замкнутое уравнение для совместной плотности вероятности  $P_2(x, y, t)$  случайных процессов  $x(t)$  и  $\eta(t)$ . Для вывода этого уравнения будем исходить из представления плотности вероятности в форме среднего

$$P_2(x, \eta, t) = \langle \delta(x - x(t))\delta(\eta - \eta(t)) \rangle. \quad (\text{Г.35})$$

После дифференцирования соотношения (Г.35) по времени, получаем

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \langle \dot{x}(t)\delta(x - x(t))\delta(\eta - \eta(t)) \rangle - \frac{\partial}{\partial \eta} \langle \dot{\eta}(t)\delta(\eta - \eta(t))\delta(x - x(t)) \rangle. \quad (\text{Г.36})$$

Подставляя  $\dot{x}(t)$  и  $\dot{\eta}(t)$  из исходной системы (Г.34) и принимая во внимание представление (Г.35), можно переписать уравнение (Г.36) в следующем виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_2}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [f(x) + \eta] P_2 + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta P_2) - \frac{\partial}{\partial x} g(x) \langle \xi_{DN}(t) \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) \rangle - \\ &- \sqrt{2D} \frac{\partial}{\partial \eta} \langle \xi(t) \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) \rangle.\end{aligned}\quad (\text{Г.37})$$

Для размыкания среднего с гауссовым белым шумом  $\xi(t)$  в (Г.37) применим формулу Фуруцу–Новикова (см. Приложение Г.1)).

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (f(x) + \eta) P_2 + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta P_2) - \frac{\partial}{\partial x} (g(x)Q) + D \frac{\partial^2 P_2}{\partial \eta^2}, \quad (\text{Г.38})$$

где введена вспомогательная функция

$$Q(x, \eta, t) = \langle \xi_{DN}(t) \delta(x - x(t)) \delta(\eta - \eta(t)) \rangle. \quad (\text{Г.39})$$

Применяя ту же технику к соотношению (Г.39) и используя формулу Шапиро–Логинова [184] “дифференцирования” произвольного функционала  $R_t[\xi_{DN}]$  марковского дихотомического шума

$$\frac{d}{dt} \langle \xi_{DN}(t) R_t[\xi_{DN}] \rangle = -2\gamma \langle \xi_{DN}(t) R_t[\xi_{DN}] \rangle + \langle \xi_{DN}(t) \frac{d}{dt} R_t[\xi_{DN}] \rangle,$$

получаем следующее уравнение для функции  $Q(x, \eta, t)$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -2\gamma Q - \frac{\partial}{\partial x} f(x) Q - \Delta^2 \frac{\partial}{\partial x} (g(x) P_2) - \eta \frac{\partial}{\partial x} Q + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta Q) + D \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}. \quad (\text{Г.40})$$

Объединяя (Г.38) и (Г.40), окончательно приходим к

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (f(x) + \eta) P_2 + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta P_2) - \frac{\partial}{\partial x} (g(x) Q) + D \frac{\partial^2 P_2}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= -2\gamma Q - \frac{\partial}{\partial x} (f(x) + \eta) Q + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta Q) - \Delta^2 \frac{\partial}{\partial x} (g(x) P_2) + D \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (\text{Г.41})$$

Система уравнений (Г.41) для совместной плотности вероятности (Г.35) является замкнутой.

Для рассматриваемого случая одномерного переключающегося потенциала

$$U(x, t) = \frac{b}{4} (x - \xi_{DN}(t))^4 + \frac{a}{2} (x - \xi_{DN}(t))^2 \quad (\text{Г.42})$$

имеем

$$U'_x(x, t) = bx^3 + 3b\Delta^2 x + ax - (3bx^2 + b\Delta^2 + a)\xi_{DN}(t). \quad (\text{Г.43})$$

Как следствие, нелинейные функции в (Г.34) задаются как

$$\begin{aligned} f(x) &= -(bx^3 + 3b\Delta^2 x + ax), \\ g(x) &= 3bx^2 + b\Delta^2 + a. \end{aligned} \quad (\text{Г.44})$$

В результате систему (Г.41) можно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_2}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\eta - bx^3 - 3b\Delta^2 x - ax) P_2 + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta P_2) - \frac{\partial}{\partial x} ((3bx^2 + b\Delta^2 + a) Q) + D \frac{\partial^2 P_2}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= -2\gamma Q - \frac{\partial}{\partial x} (\eta - bx^3 - 3b\Delta^2 x - ax) Q + \frac{1}{\tau_c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta Q) - \Delta^2 \frac{\partial}{\partial x} [(3bx^2 + b\Delta^2 + a) P_2] + \\ &+ D \frac{\partial^2 Q}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \quad (\text{Г.45})$$

**2. Двумерный случай.** Далее рассмотрим нелинейную двумерную динамическую систему, описываемую следующей системой ланжевеновских уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y) + g_1(x, y) \xi_{DN}^1(t) + h_1(x, y) \xi_{DN}^2(t) + m_1(x, y) \xi_{DN}^1(t) \xi_{DN}^2(t) + \eta_1(t), \\ \dot{\eta}_1 &= -\frac{1}{\tau_c^1} \eta_1 + \sqrt{2D_1} \xi_1(t), \\ \dot{y} &= f_2(x, y) + g_2(x, y) \xi_{DN}^1(t) + h_2(x, y) \xi_{DN}^2(t) + m_2(x, y) \xi_{DN}^1(t) \xi_{DN}^2(t) + \eta_2(t), \\ \dot{\eta}_2 &= -\frac{1}{\tau_c^2} \eta_2 + \sqrt{2D_2} \xi_2(t), \end{aligned} \quad (\text{Г.46})$$

где  $\xi_{DN}^i(t)$  — независимые марковские дихотомические шумы, переключающиеся со средней частотой  $\gamma_i$  между значениями  $\pm \Delta_i$  (здесь и далее  $i = 1, 2$ ),  $f_i(x, y)$ ,  $g_i(x, y)$ ,  $h_i(x, y)$  и  $m_i(x, y)$  — произвольные нелинейные функции,  $\eta_i(t)$  — независимые процессы Орнштейна-Уленбека с

временем корреляции  $\tau_c^i$  и  $\xi_i(t)$  — независимые гауссовы белые шумы с нулевыми средними значениями и единичными интенсивностями.

По аналогии с одномерным случаем стартуем с представления совместной плотности вероятности случайных процессов  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  в виде

$$P(x, y, \eta_1, \eta_2, t) = \langle \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle. \quad (\Gamma.47)$$

Дифференцирование (Г.47) по времени дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} \langle \dot{x}(t) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \langle \dot{y}(t) \delta(y - y(t)) \delta(x - x(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle - \\ & - \frac{\partial}{\partial \eta_1} \langle \dot{\eta}_1(t) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle - \\ & - \frac{\partial}{\partial \eta_2} \langle \dot{\eta}_2(t) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \rangle = \\ = & - \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) + \eta_1] P - \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) + \eta_2] P - \frac{\partial}{\partial x} [g_1(x, y) Q_1] - \frac{\partial}{\partial y} [g_2(x, y) Q_1] - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} [h_1(x, y) Q_2] - \frac{\partial}{\partial y} [h_2(x, y) Q_2] - \frac{\partial}{\partial x} [m_1(x, y) Q_{12}] - \frac{\partial}{\partial y} [m_2(x, y) Q_{12}] - \\ & - \sqrt{2D_1} \frac{\partial}{\partial \eta_1} \langle \xi_1(t) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle - \\ & - \sqrt{2D_2} \frac{\partial}{\partial \eta_2} \langle \xi_2(t) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle, \end{aligned} \quad (\Gamma.48)$$

где введены вспомогательные функции

$$\begin{aligned} Q_1(x, y, \eta_1, \eta_2, t) &= \langle \xi_{DN}^1(t) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle, \\ Q_2(x, y, \eta_1, \eta_2, t) &= \langle \xi_{DN}^2(t) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle, \\ Q_{12}(x, y, \eta_1, \eta_2, t) &= \\ &= \langle \xi_{DN}^1(t) \xi_{DN}^2(t) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle. \end{aligned} \quad (\Gamma.49)$$

После двойного применения формулы Фуруцу—Новикова получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) + \eta_1] P - \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) + \eta_2] P - \frac{\partial}{\partial x} [g_1(x, y) Q_1] - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} [g_2(x, y) Q_1] - \frac{\partial}{\partial x} [h_1(x, y) Q_2] - \frac{\partial}{\partial y} [h_2(x, y) Q_2] - \frac{\partial}{\partial x} [m_1(x, y) Q_{12}] - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} [m_2(x, y) Q_{12}] + \frac{1}{\tau_c^1} \frac{\partial(\eta_1 P)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{\tau_c^2} \frac{\partial(\eta_2 P)}{\partial \eta_2} + D_1 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta_2^2}. \end{aligned} \quad (\Gamma.50)$$

Проводя аналогичную процедуру для первого уравнения системы (Г.49) и используя формулу Шапиро—Логинова, приходим к следующему уравнению для функции

$Q_1(x, y, \eta_1, \eta_2, t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_1}{\partial t} &= -2\gamma_1 Q_1 - \\
&- \frac{\partial}{\partial x} \langle \xi_{DN}^1(t) \delta(x - x(t)) \dot{x}(t) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle - \\
&- \frac{\partial}{\partial y} \langle \xi_{DN}^1(t) \delta(y - y(t)) \dot{y}(t) \delta(x - x(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle - \\
&- \frac{\partial}{\partial \eta_1} \langle \xi_{DN}^1(t) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \dot{\eta}_1(t) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \rangle - \\
&- \frac{\partial}{\partial \eta_2} \langle \xi_{DN}^1(t) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \dot{\eta}_2(t) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \rangle = \quad (\Gamma.51) \\
&= -2\gamma_1 Q_1 - \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) + \eta_1] Q_1 - \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) + \eta_2] Q_1 - \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial x} [g_1(x, y) P] - \\
&- \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial y} [g_2(x, y) P] - \frac{\partial}{\partial x} [h_1(x, y) Q_{12}] - \frac{\partial}{\partial y} [h_2(x, y) Q_{12}] - \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial x} [m_1(x, y) Q_2] - \\
&- \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial y} [m_2(x, y) Q_2] + \frac{1}{\tau_c^1} \frac{\partial(\eta_1 Q_1)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{\tau_c^2} \frac{\partial(\eta_2 Q_1)}{\partial \eta_2} + D_1 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \eta_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \eta_2^2}.
\end{aligned}$$

Для функции  $Q_2(x, y, \eta_1, \eta_2, t)$  аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_2}{\partial t} &= -2\gamma_2 Q_2 - \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) + \eta_1] Q_2 - \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) + \eta_2] Q_2 - \\
&- \frac{\partial}{\partial x} [g_1(x, y) Q_{12}] - \frac{\partial}{\partial y} [g_2(x, y) Q_{12}] - \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial x} [h_1(x, y) P] - \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial y} [h_2(x, y) P] - \\
&- \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial x} [m_1(x, y) Q_1] - \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial y} [m_2(x, y) Q_1] + \frac{1}{\tau_c^1} \frac{\partial(\eta_1 Q_2)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{\tau_c^2} \frac{\partial(\eta_2 Q_2)}{\partial \eta_2} + \\
&+ D_1 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \eta_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \eta_2^2}. \quad (\Gamma.52)
\end{aligned}$$

Чтобы вывести уравнение для функции  $Q_{12}(x, y, \eta_1, \eta_2, t)$ , предварительно применим формулу Шапиро—Логинова для марковского дихотомического шума  $\xi_{DN}^1(t)$ , а именно

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_{12}}{\partial t} &= -2\gamma_1 Q_{12} + \quad (\Gamma.53) \\
&+ \left\langle \xi_{DN}^1(t) \frac{d}{dt} (\xi_{DN}^2(t) \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t))) \right\rangle,
\end{aligned}$$

и затем используем другую форму соотношения Шапиро—Логинова для марковского дихотомического шума  $\xi_{DN}^2(t)$

$$\left\langle \frac{d\xi_{DN}^2(t)}{dt} R_t[\xi_{DN}] \right\rangle = -2\gamma \langle \xi_{DN}(t) R_t[\xi_{DN}] \rangle. \quad (\Gamma.54)$$

В результате приходим к

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_{12}}{\partial t} &= -2\gamma_1 Q_{12} - 2\gamma_2 Q_{12} + \\
&+ \left\langle \xi_{DN}^1(t) \xi_{DN}^2(t) \frac{d}{dt} \delta(x - x(t)) \delta(y - y(t)) \delta(\eta_1 - \eta_1(t)) \delta(\eta_2 - \eta_2(t)) \right\rangle = \\
&= -2\gamma_1 Q_{12} - 2\gamma_2 Q_{12} - \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) + \eta_1] Q_{12} - \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) + \eta_2] Q_{12} - \\
&- \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial x} [g_1(x, y) Q_2] - \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial y} [g_2(x, y) Q_2] - \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial x} [h_1(x, y) Q_1] - \\
&- \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial y} [h_2(x, y) Q_1] - \Delta_1^2 \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial x} [m_1(x, y) P] - \Delta_1^2 \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial y} [m_2(x, y) P] + \\
&+ \frac{1}{\tau_c^1} \frac{\partial(\eta_1 Q_{12})}{\partial \eta_1} + \frac{1}{\tau_c^2} \frac{\partial(\eta_2 Q_{12})}{\partial \eta_2} + D_1 \frac{\partial^2 Q_{12}}{\partial \eta_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 Q_{12}}{\partial \eta_2^2}.
\end{aligned} \tag{Г.55}$$

Итоговая замкнутая система уравнений для функций  $P(x, y, \eta_1, \eta_2, t)$ ,  $Q_1(x, y, \eta_1, \eta_2, t)$ ,  $Q_2(x, y, \eta_1, \eta_2, t)$  и  $Q_{12}(x, y, \eta_1, \eta_2, t)$  такова

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) + \eta_1] P - \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) + \eta_2] P - \frac{\partial}{\partial x} [g_1(x, y) Q_1] - \\
&- \frac{\partial}{\partial y} [g_2(x, y) Q_1] - \frac{\partial}{\partial x} [h_1(x, y) Q_2] - \frac{\partial}{\partial y} [h_2(x, y) Q_2] - \\
&- \frac{\partial}{\partial x} [m_1(x, y) Q_{12}] - \frac{\partial}{\partial y} [m_2(x, y) Q_{12}] + \frac{1}{\tau_c^1} \frac{\partial(\eta_1 P)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{\tau_c^2} \frac{\partial(\eta_2 P)}{\partial \eta_2} + \\
&+ D_1 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta_2^2},
\end{aligned} \tag{Г.56}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_1}{\partial t} &= -2\gamma_1 Q_1 - \frac{\partial}{\partial x} [f_1(x, y) + \eta_1] Q_1 - \frac{\partial}{\partial y} [f_2(x, y) + \eta_2] Q_1 - \\
&- \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial x} [g_1(x, y) P] - \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial y} [g_2(x, y) P] - \frac{\partial}{\partial x} [h_1(x, y) Q_{12}] - \frac{\partial}{\partial y} [h_2(x, y) Q_{12}] - \\
&- \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial x} [m_1(x, y) Q_2] - \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial y} [m_2(x, y) Q_2] + \frac{1}{\tau_c^1} \frac{\partial(\eta_1 Q_1)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{\tau_c^2} \frac{\partial(\eta_2 Q_1)}{\partial \eta_2} + \\
&+ D_1 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \eta_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 Q_1}{\partial \eta_2^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_2}{\partial t} &= -2\gamma_2 Q_2 - \frac{\partial}{\partial x}[f_1(x,y) + \eta_1]Q_2 - \frac{\partial}{\partial y}[f_2(x,y) + \eta_2]Q_2 - \\
&- \frac{\partial}{\partial x}[g_1(x,y)Q_{12}] - \frac{\partial}{\partial y}[g_2(x,y)Q_{12}] - \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial x}[h_1(x,y)P] - \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial y}[h_2(x,y)P] - \\
&- \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial x}[m_1(x,y)Q_1] - \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial y}[m_2(x,y)Q_1] + \frac{1}{\tau_c^1} \frac{\partial(\eta_1 Q_2)}{\partial \eta_1} + \frac{1}{\tau_c^2} \frac{\partial(\eta_2 Q_2)}{\partial \eta_2} + \\
&+ D_1 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \eta_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 Q_2}{\partial \eta_2^2}, \\
\frac{\partial Q_{12}}{\partial t} &= -2\gamma_1 Q_{12} - 2\gamma_2 Q_{12} - \frac{\partial}{\partial x}[f_1(x,y) + \eta_1]Q_{12} - \frac{\partial}{\partial y}[f_2(x,y) + \eta_2]Q_{12} - \\
&- \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial x}[g_1(x,y)Q_2] - \Delta_1^2 \frac{\partial}{\partial y}[g_2(x,y)Q_2] - \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial x}[h_1(x,y)Q_1] - \\
&- \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial y}[h_2(x,y)Q_1] - \Delta_1^2 \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial x}[m_1(x,y)P] - \Delta_1^2 \Delta_2^2 \frac{\partial}{\partial y}[m_2(x,y)P] + \\
&+ \frac{1}{\tau_c^1} \frac{\partial(\eta_1 Q_{12})}{\partial \eta_1} + \frac{1}{\tau_c^2} \frac{\partial(\eta_2 Q_{12})}{\partial \eta_2} + D_1 \frac{\partial^2 Q_{12}}{\partial \eta_1^2} + D_2 \frac{\partial^2 Q_{12}}{\partial \eta_2^2}.
\end{aligned}$$

Для рассматриваемого двумерного случайно переключающегося потенциала вида

$$U(x,t) = \frac{1}{4} [(x - \xi_{DN}^1(t))^2 + (y - \xi_{DN}^2(t))^2]^2 \quad (\Gamma.57)$$

нелинейные функции в (Г.56) задаются следующим образом

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= -(x^3 + 3\Delta_1^2 x + xy^2 + \Delta_2^2 x), \\
g_1(x,y) &= 3x^2 + y^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2, \\
h_1(x,y) &= 2xy, \\
m_1(x,y) &= -2y, \\
f_2(x,y) &= -(y^3 + 3\Delta_2^2 y + yx^2 + \Delta_1^2 y), \\
g_2(x,y) &= 2xy, \\
h_2(x,y) &= 3y^2 + x^2 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2, \\
m_2(x,y) &= -2x.
\end{aligned}$$

## Приложение Д

### Нахождение нестационарного решения управляющего уравнения стохастической модели мемристора

Требуется найти нестационарное решение уравнения (3.25).

Рассмотрим сначала граничные условия (3.33) и запишем общее решение  $n_1(x,t)$  уравнения (3.25) как сумму двух членов

$$n_{st}(x,t) = n_{st}(x) + n_{nst}(x,t), \quad (\text{Д.1})$$

где  $n_{st}(x)$  – стационарная часть (3.36), удовлетворяющая граничным условиям (3.33),  $n_{nst}(x)$  – нестационарная часть с нулевыми граничными условиями

$$n_{nst}(0,t) = n_{nst}(L,t) = 0.$$

Рассмотрим нестационарную часть как функцию с разделяющимися переменными

$$n_{nst}(x,t) = T(t)S(x) \quad (\text{Д.2})$$

и преобразуем уравнение (3.23) в следующем виде

$$S(x)\frac{dT(t)}{dt} = -T(t)v_{eff}\frac{dS(x)}{dx} + T(t)D_{eff}\frac{d^2S(x)}{dx^2}. \quad (\text{Д.3})$$

Группируя члены с пространственными и временными переменными, получим уравнения для функций  $S(x)$  и  $T(t)$

$$\frac{dT(t)}{dt} = CT(t), \quad (\text{Д.4})$$

$$\frac{d^2S(x)}{dx^2} - \frac{v_{eff}}{D_{eff}}\frac{dS(x)}{dx} - \frac{C}{D_{eff}}S(x) = 0, \quad (\text{Д.5})$$

где  $C$  – произвольная постоянная, которая должна быть отрицательной или равной нулю, чтобы сделать решение (Д.4) ограниченным

$$T(t) = C_1e^{Ct}. \quad (\text{Д.6})$$

Линейное и однородное уравнение (Д.5) имеет два характеристических корня  $\lambda_{1,2}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{eff}}{D_{eff}}\right)^2 + 4\frac{C}{D_{eff}}} \right). \quad (\text{Д.7})$$

Поскольку константа  $C$  отрицательна или равна нулю, то характеристические корни  $\lambda_{1,2}$  могут быть как действительными, так и комплексными. Для вещественных корней  $\lambda_{1,2}$

решения уравнения (Д.5) имеют вид

$$S(x) = C_2 \exp \left[ \frac{x}{2} \left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} + \sqrt{\left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} \right)^2 + 4 \frac{C}{D_{eff}}} \right) \right] + C_3 \exp \left[ \frac{x}{2} \left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} - \sqrt{\left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} \right)^2 + 4 \frac{C}{D_{eff}}} \right) \right], \quad C < 0 \quad (\text{Д.8})$$

$$S(x) = C_4 + C_5 \exp \left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} x \right), \quad C = 0.$$

Однако в этом случае, согласно граничным условиям  $S(0) = S(L) = 0$ , все произвольные константы  $C_2, C_3, C_4, C_5$  равны нулю. Таким образом, константа  $C$  должна выбираться таким образом, чтобы характеристические корни  $\lambda_{1,2}$  были комплексными

$$\lambda_{1,2} = a \pm ib, \quad (\text{Д.9})$$

где

$$a = \frac{v_{eff}}{2D_{eff}}, \quad (\text{Д.10})$$

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{-\left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} \right)^2 - 4 \frac{C}{D_{eff}}}. \quad (\text{Д.11})$$

и, поскольку решение  $S(x)$  должно быть действительным,  $C_3 = C_2^*$  для комплексных коэффициентов  $C_2$  и  $C_3$  уравнения (Д.8). При таком выборе констант  $C, C_2, C_3$  получаем следующее решение уравнения (Д.5)

$$S(x) = e^{ax} \left[ \hat{C}_2 \sin(bx) + \hat{C}_3 \cos(bx) \right], \quad (\text{Д.12})$$

где  $\hat{C}_2$  и  $\hat{C}_3$  – новые действительные константы. Наконец, используя граничные условия

$$S(0) = \hat{C}_3 = 0, \quad S(L) = \hat{C}_2 \sin(bL) = 0, \quad (\text{Д.13})$$

можно найти уравнение для константы  $C$

$$\frac{L}{2} \sqrt{-\left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} \right)^2 - 4 \frac{C}{D_{eff}}} = \pi n. \quad (\text{Д.14})$$

Поэтому набор возможных значений константы  $C$  будет следующим

$$C(n) = \frac{D_{eff}}{4} \left( -\frac{4(\pi n)^2}{L^2} - \left( \frac{v_{eff}}{D_{eff}} \right)^2 \right) < 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Д.15})$$

В результате нестационарное решение может быть записано следующим образом

$$n_{nst}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n) e^{C(n)t} e^{ax} \hat{C}_2(n) \sin \left( \frac{\pi n x}{L} \right). \quad (\text{Д.16})$$

Обозначив произведение  $C_1(n)$  и  $\hat{C}_2(n)$  как новую константу  $C_0(n)$ , окончательно получим

$$n_{nst}(x,t) = \exp\left(\frac{v_{eff}x}{2D_{eff}}\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_0(n) \exp[C(n)t] \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right), \quad (\text{Д.17})$$

где множество произвольных констант  $C_0(n)$  определяется начальными условиями

$$C_0(n) = \frac{2}{L} \int_0^L \exp\left(-\frac{v_{eff}x}{2D_{eff}}\right) n_{nst}(x,0) \sin\left(\frac{\pi nx}{L}\right) dx. \quad (\text{Д.18})$$